

6/91

وزارة الجامعات
Ministère aux Universités

2 Ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE DES
STRUCTURES AUTOSTABLES

Proposé par :

Pr.B. TILIOUINE

Etudié par :

A.DALI

Y.BOUQUERRA

Dirigé par :

Pr.B. TILIOUINE

PROMOTION JUIN 91

وزارة الجامعات
Ministère aux Universités

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE DES
STRUCTURES AUTOSTABLES

Proposé par :

Pr. B. TILIOUINE

Etudié par :

A. DALI

Y. BOUGUERRA

Dirigé par :

Pr. B. TILIOUINE

PROMOTION JUIN 91

11.5.1.1) Théorème des travaux virtuels	
11.5.1.2) Théorème cinématique	
' borne supérieur '.....	14
11.5.1.3) Théorème statique	
' borne inférieur '.....	14
11.5.1.4) Théorème d'unicité.....	14
11.5.1.5) Exemple de la poutre bi-encastree chargée d'une force concentrée au tiers.....	14
11.1.5.6) Portique rectangulaire.....	15
11.5.2) Aperçu sur d'autres méthodes.....	17
11.5.2.1) Méthodes des mécanismes combinés.....	17
11.5.2.2) Méthode de la programmation linéaire.....	17
11.6) Conclusion.....	18
CHAPITRE III : ANALYSE PLASTIQUE RIGIDE	
11.1) Introduction.....	19
11.2) Présentation de la méthode pas à pas.....	20
11.2.1) Principe de la méthode.....	20
11.2.2) Possibilités d'analyses.....	22
11.3) Méthodes d'analyses.....	23
11.4) Présentation de la méthode des déplacements.....	24
11.4.1) Equations régissant le comportement de la structure.....	24

11.4.2) Etablissement de la matrice de rigidité d'une poutre par la méthode des éléments finis.	25
11.4.2.1) Poutre bi-encastree.....	25
11.4.2.2) Poutre encastree en i, articulée en j....	31
11.4.2.3) Poutre articulée en i, encastree j.....	33
11.4.2.4) Poutre bi-articulée.....	34
11.4.2.5) Matrice de rigidité en différentes configurations.....	34
11.5) Analyse avec des charges réparties.....	36
11.5.1) Méthodes par ajustement des rotules.....	36
11.5.2) Méthodes des charges concentrées équivalentes..	36
11.6) Conclusion.....	37
CHAPITRES IV : ETUDES THEORIQUE DE L'EFFET DES REPLISSAGES PAR MAÇONNERIE .	
IV.1) Introduction.....	39
IV.2) Observation sur les essais expérimentales.....	40
IV.3) Etude théorique.....	42
IV.3.1) Généralités.....	42
IV.3.2) Exposé de la méthode.....	43
IV.3.3) Panneau de remplissage avec ouverture.....	44
IV.4) Quelques méthodes pratiques.....	45
IV.4.1) Méthode de L-CIONGRADI.....	45

IV.4.2)	Méthode de T.BOUCHAKOUR.....	
IV.3.3)	Méthode de THIRUVANGADAM.....	50
IV.5)	Conclusion.....	51
CHAPITRE V : ANALYSE PLASTIQUE AVEC EFFET DE L'EFFORT NORMAL.		
V.1)	Introduction.....	52
V.2)	Etude de la plastification au niveau de la section....	53
V.3)	Analyse plastique linéaire.....	56
V.3.1)	Notion de surface d'écoulement plastique.....	57
V.3.2)	Plastification d'une section.....	58
V.3.2.1)	Plastification d'une nouvelle section.....	58
V.3.2.2)	Différentes configurations possibles.....	60
V.3.3)	Détermination d'un mécanisme de ruine.....	61
V.4)	retour élastique des sections plastifiées.....	62
V.5)	Matrice de rigidité.....	63
V.6)	Conclusion.....	74
CHAPITRE VI : ETUDE DYNAMIQUE		
VI.1)	INTRODUCTION.....	75
VI.2)	Modélisation mathématique.....	75
VI.3)	Caractéristiques du modèle.....	76
VI.3.1)	Matrice de rigidité latérale.....	77
VI.4)	Calcul des valeurs et vecteurs propres.....	78
VI.4.1)	Méthodes de STODOLA-VIANELO.....	79

VI.4.2) Méthode de HOLZER.....79
VI.4.3) Méthode de JACOBI.....80

CHAPITRE : VII ORGANISATION DU PROGRAMME

VII.1) Introduction.....83
VII.2) variétés de problèmes.....84
VII.3) Description du programme.....84
VII.4) Liste nominatives des variables.....91
VII.5) Tables et vecteurs utilisée dans le programme.....92
VII.6) Différentes subroutines de programme.....96

CHAPITRE VIII : EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET CONCLUSION

VIII.1) Expérimentation numérique105
VIII.2) Conclusions.....120

CHAPITRE: I

INTRODUCTION

I.1 IMPORTANCE DU CALCUL PLASTIQUE :

Actuellement le Dimensionnement des ossatures est basé sur la théorie de l'élasticité sans considération du comportement plastique du matériau, ce qui a faussé dans une certaine mesure le concept de ruine qui est défini dans nos règlements par: " une structure est hors service quand la contrainte atteint la limite admissible en un seul endroit ";et a entraîné un surdimensionnement non uniforme des structures.

Un calcul plastique permet:

-De suivre le comportement de la structure lors de son chargement allant de zéro jusqu'à la charge de ruine.

-D'exploiter rationnellement le matériau par utilisation de sa capacité complète en vue de diminuer le poids de l'ouvrage, en effet plusieurs chercheurs ont montré qu'en utilisant les méthodes plastiques, on peut économiser 5 à 25% du matériau en comparaison avec les méthodes d'élasticité.

-De simplifier les calculs, l'expérience montre que la plastification se produit uniquement à l'endroit de la section critique, et qu'elle n'a pas d'influence sur une zone assez étendue, ceci nous permet de considérer, que la plastification d'une section se manifeste par la formation d'une rotule plastique; et que les autres sections se comportent élastiquement.

BAKER a déterminé le gain appelé " facteur de forme " dû à la plastification d'une section par rapport à la capacité limite à l'état élastique.

4.^{ème} ETAPE : C'est l'étape actuelle ,elle a pour but la recherche des méthodes efficaces et automatiques.

Durant ces dernières années ,l'évolution des techniques d'expérimentations et l'emploi des ordinateurs ont sensiblement facilité le travail et ont permis de remettre en cause certaines hypothèses.

1.3 POSITION DU PROBLEME :

L'étude présentée ici s'inscrit dans le cadre du calcul plastique des structures ,elle s'applique en particulier aux ossatures métalliques planes ,où les non linéarités proviennent:

- Des efforts normaux agissant dans les barres ,et qui peuvent avoir une influence non négligable sur la résistance à la flexion.
- Des zones qui peuvent être le siège d'écoulement plastique.
- Les amplitudes des déplacements nodaux sont limitées suivant les règlements en vigueur ,donc leurs effets sont supposés négligeable et ne sont pas prises en considération dans cette étude.

La présente étude commence par les méthodes classiques d'analyse plastique et les difficultés rencontrées en vue de leurs applications en pratique de nos jours.

Dans la deuxième partie ,nous indiquerons pourquoi le calcul pas à pas est-il nécessaire pour vérifier les structures métalliques en plasticité.puis nous présentons une formulation matricielle de la méthode des déplacements,en fin nous établissons les principales matrices et équations utilisées pour une analyse plastique rigide (1^{er} ordre).

La troisième partie est consacrée à l'élaboration d'une formulation du comportement du remplissage par maçonnerie ,et la présentation de quelques méthodes pratiques en comportement linéaire,ainsi que les gains que peuvent apporter sur la valeur de la charge de ruine.

Dans la quatrième partie ,et afin de pouvoir tenir compte

des variation du moment plastique lorsque l'effort normal est important ,nous avons introduit la notion de surface d'écoulement plastique au sens de la théorie classique de calcul plastique des milieux continus ;et ceci pour arriver à la matrice de rigidité tangente dans les différentes configurations.

Tandis que dans la cinquième partie nous avons procédé à une étude dynamique (recherche aux valeurs propres) ,pour voir les variations des périodes propres de la structure avec la dégradation de la structure ,ainsi que l'effet de remplissage sur le comportement dynamique de la structure.

Nous avons développé un programme d'analyse plastique et élastique ,des ossatures planes ,avec et sans effet de :

- remplissage par maçonnerie
- l'effort normal

Il permet ainsi l'analyse des systèmes reticulés en phase élastique linéaire.

En fin quelques exemples illustreront les performances réelles ,et l'intérêt pratique ,de la méthode proposée dans ce travail.

CHAPITRE II

METHODES DE CALCUL DE LA CHARGE DE RUINE

II.1 INTRODUCTION :

Les méthodes générales de recherches , de la charge limite sont basées sur les deux théorèmes fondamentaux qu'on appelle respectivement "le théorème cinématique" et " le théorème statique " , le 1^{er}. donne une valeur de la charge de ruine erronée par défaut , le second une valeur erronée par excès .

Avant d'énoncer ces deux théorèmes, nous commencerons par définir certains concepts fondamentaux qui sont à la base du calcul plastique notamment celui du moment plastique ,et de la rotule plastique

II.2 MOMENT PLASTIQUE FACTEUR DE FORME:

Nous considérons que le matériau a un comportement parfaitement plastique c'est à dire que la section critique se comporte élastiquement , tant quelle n'est pas entièrement plastifiée .

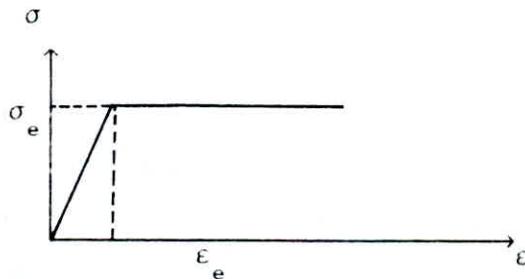
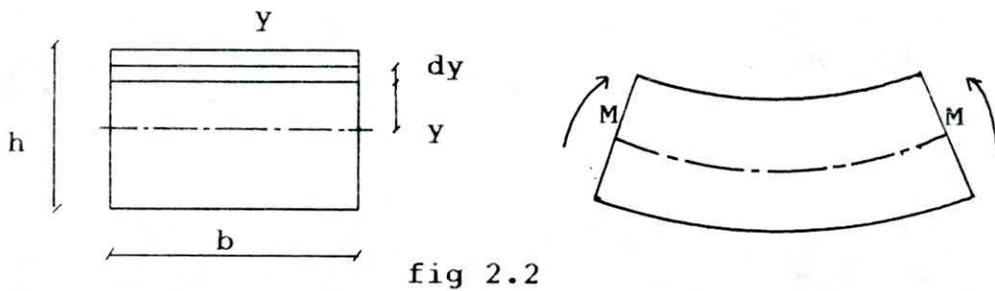


fig 2.1

Considérons une poutre à section symétrique soumise à la flexion pur



d'après la théorie de l'élasticité, la contrainte σ est distribuée selon l'expression suivante :

$$\sigma = \frac{M Y}{I} \quad (2.1)$$

avec :

Y : distance de l'axe neutre passant par le centre de gravité de la section à la fibre dy .

I : moment d'inertie de la section.

$W = I/Y$: module de flexion.

La distribution des contraintes demeure linéaire jusqu'à ce que la contrainte maximale atteigne sa valeur critique due à une augmentation du moment fléchissant à cet instant le moment maximum élastique est réalisé et vaut :

$$M_e = \sigma_e \times W \quad (2.2)$$

Si l'on dépasse le moment M_e , les fibres supérieures et inférieures de la poutre se plastifient, au fur et à mesure que le moment augmente, les zones plastifiées se propagent vers l'axe de la poutre comme le montre la figure (2.3), la distribution de contraintes devient bi-rectangulaire et le moment fléchissant correspondant est le plus grand moment que peut supporter la poutre, il porte le nom de "moment plastique"

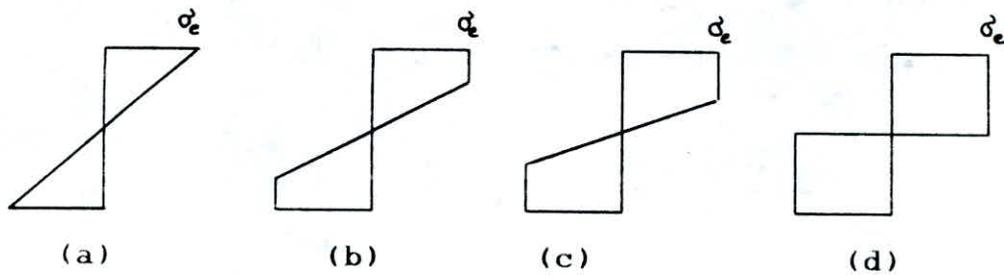


fig 2.3

En exprimant l'équilibre des forces intérieures $\sigma \times dA$ avec le moment extérieur . on aura :

$$M = \int_A \sigma y dA$$

Si le diagramme est biréctangulaire, la contrainte vaut σ_e du côté des y positifs et $-\sigma_e$ du côté des y négatifs , la formule (2.3) s'écrit donc:

$$M_p = \sigma_e \int_A |Y| x dA \quad (2.4)$$

$$\text{D'autre part: } \int |Y| x dA = 2x S_x \quad (2.5)$$

où S_x représente le moment statique de la moitié , de la section droite par rapport à l'axe de symétrie de la poutre .

Le moment plastique peut se mettre donc sous la forme :

$$M_p = \sigma_e \times Z \quad \text{avec } Z = 2x S_x \quad (2.6)$$

où Z : représente le module plastique .

exemple: section rectangulaire :

le module de flexion W vaut : $W = \frac{bh^2}{6}$

le module de plasticité $Z = 2S_x = \frac{bh^2}{4}$

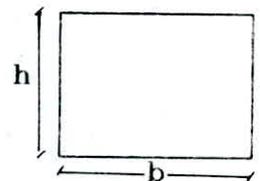


fig 2.4

le moment élastique maximum vaut : $M_p = \sigma_e \frac{bh^2}{6}$

et le moment plastique : $M_p = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$

FACTEUR DE FORME :

Le facteur de forme est défini comme étant le rapport du moment plastique et du moment élastique M_e .

$$f = \frac{M_p}{M_e} = \frac{Z}{W} \quad (2.7)$$

Ce facteur dépend uniquement de la forme de la section transversal , et représente le gain de résistance dû à la plastification .

- Pour une section rectangulaire , le facteur de forme vaut :

$$f = \frac{Z}{W} = 1.5$$

De sorte que le gain de resistance dû à la plastification vaut 50%

- Pour une section circulaire de diamètre d :
- le module de flexion W vaut :

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

Le module de plasticité Z vaut :

$$Z = \frac{d^3}{6}$$

Il en résulte que le facteur de forme f vaut :

$$f = \frac{Z}{W} = 1.7$$

- Pour les profilés en I : le facteur de forme varie de 1.06 à 1.25 car la forme de ces profilés est variable.

Remarque :

Dans la cas d'une section symétrique, la distribution des contraintes est symétrique par rapport à l'axe neutre . Cette situation demeure inchangée en phase plastique .Toute fois pour une section dissymétrique , l'axe neutre plastique se déplace vers une

position tel que la condition d'équilibre $\int \sigma dA=0$ soit respectée .

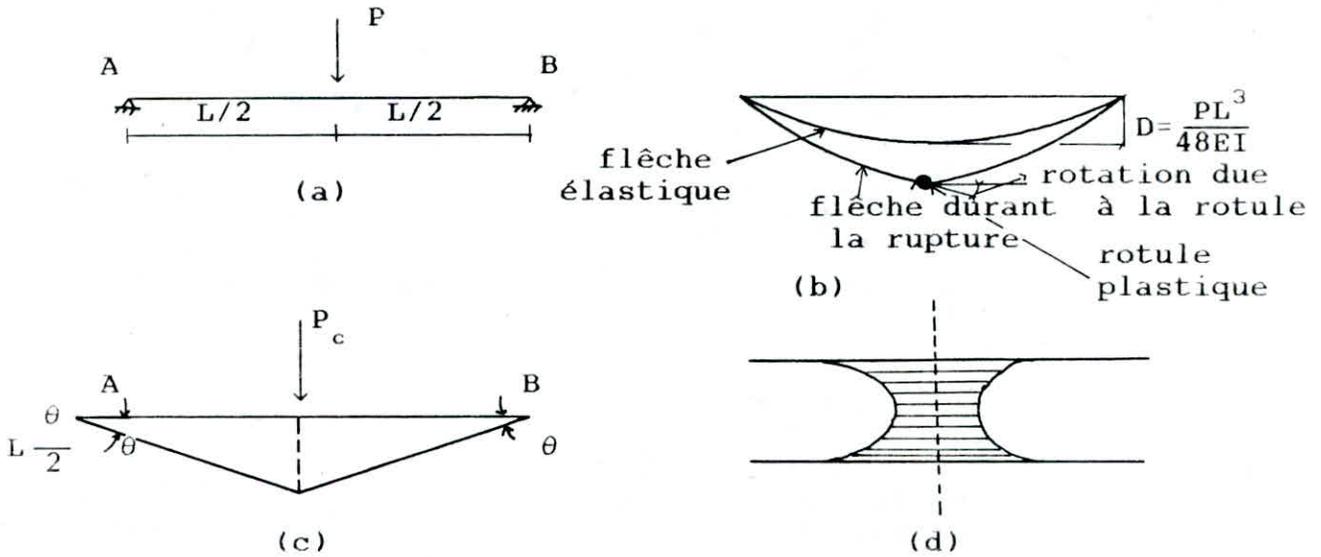


fig 2.5 comportement plastique d'une poutre simple

a) poutre , b) déformée c) variation de la flèche durant la rupture , d) écoulement à proximité de la zone centrale

II.3) NOTION DE ROTULE PLASTIQUE :

Considérons une poutre sur deux appuis simples chargées d'une force concentrée P en son milieu (fig 2.5a) ; faisant croître la charge P jusqu'à ce que le moment maximum $PL/4$ atteigne le moment plastique M_p , à cet instant des déformations plastiques apparaissent au point d'application de P et s'étendent sur toute la zone où le moment dépasse le moment maximum élastique , la courbure devient extrêmement forte à cet endroit , de sorte que tout se passe comme si la poutre était formée de deux tronçons rigides articulés l'un sur l'autre au point d'application de la charge (fig 2.5).

Tous se passe comme s'il existait , dans la section où le moment est maximum une rotule à frottement qui resterait rigide tant que $M < M_p$, et qui permettrait la rotation relative des deux tronçons de poutre dès que le moment atteint sa valeur plastique M_p une telle rotule s'appelle 'rotule plastique'.

II.4) CALCUL DE LA CHARGE DE RUINE PLASTIQUE :

II.4.1) CONVENTION :

- Le moment provoquant les contraintes de tension sur le côté voisin de la ligne en trait discontinue est défini positif " même convention pour la rotation " (fig 2.6) .

- En analyse plastique , les charges (H,V) sont supposées appliquées graduellement et proportionnellement jusqu'à ce que la structure devienne un mécanisme , donc le chargement peut être représenté par un paramètre unique (λ) , le problème consiste donc dans la détermination de la valeur critique du paramètre λ ; (λ_r).

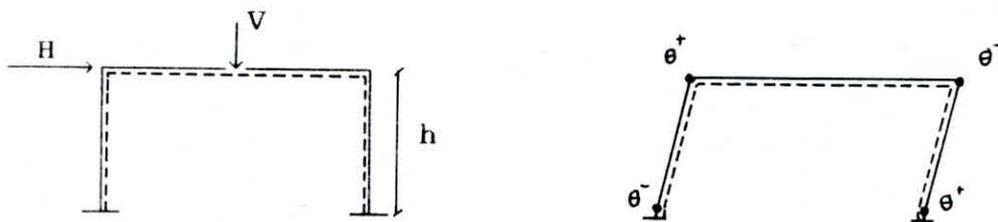


fig 2.6

II.4.2) HYPOTHESES :

1- Le matériau a un comportement parfaitement plastique , c'est à dire que la section critique se comporte élastiquement tant qu'elle n'est pas entièrement plastifiée.

2- au voisinage des sections où le moment de flexion atteint M_p il se forme à cause de la ductilité du métal des zones à fortes courbures , qu'on peut supposer concentrées 'rotule plastique'.

3- La valeur du moment plastique d'une barre n'est pas influencée par l'effort normal et l'effort tranchant existant dans la section de rotule plastique (on verra plus loin l'effet de l'effort normal sur la plastification des sections) .

4- Les assemblages puissent supporter sans se rompre les moments plastiques correspondants (liaison rigide) .

5- Malgré les importantes déformations plastiques des rotules la structure ne manifeste aucun phénomène d'instabilité avant formation de mécanisme

6- On tient compte des déformations admissible imposées par les règlements en vigueur , car parfois ces déplacements atteignent des valeurs importantes avant formation de mécanisme et soient sans signification pratique .

II.4.3) MECANISME - CHARGES DE RUINE :

II.4.3.1) EXEMPLE DE LA POUTRE BI-ENCASTREE CHARGEE UNIFORMEMENT

Considérons une poutre prismatique de longueur l , biencastree soumise à une charge uniformement répartie d'intensité q fig(2.7a) en régime élastique le diagramme des moments est celui donné par la figure 2.7b , cette distribution des moments est donnée par:

$$M_p = \frac{q \times (L-x)}{2} - \frac{qL^2}{12} \quad (2.8)$$

la poutre se comporte élastiquement jusqu'à ce que les moments d'encastrement atteignent le moment plastique

$$|M_a| = |M_b| = M_p = \frac{qL^2}{12} \implies q_e = \frac{12M_p}{L^2} \quad (2.9)$$

A cet instant , deux rotules plastiques se forme en A et B de sorte que si on augmente la charge d'avantage , les rotules plastiques en A et B tournent mais sans que les moments d'encastrement changent la poutre est donc dans la situation illustrée à la figure 2.8 , elle est isostatique , l'hyperstaticité ayant disparu parceque les moments d'encastrement se sont stabilisés à la valeur connu $(-M_p)$ l'équation des moments devient:

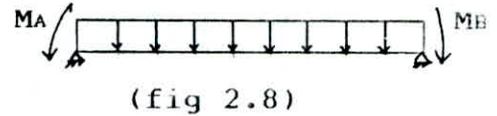
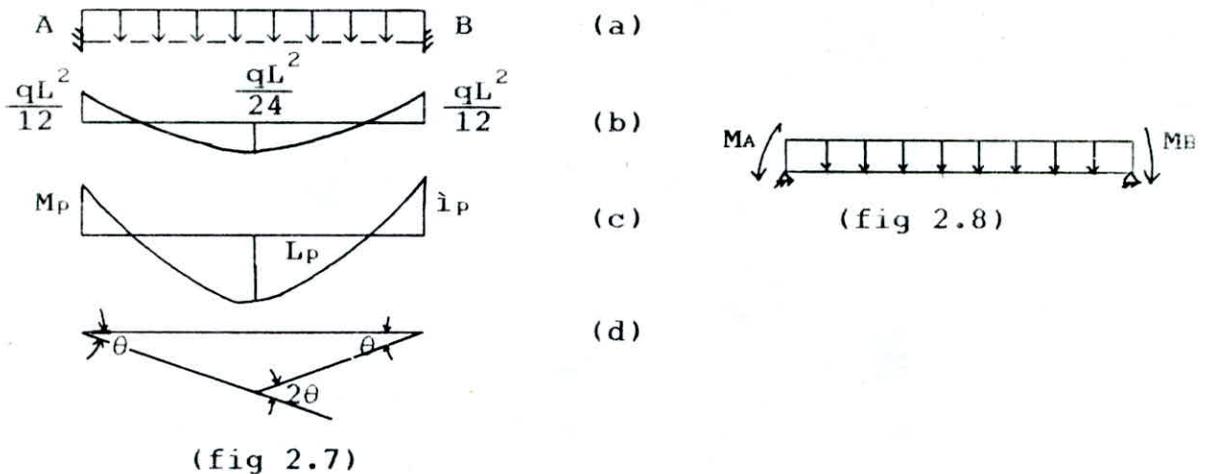
$$M_p = \frac{q \times (L-x)}{2} - M_p \quad (2.10)$$

Dés que le moment, au milieu, atteint la valeur de M_p , une rotule plastique se forme en C et transforme la poutre en un mécanisme (voir fig 2.7d) .

La charge totale correspondante est donnée par l'équation :

$$M_c = \frac{qL^2}{8} - M_p \implies P_1 = \frac{16M_p}{L} \quad (2.11)$$

Cette charge s'appelle "charge de ruine", c'est à dire que c'est la plus élevée des charges que la poutre puisse supporter.



II.4.3.2 GENERALISATION AU SYSTEME HYPERSTATIQUE DE DEGRE r :

Considérons une structure r fois hyperstatique ,au fur et à mesure que les charges augmentent,des rotules plastiques apparaissent dans les zones où les moments fléchissants atteignent la limite .

Après chaque apparition de rotule plastique,le moment fléchissant s'y fixe à la valeur du moment plastique M_p ,et le degré d'hyperstaticité se trouve réduit d'une unité,ces zones ne participent plus pleinement à la transmission d'incrément de charges et leurs rigidités diminuent .

Au moment où la $r^{i\text{ème}}$ rotule se forme,le système devient isostatique,la formation de la $(r+1)^{i\text{ème}}$ rotule transforme la

structure en un mécanisme, ce nombre de $(r+1)$ rotules plastiques représente le nombre suffisant, mais n'est pas toujours le nombre nécessaire, c'est le cas de mécanisme partielle, car il peut se faire que certains systèmes soient mis hors services par la formation d'un nombre de rotules plastiques inférieur à $(r+1)$ rotules entraînant des déformations illimitées de certaines portions du système.

II.5 METHODES DE CALCUL DE LA CHARGE DE RUINE :

La solution exacte d'analyse plastique des structures planes hyperstatiques est en général assez laborieuse. c'est pourquoi, pendant ces dernières années, l'attention des chercheurs est orientée vers la recherche de méthodes approchées plus accessibles aux ingénieurs basées sur deux théorèmes fondamentaux de l'analyse limite " le théorème statique " et le théorème " cinématique " , le premier donne une charge erronée par défaut et le second par excès

II.5.1) METHODE STATIQUE ET CINEMATIQUE :

II.5.1.1) THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS :

La somme du travail effectué par les forces extérieures lors de la ruine est égale à la somme du travail effectué par les rotations plastiques pour les moments parfaitement plastiques correspondants

$$\sum P_i \delta_i = \sum M_{p_j} \theta_j \quad (2.12)$$

Avec :

- P_i : charges appliquées
- δ_i : déplacements aux points d'applications des charges
- M_{p_j}, θ_j : moment plastique et rotation plastique au niveau des sections plastifiées.

II.5.1.2) THEOREME CINEMATIQUE : 'borne supérieure':

Il consiste à envisager successivement tous les mécanismes de ruine possible et à déterminer en utilisant le théorème des travaux

virtuels , les charges limites corrèspondantes . La véritable charge de ruine est la plus petite de ces dernières .Pour s'assurer qu'on a oublié aucun mécanisme , on trace le diagramme des moments et on s'assure qu'il est statiquement admissible.C'est à dire qu'il est en équilibre en présence des forces extérieures et qu'en toute section le moment est inférieur au moment plastique .

II.5.1.3) THEOREME STATIQUE : 'borne infèrieure'

S'il est possible de trouver une répartition de moments statiquement admissible d'une structure quelconque soumise à un chargement donné ; la charge corrèspondante est au plus égale à la charge de ruine λ_r .Ce théorème n'est utilisé en général que dans le contrôle des calculs .

II.5.1.4) THEOREME D'UNICITE :

S'il est possible de trouver au moins une répartition de moment statiquement admissible d'une ossature , et si pour cette répartition , les valeurs de moments plastiques sont atteintes dans autant de sections qu'il est nécessaire pour créer un mécanisme . La charge corrèspondante est justement , la charge de ruine plastique recherchée λ_r .

II.5.1.5)EXEMPLE DE LA POUTRE BI-ENCASTREE CHARGEE D'UNE FORCE CONCENTREE AU TIERS :

Considérons la poutre bi-encastrée suivante sa ruine complète exige trois rotules , qui ne peuvent être formées ailleurs qu'en A,B C (fig 2.9a) .

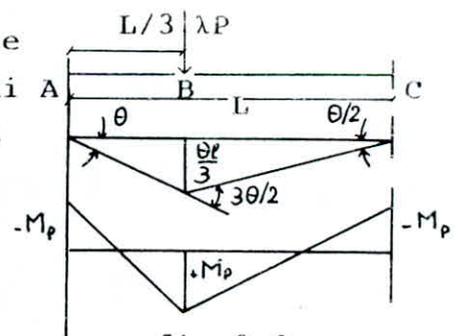
Le mécanisme correspondant est représenté à la (fig 2.9b) .

L'équation des travaux virtuels donne :

$$\lambda P \frac{\theta L}{3} = M_p \left(\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{3\theta}{2} \right)$$

d'où

$$\lambda = \frac{9M_p}{PL}$$



Le diagramme des moments représenté en 2.9c est statiquement admissible , le multiplicateur trouvé est donc le vrai multiplicateur de ruine .

II.5.1.6) PORTIQUE RECTANGULAIRE :

Considérons le portique représenté à la fig 2.10a , chargé d'une force verticale et horizontale égales les barres ont toutes même moment plastique M_p . Le système étant trois fois hyperstatique , sa ruine complète exige donc la formation de quatre rotules plastiques , en remarquant que les moments varient linéairement puisque les barres ne sont pas chargées , ces rotules ne peuvent se formées qu'aux points 1,2,3,4,5 (sections critiques)

Un mécanisme possible est représenté à la fig 2.10b , qu'on appelle mécanisme de poutre , ce mécanisme ne contient que trois rotules et est donc un mécanisme partiel .

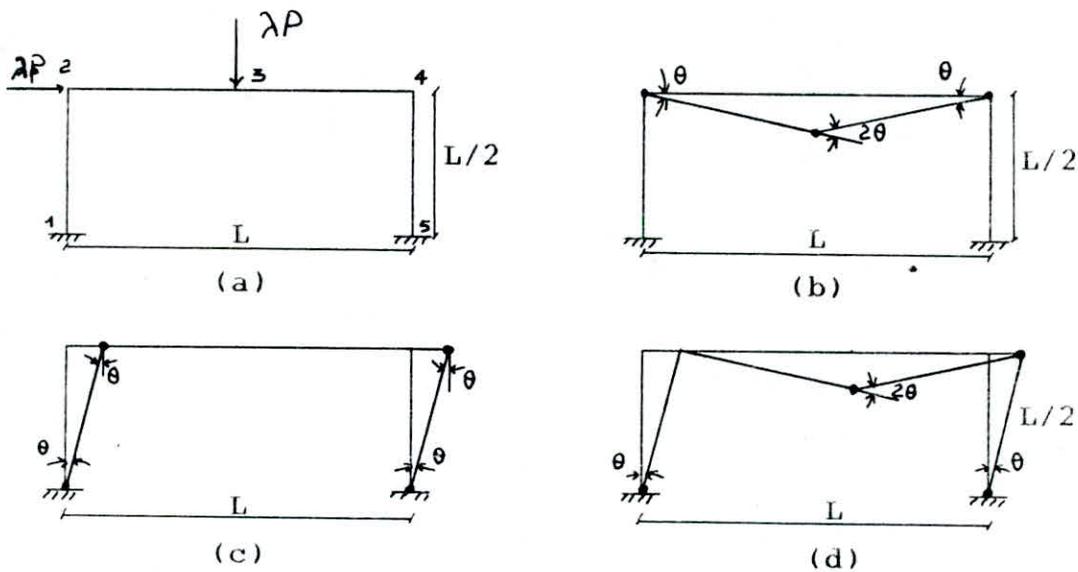


fig 2.10

L'équation des travaux virtuels appliquées pour chacun des mécanismes donne :

Pour le mécanisme b :

$$M_p (\theta + \theta + 2\theta) = \lambda P \frac{1}{2} \theta$$

d'où : $\lambda_1 = \frac{8M_p}{PI}$

Pour le mécanisme c :

$$M_P (\theta + \theta + \theta + \theta) = \lambda P \frac{1}{2} \theta$$

$$\text{d'où : } \lambda_2 = \frac{8M_P}{P l}$$

Pour le mécanisme d :

$$M_P (\theta + 2\theta + 2\theta + \theta) = \lambda (P \frac{1}{2} \theta + P \frac{1}{2} \theta)$$

$$\text{d'où : } \lambda_2 = \frac{6M_P}{P l}$$

Le portique périt donc selon le mécanisme d , et la charge de ruine vaut :

$$\lambda_2 = \frac{6M_P}{P l}$$

Pour compléter cette analyse il faut tracer le diagramme du moment correspondant au mécanisme retenu , pour s'assurer qu'il est statiquement admissible .

Le diagramme de moment représenté à la fig 2.11 correspond au mécanisme d , il est visible que ce diagramme est statiquement admissible . Ainsi le mécanisme d , et le mécanisme de ruine , et la charge de ruine est :

$$\lambda = \frac{6M_p}{L}$$

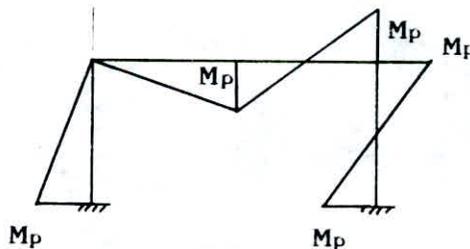


fig 2.11

II.5.2) APERÇU SUR D'AUTRES METHODES :

Si le degré d'hyperstaticité d'une structure est r , et que les rotules plastiques peuvent apparaitre dans n sections droites , chaque mécanisme comportant $(r+1)$ rotules , il y'aura donc autant de mécanisme que de combinaison de n éléments par groupe de $r+1$, c'est à dire :

$$C_n^{r+1} = \frac{n!}{(r+1)![n-(r+1)]!}$$

Tant que ce nombre de mécanisme reste petit , il est possible d'examiner tous les mécanismes , et d'en retenir celui qui donne la plus petite valeur du facteur de charge λ , par contre quand ce nombre devient très grand , l'étude des C_n^{r+1} mécanismes devient très fastidieuses , on s'efforce donc d'arriver au mécanisme correct , sans examiner tous les mécanismes possibles , on a recours donc à d'autres méthodes ,qui n'entrent pas dans le cadre de la présente étude , nous nous contenterons d'en donner juste un aperçu .

II.5.2.1) METHODES DES MECANISMES COMBINES :

Cette méthode consiste à selectionner tous les mécanismes simples indépendants et d'écrire leurs équations en se basant sur le théorème des travaux virtuels , en vue de chercher les valeurs de λ y correspondant le mécanisme simple indépendant donnant la plus petite valeur de λ sera combiner avec d'autres selon une règle systématique permettant de diminuer le facteur λ , afin d'aboutir au mécanisme de rupture réel .

Pour vérifier , on trace le diagramme de moment fléchissant , et on s'assure qu'il est statiquement admissible .

II.5.22) METHODE DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE :

En général, le mécanisme de ruine d'une structure est la combinaison linéaire de plusieurs mécanismes indépendants, pour une structure complexe le nombre de mécanismes indépendants est trop élevé, ceci rend la détermination du mécanisme de ruine réel très long et plus difficile. La méthode de la programmation linéaire permet de palier cette difficulté par une formulation simple

ramenant le problème d'analyse plastique à un système d'équations indépendantes gouvernant la structure permettant l'obtention automatique de la solution

II.6) Conclusion :

Les méthodes plastiques présentées précédemment , ont pour but la détermination de la charge de ruine , et le mécanisme correspondant par des moyens de calcul très fastidieux et surtout pour des structures complexes à cause de :

-Leur formulation qui demandent le jugement de l'opérateur à chaque stade de calcul

-la déduction de la solution par tâtonnement. Ceci exige une habilité de l'ingénieur qui ne peut être acquise qu'après une longue pratique dans le domaine

Ces méthodes présentent également l'inconvénient, de ne pas permettre de suivre le comportement de la structure et l'ordonnancement d'apparition des rotules lors du chargement , ainsi que la détermination des déformations qui peuvent dans certains cas atteindre les valeurs admissibles avant que la charge limite ne soit atteinte , auquel cas , cette charge devient sans signification pratique .

CHAPITRE III

ANALYSE PLASTIQUE RIGIDE

III.1 INTRODUCTION :

Le calcul plastique des structures soumises principalement aux efforts de flexion est basé sur les théorèmes fondamentaux de l'analyse limite (théorème statique , théorème cinématique), qui pour des structures simples donnent aisément la charge de ruine moyennant certaine hypothèses simplificatrices admises généralement ; mais qui ne peuvent pas donner les résultats intermédiaires tels que "efforts, déplacements, plastifications".

Dans une structure la relation entre les variables mécaniques (forces) et les variables cinématiques (déplacements) peut devenir non linéaire pour deux raisons :

-le matériau n'obéit pas à la loi linéaire de "HOOKE" "non linéarité du matériau"

-les déplacements de la structure changent de façon sensible le mode d'action des forces extérieures ,c'est à dire que la loi de HOOKE n'est pas applicable à la structure entière "non linéarité géométrique"

Dans cette étude qui relève d'une théorie du premier ordre, on a procédé à la méthode dite " pas à pas ", car elle permet non seulement de déterminer la charge de ruine , mais aussi de fournir tous les résultats intermédiaires et l'ordre d'apparitions des rotules plastiques, c'est à dire qu'elle consiste à suivre le comportement de la structure tout au long de son chargement allant de zéro jusqu'à la charge de ruine

III.2 PRESENTATION DE LA METHODE PAS A PAS :

III.2.1 PRINCIPE DE LA METHODE :

En analyse plastique du premier ordre ,on suppose un comportement linéaire de la structure entre deux apparitions successives de rotules plastiques , le comportement non linéaire de la structure est donc décrit par une succession de comportements linéaires élémentaires avec réactualisation de la matrice de rigidité en chaque pas . l'equation régissant le comportement de la structure au n'ième pas est donnée par :

$$|\Delta P^n| = \left[R(P^{n-1}, D^{n-1}=0, P^{n-1}) \right] \cdot |\Delta D^n| \quad (3.1)$$

$|\Delta P^n|$: n^{ème} incrément de charge

$|\Delta D^n|$: n^{ème} incrément de déplacement correspondant

$R(P,D,P)$:matrice de rigidité de la structure , fonction de la plastification P à la fin de la (n-1)^{ème} étape

P^{n-1} :etat du chargement à la fin du pas (n-1)

$$|P^{n-1}| = \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta P^i|$$

P^{n-1} :etat de plastification existante à la fin du pas (n-1)

Considérons le portique (fig 3.1) et supposons qu'on désire déterminer les :

- multiplicateur de ruine (λ)
- Emplacements des rotules plastiques et leurs ordre de formations
- Déplacements nodaux

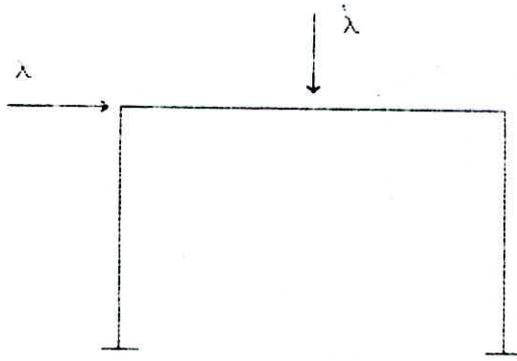


fig 3.1

Le calcul se déroule de la façon suivante:

Etape 1 :

- La structure est d'abord analysée élastiquement sous ($\lambda=1$)
- On détermine pour les sections critiques les rapports :

$$\Delta\lambda_i^1 = \frac{M_{p_i}}{M_i^1}$$

avec :

M_{p_i} : moment plastique de la section i

M_i^1 : moment fléchissant de la section i en lère
étape sous ($\lambda=1$)

la rotule se forme dans la section S_i , qui correspond à la plus petite valeur de λ ($\Delta\lambda = 24.16$)

- On détermine les déplacements D_i^1 , les efforts P_i^1 et les réserves de moments plastiques $RM_{p_i}^1$ sous le facteur ($\Delta\lambda_i^1$)

$RM_{p_i}^1$: étant les compléments des moments cummulés par rapport aux moments plastiques

Etape2:

-On introduit une rotule libre dans la section, et on analyse la structure ainsi modifiée élastiquement sous facteur $(\lambda=1)$ (la matrice de rigidité étant modifiée)

-On détermine les rapports:

$$\Delta\lambda_L^2 = \frac{RM_{Pl}^4}{M_L^2}$$

la plus petite valeur de $\Delta\lambda_L^2$ correspond à la formation de la 2^{ème} rotule en section S_3 ($\Delta\lambda^2 = 40.9$)

-On calcule les efforts P_L^2 , et les déplacements D_L^1 , sous $\Delta\lambda^2$ et on les ajoute à ceux de l'étape 1, ainsi que les réserves de moments plastiques

Etape3:

-On introduit une 2^{ème} rotule libre en section et ainsi de suite jusqu'à la formation de mécanisme

En fin la charge de ruine s'obtient par combinaison des pas incrémentaux ainsi étudiés:

$$\lambda_r = \sum_{L=1}^n \Delta\lambda^L = 60$$

III.2.2 POSSIBILITES D'ANALYSES :

On distingue deux modèles d'analyses des structures:

-une analyse du premier ordre considérant des déplacements nodaux infinitésimaux et un comportement élastique ou parfaitement plastique du matériau

-une analyse du deuxième ordre prenant en compte les grands déplacements nodaux "On se réfère à la géométrie déformée "

l' effet du second ordre est négligeable quand les déplacements nodaux sont petits ou lorsque les efforts normaux sont faibles c'est à dire lorsque la structure est rigide vis à vis des charges qui lui sont appliquées.

Quatre analyses sont possibles:

- 1-analyse élastique non linéaire
- 2-analyse élastique linéaire
- 3-analyse plastique non linéaire
- 4-analyse plastique linéaire

III.3 METHODES D'ANALYSES :

On a considéré dans la présentation de la méthode pas à pas que le comportement de la structure sous chargement croissant monotone est une combinaison de pas incrémentaux dans lesquels on suppose la structure en question comme élastique linéaire

Il existe plusieurs méthodes qui traitent ce problème :

- Méthode de cross
- Méthode des forces
- Méthode des déplacements

On a opte pour la méthode des déplacements vu aux avantages qu' elle presente:

- Adaptation à la programmation
- Calcul à la fois des efforts et des déplacements
- Resultats obtenus en resolvant un système d'équations linéaires simple

III.4 PRESENTATION DE LA METHODE DES DEPLACEMENTS :

III.4.1 EQUATIONS REGISSANTES LE COMPORTEMENT DE LA STRUCTURE:

Le but de cette étude est d'établir la matrice de rigidité d'une barre dans les différentes configurations en analyse élastique linéaire

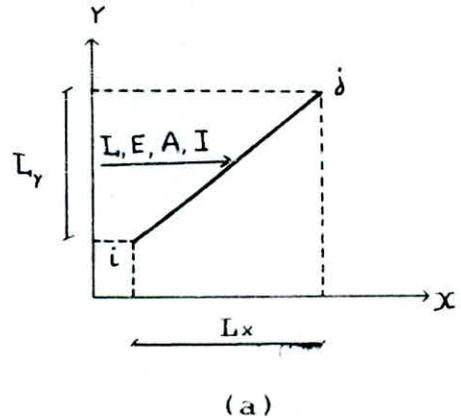
Le matériau est supposé parfaitement élastique ainsi les effets du changement de géométrie de la structure est de l'effort normal sur la rigidité de la barre sont négligés

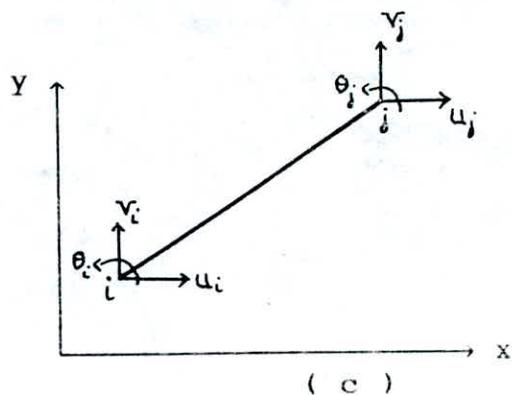
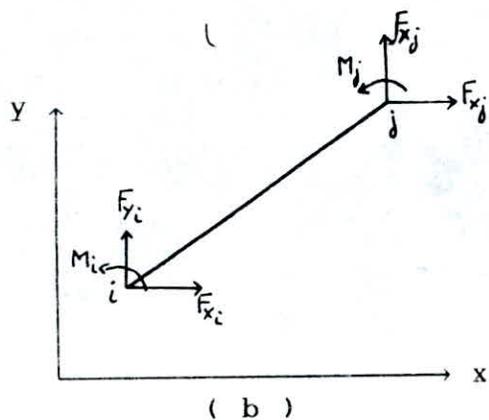
Les forces agissantes en travée sont remplacées par des forces nodales

les vecteurs forces et déplacements nodaux relatifs au noeud (i) dans le repère globale sont donnés par:

$$R_i = \left\{ F_{x_i}, F_{y_i}, M_i \right\}^T$$

$$D_i = \left\{ U_i, V_i, \theta_i \right\}^T$$





L'équation régissant le comportement de la structure s'écrit:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Les sous matrices $K_{ij}, K_{ii}, K_{ji}, K_{jj}$, sont des matrices de rigidités d'ordre (3x3), prises dans le repère globale

III.4.2 Etablissement de la matrice de rigidité d'une poutre par la méthode des éléments finis:

III.4.2.1) Poutre "bi-encastrée"

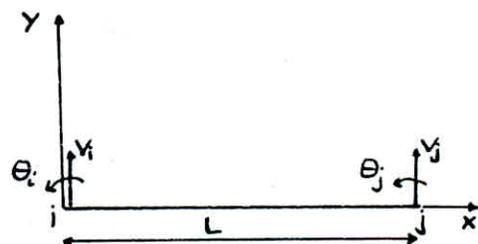
a) Dans le repère local :

Si on fait l'hypothèse sur la forme du champ de déplacement dans chaque élément

$$\begin{cases} V(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \\ \theta(x) = dV(x)/dx \end{cases}$$

On suppose que l'élément est axial ;

On peut écrire ce champ sous forme matricielle:



$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$\begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix}$ est le vecteur des coordonnées généralisées

ce champ de déplacement répond aux critères de continuité le long de l'élément poutre et aux frontières les déplacements nodaux de l'élément :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \alpha \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ -2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \left\{ U \right\}$$

à substituer dans l' expression (3.4)

$$\begin{Bmatrix} V(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(x) \end{bmatrix} \left\{ \alpha \right\} = \begin{bmatrix} \theta(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \left\{ U \right\} = \begin{bmatrix} H(x) \end{bmatrix} \left\{ U \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} V(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} & 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} & -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

la courbure est définie par :

$$\epsilon = \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{-2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \left\{ U \right\}$$

$$\left\{ \epsilon \right\} = \begin{bmatrix} B(x) \end{bmatrix} \left\{ U \right\}$$

Et la contrainte par : $\sigma = D \epsilon$

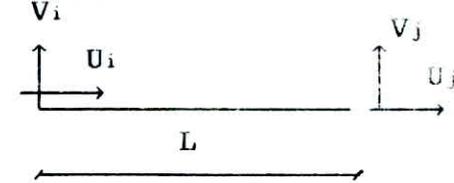
D étant la rigidité à la flexion

la rigidité de l'élément :

$$\begin{aligned}
 [K] &= \int_0^L [B'(x)] [D] [B'(x)] dx \\
 [K_1] &= EI \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ \text{symétrique} & & 12/L^3 & -6/L^2 \\ & & & 4/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

*ELEMENT BARRE :

En faisant l'hypothèse :

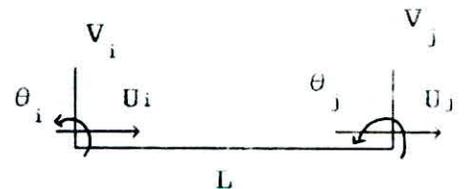
$$U(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$


Et en procédant de façon analogue, On trouve la matrice de rigidité

$$[K_2] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

*Cas général :

La matrice de rigidité d'une barre d'ossature bi-encastée, dans le repère locale, en négligeant les déplacements dus aux efforts



tranchants, est obtenue par
superposition des équations

$$\begin{bmatrix} K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

b) Dans le repère globale

On obtient la matrice $[K_{ii}]$ en axe généraux a partir de la matrice $[k_{ii}]$ en axes locaux par la relation :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

avec $[R]$: matrice de rotation

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

α étant l'angle que fait la barre avec l'axe x

De l'expression (3.7) on détermine les six termes indépendants de la matrice de rigidité

$$\left[K_{ii} \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{12EI}{L^3} S^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) CS & -\frac{6EI}{L^2} S \\ & \frac{EA}{L} S^2 + \frac{12EI}{L^3} C^2 & \frac{6EI}{L^2} C \\ & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où : $C = \cos \alpha$ et $S = \sin \alpha$

Les autres sous matrices sont obtenues en fonction de $[K_{ii}]$ par des transformations matricielles élémentaires

la matrice de rigidité complète dans un repère quelconque doit être symétrique en vertu du théorème de BETTI:

$$\left[K_{ij} \right] = \left[K_{ji} \right]^T \quad (3.11)$$

de la figure (3.5b), le vecteur force au noeud j est relié au à celui du noeud i par la matrice de transfert $[T]$

$$F_{x_j} = - F_{x_i}$$

$$F_{y_j} = - F_{y_i}$$

$$M_j = -M_i + F_{y_i} L_x - F_{x_i} L_y$$

les équations d'équilibres peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left[R_j \right] = \left[T \right] \left[R_i \right] \quad (3.12)$$

avec : $\begin{bmatrix} R_i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} R_j \end{bmatrix}$ vecteurs forces
 et

$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$ la matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -L_y & L_x & -1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Compte tenu des relations (3.3) et (3.12), on obtient:

$$\begin{bmatrix} K_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} K_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ij} \end{bmatrix}$$

III.4.2.2 Poutre "encastrée" en i et "articulée" en j :

A partir de la formulation d'une poutre "bi-encastrée" et en ométant les termes dus à l'effort normal (3.6); On peut exprimer le moment au noeud j en repère locale

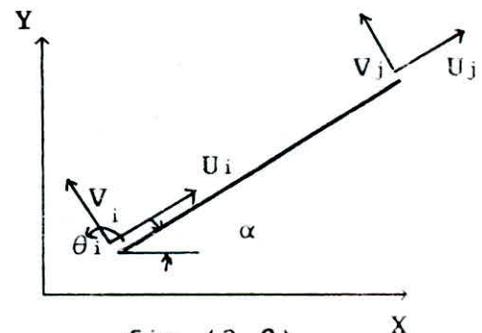


fig (3.2)

$$M_j = \frac{6EI}{L^2} V_i + \frac{2EI}{L} \theta_i - \frac{6EI}{L^2} V_j + \frac{4EI}{L} \theta_j = 0$$

$$\text{donc : } \theta_j = \frac{-3}{2L} V_i - \frac{1}{2} \theta_i - \frac{3}{2L} V_j \quad (3.15)$$

on exprime les efforts aux extrémités de la barre ,en remplaçant θ_j par sa valeur

$$\begin{aligned}
 T_i &= \frac{3EI}{L^3} V_i + \frac{3EI}{L^2} \theta_i - \frac{3EI}{L^3} V_j \\
 M_i &= \frac{3EI}{L^2} V_i + \frac{3EI}{L} \theta_i - \frac{3EI}{L^2} V_j \\
 T_j &= -\frac{3EI}{L^3} V_i + \frac{3EI}{L^2} \theta_i + \frac{3EI}{L^3} V_j \\
 M_j &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

L'écriture sous forme matricielle de la matrice de rigidité en repère locale après qu'on ajoute l'effet de l'effort normal est :

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix}
 \tag{3.17}$$

En repère globale:

$$[K_{ii}] = [R]^T [k_{ii}] [R]$$

$$\left[K_{ii} \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{3 EI}{L^3} S^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{3 EI}{L^3} \right) CS & -\frac{3EI}{L^2} S \\ & \frac{EA}{L} S^2 + \frac{3 EI}{L^3} C^2 & \frac{3EI}{L^2} C \\ \text{symétrique} & & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

les autres cas de liaisons peuvent être deduits de la même façon

III4.2.3) Poutre "articulée" en i et "encastrée" en j

$$\left[K_{ii} \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{3 EI}{L^3} S^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{3 EI}{L^3} \right) CS & 0 \\ & \frac{EA}{L} S^2 + \frac{3 EI}{L^3} C^2 & 0 \\ \text{symétrique} & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

III.4.2.4 poutre "biarticulée" :

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 & \frac{EA}{L} CS & 0 \\ & \frac{EA}{L} S^2 & 0 \\ \text{symétrique} & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

avec $C = \cos\alpha$ et $S = \sin\alpha$

III.4.2.5 MATRICE DE RIGIDITE EN DIFFERENTE CONFIGURATION :

on définit des constantes a_k ($k=1,6$) comme des paramètres de relaxations pour tenir compte des différentes types de liaisons aux extrémités de l'élément

ces liaisons sont dues à l'état réelle de la structure ,ainsi qu'aux apparitions de rotules plastiques qui sont assimilées à des rotules libres dans un pas de charge .Cette forme à été établie dans le but d'éviter l'écriture de la matrice de rigidité pour les quatres cas cités,dans le programme du calcul plastique

Après superposition des matrices de rigidités (3.10), (3,18), (3,19) et (3,20),et suivant les coefficients a_k ($k=1,6$),on a obtenu la matrice de rigidité dans les différentes configurations,en repère globale

$$\left[T \right] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline R_1 + a_1 R_7 & R_3 - a_1 R_9 & -a_2 R_5 & -R_1 - a_1 R_7 & -R_3 + a_1 R_9 & -a_4 R_5 \\ \hline & R_2 + a_1 R_8 & a_2 R_6 & -R_3 - a_1 R_9 & -R_2 + a_1 R_8 & -a_4 R_6 \\ \hline & & a_3 R_4 & a_2 R_5 & -a_2 R_6 & a_4 R_5 \\ \hline & & & & R_2 + a_1 R_8 & -a_4 R_6 \\ \hline & & & & & a_5 R_4 \\ \hline \end{array}$$

symétrique

avec : $R_1 = EA \cos^2 \alpha / L$

$R_7 = 3EI \sin^2 \alpha / L^3$

$R_2 = EA \sin^2 \alpha / L$

$R_8 = 3EI \cos^2 \alpha / L^3$

$R_3 = EA \cos \alpha \sin \alpha / L$

$R_9 = 3EI \sin \alpha \cos \alpha / L$

$R_4 = 3EI / L$

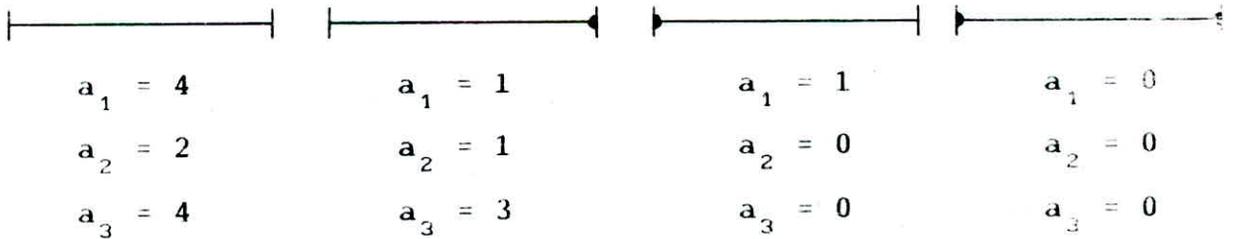
$a_4 = a_1 - a_2$

$R_5 = 3EI \sin \alpha / L^2$

$a_6 = 3a_2 - a_3$

$R_6 = 3EI \cos \alpha / L^2$

$a_7 = 3a_4 - a_6$

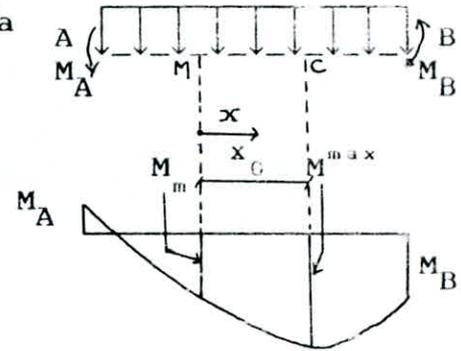


III.5 ANALYSE AVEC DES CHARGES REPARTIES :

L'analyse des structures soumises à des charges réparties, présente certaines difficultés qui résident dans le fait que les emplacements possibles des rotules ne sont pas tous connus. Pour traiter ce cas il existe deux types de procédés

III.5.1 METHODES PAR AJUSTEMENT DE ROTULE:

Supposons qu'un mécanisme contient une rotule dans une barre chargée uniformément, qu'on a placé en première approximation au milieu, le tracé du diagramme de $M(x)$ de toute la structure est indispensable pour contrôler s'il est effectivement admissible



$$M(x) = M_A \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) + M_B \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) + \frac{q}{2} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

$$M_m = M(0) = (M_A + M_B) / 2 + qL^2 / 8 \quad (3.21)$$

$$M^{max} = M^m + q \frac{x_0^2}{2}$$

L'expérience montre que ce mécanisme est pratiquement correct "section critique en c" il est donc inutile de poursuivre davantage ce processus d'approximations successives

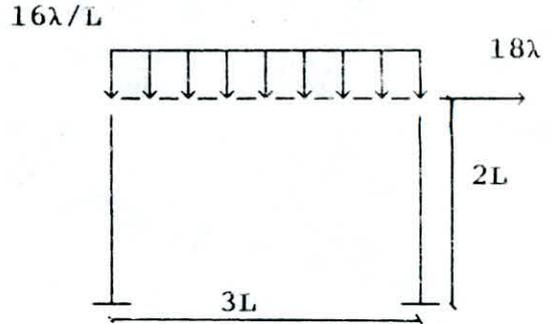
III.5.2 METHODES DES CHARGES CONCENTREES EQUIVALENTES :

Par remplacement de charges réparties en un certain nombre de charges concentrées, après traitement de certains cas, il s'est apparu que la charge de ruine en supposant des charges concentrées est toujours inférieure à celle avec les charges réparties, ainsi que la convergence vers la solution exacte augmente avec le nombre

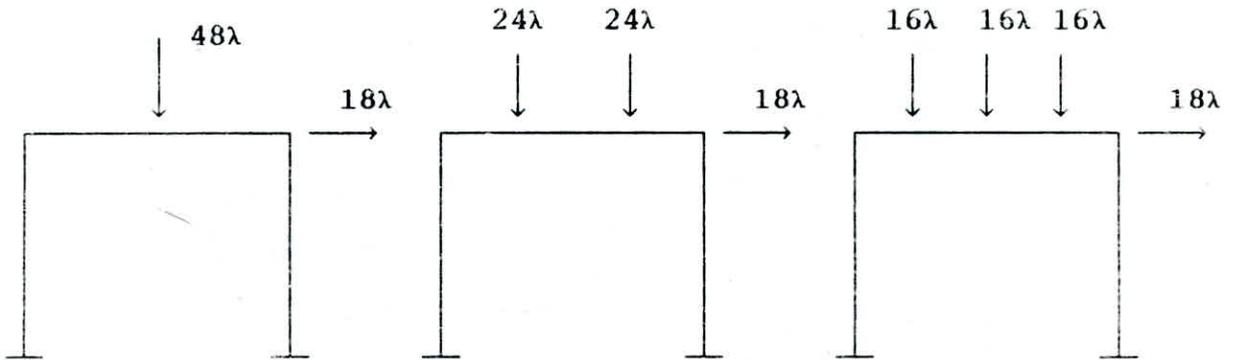
de divisions de la barre chargée

la charge de ruine réelle

$$\lambda_c = 0,08225 \frac{M_p}{L}$$



maintenant , si on considère le cas suivant on trouve :



$$\lambda_c = 0,0556M_p/L$$

$$\lambda_c = 0,0778M_p/L$$

$$\lambda_c = 0,07895M_p/L$$

III.6 CONCLUSION :

Le modèle présenté dans ce chapitre, en se basant sur l'utilisation de la méthode des déplacements dans un calcul incrémental, permet l'étude élastoplastique des ossatures planes.

La procédure ainsi développée présente un intérêt réel et un outil de travail rapide à la portée de l'ingénieur; elle s'applique aux structures planes chargées dans leurs plans et fournit tous les résultats intermédiaires à une précision acceptable.

Pour prendre en compte le fait que la charge de ruine calculée en premier ordre est légèrement supérieure à celle calculée en second

ordre, et a fin d'être prudent du coté de la sécurité, on peut évidemment utiliser un coefficient de sécurité dont on essayera de le donner en se basant sur quelques expérimentations numériques.

Le calcul automatique du pas de charge nous a permis de réduire considérablement le temps de calcul ,du moment qu'il évite les itérations ne correspondants pas à de nouvelles plastifications.

CHAPITRE IV:

ETUDE THEORIQUE DE L'EFFET DES REPLISSAGES PAR MAÇONNERIE

IV.1 INTRODUCTION :

Les immeubles à usage d'habitation , d'administration , et d'éducation ont réalisés généralement avec des structures en portiques (béton armé ou charpente métallique) ou un remplissage par maçonnerie et nécessaire

Bien que de nombreuses recherches ont été effectuées ces dernières decennies sur l'interaction entre une ossature et son remplissage les resultats obtenues montrent encore , que le problème n'est pas connu de manière satisfaisante

Les observations faites sur des constructions endommagées par les derniers seismes dans le monde , ainsi que les études théorico- expérimentales , ont montré que la présence des éléments de remplissage dans une ossature a pour effets :

- Augmentation de la rigidité de l'ensemble(ossature-remplissage)
- Modification du comportement de l'ossature

De ce fait une ignorance de l'interaction structure-maçonnerie dans une analyse statique nous amène a surdimensionner les éléments de la structure , par contre d'un point de vue dynamique , les panneaux de de remplissage ne sont pas ce que l'on appelle , des éléments non structuraux de la structure , en effet les

résultats expérimentaux ainsi que les investigations effectuées sur beaucoup de lieux de sinistre ont conclu que la présence des remplissages , a été pour beaucoup dans la cause des désordres et a entraîné des conséquences néfastes car leur influence sur l'ossature en tant que partie du système structural a été négligée

Très peu d'études sont consacrées au comportement non linéaire ou dynamique de l'ensemble ossature remplissage , et ce n'est que très récemment que l'attention des chercheurs a été orientée vers ce domaine

Pour cette raison on s'est limité dans cette étude au comportement linéaire du remplissage , c'est à dire on suppose l'écrasement du panneau de remplissage une fois la contrainte limite élastique ou la déformation admissible sont atteintes

IV.2 OBSERVATIONS SUR DES ESSAIS EXPERIMENTAUX :

Une structure composée d'une ossature remplie se comporte de la façon suivante, lorsqu'elle est soumise à une force horizontale

* Phase 1:

Sous des charges relativement faibles dans les deux coins suivant la diagonale tendue (fig4.1b).

* Phase 2:

Il se produit des fissurations suivant la diagonale tendue (fig 4.1b)

* Phase 3:

La fissuration est tellement prononcée qu'on observe un phénomène de décollement entre le panneau de remplissage et le portique sur une assez importante longueur de chaque côté, seul les zones proches des coins comprimés gardent contact avec l'ossature, ceci nous amène à prendre le portique renforcé par des bielles dans le sens des diagonales comprimées, comme étant le comportement réel de l'ensemble (fig4.1c).

* Phase 4:

L'augmentation des charges entraîne la fissuration progressive de ces bielles, est donc la diminution de la rigidité latérale de l'ensemble portique-remplissage (fig4.1d)

* phase 5:

La rupture du modèle expérimentale se produit après fissuration complète du remplissage suivant la direction parallèle à la diagonale comprimée, et destruction de ces extrémités

Ceci justifié le choix des liaisons de la bielle diagonale avec le portique par des articulations (fig4.1e)

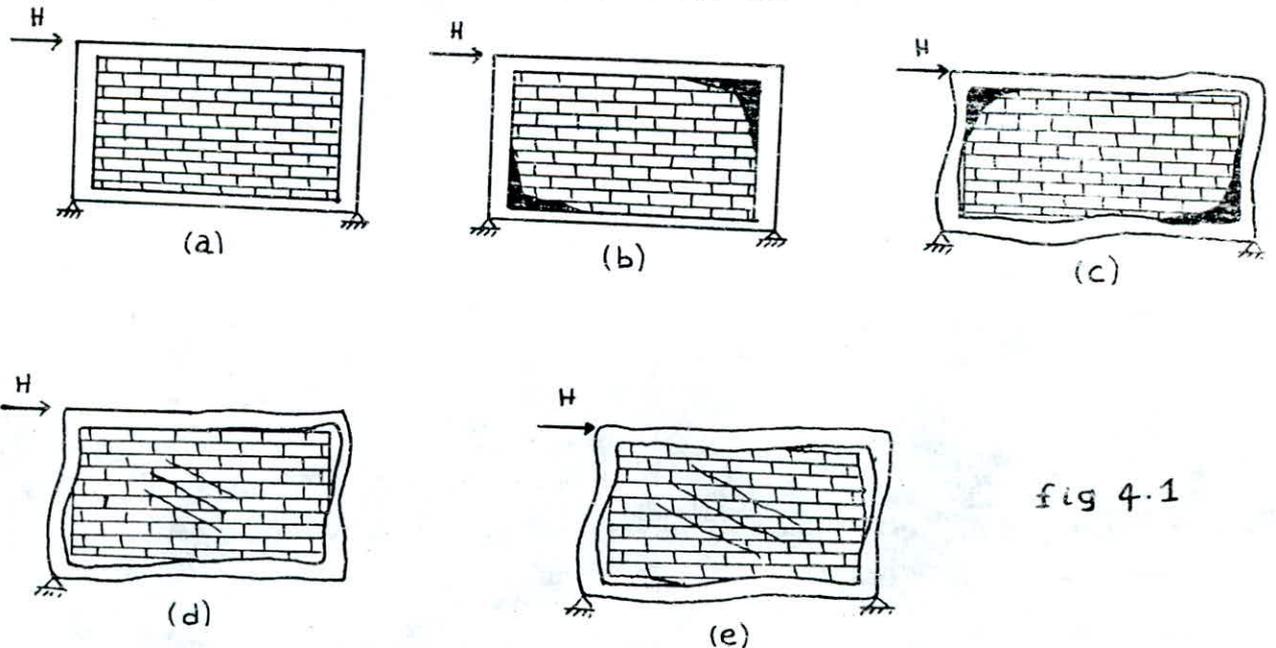


fig 4.1

IV.3 ETUDE THEORIQUE :

IV.3.1 GENERALITES :

L'analyse des structures avec remplissage, à connu l'utilisation de plusieurs méthodes :

- Méthodes basées sur la théorie d'élasticité
- Méthodes basées sur la méthode des éléments finis

Cependant l'ignorance des critères de ruptures , et des lois de comportement du panneau de remplissage , ainsi que la méconnaissance des conditions aux limites entre panneau de remplissage et le portique a suggéré que d'autres méthodes approximatives soient apparues .

Le développement de la plus part de ces dernières est basée sur le concept de la barre diagonale équivalente qui a été proposé initialement par POLYACOV et qui semble être un outil d'approximation suffisamment simple et efficace

Cette analyse nécessite l'évaluation de la rigidité des différentes éléments (structuraux,maçonnerie) .

La rigidité de l'ensemble cadre avec remplissage $[K_{ij}]$ est définie comme étant la somme de la rigidité du cadre sans remplissage $[k_{ij}]^c$ et celle du panneau de maçonnerie $[k_{ij}]^m$ représentée par sa bielle équivalente suivant la diagonale comprimée

$$[K_{ij}] = [k_{ij}]^c + [k_{ij}]^m \quad (4.1)$$

Le problème qui se pose dans cette méthode réside dans la

détermination des caractéristiques de cette barre diagonale , si pour beaucoup d'auteurs l'épaisseur de la diagonale à prendre en compte est celle du panneau de remplissage considéré , sa largeur est sujetté a une grande variabilité d'un auteur à l'autre

IV. 3. 2 EXPOSE DE LA METHODE :

La méthode est basée sur le fait que le comportement des éléments structuraux (poteaux poutres) en présence du remplissage par maçonnerie est analogue à celui d'une poutre sur appui élastique , cette analogie a été développée par STAFFORD-SMITH.

A l'aide de cette analogie , il est démontré que les longueurs de contact entre les éléments du cadre (traverse-colonne) et le panneau de remplissage sont fonction d'un paramètre λ appelé paramètre de rigidité relative de l'ensemble cadre_maçonnerie

les longueurs de contact entre le cadre et le panneau de remplissage sont données par les relations suivantes :

$$\alpha_l = \frac{\pi}{\lambda_l} \quad (4.2)$$

$$\alpha_h = \frac{\pi}{\lambda_h} \quad (4.3)$$

avec :

$$\lambda_h = \sqrt{\frac{E_m t \sin 2\theta}{4 E I_c h}} \quad (4.4)$$

$$\lambda_l = \sqrt{\frac{E_m t \sin 2\theta}{4 E I_p h}}$$

ou:

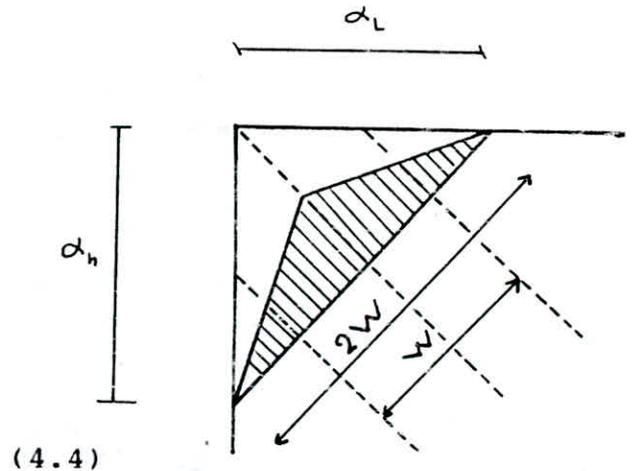


fig: 4.2

$\lambda_l \lambda_h$: paramètres de rigidité relatives de l'ensemble

$E_m E$: module d'young du remplissage et du cadre

t : épaisseur du panneau de remplissage

$I_c I_p$: moments d'inertie des poteaux et des poutres

$h \times l$: dimensions du panneau de remplissage

Pour la détermination de la largeur de la bielle équivalente, l'effet du cadre est remplacé par une distribution triangulaire des contraintes sur les longueurs de contact

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_l^2 + \alpha_h^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{1}{\lambda_l} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda_h} \right)^2 \right]} \quad (4.5)$$

IV. 3. 3 PANNEAU DE REMPLISSAGE AVEC OUVERTURES :

Un panneau de remplissage contient fréquemment des baies de portes et fenêtres qui vont évidemment réduire en fonction de leurs dimensions sa rigidité

Les expériences faites par plusieurs chercheurs indiquent qu'une ouverture localisée au centre peut réduire la portance et la rigidité du panneau par 50% et 70% respectivement en comparaison avec un panneau similaire sans ouvertures

En se basant sur des analyses expérimentales faites sur des cadres avec remplissage aux instituts de constructions de HANOI (vietnam) et BUCAREST (Roumanie), le Dr NGUYEN LE NINN a proposé une méthode approximative d'évaluation de la rigidité des panneaux avec ouvertures, elle consiste à prendre un remplissage plein équivalent en faisant rentrer le coefficient de réduction ϕ

$$\phi = 1 - \frac{1.5ab}{Lh} \quad (4.7)$$

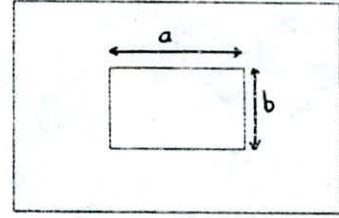


fig 4.3

L, h : dimension du panneau de remplissage

b : hauteur de l'ouverture

a : coefficient dependant de la position de l'ouverture

(fig 4.3)

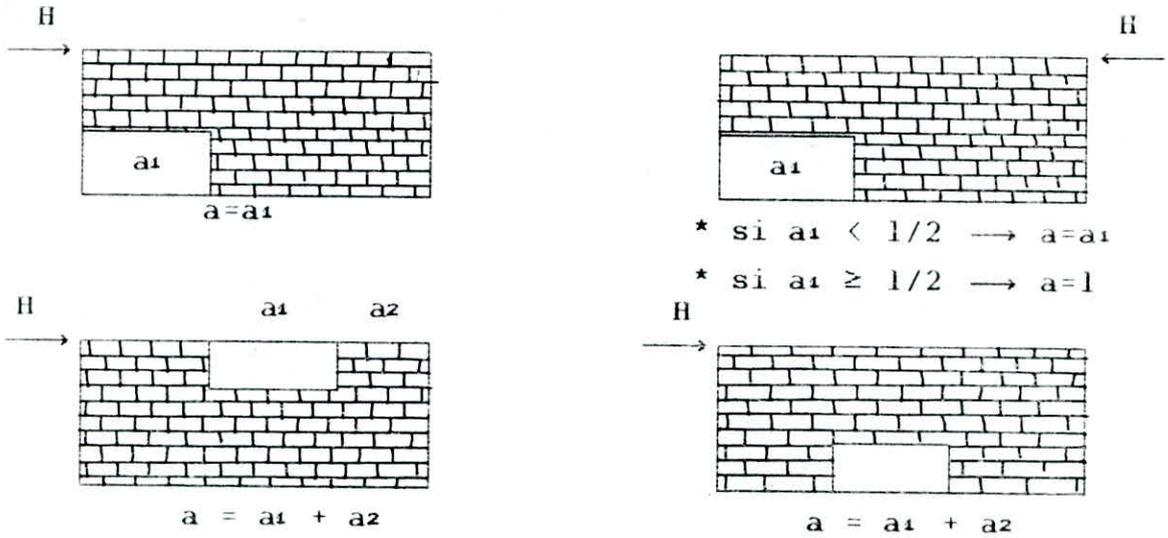


fig 4.4

IV.4 QUELQUES METHODES PRATIQUES :

IV.4.1) METHODE DE L. CIONGRADI :

Le principe de détermination d'une barre diagonale , équivalente à un remplissage est basée sur les quatres hypothèses suivantes :

- La barre diagonale est supposée ne pas être susceptible de flamber.
- Elle est disposée au droit de la diagonale comprimée .

-Elle subit l'effort total de compression qui sollicite toute section de remplissage .

La section effective de la barre diagonale est donnée par la relation:

$$A_d = \frac{K_m d}{E_m e \cos^2 \theta} = \frac{K_m l}{E_m \cos^3 \theta} \quad (4.7)$$

avec :

$K_m d E_m$: la rigidité latérale et le module de YOUNG de la maçonnerie

En comportement élastique, la section de la barre diagonale à pour expression :

$$A_d = C_t \frac{\alpha \beta 5 l_m e_m}{6 \cos^3 \theta} \quad (4.8)$$

avec :

$$\alpha = \frac{G_m}{E_m} = \frac{1}{2(1+\mu)}$$

$$\beta = l_m / h_m$$

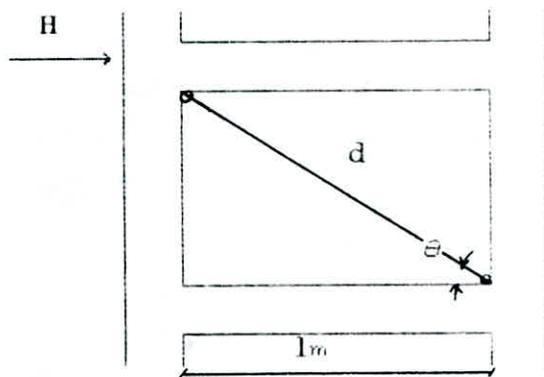


fig.4.5

l_m h_m e_m : longueur , hauteur et épaisseur du panneau de remplissage

E_m : module d'élasticité longitudinale de la maçonnerie

G_m : module d'élasticité transversale de la maçonnerie

θ : angle que forme la diagonale avec l'horizontale

5/6 : Coefficient de réduction de la section résistante au cisaillement

C_t : Coefficient tenant compte de l'influence des ouvertures dans un panneau de remplissage par maçonnerie

Il est défini expérimentalement par :

$$C_t = 0.5 \left[1 - 1.54 \left(1 - 0.25 \left(1 - \frac{a}{l_m} \right) \right) \right] \frac{b}{h_m} \quad (4.9)$$

-pour un mur plein : $C_t = 1$

-Si les dimensions de l'ouverture vérifient simultanément :

$$a \geq 0.6 l_m$$

$$C_t = 0$$

$$b \geq 0.65 h_m$$

IV.4.2 METHODE DE T BOUCHAKOUR :

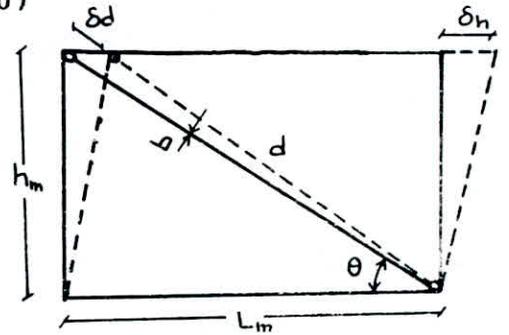
Le déplacement en tête de la structure se compose d'un déplacement de flexion et d'un déplacement de cisaillement :

$$\delta h = H \left[\frac{h_m^3}{3EI} + \frac{h_m}{G_m A_{mr}} \right] \quad (4.10)$$

$$\text{avec : } EI = E_m e_m l_m^3 / 12$$

$$A_{mr} = 5 e_m l_m / 6$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\mu)}$$



e_m, l_m, E_m : épaisseur , longueur et module de Young de la maçonnerie

A_{mr} : section réduite du cisaillement du remplissage

G_m : module de cisaillement de la maçonnerie

H : charge horizontale appliquée à la structure

μ : coefficient de poisson de la maçonnerie

La déformation axiale de la bielle :

$$\varepsilon = \frac{\delta d}{d} = \frac{\delta h \cdot \cos(\theta)}{d} \quad (4.11)$$

δd : raccourcissement de la bielle diagonale équivalente

δh : déplacement horizontal du noeud

La contrainte dans la barre diagonale :

$$\sigma = \frac{Nd}{Ad} = \frac{H}{Ad \cos\theta} \quad (4.12)$$

et à partir de la loi de HOOKE :

$$\sigma = E_m \cdot \varepsilon = \frac{E_m \delta h \cos(\theta)}{d} \quad (4.13)$$

En égalisant les expressions (4.12) et (4.13) on obtient la section de la bielle diagonale équivalente

$$Ad = \frac{H \cdot d}{E_m \cdot \delta h \cdot \cos^2(\theta)} \quad (4.14)$$

substituons (4.10) dans (4.14)

$$Ad = \frac{d \cdot e_m \cdot l_m}{4 \cdot h_m \cdot \cos^2(\theta) \left[\left(\frac{h_m}{l_m} \right)^2 + \frac{3(1+\mu)}{5} \right]} \quad (4.15)$$

comparaison des deux méthodes:

-La section effective de la barre diagonale équivalente d'un mur plein donnée par L-CIONGRADI a pour expression:

$$A_d = \frac{5 \alpha \beta e_m l_m}{6 \cos^3(\theta)}$$

-en remplaçant (α, β) par leurs valeurs, on aura :

$$A_d = \frac{5 e_m l_m^2}{12(1+\mu) \cos^3(\theta) h_m} \quad (4.16)$$

-Par contre, celle donnée par BOUCHAKOUR ; et en remplaçant la longueur de la diagonale a pour expression :

$$A_d = \frac{e_m \cdot l_m^2}{4 \cdot h_m \cdot \cos^3(\theta) \left[\left(\frac{h_m}{l_m} \right)^2 + \frac{3(1+\mu)}{5} \right]} \quad (4.17)$$

En analysant ces deux expressions on remarque que la différence réside dans la prise en considération du déplacement du a la flexion de la maçonnerie dans la formulation de BOUCHAKOUR c'est à dire qu'en négligeant le terme $(h_m/l_m)^2$ de la deuxième relation on retrouve l'expression de L-CIONGRADI

IV.4.3 METHODE DE THIRUVANGADAM :

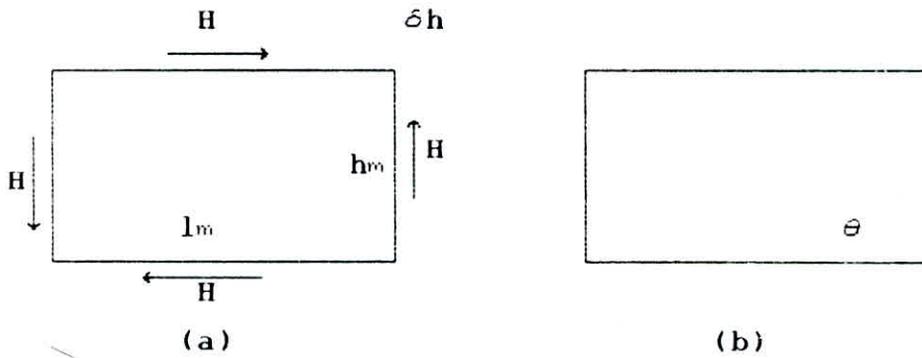


fig 4.6 a) rigidité lateral d'un panneau
b) système reticule équivalent

la rigidité latérale pour un panneau est donnée par :

$$\frac{H}{\delta h} = \frac{G_m l_m e}{h_m} \quad \text{avec } G_m : \text{module de cisaillement du remplissage}$$

e : épaisseur du remplissage

le déplacement latéral δh induit une déformation axiale dans chaque bielle égale à $(\delta h/a) \cos^2 \theta$ et un raccourcissement δd si θ représente l'angle formé entre la diagonale et l'horizontale alors:

$$\cos \theta = \delta d / \delta h = l_m / d$$

Sachant que $\epsilon = \delta d / d$, on écrira : $\epsilon = (\delta h \cos^2 \theta) / (l_m / \cos \theta)$ La relation liant la contrainte à la déformation, c'est à dire :

$\sigma_m = \epsilon \cdot E_m$, permet d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{N}{A_d} = E_m \cdot ((\delta h \cdot \cos^2 \theta) / l_m) \\ N &= H / \cos \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow H = E_m A_d \delta h \frac{\cos^3 \theta}{a}$$

N : Effort normal développé dans la bielle.

Ad : Section de la bielle égale à (e.w).

w : Largeur effective de la bielle.

La force totale pour causer δh étant : $\frac{2A_d \cdot E_m \cdot \cos^3 \theta}{l_m} \cdot \delta h$

Donc pour $\delta h = 1$, la quantité $\frac{2A_d \cdot E_m \cdot \cos^3 \theta}{l_m}$ représente la rigidité de la bielle.

$$\left. \begin{aligned} \frac{H}{\delta h} &= \frac{G_m \cdot l_m \cdot e}{b} = \frac{2 \cdot A_d \cdot E_m \cdot \cos^3 \theta}{l_m} \\ G &= \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned} \right\} \rightarrow A_d = \frac{l_m^2 \cdot e}{4 \cdot (1+\mu) \cdot b \cdot \cos^3 \theta}$$

IV.5 CONCLUSION :

la prise en considération des remplissages par maçonnerie dans le calcul pratique des ossatures a pour effets:

- Augmentation de la rigidité latérale de la structure
- Changement du comportement de la structure

D'autres conclusions seront faites en annexe sur la valeur du facteur de charge ainsi que sur les valeurs des fréquences propres

CHAPITRE V :

ANALYSE PLASTIQUE EN TENANT COMPTE DE L'EFFET DE L'EFFORT NORMAL

V.1 INTRODUCTION :

Plusieurs études ont porté sur l'analyse plastique des ossatures dans laquelle l'objectif était la détermination du facteur de charge correspondant à la ruine de la structure

La plus part de ces travaux considèrent l'analyse plastique rigide (c'est à dire du premier ordre) dans laquelle l'effet de l'effort normal est négligé et la rupture est atteinte au moment de formation du mécanisme de ruine.

L'influence de l'effort normal présente deux aspects : d'une part il intervient dans la plastification des sections , d'autre part il provoque des instabilités de barres,dans les structures élancées pouvant causer la ruine de ces dernières,ou d'une partie d'elles.

Dans ce type d'analyse ,les méthodes développées sont basées sur l'étude de l'historique du chargement nous utilisons donc dans l'étude que nous présentons ici la méthode pas à pas .

Nous avons mis au point un programme de calcul sur ordinateur prenant en compte l'effet de l'effort normal en considérant que le matériau a un comportement parfaitement plastique et que les variations de géométrie de la structure au cours du chargement sont négligeables "puisque nous limitons les amplitudes des déplacements aux valeurs admissibles".

Pour traiter ce problème on suppose que le facteur de charge varie de zéro jusqu'au facteur de ruine λ avec un pas donné. Ceci augmente considérablement le nombre d'étapes et rend les coûts de calcul élevé.

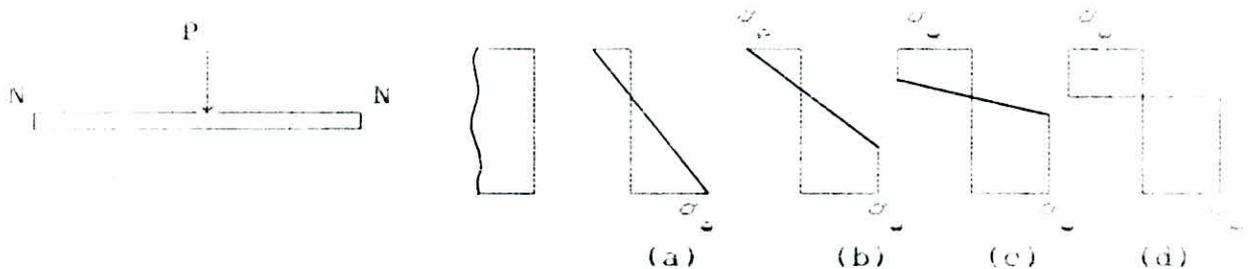
Une approche consiste à supposer un comportement linéaire de la structure entre deux apparitions successives de rotules: on remplace donc le comportement non linéaire par une succession de calcul linéaire.

V.2 ETUDE DE LA PLASTIFICATION AU NIVEAU DE LA SECTION :

Avant d'aborder l'étude du comportement d'une structure dans le domaine élastoplastique nous allons nous intéresser au phénomène au niveau d'une section pour une barre soumise à la flexion composée.

Nous gardons les mêmes hypothèses admises au chapitre 2, l'effet de l'effort normal étant pris en compte celui de l'effort tranchant est supposé négligeable.

Considérons la section centrale de la poutre représentée sur la figure (5.1) lorsque la force P augmente les contraintes dans cette section passent par les états indiqués à la figure (5.1). L'axe neutre n'est pas confondu avec l'axe de symétrie de la section.



fig(5.1)

Le dernier diagramme peut être décomposé en deux diagrammes les contraintes dans l'un ont pour résultante un moment de flexion seul et dans l'autre la résultante se compose uniquement d'un effort normal

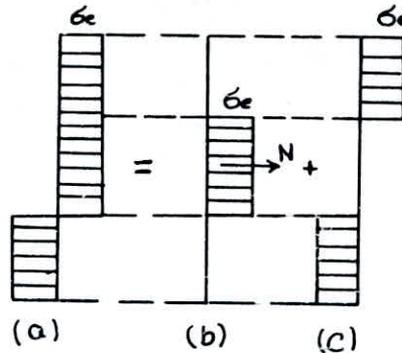


fig5.2

Cette décomposition montre que le moment plastique de flexion pure M_p est réduit d'une quantité représentée par le moment plastique M_p^d de la portion centrale de la poutre dont la hauteur est $2d$

$$M_u = M_p - M_p^d \quad (5.1)$$

M_u : moment ultime

Si l'on désigne par A_d l'aire de cette portion on a d'après la figure(5.2) :

$$N = \sigma_u A_d \quad (5.2)$$

L'effort N pour laquelle la section est entièrement plastifiée en traction (ou compression) s'appelle "effort normal plastique" par analogie avec le moment plastique M_p

$$N_p = \sigma_u A \quad (5.3)$$

A étant l'aire de toute la section

en tenant compte de (5.2) on a :
$$\frac{N}{N_p} = \frac{Ad}{A} \quad (5.4)$$

D'autre part d'après la théorie faite en chapitre 2 on a

$$M_p = \sigma_c \cdot Z \quad M_p = \sigma_c \cdot Z_d \quad (5.5)$$

Où :

Z, Z_d : représente les modules de flexions plastique de la section entière et de la portion de la section d'aire Ad

En divisant les deux membres de l'égalité (5.1) et en tenant compte de (5.5) on obtient :

$$\frac{M_u}{M_p} = 1 - \frac{Z_d}{Z} \quad (5.6)$$

-CAS DE SECTION RECTANGULAIRE :

$$\frac{N}{N_p} = \frac{2d}{h} ; \quad Z = \frac{bh^2}{4}, \quad Z_d = b \cdot d^2$$

$$\text{d'où} \quad \frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2$$

-CAS DE SECTION EN I OU H :

Pour les sections en I ou H qui nous intéressent en construction métallique l'équation (5.6) est pour la flexion autour de l'axe fort x-x :

-si $0 \leq d \leq h-2e$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 \frac{A^2}{4a Z_x}$$

-si $d \geq h - 2e$

$$\frac{M}{M_p} = \frac{A (1 - N/N_p) \left\{ h - [A(1 - N/N_p) / 2b] \right\}}{2 Z_x}$$

avec A : aire total de la section

Z_x : module de flexion de la section entière

V.3) ANALYSE PLASTIQUE LINEAIRE :

V.3.1) NOTION DE SURFACE D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE :

L'équation (5.6) pouvant se mettre sous la forme $\frac{M}{M_p} = F\left(\frac{N}{N_p}\right)$ représente l'équation de la courbe d'interaction (M, N) ou courbe d'écoulement

Lorsque le point représentant les efforts (M, N) dans une section est à l'intérieur de la courbe d'écoulement la section est dans le domaine élastique, lorsque le point est sur la courbe la section est entièrement plastifiée

Pour les profilés en I et H la courbe d'écoulement est montrée sur (la figure 5.3)

Pour ce type de profilés les règlements adoptent l'approximation suivante:

$$\begin{aligned}
 & \text{-si } 0 \leq \frac{N}{N_p} \leq C & M_{ux} &= M_p \\
 & \text{-si } C \leq \frac{N}{N_p} \leq 1 & M_{ux} &= M_p \frac{1 - \frac{N}{N_p}}{1 - C}
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

de sorte que la courbe d'écoulement plastique devienne linéaire (fig 5.4) la valeur de c délimite l'effet de l'effort normal sur la rigidité elle est introduite pour chaque barre

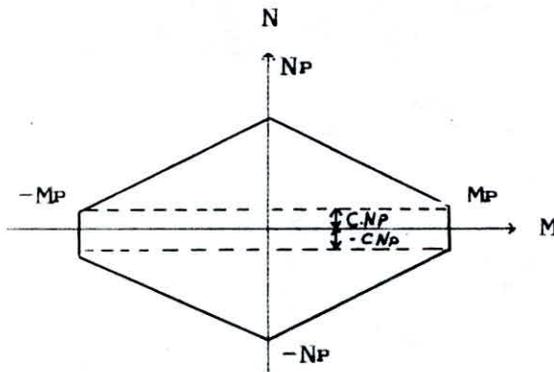


fig 5.4

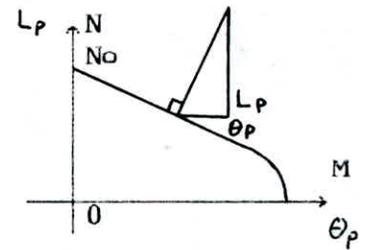


fig 5.3

Comme en analyse plastique rigide (premier ordre) les régions plastiques peuvent être décrites comme des rotules concentrées ou l'état de contrainte est représenté par un point sur la courbe d'écoulement

V.3.2 PLASTIFICATION D'UNE SECTION :

une section est plastifiée , lorsque le point représentant les efforts (M,N) atteint l'une des six frontières d'écoulement plastiques (fig5.4) dans ce cas lorsque le chargement se poursuit ce point se déplace en restant sur la courbe d'interaction et ne peut sortir de ce domaine que dans le cas de retour élastique

Les variations des déformations plastiques dans la section plastifiée sont liées entre-elles par la loi de normalité exprimant que : le vecteur représentant ces déformations doit à tout instant être dirigé suivant la normale extérieure à la courbe d'interaction s'il tend à se diriger suivant la normale intérieure la section retourne dans le domaine élastique en conservant cependant des déformations plastiques permanentes

V.3.2.1 PLASTIFICATION D'UNE NOUVELLE SECTION :

Les efforts en cumul dans la section (i) au n^{ème} pas sont :

$$M_i = M_i^{n-1} + \Delta\lambda \Delta M_i \quad (5.8)$$

$$N_i = N_i^{n-1} + \Delta\lambda \Delta N_i$$

avec :

$\Delta M_i \Delta N_i$: les variations de moment de flexion et de l'effort normal pour une augmentation du facteur de charge (λ) provoquant la n^{ème} plastification elles sont obtenues par un calcul de type élastique avec une matrice de rigidité qui tient compte des (n-1) rotules plastiques et de la force axiale N_i

$M_i^{n-1} N_i^{n-1}$: sollicitations à l'instant où se produit la n^{ème} rotule

Les équations des segments délimitants les frontières d'écoulement plastiques sont des équations de droites simples; le segment 2 par exemple fig(5.4) a pour équation:

$$(1-C)M + \frac{M_{p_i}}{N_{p_i}} N = M_p \quad (5.9)$$

où :

M_p, N_p : moment et effort normal plastique de la section i

C : facteur délimitant l'effet de l'effort normal de la barre contenant la section i

La valeur que doit prendre le facteur de charge ($\Delta\lambda_i$) pour que le point représentant les efforts (M_i^n, N_i^n) dans la section critique (i) atteigne par exemple la droite (2) délimitant le domaine admissible est

$$(1-C) [M_i^{n-1} + \Delta\lambda_{i,2} \Delta\lambda_{i,2} \Delta M_i] + \frac{M_p}{N_p} [N_i^{n-1} + \Delta\lambda_{i,2} \Delta N_i] = M_p \quad (5.10)$$

$$\Delta\lambda_{i,2} = \frac{M_p - \frac{M_p}{N_p} N_i^{n-1} - (1-C) M_i^{n-1}}{\frac{M_p}{N_p} \Delta N_i + (1-C) \Delta M_i} \quad (5.11)$$

On calcul ainsi $\Delta\lambda_{i,j}$ dans toutes les sections critiques ($i=1,n$) et pour les six segments limitant le domaine ($j=1,6$) la section à laquelle correspond la plus petite valeur de $\Delta\lambda$ sera la nouvelle section plastifiée à moins que cette section ne soit déjà plastifiée auquel cas elle change simplement de type de plastification c'est à dire que le point représentant les efforts internes quitte l'un des six segments (fig 5.4) pour se déplacer au voisin donc en considérant que le comportement non linéaire de la structure est remplacé par une succession de comportements linéaires le pas de charge peut être déduit automatiquement comme en plastique rigide

Pour les segments 1 et 4 le pas de charge est déterminé comme

en plastique rigide en effet l'équation de ces segments est donnée par :

$$M_l = M_{pl}$$

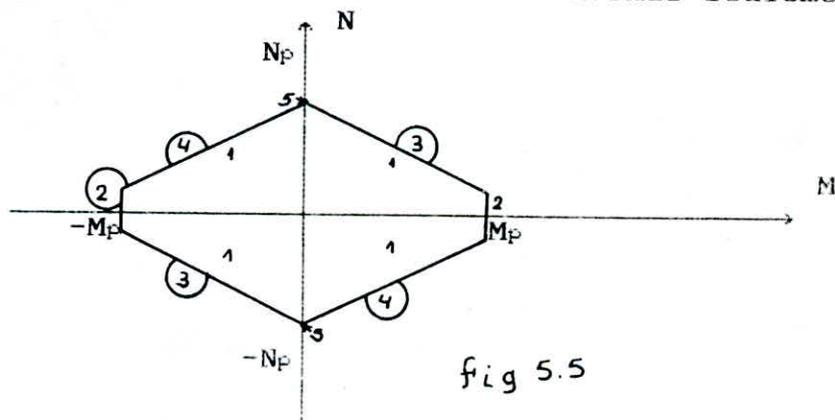
de
$$\left| M_l^{n-1} \right| + \Delta \lambda_l \left| \Delta M_l \right| = M_{pl}$$

on a :
$$\Delta \lambda_{l,1} = \frac{M_{pl} - \left| M_l^{n-1} \right|}{\left| \Delta M_l \right|} \quad (5.12)$$

V.3.2.2 DIFFERENTES CONFIGURATIONS POSSIBLES :

Nous considérons dans cette analyse 5 états possibles (fig 5.5)

- Etat1 : domaine élastique
- Etat2 : plastification sans effet de l'effort normal
- Etat3 : plastification avec effet de l'effort normal (N et M ont le même sens)
- Etat4 : plastification avec effet de l'effort normal (N et M de sens opposés)
- Etat5 : plastification sous l'effort normal seulement



Pour qu'une section plastifiée reste sur la courbe d'interaction, lorsque les efforts varient, il faut que les

variations de ces dernières ainsi que celles des déformations plastiques restent dans le rapport Q_{ij} pour la barre ij (loi de normalité)

$$\frac{\Delta M_l}{\Delta N_l} = Q_{ij} \quad (5.13)$$

$$\frac{\Delta L_p}{\Delta N_p} = - Q_{ij} \quad (5.14)$$

$$\text{* etat 2:} \quad Q_{ij} = 0 \quad (5.15)$$

$$\text{* etat 3:} \quad Q_{ij} = \frac{-1}{1-C_l} \frac{M_{p_l}}{N_{p_l}} \quad (5.16)$$

$$\text{* etat 4:} \quad Q_{ij} = \frac{1}{1-C_l} \frac{M_{p_l}}{N_{p_l}} \quad (5.17)$$

V.3.3 DETERMINATION D'UN MECANISME DE RUINE :

Les valeurs de certains déplacements deviennent très grands au moment d'apparition de mécanisme de ruine sous l'accroissement de charge $\Delta\lambda$ la matrice de rigidité n'est plus inversible c'est la condition nécessaire mais non suffisante en effet il faut que les déformations produites au niveau des rotules plastiques soient compatibles avec les efforts internes en cas inverse c'est le retour élastique de la section

Un nouveau passage pour ce dernier pas est nécessaire pour rétablir la matrice de rigidité de la structure en ômetant cette rotule plastique

V.4 RETOUR ELASTIQUE DES SECTIONS PLASTIFIEES :

Malgré que le chargement est considéré croissant proportionnellement il se peut que certaines sections se trouvent déchargées à un instant donné les comportements de ces dernières redeviennent immédiatement élastiques mais des déformations plastiques subsistent dans ces zones et ne varient plus tant que ces sections restent dans le domaine élastique

Ces retours élastiques ne peuvent se produire qu'immédiatement après une nouvelle plastification puisque la structure a un comportement linéaire entre deux apparitions successives de rotules plastiques donc dans cet intervalle les variations des déformations plastiques restent de même sens

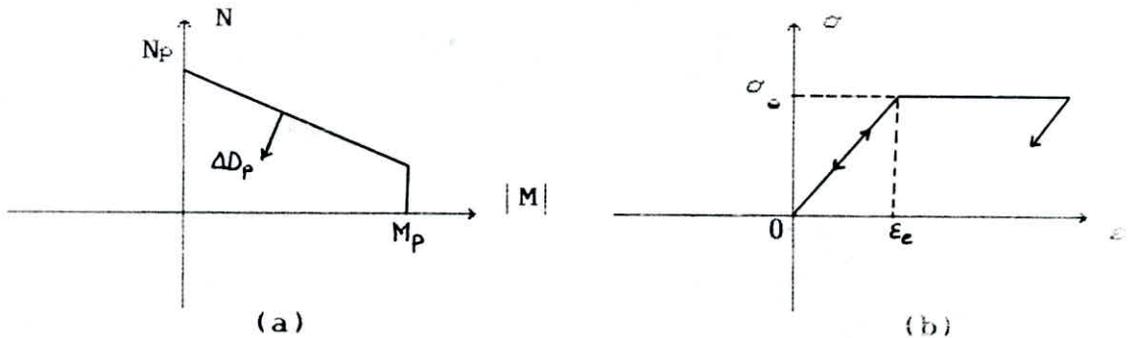


fig 5.6

Une section plastifiée reprend un comportement élastique si les variations de déformations plastiques ne sont pas compatibles avec les contraintes agissantes dans ce cas le vecteur variation de déformation plastique tend à se diriger suivant la normale intérieure à la courbe d'interaction (fig5.6a)

Le critère du retour élastique est donné par la relation :

$$MT \Delta\theta_p + NT \Delta L_p < 0 \quad (5.18)$$

avec : MT, NT : efforts internes en cumuls

V.5 MATRICE DE RIGIDITE :

V.5.1 BARRE A UNE PLASTIFICATION :

Nous allons considérer le cas général d'une barre d'ossature , présentant une plastification à la section se trouve à l'abscisse ($x_1 L$) de l'extrémité gauche (fig 5.7a)

La barre est plastifiée par combinaison d'effort normal et de moment flechissant . Nous écrivons la matrice permettant de déterminer la matrice de rigidité.

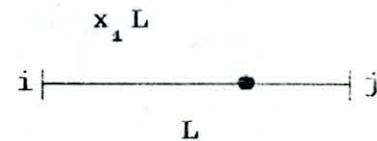
* LES CONDITIONS D'EQUILIBRES STATIQUES :

Les six actions aux extrémités de la barre ainsi que les efforts au niveau de la section plastifiée sont liées entre eux par les conditions d'équilibre statique (fig5.7 c)

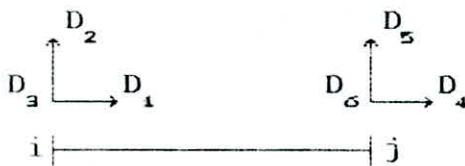
$$F_{x_i} = -F_{x_j} \quad (5.19)$$

$$F_{y_i} = -F_{y_j} \quad (5.20)$$

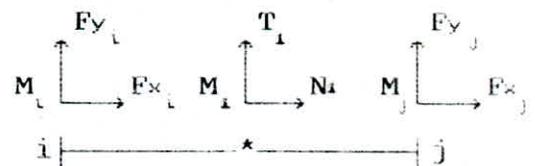
$$M_i = -M_j - F_{y_j} L \quad (5.21)$$



(a)



(b)



(c)

fig 5.7

$$N_1 = +F x_j \quad (5.22)$$

$$T_1 = +F y_j \quad (5.23)$$

$$M_1 = M_j + F y_j L (1 - X_1) \quad (5.24)$$

* LES CONDITIONS DE PLASTICITE :

Les efforts et les déformations plastiques au niveau de la section plastifiée doivent respecter les conditions de plasticité suivantes:

$$M_1 = Q_1 N_1 \quad (5.25)$$

$$\Delta L_p = -Q_1 \Delta \theta_p \quad (5.26)$$

où : M_1 , N_1 : représente les variations d'efforts

ΔL_p , ΔQ_p : les variations des déformations plastiques

* LES CONDITIONS DE COMPATIBILITE :

Les déformations élastiques et plastiques sont tenues à satisfaire aux conditions de compatibilités

En effet les déplacements relatifs au noeud (j) par rapport au noeud (i) sont données en fonction des déplacements élastiques nodaux et des déformations plastiques (fig5.8 b)

$$d_1 = D_4 - D_1 = \frac{L}{EA} F x_j + \Delta l_p \quad (5.27)$$

$$d_1 = D_5 - D_2 - L D_3 = \frac{L^3}{3EI} F y_j + \frac{L^2}{2EI} M_j + \Delta \theta_p (1 - X_1) L \quad (5.28)$$

$$d_3 = D_6 - D_3 = \frac{L^2}{2EI} F y_j + \frac{L}{EI} M_j + \Delta \theta_p \quad (5.29)$$

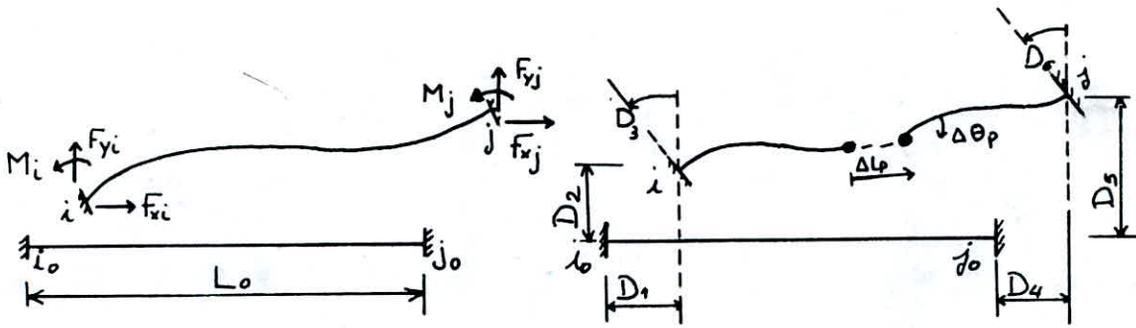


fig 5.8

A partir des equations (5.19) à (5.29) nous allons exprimer les efforts au noeuds i et j en fonction des déplacements nodaux D_k ($k=1,6$) en éliminant donc les variables $N_1, T_1, M_1, \Delta L_p, \Delta \theta_p$ et ceci afin d'aboutir à la matrice de rigidité de l'element

Les déformations plastiques sont données à partir des relations (5.27) et (5.29) :

$$\Delta L_p = D_4 - D_1 - \frac{L}{EA} F_{xj} \quad (5.30)$$

$$\Delta \theta_p = D_6 - D_3 - \frac{L^2}{2EI} F_{yj} - \frac{L}{EI} M_j \quad (5.31)$$

substituons $\Delta \theta_p$ (5.31) dans l'expression (5.28) :

$$\frac{L^3}{2EI} (x_1 - \frac{1}{3}) Fy_j + \frac{L^2}{EI} (x_1 - \frac{1}{2}) M_j = D_5 - D_2 - x_1 L D_3 + L(x_1 - 1) D_6 \quad (5.32)$$

des équations de plasticité (5.26) et de déformations plastiques (5.31) on obtient à partir de la relation (5.27) :

$$\frac{L}{EA} Fx_j + Q_1 \frac{L^2}{2EI} Fy_j + Q_1 \frac{L}{EI} M_j = D_4 - D_1 - Q_1 D_3 + Q_1 D_6 \quad (5.33)$$

de (5.22) (5.24) et (5.25):

$$Q_1 Fx_j = M_j + Fy_j L(1-x_1) \rightarrow M_j = Q_1 Fx_j - Fy_j L(1-x_1) \quad (5.34)$$

des équations (5.32) (5.33) et (5.34) nous déterminerons les expressions de Fx_j , Fy_j et M_j

Remplaçons dans les expressions (5.32) et (5.33) M_j par sa valeur (5.34) on aura respectivement les relations suivantes :

$$\frac{L^3}{EI} \left[x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3} \right] Fy_j + \frac{L^2}{EI} (x_1 - \frac{1}{2}) Q_1 Fx_j = D_5 - D_2 - x_1 L D_3 + L(x_1 - 1) D_6 \quad (5.35)$$

$$\left[\frac{L}{EA} + \frac{Q_1^2 L}{EI} \right] Fx_j + \frac{Q_1 L^2}{EI} (x_1 - \frac{1}{2}) Fy_j = D_4 - D_1 - Q_1 D_3 + Q_1 D_6 \quad (5.36)$$

De la relation (5.35) :

$$(x_1 - \frac{1}{2}) Fx_j = \frac{EI}{L^2 Q_1} \left[D_5 - D_2 - x_1 L D_3 + L(x_1 - 1) D_6 \right] - \frac{L}{Q_1} Fy_j (x_1^2 - x_1 + \frac{1}{3}) \quad (5.37)$$

En remplaçant dans (5.36) on aura :

$$-\frac{L^2}{3EAQ_1} \left[3x_1^2 - 3x_1 + 1 + \frac{AQ_1^2}{4I} \right] Fy_j = (x_1 - \frac{1}{2}) (D_4 - D_1) + \left[\frac{I}{AQ_1 L} + \frac{Q_1}{L} \right] * \\ (D_2 - D_5) + \left[\frac{Ix_1}{AQ_1} + \frac{Q_1}{2} \right] D_3 + \left[\frac{Q_1}{2} + \frac{I}{AQ_1} (1-x_1) \right] \quad (5.38)$$

posons: $1/\beta = 3x_1^2 - 3x_1 + 1 + \frac{AQ_1^2}{4I}$ (5.39)

donc la relation (5.38) devient :

$$Fy_j = \beta \frac{3EAQ_1}{2L^2} (2x_1 - 1) (D_1 - D_4) - \beta \left[\frac{3EI}{L^3} + \frac{3EAQ_1^2}{L^3} \right] (D_2 - D_5) - \\ \beta \left[\frac{3EI}{L^2} + \frac{3EAQ_1^2}{2L^2} \right] D_3 - \beta \left[\frac{3EAQ_1^2}{2L^2} + \frac{3EI}{L^2} (1-x_1) \right] D_6 \quad (5.40)$$

à remplacer dans l'expression (5.37) :

$$Fx_j = \frac{2L^2}{3EAQ_1} \left[3x_1^2 - 3x_1 + 1 + \frac{AQ_1^2}{4I} \right] = \frac{-2L}{3Q_1} (3x_1^2 - 3x_1 + 1) (D_1 - D_4) \\ + (2x_1 - 1) (D_2 - D_5) + \frac{L}{3} (3x_1 - 2) D_3 + \frac{L}{3} (3x_1 - 1) D_6$$

En combinant avec la relation (5.39) on trouve :

$$Fx_j = -\beta \frac{EA}{L} (3x_1^2 - 3x_1 + 1) (D_1 - D_4) + \beta \frac{3EAQ_1}{2L^2} (2x_1 - 1) (D_2 - D_5) \\ + \beta \frac{EAQ_1}{2L} (3x_1 - 2) D_3 + \beta \frac{EAQ_1}{2L} (3x_1 - 1) D_6$$

En remplaçant Fx_j , et Fy_j par leurs valeurs dans (5.34) on obtient après toute simplification :

$$M_j = \beta \frac{EAQ_1}{2L} (1-3x_1) (D_1 - D_4) + \beta \left[\frac{3EAQ_1^2}{2L^2} + \frac{3EI}{L^2} (1-x_1) \right] (D_2 - D_5) \\ + \beta \left[\frac{EAQ_1^2}{2L} + \frac{3EIx_1}{L} (1-x_1) \right] + \beta \left[\frac{EAQ_1^2}{L} + \frac{3EI}{L} (1-x_1)^2 \right] D_6$$

A partir de la 3^{me} equation d'équilibre statique 5.21 les moments aux extrémités de la barre sont liées par la relation :

$$M_i = -M_j - Fy_j L$$

après substitution des valeurs de M_j et Fy_j (5.40) et (5.42) on aura :

$$M_i = -\beta \frac{EAQ_1}{2L} (3x_1 - 2) (D_1 - D_4) + \beta \left[\frac{EAQ_1^2}{L} + \frac{3EIx_1^2}{L} \right] D_3 + \\ \beta \left[\frac{EAQ_1^2}{L} + \frac{3EI}{L} (1-x_1) \right] D_6$$

Dans un processus incrémental (méthode pas à pas) le comportement de la structure fait intervenir la matrice de rigidité $[K]$ de chaque element telque :

$$[K] \{D\} = \{R\}$$

$\{R\}$: vecteur taux de variations des sollicitations agissant aux extrémités de la barre (actions des noeuds sur les barres)

$\{D\}$: vecteur taux de variations des déplacements des noeuds d'extrémités de la barre

soit une barre (ij) considérée dans son repère local ,en se rapportant pour les notations aux figures (5.6 b et 5.6 c) nous avons:

$$\{D\} = \{D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4 \ D_5 \ D_6\}^T$$

$$\{R\} = \{F_{x_i} \ F_{y_i} \ M_i \ F_{x_j} \ F_{y_j} \ M_j\}$$

L'écriture sous forme matricielle des relations donnant les efforts aux extrémités $\{R\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{D\}$; nous permet de définir la matrice de rigidité différentielle de l'élément considéré .

En effet à partir des relations (5.19),(5.20)et de (5.40) jusqu'au (5.43), nous écrivons les équations régissant le comportement de la barre (voir tableau I)

Parmi les hypothèses prises au début de ce travail est que les barres ne reçoivent les charges qu'à leurs extrémités le diagramme des moments fléchissant est donc linéaire, et l'effort normal est constant dans ces barres .

En conséquent, les plastifications ne peuvent se produire qu'à leurs extrémités

Nous allons donc prendre les différentes positions possibles

des rotules plastiques afin de calculer pour chaque cas la matrice de rigidité dans le repère local

cas1: barre bi-encastée	barre élastique
cas2: articulée à gauche	plastification au noeud; ($x = 0$)
cas3: articulée à droite	plastification au noeudj ($x = 1$)
cas4: biarticulée	plastification aux deux extrémités

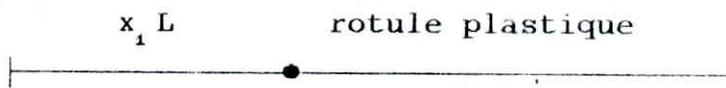
Pour le cas de barre à deux plastifications, nous procédons de la même façon que l'élément à une seule rotule sauf qu'on ajoute les équations d'équilibres statiques, les conditions de plasticité et de compatibilité relative à la deuxième plastification.

Par contre pour la barre en régime élastique, le coefficient Q_1 qui représente la tangente de la surface d'écoulement plastique fig(5.3) est près égal à zéro.

Nous résumons les termes indépendants de la matrice de rigidité dans les différentes configurations (voir tableau 2)

Les autres termes de la matrice de rigidité sont symétrique et par application des conditions d'équilibre statique.

En utilisant les relations (3.8), (3.11), (3.12) données au chapitre 3; nous pouvons écrire la matrice de rigidité dans le cas général en repère globale moyennant les termes K_{ij} donnés en tableau 2



F_{x_i}	$\beta \frac{EA}{L} (3x_1^2 - 3x_1 + 1)$	$-\beta \frac{3EAQ_1}{2L^2} x_1$	$-\beta \frac{EAQ_1}{2L^2} x_1$		$-\beta \frac{EAQ_1}{2L} x_1 (3x_1 - 1)$	D_1
F_{y_i}	$-\beta \frac{3EAQ_1}{2L^2} x_1 (2x_1 - 1)$	$\beta \left[\frac{3EI}{L^3} + \frac{3EAQ_1}{L^3} \right]$	$\beta \left[\frac{3EI}{L^2} x_1 + \frac{3EAQ_1}{2L^2} \right]$		$\beta \left[\frac{3EAQ_1}{2L^2} + \frac{3EI}{L^2} (1-x_1) \right]$	D_2
M_i	$-\beta \frac{EAQ_1}{2L} x_1 (3x_1 - 2)$	$\beta \left[\frac{3EAQ_1^2}{2L^2} + \frac{3EI}{L^2} x_1 \right]$	$\beta \left[\frac{EAQ_1^2}{2L^2} + \frac{3EI}{L} x_1^2 \right]$		$\beta \left[\frac{EAQ_1^2}{2L} + \frac{3EI}{L} x_1 (1-x_1) \right]$	D_3
F_{x_j}	- la première ligne					D_4
F_{y_j}	- la deuxième ligne					D_5
M_j	$\beta \frac{EAQ_1}{2L} (1-3x_1)$	$\beta \left[\frac{EAQ_1^2}{2L} + \frac{3EI}{L} x_1 (1-x_1) \right]$	$\beta \left[\frac{EAQ_1^2}{2L} + \frac{3EI}{L} x_1 (1-x_1) \right]$		$\beta \left[\frac{EAQ_1^2}{2L^2} + \frac{3EI}{L} (1-x_1^2) \right]$	D_6

tableau : Matrice de rigidité d'une barre à une plastification à l'abscisse(x_1, L)

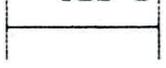
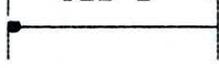
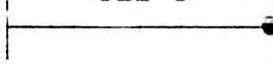
cas	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4
Rig.				
K(1,1)	$\frac{EA}{L}$	$\beta \frac{EA}{L}$	$\beta \frac{EA}{L}$	γ
K(1,2)	0	$\beta \frac{3EAQ_1}{2L^2}$	$-\beta \frac{3EAQ_2}{2L^2}$	$-\gamma \frac{Q_2 - Q_1}{L}$
K(1,3)	0	$\beta \frac{EAQ_1}{L}$	$\beta \frac{EAQ_2}{2L}$	γQ_1
K(2,2)	$\frac{12EI}{L^3}$	$\beta \left[\frac{3EI}{L^3} + \frac{3EAQ_1}{L^3} \right]$	$\beta \left[\frac{3EI}{L^3} + \frac{3EAQ_1}{L^3} \right]$	$-\gamma \frac{(Q_2 - Q_1)^2}{L^2}$
K(2,3)	$\frac{6EI}{L^3}$	$\beta \frac{3EAQ_1^2}{2L^2}$	$\beta \left[\frac{3EI}{L^2} + \frac{3EAQ_2^2}{2L^2} \right]$	$-\gamma \frac{Q_2 - Q_1}{L} Q_1$
K(3,3)	$\frac{4EI}{L}$	$\beta \frac{EAQ_1^2}{L}$	$\beta \left[\frac{3EI}{L} + \frac{EAQ_2^2}{L} \right]$	γQ_1^2
β, γ, Q	$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{AQ_1^2}{4I}$ $Q_1 = \frac{M_l}{N_l}$		$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{AQ_2^2}{4I}$ $Q_2 = \frac{M_j}{N_j}$	$\frac{EI}{L}$ $\gamma = \frac{1}{\lambda + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_2)^2}$

Tableau 2 : matrice de rigidité d' une barre dans les différents types de plastifications

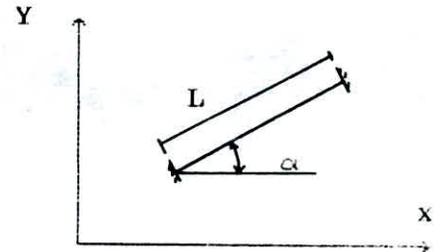
$$\left[K_{ll} \right] = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} K_{11} = K_{11} C^2 + K_{22} S^2 \\ - 2K_{12} CS \end{array} & \begin{array}{c} K_{12} = (K_{11} - K_{22}) CS \\ + K_{12} (C^2 - S^2) \end{array} & \begin{array}{c} K_{13} = K_{13} C - \\ - K_{23} S \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \text{symétrique} \end{array} & \begin{array}{c} K_{22} = K_{11} S^2 + K_{22} C^2 \\ + 2K_{12} CS \end{array} & \begin{array}{c} K_{23} = K_{13} S + \\ + K_{23} C \end{array} \\
 \hline
 & & K_{33} = K_{33} \\
 \hline
 \end{array}$$

où :

$$C = \cos \alpha$$

$$S = \sin \alpha$$

α : angle que fait la barre par rapport au repère global



$$\left[K_{jl} \right] = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 -K_{11} & -K_{12} & -K_{13} \\
 \hline
 -K_{21} & -K_{22} & -K_{23} \\
 \hline
 \begin{array}{c} -L S K_{11} \\ + L C K_{12} - K_{13} \end{array} & \begin{array}{c} -L S K_{12} \\ + L C K_{22} - K_{23} \end{array} & \begin{array}{c} -L S K_{13} \\ + L C K_{23} - K_{33} \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\left[K_{lj} \right] = \left[K_{jl} \right]^T$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \\ \text{symétrique} \\ K_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline K_{11} & K_{12} \\ \hline & L S K_{11} - L C K_{12} + K_{13} \\ \hline \text{symétrique} & L S K_{12} - L C K_{22} + K_{23} \\ \hline & L^2 S^2 K_{11} + L^2 C^2 K_{22} - 2L^2 C S K_{12} - \\ & -2 L C K_{23} + 2 L S K_{13} + K_{33} \\ \hline \end{array}$$

V.6 CONCLUSION:

La prise en compte de la géométrie déformée de la structure peut être approchée en discrétisant les barres en tronçons courts la déformée de la barre sera donc approchée par une suite de segments rectilignes .

Dans ce cas le nombre de degrés de liberté de la structure augmente mais la simplicité des termes de la matrice de rigidité pallie largement cet inconvénient.

CHAPITRE VI

ETUDE DYNAMIQUE

VI-1 INTRODUCTION :

L'objectif principale, de la dynamique des structures est l'étude du comportement des structures soumises à des charges dynamiques variables les structures généralement caractérisée par une masse et une élasticité peuvent effectuer des mouvements sous l'action des sollicitations dynamiques si le mouvement est répétitif il est appelé vibration.

Généralement on comprend par action dynamique; action variable dans le temps par : position , grandeur , direction , qui contribue à l'apparition des forces d'inertie.

Dans le cas de notre projet , on déterminera les caractéristiques dynamiques propres de la structure (pulsation propre , période propre) , en vue de suivre leurs variations avec la dégradation de la structure , ainsi que l'effet de la prise en compte des remplissages en tant qu'éléments structuraux sur ces caractéristiques .

VI.2 LA MODELISATION MATHEMATIQUE :

La détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement possible de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à des chargements dynamiques en particulier le séisme.

La modélisation consiste à répartir la masse en un nombre fini de points , on admet les hypothèses suivantes :

a/ les masses du bâtiment le long de sa hauteur sont supposées co-ncentrées aux niveau de ses différents planchers.

b/ la masse d'un plancher est répartie entres les différents noeuds de celui-ci et ceci permet de prendre en compte la déformabilité des planchers

c/ seuls les degrés de liberté de translation horizontale sont considérés (prépondérance du séisme horizontal).

d/ La modélisation devrait se faire pour toute la structure et non pas pour un portique. Cependant pour nôtre cas , cette étude dynamique est limitée à des portiques plans car elle complète l'étude élasto-plastique plane .

Une analyse complète élasto-plastique et dynamique doit donc être tridimensionnelle.

VI-3 CARACTERISTIQUE DU MODELE :

Pour un système dont on ne considère que les degrés de liberté de translation (*la rotation et le déplacement vertical sont supposés négligeable pour chaque masse du modele*). La matrice masse est diagonale ; le nombre de termes diagonaux de cette matrice est égale au nombre de degrés de liberté. Les termes extra-diagonaux sont nuls car une accélération appliquée à un noued où est concentrée une masse ne produit de force d'inertie qu'en ce même point. Lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inertie ont pour valeur :

$$F_1 = m_1 \ddot{U}_1$$

$$F_2 = m_2 \ddot{U}_2$$

$$F_j = m_j \ddot{U}_j$$

$$F_n = m_n \ddot{U}_n$$

ou m_j : la masse relative au degré de liberté j

\ddot{u}_j : l'accélération dans la direction du degré de liberté j .

Les relations précédentes s'écrivent :

$$F = M \ddot{u}$$

\ddot{u} représente le vecteur des accélérations :

$$\ddot{u} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix}$$

M est la matrice des masses, diagonale, et de dimension $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & & 0 \\ & m_2 & & 0 \\ & & & \\ & & m_j & \\ & & & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

VI.3.1. MATRICE DE RIGIDITE LATERALE :

La matrice de rigidité $[KL]$ correspondant aux degrés de liberté horizontaux du modèle sera déduite de la matrice de rigidité globale $[K]$ de la structure après la prise en compte des conditions aux limites, en ne considérant que les termes

K_{ij} correspondants aux déplacements horizontaux la matrice de rigidité latérale $[KL]$ est une matrice bande symétrique, puisqu'elle est déduite de la matrice globale $[K]$ elle même symétrique et bande.

VI.4. CALCUL DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES :

Résoudre un problème aux valeurs propres, et aux vecteurs propres, consiste à trouver les couples $\lambda_i, [\theta_k]$ qui satisfont la relation suivante :

$$[KL] [\theta_k] = \lambda_i [M] [\theta_k] \quad *$$

$[KL]$: matrice de rigidité latérale du modèle.

$[M]$: matrice masse.

$[\theta_k]$: vecteur déplacement de la structure définissant le $K^{i\text{ème}}$ mode propre de vibration.

$\lambda = \omega^2$ carrée de la pulsation propre.

La formule peut s'écrire :

$$([KL] - [M]\omega^2) [\phi] = 0.$$

Cette expression représente un système de n équations à n inconnues qui sont les composantes du vecteur $[\phi_k]$. Une solution différente de zéro n'est possible que si le déterminant de la matrice $([KL] - [M]\omega^2)$ est nul :

$$\det([KL] - [M]\omega^2) = 0.$$

Si on développe ce déterminant, on obtient une équation de degrés n en ω^2 . La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots, \omega_n$ relatives aux modes de vibrations possibles.

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_1^j \\ \phi_2^j \\ \vdots \\ \phi_k^j \\ \vdots \\ \phi_n^j \end{bmatrix}$$

le vecteur de vibration $[\theta_k]$ qui correspond aux modes de vibration k , de pulsation ω_k est donné par :

$$([K] - [M]\omega_k^2)[\phi_k] = 0.$$

Le domaine de calcul, des valeurs, et vecteurs propres est très vaste, nous citerons quelques méthodes de calcul.

VI.4.1. METHODE DE STODOLA-VIANELLO :

La méthode de STODOLA permet d'obtenir la fréquence propre ainsi que le mode propre de vibration d'une structure, c'est une méthode itérative qui peut être employée manuellement avec un petit ordinateur de bureau, pour étudier les vibrations des structures. jusqu'à une dizaine de degrés de liberté, elle est basée sur la formule de récurrence suivante :

$$\phi_{(l+1)k} = [S] [M] \omega^2 \phi_{lk}$$

[S] : la matrice de souplesse (ou de flexibilité) et la fréquence propre :

$$\omega^2 = \frac{\phi_{(l+1)k}}{\phi_{lk}}$$

Pour calculer la fréquence du mode fondamental, on se donne un vecteur initial correspondant à ce mode.

VI.4.2 METHODE DE HÖLZER :

C'est une méthode itérative basée sur la notion de rigidité relative de niveau elle consiste à se donner une valeur initiale de la pulsation, ω puis à calculer la forme propre associée à cette valeur de ω par la relation suivante :

$$X(k-1) = X(k) \frac{\omega^2}{R(k-1)} \sum m(k) X(k)$$

$R(k)$ et ω : rigidité et poids relatif au noeud K

si $X(0) = 0$ alors ω est la pulsation recherchée est $[X]$, sont les formes propres
 sinon refaire le même procédé avec une autre valeur de ω

VI.4.3 METHODE DE JACOBI :

La méthode de JACOBI permet de calculer les n valeurs et vecteurs propres d'un système de dimension limité ($n < 100$) dont les matrices sont symétriques et définies positives, elle consiste à transformer les matrices $[K]$ et $[M]$ en des matrices diagonales en utilisant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} [K^1] &= [K] & [M^1] &= [M] \\ [K^2] &= [Q^2]^T [K^1] [Q^2] & [M^2] &= [Q^2]^T [M^1] [Q^2] \\ [K^{k+1}] &= [Q^k]^T [K^k] [Q^k] & [M^{k+1}] &= [Q^k]^T [M^k] [Q^k] \end{aligned}$$

Les matrices $[K^{k+1}]$ et $[M^{k+1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$ lorsque k tend vers l'infini.

Les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$[\omega^2] = [K^d] [M^d]^{-1} \quad \text{ou} \quad \omega^2 = K_{ii}^d / M_{ii}^d$$

$$[\varphi] = [Q^1] [Q^2] \dots [Q^k] [Q^{k+1}] \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{(M_{ii}^d)^{1/2}} & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Les périodes propres sont alors :

$$T_i = 2\pi / \omega_i$$

Chaque matrice $[Q^k]$ est choisie de manière à ce qu'un terme (i, j) non diagonal et non nul de $[K^k]$ et $[M^k]$ soit nul après la transformation numéro (k) . La matrice $[Q]$ à la structure suivante

ALGORITHME DE LA METHODE DE JACOBI

Définir la précision de convergence requise ε .

Pour chaque cycle s

Définir la tolérance dynamique $\varepsilon_s = 10^{-2s}$

Pour chaque ligne $i = 1, 2, \dots, n$

Pour chaque colonne $j = i+1, \dots, n$

Calculer les facteurs de couplage :

$$f_k = \frac{|K_{ij}|}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}} \quad f_m = \frac{|M_{ij}|}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}}$$

Si f_k ou $f_m > \varepsilon_s$

- Calculer a et b par

- Transformer les matrices [K] et [M]

colonne i = colonne i + b.colonne j

colonne j = a.colonne i + colonne j

Puis :

ligne i = ligne i + b.ligne j

ligne j = a.ligne i + ligne j

- Modifier les vecteurs propres [X]

colonne i = colonne i + b.colonne j

colonne j = a.colonne i + colonne j

Calcul des valeurs propres

$$\lambda_i = \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad \text{et} \quad F_\lambda = \frac{|\lambda_i^s - \lambda_i^{s-1}|}{|\lambda_i^{s-1}|}$$

Calculer les facteurs de couplage

$$F_k = \text{Max}_{i,j} \frac{|K_{ij}|}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}} \quad , \quad F_M = \text{Max}_{i,j} \frac{|M_{ij}|}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}}$$

Test de convergence : $F_k < \varepsilon$ et $F_M < \varepsilon$ et $F_\lambda < \varepsilon$

CHAPITRE VII

ORGANISATION DU PROGRAMME

VII.1 INTRODUCTION :

Parmi les différentes méthodes d'analyse des portiques , nous avons opté pour la méthode des déplacements qui est basée sur la théorie des matrices de rigidités , grâce à sa simplicité et l'adaptation de sa formulation au calcul informatique

Tout d'abord , nous définissons les différentes phases nécessaires pour le déroulement d'un programme de calcul élastique , basé sur la méthode des déplacements :

- Lecture et vérification des données
- Calcul des matrices de rigidités élémentaires et les vecteurs forces de tous les éléments
- construction de la matrice de rigidité $[K]$ et du vecteur force $\{F\}$ globaux de la structure et leurs adaptation aux conditions aux limites
- résolution du système d'équations linéaires :

$$[K]\{U\}=\{F\}$$

- Dédution des sollicitations
- Impression des résultats

Pour une analyse plastique , et pour permettre de suivre l'évolution de la structure lorsque les charges augmentent

jusqu'au charge de ruine , d'autres phases sont incorporées dans ce programme chacune de ces étapes nécessite un developpement dans une ou plusieurs subroutines

VII.2 VARIETES DE PROBLEMES :

Le programme est développé sur machine en langage FORTRAN

Il est décrit tel qu'on peut l'appliquer à de nombreux types de problèmes :

-Analyse élastique des treillis plans

-Analyse élastique d'ossatures planes (avec différentes types de liaisons entre les elements)

-Analyse parfaitement plastique des portiques plans, avec et sans effet des remplissages par maçonnerie

Le pas de charge qui correspond à la formation d'au moins d'une rotule plastique est déduit automatiquement

-Analyse plastique des portiques en tenant compte de l'effet de l'effort normal(avec et sans effet des remplissages)

Une subroutine de calcul dynamique est incorporée dans le programme permettant la détermination des caractéristiques propres de la structure dans les différentes cas d'analyse

VII.3 DESCRIPTION DU PROGRAMME :

Le programme est basé sur la méthode des déplacements dans un processus à plusieurs étapes

L'introduction des données et leurs vérifications aux erreurs de logique se font sur format libre

La procédure consiste à analyser pour chaque étape de calcul , la structure sous facteur de charge unité , dans un premier cas

tout en préservant , les déformations et les sollicitations provoquées par les accroissements de charges déterminées aux étapes précédentes , afin de pouvoir estimer les réserves de moments plastiques aux sections critiques

Dans le calcul préliminaire , on évalue les matrices de rigidités des éléments suivant le type d'analyse , dans le repère globale [RIG] en tenant compte des nouveaux modes de liaisons "liaisons actualisées" et on les assemble de façon à construire la matrice de rigidité complète de la structure [AK]

Vu l'aspect bande et symétrique de la matrice [K] , le stockage de la moitié de la bande nous permettra un gain considérable en mémoire et un temps de résolution plus court

Quoique le nombre de termes non nuls de [K] reste constant la largeur de bande peut varier considérablement avec l'ordre de numérotation des noeuds . En effet sa valeur lb correspond au maximum de la différence entre les numéros de deux noeuds reliés par une barre puisque ceci est liée à la présence d'une matrice extra-diagonale non nulle

$$lb = \max(j-i)+1$$

où : i et j noeud de la barre a

nombre d'élément de la bande $=3*lb$

stockage de la matrice demi-bande :

Dans le programme informatique établie , il est procédé au stockage uniquement de la demi bande supérieur , pour ce faire il est nécessaire de déterminer la position d'un élément de la demi bande en fonction de sa position dans la matrice globale

Soit une barre $I_1 I_2$ appartenant à une structure donnée (fig7.1)

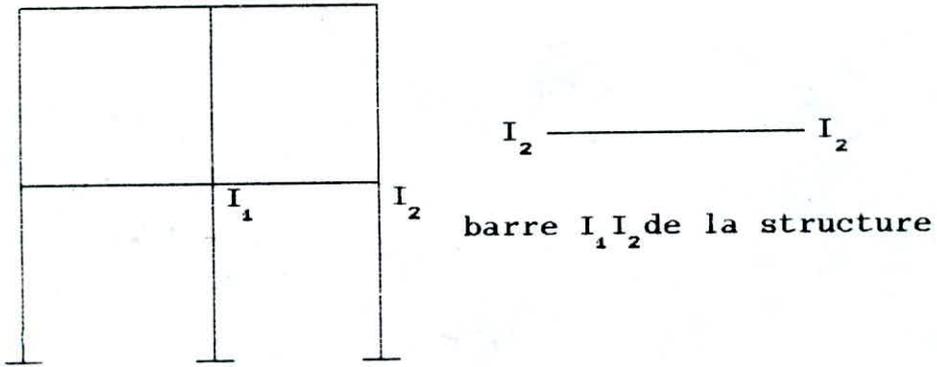
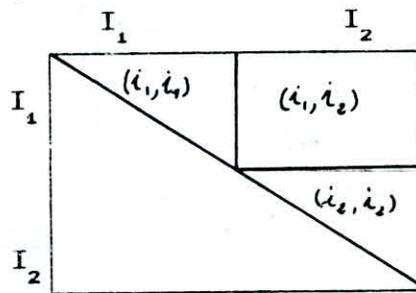


FIG 7.1

la matrice de rigidité de cette barre dans le repère global est de la forme suivante :



Pour obtenir la matrice de rigidité globale de la structure , nous additionons les termes des blocs ayant les mêmes indices

soient i, j les positions d'un terme dans la matrice élémentaire $[K]$ et soient P_i, P_j les positions de celui-ci dans la matrice globale , nous avons les relations suivantes :

1^{er} bloc (i_1, i_2) :

$$\begin{aligned}
 P_i &= (i - 1) \cdot 3 + i & i &= 1, 3 \\
 P_j &= (i - 1) \cdot 3 + j & j &= i, 3
 \end{aligned}$$

2^{ème} bloc (i_1, i_2) :

$$P_i = (i - 1) \cdot 3 + i \quad i=1,3$$

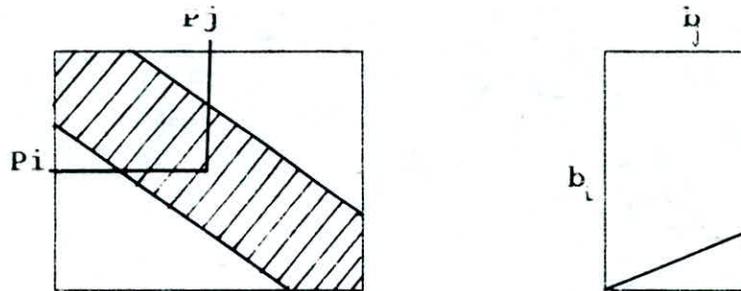
$$P_j = (i - 1) \cdot 3 + j - 3 \quad j=4,6$$

3^{ème} bloc (i_1, i_2) :

$$P_i = (i - 1) \cdot 3 + i - 3 \quad i=4,6$$

$$P_j = (i - 1) \cdot 3 + j - 3 \quad j=i,6$$

b_i et b_j étant les coordonnées de l'élément dans la demi-bande stockée :



Nous avons les relations suivantes :

$$b_i = P_i$$

$$b_j = P_j - P_i + 1$$

le second membre $\{F\}$ de notre équation se compose de deux parties :

-Un terme du aux forces directement appliquées aux noeuds $\{FN\}$ pour un facteur de charge unité.

-Un terme du aux forces appliquées sur les barres $\{FB\}$

et tous les deux sont fonction du facteur de charge qui est l'objet de ce calcul

$$ALAM1 = \frac{M(I)}{RM(I)}$$

$$ALAM2 = \frac{M_p - \frac{M_p}{N_p} |N(I-1)| - (1-C) |M(I-1)|}{(1-C) |\Delta M| + \frac{M_p}{N_p} |\Delta N|}$$

M(I) : moment en cumul

RM(I-1) : réserve de moment à l'étape précédente

M_p, N_p : moment et effort normal plastiques

M(I-1), N(I-1) : moment et effort normal à l'étape précédente

ΔM, ΔN : variations du moment et de l'effort normal

Une fois ce facteur de charge est déterminé , on entame la deuxième sous étapes qui consiste à évaluer les efforts et les déplacements sous cette charge

$$S(I) = S(I-1) + ALAM \cdot \Delta S$$

S(I), S(I-1) : efforts aux étapes (I) et (I-1)

ΔS : variations d'effort

Les réserves de moments plastiques sont considérés comme étant les compléments des moments cumulés des différentes étapes par rapport aux moments plastiques

Une actualisation des codes de liaison entre les barres en tenant compte des nouvelles plastifications et des retours élastiques est nécessaire et va nous servir pour les prochaines étapes

Pour une structure r fois hyperstatique le nombre nécessaire de rotules plastiques qui la rend inutilisable "mécanisme" et suivant le cas:

- mécanisme complet $= (r+1)$ rotules plastiques
- mécanisme surcomplet $> (r+1)$ rotules plastiques
- mécanisme partiel $< (r+1)$ rotules plastiques

avec : $r = N3 - NEQ - 3$

NEQ : nombre de degré de liberté libres

N3 : nombre total de degré de libertés

NN : nombre total de noeuds

On considère que la structure devient un mécanisme si :

- La matrice de rigidité globale de la structure est singulière
- Le déplacement en un point de la structure est très grand
- Une rotule se forme sous l'effet d'un facteur de charge trop petit ($\lambda < 1.E-5$)

Dans ce cas , le programme s'arrête et un récapitulatif portant sur la charge de ruine réelle et l'ordonnancement d'apparition des rotules est affiché

l'avantage de cette procédure c'est qu'on est sûr que pendant chaque étape il y'a l'apparition d'au moins une rotule plastique

Ceci minimise le temps de calcul pour la machine en comparaison avec la méthode pas à pas si le pas est fixé ultérieurement

VII.4 LISTE NOMINATIVE DES VARIABLES :

Variables	descripton
NN	nombre total de noeud
N3	nombre total de degrés de libertés
NB	nombre total de barre
NET	nombre d'étapes pour un calcul plastique nombre de charge
ITYPE=1	=1 analyse plastique rigide sans maçonnerie =2 analyse plastique avec effet de l'effort normal =3 analyse plastique rigide avec effet de maçonnerie =4 analyse plastique avec effet de l'effort normal et de la maçonnerie
mac	=1 section donnée par BOUCHAKOUR =1 section donnée par L-CIONGRADI =1 section donnée par THIRUVANGADAM
C	facteur délimétant l'effet de l'effort normal

VII.5 TABLES ET VECTEURS UTILISES DANS LE PROGRAMME

NOM ET TAILLE	DESCRIPTION
X(NN),Y(NN)	coordonnées des noeuds dans le repere global
IELE(NC)	numéro de l'element soumis a la charge i
CHA(NC)	valeur de la charge
IDIR (NC)	Code de deduction et type de charge ! 1 force nodale selon l'axe X ! ! 2 force nodale selon l'axe Y ! IDIR(I) ! 3 moment ! ! 4 charge uniforme selon l'axe ! de la barre ! 5 charges uniforme sur travee
JDEB(NB)	noeud debut
JFIN(NB)	noeud fin
SECT(NB)	sections des barres

AINE(NB)	inerties des barres
IART(NB)	code de la nature des liaisons des barres ! 0 bi-encastree ! ! 1 debut articule et fin ! encastree IART(I) ! ! 2 debut encastree et fin ! articule ! ! 3 bi articule
ALON(NB)	longueur des barres
RIG(27,NB)	matrices de rigidite elementaire (repere global)
ROT(9,NB)	matrice de rotations des barres permettant le passage du repere local au repere global
AK(N3, LB)	matrice de rigidite demi bande
FB(6, NN)	termes du aux forces sur les barres

<p>EFB(6,NN)</p>	<p>efforts internes dans les barres</p> <p>EFB(1,I) et EFB(3,I) : efforts normaux respectivement aux noeuds debut et fin de la barre I</p> <p>- EFB(2,I) et EFB(4,I) : efforts tranchant respectivement aux noeuds debut et fin de la barre I</p> <p>- EFB(3,I) et EFB(6,I) : moments fléchissant respectivement aux noeuds debut et fin de la barre I</p>
<p>FN(3,NN)</p>	<p>second membre</p>
<p>IAPP(NN)</p>	<p>code appui</p> <p>! 0 appui</p> <p>IAPP(I) !</p> <p>! 1 non appui</p>
<p>DP(3,NN)</p>	<p>vecteur déplacement sous charge unitaire</p>
<p>DLAM(NET+1)</p>	<p>facteurs d'accroissement de charge</p>
<p>RMP1(NB,NET+1) RMP2(NB,NET+1)</p>	<p>réserves de moments plastiques aux noeuds N et N</p>

A4(2,NB)	matrice des accroissements de charges servant à la détermination du facteur réel
ENTi(NB,NET+1) i=2,4,5	effort normaux et tranchants sous facteur de charge (DLAM)
AD(NBD,NET)	sections des barres diagonales equivalentes aux panneaux de remplissage
SIGM(NB)	contraintes cumulées dans les sections des barres diagonales

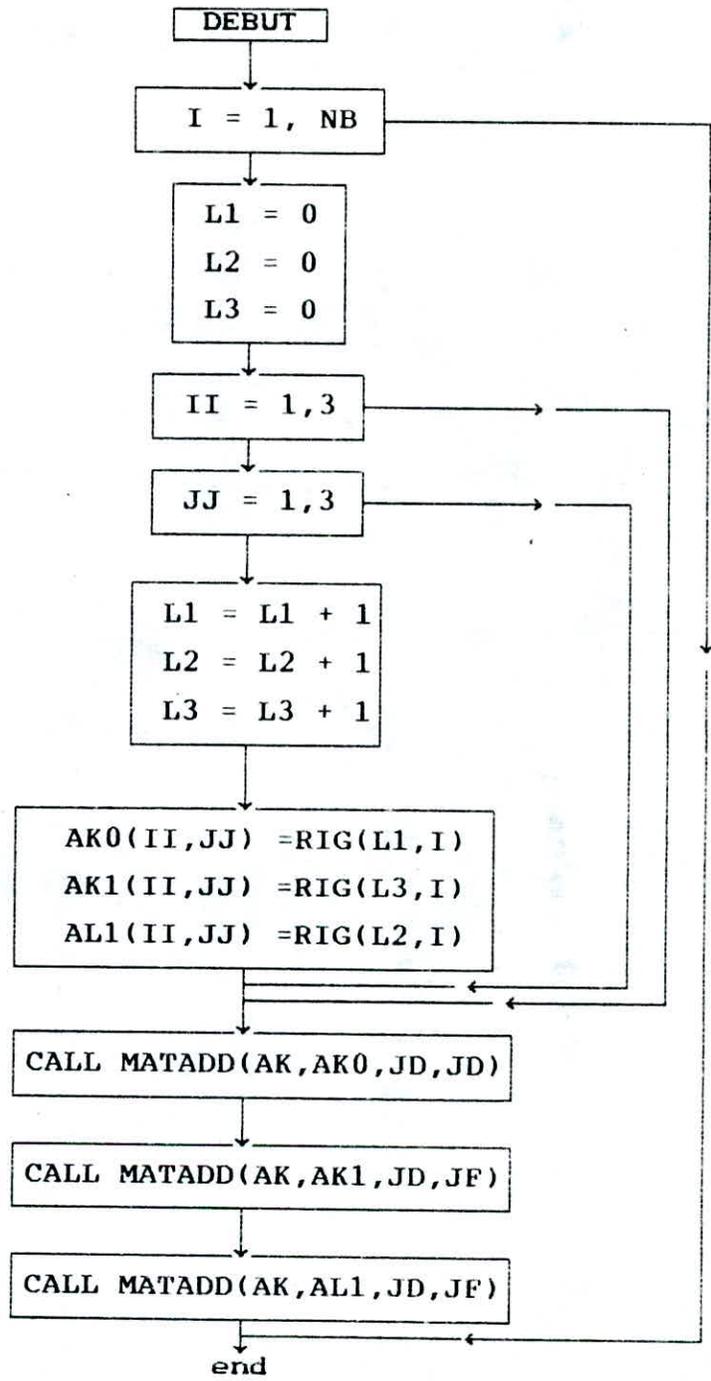
VII.6 DIFFERENTES SUBROUTINES DU PROGRAMME :

SUBROUTINES	FONCTIONS
INTR	lecture et vérification des données aux : noeuds, l'element et chargement
MATBAR	construction des matrices de rigidités élémentaires (repère globale) suivant deux types d'analyse analyse élastique et plastique rigide (avec et sans maçonnerie
MATBARN	construction des matrices de rigidite élémentaire (repère globale) suivant l'analyse élastoplastique (avec et sans maçonnerie)
ASSEM	assemblage des matrices de rigidités élémentaires dans la matrice de rigidité globale de la structure (demi-bande)
MATADD	addition des sous matrices de dimensions [3x3] diagonales, des matrices élémentaires dans la matrice demi-bande
MATADD1	addition des sous matrices de dimensions [3x3] extra-diagonales, des matrices élémentaire dans la matrice demi-bande
MATMUL	multiplication de deux matrices de dimensions [3x3]

JACOB	détermination des vecteurs et fréquences propres de la structure
FORCE	assemblage dans le vecteur de charges globales du : <ul style="list-style-type: none"> -vecteur de charge nodales -vecteur force du aux charges réparties
LIM	adaptation de la matrice de rigidité et du vecteur force aux conditions aux limites
RESOL	résolution du système d'équation linéaire $[AK] U = FT$ par la méthode de gauss modifiée (gauss bande)
RESUL	calcul des efforts dans les barres <ul style="list-style-type: none"> -recherche de l'incrément de charge λ et l'endroit de formation de la rotule plastique ou éventuellement des retours élastiques -recherches des panneaux de maçonneries détruits -actualisation des codes de liaisons -calcul des déplacements, des sollicitations et de la charge en cumulé -calcul des réserves de moments plastiques -calcul des contraintes dans les barres diagonales -impression des résultats

stockage de la matrice demi bande :

subroutine d' assemblage en bande



SUBROUTINE MATADDCAK, A, JLIG, JCOL) :

I=1,3

J=I,3

IL = (JLIG-1)3+I
IC = (JCOL-1)3+J

Ib1 = IL
Ib2 = IC-IL + 1

AK(Ib1, Ib2)=AK(Ib1, Ib2)+A(I, J)

end

SUBROUTINE MATADD1(AK, A, JLIG, JCOL)

I=1,3

J=1,3

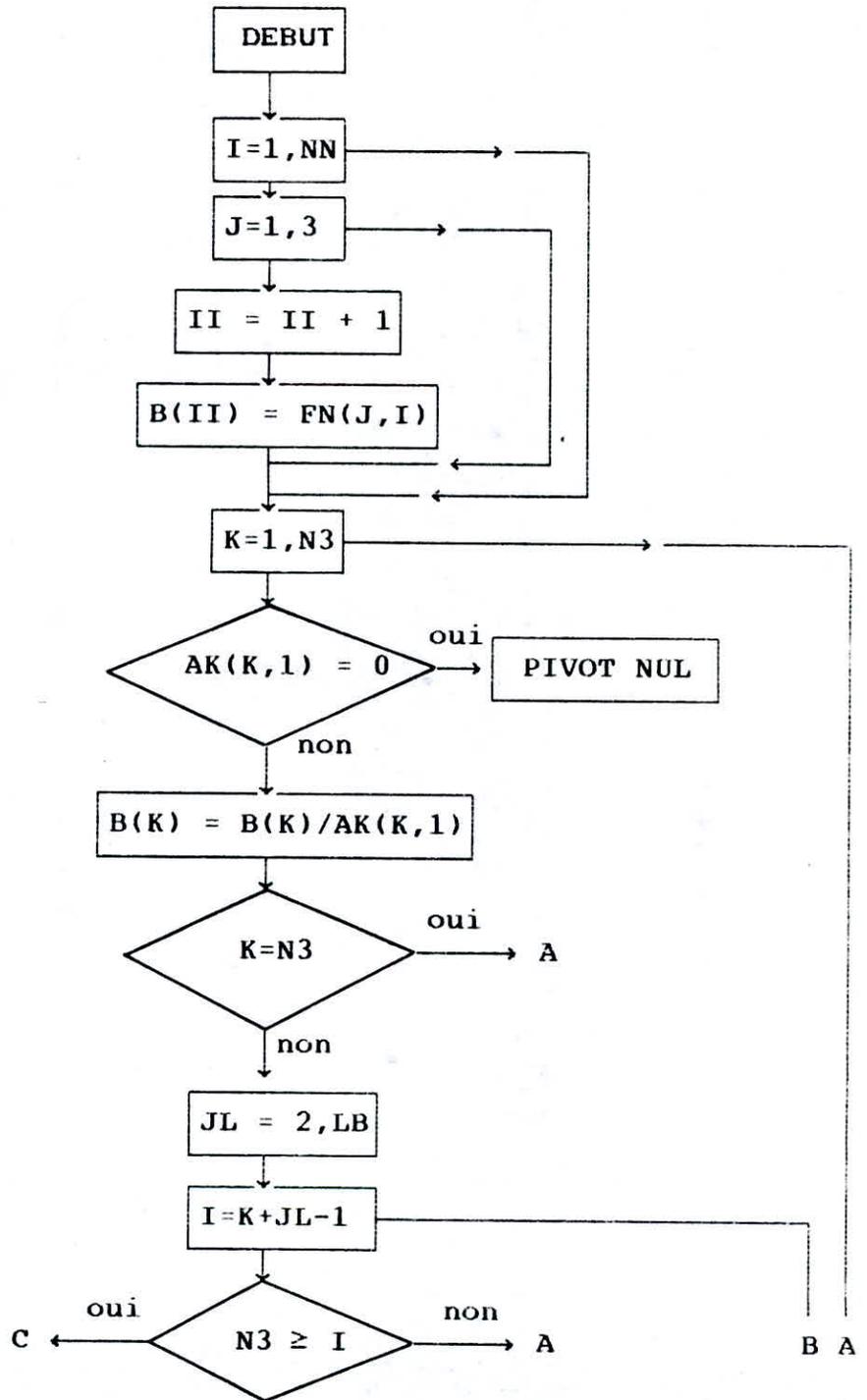
IL = (JLIG-1)3+I
IC = (JCOL-1)3+J

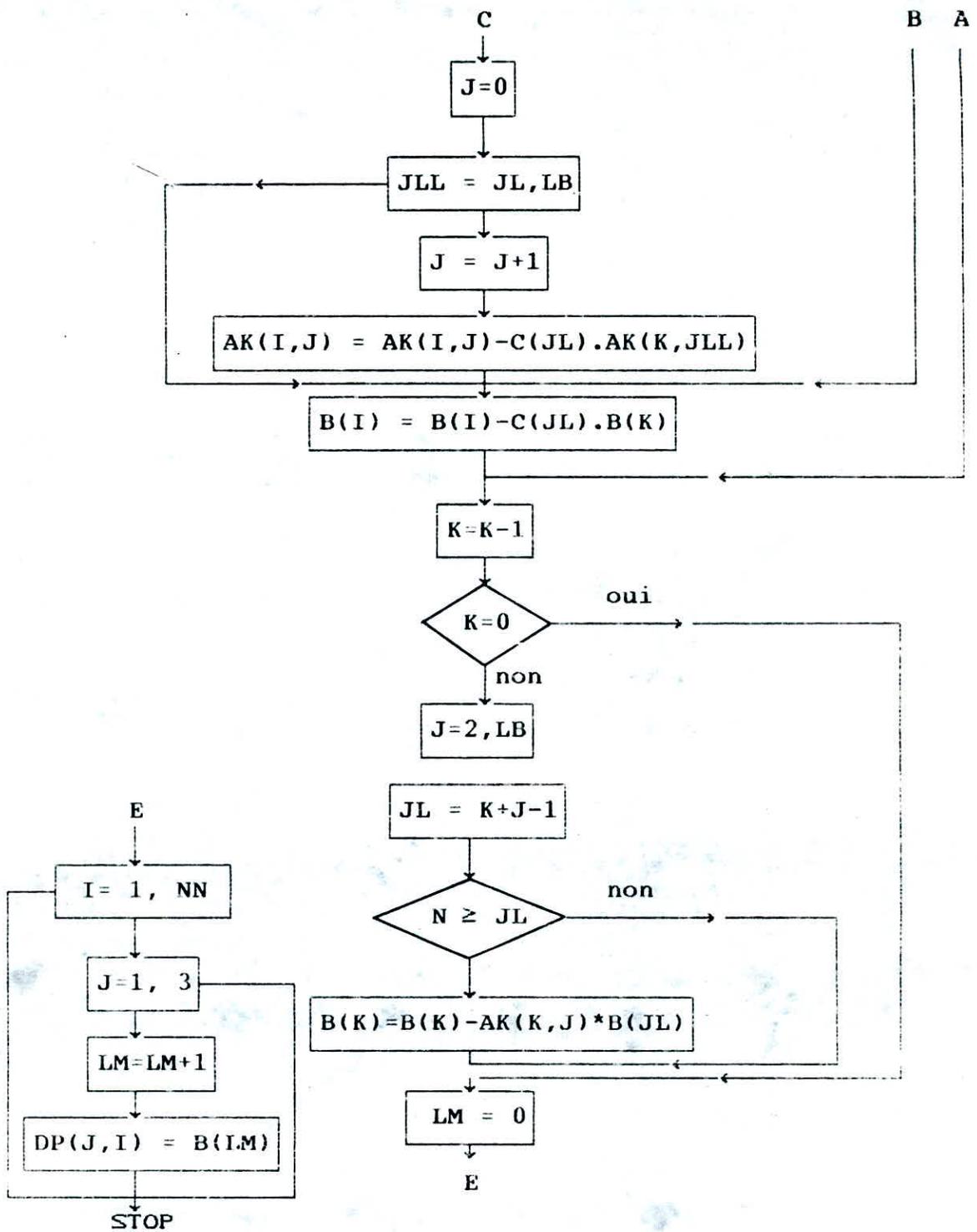
Ib1 = IL
Ib2 = IC-IL + 1

AK(Ib1, Ib2)=AK(Ib1, Ib2)+A(I, J)

end

SUBROUTINE DE RESOLUTION GAUSS POUR MATRICE BANDE





ORGANIGRAMME GENERAL

DEBUT

Introduction et vérification des données

- Type d'analyse
- Coordonnées nodales
- Propriétés mécaniques et géométrique des elements
- Charges réparties et concentrées ($\lambda = 1$)
- Elements et leurs caractéristiques
- conditions d'appuis
- matrice masse (element diagonaux)

ITER = 1, NET

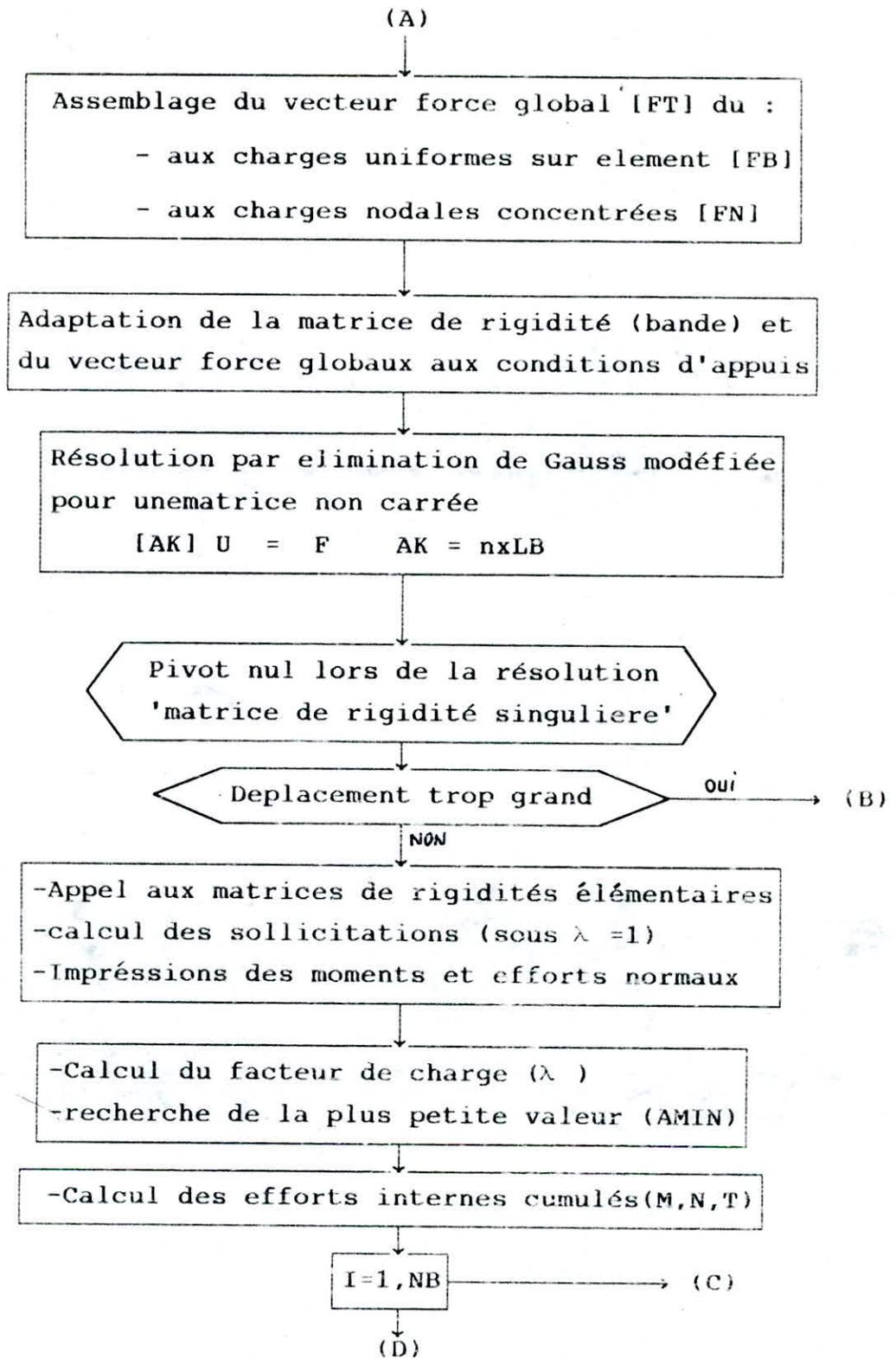
I = 1, NB

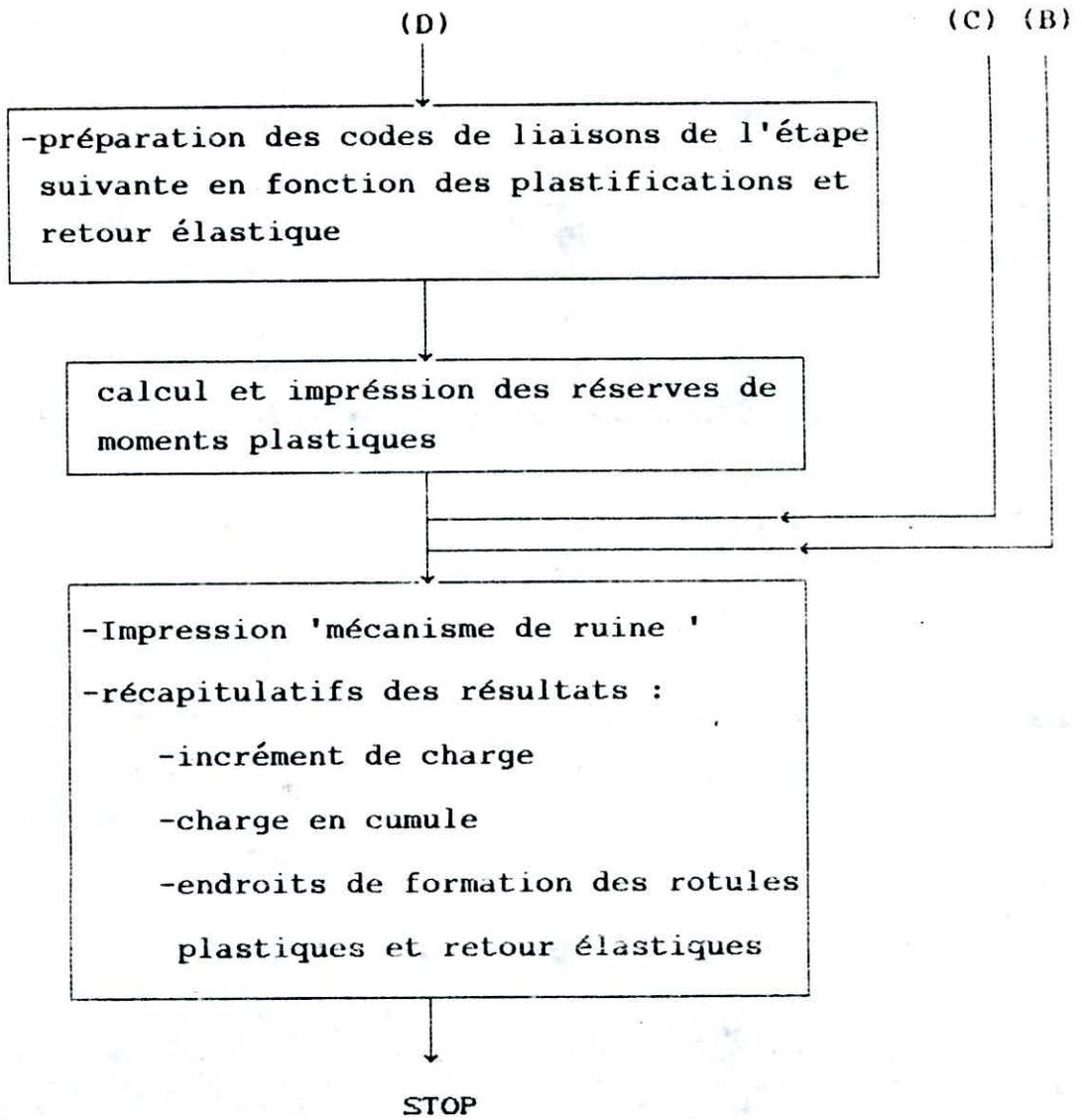
- Evaluation des matrices de rigidités élémentaire [RIG] suivant le type d'analyse
- Matrice de rigidité des panneaux de remplissage
- Evaluation du vecteur force FB sous ($\lambda = 1$)

assemblage des matrices de rigidités élémentaires
(matrice bande AK)

(A)

(B)





CHAPITRE VIII :

EXPERIMENTATION NUMERIQUE ET CONCLUSION

VII EXPERIMENTATION NUMERIQUE :

Le programme développé traite des structures planes formées de barres à sections homogènes, chargées dans leurs plans pour les différents types d'analyses cités ci dessus

Il offre des possibilités d'amélioration concernant certaines valeurs admissibles réglementaires et vérifications d'instabilités (deversement et flambement)

Les exemples de structures traités montrent l'influence des effets cités ci dessus sur la charge de ruine élastoplastique, en effet la méthode plastique rigide donne des valeurs erronées par excès mais très proches de celles fournies par le calcul du deuxième ordre Il est donc possible de chiffrer pour certaines classes d'ossatures, l'erreur que commet une analyse du premier ordre

EXEMPLE 1:

pour cet exemple (fig8.1) traité par plusieurs auteurs, la ruine en plastique rigide intervient à $(\lambda = 1,3454)$, le mécanisme de ruine correspondant est représenté sur la figure (8.2a) la prise en considération de l'effet de l'effort normal fait chuter le niveau de ruine pour différentes valeurs du coefficient C, à :

*C=0.2 \longrightarrow $\lambda = 1.0847$ soit une baisse de 19.4% (fig 8.2b)

*C=0.3 \longrightarrow $\lambda = 1.1434$ soit une baisse de 15% (fig 8.2c)

*C=0.35 \longrightarrow $\lambda = 1.1774$ soit une baisse de 12% (fig 8.2d)

*C=0.4 \longrightarrow $\lambda = 1.2152$ soit une baisse de 9% (fig 8.2e)

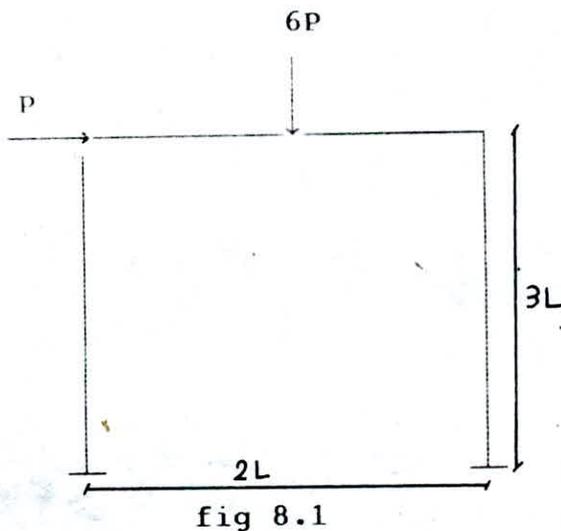
Tandis que la prise en considération de l'effet du remplissage par maçonnerie a fait augmenter le niveau de ruine de :

avec effet de N :

Pour C=0.2 : $\lambda = 1.2668$ soit une augmentation de 16% (fig 8.2f)

Pour C=0.3 : $\lambda = 1.3020$ soit une augmentation de 14% (fig 8.2f)

Sans effet de N : $\lambda = 1.3845$ soit une augmentation de 2.9% (fig 8.2g)



P=12KN
 l=2.25m
 $e=2.1E8 \text{ kn/m}^2$
 $\rho=78\text{kn/m}^2$

montant :

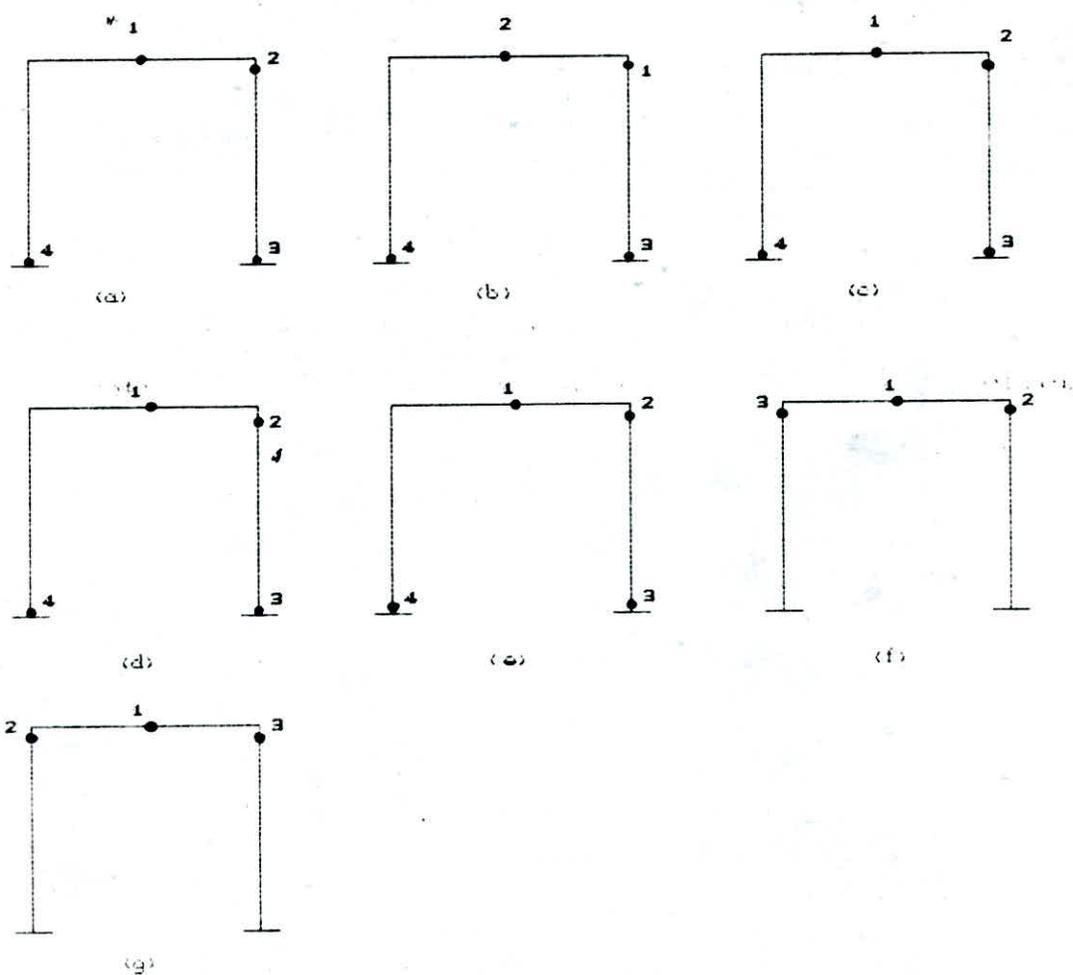
I=1786 cm
 $M_p=51.325 \text{ kn.m}$
 $N_p=91 \text{ kn}$
 A=40 cm

traverse :

I=2977 cm
 $M_p=60.82 \text{ kn.m}$
 $N_p=108 \text{ kn}$
 A =35 cm

les caractéristiques de la maçonnerie :

$E_v=7E6 \text{ kn/m}$
 $e =20\text{cm}$
 $\epsilon_e =17 \text{ kn/m}$
 $\sigma_u =7.E3 \text{ kn/m}$



- fig 8.2

cette figure montre qu'en analyse avec effet du remplissage par maçonnerie la ruine est partielle , est obtenue après apparition de 3 rotules , alors qu'avec un calcul sans cet effet , elle n'apparaît qu'après la quatrième rotule par mécanisme de ruine complet

Sur la figure () on a représenté pour le portique sans remplissage les variations du déplacement horizontal en sommet W en fonction du facteur de charge

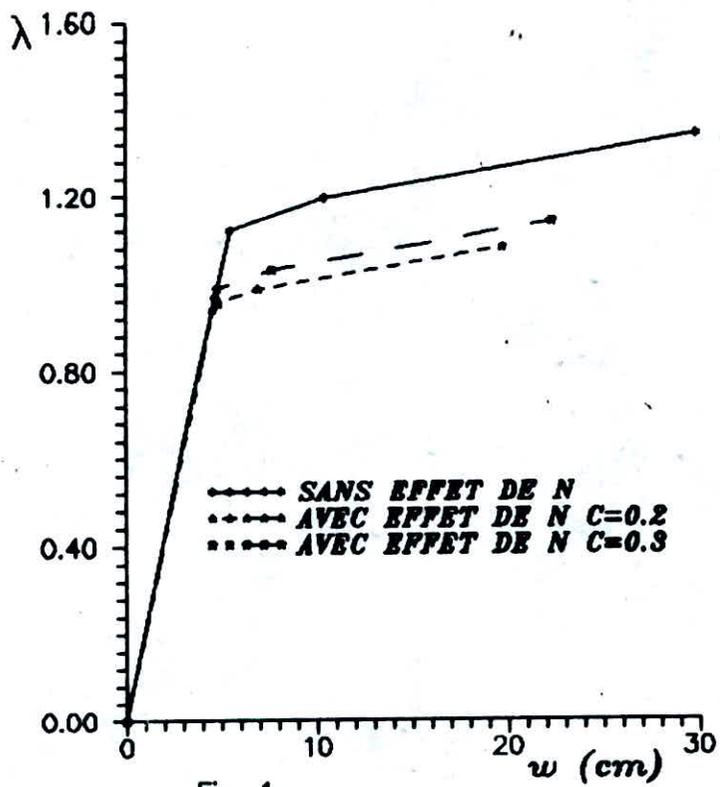
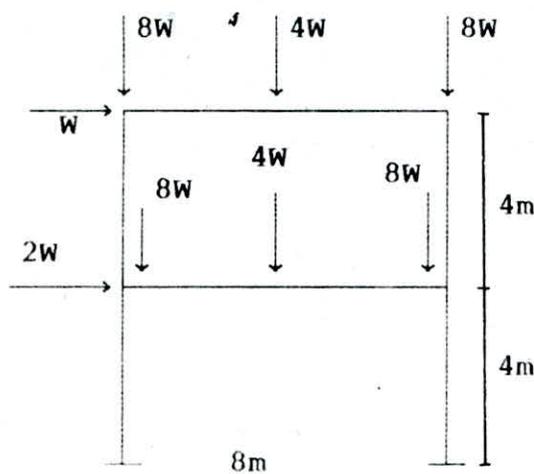


Fig. 1

Pour la clarté de la figure on n'a pas représenté les résultats obtenues avec l'effet du remplissage car ils sont très rapprochés et les déplacements latéraux correspondants tendent vers zéro

EXEMPLE 2 :

Soit une structure à deux étages soumise à un système de charges dépendantes représentées sur la figure (8.4)



$W=5\text{kn}$
 $E=2.1\text{E}8\text{kn/m}$
 $c=0.15$
 poteaux
 $I=1064.3\text{ cm}$
 $M_p=41.9$
 $N_p=738\text{ kn}$
 $A=30.8\text{ cm}$

fig 8.4

poutre

$I=2128.6\text{ cm}$
 $M_p=55.9\text{ kn.m}$
 $N_p=695\text{ kn}$
 $A=28\text{cm}$

107

On gardera les memes caracteristiques de la maconnerie que l'exemple 1

Le multiplicateur de charge à la ruine du premier ordre vaut : $\lambda=2.0958$ (fig 8.5a) Si on tient compte de l'effet de l'effort normal l'analyse pas à pas donne pour $C=0.1$ (fig 8.5b) soit une réduction estimée à 2.5%

Tandis que la présence de remplissage dans les deux étages à pour effet d'augmenter le facteur de charge et de changer complètement le facteur de ruine

-Analyse sans effet de N : $\lambda=2.445$

fig 8.5c

-Analyse avec effet de N : $\lambda=2.4319$

fig 8.5d

nous pouvons constater sur cet exemple que le gain de résistance du à la présence de la maçonnerie est de l'ordre de (16%)

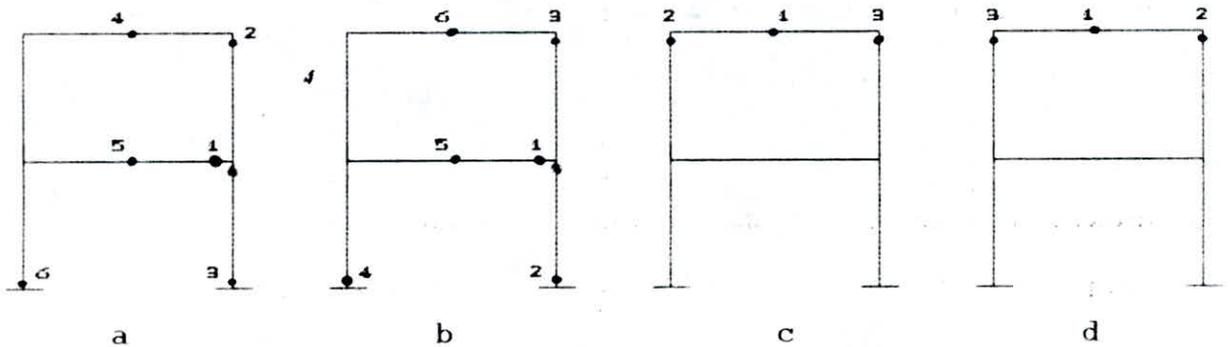


fig 8.5

On remarque que l'ordre d'apparition des rotules et le nombre nécessaire pour la formation d'un mécanisme change d'un cas à un autre

- 110 -

Une comparaison du déplacement en tête du portique en calcul plastique rigide (16.67cm) et en analyse avec effet de l'effort normal (16.31cm) fait apparaitre une diminution de (2%) bien que la présence du remplissage par maçonnerie rend ce déplacement négligeable (de l'ordre de 0.72mm)

La figure () illustre la courbe du déplacement horizontal au sommet (W) en fonction du facteur de charge () pour les différentes types d'analyses

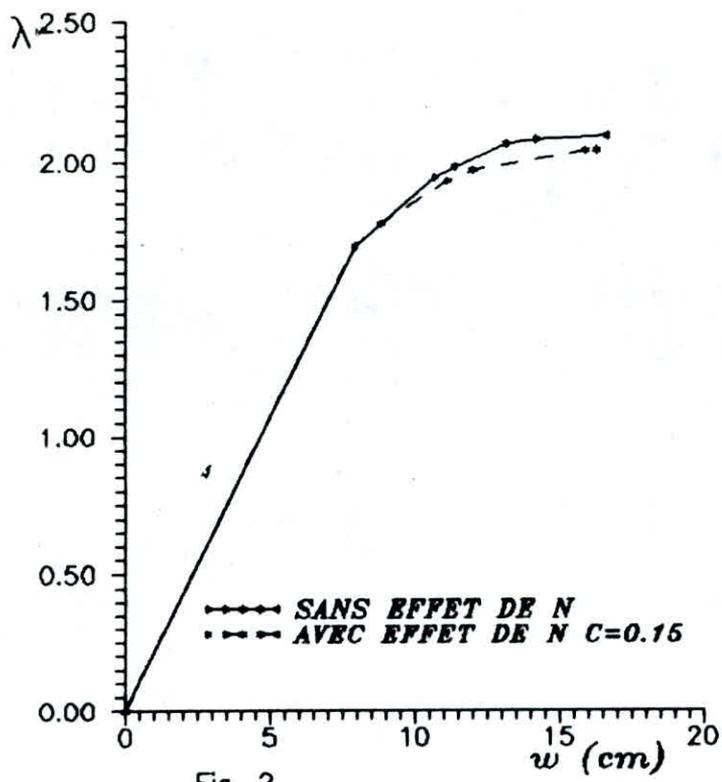
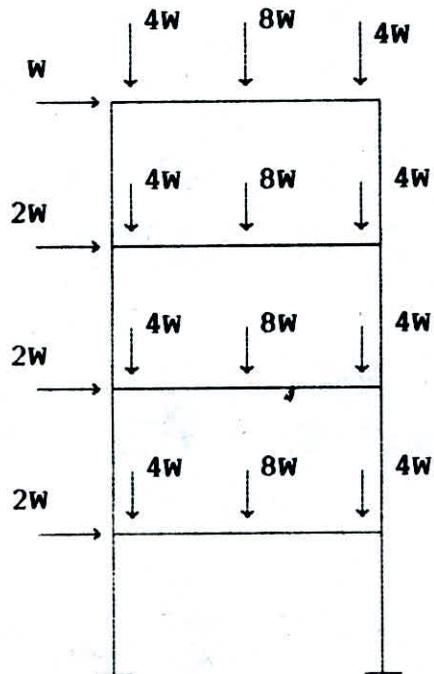


Fig. 2

EXEMPLE 3 :

Considérons le portique à quatre étages suivant :



Hauteur d'étage : 4 m

Longueur de travée : 8 m

On garde les mêmes caractéristiques de la structure que l'exemple 3.

fig 8.6

1°Analyse plastique rigide

λ	dep. (cm)	périodes(sec.)		
		mode1	mode2	mode3
1	11.57	2.788	0.977	0.6490
1.3473	15.59	2.788	0.977	0.6490
1.5010	18.69	2.788	0.9773	0.6490
1.6056	22.08	3.155	1.0534	0.6694
1.7417	27.12	4.3723	1.1652	0.6865
1.804	31.45	4.3723	1.1652	0.6865
1.8328	37.70	4.3723	1.1652	0.6865
1.8615	44.75	4.5345	1.2274	0.7717
1.8640	45.45	4.5345	1.2274	0.7717
1.9108	78.81	4.6061	1.3626	0.79705
1.956	118.4	5.2299	1.5131	0.9904

tableau 1

2° Analyse plastique rigide avec effet de remplissage par maçonnerie

A/ FORMULE DE FUENTES - BOUCHAKOUR :

λ	dep 10^3 (m)	Périodes (sec.)		
		model	mode2	mode3
1	0.251	0.25677	$8.8174 \cdot 10^{-2}$	$5.51307 \cdot 10^{-2}$
2.1553	0.542	0.25677	$8.8174 \cdot 10^{-2}$	$5.51307 \cdot 10^{-2}$
2.3883	0.6271	0.25677	$8.8174 \cdot 10^{-2}$	$5.51307 \cdot 10^{-2}$
2.4387	0.6425	0.25677	$8.8174 \cdot 10^{-2}$	$5.51307 \cdot 10^{-2}$
2.4433	0.6440	0.25684	$8.8258 \cdot 10^{-2}$	$5.51364 \cdot 10^{-2}$
2.4450	0.6442	0.25685	$8.8278 \cdot 10^{-2}$	$5.51623 \cdot 10^{-2}$

tableau 2

B/ FORMULE DE THIRUVANGADAM :

λ	dep 10^3 (m)	- 114 - Périodes (sec.)		
		model	mode2	mode3
1	0.2520	0.25690	$8.8215 \cdot 10^{-2}$	$5.5153 \cdot 10^{-2}$
2.1553	0.5429	0.25690	$8.8215 \cdot 10^{-2}$	$5.5153 \cdot 10^{-2}$
2.3883	0.6281	0.25690	$8.8215 \cdot 10^{-2}$	$5.5153 \cdot 10^{-2}$
2.4387	0.6436	0.25690	$8.8215 \cdot 10^{-2}$	$5.5153 \cdot 10^{-2}$
2.4433	0.6450	0.25697	$8.8298 \cdot 10^{-2}$	$5.5159 \cdot 10^{-2}$
2.4450	0.6453	0.25698	$8.8319 \cdot 10^{-2}$	$5.5185 \cdot 10^{-2}$

tableau 3

C/ FORMULE DE L.CIONGRADI :

λ	dep 10^3 (m)	Périodes (sec.)		
		mode1	mode2	mode3
1	0.2510	0.256625	$8.81296 \cdot 10^{-2}$	$5.51061 \cdot 10^{-2}$
2.1553	0.5410	0.256625	$8.81296 \cdot 10^{-2}$	$5.51061 \cdot 10^{-2}$
2.3883	0.6260	0.256625	$8.81296 \cdot 10^{-2}$	$5.51061 \cdot 10^{-2}$
2.4387	0.6413	0.256625	$8.81296 \cdot 10^{-2}$	$5.51061 \cdot 10^{-2}$
2.4433	0.6428	0.25669	$8.82129 \cdot 10^{-2}$	$5.51117 \cdot 10^{-2}$
2.4450	0.6431	0.25670	$8.82334 \cdot 10^{-2}$	$5.51376 \cdot 10^{-2}$

tableau 4

Le facteur de charge à la ruine en plastique rigide vaut $\lambda=1.9560$, le mécanisme de ruine correspondant est représenté en fig (8.7a). La prise en compte des remplissages par maçonnerie, fait augmenter le facteur de charge à $\lambda=2.4450$ (soit une augmentation de 25%), le mécanisme de ruine dans ce cas est obtenu par la formation de cinq rotules (voir fig (8.7c)).

On observe clairement une augmentation des périodes avec la détérioration de la structure.

La présence des remplissages par maçonnerie modifie complètement le comportement de la structure, les périodes obtenues dans ce cas sont de l'ordre de 1/10 de celles obtenues sans maçonnerie.

Il est intéressant de remarquer que :

Les trois formules établies pour le calcul de la section de la bielle équivalente donnent pratiquement les mêmes valeurs des périodes, du facteur de charge à la ruine, et des déplacements, ainsi que le même mécanisme de ruine.

3° ANALYSE PLASTIQUE AVEC EFFET DE N (C=0.15) :

λ	dep(cm)	périodes		
		model	mode2	mode3
0	11.57	2.788	0.977	0.6490
1.3473	15.59	2.788	0.977	0.6490
1.5010	18.69	2.788	0.9770	0.6490
1.5374	19.87	3.0331	1.0318	0.6642
1.7033	26.21	3.5516	1.1055	0.6783
1.7844	32.28	3.5516	1.1055	0.6783
1.8211	40.71	3.5516	1.1055	0.6783
1.8238	41.41	3.6890	1.1279	0.7370
1.8473	48.52	3.6890	1.1279	0.7370
1.8900	80.62	3.7850	1.2577	0.74895
1.9070	93.33	3.7880	1.2583	0.74906
1.9193	108.5	4.2878	1.2965	0.9194

tableau 5

4° ANALYSE PLASTIQUE AVEC EFFET DE N ET DES REMPLISSAGES :

A/ FORMULE DE FUENTES - BOUCHAKOUR :

λ	dep 10^3 (m)	Périodes (sec.)		
		mode1	mode2	mode3
1	0.4430	0.30968	0.10558	$6.58612 \cdot 10^{-2}$
2.1553	0.9550	0.30968	0.10558	$6.58612 \cdot 10^{-2}$
2.3883	1.0850	0.30968	0.10558	$6.58612 \cdot 10^{-2}$
2.4387	1.1100	0.30968	0.10558	$6.58612 \cdot 10^{-2}$
2.4433	1.1120	0.30977	0.105704	$6.58876 \cdot 10^{-2}$
2.4450	1.1130	0.30979	0.105749	$6.59389 \cdot 10^{-2}$

tableau 6

B/ FORMULE DE THIRUVANGADAM :

λ	dep 10^3 (m)	Périodes (sec.)		
		mode1	mode2	mode3
1	0.4890	0.321099	0.109497	$6.84687 \cdot 10^{-2}$
2.1553	1.0540	0.321099	0.109497	$6.84687 \cdot 10^{-2}$
2.3883	1.1940	0.321099	0.109497	$6.84687 \cdot 10^{-2}$
2.4387	1.2210	0.321099	0.109497	$6.84687 \cdot 10^{-2}$
2.4433	1.2240	0.321186	0.109630	$6.85020 \cdot 10^{-2}$
2.4450	1.2240	0.321205	0.109682	$6.85604 \cdot 10^{-2}$

tableau 7

C/ FORMULE DE L.CIONGRADI :

λ	dep 10^3 (m)	Périodes (sec.)		
		mode1	mode2	mode3
1	0.3930	0.29678	0.101206	$6.30039 \cdot 10^{-2}$
2.1553	0.8477	0.29678	0.101206	$6.30039 \cdot 10^{-2}$
2.3883	0.9658	0.29678	0.101206	$6.30039 \cdot 10^{-2}$
2.4387	0.9884	0.29678	0.101206	$6.30039 \cdot 10^{-2}$
2.4433	0.9905	0.29687	0.101318	$6.30236 \cdot 10^{-2}$
2.4450	0.9909	0.29688	0.101356	$6.30676 \cdot 10^{-2}$

tableau 8

L'analyse plastique avec effet de N donne $\lambda=1.9193$ pour $C=0.15$, le mécanisme de ruine correspondant est représenté en fig. (8.7b).

Si on tient compte de l'effet des remplissages par maçonnerie, on obtient le même facteur de charge qu'en plastique rigide avec maçonnerie, ainsi que le même mécanisme de ruine (voir fig.8.7c), la seule différence entre les deux analyses réside dans les déplacements.

On observe que les périodes obtenues dans le cas d'analyse avec effet de N avec ou sans remplissage sont différentes de celles obtenues par une analyse plastique rigide avec ou sans remplissage.

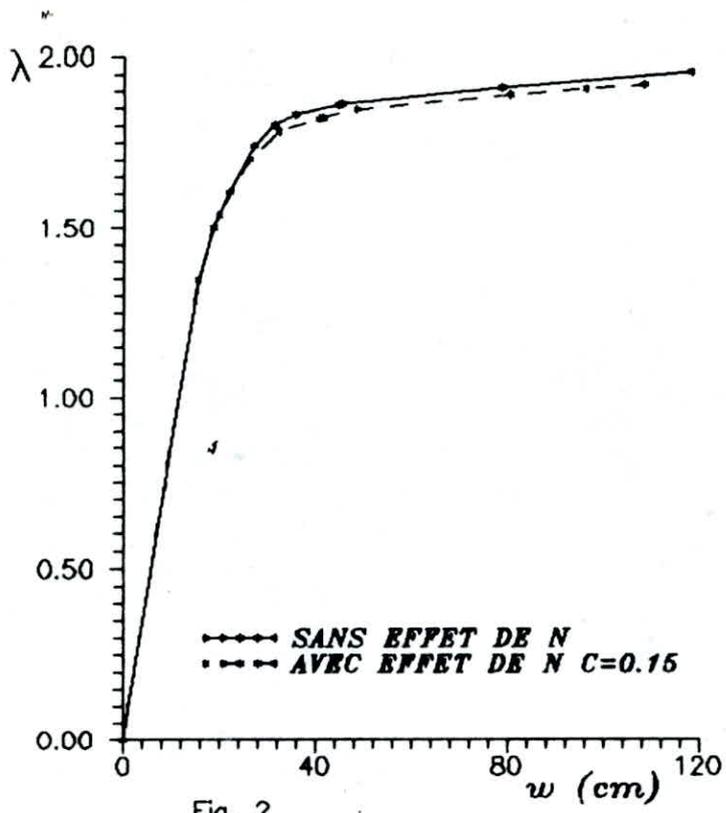


Fig. 2

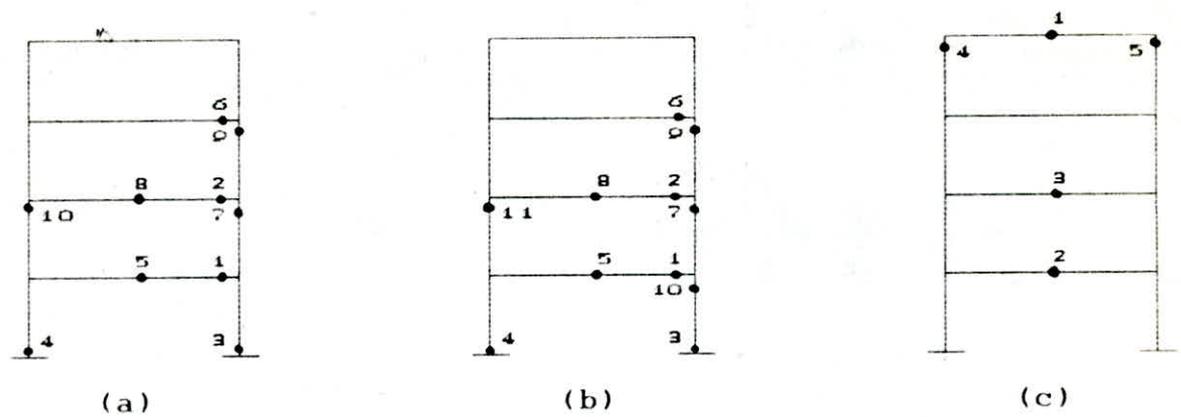


fig.8.7

REMARQUES :

-En comparant le déplacement en tête de la structure en calcul plastique rigide (1.18 m) avec celui obtenu en analyse avec effet de N (1.08 m), on constate une diminution de

-La prise en compte des remplissages rend ce déplacement pratiquement négligeable (de l'ordre de 1 mm).

-En pratique, les déplacements obtenus en analyse plastique rigide (1.18 m) et en analyse avec effet de N (1.08 m) ne sont jamais atteints, le processus a été poursuivi à titre indicatif, le mécanisme de ruine est atteint bien avant.

VIII.2 CONCLUSION :

L'analyse du comportement d'une structure peut être formulée soit en variables entières (élasticité), soit en variables incrémentales (élasto-plasticité).

-En comportement élastique, la formulation conduit à définir l'état d'équilibre d'une structure soumise à un état de chargement donné.

-En comportement élastoplastique, la formulation permet de décrire d'une manière explicite, le comportement d'une structure pour un trajet de chargement donné.

LA Méthode numérique utilisée (pas à pas) est d'autant plus précise que le pas de chargement est petit, elle aboutira à une solution exacte, dans la mesure où l'hypothèse du non déchargement local (retour élastique) est supposée vérifiée.

Il faut rappeler que cette hypothèse n'est pas correcte même dans le cas de chargement proportionnel.

-Tandis qu'en comportement plastique des structures élancées, la présence de l'effort normal, dans les barres bouleverse l'ordre d'apparition des rotules et rend la méthode exposée en chapitre III pratiquement sans signification.

Pour une frontière d'écoulement plastique qui tient compte de cet effet, la structure garde le même état plastique dans un pas de chargement, si le point de contrainte reste sur la même frontière et qu'aucun retour élastique, ni plastifications nouvelles ne se produisent.

Le calcul des déformations¹²¹ élastoplastique, des structures formées de barres est nécessaire, dans la mesure où des déformations excessives peuvent errer le concept de ruine du premier ordre, plusieurs méthodes analytiques ont été exposées, mais qui deviennent impraticables, pour des structures possédant plus d'une dizaine de sections critiques.

La méthode pas à pas permet de contrôler de façon continue, les déformations de la structure en suivant les règlements en vigueur, car une ruine par perte de stabilité risque d'avoir lieu avant la formation d'un mécanisme de ruine à rotules plastiques, le règlement BELGE par exemple considère que la ruine est atteinte, lorsque le déplacement horizontal maximum est égal à 2% de la hauteur total de la structure.

La technique de contreventement par remplissage en maçonnerie, est souvent utilisée pour les structures ne dépassant pas huit à dix niveaux, après application des charges, l'ossature se déplace jusqu'à blocage des remplissages, ce qui permet la mise en compression des bielles diagonales.

Le fonctionnement de ces bielles dépend d'un cadre à un autre, suivant les dimensions de ces dernières et l'existence ou non des ouvertures, de sorte que certaines bielles se mettent en fonctionnement avant d'autres. Après épuisement de toutes les bielles, la totalité des forces latérales s'appliquent sur l'ossature.

A partir des exemples de structures que nous avons traité, on peut conclure que :

1- L'analyse plastique rigide donne des résultats qui concordent parfaitement avec ceux des méthodes d'analyses limites classique (méthode cinématique, statique ...ect). Ainsi, la ruine provient par formation d'un mécanisme (partiel, complet, surcomplet).

Cette constatation s'explique par le fait que toutes ces méthodes s'appliquent au même modèle discret de la structure.

2- La présence de l'effort normal peut influencer considérablement sur :

- Les termes de la matrice de rigidité
- La valeur du moment plastique
- Le facteur de charge

Ce dernier est toujours inférieur à celui donné par une analyse plastique rigide, il dépend du coefficient C , et de la rigidité de la structure vis à vis des charges qui lui sont appliquées. Le gain que peut apporter cet effet varie de 0 à 20% en comparaison avec l'analyse plastique rigide.

La ruine est causée soit par la formation d'un mécanisme, ou par perte de stabilité d'une partie ou de l'ensemble de la structure.

3- Les périodes propres augmentent avec la dégradation de la structure (formation de rotules plastiques).

4- La présence des remplissages dans une ossature a pour effet d'augmenter la rigidité latérale de la structure, de reprendre une partie des efforts et modifications du comportement de la structure.

La rupture d'un panneau est due soit au dépassement de la contrainte limite élastique, ou de la déformation admissible (0.1%). Ceci bien entendu est dû à la méconnaissance du comportement inélastique des panneaux de remplissages, soumises à des charges latérales.

Les périodes obtenues sont de l'ordre du 1/10 de celles obtenues avec une analyse sans maçonnerie, la prise en compte de la maçonnerie en tant qu'élément structural est donc nécessaire.

En fin, il semble qu'on peut généraliser la méthode proposée aux milieux continus (plaque, coque, ...ect). Dans la mesure où une discrétisation par élément fini est réalisée.

Ces derniers points feront l'objet d'une étude ultérieure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Massonnet C. et Save M. : "calcul plastique des constructions"
vol.1 3^e édition liege 1976 .
- [2] Ch. Massonnet : "calcul des structures sur ordinateur"1971
- [3] J. M. Aribert et P. Jouve : "étude du comportement non
linéaire des ossatures a plan
moyen" CTICM N°2 1974 .
- [4] J. M. Aribert et P. Jouve : "simulation du comportement
elastoplastique d'une ossature
en flexion plane"
CTICM N°3 1973
- [5] Y. Galea : "programme d'analyse elasto-plastique en flexion
des structures planes a barres " CTICM N°4 1973
- [6] Lefebvre Y. : "programme de calcul en elasto-plasticité des
structures planes"CTICM N°1 1976 .
- [7] B. G. Neal : "the plastic methode analysis" .
- [8] G. Datt et G. Touzot : "une presentation de la methode des
éléments finis" compegne 1964 .
- [9] Auboin : "calcul des structures sur ordinateur"
- [10] Zienkiewicz O. C. : "methode des éléments finis"
- [11] Ancelet : "these de magistère.BCIRB" 1969

