

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES  
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**THEME**

**ELABORATION D'UN LOGICIEL  
POUR LE CALCUL DE LA STABILITE  
ELASTIQUE NON-LINEAIRE  
DES PORTIQUES PLANS**

PROPOSE PAR

Professeur CHARIF

ETUDIE PAR :

Mr. BADAQUI M'hammed

DERIGE PAR :

Professeur CHARIF

PROMOTION 1992.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES  
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE CIVIL

**THEME**

ELABORATION D'UN LOGICIEL  
POUR LE CALCUL DE LA STABILITE  
ELASTIQUE NON-LINEAIRE  
DES PORTIQUES PLANS

PROPOSE PAR

Professeur CHARIF

ETUDIE PAR :

Mr. BADAoui M'hammed

DERIGE PAR :

Professeur CHARIF

PROMOTION 1992.

# DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**A MA MERE**

**A LA MEMOIRE DE MON PERE**

**A MA GRAND MERE**

**A TOUTE MA FAMILLE**

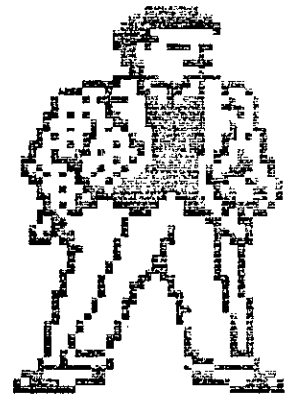
**A TOUS MES AMIS**



"Pour grandir de nouveau, l'homme est obligé de se refaire. Et il ne peut se refaire sans douleur. Car il est à la fois le marbre et le sculpteur. C'est de sa propre substance qu'il doit, à grands coups de marteau, faire voler les éclats afin de reprendre son vrai visage"

Alexis Carrel

" l'homme, cet inconnu "



## REMERCIEMENTS

En cette occasion, je voudrais témoigner ma gratitude à l'être le plus chère au monde, ma mère, pour les sacrifices qu'elle a consenti pour moi .

J'adresse aussi mes remerciements à mon ami RABAH, sans lequel je ne pense pas avoir pu réaliser ce modeste travail . Je le remercie pour son aide, ses conseils et tout le mal qu'il s'est donné pour me permettre de terminer cette thèse .

Je remercie DIEU de la bonté qu'il m'a fait en me donnant un ami comme RABAH .

Je ne peut oublier aussi KARIM, HAMID et ABDERAHMANE pour m'avoir aidé, encouragé et surtout supporté .

Mes remerciements vont aussi à Mr CHARIF pour ses conseils, ses orientations, son assistance et surtout sa gentillesse .

Je n'oublierai pas ici MUSTAPHA et MEHDI qui m'ont aidé dans les moments difficiles .

- INTRODUCTION.....	1
- CHAPITRE I : GENERALITE SUR L'ELASTICITE.....	4
1- Introduction.....	4
2- Les concepts de base de l'élasticité.....	4
2.1- Déformation.....	4
2.2- Les relations déplacements-déformations.....	5
2.3- Contraintes.....	6
2.4- Les équations de la statique.....	7
2.5- Les équations de compatibilité.....	8
2.6- Loi de HOOKE.....	8
2.7- Les formulations énergétiques.....	10
2.8- Les théorèmes de CASTIGLIANO.....	11
3- Méthode de calcul par les matrices de rigidité.....	11
3.1- Principe de la méthode.....	11
3.2- Matrice de rotation.....	13
3.3- Assemblage de la matrice de rigidité.....	14
3.4- Calcul du second membre.....	15
3.5- Résolution du système.....	16
3.6- Calcul des efforts dans les barres.....	16
- CHAPITRE II : GENERALITES SUR L'ETUDE NON LINEAIRE DES STRUCTURES.....	17
1- Introduction.....	17
2- Sources de non linéarité.....	19
2.1- Non linéarités matérielles.....	19
2.2- Non linéarités géométriques.....	19
3- Formulation des problèmes non linéaires.....	20
3.1- Non linéarités matérielles seulement.....	20
3.2- Grands déplacements.....	20
4- Méthodes de résolution des systèmes non linéaires.....	21

4.1-	Introduction.....	21
4.2-	Le processus de résolution numérique de base pour les problèmes non linéaires.....	21
4.3-	Principales méthodes numériques en analyse non linéaire.....	24
4.4-	Critères de convergence.....	27
4.5-	Risques de divergence et remèdes.....	28
-	CHAPITRE III : THEORIE DE LA STABILITE.....	29
1-	Introduction.....	29
2-	Equilibre élastique, stable et instable.....	29
3-	Formulation d'EULER pour la détermination de la charge critique d'une barre comprimée.....	31
3.1-	Formulation.....	31
3.2-	Influence des conditions de fixation des extrémités de la barre sur la valeur de la charge critique....	34
4-	Stabilité des portiques plans.....	36
4.1-	Introduction.....	36
4.2-	Etude numérique de la singularité.....	37
5-	Elaboration de la matrice de rigidité avec effet P- $\Delta$ ....	39
5.1-	Introduction.....	39
5.2-	Formulation.....	39
5.3-	Récapitulation.....	51
6-	Influence de l'effort axial sur les charges nodales équivalentes.....	57
-	CHAPITRE IV : DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE.....	59
1-	Introduction.....	59
2-	Description des variables.....	59
3-	Programme principal.....	63
4-	Introduction des données.....	66
5-	Assemblage de la matrice de rigidité.....	67
6-	Calcul du second membre.....	76

TABLE DES MATIERES



7- Résolution du système.....	78
8- Calcul des efforts dans les barres.....	83
- CHAPITRE V : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.....	85
1- Introduction.....	85
2- Expérimentation du programme.....	86
2.1- Exemple 1 (Allure générale).....	86
2.1- Exemple 2 (Influence des charges transversales)....	88
2.2- Exemple 3 (Effet de l'élancement).....	90
2.3- Exemple 4 (Effet du degré d'hyperstaticité).....	91



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION

### INTRODUCTION

La réalisation des structures, quel qu'elles soient, nécessite un dimensionnement judicieux pour assurer un fonctionnement sûr et durable et éviter une réalisation onéreuse .

Pour donner à la structure la forme et les dimensions les plus rationnelles elle doit répondre, dans l'ensemble, aux exigences requises de résistance, de rigidité et de stabilité .

La résistance étant la capacité d'une structure, de ses parties et de ses pièces de supporter, sans se détruire, une charge déterminée .

La rigidité elle est la capacité d'une structure et de ses éléments de s'opposer à l'action déformatrice des charges extérieures ( modification de la forme et des dimensions ) .

Quant à la stabilité c'est la capacité d'une structure et de ses éléments de conserver une forme initiale donnée, correspondant à l'état d'équilibre élastique .

Cette dernière fournit un prédimensionnement qui, constitue le point de départ pour l'étude complète .

La présente étude qui traite de cette partie du calcul -dans le cas particulier du flambement des portiques plans- a pour but de fournir un programme de calcul de la charge critique au-delà de laquelle la condition de stabilité n'est plus vérifiée ( c'est-à-dire au-delà de laquelle on n'a plus un équilibre élastique stable ) .

## INTRODUCTION

---

L'emploi des aciers et des alliages à haute résistance pour toutes les constructions modernes et en particuliers pour les ponts, les navires et les avions a fait de l'instabilité élastique un problème d'une importance considérable .

Les premiers problèmes de ce genre ont été résolus il y a environ deux cents ans par L.EULER . A cette époque, les principaux matériaux de construction étaient le bois et la pierre. Leur résistance relativement faible nécessitait des pièces épaisses et courtes pour lesquelles la question de stabilité élastique ne jouait pas un rôle de premier plan .

C'est pourquoi la théorie d'EULER, relative à des pièces de forme élancée, demeura longtemps sans application pratique . Ce ne fut qu'au début de la construction des ponts en acier pour les chemins de fer, pendant la deuxième moitié du siècle passé, que la question du flambement des pièces minces prit une importance pratique .

L'évolution actuelle de la réglementation tend à imposer le calcul des structures en béton armé à l'état-limite ultime. Ce qui nécessite, en particulier pour les calculs de stabilité, le recours à des méthodes d'analyse non linéaire .

Les progrès effectués ces dernières années dans le domaine du calcul des structures sur ordinateur, ainsi que l'étude expérimentale, peuvent laisser penser qu'il est possible d'obtenir par le calcul une représentation, sinon exacte du moins réaliste, du comportement sous charge des constructions .

Idéalement, la méthode de calcul la plus satisfaisante consiste à suivre

## INTRODUCTION

---

pas-à-pas le comportement de la structure et de tous ses éléments, sous un chargement croissant, en tenant compte en tout point de la déformabilité réelle du matériau; car à cause de la non linéarité de la relation force-déplacement, les forces axiales se trouvent avoir des influences secondaires qui modifient les raideurs des différents éléments .

La présente étude se compose de cinq chapitres . Elle commence par des généralités sur l'élasticité qui est la base de toute étude de ce genre (chapitre I) et se poursuit par des généralités sur l'étude non linéaire où sont exposées les différentes méthodes de calcul qui lui sont propres (chapitre II) .

Le chapitre III traite de la théorie de la stabilité où est donnée l'expression de la matrice de rigidité en tenant compte de l'effet  $P-\Delta$  par la méthode des fonctions de stabilité .

Au chapitre IV on présentera le programme réalisé .

Et enfin dans le chapitre V des exemples sont traités à l'aide du dit programme et une interprétation est donnée à chaque exemple .

# **CHAPITRE I :**

## **GENERALITES SUR L'ELASTICITE**

CHAPITRE I  
GENERALITES SUR L'ELASTICITE

1. Introduction :

Avant d'aborder la problématique afférente à l'analyse des structures, il serait judicieux d'énoncer les principes de base de l'élasticité toujours en vigueur bien que découlant de la mécanique Newtonienne.

La deuxième étape consistera à définir les conditions d'équilibre et de compatibilité qui furent à la bases de l'établissement par NAVIER, au siècle dernier, de la méthode hyperstatique.

Pour ce chapitre, nous énoncerons les principes les plus importants de la formulation énergétique établis par MAXWELL-CASTIGLIANO au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Ces derniers menèrent à l'établissement des deux théorèmes de CASTIGLIANO qui sont d'une importance cruciale pour l'étude des systèmes structuraux.

2- Les concepts de base de l'élasticité :

Les hypothèses considérées dans ce chapitre consistent en ce que les déformations des matériaux sous l'effet des charges suivent des lois linéaires; et qu'à leur suppression le corps déformé reprend son état initial.

Cette dernière propriété n'est plus vérifiée quand la limite d'élasticité est dépassée.

2.1- Déformation :

Tout corps est susceptible de changer de forme et de dimensions, d'où la notion de déformation. Les déformations d'un corps peuvent résulter de l'action de forces extérieures ou d'un changement de température. Elles entraînent le déplacement des points du corps, de ses lignes et de ses sections fictives; aussi bien dans le plan que dans l'espace par rapport à leur position initiale; variant ainsi d'un point à un autre sous l'effet des charges appliquées.

Dans le cas général, les vecteurs de déformations sont définis comme suit :

$$\{ \varepsilon \}^T = [ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} ] \quad (I.2.1)$$

2.2- Les relations déplacements-déformations :

Chaque déformation entraîne un déplacement; les relations qui en découlent sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} ; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ; \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} ; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} . \end{aligned} \quad (I.2.2)$$

Les relations ci-dessus, appelées également relations cinématiques, peuvent être aussi formulées sous la forme matricielle suivante :

$$\{ \varepsilon \} = [ L ] \{ U \}$$

- où  $\{ \varepsilon \}$  : est le vecteur des déformations ;  
 $\{ U \}$  : est le vecteur des déplacements ;  
 $[ L ]$  : est l'opération linéaire.

### 2.3- Contraintes :

Les contraintes sont les conséquences de l'interaction d'un corps sollicité par des forces extérieures. dans un même point les contraintes orientées dans divers sens sont, en règle générale, différentes; elles peuvent être normales ou tangentiellles. Soit une section fictive faite en un point du corps (fig I.2.3), les contraintes sont :

- Normales si elles éloignent les plans rapportés à un point en traction; elles les rapprochent en compression, elles sont notées  $\sigma$ .

- Tangentiellles si elles tendent à faire glisser ces mêmes plans les uns sur les autres, elles sont notées  $\tau$ .

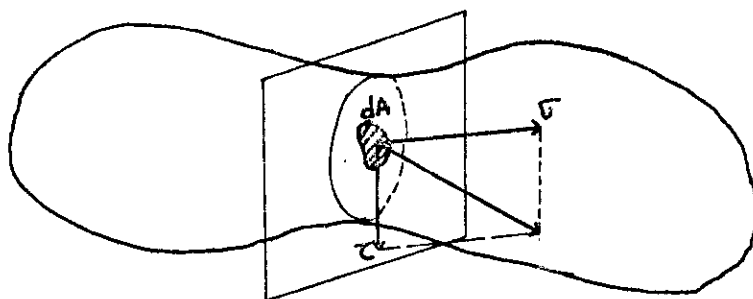


Figure (I.2.3) - contrainte dans un point.

#### 2.3.1- Les contraintes principales :

En chaque point d'un corps chargé d'une manière quelconque, il existe des plans dits plans principaux où les contraintes tangentiellles sont nulles. Les contraintes normales qui s'y appliquent sont appelées des contraintes principales.

Il existe au moins trois plans principaux mutuellement perpendiculaires.



On désigne par convention ces trois contraintes principales par  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  tel que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

### 2.3.2- Contraintes admissibles :

Lorsque le passage des forces appliquées aux contraintes est licite, il est possible de définir les contraintes admissibles en divisant celles qui correspondent à la ruine par un coefficient approprié, généralement fixé par des normes ou des règlements en vigueur.

Les matériaux ductiles présentent une limite d'élasticité au delà de laquelle commencent de grandes déformations plastiques, qui sont essentiellement suivies de rupture.

Cette limite d'élasticité correspond à un état dangereux car à ce moment le matériau commence à s'altérer profondément.

Pour éviter que le matériau de la structure ne se plastifie en service et en vertu des critères de plastification, il a été fixé la plus grande contrainte de compression admissible en divisant la limite d'élasticité  $\sigma_e$  par le coefficient de sécurité admis  $S_b$ , formulé par :

$$[ \sigma_{adm} ] = \frac{\sigma_e}{S_b}$$

### 2.4- Les équations de la statique :

En considérant que les contraintes normales et tangentielles varient d'une manière continue, les équations d'équilibre nous donnent grâce à un développement de TAYLOR du premier ordre les équations suivantes pour le cas tridimensionnel :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

d'après le principe de réciprocité des contraintes :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ et } \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

### 2.5- Equations de compatibilité :

Les conditions de compatibilité sont les conditions de déformations qui assurent l'unicité des déplacements. Elles sont formulées par :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial x}$$

### 2.6- Loi de HOOKE :

Les matériaux de construction usuels présentent un diagramme  $(\sigma, \epsilon)$  qui débute par une partie linéaire appelée droite de HOOKE, le long de laquelle les déformations sont réversibles.

Dans la plus part des constructions et des machines, les matériaux travaillent dans cette zone pour laquelle on peut écrire l'équation suivante :

$$\sigma = E \epsilon$$

qu'on appelle loi de HOOKE.

De même, il a été établi les relations existant entre le glissement  $\gamma$  et les contraintes tangentielles  $\tau$  :

$$\tau = G \gamma$$

où  $G$  est le module d'élasticité transversale :

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

et  $\nu$  est le coefficient de POISSON.

Les lois de HOOKE généralisées appelées également équations constitutives s'écrivent :

$$\{ \sigma \} = [ D ] \{ \epsilon \}$$

[D] étant la matrice des propriétés du matériau :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Dans le cas général, nous considérons en plus les déformations propres dues à la température :

$$\{ \sigma \} = [ D ] ( \{ \epsilon \} - \{ \epsilon_0 \} ) + \{ \sigma_0 \}$$

où  $\sigma_0$  est la contrainte préexistante dans le corps et  $\epsilon_0$  la déformation due aux différences de température.

2.7- Les formulations énergétiques :

2.7.1- Le principe de l'énergie potentielle minimum :

Ce principe énonce un critère énergétique permettant de caractériser les déplacements solutions dans un sous-domaine de déplacement cinématiquement admissible.

Pour tout état d'équilibre stable, les déplacements cinématiques sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle et réciproquement. L'énergie totale s'écrit :

$$\pi = \mathcal{U}_i + \mathcal{U}_e$$

Rappelons que l'énergie potentielle externe est égale en valeur absolue et opposée en signe à la somme des travaux des forces extérieures :

$$\mathcal{U}_e = - W_e$$

Après un calcul variationnel, l'énergie totale qui minimise l'énergie potentielle s'exprime par :

$$\delta\pi = \delta\mathcal{U}_e - \delta W_e = 0$$

$$\int_V (\delta\varepsilon)^T \sigma \, dv = \int_V (\delta U)^T b \, dv + \int_V (\delta U)^T s \, ds + \sum_{p=1}^n (\delta u) F_p \quad (I.2.7.1)$$

où :

$(\delta U)^T = [ \delta u \quad \delta v \quad \delta w ]$  est le vecteur transposé déplacements virtuels et  $(\delta\varepsilon)^T$  est le vecteur transposé des déformations virtuelles provoquées par les déplacements virtuels  $\delta U$ .

2.7.2- Le principe des déplacements virtuels :

Un corps déformable est en équilibre si l'énergie de déformation virtuelle interne est égale au travail virtuel des forces extérieures pour chacun des degrés de liberté du corps.

La formulation mathématique est donnée par (I.2.7.1).

2.8- Les théorèmes CASTIGLIANO :

Ces théorèmes ont été émis pour décrire les structures discrétisées.

Théorème 1 :

D'après le principe des travaux virtuels, où l'énergie de déformation est exprimée en fonction des déplacements aux noeuds.

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{U}(U_i)}{\partial U_i}$$

Théorème 2 :

D'après le principe de l'énergie de déformation complémentaire qui est fonction aux noeuds.

$$U_i = \frac{\partial \mathcal{U}(F_i)}{\partial F_i}$$

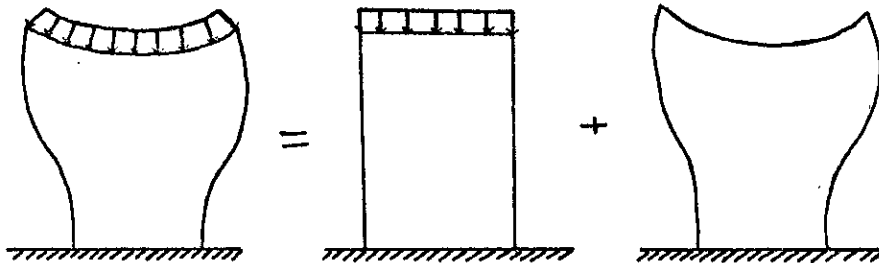
3.- METHODE DE CALCUL PAR LES MATRICES DE RIGIDITE :

3.1.- Principe de la méthode :

La méthode de calcul par les matrices de rigidité se base sur le principe simple de la superposition des états d'équilibre qui sont les suivants :

- Cas de chargement sans déformation,
- Cas de déformation sans chargement.

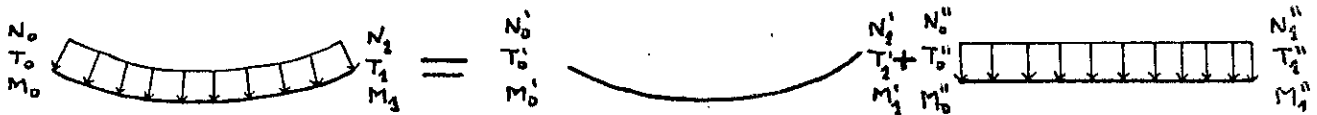
Ceci est illustré en (fig 3.1)



figure(3.1) Superposition des états d'équilibre.

Ainsi pour chaque barre de la structure, nous pourrions décomposer les efforts réels en la somme de (fig 3.2) :

- efforts dus aux chargements en considérant la barre bi-encastée et chargée.
- efforts dus aux déplacements imposés réels sur cette barre.



figure(3.2) Superposition des efforts dans une barre.

Les efforts ( $N_0, T_0, M_0, N_1, T_1, M_1$ ) peuvent être facilement calculés par une méthode énergétique simple telle CASTIGLIANO.

Cette dernière méthode permet de calculer les déplacements en des points particuliers des barres.

Elle découle du théorème du même nom qui stipule que :

"Si en un point P est appliquée une force  $F_p$ , alors le déplacement U en ce point P et suivant la direction de cette force  $F_p$  est donné par :

$$u = \frac{d W}{d F_p}$$

où  $W$  est le potentiel élastique total de la poutre dû à toutes les forces participant à la déformation.

Cette méthode peut être reconstituée par une formulation matricielle qui est une relation reliant efforts et déplacements pour la barre.

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

où  $\{F\}^T = \{N_0 \ T_0 \ M_0 \ N_1 \ T_1 \ M_1\}$  vecteur forces;  
 $\{U\}^T = \{U_0 \ V_0 \ \varphi_0 \ U_1 \ V_1 \ \varphi_1\}$  vecteur déplacements;  
 $[K]$  : matrice de rigidité locale de la barre dont l'expression est:

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EI}{L}$	0	0
0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EI}{L}$	0	0
0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$

### 3.2- Matrice de rotation:

Cette notion correspond aux problèmes de systèmes d'axes liés à la barre ou à la structure.

Le repère global, ou repère de la structure, noté  $(X, Y)$ , sert à définir

les coordonnées des noeuds. Dans ce repère seront fournies les réactions des appuis et les déplacements des noeuds.

Le repère local, ou repère lié à la barre, noté (1,2), est un repère propre à chaque barre, défini comme suit :

- axe 1 parallèle à la barre et orienté du début (noeud origine) de la barre à sa fin (noeud fin).

- axe 2 directement perpendiculaire à l'axe 1.

Tout ce qui concerne la matrice rotation sera traité plus en détail dans le chapitre IV.

### 3.3- Assemblage de la matrice de rigidité:

Tout ce qui concerne ce paragraphe se traité en détail au chapitre IV. Mais nous donnerons ici les caractéristiques de la matrice de rigidité.

#### a)- [K] est symétrique:

C'est une propriété très importante dans le calcul matriciel des structures et peut être démontrée facilement en appliquant le théorème de BETTI-MAXWELL.

$$[K] = [K]^T$$

#### b)- [K] est singulière:

Ceci correspond à ce que le déterminant de [K] est nul, la structure n'étant soumise à aucune condition d'appui.

Pour supprimer cette caractéristique, le système ne pouvant être résolu sinon, il faudra prendre en considération les conditions d'appuis au nombre suffisant.

#### c)- [K] est définie positive:

Lorsque les forces appliquées à une structure provoquent des déformations le travail effectué est emmagasiné sous forme d'énergie de déformation. Cette énergie est toujours positive ou nulle. Elle s'écrit:

$$W = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \geq 0$$



3.4- Calcul du second membre:

Nous allons considérer ici le second membre du système cité dans la partie précédente.

Nous allons nous appliquer ici à déterminer l'expression de ce terme  $\{F\}$ . Ce dernier s'écrit comme suit :

$$\{F\} = \{F_0\} - \sum_a \{F_a''\}$$

- Le terme  $\{F_0\}$  représente les forces extérieures appliquées au noeud. Ces forces sont soit des actions ponctuelles connues exercées sur des noeuds non appuyés, soit les réactions d'appuis.

Ainsi le terme  $\{F_0\}$  est connu pour les noeuds non appuyés et inconnu pour les noeuds appuyés.

- Le terme  $\{F_a''\}$  correspond aux forces appliquées sur les barres en considérant celles-ci sans déplacements.

Il est donc nécessaire, pour chaque barre, de calculer les efforts résultants des charges qui lui sont directement appliquées en la considérant isolée de la structure et encastrée à ces extrémités (voir figure 3.4).

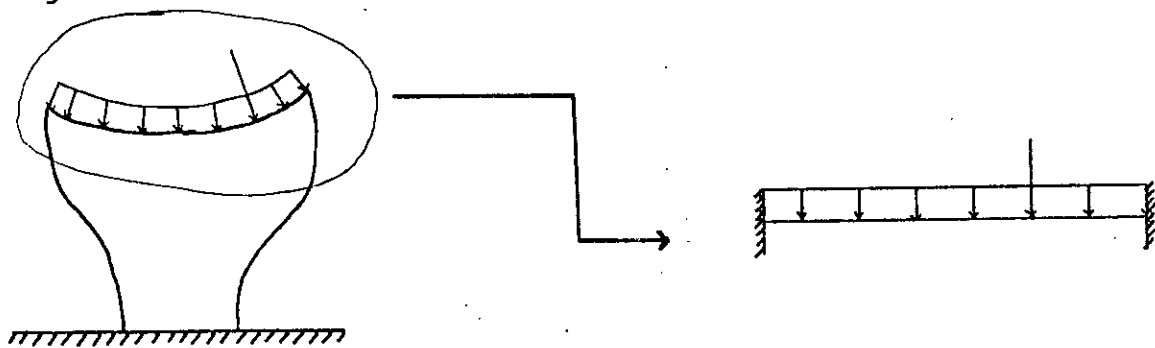


figure (3.4)

3.5- Résolution du système:

Ce paragraphe sera traité en détails au chapitre IV.

3.6- Calcul des efforts dans les barres:

Pour calculer les efforts dans les barres il nous suffit de reprendre le principe de base de la méthode de calcul par les matrices de rigidité : c'est-à-dire la superposition des deux états d'équilibre cités dans la section (3.1) plus haut.

Nous laisserons les détails au chapitre IV.

## **CHAPITRE II :**

# **GENERALITES SUR L'ETUDE NON LINEAIRE DES STRUCTURES**

CHAPITRE II

GENERALITES SUR L'ANALYSE NON-LINEAIRE DES STRUCTURES

1- INTRODUCTION:

Pour construire une théorie linéaire en analyse des structures, on pose une série d'hypothèses quant à la structure et aux propriétés des matériaux ainsi qu'à la nature des déformations.

Les hypothèses garantissant une analyse linéaire des structures sont :

- a) Hypothèse de la petitesse des déformations.
- b) Hypothèse qui stipule que l'interaction entre flexion et effort normal ( effet P- $\Delta$  ) est négligée.
- c) Hypothèse sur l'élasticité et la linéarité du matériau.
- d) Hypothèse sur la constance des conditions aux limites.

Avec ces hypothèses l'analyse statique d'une structure se réduit toujours à la résolution d'un système linéaire :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

avec  $[K]$  : matrice de rigidité constante et indépendante du chargement, déplacements, déformations et contraintes;

$\{U\}$  : vecteur des déplacements nodaux;

$\{F\}$  : vecteur des forces nodales.

La linéarité se traduit par le fait que si le chargement est multiplié par un coefficient  $\lambda$ , alors les déplacements sont amplifiés de la même manière.

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda ( [K] \{U\} ) = \{\lambda F\}$$

$$\Leftrightarrow \quad [K] \{\lambda U\} = \{\lambda F\}$$

car  $[K]$  est constante.

Si cela n'est pas vérifié alors le problème est non-linéaire, et quelle que soit la source de non-linéarité, la matrice de rigidité  $[K]$  n'est plus indépendante de  $\{F\}$  et de  $\{U\}$ .

Voyons à présent comment interviennent les quatre hypothèses précédentes dans l'établissement d'un système linéaire  $[K] \{U\} = \{F\}$ .

- L'hypothèse a) intervient dans l'évaluation de  $[K]$  et  $\{F\}$ .

Car l'on suppose que les déformations sont petites par comparaison aux dimensions du corps déformé.

A ce titre, on néglige les modifications qui surviennent dans la disposition des forces extérieures par rapport aux différentes parties du corps. D'un autre côté les rigidités ne changent pas par cause de changement de géométrie.

- L'hypothèse b) influe sur la construction de la matrice  $[K]$ , car les rigidités flexionnelles sont indépendantes des efforts normaux.

- L'hypothèse c) intervient dans les lois liant les contraintes aux déformations. Car l'on suppose que pour ces matériaux la loi de HOOKE qui établit une dépendance directement proportionnelle entre les déformations et les sollicitations reste en vigueur.

En distinguant aussi que ces déformations sont élastiques, c'est-à-dire qu'elles disparaissent aussitôt que cesse l'action des forces qui étaient à leur origine.

- L'hypothèse d) implique que les relations décrivant les conditions d'appuis sont constantes et ne changent pas lors du chargement.

## 2- SOURCES DE NON-LINEARITE:

La non-linéarité peut être causée par plusieurs facteurs. Ces facteurs peuvent être classés en deux groupes principaux :

- non-linéarités matérielles (ou constitutives , rhéologiques).
- non-linéaires géométriques (ou cinématiques).

Nous allons à présent donner un petit aperçu de ces deux groupes :

### 2.1- Non-linéarités matérielles:

Ces non linéarités sont propres au matériau, c'est-à-dire qu'elles en sont des caractéristiques de par sa constitution ou sa rhéologie.

Elles peuvent être instantanées : quand la non linéarité existe avec le matériau indépendamment des effets extérieurs.

On peut citer comme exemple ici :

- matériau élastique non-linéaire de par sa rhéologie.
- plasticité.
- fissuration.

Comme elles peuvent aussi être différées : lorsque l'apparition de la cause de la non-linéarité ne provoque pas immédiatement le comportement non-linéaire, mais ce dernier n'apparaît qu'après un certain temps.

Ici on peut citer comme exemples :

- le fluage.
- le retrait.
- la viscosité.

### 2.2- Non-linéarité géométrique:

Quand les déplacements sont grands, les équations d'équilibre basées sur la géométrie initiale ne sont plus valides et doivent être modifiées pour tenir compte des variations géométriques.

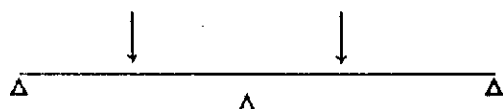
Ainsi les relations forces-déplacements sont modifiées car les variations

géométriques génèrent des forces internes supplémentaires dont il faudra tenir compte.

De plus, si les grands déplacements causent de grandes déformations, il faudra tenir compte des termes d'ordres supérieurs intervenant dans le tenseur déformations. Ce qui engendre des relations non-linéaires entre les déplacements et les déformations.

On peut citer ici comme exemples :

- effet P- $\Delta$ .
- variation des conditions d'appuis. Voir (fig 2.2)



(fig 2.2)

### 3- FORMULATION DES PROBLEMES NON-LINEAIRES:

La formulation d'un problème non-linéaire dépend de la source et du degré de non-linéarité étudiée .

#### 3.1- Non-linéarité matérielle seulement:

Ce cas se présente lorsque les déplacements et les déformations sont petits, et où la loi rhéologique  $\sigma-\epsilon$  est non-linéaire.

Dans ce cas, on utilise les contraintes et les déformations classiques.

#### 3.2- Grands déplacements:

Dans ce cas les déplacements sont très importants. Ce cas comporte deux cas de figure :

a)- les déformations sont petites; ici les déplacements sont constitués essentiellement de mouvements de corps rigides.

b)- les déformations sont grandes; par contre dans ce cas de figure les déformations constituent l'essentiel des déplacements.

Dans ce cas, cas des grands déplacements, il faut utiliser les expressions appropriées des tenseurs  $\sigma$  et  $\epsilon$ .

#### 4- METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES NON-LINEAIRES:

##### 4.1- Introduction:

Plusieurs classes de problèmes non-linéaires qui intéressent un grand nombre de branches de la science et de l'engineering peuvent être réduites à la résolution d'un système d'équations dont les coefficients dépendent des variables du problème.

##### 4.2- Le processus de résolution numérique de base pour les problèmes non-linéaires:

La résolution des problèmes d'analyse des structures résulte, dans une large mesure, comme on l'a dit, dans la résolution d'un système d'équations de la forme :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

où  $\{U\}$  : est le vecteur des inconnues (déplacements);

$\{F\}$  : est le vecteur des charges appliquées;

$[K]$  : est la matrice de rigidité assemblée.

Si les coefficients de la matrice  $[K]$  dépendent des inconnues  $\{U\}$  ou des charges  $\{F\}$  ou de leurs dérivées alors le problème devient clairement non-linéaire.

Dans ce cas, la résolution directe de ce système est généralement impossible et un schéma itératif devra être adopté.



Ce schéma itératif consiste en la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions non-linéaires sont satisfaites avec une certaine précision.

Un problème structurel non-linéaire doit vérifier les lois de la mécanique des milieux continus :

- équilibre.
- compatibilité.
- lois constitutives.

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes non-linéaires. Elles sont, dans leur quasi totalité, basées sur un même principe :

A partir d'une approximation initiale des déplacements (éventuellement nulles), on calcule les contraintes selon le modèle constitutif.

Ces contraintes sont équivalentes à un système de forces nodales internes  $\{F_i\}$  devant équilibrer les forces nodales extérieures  $\{F\}$ .

Généralement, les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre eux est appelée "FORCES RESIDUELLES" ou simplement "RESIDUS" :

$$\Delta F = F - F_i$$

Ces résidus doivent être éliminés afin d'assurer l'équilibre.

En général, pour un niveau de charge donné, un certain nombre d'itérations linéaires sont nécessaires pour réduire les forces résiduelles à un certain degré de précision recherché.

La qualité des résultats finaux dépend des différents paramètres numériques associés à la méthode utilisée dont on peut citer :

- dimension de l'incrément.
- procédé d'itération.
- précision requise.
- critère de convergence...etc.

Les nombreuses méthodes non-linéaires existantes peuvent être groupées en trois classes :

- incrémentales.
- itératives.
- mixtes.

Nous allons expliciter ces trois groupes:

#### 4.2.1- Méthodes incrémentales:

Dans ces méthodes, le chargement est subdivisé en plusieurs incréments pas forcément égaux. Durant chaque incrément, les déplacements sont obtenus par la résolution d'un système linéaire :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

où  $[K]$  est déduite des résultats de l'incrément précédent, et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment.

Le procédé est ainsi répété jusqu'au chargement final.

Il n'y a aucune itération pour restaurer l'équilibre.

L'inconvénient majeur réside dans le cumul des erreurs et dans l'impossibilité de prévoir la taille minimale des incréments pour satisfaire une tolérance fixée.

#### 4.2.2- Méthodes itératives:

Dans ces méthodes le chargement est appliqué en un seul incrément.

Les forces résiduelles, déduites des résultats de l'itération précédente, sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédentes. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouveaux résidus.

Le procédé continue jusqu'à l'élimination des résidus à la précision désirée.

La redistribution des forces résiduelles peut se faire avec une matrice de rigidité constante ou variable (tangente ou sécante).

Les méthodes itératives sont plus lentes que les méthodes incrémentales mais permettent un meilleur contrôle de la précision et le procédé

d'itération peut être facilement inclus dans un algorithme linéaire. L'inconvénient principal est que les contraintes et déformations ne sont déterminées que pour un seul incrément sans aucune information sur le chemin non-linéaire parcouru.

D'autre part, si le chargement est variable avec le temps (statique ou dynamique) et/ou si le chargement final est inconnu (recherche de la charge d'instabilité ou de rupture), et/ou si les lois constitutives sont incrémentales et dépendent du chemin parcouru (fluage, plasticité ...), alors la méthode est inutilisable.

#### 4.2.3- Méthodes mixtes:

Ces méthodes incrémentales et itératives à la fois combinent les avantages des deux méthodes précédentes et sont toutefois plus lentes.

Le chargement est appliqué par incréments et dans chaque incrément, plusieurs itérations sont effectuées afin d'assurer la convergence.

Les algorithmes de ces méthodes peuvent se ramener aisément à un seul incrément de la méthode itérative.

#### 4.3- Principales méthodes numériques en analyse non-linéaire:

Il existe trois méthodes principales en calcul non linéaire des structures dont les algorithmes sont similaires et consistent à éliminer les forces résiduelles. Le résidu initial  $\Delta F^0$  étant bien entendu l'incrément de charge appliqué. Les conditions  $F^0$  et  $U^0$  sont connues. Le résidu appliqué à l'itération est  $\Delta F^0$  égal à la différence entre les forces extérieures et les forces nodales internes résultant de l'état de contraintes à l'itération  $i-1$ :  $\Delta F^{i-1} = F - F_i^{i-1}$ .

4.3.1- Méthode de NEWTON-RAPHSON: (figure 4.3.1)

Les conditions initiales  $F^0$ ,  $U^0$  et  $K^0$  étant connues, le résidu qu'on doit éliminer est  $\Delta F^0$ .

Ce résidu n'est autre que l'incrément de charge qui se calcule par :

$$\Delta F^0 = F - F_I^0 = F - F^0 = F - K^0 U^0$$

on résout	$K^0 \Delta U^1 = \Delta F^0$	et on déduit $\Delta U^1$
le déplacement est	$U^1 = U^0 + \Delta U^1$	et on déduit $F_I^1$ et $K^1$
on calcule le nouveau résidu	$\Delta F^1 = F - F_I^1$	
on résout	$K^1 \Delta U^2 = \Delta F^1$	et on déduit $\Delta U^2$
le déplacement est	$U^2 = U^1 + \Delta U^2$	et on déduit $F_I^2$ et $K^2 \dots$

On fait varier  $i$  de 1 jusqu'à  $n$  pour , qui la précision est atteinte. L'algorithme sera donc :

résidu	$\Delta F^{i-1} = F - F_I^{i-1}$	
résoudre	$K^{i-1} \Delta U^i = \Delta F^{i-1}$	et déduire $\Delta U^i$
cumuler	$U^i = U^{i-1} + \Delta U^i$	et déduire $K^i$ et $F_I^i$

4.3.2- Méthode de la rigidité sécante: (figure 4.3.2)

L'algorithme est similaire à celui de NEWTON-RAPHSON avec une matrice de rigidité différente.

A partir des conditions initiales  $F^0$ ,  $U^0, K^0$  et  $F_I^0 = F^0$  on calcule le résidu initial  $\Delta F^0 = F - F_I^0 = F - K^0 U^0$ .

On résout  $K^0 \Delta U^1 = \Delta F^0$  d'où on déduit  $\Delta U^1$ .

Le déplacement sera  $U^1 = U^0 + \Delta U^1$  et l'on déduit  $F_I^1$  et  $K^1$  telle que

$$K^1 U^1 = F_I^1 \quad (K^1 \text{ est donc sécante}).$$

Résidu  $\Delta F^1 = F - F_I^1 = F - K^1 U^1$ .  
 Résoudre  $K^1 \Delta U^2 = \Delta F^1$  déduire  $\Delta U^2$ .  
 Déplacement  $U^2 = U^1 + \Delta U^2$ .

L'algorithme est donc ( $i=1,2,3\dots$ ) :

Résidu  $\Delta F^{i-1} = F - F_I^{i-1} = F - K^{i-1} U^{i-1}$ .  
 Résoudre  $K^{i-1} \Delta U^i = \Delta F^{i-1}$  et déduire  $\Delta U^i$ .  
 Cumuler  $U^i = U^{i-1} + \Delta U^i$  et déduire  $F_I^i$  et  $K^i$  telle que  
 $K^i U^i = F_I^i$ .

Avec les conditions initiales  $U^0, K^0, F^0$  et  $F_I^0 = F^0$ , cela revient à effectuer des linéarisations par rapport à la configuration initiale de chaque incrément.

Cette méthode est rapide mais coûteuse à cause des actualisations de  $K$  à chaque itération.

#### 4.3.3- Méthode de la rigidité initiale: (figure 4.3.3)

Pour éviter les actualisations coûteuses de  $K$ , on utilise dans cette méthode une matrice de rigidité constante:

Résidu initial  $\Delta F^0 = F - F_I^0 = F - K^0 U^0$ .  
 Résoudre  $K^0 \Delta U^1 = \Delta F^0$  et déduire  $\Delta U^1$ .  
 Cumuler  $U^1 = U^0 + \Delta U^1$  et déduire  $F_I^1$ .  
 Résidu  $\Delta F^1 = F - F_I^1$ .  
 Résoudre  $K^0 \Delta U^2 = \Delta F^1$  et déduire  $\Delta U^2$ .  
 Cumuler  $U^2 = U^1 + \Delta U^2 \dots$ etc

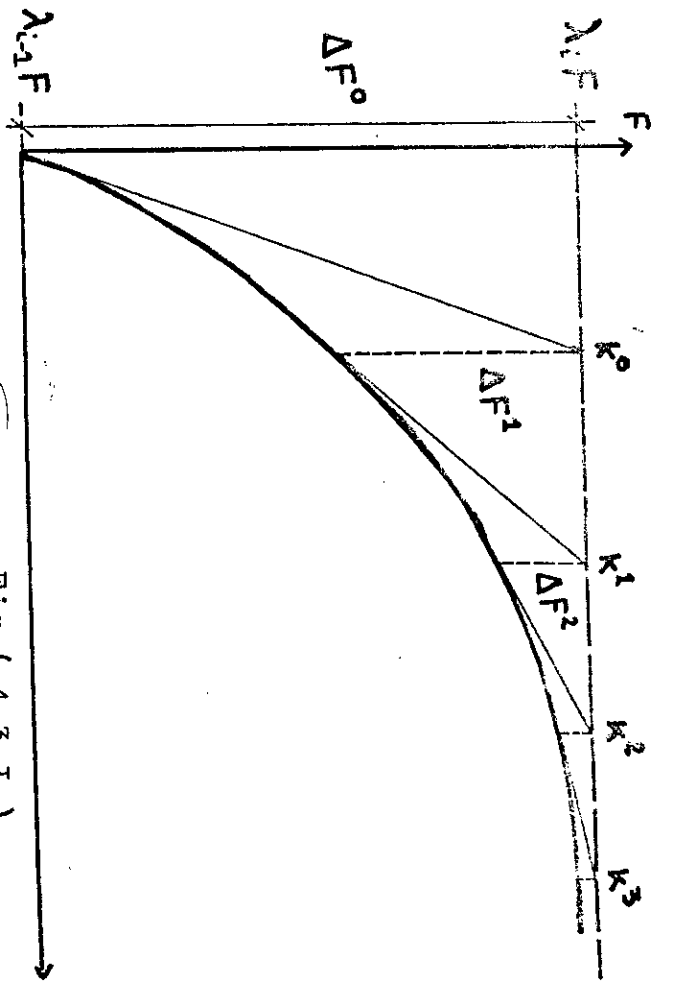


Fig ( 4.3.1 )

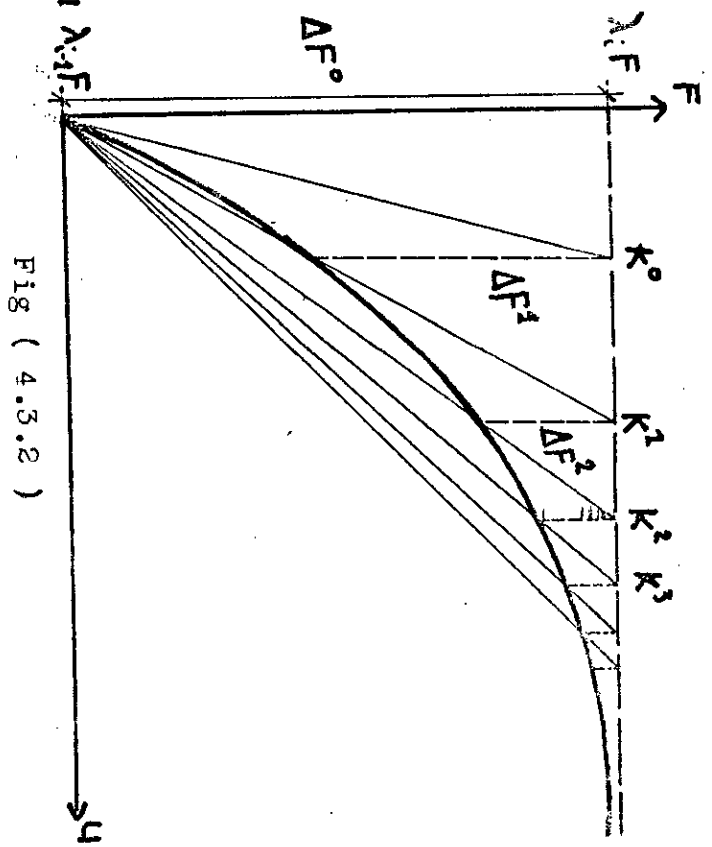


Fig ( 4.3.2 )

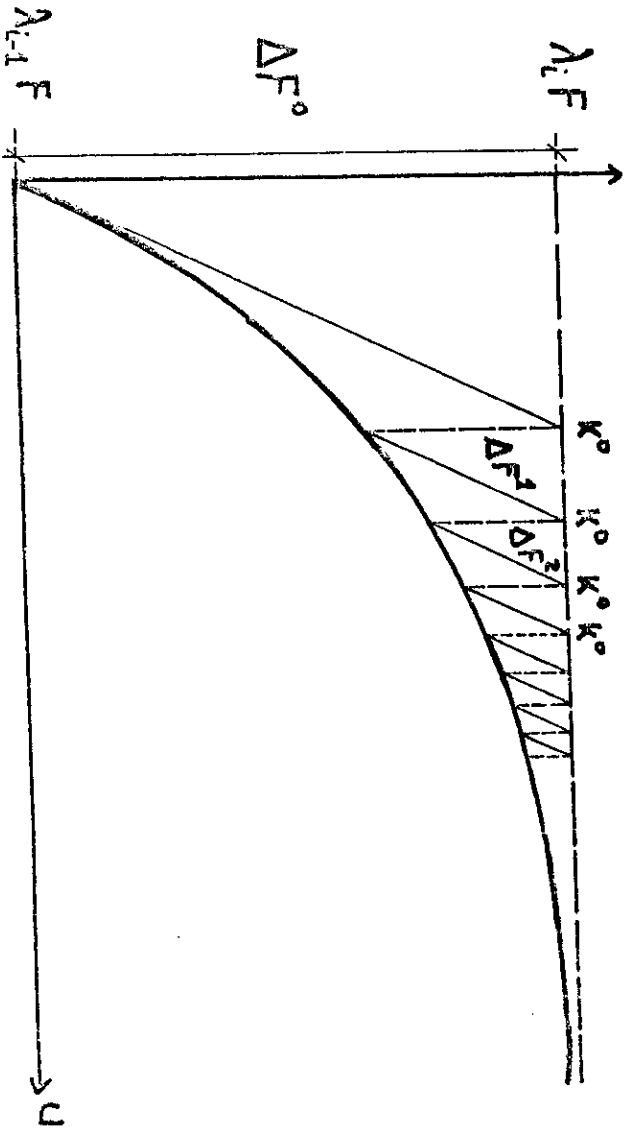


Fig ( 4.3.3 )

L'algorithme est le suivant (i=1,2,3...) :

$$\text{Résidu} \quad \Delta F^{i-1} = F - F_I^{i-1} .$$

$$\text{Résoudre} \quad K^0 \Delta U^i = \Delta F^{i-1} \text{ et déduire } \Delta U^i .$$

$$\text{Cumuler} \quad U^i = U^{i-1} + \Delta U^i \text{ et déduire } F_I^i .$$

Les conditions initiales étant  $U^0$ ,  $F^0$ ,  $K^0$  et  $F_I^0 = F^0$ .

Bien que plus lentes (en convergence), elle présente moins d'opérations car la matrice de rigidité est calculée une seule fois contrairement aux méthodes précédentes pour lesquelles elle est actualisée à chaque itération.

#### 4.4- Critères de convergence:

Le critère de convergence contrôle le nombre d'itérations à réaliser dans un incrément. Le nombre d'itérations, le critère de convergence utilisé ainsi que la tolérance exigée influent sur les résultats. Toutefois imposer une limite exagérée risque de coûter très cher pour une précision inutile.

Les critères de convergence sont formulés soit directement en fonction des forces résiduelles ou bien indirectement à travers les autres grandeurs (déplacements, déformations ou contraintes).

Il est très difficile et très cher de vérifier la convergence de toutes les composantes des forces, déplacements ou autres grandeurs. On utilise une estimation globale avec les normes (moindres carrés en général).

Les critères usuels sont :

a/ convergence en forces:

$$\frac{\| \Delta F^i \|}{\| F^i \|} \leq t_F \quad ; \quad \text{tolérance en forces.}$$

Avec  $\|F\| = (F^T \cdot F)^{1/2}$  et  $\|\Delta F\| = (\Delta F^T \cdot F)^{1/2}$ .

b/ convergence en déplacements:

$$\|\Delta U^i\| \leq t_D \quad : \text{tolérance en déplacements.}$$

ou encore 
$$\frac{\|\Delta U^i\|}{\|U^i\|} \leq t_D .$$

c/ convergence en énergie:

L'utilisation d'un seul critère de convergence en forces ou en déplacements peut s'avérer insuffisant. Le critère le plus objectif est celui qui les considère ensemble :

$$\frac{\Delta U^T \cdot \Delta F}{\Delta U^T \cdot F} \leq t_E \quad : \text{tolérance en énergie.}$$

ou encore 
$$\frac{U^T \cdot \Delta F}{U^T \cdot F} \leq t_E .$$

#### 4.5- Risques de divergence et remèdes:

La convergence dans un problème non-linéaire ne peut jamais être garantie notamment dans les analyses avec un nombre de degrés de liberté élevé.

Les causes principales de divergence sont :

- présence de bifurcations.
- non unicité de la solution.
- solution initiale.

Il est donc recommandé de faire un bon choix de départ, d'utiliser de petits incréments et de toujours prévoir un nombre maximal d'itérations pour éviter le déroulement indéfini du programme en cas de divergence.



## **CHAPITRE III :**

# **THEORIE DE LA STABILITE**

CHAPITRE III  
THEORIE DE LA STABILITE

1- INTRODUCTION :

La théorie élémentaire de la flexion enseigne que les contraintes et les déformations sont proportionnelles aux charges appliquées.

Le fait que cette condition soit réalisée suppose que la déformation de la poutre n'affecte pas l'action des charges. Par exemple, si la poutre de la (fig 1.1.a) est soumise seulement à des charges telles que  $F_1$  et  $F_2$ , la présence des petites déformations  $\delta_1$  et  $\delta_2$  et les légères différences aux points d'application des forces auront un effet négligeable sur les moments fléchissants et les efforts tranchants. Il est donc possible d'effectuer les calculs de déformation, contraintes, moments, etc... à partir de la forme initiale de la poutre. Dans ces conditions et si la loi de HOOKE s'applique au matériau considéré, les déformations sont proportionnelles aux forces agissantes et le principe de superposition s'applique, c'est-à-dire que la déformation totale s'obtient en additionnant les déformations produites par les prises une à une .

Il n'en est pas ainsi lorsque des forces normales et transversales sont appliquées simultanément sur la poutre (fig 1.1.b). Les moments de flexion, efforts tranchants, contraintes et déformations de la poutre ne seront plus proportionnels à la grandeur de la charge axiale. Leurs valeurs dépendront de l'importance des déformations produites et même des légères excentricités dans le point d'application de la charge axiale.

2- EQUILIBRE ELASTIQUE, STABLE ET INSTABLE :

Dans un système se trouvant dans un état déformé, l'équilibre entre les sollicitations extérieures et les efforts élastiques internes qu'elles suscitent peut non seulement être stable,

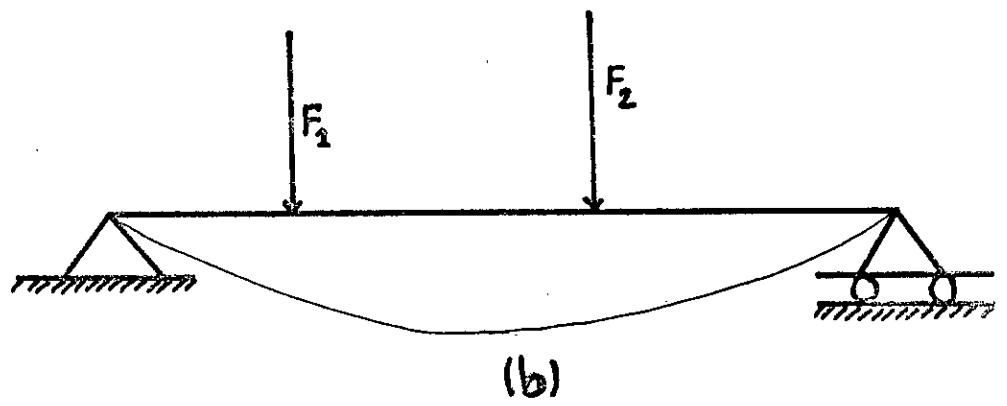
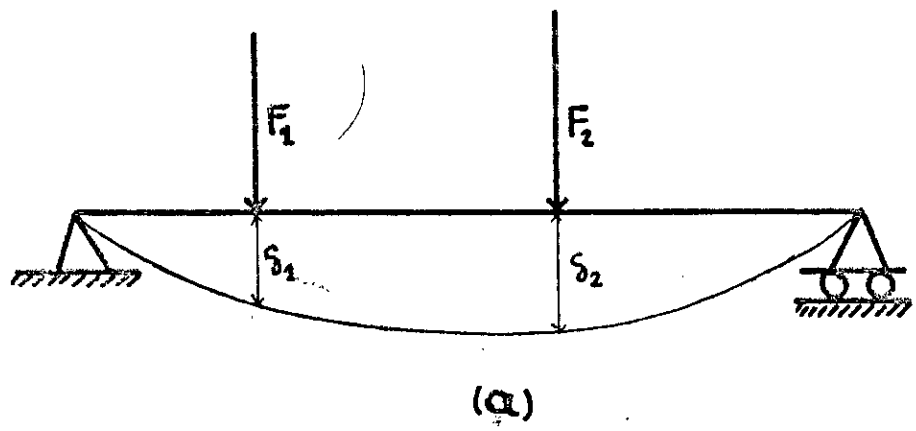


Fig ( I.I )

mais aussi instable .

Un équilibre élastique est stable si, quel que soit l'écart de l'état d'équilibre, le corps en déformation tend à revenir dans son état initial lorsqu'on élimine l'action extérieure qui était à l'origine de cette perturbation de l'état d'équilibre initial.

Par opposition, un équilibre est instable si, après suppression de la sollicitation extérieure il subsiste toujours une déformation et ce corps en déformation ne revient pas dans son état initial.

entre ces deux états d'équilibre se trouve un état transitoire dit critique.

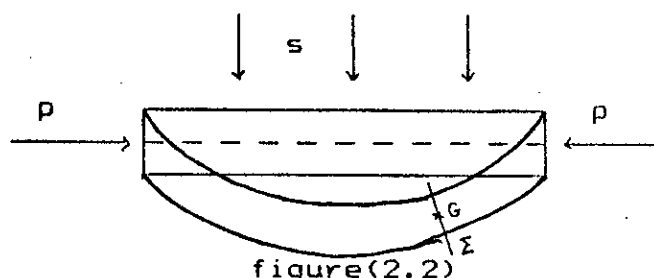
Lorsqu'un corps en déformation se trouve dans l'état critique, il est dans un équilibre indifférent : il peut conserver la forme initiale ou bien la perdre, poussé par une sollicitation toute petite qu'elle soit. C'est-à-dire que pour cet état la position d'équilibre de la structure n'est pas unique et que la structure peut être maintenue en équilibre dans une autre configuration, sans augmentation de la charge (fig 2.1).



figure (2.1) deux configurations d'équilibre de la structure sous charge critique.

Si l'on considère une poutre droite soumise à l'action de deux forces  $P$  d'intensité égale et de sens opposés, dirigées suivant la fibre moyenne rectiligne et à une sollicitation transversale  $S$  ayant pour effet de déformer la fibre moyenne (fig 2.2) comme suit :

Si la force  $P$  est faible, après suppression de la sollicitation  $S$  la poutre retrouve sa forme rectiligne qui est donc sa seule forme d'équilibre stable.



Si la force  $P$  dépasse une certaine valeur  $P_c$  (charge critique) la poutre reste déformée après suppression de la sollicitation  $S$ . Ceci est dû au fait que le moment fléchissant dans une section quelconque  $\Sigma$  n'est plus nul en raison de l'excentricité du point de passage de la force  $P$  par rapport au centre de gravité  $G$  de la section  $\Sigma$  et que l'intervention de ce moment est suffisante pour maintenir la poutre dans un état déformé après la suppression de la sollicitation  $S$ .

Lorsque le chargement atteint sa valeur critique, ceci entraîne pratiquement un accroissement illimité des déformations et des contraintes.

### 3- FORMULE D'EULER POUR LA DETERMINATION DE LA CHARGE CRITIQUE D'UNE BARRE COMPRIMEE :

#### 3.1- Formulation :

Nous allons étudier dans cette section la formule d'EULER qui donne la charge critique.

On supposera, dans ce qui suit, les matériaux parfaitement élastiques et l'on admet qu'il n'y aura aucune tension dépassant la limite proportionnelle.

Soit la poutre de la figure (3.1) soumise à une force axiale  $P$

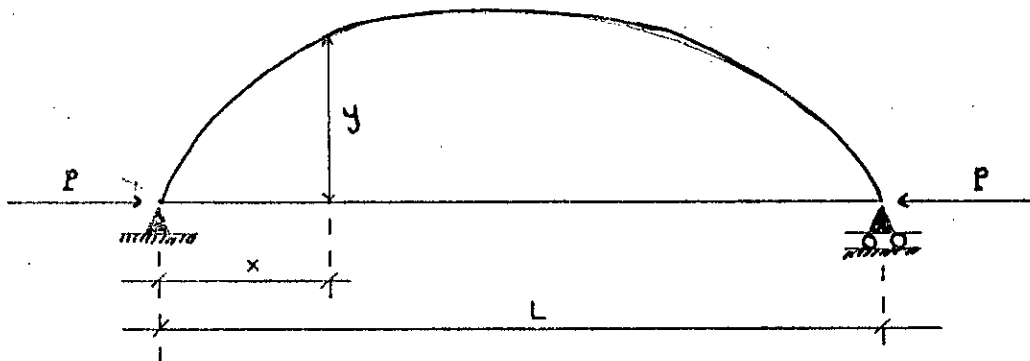


figure (3.1)

La charge critique est obtenue en déterminant la valeur de la charge axiale qui causerait une large déformation latérale même pour de très faibles valeurs de la charge latérale.

Tant que la force  $P$  reste inférieure à la valeur critique, la barre est simplement soumise à une compression axiale mais reste rectiligne.

Cette forme rectiligne de l'équilibre est stable, c'est-à-dire que si l'on applique une force latérale et qu'il se produit une légère flèche, cette dernière disparaît quand la force latérale cesse d'agir et la barre redevient rectiligne. En augmentant graduellement  $P$ , on arrive à un état où la forme rectiligne d'équilibre devient instable et où la flèche produite par une force latérale ne disparaît plus, quand cette dernière cesse d'agir dans notre cas il s'agit du phénomène de flambement.

La charge critique (ou charge d'EULER) est alors définie comme étant la charge axiale suffisante pour que la barre conserve une forme légèrement fêchie. Pour la poutre de la figure (3.1) d'inertie  $I$  et de module d'élasticité  $E$ , l'équilibre des moments donne :

$$E I \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \quad \Rightarrow \quad E I \frac{d^2 y}{dx^2} = -P y \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{P}{E I} \right) y = 0 \quad (3.2)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$y = A \sin \sqrt{\frac{P}{E I}} x + B \cos \sqrt{\frac{P}{E I}} x \quad (3.3)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

Les conditions aux limites donnent :

$$y(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \text{et} \quad y = A \sin \sqrt{\frac{P}{E I}} x \quad (3.4)$$

$$y(x=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \sin \sqrt{\frac{P}{E I}} L = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad \text{ou} \quad \sin \sqrt{\frac{P}{E I}} L = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{P}{E I}} L = n \pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

L'équation (3.4) montre que la courbure est sinusoidale.

\* Si  $A = 0$  ou  $n = 0$  la déformation est nulle.

\* Si  $n = 1$  :

$$P = \pi^2 \frac{E I}{L^2} \quad (3.6)$$

$$Y = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

La forme de la courbe est une demi-sinusoïde (fig 3.3.a).

La charge donnée par l'équation (3.6) est la plus petite valeur de la charge P pour laquelle l'équilibre stable n'existe pas.

Cette valeur est appelée " charge critique " ou " charge d'EULER ".

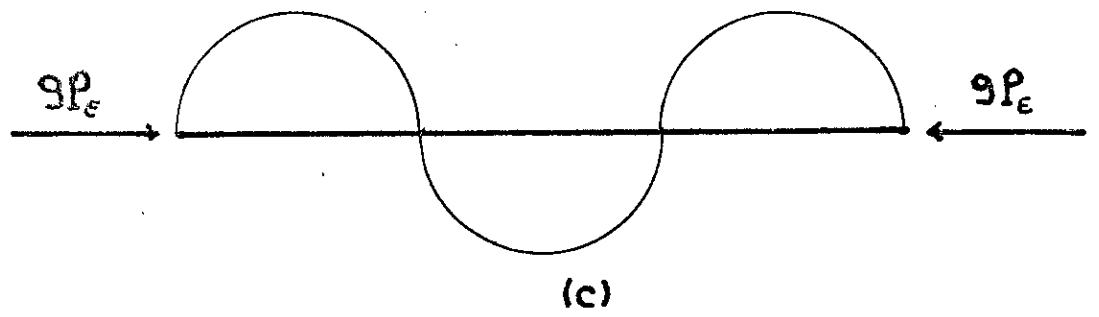
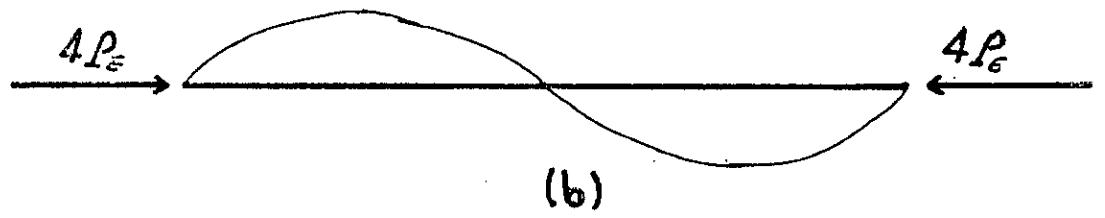
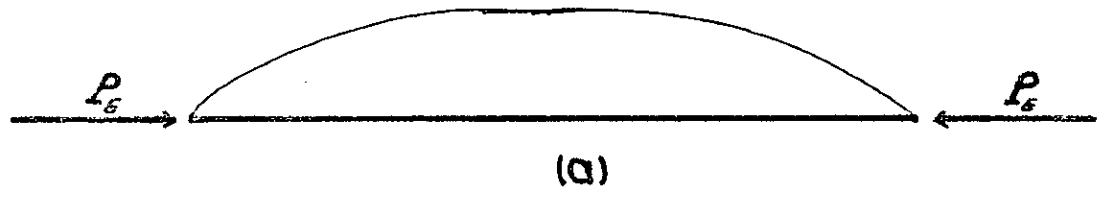


Fig ( 3.3 )



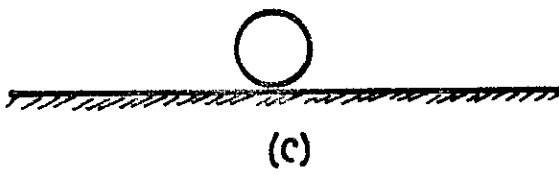
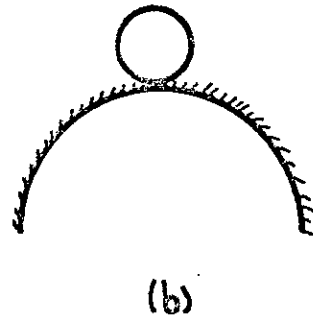
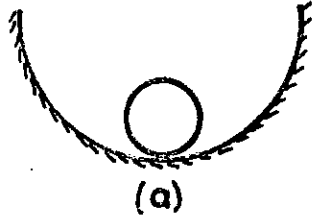


Fig ( 3.4 )

\* Si n = 2 :

$$P = 4 \pi^2 \left( \frac{E I}{L^2} \right)$$

figure (3.3.b)

$$y = A \sin \frac{2 \pi x}{L}$$

\* Si n = 3 :

$$P = 9 \pi^2 \left( \frac{E I}{L^2} \right)$$

figure (3.3.c)

$$y = A \sin \frac{3 \pi x}{L}$$

Le phénomène étudié précédemment peut être comparé au cas d'une bille reposant sur une surface figure (3.4).

Dans la figure (fig 3.4.a), la bille repose sur une surface sphérique concave. Cette bille est en équilibre car tout déplacement de la bille de sa position d'équilibre élève le centre de gravité, c'est-à-dire augmente l'énergie potentielle; dès que la cause de ce déplacement disparaît, la bille revient à sa position initiale.

Dans la figure (fig 3.4.b) où la bille sur une surface convexe, un déplacement abaisse le centre de gravité et diminue l'énergie potentielle et la suppression de la cause du déplacement ne provoque pas le retour de la bille à sa position initiale (équilibre instable).

Dans la figure (fig 3.4.c), la bille repose sur un plan et un déplacement ne modifie pas l'énergie. Elle est en équilibre indifférent.

### 3.2- Influence des conditions de fixation des extrémités de la barre sur la valeur de la force critique :

La charge critique varie avec les conditions d'appui, nous allons discuter cette influence dans ce qui suit :

a)- Barre avec une extrémité encastree, l'autre étant libre :

Ce cas est schématisé dans la figure (fig 3.2.1).

La barre se trouve dans un état analogue à celui de la moitié d'une barre de longueur  $L = 2 l$  aux bouts reposant sur des charnières (fig 3.1).

Cela signifie quand de ce cas :

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(2l)^2} = \frac{P_E}{4}$$

On peut définir ici une longueur de flambement :

$$l_f = 2 l \quad \text{ou} \quad P_c = \frac{\pi^2 E I}{l_f^2}$$

b)- Barre aux deux extrémités encastrees : (fig 3.2.2)

La partie centrale épousera la même forme qu'une barre de longueur  $L = l/2$  articulée à ses deux bouts, c'est-à-dire :

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{L^2} = \frac{\pi^2 E I}{(l/2)^2} = 4 P_E$$

où  $l_f = l/2$

c)- Barre encastree à un bout, l'autre étant articulé : (fig 3.2.3)

C'est équivalent à une barre articulée à ses deux bouts de longueur  $L = 0.7 l$ .

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{L^2} = \frac{E I}{(0.71)^2} = 2.25 P_E$$

et dans ce cas la longueur de flambement sera :  $l_f = 0.7 l$

#### 4- STABILITE DES PORTIQUES PLANS :

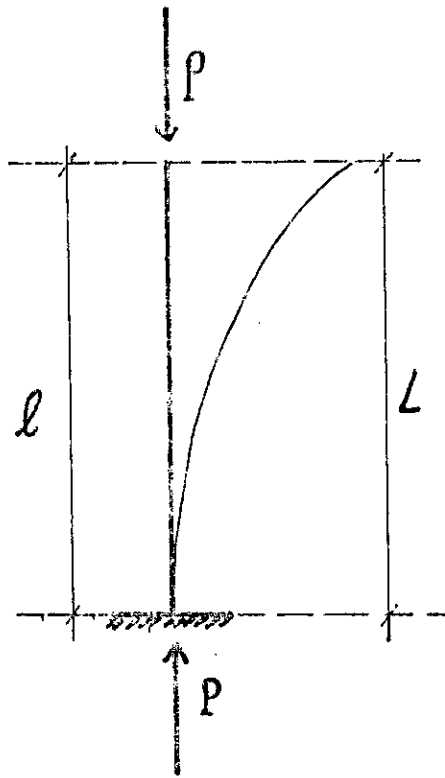


Fig ( 3.2.1 )

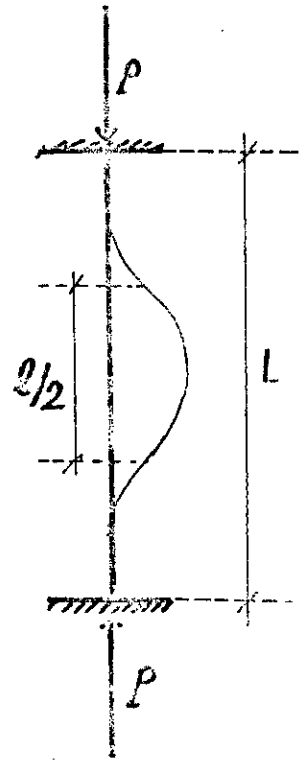


Fig ( 3.2.2 )

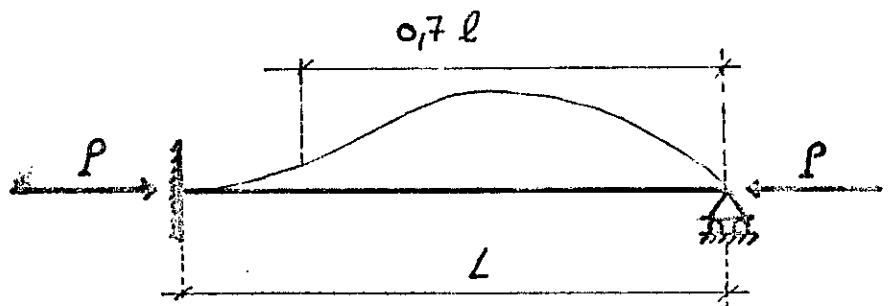


Fig ( 3.2.3 )

4- STABILITE DES PORTIQUES PLANS :4.1- Introduction :

L'analyse d'une structure donnée se réduit généralement à la résolution d'un système  $[K] \{U\} = \{F\}$ .

Si ce système est linéaire et si  $[K]$  est définie positive alors  $[K]^{-1}$  existe et est unique, ainsi on déduit :

$$\{U\} = [K]^{-1} \{F\}$$

Par contre, si le système est non linéaire, la matrice de rigidité est modifiée et dépend des paramètres du problème. dans le cas étudié ici  $[K]$  dépend de  $\{F\}$ , on a donc :

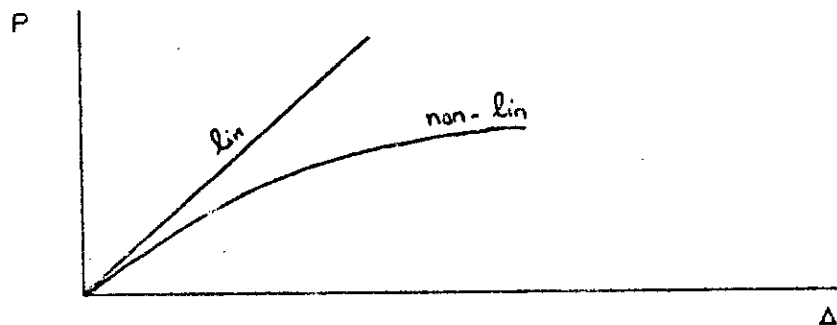
$$[K(F)] \{U\} = \{F\}$$

Si les efforts sont connus, on peut déterminer tous les éléments de  $[K(F)]$  et le système précédent admet une solution unique :

$$\{U\} = [K(F)]^{-1} \{F\}$$

pourvu que la structure reste stable.

Al'équilibre instable, cette solution n'est plus unique. Ce qui signifie que la matrice  $[K(F)]$  est la singulière autrement dit que la rigidité de la structure est nulle.



4.2- Etude numérique de la singularité:

Il existe principalement deux méthodes pour la détermination de la charge critique (ou de la singularité) :

- a)- méthode du déterminant .
- b)- méthode des valeurs propres et vecteurs propres .

Nous allons dans ce qui suit expliciter ces deux méthodes .

a)- Méthode du déterminant:

Le chargement  $\{F\}$  est incrémenté par un coefficient  $\lambda$ . C'est une méthode pas-à-pas où l'on vérifie à chaque pas la singularité de  $[K(F)]$ . A chaque niveau de chargement des itérations sont faites pour trouver les efforts non-linéaires exacts avant de faire la vérification de la singularité.

On note ici que la singularité correspond à l'instabilité de toute ou d'une partie de la structure.

La matrice étant de dimension  $n \times n$ , il existe  $n$  modes de flambement.

Donc cette méthode présente l'inconvénient que si l'incrément est grand on peut rater le premier mode de flambement (celui qui nous intéresse comme on le verra par la suite). Cette remarque est explicitée dans la figure (4.2.1). Il faut donc utiliser un petit incrément.

Pur contre, elle présente l'avantage de décrire le comportement de la structure à différents états de chargement.

Dans cette méthode la matrice de rigidité peut être prise en un seul terme comme pour l'étude réalisée dans le présent projet (fonctions de stabilité). Ou bien elle peut être prise comme somme de deux matrices :

- $[K_e]$  : matrice regroupant les termes constants  
(matrice élastique classique).
- $[K_g]$  : matrice géométrique regroupant les termes non-linéaires qui sont fonction de la force axiale.

$$[K(\lambda F)] \{U\} = \{\lambda F\} \Leftrightarrow \left( [K_E] + \lambda [K_G] \right) \{U\} = \{\lambda F\}$$

b)- Méthode des valeurs propres et des vecteurs propres:

Elle consiste à trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice [K]. Ainsi le système qui nous intéresse se réduit à la résolution d'un autre système équivalent de la forme:

$$[A] \{x\} = \alpha \{x\}$$

$\{x\}$  et  $\alpha$  étant respectivement vecteur et valeur propres de [A].

$$\Rightarrow ( [A] - \alpha [I] ) \{x\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{Det} ( [A] - \alpha [I] ) = 0 \quad (4.2.b)$$

Si la structure est stable on a toutes les valeurs propres positives.

Si [A] est singulière alors une des valeurs propres au moins est nulle.

L'instabilité correspond à la première valeur propre qui s'annule (premier mode de flambement). Souvent, on n'est intéressé que par ce mode (contrairement à la vibration).

Cette méthode présente comme avantage d'être simple et économique car il suffit de trouver le premier mode de flambement qui ne nécessite que la résolution de l'équation (4.2.b).

Mais elle a comme inconvénient de ne pas décrire l'état de la structure avant d'atteindre sa valeur critique.

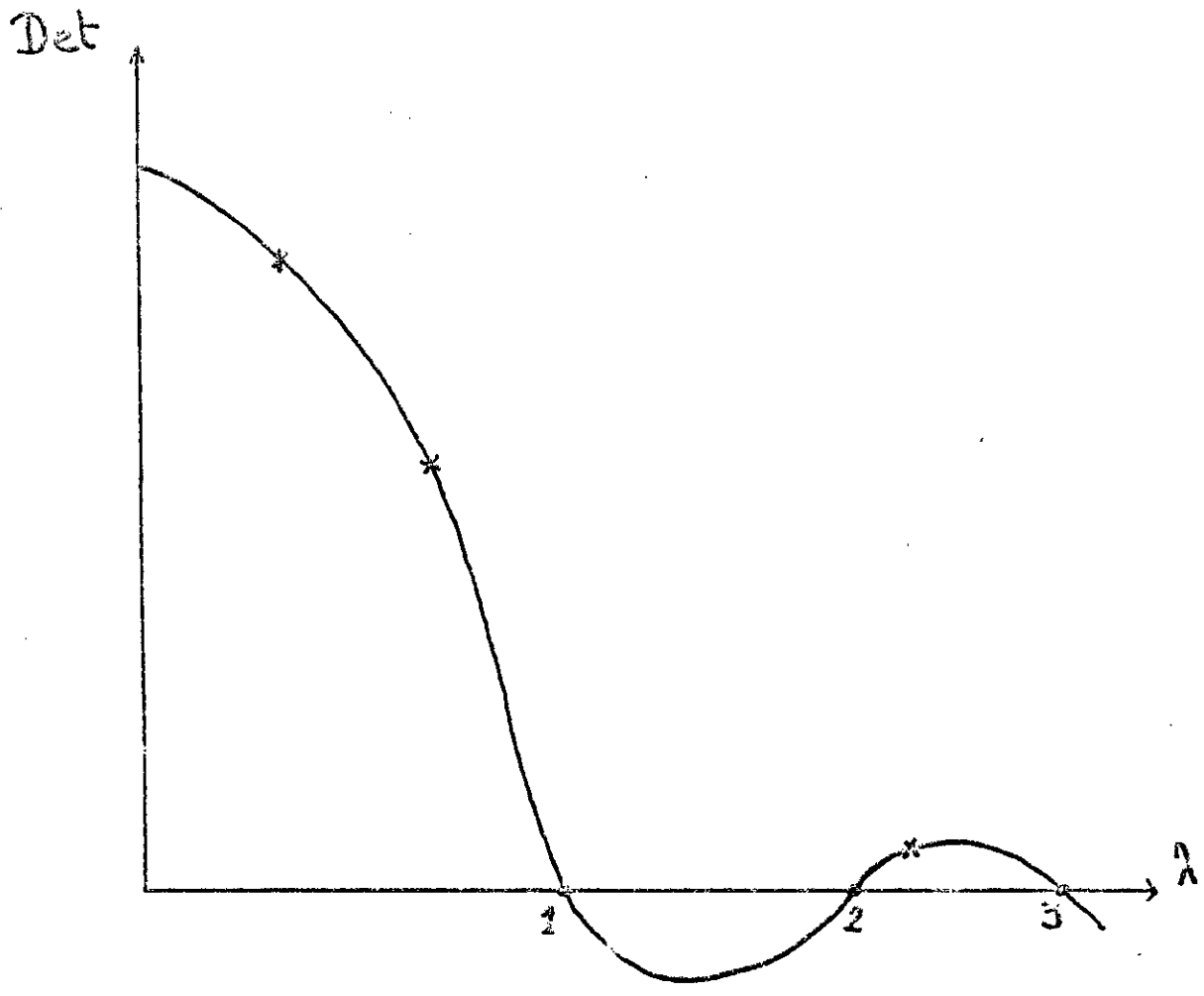


Fig ( 4.2.I )



5- Elaboration de la matrice de rigidite avec effet P-Δ:

5.1- Introduction:

Nous allons donner l'expression de la matrice de rigidité en tenant compte de l'effet de l'effort normal dans la formulation. Deux cas se présentent à nous : cet effort normal peut être une compression ou une traction, selon le cas ou on a une expression particulière de cette matrice.

5.2- Formulation:

5.2.1- P est une compression:



(fig 3-1)

Soit une poutre de longueur  $l$ , dont les caractéristiques géométriques sont  $E$ ,  $I$  et  $A$ .

On bloque le noeud 2 et on relâche le noeud 1.

A l'abscisse  $x$ , on a une déformation de  $Y$ .

a) Rotation  $\theta_1$ :

Si nous n'avons pas de force de compression (ou si nous négligeons son effet sur la matrice de rigidité), nous aurions eu comme solution pour ce système :

$$M_1 = \frac{4 EI}{L} \theta_1$$

$$M_2 = \frac{2 EI}{L} \theta_1$$

C'est-à-dire en posant :  $K = \frac{EI}{L}$

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 4K \theta_1 \\
 M_2 &= 2K \theta_1 \\
 T_1 = -T_2 &= \frac{M_1 + M_2}{L}
 \end{aligned}$$

L'équation gouvernant le système étant :

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = Y'' = - \frac{M}{EI}$$

Si l'on tient compte de l'effet P-Δ, les moments s'expriment différemment en fonction de  $\theta_1$  car les facteurs de proportionnalité ne sont plus constants.

On introduit les facteurs qui expriment cette disproportionnalité. La nouvelle formulation est donc :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= S K \theta_1 \\
 M_2 &= C M_1
 \end{aligned}$$

Où :

- S : Fonction de stabilité (exprime l'effet de P sur M).
- C : Facteur de transmission (exprime l'effet du noeud 1 sur le noeud 2).

L'équation gouvernant le système étant toujours :

$$Y'' = - \frac{M}{EI} \Rightarrow EI Y'' = - M$$

Où

$$\begin{aligned}
 M &= M_1 - T_1 x + P Y \\
 \Rightarrow EI Y'' &= - (M_1 - T_1 x + P Y)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y'' + \frac{P}{EI} Y = \frac{1}{EI} (T_1 x - M_1) \dots \dots \dots (1)$$

Avant d'aller plus loin dans la démonstration définissons quelques termes utiles pour la suite de ce développement théorique :

$$\left| \begin{aligned} P_E &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ \rho &= \frac{P}{P_E} \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho} \end{aligned} \right.$$

on a donc :

$$\left| \begin{aligned} \rho &= \frac{PL^2}{\pi^2 EI} \\ \alpha &= \frac{L}{2} \left[ \frac{P}{EI} \right]^{1/2} \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire :  $\frac{P}{EI} = \frac{4\alpha^2}{L^2}$

L'équation (1) devient donc :

$$Y'' + \left[ \frac{2\alpha}{L} \right]^2 Y - \left[ \frac{T_1 - M_1}{EI} \right] = 0$$

comme :  $T_1 = \frac{M_1 + M_2}{L}$

on a donc :  $Y'' + \left[ \frac{2\alpha}{L} \right]^2 Y - \frac{1}{EI} \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{L} x - M_1 \right]$

c'est-à-dire :  $Y'' + \omega^2 Y - F(x)$  .....(2)

Comme  $\omega > 0$  cette équation différentielle admet comme solution :

$$Y = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) + \frac{F(x)}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow Y = A \sin\left(\frac{2\alpha}{L}x\right) + B \cos\left(\frac{2\alpha}{L}x\right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{L}{2\alpha}\right)^2 \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{L} - M_2 \right]$$

on a donc: 
$$Y = A \sin\left(\frac{2\alpha}{L}x\right) + B \cos\left(\frac{2\alpha}{L}x\right) + \frac{L}{2\alpha^2 k} \left[ \frac{(M_1 + M_2)}{L} - M_2 \right]$$

Les constantes d'intégration A et B seront déterminées en tenant compte des conditions aux limites.

\* pour :  $x = 0$  on a  $Y = 0 \Rightarrow B = \frac{M_1 L}{4\alpha^2 k}$

\* pour :  $x = L$  on a  $Y = 0$  ce qui donne :

$$A \sin(2\alpha) + B \cos(2\alpha) + \frac{M_2 L}{4\alpha^2 k} = 0$$

$$\Rightarrow A \sin(2\alpha) + \frac{M_1 L}{4\alpha^2 k} \cos(2\alpha) + \frac{M_2 L}{4\alpha^2 k} = 0$$

$$\Rightarrow A \sin(2\alpha) + \frac{L}{4\alpha^2 k} \{ M_1 \cos(2\alpha) + M_2 \} = 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{L}{4\alpha^2 k} \left[ M_1 \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} + \frac{M_2}{\sin(2\alpha)} \right]$$

$$\Rightarrow A = -\frac{L}{4\alpha^2 k} \left[ M_1 \cotg(2\alpha) + \frac{M_2}{\sin(2\alpha)} \right]$$

Calculons à présent la dérivée de Y (rotation) :

$$\theta = \frac{dY}{dx} = \frac{2\alpha A}{L} \cos\left(\frac{2\alpha}{L}x\right) - \frac{2\alpha B}{L} \sin\left(\frac{2\alpha}{L}x\right) + \frac{M_1 + M_2}{4\alpha^2 k}$$

\* pour :  $x = L$  on a  $\theta = \theta_1 = 0$  (car le noeud 2 est bloqué)

$$\Rightarrow \frac{2\alpha A}{L} \cos(2\alpha) - \frac{2\alpha B}{L} \sin(2\alpha) + \frac{M_1 + M_2}{4\alpha^2 k} = 0$$

Remplaçons A et B par leurs valeurs respectives :

$$\frac{2\alpha}{L} \left[ -\frac{L}{4\alpha^2 k} \left( M_1 \cotg(2\alpha) + \frac{M_2}{\sin(2\alpha)} \right) \right] \cos(2\alpha) - \frac{2\alpha}{L} \left[ \frac{M_1 L}{4\alpha^2 k} \right] \sin(2\alpha) + \frac{M_1 + M_2}{4\alpha^2 k} = 0$$

Eliminons le coefficient  $\left[ \frac{1}{4\alpha^2 k} \right]$  qui est un facteur commun aux trois termes, on aura ainsi :

$$-2\alpha \left( M_1 \cotg(2\alpha) + \frac{M_2}{\sin(2\alpha)} \right) \cos(2\alpha) - 2\alpha M_1 \sin(2\alpha) + M_1 + M_2 = 0$$

Mettons les termes en  $M_1$  séparément :

$$M_1 \left[ -2\alpha \cotg(2\alpha) \cos(2\alpha) - 2\alpha \sin(2\alpha) + 1 \right] + M_2 \left[ -2\alpha \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} + 1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow M_1 \left[ -2\alpha \frac{\cos^2(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} - 2\alpha \frac{\sin^2(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} + 1 \right] + M_2 \left[ -2\alpha \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} + 1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow M_1 \left[ -2\alpha \frac{[\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)]}{\sin(2\alpha)} + \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \right] + M_2 \left[ -2\alpha \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} + \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \right] = 0$$

Eliminons le  $\left[ \frac{1}{\sin(2\alpha)} \right]$ , on aura donc :

$$M_1 \left[ -2\alpha + \sin(2\alpha) \right] + M_2 \left[ -2\alpha \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \right] = 0$$

On sait que le facteur de transmission C a pour expression :

$$C = \frac{M_1}{M_2}$$

On aura donc :

$$C = \frac{2\alpha - \sin(2\alpha)}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)}$$

Nous rappelons ici que :  $\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho}$

\* pour  $x = 0 \Rightarrow \theta(0) = \theta_1$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha A}{L} + \frac{M_1 + M_2}{4\alpha^2 k} = \theta_1$$

$$\Rightarrow -\frac{2\alpha A}{L} * \frac{L}{4\alpha^2 k} \left[ M_1 \cotg(2\alpha) + \frac{M_2}{\sin(2\alpha)} \right] + \frac{M_1 + M_2}{4\alpha^2 k} = \theta_1$$

$$\Rightarrow M_1 \left[ 1 - 2\alpha \cotg(2\alpha) \right] + M_2 \left[ 1 - \frac{2\alpha}{\sin(2\alpha)} \right] = 4\alpha^2 k$$

or :  $M_1 = C M_2$

$$\Rightarrow M_1 \left[ 1 - 2\alpha \cotg(2\alpha) \right] + \left[ 1 - \frac{2\alpha}{\sin(2\alpha)} \right] \left[ \frac{2\alpha - \sin(2\alpha)}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)} \right] = 4\alpha^2 k$$

$$\Rightarrow M_1 \left[ 1 - 2\alpha \cotg(2\alpha) - \frac{[2\alpha - \sin(2\alpha)]^2}{\sin(2\alpha) [\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)]} \right] = 4\alpha^2 k$$

$$\Rightarrow \frac{M_1}{\sin(2\alpha)} \left[ \sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha) - \frac{[2\alpha - \sin(2\alpha)]^2}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)} \right] = 4\alpha^2 k$$

$$\Rightarrow \frac{M_1}{\sin(2\alpha)} \left[ \frac{[\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)]^2 - [2\alpha - \sin(2\alpha)]^2}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)} \right] = 4\alpha^2 k \theta_1$$

or  $S = \frac{M_1}{k\theta_1}$

$$\Rightarrow S = \frac{[4\alpha^2 \sin(2\alpha)] [\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)]}{[\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)]^2 - [2\alpha - \sin(2\alpha)]^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{4\alpha^2 \sin(2\alpha) [\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)]}{[2\alpha - 2\alpha \cos(2\alpha)] [2\sin(2\alpha) - 2\alpha - 2\alpha \cos(2\alpha)]}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha \sin(2\alpha) [\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)]}{[1 - \cos(2\alpha)] [\sin(2\alpha) - \alpha - \alpha \cos(2\alpha)]}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha \sin(2\alpha) [\sin(2\alpha) - \alpha \cos(2\alpha)]}{\sin(2\alpha) - \alpha - \alpha \cos(2\alpha) - \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) + \alpha \cos(2\alpha) + \alpha \cos^2(2\alpha)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha \sin(2\alpha) [\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)]}{\sin(2\alpha) - \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) + \alpha \cos^2(2\alpha) - \alpha}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha \left(1 - 2\alpha \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}\right) \sin^2(2\alpha)}{\sin(2\alpha) - \sin(2\alpha) \cos(2\alpha) + \alpha [\cos^2(2\alpha) - 1]}$$

or  $\cos^2(2\alpha) - 1 = -\sin^2(2\alpha)$

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha [1 - 2\alpha \cotg(2\alpha)] \sin^2(2\alpha)}{\sin(2\alpha) [1 - \cos(2\alpha)] - \alpha \sin^2(2\alpha)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha [1 - 2\alpha \cotg(2\alpha)]}{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} - \alpha}$$

or on a :  $1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2(\alpha)$

et :  $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

donc :  $\frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \tg(\alpha)$

d'où l'on tire :

$$S = \frac{\alpha [1 - 2\alpha \cotg(2\alpha)]}{\tg(\alpha) - \alpha}$$

L'équilibre des moments par rapport au nœud 2 nous donne les valeurs des efforts tranchants  $T_1$  et  $T_2$  :

$$T_1 = -T_2 = \frac{M_1 + M_2}{L} = \frac{Sk\theta_1}{L} + \frac{SCk\theta_1}{L}$$

$$\Rightarrow T_1 = -T_2 = S(1+C) \frac{k\theta_1}{L}$$

Des expressions équivalentes peuvent être déterminées quand l'extrémité 1 est bloquée et l'extrémité 2 tourne d'un angle  $\theta_2$ .

Il est à remarquer que pour obtenir les forces et les moments totaux il faut opérer une superposition des effets lorsque l'extrémité 1 tourne d'un angle  $\theta_1$  et l'extrémité 2 bloquée avec le cas où l'extrémité 2 tourne d'un angle  $\theta_2$  et l'extrémité 1 bloquée.

b) Déplacements latéraux:

On considère des déplacements latéraux (verticaux dans notre cas)  $V_1$  de l'extrémité 1 vers 1' et  $V_2$  de l'extrémité 2 vers 2'.

Pour le calcul des efforts dus à ce déplacement nous allons considérer le mouvement relatif  $(V_2 - V_1)$  de l'extrémité 2 par rapport à l'extrémité 1.

Car le mouvement se compose en deux termes :

\* mouvement de corps rigide:

L'état de la barre 1-2 (état droit) vers l'état 1'-2' (état droit) représenté en pointillés (fig 3-2). Ce mouvement ne crée pas de moment.

\* rotation de  $(-\beta)$ :

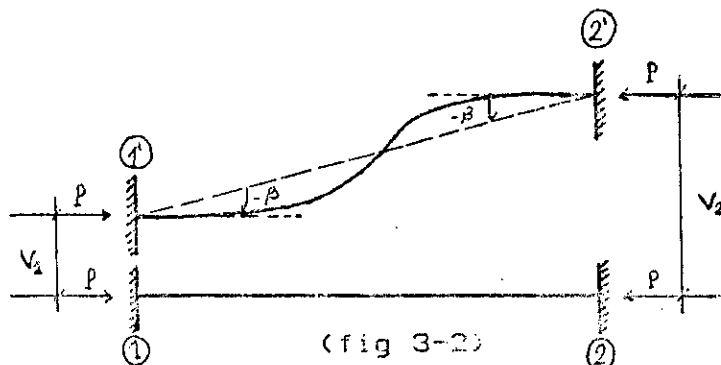
Cette rotation se fait par rapport à la ligne en pointillés, c'est ce mouvement qui va créer les moments  $M_1$  et  $M_2$ .



Etant donné qu'on a 2 rotations dans les noeuds 1' et 2' (fig 3-2) le résultat final est la superposition de ces deux états (les mêmes que précédemment).

Mouvement	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>
mouvement de corps rigide	0	0
rotation (-β) en 1'	-Skβ	-SCkβ
rotation (-β) en 2'	-SCkβ	-Skβ
total	-S(1+C)kβ	-S(1+C)kβ

avec  $\theta = \theta_2 = -\beta$



Nous avons donc comme résultat :

$$M_1 = M_2 = -S(1+C)k\beta$$

or comme on a :  $\beta = \frac{V_2 - V_1}{L}$  (petites déformations)

$$M_1 = - \frac{S(1+C)k}{L} (V_2 - V_1)$$

$$M_2 = - \frac{S(1+C)k}{L} (V_2 - V_1)$$

Les efforts tranchants  $T_1$  et  $T_2$  seront obtenues par équilibre des moments par rapport au noeud 2' (fig 3-3):

$$T_1 L - P (V_2 - V_1) - M_1 - M_2 = 0$$

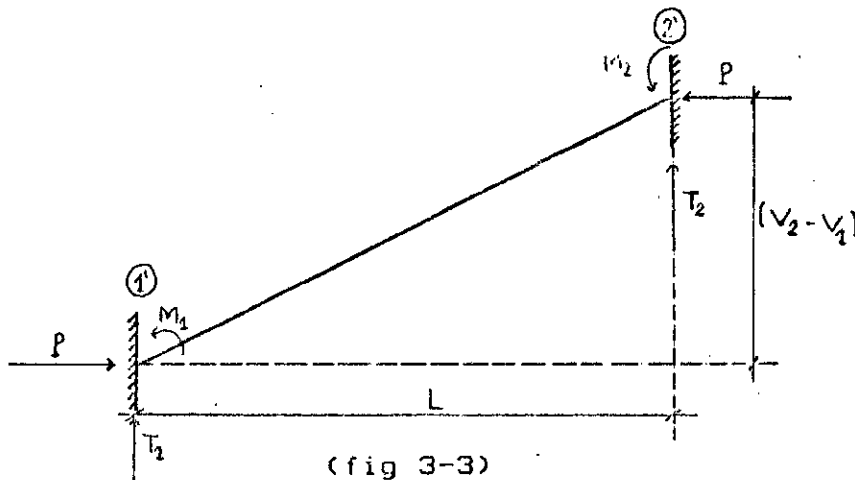
$$\Rightarrow T_1 L = M_1 + M_2 + P (V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{M_1 + M_2}{L} + P \frac{(V_2 - V_1)}{L}$$

$$\Rightarrow T_1 = \left[ - \frac{2S(1+C)k}{L} + P \right] \frac{(V_2 - V_1)}{L}$$

Donc :

$$T_1 = -T_2 = \left[ - \frac{2S(1+C)k}{L} + P \right] \frac{(V_2 - V_1)}{L}$$



Comme on a  $M_1 = M_2$  trouvons un facteur de proportionnalité entre  $M_1$  et  $T_1$ . Soit  $m$  ce facteur, cherchons le tel qu'il vérifie :

$$M_1 = \frac{m L T_1}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2M_1}{LT_1} = \frac{-2S(1+C)k \frac{(V_2 - V_1)}{L}}{-\left\{ \frac{2S(1+C)k}{L} - P \right\} \frac{(V_2 - V_1)}{L} L}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2S(1+C)k}{2S(1+C)k - PL}$$

or on sait que :  $\rho = \frac{P L^2}{\pi^2 EI}$

$$\Rightarrow PL = \frac{\pi^2 \rho EI}{L}$$

$$\Rightarrow m = \frac{2S(1+C)k}{2S(1+C)k - \pi^2 \rho k}$$

D'où l'on tire :

$$m = \frac{2S(1+C)}{2S(1+C) - \pi^2 \rho}$$

Le facteur  $m$  est appelé : " FONCTION DE STABILITE LATERALE ".

Nous avons ainsi :

$$T_1 = -T_2 = -\frac{2S(1+C)}{m} \frac{k}{L^2} (V_2 - V_1)$$

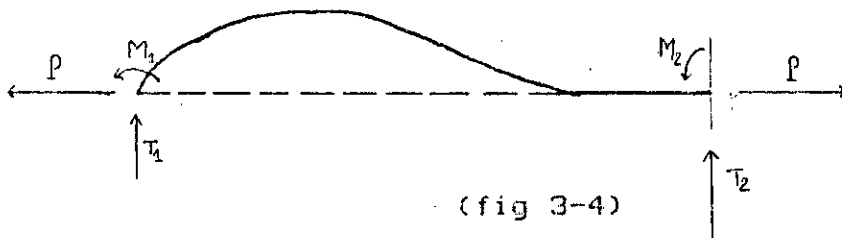
c) - Déplacements axiaux:

Nous négligeons ici l'effet de la flèche sur la déformation axiale. Ainsi l'expression de l'effort normal sera donc :

$$P = \frac{E A}{L} (U_2 - U_1)$$

Ainsi tous les éléments de la matrice de rigidité sont connus.

2.2- P est une traction: (figure 3.4)



L'équation différentielle décrivant cette structure est :

$$y'' - \left[ \frac{2\alpha}{L} \right]^2 y - \frac{T_1 x - M_1}{EI} = 0$$

Ainsi la solution est similaire à celle trouvée pour P compression en remplaçant les expressions en sinus par sinus hyperbolique et celles en cosinus par cosinus hyperbolique.

Ainsi la fonction de stabilité a pour expression:

$$S = \frac{1 - 2\gamma \coth(2\gamma)}{\text{th}(\gamma) - \gamma}$$

et le facteur de transmission:

$$C = \frac{2\gamma - \sinh(2\gamma)}{\sinh(2\gamma) - 2\gamma \cosh(2\gamma)}$$

avec :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\rho}$$

5.3-RECAPITULATION:

1)-Effort normal:

$$\begin{cases} N_1 = P = \frac{EA}{L} U_1 - \frac{EA}{L} U_2 \\ N_2 = -P = -\frac{EA}{L} U_1 + \frac{EA}{L} U_2 \end{cases}$$

2)-Effort tranchant:

a)-effort dû à la rotation:

$$\begin{array}{l} \text{rotation } \theta_1 \\ \text{rotation } \theta_2 \end{array} \begin{cases} T_1 = S(1+C) \frac{k}{L} \theta_1 \\ T_2 = -S(1+C) \frac{k}{L} \theta_1 \\ T_1 = -S(1+C) \frac{k}{L} \theta_2 \\ T_2 = S(1+C) \frac{k}{L} \theta_2 \end{cases}$$

b) effort dû aux déplacements latéraux:

$$T_1 = \left[ -\frac{2S(1+C)k}{L} - P \right] \frac{(V_2 - V_1)}{L}$$

$$T_2 = \left[ \frac{2S(1+C)k}{L} - P \right] \frac{(V_2 - V_1)}{L}$$

3) Moment:

a) moment dû à la rotation:

rotation  $\theta_1$  |  $M_1 = Sk \theta_1$   
 $M_2 = SCk \theta_1$

rotation  $\theta_2$  |  $M_1 = SCk \theta_2$   
 $M_2 = Sk \theta_2$

b) moment dû aux déplacements latéraux:

$$M_1 = -S(1+C)k \frac{V_2 - V_1}{L}$$

$$M_2 = -S(1+C)k \frac{V_2 - V_1}{L}$$

Posons :

$$\phi_4 = S$$

$$\phi_3 = S C$$

$$\phi_2 = S (1+C) = \phi_3 + \phi_4$$

$$\phi_1 = 2S (1+C) - \pi^2 \rho = 2 \phi_2 - \pi^2 \rho = \frac{2 \phi_2}{m}$$

Ainsi les expressions deviennent:

1)-Effort normal:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{E A}{L} U_1 - \frac{E A}{L} U_2 \\ N_2 = -\frac{E A}{L} U_1 + \frac{E A}{L} U_2 \end{array} \right.$$

2)-Effort tranchant:

rotation $\theta_1$	:	$T_1 = \frac{EI}{L^2} \phi_2 \theta_1$		$T_2 = -\frac{EI}{L^2} \phi_2 \theta_1$
rotation $\theta_2$	:	$T_1 = \frac{EI}{L^2} \phi_2 \theta_2$		$T_2 = -\frac{EI}{L^2} \phi_2 \theta_2$
déplacement $V_1$	:	$T_1 = \frac{EI}{L^3} \phi_1 V_1$		$T_2 = -\frac{EI}{L^3} \phi_1 V_1$
déplacement $V_2$	:	$T_1 = -\frac{EI}{L^3} \phi_1 V_2$		$T_2 = \frac{EI}{L^3} \phi_1 V_2$

3)-Moment:

rotation $\theta_1$	:	$M_1 = \frac{EI}{L} \phi_4 \theta_1$		$M_2 = \frac{EI}{L} \phi_3 \theta_1$
rotation $\theta_2$	:	$M_1 = \frac{EI}{L} \phi_3 \theta_2$		$M_2 = \frac{EI}{L} \phi_4 \theta_2$
déplacement $V_1$	:	$M_1 = \frac{EI}{L^2} \phi_2 V_1$		$M_2 = \frac{EI}{L^2} \phi_2 V_1$
déplacement $V_2$	:	$M_1 = -\frac{EI}{L^2} \phi_2 V_2$		$M_2 = -\frac{EI}{L^2} \phi_2 V_2$

On applique maintenant le principe de la superposition pour trouver les efforts totaux:

a) - Effort normal:

$$N_1 = \frac{EA}{L} U_1 - \frac{EA}{L} U_2$$

$$N_2 = -\frac{EA}{L} U_1 + \frac{EA}{L} U_2$$

b) - Effort tranchant:

$$T_1 = \frac{EI}{L^3} \phi_1 V_1 + \frac{EI}{L} \phi_2 \theta_1 - \frac{EI}{L^3} \phi_2 V_2 + \frac{EI}{L^2} \phi_2 \theta_2$$

$$T_2 = -\frac{EI}{L^3} \phi_1 V_1 - \frac{EI}{L^2} \phi_2 \theta_1 + \frac{EI}{L^3} \phi_1 V_2 - \frac{EI}{L^2} \phi_2 \theta_2$$

c) - Moment:

$$M_1 = \frac{EI}{L^2} \phi_2 V_1 + \frac{EI}{L} \phi_3 \theta_1 - \frac{EI}{L^2} \phi_2 V_2 + \frac{EI}{L} \phi_3 \theta_2$$

$$M_2 = \frac{EI}{L^2} \phi_2 V_1 + \frac{EI}{L} \phi_3 \theta_1 - \frac{EI}{L^2} \phi_2 V_2 + \frac{EI}{L} \phi_4 \theta_2$$



L'expression générale de la matrice de rigidité avec effet P-Δ s'écrira donc sous la forme suivante:

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$	0	$-\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$
0	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_3$	0	$-\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_3$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$-\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$-\frac{EI}{L^2} \phi_2$	0	$\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$-\frac{EI}{L^2} \phi_2$
0	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_3$	0	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_3$

Si  $P = 0$  ou si l'effet P-Δ est négligé on prend :

$\phi_1 = 12$
$\phi_2 = 6$
$\phi_3 = 2$
$\phi_4 = 4$

La matrice  $^{\circ}K_5$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$[K] = \begin{array}{|c|c|} \hline K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \\ \hline \end{array}$$

Si l'on a une rotule en 1, c'est-à-dire  $M_1=0$  ce qui modifie les éléments de la matrice de rigidité :

$$[K_{11}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{EI\phi_6}{L^3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$[K_{22}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{EI\phi_6}{L^3} & \frac{-EI\phi_5}{L^2} \\ \hline 0 & \frac{-EI\phi_5}{L^2} & \frac{EI\phi_5}{L} \\ \hline \end{array}$$

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{-EI\phi_6}{L^3} & \frac{EI\phi_5}{L^2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \phi_5 = S(1 - C^2) \\ \phi_6 = \phi_5 - \pi^2 \rho \end{cases}$$

Par contre si nous avons une rotule en 2 les expressions précédentes deviennent :

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI\phi_6}{L^3} & \frac{EI\phi_5}{L^2} \\ 0 & \frac{EI\phi_5}{L^2} & \frac{EI\phi_5}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI\phi_6}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-EI\phi_6}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{-EI\phi_5}{L^3} & 0 \end{bmatrix}$$

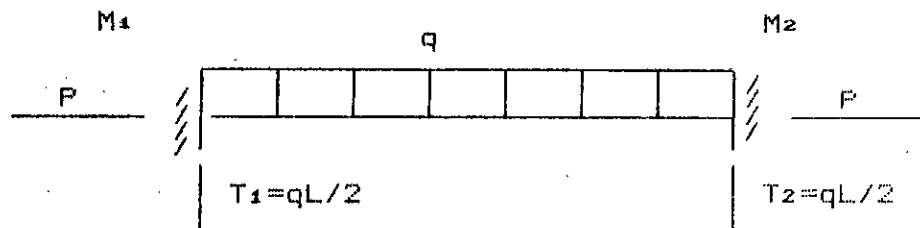
Si  $P=0 \rightarrow \phi_6 = \phi_5 = 3$ .

Dans le cas où nous avons des rotules en 1 et 2 seuls les éléments  $\frac{EA}{L}$  restent et il n'ya plus de fonctions de stabilité dans la matrice de rigidité.

Donc le flambement des barres linéaires est indépendant de l'effort axial.

6- INFLUENCE DE L'EFFORT AXIAL SUR LES CHARGES NODALES  
EQUIVALENTES:

Charge uniforme q :



$$Y'''' = -\frac{P}{EI} Y + \frac{M_1}{EI} - \frac{T_1 x}{EI} + \frac{q x^2}{2EI}$$

$$Y'''' + \left[ \frac{P}{EI} \right] - \frac{1}{EI} \left[ M_1 - \frac{qL x}{2} + \frac{q x^2}{2} \right] = 0$$

solution  $Y = A \sin\left[\frac{2\alpha x}{L}\right] + B \cos\left[\frac{2\alpha x}{L}\right]$

$$+ \frac{L}{4\alpha^2 K} \left[ M_1 - \frac{q x}{L} (L - x) - q L^2 \right]$$

$$Y(0) = Y'(0) = 0 .$$

$$A = \frac{q L^3}{16 \alpha^3 K} \quad \text{et} \quad B = \frac{q L^3}{16 \alpha^4 K} \left[ 1 - \frac{4 \alpha^2 M_1}{q L^2} \right]$$

$$Y(L) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{3}{\alpha^2} [1 - \alpha \operatorname{cotg}(\alpha)] \frac{q L^2}{12} = f \frac{q L^2}{12}$$

Valide pour toutes les valeurs de P en compression sauf pour P = 0 où f = 1 .

Dans le cas où P < 0 :  $f = \frac{3}{\alpha^2} \cdot [1 - \alpha \operatorname{cotg}(\alpha)]$

## **CHAPITRE I V :**

# **DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE**

CHAPITRE IV

DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

1-INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous allons reprendre la formulation théorique exposée précédemment, étudier les différentes phases de calcul et trouver une formulation adaptée au calcul informatique. Parmi les nombreux choix s'offrant dans la résolution nous avons sélectionné et développé ceux qui correspondaient le mieux à la programmation informatique.

Chaque étape du programme (ou sous-programme) sera commentée, un organigramme succinct sera ensuite exposé et enfin nous donnerons le texte intégral du sous-programme correspondant, nous commencerons d'abord par le programme principal.

Mais avant nous donnerons une description de toutes les variables du programme.

2-DESCRIPTION DES VARIABLES:

\* variables relatives aux noeuds:

- NN : nombre de noeuds  
X(i) : tableau des coordonnées horizontales des noeuds.  
Y(i) : tableau des coordonnées verticales des noeuds.  
IAPP(i) : tableau des codes appuis:  
- vaut 0 si le noeud est libre .  
- vaut 1 si le noeud est un appui simple dans le sens X .  
- vaut 2 si le noeud est un appui simple dans le sens Y.  
- vaut 3 si le noeud est un appui double .  
- vaut 4 si le noeud est un encastrement

## DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

---

### \* variables relatives aux barres:

NB : nombre de barres.  
JDEB(i) : tableau des noeuds origines des barres.  
JFIN(i) : tableau des noeuds fins des barres.  
SECT(i) : tableau des sections des barres.  
AINE(i) : tableau des inerties des barres.  
EYOUN(i) : tableau des modules d'élasticité.

### \* variables relatives aux charges:

NC : nombre de charges.  
IELE(i) : tableau des numéros des éléments chargés.  
CHA(i) : tableau des valeurs des charges.  
IDIR(i) : tableau des codes directions:  
- vaut 1 pour charge sur noeud direction X.  
- vaut 2 pour charge sur noeud direction Y.  
- vaut 3 pour couple sur noeud.  
- vaut 4 pour charge uniforme normale sur barre.  
- vaut 5 pour charge uniforme perpendiculaire sur  
barre.

Toutes ces variables seront fournies lors de l'introduction des données.

Lors des différentes phases de calcul nous aurons besoin des variables suivantes :

ALDN(i) : tableau des longueurs des barres.  
ROT(2,i) : tableau des sinus et cosinus.  
AK(i,i) : tableau des éléments de la matrice de rigidité assemblée de la structure.  
FB(6,i) : tableau des termes du vecteur charges dûes aux charges sur les barres.  
FN(3,i) : tableau des termes du vecteur forces sur les noeuds.

## DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

---

DP(3,i) : tableau des valeurs des déplacements des noeuds.  
EFB(6,i) : tableau des valeurs des efforts internes (N,T,R).  
DET : valeur du déterminant.  
EGB(i) : tableau des valeurs de l'effort normal à la  
(n-1)<sup>ième</sup> itération.

On trouvera sur le (tableau 1) ces différentes variables avec les programmes où elles sont employées. D'autres variables propres à chaque programme seront employées et explicitées en temps opportun.

Enfin ,avant d'aborder la partie informatique nous allons faire une remarque sur les unités.

Dans notre cas seuls deux types d'unités sont utilisées qui sont l'unité de longueur et celle de force.

On prendra comme unité de longueur le " METRE " et comme unité de force le " NEWTON " .

Ainsi nous aurons à exprimer les différentes quantités dans les unités suivantes :

- poids volumique.....(en  $N/M^3$ ).
- module d'élasticité.....(en  $N/M^2$ ).
- moment.....(en  $N.M$ ).
- déplacements.....(en M).
- forces concentrées.....(en N).
- forces uniformément réparties.....(en  $N/M$ ).



DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

TABLEAU DES DIFFERENTES VARIABLES UTILISEES DANS LE PROGRAMME

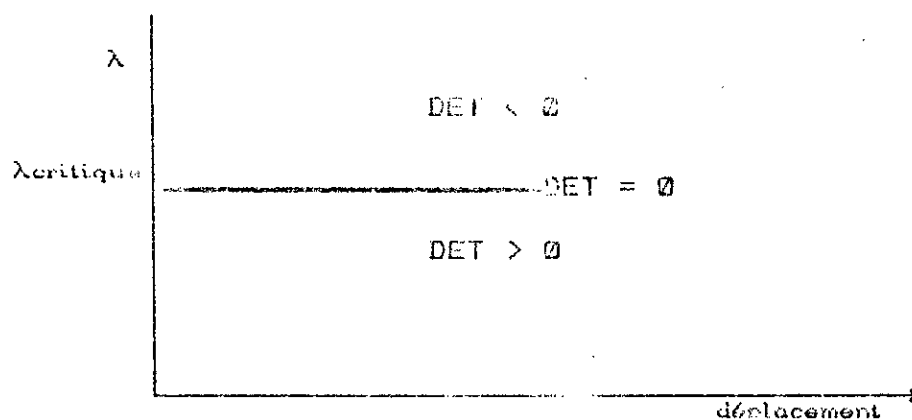
variable \ programme	INTRO	ASSEMB	FORCE	RESOL	EFFORT
EYOUN(*)	x	x			
X(*) Y(*)	x	x			
IAPP(*)	x			x	x
JDEB(*) JFIN(*)	x	x	x		x
SECT(*) AINE(*)	x	x			
IELE(*) CHA(*) IDIR(*)	x		x		
ALON(*)		x	x		x
ROT(*)		x	x		x
AK(*)		x		x	
FN(*)			x	x	
DP(*)				x	x
FB(*)			x		x
EFB(*)		x			x

tableau 1

3-PROGRAMME PRINCIPAL:

Le programme réalise comprend des étapes de calcul ainsi que les appels aux sous-programmes.

Le déroulement du programme prend fin lorsqu'on atteint la singularité de la matrice de rigidité. cette singularité est atteinte lorsque le déterminant devient nul. Pour une itération donnée ce dernier peut être positif ou négatif. Ces domaines sont exposés en (fig 4-1)



(fig 4-1)

Le déterminant est nul quand l'instabilité est atteinte c'est-à-dire pour une charge limite qui correspond à la charge critique pour l'instabilité.

Dans notre programme, ceci correspond à un facteur de charge  $\lambda$  (variable diam dans le programme) qui est la proportion entre la valeur de la charge introduite et la valeur de la charge à l'itération considéré :

$$P_i = \lambda_i * P_0$$

L'incrément est fait par l'intermédiaire de la variable  $\Delta P$  (dinc dans le programme) qui est l'incrément de charge :

$$P_i = P_{i-1} + \Delta P_i$$

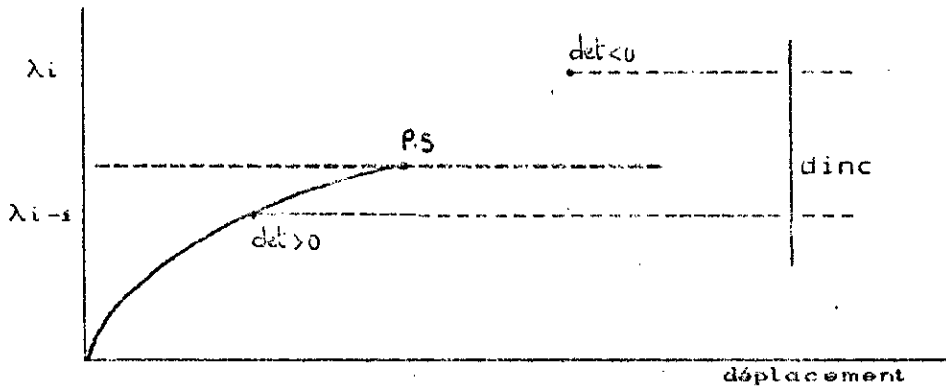
## DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

Si le déterminant est positif nous n'avons pas encore atteint le singulier et il faut donc augmenter la charge. Ce qui correspond dans le programme à ( $d_{lam} = d_{lam} + d_{inc}$ ) après le test sur le déterminant.

Par contre s'il est négatif ceci veut dire que nous avons dépassé la valeur singulière et que cette dernière se trouve entre le point de l'itération précédente et le point présent.

Il faut donc chercher dans cette plage longue de ( $d_{inc}$ ).

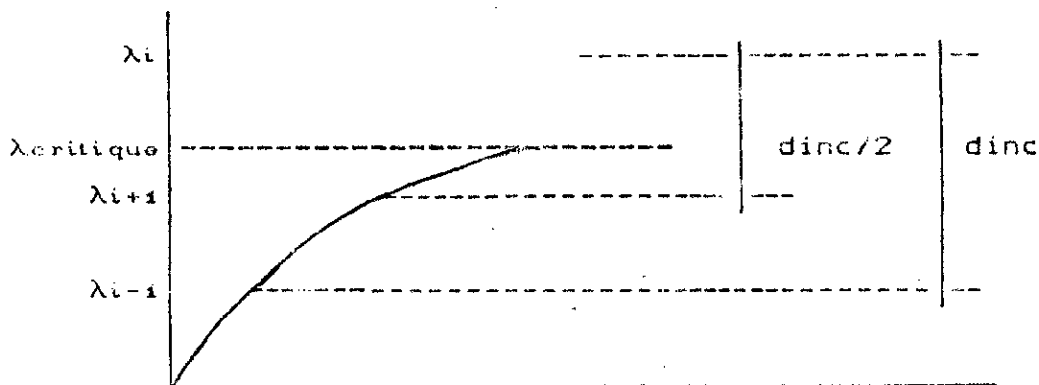
On prend d'abord le milieu de cet intervalle en soustrayant ( $d_{inc}/2$ ) de ( $d_{lam}$ ). Ceci est exposé en (fig 4-2)



(fig 4-2)

remarque: il faudra rendre ( $d_{inc}$ ) positif après cette dernière opération

car sinon au lieu de sommer les incréments on en soustraira. L'exemple traité en (fig 4-3) explicite cette remarque:



(fig 4-3)

## Description du programme réalisé

Si l'on ne rend pas (dinc) positif le  $\lambda_{i+2}$  sera la valeur correspondant à  $\lambda_{i-1}$  car :

$$\begin{aligned} \text{diam}(i+2) &= \text{diam}(i+1) + \text{dinc}(i) \\ &= \left[ \text{diam}(i) - \frac{\text{dinc}(i-1)}{2} \right] - \frac{\text{dinc}(i-1)}{2} \\ &= \text{diam}(i) - \text{dinc}(i-1) \\ &= \text{diam}(i-1) \end{aligned}$$

Pour éviter ceci nous rendons (dinc) positif juste après la sommation avec  $\text{diam}(i)$ .

Après viennent les appels aux différentes sous-routines pour effectuer les opérations intermédiaires.

Nous faisons remarquer ici que le présent programme comporte 2 tests de convergence :

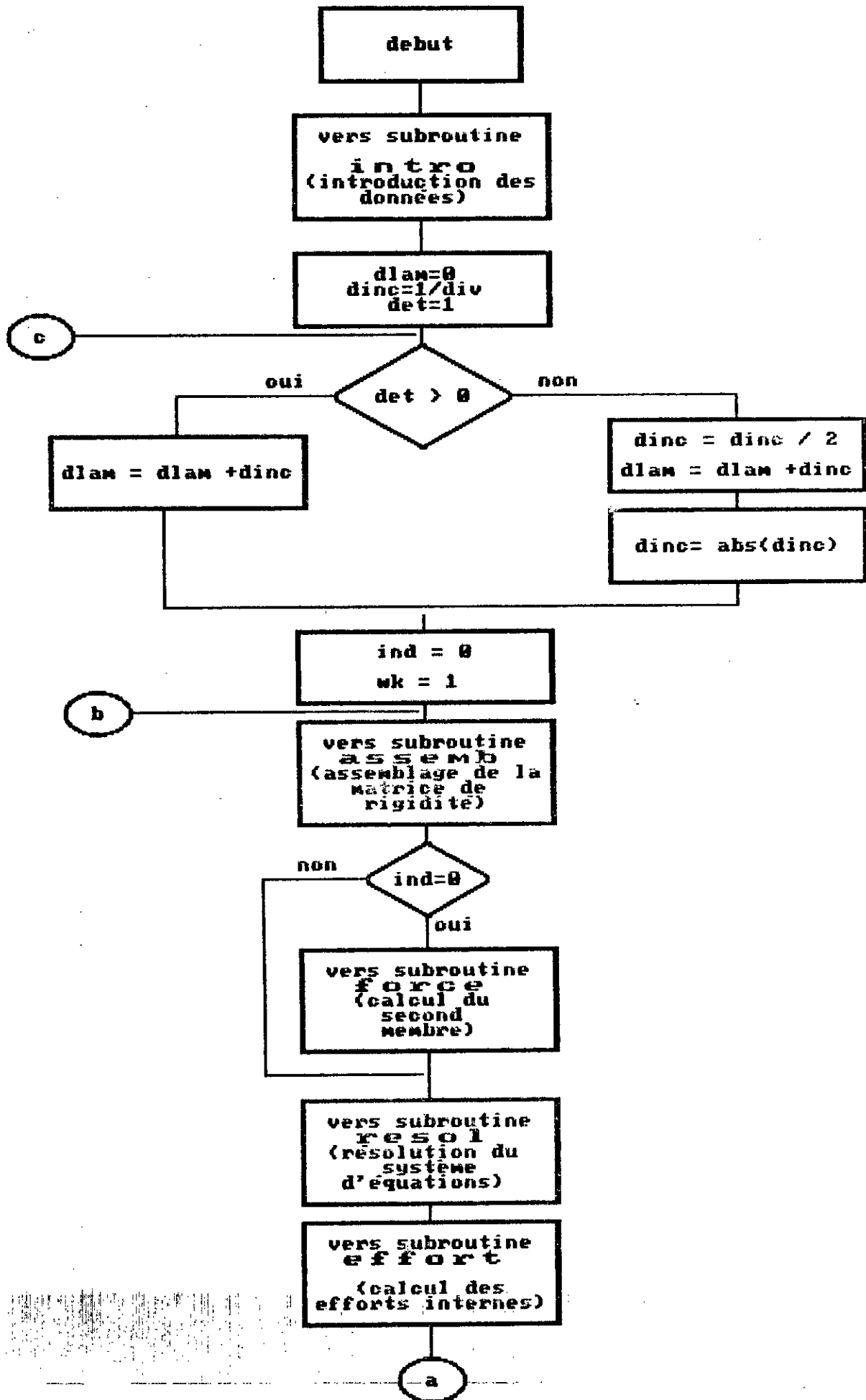
- convergence de  $\lambda$  vers  $\lambda_{\text{critique}}$  qui se traduit par la convergence du déterminant vers "zero".

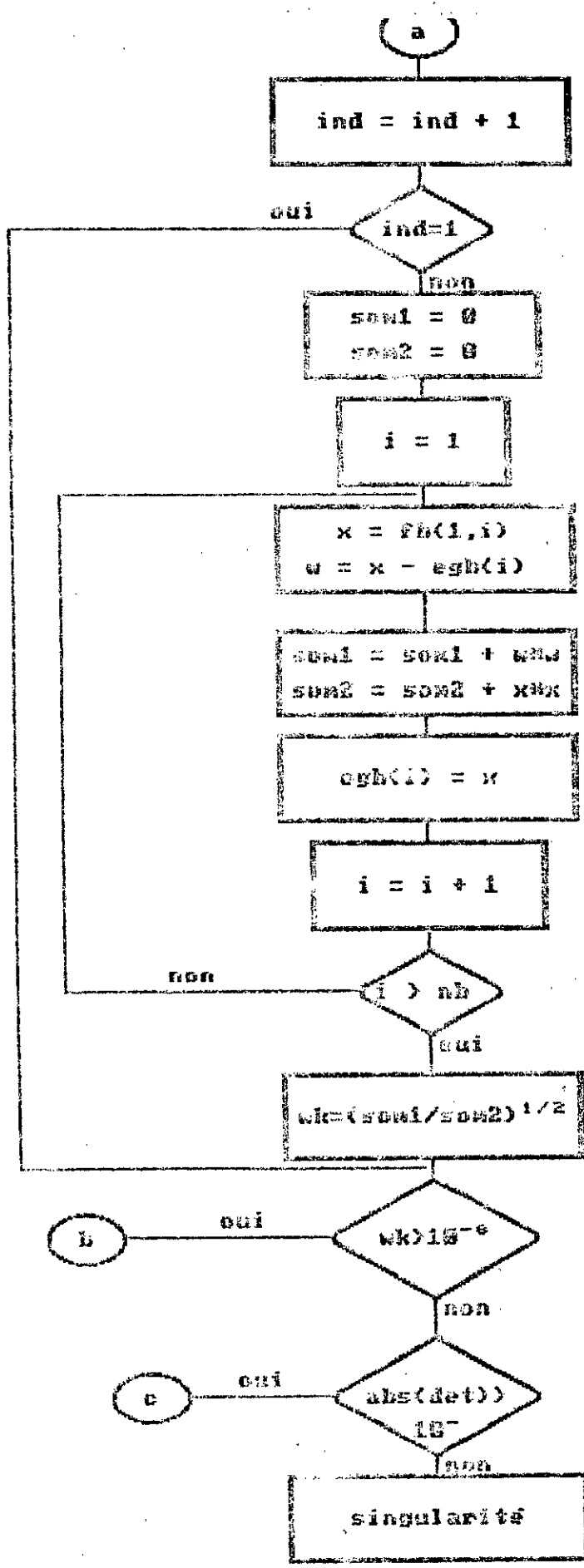
- convergence, pour un  $\lambda$  donné, de chaque effort vers une certaine valeur limite c'est-à-dire, pour un certain effort F :

$$[F(i) - F(i-1)] \text{ tend vers zero lorsque } \lambda \text{ tend vers } \lambda_{\text{critique}}.$$

On fait remarquer que les termes connus du système à résoudre, c'est-à-dire  $[K]$  et  $\{F\}$ , sont tous fonction de l'effort normal, pour un  $\lambda$  donné. Or le vecteur  $\{U\}$  (vecteur déplacement) est l'inconnu du système, donc la variation des efforts dépend exclusivement de la matrice  $[K]$  et du vecteur forces  $\{F\}$  qui sont tous deux fonction de l'effort normal [efb(1,i) dans le programme] ainsi pour que les efforts convergent il faut que l'effort normal converge. Donc il suffira de faire le test sur l'effort normal. Le test se fera

# programme principal





## DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

en norme c'est-à-dire qu'on vérifie :

$$\frac{\| \text{efb}(1,i) - \text{egb}(i) \|}{\| \text{efb}(1,i) \|} < 10^{-8}$$

(Ce terme correspond à  $w_k$  dans le programme).

Où  $\text{egb}(i)$  est l'effort normal à l'itération  $(i-1)$ .

La norme utilisée est la norme carrée :

$$\| A \| = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Donc le terme  $w_k$  aura pour expression :

$$w_k = \frac{\sum_{i=1}^{nb} \{ \text{efb}(1,i) - \text{egb}(i) \}^2}{\sum_{i=1}^{nb} \{ \text{efb}(1,i) \}^2}$$

### 4-INTRODUCTION DES DONNEES: ( subroutine INTRO )

Dans ce sous-programme on introduit les différentes variables qui serviront dans le calcul opéré par le programme.

Ces variables doivent être incluses dans un fichier données créé préalablement .

Les variables sont introduites dans le fichier de la manière suivante :

- le nombre de noeuds (nn).
- pour chaque noeud , on donne :
  - \* la coordonnée X du noeud.

## DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

---

- \* la coordonnée Y du noeud.
- \* le code IAPP du noeud.
- le nombre de barres (nb).
- pour chaque barre , on donne :
  - \* numéro du noeud début de la barre.
  - \* numéro du noeud fin de la barre.
  - \* la section de la barre.
  - \* l'inertie de la barre.
  - \* le module d'élasticité de la barre.
- le nombre de charge (nc).
- pour chaque charge , on donne :
  - \* le numéro de l'élément chargé.
  - \* le code de la charge.
  - \* la valeur de la charge.
- l'incrément de charge à prendre.
  - \* si la valeur de l'incrément donnée est zero le programme prendra comme incrément (  $1 / \Pi^2$  ).
- la valeur absolue limite à considérer pour le déterminant lors de la convergence.  
Car l'ordre de grandeur du déterminant varie avec la dimension de la structure puisque la dimension de la matrice de rigidité est égale à :

$(3 \times n) \times (3 \times n)$
------------------------------------

### 5-ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE: ( subroutine ASSEMB )

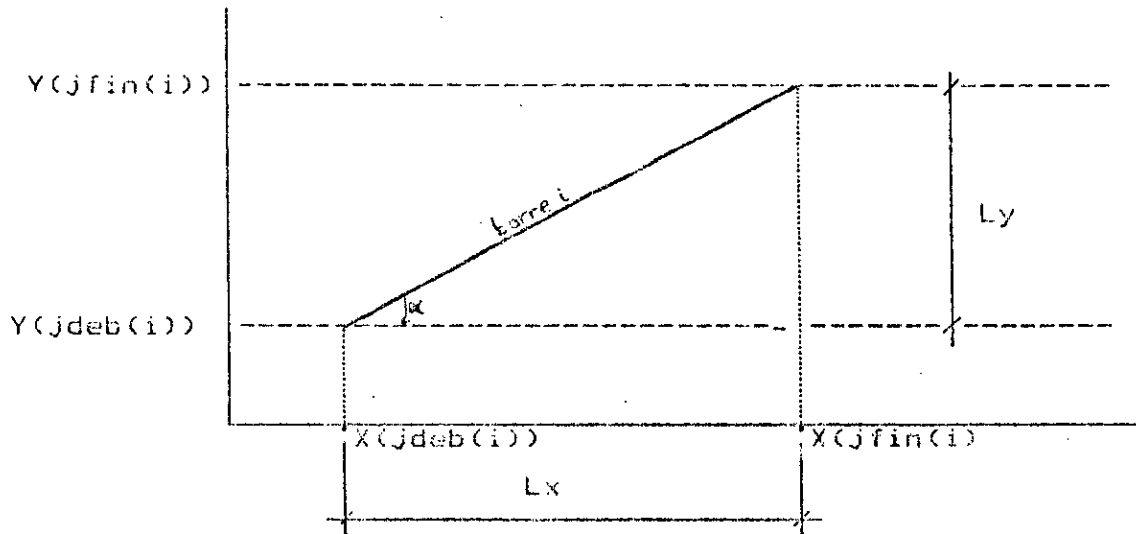
Nous allons procéder à l'assemblage de la matrice de rigidité. Pour cela, il sera nécessaire de calculer la longueur de la barre auparavant.

Les sinus et cosinus seront calculés à partir des longueurs



DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

projetées  $L_x$  et  $L_y$  de la longueur de la barre sur les axes globaux X et Y. Toutes ces variables sont exposées en (fig 4-4).



(fig 4-4)

Où :

$$L_x = X(jfin(i)) - X(jdeb(i))$$

$$L_y = Y(jfin(i)) - Y(jdeb(i))$$

La longueur sera donc

$$L = ALON(i) = \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2}$$

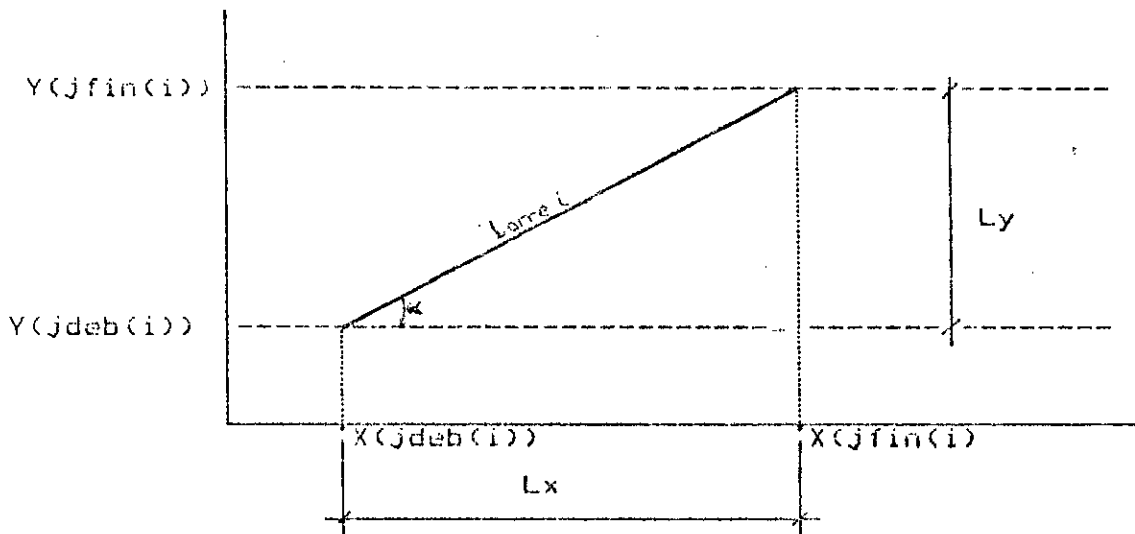
Les sinus et cosinus seront donc :

$$\cos(\alpha) = \frac{L_x}{ALON(i)}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{L_y}{ALON(i)}$$

## DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

projetées  $L_x$  et  $L_y$  de la longueur de la barre sur les axes globaux  $X$  et  $Y$ . Toutes ces variables sont exposées en (fig 4-4).



(fig 4-4)

Où :

$$L_x = X(jfin(i)) - X(jdeb(i))$$

$$L_y = Y(jfin(i)) - Y(jdeb(i))$$

La longueur sera donc

$$L = ALON(i) = \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2}$$

Les sinus et cosinus seront donc :

$$\cos(\alpha) = \frac{L_x}{ALON(i)}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{L_y}{ALON(i)}$$

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$	0	$-\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$
0	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_4$	0	$-\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_3$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$-\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$-\frac{EI}{L^2} \phi_2$	0	$\frac{EI}{L^3} \phi_1$	$-\frac{EI}{L^2} \phi_2$
0	$\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_3$	0	$-\frac{EI}{L^2} \phi_2$	$\frac{EI}{L} \phi_4$

Les termes  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  et  $\phi_4$  sont les fonctions de stabilité.  
Si l'on néglige l'effet du second ordre nous aurons :

$\phi_1 = 12$
$\phi_2 = 6$
$\phi_3 = 2$
$\phi_4 = 4$

L'expression de la matrice de rigidité dans le repère global sera donc :

$$[K]_0 = [R]^T [K] [R]$$

où [R] est la matrice rotation dont l'expression, en notant  $\lambda = \cos(\alpha)$  et  $\mu = \sin(\alpha)$ , est :

$$[R] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour le cas où l'effet du second ordre est négligé la matrice de rigidité dans le repère global [K] sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} \lambda^2 a + \mu^2 b & \lambda \mu a - \lambda \mu b & -\mu c & -\lambda^2 a - \mu^2 b & -\lambda \mu a + \lambda \mu b & -\mu c \\ & \mu^2 a + \lambda^2 b & \lambda c & -\lambda \mu a + \lambda \mu b & -\mu^2 a - \lambda^2 b & \lambda c \\ & & 2d & \mu c & -\lambda c & d \\ & & & \lambda^2 a + \mu^2 b & \lambda \mu a - \lambda \mu b & \mu c \\ & & & & \mu^2 a + \lambda^2 b & -\lambda c \\ & & & & & 2d \end{bmatrix}$$

*SYM*

où :

$$\begin{aligned} a &= \frac{EA}{L} \\ b &= \frac{12EI}{L^3} \\ c &= \frac{6EI}{L^2} \\ d &= \frac{6EI}{L} \end{aligned}$$

Pour le cas où l'effet du second ordre n'est pas négligé la matrice de rigidité dans le repere global sera :

$\lambda^2 a + \mu^2 b$	$\lambda \mu a - \lambda \mu b$	$-\mu c$	$-\lambda^2 a - \mu^2 b$	$-\lambda \mu a + \lambda \mu b$	$-\mu c$
	$\mu^2 a + \lambda^2 b$	$\lambda c$	$-\lambda \mu a + \lambda \mu b$	$-\lambda^2 a - \mu^2 b$	$\lambda c$
		$2d$	$\mu c$	$-\lambda c$	$e$
	<i>SYM</i>		$\lambda^2 a + \mu^2 b$	$\lambda \mu a - \lambda \mu b$	$\mu c$
				$\mu^2 a + \lambda^2 b$	$-\lambda c$
					$d$

où :

$a = \frac{EA}{L}$
$b = \frac{EI}{L^3} \phi_1$
$c = \frac{EI}{L^2} \phi_2$
$d = \frac{EI}{L} \phi_3$
$e = \frac{EI}{L} \phi_3$

Il existe deux méthodes principales pour l'assemblage de la matrice de rigidité :

\* Celle qui consiste à définir la matrice de rigidité élémentaire de chaque barre dans le repere local, sa matrice rotation et

à l'aide de subroutine permettant le produit et la somme des matrices on effectue les opérations citées ci-dessus c'est-à-dire :

$$- \text{produits : } [K]_0 = [R]_i^T [K]_i [R]_i$$

(cette opération demande de passer par les subroutines produit et somme des matrices ).

$$- \text{somme : } [K]_0 = \sum_{i=1}^n [K]_i$$

où :

$[K]_0$  est la matrice de rigidité de la structure dans le repère global.

$[K]_i$  est la matrice de rigidité de l'élément  $i$ .

Cette méthode est, quoique la plus naturelle, très onéreuse car elle contient beaucoup d'opérations.

\* Celle qui consiste à introduire les 21 éléments supérieurs de la matrice de rigidité de chaque élément dans le repère global . Des boucles permettront la sommation de ces éléments pour donner la matrice globale de la structure . Cette sommation ne donne que les termes supérieurs de la matrice , les autres le reste étant déterminé par symétrie ( puisque la matrice de rigidité est symétrique ).

Nous avons choisi la deuxième méthode qui a l'avantage de comporter moins d'opérations et qui permet ainsi un gain de temps lors de l'exécution .

Cette subroutine comprend donc les étapes suivantes :

- calcul des caractéristiques géométriques ( longueurs, sinus et cosinus, longueurs projetées...etc).

- détermination des éléments de la matrice de rigidité de chaque élément avec sommation automatique pour donner la matrice globale.

Remarque sur la détermination des fonctions de stabilité :

Lorsque l'effort normal dans un élément de la structure n'est pas nul la matrice de rigidité devient fonction de cet effort normal. Cette dépendance se traduit par l'apparition de termes dans l'équation de cette matrice qu'on appelle " FONCTIONS DE STABILITE ".

Pour une barre donnée on a deux cas :

1- si l'effort normal est nul : la matrice de rigidité sera celle aux termes constants où on a :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 12 \\ \phi_2 &= 6 \\ \phi_3 &= 2 \\ \phi_4 &= 4\end{aligned}$$

2- si l'effort normal n'est pas nul : et là on tombe sur deux cas :

a)- si l'effort normal est un effort de compression :

Les fonctions de stabilité sont des termes en sinus et cosinus d'où l'appel à une autre subroutine " ASS " qui calcule ces sinus et cosinus.

b)- si l'effort normal est un effort de traction :

Dans ce cas ces fonctions sont des termes en sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique d'où l'appel à la subroutine " ASINH " qui calcule ces termes.

Pour mettre en évidence la méthode d'assemblage exposée ci-dessus nous donnons en (fig 4-5) l'expression de la matrice de rigidité dans le repère global dont les noeuds début et fin sont respectivement i et j.

$u_i \ v_i \ \theta_i$			$u_j \ v_j \ \theta_j$		
0	0	0	0	0	
0	X	0	X	0	$u_i$
0	0	0	0	0	$v_i$
0	X	0	X	0	$\theta_i$
0	0	0	0	0	

(fig 4-5)

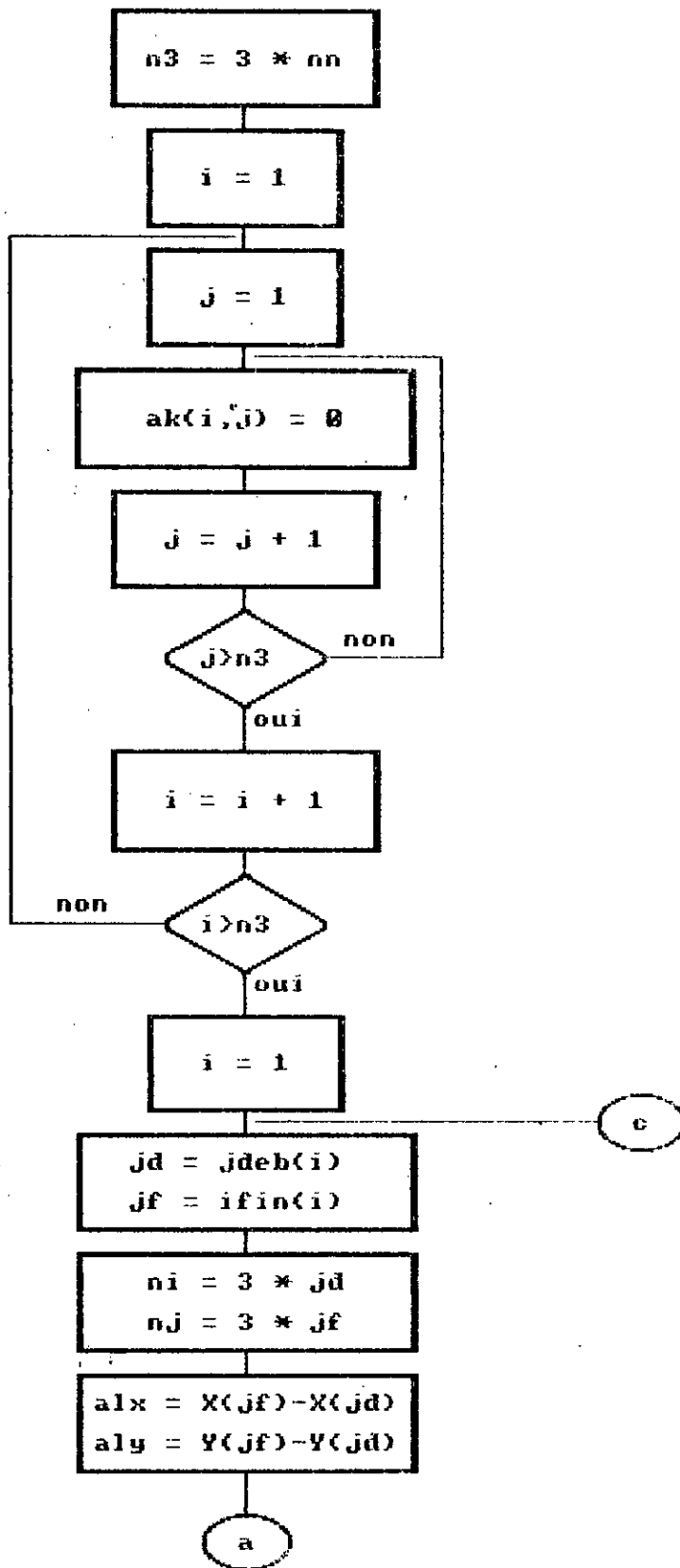
Comme les termes pour un noeud donné vont par trois ( $u_i$ ,  $v_i$  et  $\theta_i$ )

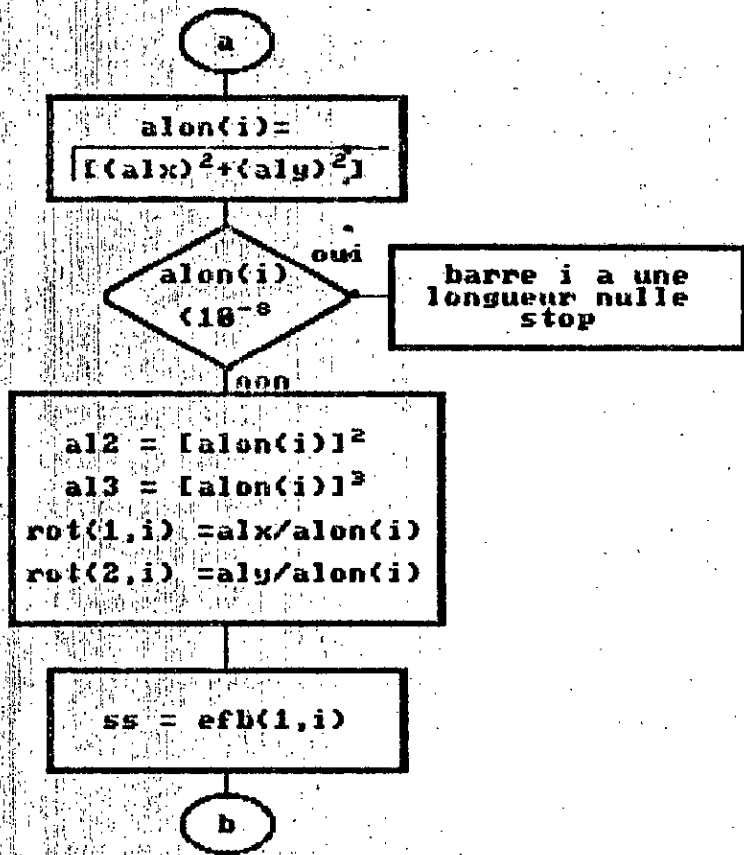
- le terme en  $u_i$  correspond à la colonne (ou ligne) :  $3i-2$ .
- le terme en  $v_i$  correspond à la colonne (ou ligne) :  $3i-1$ .
- le terme en  $\theta_i$  correspond à la colonne (ou ligne) :  $3i$ .

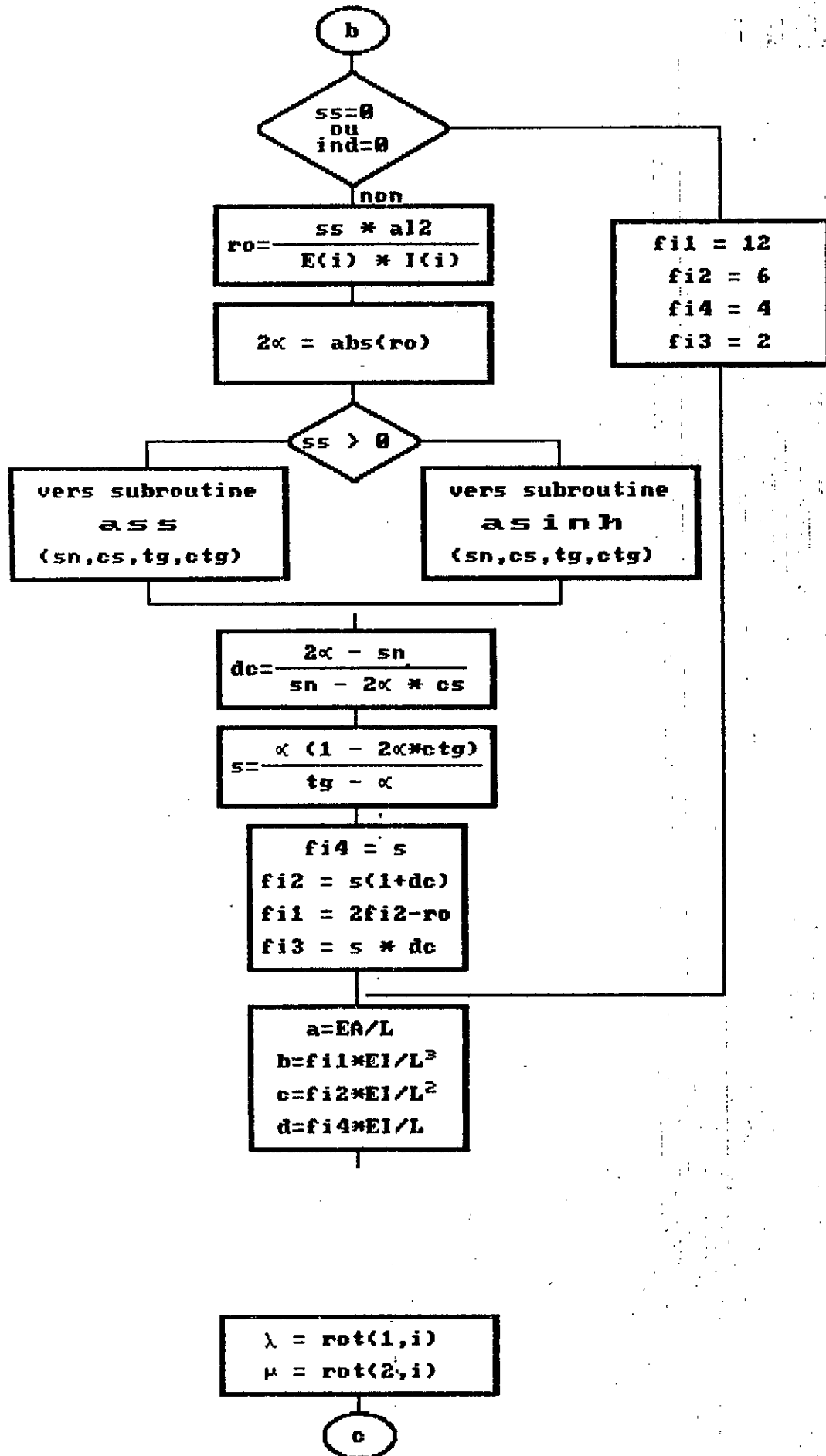
Dans les pages qui suivent on va exposer l'organigramme et le listing de ce sous-programme.

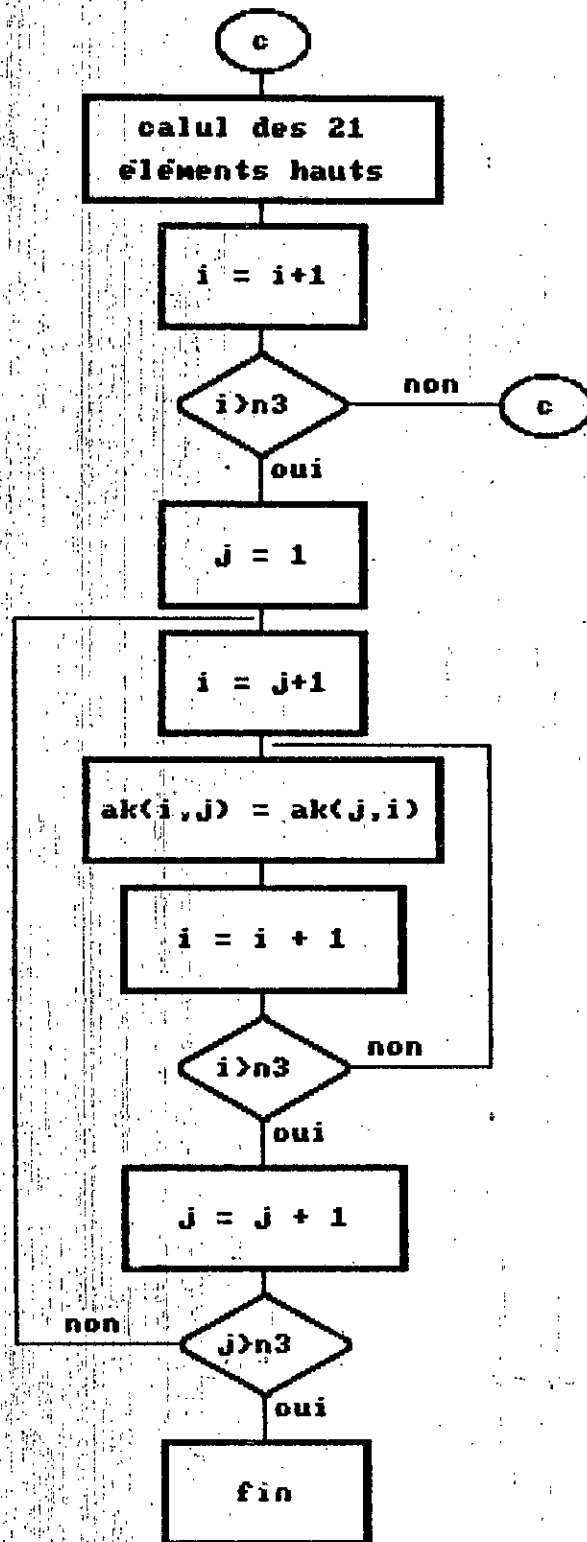


# sous-programme assemb

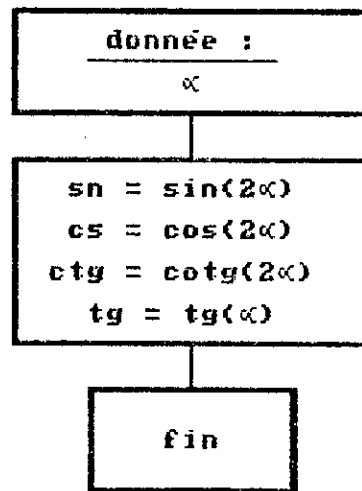




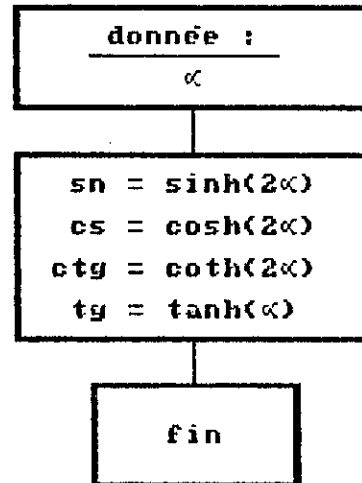




## subroutine ass



## subroutine asinh



6- CALCUL DU SECOND MEMBRE: ( subroutine FORCE )

La matrice de rigidité assemblée, on arrive à la subroutine qui calcule les éléments du second membre de notre système d'équations, c'est-à-dire le vecteur force [F].

Ce dernier se compose en fait de deux parties : un terme dû aux forces appliquées directement aux noeuds et un terme dû à celles appliquées sur les barres.

Nous avons ainsi cinq possibilités de direction pour les charges appliquées :

- soit on a des charges sur noeuds et là on a trois cas d'après la valeur de la variable IDIR :

IDIR = 1 : force direction X .

IDIR = 2 : force direction Y .

IDIR = 3 : couple .

remarque: les directions des forces sur les noeuds sont exprimées dans le repère global de la structure .

- soit on a des charges sur les barres et dans ce cas on se trouve devant deux possibilités toujours d'après la valeur de la variable IDIR :

IDIR = 4 : force uniforme suivant l'axe de la barre.

IDIR = 5 : force uniforme perpendiculaire à l'axe de la barre .

Les forces sur les barres sont exprimées relativement au repère local de la barre .

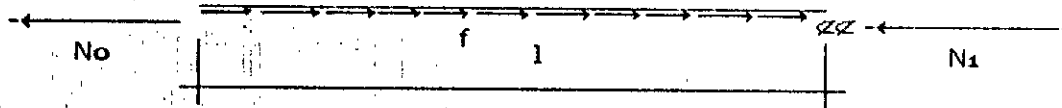
Pour les charges sur les noeuds , elles sont directement sommées avec les valeurs des termes du vecteur forces correspondants .

Alors que pour les charges sur les barres , on va d'abord calculer le terme qui revient à chacun de ses noeuds extrémités avant de les inclure dans le vecteur force .

Ainsi pour la force uniformément répartie suivant l'axe de la barre [voir

(fig 4-6)] seuls les termes  $N_0$  et  $N_1$  sont non nuls et on obtient :

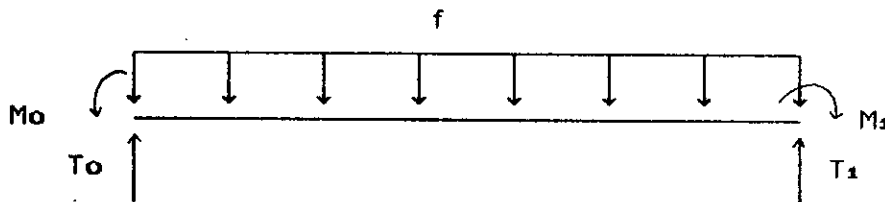
$$\begin{aligned} N_0 &= - f * l / 2 \\ N_1 &= - f * l / 2 \end{aligned}$$



(fig 4-6)

Dans le cas d'une force uniformément répartie perpendiculairement à l'axe de la barre [voir (fig 4-7)] on trouve :

$$\begin{aligned} T_0 &= - f * l / 2 & M_0 &= - f * l^2 / 12 \\ T_1 &= - f * l / 2 & M_1 &= + f * l^2 / 12 \end{aligned}$$

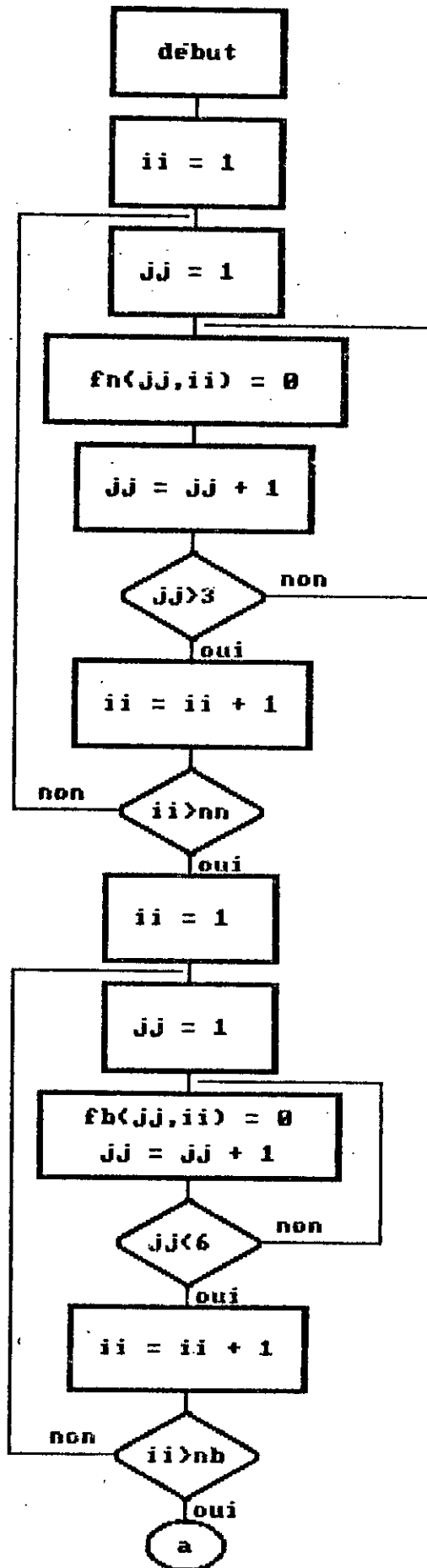


(fig 4-7)

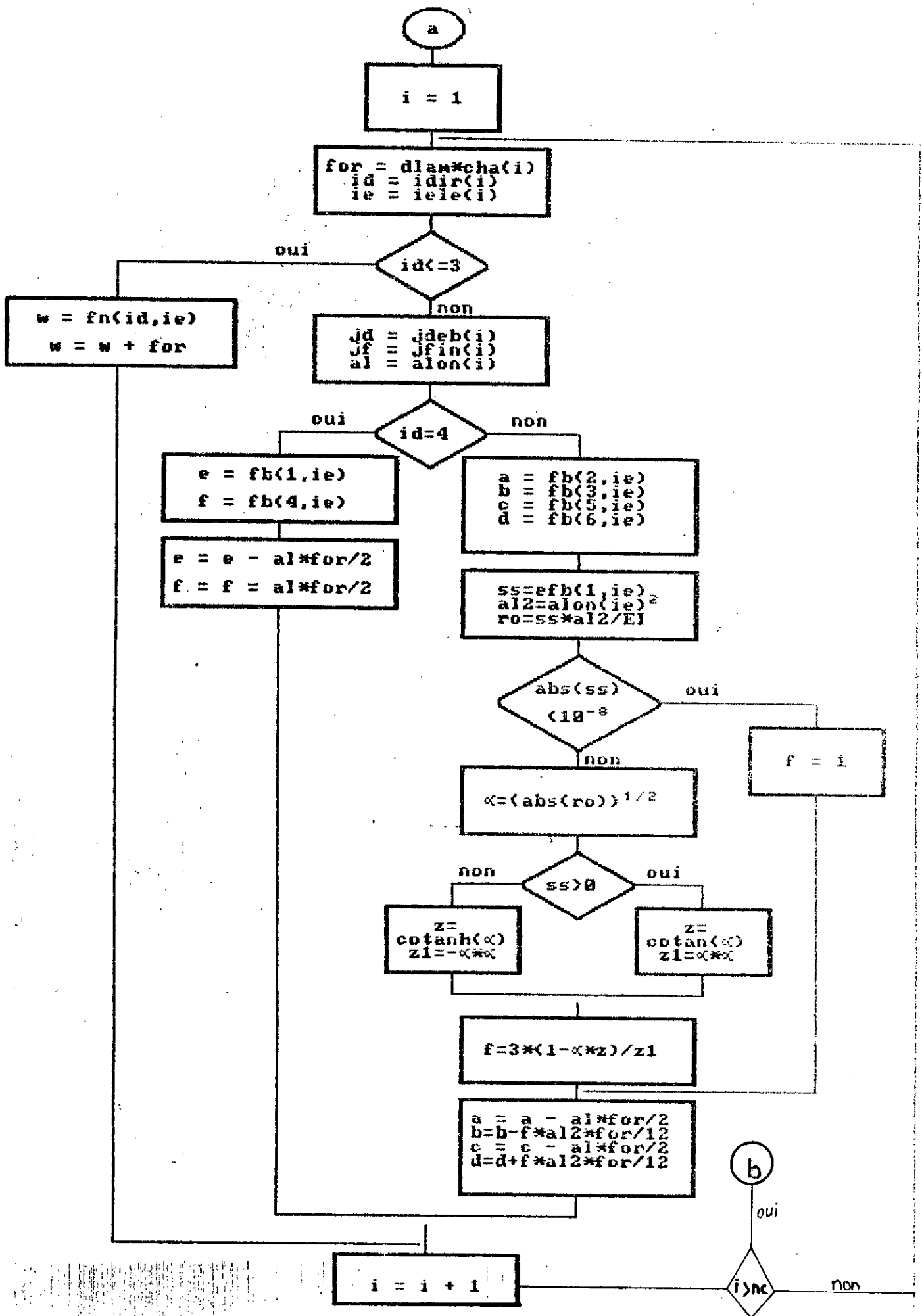
Les termes dus aux charges sur les barres revenant aux noeuds seront projetés dans le repère global et seront ensuite introduits dans le terme FN (vecteur forces).

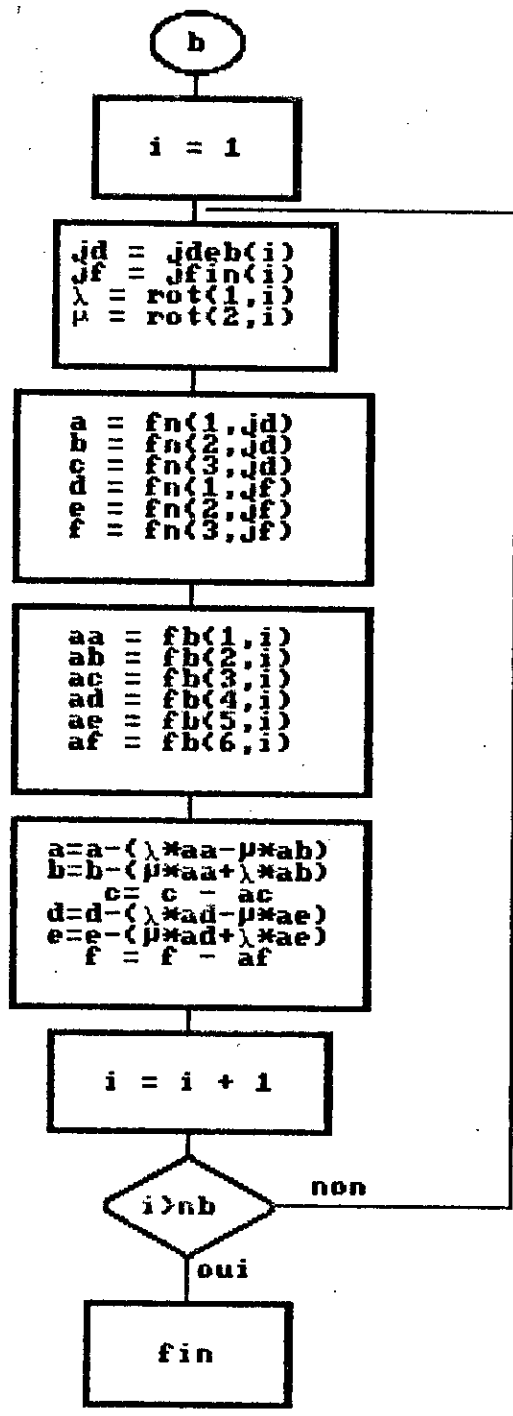
L'organigramme et le listing de cette partie se trouvent sur les feuilles suivantes.

# subroutine force









7- RESOLUTION DU SYSTEME: ( subroutine RESOL )

Arrivés à ce stade des des calculs où nous connaissons la matrice de rigidité [K] et le vecteur forces {F}, on ne peut résoudre le système car la matrice de rigidité est une matrice singulière ( la singularité est une de ses propriétés ) . Nous devons donc , avant d'entamer la résolution proprement dite , impérativement enlever cette singularité en tenant compte des différentes conditions d'appuis , ce qui signifie prendre en considération les appuis .

Pour cela nous disposons du tableau IAPP qui nous permet de savoir si un noeud est ou non appui et s'il l'est quels sont les mouvements empêchés , Le but étant bien sûr d'éliminer de la résolution les termes provenant des noeuds appuis ( mouvements empêchés ) .

Il existe principalement trois méthodes pour le traitement de ces condition aux limites ?

1)- Méthode de partitionnement:

Dans cette méthode on permute les lignes et les colonnes de façon à assembler en tête du vecteur {U} les composantes inconnues et en bas celles imposées ( par les conditions aux limites ) . Le système s'écrit alors :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline U_i \\ \hline U_j \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline F_i \\ \hline F_j \\ \hline \end{array}$$

— déplacements inconnus  
 — forces connues  
 — forces inconnues  
 — déplacements connus

et l'on résoud  $[K_{11}] \{U_i\} = \{F_i\}$

Cette méthode présente l'avantage de travailler avec un système d'équations réduit .Mais elle est du point de vue informatique relativement complexe car il faudra à chaque permutation de lignes et de

colonnes repérer l'inconnue pour pouvoir lui rétablir ses véritables indices après la résolution .

### 2)-Méthode du terme diagonal dominant:

Dans cette méthode on commence par assembler la matrice de rigidité sans tenir compte des conditions aux limites .

Ensuite, pour un déplacement  $u_i$  imposé, on opère comme suit :

- on remplace le terme  $k_{ii}$  ( correspondant au mouvement empêché  $i$  ) par  $( k_{ii} + \alpha )$  ( où  $\alpha$  est un nombre très grand par exemple  $10^{10}$  ).

- on remplace le terme  $f_i$  par  $( \alpha u_i )$  .

Et enfin on résoud normalement le système.

### 2)-Méthode du terme unité sur la diagonale:

Cette méthode consiste à conserver la disposition de la matrice, tout en remplaçant les lignes et les colonnes correspondant aux déplacements nuls par des zeros en mettant toutefois un 1 pour le terme diagonal (afin d'éviter que la matrice ne soit singulière ).

De même, on placera un zero sur la ligne correspondante du vecteur force. Ainsi si  $u_k$  est l'inconnue du déplacement , nous aurons à résoudre sur cette ligne :

$$1 \times u_k = 0$$

d'où  $u_k = 0$  qui est bien le résultat espéré pour un appui.

De plus le terme  $u_k$  n'interviendra dans aucune autre équation , compte-tenu de la colonne de zeros .Ceci est exposé en (fig 4-8) .



DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

on en déduit (si  $k_{11} \neq 0$ ) :

$$u_1 = \frac{1}{k_{11}} \left[ f_1 - \sum_{i=2}^n k_{1i} u_i \right]$$

remplaçons  $u_1$  par cette valeur dans l'équation  $j$  ( $j = 2, n$ ) .

nous avons :

$$k_{j1} u_1 + \sum_{i=2}^n k_{ji} u_i = f_j$$

nous obtenons :

$$\frac{k_{j1}}{k_{11}} \left[ f_1 - \sum_{i=2}^n k_{1i} u_i \right] + \sum_{i=2}^n k_{ji} u_i = f_j$$

ou encore :

$$\sum_{i=2}^n \left[ k_{ji} - \frac{k_{ji}}{k_{11}} k_{1i} \right] u_i = f_j - \frac{k_{1j}}{k_{11}} f_1$$

Cette équation étant valable pour  $j = 2$  jusqu'à  $n$  .

On continuera ensuite pour les lignes 2, 3 jusqu'à  $n-1$  .

Ceci étant une triangularisation, on obtiendra alors :

$k'_{nn} u_n = f'_n$  ( le signe ' indique que les termes ont été modifiés par les calculs successifs ) .

Ce qui donnera  $u_n$  par simple division, puis en reprenant l'équation  $n-1$  jusqu'à 1 nous déterminerons les valeurs  $u_i$  en utilisant la dernière équation de la ligne :

$$k'_{ii} u_i + \sum_{j=i+1}^n k'_{ij} u_j = f'_i$$

Remarques: - Nous avons vu que nous trouvons une solution à condition que les termes  $k'_{ii}$  soient non nuls .

Si pour un terme on a :  $k'_{ii} = 0$  on cherche pour les lignes suivantes si parmi les termes qui se trouvent directement au-dessous de celui-ci on a un terme non nul . S'il existe on opère une permutation des deux lignes, ceci ne modifie pas l'ordre des variables mais il inverse le signe du déterminant .

## DESCRIPTION DU PROGRAMME REALISE

---

Si tous les termes jusqu'à  $k'_{in}$  sont nuls , alors la matrice est dite singulière et la solution n'existe pas .

- Arrivé au niveau de la triangularisation et avant la résolution , on calcule le déterminant qui est , à ce stade des calculs , le produit des éléments diagonaux.

Nous pouvons faire cette opération car l'une des propriétés d'un déterminant est qu':

" on ne modifie pas un déterminant quand on ajoute à une ligne une combinaison des autres lignes ".

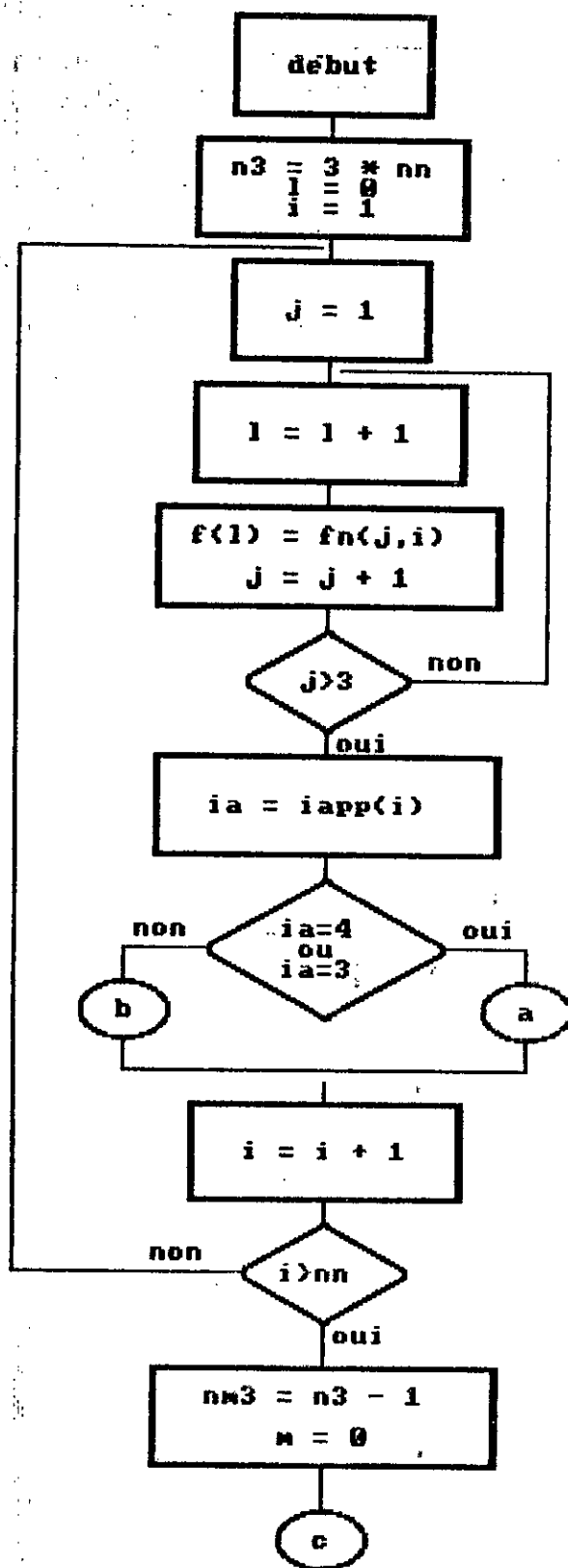
Or la triangularisation opérée précédemment consiste justement , comme il est exposé plus haut , à ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

En résumé la subroutine RESOL travaille comme suit :

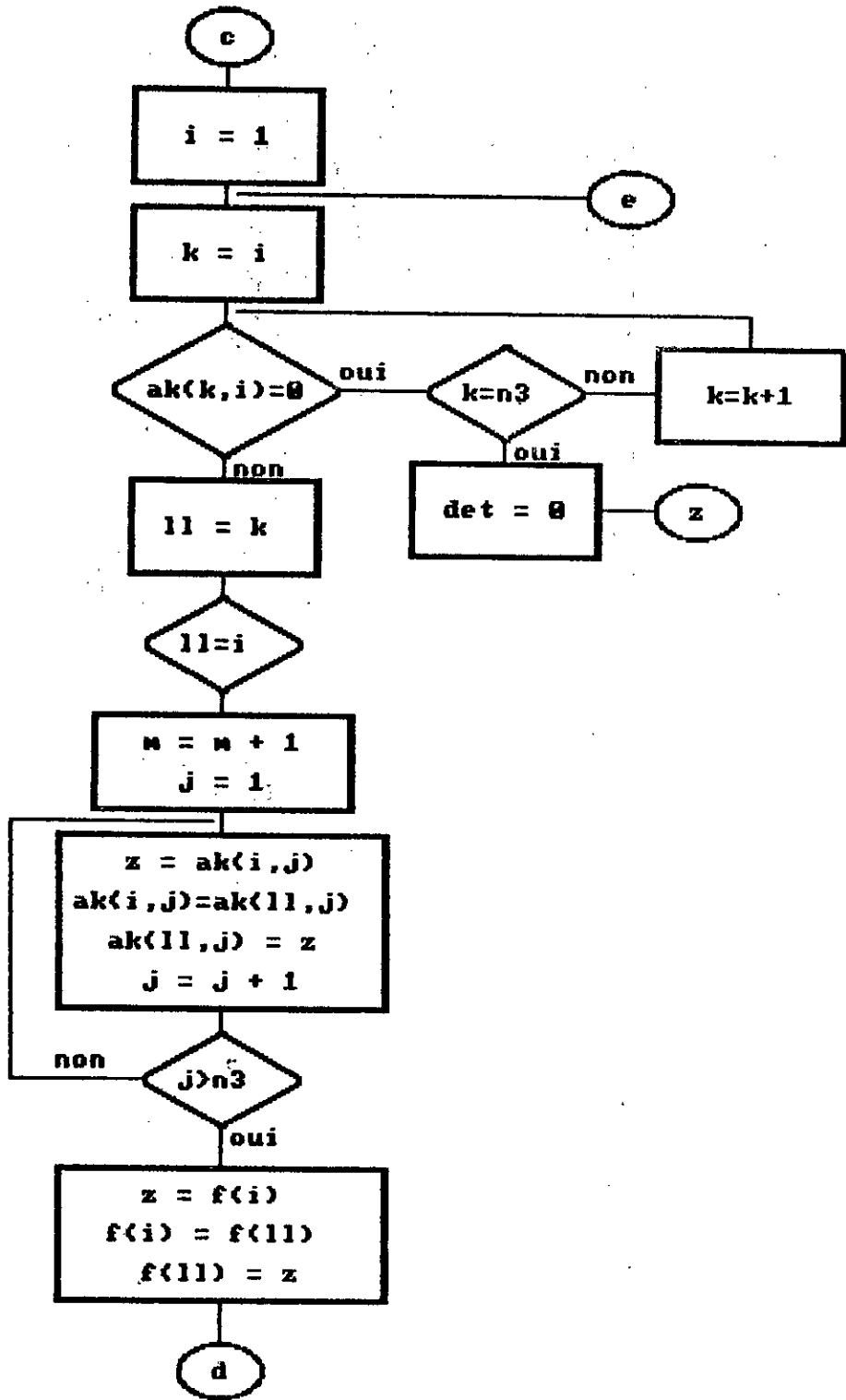
- injection du vecteur forces FN dans le vecteur F (F étant un vecteur propre à RESOL ).
- élimination des termes provenant des appuis (tenir compte des CAL).
- triangularisation .
- calcul du déterminant .
- calcul du premier résultat  $u_n$  .
- calcul des résultats  $u_{n-1}$  à  $u_1$  ( U étant un vecteur propre à RESOL ) .
- transfert des résultats dans le vecteur DP (vecteurs des déplacements nodaux ) .

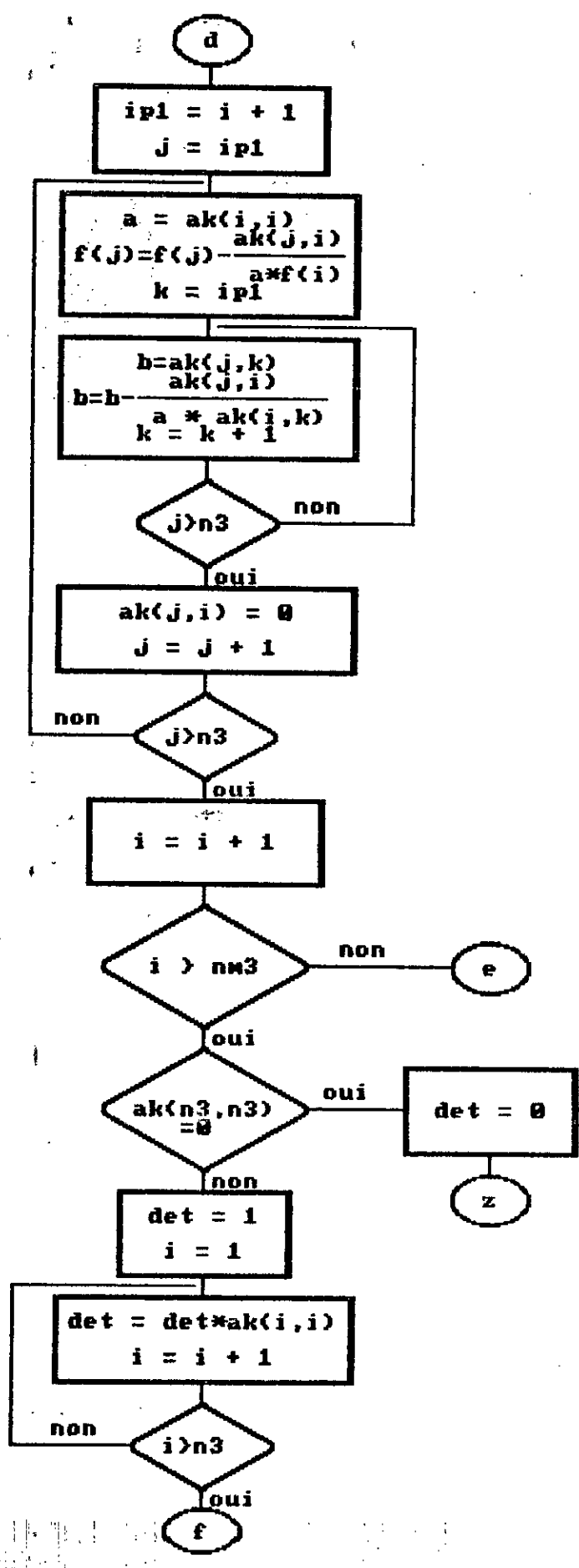
L'organigramme complet et le listing de cette subroutine se trouvent sur les feuilles suivantes .

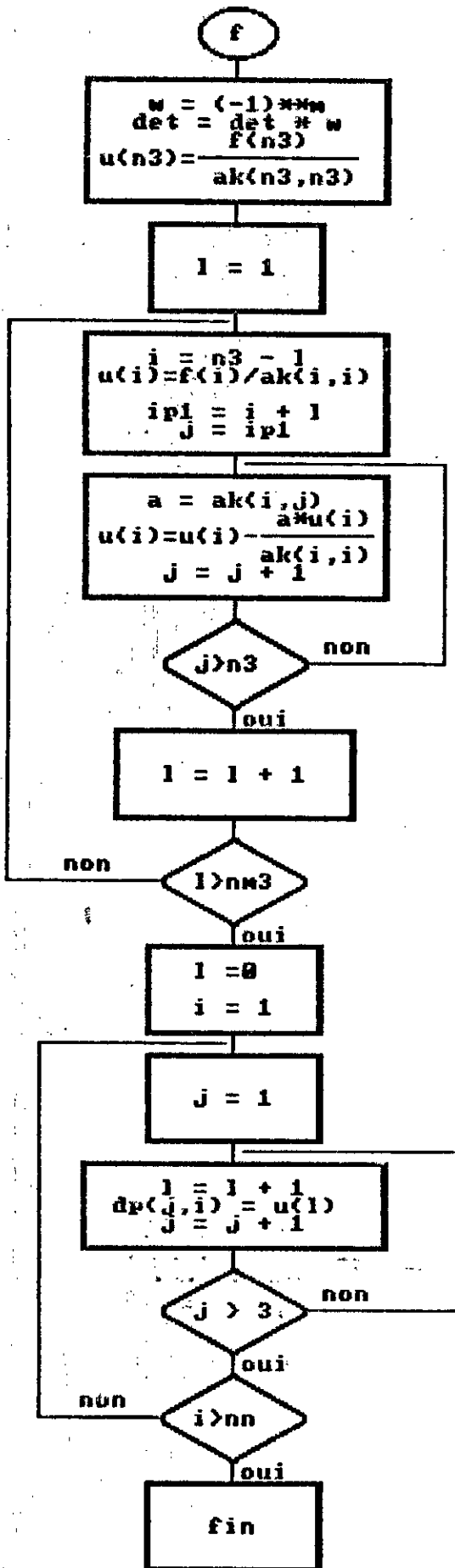
# subroutine resol

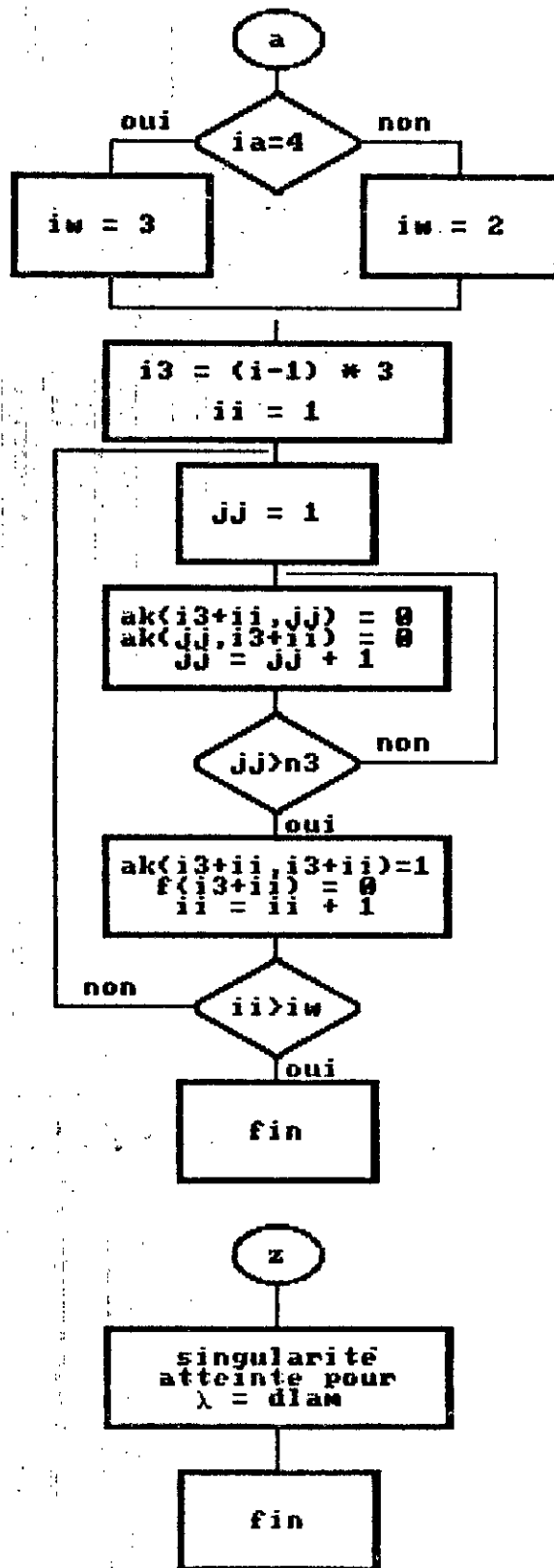


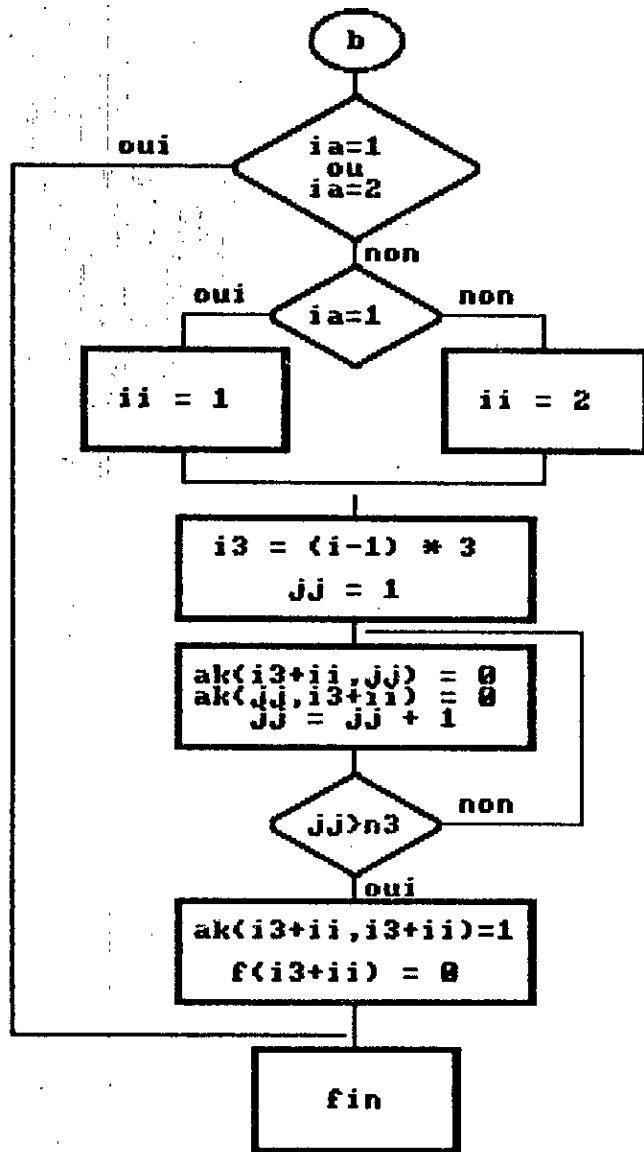












B-CALCUL DES EFFORTS INTERNES DANS LES BARRES: ( subroutine EFFORT )

Le but de cette subroutine est de compléter les résultats obtenus précédemment , qui sont donc les déplacements des noeuds , en calculant les efforts dans les barres .

Ces derniers seront calculés d'après la formulation développée dans le chapitre (méthode de calcul par les matrices de rigidité ) .

On ajoutera aux efforts sur les barres obtenus dans la subroutine FORCE ( qui sont les termes FB ) ceux dus aux déplacements des noeuds début et fin , exprimés dans le repère lié à la barre .

On ramènera les déplacements des noeuds au noeud fin , ce qui correspond à fixer le noeud début .

Ceci n'a pas d'influence sur les calculs puisque ce qui intervient dans les efforts dans les barres sont bien les déplacements relatifs des extrémités et non les déplacements absolus . Ce qui revient à résoudre :

$$[K1] \{U\} = \{F\}$$

où  $\{U\}$  est le vecteur déplacements relatifs .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline K_0 & L_1 \\ \hline \hline L_0 & K_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U_0 \\ \hline U_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline F_0 \\ \hline F_1 \\ \hline \end{array}$$

$U_0$ : déplacement du noeud début  
 $U_1$ : déplacement du noeud fin

Mais comme  $[U_0] = 0$  nous aurons :

$$[F_0] = [L_1] U_1$$

$$[F_1] = [K_1] U_1$$

$[K1]$  étant la matrice de la barre dans le repère local .

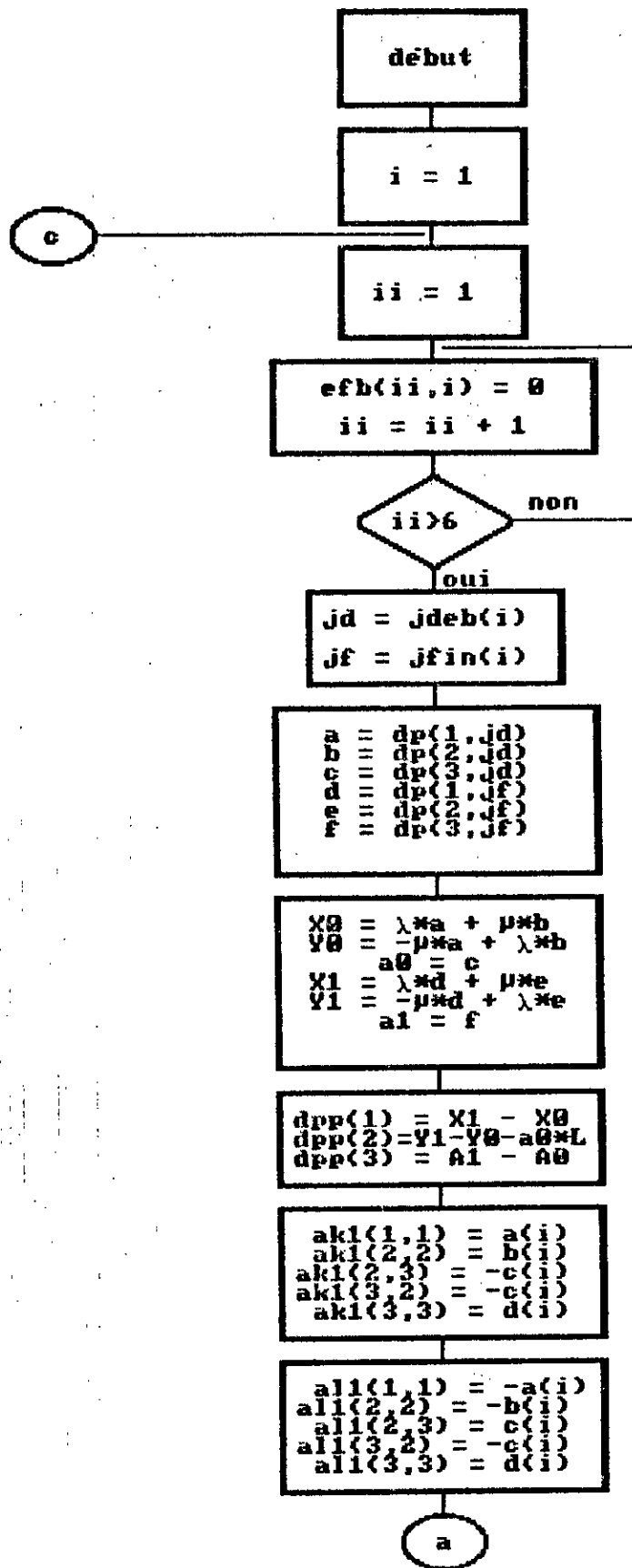
En résumé voici comment travaille cette subroutine :

- projection des déplacements de chaque noeud sur dans son repère local .
- calcul des déplacements relatifs  $( u'_1, v'_1, \varphi'_1 )$  .

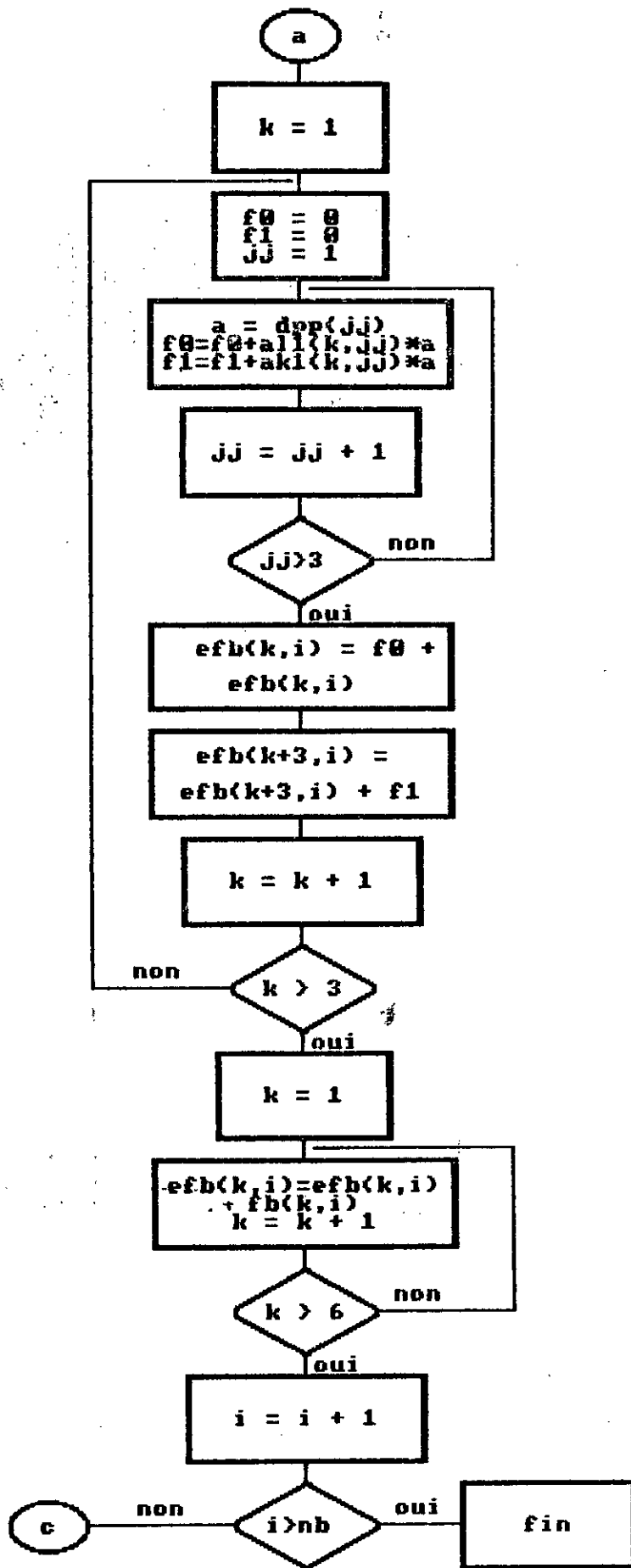
- calcul des efforts dus à ces déplacements .
- sommation de ces forces avec les termes FB correspondants .

Remarque: Les éléments de la matrice [K1] sont les vecteurs a(i), b(i) , c(i), d(i) et e(i) calculés dans la subroutine ASSEMB pour chaque barre ( ici ils ne sont pas assemblés mais pris chacun tout seul ) .  
L'organigramme et le listing de cette partie du programme se trouvent sur les feuilles suivantes .

# subroutine effort







## **CHAPITRE V :**

# **RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

## CHAPITRE V

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS

#### 1- INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous allons expérimenter le programme réalisé sur des cas réels .

Nous verrons d'abord dans l'exemple 1 l'allure générale que prend la courbe force-déplacement avec effet P- $\Delta$  . Ensuite, dans les exemples suivants nous verrons les différents facteurs influençant la stabilité . Nous tenterons de donner une interprétation des effets de chaque paramètre en étudiant la variation de la courbe force-déplacement avec celle des dits paramètres .

En abordant ce chapitre nous étions devant deux choix :

- prendre une seule structure et étudier sur elle tous les facteurs en ne faisant varier à chaque fois que le paramètre souhaité .

- prendre pour chaque étude une structure différente qui agrandirai ainsi l'horizon d'application du programme et fournirai plus de cas à étudier mais empêcherai de comparaitre les effets de différents facteurs sur une même structure .

Nous avons opté pour un choix intermédiaire :

- pour l'étude des charges transversales, nous avons choisi une structure à deux niveaux qui nous permettait de schématiser une distribution des efforts transversaux .

- pour le reste nous avons préféré prendre une structure à un niveaux qui est plus simple .

Le présent chapitre se divise comme suit :

- \* exemple 1 : donne l'allure générale de la courbe force-déplacement avec effet P- $\Delta$  .

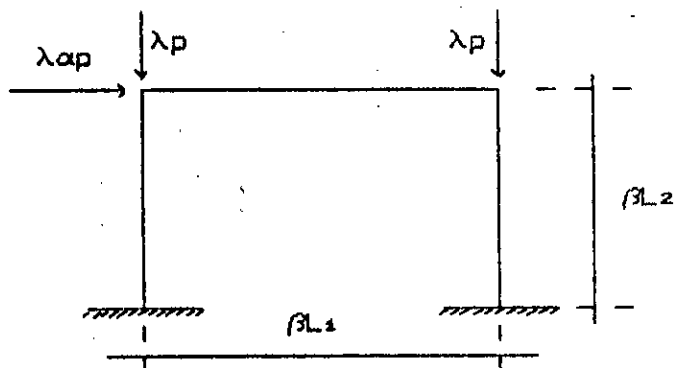
- \* exemple 2 : étudie l'effet des charges transversales sur la courbe citée ci-dessus.

- \* exemple 3 : étudie l'effet de l'élanement .

\* exemple 4 : étudie l'effet du degré d'hyperstaticité .

2- EXPERIMENTATION DU PROGRAMME:

2.1- Exemple 1: (Allure générale : schéma 2.1)



$E = 2 \times 10^8 \text{ } \gamma \text{ kPa}$   
 $P = 270 \text{ kN}$   
 $L_1 = 4 \text{ m}$   
 $L_2 = 3 \text{ m}$   
 $A = 9 \times 10^{-2} \text{ } \nu \text{ m}^2$   
 $I = 6.75 \times 10^{-4} \text{ } \delta \text{ m}^4$   
 $P_1 = 27 \text{ kN}$

schéma 2.1

Nous réalisons dans le présent exemple deux courbes :

\* la première étant caractérisée par :

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 1.00$
$\nu = 1.00$
$\delta = 1.00$

\* la seconde par :

$\alpha = 2$
$\beta = 2$
$\gamma = 1.05$
$\nu = 1.33$
$\delta = 1.33$

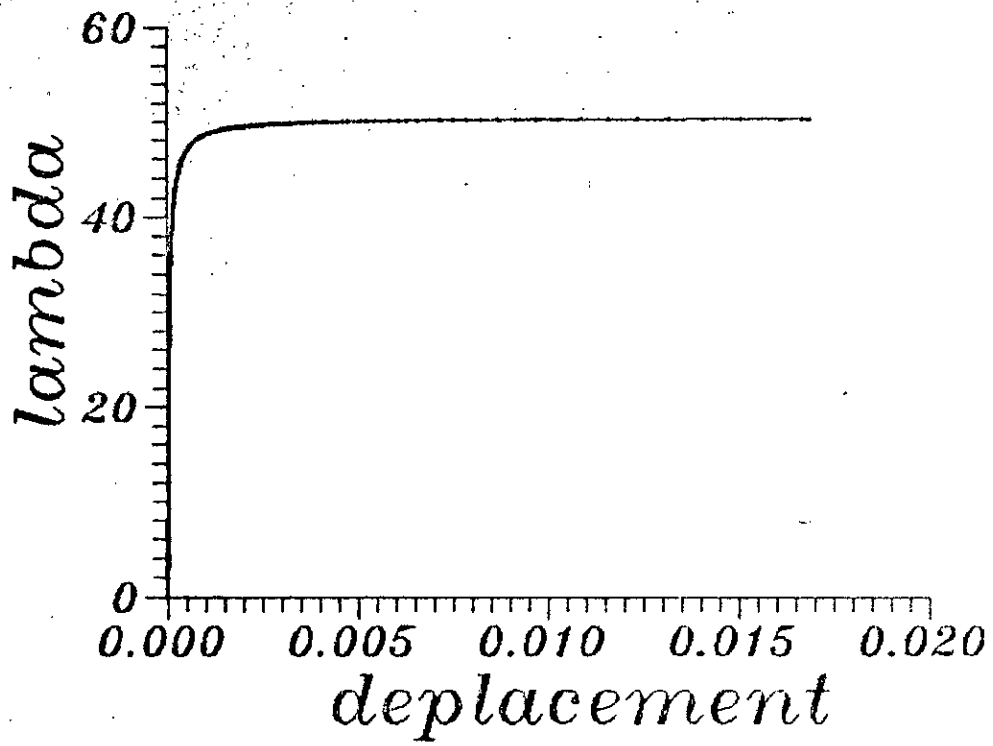


Fig ( 2.I.a )

## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

---

Les résultats de ces exemples sont illustrés en figures (2.1) a) et b). On remarque en premier lieu sur la courbe de la figure (2.1.a)) que les deux courbes comportent chacune deux portions :

- une courbe non-linéaire démarrant du point o centre des axes .
- une droite horizontale qui débute à la fin de la courbe précédente au long de laquelle la charge (représentée par le coefficient  $\lambda$  pour lequel  $P_i = \lambda_i * P$ ) est constante .

Nous remarquons que la projection de la droite sur l'axe des déplacements est beaucoup plus importante que celle de la courbe non-linéaire . Ce qui veut dire que tout au long de cette droite on a de grands déplacements sans variation de charge . Cette remarque nous montre qu'on a différents états d'équilibre pour une même charge  $\lambda_c$  et donc on a un équilibre instable .

Une autre remarque que l'on peut faire sur la figure (2.1.b)) est que les deux courbes ne coïncident pas, ce qui montre que la variation des différents éléments géométriques et de chargement a influencé cette courbe .

Ce qui nous conduit à conclure que la non-linéarité et la charge critique  $\lambda_c$  dépendent de plusieurs facteurs dont :

- le degré d'hyperstaticité .
- l'élanement .
- les charges transversales .
- le module d'élasticité .
- la section et l'inertie .

Ce sont ces facteurs qui déterminent si la non-linéarité est ou n'est pas accentuée comme ils influent aussi sur la valeur de la charge critique .

Nous allons voir plus en détails, dans ce qui suit, l'effet de quelques uns de ces facteurs sur la non-linéarité ainsi que sur la valeur de la charge critique .

2.2- Exemple 2: ( Influence des charges transversales : schéma 2.2 )

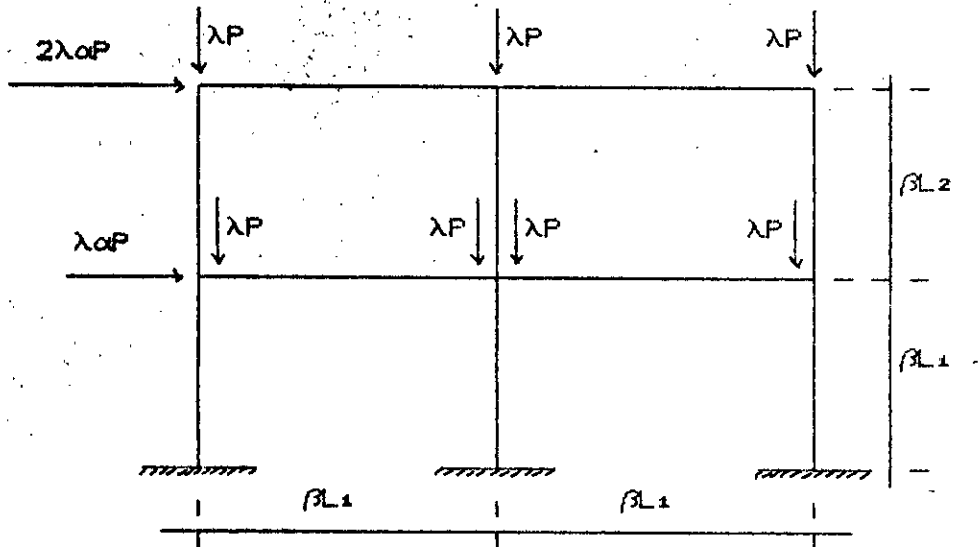


schéma 2.2

$$\begin{aligned}
 E &= 2 \times 10^8 \text{ kPa} \\
 P &= 270 \text{ kN} \\
 A &= 9 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\
 I &= 6.75 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\
 L_1 &= 4 \text{ m} \\
 L_2 &= 3 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Pour l'étude de l'effet des charges transversales nous considérons le portique à deux niveaux du schéma (2.2) .

Nous allons considérer l'effet envisagé pour deux cas de figures : pour  $\beta=1$  et  $\beta=2$  .

Ainsi pour chaque cas cité plus haut on fait varier le coefficient des charges transversales  $\alpha$  qui prendra successivement trois valeurs:  $\alpha=0$ ,  $\alpha=0.1$  et  $\alpha=1$  .

Nous notons ici que la variation du coefficient  $\beta$  (coefficient des

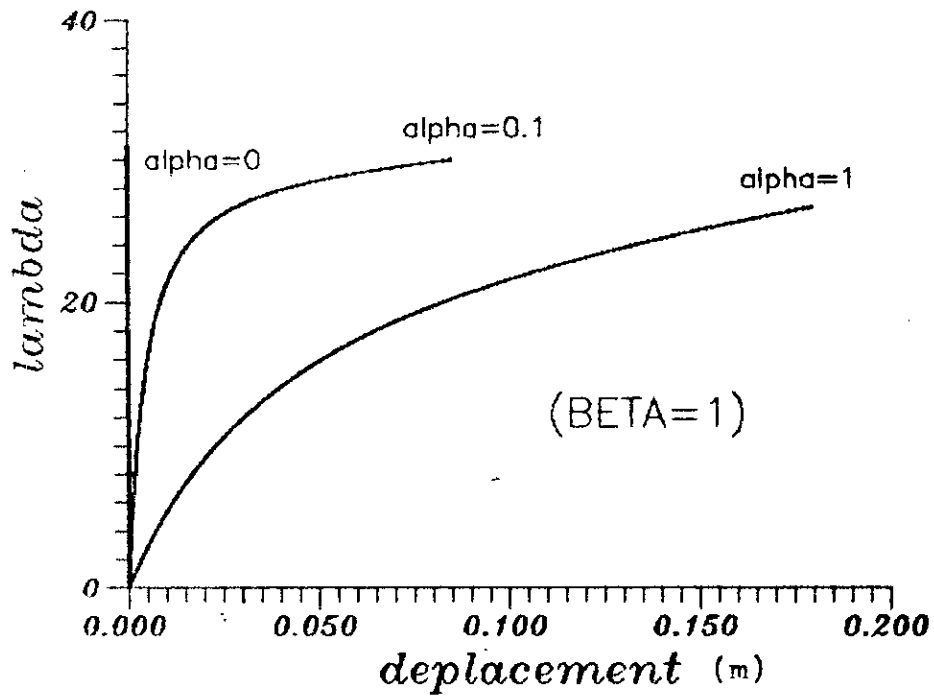


Fig ( 2.2.a )

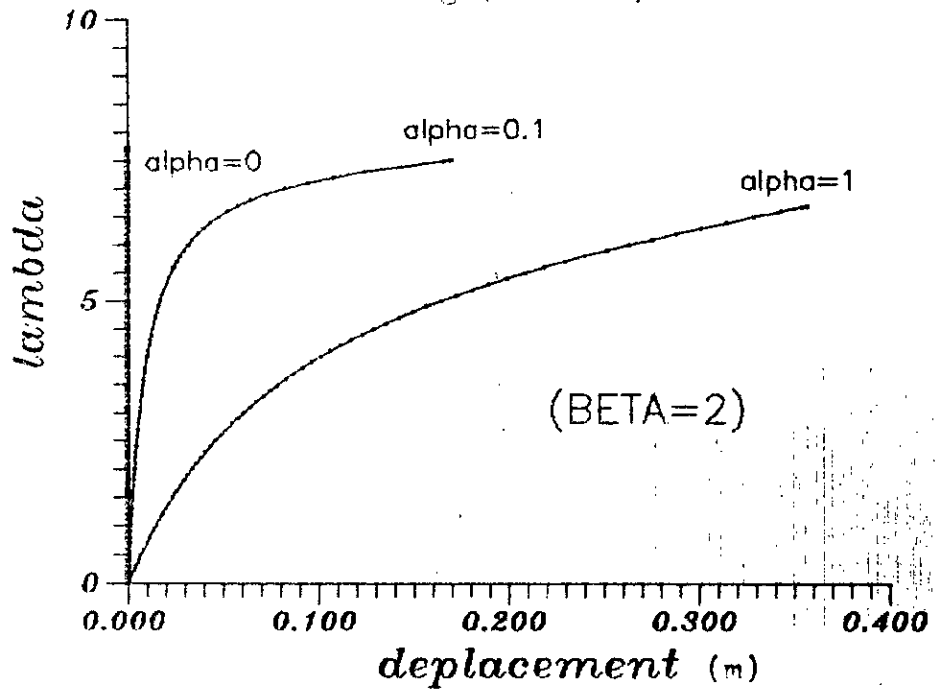


Fig ( 2.2.b )



## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

longueurs) n'est réalisée ici que pour obtenir deux cas de figures donc plus de données pour comparer, l'effet de l'élanement étant étudié dans l'exemple suivant .

Les figures (2.2.a) et (2.2.b) correspondent respectivement à  $\beta=1$  et  $\beta=2$  .

Le tableau suivant résume les résultats de cet exemple :

dans ce tableau nous donnerons dans chaque cas ( $\beta=1$  et  $\beta=2$ ) la valeur de la charge critique correspondant à chaque coefficient  $\alpha$  ainsi que la variation relative de cette charge en pourcentage, la dernière valeur donnée étant la variation totale c'est-à-dire entre  $\alpha=0$  et  $\alpha=1$  .

$\alpha$	$\beta$	1		2	
		$\lambda_c$	$\Delta\lambda_c$ (%)	$\lambda_c$	$\Delta\lambda_c$ (%)
0.0		31		7.75	
			3.23		3.23
0.1		30		7.50	
			6.67		6.67
1.0		28		7.00	
			9.68		9.68

La première remarque que l'on fait du tableau précédent est que les variations relatives de la charge critique sont exactement les mêmes pour les deux cas de figures .

Soit  $\lambda(\alpha, L)$  la fonction donnant les valeurs de la charge critique en fonction des coefficients  $\alpha$  et  $L$  .

D'après la remarque précédente nous avons :

$$\frac{\lambda(\alpha_1, L_1) - \lambda(\alpha_2, L_1)}{\lambda(\alpha_1, L_1)} = \frac{\lambda(\alpha_1, L_2) - \lambda(\alpha_2, L_2)}{\lambda(\alpha_1, L_2)}$$

$$\bullet \quad 1 - \frac{\lambda(\alpha_2, L_1)}{\lambda(\alpha_1, L_1)} = 1 - \frac{\lambda(\alpha_2, L_2)}{\lambda(\alpha_1, L_2)}$$

$$\bullet \quad \frac{\lambda(\alpha_2, L_1)}{\lambda(\alpha_1, L_1)} = \frac{\lambda(\alpha_2, L_2)}{\lambda(\alpha_1, L_2)} = \frac{\lambda(\alpha_2, L_1) - \lambda(\alpha_2, L_2)}{\lambda(\alpha_1, L_1) - \lambda(\alpha_1, L_2)}$$

$$\bullet \quad \frac{\lambda(\alpha_2, L_1) - \lambda(\alpha_2, L_2)}{\lambda(\alpha_2, L_1)} = \frac{\lambda(\alpha_1, L_1) - \lambda(\alpha_1, L_2)}{\lambda(\alpha_1, L_1)}$$

Cette dernière égalité montre que la variation relative de la charge critique en fonction de la longueur est elle aussi constante ce que nous vérifierons dans le prochain exemple .

Ce qui montre qu'il y a une dépendance directe entre l'effet des charges transversales et l'effet de l'élanement .

Avant de terminer cet exemple nous notons que plus  $\alpha$  augmente et plus la non-linéarité de la courbe est accentuée et plus la charge critique diminue .

### 2.3- Exemple 3: (Effet de l'élanement)

Nous reprendrons ici le même schéma que celui de l'exemple précédent en considérant aussi deux cas de figures :  $\alpha=0.1$  et  $\alpha=1$  représentés respectivement dans les figures (2.3.a) et (2.3.b) .

Pour chaque cas le coefficient  $\beta$  prendra deux valeurs 1 et 2 .

Le tableau suivant résume les résultats obtenus pour cet exemple :

$\beta$	$\alpha$ 0.1		$\alpha$ 1.0	
	$\lambda_c$	$\Delta\lambda_c$ (%)	$\lambda_c$	$\Delta\lambda_c$ (%)
1	30.0	75	28.00	75
2	7.50		7.00	

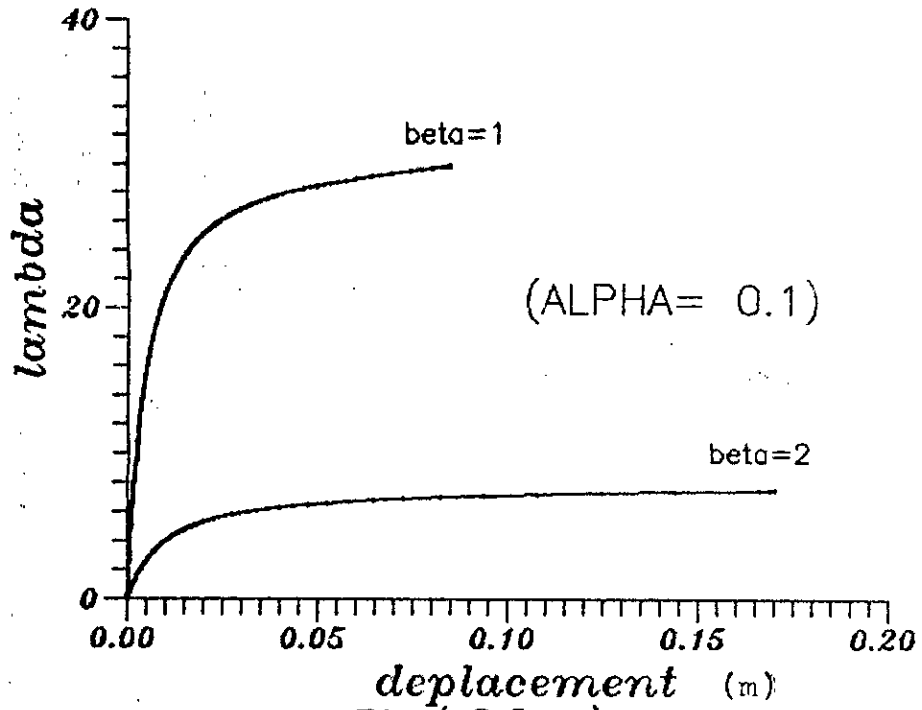


Fig ( 2.3.a )

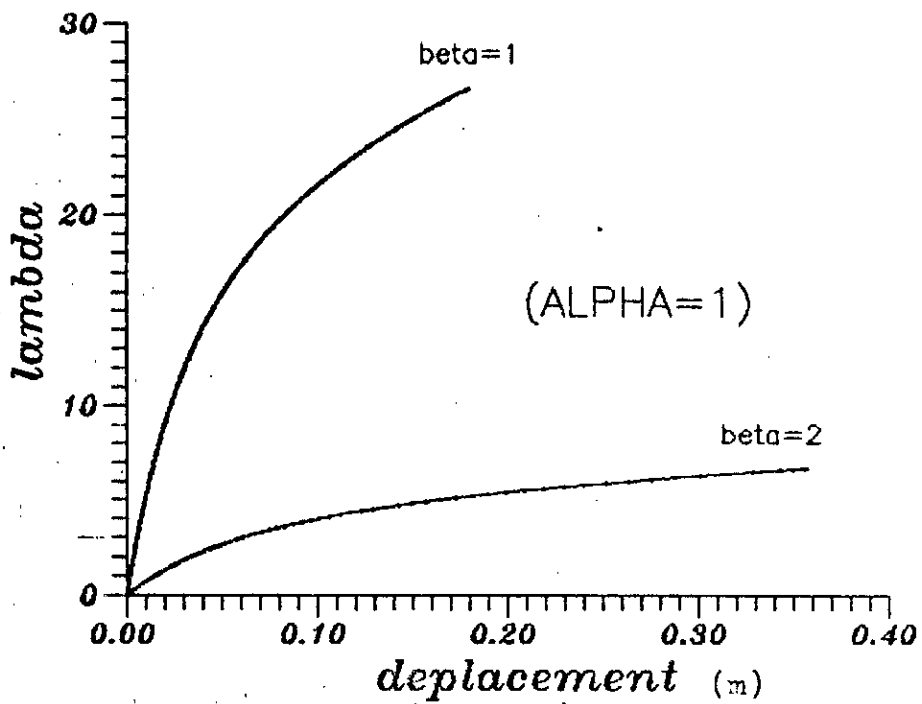


Fig ( 2.3.b )

## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Les variations relatives de la charge critique sont constantes ce qui confirme la remarque faite dans l'exemple précédent .

Il est à remarquer que pour  $\alpha=0$  nous avons aussi :

$\lambda_c(\beta=1)=31$  et  $\lambda_c(\beta=2)=7.75$  ce qui signifie que la variation relative de  $\lambda_c$  en pourcentage est  $\Delta\lambda_c = 75\%$  , c'est-à-dire le même pourcentage que pour les deux autres cas .

On remarque dans les deux courbes que la non-linéarité est plus grande lorsqu'on augmente  $\beta$  . Et cette accentuation est plus importante que pour le cas des charges transversales car ici la charge critique diminue des 2/3 de sa valeur initiale .

Ce qui montre que l'effet de l'élançement sur la non-linéarité et sur la valeur de la charge critique est plus importante que celui des charges transversales .

Ainsi l'élançement augmente considérablement le risque d'instabilité .

### 2.4- Exemple 4: (Effet du degré d'hyperstaticité : schémas 2.4)

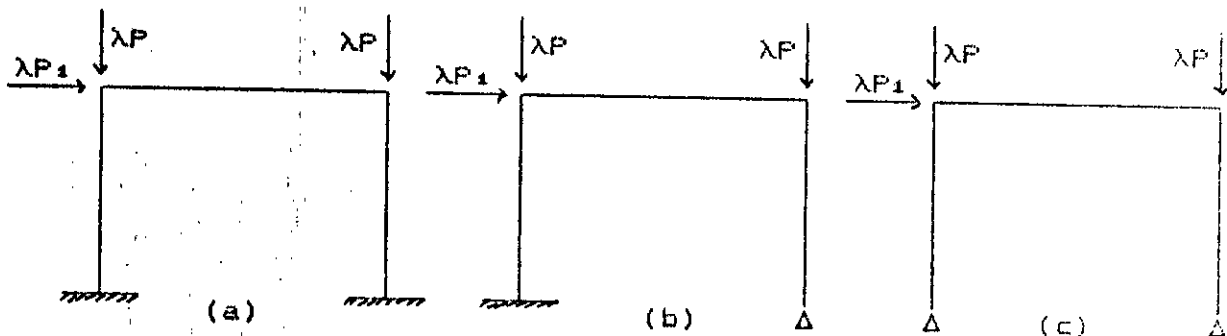


schéma (2.4)

## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

---

Nous allons considérer l'effet du degré d'hyperstaticité sur la valeur de la charge critique ainsi que sur l'allure de la courbe force-déplacement (figure 2.4).

Notons que pour les schémas a), b) et c) le degré d'hyperstaticité  $H$  est égal respectivement à : 3, 2 et 1 .

Le tableau suivant donne les résultats obtenus :

$H$	$\lambda_c$	$\Delta\lambda_c$ (%)
3	82	41.46
2	48	58.33
1	20	75.61

La diminution de la charge critique dépasse les 2/3 de la charge initiale lorsque  $H$  passe de 3 à 1 . Ce qui montre que le degré d'hyperstaticité a un grand effet sur la valeur de la charge critique .

On remarque enfin que plus  $H$  diminue et plus la non-linéarité est grande . C'est donc un des effets les plus importants sur la stabilité des structures .

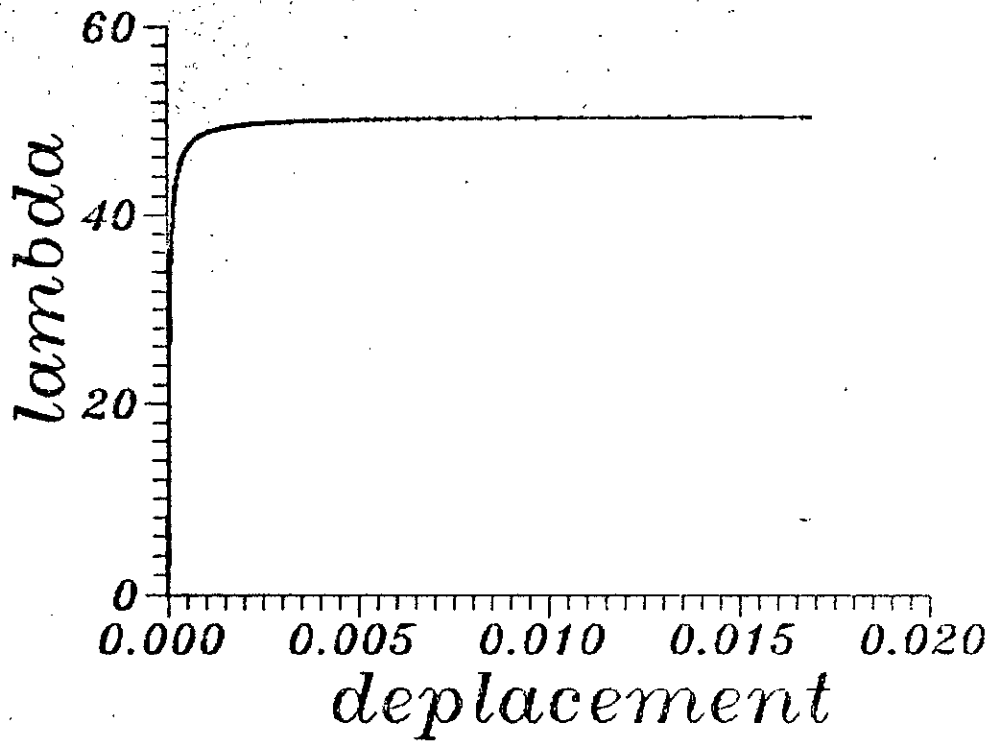


Fig ( 2.I.a )

BIBLIOGRAPHIE

---

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- S.P.TIMOSHENKO  
" Théorie de la stabilité "  
DUNOD 1966
- [2]- G.PISSARENKO , A.YAKOVLEV et V.MATVEEV  
" Aide mémoire de résistance des matériaux "  
MIR 1975
- [3] J.F.AUBOIN  
" Calcul des structures et informatique "  
EYROLLES 1983
- [4] D.R.J.OWEN et E.HINTON  
" Finite elements in plasticity "  
Pineridge Press Limited 1980
- [5] S.P.TIMOSHENKO  
" Théorie de l'élasticité "  
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE CH. BERANGER 1948
- [6] M.BELAZOUGUI  
" Le béton armé aux états limites "  
O.P.U 1989
- [7] W.WEAVER et P.R.JOHNSTON  
" Finite elements for structural analysis "  
PRENTICE-HALL 1984
- [8] R.C.COATES , M.G.COUTIC et F.K.KONG  
" Structural analysis "  
ELBS 1984

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [9] A.GRELAT  
" Comportement non linéaire et stabilité  
des ossatures en béton armé "  
Annales de l'ITBTP n° 366 Nov 1978
- [10] G.DE SAXE et L.M.AYINA OHANDJA  
" Une méthode automatique de calcul de l'effet P- $\Delta$   
pour l'analyse pas-à-pas des ossatures planes "  
Construction Métallique n° 3-1985
- [11] Y.GALEA  
" Programme d'analyse élasto-plastique non linéaire  
de structures planes à barres "  
Construction Métallique n° 4-1978