

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

9/95

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET :
**ETUDE DE LA REPONSE DYNAMIQUE DES
STRUCTURES SOUS SOLLICITATIONS D'ORIGINE
SISMIQUE EN CONSIDERANT
L'INTERACTION SOL-STRUCTURE**

Proposé et dirigé par :
M. ZEGHLACHE

Etudié par :
M. M. EL.RICH
M. K. MOUAFKI

PROMOTION
1994 - 1995

E.N.P 10 , Avenue Hacene Badi EL-HARRACH - Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET :
**ETUDE DE LA REPONSE DYNAMIQUE DES
STRUCTURES SOUS SOLLICITATIONS D'ORIGINE
SISMIQUE EN CONSIDERANT
L'INTERACTION SOL-STRUCTURE**

Proposé et dirigé par :

M. ZEGHLACHE

Etudié par :

M. M. EL.RICH

M. K. MOUAFKI

PROMOTION

1994 - 1995

E.N.P 10 , Avenue Hacene Badi EL-HARRACH - Alger

إهداء:

أهدي نسخة عملي المتواضع هذا:

إلى نور عيناوي، إلى نبض فؤادي وشمس دربي:

والدي الكرّيمين.

أدبهما الله تاجاً فوق رأسي.

إلى إخوتي الأحياء:

نجلاء، ندى، صفوان وسامر.

إلى مستي وجدّي الأعزاء.

إلى وطني الحبيب: سوريا.

إلى وطني الثاني الذي إنتهلت فيه العلم والمعرفة:

الجزائر.

إلى من سرت بمشاركته في هذا الإنجاز: كمال.

إلى كلّ الأصدقاء، خاصّة:

الخلع وسيد، سليم وخير الدين وأحمد.

والصديقات خاصّة:

سكينة، ميرة، حسينة وسعاد.

إلى كلّ زملائي المتخرجين في دفعة 1995 (1995).

إلى كلّ من أكنّ لهم محبة ومودة من أقرّبا وأصدقاء.

مروان.

إهداء

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

أهدي هذا العمل المتواضع إليك:
والدي العزيز كعديون محبة وعرفان لمساندته
المادية والمعنوية، طوال مشواري الدراسي.
قرة عيني، أمي العزيزة وأخي أحمد.
إخوتي، أخواتي وكل أفراد عائلتي.
رفيق المشوار أخي مروان.
وسيد، سليم، خير الدين، محمد، رضوان، سعاد وحسينة.
وإلى كل من بيني وبينهم ودّ ومحبة.

كمال

Remerciements

Ce travail a été effectué au niveau du département de GENIE-CIVIL à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

Tout d'abord, nous tenons à remercier Mr B. ZEGHLACHE maître assistant à l'E. N. P. d'avoir suivi le déroulement de notre travail avec un très grand soin.

Nous lui sommes profondément reconnaissants pour l'aide qu'il nous a portée et pour les précieux conseils qu'il nous a prodigués.

Nous tenons à remercier notre professeur Mr K. SILHADI pour ces encouragements durant la période de notre travail.

Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à Messieurs L. YAHY Ingénieur Informaticien au Centre de Calcul, et S. BOUZIANE poste graduant pour leur disponibilité permanente et tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin pour réaliser ce travail.

يرمي عملنا هذا إلى دراسة التجاوب الديناميكي للمنشآت مع الاضطرابات الناتجة عن حركة الزلزال، آخذين بعين الإعتبار ظاهرة التأثير المتبادل بين المنشأة والتربة.

RESUME:

NOTRE TRAVAIL VISE A ETUDIER LA REPONSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES SOLICITEES PAR DES ACTIONS D'ORIGINE SISMIQUE, EN TENANT COMPTE DES EFFETS D'INTERACTION ENTRE LE SOL ET LA STRUCTURE.

SUMMARY:

THE PRESENT PROJECT CONSISTS IN THE DEVELOPPMENT OF THE DYNAMIC REPONSE OF STRUCTURE SUBJECT TO SEISMIC EXCITATION.

A FEW NUMERICAL EXAMPLES OF SOIL - STRUCTURE INTERACTION ARE STUDIED.

Sommaire

INTRODUCTION..... Erreur! Signet non défini.

CHAPITRE I GENERALITES SUR LE MOUVEMENT SISMIQUE

I.1- INTRODUCTION :	4
I.2- TYPES D'ONDES :	8
I.2.1- ONDES DE VOLUME :	8
I.2.2- ONDES DE SURFACE :	8
I.2.3- RECAPITULATIF :	9

CHAPITRE II DYNAMIQUE DES STRUCTURES

II.1 - INTRODUCTION :	10
II.2-- FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT :	12
II.2.1 - SYSTEME A 1 D.D.L (S.D.O.F.S) :	12
II.2.1.1- Composants du modèle dynamique élémentaire:	12
II.2.1.2- Méthodes de formulation :	12
1- Principe d'ALEMBERT :	12
2- Application du principe des travaux virtuels :	13
3- Application du principe de HAMILTON :	13
OSCILLATIONS LIBRES :	14
RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT :	14
Oscillations non amorties :	14
OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES :	15
CHARGEMENT HARMONIQUE :	16
- SYSTEME NON AMORTI :	16
II.2.1.3- Influence d'une excitation d'appui :	20
II.2.2 SYSTEME A PLUSIEURS D.D.L (M.D.O.F.S) :	20
A/ Définition :	20
B/ Construction des matrices :	21
B-1/ Matrice de rigidité [K] :	21
B-2/ Matrice des masses ou d'inertie [M] :	22
B-3/ Matrice d'amortissement [C]:	23
C/ Formulation des equations de mouvement:	24

CHAPITRE III METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

III.1- ETUDE DE LA REPOSE DANS LE DOMAINE DU TEMPS :	25
III.1.1- METHODE DE SUPERPOSITION DES MODES.	25
III.1.1.1- METHODES DE CALCUL DES VALEURS PROPRES :	32
III.1.2- METHODES D'INTEGRATION DIRECTE :	37
III.2 - ETUDE DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES :	43

CHAPITRE IV DYNAMIQUE DES SOLS

IV.1 - RAPPEL SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE DES SOLS :	47
IV.1.1 - INTRODUCTION :	47
IV.1.2- LA LOI DU COMPORTEMENT :	47
IV.2 - COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES SOLS :	48
IV.2.1- INTRODUCTION :	48
IV.2.2- L'AMORTISSEMENT DANS LE SOL :	50
IV.3 LES DIFFERENTS MODELES DYNAMIQUES :	51
IV.3.1 - MODELE VISCOELASTIQUE LINEAIRE :	53
IV.3.2 - MODELE VISCOELASTIQUE LINEAIRE EQUIVALENT:	54
IV.4 - MODELISATION DU SOL	55

CHAPITRE V INTERACTION SOL -STRUCTURE

V.1-INTRODUCTION :	58
V.2- METHODES DE PRISE EN COMPTE DE L'INTERACTION SOL-STRUCTURE :	59
V.2.1- METHODES GLOBALES :	59
V.2.2- METHODES HYBRIDES :	59
V.2.3- METHODE DE SOUS-STRUCTURES :	59
<i>V.2.3.1- Méthodes de frontière :</i>	60
<i>V.2.3.2- Méthode des volumes :</i>	61
V.3- L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION :	73
V.3.1- DEFINITION :	73
V.3.2- IMPEDANCE D'UN OSCILLATEUR SIMPLE A 1 D.D.L :	73
V.3.3 - FORME GENERALE DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION:	74
V.3.4 - ANALOGIE ENTRE LE SEMI ESPACE ET L'OSCILLATEUR SIMPLE :	75
V.3.5- APPLICATION DES FACTEURS D'IMPEDANCE DANS L'ETUDE DES VIBRATIONS D'UN MASSIF DE FONDATION :	76
V.3.6- FONCTION D'IMPEDANCE RAMENEES AU CENTRE DE GRAVITE DE LA FONDATION :	79
V.3.7 - FONCTIONS D'IMPEDANCE INDEPENDANTES DE LA FREQUENCE :	80

CHAPITRE VI ETUDE D'UNE STRUCTURE A 1, D D L

CHAPITRE VII ETUDE D'UNE STRUCTURE A PLUSIEURS DDL

CHAPITRE VIII MODELE SIMPLIFIE

CHAPITRE IX PROGRAMMATION

conclusion

bibliographie

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

INTRODUCTION

La prise en compte du risque sismique dans la conception des ouvrages importants comme les réservoirs, les barrages et les centrales nucléaires a contribué au développement rapide d'une science récente. Le génie parasismique sous ce vocable se trouvant regroupées les disciplines diverses que sont la sismologie, la dynamique des sols, la dynamique des structures, instrumentation sismiques.

Lors de l'analyse de la réponse des structures aux excitations dynamiques souvent on considère que le mouvement de la base de la structure est le même avec celui de la surface de terrain au cas où la construction n'existait pas.

Cette hypothèse justifiée seulement pour les structures emplacements dans un terrain rigide. Pour les structures emplacements sur un terrain mou, le mouvement de la fondation est généralement différent de celui de la surface libre et peut inclure une importante composante de rotation à côté de la composante de déplacement latéral ou de translation la composante de rotation peut être très importante pour les structures élancées.

L'interaction sol- structure peut être définie par la distorsion du mouvement de la surface libre en présence de la structure.

Il est bien connu que dans ce cas, le mouvement sismique d'entrée et la réponse de structure sont couplées par la géométrie de la fondation et par les propriétés du sol.

Les effets de l'interaction peuvent être observés par les aspects suivants :

- Une altération des fréquences propres de la structure emplacements sur un terrain rigide et l'amortissement radiatif du terrain de fondation.

L'effet général peut être une atténuation ou une amplification de la réponse d'une structure sur un terrain rigide. L'atténuation et l'amplification dépend des propriétés structurales, des propriétés du sol et des caractéristiques de l'excitation sismique.

la prise en compte de l'interaction sol-structure dans l'analyse du comportement dynamique de la fondation constitue une façon rationnelle et réaliste pour la modélisation de l'influence du sol sur le mouvement vibratoire de la fondation.

La détermination de la réponse de la fondation devient de ce fait un problème de propagation d'ondes dont la solution est assez complexe.

A cause de cette complexité la plupart des méthodes analytiques simplifient la géométrie en idéalisant le sol par un milieu homogène semi-infini et en se limitant uniquement aux fondations superficielles (de forme circulaire ou rectangulaire).

En pratique, le sol est formé de plusieurs couches et caractéristiques différentes. De plus, dans la plupart des cas, les fondations sont partiellement encastrées dans le sol, ce qui limite l'utilisation des méthodes analytiques. Par leur nature discrète, la méthode des éléments finis et celles des différences finies s'adaptent bien à la géométrie du problème et peuvent même englober le cas des fondations de forme arbitraire.

Le but de notre travail est la mise en évidence du phénomène d'interaction sol-structure par une comparaison des résultats obtenus pour une structure étudiée comme encastrée à sa base ainsi, l'influence de certains paramètres sur la réponse de la structure.

- Dans le chapitre I : nous introduisons les caractéristiques des mouvements sismiques, ainsi que les différents types d'ondes existantes.

- Dans le chapitre II : Nous avons mis l'accent sur les notions générales de la dynamique des structures du point de vue de la modélisation et de la formulation des équations pour des structures à un et à plusieurs degrés de liberté.

- La résolution des équations de mouvement que ce soit dans le domaine temporel ou fréquentiel en présentant les différentes méthodes est étudiée dans le chapitre III.

- Dans le chapitre IV, nous exposons les notions principales qui caractérisent le comportement statique et dynamique du sol, ainsi que les différents paramètres qui régissent ces comportements.
- Au cours du chapitre V, nous discutons du phénomène d'interaction sol-structure, des différentes méthodes de le prendre en compte en se limitant à la méthode de sous structure, nous insisterons aussi sur l'influence de l'impédance du sol.
- Au cours du chapitre VI, nous formulons le problème d'interaction pour les structures à un seul degré de liberté, ainsi qu'aux structures à plusieurs degrés de liberté dans le chapitre VII.
- Dans le chapitre VIII, nous proposons un modèle simplifié qui permet et remplacer un système à plusieurs D.D.L par un système à 1 seul d.d.l en faisant apparaître quelques transformations.
- Dans le chapitre IX, nous citons les différents organigrammes suivis lors de résolution du problème (la détermination de la réponse dans les différents cas étudiés)

Chapitre I

Généralités sur le Mouvement Sismique

I.1- INTRODUCTION :

l'ingénieur du génie parasismique doit essayer de résoudre le problème de la construction des ouvrages que pourraient résister, dans une certaine marge admissible de risque, à des secousses sismiques probables. Ceci ne peut pas se faire sans une bonne connaissance des caractéristiques du mouvement sismique et une meilleure estimation du maximum probable du mouvement sismique et son avènement dans le temps et l'espace, même s'il dispose d'outils puissants que sont les nouvelles méthodes de l'évaluation de la réponse sismique du sol. Or certains facteurs ont participé à creuser un fossé qui sépare le progrès des calculs parasismiques et le retard des recherches sismologiques qui n'ont pas pu encore bien répondre aux exigences des méthodes de calcul. Ceci est dû à la complexité du phénomène sismique qui est l'origine des difficultés de la recherche sismologique surtout quand au temps et moyens importants qu'elle exige. Il manque aussi une liaison suffisante entre l'ingénieur du génie sismique et le sismologue qui n'abordent pas les problèmes avec la même vision. L'ingénieur a besoin des informations directement traitables par des calculs tandis que la vision du sismologue peut parfois se rapprocher d'avantage de la curiosité scientifique en recherchant des données seront probablement utiles dans un avenir plus au moins proche.

- L'origine des séismes :

Les caractéristiques des vibrations sismiques du sol largement influencés par les mécanismes de génération des séismes (facteurs de source) qui varient d'une région sismique à une autre avec la théorie des plaques et de la dérive des continents, les mécanismes s'éclaircissent de plus en plus, même s'il reste beaucoup de progrès à faire dans ce domaine. La plus part des séismes superficiels de magnitude plus grande que 5.0 sont liés à des ruptures de failles superficielles tant il reste des doutes sur l'origine des séismes profonds. En effet, il est peu vraisemblable que des failles géologiques puissent exister au dessus de profondeur de l'ordre de quelques centaines de kilomètres vu les températures et les contraintes très élevées qui y règnent mais ces séismes ne représentent pas beaucoup d'intérêt pour l'ingénieur du génie parasismique qui s'intéresse plutôt aux fortes secousses.

- Foyer et épicentre :

Par définition, le foyer ou hypocentre est le point au sein de la croûte terrestre ou d'après les calculs basés sur les ondes sismiques captés la rupture de la faille est initiée, l'épicentre est la projection de ce point à la surface de la terre.

- Intensité macroséismique :

L'intensité est une mesure subjective des effets de seisme qui reflète au niveau des secousses constatées sur place.

Durant des années, différentes échelles ont été utilisées notamment celles proposées par MERCALLI ROSSI et FOREL, Medvedev et Spouhemer. L'échelle de MERCALLI modifiée (M.M) a été surtout utilisée aux Etats Unis l'échelle MSK 1964 (MEDEVEDEV et SPONHEMER, 1969) a elle été utilisée en Europe. D'ailleurs ces deux échelles, ainsi que l'échelle macroséismique internationale sont très proches. Elles comportent douze degrés, numérotés de I à XII, le degré I, correspond à des secousses non perceptibles par l'homme, le degré XII au maximum concevable (les dégâts sont irréparables)

- La magnitude :

La magnitude M est un paramètre introduit pour représenter l'énergie libérée par le seisme sous la forme d'ondes sismiques, indépendamment du lieu d'observation. La définition de la magnitude a été introduite par RICHTER en 1935, et depuis reprise par un certain nombre d'auteurs avec quelques nuances (MIYAMA S. 1978).

C'est seulement après 1950 que le concept de la magnitude a été reconnu, les magnitudes des séismes antérieurs n'ont pas été calculées sur le champ, mais c'est plus tard qu'ont été entreprises des études de réévaluation des magnitudes de ces séismes pour l'évaluation des risques sismiques.

L'expression mathématique de la magnitude peut s'écrire $M = \log_{10} A / A_0$
 On A, c'est l'amplitude maximale enregistrée par un sismographe standard (WOOD-ANDERSON) avec une période de 0,8 secondes, à la distance de 100 Km, et A₀ est celle d'un séisme standard choisi préalablement

- L'accélérogramme du séisme :

La variation de l'accélération du séisme dans le temps ainsi obtenue corrigée et traitée s'appelle l'accélérogramme du séisme et servira de base pour les calculs sismiques.

Les vibrations sismiques du sol sont bidirectionnelles, deux composantes horizontales et une composante verticale, même si à cause des limitations dues aux méthodes de calcul on a leur coût ou envisage généralement qu'une ou deux composantes.

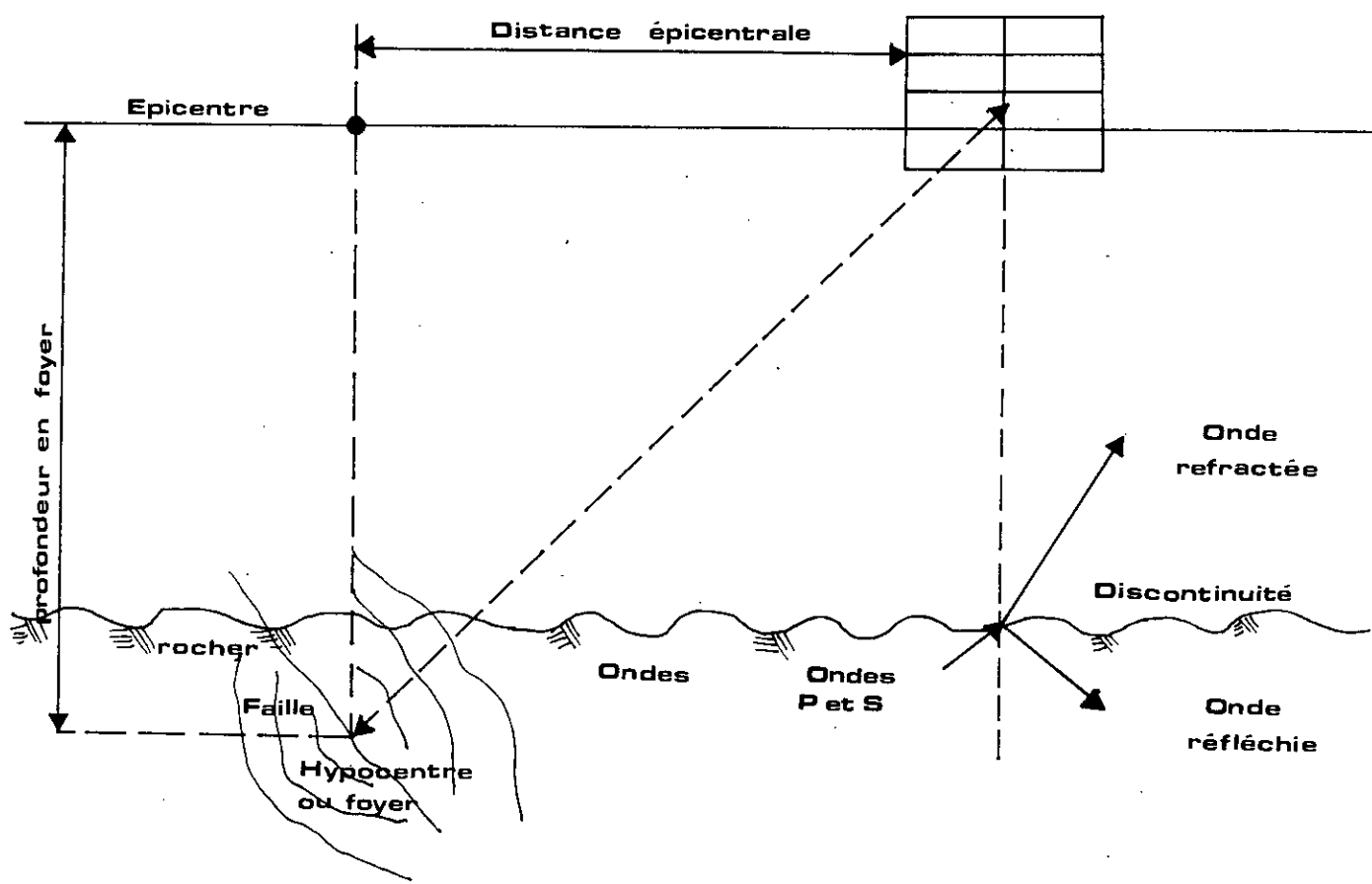
Pour la plupart des séismes, l'accélération verticale est de l'ordre de un tiers ou deux tiers de l'accélération horizontale et comporte des fréquences plus élevées, HOUSNER (1970), IDRIS (1978). L'accélération verticale est donc plus atténuée avec la distance et ainsi, elle est plus sensible aux erreurs dues aux appareils d'enregistrement et aux procédures de traitement des enregistrements d'autre part, les accélérations maximales verticales et horizontales se produisent rarement au même moment en plus, l'accélération verticale est beaucoup moins nuisible à la stabilité des structures que l'accélération horizontale, ce qui fait que dans la plupart des calculs sismiques, l'effet de l'accélération verticale a été généralement passé sous silence.

- Le spectre de réponse :

Au départ le concept de spectre de réponse est introduit en génie sismique (BENIOFF 1934, Housner 1941) pour avoir une idée plus claire de l'effet du séisme sur les structures et une certaine visualisation des différentes fréquences et des différentes prises de l'accélérogramme le mode de présentation du mouvement sismique étant plus parlant pour l'ingénieur qu'un signal temporel direct, il a été depuis largement utilisé dans les études sismiques.

Le spectre de réponse associé à un accélérogramme s'obtient en traçant la courbe de réponse maximale de différents oscillateurs simples soumis aux vibrations de celui-ci les oscillateurs simples auront tous même taux d'amortissement, mais des périodes naturelles croissantes.

La réponse de l'oscillateur simple peut être représentée en terme d'accélération absolue de vitesse relative ou de déplacement relatif ce qui donnera les spectres de réponse maximale correspondants.



I.2- TYPES D'ONDES :

I.2.1- ONDES DE VOLUME :

Elles prennent naissance dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre sous forme de :

1- Ondes "P" ou ondes longitudinales :

Elle se propage avec une vitesse de 7/8km/sec et s'accompagnent d'un changement de volume (compression et dilatation).

2- Ondes "S" ondes transversales :

Se déplacent avec une vitesse de 4 à 5 km/sec et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de la propagation que provoque un cisaillement sous changement de volume.

I.2.2- ONDES DE SURFACE :

se sont la portion des ondes de volume qui arrivent à la surface libre du sol et on a :

1- Ondes de RAYLEIGH R :

se sont des ondes pour lesquels les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation qui entraînent des compressions et des cisaillements dans le sol.

2- Ondes de LOVE Q:

Elles offrent aux points du sol un déplacement dans le plan tangent à la surface perpendiculaire à la surface de propagation, elles engendrent des contraintes de cisaillement.

I.2.3- RECAPITULATIF :

La connaissance du champ incident est nécessaire sur la frontière ou a l'interface sol fondation ce champ fait l'apparition de différents modes de mouvements horizontales, vertical, pompage, torsion et pour cette raison l'enterrement de la fondation a pour objectif la diminution de ces mouvements d'ou les hautes fréquences seront plus filtrées que la profondeur de la fondation est plus grande.

Chapitre II

Dynamique des Structures

Dynamique des Structures

II.1 - INTRODUCTION :

La D.D.S à comme objectif l'analyse des contraintes et des déformations dans n'importe quel type de structures soumises à un changement dynamique arbitraire et on peut dire que la D.D.S est une extension de l'analyse des structures sollicitées par des changements statiques.

La dynamique est défini comme variation dans le temps, un changement dynamique est un changement qui varie en intensité, direction et position dans le temps, d'ou la réponse d'une structure à un changement dynamique est exprimée en termes de déplacements de celle ci.

Si la fréquence de l'excitation appliquée à la structure est inférieur à 1/3 de la fréquence propre fondamentale de la structure, les effets de l'inertie de la structure peuvent être négligés, et le problème est quasi-statique, donc le système d'équations linéaires $[KU = R]$ s'impose même si U et R varient lentement avec le temps.

Par contre si la fréquence devient plus importante, d'excitation l'inertie devient importante et elle ne peut pas être négligée. Dans ce cas la matrice masse qui représente la distribution continue de masse dans la structure représente l'inertie.

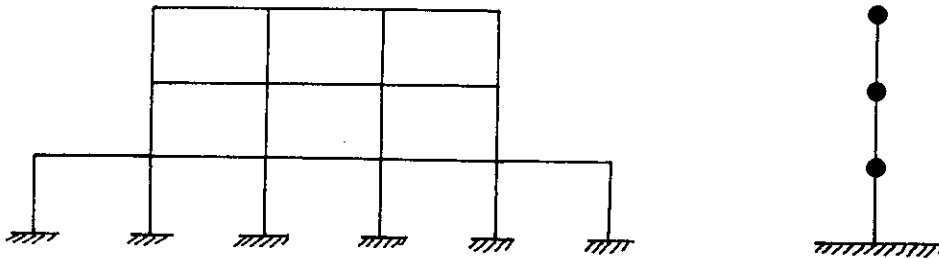
- MODELISATION DES STRUCTURES :

La détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à une secousse sismique. Si le calcul des masses et de leur position peut être effectué avec une bonne précision, par contre celui des raideurs est souvent très approché. En effet, dans le cas des constructions en béton armé les inerties des sections sont modifiées par la fissuration et il existe une imprecision sur la valeur des modules et des larguers des tables de compression. Par ailleurs quelque soit le type de structure il faut tenir compte de l'imprecision souvent très importante des données relatives au sol de fondation. Compte tenu de toutes ces imprecissions, il est donc inutile de détailler excessivement un modèle dans le seul but de restetuer la raideur de la structure, par contre il faut prévoir un nombre suffisant de masses concentrés ce qui dans la plupart des cas, donne la limite des simplifications admissibles par le moèle. Des règles simples déduites de considération sur la forme des modes excités par un seisme d'une direction

donnée, permettent le choix du nombre minimum des masses. On peut être ainsi conduit à établir des modèles différents selon les directions du seisme étudiée.

Pour les bâtiments courants ne présentant pas de dissymétries excessives on pourra donc étudier l'effet d'un seisme horizontal ou vertical à l'aide d'un modèle plan.

La structure est modélisée à l'aide de barres ou d'éléments finis reliant les noeuds entre eux.



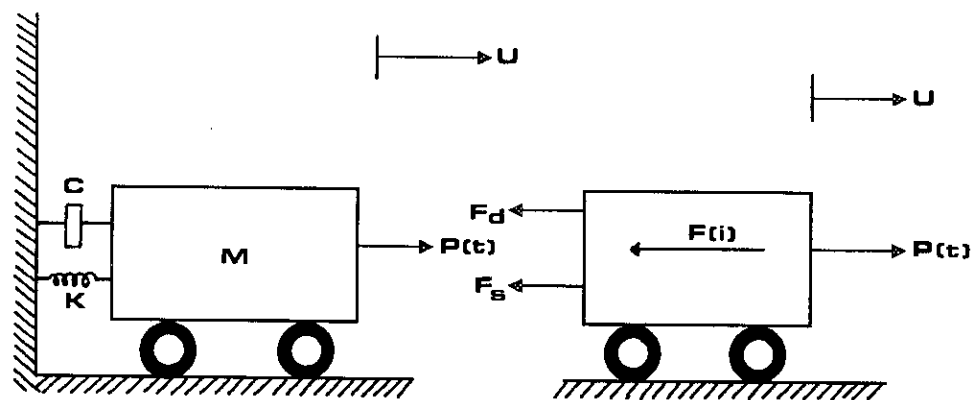
DISPOSITION DES NOEUDS .

II.2-- FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT :

II.2.1 - SYSTEME A 1 D.D.L (S.D.O.F.S) :

II.2.1.1- Composants du modèle dynamique élémentaire:

Les caractéristiques physiques essentielles de toute structure élastique linéaire soumise à des charges dynamiques sont: sa masse, ses propriétés élastiques (souplesse ou rigidité), son mécanisme de déperdition d'énergie, ou amortissement et la source extérieure d'excitation, ou chargement.



(Fig.N°1)

(A)
Composantes élémentaires

(B)
forces participant à l'équilibre

II.2.1.2- Méthodes de formulation :

1- Principe d'ALEMBERT :

les forces agissantes sur la masse :

- le chargement appliqué $p(t)$
- La force d'inertie F_i
- la force d'amortissement F_d
- la force de rappel du ressort élastiques F_s

l'équilibre de ces forces $F_i + F_d + F_s = p(t) \dots (a.1)$

$$F_s = K u, F_i = m \ddot{u}, F_d = c \dot{u}$$

$$(a.1) = m \ddot{u} + c \dot{u} + K u = p(t) \dots (a.2)$$

2- Application du principe des travaux virtuels :

Si on communique à cette masse un déplacement virtuel (δu) (le seul déplacement compatible avec les contraintes présentes), ces forces fournissent chacune un travail.

Le travail total effectué par le système peut s'écrire :

$$- F_i \delta u - F_d \delta u - F_s \delta u + p(t) \delta u = 0$$

(les signes (-) s'expliquent par le sens des forces agissantes donc on trouve :

$$[- m \ddot{u} - c \dot{u} - k u + p(t)] \delta u = 0$$

$$\text{comme } \delta u \neq 0 \implies m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t) \dots (b.1)$$

3- Application du principe de HAMILTON :

$$\text{Energie cinétique du système : } T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$$

$$\text{Energie potentielle du système : } U = \frac{1}{2} K u^2$$

Les forces non conservatives :

1- Force d'amortissement F_d

2 - La charge appliquée $p(t)$

La variation du travail effectué par ces forces

$$\delta W_{nc} = p(t) \delta u - C \dot{u} \delta u$$

donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m\dot{u} \delta\dot{u} - c\dot{u} \delta u - ku \delta u + p(t) \delta u \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{u} \delta\dot{u} dt = m\dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u} \delta u dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{u} \delta\dot{u} dt = m\dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u} \delta u dt \left(\delta\dot{U} = \frac{d\delta u}{dt} \right)$$

D'après l'une des hypothèses de HAMILTON :

La variation δu s'annule aux bornes d'intégration T_1 et T_2

$$\Rightarrow m\dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$\text{ce qui donne : } \int_{t_1}^{t_2} \left[-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + p(t) \right] \delta u dt = 0 \quad (\text{c.1})$$

et comme δu est arbitraire \implies (c.1) n'est satisfaite que lorsque :

$$-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + p(t) = 0 \implies m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

OSCILLATIONS LIBRES :

RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT :

$$M\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) = 0$$

Oscillations non amorties :

$$C = 0 \implies$$

$$V(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t} \quad (G_1, G_2 \text{ les amplitudes})$$

en utilisant l'équation d'EULER : $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin(\omega t)$

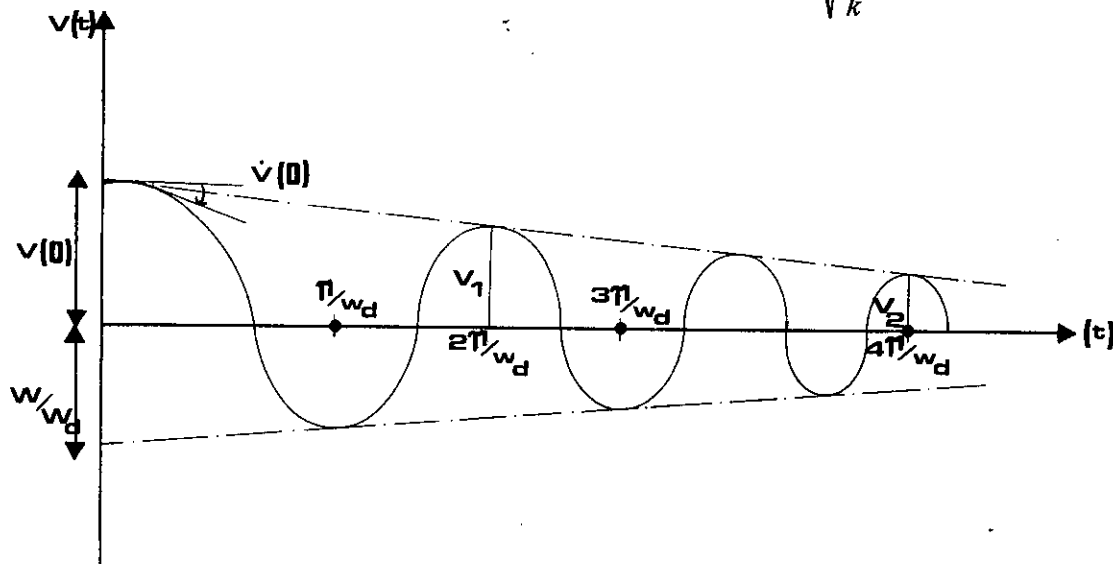
$$V(t) = v(0) / \omega \sin \omega t + v(0) \cos \omega t$$

Cette solution qui correspond à un mouvement harmonique simple est représentée comme suit:

ω : fréquence circulaire (pulsation) (rd/s)

$f = \omega / 2\pi$ fréquence cyclique (fréquence) (1/s)

l'inverse de f est la période $T = 2\pi / \omega = 1/f = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ (en seconde)



Reponse en oscillations libres sans amortissement

OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES :

3 cas sont envisagés:

- 1 er cas : AMORTISSEMENT CRITIQUE :

$$\omega = c/2m \Rightarrow c_{cn} = 2m\omega$$

$$v(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t}$$

En introduisant les conditions initiales, on obtient :

$$v(t) = [v(0) (1 + \omega t) + v(0)t] e^{-\omega t}$$

- 2 eme cas - SYSTEME SOUS AMORTIE :

si l'amortissement < amortissement critique $\implies c < 2m\omega$

soit $\xi = c/2m\omega < 1$ (ξ ; coefficient d'amortissement)

ω_d : Pseudo fréquence angulaire en oscillations amorties

la réponse d'un système sous amortie en oscillations libres :

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{j\omega_d t} + G_2 e^{-j\omega_d t})$$

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t)$$

En introduisant les conditions initiales :

$$V(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{v(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t + v(0) \cos \omega_d t \right]$$

- 3 eme cas - Systèmes suramorties :

dans ce cas $\xi > 1$, $c > 2m\omega$

$$\text{ou } \omega = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$V(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sinh \omega t + B \cosh \omega t)$$

A et B peuvent être déterminées au moyen des conditions initiales.

CHARGEMENT HARMONIQUE :

- SYSTEME NON AMORTI :

- Solution homogène :

Le système est soumis à un chargement harmonique $p(t)$ d'amplitude P_0 et de fréquence angulaire ω , l'équation différentielle du mouvement devient :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + k v(t) = P_0 \sin \omega t \dots(1)$$

$$m\ddot{v}(t) + k \dot{v}(t) = P_0 \sin \omega t \dots(2)$$

Solution homogène :

$$V_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \dots(3)$$

Solution particulière :

La réponse d'un chargement harmonique est harmonique en phase avec le chargement ainsi :

$$V_p(t) = G \sin \omega t \dots(4)$$

En substituant (4) dans (2) on obtient :

$$-m \omega^2 G \sin \omega t + k G \sin \omega t = P_0 \sin \omega t$$

Généralement $\sin \omega t \neq 0$

$$k/m = \omega^2$$

L'amplitude devient $G = (P_0/K) 1/(1-\beta^2)$ ($\beta = \omega/w$)

Solution générale :

$$V(t) = V_c(t) + V_p(t)$$

$$V(t) = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega t) \dots(5)$$

avec $v(0) = v'(0) = 0$

Système amorti :

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P_0 \sin \omega t$$

$$c/m = 2 \xi \omega \implies \ddot{v}(t) + 2 \xi \omega \dot{v}(t) + \omega^2 v(t) = P_0/m \sin \omega t \dots(6)$$

Solution homogène :

$$v_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega d t + B \cos \omega d t)$$

- Solution particulière :

$$V_p(t) = G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t$$

Les facteurs de réponse:

$$\begin{cases} G_1 = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ G_2 = \frac{P_0}{K} \cdot \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{cases}$$

Finalement :

$$v(t) = (A \sin \omega d t + B \cos \omega d t) e^{-\xi\omega t} + \frac{P_0}{K} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin \omega t - 2\xi\beta \cos \omega t]$$

l'amplitude:

$$\rho = \frac{P_0}{K} \cdot [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2] \dots (8)$$

- Facteur d'amplification dynamique :

Le rapport D de l'amplitude de la réponse en mvt permanent et du déplacement statique qui serait produit par la force P_0 s'appelle facteur d'amplification dynamique.

Il s'écrit :

$$D = \frac{\rho K}{P_0} = \sqrt{((1 - \beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2)}$$

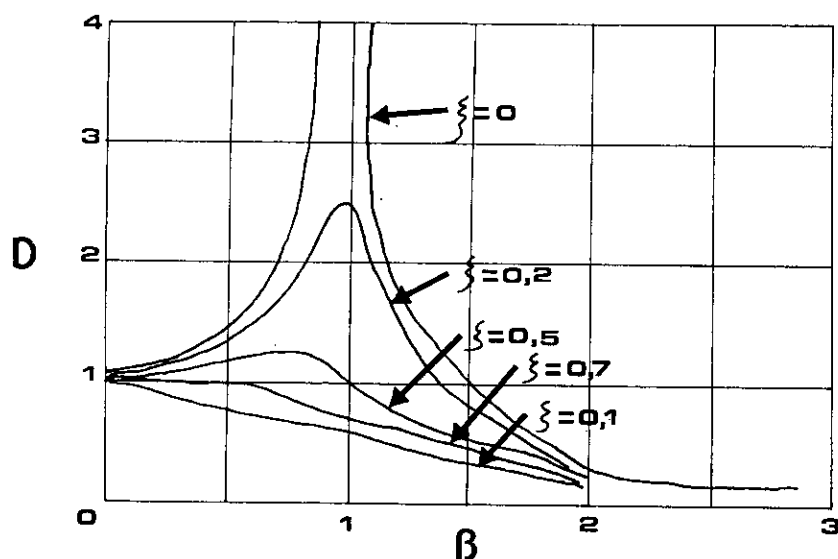
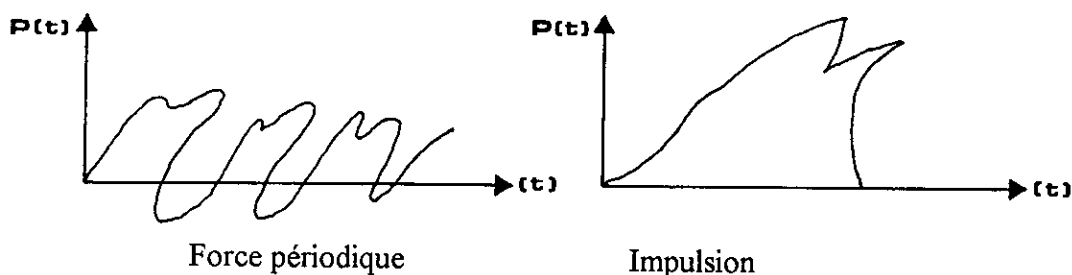


Fig 05 - Variation du facteur d'amplification dynamique en fonction de l'amortissement et de la fréquence .

- Cas général :

On considère une force $p(t)$ de forme quelconque, il peut s'agir d'une force périodique engendrée par une machine, ou d'une impulsion due à un choc.



La solution de l'eqt. du mvt est fournie par l'intégrale du DUHAMEL :

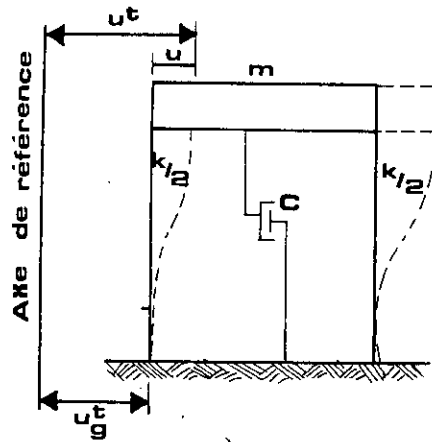
$$u(t) = \frac{1}{m\omega d} \cdot \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega d(t-\tau)] d\tau$$

Dans le cas d'un oscillateur non amorti, l'intégrale de DUHAMEL prend la forme :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \cdot \int_0^t p(\tau) \sin[\omega(t-\tau)] d\tau$$

II.2.1.3- Influence d'une excitation d'appui :

La poutre transversale du portique est supposée rigide, et elle contient toute la masse mobile de la structure .



a)

Mouvement du système

$$m\ddot{u}_t + c\dot{u} + ku = 0$$

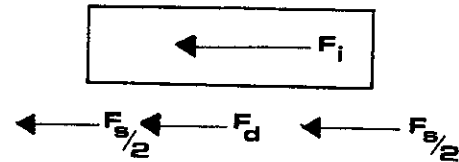
$$u_t = u + u_g ,$$

$$\Rightarrow m\ddot{u} + m\ddot{u}_g + c\dot{u} + ku = 0$$

Comme l'accélération du sol représente l'excitation dynamique donnée, l'équation du mouvement peut s'écrire:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) = P_{eff}(t)$$

$P_{eff}(t)$: le chargement effectif dû à l'excitation des appuis.



b)

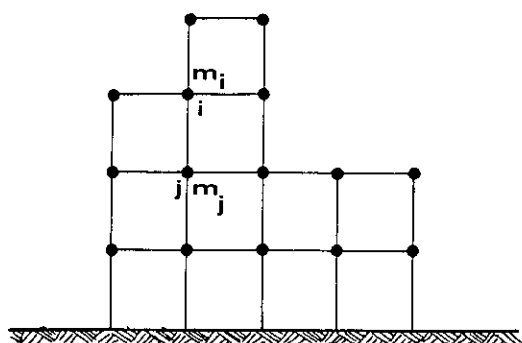
Forces participant à l'équilibre

II.2.2 SYSTEME A PLUSIEURS D.D.L (M.D.O.F.S) :

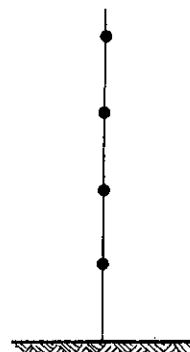
A/ Définition :

Une structure à plusieurs degrés de liberté (M.D.O.F) encastree à sa base est composée de plusieurs masses reliées entre elles et à une base fixe par des ressorts et amortisseurs.

Les structures ayant un comportement élastique et linéaire peuvent être modélisées à l'aide de barres ou éléments finis et comportant une masse associée à chacun des noeuds. les masses dans ce cas sont supposées concentrées par les noeuds.



Portique plan .



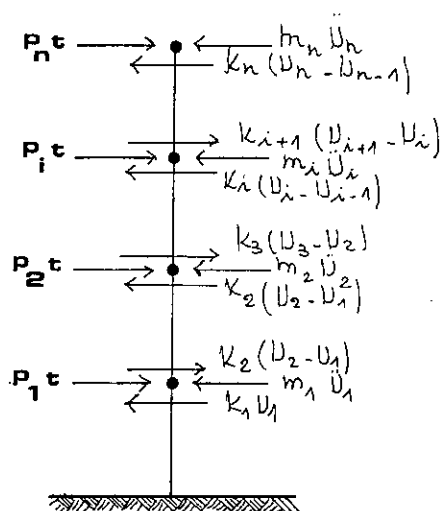
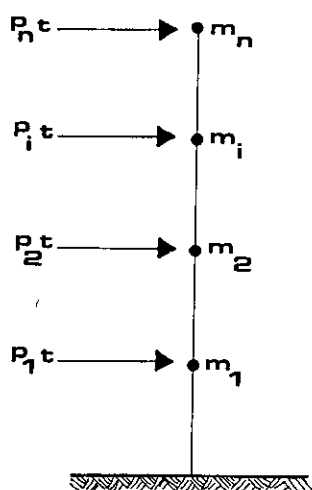
Console verticale .

B/ Construction des matrices :

Dans le cas d'un oscillateur multiple, l'équation de mouvement s'écrit sous une forme matricielle, mettant en évidence les matrices de masse, de rigidité, d'amortissement et les déplacements, les vitesses et les accélérations ainsi que la force perturbatrice seront écrits sous forme vectorielle.

B-1/ Matrice de rigidité [K] :

La matrice rigidité se détermine en considérant l'équilibre de forces pour chaque noeud du système considéré.



L'avantage de l'approche par concentration des masses est qu'elle simplifie les calculs numériques puisqu' en excluant les couplages entre les différents déplacements, elle diagonalise la matrice d'inertie qui prend la forme suivante

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \text{sym} & & & \\ & & & m_i & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

M_i : étant la masse concentrée relative au point d'application et à la direction du déplacement x .

B-3/ Matrice d'amortissement [C]:

Les structures peuvent présenter un amortissement substantiel quand elles sont assujetties à des chargements dynamiques, cependant l'évaluation de ce genre de phénomène reste à ce jour tout à fait vague et empirique et ne peut en aucun cas être qualifié avec certitude.

Généralement, on présente la matrice d'amortissement par :

$$C = a_0 M + a_1 K$$

M et K étant respectivement la matrice masse et la matrice rigidité.

(Rayleigh à montré qu'une matrice d'amortissement de la forme

$C = a_0 M + a_1 K$ ou a_0 et a_1 sont des coefficients arbitraires satisfait à la condition d'orthogonalité).

Les constantes a_0 et a_1 peuvent être reliées aux facteurs d'amortissement de n'importe quel mode J par :

$$\xi_j = \frac{a_0}{2w_j} + \frac{a_1 w_j}{2} \quad (b)$$

ξ_j : facteur d'amortissement du mode J.

w_j : fréquence angulaire propre au mode J.

Elle peut être déterminée par l'analyse d'oscillateur libre, d'après l'équation (b) on aura donc si on ne tient compte que des deux (2) premiers modes :

$$a_0 = 2w_1w_2(\xi_2w_1 - \xi_1w_2)/(w_1^2 - w_2^2)$$

$$a_1 = 2(\xi_1w_1 - \xi_2w_2)/(w_1^2 - w_2^2)$$

Ces facteurs d'amortissement sont généralement déterminés expérimentalement à l'aide des machines vibrantes sur des constructions existantes, pour illustrer cette remarque le tableau suivant donne les facteurs d'amortissements de quelques structures :

Types de construction	ξ
Portiques en B.A	2 à 15%
Murs porteurs et préfabriqués	5 à 20%
Structures métalliques	2 à 6%
Ponts métalliques	2 à 10%
Ponts en B.A	3 à 15%
Constructions massives	5 à 10%
Sols de fondation	5 à 40%

C/ Formulation des équations de mouvement:

Après développement des différentes matrices, l'équation du mouvement s'écrit :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\} \dots(1)$$

La relation (1) à un nombre d'équation égal au nombre de degrés de liberté de la structure .

Si la force excitatrice $p(t)$ est une action sismique donnée par son accélération $x''g$, alors l'équation (1) se transforme en un système d'équations dont l'écriture matricielle est la suivante:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{x''g\} = -[M] [B] x''g$$

ou [B] est un vecteur unitaire .

Chapitre III

Méthodes de Résolution
des
Equations de Mouvement
des
Equations de Mouvement

On peut dire que les méthodes de résolution se divisent en deux grandes catégories, la première se base sur les données du spectre de réponse, et la deuxième nécessite les données d'un accélérogramme, celle-ci consiste à étudier la réponse structurale selon le domaine suivant :

- Domaine des temps.
- Domaine des fréquences.

III.1- ETUDE DE LA REPONSE DANS LE DOMAINE DU TEMPS :

Cette étude se fait grâce à deux méthodes :

- Méthode de superposition des modes.
- Méthodes d'intégration directe.

III.1.1- METHODE DE SUPERPOSITION DES MODES.

Une structure classique idéal est dépourvue de tout amortissement de sorte qu'elle peut vibrer indéfiniment tant qu'il soit nécessaire de lui fournir de l'énergie.

ce comportement est purement théorique en raison de l'existence inévitable de Phénomène. Des frottements qui amortissent le mouvement toute fois ceux-ci sont très faciles de sorte que les vibrations libres peuvent subsister assez longtemps .

L'équation du mouvement d'un système se déplaçant librement sans amortissement s'écrit :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad \dots(1)$$

En admettant le mouvement oscillatoire harmonique, les solutions particulières peuvent s'écrire sous la forme.

$$x_n(t) = x_n \sin(\omega t + \theta) \quad \dots (2)$$

x_n : les modes de déformations possibles du système (seule leur amplitude varie avec le temps)

θ : est un angle de déphasage

ω : la fréquence de vibration

les accélérations en vibration libres

$$\ddot{x}_n = -\omega^2 x_n \sin(\omega t + \theta) \quad \dots(3)$$

En reportant ces deux dernières expressions dans la première équation, nous obtenons l'expression.

$$-\omega^2 M x_n \sin(\omega t + \theta) + K x_n \sin(\omega t + \theta) = 0$$

qui doit être vérifiée quelque soit t , donc pour toutes les valeurs de la fonction sinus, on a :

$$[K - \omega^2 M]\{x\} = 0 \quad \dots(4)$$

comme $\{x\}$ n'est généralement pas nul, la solution est donnée par

$$[K - \omega^2 M] = 0$$

cette équation est appelée l'équation aux fréquences du système.

Les N solutions $(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2)$

soit : $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$

Le mode correspondant à la fréquence la plus basse est appelé le premier mode, le second mode correspond à la fréquence suivante etc...

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

A chaque valeur propre correspond une forme d'oscillation l'ensemble des valeurs propres et des forme propres est appelée "Mode propre ou normal de variation" En remplaçant la pulsation propre dans le système (4) il s'en suit :

$$\begin{cases} (k_{11} - m_1 \omega_1^2)x_1 + k_{12}x_2 + \dots + k_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \dots + (k_{nn} - m_n \omega_n^2)x_n = 0 \end{cases}$$

Le mode propre $\{x_j\}^{(i)}$ ne peut être déterminé que sous forme de rapport de déplacement nodaux.

On doit se donner une des composantes $x_j^{(i)}$ pour trouver les autres déplacements. Les modes propres sont habituellement normalisée par rapport à la plus grande composante si $x_1^{(i)}$ est cette dernière on pose :

$$\phi_{k,i} = \frac{x_k^{(i)}}{x_1^{(i)}}$$

ou $\phi_{k,i}$, représente l'ordonnée du mode propre i. Si l'on choisit $x_1^{(i)}$, on obtient alors un système en $\phi_{k,i}$ de (n-1) équations dont la résolution donne la forme de la vibration propre correspondant à ω_i (on note que l'amplitude reste inconnue).

On trouve ainsi 2 matrices, la matrice spectrale donnée par :

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

et la matrice modale donnée par :

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

La détermination des fréquences et modes vibratoires d'une structure se réduit donc au problème de calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice. Les fréquences propres de vibration du système sont les racines carrées des valeurs propres, et les modes vibratoires correspondent aux vecteurs propres.

- CORDONNEES PRINCIPALES NORMALES :

Dans l'étude des systèmes quelconques à N degrés de liberté qui précèdent la déformée à un instant donné était défini par N composantes du vecteur V.

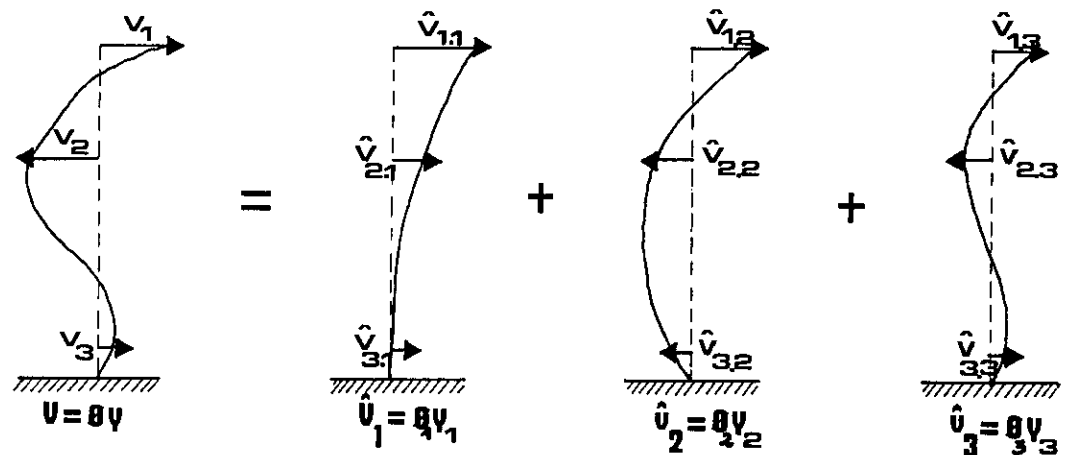
Dans le cas de systèmes linéaires, une représentation beaucoup plus utile est rendue possible car les modes de vibration libre.

Ces modes correspondent à N allures de déplacements indépendantes dont les amplitudes peuvent servir de coordonnées généralisées, dont les amplitudes peuvent servir de coordonnées généralisées pour représenter un déplacement quelconque. Les modes de vibration jouent le même rôle que les termes d'un développement en série de Fourier et ils présentent

les mêmes avantages orthogonalité et possibilité d'une représentation satisfaisante des déplacements à l'aide d'une approximation limitée à quelques termes seulement.

Prenons le cas de la poutre encastrée dont la déformée est définie par la mesure de trois flèches le long de son axe original, on peut représenter sur cette structure un vecteur déplacement

V quelconque en superposant les amplitudes convenablement déterminées des 3 modes de vibration, comme le montre la figure .



* représentation d'une déformée par une somme de composantes modales.

Pour chaque composante modale x_n , les déplacements sont données par le vecteur modal ϕ_n multiplié par l'amplitude modale Y_n

$$V_n = \phi_n Y_n$$

les déplacements sont la somme des composantes modales:

$$v = \phi_1 Y_1 + \phi_2 Y_2 + \phi_3 Y_3 + \dots + \phi_n Y_n = \sum_{n=1}^n \phi_n Y_n$$

soit en notation matricielle $v = \phi Y$... (a)

on voit que la matrice ϕ de cette équation permet de passer du vecteur Y des coordonnées généralisées au vecteur v des coordonnées géométriques.

Les amplitudes modales, ou coordonnées généralisées, sont appelées coordonnées principales (ou normales) de la structure.

Pour calculer une coordonnées principale Y_n , l'équation (a) peut être multipliée par le produit de la transposée du vecteur modal correspondant par la matrice de masse.

$$\phi_n^T M \dot{v} = \phi_n^T M \phi y$$

si on développe le second membre de cette équation on obtient :

$$\phi_n^T M \phi y = \phi_n^T M \phi_1 y_1 + \dots + \phi_n^T M \phi_n y_n \dots \dots \dots (b)$$

Tous les termes de cette somme s'annulent sauf, celui qui correspond à ϕ_n et ce en raison de la propriété d'orthogonalité des modes de vibration par rapport à la matrice masse. En conservant ce terme non nul dans le second membre de l'équation (b) on obtient :

$$\phi_n^T M \dot{v} = \phi_n^T M \phi_n Y_n$$

$$Y_n = \phi_n^T M \dot{v} / \phi_n^T M \phi_n$$

a chaque coordonnée principale, il correspond une expression de ce type soit $[\phi]^T$ l'ensemble des vecteurs propres on aura donc :

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I]$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = [\Omega] = [\omega_i^2] \text{ matrice diagonale}$$

$$[\phi]^T [C] [\phi] = [2 \omega_i \xi_i] = [\beta] \text{ matrice diagonale}$$

ω_i : fréquence propre de mode i

ξ_i : facteur d'amortissement du mode i .

pour cette étape on aura donc des équations découplées du mouvement l'équation du mouvement de chaque peut alors s'écrire de la manière suivante, en

mode

combinant la masse et les chargements généralisées du mode avec la fréquence angulaire propre (ou modale) ω_n et la valeur donnée du facteur d'amortissement modal on aura finalement :

$$\ddot{Y}_n + 2 \xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = P_n(t) / M_n$$

L'étape précédente conduit à un système de N équation de mouvement indépendantes correspondant chaque'une à un mode de vibration ces équations représentent autant de système à un degré de liberté et se résolvent par toute méthode convenant au type de chargement .

l'expression générale de la réponse est donnée par l'intégrale de DUHAMEL

$$y_n(t) = \frac{1}{M_n \omega_d} \int_0^t P_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau \quad \dots (c)$$

L'intégrale de DUHAMEL est applicable à un système qui est au repos à l'origine des temps (t=0). Si les vitesses et les déplacements initiaux ne sont pas nuls, une réponse en vibration libres doit être pour chaque mode à l'expression donnée par l'intégrale de DUHAMEL. L'expression la plus générale de la réponse en vibration libres amorties est donnée pour chaque mode par l'équation.

$$y_n(t) = e^{-\xi_n \omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_n(0) + y_n(0) \xi_n \omega_n}{\omega_{Dn}} \sin \omega_{Dn} t + y_n(0) \cos \omega_{Dn} t \right] \quad \dots (D)$$

$y_n(0)$ et $\dot{y}_n(0)$ représentent les déplacement et les vitesses initiaux pour chaque mode. Ils peuvent être obtenus pour chaque mode de la manière suivante, à partir des déplacements initiaux imposés $V(0)$ et des vitesses initiales $V'(0)$ exprimés dans les coordonnées géométriques de départ.

$$y_n(0) = \frac{\phi_n^T M V(0)}{M_n}; \dot{y}_n(0) = \frac{\phi_n^T M \dot{V}(0)}{M_n}$$

Une fois la réponse $Y_n(t)$ de chaque mode déterminée à partir des équations (C) et/ ou (D), les déplacements exprimés à l'aide des coordonnées géométriques peuvent être obtenus par la transformation en coordonnées principales .

$$V(t) = \phi Y(t).$$

$$V(t) = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \dots + \phi_n Y_n(t)$$

Ce qui représente simplement la superposition des contributions de chaque mode. On remarquera que dans la plupart des cas, les contributions des différents modes sont plus importantes pour les fréquences basses, et tendent à décroître pour les fréquences plus hautes. Il en résulte qu'il n'est généralement pas nécessaire d'inclure tous les modes de vibration à fréquences élevée dans la superposition.

III.1.1.1- METHODES DE CALCUL DES VALEURS PROPRES :

1- Méthode DE JACOBI:

Cette méthode a comme avantage de calculer les n valeurs et vecteurs propres, d'un système de dimensions limitées ($n < 100$) dont les matrices symétriques et définies positives.

La méthode consiste à transformer les matrices $[K]$ et $[M]$, en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives.

$$[K^1] = [K] \quad ; \quad [M^1] = [M]$$

$$[K^2] = [Q_1]^T [K^1] [Q_1] \quad ; \quad [M^2] = [Q_1]^T [M^1] [Q_1]$$

$$[K^{K+1}] = [Q_K]^T [K^K] [Q_K] \quad ; \quad [M^{K+1}] = [Q_K]^T [M^K] [Q_K]$$

avec : $[Q_K]$ = est une matrice orthogonale d'ou :

$$[Q_K]^T [Q_K] = [I]$$

les matrices $[K^{K+1}]$ et $[M^{K+1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$

quand K tend vers l'infini donc on a :

$$[\lambda] = [K^d] = [M^d]^{-1}$$

d'où les valeurs propres sont obtenues à partir des

$$\lambda_i = K_{ii}^d / M_{ii}^d$$

$$[\phi] = [Q_1][Q_2] \dots [Q_k][Q_{k+1}] \begin{bmatrix} \cdot & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}}} & \\ 0 & & \cdot \end{bmatrix}$$

la matrice orthogonale de transformation à la structure suivante :

$$[Q_k] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & \\ & b & & 1 \end{bmatrix}$$

Les coefficients a et b sont établis de telle manière que :

$$K_{ij}^{K+1} = M_{ij}^{K+1} = 0$$

on se ramène :

$$a K_{ii} + (1 + ab) K_{ij} + b k_{jj} = 0$$

$$a M_{ii} + (1 + ab) M_{ij} + b M_{jj} = 0$$

notant que :

$$K_{ii}/M_{ii} = K_{jj}/M_{jj} = K_{ij}/M_{ij}$$

les valeurs de a et b sont : $a = 0$, $b = -K_{ij}/K_{jj}$

dans le cas général on a :

$$C_1 = K_{ii} M_{ij} - M_{ii} K_{ij}$$

$$C_2 = K_{jj} M_{ij} - M_{jj} K_{ij}$$

$$C_3 = K_{ii} M_{jj} - M_{ii} K_{jj}$$

$$d = C_3/2 + \text{signe}(C_3) \sqrt{\left(\frac{C_3}{2}\right)^2 + C_1 C_2}$$

d'où $a = C_2/d$ et $b = -C_1/d$

2 - Methode de RAYLEIGH - RITZ :

L'avantage de cette methode est de passer d'un problème de valeurs propres de grandes dimensions en un problème de dimension plus réduite, par conséquent on peut calculer toutes les valeurs et vecteurs propres par la methode de JACOBI.

Le principe de la methode est de contraindre chaque vecteur propre de système $(K - \lambda M) \phi = 0$ à s'exprimer sous la forme d'une combinaison lineaire de vecteurs dits vecteurs de RITZ de telsorte que :

$$\{\phi\} = a_1 \{q_1\} + a_2 \{q_2\} + \dots + a_q \{q_q\}$$

avec :

a_i : coefficient de RITZ

q_i : vecteurs de RITZ

ϕ : vecteur propre lie au système reduit de dimension q

$$\{\phi\} = [Q]\{a\}$$

tout d'abord on doit chercher le quoteint de RAYLEIGH et de lui rendre stationnaire avec:

$$R(\{\phi_i\}) = \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} / \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}$$

$$R(\{a\}) = \{a\}^T [\bar{K}] \{a\} / \{a\}^T [\bar{M}] \{a\}$$

$$\text{avec : } [\bar{K}] = [Q]^T [K] [Q]$$

$$[\bar{M}] = [Q]^T [M] [Q]$$

Le principe de quotient de RAYLEIGH, minimum s'exprime par

$$\partial R(\phi) / \partial a_i = 0$$

sachant que :

$$R\{\phi\} = [\bar{K}] / [\bar{M}]$$

la condition de stationnarité s'écrit d'une manière générale

$$[\bar{K}] \{a\} = R [\bar{M}] \{a\}$$

avec :

$$\{a\} = [\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \dots, \{a_q\}]$$

cette condition fournit q valeurs propres, $R_1, R_2, R_3, \dots, R_q$

cette approximation de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q$ et q vecteurs propres :

$$\begin{cases} x_1^T = \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_q^1\} \\ \vdots \\ x_q^T = \{x_1^q, x_2^q, \dots, x_q^q\} \end{cases}$$

les vecteurs propres X_i sont utilisés pour déterminer les vecteurs $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$ qui sont des approximations des vecteurs propres $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$

$$\text{avec : } \bar{\phi}_i = \sum_{j=1}^q x_j^i q_j \quad i = 1, \dots, q$$

les valeurs propres exactes doivent vérifier

$$\lambda_1 \leq R_1, \dots, \lambda_q \leq R_q$$

de manière à obtenir rapidement les plus petites valeurs propres nous pouvons choisir comme vecteurs de RITZ les solutions de $[K] \{q_i\} = \{F_i\}$

ou $\{F_i\}$ sont des vecteurs unités qui sollicitent les degrés de liberté i correspondant aux plus petites valeurs de K_{ii}/M_{ii}

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{ligne } i$$

le système $[K] \{q_i\} = \{F_i\}$ donne la matrice des vecteurs de RITZ et on doit résoudre :

$$[\bar{K}] [\phi] = R [\bar{M}] [\phi]$$

tels que :

$[R]$: matrice diagonale des valeurs propres du système réduit

$[\phi]$: matrice des vecteurs propres du même système .

Les approximations des q premiers vecteurs propres sont :

$$[\bar{\phi}] = \{q\} [\phi]$$

3 - Methode du sous -espace :

cette methode est très largement utilisée pour calculer les p premiers valeurs propres d'un système de grande dimension elle consiste à appliquer plusieurs fois la methode de RITZ en améliorant les vecteurs par iteration inverse , la methode du sous espace enchaîne les opérations suivantes :

a- choisir p vecteurs initiaux:

$$[\phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_p\}]$$

b - exécuter une itération inverse, pour calculer simultanément les p vecteurs de RITZ $\{q_i\}$ en résolvant :

$$[K]\{q_i\} = [M]\{\phi_i\} = \{F_i\} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$[K][Q] = [M][Q]$$

c - appliquée la méthode de RITZ pour, chercher les vecteurs propres dans le sous espaces de RITZ

$$([\bar{K}] - \lambda_i [\bar{M}])\{A_i\} = 0$$

$$[\bar{K}] = [Q]^T [K] [Q]$$

$$[\bar{M}] = [Q]^T [M] [Q]$$

$$\{\phi_i\} = [Q]\{A_i\}$$

d- tester la convergence de λ_i et répéter si nécessaire les opérations b, c, d

III.1.2- METHODES D'INTEGRATION DIRECTE :

Elles donnent une solution approximative dans des points particuliers (déterminés) en supposant une allure de variation des déplacements, vitesses et accélérations connaissant les conditions initiales U_0, U'_0, U''_0 at $t=0$, on doit calculer la solution dans les points :

$$t = 0, \Delta t, 2 \Delta t, 3 \Delta t, \dots, T - \Delta t, T$$

$$\text{avec : } \Delta t = T/n \quad (T \text{ periode de vibration})$$

L'incrément Δt est nommé le pas.

1- Méthode de HOUBLLOT :

En utilisant les approximations au différences finies développées on aura :

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = 1/\Delta t^2 (2U_t + \Delta t \dot{U}_t - 5 U_t + 4 U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t})$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = 1/6\Delta t (11U_{t+\Delta t} - 18U_t + 9 U_{t-\Delta t} - 2U_{t-2\Delta t})$$

Donc l'équation du mouvement aura la forme suivante :

$$(2/\Delta t^2 M + 11/6\Delta t C + K)U_t + \Delta t = P_t + \Delta t + (5/\Delta t^2 M + 3/\Delta t C) U_t - (4/\Delta t^2 M + 3/2\Delta t C)U_{t-\Delta t} + (1/\Delta t^2 M + 1/3\Delta t C)U_{t-2\Delta t}$$

2- Méthode des différences centrales :

L'équation du mouvement est une équation différentielle, d'ou par approximation aux différences finies on obtient :

$$\ddot{U}_t = 1/\Delta t^2 (U_{t-\Delta t} - 2 U_t + U_{t+\Delta t})$$

$$\dot{U}_t = 1/2\Delta t^2 (U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t})$$

Donc on obtient:

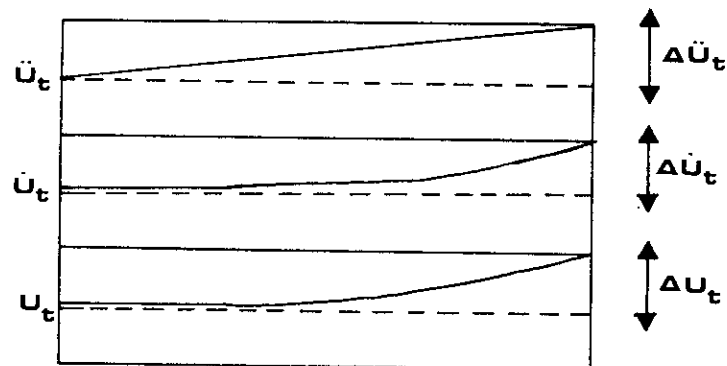
$$(1/\Delta t^2 M + C/2\Delta t) U_{t+\Delta t} = P_t - (K - 2/\Delta t^2 M)U_t - (1/\Delta t^2 M - 1/2\Delta t C)U_{t-\Delta t}$$

3 -Méthode de l'accélération linéaire :

Cette méthode se base sur deux hypothèses: la première est que l'accélération varie linéairement, et la deuxième est que les termes de rigidité K et d'amortissement C restent constant en tout point (pas) et on a:

$$\Delta \dot{U}(t) = \dot{U}(t) \Delta t + \Delta \ddot{U}(t) \Delta t/2$$

$$\Delta U(t) = \dot{U}(t) \Delta t + \ddot{U}(t) \Delta t^2/2 + \Delta \ddot{U}(t) \Delta t^2/2$$



donc :

$$\Delta \ddot{U}(t) = 6/\Delta t^2 \Delta U(t) - 6/\Delta t \dot{U}(t) - 3\ddot{U}(t)$$

$$\Delta \dot{U}(t) = 3/\Delta t \Delta U(t) - 3\dot{U}(t) - \Delta t/2 \ddot{U}(t)$$

Et pour chaque pas on a comme équation d'équilibre :

$$M\Delta \ddot{U}(t) + C(t) \Delta \dot{U}(t) + K(t) \Delta U(t) = \Delta P(t)$$

En se basant sur les équations précédentes on obtient :

$$\tilde{K}(t) \Delta U(t) = \tilde{\Delta P}(t)$$

$$\text{Avec : } \tilde{K}(t) = K(t) + 6/\Delta t^2 M + 3/\Delta t C(t)$$

$$\tilde{\Delta P}(t) = \Delta P(t) + M [6/\Delta t \ddot{U}(t) + 3 \ddot{U}(t)] + C(t) [3 \dot{U}(t) + \Delta t/2 \ddot{U}(t)]$$

Donc le travail à effectuer se fait en suivant les étapes suivantes :

a- détermination des matrices $C(t)$, $K(t)$ à partir des valeurs initiales des vecteurs vitesse et déplacement en intervenant les propriétés non linéaires de la structure.

b- Calculer le vecteur accélération initial à l'aide de la formule :

$$\ddot{U}(t) = M^{-1} [P(t) - C(t) \dot{U}(t) - K(t) U(t)]$$

c- Calculer l'incrément de charge $\Delta P(t)$ et la rigidité effective $K(t)$ à partir des équations définies ci-dessus .

d- Calculer l'incrément de vitesse à partir de l'équation :

$$\Delta \dot{U}(t) = \ddot{U}(t) \Delta t + \Delta \ddot{U}(t) \Delta t/2$$

e- Calculer les vecteurs vitesses et déplacement a chaque pas a partir de :

$$\dot{U}(t + \Delta t) = \dot{U}(t) + \Delta \dot{U}(t)$$

$$U(t + \Delta t) = U(t) + \Delta U(t)$$

4- METHODE DE NEWMARK :

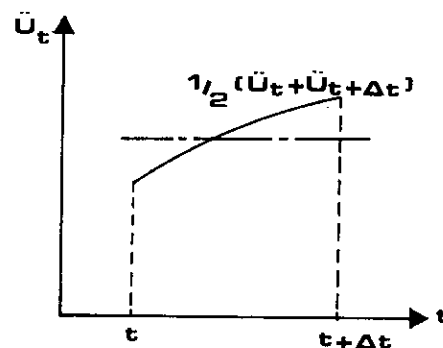
Elle se présente comme extension ou développement de la méthode de l'accélération linéaire dans cette méthode on utilise les développements suivants :

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}(t) + [(1-a) \ddot{U}_t + a \ddot{U}_{t+\Delta t}]$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \Delta t^2 / 2 [(1-b) \ddot{U}_t + b \ddot{U}_{t+\Delta t}]$$

avec a,b sont des coefficients réels se déterminant en faisant une analyse de stabilité de la méthode .

lorsque $a = b = 1/2$, on considère l'accélération moyenne sur un intervalle $[t, t+\Delta t]$



quand $a=1/2$ et $b=1/3$, on considère que l'accélération varie linéairement sur l'intervalle $[t, t+\Delta t]$

substituons $U_{t+\Delta t}$ et $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ dans l'équation du mouvement, on se ramène à la résolution du système d'équation linéaires :

$$K U_{t+\Delta t} = P_{t+\Delta t}$$

*** remarque :**

Dans notre étude, on se limite à la méthode de NEWMARK en raison de sa efficacité et sa facilité à la programmation :

A- CALCUL INITIAL :

- 1- formation ds matrices M, K et C.
- 2- Initialisation de U_0, U'_0, \ddot{U}_0 .
- 3- sélection du pas de temps Δt , des paramètres α et δ .
- 4- calculer des constantes d'intégration

$$\delta \geq 0,50, \alpha \geq 0,25 (0,5 + \delta)^2$$

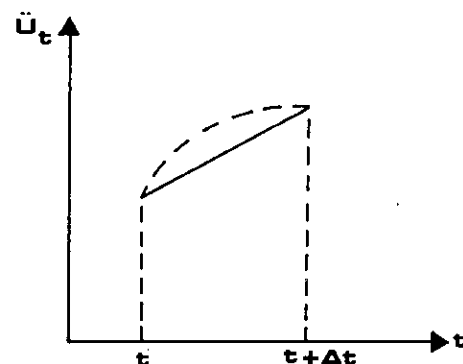
$$a_0 = 1/\alpha \Delta t^2, a_1 = \delta/\alpha \Delta t, a_2 = 1/\alpha \Delta t, a_3 = (1/2\alpha) - 1$$

$$a_4 = \delta/\alpha - 1, a_5 = \Delta t/2 (\delta/\alpha - 2), a_6 = \Delta t (1 - \delta), a_7 = \delta \Delta t$$

- 5 - formation de la matrice de raideur effective K

$$K = K + a_0 M + a_1 C$$

- 6- inversion de la matrice K.



B- CALCUL A EFFECTUER POUR CHAQUE INCREMENT DE TEMPS :

1- calcul du chargement effectif:

$$\hat{R}_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} + M (a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t) + C (a_1 U_t + a_4 \dot{U}_t + a_5 \ddot{U}_t)$$

2- calcul de déplacement à l'instant (t + Δt)

$$U_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} / \hat{R}_{t+\Delta t}$$

3- calcul des vitesses et des accélérations à l'instant (t + Δt):

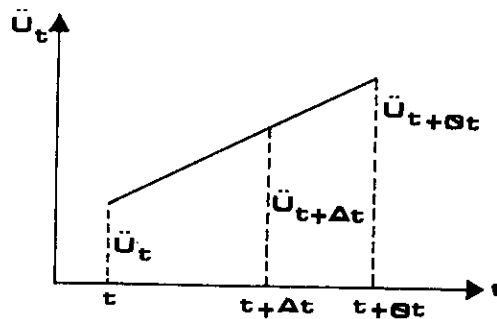
$$\dot{U}_{t+\Delta t} = a_0 (U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 \dot{U}_t - a_3 \ddot{U}_t$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t + a_7 \ddot{U}_{t+\Delta t}$$

4- METHODE DE θ WILSON :

Dans cette méthode qui est en réalité une extension de la méthode d'accélération linéaire, le pas d'intégration pour lequel la méthode converge est $\tau = \theta \cdot \Delta t$ ou $\theta > 1,37$.

La méthode de θ wilson suppose que l'accélération varie linéairement et le choix de $\theta > 1,37$ a été fait pour que la méthode soit stable.



d'après la figure ci dessus on a :

$$\ddot{U}_{t+\tau} = \ddot{U}_t + \tau / \theta \cdot \Delta t (\ddot{U}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{U}_t)$$

en integrant l'équation ci dessus on obtient :

$$\dot{U}_{t+\tau} = \dot{U}_t + \tau \ddot{U}_t + \tau^2 / 2 \theta \cdot \Delta t (\ddot{U}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{U}_t) \quad \text{et :}$$

$$U_{t+\theta \Delta t} = U_{t+\theta \Delta t} \cdot \dot{U}_t + \Delta t^2 \theta^2 / 6 (\ddot{U}_{t+\theta \Delta t} + 2 \ddot{U}_t)$$

d'ou :

$$\ddot{U}_{t+\theta \Delta t} = 6 / \theta^2 \Delta t^2 (U_{t+\Delta t} - U_t) - 6 / \theta \Delta t \dot{U}_t - 2 \ddot{U}_t$$

$$\ddot{U}_{t+\theta \Delta t} = 3 / \theta \Delta t (U_{t+\theta \Delta t} - U_t) - 2 \dot{U}_t - \theta \Delta t / 2 \ddot{U}_t$$

III.2 - ETUDE DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES :

III.2.1 - INTRODUCTION :

l'étude dans le domaine des temps est complètement générale et peut servir à déterminer la réponse de tout système linéaire soumis à une excitation, mais il est parfois plus commode d'effectuer l'étude dans le domaine des fréquences, la méthode consiste à :

- 1- exprimer le chargement appliqué au moyen des composants harmoniques.
- 2- calculer la réponse de la structure à chaque composante.
- 3- superposer enfin les réponses harmoniques pour obtenir la réponse totale.

III.2.2- EQUATION DE BASE DE L'ETUDE DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES :

Soit un chargement exprimé en fonction en série de fourier :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_1 t} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{avec : } c_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt \quad \dots\dots\dots(2)$$

et : $\omega_1 = 2\pi / T_p$, $1/T_p = \Delta\omega / 2\pi \implies C_n = \Delta\omega / 2\pi c(\omega_1)$

les équations (1) et (2) deviennent :

$$f(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} c(\omega_n) \cdot e^{i\omega_n t}$$

donc :

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \dots (3) \\ c(\omega) &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt \dots (4) \end{aligned} \right\} (5)$$

(5) représente les formules de réciprocity de fourier

$C(\omega)$: la fonction de l'amplitude harmonique.

l'équation du mouvement pour une force d'excitation $p(t)$ unité :

$$M\ddot{y}_j(t) + 2\xi \dot{y}_j(t) + ky_j(t) = p(t)$$

la solution en régime permanent est de la forme :

$$y_j(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$$

$H(\omega)$: fonction complexe de la réponse de fréquence avec :

$$H(\omega) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)} \quad \beta = \omega / \omega_0$$

l'équation de base dans le domaine des fréquences :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} H(\omega) c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$H(\varpi_1) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)} \quad , \beta_1 = \varpi_1 / \omega$$

pour appliquer cette méthode, il est nécessaire de calculer les composantes harmonique $c(\varpi)$ donnée au moyen de l'équation (4) et la fonction $H(\varpi_1)$.

III.2.3 - TRANSFORMEES DISCRETES DE FOURIER :

la première étape de l'obtention des expressions dans leur version dicretisée consiste à supposer que le chargement est périodique de période T_p .

Cela constituera une approximation dans le cas d'un chargement tout à fait quelconque mais c'est nécessaire pour remplacer l'intégrale sur intervalle de temps infini eq(4), par une somme finie .

Le choix de la période de chargement sert également à définir la fréquence la plus basse qui peut être considéré dans l'analyse :

$$\varpi_1 = \Delta\varpi = 2\pi / T_p$$

La période du chargement est alors divisée en N incréments de temps Δt , la charge est définie pour les instants $T_m = m \Delta t$.

on aura :

$$\exp(i\varpi n t_m) = \exp(in \Delta\varpi m \Delta t) = \exp(2\pi i (nm/N))$$

$$\text{et elle devient : } f(t_m) = \frac{\Delta\varpi}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} c(\varpi_n) \exp(2\pi i \frac{nm}{N})$$

ou la fréquence la plus élevée à considérer à été arbitrairement choisi égale à $(n-1) \Delta\varpi$

la fonction amplitude $c(\varpi_n)$ s'écrit :

$$c(\omega_n) = \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} p(t_m) \exp(-2\pi i \frac{nm}{N})$$

III.2.4 - TRANSFORMATION DE FOURIER DITE RAPIDE :

* Etablissement des formules de Calcul :

si on divise l'intervalle d'une période T_p en intervalle élémentaires $\Delta t = T_p/N_p$.

le chargement $f(t)$ est représenté par des points échantillonnés $t = K \cdot \Delta t$ et l'intégrale donnant les coefficients :

$$c_n = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} f(t) \exp(-in\omega_1 t) dt$$

peut se mettre sous la forme :

$$c_n = \frac{\Delta t}{T_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} f(k) \exp(-in\omega_1 k \Delta t)$$

ou encore :

$$c_n = \frac{1}{N_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} f(k) \exp(-i \cdot 2\pi nk / N_p)$$

On peut donc effectuer la transformation inverse, c'est à dire connaissant les coefficients C_n du chargement en déduit la fonction $F(t)$ on a :

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(-i \cdot 2\pi kn / N_p)$$

En supposant que l'on connaît les coefficients C_n de $C_{-N_p/2}$ à $C_{N_p/2}$ et que les autres peuvent être négligés, on peut écrire :

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N_p-1} c_n \exp(i \cdot 2\pi n \cdot k / N_p)$$

IV.1 - RAPPEL SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE DES SOLS :

IV.1.1 - INTRODUCTION :

l'étude statique des sols s'effectue à l'état d'équilibre qui est caractérisé par les tenseurs de contrainte σ_{ij} , et du déformation ϵ_{ij} .

La détermination du nouveau état de déformation après l'application d'un chargement s'effectue à l'aide de la loi du comportement du sol, cette loi qui sert à relier le tenseur σ_{ij} à celui de ϵ_{ij} , notons que la formulation de cette loi s'établit dans le cadre de :

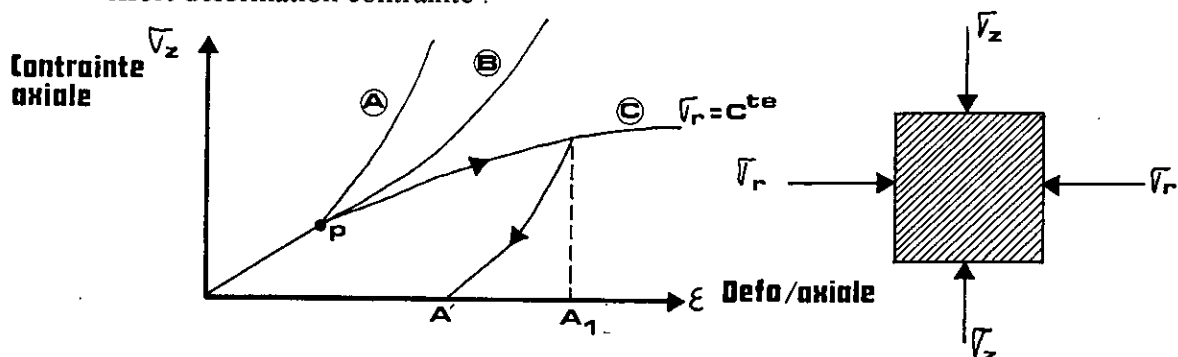
- l'élasticité.
- la viscoélasticité
- l'elasto-plasticité.

IV.1.2- LA LOI DU COMPORTEMENT :

Un essai sur un échantillon du sol soumis à un chemin de contraintes quelconque permet d'évaluer le comportement du sol, ce modèle doit être formulé en contraintes effectives car le comportement du sol est régi par les contraintes effectives.

pour cela il faut choisir le mode de chargement auquel le sol va être soumis in-situ lors d'une sollicitation.

Le comportement du sol sous chargement sera caractérisé par une courbe effort déformation contrainte .



- courbe A : compression isotrope.
- courbe B : essai de déformation latérale nulle
- courbe C : essai triaxial classique à contrainte radiale constante.

Courbe effort _deformation sous un chargement statique monotone .

Il existe un domaine le quel le chemin de déchargement est identique à celui du chargement d'ou la déformation résiduelle de l'échantillon est nulle ce qui ramène à dire que le comportement du sol est élastique linéaire.

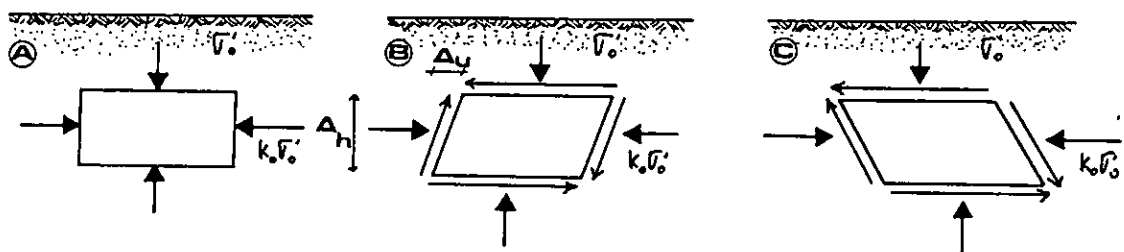
Au delà d'une certaine borne de contrainte et \forall le chemin de contrainte, le comportement du sol cesse d'être linéaire, mais ça n'exclurait pas l'hypothèse du comportement élastique du sol qui se traduit par le fait que le déchargement à le même chemin que le chargement, en conclusion. Le sol présente un comportement élastique non linéaire.

Le chemin suivi lors du déchargement à partir d'un point n'est plus identique à celui du chargement et lorsque le déviateur appliqué devient nul il y'aura apparition d'une déformation résiduelle d'ou le comportement du sol n'est plus élastique linéaire au delà de cette borne de chargement, la déformation devient très importante pour une valeur finie de contrainte appliquée d'ou l'échantillon atteint l'état de rupture.

IV.2 - COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES SOLS :

IV.2.1- INTRODUCTION :

Dans le calcul des réponses dynamiques du sol dans les problèmes d'I.S.S, on doit considérer que l'action sismique se propage verticalement d'ou un élément du sol à profondeur H est soumis à des chargements cycliques .



- Séquence de chargement idéalisé

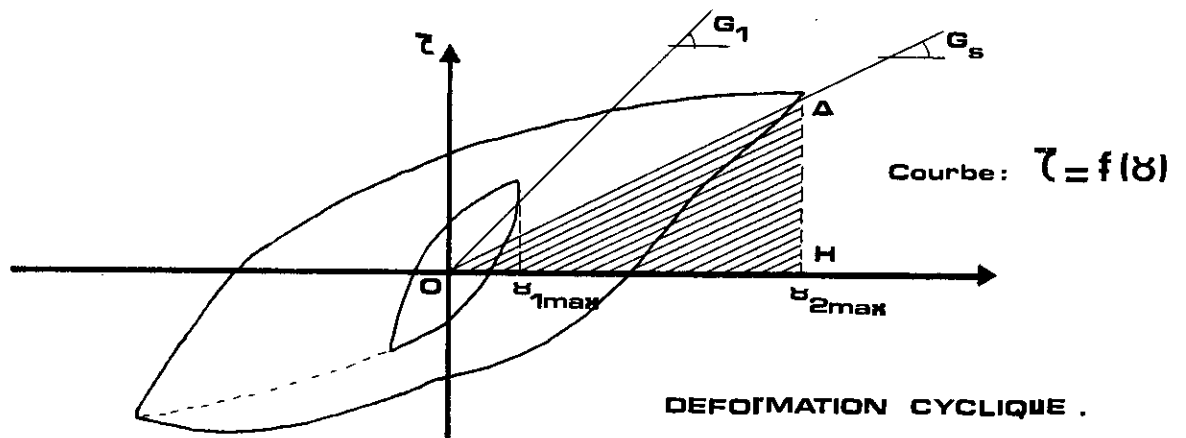
l'élément subit une déformation de cisaillement appelée la distorsion γ qui s'exprime sous la forme :

Chapitre IV

Dynamique des Sol

$$\gamma = \frac{\Delta U}{\Delta H}$$

d'ou on peut tracer la courbe effort deformation



La figure montre que le comportement du sol est caractérisé par une boucle dont la surface et l'inclinaison dépendent de :

- * l'amplitude de cycle .
- * la déformation au cours du cycle

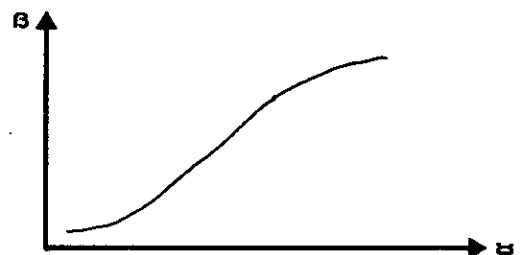
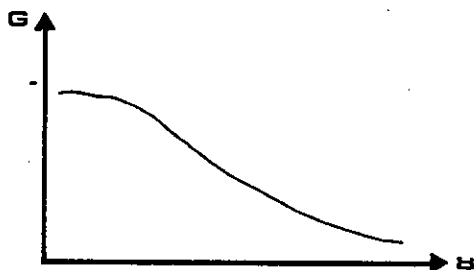
cette boucle est défini à l'aide de deux paramètres :

a- Le module Sécant G_s :

représente la pente de la droite joignant les deux extrémités de la boucle .

b- Le coefficient d'amortissement B :

il caractérise l'énergie dissipée par le matériau lors d'un cycle.

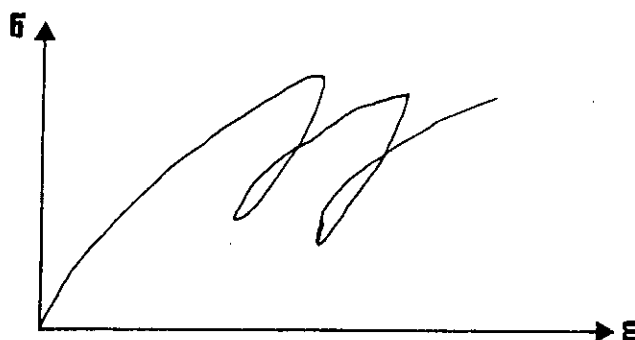


IV.2.2- L'AMORTISSEMENT DANS LE SOL :

L'amortissement est une réalité physique essentiellement liée à la plastification des matériaux, sa prise en compte résulte d'une analogie entre modèles mathématiques et réalités physiques basées sur l'équivalence de l'énergie .

a- Amortissement Interne :

Lors de l'application d'un chargement cyclique sur l'échantillon on remarque que pour une même sollicitation la déformation n'est pas la même à l'aller et au retour.



Donc le travail de la sollicitation n'est plus le même, la différence est désignée en chaleur. cette dissipation est caractérisé par l'amortissement qui présente une grandeur fondamentale dans l'étude des vibrations au voisinage de la résonance, une mesure de l'efficacité d'amortissement est donnée pour le rapport de l'air de la boucle d'hystérisis à l'air OAH, pour cela on a le pourcentage d'amortissement ξ avec :

$$\xi = 1/4\pi [(\text{aire de la boucle}) / (\text{aire OAH})]$$

L'amortissement peut être déterminé par plusieurs coefficients :

1- coefficient de perte η :

$$\eta = D / 2 \pi w$$

D : énergie dissipée au cours d'un cycle .

W : énergie emmagasinée

2- La capacité d'amortissement spécifique χ :

$$\chi = D/W$$

3- Le déphasage ϕ :

il représente l'angle formé par le vecteur force et le vecteur déplacement lors d'un mouvement sinusoïdal.

4- facteur de qualité : Q

il mesure l'atténuation de l'amplitude d'onde qui se propage dans un milieu du fait de l'absorption d'énergie par amortissement.

et on relation reliant les différents paramètres :

$$\eta = \chi / 2 \pi = \text{tg } \phi = 1/ Q$$

b- amortissement visqueux :

Il exerce une réaction proportionnelle à la vitesse, et il est caractérisé par un coefficient d'amortissement C ou par un pourcentage d'amortissement critique ξ :

$$\xi = c / (2\sqrt{km})$$

c- amortissement géométrique :

Il correspond à une perte d'énergie de propagation à l'infini des vibrations dans le sol l'amortissement géométrique augmente avec la fréquence il correspond à une réaction déphasée par rapport au mouvement.

IV.3 LES DIFFERENTS MODELES DYNAMIQUES :

L'énergie dissipée au cours d'un cycle peut s'exprimer à l'aide du coefficient de perte η et du point de vue rhéologique, le sol peut être représenté par un assemblage de ressorts et de frotteurs (frottement de coulomb).

dans le cas des sollicitations unidirectionnelles, la relation contrainte déformation aura la forme :

$$\tau = G \gamma$$

γ : distorsion

G : module de cisaillement

et pour la cas des sollicitations multidirectionnelles, la loi de comportement prend une forme tensorielle

$$\varepsilon = C . \sigma$$

avec : C tension de 4 eme ordre et pour le cas d'un matériau isotrope, seuls deux composantes suffisent à le définir

- le comportement du sol est généralement idéalisé par l'un des deux modèles:

- modèle viscoélastique linéaire.
- modèle visco élastique linéaire équivalent

contrairement au milieu élastique, le milieu viscoélastique se souvient des sollicitations qui lui ont été imposées au cours du temps.

La vitesse de déformation joue un rôle important, elle agit directement sur les relations constitutives du milieu viscoélastique et se traduit par des modules élastiques dépendant de la fréquence reliant les contraintes complexes aux déformations complexes

Les parties réels représentent le comportement purement élastique du milieu, tandis que les parties imaginaires sont associées au comportement visqueux et traduisant en fait la dissipation d'énergie dans le milieu.

Pour un chargement harmonique , le comportement du sol se traduit par la relation :

$$\sigma e^{i\omega t} = G(\omega) \varepsilon e^{i\omega t}$$

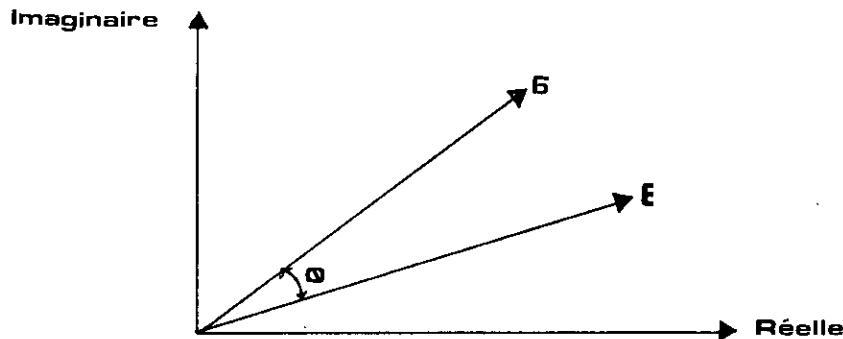
σ , ε sont les amplitudes complexes de contrainte et de déformation.

$G(\omega)$: représente le module élastique complexe dépend de la fréquence

$$\sigma = \sigma' + i \sigma''$$

$$\varepsilon = \varepsilon' + i \varepsilon''$$

$$G(\omega) = G'(\omega) + G''(\omega)$$



$\phi(\omega)$: l'angle de déphasage entre les vecteurs σ et ε qui tournent avec une vitesse ω

$$\operatorname{tg} \phi(\omega) = G''(\omega) / G'(\omega).$$

IV.3.1 - MODELE VISCOELASTIQUE LINEAIRE :

La prise en compte d'un amortissement réel rend la tâche difficile du côté mathématique pour cela on se ramène à substituer à l'amortissement réel au amortissement visqueux est caractérisé par le fait que les forces qu'il met en jeu sont proportionnelles aux vitesses relatives des éléments en présence.

Le modèle KELVIN VOIGT décrit la loi de comportement pour une sollicitation harmonique d'ou on a :

$$\sigma = \lambda^* (\operatorname{trace} \varepsilon^o) + 2\mu^* \varepsilon^o$$

avec :

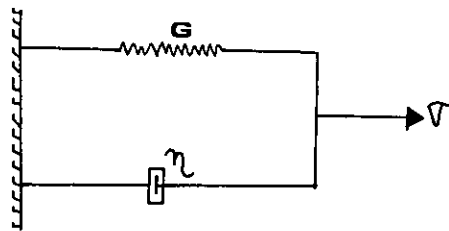
$$\lambda^* = \lambda + i \omega \lambda'$$

$$\mu^* = \mu + i \omega \mu'$$

λ , $\mu = G$ (constantes d'élasticité)

λ' , μ' constantes de viscosité

et on aura le modèle rhéologique suivant :



Modèle KELVIN-VOIGT

IV.3.2 - MODELE VISCOELASTIQUE LINEAIRE EQUIVALENT:

Le comportement non linéaire du sol peut être approché par un modèle viscoélastique linéaire équivalent. L'équivalence est fonction des caractéristiques du matériaux mais également de la sollicitation, ce modèle doit avoir des propriétés dissipatives plus au moins équivalentes à celles du matériau réel.

le module de cisaillement aura une forme complexe

$$G^* = G(1 + i\eta) = G(1 + 2i\xi)$$

en choisissant pour module G du modèle linéaire équivalent, le module sécant G_s du matériau, on obtient une forme possible de linéarisation du système.

$$G^* = G_s \left[1 - 2\xi^2 + 2i\xi\sqrt{1 - \xi^2} \right] \quad \text{avec } \xi = \eta/2$$

L'équivalence est obtenue par minimisation de la différence entre la réponse du modèle linéaire équivalent et du modèle non linéaire.

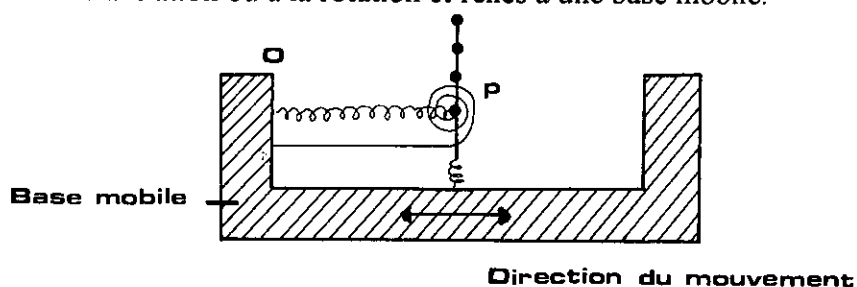
IV.4 - MODELISATION DU SOL

1- INFLUENCE DU SOL SUR LA REPOSE D'UNE STRUCTURE INTERACTION SOL STRUCTURE :

Une secousse sismique est défini par un accelerogramme mesure à la surface du sol en l'absence de tout construction.

En présence d'un bâtiment, les mouvements an voisinage des fondations peuvent différer de ceux existants en champ libre, en effet la masse de la construction engendre des forces d'inertie qui perturbent le mouvement du sol, et le mouvement d'encastrement à la base provoque la rotation de celle -ci . Cette interaction entre le sol et la structure peut être mise en evidence à l'aide d'un modèle simple.

Le batiment est représenté par une console et le sol par des ressorts agissants à la translation ou à la rotation et reliés a une base mobile.

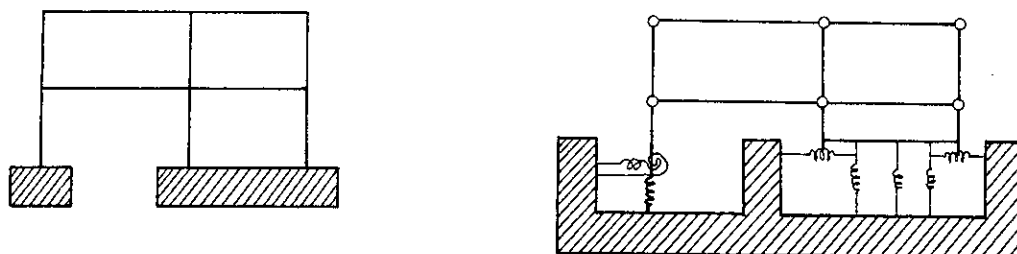


Le mouvement d'un point (o) à la base mobile est celui qui est défini en champ libre par un accelerogramme, tandis que le mouvement de la fondation du bâtiment calculé au point (p), dépend de la masse de la structure et de la raideur des ressorts qui représentent le sol, ces deux mouvements différents donc, leur écart étant d'autant plus accentué que le sol est plus déformable.

2- MODELISATION PAR DES RESSORTS :

La manière la plus simple de prendre le sol en compte est le représentant par des ressorts reliant un ou plusieurs noeuds à une base rigide, à la quelle on impose le mouvement.

Dans le cas d'un modèle plan, une semelle sous point isolé est représentée par deux ressorts agissant à la translation et un ressort à la rotation, sous un radier, les sol est modélisé par un ressort horizontal et un ressort vertical en chaque noeud :



La raideur de ces ressorts est calculée d'après la valeur du coefficient de Ballast qu'il convient de déterminer par une étude de terrains de fondation.

Les propriétés dynamiques du sol étant en général mal connues, on pourra employer des hypothèses simplificatrices pour évaluer les coefficients de Ballast à partir des données expérimentales.

on peut ainsi assimiler le sol à un milieu élastique infini caractérisé par un module d'élasticité E et un coefficient de poisson ν et la construction à un disque rigide de rayon R . On peut alors calculer la raideur du sol en translation ou en rotation, puis les coefficients de BALLAST pour la direction verticale ou horizontale en divisant la raideur correspondante par la surface du disque.

Direction	Raideur	Coefficient de BALLAST
Verticale	$2ER/(1-\nu^2)$	$0,64 E/R(1-\nu^2)$
Horizontale	$16(1-\nu) ER/(7 - 8 \nu)(1+\nu)$	$5,1 E(1-\nu)/R (7 - 8 \nu)(1+\nu)$
Rotation	$4 ER^3 / 3(1-\nu^2)$	

3- MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS :

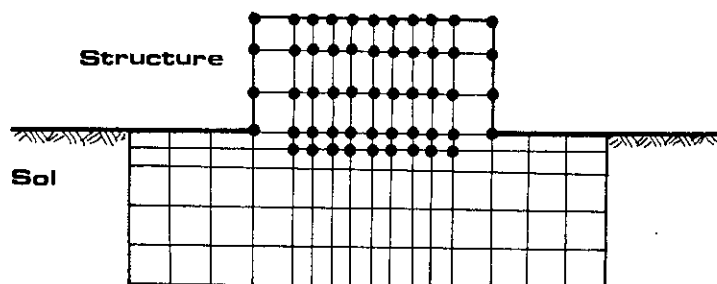
Pour mieux prendre en compte les propriétés dynamiques du sol on peut remplacer par des éléments finis les ressorts du modèle décrit précédemment, le sol est

alors représenter par des couches successives d'éléments empilés sur une base qui représente le soubassement rocheux, chaque couche est caractérisée par un module d'élasticité, un coefficient de poisson, une masse volumique et un coefficient d'amortissement.

Comme dans le cas précédent, le mouvement est imposé à la base et on fait l'hypothèse qu'il se propage dans le sol sous forme d'onde de cisaillement se déplaçant uniquement à la verticale.

La base étant située en profondeur, son mouvement est très différent de celui de la surface du sol (en champ libre) et n'est pas connu a priori.

On doit étudier au préalable le sol en l'absence de toute construction pour déterminer le mouvement de la base qui produit en surface le mouvement d'un champ libre défini par l'accélérogramme donnée.



Chapitre V

Interaction Sol-Structure

V.1-INTRODUCTION:

L'interaction sol structure est une notion qui met en évidence les modification du mouvement de la structure (ou du sol) lors d'une sollicitation d'origine sismique en prenant compte de la présence de deuxième composante (la structure du sol).

L'interaction a pour but de définir la relation dynamique qui existe entre la réponse de la structure et les caractéristiques de son support (fondation) en général l'effet de l'interaction est du à un mécanisme d'échange d'énergie entre la structure et le sol pour cela la recherche de la réponse des structure prenant en compte L'ISS nécessite l'incorporation des propriétés dynamiques du sol dans la formation globale du problème.

L'analyse de la réponse des structures en introduisant l'effet de l'interaction présente une étude impérieuse surtout lorsqu' il s'agit des structures a grande importance telle que les barrages, pieux, réservoirs et centrales multi-fonctionnelles.

L'analyse complète d'interaction sol-structure doit en compte

- la variation des caractéristiques du sol avec la profondeur .
- Le schéma complexe de propagation des ondes qui engendrent le mouvement.
- le comportement non linéaire du sol
- l'interaction avec les structures avoisinantes.
- le caractère tridimensionnel du problème.

donc le problème d'interaction sol structure présente des grandes difficultés pour cela le recours aux méthode numérique est inévitable .

V.2- METHODES DE PRISE EN COMPTE DE L'INTERACTION SOL-STRUCTURE :

V.2.1- METHODES GLOBALES :

les méthodes globales conduisent à une détermination du mouvement dans le sol et la structure en parallèle, ces méthodes sont les plus adaptées aux ouvrages enterrés. Ces méthodes sont susceptibles d'appréhender les comportements non linéaires du sol (variation de ces caractéristiques) et des interfaces sol structure, aussi on doit noter que les méthodes globales peuvent être étendues aux cas tridimensionnels mais elles sont coûteuses. Dans ce cas et nécessitent l'utilisation de l'outil informatique.

V.2.2- METHODES HYBRIDES :

GUPTA et AL (1980) ont développés une méthode hybride qui consiste à séparer le sol support. En un champ libre et un champ lointain, ils ont résolu le problème à l'aide d'une méthode d'identification permettant de s'assurer que le modèle hybride.

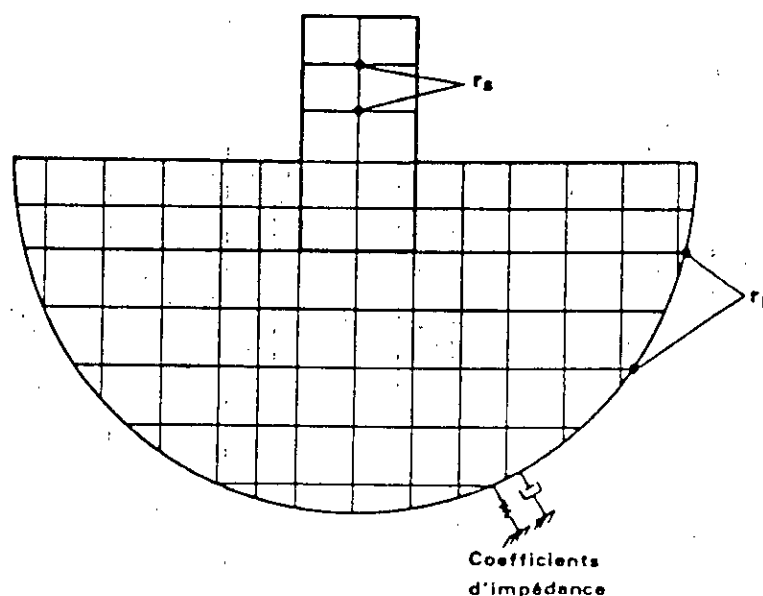


Figure 6 Méthode Hybride

V.2.3- METHODE DE SOUS-STRUCTURES :

Elles font appel au principe de superposition c'est à dire faire une analyse du problème d'interaction en plusieurs étapes successives, chacune de ces étapes facile à résoudre de point de vue modélisation et traitement, ces méthodes présentent une telle puissance quand une partie du système (la fondation par exemple) à une géométrie

simple alors que la structure requiert une analyse tridimensionnelle elles représentent l'avantage de déterminer la part relative de chaque composante contribuant au système global d'interaction. Les différentes méthodes de sous-structures se différencient par la décomposition du modèle global d'où on distingue.

- les méthodes de frontière.

- les méthodes de volume

V.2.3.1- Méthodes de frontière :

Le modèle global est divisé en deux sous systèmes représentant le sol et la structure (comme est indiquée sur la figure), pour cela à la frontière séparant le sol et la structure, une comptabilité des efforts et déplacements est écrite d'où les différentes équations d'équilibre s'écrivent :

pour la structure :

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ss} & k_{sb} \\ k_{bs} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_b \end{Bmatrix}$$

pour le sol

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_f \\ \ddot{u}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fa} \\ k_{af} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_b \\ 0 \end{Bmatrix}$$

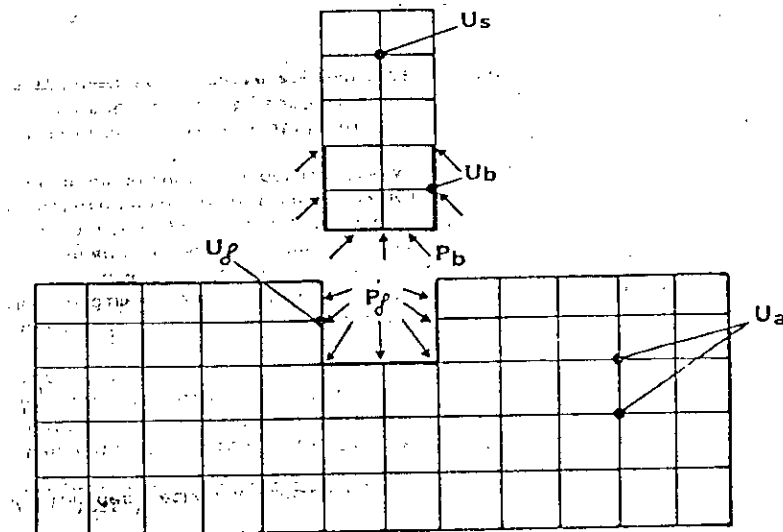


Figure 3 Méthode des sous-structures :
Méthode de frontière

V.2.3.2- Méthode des volumes :

Dans cette méthode, l'interaction sol-structure est prise en compte non seulement à l'interface, mais à tous les noeuds de la structure sous la surface du sol comme il est montré dans la figure.

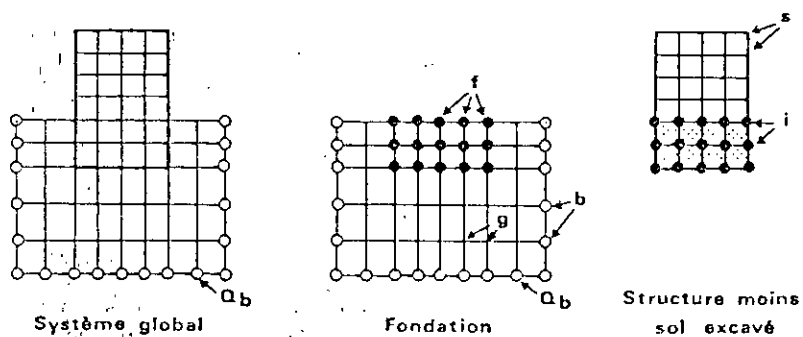


Figure 5 Méthode de sous-structure : méthode de volume

- Méthode de sous structure :

Equation fondamentale du mouvement :

- cas d'une structure a base flexible :

pour avoir l'équation fondamentale du mouvement, on doit examiner la partie de la structure incorporée dans le sol, soumise a des sollicitations sismiques.

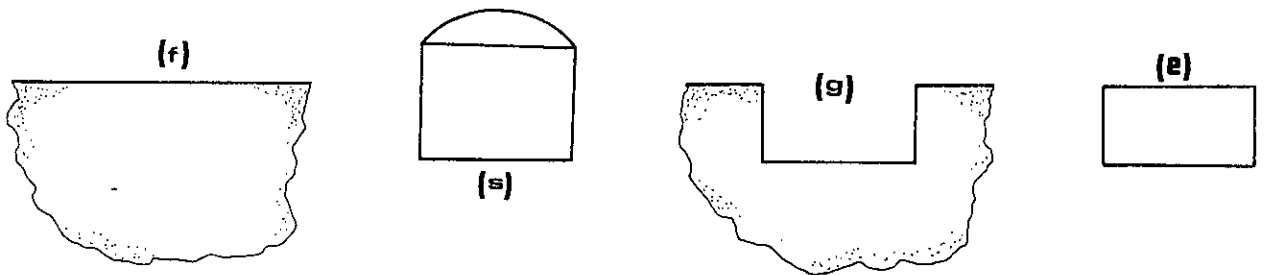
l'interface sol structure est discrétisé par des noeuds tel que :

- noeuds s ---> noeuds de la structure
- noeuds b ---> noeuds de l'interface sol structure .

Le système dynamique est composé de deux sous systèmes

- * la structure (s)
- * le sol avec excavation (g)

le sol sans excavation est désigné par (f) et la partie du sol excavé est représentée par (e) comme montre la figure suivante.



les équations dynamiques du mouvement sont formulées dans le domaine des fréquences, l'amplitude du déplacement total est notée par $\{U^t\}$ qui est fonction de la fréquence ω .

le vecteur déplacement $\{U^t\}$ peut être décomposé dans deux sous vecteurs $\{U_s^t\}$ et $\{U_b^t\}$ d'où la matrice de rigidité dynamique $[S]$ de la structure peut s'écrire sous la forme :

$$[S] = [K] \cdot (1 + 2 \xi i) - \omega^2 [M] \dots 1$$

avec

$[K]$ matrice de rigidité statique

$[M]$ matrice masse

ξ coefficient d'amortissement

cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb} \end{bmatrix}$$

l'équation du mouvement de la structure aura la forme :

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s^t\} \\ \{U_b^t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_s\} \\ \{P_b\} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

avec : $\{P_s\}$ force reprise par la structure

$\{P_b\}$,, ,, par l'interface sol structure

Pour cela toutes les structures contribuent à des équations d'équilibre dynamique pour les noeuds d'interface, d'où la force d'interaction du sol dépend du mouvement relatif $\{U_b\}^g$ et ces forces sont égales à :

$$[S_{bb}]^g \{ \{U_b^t\} - \{U_b^g\} \} \quad (3)$$

les équations du mouvement des noeuds d'interface s'écrivent :

$$[S_{bs}] \{U_s^t\} + [S_{bb}^s] \{U_b^t\} + [S_{bb}^g] (\{U_b^t\} - \{U_b^g\}) = \{0\}$$

donc l'équation du mouvement de l'ensemble sol-structure :

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}]^s + [S_{bb}]^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s^t\} \\ \{U_b^t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [S_{bb}]^f \{U_b^f\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

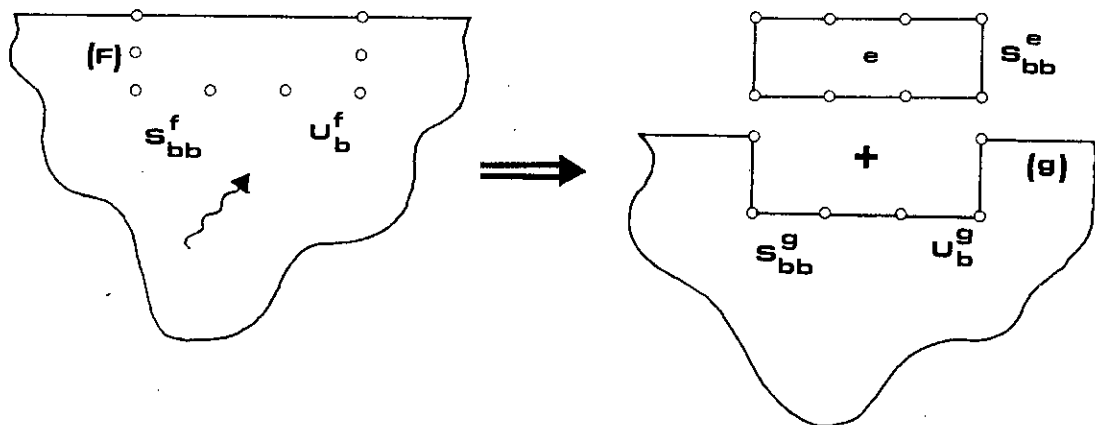
notant que :

$$[S_{bb}^s] + [S_{bb}^g] = [S_{bb}^s] + [S_{bb}^f] - [S_{bb}^e] \quad 5-a$$

$$[S_{bb}^f] \{U_b^f\} = [S_{bb}^g] \{U_b^g\} \quad 5-b$$

l'équation 4 aura la forme :

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}]^s + [S_{bb}]^f - [S_{bb}]^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s\}^t \\ \{U_b\}^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [S_{bb}]^f \{U_b^f\} \end{Bmatrix} \quad (6)$$



~ Matrice de rigidité dynamique et l'excitation sismique ~
 ~ rapportée à des systèmes de référence du sol. ~

- Application de la méthode de sous structure pour 1 structure a base rigide

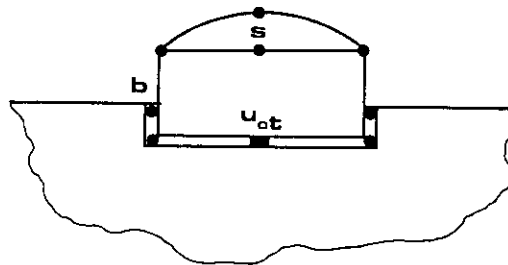
Cette étude à été établit pour le cas d'une structure ayant une base rigide qui est constitué du sol et les murs adjacents, pour beaucoup d'application pratique, cette comptabilité en terme de contraintes dans l'interface mène à une modification de la formulation pour un système sol-structure à base rigide ,le mouvement total de la base $\{U_b^t\}$ peut être exprimé en fonction du mouvement du corps rigide dans le point o $\{U_0^t\}$ (centre de gravité de la fondation) d'ou :

$$\{U_b^t\} = [A] \{U_0^t\} \quad (7)$$

avec :

$\{U_0^t\}$: vecteur contient l'amplitude des 3 déplacements et les 3 rotations du centre o .

$[A]$ matrice de transformation cinématique qui est établie à partir des considérations géométriques



systeme sol structure à base rigide .

donc pour une base rigide, le mouvement de l'interface sol-structure qui représente la frontière les deux sous systèmes dépend généralement de $\{U_0^t\}$ d'ou avec comparaison au cas d'une structure à base flexible, le nombre de degré de liber est réduit introduisons cette transformation de variables :

$$\begin{Bmatrix} \{U_s^t\} \\ \{U_b^t\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s^t\} \\ \{U_b^t\} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

donc d'après l'équation et avec une permutation de la transformation de la transposée de la matrice définit ci dessus on obtient :

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{so}] \\ [S_{os}] & [S_{oo}]^s + [S_{oo}]^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s\}^t \\ \{U_o\}^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [A]^T [S_{bb}]^f \{U_b\}^f \end{Bmatrix} \quad (9)$$

avec :

$$[S_{so}] = [S_{sb}] [A]$$

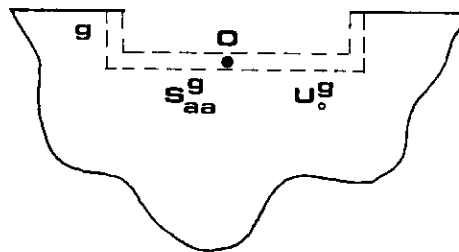
$$[S_{so}]^s = [A]^T [S_{bb}]^s [A]$$

$$[S_{oo}]^g = [A]^T [S_{bb}]^g [A]$$

$$[S_{os}] = [S_{so}]^T$$

$[S_{so}^s]$, $[S_{os}]$ et $[S_{so}]$ représentent les sous matrices de rigidité de la structure à base rigide qui sont établies directement en discrétisant la structure par un module choisi.

$[S_{oo}^g]$ représente la matrice de rigidité dynamique du sol avec évacuation pour une interface sol structure rigide, cette matrice décrit l'amplitude des 3 forces et les 3 moments résultants dans le point o.



L'équation 8 représente l'équation en terme du mouvement total, le vecteur charge dépend du mouvement en champ libre $\{U_b^f\}$ qui est lié à l'interface sol-structure.

Le vecteur charge $[A]^T [S_{bb}]^f \{U_b\}^f$ dans une situation tridimensionnelle représente et les 3 forces et les trois 3 moments sollicitants le centre o avec :

$$\{U_b^g\} = [A] \{U_o^g\} \quad (10)$$

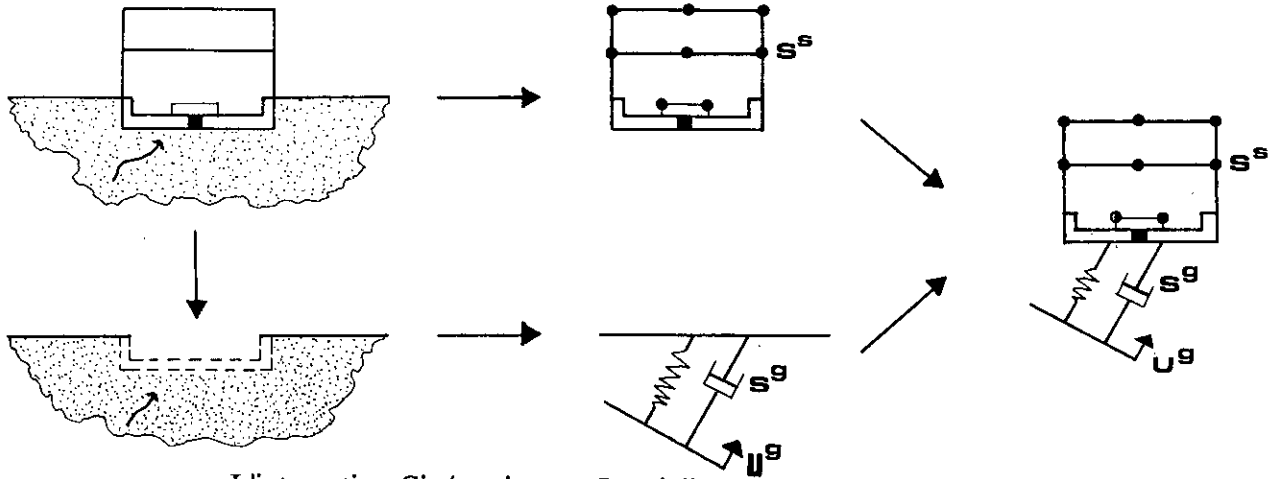
substituons - 10 dans 5-b multiplions par $[A]^T$ et en utilisant le résultat de -6 on aura :

$$[S_{oo}]^g \{U_o\}^g = [A]^T [S_{bb}]^f \{U_b\}^f$$

$$\text{donc : } \{U_o\}^g = [S_{oo}^g]^{-1} [A]^T [S_{bb}]^f \{U_b\}^f$$

et on aura l'équation du mouvement total :

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{so}] \\ [S_{os}] & [S_{oo}^g] + [S_{oo}]^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s\}^t \\ \{U_b\}^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [S_{oo}]^g \{U_o\}^g \end{Bmatrix} \quad (11)$$



- L'interaction Cinématique et Inertielle :

Dans les équations du mouvement , la charge due à l'excitation sismique sera appliqué dans le noeuds d'interface .Le déplacement total est divisé en deux parties de fait de :

a- Interaction cinématique K

b - interaction inertielle i

donc on a :

$$\begin{Bmatrix} \{U_s\}^t \\ \{U_b\}^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{U_s^k\} + \{U_s^i\} \\ \{U_b^k\} + \{U_b^i\} \end{Bmatrix}$$

Dans l'interaction cinématique, la masse de la structure est prise égale à zéro par définition et démarant de cette hypothèse .

$$\begin{bmatrix} (1+2\xi_i)[K_{ss}] & (1+2\xi_i)[K_{sb}] \\ (1+2\xi_i)[K_{bs}] & (1+2\xi_i)([K_{bb}]^s + [K_{bb}]^g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s\}^k \\ \{U_b\}^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [S_{bb}]^g \{U_b\}^g \end{Bmatrix} \quad (12)$$

l'équation qui relie les noeuds S de la structure est

$$\{U_s^k\} = -[K_{ss}]^{-1} [K_{sb}] \{U_b^k\} = [T_{sb}] \{U_b^k\}$$

$[T_{sb}]$ représente la transformation quasi- statique, elle est fonction de la matrice de raideur statique . L'équation du mouvement de l'interaction cinématique s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [S_{ss}] & [S_{sb}] \\ [S_{bs}] & [S_{bb}]^s + [S_{bb}]^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s^k\} \\ \{U_b^k\} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sb} \\ M_{bs} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s^k\} \\ \{U_b^k\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

pour une structure a base rigide on a :

$$\begin{cases} \{U_s\}^i = \{U_s\}^k + \{U_s\}^i \\ \{U_b\}^i = \{U_b\}^k + \{U_b\}^i \end{cases}$$

l'équation du mouvement de l'interaction cinématique est :

$$\begin{bmatrix} (1+2\xi_i)[K_{ss}] & (1+2\xi_i)[K_{so}] \\ (1+2\xi_i)[K_{os}] & (1+2\xi_i)([K_{oo}]^s + [K_{oo}]^g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s\}^k \\ \{U_o\}^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [S_{oo}]^g \{U_o\}^g \end{Bmatrix} \quad (14)$$

La solution de cette équation conduit aux égalité suivantes :

$$\{U_s^k\} = [T_{so}] \{U_o\}^k \quad (15.1)$$

$$\{U_o\}^k = \{U_o\}^g \quad (15.2)$$

$$\text{avec : } [T_{so}] = -[K_{ss}]^{-1} [K_{so}] \quad (15.3)$$

l'équilibre statique de la structure dérive de l'équation

$$[K_{oo}]^g - [K_{os}] [K_{ss}]^{-1} [K_{so}] = [0]$$

Donc le mouvement de l'interaction inertielle s'exprime en fonction de l'interaction cinématique et on a :

$$\begin{Bmatrix} [S_{ss}] & [S_{so}] \\ [S_{os}] & [S_{oo}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s\}^i \\ \{U_o\}^i \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{Bmatrix} [M_{ss}] & [M_{so}] \\ [M_{os}] & [M_{oo}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_s\}^k \\ \{U_o\}^k \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Le déplacement total de la structure s'écrit sous la forme :

$$U_s^t = U_s^s + U_s^d$$

avec :

U_s^s : déplacement quasi statique

U_s^d déplacement dynamique

le déplacement quasi statique s'obtient à l'aide de l'équilibre statique des noeuds d'ou :

$$[K_{ss}] \{U_s^s\} + [K_{sb}] \{U_b^t\} = \{0\} \quad (17)$$

et comme il est défini précédemment :

$$[T_{so}] = -[K_{sb}] [K_{ss}]^{-1}$$

$$\text{on a : } U_s^t = U_s^d + [T_{sb}] \{U_b\}^T$$

sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} U_s^t \\ U_b^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [I] & [T_{sb}] \\ [0] & [I] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s^d \\ U_b^t \end{Bmatrix} \quad (18)$$

sachant que le déplacement dynamique peut s'exprimer en fonction de la matrice modale $\{U_s\}^d = [\phi] \{y\}$

$\{y\}$: vecteur des coordonnées généralisées relatifs au modes propres de vibration de la structure à base rigide.

on introduisant le vecteur $\{y\}$ on obtient :

$$\begin{Bmatrix} U'_s \\ U'_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ U'_b \end{Bmatrix} \quad (19)$$

substituons 19 dans 18 on aura:

$$\begin{Bmatrix} U'_s \\ U'_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [T_{sb}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\phi] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ U'_b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U'_s \\ U'_b \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\phi] & [T_{sb}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}}_{[\bar{\phi}]} \begin{Bmatrix} y \\ U'_b \end{Bmatrix}$$

donc :

$$\begin{Bmatrix} U'_s \\ U'_b \end{Bmatrix} = [\bar{\phi}] \begin{Bmatrix} y \\ U'_b \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$[\bar{\phi}]$: matrice de transformation

- REDUCTION DU NOMBRE D'EQUATION DU MOUVEMENT :

la procédure se fait en utilisant la matrice transformation $[\bar{\phi}]$ ou :

$$[\bar{\phi}] = \begin{bmatrix} [\phi] & [T_{sb}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}$$

Les fréquences et les modes propres de vibration de la structure s'obtiennent à partir de l'équation caractéristique :

$$K\phi = M\phi\Omega \implies \det ([K_{ss}] - \omega^2 [M_{ss}]) = 0$$

$$\text{et on aura par suite : } [\phi]^T [M_{ss}] [\phi] = [I]$$

$$[\phi] [K_{ss}] [\phi] = [\omega_i^2] = [\Omega]$$

$$[\phi]^T [C_{ss}] [\phi] = [2\omega_i \xi_i] = [\beta]$$

ou : ω_i : fréquence propre du mode i

ξ_i : % d'amortissement critique du mode i

l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P = -MB\ddot{U}g$$

$$\text{ou : } \{U\} = \begin{Bmatrix} U_s \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi] & [T_{sb}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_s \\ \bar{U}_b \end{Bmatrix} = [\bar{\phi}] \{\bar{U}\}$$

en introduisant la matrice $[\bar{\phi}]$ dans l'équation du mouvement on et en multipliant par $[\bar{\phi}]^T$:

on obtient :

$$[\bar{M}]\ddot{\bar{U}} + [\bar{C}]\dot{\bar{U}} + [\bar{K}]\bar{U} = \bar{P}$$

ou :

$$* [\bar{M}] = [\bar{\phi}]^T [M] [\bar{\phi}]$$

$$= \begin{bmatrix} [I] & [\phi]^T [M_{ss}] [T_{sb}] + [\phi]^T [M_{sb}] \\ [T_{sb}]^T [M_{ss}] [\phi] + [M_{sb}] [\phi] & [T_{sb}]^T [M_{ss}] [T_{sb}] + [M_{sb}] [T_{sb}] + [M_{bb}] + [T_{sb}]^T [M_{sb}] \end{bmatrix}$$

on utilisant la matrice $[\mu]$ qui est sous la forme : $[\mu] = [\phi]^T [M_{ss}] [T_{sb}]$

et on se basant sur les égalités :

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I]$$

$$[T_{sb}] = [\phi] [\mu]$$

$$[T_{so}]^T [M_{ss}] [T_{so}] = [\mu]^T [\phi]^T [M_{ss}] [\phi] [\mu] = [\mu]^T [\mu]$$

on obtient :

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} [I] & [\mu] + [\phi]^T [M_{sb}] \\ [\mu]^T + [M_{sb}] [\phi] & [\mu]^T [\mu] + [T_{sb}]^T [M_{sb}] + [M_{bs}] [T_{sb}] + [M_{bb}] \end{bmatrix}$$

$$*[\bar{K}] = [\phi]^T [K] [\phi]$$

$$= \begin{bmatrix} [\Omega] & [\phi]^T [K_{ss}] [T_{sb}] + [\phi]^T [K_{sb}] \\ [T_{sb}]^T [K_{ss}] [\phi] + [K_{sb}]^T [\phi] & [T_{so}]^T [K_{ss}] [T_{so}] + [T_{sb}]^T [K_{sb}] + [K_{sb}]^T [T_{sb}] + [K_{bb}] + [K_{bb}^f(\omega)] \end{bmatrix}$$

vue que :

$$[K_{sb}] = - [K_{ss}] [T_{sb}]$$

$$[K_{bb}] = [T_{sb}]^T [K_{ss}] [T_{sb}]$$

la matrice $[\bar{K}]$ peut s'écrire sous la forme :

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\Omega] & [0] \\ [0] & [K_{bb}^f(\omega)] \end{bmatrix}$$

$$*[\bar{C}] = [\phi]^T [C] [\phi]$$

$$= \begin{bmatrix} [\beta] & [\phi]^T [C_{ss}] [T_{sb}] + [\phi]^T [C_{sb}] \\ [T_{sb}] [C_{ss}] [\phi] + [C_{sb}]^T [\phi] & [T_{sb}]^T [C_{ss}] [T_{sb}] + [T_{sb}] [C_{sb}] + [C_{sb}]^T [T_{sb}] + [C_{bb}] + [C_{bb}^f(\omega)] \end{bmatrix}$$

$$\text{on a : } [C_{sb}] = - [C_{ss}] [T_{sb}]$$

$$[C_{bb}] = [T_{sb}]^T [T_{so}]$$

donc la matrice $[C]$ peut se simplifier et s'écrire sous la forme :

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} [\beta] & [0] \\ [0] & [C_{bb}^f(\omega)] \end{bmatrix}$$

$$*[\bar{P}] = [\phi]^T P = -[\phi]^T [M] [B] \ddot{U}_g$$

V.3- L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION :

V.3.1- DEFINITION :

Considérant une fondation de forme quelconque reposant sur la surface d'un milieu semi-infini et soumise à une sollicitation harmonique $P(t) = P.e(i\omega t)$, les forces s'exerçant sur la fonction sont les forces d'inertie et les forces de réaction du sol $P(t)$, il en résulte un déplacement $Z(t) = Z_0 e(i\omega t)$ de la fondation. Associons à la fondation réelle, une fondation fictive de même caractéristiques géométriques mais de masse nulle, soit $Z(t)$ son déplacement lorsqu'elle est soumise à la force appliquée $P(t)$. D'ou par définition on appelle impédance de la fondation, le quotient de la force appliquée au déplacement de la fondation sans masse .

$$K = P(t) / Z(t) \quad (1)$$

Sachant que les forces d'inertie de la fondation sont nulles d'ou l'équation (1) devient :

$$K = R(t) / Z(t) \quad (2)$$

A partir de l'équation (1) on peut déduire l'impédance de la fondation pour les différents modes: de translation, balancement ou torsion , par exemple l'application d'une force horizontale donne la naissance d'une translation horizontale et une rotation ce qui traduit en une impédance couplée rotation déplacement horizontal, cette impédance couplée se définit comme étant le rapport de la force (ou moment) appliqué à la rotation (ou déplacement horizontal).

V.3.2- IMPEDANCE D'UN OSCILLATEUR SIMPLE A 1 D.D.L :

La considération d'un oscillateur simple à 1 d.d.l est utile pour la compréhension de la forme générale prise par les fonctions d'impédance. l'équation d'équilibre d'un oscillateur simple de caractéristiques M, C, K soumis à des sollicitations harmoniques s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{Z} + C\dot{Z} + KZ = P_0 e^{(i\omega t)}$$

Cette équation a une solution générale :

$$Z(t) = P e^{i\omega t} / ((k - m\omega^2) + i\omega c) \quad (3)$$

Faisant une analyse entre (1) et (2) on déduit que l'impédance dynamique est:

$$K = (k - m\omega^2) + i\omega c \quad \text{ou : } k \text{ raideur statique}$$

Autrement l'impédance dynamique peut s'écrire sous forme de produit de la raideur statique et un terme complexe ($k_1 + i\omega c_1$) avec $K = k(k_1 + i\omega c_1)$

$$\text{ou : } k_1 = 1 - (\omega / \omega_n)^2 \quad ; \quad \omega_n = (k/m)^{1/2} = \text{pulsation propre}$$

$$c_1 = 2\lambda / \omega_n \quad ; \quad \lambda = c/2(km)^{1/2} = \% \text{ d'amortissement critique}$$

Cette formulation de K montre que l'impédance peut s'exprimer sous la forme d'un produit de la raideur statique k par un nombre complexe ($k_1 + i\omega c_1$) qui regroupe les caractéristiques dynamiques du système

V.3.3 - FORME GENERALE DE L'IMPEDANCE D'UNE FONDATION:

Les considérations précédentes relatives simple a un degré de liberté suggerent de façon générale que le déplacement d'une fondation soumise à une sollicitation harmonique est une somme d'une composante en phase avec la sollicitation et une autre composante déphasée de 90°.

$$Z(t) = P_0(f_1 + if_2)e^{i\omega t}$$

d'ou l'impédance s'écrit sous la forme :

$$K = \bar{K}_1 + i\bar{K}_2$$

$$\text{avec : } \bar{k}_1 = f_1 / (f_1^2 + f_2^2) \quad ; \quad \bar{k}_2 = -f_2 / (f_1^2 + f_2^2)$$

on peut aussi formuler l'expression de l'impédance en introduisant la partie statique k:

$$K = k(K_1 + i K_2) \quad (4)$$

Pour la présentation des résultats donnant les variations des fonctions d'impédance avec la fréquence, il est utile d'introduire une fréquence adimensionnelle a_0 définie par:

$$a_0 = \omega r_0 / v_s$$

ou : r_0 : caractéristique de dimension de la fondation

v_s : valeur caractérise la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans demi espace .

L'impédance peut s'écrire :

$$K = k (K_1 + i a_0 C_1) \quad (5)$$

C_1, K_1 : des paramètres adimensionnels varient avec la fréquence a_0 .

Dans le cas ou le sol présente un amortissement matériel, l'impédance sera écrite sous une autre forme rien que pour isoler l'influence de cet amortissement :

$$K = k (K'_1 + i a_0 C'_1) (1 + 2 i \beta) \quad (6)$$

Cette formulation est intéressante pour un demi espace homogène ou pour un milieu dont les caractéristiques ou les propriétés varient lentement avec la profondeur. K'_1, C'_1 : paramètres pratiquement indépendant de β il suffit de les calculer dans le cas d'un milieu élastique ($\beta = 0$)

V.3.4- ANALOGIE ENTRE LE SEMI ESPACE ET L'OSCILLATEUR SIMPLE :

L'impédance d'une fondation rigide de rayon r posée à la surface d'un demi espace élastique homogène, isotrope pour le mode de sollicitation verticale s'écrit :

$$K = 4 Gr_0 (K_1 + i K_2) / (1 - \nu)$$

La réaction du sol sous la fondation a pour expression :

$$R(t) = K Z(t) = 4 Gr_o (K_1 + i K_2) Z(t) / (1 - \nu) \quad (7)$$

ou :

$$R(t) = \frac{4Gr_o}{1-\nu} K_1 Z(t) + \frac{4Gr_o}{1-\nu} \frac{K_2}{\omega} \dot{Z}(t) \quad (8)$$

Car pour des sollicitations harmoniques :

$$\dot{Z}(t) = i\omega Z(t)$$

Donc l'équation d'équilibre dynamique de la fondation de masse m s'écrit sous la forme :

$$P(t) = m\ddot{Z} + \frac{4Gr_o}{1-\nu} K_1 Z(t) + \frac{4Gr_o}{1-\nu} \frac{K_2}{\omega} \dot{Z}(t)$$

Cette équation est l'équation d'un oscillateur simple à 1 d.d.l . Le mouvement de la fondation est celui d'une masse m (de la fondation) posée sur un système d'amortisseur et ressort de caractéristiques:

$$\bar{K} = \frac{4Gr_o}{1-\nu} K_1 \quad ; \quad \bar{C} = \frac{4Gr_o}{1-\nu} K_2$$

Ce ressort et cet amortisseur représentent le demi espace sous-jacent.

V.3.5- APPLICATION DES FACTEURS D'IMPEDANCE DANS L'ETUDE DES VIBRATIONS D'UN MASSIF DE FONDATION :

Pour un massif de fondation rigide présentant deux plans de symétrie verticaux, les degrés de libertés associés à la translation verticale et la torsion autour d'un axe vertical sont découplés, par contre les degrés de liberté associés aux balancements autour d'un axe horizontal et à la translation horizontale sont couplés .

Les équations d'équilibre d'un tel massif sont en présent les axes au centre de gravité du massif .

$$\begin{cases} m\ddot{Z} + R_z(t) = Q_z(t) & 9.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{X} + R_x(t) = Q_x(t) & 9.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x\ddot{\phi} + R_\phi(t) - R_x(t)Z_c = M_x(t) & 9.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_z\ddot{\theta} + R_\theta(t) = M_z(t) & 9.4 \end{cases}$$

ou :

m = masse de massif

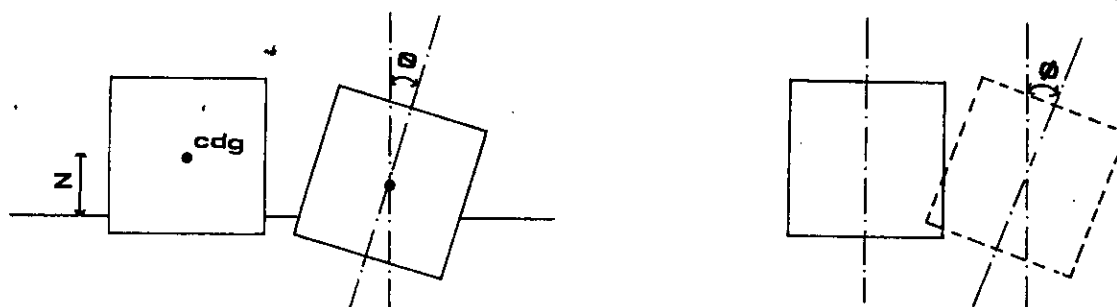
I_z, I_x : moments d'inertie autour d'un axe vertical, horizontal.

z, x : déplacements vertical, horizontal du centre de gravité

θ, ϕ : rotation autour d'un axe vertical

$R(t)$: réaction du sol au centre de gravité géométrique de la surface de contact.

M, Q : sollicitations (forces moments agissants au centre de gravité)



Par définition de l'impédance, les réactions $\{R\}$ sont reliées aux déplacements $\{v\}_b$ du centre de gravité de la surface de contact par :

$$\{R\} = [K] \{V\}_b$$

ou $[K]$ désigne la matrice d'impédance formée de termes complexes :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_x & K_{x\phi} & 0 \\ 0 & K_{\phi x} & K_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix}$$

En présent comme inconnues les déplacements $\{v\}$ du centre de gravité :

$$\{V\} = \{V\}_b + \begin{Bmatrix} 0 \\ Z_c^\phi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

on a la relation :

$$\{R\} = [K_1] \{V\}$$

on $[K_1]$ est une matrice dérivée de la matrice de l'impédance :

$$[K_1] = \begin{bmatrix} K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_x & K_{x\phi} - K_x Z_c & 0 \\ 0 & K_{\phi x} & K_\phi - K_{x\phi} Z_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix}$$

Les équations du mouvement (9) s'écrivent sous forme matricielle :

$$[M] \{\ddot{V}\} + [K]^* \{V\} = \{Q\}$$

avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

et :

$$[K]^* = \begin{bmatrix} K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_x & K_{x\phi} - K_x Z_c & 0 \\ 0 & K_{x\phi} - K_x Z_c & K_\phi - 2K_{x\phi} Z_c + K_x Z_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix}$$

Pour une sollicitation harmonique $Q_0 e^{i\omega t}$, la solution stationnaire est solution de l'équation :

$$[[K]^* - \omega^2 [M]]\{V\} = \{Q_0\}$$

V.3.6- FONCTION D'IMPEDANCE RAMENEES AU CENTRE DE GRAVITE DE LA FONDATION :

Les fonctions d'impédance présentées précédemment ont été définies pour la zone de contact entre le sol et la fondation .

En réalité les fonctions d'impédance qui interviennent dans les équations du mouvement sont généralement celles ramenées au centre de gravité de la fondation pour cela il faut introduire une modification aux fonctions d'impédance relatives aux mouvements de balancement d'où on a :

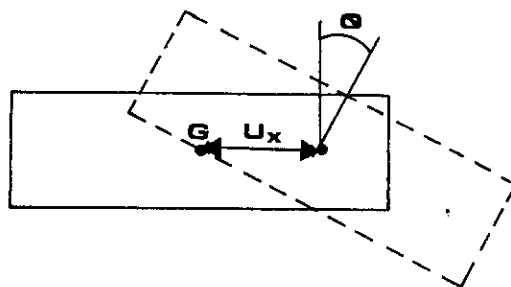
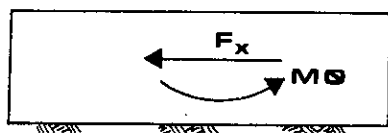
$F_x^b(\omega)$: vecteur force relatif au centre de l'interface

$U_x^b(\omega)$: vecteur déplacement au centre de l'interface

et :

$F_x(\omega), M_\theta(\omega)$: vecteur force associé au centre de gravité de la fondation

$U_x(\omega), U_\theta(\omega)$: vecteur déplacement relatif au centre de gravité de la fondation



En passant du centre de la base d'interface au centre de gravité de la fondation on a :

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ M_\theta(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x^b(\omega) \\ M_\theta^b(\omega) \end{Bmatrix}$$

d : la distance entre le centre de gravité de la fondation et le centre de l'interface

La relation entre le vecteur force et déplacement et comme l'impédance de la fondation à une forme complexe s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_x(\omega) \\ M_\theta(\omega) \end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} K_{xx}(\omega) & K_{x\theta}(\omega) \\ K_{\theta x}(\omega) & K_{\theta\theta}(\omega) \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_{xx}(\omega) & C_{x\theta}(\omega) \\ C_{\theta x}(\omega) & C_{\theta\theta}(\omega) \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} U_x(\omega) \\ U_\theta(\omega) \end{Bmatrix}$$

V.3.7 - FONCTIONS D'IMPEDANCE INDEPENDANTES DE LA FREQUENCE :

Le calcul selon les fonctions d'impédance variables avec la fréquence présente des difficultés. Pour cela LYSMER a proposé des fonctions d'impédance indépendantes de la fréquence. cette idée développée par plusieurs chercheurs.

Ces fonctions d'impédance donnent des résultats proches de ceux obtenues à partir des valeurs dépendent de la fréquence et ça était établi dans le cas de vibration d'une fondation circulaire rigide sur un espace semi infini homogène , isotrope, élastique et linéaire pour les chercheurs cités ci dessous on a:

* RICHARD , WOODS, HALL :

Ils ont donné des fonctions d'impédance constantes relatives à une fondation circulaire rigide:

$$K_{zz} = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \quad ; \quad C_{zz} = 3,4r_0^2 \sqrt{G\rho^2} / (1-\nu) \quad \text{pompage}$$

$$K_{xx} = \frac{32(1-\nu)Gr_0}{7-8\nu} \quad ; \quad C_{xx} = 18,4(1-\nu)r_0^2 \sqrt{G\rho} / (7-8\nu) \quad \text{Tamis}$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)} \quad ; \quad C_{\theta\theta} = 0,8r_0^4 \sqrt{G\rho} / (1-\nu)(1+B_\theta) \quad \text{balancement}$$

$$K_{\phi\phi} = \frac{16Gr_0^3}{3} \quad ; \quad C_{\phi\phi} = r_0^4 \sqrt{G\rho B_\psi} / (1+2B_\psi) \quad \text{lacet}$$

ou :

$$B_\theta = \frac{3(1-\nu)}{8I_\theta \rho r_0^5}$$

$$B_\psi = \frac{I_\psi}{\rho r_0^5}$$

B_θ, B_ψ : coefficients de masses

I_θ, I_ψ : moments d'inertie polaire de la masse de la fondation par rapport à l'axe y où x et z respectivement :

r_0 : rayon de la fondation

ρ : masse volumique du sol .

ν : coefficient de POISSON

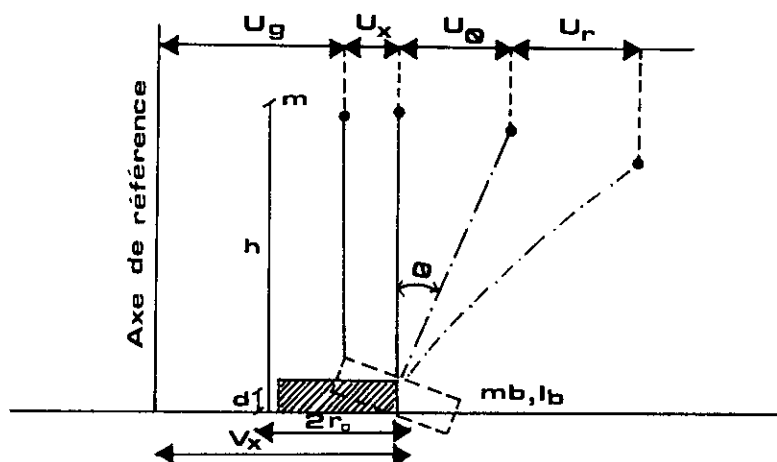
Chapitre VI

Etude d'une Structure A

1772
Etude d'une Structure A
1772

La structure est constituée d'un oscillateur simple dont le seul degré de liberté est le déplacement horizontal, le contact se fait par le biais d'une fondation circulaire rigide, le système possède 3 degrés de liberté :

- mouvement horizontal de la masse de la structure
- mouvement horizontal de la fondation
- mouvement de balancement de la fondation



l'équation de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\{m\} \ddot{U} + [C] \dot{U} + [K] U = \{P\}$$

les matrices masse rigidité , amortissement du système sol structure se découpent suivant les degrés de liberté et de la structure de la fondation :

Le vecteur $\{V\}$ des accélérations absolue du système sol structure s'écrit :

$$\{\dot{V}\} = \{\dot{U}\} + [B] \{\dot{U}_g\}$$

avec :

$\{\ddot{U}_g\}$: vecteur accélération du mouvement sismique

$[B]$: matrice de dimension $(N*3)$ qui caractérise la distribution des composantes sismiques aux accélérations des noeuds du système.

d'où l'équation du mouvement aura la forme suivante :

$$[\bar{M}]\{\bar{U}\} + [\bar{C}]\{\dot{\bar{U}}\} + [\bar{K}]\{\bar{U}\} = -[M][B]U_g$$

avec :

$$\{U\} = [\bar{\phi}]\{\bar{U}\} \quad ; \quad [\bar{\phi}] = \begin{bmatrix} [\phi] & [T_{sb}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}$$

dans le cas d'un oscillateur simple on a: $[T_{sb}] = [1, h]$

cette matrice définit la modification du mouvement de la masse dû à un déplacement et rotation unitaire de la fondation.

notons que :

$$[\bar{\phi}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & 1 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{U\} = [\bar{\phi}]\{\bar{U}\} \quad ; \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_x + U_\theta + U_r \\ U_x \\ \theta \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} U \\ U_x \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{\phi}]\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}U + U_x + h\theta \\ U_x \\ \theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_r = \frac{U}{\sqrt{m}} \\ U_x = U_x \\ U_\theta = h\theta \end{Bmatrix}$$

donc :

$$[\bar{M}]\{\bar{U}\} + [\bar{C}]\{\dot{\bar{U}}\} + [\bar{K}]\{\bar{U}\} = \bar{P}$$

avec :

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{m} & \sqrt{mh} \\ \sqrt{m} & m+m_b & mh \\ \sqrt{mh} & mh & mh^2+I_b \end{bmatrix}$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} 2\omega\xi & 0 & 0 \\ 0 & C_{xx} & C_{x\theta} \\ 0 & C_{\alpha x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\alpha x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = -[\bar{\phi}]^T [M][B]\dot{U}_g = - \begin{bmatrix} \sqrt{m} \\ m+m_b \\ mh \end{bmatrix} \dot{U}_g$$

posons : $\mathbf{U}_r = \frac{U}{\sqrt{m}}$; $U_\theta = h\theta$

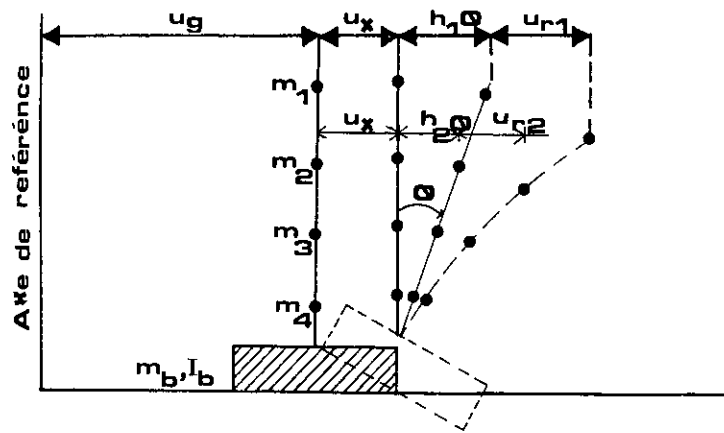
les équations deviennent :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{m+m_b}{m} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{mh^2+I_b}{mh^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_r \\ \ddot{U}_x \\ \ddot{U}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega\xi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{xx}}{m} & \frac{C_{x\theta}}{mh} \\ 0 & \frac{C_{\alpha x}}{mh} & \frac{C_{\theta\theta}}{mh^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_r \\ \dot{U}_x \\ \dot{U}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{xx}}{m} & \frac{K_{x\theta}}{mh} \\ 0 & \frac{K_{\alpha x}}{mh} & \frac{K_{\theta\theta}}{mh^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ U_x \\ U_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ m+m_b \\ m \end{bmatrix} \ddot{U}_g$$

Chapitre VII

Etude d'une Structure A
Plusieurs A A A
Etude d'une Structure
Plusieurs A A A

Par analogie a l'etude du systéme à 1 seul degré e liberté , la structure peut être schématisée comme suit :



l'equation du mouvement s'ecrit :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\}$$

Le vecteur acceleration absolu du systéme sol-structure s'ecrit :

$$\{\ddot{V}\} = \{\ddot{U}\} + [B]\{\ddot{U}_g\}$$

ou $\{\ddot{U}_g\}$: vecteur acceleration du mouvement sismique (3 composants généralement suivant les 3 directions x,y, z)

$[B]$: matrice de dimension $(n*3)$ caractérisant la distribution des composantes sismiques aux accélarations des noeuds du systéme.

on décompose le vecteur $\{v\}$ suivant les degrés de liberté de la structure (s) et ceux (b) de la fondation

$$\{\ddot{V}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{V}_s\} \\ \{\ddot{V}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_s\} \\ \{\ddot{U}_b\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_s] \\ [B_b] \end{bmatrix} \ddot{U}_g$$

\ddot{U}_g : est la seule composante de $\{\ddot{U}_g\}$ suivant la diirection horizontale.

l'equation du mouvement aura la forme suivante :

$$[\overline{M}]\{\overline{U}\} + [\overline{C}]\{\overline{U}\} + [\overline{K}]\{\overline{U}\} = -[\overline{M}][B]U_g$$

avec :

$$\{U\} = [\overline{\phi}]\{\overline{U}\}$$

$$[T_{sb}] = \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 1 & h_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & h_n \end{bmatrix} \quad [\overline{\phi}] = \begin{bmatrix} [\phi] & [T_{sb}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} ; \quad [\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot & \cdot & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdot & \cdot & \phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdot & \cdot & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_x + h_1\theta + U_{r1} \\ U_x + h_2\theta + U_{r2} \\ \cdot \\ U_x + h_n\theta + U_m \\ U_x \\ \theta \end{Bmatrix}$$

soit $\{U\}$ tel que

$$\{\overline{U}\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ U_n \\ U_x \\ \theta \end{Bmatrix} \quad [\overline{\phi}]\{\overline{U}\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot & \phi_{1n} & 1 & h_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdot & \phi_{2n} & 1 & h_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdot & \phi_{nn} & 1 & h_n \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ U_n \\ U_x \\ \theta \end{Bmatrix} = \{U\}$$

par conséquent , on obtient :

$$\mathbf{U}_{r1} = \sum_{j=1}^n \phi_{1j} U_j$$

.

.

$$\mathbf{U}_{ri} = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} U_j$$

.

.

$$\mathbf{U}_m = \sum_{j=1}^n \phi_{mj} U_j$$

$$\mathbf{u}_x = U_x$$

$$\mathbf{u}_{\theta_i} = h_i \theta$$

Chapitre VIII

Modèle Simplifié
Modèle Simplifié

Pour faciliter la résolution du système d'équation du mouvement, on se ramène propositions suivantes :

- ne tenir compte des termes diagonaux des matrices $[K]$ et $[C]$
- la prise en compte que de premier mode de vibration ϕ_1

l'équation du mouvement aura la forme :

$$[\bar{M}_1]\{\bar{U}_1\} + [\bar{C}_1]\{\dot{\bar{U}}_1\} + [\bar{K}_1]\{\bar{U}_1\} = \{\bar{P}_1\}$$

l'indice 1 désigne le modèle simplifié

La matrice masses :

$$[\bar{M}_1] = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^n \phi_{1i} m_i & \sum_{i=1}^n \phi_{1i} h_i m_i \\ \sum_{i=1}^n (\phi_{1i} m_i)^2 + m_b & \left(\sum_{i=1}^n \phi_{1i} m_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \phi_{1i} m_i h_i \right) & \\ \text{sym} & \sum_{i=1}^n (\phi_{1i} m_i h_i)^2 + I_b & \end{bmatrix}$$

- la matrice rigidité:

$$[\bar{K}_1] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

- La matrice amortissement :

$$[\bar{C}_1] = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

- Le vecteur chargement fictif :

$$\{\bar{P}_1\} = - \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \phi_{1i} m_i \\ \sum_{i=1}^n (\phi_{1i} m_i)^2 + m_b \\ \left(\sum_{i=1}^n \phi_{1i} m_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \phi_{1i} m_i h_i \right) \end{array} \right\} \dot{U}_g$$

le vecteur de déplacement :

$$\{\bar{U}_1\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_x \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Posons :

$$m^* = \sum_{i=1}^n (\phi_{1i} m_i)^2$$

$$h^* = \sum_{i=1}^n (\phi_{1i} m_i h_i) / \sum_{i=1}^n (\phi_{1i} m_i)$$

$$\mathbf{u} = \frac{U_1}{\sqrt{m^*}}$$

$$\mathbf{u}_\theta = h^* \theta$$

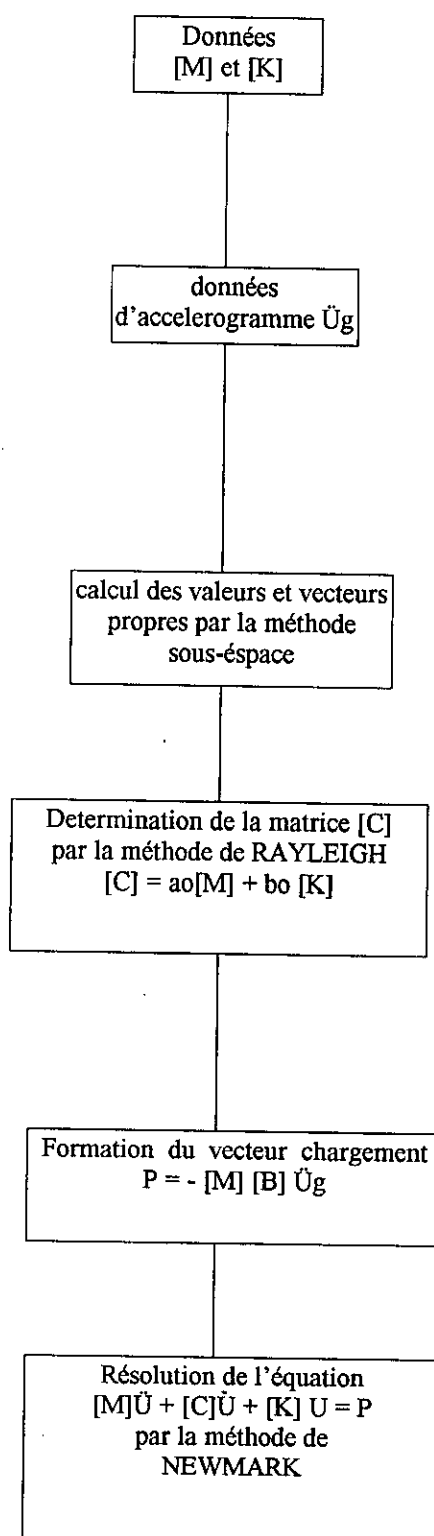
d'ou le système devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{m_b}{m^*} & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \frac{I_b}{m^* h^{*2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{U}_x \\ \ddot{U}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_1 \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{xx}}{m^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{\theta\theta}}{m^* h^{*2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{U}_x \\ \dot{U}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{xx}}{m^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{\theta\theta}}{m^* h^{*2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ U_x \\ U_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_b}{m^*} \\ 1 \end{Bmatrix} \dot{U}_g$$

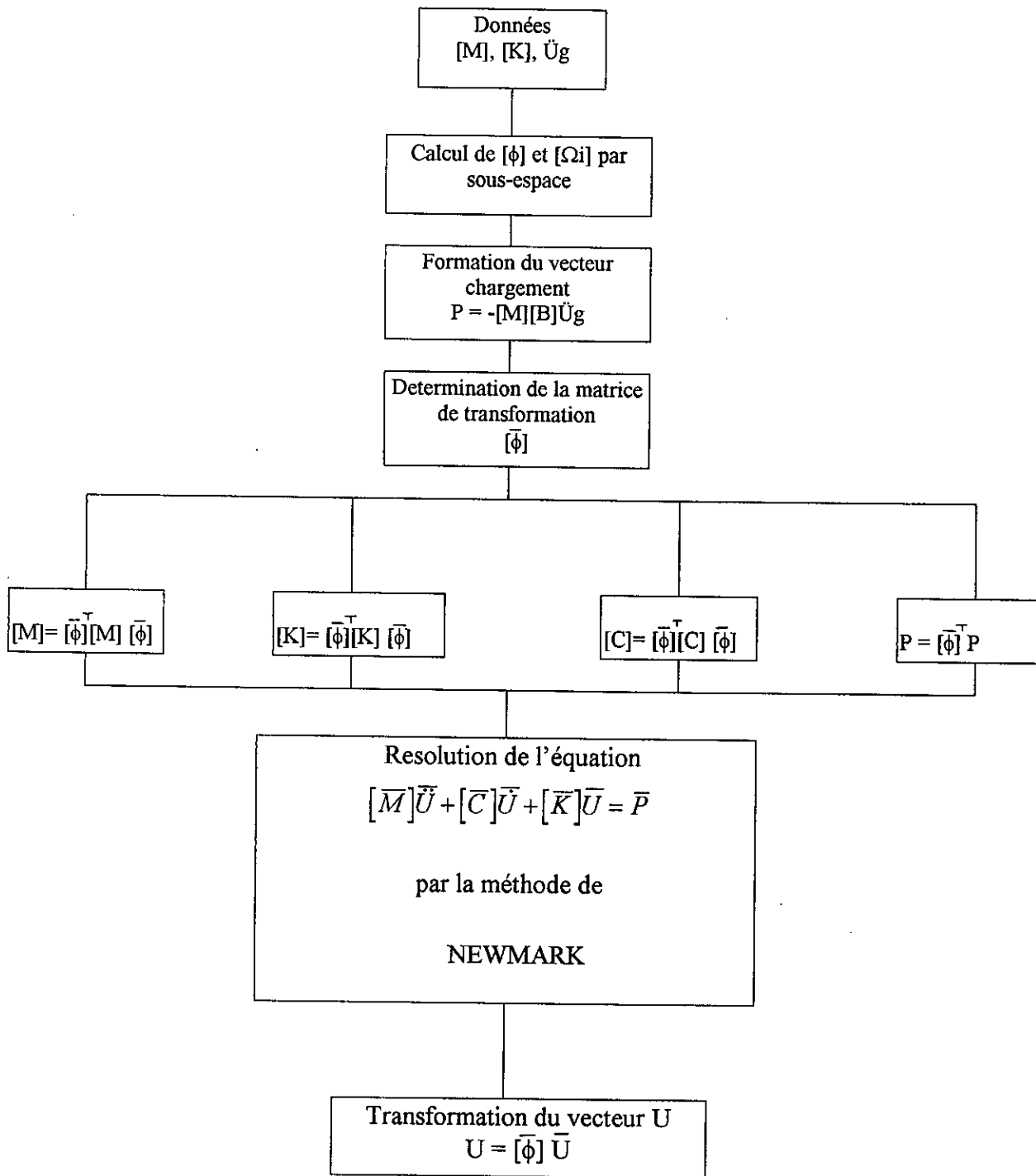
Chapitre IX

Programmation

Etude d'une structure encastrée a sa base



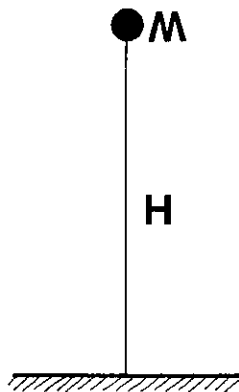
Etude d'une structure avec prise en compte l'interaction sol-structure



Application:

1/ Systeme a un seul degre de liberte:

Chateau d'eau



$$E=3.67e6 \text{ T/m}^2$$

$$M=930 \text{ t}$$

$$H=28.86 \text{ m}$$

* La fondation est un radier circulaire de rayon $R=8\text{m}$

* Type de sol:

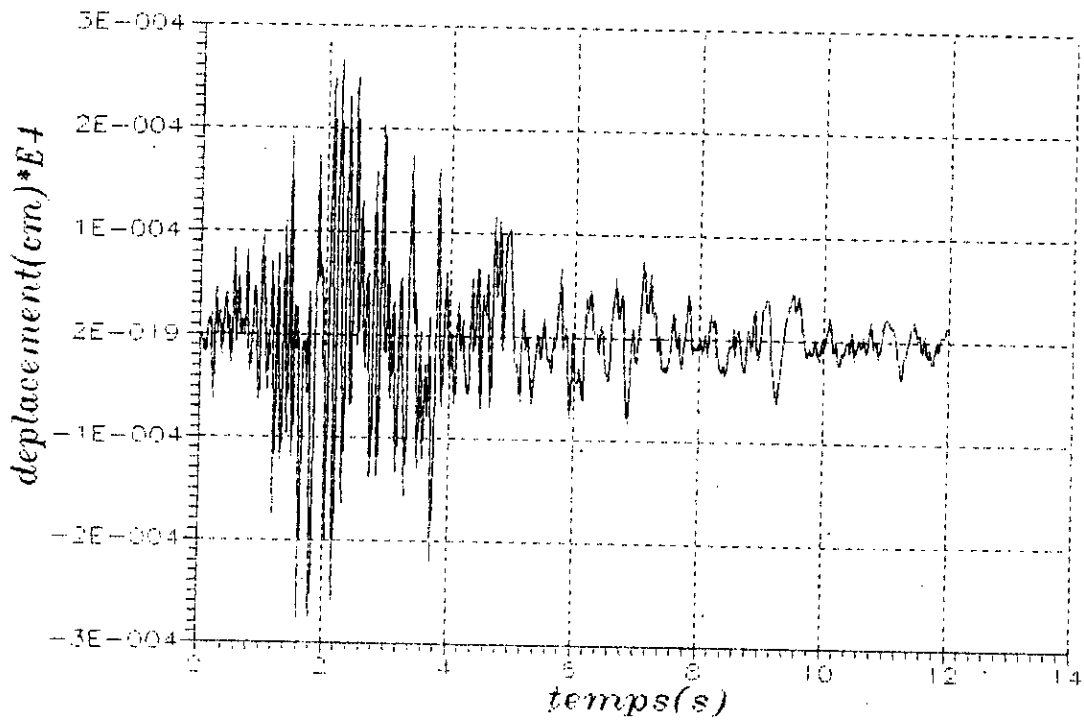
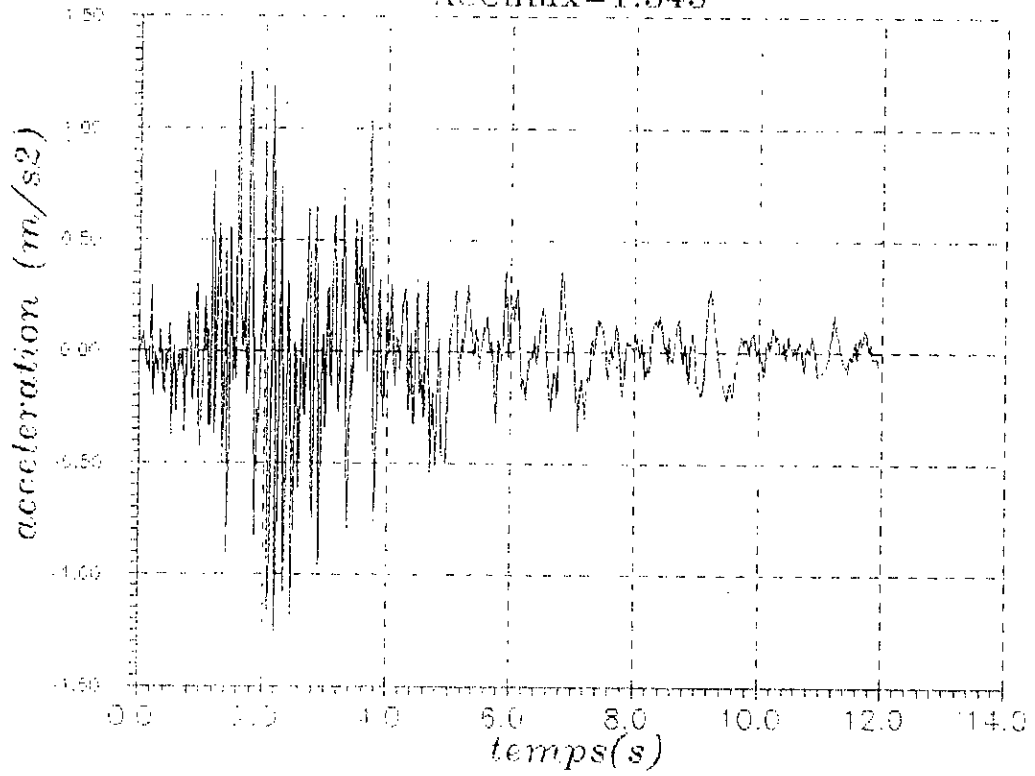
$$\nu=0.4$$

$$\rho=1750 \text{ kg/m}^3$$

* Contrainte admissible=2.7 bars

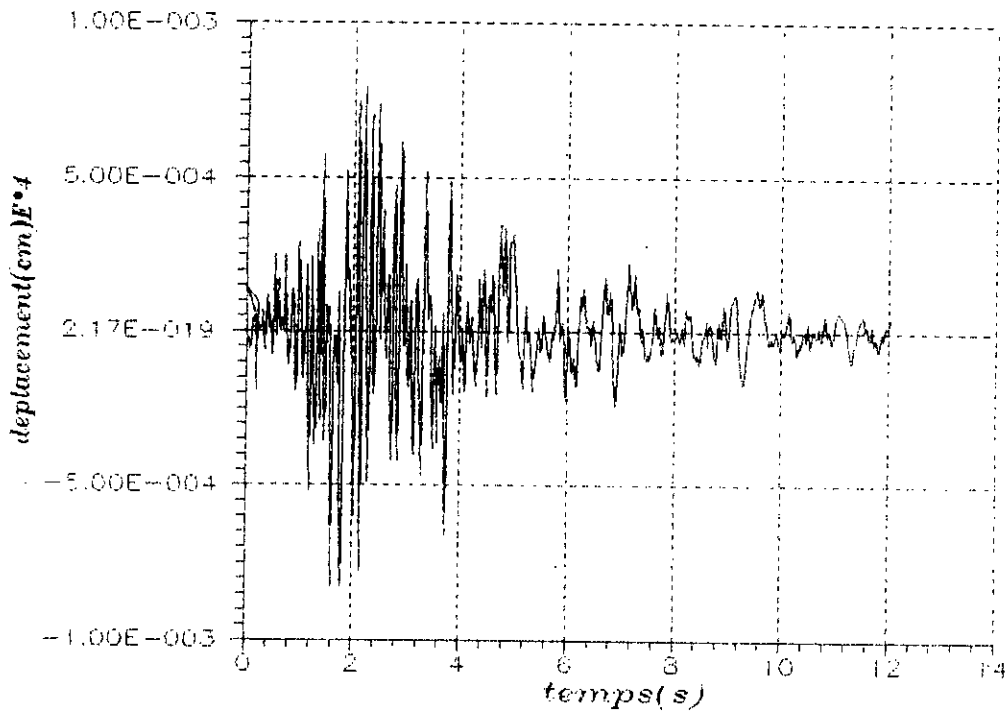
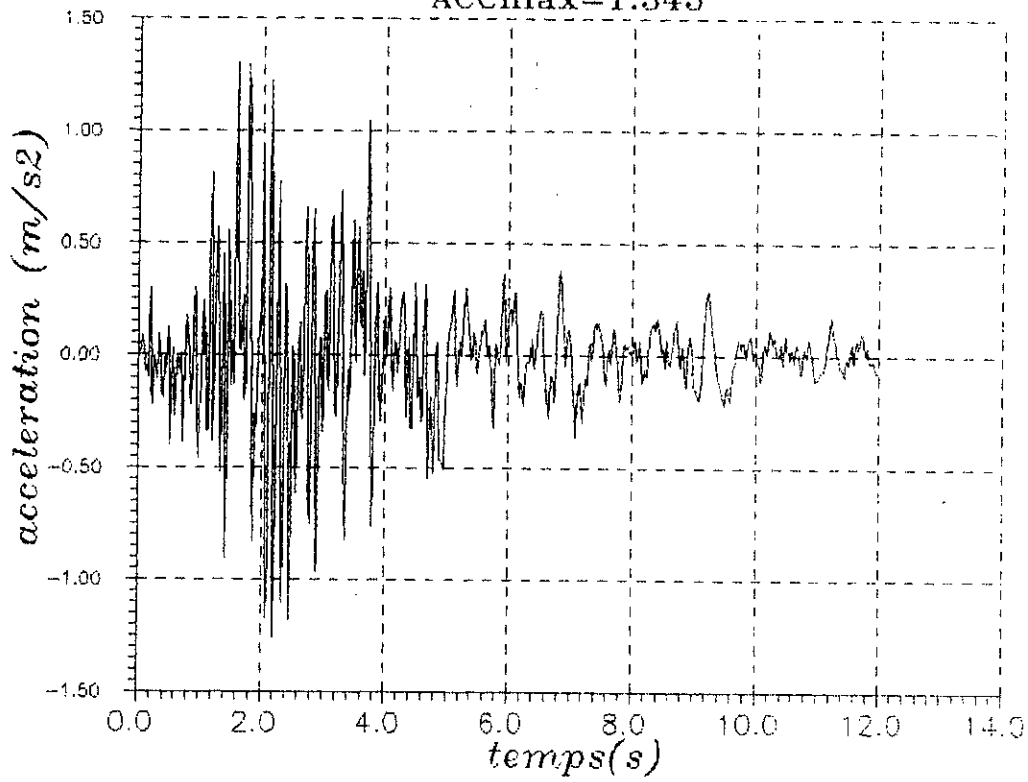
ACCELEROGRAMME

ACCmax=1.345

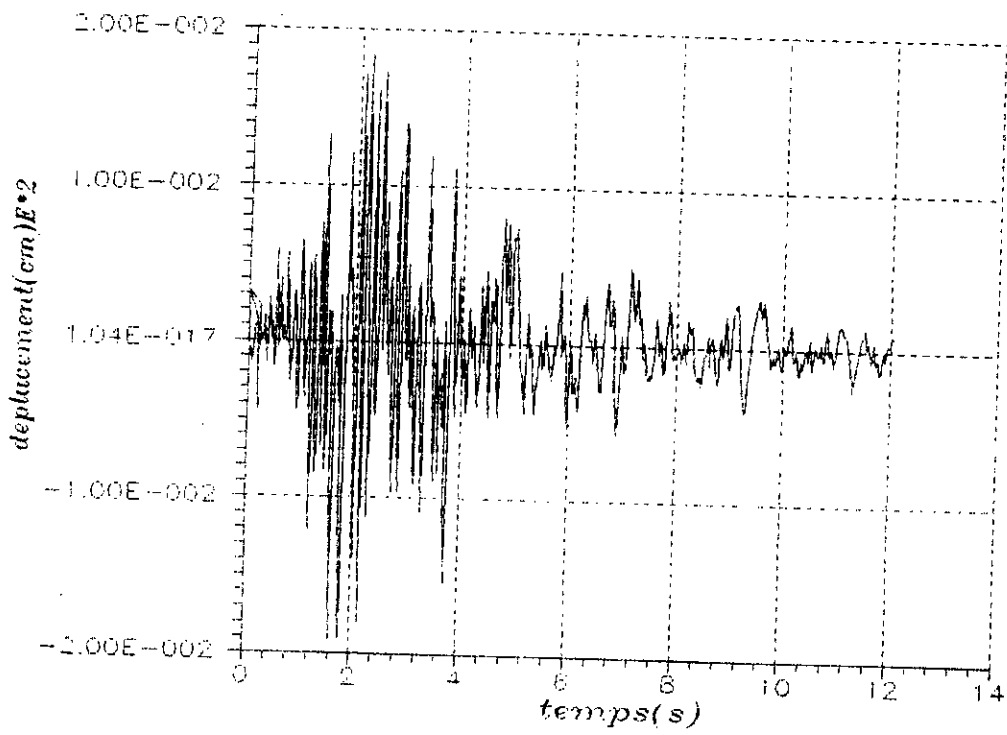


Déplacement du chateau d'eau (U_{max}=2.66 cm)

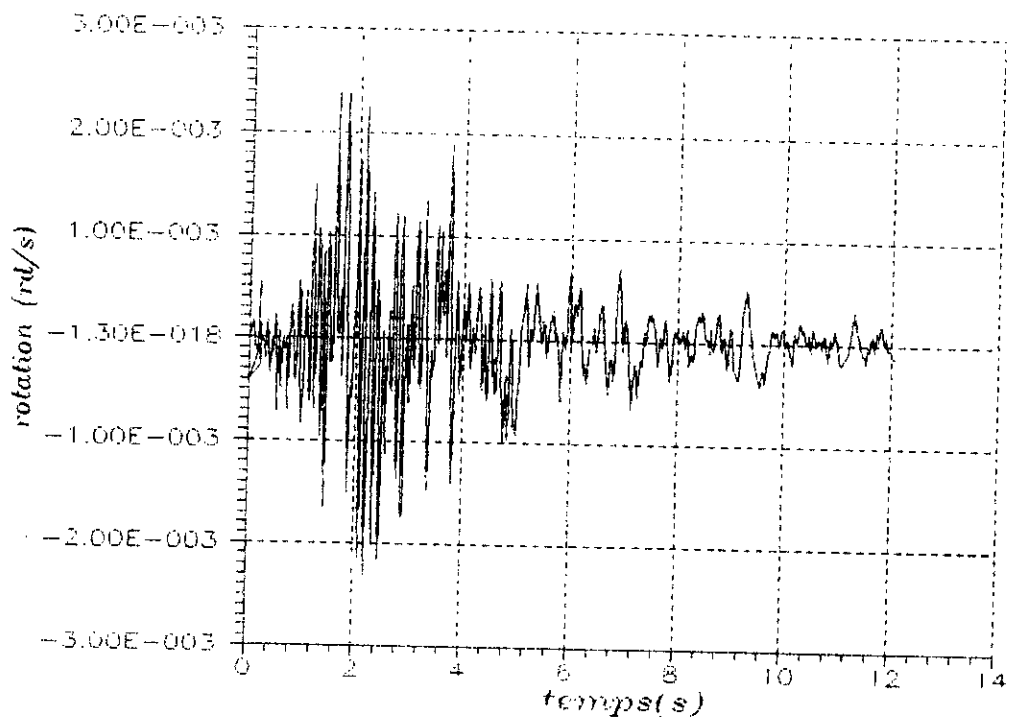
ACCELEROGRAMME
ACCmax=1.345



Deplacement du chateau d'eau (U_{max} = 6.66 cm)



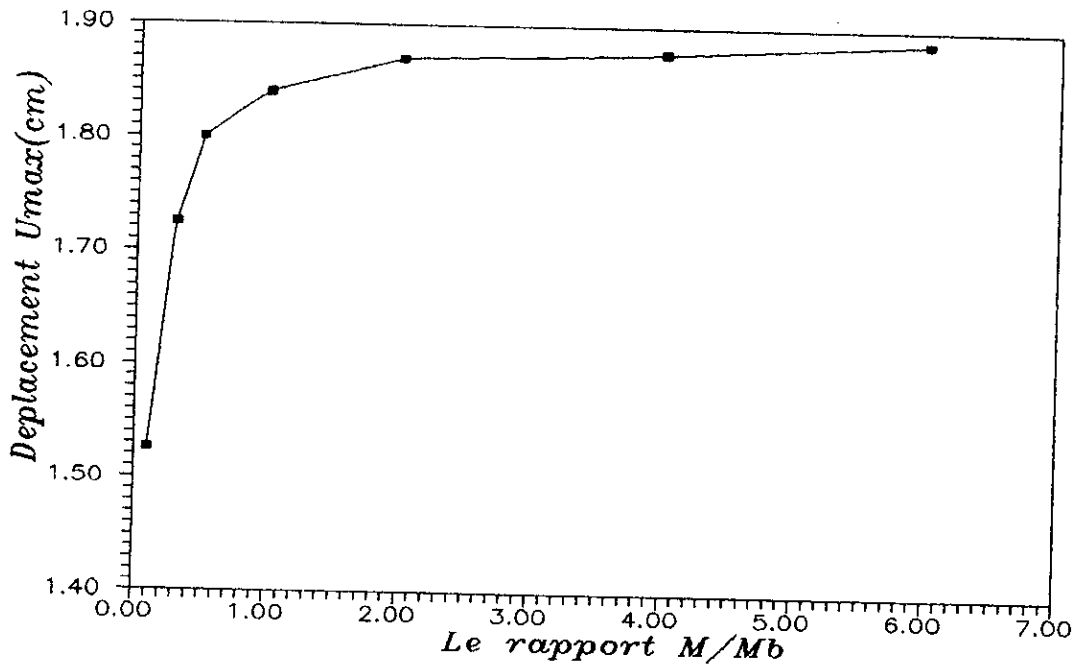
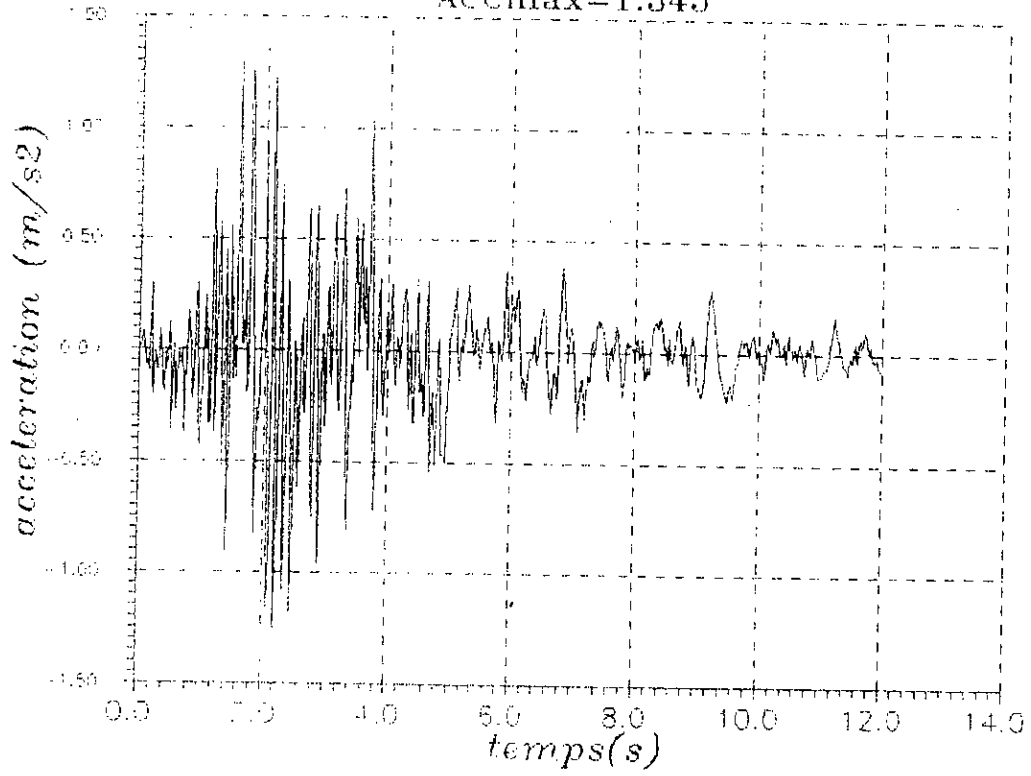
Deplacement de la fondation ($U_{max} = 1.53 \text{ cm}$)



Rotation de la fondation ($TET_{max} = 2.3E_{g^d/s}$)

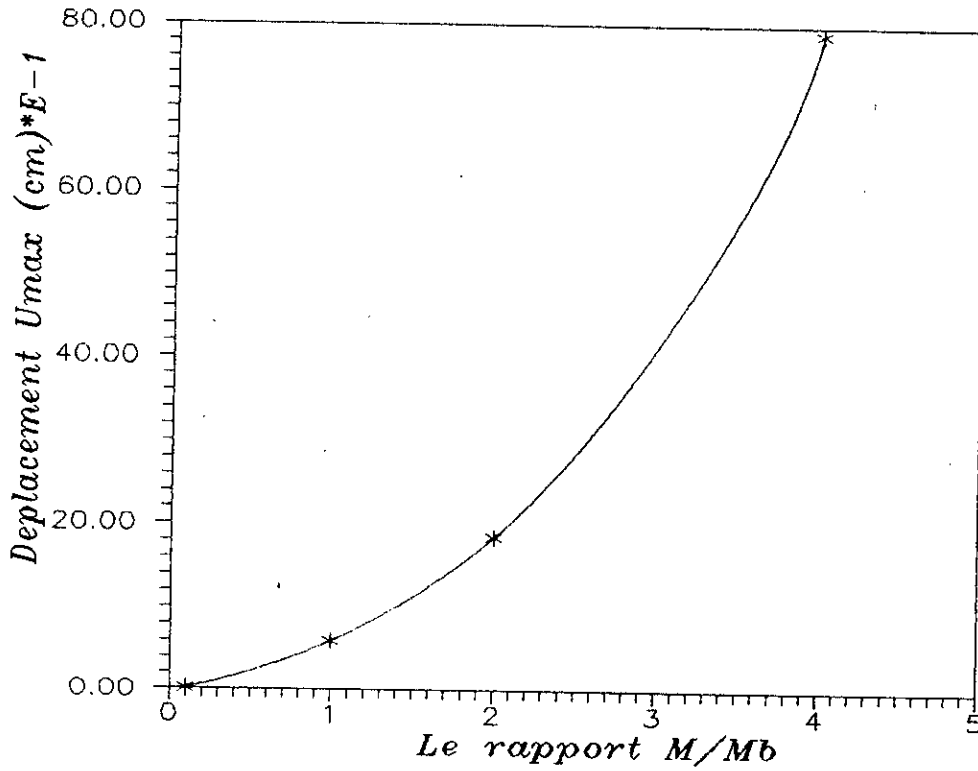
ACCELEROGRAMME

ACCmax=1.345



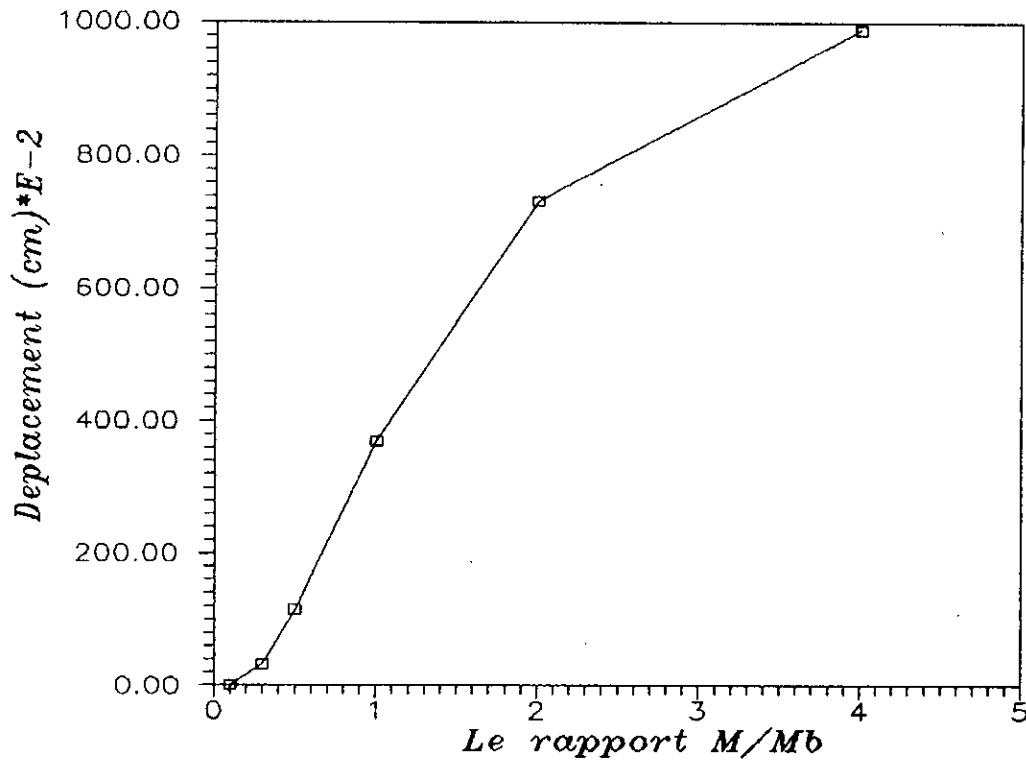
Variation du déplacement Max du chateau en fonction du rapport M/M_b

Gravier: $\bar{\sigma}_s = 4 \text{ bars}$



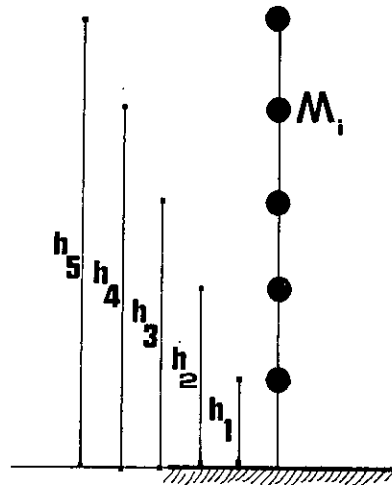
Variation du déplacement Max de la masse en fonction du rapport M/M_b

Sable: $\bar{\sigma}_s = 2,7 \text{ bars}$



Variation du déplacement Max de la masse en fonction du rapport M/M_b

2/ Systeme à plusieurs degres de liberte:



$M_i = 400$ t
 $H_1 = 3.5$ m
 $H_2 = 7.0$ m
 $H_3 = 10.5$ m
 $H_4 = 14.0$ m
 $H_5 = 17.5$ m

* La fondation est un radier circulaire de rayon $R=8$ m

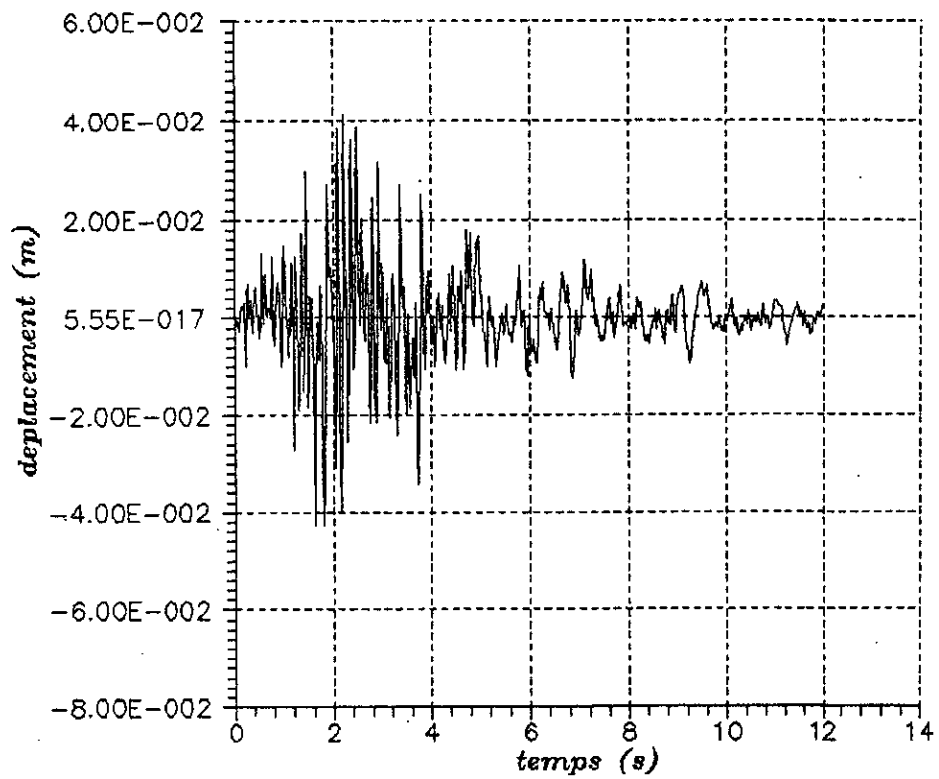
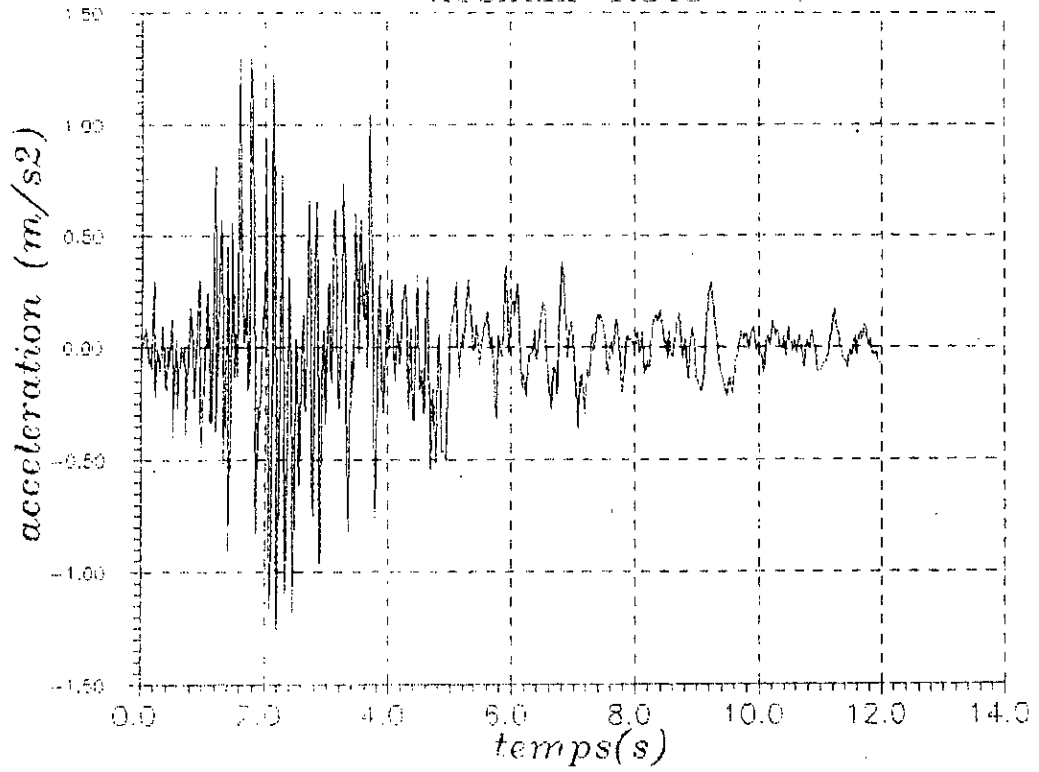
* Type de sol :

$\rho = 1750$ Kg/m³
 $\nu = 0.4$

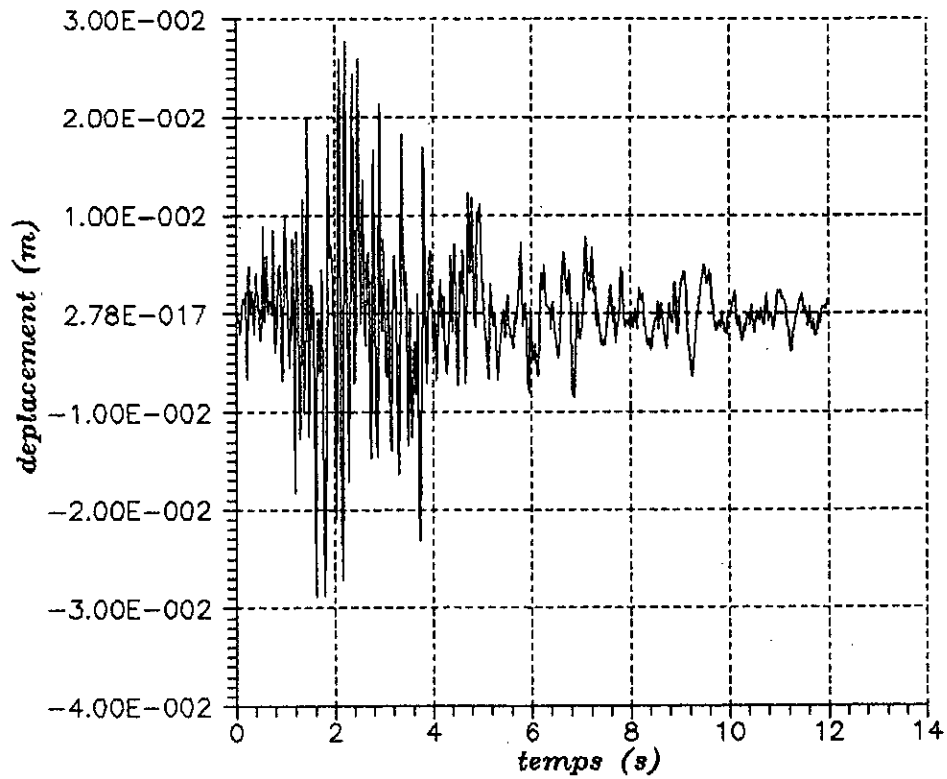
* Contrainte admissible = 2.7 bars

ACCELEROGRAMME

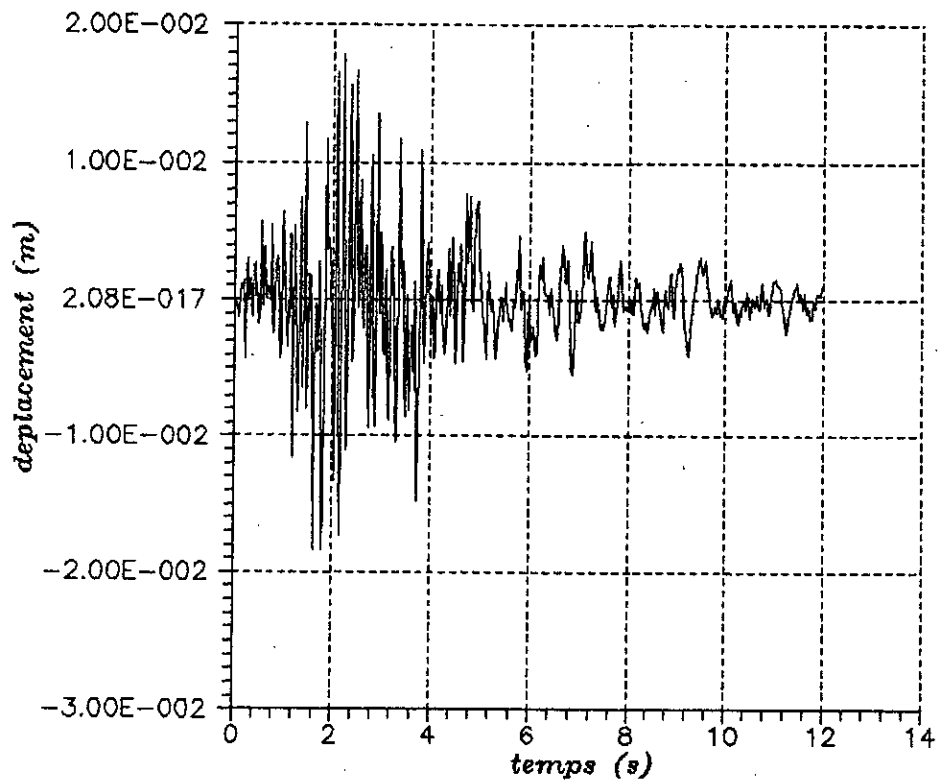
ACCmax=1.345



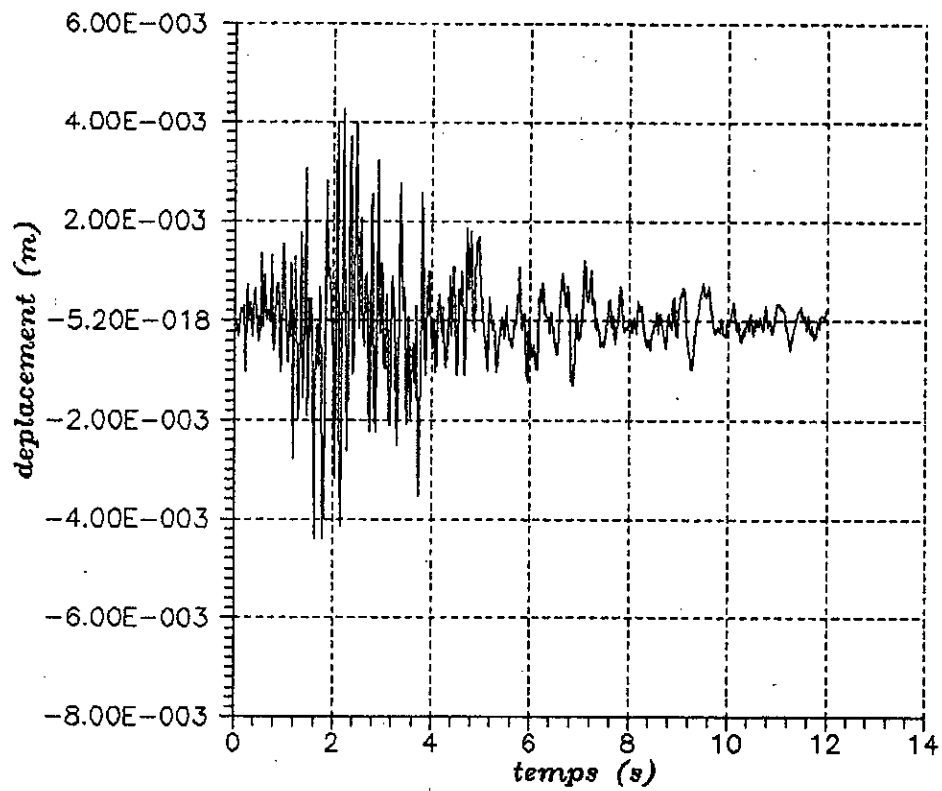
Displacement de la masse 5 ($U_{max} = 4.276$ cm)



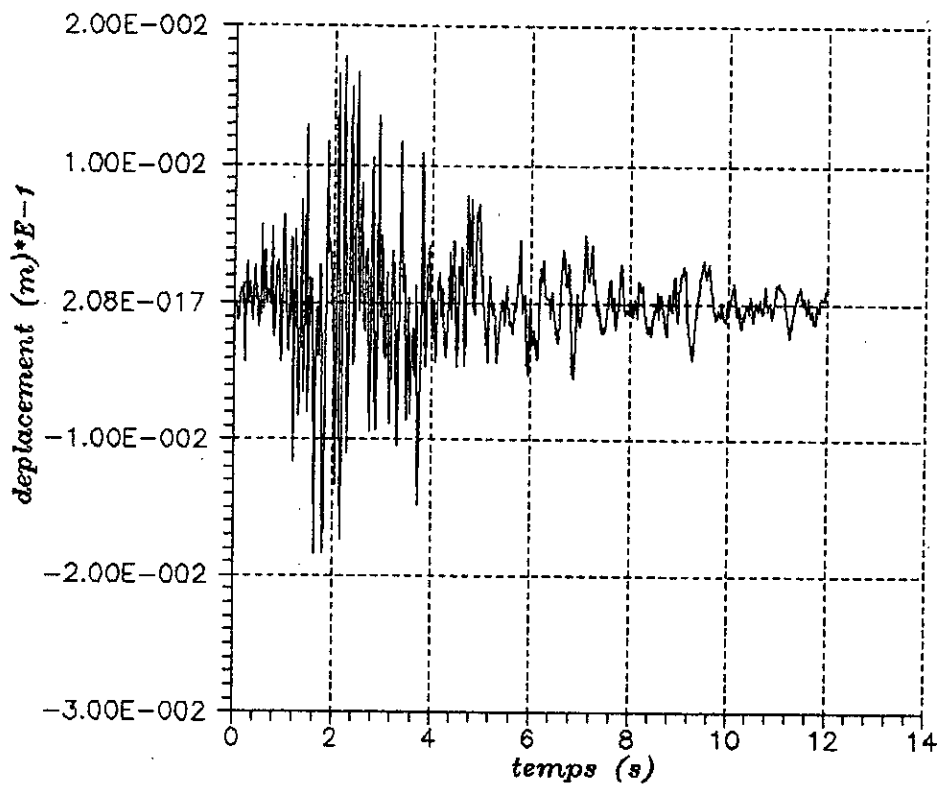
Déplacement de la masse 4 ($U_{max} = 2.886$ cm)



Déplacement de la masse 3 ($U_{max} = 1.846$ cm)



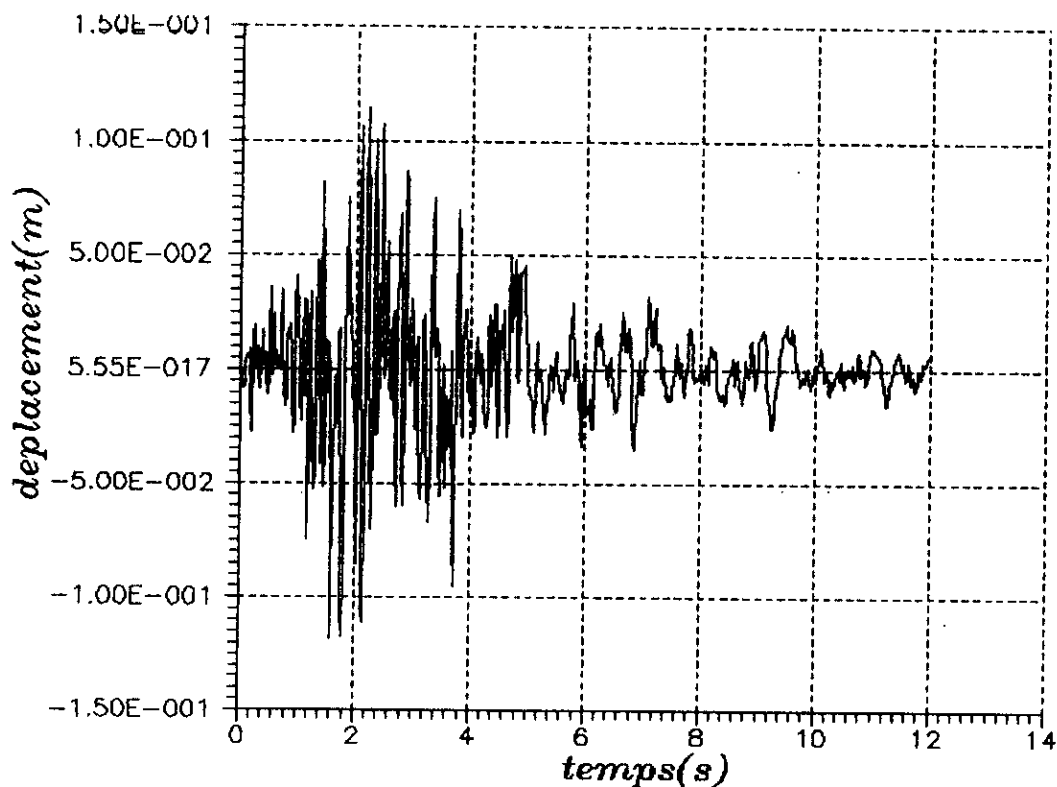
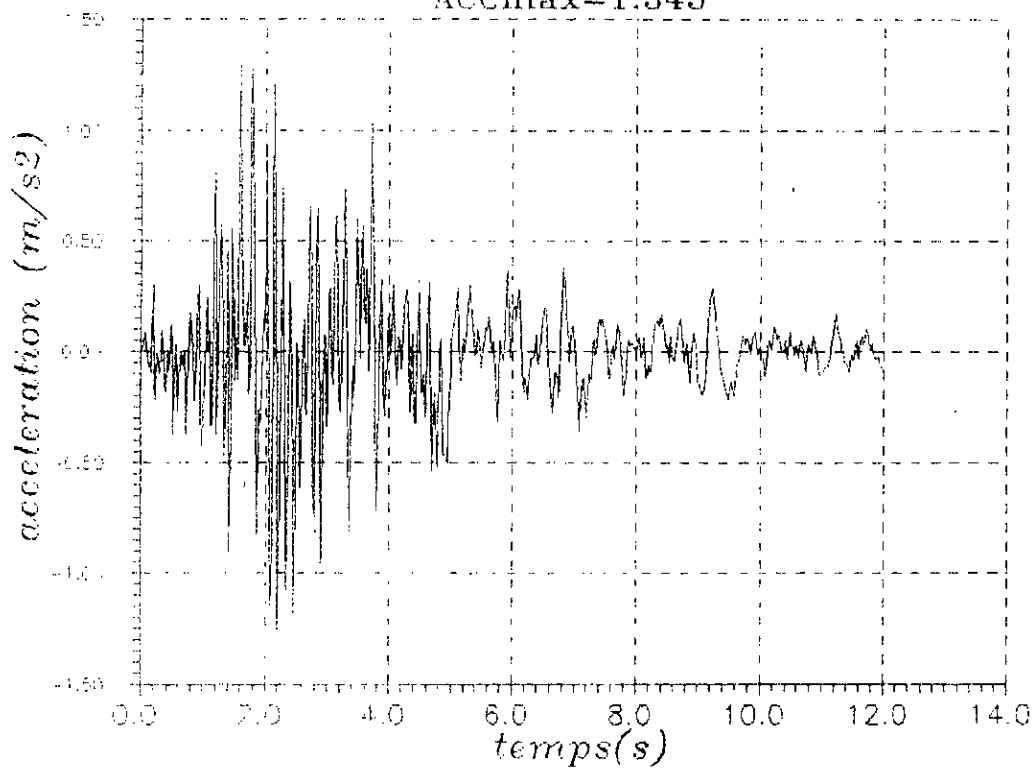
Déplacement de la masse 2 ($U_{max} = 0.44$ cm)



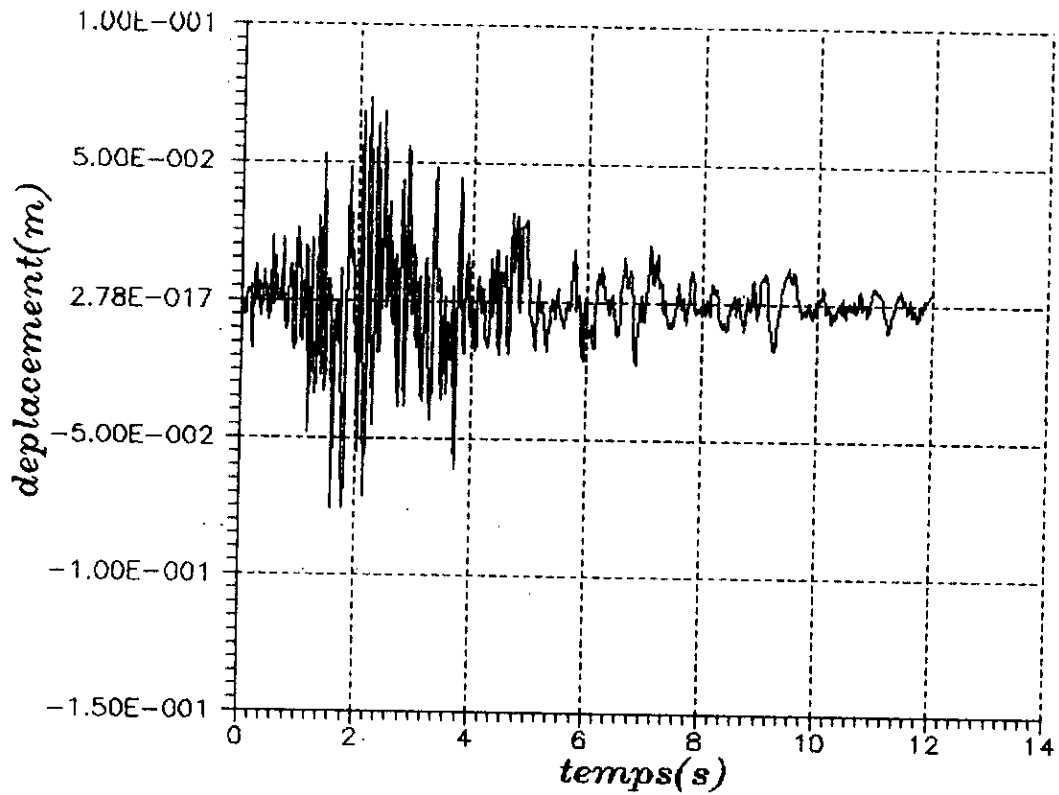
Déplacement de la masse 1 ($U_{max} = 0.103$ cm)

ACCELEROGRAMME

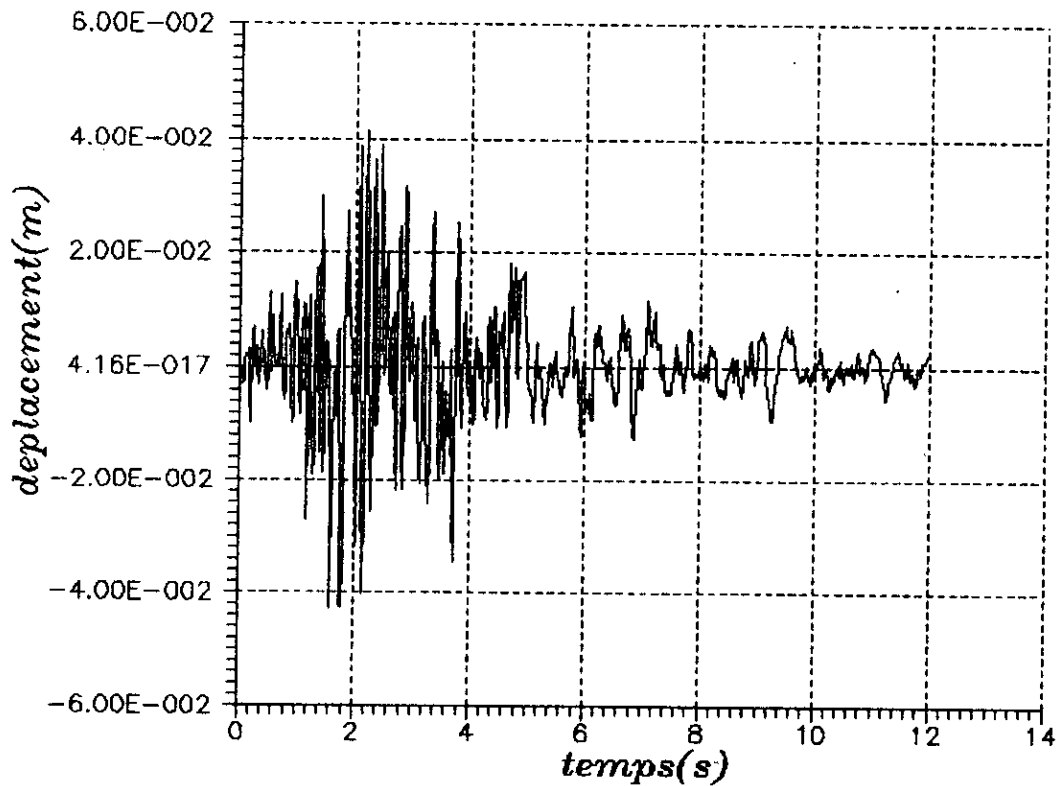
ACCmax=1.345



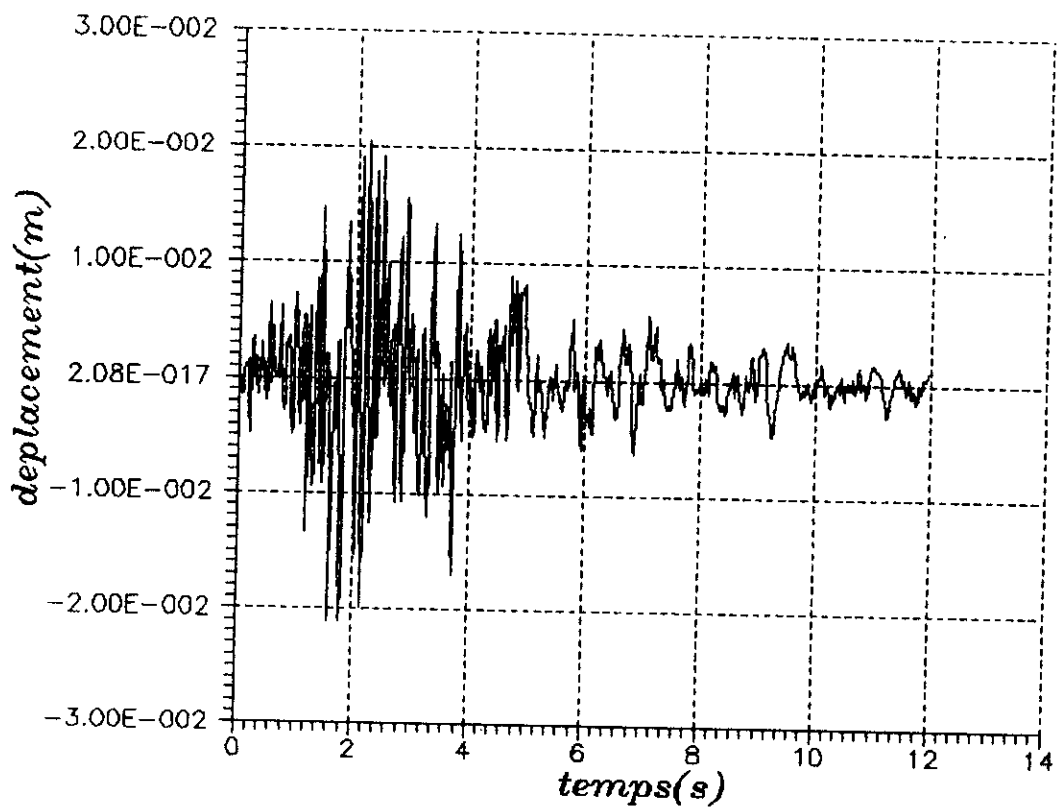
Deplacement de la masse 5 ($U_{max} = -11.85$ cm)



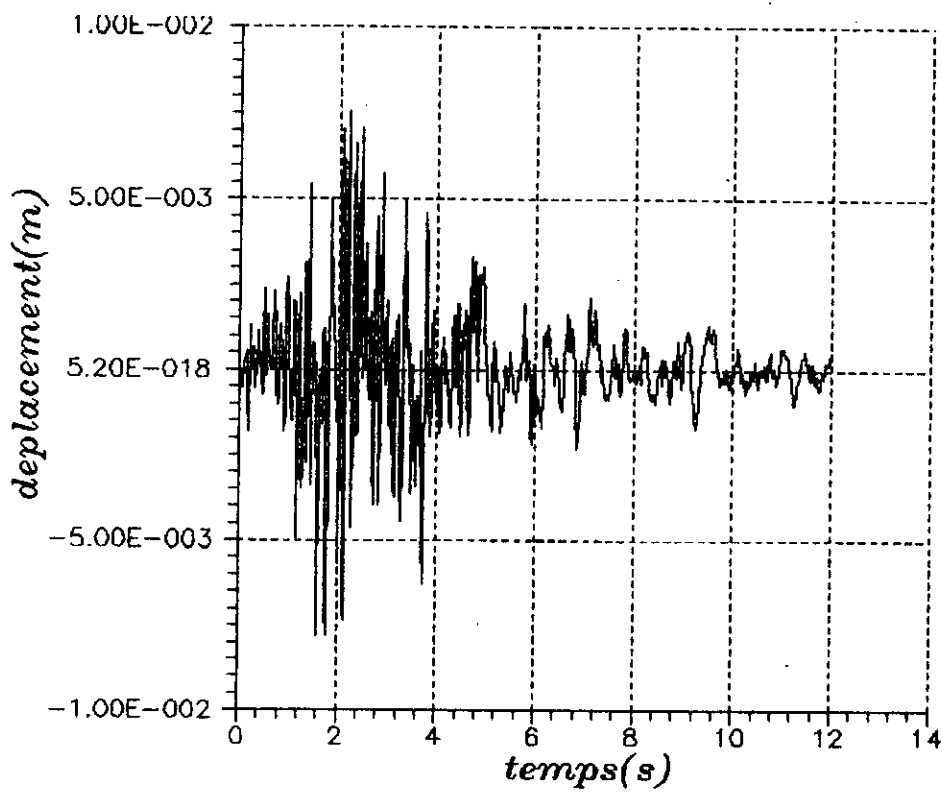
Deplacement de la masse 4 (U_{max} = -7.607 cm)



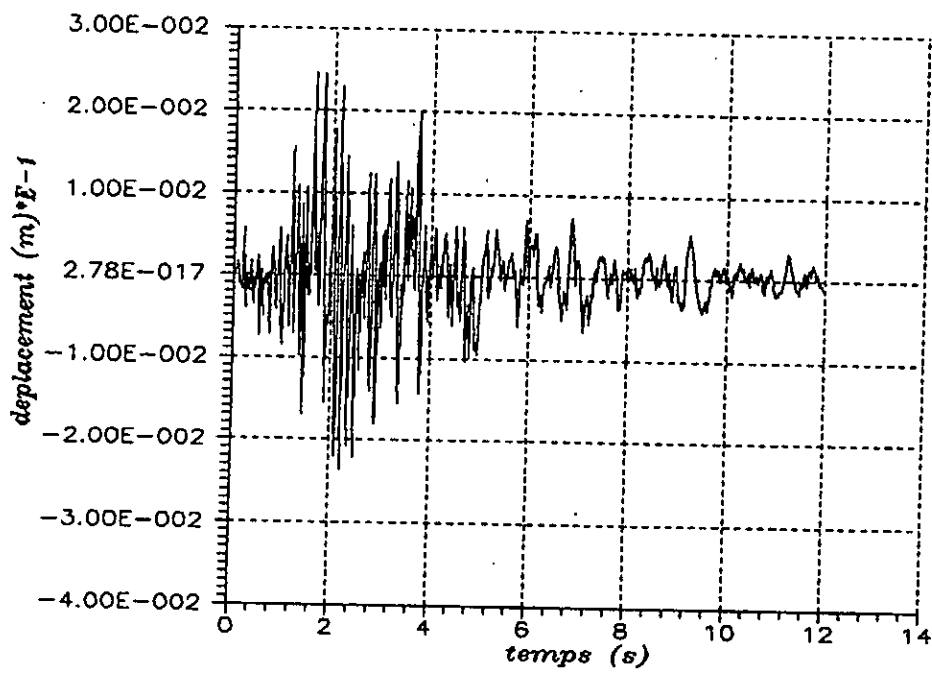
Deplacement de la masse 3 (U_{max} = -4.297 cm)



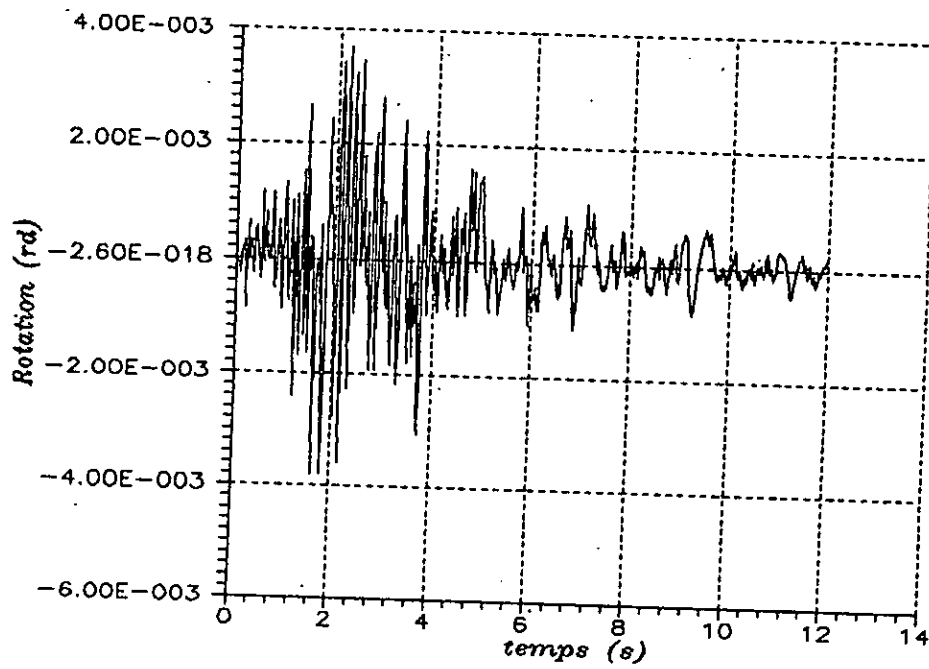
Deplacement de la masse 2 ($U_{max} = -2.118 \text{ cm}$)



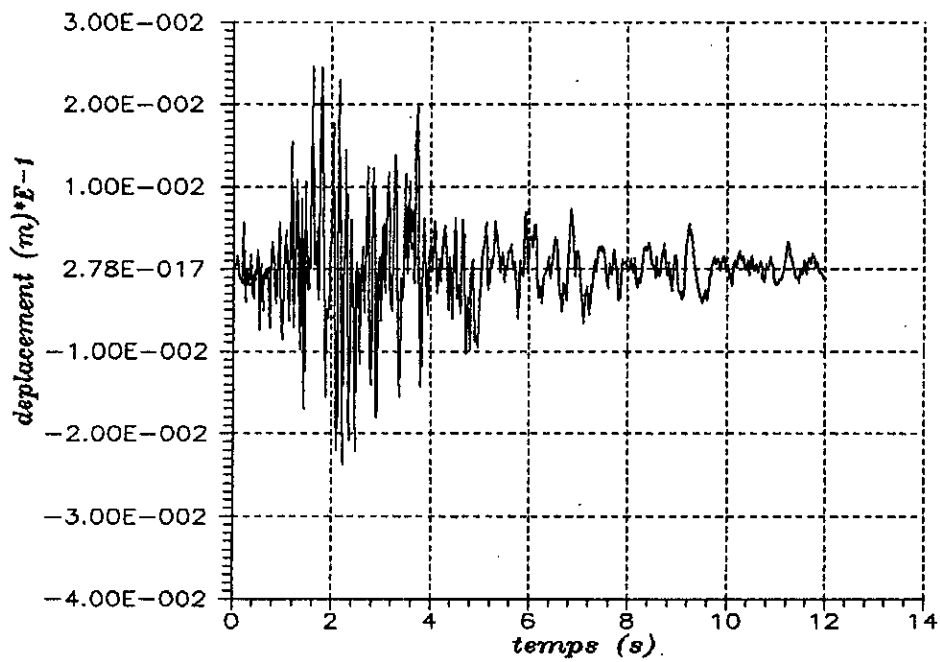
Deplacement de la masse 3 ($U_{max} = -0.782 \text{ cm}$)



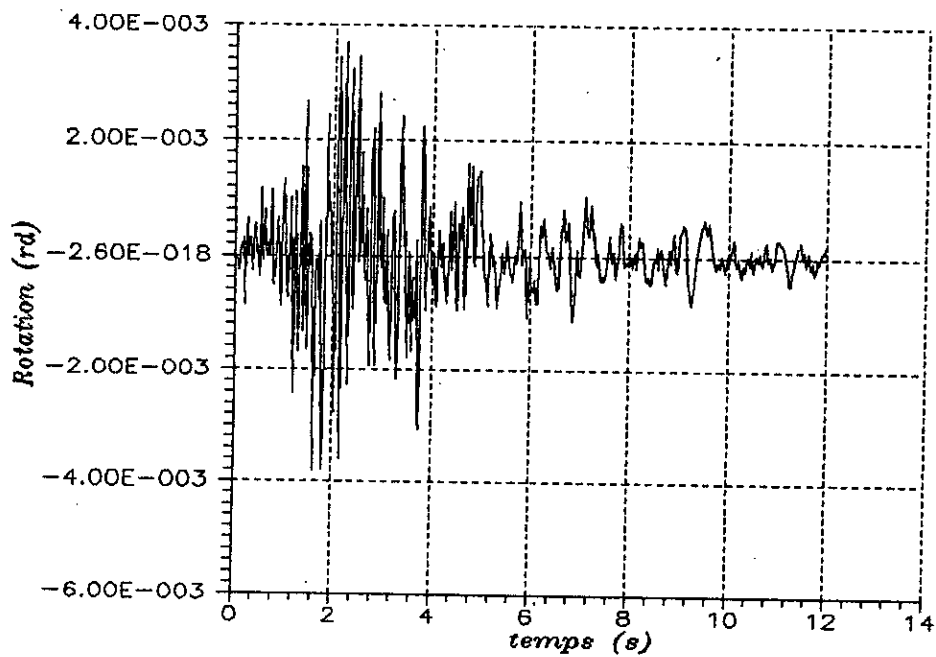
Déplacement de la fondation ($U_{max} = 0.2451$ cm)



Rotation de la fondation ($Teta_{max} = 3.82E-3$ rd)



Deplacement de la fondation ($U_{max} = 0.2451$ cm)



Rotation de la fondation ($Teta_{max} = 3.82E-3$ rd)

Interpretation des résultats :

1. D'après les résultats obtenus ; on remarque que :

* Les déplacements sont plus importants dans le cas où on a pris en compte l'interaction sol-structure que celui où la structure est supposée encastrée au sol.

* Le déplacement et la rotation de la fondation qui ont été négligés dans le cas où la structure est encastrée, s'avèrent non négligeables devant les déplacements de la structure.

* Le déplacement augmente avec la hauteur de la masse en raison de la diminution de la rigidité flexionnelle.

2. Dans l'étude paramétrique :

* On a remarqué que le déplacement relatif (déplacement de la masse M de la structure par rapport à la fondation de masse M_b) max augmente avec le rapport M/M_b .

* L'influence du type de sol sur le déplacement relatif max de la masse de la structure clairement dans l'exemple qu'on a traité.

Dans le 1^{er} cas, où le sol est un gravier de contrainte admissible égale à 4 bars, le déplacement relatif max est plus grand que celui correspondant au 2^{em} sol qui est un sable de contrainte admissible égale à 2,7 bars, pour les mêmes rapports M/M_b .

Conclusion

Le présent travail nous a permis de faire ressortir l'importance d'un phénomène d'interaction sol-structure, et les effets non négligeables de celui-ci sur la réponse des structures a des excitations sismiques, chose que les règlements parasismiques actuels tendent a étudier de façon forfaitaire. En effet, outre le type de sol qui est l'unique paramètre pris en compte dans ces règlements, ils existe d'autres paramètres dont les effets sont considérables, à savoir:

- * La géométrie de la fondation
- * L'enterrement de la fondation

Nous avons également constaté l'intérêt d'adapter un rapport masse de la structure a celle de sa fondation adéquate, et de la prise en considération de la rigidité flexionnelle de la structure.

De plus nous avons remarqué qu'il était possible d'utiliser les spectres de réponses pour le calcul statique équivalent à partir de ω_1 et ϕ_1 obtenus des matrices masse et rigidité.

Nous avons souhaité, en plus, d'étudier l'influence de l'amortissement de la structure et du sol sur la réponse, ainsi que l'adoption d'un modèle simplifié qui nous a renseigné sommairement sur l'influence des divers paramètres pour des structures plus ou moins complexes, en les assimilant à des structures simples à l'aide des notions de masse et de hauteur généralisées.

Il aurait été intéressant aussi d'adapter ce modèle aux structures à masses et caractéristiques réparties (exemple: silos, cheminées,...) et de voir l'influence du phénomène d'interaction sur:

- * Les autres degrés de liberté:
 - Rotation
 - Structures spatiales (6 ddl/noeud)

* Lorsque les effets de l'effort tranchant ne sont pas négligeables.

* L'influence sur les déplacements dûs à l'inertie de rotation et sur l'interaction effort normal-moment fléchissant.

Ceci pourrait être l'objet d'une autre étude ou d'une suite à notre travail.

Bibliographic

Bibliographie

1) A. PECKER

Dynamique des sols

2) A. CAPRA et V. DAVIDOVICI

Calcul dynamique des structures en zone sismique

3) CLOUGH et PENZIEN

Dynamique des structures

4) K.J. BATHE

Finite element procedure in engineering analysis

5) J.P. WOLF

Dynamics interaction soil-structures

6) DHATT et TOUZOT

Reperesentation de la methode des elements finis