

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES
MINCES ET EPAISSES PAR LA
METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :
M. K. BERRAH
M. DEMIDEM

Etudié par :
N. S. BOUCHEFFA
M. BOUBERBACHENE

Dirigé par :
M. DEMIDEM
M. K. BERRAH

PROMOTION
1991 - 1992

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES
MINCES ET EPAISSES PAR LA
METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :
M. K. BERRAH

M. DEMIDEM

Etudié par :
N. S. BOUCHEFFA

M. BOUBERBACHENE

Dirigé par :
M. DEMIDEM

M. K. BERRAH

**PROMOTION
1991 - 1992**

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi El-Harrach - Alger

الموضوع : تحليل ديناميكي للصفائح الرقيقة و السمكة
بأستعمال طريقة العناصر المحدودة.

تعتبر عملية إيجاد القيم والأشعة الذاتية لهيكل
معين مرحلة مهمة في كل تحليل ديناميكي.

نقترح عبر هذه الدراسة ، معالجة هذا الموضوع بطريقة
العناصر المحدودة مع الأخذ بعين الإعتبار إمتثالية
العناصر و النموذج الكتلي وبما أن المصفوفات المستعملة
في إيجاد القيم و الأشعة الذاتية كبيرة الحجم ، فإننا
إستعملنا طرق عددية ، تكرارية التي تتميز بفعالية
أكثر من الطرق الكلاسيكية .

PRESENTATION DU SUJET

SUJET : ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES MINCES ET EPAISSES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

RESUME : Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une structure est une étape importante sinon primordiale dans toute analyse dynamique. Nous nous proposons dans cette étude de traiter Ce problème pour le cas de plaques minces et épaisses avec prise en compte du gauchissement et du modèle de masse utilisé. A Ce titre et compte tenu de la taille importante des matrices intervenant dans la résolution du problème, il a été fait recours à des méthodes numériques offrant une plus grande efficacité que les méthodes classiques de résolution.

SUBJECT : DYNAMIC ANALYSIS OF THIN AND THICK PLATES USING FINITE ELEMENTS METHOD.

ABSTRACT : The computation of the eigenvalues and eigenvectors of a structure is a crucial step in any dynamic analysis. In the context of the present work, the eigenproblem has been dealt with for thin and thick plates by the finite element method taking into account warping and mass distribution scheme effects. To achieve such a goal, and given the important size of the matrices encountered in solving the problem, numerical and iterative methods have been made use of, thereby offering a greater efficiency than classical schemes.

REMERCEMENTS

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à Messieurs
M. K. BERRAH et M. DEMDEM pour toute la confiance et
l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée tout au long de la réalisation de ce projet.

Nous remercions vivement pour toute l'aide que nous avons trouvée auprès d'eux :

- Monsieur Rachid BOUCHEFA
- Monsieur Liès HAMADI
- Monsieur Nazim GHANEM
- Messieurs Mourad et Amine BOUMEDI
- Monsieur Abderrahmane BOUCHEFA

Nos remerciements vont également à nos deux camarades A.A.
BENAZIZ et M. HADD pour leurs précieux conseils.

Nous remercions également l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre
formation.

Nous remercions enfin toute l'équipe des fonds de participation construction pour
leur accueil.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes parents qui m'ont poussé et encouragé dans mes études et sans qui ce travail n'aurait pu être accompli.

Boucheffa Nazim Samir

Je dédie ce modeste travail à :

- mes parents qui se sont sacrifiés pour moi.

- mes soeurs.

- tous mes amis.

Bouberbachene Mohamed

Je dédie ce modeste travail à :

- mon père.

- ma mère.

- mes frères et ma soeur.

- Myriam.

Boucheffa Nazim Samir

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE	
1 INTRODUCTION	3
2 ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT	3
2.1 TENSEUR CONTRAINTE	3
2.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE	4
3 ETAT DE DEFORMATION	5
3.1 TENSEUR DE FORMATION	5
3.2 EQUATIONS DE COMPATIBILITE	9
4 LOIS CONSTITUTIVES : LOI DE HOOKE	10
5 EQUATIONS GENERALES DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE	13
5.1 APPROCHE BASEE SUR LES CONTRAINTES	14
5.2 APPROCHE BASEE SUR LES DEPLACEMENTS	14
6 PROBLEMES DE L'ELASTICITE PLANE	15
6.1 CONTRAINTE PLANE	15
6.2 DEFORMATION PLANE	15
6.3 FONCTION DE CONTRAINTE D'AIRY	16
CHAPITRE II : FLEXION DES PLAQUES	
1 INTRODUCTION	18
2 PLAQUES MINCES AVEC FAIBLE FLECHE : THEORIE DE KIRCHHOFF	18
2.1 DEPLACEMENTS, DEFORMATIONS ET CONTRAINTES	19
2.2 EFFORTS INTERNES	21
2.3 EQUATION D'EQUILIBRE	22
3 PLAQUES EPAISSES : THEORIE DE MINDLIN	24
3.1 DEPLACEMENTS, DEFORMATIONS ET CONTRAINTES	24
3.2 EFFORTS INTERNES	26
3.3 EQUATION D'EQUILIBRE	26
4 CONDITIONS AUX LIMITES	27
4.1 BORD ENCASTRE	27
4.2 BORD SIMPLEMENT APPUYE	27
4.3 BORD LIBRE	27
5 METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE	27
5.1 METHODES VARIATIONNELLES	28
5.2 METHODES NUMERIQUES	28
CHAPITRE III : DYNAMIQUE DES STRUCTURES	
1 INTRODUCTION	29
2 CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PHENOMENE DYNAMIQUE	29

3	FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT	30
3.1	ECRITURE DIRECTE DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE PAR LE PRINCIPE DE D'ALEMBERT	30
3.2	PRINCIPE DES DEPLACEMENTS VIRTUELS	31
3.3	PRINCIPE DE HAMILTON	31
4	SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE	32
4.1	METHODES DE FORMULATION	32
4.1.1	ECRITURE DIRECTE DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE	32
4.1.2	PAR LE PRINCIPE DE D'ALEMBERT	33
4.1.3	APPLICATION DU PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL	33
4.1.3	APPLICATION DU PRINCIPE DE HAMILTON	34
4.2	OSCILLATIONS LIBRES	
5	VIBRATIONS LIBRES DES SYSTEMES CONTINUS	35
5.1	CAS D'UNE POUTRE	35
5.2	CAS D'UNE PLAQUE	37
5.2.1	THEORIE DE KIRCHHOFF	37
5.2.2	EXEMPLE D'UNE PLAQUE MINCE SIMPLEMENT APPUYEE	38
5.2.3	THEORIE DE MINDLIN	40
CHAPITRE IV : METHODE DES ELEMENTS FINIS		
1	INTRODUCTION	41
2	FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS BASEE SUR LES DEPLACEMENTS	41
3	DEROULEMENT D'UN CALCUL DE STRUCTURES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	42
4	EXPOSE DES PRINCIPES ENERGETIQUES	43
4.1	PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL	43
4.2	PRINCIPE DE STATIONNARITE DE L'ENERGIE DE DEFORMATION	44
4.3	PRINCIPE DU MINIMUM DE L'ENERGIE DE DEFORMATION	44
5	FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS BASEE SUR LES DEPLACEMENTS	44
5.1	FORMULATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE	44
5.2	FORMULATION EN COORDONNEES GENERALISEES	48
6	DYNAMIQUE PAR ELEMENTS FINIS	49
6.1	EQUATION D'EQUILIBRE DYNAMIQUE	50
6.2	DETERMINATION DE LA MATRICE MASSE	51
6.2.1	MATRICE MASSE COHERENTE	51
6.2.2	MATRICE MASSE CONCENTREE A COEFFICIENTS EGAUX	52
6.2.3	MATRICE MASSE CONCENTREE A COEFFICIENTS VARIABLES	53
6.3	VIBRATIONS LIBRES DES STRUCTURES	53
7	CONVERGENCE	55
7.1	CONVERGENCE MONOTONE	56
7.2	CONVERGENCE NON MONOTONE	57
7.3	PATCH TEST	57

**CHAPITRE V : FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DE LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS**

1 INTRODUCTION	58
2 ELEMENTS RECTANGULAIRES	58
3 INTEGRATION NUMERIQUE	63
3.1 FORMULATION DE GAUSS	64
3.2 CAS BI ET TRI-DIMENSIONNELS	65

**CHAPITRE VI : METHODES DE RESOLUTION
DES SYSTEMES PROPRES**

1 INTRODUCTION	66
2 PROPRIETES FONDAMENTALES DES SYSTEMES PROPRES	66
2.1 VALEURS PROPRES	66
2.2 VECTEURS PROPRES	67
2.3 QUOTIENT DE RAYLEIGH	67
2.4 DECALAGE DES VALEURS PROPRES	68
3 TECHNIQUE D'APPROXIMATION : L'ANALYSE DE RAYLEIGH-RITZ	68
4 METHODE DE RESOLUTION	71
4.1 METHODES D'ITERATIONS VECTORIELLES	72
4.1.1 L'ITERATION INVERSE	72
4.2.2 L'ITERATION DIRECTE	73
4.1.3 RECHERCHE D'UNE VALEUR PROPRE INTERMEDIAIRE	74
4.1.4 CONVERGENCE	77
4.2 METHODE DE TRANSFORMATION : METHODE DE JACOBI	77
4.2.1 DESCRIPTION DE LA METHODE DE JACOBI	81
4.2.2 ALGORITHME DE LA METHODE DE JACOBI	
5 RESOLUTION DES PROBLEMES DE GRANDE DIMENSION : METHODE DU SOUS-ESPACE	82
5.1 DESCRIPTION DE LA METHODE	82
5.2 ALGORITHME DE LA METHODE DU SOUS-ESPACE	83
5.3 VECTEURS INITIAUX	83
5.4 CONVERGENCE	84

CHAPITRE VII : PRESENTATION DU PROGRAMME INFORMATIQUE

1 INTRODUCTION	85
2 STRUCTURE GLOBALE DU PROGRAMME INFORMATIQUE	85
3 METHODE DE STOCKAGE DES MATRICES GLOBALES	86
4 METHODES DE RESOLUTION	87

**CHAPITRE VIII : ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES MINCES
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

1	INTRODUCTION	89
2	ELEMENT RECTANGULAIRE NON CONFORME A 12 D. D. L.	89
	2.1 FONCTION DE DEPLACEMENTS	91
	2.2 FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE	93
	2.3 FORMULATION DE LA MATRICE MASSE	95
	2.3.1 MATRICE MASSE CONCENTREE	95
	2.3.2 MATRICE MASSE COHERENTE	96
	2.4 EXEMPLES NUMERIQUES	96
3	ELEMENT RECTANGULAIRE CONFORME A 16 D. D. L.	103
	3.1 FONCTION DE DEPLACEMENTS	103
	3.2 FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE	107
	3.3 FORMULATION DE LA MATRICE MASSE	108
	3.3.1 MATRICE MASSE CONCENTREE	108
	3.3.2 MATRICE MASSE COHERENTE	108
	3.4 EXEMPLES NUMERIQUES	108
4	INTERPRETATION DES RESULTATS	115
	4.1 EFFET DUGAUCHISSEMENT	115
	4.2 EFFET DUMODELE DE MASSE	116
5	EXEMPLE DU TABLIER D'UN PONT CONTINU	117

**CHAPITRE IX : ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES EPAISSES
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

1	INTRODUCTION	120
2	THEORIE DE MINDLIN	120
3	FONCTIONS D'INTERPOLATION	122
4	FORMULATION DES MATICES ELEMENTAIRES	124
	4.1 MATRICE DE RIGIDITE	124
	4.2 BLOCAGE PAR CISAILLEMENT TRANSVERSAL OU LOCKING	125 126
	4.3 MATRICE MASSE	126
	4.3.1 MATRICE MASSE COHERENTE	127
	4.3.2 MATRICE MASSE CONCENTREE A COEFFICIENTS EGAUX	127
	4.3.3 MATRICE MASSE CONCENTREE A COEFFICIENTS VARIABLES	127
5	EXEMPLES NUMERIQUES	127
6	INTERPRETATION DES RESULTATS	128
	6.1 EFFET DU CISAILLEMENT TRANSVERSAL	128
	6.2 EFFET DU MODELE DE MASSE	128
	CONCLUSION	130

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Dans les problèmes relevant de la mécanique des structures, l'ingénieur recherche la distribution des contraintes dans la structure étudiée, il peut être nécessaire de calculer les déplacements afin de vérifier si les spécifications de flèche sont bien respectées. Lorsque les charges appliquées sont variables dans le temps, le problème est dynamique et c'est le champ entier des déplacements qu'il faut déterminer. Le champ de contraintes doit représenter un équilibre de la structure tandis que les déplacements doivent être continus, ce sont les conditions d'équilibre et de compatibilité.

Pour un problème donné, la première étape dans la détermination des systèmes de déplacements et de contraintes consiste à définir les équations régissant le comportement du système qui satisfont aux conditions d'équilibre et de compatibilité. La seconde étape consiste en la résolution des équations qui, lorsque le problème est bi ou tridimensionnel sont des équations aux dérivées partielles. Il est très rare que la solution exacte soit connue. Heureusement, l'apparition et le développement des ordinateurs a énormément multiplié les possibilités de résolution d'équations aux dérivées partielles. Les méthodes numériques sont aujourd'hui utilisées à grande échelle car elles ont maintes fois prouvé leur efficacité. La méthode des éléments finis est l'une de ces méthodes. Son principe de base consiste en la discrétisation de la structure à analyser en domaines: les éléments finis possédant chacun ses propres fonctions pour décrire déplacements et contraintes, on choisit généralement ces fonctions de façon qu'elles assurent la continuité du comportement dans l'ensemble de la structure.

La méthode des éléments finis constitue une procédure de résolution approchée de l'équation différentielle régissant le comportement de la structure, elle présente l'avantage considérable d'être la seule méthode applicable lorsque le milieu est hétérogène.

Lorsque le problème est dynamique, l'équation différentielle gouvernant le comportement de la structure est :

$$KU + C\dot{U} + M\ddot{U} = R$$

où:

K : matrice de rigidité.

C : matrice d'amortissement.

M : matrice masse.

R : vecteur des charges nodales.

On peut résoudre cette équation en utilisant les méthodes numériques d'intégration directe ou la méthode de superposition

modale dont la première étape nécessite l'investigation des modes propres de la structure, c'est à dire la résolution du système propre :

$$K\phi = \omega^2 M\phi$$

où ω est la pulsation propre et ϕ est le vecteur propre.

Le travail effectué consiste, comme le titre du projet l'indique, en l'étude du comportement dynamique des plaques minces et épaisses par la méthode des éléments finis et on distingue dans cette phrase trois grandes parties qui sont:

- Les plaques minces et épaisses.
- Le comportement dynamique des plaques.
- La méthode des éléments finis.

La première partie traite des plaques minces et épaisses dont la différence fondamentale réside dans l'importance du cisaillement transversale.

Selon qu'une plaque est mince ou épaisse, deux théories sont utilisées pour étudier son comportement, ce sont les théories de Kirchhoff et de Mindlin.

La deuxième partie suggère à juste titre que le comportement dynamique de ces deux types de plaques sera étudié. Par comportement dynamique, on veut dire que seront déterminées les fréquences propres de la structure ainsi que les vecteurs propres dont les composantes sont les amplitudes d'un nombre commun de points de celle-ci.

La troisième partie, elle, parle de la méthode des éléments finis et donc de l'outil informatique qui est l'une des méthodes numériques les plus efficaces car d'une puissance appréciable. Cette méthode est aujourd'hui d'un usage courant dans l'industrie pour l'étude de structures complexes et dont la précision des résultats dépend d'un certain nombre de facteurs que nous débattons dans le cadre de cette présente étude.

Nous allons donc, tout au long de cette étude, tenter de déterminer les fréquences propres des plaques qu'elles soient minces ou épaisses ainsi que les vecteurs propres donnant la forme géométrique de ces plaques soumises aux fréquences citées précédemment et calculées par la méthode des éléments finis

D'une manière plus détaillée, nous allons étudier :

- l'effet du modèle de masse utilisé.
- l'effet de la conformité des éléments sur la précision des résultats.
- l'effet du cisaillement sur une plaque.

CHAPITRE I

THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

1 INTRODUCTION

Tous les matériaux de construction possèdent à un certain degré la propriété d'être élastiques, c'est à dire que si les forces extérieures, qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaît en même temps que la force qui lui a donné naissance.

Les plaques dont il est question dans cette présente étude sont supposées constituées d'un matériau linéaire élastique. Par conséquent, nous exposons dans ce premier chapitre les concepts fondamentaux de la théorie de l'élasticité, particulièrement les concepts de contrainte, de déformation et autres énergie. Cela nous permettra d'établir les équations générales de l'élasticité linéaire.

Du fait de la complexité de ces équations, la solution basée sur la théorie exacte n'existe que pour des problèmes simples et souvent des hypothèses simplificatrices sont émises pour la résolution des problèmes de grande complexité.

2 ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT

2.1 TENSEUR CONTRAINTE :

Dans l'étude d'un milieu continu, on s'intéresse à la manière avec laquelle les forces sont transmises à travers celui-ci.

Deux types de forces extérieures sont susceptibles d'agir sur un corps:

1°- Les forces dites *volumiques* qui sont distribuées dans tout le volume du corps lui-même telle que la force de gravitation.

2°- Les force dites *surfaiques* réparties sur toute la surface du corps telle que la pression hydrostatique.

Dans un grand nombre de cas les forces volumiques sont négligées ou considérées comme uniformes.

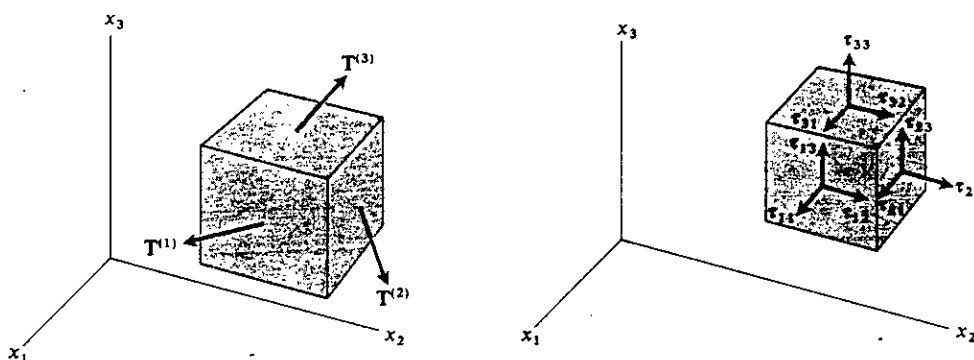


Figure 1-1 : Contraintes.

Soit un parallélépipède infinitésimal découpé dans un milieu continu (Fig. 1-1)

Les forces surfaciques sont représentées sur trois faces rectangulaires de l'élément, l'exposant indiquant la face sur laquelle s'exerce la force. On désigne par τ_{11}, τ_{12} et τ_{13} les trois composantes du vecteur $T^{(1)}$ selon les axes x_1, x_2 et x_3 respectivement.

En général

$$T^{(1)} = \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$$

$$T^{(2)} = \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}$$

$$T^{(3)} = \tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}$$

ou alors:

$$T_j^{(i)} = \tau_{ij} \quad (1-1)$$

Les neuf quantités τ_{ij} sont appelées contraintes. Ce sont des forces par unité de surface. Le premier indice indique la direction de la normale à la face tandis que le second indique la direction de la contrainte elle-même.

Quand les trois vecteurs contraintes $T^{(1)}, T^{(2)}$ et $T^{(3)}$ agissant en un point selon trois plans perpendiculaires sont connus, il est possible de déterminer le vecteur contrainte s'exerçant en ce point selon un plan de normale extérieure \underline{n} arbitrairement orientée en utilisant la formule de Cauchy:

$$T_i^{(n)} = T \underline{n} \quad (1-2)$$

où T est le tenseur contrainte relatif au point considéré:

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

Les termes diagonaux sont appelés *contraintes normales* et sont souvent désignés par σ_i tandis que les termes extra-diagonaux sont appelés *contrainte de cisaillement*.

2.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE

Ecrivons la loi de Newton en un point P quelconque appartenant à un élément de masse dm :

$$df = 0$$

où df représente la somme de toutes les forces, surfaciques et volumiques, agissant sur l'élément. En intégrant cette équation sur un domaine arbitraire de volume V et de frontière surfacique S , parmi les forces surfaciques, seules celles qui agissent sur S subsistent (3^{ème} loi de Newton):

$$\oint_S T_i^{(n)} dA + \int_D B_i dV = 0$$

or:

$$T_i^{(n)} = \tau_{ij} n_j$$

donc:

$$\oint_S \tau_{ij} n_j dA + \int_D B_i dV = 0$$

en utilisant le théorème de la divergence on obtient:

$$\int_D (\tau_{ij,j} + B_i) dV = 0$$

Comme le domaine est arbitraire:

$$\tau_{ij,j} + B_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-4)$$

Cette équation traduit l'équilibre en un point selon trois directions. En dynamique, cette équation devient une équation de mouvement:

$$\tau_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-5)$$

3 ETAT DE DEFORMATION

3.1 TENSEUR DEFORMATION

On cherche à présent un moyen pour exprimer les déformations de notre solide. Pour ce faire, on considère une configuration initiale dans laquelle les deux points P et Q de la figure (1-2) sont distants d'une quantité Δy .

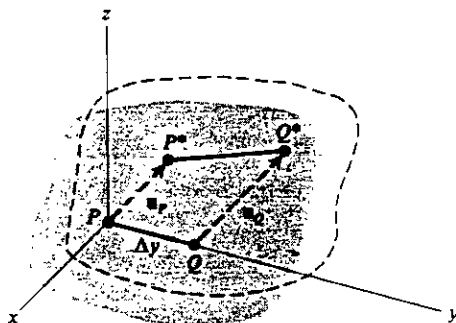


Figure 1-2 : Déformation d'un segment linéaire.

Après déplacement et déformation, P passe à P^* et Q à Q^* .

On projette $\overline{P^*Q^*}$ sur l'axe des y :

$$\overline{(P^*Q^*)}_y = \Delta y + (u_y)_Q - (u_y)_P$$

En exprimant $(u_y)_Q$ comme une série de Taylor en terme de $(u_y)_P$:

$$(u_y)_Q = (u_y)_P + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_P \Delta y + \dots$$

En substituant ce développement de $(u_y)_Q$ dans l'expression de $\overline{(P^*Q^*)}_y$ on obtient:

$$\overline{(P^*Q^*)}_y = \Delta y + \left[(u_y)_P + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_P \Delta y + \dots \right] - (u_y)_P$$

$$\overline{(P^*Q^*)}_y = \Delta y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_P \Delta y + \dots$$

L'élongation du segment \overline{PQ} est:

$$\overline{(P^*Q^*)}_y - \Delta y = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_P \Delta y + \dots$$

En divisant par Δy et en prenant la limite de chaque terme quand $\Delta y \rightarrow 0$, on obtient:

$$\frac{\overline{(P^*Q^*)}_y - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \epsilon_{yy}$$

L'indice P peut à présent disparaître du fait de la coalescence des points P et Q .

Dans le cas de petites déformations, on a: $\overline{(P^*Q^*)} = \overline{(P^*Q^*)}_y$, ce qui permet de dire que ϵ_{yy} représente l'allongement par unité de longueur au point P dans la direction de l'axe des y . De la même façon on définit:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

On considère à présent les segments \overline{PR} et \overline{PQ} de longueurs respectives Δx et Δy . Quand l'élément subit une déformation les points P , Q et R passent à P^* , Q^* et R^* respectivement.

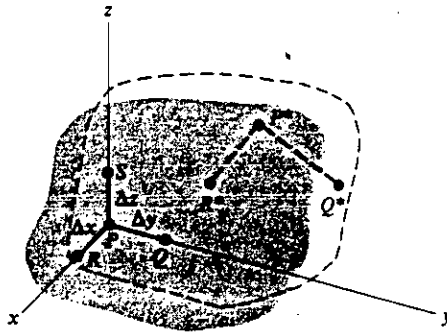


Figure 1-3 : Déformation de segments linéaires.

On projette les segments $\overline{P^*Q^*}$ et $\overline{P^*R^*}$ sur le plan (x,y) c'est à dire sur le plan que formaient ces segments avant déformation.

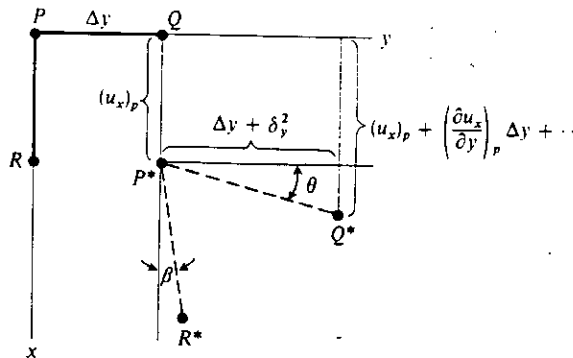


Figure 1-4 : Projection des segments déformés.

On note que θ représente l'angle entre la projection de $\overline{P^*Q^*}$ et l'axe des y tandis que β est l'angle que forme la projection de $\overline{P^*R^*}$ et l'axe des x .

En exprimant le déplacement du point Q dans la direction x en terme de $(u_x)_P$ comme suit:

$$(u_x)_Q = (u_x)_P + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_P \Delta y + \dots$$

La composante de la projection de $\overline{P^*Q^*}$ selon y est: $\Delta y + \delta^2 y$ où $\delta^2 y$ est un inclément de second ordre pour les petites déformations.

L'angle θ peut à présent être exprimé comme suit:

$$\tan \theta = \frac{(\partial(u_x)/\partial y)_P \Delta y + \dots}{\Delta y + \delta^2 y}$$

En faisant tendre Δy vers 0, les termes d'ordre supérieur dans le numérateur s'annulent ainsi que l'inclément du second ordre $\delta^2 y$.

$$\tan \theta = \theta = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

D'une façon analogue:

$$\tan \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

La somme $(\theta + \beta)$ peut être directement liée à la déformation de cisaillement comme suit:

$$(\theta + \beta) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

Parce que les déformations sont supposées petites, on peut dire que γ_{ij} représente la variation de l'angle droit initialement formé par deux segments de droite infinitésimaux dans la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ direction en un point.

Les composantes du tenseur déformation sont liées à celles du champ de déplacement par:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-6)$$

ou d'une façon explicite:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (1-7)$$

On considère à présent, l'effet de ces déformations sur un parallélépipède infinitésimal.

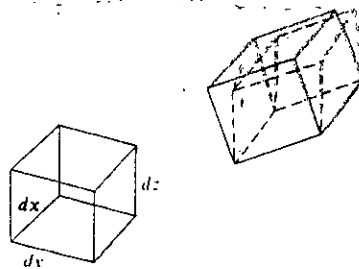


Figure 1-5 : Déformation d'un cube élémentaire.

En l'absence de déformations de cisaillement, les faces du parallélépipède demeurent orthogonales entre elles alors que sa position et son orientation peuvent changer comme le peuvent ses dimensions et son volume. En présence des déformations de cisaillement, les faces du parallélépipède peuvent perdre leur perpendicularité mutuelle transformant ainsi les rectangles en parallélogrammes.

En résumé, on peut dire que *les déformations normales affectent la taille de l'élément tandis que les déformations de cisaillement modifient sa forme.*

3.2 EQUATION DE COMPATIBILITE

On considère les relations déplacements-déformations:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-6)$$

Si le champ de déplacement est connu, il est facile de trouver les six composantes du tenseur de déformation en substituant les expressions de u_i dans les équations ci-dessus. Le problème inverse qui consiste à retrouver le champ de déplacement à partir d'un champ de déformation donné n'est pas si simple. En effet, cela revient à intégrer un système de six équations aux dérivées partielles à trois inconnues.

Pour assurer l'intégrabilité de ce système, on impose certaines restrictions sur les termes du tenseur ϵ_{ij} .

Les équations qui traduisent mathématiquement cette condition d'intégrabilité sont dites *équations de compatibilité* et sont données par:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ij,ki} - \epsilon_{kl,ij} = 0 \quad (1-8)$$

En raison de la symétrie des indices et de la présence d'identité le nombre de ces équations se réduit à 6:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1-9a)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1-9b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (1-9c)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (1-9d)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (1-9e)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \quad (1-9f)$$

4 LOIS CONSTITUTIVES : LOI DE HOOKE

Dans les sections précédentes, on a décrit le tenseur contrainte résultant des considérations d'équilibre et le tenseur déformation résultant de considérations cinématiques.

Ces deux tenseurs sont en fait liés entre eux par des relations appelées *lois constitutives*. En général ces relations impliquent la température et le temps comme autres variables.

La plus simple relation qui puisse exister entre contraintes et déformations est une relation linéaire de la forme:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-10)$$

La relation de l'équation (1-10) est appelée *loi de Hooke généralisée*.

C_{ijkl} est un tenseur du quatrième ordre qui consiste en 81 termes qui sont indépendants de la position du point pour un matériau homogène. Cependant, vu la symétrie des tenseurs τ_{ij} et ϵ_{kl} le nombre de termes se réduit à 36.

L'équation (1-10) peut s'écrire:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & . & . & . & C_{16} \\ C_{21} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ C_{61} & . & . & . & . & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

Green (1839-1841) a défini un matériau comme étant élastique s'il existait une fonction d'énergie de déformation W telle que:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1-11)$$

Pour que cette fonction vérifie l'équation (1-13) et la loi de Hooke simultanément elle doit prendre la forme:

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (1-12)$$

où le tenseur C_{ijkl} doit, en plus des propriétés de symétrie déjà citées, avoir la propriété $C_{ijkl} = C_{klij}$ réduisant ainsi le nombre de termes de 36 à 21.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ . & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ . & . & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ . & . & . & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ . & Sym & . & . & C_{55} & C_{56} \\ . & . & . & . & . & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

En général les constantes C_{ij} dépendent de l'orientation du système de coordonnées.

En introduisant la notion de symétrie élastique, on peut, dans le cas d'un plan de symétrie élastique, réduire le nombre de termes indépendants.

En effet, lorsque les constantes élastiques C_{ij} en un point ont les mêmes valeurs pour toute paire de systèmes de coordonnées qui sont une réflexion l'un de l'autre par rapport à un plan, alors ce plan est appelé plan de symétrie élastique pour le matériau en ce point.

1°- Cas d'un plan de symétrie

On démontre que dans ce cas:

$$C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0$$

Le nombre de termes indépendants est alors de 13.

2°- Cas de symétrie orthotrope

Dans ce cas, il existe trois plans perpendiculaires de symétrie élastique et en plus des constantes nulles du cas précédent on a:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{36} = 0$$

3°- Isotropie

Si les valeurs des constantes C_{ij} sont indépendantes du système de coordonnées, le matériau est alors dit *isotrope* et le nombre de constantes indépendantes est réduit à deux.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 & 0 \\ \cdot & Sym & \cdot & \cdot & \mu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

E : module de Young.

ν : coefficient de Poisson.

C : coefficient de cisaillement.

$$D = C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ . & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 2(1+\nu)/E & 0 & 0 \\ . & sym & . & . & 2(1+\nu)/E & 0 \\ . & . & . & . & . & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

La loi de Hooke pour un matériau isotrope est:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1-15)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{pp} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (1-16)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (1-17)$$

5 EQUATIONS GENERALES DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

Le système d'équations nécessaire à la résolution d'un problème d'élasticité linéaire en tout point comprend:

Les équations d'équilibre:

$$\tau_{ij,j} + B_i = 0 \quad (1-4)$$

Les équation contraintes-déformations:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-10)$$

en particulier:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (1-15)$$

Les équations déformations-déplacements:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-6)$$

Ce système consiste donc en 15 équations à 15 inconnues. Si les fonctions de déplacements ne sont pas explicitement incluses, on doit s'assurer que les équations de compatibilité sont satisfaites.

Il existe trois types de conditions aux limites auxquels correspondent trois types de problèmes.

Problèmes du 1^{er} Type

Dans ce type de problèmes, le champ de contrainte est imposé en tout point de la frontière et on doit déterminer les champs de déplacement et de contrainte en tout point du milieu considéré.

Problèmes du 2nd Type

Le champ de déplacement en tout point de la frontière du milieu considéré constitue les données aux limites de ce type de problème tandis que ses inconnues sont les champs de contraintes et de déformations en tout point du corps.

Problèmes mixtes

Dans ce type de problème, il faut déterminer les champs de déplacements et de contraintes en tout point du milieu en ayant comme données le champ de contrainte sur une partie S_1 de la frontière et le champ de déplacement sur l'autre partie S_2 . Les problèmes envisagés précédemment sont des cas particuliers des problèmes mixtes.

5.1 APPROCHE BASEE SUR LES CONTRAINTES

Pour les problèmes du premier type il est plus convenable d'exprimer les équations de base en termes de contraintes. Pour ce faire, on substitue l'expression de ϵ_{ij} de l'équation (1-16) dans les équations de compatibilité (1-8) et en utilisant les équations d'équilibre on aboutit à:

$$\nabla^2 \tau_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)} \tau_{pp,ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} \nabla^2 \tau_{pp} = -(B_{i,j} + B_{j,i}) \quad (1-18)$$

Cette équation représente en fait un ensemble de trois équations indépendantes. Ce sont les équations de compatibilité de *Beltrami-Michell*.

Vu la complexité de ces équations, une formulation plus intéressante se fait en terme de fonction de contrainte.

5.2 APPROCHE BASEE SUR LES DEPLACEMENTS

Dans le cas où les données aux limites sont du second type, il est plus commode de recourir à une formulation du problème en fonction du champ de déplacement. Pour cela, on substitue (1-15) dans (1-4) pour obtenir les équations d'équilibre en terme de déformations:

$$\lambda \epsilon_{pp,r} + 2G \epsilon_{ij,j} + B_i = 0$$

En substituant cette même équation dans (1-6), on arrive à l'équation de Navier:

$$G \nabla^2 u_i + (\lambda + G) u_{j,j} + B_i = 0 \quad (1-19)$$

6 PROBLEMES DE L'ELASTICITE PLANE

La solution rigoureuse des problèmes tri-dimensionnels n'existe que pour quelques cas simples. Par conséquent, on est souvent amené à simplifier les problèmes de façon à obtenir une solution mathématique qui puisse interpréter raisonnablement le problème physique.

Pour illustrer ceci, on expose à présent deux cas particuliers de problèmes où les équations sont simplifiées.

6.1 CONTRAINTE PLANE

Les solutions du type contraintes planes sont souvent adoptées et peuvent être considérées comme de bonnes approximations dans le cas, par exemple, d'une plaque mince chargée dans son plan.

Un cas de contraintes planes est caractérisé par:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0$$

On a alors pour un matériau isotrope les relations:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

et

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

6.2 DEFORMATION PLANE

On arrive à la même simplification du problème lorsque l'on considère la situation inverse à celle d'un cas de contrainte plane, celle dans laquelle la dimension du corps dans la direction de l'axe z est très étendue. Un exemple de ce genre de problèmes est celui d'un barrage de retenue soumis à l'action d'une pression transversale qui reste constante sur toute sa longueur. En effet, toute portion du corps située à une distance considérable de ses extrémités subit une déformation plane et

les déplacements de tous les points du corps déformé se trouvent dans des plans perpendiculaires à la longueur du corps. Un cas de déformation plane est caractérisé par :

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

Les relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope en déformation plane sont :

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

La contrainte τ_{zz} , bien que celle-ci ne soit pas toujours nulle, n'apparaît pas dans les relations ci-dessus. Cependant, elle peut être obtenue à partir de la relation $\epsilon_{zz} = 0$ comme suit :

$$\begin{cases} \epsilon_{zz} = 0 \\ \epsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})) \end{cases} \Rightarrow \tau_{zz} = \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})$$

6.3 FONCTION DE CONTRAINTE D'AIRY

On a déjà établi que la solution d'un problème d'élasticité revient à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Dans les situations de déformation plane ou de contrainte plane, l'équation de compatibilité de Beltrami-Michell s'écrit en l'absence des forces volumiques :

$$\nabla_1^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = 0 \quad (1-23)$$

La méthode habituelle employée pour résoudre ces équations, consiste à introduire une nouvelle fonction scalaire $\phi(x,y)$ appelée *fonction de contrainte d'Airy*. Les contraintes sont reliées à cette fonction par :

$$\tau_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \tau_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (1-24)$$

En substituant les expressions de τ_{xx} et de τ_{yy} ci-dessus dans l'équation (1-23) on aboutit à :

$$\nabla_1^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = \nabla_1^2 (\nabla_1^2) \phi = \nabla_1^4 \phi = 0 \quad (1-25)$$

ou

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (1-26)$$

S'il est possible de trouver une fonction $\phi(x,y)$ satisfaisant l'équation *biharmonique* (1-26) à l'intérieur du domaine et telle que les contraintes et les déformations sur la frontière vérifient les conditions aux limites, alors la fonction $\phi(x,y)$ donne la solution du problème.

CHAPITRE II
FLEXION DES PLAQUES

1 INTRODUCTION

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (x,y) et par une épaisseur notée h petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

Une plaque, contrairement à une membrane, possède une rigidité à la flexion résultant de son épaisseur et de l'élasticité du matériau qui la constitue.

Comme exemples de plaques, on peut citer:

- Le plancher d'un immeuble.
- Le tablier d'un pont.

Les propriétés de flexion d'une plaque dépendent essentiellement de son épaisseur par rapport à ses autres dimensions, ainsi une plaque est dite *mince* si son épaisseur est petite par rapport à ses autres dimensions (de l'ordre du $1/15$), sinon elle est dite *épaisse*.

On distingue trois sortes de plaques:

- Les plaques minces avec faible flèche.
- Les plaques minces avec grande flèche.
- Les plaques épaisses.

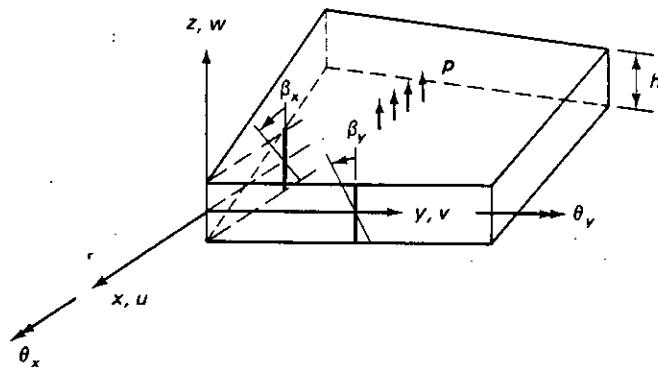


Figure 2-1 : Élément plaque en flexion.

2 PLAQUES MINCES AVEC FAIBLE FLECHE : THEORIE DE KIRCHHOFF

Pour ce type de plaques, les hypothèses de base sont les suivantes:

- 1°- Il n'y a pas de déformation dans le plan moyen de la plaque avant, pendant et après déformation.
- 2°- Les points de la plaque situés initialement sur une normale au plan moyen de la plaque demeurent sur celle ci après flexion. Les déformations de cisaillement sont donc négligées.
- 3°- Les contraintes normales selon la direction transversale sont négligées par rapport aux autres contraintes.
- 4°- Il n'y a pas de déformations selon la direction transversale c'est à dire qu'un élément linéaire conserve sa longueur après déformation.

Ces hypothèses sont appelées *hypothèses de Kirchhoff* et permettent de déterminer les déplacements, déformations et contraintes du système.

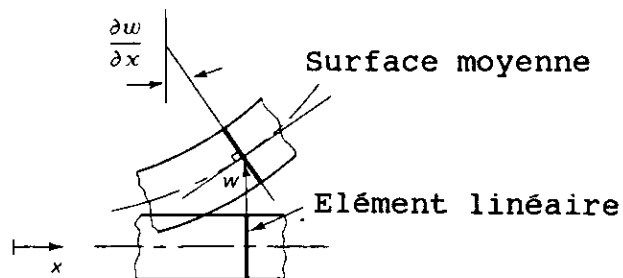


Figure 2-2 : Déformation d'un élément linéaire.

2.1 DEPLACEMENTS, DEFORMATIONS ET CONTRAINTES

L'hypothèse 4 implique:

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (2-1)$$

sachant que:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

alors:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ce qui montre immédiatement que w est indépendant de z :

$$w = w(x, y) \quad (2-2)$$

L'hypothèse 2 implique:

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad (2-3)$$

sachant que:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

alors:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2-4b)$$

En intégrant ces deux équations différentielles et en tenant compte du fait que: $u=v=0$ en tout point de la surface moyenne:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2-5a)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-5b)$$

Sachant également que $\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x$, $\epsilon_{yy} = \partial v / \partial y$ et $\gamma_{xy} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$ on obtient:

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-6)$$

On peut également obtenir les contraintes en utilisant la loi de Hooke:

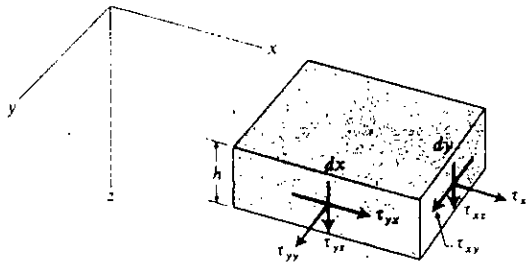


Figure 2-3 : Contraintes.

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \quad (2-7a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \quad (2-7b)$$

$$\gamma_{xy} = 2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2-7c)$$

qui donne:

$$\sigma_{xx} = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2-8a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2-8b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-Ez}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2-8c)$$

Pour déterminer les deux dernières contraintes τ_{xz} et τ_{yz} , on utilise les équations d'équilibre suivantes:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2-9a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2-9b)$$

qui donnent:

$$\tau_{xz} = \frac{-E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2-10a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{-E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2-10b)$$

2.2 EFFORTS INTERNES

Les moments de flexion et de torsion par unité de longueur peuvent être obtenus par intégration des contraintes sur l'épaisseur de la plaque:

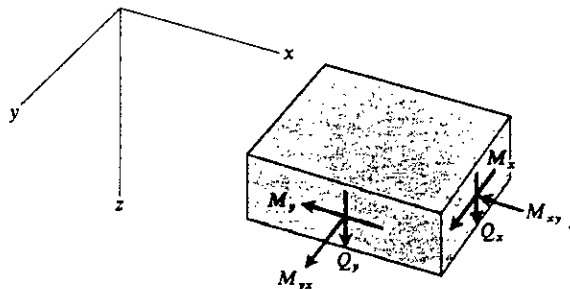


Figure 2-4 : Efforts résultants.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2-11a)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2-11b)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-11c)$$

Les forces Q_x et Q_y sont les forces de cisaillement par unité de longueur agissant sur les surfaces normales aux directions x et y respectivement.

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2-12a)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2-12b)$$

où

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2-13)$$

représente la rigidité à la flexion de la plaque.

2.3 EQUATION D'EQUILIBRE

De l'ensemble des équations précédemment établies, on peut établir l'équation d'équilibre de l'élément ci-dessous en écrivant les équations d'équilibre (1-4) de la façon suivante:

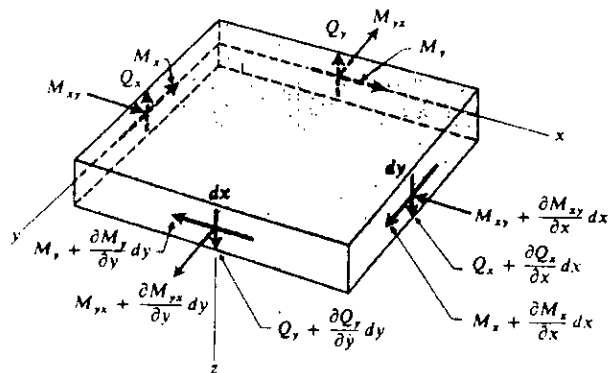


Figure : 2-5 Equilibre d'un élément différentiel.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2-14a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2-14b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (2-14c)$$

En multipliant l'équation (2-14a) par z et en intégrant sur l'épaisseur de la plaque :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = 0$$

or :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = (z \tau_{xz}) \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz$$

en utilisant (2-12a) et sachant que les contraintes de cisaillement sont nulles sur les faces d'équations $z = \pm h/2$ on obtient :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2-15)$$

D'une façon analogue :

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2-16)$$

En intégrant la troisième équation d'équilibre (2-14c) sur l'épaisseur de la plaque :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \sigma_{zz}(z) \Big|_{z=-h/2} - \sigma_{zz}(z) \Big|_{z=h/2}$$

or :

$$\sigma_{zz}(z) \Big|_{z=-h/2} = 0$$

$$\sigma_{zz}(z) \Big|_{z=h/2} = -p$$

on obtient finalement :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (2-17)$$

En éliminant Q_x et Q_y des équations ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$$

En substituant les équations (2-11) dans l'équation (2-15), on obtient l'équation *biharmonique* non homogène suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (2-18)$$

ou :

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (2-19)$$

Cette équation est appelée *équation de Sophie-Germain*.

3 PLAQUES EPAISSES : THEORIE DE MINDLIN

Lorsque l'épaisseur de la plaque dépasse le 1/10 de sa plus petite dimension dans son plan, on dit que la plaque est *épaisse*. La théorie de Kirchhoff n'est plus valable et on doit adopter une autre théorie qui est la théorie de *Mindlin*.

Un élément linéaire normal au plan moyen avant déformation est supposé rester linéaire mais pas forcément normal à celui-ci après déformation. Ceci veut dire que, contrairement à la théorie de *Kirchhoff*, les déformations de cisaillement ne sont pas négligées.

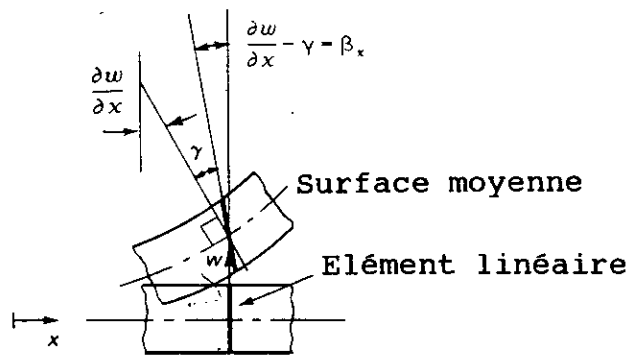


Figure 2-6 : Déformation d'un élément linéaire.

3.1 DEPLACEMENTS, DEFORMATIONS ET CONTRAINTES

Le déplacement d'un point n'appartenant pas au plan moyen n'est plus gouverné par les rotations $w_{,x}$ et $w_{,y}$. En effet, le

mouvement dépend maintenant de β_x et β_y qui représentent les rotations d'une ligne normale à la surface moyenne non déformée dans les plans (x,z) et (y,z) respectivement. On a alors:

$$u = z\beta_x(x,y); \quad v = -z\beta_y(x,y); \quad w = w(x,y) \quad (2-20)$$

Considérant la plaque de la figure (2-1), les déformations de flexion varient linéairement à travers l'épaisseur de la plaque et sont données par l'expression suivante:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

Alors que le cisaillement transversal est supposé constant sur toute l'épaisseur de la plaque et vaut:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

L'état de contrainte en tout point de la plaque correspond à un état de contrainte plane, c'est à dire que $\sigma_{zz} = 0$. Pour un matériau isotrope, on a donc:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = z \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

3.2 EFFORTS INTERNES

Les efforts résultants sont:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)$$

$$M_x = D \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \quad (2-25)$$

De la même façon:

$$M_y = D \left(\nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) \quad (2-26)$$

$$M_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (2-27)$$

Les forces de cisaillement résultantes, elles, valent:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = k \tau_{xz} h \quad (2-28)$$

où k est le facteur de cisaillement introduit pour corriger l'hypothèse selon laquelle le cisaillement transversal est constant à travers l'épaisseur de la plaque. On le prend généralement égal à $5/6$ dans le cas d'un matériau isotrope.

$$Q_x = khG \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) \quad (2-29)$$

De la même façon, on obtient:

$$Q_y = khG \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) \quad (2-30)$$

3.3 EQUATIONS D'EQUILIBRE

En substituant les équations (2-25) à (2-29) dans les équations d'équilibre (2-14) à (2-16), on obtient:

$$D \left(-\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) + kGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) = 0 \quad (2-31a)$$

$$D \left(\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} - \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} \right) + kGh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) = 0 \quad (2-31b)$$

$$-kGh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) = \rho \quad (2-31c)$$

Il est possible d'éliminer les fonctions β_x et β_y des équations ci-dessus au prix de substitutions fastidieuses mais rigoureuses pour aboutir à:

$$D\nabla^4 w + \frac{D}{kGh} \nabla^2 w p - p = 0 \quad (2-32)$$

4 CONDITIONS AUX LIMITES

Le déplacement w doit satisfaire aux équations différentielles d'équilibre en tout point intérieur de la plaque et aux conditions aux limites en tout point de la frontière de celle-ci.

4.1 BORD ENCASTRE

Le long d'un bord encasté, la flèche w est nulle ainsi que les rotations des normales à la surface moyenne non fléchie et donc:

$$w|_{x=a} = \beta_x|_{x=a} = \beta_y|_{x=a} = 0$$

Notons que dans la théorie de Kirchhoff $\beta_x = -\partial w / \partial y$ et $\beta_y = \partial w / \partial x$ et la condition $\beta_x(x=a) = 0$ veut dire que le plan tangent à la surface moyenne fléchie le long de ce bord coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque.

4.2 BORD SIMPLEMENT APPUYE

Si le bord d'équation $x = a$ de la plaque est simplement appuyé la flèche w le long de ce bord est nulle. Cependant, ce bord pourra tourner librement autour de l'axe y ($x = a$), c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion par rapport à l'axe y le long de ce bord.

La représentation des conditions aux limites est alors:

$$w|_{x=a} = M_x|_{x=a} = 0$$

On a aussi $\beta_x|_{x=a} = 0$ puisque la rotation autour de l'axe x n'est pas permise.

4.3 BORD LIBRE

Si le bord d'équation $x = a$ est entièrement libre, cela veut dire que ce bord ne subit ni moment de torsion ou de flexion ni forces de cisaillement transversal et alors:

$$Q_x|_{x=a} = M_x|_{x=a} = M_{xy}|_{x=a} = 0$$

5 METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE

La résolution de l'équation gouvernante peut se faire par différentes méthodes que l'on peut classer en deux catégories.

5.1 METHODES VARIATIONNELLES

On exprime w sous la forme:

$$w = \sum_n \alpha_n f_n(x, y)$$

où $f_n(x, y)$ sont des fonctions qui vérifient les conditions aux limites. Les inconnues du problème sont les coefficients α_n qui seront déterminés en minimisant l'énergie potentielle totale. Parmi ces méthodes, on peut citer:

- la méthode de Ritz
- la méthode de Galerkinge

5.2 METHODES NUMERIQUES

La résolution analytique des problèmes de flexion n'existe que pour des problèmes de géométrie simple et de conditions aux limites régulières. En effet, la résolution de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne le comportement flexionnel d'une plaque est fastidieuse et parfois même impossible c'est pourquoi on a recours aux méthodes numériques qui se sont avérées être un outil puissant, pratique et essentiel pour le calcul des structures. Parmi ces méthodes, on peut citer:

- la méthode des différences finies
- la méthode des bandes finies
- la méthode des éléments finis
- la méthode des éléments aux frontières

Nous développerons, dans la présente étude la méthode des éléments finis que nous détaillerons dans un prochain chapitre.

CHAPITRE III
DYNAMIQUE DES STRUCTURES

1 INTRODUCTION

L'objectif fondamental de la dynamique des structures est l'analyse des contraintes et des déformations dans n'importe quel type de structures soumise à un chargement dynamique arbitraire, c'est en quelque sorte une extension de l'analyse des structures généralement concernées par des chargements statiques. Il est cependant nécessaire de distinguer les deux types de chargement afin de pouvoir évaluer les effets de chacun et éventuellement de superposer ceux-ci.

Le terme dynamique peut être tout simplement défini comme *variation dans le temps*. Un chargement dynamique est un chargement qui varie en intensité, direction et position dans le temps et il apparaît évident que la réponse d'une structure quelconque soumise à un tel chargement se comporte en conséquence.

En général, la réponse d'une structure à un chargement dynamique est exprimée en termes de déplacements de celle-ci.

Si la fréquence d'excitation appliquée à la structure est inférieure au $1/3$ de la fréquence propre fondamentale de la structure, alors les effets de l'inertie peuvent être négligés et le problème est quasi-statique et donc le système $KU = R$ est suffisamment précis même si U et R varient "lentement" dans le temps.

Si la fréquence devient plus importante que la valeur citée plus haut, ou si la structure vibre librement, l'inertie devient importante et ne peut plus être négligée. C'est la matrice masse qui représente l'inertie, elle représente également la distribution continue de masse dans la structure.

Les problèmes de dynamique peuvent être divisés en deux types de problèmes:

- Problème de propagation d'ondes.
- Problème de dynamique des structures.

On ne s'intéressera qu'à une partie du 2^{ème} type de problème qui est l'étude des fréquences propres de vibrations et leurs modes correspondants.

2 CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PHENOMENE DYNAMIQUE

Un problème dynamique diffère de son équivalent statique par deux aspects importants :

Le premier, bien évidemment, est la variation dans le temps du problème, il est ainsi évident qu'un problème dynamique contrairement à un problème statique, ne peut avoir de solution unique mais une succession de solutions, chacune correspondant à un instant précis.

La deuxième elle, est que pour un chargement statique, les moments internes et les forces de cisaillement équilibrent les chargements extérieurs, alors que dans un cas de chargement dynamique, il faudra ajouter les forces d'inertie qui s'opposent à l'accélération.

3 FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

Comme cela a été dit précédemment, l'objectif initial de l'étude dynamique d'un système donné est la détermination des déplacements dans le temps d'une structure soumise à un chargement donné variant dans le temps. En général, la prise en compte d'un nombre limité de degrés de liberté procure une précision suffisante et le problème peut donc être réduit à la détermination des variations dans le temps des seules composantes de déplacement choisies.

Les expressions mathématiques définissant les déplacements dynamiques sont appelées *équations du mouvement* de la structure, leur résolution donne les histoires des déplacements recherchés (les variations des déplacements dans le temps).

La formulation des équations du mouvement d'un système dynamique constitue probablement la phase la plus importante (et la plus difficile) de toute l'étude. Trois méthodes peuvent être utilisées pour formuler ces équations:

- Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe de D'Alembert
- Principe des déplacements virtuels
- Principe de Hamilton

3.1 ECRITURE DIRECTE DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE PAR LE PRINCIPE DE D'ALEMBERT

Les équations du mouvement d'un système dynamique quelconque sont les expressions de la deuxième loi de Newton selon laquelle le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque m est égal à la force qui lui est appliquée. Cette relation s'exprime mathématiquement par :

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \quad (3-1)$$

où $p(t)$ est le vecteur force appliquée, $x(t)$ le vecteur position de la masse m .

Considérant que m ne varie pas dans le temps, l'équation (3-1) devient :

$$p(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x}(t) \quad (3-1a)$$

Cette équation, on le voit tout de suite, n'est autre que l'expression de l'égalité entre la force appliquée et le produit de la masse et de l'accélération de celle-ci, donc :

$$p(t) - m \ddot{x}(t) = 0 \quad (3-1b)$$

$m \ddot{x}(t)$ est la force d'inertie, elle s'oppose à l'accélération de la masse. Cette loi selon laquelle une masse produit une force d'inertie proportionnelle et opposée à son accélération

est connue comme étant le *principe de D'Alembert*, celui-ci est très pratique car il permet d'exprimer les équations du mouvement comme les équations d'un équilibre dynamique.

3.2 PRINCIPE DES DEPLACEMENTS VIRTUELS

Si la structure est relativement complexe, si elle comprend plusieurs points massiques ou plusieurs corps finis liés entre eux, l'écriture directe de l'équilibre peut s'avérer très complexe, on peut donc abandonner cette méthode et formuler les équations du mouvement en utilisant le principe des déplacements virtuels qui s'exprime comme suit :

Si un système qui est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces est soumis à un déplacement virtuel, c'est à dire à un déplacement compatible avec les liaisons du système, alors le travail total effectué par les forces est nul. Ce qui est donc équivalent à une expression d'un équilibre. Les équations de la réponse d'un système dynamique peuvent donc s'établir de la manière suivante :

On relève toutes les forces agissant sur les masses du système (y compris les forces d'inertie définies selon le principe de D'Alembert), puis les équations du mouvement sont obtenues en considérant des déplacements virtuels correspondant à chaque degré de liberté et en annulant le travail effectué.

3.3 PRINCIPE DE HAMILTON

Une autre méthode consiste à utiliser les grandeurs énergétiques scalaires sous une forme variationnelle, le principe variationnel le plus généralement applicable est le *principe de Hamilton* qui s'exprime comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3-2)$$

où : T est l'énergie cinétique totale du système, U l'énergie potentielle du système (énergie de déformation, et potentielle de toutes les forces conservatrice extérieures), W_{nc} le travail des forces non conservatrice (amortissement, charges extérieures arbitraires) et δ la variation subie durant l'intervalle de temps considéré.

Le principe de Hamilton peut s'expliquer comme étant la somme nulle de la variation d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatrice. L'application de ce principe mène directement aux équations du mouvement de tout système donné, le processus diffère du précédent du fait que les forces d'inertie n'interviennent pas explicitement, il ne fait donc intervenir que des grandeurs énergétiques scalaires alors que le principe des travaux virtuels fait intervenir des grandeurs de caractère

vectorel.

Remarque : On peut appliquer ce principe aux cas statiques, dans ce cas, $T=0$ et l'équation (-2) devient :

$$\delta(U - W_{nc}) = 0 \quad (3-3)$$

qui est le principe du minimum de l'énergie potentielle.

4 SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE

Les caractéristiques physiques essentielles de toute structure élastique linéaire soumise à des charges de nature dynamique sont sa masse, ses propriétés élastiques (rigidité ou souplesse), l'amortissement et la source d'excitation ou chargement.

On peut dans le modèle le plus simple de système à un degré de liberté, représenter chacune de ces caractéristiques comme le montre la figure ci dessous.

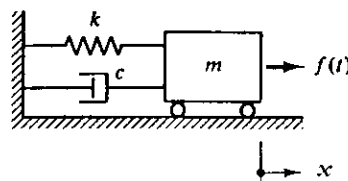


Figure 3-1 : Système à un d.d.l.

4.1 METHODES DE FORMULATION

L'équation du mouvement du système de la figure (3-1) peut s'obtenir par n'importe lequel des trois procédés présentés précédemment

4.1.1 ECRITURE DIRECTE DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE PAR LE PRINCIPE DE D'ALEMBERT

Dans ce cas, la méthode la plus simple consiste à exprimer directement l'équilibre de toutes les forces agissantes, ce qui donne :

$$f_i + f_s + f_D = p(t) \quad (3-4)$$

où : $p(t)$ est le chargement appliqué

f_i est la force d'inertie qui, par le principe de D'Alembert est le produit de la masse et de l'accélération.

$$f_i = m\ddot{x} \quad (3-4a)$$

f_s est la force de rappel donnée par le produit de la rigidité du ressort et du déplacement.

$$f_s = kx \quad (3-4b)$$

f_D est la force de viscosité (ou d'amortissement) et qui est le produit de la constante d'amortissement c et de la vitesse.

$$f_D = c\dot{x} \quad (3-4c)$$

En substituant les équations (3-4a), (3-4b) et (3-4c) dans l'équation (3-4), on obtient :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (3-5)$$

4.1.2 APPLICATION DU PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

Si on communique à la masse de la figure (3-1) un déplacement virtuel, alors chacune des forces analysées sur cette même figure fournira un certain travail et le travail total s'écrira :

$$-f_1\delta x - f_D\delta x - f_s\delta x + p(t)\delta x = 0 \quad (3-6)$$

Les signes (-) s'expliquent par le fait que les forces agissent dans le sens inverse du déplacement virtuel. Et donc :

$$[-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + p(t)]\delta x = 0 \quad (3-7)$$

ce qui est équivalent à l'équation (3-5).

4.1.3 APPLICATION DU PRINCIPE DE HAMILTON

L'énergie cinétique du système vaut par définition :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3-8a)$$

L'énergie potentielle elle représente simplement l'énergie de déformation U du ressort et vaut :

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3-8b)$$

les forces non conservatrice elles, sont la force d'amortissement f_D et la charge appliquée $p(t)$. La variation du travail de celles-ci s'exprime par :

$$\delta W_{nc} = p(t)\delta x - c\dot{x}\delta x \quad (3-8c)$$

En substituant les équations (3-8) dans l'équation (3-2), on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\ddot{x}\delta\dot{x} - kx\delta x - c\dot{x}\delta x + p(t)\delta x] dt = 0 \quad (3-9)$$

On intègre le premier terme par parties et on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\delta\dot{x} dt = m\dot{x}\delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta x dt$$

or, l'intégrale des hypothèses du principe de Hamilton est que δx est nul aux bornes d'intégration t_1 et t_2 , le premier terme est donc nul et l'équation (3-9) devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + p(t)]\delta x dt = 0 \quad (3-10)$$

Comme δx est arbitraire, l'équation (3-10) n'est satisfaite que si l'expression entre crochets est nulle ce qui est équivalent à l'équation (3-5).

Cet exemple montre comment la même équation du mouvement peut être obtenue par chacune des trois méthodes de base.

4.2 OSCILLATIONS LIBRES

Les équations de mouvement de tout système à un degré de liberté peuvent comme nous l'avons montré précédemment se réduire à la forme :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

Parfois, le chargement peut être nul, les mouvements du système sont alors appelés oscillations libres et l'équation précédente devient :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3-11)$$

Ces oscillations peuvent également être non amorties, c'est à dire $c=0$ et l'équation devient :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3-12)$$

et la solution de ce type de problème est de forme sinusoïdale. C'est ce type de problème qui nous intéresse, avec cependant une différence : les systèmes que nous étudions ne sont pas à un mais à plusieurs degrés de liberté. Cependant, un tel système n'existe pas pratiquement car il nécessite une discrétisation de la structure et ceci revient à une modélisation, à une idéalisation de celle-ci, ce qui ne peut donc mener qu'à une

solution approchée. On opère de cette manière lorsque l'on utilise la méthode des éléments finis. Dans ce qui va suivre, on va établir les équations d'équilibre dynamique d'un système continu, donc réel pour obtenir la solution analytique.

5 VIBRATIONS LIBRES DES SYSTEMES CONTINUS

5.1 CAS D'UNE POUTRE

On considère les vibrations libres non amorties dans le sens transversal d'une poutre droite supportée de telle manière que les appuis ne contribuent pas à l'énergie de déformation du système (appui simple ou double). On négligera les effets de cisaillement et les inerties de rotation.

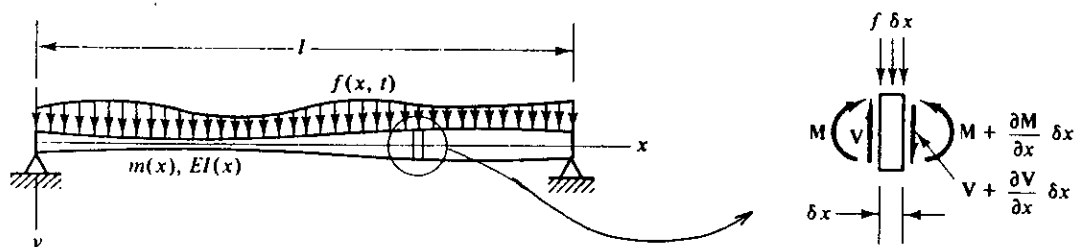


Figure 3-2 : Vibrations d'une poutre.

L'équilibre de la section ci dessus est :

$$f \delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x = m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta x \quad (3-13)$$

Si on néglige le cisaillement, alors la relation moment-courbure est :

$$M = -EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3-14)$$

et en absence d'inertie de rotation :

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3-15)$$

en substituant les équations (3-14) et (3-15) dans l'équation (3-13), on obtient:

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q(x, t) \quad (3-16)$$

Dans le cas de vibrations libres, $q(x,t)$ est nul et l'équation (3-16) devient :

$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \quad (3-17)$$

On opère sur w une séparation de variables :

$$w(x,t) = \Psi(x)T(t)$$

alors :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Psi \ddot{T} \quad (3-18a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \Psi'' T \quad (3-18b)$$

et :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = T \left(\frac{d^2}{dx^2}[EI\Psi']\right) \quad (3-18c)$$

On obtient donc :

$$m\Psi\ddot{T} + T\left(\frac{d^2}{dx^2}[EI\Psi']\right) = 0 \quad (3-19)$$

En divisant par $m\Psi T$, on a finalement :

$$\frac{\ddot{T}}{T} + \frac{d^2}{dx^2}(EI\Psi') \frac{1}{m}\Psi = 0 \quad (3-20)$$

Le premier terme étant indépendant de x et le second indépendant de t , l'équation (3-19), pour être valable pour toutes les valeurs de x et de t , doit satisfaire l'équation suivante :

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{d^2}{dx^2}(EI\Psi') \frac{1}{m}\Psi = C^{ste} = \omega^2 \quad (3-21)$$

Et ainsi l'équation aux dérivées partielles régissant le mouvement de vibrations libres non amorties d'une poutre est :

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (3-22)$$

et l'équation de déformation :

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI\Psi') - \omega^2 m\Psi = 0 \quad (3-23)$$

où ω représente les pulsations propres du système.

5.2 CAS D'UNE PLAQUE

On peut en dynamique comme en statique étudier les plaques selon la théorie de Kirchhoff ou celle de Mindlin.

5.2.1 THEORIE DE KIRCHHOFF

Dans le cas d'une étude de plaque constituée d'un matériau linéaire élastique et isotrope, on peut appliquer l'équation de mouvement (1-5), c'est à dire :

$$\tau_{i,j,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3-24)$$

en absence des forces volumiques, c'est à dire lorsque $B_i = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \ddot{u} \quad (3-24a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \ddot{v} \quad (3-24b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{w} \quad (3-24c)$$

Et puisque la théorie de Kirchhoff ignore le cisaillement, on a :

$$u = z\beta_x; \quad v = -z\beta_y \quad (3-25)$$

et donc :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = z\rho\ddot{\beta}_x \quad (3-25a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -z\rho\ddot{\beta}_y \quad (3-25b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{w} \quad (3-25c)$$

En multipliant les deux premières équations par z et en intégrant sur l'épaisseur de la plaque on obtient les

équations suivantes fonctions des moments de flexion M_x , M_y , de torsion M_{xy} et des efforts tranchants Q_x et Q_y :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_x \quad (3-26a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = -\frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_y \quad (3-26b)$$

où $\rho h^3 \ddot{\beta}_x / 12$ et $\rho h^3 \ddot{\beta}_y / 12$ sont les inerties de rotation que l'on négligera et de ce fait les équations ne sont plus à considérer.

En intégrant la 3^{ème} équation de mouvement sur l'épaisseur de la plaque :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \ddot{w} \quad (3-27)$$

En substituant les équations (2-12) dans l'équation ci-dessus on arrive à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \right) &= \rho h \ddot{w} \\ -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 w &= \rho h \ddot{w} \end{aligned}$$

et donc :

$$D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (3-28)$$

Cette équation est, on le voit, fonction du déplacement transversal et de son accélération et exprime le mouvement de la plaque. C'est l'équation du mouvement d'une plaque où le cisaillement et les inerties de rotation sont négligées.

5.2.2 EXEMPLE D'UNE PLAQUE MINCE SIMPLEMENT APPUYÉE

Si l'on considère une plaque mince rectangulaire de dimensions a , b et h simplement appuyée le long de ses bords, alors l'équation du mouvement de celle-ci sera l'équation (3-28) déterminée précédemment :

$$D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0$$

qui permet de déterminer le déplacement transversal w . En effectuant une séparation de variables comme suit:

$$w = \Psi(x, y) T(t) \quad (3-29)$$

on obtient deux équations aux dérivées partielles, l'une dépendant du temps et l'autre des coordonnées géométriques (x,y) qui sont:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \quad (3-30a)$$

et

$$\frac{D \nabla^4 \Psi}{\rho h \Psi} = \omega^2 \quad (3-30b)$$

Les solutions de ces deux équations sont respectivement les suivantes :

$$T = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3-31a)$$

et

$$W(x,y) = X(x)Y(y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3-31b)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$w = M_x = 0; \quad x = 0, x = a$$

et

$$w = M_y = 0; \quad y = 0, y = b$$

en substituant l'équation (3-31b) dans l'équation (3-30b), on obtient :

$$\left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4 - \frac{\omega_{nm}^2}{\beta^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = 0 \quad (3-32a)$$

et donc :

$$\omega_{nm} = \beta \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right] \quad (3-32b)$$

ω_{mn} est la pulsation propre du mode (m,n) .

Le mouvement de vibrations libres d'une plaque est le résultat de la superposition de tous les modes et la solution de chacun de ces modes.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{nm} \quad (3-33a)$$

où :

$$w_{nm} = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} (A_{nm} \sin \omega_{nm} t + B_{nm} \cos \omega_{nm} t) \quad (3-33b)$$

5.2.3 THEORIE DE MINDLIN

La théorie de Mindlin tient compte de l'effet du cisaillement transversal et des inerties de rotation. Les équations (3-26) et (3-27) restent donc valables dans leur intégralité

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_x$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = -\frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_y$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \ddot{w}$$

Cependant, du fait de la différence des approches selon que l'on obéisse aux lois de Kirchhoff ou à celles de Mindlin, les expressions des moments et des efforts tranchants diffèrent. Dans le cas de la théorie de Mindlin, ils sont exprimés dans les équations (2-25) à (2-29) et leur substitution dans les équations (3-26) et (3-27) donne :

$$D \left(-\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu) \partial^2 \beta_x}{2 \partial y^2} + \frac{(1+\nu) \partial^2 \beta_y}{2 \partial x \partial y} \right) + kGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_x \quad (3-34a)$$

$$D \left(\frac{(1-\nu) \partial^2 \beta_y}{2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} - \frac{(1+\nu) \partial^2 \beta_x}{2 \partial x \partial y} \right) + kGh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right) = -\frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_y \quad (3-34b)$$

$$-kGh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) = -\rho h \ddot{w} \quad (3-34c)$$

Et en éliminant β_x et β_y des expressions ci-dessus, on obtient :

$$\left(\nabla^2 - \frac{\rho}{kG} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(D \nabla^2 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3-35)$$

Qui est l'équation du mouvement d'une plaque répondant aux critères de Mindlin et tenant donc compte de l'effet du cisaillement transversal et des inerties de rotations.

CHAPITRE IV
METHODE DES ELEMENTS FINIS

1 INTRODUCTION

Les projets que l'ingénieur est amené à réaliser deviennent, du fait de l'évolution actuelle de la technologie de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères (projets aéronautiques, nucléaires...)

Afin de pouvoir maîtriser ces projets, l'ingénieur doit avoir recours à des modèles permettant de simuler le comportement de systèmes physiques complets, comportement décrit d'ailleurs par des équations aux dérivées partielles. Cependant même en se rapportant à des modèles, les projets restent très complexes et même carrément insolubles sans outil informatique

L'informatique, elle, a nécessité la création de méthodes numériques de résolution et il s'est avéré que la méthode des éléments finis donnait de très bons résultats. Cette méthode a été développée à l'origine pour l'analyse des problèmes de mécanique des structures mais il est très vite apparu qu'elle était également aisément applicable pour les résolutions de problèmes tout à fait différents (problèmes thermiques, hydrodynamique...).

La méthode des éléments finis comme outil d'analyse essentiel a, comme cela été dit précédemment, suivi l'avènement de l'ordinateur comme outil de calcul indispensable. Ainsi, l'utilisation de cette méthode sur ordinateur permet d'établir et de résoudre les équations gouvernantes de problèmes complexes de manière efficace.

La méthode des éléments finis a été développée sur la base de fondements physiques reliés à la mécanique des structures puis s'est généralisée à d'autres domaines telle la dynamique des fluides. L'appellation "méthode des éléments finis" revient au professeur Ray W. Clough de l'université de BERKELEY qui utilisa la méthode pour une analyse en contraintes planes, depuis, des recherches approfondies ont été effectuées et le nombre de publications se rapportant à cette méthode ne se comptent plus

Aujourd'hui, le concept de la méthode des éléments finis est très large, même en se contournant au domaine de l'analyse des structures, la méthode peut en effet être utilisée de différentes manières ainsi, différentes approches sont possibles:

- approche par la méthode des déplacements.
- approche par la méthode des forces.
- et enfin l'approche par la méthode mixte.

C'est la méthode des déplacements que nous utiliserons pour l'investigation des fréquences et modes propres des plaques.

2 FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS BASEE SUR LES DEPLACEMENTS

La méthode des éléments finis basée sur les déplacements peut être vue comme une extension de la méthode des déplacements qui a été très longtemps utilisée (et qui l'est encore de nos jours) dans l'analyse des poutres et treillis.

Les différentes étapes de résolution sont:

- 1/- Idéalisisation (modélisation) de la structure comme un assemblage d'éléments liés entre eux aux noeuds. On la met ainsi sous une forme analysable.
- 2/- Considération des déplacements aux noeuds comme inconnus.
- 3/- Etablissement des équations d'équilibre forces-déplacements aux noeuds et résolution de ces équations.
- 4/- Calcul des distributions des contraintes internes des éléments sur la base des déplacements nodaux.
- 5/- interprétation des résultats.

Il est à noter que les étapes les plus importantes sont l'idéalisisation du problème et l'interprétation des résultats.

L'analyse de structure à base d'éléments barres et poutres n'est pas toujours assimilée à une analyse en éléments finis car la matrice de rigidité exacte (selon la théorie de Bernouilli) de ce type d'éléments existe; alors qu'en se basant sur la théorie des éléments finis, le choix des fonctions de forme (fonctions d'interpolation) n'aboutit qu'à une forme approximative de cette matrice de rigidité et donc l'équilibre de la structure, quelle qu'elle soit, n'est pas rigoureusement satisfait.

Le principe de base de la méthode des éléments finis est la discrétisation de la structure à analyser c'est à dire que cette dernière est mise sous forme d'un assemblage d'éléments finis connectés entre eux aux noeuds (joints).

Dans la réalité, tout problème est de nature tri-dimensionnelle, cependant, il n'est pas toujours étudié en tant que tel et donc ainsi, la première étape est de décider du type de modèle à adopter.

A titre d'exemple, pour les problèmes relevant de la mécanique des structures l'ingénieur recherche la répartition des contraintes et le champ de déplacement dans la structure afin de vérifier que les conditions de résistance et les spécifications de flèches par exemple sont bien respectées pour cela, l'opérateur doit définir des équations gouvernantes dont la solution doit satisfaire les conditions d'équilibre et de compatibilité puis résoudre celles-ci qui se présentent comme des équations aux dérivées partielles (lorsque le problème est de nature continue).

Remarque: Les bases théoriques de la méthode des éléments finis reposent d'une part sur la formulation énergétique et d'autre part sur les méthodes d'approximation

3 DEROULEMENT D'UN CALCUL DE STRUCTURES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Un calcul de structures par la méthode des éléments finis comporte quatre étapes fondamentales qui sont:

- 1/- Modélisation et discrétisation de la structure: cette étape consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des matériaux (on opère un choix de la théorie et des équations constitutives décrivant le matériau), et à subdiviser la structure en un ensemble d'éléments de façon à représenter au mieux la structure à étudier. Cette subdivision tient compte de deux paramètres fondamentaux: le type d'éléments à utiliser et la finesse de cette discrétisation.

2/- Evaluation des propriétés de l'élément: c'est dans notre cas, le calcul des matrices de rigidité et des matrices masse élémentaires. Ce peut être aussi, dans un cas statique le calcul des vecteurs de charges de chaque élément en plus bien sur du calcul des matrices de rigidité élémentaires.

3/- Résolution du problème de la structure discrétisée: cette étape consiste en la résolution d'un système d'équations linéaires et ce, en choisissant un algorithme de résolution ayant le meilleur rapport du nombre d'opérations à la facilité de programmation possible.

Remarque: Le choix de l'algorithme n'influe pas sur la qualité du résultat (en dehors des erreurs d'arrondis), c'est le modèle de formulation et la finesse de discrétisation qui fixe celle-ci

4/- Interprétation des résultats: c'est un problème important de la méthode des éléments finis et l'utilisation des graphiques apparait aujourd'hui comme la solution la plus pratique pour résoudre ce problème.

4 EXPOSE DES PRINCIPES ENERGETIQUES

Dans un problème mécanique, trois conditions doivent être satisfaites afin de pouvoir obtenir la solution exacte, ce sont:

- les conditions d'équilibre
- les conditions de compatibilité
- les lois de comportement contraintes-déformation $\sigma - \epsilon$

Dans la méthode des éléments finis, les deux dernières conditions à savoir les conditions de compatibilité et de comportement, sont généralement satisfaites, cependant la première condition (conditions d'équilibre) n'est satisfaite qu'approximativement ce qui confère à cette méthode son caractère quelque peu imprécis. Cette erreur peut cependant être fortement réduite en augmentant le nombre d'éléments.

Comme nous l'avons dit précédemment, notre approche se fait par la méthode des déplacements en utilisant la formulation variationnelle qui garantit la symétrie de la matrice de rigidité.

La méthode variationnelle se base sur le principe des travaux virtuels qui constitue le fondement des principes variationnels tels: le principe de stationnarité de l'énergie de déformation ou du minimum de l'énergie de déformation.

4.1 PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

Pour qu'un corps déformable soit en équilibre, il faut et il suffit que le travail des forces extérieures soit égal au travail de déformation pour tout champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible (vérifiant les conditions aux limites):

$$\delta w = \delta u \quad (4-1)$$

4.2 PRINCIPE DE STATIONNARITE DE L'ENERGIE DE DEFORMATION

On a

$\Pi = u - w$: énergie potentielle

THEOREME:- De tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles, celui satisfaisant aux conditions aux limites correspond à une énergie potentielle totale Π stationnaire. Si le système est stable, l'énergie potentielle totale est minimum dans la configuration réelle du système (par définition).

$$\delta \Pi = \delta(u - w) \quad (4-2)$$

4.3 PRINCIPE DU MINIMUM DE L'ENERGIE DE DEFORMATION

Si on choisit, dans un corps élastique, des déplacements virtuels nuls aux points d'application des forces extérieures, alors: $\delta w = 0$. Donc en se basant sur le principe précédent:

$$\delta \Pi = \delta(u - w) = 0 \Rightarrow \delta u = 0 \quad (4-3)$$

5 FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS BASEE SUR LES DEPLACEMENTS

5.1 FORMULATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE

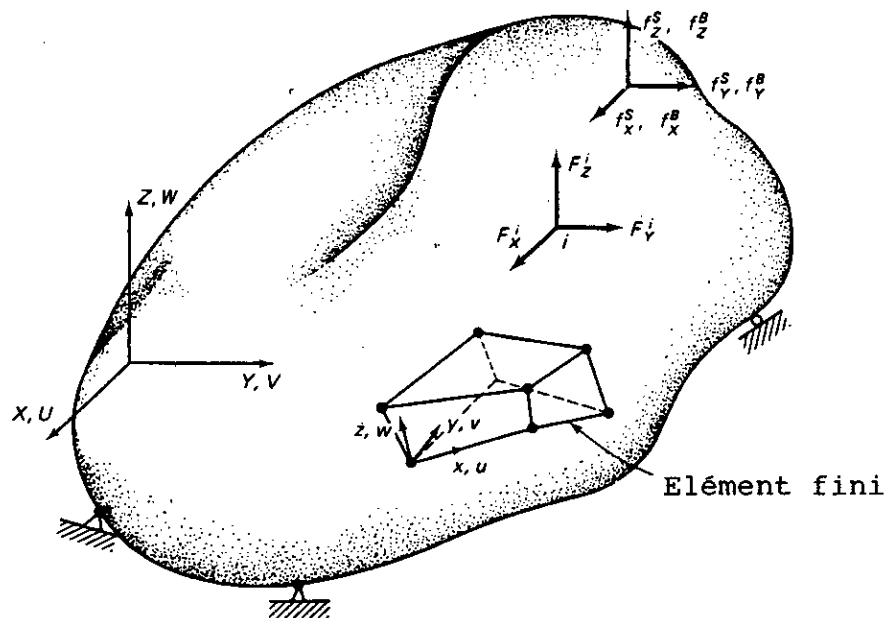


Figure : 4-1 : Système tridimensionnel.

Notre problème consiste en la détermination des déplacements, déformations et contraintes dans la structure représentée ci-dessous sous l'effet du chargement extérieur et des conditions aux limites données. Pour cela il nous faut tout d'abord établir les équations d'équilibre en utilisant le

principe de la stationnarité de l'énergie potentielle totale du système principe d'ailleurs équivalent au principe des travaux virtuels. Ce principe est le suivant:

$$\delta \Pi = 0 \quad (4-2)$$

avec $\Pi = u - w$

où:

Π est l'énergie potentielle totale

u est l'énergie de déformation

w est le travail des charges

où:

$$\underline{\bar{U}} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}^i = \begin{bmatrix} F_X^i \\ F_Y^i \\ F_Z^i \end{bmatrix}; \quad \underline{f}^B = \begin{bmatrix} f_X^B \\ f_Y^B \\ f_Z^B \end{bmatrix}; \quad \underline{f}^S = \begin{bmatrix} f_X^S \\ f_Y^S \\ f_Z^S \end{bmatrix}$$

Soit \underline{U} le vecteur déplacement: $\underline{U}^T = [u \ v \ w]$

Les déformations correspondant à \underline{U} sont:

$\underline{\epsilon}^T = [\epsilon_{XX} \ \epsilon_{YY} \ \epsilon_{ZZ} \ \gamma_{XY} \ \gamma_{YZ} \ \gamma_{XZ}]$ et les contraintes correspondant à $\underline{\epsilon}^T$ sont: $\underline{\tau}^T = [\sigma_{XX} \ \sigma_{YY} \ \sigma_{ZZ} \ \tau_{XY} \ \tau_{YZ} \ \tau_{XZ}]$

Le principe des travaux virtuels stipule que l'équilibre du système n'est vérifié que si pour tout champ de déplacements virtuels compatible (satisfaisant les conditions aux limites de type déplacement) imposé au système, il y a égalité des travaux intérieur et extérieur ce qui en termes mathématiques devient:

$$\int_V \underline{\bar{\epsilon}}^T \underline{\tau} dV = \int_V \underline{\bar{U}}^T \underline{f}^B dV + \int_S (\underline{\bar{U}}^S)^T \underline{f}^S dS + \sum_i (\underline{\bar{U}}^i)^T \underline{F}^i \quad (4-4)$$

Dans la méthode des éléments finis, on suppose que le milieu est discrétisé en un ensemble d'éléments ayant chacun leur propre système de coordonnées (système de coordonnées locales). Le déplacement $\underline{U}^{(m)}$ au niveau de l'élément m s'écrit comme une fonction des déplacements nodaux. Par conséquent:

$$\underline{U}^{(m)} = H^{(m)} \underline{\hat{U}} \quad (4-5)$$

où:

$$\underline{U}^{(m)} = \begin{bmatrix} u^{(m)} \\ v^{(m)} \\ w^{(m)} \end{bmatrix}$$

et $\underline{\hat{U}}^T = [u_1 \ v_1 \ w_1 \dots u_n \ v_n \ w_n]$ est le vecteur de dimensions $3n$ (n : nombre de noeuds) regroupant les déplacements nodaux. $H^{(m)}$ matrice d'interpolation des déplacements.

Remarques:

1°- Bien que $\underline{\hat{U}}^T$ renferme tous les déplacements nodaux, il faut savoir que seuls ceux de l'élément affectent les déplacements et les déformations au sein de celui-ci.

$$\underline{U}^{(m)} = H^{(m)} \underline{\hat{U}} \Rightarrow \underline{\epsilon}^{(m)} = B^{(m)} \underline{\hat{U}} \quad (4-6)$$

où: $B^{(m)}$ est la matrice déformations-déplacements nodaux.

2°- Les lignes de $B^{(m)}$ sont le résultat de différentiation et combinaison des lignes de $H^{(m)}$.

L'équation (4-4) peut se réécrire comme suit:

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{V^{(m)}} \underline{\epsilon}^{(m)T} \underline{\tau}^{(m)} dV^{(m)} &= \sum_m \int_{V^{(m)}} \underline{\bar{U}}^{(m)T} \underline{f}^{B^{(m)}} dV^{(m)} \\ &+ \sum_m \int_{S^{(m)}} (\underline{\bar{U}}^S)^{(m)T} \underline{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)} + \sum_i (\underline{\bar{U}}^i)^T \underline{F}^i \end{aligned} \quad (4-7)$$

$m = 1, 2, \dots, k$: nombre total d'éléments.

Les différentes intégrations (volumiques et surfaciques) ont lieu au niveau de chaque élément en référence au système de coordonnées qui lui est attaché. Ainsi, le calcul des intégrales peut se faire de manière efficace.

Les relations contraintes-déformations à l'intérieur de l'élément sont:

$$\underline{\tau}^{(m)} = C^{(m)} \underline{\epsilon}^{(m)} \quad (4-8)$$

En combinant les équations (4-6), (4-7) et (4-8), on obtient:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{U}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \right] \underline{\hat{U}} &= \underline{\hat{U}}^T \left[\left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)} \underline{f}^{B^{(m)}} dV^{(m)} \right\} \right] \\ &+ \underline{\hat{U}}^T \left[\left\{ \sum_m \int_{S^{(m)}} H^{S^{(m)T}} \underline{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)} \right\} + \underline{F} \right] \end{aligned} \quad (4-9)$$

où:

$\underline{\hat{U}}^T$: est indépendant de l'élément considéré.

et: \underline{F} est le vecteur des forces extérieures.

En éliminant de l'équation (4-9) le terme $\underline{\hat{U}}^T$, on obtient:

$$\left[\sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \right] \underline{\hat{U}} = \left[\left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)} \underline{f}^{B^{(m)}} dV^{(m)} \right\} + \left\{ \sum_m \int_{S^{(m)}} H^{S^{(m)T}} \underline{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)} \right\} + \underline{F} \right] \quad (4-10)$$

Et cette équation peut donc être écrite comme suit:

$$K \underline{U} = R \quad (4-11)$$

et ceci est particulièrement vrai pour $\underline{U} = \underline{\hat{U}}$

où:

$$\underline{R} = \sum_m R_B^{(m)} + R_S^{(m)} + \underline{R}_C \quad (4-12)$$

$$R_B^{(m)} = \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \underline{f}^{B^{(m)}} dV^{(m)} \quad (4-12a)$$

$$R_S^{(m)} = \int_{S^{(m)}} H^{S^{(m)T}} \underline{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)} \quad (4-12b)$$

$$\underline{R}_C = \underline{F} \quad (4-12c)$$

et:

$$K^{(m)} = \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \quad (4-13)$$

Les équations (4-12) et (4-13) représentant respectivement le vecteur chargement et la matrice de rigidité élémentaires.

Remarque:

- 1° - L'équilibre est satisfait en tout noeud.
- 2° - La condition de compatibilité est satisfaite dans la mesure où les éléments finis sont compatibles.
- 3° - La loi constitutive du matériau est satisfaite.

5.2 FORMULATION EN COORDONNEES GENERALISEES

Revenons à l'équation (4-5) qui est:

$$\underline{u}^{(m)} = H^{(m)} \hat{\underline{u}}$$

Parmi toutes les classes de fonction possibles que l'on peut utiliser pour décrire les déplacements à l'intérieur d'un élément la classe des fonctions polynomiales est celle qui s'adapte le mieux car les concepts d'interpolation polynomiale sont communément utilisés pour approcher des fonctions inconnues. En plus, les polynômes sont facilement dérivables et de ce fait les déformations peuvent facilement s'obtenir.

Considérant le cas d'un élément tridimensionnel pour lequel les déplacements u , v et w sont des fonctions des coordonnées x , y et z on a en général:

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy \dots \quad (4-14a)$$

$$v(x, y, z) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 xy \dots \quad (4-14b)$$

$$w(x, y, z) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 z + \gamma_5 xy \dots \quad (4-14c)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ sont appelées *coordonnées généralisées*.

Les relations des équations (4-14) s'écrivent sous forme matricielle comme suit:

$$\underline{u} = \Phi \underline{\alpha} \quad (4-15)$$

où:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Φ : regroupe les termes de la base polynomiale.

$\underline{\alpha}$: vecteur des coordonnées généralisées.

Pour exprimer les coordonnées généralisées en termes de déplacements nodaux, on écrit la relation (4-15) pour les noeuds de l'élément, en substituant les coordonnées de ceux-ci d'une façon appropriée, on obtient:

$$\hat{\underline{u}} = A \underline{\alpha} \quad (4-16)$$

En supposant que l'on puisse inverser la matrice A , on arrive à l'équation suivante:

$$\underline{\alpha} = A^{-1} \underline{\hat{u}} \quad (4-17)$$

En substituant l'équation (4-17) dans l'équation (4-15), on aboutit à:

$$\underline{u} = \Phi A^{-1} \underline{\hat{u}} = H \underline{\hat{u}} \quad (4-18)$$

et donc:

$$H = \Phi A^{-1} \quad (4-19)$$

Comme le vecteur déformation s'obtient à partir de différentiations des déplacements et que la matrice A ne contient que des constantes, on a:

$$\underline{\epsilon} = B \underline{\hat{u}} \quad (4-20)$$

avec

$$B = E A^{-1} \quad (4-21)$$

E étant la matrice liant les déformations aux coordonnées généralisées:

$$\underline{\epsilon} = E \underline{\alpha} \quad (4-22)$$

6 DYNAMIQUE PAR ELEMENTS FINIS

Il est cependant important de noter que l'équation (3-11) ne représente qu'un état d'équilibre statique de l'assemblage considéré et il se trouve que les forces appliquées peuvent varier dans le temps, ce qui implique que dans ce cas précis, les déplacements également varieront dans le temps et ainsi (3-11) ne représentera plus en fait qu'un état d'équilibre de la structure en un instant précis, ce qui, on le voit tout de suite n'est pas très intéressant, il est donc nécessaire de modifier cette équation d'équilibre.

Si la fréquence d'excitation appliquée à la structure est inférieure au 1/3 de la fréquence propre fondamentale de la structure, alors les effets de l'inertie peuvent être négligés et le problème est quasi-statique et donc le système $K\underline{U} = \underline{R}$ est suffisamment précis même si \underline{U} et \underline{R} varient (lentement) dans le temps.

6.1 EQUATION D'EQUILIBRE DYNAMIQUE

Les équations gouvernantes de la réponse dynamique d'une structure peuvent être obtenues à partir de l'équilibre des travaux virtuels des forces extérieures et des forces internes, d'inertie et de frottement, c'est à dire:

$$\int_{V^e} \delta \underline{u}^T \underline{F} dV + \int_{S^e} \delta \underline{u}^T \underline{\phi} dS + \sum_{i=1}^n \delta \underline{u}_i^T \underline{P}_i = \int_{V^e} (\delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} + \delta \underline{u}^T \rho \underline{\ddot{u}} + \delta \underline{u}^T k_d \underline{\dot{u}}) dV \quad (4-23)$$

où:

$\delta \underline{u}$ et $\delta \underline{\epsilon}$ sont respectivement des déplacements arbitraires et leurs déformations correspondantes.

\underline{F} et $\underline{\phi}$ les forces volumiques et surfaciques.

\underline{P}_i les chargements ponctuels aux points i et $\delta \underline{u}_i$ les déplacements en ces points.

ρ la masse volumique du matériau et k_d un coefficient d'amortissement.

En usant de la notation éléments finis c'est à dire $\underline{u} = H \hat{\underline{u}}$ et donc $\underline{\dot{u}} = H \hat{\underline{\dot{u}}}$ et $\underline{\ddot{u}} = H \hat{\underline{\ddot{u}}}$, on obtient:

$$\delta \underline{u}^T \left[\int_{V^e} B^T \underline{\sigma} dV^e + \int_{V^e} \rho H^T dV^e \hat{\underline{\ddot{u}}} \right] + \delta \underline{u}^T \left[\int_{V^e} k_d H^T H dV^e \hat{\underline{\dot{u}}} - \int_{V^e} H^T \underline{F} dV^e - \int_{S^e} H^T \underline{\phi} dS^e - \sum_{i=1}^n \underline{P}_i \right] = 0 \quad (4-24)$$

Cette équation peut être réécrite sous une forme plus condensée:

$$[m] \hat{\underline{\ddot{u}}} + [c] \hat{\underline{\dot{u}}} + \underline{r}^{into} = \underline{r}^{ext} \quad (4-25)$$

où:

$$[m] = \int_{V^e} \rho H^T H dV^e \quad (4-25a)$$

$$[c] = \int_{V^e} k_d H^T H dV^e \quad (4-25b)$$

$$\underline{r}^{into} = \int_{V^e} B^T \underline{\sigma} dV^e \quad (4-25c)$$

$$\underline{r}^{ext} = \int_{V^e} H^T \underline{F} dV^e \quad (4-25d)$$

[*m*] étant la matrice masse élémentaire, [*c*] la matrice d'amortissement élémentaire, \underline{r}^{inte} le vecteur des forces internes élémentaires et \underline{r}^{ext} le vecteur des forces externes élémentaires.

6.2 DETERMINATION DE LA MATRICE MASSE

La matrice masse est la représentation directe d'une distribution continue de masse, une matrice masse élémentaire définie par l'équation (3-25a) est appelée matrice masse cohérente car [*H*] représente les mêmes fonctions de forme que celles utilisées pour la matrice de rigidité. Une autre formulation, plus simple et plus ancienne est la matrice masse concentrée qui a pour principe de répartir la masse totale équitablement de l'élément sur ses noeuds. Une troisième formulation se fait en utilisant les termes diagonaux de la matrice masse cohérente mais de les multiplier de telle façon que la masse totale de l'élément soit préservée.

6.2.1 MATRICE MASSE COHERENTE

Si la fonction de forme utilisée pour décrire la variation du champ accélération à travers l'élément est la même que celle utilisée pour décrire le déplacement, alors, la matrice masse est appelée matrice masse cohérente. On la détermine comme suit:

L'accélération au noeud *i* vaut:

$$\hat{u}^T = [\ddot{w}_i, \ddot{\theta}_\xi, \ddot{\theta}_{y_i}] \quad (4-26)$$

Si l'on ne tient pas compte des accélérations angulaires, on a:

$$\ddot{u}_i = \ddot{w}_i \quad (4-27)$$

Le principe de D'Alembert montrant que l'accélération \ddot{w} produit une force d'inertie latérale $-\rho h \ddot{w}$ où ρ est la masse volumique et *h* l'épaisseur de la plaque. Utilisant le principe des travaux virtuels, on trouve que le travail virtuel dû à cette force d'inertie vaut:

$$F_i^e = - \int_{S^e} H^T \underline{a} dS^e \quad (4-28)$$

où:

$$\underline{a} = PH \hat{u} \quad (4-28a)$$

avec

$$P = \rho h \quad (4-28b)$$

et

$$\hat{u}^e = [\hat{u}^1, \hat{u}^2, \dots, \hat{u}^n] \quad (4-28c)$$

n : nombre de noeuds de l'élément. Et ainsi:

$$F_I^e = - \int_{S^e} H^T P H dS^e \hat{u}^e = -[m] \hat{u}^e \quad (4-29)$$

et donc:

$$[m] = \int_{S^e} H^T P H dS^e = \int_{S^e} H^T \rho H h dS^e \quad (4-30)$$

donc:

$$[m] = h \int_{S^e} H^T \rho H dS^e \quad (4-31)$$

En fait, si l'on veut que le calcul soit rigoureux, il faut tenir compte des inerties de rotations (ce qu'ont fait Mindlin et Reissner qui ont tenu compte du cisaillement dans leur théorie) qui transforment le vecteur des forces d'inertie $\underline{\alpha}$ en:

$$f^T = \left[\rho h \ddot{w} \quad , \quad \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\theta}_x \quad , \quad \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\theta}_y \right] \quad (4-32)$$

et donc l'équation (4-28a) devient:

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \rho & & \\ & \frac{\rho h^2}{12} & \\ & & \frac{\rho h^2}{12} \end{bmatrix} [H] \hat{u} \quad (4-33)$$

ainsi:

$$[m] = h \int_{S^e} H^T \begin{bmatrix} \rho & & \\ & \frac{\rho h^2}{12} & \\ & & \frac{\rho h^2}{12} \end{bmatrix} H dS^e \quad (4-34)$$

La matrice masse est symétrique définie positive.

6.2.2 MATRICE MASSE CONCENTREE A COEFFICIENTS EGAUX

Dans ce cas, la détermination de la matrice masse est nettement plus aisée car la masse est concentrée également

à tous les noeuds au niveau des degrés de liberté translationnels (w) et donc l'inertie de rotation est complètement ignorée, la matrice se présente comme suit:

$$m_{ii} = \frac{1}{n} \int_{S^e} \rho dS^e \quad (4-35)$$

où n est le nombre de noeuds et i correspond aux translations. Tous les autres éléments de la matrice masse sont nuls. La matrice masse concentrée est diagonale.

6.2.3 MATRICE MASSE CONCENTREE A COEFFICIENTS INEGAUX

Ce modèle permet d'obtenir une matrice diagonale, l'idée de cette formulation, comme nous l'avons dit précédemment est de n'utiliser que les termes diagonaux de la matrice masse cohérente mais de les multiplier de telle façon que la masse totale de l'élément soit préservée. La matrice se présente comme suit:

$$m_{ii} = \frac{\left(\int_{V^e} \rho H_i H_i dV^e \right) \left(\int_{V^e} \rho dV^e \right)}{\int_{V^e} \left(\sum_{i=1}^n \rho H_i H_i \right) dV^e} \quad (4-36)$$

$\left(\int_{V^e} \rho H_i H_i dV^e \right)$: élément diagonal de la matrice masse cohérente

$\left(\int_{V^e} \rho dV^e \right)$: masse totale de l'élément

$\int_{V^e} \left(\sum_{i=1}^n \rho H_i H_i \right) dV^e$: somme des éléments diagonaux de la matrice masse cohérente

Tous les autres éléments de la matrice masse sont nuls. Cette matrice est une matrice diagonale, elle peut être vue comme une forme mixte des deux modèles précédents.

Remarque :

Ce modèle de masse ne peut être utilisé qu'en formulation isoparamétrique car on ne dispose pas des fonctions d'interpolation H_i dans la formulation en fonction des coordonnées généralisées.

6.3 VIBRATIONS LIBRES DES STRUCTURES

La procédure mathématique formelle, établie dans le chapitre trois de cette présente étude, nous a menés à une équation aux dérivées partielles régissant le mouvement de vibrations libres d'un système continu (poutre, plaque . . .)

La solution analytique d'une telle équation n'existe que pour des cas de formes simples et de conditions aux limites régulières.

Si on adopte une idéalisation du type éléments finis, les déplacements sont exprimés en fonction des déplacements nodaux à l'aide de fonctions d'interpolations et notre problème change d'aspect:

Il était continu et donc la solution s'obtenait au moyen d'équations aux dérivées partielles, il devient discret et la solution s'obtient maintenant au moyen d'un système propre, en effet, en absence des forces extérieures et de l'amortissement, l'équation de mouvement est:

$$K\hat{u} + M\ddot{u} = 0 \quad (4-37)$$

où K et M sont, respectivement, les matrices globales de rigidité et de masse obtenues en assemblant, respectivement, les matrices élémentaires de rigidité et de masse.

Chaque degré de liberté de la structure suit un mouvement harmonique en phase avec les autres degré de liberté de la structure. Ainsi:

$$\hat{u} = \phi \sin \omega t \quad \ddot{u} = -\omega^2 \phi \sin \omega t \quad (4-38)$$

où ϕ représente les amplitudes des degré de liberté nodaux et ω est la pulsation, la fréquence elle, est $f = \omega / 2\pi$.

En combinant les équations (4-37) et (4-38), on obtient:

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (4-39)$$

Cette équation interprète mathématiquement un mouvement de vibrations libres d'une structure. Elle est dite *système propre*.

La résolution du système propre ci-dessus permet d'obtenir n couples (ω^2, ϕ) caractérisant chacun un mode propre de vibrations, n étant l'ordre des matrices K et M (c'est à dire le nombre total de degrés de liberté). Le mode pour lequel ω^2 prend la plus petite valeur est dit mode fondamental. Nous reviendrons avec plus de détails sur les procédures de résolution permettant d'obtenir les valeurs et vecteurs propres.

7 CONVERGENCE

En se basant sur ce qui précède, on peut donc dire qu'en général une analyse en éléments finis nécessite l'idéalisation du problème physique en un modèle mécanique. Le tableau ci-dessous résume et explique parfaitement ce concept.

<u>Problème physique réel</u>	
Géométrie, Matériau, Chargement, C.A.L.	
<u>Idéalisation</u> (modèle mécanique)	
Aspect cinématique	plaques de Kirchhoff, de Mindlin, barres, treillis
Matériau	isotrope, élastique, élastoplastique...
Chargement	concentré, réparti...
Conditions aux limites	Déplacements
<u>Solution éléments finis</u>	
Choix des éléments et procédures de résolution	

Tableau 4-1

Si l'on compare la solution éléments finis à la solution exacte, on voit qu'il y a toujours une différence qui, si petite soit elle existera toujours. C'est donc que la solution éléments finis est une solution approximative et étudier la convergence de ce type de solution revient donc à détecter ces sources. En dehors des erreurs d'arrondis qui sont dépendent de la précision de l'ordinateur utilisé et que l'on ne peut donc pas imputer à la méthode elle même, les erreurs sont essentiellement celles présentées dans le tableau (4-2). Les erreurs les plus importantes étant les erreurs dues à la finesse de la discrétisation, on ne parlera dans ce qui suit que de celles-ci.

Source de l'erreur	Manifestation de l'erreur
discrétisation	Utilisation des fonctions d'interpolation pour les différents éléments
Intégration numérique dans l'espace	Evaluation des matrices élémentaires en usant de l'intégration numérique
Solution des équations d'équilibre dynamique	Méthodes d'intégration directe, superposition modale
solution itérative	Gauss-Seidel, Jacobi, ...

Tableau 4-2

7.1 CONVERGENCE MONOTONE

Pour que la solution converge de façon monotone, il faut que les éléments soient complets et compatibles. Si ces deux conditions sont remplies, la précision de la solution augmentera avec le nombre d'éléments et donc, on pourra dire que la solution converge vers la solution exacte.

La condition de complétude d'un élément est que les fonctions de déplacement de l'élément puissent représenter les déplacements de corps rigide et les états de déformation constantes.

La condition de compatibilité elle, veut dire que les déplacements au sein des éléments et aux frontières de ceux-ci (aux frontières interéléments donc), doivent être continus. Si les dérivées sont également des déplacements (ce qui est le cas par exemple pour les plaques de Kirchhoff (w , $\theta_x = \partial w / \partial x$, $\theta_y = \partial w / \partial y$, $\theta_{xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$), alors cette condition devient équivalente à la condition de continuité C^1 qui s'énonce comme suit: Si les déplacements et leurs dérivées sont continues au sein des éléments et aux frontières, alors les éléments sont dits de continuité C^1 (cette condition de convergence s'explique par le fait que les fonctions de déplacement doivent être continues au moins jusqu'à l'ordre $m-1$ où m est l'ordre de dérivation le plus haut de la fonction d'énergie Π).

Cette condition de compatibilité peut s'expliquer physiquement par le fait qu'aucun vide n'apparaît entre les éléments lorsque l'assemblage est chargé (la continuité de w et de ses dérivées assure la continuité des déplacements à travers l'épaisseur de l'élément).

7.2 CONVERGENCE NON MONOTONE

En pratique, on voit souvent que de bons résultats par la méthode des éléments finis sont obtenus et ce, bien que certaines conditions de continuité aient été violées. Dans certains de ces cas, la condition de continuité interéléments n'était pas préservée et dans d'autres, les éléments utilisés contenaient certaines incompatibilités interéléments, le résultat final, cependant, est le même dans les deux cas, autrement dit, les déplacements ou leurs dérivées entre éléments ne sont pas vérifiés jusqu'à l'ordre nécessaire pour que toutes les conditions de compatibilité soient satisfaites, les éléments sont alors dits *incompatibles*.

Si les éléments utilisés sont incompatibles (non conformes), alors l'énergie potentielle n'est pas nécessairement minimum (chose que nous recherchons) et donc la convergence monotone n'est plus assurée, on a cependant besoin d'établir la convergence (même si elle n'est pas monotone) et les conditions pour cela sont que la complétude soit toujours assurée et que les éléments passent avec succès le Patch-test.

7.3 PATCH TEST

Pour qu'un élément quelconque puisse être soumis au patch-test, il faut qu'il contienne au moins un noeud à l'intérieur de ses frontières. On charge les noeuds des frontières et on applique à l'élément le nombre d'appuis nécessaires pour éviter tout mouvement de corps rigide. On détermine les solutions analytique et numérique, si les deux solutions sont sensiblement égales alors le test est vérifié et la convergence de la solution pour un problème utilisant ce type d'éléments sera assurée.

CHAPITRE V

FORMULATION ISOPARAMETRIQUE

DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1 INTRODUCTION

Il est souvent très intéressant de simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe et lorsque la géométrie des frontières d'un élément est complexe, délicate, la notion d'élément isoparamétrique prend toute sa valeur.

Un élément isoparamétrique est une modification d'un élément réel et peut être obtenu par une transformation géométrique; il devient alors simple et repéré dans un espace isoparamétrique (r,s) .

On peut dire d'un élément qu'il est isoparamétrique lorsque les fonctions géométriques sont identiques aux fonctions d'interpolation c'est à dire lorsque les noeuds géométriques se confondent avec les noeuds d'interpolation.

Construire un élément isoparamétrique revient en fait à définir une application d'un élément adimensionnel comportant un certain nombre de noeuds défini dans un repère curviligne (r,s) sur l'élément réel comportant le même nombre de noeuds, cette représentation isoparamétrique a un grand intérêt pratique car elle permet de simplifier le calcul et sachant que l'une des étapes les plus importantes dans le calcul des éléments finis est le calcul des matrices élémentaires, nous proposons donc de présenter dans ce paragraphe la formulation isoparamétrique des éléments finis.

Lorsque l'on utilise les coordonnées généralisées, des modèles d'éléments finis, on travaille en coordonnées locales (x,y,z) et on suppose que les déplacements des éléments $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ et $w(x,y,z)$ sont de forme polynomiale en x , y et z avec des coefficients constants α_i , β_i et γ_i , $i=1,2,\dots$ identifiés comme des coordonnées généralisées et qui en fait sont des combinaisons linéaires des déplacements nodaux.

L'idée principale de la formulation isoparamétrique est d'établir une relation entre les déplacements en tout point de l'élément et les déplacements nodaux directement à partir des fonctions d'interpolation également appelées fonctions de forme. Ce qui revient à dire que la matrice de transformation A^{-1} n'est pas nécessaire et n'est donc pas calculée. Ainsi les matrices élémentaires sont obtenues directement.

2 ELEMENTS RECTANGULAIRES

La procédure de base de la formulation isoparamétrique en éléments finis est d'exprimer les coordonnées et les déplacements des éléments sous forme d'interpolation en utilisant les coordonnées naturelles de l'élément. Ce système de coordonnées peut être uni, bi ou tridimensionnel dépendant de l'espace de l'élément, la formulation des matrices élémentaires est la même selon que l'élément utilisé soit uni-, bi- ou tri-dimensionnel. On peut donc utiliser les équations relatives à un élément tridimensionnel et ne considérer, pour les cas uni ou bidimensionnels, que les coordonnées nécessaires et les fonctions d'interpolation appropriées.

Considérant un élément tri-dimensionnel en général, les coordonnées interpolées sont:

$$x = \sum_{i=1}^q h_i x_i \quad (5-1a)$$

$$y = \sum_{i=1}^q h_i y_i \quad (5-1b)$$

$$z = \sum_{i=1}^q h_i z_i \quad (5-1c)$$

où x, y et z sont les coordonnées d'un point de l'élément et $x_i, y_i, z_i, i=1,2,\dots,q$, sont les coordonnées des q noeuds de l'élément. Les fonctions d'interpolation h_i sont définies dans le système de coordonnées naturelles de l'élément (r,s,t) chaque variable variant de -1 à 1 . Lorsque l'on travaille en bidimensionnel, seules les deux premières équations du système (5-1) sont utilisées et le repère local naturel devient (r,s) .

Les inconnues du système (5-1) sont les fonctions d'interpolation h_i mais elles ont une propriété fondamentale qui permet de les déterminer, cette propriété étant que toute fonction d'interpolation h_i a pour valeur 1 au noeud i et 0 ailleurs. Ainsi pour l'élément unidimensionnel à 3 noeuds, on a:

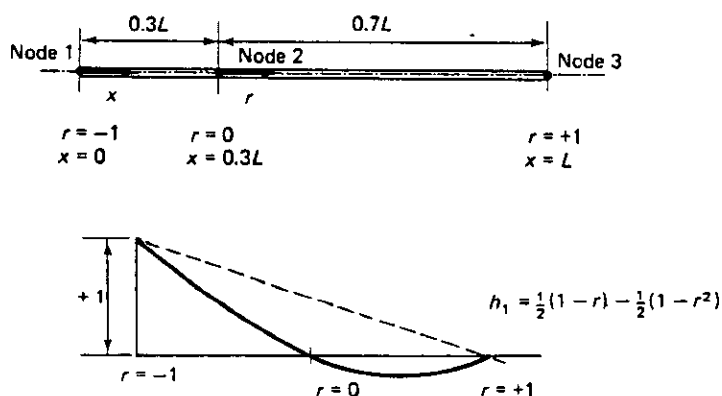


Figure 5-1 : Fonctions d'interpolation d'un élément unidimensionnel à 3 noeuds.

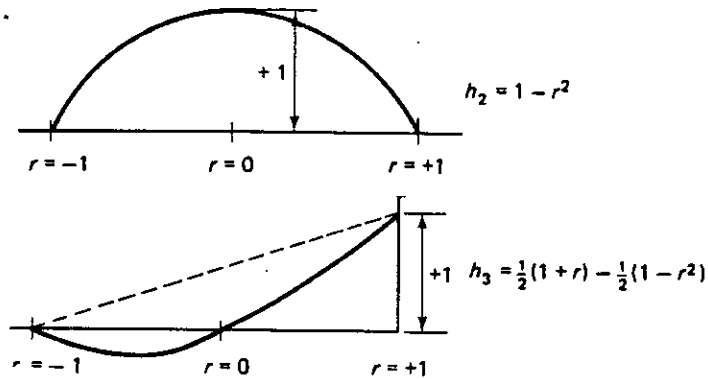


Figure 5-1 : (suite)

La procédure utilisée dans l'exemple précédent montre immédiatement l'intérêt de la formulation d'un élément à plusieurs noeuds. On construit d'abord l'interpolation pour un élément à 2 noeuds, puis on ajoute des noeuds intermédiaires ce qui conduit à une modification de la fonction d'interpolation, cette modification étant en fait une correction de la fonction déjà existante.

Cette méthode de construction des fonctions d'interpolation d'éléments unidimensionnels peut être généralisée très facilement aux cas bi et tridimensionnels et ce en ne modifiant que les fonctions d'interpolation de la manière décrite précédemment.

Suivent ci-dessous les fonctions d'interpolation d'un élément bidimensionnel avec un nombre de noeuds variant de 4 à 9.

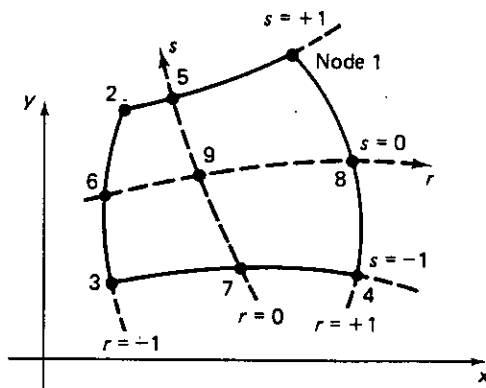


Figure 5-2 : Élément bidimensionnel à 4,5,...,9 noeuds.

		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
$h_1 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_2 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$			$-\frac{1}{2}h_9$
$h_3 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$		$-\frac{1}{2}h_9$
$h_4 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_5 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_6 =$	$\frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_7 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_8 =$	$\frac{1}{2}(1+r)(1-s^2)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_9 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s^2)$	$-\frac{1}{2}h_9$

Tableau 5-1 : Fonctions d'interpolation d'un élément bidimensionnel.

Il est à noter que pour avoir une meilleure précision, il est conseillé d'avoir des éléments aussi proches de la forme rectangulaire que possible.

Remarque : Cette formulation a deux grands avantages :

- 1- Les éléments peuvent avoir des frontières courbes.
- 2- Les fonctions de déplacement élémentaires sont très faciles à construire.

En formulation isoparamétrique, les déplacements élémentaires sont interpolés de la même manière que les coordonnées (géométrie) c'est à dire que :

$$u = \sum_i h_i u_i \quad (5-2a)$$

$$v = \sum_i h_i v_i \quad (5-2b)$$

$$w = \sum_i h_i w_i \quad (5-2c)$$

où u , v et w sont les déplacements à n'importe quel point de l'élément et u_i , v_i et w_i sont les déplacements au noeud i .

Pour pouvoir évaluer la matrice de rigidité d'un élément, on a besoin de calculer la matrice de transformation déformation-déplacement, or, les déformations sont, comme on l'a dit précédemment, des dérivations des déplacements par rapport aux coordonnées locales, comme les déplacements sont définis maintenant dans le système de coordonnées naturelles, on doit trouver les relations dérivées partielles liant le repère (x,y) au repère naturel (r,s) . Ces relations sont :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (5-3a)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \quad (5-3b)$$

Ainsi apparait la matrice de transformation coordonnées locales-coordonnées naturelles qui est appelée opérateur *Jacobien* et qui s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

La matrice de rigidité dans la repère naturel devient donc :

$$[K]_e = \int_{V^e} B^T D B \det J dr ds \quad (5-5)$$

3 INTEGRATION NUMERIQUE

Un aspect important de l'analyse éléments finis en formulation isoparamétrique est l'intégration numérique nécessaire. Les intégrales matricielles utilisées dans les calculs en formulation isoparamétrique sont de la forme :

$$\int_{-1}^1 F(r)dr; \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s)drds; \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s,t)drdsdt$$

Dans les cas uni, bi et tridimensionnels respectivement. Il a été établi que ces intégrales sont, en pratique, évaluées numériquement en opérant comme suit:

$$\int F(r)dr = \sum_i \alpha_i F(r_i) + R_n \quad (5-6a)$$

$$\int F(r,s)drds = \sum_{i,j} \alpha_{ij} F(r_i, s_j) + R_n \quad (5-6b)$$

$$\int F(r,s,t)drdsdt = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} F(r_i, s_j, t_k) + R_n \quad (5-6c)$$

où α_i , α_{ij} et α_{ijk} sont les (facteurs de chargement) et $F(r_i)$, $F(r_i, s_j)$ et $F(r_i, s_j, t_k)$ sont les matrices $F(r)$, $F(r,s)$ et $F(r,s,t)$ évaluées aux points désignés par les indices i , j et k . Les matrices R_n sont les matrices d'erreurs qui sont généralement ignorées. Les équations (5-6) deviennent :

$$\int F(r)dr = \sum_i \alpha_i F(r_i) \quad (5-7a)$$

$$\int F(r,s)drds = \sum_{i,j} \alpha_{ij} F(r_i, s_j) \quad (5-7b)$$

$$\int F(r,s,t)drdsdt = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} F(r_i, s_j, t_k) \quad (5-7c)$$

Un point important à souligner est la précision d'intégration nécessaire, c'est à dire le nombre de points d'intégration nécessaires.

Comme nous l'avons dit plus haut, la méthode des éléments finis nécessite des intégrations de matrices, ce qui veut dire que chaque élément de chaque matrice est intégré individuellement. Nous pouvons donc, à partir de là, ne considérer pour notre démonstration qu'un seul élément de ces matrices que nous noterons f .

Soit un cas uni-dimensionnel, l'intégration isoparamétrique de $f(x)$ est :

$$\int_{-1}^1 f(r) dr$$

L'intégration numérique de $\int_{-1}^1 f(r) dr$ est essentiellement basée sur un polynôme ψ dont les valeurs aux points donnés sont celles de $f(r)$ et $\int_a^b \psi(r) dr$ est prise comme une approximation de $\int_a^b f(r) dr$. La position des points d'intégration sur l'intervalle $[a, b]$ détermine la précision de l'intégration numérique et l'erreur de celle-ci.

3.1 FORMULATION DE GAUSS

Une des méthodes numériques d'intégration les plus importantes est la méthode des *quadratures de Gauss* qui optimise les points d'intégration et les poids.

La supposition de base de l'intégration de Gauss est que :

$$\int_a^b f(r) dr = \sum_i \alpha_i f(r_i) \quad (5-8)$$

où les α_i et les $F(r_i)$ sont des variables. On doit donc calculer les positions et les charges des points d'intégration, on a donc $2n$ inconnues à déterminer.

Soit un polynôme d'interpolation $\psi(r)$ tel que :

$$\psi(r) = \sum_j^n f_j l_j(r) \quad (5-9)$$

Considérant n points d'intégration r_1, \dots, r_n inconnus, pour les déterminer, on définit une fonction

$$P(r) = (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n) \quad (5-10)$$

qui est un polynôme d'ordre n , on remarque que ce polynôme est nul en tout point d'intégration. On peut donc écrire :

$$f(r) = \psi(r) + P(r)(\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 \dots) \quad (5-11)$$

et l'intégration de $F(r)$ donne :

$$\int_a^b f(r) dr = \sum_I^n f_I \left[\int_a^b l_I(r) dr \right] + \sum_0^\infty \beta_j \left[\int_a^b r^j P(r) dr \right] \quad (5-12)$$

Les inconnues r_j , $j=1,n$ peuvent être déterminées à partir de la condition :

$$\int_a^b P(r)r^k dr = 0, \quad k=0,1,\dots,(n-1) \quad (5-13)$$

Donc, puisque le polynôme passe par les points d'intégrations de $f(r)$ et que $P(r)$ s'annule en chacun de ces points, alors les conditions (5-13) veulent dire que l'intégrale $\int_a^b f(r)dr$ est approchée en intégrant un polynôme d'ordre $(2n-1)$. Les poids α_i eux sont déterminés par

$$\alpha_j = \int_{-1}^1 l_j(r)dr, \quad j=1,n \quad (5-14)$$

où $l_j(r)$ est un polynôme s'écrivant comme suit :

$$l_j(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)\dots(r-r_{j-1})(r-r_{j+1})\dots(r-r_n)}{(r_j-r_0)(r_j-r_1)\dots(r_j-r_{j-1})(r_j-r_{j+1})\dots(r_j-r_n)} \quad (5-15)$$

Les valeurs des α_i et r_i pour l'intervalle $[-1,1]$ et pour n variant de 1 à 6 sont publiées dans les références 1 et 2.

3.2 CAS BI ET TRIDIMENSIONNELS

Pour un cas bidimensionnel, on peut appliquer la formulation unidimensionnelle dans chaque direction et ainsi :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s)drds = \sum_i \alpha_i \int_{-1}^1 f(r_i,s)ds = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j f(r_i,s_j) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} f(\bar{\sigma}_i, \bar{\delta}_j)$$

où :

$$\alpha_{ij} = \alpha_i \alpha_j$$

De la même façon pour un cas tridimensionnel :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s,t)drdsdt = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} f(r_i,s_j,t_k) \quad (5-17)$$

où :

$$\alpha_{ijk} = \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

CHAPITRE VI
METHODES DE RESOLUTION
DES SYSTEMES PROPRES

1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents nous avons rencontré des problèmes de valeurs propres. Le but de ce présent chapitre est de décrire quelques unes des procédures actuelles de résolution de ces problèmes.

Résoudre un problème de valeurs propres consiste à trouver des couples (λ_i, ϕ_i) qui satisfont la relation:

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (6-1)$$

L'équation (6-1) interprète mathématiquement un problème de vibration d'une structure et dans ce cas K et M sont les matrices de rigidité et de masse respectivement, les valeurs propres λ_i sont les carrés des pulsations propres et les vecteurs propres ϕ_i sont les vecteurs des déplacements de la structure définissant les modes propres de la structure.

L'autre forme, dite simplifiée, sous laquelle peut se présenter le problème est:

$$K\phi = \lambda\phi \quad (6-2)$$

2 PROPRIETES FONDAMENTALES DES SYSTEMES PROPRES

Avant d'entamer la résolution proprement dite des systèmes propres il est nécessaire, en premier lieu, d'assimiler les propriétés des matrices ainsi que celles des valeurs propres et des vecteurs propres car toutes les méthodes de résolution sont essentiellement basées sur ces propriétés.

2.1 VALEURS PROPRES

La résolution de l'équation (6-1) donne n valeurs propres λ_i auxquelles correspondent n vecteurs propres ϕ_i . Chaque couple (λ_i, ϕ_i) satisfait l'équation (6-1), c'est à dire:

$$K\phi_i = \lambda_i M\phi_i \quad (6-3)$$

Récrivons l'équation (6-1) sous la forme suivante:

$$[K - \lambda M]\phi = 0 \quad (6-4)$$

Il n'existe des vecteurs ϕ non nuls satisfaisant l'équation (4) que si $[K - \lambda M]$ est singulière:

$$\text{Det}[K - \lambda M] = P(\lambda) = 0 \quad (6-5)$$

Cette expression est un polynôme caractéristique d'ordre n en λ qu'il est difficile de construire explicitement pour de grands systèmes. La recherche des valeurs propres λ_i est donc identique à la recherche des racines d'un polynôme d'ordre n . Il n'existe pas de méthode directe pour $n > 4$. Il faut donc utiliser des méthodes itératives.

2.2 VECTEURS PROPRES

Revenons à l'équation (6-1), celle-ci dit que si on établit le vecteur $\lambda M\phi_i$ et on l'applique comme vecteur force dans $KU = R$, alors $U = \phi_i$. Cette idée peut immédiatement nous suggérer l'utilisation des algorithmes de résolution de problèmes statiques pour le calcul des vecteurs propres.

L'équation (6-3), vu la singularité de $[K - \lambda M]$, montre que les vecteurs propres ne sont connus qu'à une constante multiplicative près. On dit qu'un vecteur propre n'est défini que par sa direction dans l'espace considéré. Cependant, les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\phi_i^T K \phi_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (6-6a)$$

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad (6-6b)$$

ou sous forme matricielle:

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (6-7a)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (6-7b)$$

où Φ dite *matrice modale*, est une matrice qui stocke les vecteurs propres par colonne.

Λ est une matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres.

2.3 QUOTIENT DE RAYLEIGH

Le quotient de Rayleigh d'un vecteur quelconque ϕ est défini comme suit:

$$\rho(\phi) = \frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi} \quad (6-8)$$

Si la matrice M est définie positive alors $\rho(\phi)$ a des valeurs finies telles que:

$$0 < \lambda_1 \leq \rho(\phi) \leq \lambda_n < \infty \quad (6-9)$$

Lorsque ϕ coïncide avec un des vecteurs propres ϕ_i , $\rho(\phi)$ coïncide avec la valeur propre correspondante λ_i .

2.4 DECALAGE DES VALEURS PROPRES

Une des techniques les plus utilisées dans la résolution des problèmes de valeurs propres est le *décalage* ou *shifting*. Cette technique améliore la vitesse de convergence en transformant la matrice K en:

$$\tilde{K} = K - \rho M \quad (6-10)$$

où ρ est la valeur du décalage.

De ce fait on obtient l'équation:

$$\tilde{K} \psi = \mu M \psi \quad (6-11)$$

Dans le but de relier μ à λ et ψ à ϕ substituons (6-10) dans (6-11):

$$K \psi = (\mu + \rho) M \psi \quad (6-12)$$

Comme les solutions du problème de l'équation (1) sont uniques on a alors:

$$\phi = \psi \quad (6-13)$$

et

$$\lambda = \mu + \rho \quad (6-14)$$

3 TECHNIQUE D'APPROXIMATION : L'ANALYSE DE RAYLEIGH-RITZ

La technique la plus utilisée pour approcher les plus petites valeurs propres et les vecteurs propres du problème $K\phi = \lambda M\phi$ est l'analyse de Rayleigh-Ritz.

On suppose que les matrices K et M sont toutes les deux définies positives, ce qui nous assure que les valeurs propres sont finies et positives.

On considère le principe de minimisation du quotient de Rayleigh-Ritz qui stipule que:

$$\lambda_1 = \min \rho(\phi) \quad (6-15)$$

où le minimum est pris parmi tous les vecteurs possibles ϕ et $\rho(\phi)$ est le quotient de Rayleigh:

$$\rho(\phi) = \frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi} \quad (6-16)$$

$\rho(\phi)$ a des valeurs finies car M est définie positive et est tel que:

$$0 < \lambda_1 \leq \rho(\phi) \leq \lambda_n < \infty \quad (6-17)$$

Dans l'analyse de Rayleigh-Ritz, on considère un ensemble de vecteurs $\bar{\phi}$ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs de Ritz ψ_i $i=1, \dots, q$ c'est à dire:

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i \quad (6-18)$$

où x_i sont les coordonnées de Ritz

$\bar{\phi}$ n'est pas un vecteur arbitraire mais il appartient au sous-espace engendré par les vecteurs de Ritz qui doivent être linéairement indépendants.

Le but de l'analyse de Rayleigh-Ritz est de déterminer les vecteurs spécifiques qui, en plus de leur appartenance au sous-espace de Ritz, approchent les vecteurs recherchés de la meilleure manière. Dans ce but on évoque le principe de minimisation du quotient de Rayleigh qui détermine dans quel sens la solution donne une bonne approche des vecteurs propres recherchés.

Le quotient de Rayleigh du vecteur $\bar{\phi}$ est:

$$\rho(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{k}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{m}_{ij}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad (6-19)$$

$$\tilde{k}_{ij} = \psi_i^T K \psi_j \quad (6-20)$$

$$\tilde{m}_{ij} = \psi_i^T M \psi_j \quad (6-21)$$

La condition de minimisation de $\rho(\bar{\phi})$ s'écrit:

$$\frac{\partial \rho(\bar{\phi})}{\partial x_i} = \frac{2\tilde{m} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{k}_{ij} - 2\tilde{k} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{m}_{ij}}{\tilde{m}^2} \quad (6-22)$$

En substituant $\rho = \tilde{k} / \tilde{m}$, cette condition s'écrit:

$$\sum_{j=1}^q (\tilde{k}_{ij} - \rho \tilde{m}_{ij}) x_j = 0; \quad i = 1, \dots, q \quad (6-23)$$

ou sous forme matricielle:

$$\tilde{K} X = \rho \tilde{M} X \quad (6-24)$$

où \tilde{K} et \tilde{M} sont toutes les deux d'ordre $q \times q$ dont les éléments sont définis en (6-20) et (6-21) respectivement

La résolution de l'équation donne q valeurs propres ρ_1, \dots, ρ_q qui sont des approximations aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ et q vecteurs propre:

$$x_1^T = [x_1^1 \quad x_2^1 \quad \dots \quad x_q^1] \quad (6-25)$$

$$x_q^T = [x_1^q \quad x_2^q \quad \dots \quad x_q^q]$$

Les vecteurs propres x_i sont utilisés pour calculer les vecteurs propres $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_q$ qui approchent les vecteurs propres ϕ_1, \dots, ϕ_i :

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i \quad (6-26)$$

La caractéristique importante des valeurs propres calculées ρ_1, \dots, ρ_q est qu'elles constituent des approximations aux bornes supérieures de celles que l'on recherche:

$$\lambda_1 \leq \rho_1; \lambda_2 \leq \rho_2; \quad \lambda_q \leq \rho_q \leq \lambda_n \quad (6-27)$$

Pour calculer ρ_1 on a recherché le minimum de $\rho(\bar{\phi})$ que l'on peut atteindre en combinant linéairement tous les vecteurs de Ritz possibles. Pour calculer ρ_2 on opère de la même façon c'est à dire $\rho_2 = \min \rho(\bar{\phi})$ avec en plus la condition d'orthogonalité: $\bar{\phi}^T M \bar{\phi}_1 = 0$. D'une façon similaire pour obtenir ρ_i et $\bar{\phi}_i$ on minimise $\rho(\bar{\phi})$ avec les conditions d'orthogonalité $\bar{\phi}^T M \bar{\phi}_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, q$.

On applique maintenant la procédure que l'on vient de décrire à l'analyse d'un problème de dynamique. Les vecteurs de Ritz peuvent être calculés à partir de la solution du problème statique: $K \psi = R$ où ψ est une matrice $n \times q$ qui stocke les q vecteurs de Ritz:

$$\Psi = [\psi_1 \quad \dots \quad \psi_q]$$

L'analyse se poursuit en projetant les matrices K et M sur le

sous-espace de Ritz; c'est à dire que l'on calcule:

$$\tilde{K} = \psi^T K \psi \quad (6-28)$$

$$\tilde{M} = \psi^T M \psi \quad (6-29)$$

On résout après le système propre:

$$\tilde{K} X = \tilde{M} X P \quad (6-30)$$

où P est une matrice diagonale stockant les ρ_i et X est une matrice contenant les M-orthogonaux vecteurs x_i $i=1,2,\dots,q$. Le calcul des approximations des vecteurs propres de $K\phi = \lambda M\phi$ se fait selon:

$$\bar{\phi} = \psi X \quad (6-31)$$

4 METHODES DE RESOLUTION

Avant d'entamer la présentation de quelques méthodes de résolution il est important de rappeler que toutes les méthodes sont de nature itérative, car, résoudre un problème de valeurs propres revient à calculer les racines d'un polynôme $P(\lambda)$ du même ordre que les matrice K et M.

L'expérience montre qu'il n'existe pas d'algorithmes qui donnent toujours une bonne solution au problème considéré. En effet un algorithme peut s'avérer performant pour un problème et tout à fait inadéquat pour un autre.

Dans ce présent chapitre nous détaillerons quelques procédures de résolution qui peuvent être subdivisées en deux catégories selon les propriétés sur lesquelles est basé l'algorithme de résolution.

1^{ère} Catégorie: Comprend les méthodes qui opèrent sur les vecteurs propres la propriété de base est:

$$K\phi_i = \lambda_i M\phi_i \quad (6-32)$$

2^{ème} Catégorie: Comprend les méthodes de transformation. Ces méthodes opèrent directement sur les matrices. Leurs propriétés de base sont:

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (6-33)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (6-34)$$

où Φ est une matrice contenant les vecteurs propres et Λ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_i .

4.1 METHODES D'ITERATIONS VECTORIELLES

4.1.1 L'ITERATION INVERSE

La technique de l'itération inverse est très utilisée pour calculer la plus petite valeur propre λ_1 et, en même temps, le vecteur propre qui lui correspond.

En premier lieu nous considérons les équations de base utilisées par la méthode de l'itération inverse nous donnerons, par la suite, un algorithme plus performant.

On suppose un vecteur initial x_1 et on évalue à chaque itération k . $k=1,2,\dots$

$$K\bar{x}_{k+1} = Mx_k \quad (6-35)$$

$$x_{k+1} = \frac{\bar{x}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^T M \bar{x}_{k+1})^{1/2}} \quad (6-36)$$

et en supposant que x_1 n'est pas M-orthogonal à ϕ_1 on doit avoir:

$$x_{k+1} \rightarrow \phi_1 \text{ et } k \rightarrow \infty$$

L'étape essentielle de l'itération inverse est la résolution de l'équation (6-35) dans laquelle on évalue un vecteur \bar{x}_{k+1} qui a une direction plus proche de celle du vecteur de l'itération précédente x_k . L'opération de l'équation (6-36) assure la M-normalité de x_{k+1} c'est à dire:

$$x_{k+1}^T M x_{k+1} = 1 \quad (6-37)$$

Les équations (6-35) et (6-36) énoncent l'algorithme fondamental de l'itération inverse. Cependant, il est plus commode d'opérer comme suit:

$$K\bar{x}_{k+1} = y_k \quad (6-38)$$

$$\bar{y}_{k+1} = M\bar{x}_{k+1} \quad (6-39)$$

$$\rho(\bar{x}_{k+1}) = \frac{\bar{x}_{k+1}^T y_k}{\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1}} \quad (6-40)$$

$$y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1})^{1/2}} \quad (6-41)$$

et avec la condition: $y_1^T \phi_1 \neq 0$:

$$y_{k+1} \rightarrow M\phi_1 \text{ et } \rho(\bar{x}_{k+1}) \rightarrow \lambda_1 \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

Il est à noter qu'en utilisant cet algorithme on obtient une approximation de la valeur propre λ_1 donnée par le quotient de Rayleigh et c'est avec cette approximation que l'on mesure la convergence. Celle-ci est atteinte lorsque:

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq tol \quad (6-42)$$

où $tol = 10^{-2s}$ si la valeur propre λ_1 est recherchée avec une précision de $2s$ chiffres.

Enfin si l est la dernière itération:

$$\lambda_1 = \rho(\bar{x}_{l-1}) \quad (6-43)$$

$$\phi_1 = \frac{\bar{x}_{l-1}}{(\bar{x}_{l-1}^T \bar{y}_{l-1})^{1/2}} \quad (6-44)$$

4.1.2 L'ITERATION DIRECTE

La méthode de l'itération directe est complémentaire à celle de l'itération inverse du fait que cette méthode est utilisée pour calculer la plus grande valeur propre λ_n et le vecteur propre qui lui correspond ϕ_n .

L'algorithme de l'itération directe est analogue à celui de l'itération inverse sauf que c'est la matrice M , supposée définie positive, que l'on triangularise plutôt que la matrice K .

Dans la méthode de l'itération directe on choisit un vecteur initial x_1 non M -orthogonal à ϕ_n , on calcule $y_1 = Kx_1$ et on évalue pour $k=1,2,\dots$

$$M\bar{x}_{k+1} = y_k \quad (6-45)$$

$$\bar{y}_{k+1} = K\bar{x}_{k+1} \quad (6-46)$$

$$\rho(\bar{x}_{k+1}) = \frac{\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1}}{\bar{x}_{k+1}^T y_k} \quad (6-47)$$

$$y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^T y_k)^{1/2}} \quad (6-48)$$

avec:

$$y_{k+1} \rightarrow M\phi_n \text{ et } \rho(\bar{x}_{k+1}) \rightarrow \lambda_n \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

La convergence est mesurée de la même manière que dans l'itération inverse et avec l la dernière itération on a :

$$\lambda_n = \rho(\bar{x}_{l-1}) \quad (6-49)$$

$$\phi_n = \frac{\bar{x}_{l-1}}{(\bar{x}_{l-1}^T y_l)^{1/2}} \quad (6-50)$$

4.1.3 RECHERCHE D'UNE VALEUR PROPRE INTERMEDIAIRE

Dans les sections précédentes on a exposé deux méthodes de résolution :

- L'itération inverse pour calculer le couple (λ_1, ϕ_1) .
- L'itération directe pour calculer le couple (λ_n, ϕ_n) .

A ces deux techniques on peut associer la technique de décalage pour calculer un (λ_p, ϕ_p) intermédiaire. Néanmoins avec cette technique il est parfois difficile de prévoir vers lequel des couples (λ_i, ϕ_i) nous conduira un décalage donné, c'est pour cette raison qu'une technique d'orthogonalisation lui est suppléée.

Dans un cas général, supposons que m vecteurs propres sont connus et que l'on s'intéresse au calcul de ϕ_{m+1} . Pour cela on considère un vecteur \tilde{x}_1 qui soit M-orthogonal aux vecteurs propres $\phi_i, i=1,2,\dots,m$

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i \quad (6-51)$$

où les α_i sont obtenus en utilisant les relations $\phi_i^T M \tilde{x}_1 = 0, i=1,2,\dots,m$ et $\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij}$

En multipliant par $\phi_i^T M$ on obtient :

$$\alpha_i = \phi_i^T M x_1, i=1,2,\dots,m \quad (6-52)$$

L'itération inverse est alors exécutée en prenant \tilde{x}_1 comme vecteur initial à la place de x_1 et en supposant que $\tilde{x}_1^T \phi_{m+1} \neq 0$ l'algorithme converge vers le couple $(\lambda_{m+1}, \phi_{m+1})$.

On remarquons enfin, que cette technique d'orthogonalisation exige une grande précision numérique dans le calcul λ_i et ϕ_i .

4.1.4 CONVERGENCE

L'équation fondamentale de l'itération inverse en ne tenant pas compte de la normalisation est :

$$K x_{k+1} = M x_k \quad (6-53)$$

Pour établir la convergence du processus, il est plus commode d'effectuer un changement de base en écrivant l'équation (6-53) dans la base formée par les vecteurs propres. En conséquence, on peut écrire pour un vecteur x_k .

$$x_k = \Phi z_k \quad (6-54)$$

où Φ est la matrice modale $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_n]$

En substituant (6-54) dans (6-53) on obtient:

$$K \Phi z_{k+1} = M \Phi z_k \quad (6-55)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (6-55) à gauche par Φ^T et en utilisant les relations d'orthogonalité $\Phi^T K \Phi = \Lambda$ et $\Phi^T M \Phi = I$, on obtient:

$$\Lambda z_{k+1} = z_k \quad (6-56)$$

En comparant (6-53) et (6-56) on voit que les itérations sont de la même forme avec $K = \Lambda$ et $M = I$ sauf qu'il est plus facile de rechercher les propriétés de convergence du système de l'équation (6-56) puisque les valeurs propres sont les éléments diagonaux de la matrice Λ et les vecteurs propres sont des vecteurs unitaires e_i avec:

$$e_i^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (6-57)$$

\downarrow
i^{ème} composante

Dans la présentation de l'algorithme de l'itération inverse, il était supposé que le vecteur x_1 n'est pas M-orthogonal à ϕ_1 . De même z_1 ne doit pas être M-orthogonal à e_1 .

On suppose:

$$z_1^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \quad (6-58)$$

en utilisant (6-56):

$$z_{l+1}^T = \left[\left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^l \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^l \dots \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^l \right] \quad (6-59)$$

en multipliant z_{l+1} de (6-59) par $(\lambda_1)^l$

$$\bar{z}_{l+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^l \\ \vdots \\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^l \end{bmatrix} \quad (6-60)$$

On remarque que si λ_1 est la plus petite valeur propre alors :

$$\bar{z}_{l+1} \rightarrow e_1 \text{ quand } l \rightarrow \infty$$

Pour connaître l'ordre et la vitesse de la convergence on utilise la définition de celle-ci donnée dans [Réf. 1]. Pour notre cas, on obtient :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\|\bar{z}_{l+1} - e_1\|}{\|\bar{z}_l - e_1\|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (6-61)$$

De là on voit que la convergence se fait linéairement avec une vitesse égale à λ_1/λ_2 .

Cette vitesse de convergence est montrée dans le vecteur itératif \bar{z}_{l+1} de l'équation (6-60) comme étant sa plus grande composante qui doit s'annuler.

Dans l'algorithme des équations (6-38) à (6-41), on obtient aussi une approximation de la valeur propre λ_1 donnée par le quotient de Rayleigh :

$$\rho(z_{k+1}) = \frac{z_{k+1}^T z_k}{z_{k+1}^T z_{k+1}} \quad (6-62)$$

En considérant la dernière itération pour laquelle $k=l$:

$$\rho(z_{l+1}) = \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^n (\lambda_1/\lambda_i)^{2l-1}}{\sum_{i=1}^n (\lambda_1/\lambda_i)^{2l}} \quad (6-63)$$

et :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \rho(z_{l+1}) = \lambda_1 \quad (6-64)$$

La convergence est également linéaire mais avec une vitesse $(\lambda_1/\lambda_2)^2$ ce qui montre que si un vecteur propre est connu avec une erreur ϵ alors le quotient de Rayleigh donne une approximation de la valeur propre correspondante avec une erreur ϵ^2 .

En général la vitesse de convergence d'un vecteur propre est donnée par (λ_1/λ_m) tandis que celle de la valeur propre est $(\lambda_1/\lambda_m)^2$ avec λ_m la première valeur propre supérieure à λ_1 .

4.2 METHODE DE TRANSFORMATION : METHODE DE JACOBI

Comme il a été indiqué, les méthodes de cette catégorie utilisent la propriété de base des vecteurs propres rangés dans la matrice Φ :

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (6-65)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (6-66)$$

Puisque la matrice Φ d'ordre $n \times n$ qui diagonalise K et M selon les équations (6-65) et (6-66) est unique, on va donc la construire par itérations.

4.2.1 DESCRIPTION DE LA METHODE DE JACOBI

La méthode de Jacobi a été développée pour résoudre le problème standard $K\phi = \lambda\phi$ ($M=I$) néanmoins cette méthode s'applique au problème général $K\phi = \lambda M\phi$ ($M \neq I$).

La méthode de Jacobi consiste à transformer les matrices symétriques K et M en des matrices diagonales en utilisant une succession de pré- et post-multiplications par les matrices P_k^T et P_k respectivement, où $k=1,2,\dots$

Ainsi si $K_1 = K$ et $M_1 = M$ alors:

$$K_{k+1} = P_k^T K_k P_k \quad (6-67)$$

$$M_{k+1} = P_k^T M_k P_k \quad (6-68)$$

On doit donc avoir:

$$K_{k+1} \rightarrow \Lambda \text{ et } M_{k+1} \rightarrow I \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

En pratique, il n'est pas nécessaire que M_{k+1} converge vers I ni K_{k+1} vers Λ mais on a seulement besoin que ces deux matrices tendent vers une forme diagonale c'est à dire:

$$K_{k+1} \rightarrow \text{diag}(K_r) \text{ et } M_{k+1} \rightarrow \text{diag}(M_r) \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

et en désignant par l la dernière itération:

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{K_r^{(l+1)}}{M_r^{(l+1)}} \right) \quad (6-69)$$

et

$$\Phi = P_1 P_2 \dots P_l \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r}} \right) \quad (6-70)$$

Chaque matrice P_k est choisie de façon à annuler un terme (i, j) non diagonal et non nul des matrices K_k et M_k .

La matrice P_k a la forme suivante:

$$P_k = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \vdots & & \\ & & 1 & \\ & & & \vdots \\ & & \gamma & \\ & & & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{\scriptsize } i^{\text{ème}} \\ \text{\scriptsize } j^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \alpha & \text{---} & i^{\text{ème}} \\ & & \\ 1 & \text{---} & j^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ & & \\ & & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (6-71)$$

Les coefficients α et γ sont calculés en écrivant $K_{ii}^{(k+1)} = 0$ et $M_{ij}^{(k+1)} = 0$ d'où les équations suivantes:

$$\alpha k_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha \gamma) k_{ij}^{(k)} + \gamma k_{jj}^{(k)} = 0 \quad (6-72)$$

et

$$\alpha m_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha \gamma) m_{ij}^{(k)} + \gamma m_{jj}^{(k)} = 0 \quad (6-73)$$

$$\frac{k_{ii}^k}{m_{ii}^k} = \frac{k_{jj}^k}{m_{jj}^k} = \frac{k_{ij}^k}{m_{ij}^k} \quad (6-74)$$

En général, pour résoudre ces équations en α et γ on opère comme suit:

$$\begin{aligned}\bar{k}_u^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}_{jj}^{(k)} &= k_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}_i^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - k_{jj}^{(k)} m_{ii}^{(k)}\end{aligned}\quad (6-75)$$

et

$$\gamma = -\frac{\bar{k}_u^{(k)}}{x}; \quad \alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x} \quad (6-76)$$

où x est donné par:

$$x = \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} + \text{sign}(\bar{k}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_u^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)}} \quad (6-77)$$

Si la matrice M est définie positive alors:

$$\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_u^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)} > 0$$

Il est à noter que les transformations $K_{k+1} = P_k^T K_k P_k$ et $M_{k+1} = P_k^T M_k P_k$ sont des combinaisons linéaires de deux lignes et de deux colonnes.

La procédure qui a été utilisée de façon efficace est celle qui teste d'une façon séquentielle les termes extra-diagonaux et la transformation n'est appliquée que si l'élément est plus grand que la tolérance dynamique de la séquence (cycle).

En pratique ce n'est pas l'élément (i, j) qui est comparé à cette tolérance mais les facteurs de couplage entre le $i^{\text{ème}}$ et le $j^{\text{ème}}$ degrés de liberté défini par $F_K = (k_{ij}/k_{ii}k_{jj})^{1/2}$ et $F_M = (m_{ij}/m_{ii}m_{jj})^{1/2}$.

En plus de cette tolérance dynamique, il est nécessaire de mesurer la convergence en comparant les approximations successives des valeurs propres et en testant si tous les éléments extra-diagonaux sont assez petits c'est à dire avec l étant la dernière itération la convergence est atteinte si:

$$\frac{|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leq 10^{-s}; \quad i = 1, \dots, n \quad (6-78)$$

où

$$\lambda_i^{(l)} = \frac{k_u^{(l)}}{m_u^{(l)}}; \quad \lambda_i^{(l+1)} = \frac{k_u^{(l+1)}}{m_u^{(l+1)}} \quad (6-79)$$

et

$$\left[\frac{(k_{ij}^{(l+1)})^2}{k_u^{(l+1)} k_j^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \left[\frac{(m_{ij}^{(l+1)})^2}{m_u^{(l+1)} m_j^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \forall i, j; \quad i < j \quad (6-80)$$

10^{-2s} est la tolérance requise.

4.2.2 ALGORITHME DE LA METHODE DE JACOBI

Définir la précision de convergence requise ϵ

Pour chaque cycle s :

Définir la tolérance dynamique $\epsilon_s = 10^{-2s}$

Pour chaque ligne $i = 1, 2, \dots, n$

Pour chaque colonne $j = i + 1, \dots, n$

Calculer les facteurs de couplage:

$$F_K = \frac{|k_{ij}|}{\sqrt{k_{ii}k_{jj}}} \quad F_M = \frac{|m_{ij}|}{\sqrt{m_{ii}m_{jj}}}$$

Si $F_K > \epsilon_s$ ou $F_M > \epsilon_s$:

* Calculer α et γ par les équations (6-75) à (6-77)

* Transformer les matrices K et M

colonne $i =$ colonne $i + \gamma$.colonne j
colonne $j =$ colonne $j + \alpha$.colonne i

puis

ligne $i =$ ligne $i + \gamma$.ligne j
ligne $j =$ ligne $j + \alpha$.ligne i

* Modifier les vecteurs propres Φ
colonne $i =$ colonne $i + \gamma$.colonne j
colonne $j =$ colonne $j + \alpha$.colonne i

Calculer les valeurs propres

$$\lambda_i = \frac{k_{ii}}{m_{ii}}$$

Tester la convergence

$$\frac{|\lambda_i^{(s+1)} - \lambda_i^{(s)}|}{\lambda_i^{(s+1)}} \leq \epsilon; \quad \lambda_i^{(s)} = \frac{k_{ii}^{(s)}}{m_{ii}^{(s)}}; \quad \lambda_i^{(s+1)} = \frac{k_{ii}^{(s+1)}}{m_{ii}^{(s+1)}}; \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left[\frac{(k_{ij}^{(s+1)})^2}{k_{ii}^{(s+1)}k_{jj}^{(s+1)}} \right]^{1/2} \leq \epsilon; \quad \left[\frac{(m_{ij}^{(s+1)})^2}{m_{ii}^{(s+1)}m_{jj}^{(s+1)}} \right]^{1/2} \leq \epsilon; \quad \forall i, j; \quad i < j$$

5 RESOLUTION DES PROBLEMES DE GRANDE DIMENSION : METHODE DU SOUS-ESPACE

Dans le cadre d'une analyse de type éléments finis où on s'intéresse principalement aux plus petites valeurs propres. Par conséquent un système est dit de grand ordre lorsque si le coût d'investigation (temps machine) de ces plus petites valeurs propres est nettement inférieur à celui de toutes les valeurs propres du système.

Une des méthodes qui s'applique dans ce cas est le résultat de la combinaison des méthodes de base que l'on a détaillées précédemment. La méthode que l'on expose dans cette présente section est la *méthode du sous-espace* qui s'est avérée très performante pour le calcul des p premières valeurs propres d'un système de grand ordre.

Cette méthode combine essentiellement l'analyse de Rayleigh-Ritz et l'itération inverse. En effet, on a vu que l'itération inverse opère sur un seul vecteur à la fois. Cependant, l'algorithme peut être développé de façon à traiter plusieurs vecteurs simultanément.

5.1 DESCRIPTION DE LA METHODE

On passe de l'itération k à l'itération $k+1$
On démarre avec q vecteurs initiaux rangés dans la matrice X_1 , on exécute une itération inverse pour calculer simultanément les q vecteurs de Ritz.

$$K\bar{X}_2 = MX_1 \quad (6-81)$$

Avant d'entamer une nouvelle itération en utilisant les nouveaux vecteurs améliorés, deux opérations doivent être effectuées:

- 1° - Une normalisation.
- 2° - Une orthogonalisation.

La première opération maintient les normes des vecteurs raisonnables, tandis que la deuxième les orthogonalise de façon à les faire tendre chacun vers un mode différent (plutôt que tous vers le mode fondamental). Ces opérations peuvent être accomplies de plusieurs manières mais il est convenable de le faire selon l'analyse de Rayleigh-Ritz qui est:

- 1° - Projeter K et M sur le sous-espace engendré par \bar{X}_2 :

$$K_2 = \bar{X}_2^T K \bar{X}_2 \quad (6-82a)$$

$$M_2 = \bar{X}_2^T M \bar{X}_2 \quad (6-82b)$$

- 2° - Résoudre le problème:

$$K_2 Q_2 = M_2 Q_2 \Lambda_2 \quad (6-83)$$

N'importe quelle procédure peut être appliquée pour résoudre le problème de l'équation (6-83), mais, tenant compte du fait que ces matrices tendent de plus en plus vers de matrices diagonales d'une itération à l'autre, la méthode de Jacobi est la méthode qui s'adapte le mieux.

Enfin on calcule les nouveaux vecteurs normalisés et orthogonalisés:

$$X_2 = \bar{X}_2 Q_2 \quad (6-84)$$

et on réitère le processus en suivant le même scénario.

5.2 ALGORITHME DE LA METHODE DU SOUS-ESPACE

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (6-85)$$

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k \quad (6-86)$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1} \quad (6-87)$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1} \quad (6-88)$$

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (6-89)$$

$$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} Q_{k+1} \quad (6-90)$$

Avec la condition que les vecteurs dans X_1 ne sont orthogonaux à aucun des vecteurs propres recherchés on a:

$$\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda \text{ et } \bar{X}_{k+1} Q_{k+1} \rightarrow \Phi \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

5.3 VECTEURS INITIAUX

Le premier pas à faire avant d'entamer la procédure de résolution itérative décrite précédemment est le choix des vecteurs initiaux.

Le choix de ces vecteurs repose sur les observations faites sur deux cas triviaux.

1^{er} cas: Dans le cas où la matrice masse est une matrice diagonale avec seulement p éléments non nuls, la procédure converge au bout d'une seule itération si on choisit comme vecteurs initiaux les vecteurs de la base canonique e_i , i étant l'adresse de l'élément diagonale non nul:

$$e_i^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (6-91)$$

\downarrow
i^{ème} composante

2^{ème} cas: Si les matrices K et M sont toutes les deux diagonales, la procédure converge au bout d'une seule itération si les vecteurs initiaux sont des vecteurs de la base canonique e_i où i est l'indice correspondant aux plus petits rapports k_u/m_u .

En pratique de telles situations sont rarement rencontrées, (sauf peut-être la première dans le cas d'une approche masse concentrée). Les deux cas précédents montrent que les vecteurs initiaux doivent être construits de façon à exciter les degrés de liberté auxquels correspondent les plus grandes masses et les plus petites rigidités.

En se basant sur ces constatations, la première colonne de Y_1 est simplement la diagonale de la matrice masse. Ceci nous assure que tous les degrés de liberté sont excités. Les autres colonnes de Y_1 sont les vecteurs e_i de la base canonique où les i sont les indices correspondant aux plus petits rapports k_u/m_u .

Ajoutons à cela que l'expérience montre que si l'on désire calculer p valeurs propres, il est plus rapide d'utiliser un sous-espace de dimension q en ne vérifiant que la convergence des p plus petites valeurs propres. q Est choisi de façon à satisfaire:

$$q = \min(p + 8, 2p) \quad (6-92)$$

5.4 CONVERGENCE

Bien que l'algorithme présenté ci-dessus utilise q couples propres, la convergence n'est testée que sur les p premiers couples. La convergence, avec la précision requise tol , est donc atteinte si:

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leq tol; \quad i = 1, \dots, p \quad (6-93)$$

CHAPITRE VII
PRESENTATION DU
PROGRAMME INFORMATIQUE

1 INTRODUCTION

L'utilisation pratique de la méthode des éléments finis est basée sur l'algèbre matricielle et l'utilisation de l'ordinateur comme outil de calcul. Cependant, dans le cas d'une analyse du type éléments finis les matrices globales sont souvent de grand ordre nécessitant ainsi la résolution de grands systèmes et occasionnant des erreurs d'arrondi parfois énormes. Heureusement, ces matrices sont symétriques et creuses, c'est à dire qu'elles ne contiennent que très peu de termes non nuls. Il convient donc de mettre en oeuvre des techniques particulières pour éviter aussi bien de stocker les termes nuls que d'effectuer des opérations dont l'un des opérands est nul.

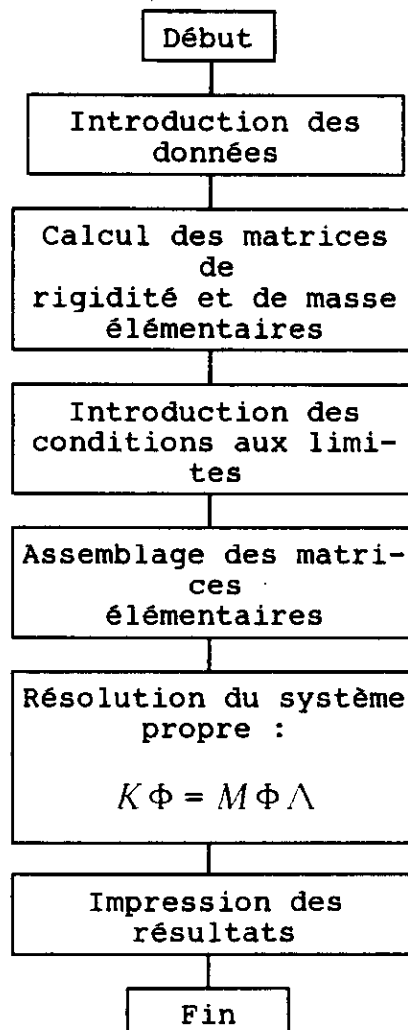
L'efficacité d'un programme informatique dépend essentiellement de deux facteurs qui sont :

- 1°- Le coût en temps de calcul et en place mémoire.
- 2°- Les techniques numériques utilisées.

Nous développons dans le présent chapitre comment nous avons tenu compte de ces deux facteurs lors de l'élaboration du programme informatique.

2 STRUCTURE GLOBALE DU PROGRAMME INFORMATIQUE

Notre programme informatique a la structure suivante :



3 METHODE DE STOCKAGE DES MATRICES GLOBALES

L'une des techniques de stockage des matrices symétriques et creuses, probablement des plus performantes, est la méthode dite *ligne de ciel* ou *skyline* qui consiste à ranger dans un tableau A à une seule dimension les termes $K(i,j)$ de la matrice K compris entre la diagonale et les lignes de ciel de la matrice. Ces lignes de ciel $m_j; j=1,2,\dots,n$ représentées sur la figure (7-1) sont définies comme étant les premiers termes non nuls de chaque colonne de K . Ainsi :

$$K(i,j)=0 \quad \forall i < m_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (7-1)$$

Les différences $j-m_j; j=1,2,\dots,n$ définissent les hauteurs de colonnes de la matrice K .

Connaissant les hauteurs de colonnes, celles-ci, en incluant les termes diagonaux, sont successivement rangées dans le tableau A comme le montre la figure (7-1).

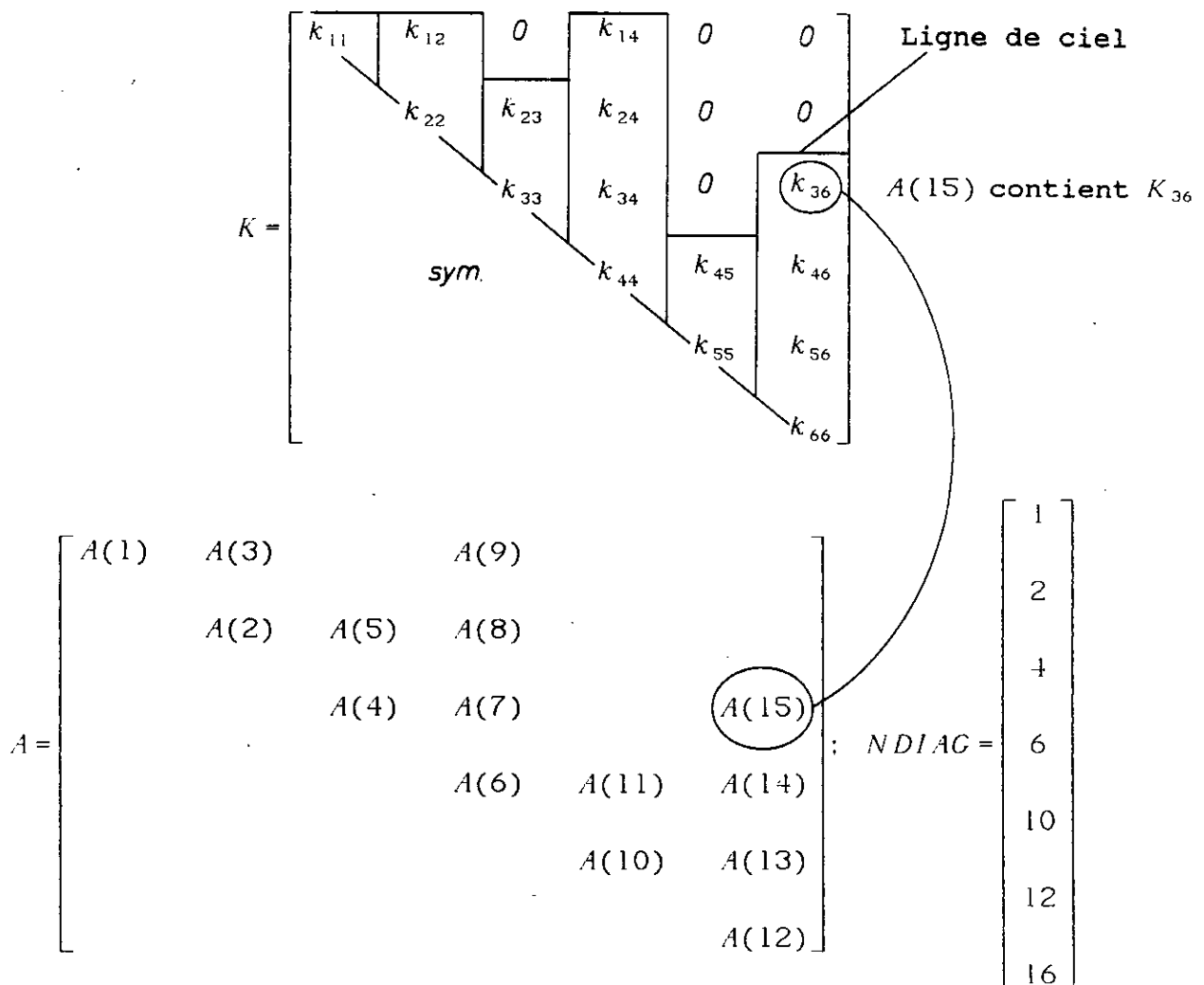


Figure 7-1 : Technique de stockage en ligne de ciel.

Cette méthode nécessite, en plus du tableau A , un autre tableau $NDIAG$ dont les éléments diagonaux sont des entiers qui indiquent les adresses des termes diagonaux, c'est à dire l'indice du $i^{ème}$ élément diagonal de K , $K(i,i)$, dans A est $NDIAG(i)$. Ayant défini le tableau $NDIAG$, tout élément $K(i,j)$ de K peut être repéré dans A par :

$$K(i,j) = A(NDIAG(j) + j - i) \quad (7-2)$$

Les éléments de $NDIAG$ sont reliés aux lignes de ciel par :

$$NDIAG(j+1) = NDIAG(j) + j - m_j + 1 \quad (7-3)$$

Notons enfin, qu'en associant à cette technique de stockage un algorithme de numérotation des noeuds optimal, la place mémoire et le nombre des opérations sont considérablement réduits.

4 METHODES DE RESOLUTION

Le deuxième facteurs dont dépend l'efficacité d'un programme informatique est la technique numérique utilisée. Dans notre présente étude, nous avons à faire à la résolution du système propre :

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (7-4)$$

Parmi les méthodes de résolution de ce type de problèmes qui ont été exposées dans le chapitre 6, nous avons opté pour la méthode du sous-espace pour deux raisons importantes. La première est que les systèmes auxquels aboutissent les différents maillages adoptés sont de grande dimension et la seconde est que nous ne nous intéressons qu'aux 6 premiers couples (λ_i, ϕ_i) .

L'algorithme de l'itération du sous-espace est :

$$K\bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (7-5)$$

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k \quad (7-6)$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M\bar{X}_{k+1} \quad (7-7)$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1} \quad (7-9)$$

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (7-10)$$

$$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} Q_{k+1} \quad (7-11)$$

L'algorithme présenté ci-dessus nécessite :
 1° - La résolution simultanée de q systèmes linéaires :

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k$$

2° - La résolution du système propre :

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1}$$

Les autres équations de l'algorithme font appel à de simples produits matriciels.

La résolution des q systèmes linéaires de l'équation (7-5) se fait en factorisant K sous la forme :

$$K = LDL^T \quad (7-12)$$

où L est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1 et D est une matrice diagonale. Cette factorisation est, du fait que K soit symétrique définie positive, stable vis à vis des erreurs d'arrondi sans qu'il soit nécessaire d'effectuer des permutations et elle peut être utilisée d'une manière efficace pour résoudre les systèmes de l'équation (7-5) en deux étapes qui sont :

$$LV = Y_k \quad (7-13)$$

$$DL^T \bar{X}_{k+1} = V \quad (7-14)$$

L'équation (7-10) est un système propre d'ordre q ($q=12$ dans notre cas) que nous résolvons par la méthode de Jacobi précédemment décrite car les matrices K_{k+1} et M_{k+1} tendent vers des matrices diagonales si les vecteurs dans \bar{X}_{k+1} sont des multiples des vecteurs propres.

CHAPITRE VIII
ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES MINCES
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1 INTRODUCTION

Nous avons, dans les chapitres précédents, exposé les fondements théoriques de la mécanique des milieux continus ainsi que les fondements mathématiques que sont les méthodes de résolution. Nous avons également présenté la méthode des éléments finis et son application à la dynamique des structures. Dans le cadre des deux chapitres suivants, nous allons appliquer la méthode des éléments finis à l'analyse des plaques minces en premier lieu et des plaques épaisses en second.

2 ELEMENT RECTANGULAIRE NON CONFORME A 12 D.D.L.

Il est plus aisé de formuler un élément de forme rectangulaire qu'un élément de n'importe quel autre forme pour la simple raison que les cotés de l'élément sont parallèles aux axes de coordonnées.

Un élément rectangulaire typique à 4 noeuds coïncidant avec les sommets du rectangle est représenté sur la figure (8-1). L'élément a une longueur a , une largeur b et une épaisseur h . On suppose que l'origine du système de coordonnées coïncide avec le noeud 4 et que chacun des 4 noeuds à 3 d.d.l. qui sont:

w : déplacement transversal.

θ_x : rotation autour de l'axe x .

θ_y : rotation autour de l'axe y .

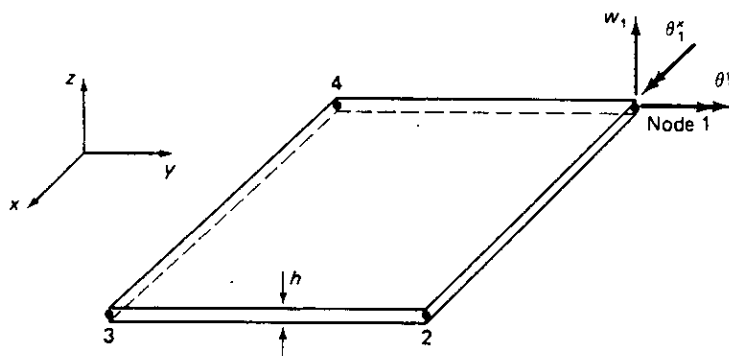


Figure 8-1 : Élément rectangulaire pour la flexion des plaques.

Sachant que la présente formulation se fait dans le cadre de la théorie de Kirchhoff on a:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (8-1)$$

Ainsi le vecteur déplacement en tout point de l'élément est:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

Dans le cas de flexion des plaques l'état de déformation en un point est représenté en termes de courbures:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8-3)$$

Un état de contrainte plane prévaut dans le cas d'une plaque mince et on a en tout point le vecteur contrainte:

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (8-4)$$

où M_x et M_y sont les moments de flexion autour des axes x et y respectivement, et M_{xy} est le moment de torsion dans le plan (x, y) .

La relation moments-courbures des équations (2-11) s'écrit sous forme matricielle:

$$\underline{\tau} = C \underline{\epsilon} \quad (8-5)$$

où:

$$C = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (8-6)$$

2.1 FONCTION DE DEPLACEMENTS

On commence par représenter w par un polynôme à 12 constantes α_i :

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (8-7)$$

Ce polynôme étant obtenu à partir du triangle de Pascal ci-dessous:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & x & y \\ & & & & & & x^2 & xy & y^2 \\ & & & & & & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 \\ & & & & & & x^4 & x^3 y & x^2 y^2 & xy^3 & y^4 \end{array}$$

C'est un polynôme du 4^{ème} degré auquel il manque les termes x^4 , $x^2 y^2$ et y^4 . La raison du choix des 2 termes $x^3 y$ et xy^3 est qu'ils maintiennent l'isotropie géométrique et satisfont l'équation différentielle (2-18) d'un élément différentiel au niveau d'une région non chargée de la plaque, c'est à dire:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} = 0$$

Le terme $x^2 y^2$ ne convient pas car on ne peut trouver de terme allant de paire avec lui, la paire (x^4, y^4) ne convient pas non plus car elle ne satisfait pas la compatibilité des déplacements inter-élémentaires alors que la paire $(x^3 y, xy^3)$ la satisfait.

Un élément plaque a 3 mouvements de corps rigide possibles: un déplacement transversal w et 2 rotations $\partial w / \partial x$ et $\partial w / \partial y$. Dans la fonction de déplacement (8-7), les 3 termes α_1 , $\alpha_2 x$ et $\alpha_3 y$ donnent les 3 constantes nécessaires pour les 3 modes rigides respectifs. Cet élément a aussi 3 termes de déformation

constante $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$ et $\partial^2 w / \partial x \partial y$. Les 3 constantes α_4 , α_6 et α_5 nécessaires à la représentation respective des 3 états de déformation constante sont données par les termes $\alpha_4 x^2$, $\alpha_6 y^2$ et $\alpha_5 xy$ respectivement.

Afin de vérifier la conformité de l'élément, on considère la fonction de déplacement w le long du bord 2-3 d'équation $x = a$:

$$w(x, y) |_{x=a} = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3$$

$$\left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right|_{x=a} = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2$$

Les 4 constantes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont définies de façon unique par les valeurs des d.d.l. aux noeuds 2 et 3:

$$w(a, 0) = a_1 = (w)_2$$

$$w(a, b) = a_1 + a_2 + a_3 b^2 + a_4 b^3 = (w)_3$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y}(a, 0) \right| = a_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_2$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y}(a, b) \right| = a_2 + 2a_3 b + 3a_4 b^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3$$

Comme les 4 valeurs des d.d.l. sont communes aux 2 éléments adjacents au bord 2-3, ces 2 éléments ont la même fonction de déplacement transversal le long de ce bord.

La compatibilité inter-élémentaire de w le long de ce bord (dans la direction y) entraîne celle des pentes $\partial w / \partial y$.

On considère à présent la pente normale $\partial w / \partial x$ le long de ce même bord:

$$\left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = a_5 + a_6 y + a_7 y^2 + a_8 y^3$$

Les 4 constantes ne peuvent être déterminées de façon unique à partir de:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x}(a, 0) \right| \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x}(a, b) \right|$$

Ainsi les 2 éléments adjacents auront 2 fonctions indéfinies pour $\partial w / \partial x$ et la compatibilité inter-élémentaire des pentes normales le long du bord 2-3 ne sera pas satisfaite.

Cet élément ne satisfait pas au critère de convergence N°5. C'est donc un élément non conforme et la solution obtenue à partir d'un maillage d'éléments de ce type ne sera pas une solution à énergie potentielle minimale. Cependant, la convergence de cet élément a été établie de façon théorique.

2.2 FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Il nous faut d'abord relier le vecteur déplacement de l'équation (8-2) aux déplacements nodaux de la façon suivante:

$$\underline{u} = [H] \hat{u} \quad (8-8)$$

La fonction de déplacement w peut s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$w = [\Phi] \underline{\alpha} \quad (8-9)$$

où :

$$[\Phi] = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]$$

$$\underline{\alpha}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}]$$

Le vecteur déplacement en tout point peut alors s'écrire:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [\Phi] \underline{\alpha} \quad (8-10)$$

Pour déterminer les 12 constantes α_i , on écrit la relation (8-10) pour les 4 noeuds:

$$\hat{u} = [A] \underline{\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha} = [A]^{-1} \hat{u} \quad (8-11)$$

où:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & 3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 & 0 & 0 & -b^3 \end{bmatrix} \quad (8-12)$$

et

$$\underline{\hat{u}}^T = [w_1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad w_2 \quad \dots \quad \theta_y^4]$$

Le vecteur déformation de (8-3) s'écrit:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} w \quad (8-13)$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \Phi \underline{\alpha} = E A^{-1} \underline{\hat{u}} \quad (8-14)$$

$$\underline{\epsilon} = B \underline{\hat{u}} \quad (8-15)$$

$$B = E A^{-1} \quad (8-16)$$

où :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix} \quad (8-17)$$

Ainsi d'après (3-13) on a :

$$K^{(e)} = \int_0^a \int_0^b B^T C B dy dx \quad (8-18)$$

2.3 FORMULATION DE LA MATRICE MASSE

La formulation de la matrice masse a été établie dans le chapitre 4 de cette présente étude. Nous présentons, à présent, la formulation des matrices masses élémentaires concentrée et cohérente pour l'élément plaque.

2.3.1 MATRICE MASSE CONCENTREE

Pour obtenir la matrice masse concentrée à coefficients diagonaux égaux il suffit de diviser la masse totale de l'élément par 4 et d'affecter le résultat ainsi obtenu aux éléments diagonaux m_{ii} correspondant au d.d.l. w .

Ainsi on a :

$$m_{ii} = \begin{cases} \frac{\rho h a b}{4} & i = 1, 4, 7, 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3.2 MATRICE MASSE COHERENTE

Du fait qu'on ne tient pas compte des inerties de rotation conformément à la formulation établie dans le chapitre 3, seul le déplacement transversal w est impliqué dans la formulation de la matrice masse cohérente.

En substituant (8-11) dans (8-9) on a :

$$w = \Phi A^{-1} \hat{u} = N \hat{u} \quad (8-19)$$

$$N = \Phi A^{-1} \quad (8-20)$$

La matrice masse cohérente est alors :

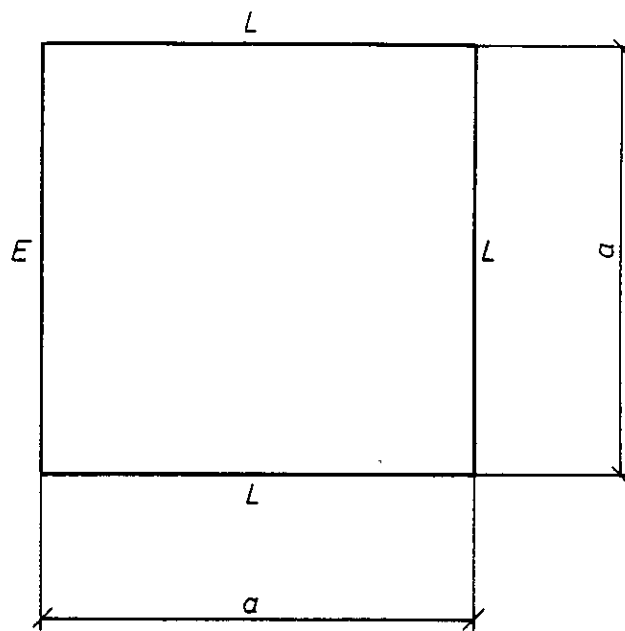
$$M^{(e)} = \rho h \int_0^a \int_0^b N^T N dy dx \quad (8-21)$$

2.4 EXEMPLES NUMERIQUES

Le programme informatique précédemment exposé a été déroulé pour la résolution du système propre régissant le mouvement de vibrations libres d'une plaque carrée et ce pour 6 cas de conditions aux limites. Les résultats obtenus sont présentés dans les 6 tableaux qui suivent. Ces derniers sont classés dans l'ordre croissant des fréquences fondamentales et donnent les paramètres adimensionnels $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ relatifs aux 6 premiers modes.

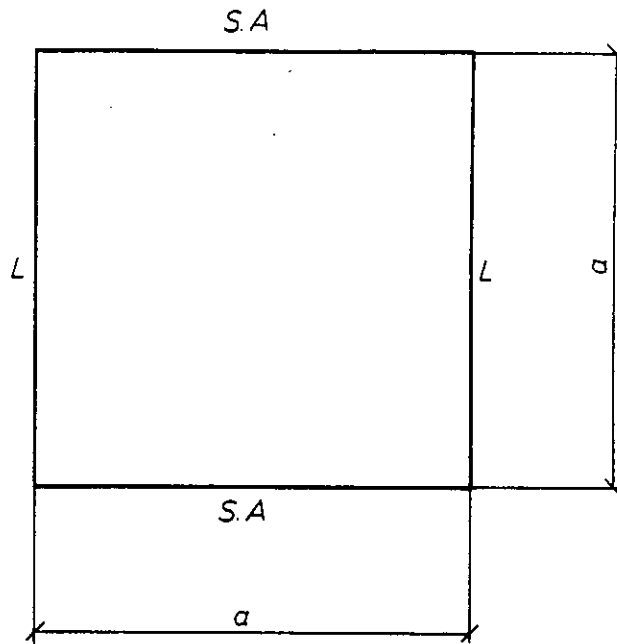
Le paramètre λ dépend :

- du mode de vibration caractérisé par un couple d'entiers naturels (i, j) qui représente le nombre de demi-ondes dans chacune des directions x et y .
- du coefficient de Poisson pris égal à 0.3 dans notre cas.
- des conditions aux limites auxquels sont sujets les bords de la plaques: Bord simplement appuyé (S. A.), encasté (E) ou libre (L).



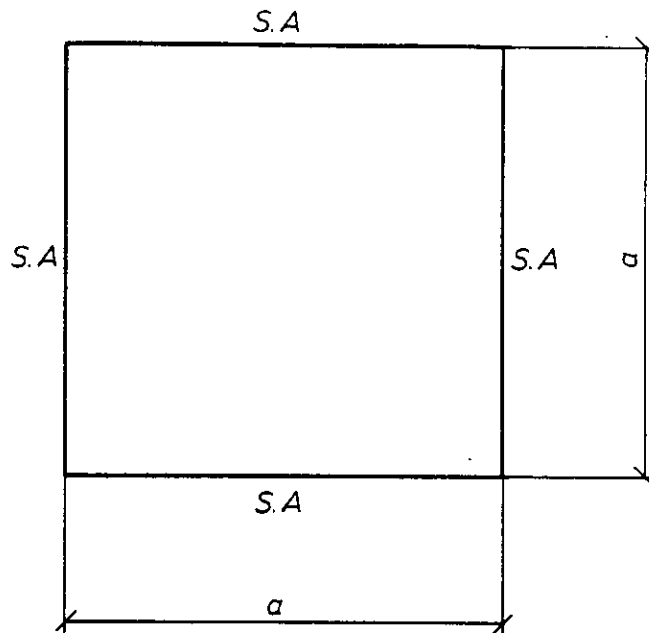
Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(2,3)
16	60	concentrée	3.376	7.956	19.08	23.12	26.91	42.51
		cohérente	3.469	8.520	21.54	26.99	30.91	53.02
64	216	concentrée	3.447	8.362	20.68	25.99	29.89	50.90
		cohérente	3.471	8.510	21.36	27.15	30.96	53.83
Solution exacte			3.492	8.525	21.43	27.33	31.11	54.44

Tableau 8-1a : $\lambda = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.



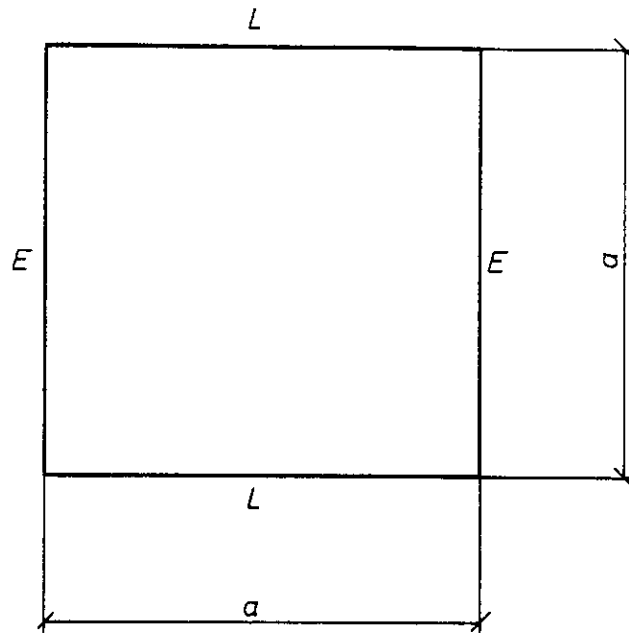
Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
16	55	concentrée	9.631	15.18	30.35	38.66	43.49	55.83
		cohérente	9.713	16.13	35.79	39.59	46.71	67.74
64	207	cocentrée	9.631	15.88	34.89	38.93	45.97	66.95
		cohérente	9.653	16.14	36.45	39.14	46.79	69.74
Solution exacte			9.631	16.14	36.73	38.95	46.74	70.74

Tableau 8-1b : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.



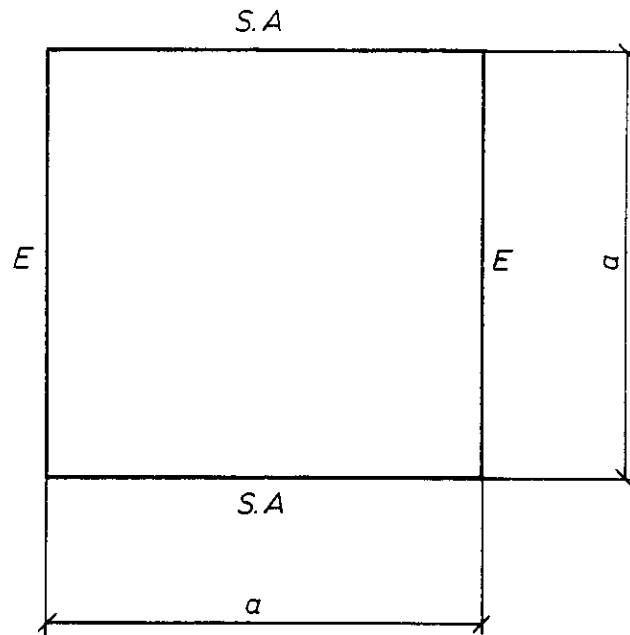
Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
16	39	concentrée	19.08	46.43	46.43	68.14	87.00	87.00
		cohérente	19.15	47.05	47.05	72.09	96.22	96.22
64	175	cocentrée	19.57	48.68	48.68	76.32	97.05	97.05
		cohérente	19.58	48.74	48.74	76.60	97.49	97.49
Solution exacte			19.74	49.35	49.35	78.96	98.70	98.70

Tableau 8-1c : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.



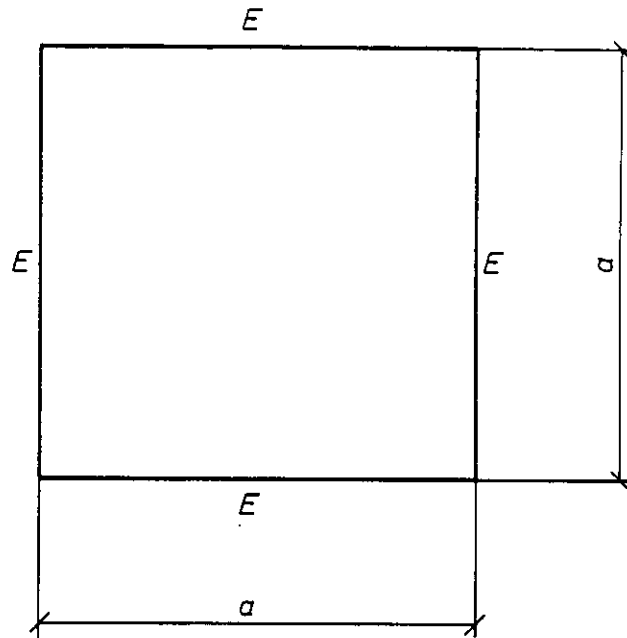
Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(1,4)
16	45	concentrée	22.15	24.82	35.65	58.48	58.80	60.56
		cohérente	22.38	26.37	42.18	62.14	66.78	76.88
64	189	cocentrée	22.18	26.00	41.28	61.15	66.08	72.76
		cohérente	22.23	26.41	43.12	61.52	67.28	78.59
Solution exacte			22.27	26.53	43.66	61.47	67.55	79.90

Tableau 8-1d : $\lambda = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0,3$.



Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
16	33	concentrée	27.52	50.14	62.98	77.75	88.68	98.95
		cohérente	27.74	51.48	66.78	85.24	98.61	125.8
64	161	concentrée	28.59	53.57	68.25	90.67	99.86	126.5
		cohérente	28.61	53.65	68.42	91.14	100.4	127.6
Solution exacte			28.95	54.74	96.32	94.59	102.2	129.1

Tableau 8-1e : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.



Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
16	27	concentrée	33.88	65.71	65.71	86.30	100.0	100.8
		cohérente	34.31	70.03	70.03	98.06	127.6	129.6
64	147	coconcentrée	35.43	71.84	71.84	103.0	128.2	129.0
		cohérente	35.45	72.04	72.04	103.7	129.4	130.3
Solution exacte			39.99	73.41	73.41	108.3	131.6	132.2

Tableau 8-1f : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.

3 ELEMENT RECTANGULAIRE CONFORME A 16 D.D.L.

3.1 FONCTION DE DEPLACEMENTS

Si l'on désire avoir un élément présentant une continuité C^1 on peut utiliser l'interpolation de Hermite dans laquelle la fonction de déplacements ϕ et ses dérivées, jusqu'à l'ordre $m-1$, aux noeuds peuvent être considérées comme degrés de liberté.

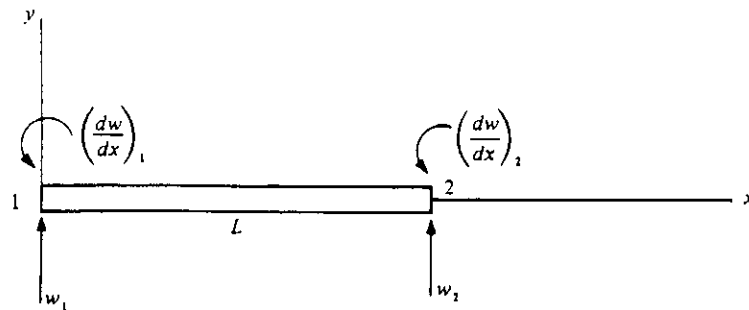


Figure 8-2 : Élément poutre en flexion.

Ainsi pour un élément linéaire reliant les noeuds 1 et 2 (fig. 8-2) cette fonction de déplacements s'écrit:

$$\begin{aligned} \phi = & N_1(\phi)_1 + N_2\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_1 + \dots + N_m\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)_1 \\ & + N_{m+1}(\phi)_2 + N_{m+2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_2 + \dots + N_{2m}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)_2 \end{aligned}$$

où les N_i sont les polynômes de Hermite d'ordre $2m-1$. Ces polynômes s'écrivent en fonction de la coordonnée normale $\xi = x/L$:

$$N_i = (C_1)_i + (C_2)_i \xi + (C_3)_i \xi^2 + \dots + (C_{2m})_i \xi^{(2m-1)}$$

On dispose de $2m$ conditions pour calculer chacune des constantes $(C_j)_i$; $j=1,2,\dots,2m$ relatives au polynôme N_i . En effet, N_i et ses dérivées appropriées prennent la valeur unité au noeud i et 0 ailleurs.

Pour l'élément unidimensionnel considéré ci-dessus les 4 polynômes de Hermite sont:

$$N_1 = \frac{1}{L^3}(L^3 - 3Lx^2 + 2x^3)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^3}Lx(x-L)^2$$

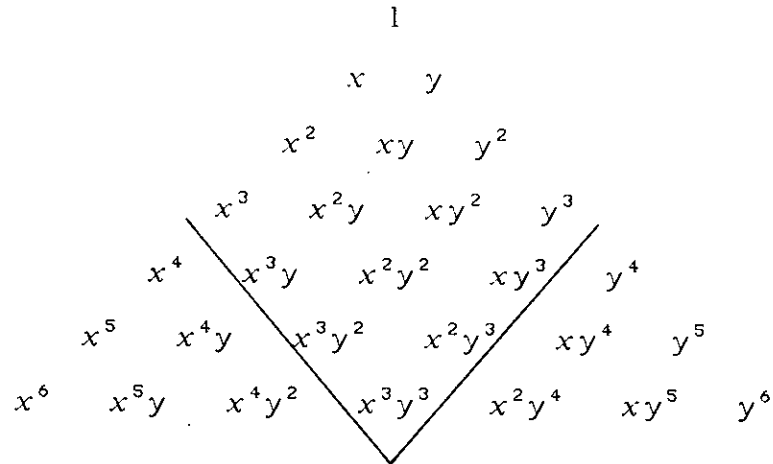
$$N_3 = \frac{1}{L^3}(3Lx^2 - 2x^3)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^3}L(x^3 - Lx^2)$$

En ce qui concerne notre élément plaque on peut déterminer une fonction de déplacements à compatibilité inter-éléments et possédant tous les états de déformation uniforme en utilisant les notions d'interpolation abordées ci-dessus. Ainsi en prenant $\partial^2 w / \partial x \partial y$ comme 4^{ème} degré de liberté (communément appelé gau-chissement) en chaque noeud la fonction de déplacements w peut s'écrire comme un polynôme de Hermite bicubique complet à 16 termes comme suit (page suivante):

$$\begin{aligned}
w(x, y) = & \frac{1}{a^3 b^3} [(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_1 \\
& + (3ax^2 - 2x^3)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_2 \\
& + (3ax^2 - 2x^3)(3by^2 - 2y^3)w_3 \\
& + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3by^2 - 2y^3)w_4 \\
& + ax(x-a)^2(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \\
& + a(x^3 - ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \\
& + a(x^3 - ax^2)(3by^2 - 2y^3) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \\
& + ax(x-a)^2(3by^2 - 2y^3) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \\
& + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)y(y-b)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \\
& + b(3ax^2 - 2x^3)y(y-b)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 \\
& + b(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \\
& + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 \\
& + abxy(x-a)^2(y-b)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_1 \\
& + abxy(x^2 - ax)(y-b)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_2 \\
& + abxy(x^2 - ax)(y^2 - by) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_3 \\
& + abxy(x-a)^2(y^2 - by) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_4] \quad (8-22)
\end{aligned}$$

Il est à noter que ce polynôme bicubique s'obtient à partir du triangle de Pascal d'une façon symétrique comme le montre la figure ci-dessous:



De l'équation (8-22) on voit que la fonction de déplacements w contient les 3 termes relatifs aux 3 mouvements de corps rigide (C_1 , C_2x et C_3y) ainsi que ceux relatifs aux 3 états de déformation constante (C_4x^2 , C_5xy et C_6y^2).

Pour établir la compatibilité inter-éléments de la pente normale $\partial w / \partial x$ le long du bord 2-3 (la compatibilité inter-éléments de w et de $\partial w / \partial y$ étant analogue à celle de l'élément à 12 d.d.l.), on considère:

$$\left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3$$

où les 4 constantes peuvent être définies de façon unique par les 4 conditions suivantes:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_2 \quad \text{pour} \quad y = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \right)_3 \quad \text{pour} \quad y = b$$

La compatibilité inter-éléments de la pente normale est donc vérifiée le long du bord 2-3. Elle l'est aussi le long des 3 autres bords.

Cette fonction de déplacement satisfait aux critères de la convergence monotone et l'élément est alors conforme.

3.2 FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La fonction de déplacements peut s'écrire:

$$w = [N] \underline{\hat{u}} \quad (8-23)$$

où :

$$[N] = \begin{bmatrix} G_1 H_1 & G_1 H_2 & G_2 H_1 & G_2 H_2 & G_3 H_1 & G_3 H_2 & G_4 H_1 & G_4 H_2 \\ G_3 H_3 & G_3 H_4 & G_4 H_3 & G_4 H_4 & G_1 H_3 & G_1 H_4 & G_2 H_3 & G_2 H_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\hat{u}}^T = [w_1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad \theta_{xy}^1 \quad w_2 \quad \dots \quad \theta_{xy}^4]$$

$$G_1(x) = a^3 + 2x^3 - 3ax^2 \quad H_1(y) = b^3 + 2y^3 - 3by^2$$

$$G_2(x) = ax(x-a)^2 \quad H_2(y) = by(y-b)^2$$

$$G_3(x) = 3ax^2 - 2x^3 \quad H_3(y) = 3by^2 - 2y^3$$

$$G_4(x) = a(x^3 - ax^2) \quad H_4(y) = b(y^3 - by^2)$$

La relation (8-13) reste valable on a donc:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} w \quad (8-24)$$

En substituant (8-23) dans l'équation ci-dessus:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [N] \underline{\hat{u}} \quad (8-25)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [N] \quad (8-26)$$

La matrice de rigidité élémentaire est:

$$K^{(e)} = \int_0^a \int_0^b B^T C B dy dx \quad (8-27)$$

On peut à présent voir que les constantes α_i de l'équation (8-7) identifiées comme coordonnées généralisées sont en fait des combinaisons linéaires des déplacements nodaux. Ainsi avec l'interpolation de Hermite la fonction w est directement liée aux déplacements nodaux de l'élément nous dispensant de ce fait du calcul de la matrice A et de son inverse.

3.3 FORMULATION DE LA MATRICE MASSE

3.3.1 MATRICE MASSE CONCENTREE

Seule la séquence des éléments diagonaux non nuls change par rapport au cas précédent.

$$m_{ii} = \begin{cases} \frac{\rho h a b}{4} & i = 1, 5, 9, 13 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.3.2 MATRICE MASSE COHERENTE

La matrice masse cohérente est:

$$M^{(e)} = \rho h \int_0^a \int_0^b N^T N dy dx \quad (8-28)$$

3.4 EXEMPLES NUMERIQUES

Les mêmes cas de conditions aux limites que ceux vus précédemment ont été traités et les résultats sont présentés dans les six tableaux suivants.

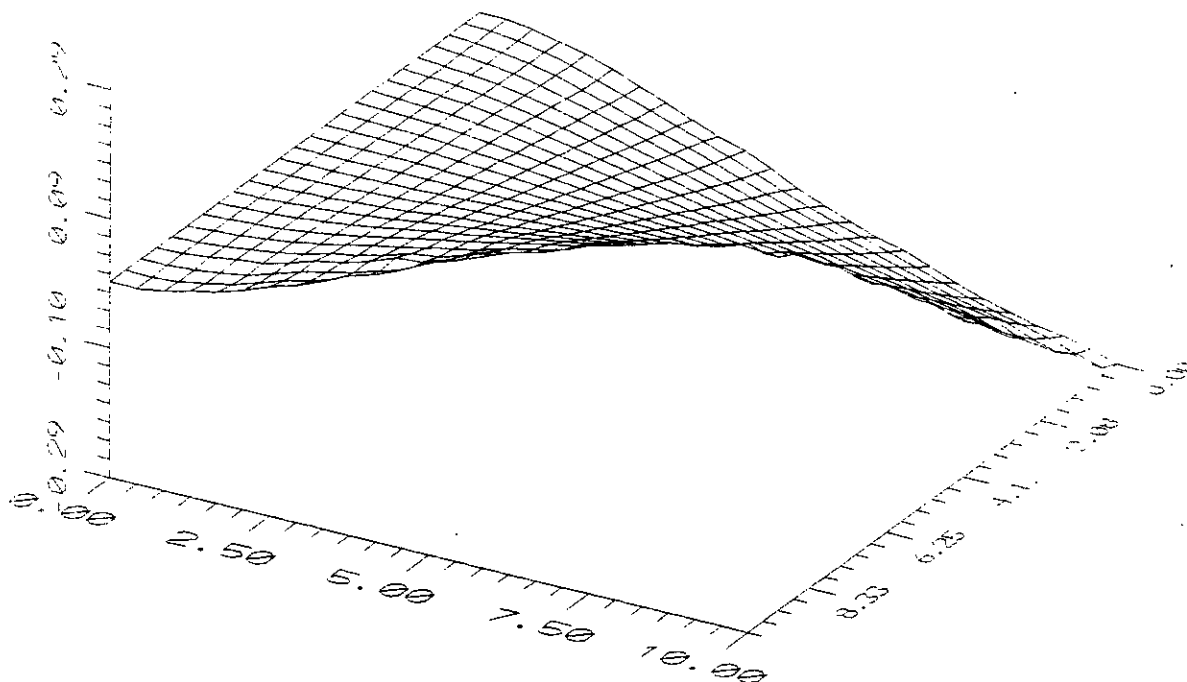
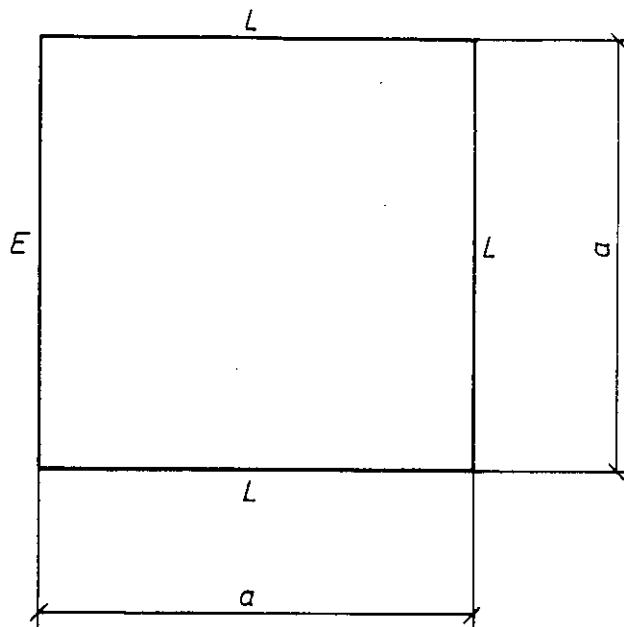
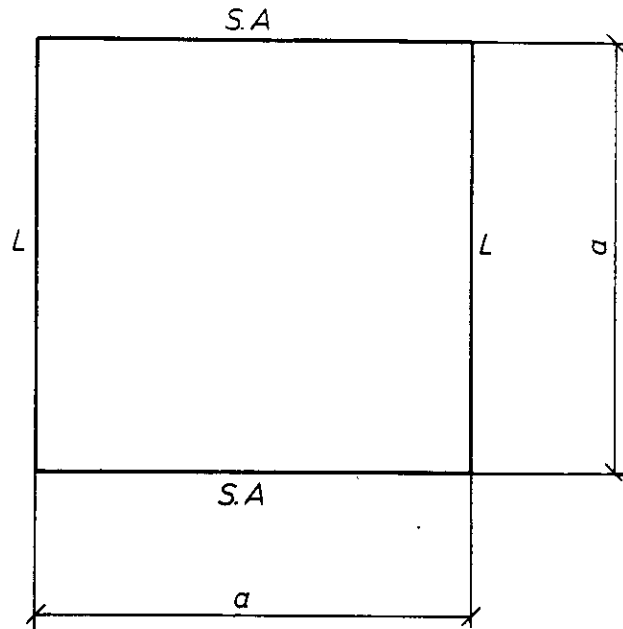


Figure 8-3a: Mode (2,1).

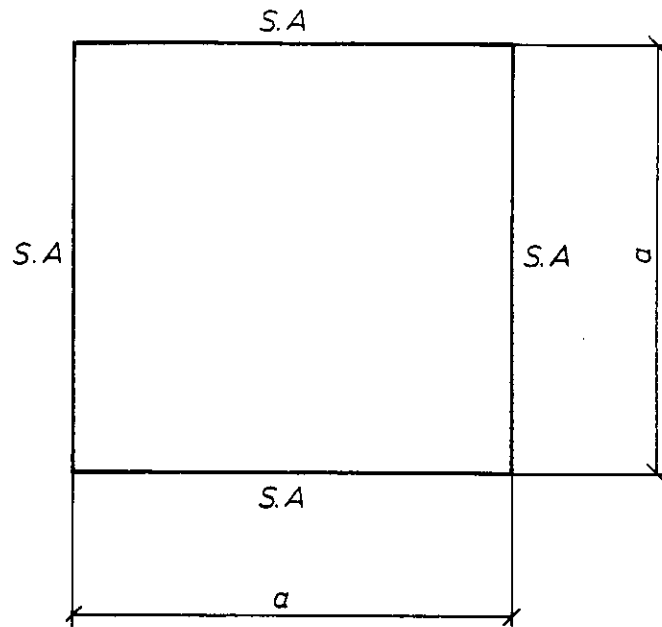
Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(2,3)
16	80	concentrée	3.381	7.950	18.81	23.25	26.76	43.11
		cohérente	3.475	8.518	21.33	27.25	31.04	54.46
64	288	concentrée	3.448	8.361	20.62	26.04	29.87	51.18
		cohérente	3.472	8.509	21.29	27.20	30.97	54.22
Solution exacte			3.492	8.525	21.43	27.33	31.11	54.44

Tableau 8-2a : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.



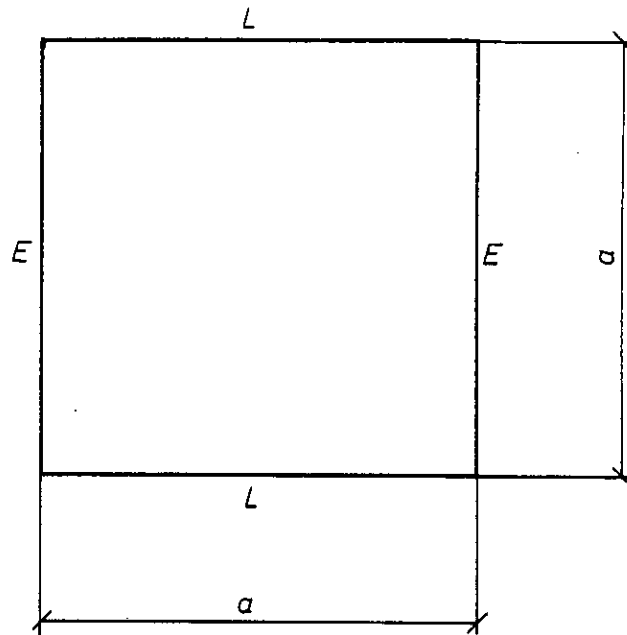
Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
16	80	concentrée	9.535	15.14	31.23	37.42	42.30	58.41
		cohérente	9.634	16.14	36.79	39.11	46.90	71.01
64	288	concentrée	9.609	15.88	35.16	38.70	45.83	67.84
		cohérente	9.632	16.14	36.73	38.96	46.75	70.76
Solution exacte			9.631	16.14	36.73	38.95	46.74	70.74

Tableau 8-2b : $\lambda = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0,3$.



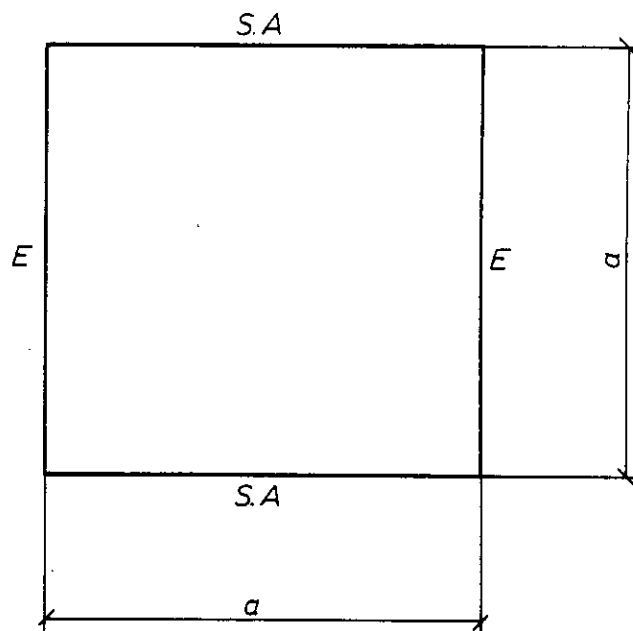
Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
16	64	concentrée	19.71	48.76	48.76	76.01	91.13	91.13
		cohérente	19.74	49.48	49.48	79.13	100.2	100.2
64	256	coconcentrée	19.74	49.32	49.32	78.86	98.47	98.47
		cohérente	19.74	49.36	49.36	78.97	98.80	98.80
Solution exacte			19.74	49.35	49.35	78.96	98.70	98.70

Tableau 8-2c : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.



Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(1,4)
16	60	concentrée	21.80	24.57	36.90	55.53	57.26	61.65
		cohérente	22.23	26.49	43.79	61.80	67.85	80.51
64	252	concentrée	22.11	25.99	41.74	60.68	65.70	74.00
		cohérente	22.18	26.43	43.62	61.24	67.26	79.89
Solution exacte			22.27	26.53	43.66	61.47	67.55	79.90

Tableau 8-2d : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0,3$.



Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
16	48	concentrée	28.80	53.72	66.11	87.28	93.34	103.3
		cohérente	28.99	54.95	69.89	95.31	103.8	131.8
64	224	coconcentrée	28.95	54.71	69.23	94.35	102.0	128.3
		cohérente	28.59	54.76	69.36	94.63	102.3	129.4
Solution exacte			28.95	54.74	96.32	94.59	102.2	129.1

Tableau 8-2e : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0.3$.

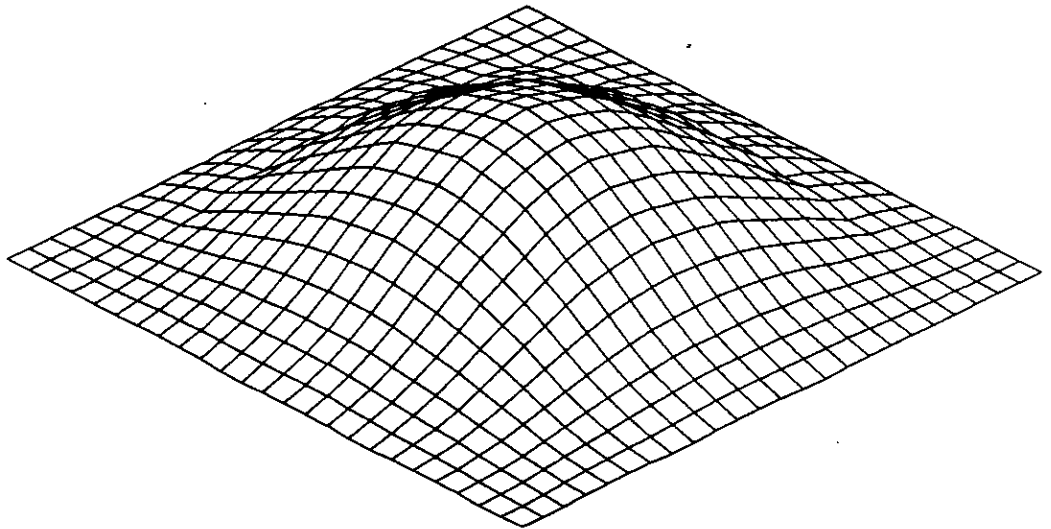
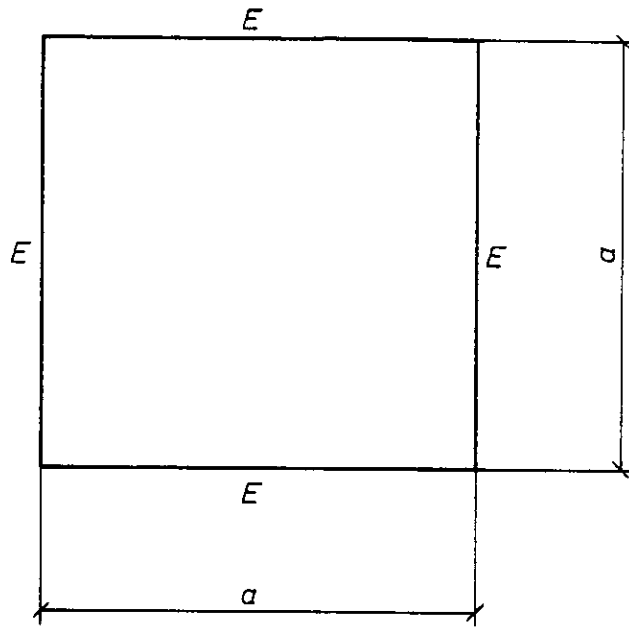


Figure 8-3b: Mode fondamentale.

Nombre d'élts	Nombre de d.d.l. total	Matrice masse	Modes					
			(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)
16	36	concentrée	35.64	69.42	69.42	95.62	104.5	104.6
		cohérente	36.06	74.03	74.03	109.5	134.5	135.0
64	196	cocentrée	35.97	73.28	73.28	107.8	130.8	131.4
		cohérente	35.99	73.44	73.44	108.3	131.9	132.5
Solution exacte			35.99	73.41	73.41	108.3	131.6	132.2

Tableau 8-2f : $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $\nu = 0,3$.

4 INTERPRETATION DES RESULTATS

Du fait que le comportement des solutions relatives aux différents modes ne diffère pas d'un cas de conditions aux limites à un autre, nous nous intéresseront particulièrement au mode fondamental d'une plaque carrée simplement appuyée le long de ses quatre bords. Pour un tel cas de conditions aux limites on a :

$$\lambda = \pi^2(i^2 + j^2)$$

Dans la présente section, nous examinerons la précision des résultats obtenus et l'évolution de ceux-ci en fonction du modèle de masse et du type d'élément utilisé.

4.1 EFFET DU GAUCHISSEMENT

Différents maillage ont été adoptés pour modéliser la plaque et ce en utilisant les 2 types d'éléments précédemment décrits.

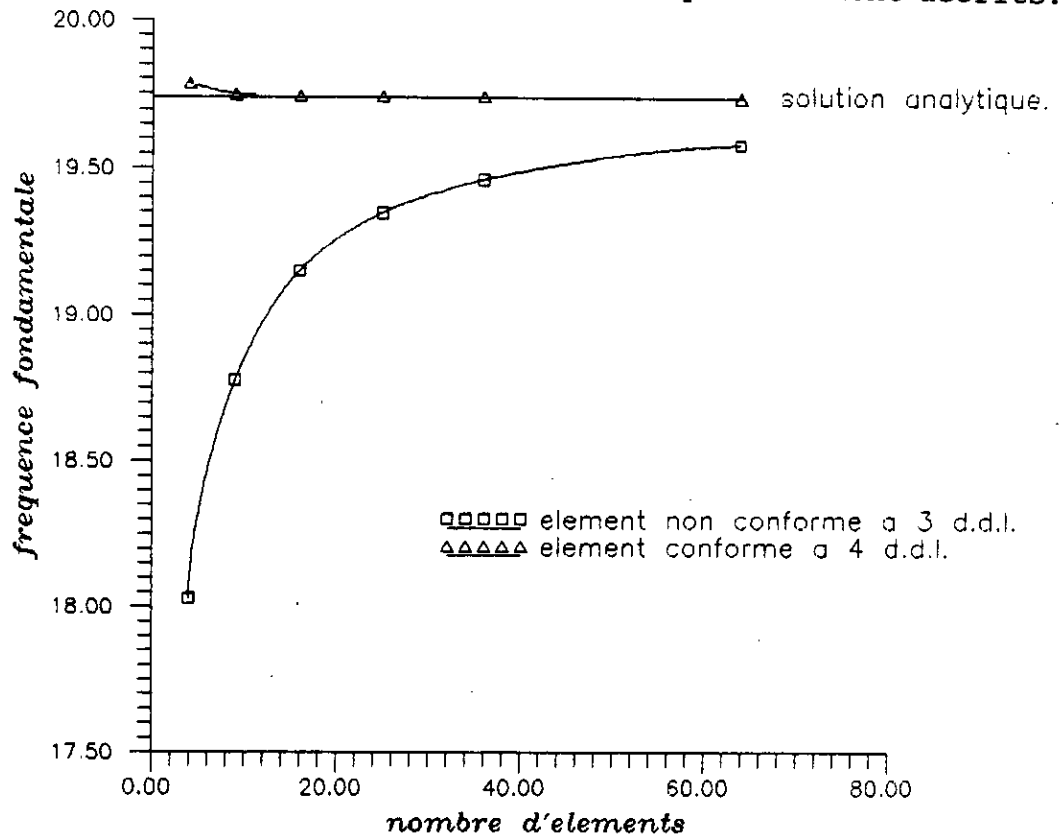


Figure 8-3 : Effet du gauchissement.

La figure (8-3) donne les résultats en fonction de la finesse de l'idéalisation pour calculer la fréquence fondamentale d'une plaque carrée simplement appuyée. Les représentations à 12 et 16 d.d.l. procurent toutes les deux des solutions précises qui convergent vers le résultats exacte. La formulation à 16 d.d.l. donne les caractéristiques d'une solution par l'énergie potentielle minimale, c'est à dire converge par excès. La grande

précision obtenue à l'aide de cette formulation par rapport à celle à 12 d.d.l. est due à la compatibilité inter-éléments que ne présente justement pas la formulation à 12 d.d.l.

4.2 EFFET DU MODELE DE MASSE

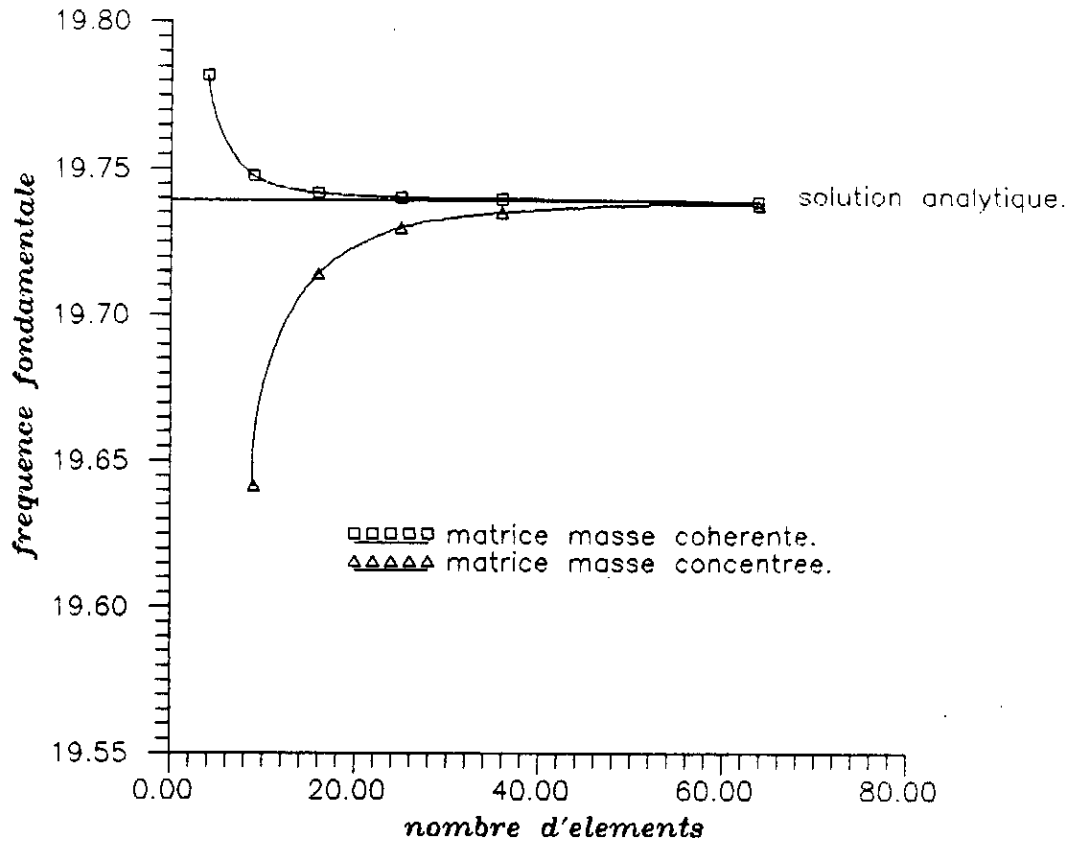


Figure 8-4 : Effet du modèle de masse.

Ce graphe permet de mieux saisir les différences entre l'utilisation des deux modèles et on voit que les deux solutions convergent; la solution du modèle cohérent est comme on pouvait s'attendre plus précise que la solution du modèle concentré. On constate également que la solution du modèle cohérent converge par valeurs supérieures alors que la solution du modèle concentré converge par valeurs inférieures, ceci est dû au fait que le modèle concentré a tendance à rendre la structure plus flexible.

5 EXEMPLE DU TABLIER D'UN PONT CONTINU

L'analyse dynamique du tablier d'un pont continu à 2 travées a été faite par M. S. Cheung, Y. K. Cheung et D. V. Ready (Réf. 18) en utilisant la méthode des bandes finies. Nous nous proposons dans le cadre de cette présente section d'analyser ce même pont par la méthode des éléments finis en utilisant l'élément rectangulaire conforme à 16 d. d. 1.

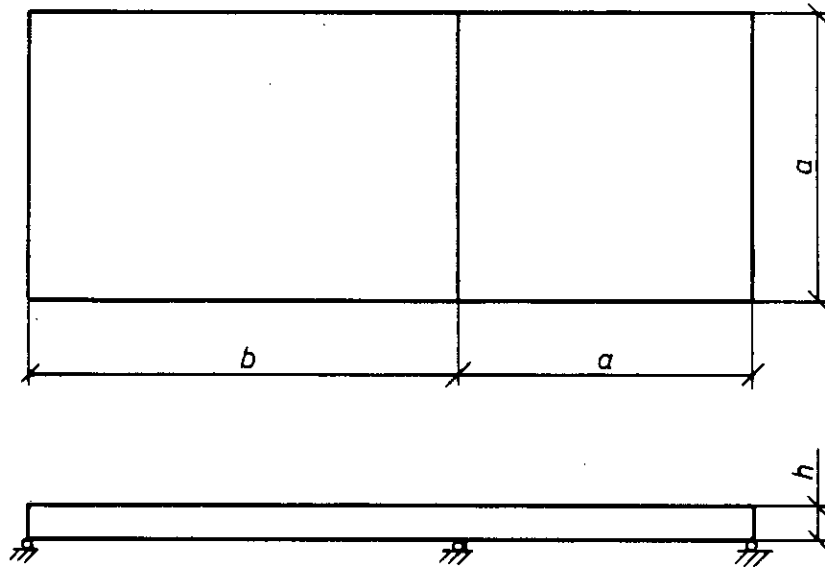


Figure 8-5 : Tablier d'un pont continu.

Le tablier du pont est constitué d'une dalle solidaire d'une série de poutres disposées longitudinalement comme le montre la figure (8-6)

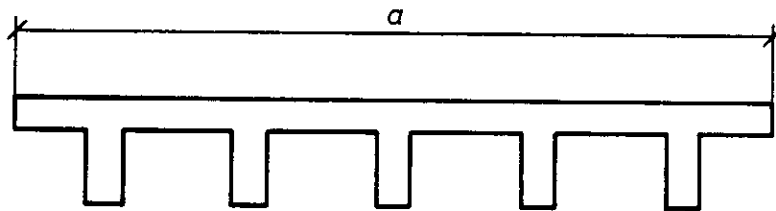


Figure 8-6 : Section transversale du pont.

En appliquant la méthode des éléments finis deux approches sont possibles dans un tel cas de figure: (i) Le tablier est considéré comme un assemblage plaque-poutres; (ii) le tablier est assimilé à une plaque mince d'épaisseur constante ayant des propriétés orthotropes équivalentes. C'est cette deuxième approche que nous allons utiliser.

Pour un matériau orthotrope dont les directions d'orthotropie coïncident avec les axes de coordonnées la relation moments-courbures s'écrit:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8-28)$$

où :

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}; \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}; \quad D_{xy} = \frac{G h^3}{12}$$

et

$$D_1 = \frac{\nu_x E_y (= \nu_y E_x) h^3}{(1-\nu_x \nu_y) 12}$$

La formulation de la matrice de rigidité élémentaire est analogue à celle de l'équation (8-18) c'est à dire:

$$K^{(e)} = \int_0^a \int_0^b B^T D B dy dx$$

Pour la matrice masse nous adoptons le modèle cohérent de l'équation (8-28):

$$M^{(e)} = \rho h \int_0^a \int_0^b N^T N dy dx \quad (8-28)$$

Le programme informatique précédemment décrit a été déroulé pour l'obtention des fréquences relatives aux six premiers modes propres. Les résultats obtenus à partir de la présente formulation ainsi que ceux obtenus par la méthode des bandes finies sont présentés dans le tableau (8-3) tandis que le maillage adopté est représenté sur la figure (8-7).

Propriétés a/b = 1.5	Modes					
	1	2	3	4	5	6
$D_x = 1$ $D_y = 1$ $D_{xy} = 0.5$	5.35 (5.35)	11.72 (11.74)	12.30 (12.31)	19.80 (19.85)	20.50 (20.50)	28.58 (28.64)
$D_x = 1$ $D_y = 1$ $D_{xy} = 0.25$	5.35 (5.35)	9.18 (9.18)	12.31 (12.31)	16.60 (16.62)	20.50 (20.50)	24.99 (25.02)
$D_x = 1$ $D_y = 0.0625$ $D_{xy} = 0.125$	5.35 (5.35)	7.39 (7.41)	12.31 (12.31)	13.01 (13.27)	14.44 (14.46)	20.50 (20.50)
$D_x = 1$ $D_y = 0.0625$ $D_{xy} = 0.0625$	5.35 (5.34)	6.49 (6.50)	10.79 (10.89)	12.30 (12.31)	13.45 (13.46)	17.53 (17.78)

Tableau 8-3 : Fréquences propres du tablier d'un pont continu à 2 travées. $\rho h = 1$, $\alpha = 1$, $D_1 = 0$.

N. B. : Les valeurs entre parenthèses sont les solutions obtenues par la méthode des bandes finies, les autres valeurs sont celles obtenues par la méthode des éléments finis.

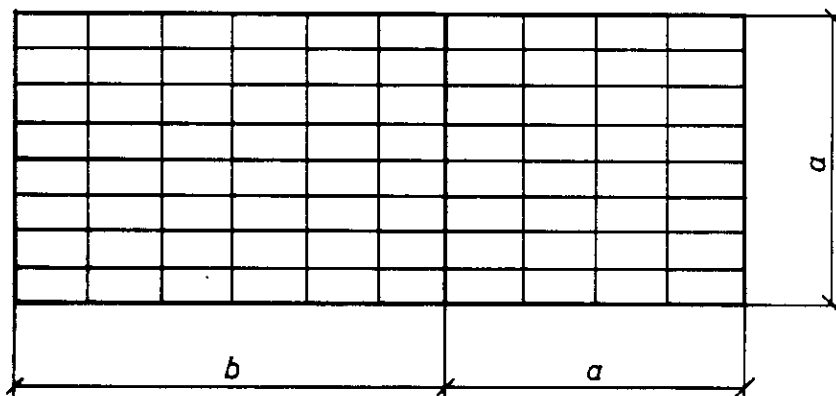


Figure 8-7 : Idéalisations du tablier en éléments finis.

On peut, au vu des résultats ci-dessus, voir qu'il existe une parfaite corrélation entre les résultats donnés par les deux méthodes.

CHAPITRE IX

ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES EPAISSES

PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1 INTRODUCTION

Nous avons déjà appliqué la méthode des éléments finis pour l'obtention des fréquences propres d'une plaque en utilisant la théorie de Kirchhoff dans laquelle les déformations de cisaillement transversal sont négligées.

Nous avons vu que dans la formulation il est difficile de satisfaire la compatibilité inter-éléments des rotations parce que celles-ci sont calculées à partir des déplacements transversaux de la plaque w .

Notre objectif à présent, est de formuler le problème de vibrations libres des plaques en utilisant la théorie de Mindlin qui tient compte de l'effet de cisaillement transversal. Avec cette théorie, le déplacement transversal ainsi que les rotations sont indépendants et de ce fait la compatibilité inter-éléments est satisfaite si on adopte les concepts de l'interpolation isoparamétrique établis dans le chapitre 5 de cette présente étude.

2 THEORIE DE MINDLIN

La théorie de Mindlin suppose que l'élément linéaire normal à la surface moyenne avant déformation demeure linéaire après déformation mais pas nécessairement normal à la surface moyenne.

Le vecteur déplacement en un point de coordonnées (x, y, z) est:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} w \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (9-1)$$

w : déplacement transversal.

β_x : rotation de la normal autour de y .

β_y : rotation de la normal autour de x .

Les déformations de flexion sont exprimées en termes de courbures:

$$\underline{\epsilon}_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9-2)$$

alors que les déformations de cisaillement supposées constantes sur toute l'épaisseur de la plaque sont:

$$\underline{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} \quad (9-3)$$

Les relations moments-courbures s'écrivent:

$$\underline{\tau}_b = C_b \underline{\epsilon}_b \quad (9-4)$$

où $\underline{\tau}_b$ consiste en deux moments de flexion M_x et M_y et un moment de torsion M_{xy} :

$$\underline{\tau}_b = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (9-5)$$

tandis que C_b est la matrice de rigidité à la flexion qui, dans le cas d'un matériau isotrope prend la forme suivante:

$$C_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (9-6)$$

avec:

E : module de Young.

ν : coefficient de Poisson.

Les relations efforts tranchants-déformations de cisaillement s'écrivent:

$$\underline{\tau}_s = C_s \underline{\epsilon}_s \quad (9-7)$$

où les efforts tranchants sont:

$$\underline{\tau}_s = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \quad (9-8)$$

et pour un matériau isotrope la matrice de rigidité au cisaillement est:

$$C_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-9)$$

L'énergie potentielle totale, dans le cas d'un mouvement de vibrations libres d'une plaque est:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \underline{\epsilon}_b^T C_b \underline{\epsilon}_b dA + \frac{1}{2} \int_A \underline{\epsilon}_s^T C_s \underline{\epsilon}_s dA - T \quad (9-10)$$

T : énergie cinétique.

3 FONCTIONS D'INTERPOLATION

La caractéristique frappante de la présente théorie est que le plus grand ordre de dérivation qui apparaît dans l'expression de l'énergie potentielle totale. La conséquence pratique émanant de ce fait est qu'on ne requière dans un tel cas, que la continuité C^0 des déplacements et des rotations indépendants.

L'élément que nous considérons est un élément isoparamétrique à 9 noeuds.

Les fonctions d'interpolation, associée chacune à noeud, définissent:

-La géométrie de l'élément en fonction des coordonnées des noeuds:

$$x = \sum_{i=1}^9 h_i x_i \quad (9-11a)$$

$$y = \sum_{i=1}^9 h_i y_i \quad (9-11b)$$

-La variation des déplacements à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux:

$$w = \sum_{i=1}^9 h_i w_i \quad (9-12a)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^9 h_i \theta_y^i \quad (9-12b)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^9 h_i \theta_x^i \quad (9-12c)$$

Les 9 fonctions d'interpolation sont:

$$h_1 = \frac{1}{4}rs(1-r)(1-s)$$

$$h_2 = -\frac{1}{2}s(1-r^2)(1-s)$$

$$h_3 = -\frac{1}{4}s(1+r)(1-s)$$

$$h_4 = -\frac{1}{2}r(1+r)(1-s^2)$$

$$h_5 = (1-r^2)(1-s^2)$$

$$h_6 = \frac{1}{2}r(1+r)(1-s^2)$$

$$h_7 = -\frac{1}{4}rs(1-r)(1+s)$$

$$h_8 = \frac{1}{2}s(1-r^2)(1+s)$$

$$h_9 = \frac{1}{4}rs(1+r)(1+s)$$

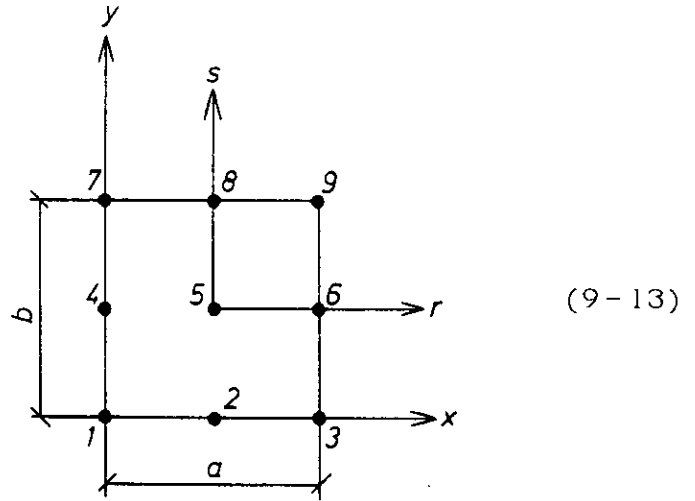


Figure 9-1: Élément isoparamétrique à 9 noeuds.

En substituant les fonctions d'interpolation h_i et les coordonnées des noeuds x_i et y_i dans les équations (9-11), on aboutit à:

$$x = \frac{a}{2}(r+1) \quad (9-14a)$$

$$y = \frac{b}{2}(s+1) \quad (9-14b)$$

On peut à présent calculer la matrice jacobienne dont on aura besoin pour formuler les matrices élémentaires de rigidité et de masse.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & b/2 \end{bmatrix} \quad (9-15)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (9-16)$$

Les équations (9-12) qui lient les déplacements à l'intérieur de l'élément à ceux de ses noeuds peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & \dots & h_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_y^9 \end{bmatrix} = H \underline{\hat{u}} \quad (9-17)$$

4 FORMULATION DES MATRICES ELEMENTAIRES

4.1 MATRICE DE RIGIDITE

La matrice de rigidité élémentaire K^e peut s'écrire:

$$K^e = K_b + K_s$$

où K_b et K_s représentent les contributions des termes de l'énergie de déformation de flexion et de cisaillement respectivement.

Pour calculer K_b et K_s , il nous faut relier les courbures et les déformations de cisaillement aux déplacements nodaux comme suit:

$$\underline{\epsilon}_b = B_b \underline{\hat{u}} \quad (9-18)$$

$$\underline{\epsilon}_s = B_s \underline{\hat{u}} \quad (9-19)$$

Les courbures et les déformations de cisaillement peuvent être reliées au vecteur déplacement en substituant l'expression de ce dernier dans les expressions respectives de celles-ci:

$$\underline{\epsilon}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & -\partial/\partial y & 0 \\ 0 & -\partial/\partial x & -\partial/\partial y \end{bmatrix} \underline{u} \quad (9-20)$$

$$\underline{\epsilon}_s = \begin{bmatrix} \partial/\partial y & -1 & 0 \\ \partial/\partial x & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u} \quad (9-21)$$

Les matrices B_b et B_s sont alors obtenues en substituant

l'équation (9-17) dans (9-20) et (9-21) respectivement:

$$B_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & -\partial/\partial y & 0 \\ 0 & -\partial/\partial x & -\partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & \dots & h_9 \end{bmatrix} \quad (9-22)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} \partial/\partial y & -1 & 0 \\ \partial/\partial x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & \dots & h_9 \end{bmatrix} \quad (9-23)$$

Les différentiation $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ doivent être remplacées par $\partial/\partial r$ et $\partial/\partial s$ puisque les fonctions d'interpolation h_i sont des fonctions des coordonnées naturelles r et s . Ceci peut être facilement fait en tenant compte des relations (9-15).

La matrice de rigidité élémentaire est alors:

$$K^e = \int_{r=-1}^{r=1} \int_{s=-1}^{s=1} B_b^T C_b B_b \det J ds dr + \int_{r=-1}^{r=1} \int_{s=-1}^{s=1} B_s^T C_s B_s \det J ds dr \quad (9-24)$$

or:

$$\det J = ab/4$$

$$K^e = \frac{ab}{4} \int_{r=-1}^{r=1} \int_{s=-1}^{s=1} B_b^T C_b B_b ds dr \frac{ab}{4} + \int_{r=-1}^{r=1} \int_{s=-1}^{s=1} B_s^T C_s B_s ds dr \quad (9-25)$$

4.2 BLOCAGE PAR CISAILLEMENT TRANSVERSAL OU "LOCKING"

Dans le cas d'une plaque mince les déformations de cisaillement transversal doivent tendre vers 0.

$$\underline{\epsilon}_b = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

Cette condition est aussi nécessaire dans le système de coordonnées naturelles (r, s) :

$$\underline{\epsilon}_b = \begin{bmatrix} \gamma_{st} \\ \gamma_{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} - \beta_s \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \beta_r \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

En utilisant les fonctions d'interpolation des équations (9-13) les déformations de cisaillement transversal ne peuvent s'annuler en tout point de l'élément lorsque celui-ci est soumis à un moment de flexion constant. Bien que les équations de la mécanique des milieux continus englobent les hypothèses de Kirchhoff, l'idéalisation de la plaque en éléments finis n'est pas capable de représenter ces hypothèses. Ce qui rend l'utilisation de l'élément inadéquate pour l'analyse des plaques minces. Ce phénomène se traduit par une surestimation de la rigidité de cisaillement.

L'élément conduit ainsi à une solution influencée par le cisaillement au lieu d'être associée au phénomène de flexion. Cette rigidité artificielle ou parasite est appelée blocage par cisaillement transversal ou locking.

Pour remédier au blocage numérique, on peut utiliser une formulation mixte dans laquelle les déformations de flexion ($\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \gamma_{xy}$) et les déformation de cisaillement (γ_{yz}, γ_{xz}) sont interpolées différemment. Une seconde solution consiste à modéliser les techniques de l'intégration réduite. En effet, les fonctions d'interpolation de l'équation (9-13) étant toutes bicubiques, une intégration exacte nécessiterait 3×3 points de gauss pour évaluer la matrice de rigidité élémentaire $K^{(e)}$. Cependant, on peut diminuer la dominance parasite du cisaillement par rapport à la flexion en utilisant une intégration numérique réduite avec seulement (2×2) points de gauss.

Dans notre cas, la matrice de rigidité de l'équation (9-25) est évaluée en réduisant l'ordre de l'intégration numérique.

4.3 MATRICE MASSE

On examinera les trois modèles de masse exposés dans le chapitre 4.

4.3.1 MATRICE MASSE COHERENTE

Les mêmes fonctions d'interpolation sont utilisées pour décrire le champ d'accélération à travers l'élément que celles utilisées pour décrire les déplacements à l'intérieur de celui-ci.

La matrice masse cohérente est:

$$M^{(e)} = \int_{r=-1}^{r=1} \int_{s=-1}^{s=1} H^T P H ds dr \quad (9-26)$$

où:

$$P = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \rho h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & \rho h^3/12 \end{bmatrix}$$

4.3.2 MATRICE MASSE DIAGONALE A COEFFICIENTS EGAUX

La masse de l'élément est équitablement répartie sur ses noeuds et les inerties de rotation sont ignorées. Le terme diagonale de la matrice masse associé au déplacement transversal w du noeud i est:

$$m_{ii} = \frac{1}{9} \int_A \rho h dA \quad (9-27)$$

Tous les autres termes de la matrice masse sont nuls.

4.3.3 MATRICE MASSE DIAGONALE A COEFFICIENTS VARIABLES

Les inerties de rotation sont encore négligées. Les termes diagonaux de la matrice masse sont:

$$m_{ii} = \frac{\left(\int h_i h_i dA \right) \left(\int \rho h dA \right)}{\int \left(\sum_{i=1}^9 h_i h_i \right) dA} \quad (9-28)$$

Tous les autres termes sont nuls.

En substituant les différentes fonctions d'interpolation dans (9-28) on obtient:

$$m_{11} = m_{33} = m_{77} = m_{99} = \frac{1}{36} \int \rho h da$$

$$m_{22} = m_{44} = m_{66} = m_{88} = \frac{1}{9} \int \rho h da$$

$$m_{55} = \frac{4}{9} \int \rho h da$$

5 EXEMPLE NUMERIQUE

L'exemple d'une plaque carrée simplement appuyée le long de ses quatre bords ayant un élancement a/h égal à 10 a été traité en utilisant un maillage de 5×5 éléments. Les résultats obtenus en adoptant les différents modèles de masses décrits ci-dessus sont présentés dans le tableau (9-1). Ce dernier présente aussi les solutions analytiques des différentes théories.

Mode	Solution 3-D	Théorie de Mindlin	Modèle de masse cohérent e	Modèle de masse concentré e (1)	Modèle de masse concentré e (2)	Théorie de Kirchhoff
(1-1)	0.0932	0.0930	0.0930	0.0934	0.0937	0.0963
(1-2)	0.2226	0.2218	0.2226	0.2231	0.2256	0.2408
(2-1)	0.2226	0.2218	0.2226	0.2231	0.2256	0.2408
(2-2)	0.3421	0.3402	0.3414	0.3396	0.3473	0.3853
(1-3)	0.4171	0.4144	0.4217	0.4124	0.4276	0.4816
(1-3)	0.4171	0.4144	0.4217	0.4124	0.4276	0.4816

Tableau 9-1 : Paramètre de fréquence $\lambda = \omega / \sqrt{G/\rho h^2}$

- Coefficient de poisson : $\nu = 0.3$
- Elancement : $a/h = 10$
- h : épaisseur de la plaque.
- a : largeur de la plaque.
- Maillage : 5x5 éléments.

6 INTERPRETATION DES RESULTATS

6.1 EFFET DU CISAILLEMENT TRANSVERSAL

Le cisaillement diffère des deux autres particularités étudiées (modèle de masse, gauchissement) car il ne découle pas de l'utilisation de la méthode des éléments finis, mais de la théorie utilisée et donc du type de plaque considéré. En effet, si la plaque est suffisamment mince, le cisaillement est négligeable et on utilise donc la théorie de Kirchhoff, si par contre elle est épaisse, alors le cisaillement ne peut plus être négligé et l'on utilise alors la théorie de Mindlin (voir chapitre 2). En comparant les résultats obtenus en utilisant des éléments conformes à quatre degrés de liberté négligeant le cisaillement et des éléments tenant compte de cet effet, on voit que les fréquences du second type d'éléments sont toujours inférieures à celles du premier type et cela est en concordance parfaite avec les résultats théoriques qui se comportent de la même manière. Ceci montre l'importance de l'effet du cisaillement qui, lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante (de l'ordre du 1/15) ne peut plus être négligé sans avoir de répercussions importantes sur la précision des résultats.

6.2 EFFET DU MODELE DE MASSE

L'effet du modèle de masse a déjà été discuté dans le chapitre précédent, cependant, on peut ajouter aux constatations déjà faites que les inerties de rotations ont une influence négligeable sur les fréquences. Le troisième modèle de masse que l'on a utilisé (Le modèle de masse à coefficients diagonaux variables) présente un avantage par rapport au modèle de masse

cohérente qui est sa plus grande facilité de programmation. Il présente également un autre avantage par rapport au modèle de masse concentrée (à coefficients diagonaux égaux) qui est une répartition plus raisonnable des masses aux noeuds et ceci, particulièrement lorsque l'élément n'est pas de forme régulière.

CONCLUSION

CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons utilisé plusieurs types d'éléments finis pour l'analyse de la flexion des plaques soumises à des vibrations libres non amorties. Les éléments à douze et à seize degrés de liberté ont permis d'évaluer l'importance de la conformité des éléments sur la précision des résultats, l'élément isoparamétrique à neuf noeuds a, lui, permis de cerner l'effet du cisaillement sur la rigidité des plaques.

On a pu aussi, à travers toute cette étude, mettre en évidence certaines particularités de la méthode des éléments finis et qui sont la conformité des éléments dont nous avons parlé plus haut et les différents modèles de masses.

Les conclusions à tirer sont exposées ci-dessous :

1°- Deux éléments rectangulaires, l'un à douze, l'autre à seize degrés de liberté ont été utilisés avec succès dans l'étude de l'effet du gauchissement sur les plaques minces en vibrations libres. Celle-ci a montré que les résultats obtenus en utilisant ce degré de liberté étaient plus précis (donc plus proches de la solution analytique de la théorie de Kirchhoff) que ceux obtenus en utilisant un élément n'incluant pas le gauchissement pour une différence temps de résolution négligeable.

2°- Un élément rectangulaire à neuf noeuds a également été utilisé avec succès dans l'étude de l'effet du cisaillement pour les oscillations libres d'une plaque épaisse dite de Mindlin et a montré que les fréquences obtenues par la théorie de Mindlin toujours inférieures aux fréquences obtenues par la théorie de Kirchhoff.

3°- Une comparaison entre les modèles de masses concentrée et cohérente a montré que les fréquences du deuxième type étaient plus précises que celles du premier, cependant, le modèle de masse concentrée présente l'avantage d'être d'une plus grande simplicité de programmation que le modèle cohérent.

REFERENCES

OUVRAGES

1. K. J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.*
2. K. J. Bathe et E. L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis," *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.*
3. J. L. Batoz et G. Dhatt, "Modélisation des Structures par Eléments Finis," *Volumes 1 et 2, Hermès Editeur, Paris, 1990.*
4. G. V. Berg, "Elements of Structural Dynamics," *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.*
5. R. D. Blevins, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," *Van Nostrand, New York, 1979.*
6. R. W. Clough et J. Penzien, "Dynamics of Structures," *McGraw Hill, New York, 1975.*
7. R. D. Cook, D. S. Malkus et M. E. Plesha, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," *John Wiley and Sons, New York, 1989.*
8. G. Dhatt et G. Touzot, "Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis," *2^{ème} édition, Maloine S.A. Editeur, Paris, 1984.*
9. R. H. Gallagher, "Finite Element Analysis : Fundamentals," *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.*
10. P. Lascaux et R. Théodor, "Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur," *Volumes 1 et 2, Masson Editeur, Paris 1987.*
11. M. Paz, "Structural Dynamics : Theory and computation," *Van Nostrand, New York, 1980.*
12. I. H. Shames et C. L. Dym, "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics," *McGraw Hill, New York, 1985.*
13. S. Timoshenko et J. N. Goodier, "Theory of Elasticity," *McGraw Hill, New York, 1951.*
14. S. Timoshenko et S. Woinowsky-Kreiger, "Theory of Plates and shells," *McGraw Hill, New York, 1959.*
15. T. Y. Yang, "Finite Element Structural Analysis," *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.*
16. O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method," *McGraw Hill, London, 1977.*

ARTICLES

17. K. J. Bathe et E. N. Dvorkin, "A four Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation," *Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol. 21*, pp. 367-383, 1985.
18. M. S. Cheung, Y. K. Cheung et D. V. Ready, "Frequency Analysis of Certain Single and Continuous Span Bridges," *Proc. Conf. on 'Developments in Bridge Design and Construction, Cardiff 1971'*, pp. 188-199. Crosby Lockwood, London 1971.
19. A. Deb et M. Booton, "Finite Element Models for Stiffened Plates Under Transverse Loading," *Computers and Structures, Vol. 6*, pp. 37-44, 1976.
20. E. Hinton et H. C. Huang, "A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields," *Computers and Structures, Vol. 28, N° 3*, pp. 361-372, 1988.
21. E. Hinton, E. M. Salonen et N. Bicanic, "A Study of Locking Phenomena in Isoparametric Elements in Mathematics of Finite Elements and Applications," *MAFELAP 1978, Brunel University*, pp. 437-447.
22. H. C. Huang et E. Hinton, "A Nine Node Lagrangian Mindlin Plate Element with Enhanced Shear Interpolation," *Engng. Comput. 1*, pp. 369-379, 1984.
23. T. J. R. Hughes, M. Cohen et M. Haroun, "Reduced and Selective Integration techniques in the Finite Element Analysis of Plates," *Nucl. Engng. Design, 46*, pp. 203-222, 1978.
24. T. A. Rock et E. Hinton, "A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation," *Computers and Structures, vol. 6*, pp. 37-44, 1976.
25. P. Tong, T. H. H. Pian et L. L. Bucciarelli, "Mode Shapes and Frequencies by Finite Element Method Using Consistent and Lumped Masses," *Computers and Structures, vol. 1*, pp. 623-638, 1971.