



24

FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

ALGORITHMISATION D'ETUDES  
D'UN ASSERVISSEMENT  
PAR LES POLES



Proposé Par :

Mr. ZOBROWSKI

Professeur à E.N.P.A.

Etudié Par :

KHATTAB Ali

FRIHI Mohamed

DEPARTEMENT ELECTRICITE  
FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

ALGORITHMISATION D'ETUDES  
D'UN ASSERVISSEMENT  
PAR LES POLES

Proposé Par :

Mr. ZOBROWSKI

Professeur à E.N.P.A.

Etudié Par :

KHATTAB Ali

FRIHI Mohamed

PROMOTION JUIN 1978

a MES PARENTS

A MES FRERES ET SOEURS

A TOUS MES AMIS

KHATTAB ALI

A MES PARENTS

A MON FRERE ZIDANE

A MES FRERES ET SOEURS

A TOUS MES AMIS

FRUIT MOHAMED

+-----+  
 + QU'il nous soit permis de remercier tous les professeurs de l'école +  
 + nationale Polytechnique qui ont contribué à notre formation et +  
 + en particulier Monsieur ZEBROWSKI professeur à l'E.N.P.S. pour +  
 + ses précieux conseils. +

+ Nous remercions également nos parents qui nous ont toujours +  
 + encouragé, ainsi que nos frères, sœurs et amis. +

KHATTAD      ALI  
 FRIHI         MOhmed

## I N T R O D U C T I O N

Depuis très longtemps l'homme a essayé d'imiter la nature en créant des systèmes à réaction ( ou asservissements) en vue de la régulation de certaines grandeurs physiques.

Actuellement ces systèmes à réaction occupent une place très importante dans le monde moderne. En raison des performances de plus en plus élevées que l'on exige des commandes automatiques, l'utilisation des calculateurs numériques se trouve amplement justifiée.

L'étude des asservissements se divise en trois domaines principaux : les asservissements de position, les régulateurs et les oscillateurs

Notre travail porte sur l'étude, à l'aide des calculateurs numériques des asservissements de position de fonction de transfert en boucle ouverte de la forme

$$T(p) = K / p(p+p_1)(p+p_2)$$

Parmi les méthodes utilisées pour l'étude d'un tel asservissement

on cite

- Les méthodes classiques ( diagramme de Bode, Nyquist, Black...)
- Les méthodes par les lieux des racines ( Méthode d'Evans.)

on a opté pour cette dernière méthode car, comparée à la méthode classique elle a l'avantage de fournir des informations directes et précises du régime transitoire, cette information étant particulièrement utile car un asservissement travaille constamment en régime transitoire et surtout parce qu'elle s'adapte mieux à la programmation.

P L A N.

I- Etude des systemes asservis lineaires par la méthode d'Evans

II Lieu de la Place

I2 Stabilité

I3 Précision dynamique et degré de stabilité.

I3I Relation entre la disposition des pôles de FTBF avec l'amortissement .

I32 Relation entre la disposition des pôles <sup>et la</sup> rapidité .

I.4 Lieu d'Evans

I.4.1. Definition.

I.4.2 Proprietes et allure

I.4.2.1. Nombre de branches du lieu

I.4.2.2. Directions esymptotiques et asymptotes

I.4.2.3. Lieu situé sur l'axe réel

I.4.2.4. Points de branchement

I.4.2.5. Points d'intersection du lieu avec l'axe imaginaire

I.4.2.6 Determination de la marge de gain de la marge de pha

I.5. Correction

I.5.1. Correcteur par avance de phase

I.5.2. Correcteur integral

I.5.3. Correcteur P.I.B.

II CALCUL DES CORRECTEURS.

2.1. Position du probleme

2.2. Structure du modele

2.3. Calcul du correcteur par avance de phase

2.3.1. Calcul des parametres

2.3.2. Calcul du nombre de correcteurs.

2.4. Calcul du Correcteur P.I.D.

2.4.1. Calcul des parametres à l'aide d'un modele

2.4.2. Calcul des parametres du correcteur à l'aide du systeme réel.

2.4.2. Lieu d'Evans du systeme.

### III ALGORITHME.

- 3.1. Recherche d'une position des pôles de la F.I.R.F. du système corrigé lui conférant un facteur de sur tension  $Q = Q_E \pm 0.05$
- 3.2. Calcul des paramètres du correcteur P.I.D.
  - 3.2.1. Détermination du modèle
  - 3.2.2. Détermination des paramètres du correcteur
- 3.3. Calcul du facteur de sur tension  $Q$  et de la pulsation de résonance  $\omega_R$  du système corrigé

### IV. PROGRAMMATION

- 4.1 Étude d'un exemple
- 4.2 Diagramme de Black



## II CHAPITRE I

### Etude d'un système asservi linéaire par la méthode d'Evans.

#### I.1 Lieu de Laplace:

C'est le plan complexe dans lequel on représente les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi.

#### I.2. STABILITE.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système linéaire, est que les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée possèdent tous une partie réelle négative ce qui se traduit dans le plan de Laplace par l'exclusion de l'axe imaginaire et du demi-plan situé à sa droite.

#### I.3. PRECISION DYNAMIQUE ET DEGRE DE STABILITE;

Un système dont la réponse comporte un terme oscillatoire, est défini par l'amortissement de ses oscillations et par le temps de réponse ( temps au bout duquel la réponse a atteint un certain pourcentage de sa valeur permanente.)

Rapidité est inversement proportionnelle au temps de réponse.

Si la réponse ne comporte pas d'oscillations ( Pôles réels négatifs.)

Le système est caractérisé simplement par la rapidité mesurée par la valeur d'un temps de réponse.

#### I.3I. Relation entre la disposition des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée avec l'amortissement.

Soit le Système de fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$  admettant 2 Pôles complexes conjugués ( $a_n \pm j b_n$ ) la réponse  $s(t)$  d'un tel système se présente sous la forme

$$2A_n |A_n| e^{a_n t} \sin(b_n t + \varphi)$$

Où  $A_n$  est le résidu du  $S(p)$  correspondant aux pôles

$$p_n = a_n + j b_n$$

$A_n$  c'est une constante si  $p_n$  est un pôle simple, elle est fonction du temps si  $p_n$  est un pôle multiple.

$\varphi$  dépend du système et de l'entrée.

L'amortissement des oscillations dépend de  $a_n$  et  $b_n$

$$\xi = \frac{|a_n t|}{(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}} = \frac{|a_n|}{\omega_n}$$

ou  $\omega_n$  est la pulsation propre définie par  $\omega_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$

la réponse sera la suivante

$$\Delta(t) = 2 |A_n| e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi)$$

si on représente dans le plan de Laplace  $p$  et  $p^*$  on voit que

$$\xi = \sin \psi$$

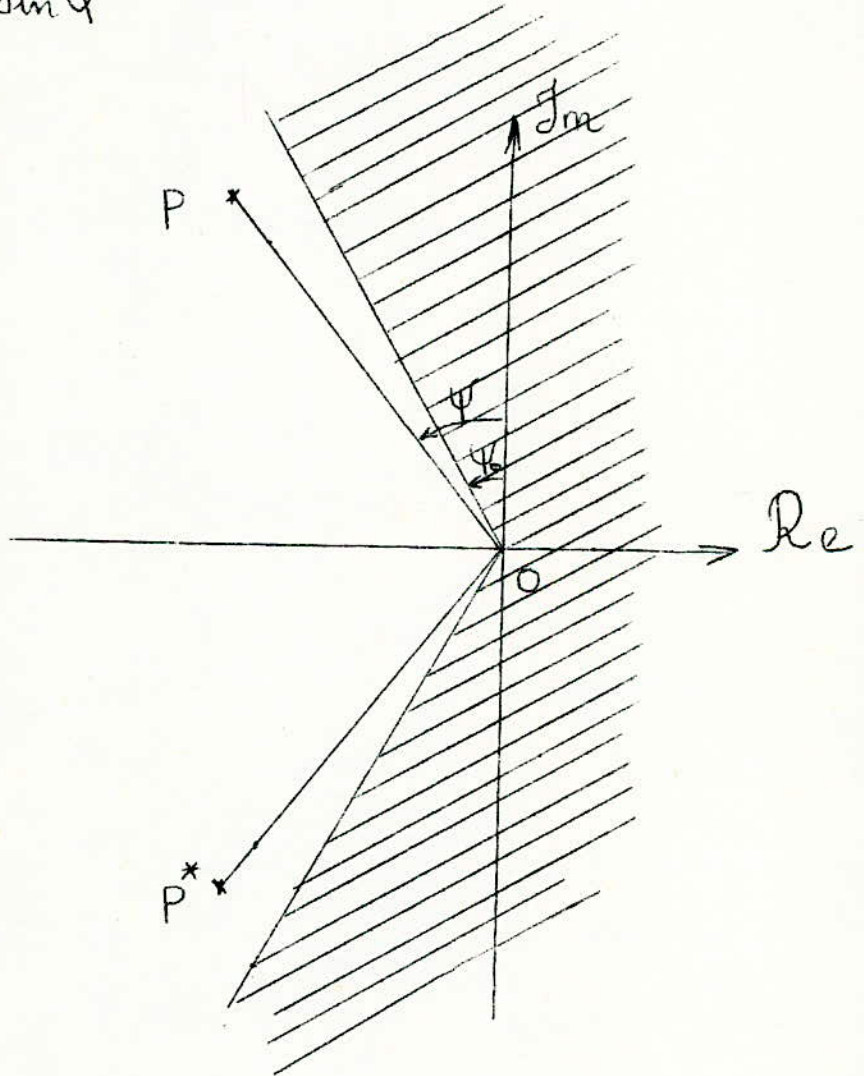


fig 1

Si on exige d'un système un amortissement donné  $\xi_0 = \sin \psi_0$  cela revient dans le plan de Laplace à interdire aux pôles de  $F(p)$  la zone hachurée ( les pôles appartenant à cette partie hachurée correspondent à un amortissement inférieur à l'amortissement exigé ) (fig 1)

$$F(p) = \frac{G}{1+GH} = \frac{k_1 P_1 Q_2}{Q_1 Q_2 + k_1 k_2 P_1 P_2}$$

On voit que les zéros de  $F(p)$  sont les zéros de  $G$  plus les pôles de  $H$  tandis que les pôles de  $F(p)$  sont les racines de

$$(1) \quad 1 + T(p) = 0$$

ou  $T(p) = \frac{k_1 k_2 P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$  fonction de transfert en boucle ouverte

On écrit  $T(p)$  sous la forme d  $T(p) = \frac{\prod_{i=1}^m (p-z_i)}{\prod_{j=1}^n (p-p_j)}$  système

Où  $m$  et  $n$  sont respectivement le degré du numérateur et du dénominateur de  $T(p)$  et on note  $K = \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}$  ou  $k = k_1 k_2$

On voit que la valeur des racines de l'équation caractéristique (1) dépend de  $K$  qui est proportionnel à  $k$  ce qui nous amène à examiner les variations des pôles de  $F(p)$  lorsque  $k$  varie

I 3 2 Relation entre la disposition des pôles et la rapidité.

Prenons le cas du système précédent  $s(t) = k_n e^{pn t}$  la sortie  $s(t)$  décroît d'autant plus rapidement que  $|a_n|$  est grand, si le temps de réponse est défini comme étant le temps au bout duquel la réponse atteint 95% de sa valeur permanente.

On trouve que  $t_r = 3 / |a_n|$

En interdisant aux parties réelles des pôles de  $F(p)$  les valeurs supérieures à  $c$  on assure ainsi à la réponse une décroissance plus rapide que  $e^{ct}$  ce qui correspond à un temps de réponse  $t_r < 3 / |c|$  ( $c < 0$ )

1.4. LIEU D'EVANS:

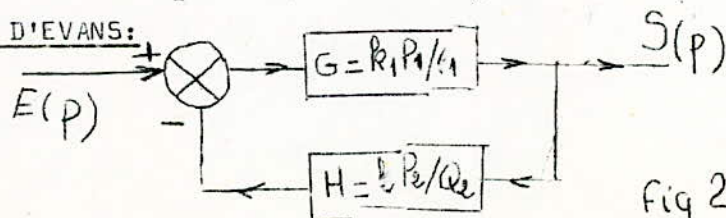


Fig 2

I41 DEFINITION:

On définit le lieu d'Evans comme étant le lieu des pôles de  $F(p)$  lorsque  $k$  varie de 0 à  $\infty$ . Ce lieu est gradué en valeur de  $k$  et orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $k$  il est appelé aussi "lieu des racines" ou lieu des pôles" de  $F(p)$ , il est défini par la relation caractéristique  $1 + T(p) = 0$  qu'on remplace par le système des 2 équations suivantes.

$$\sum_{i=1}^m \text{Arg } z_i M - \sum_{j=1}^n \text{Arg } p_j M = \pm (2\lambda + 1) \pi$$

$$\frac{\prod_{i=1}^m |z_i M|}{\prod_{j=1}^n |p_j M|} = \frac{1}{k}$$

Qu'on appelle respectivement relation des angles et relations des modules la première équation nous permet de trouver le lieu d'Evans la seconde de graduer ce lieu en valeur de  $k$ .

I42 PROPRIETES ET ALLURE:I.4.2.2. NOMBRE DES BRANCHES DU LIEU

L'équation caractéristique est de degré  $n$  ( $n > m$  pour les systèmes physiques.)

Le lieu d'Evans comporte  $n$  branches, ces branches sont symétriques <sup>par rapport</sup> à l'axe des réels elles partent des pôles de  $T(p)$  et arrivent aux zéros de  $T(p)$  étant donné que  $n > m$  alors il reste  $(n-m)$  branches sans point d'arrivée finis ces branches sont rejetées à l'infini suivant des directions asymptotiques.

I.4.2.2. DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES ET ASYMPTOTES.

Les  $(n-m)$  directions asymptotiques sont données par la relation

$$\beta = \frac{2(\lambda+1)}{n-m} \pi, \lambda \text{ variant de } 0 \text{ à } (n-m-1)$$

Ces asymptotes sont concourantes en un point de l'axe réel. d'abscisse

$$\delta = \left( \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) / (n-m)$$

I.4.2.3. LIEUX SITUÉS SUR L'AXE REEL:

On détermine les parties du lieu des racines situées sur l'axe des réels du plan de Laplace en comptant le nombre total des pôles et des zéros finis de  $T(p)$  situés à droite des points en question.

Si le nombre de pôles plus le nombre de zéro est impair ces points appartiennent au lieu

#### I.4.2.4. LES POINTS DE BRANCHEMENT.

Pour une valeur  $k_0$  de  $k$  telle que 2 racines réelles de l'équation caractéristique se confondent en une seule racine double 2 branches de l'axe réel se rejoignent puis se séparent de cet axe ces points sont appelés points de branchement et sont définis par

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_0 - p_j} = \sum_{l=1}^m \frac{1}{p_0 - z_l}$$

#### I.4.2.5. POINTS D'INTERSECTION DU LIEU AVEC L'AXE IMAGINAIRE:

Ces points correspondent aux valeurs de  $k$  pour lesquelles les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires pures

$p = \pm j\omega$  Ils sont donnés par l'équation.  
 $1 + T(p) = 0$  ou  $Q(j\omega) \pm k P(j\omega) = 0$

En séparant les parties réelles et imaginaires de cette équation on obtient.

- L'équation de  $\omega$  ordonné des pôles sur l'axe imaginaire
- L'équation donnant les valeurs correspondantes de  $k$

#### I.4.2.6. DETERMINATION DE LA MARGE DE GAIN ET LA MARGE DE PHASE:

Marge de Gain =  $\frac{\text{Valeur de } K \text{ correspondant à l'intersection avec l'axe imaginaire}}{\text{Valeur de } K \text{ exigée}}$ .

Marge de Phase: Pour la déterminer on doit chercher le Point  $N$  sur l'axe des imaginaires qui vérifie la relation

$$\frac{\prod_{l=1}^m |N z_l|}{\prod_{j=1}^n |N p_j|} = K_{\text{exigée}}$$

Le point  $N$  trouvé, la marge de phase est donnée par

$$\text{Marge de phase} = 180 - \sum_{l=1}^m \arg N z_l - \sum_{j=1}^n \arg N p_j$$

#### I.5. CORRECTION:

De même que pour l'étude d'un asservissement dans le plan de Bode et de Black il y a plusieurs manières d'envisager sa correction dans le plan de Laplace.

- Correction par avance de phase
- Correction par retard de phase (intégrale)
- Correction avance, retard, (Correction P.I.D)

### 1.5.1. Correcteur par avance de phase.

La fonction de transfert d'un tel correcteur est de la forme

$$D(p) = \frac{1}{a} \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$$

en posant  $z_a = -1/\tau a$  et  $p_a = -1/\tau$

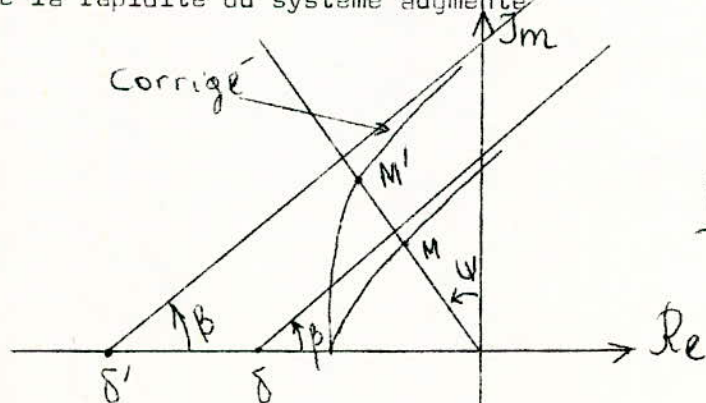
On obtient 
$$D(p) = \frac{p - z_a}{p - p_a}$$

Donc la correction par avance de phase se traduit par l'adjonction à la configuration des pôles et des zéros de  $T(p)$  d'un pôle et d'un zéro réels négatifs, le zéro étant le plus proche de l'origine du plan de Laplace. L'adjonction du zéro se traduit par l'augmentation de  $\beta$  ce qui fait que tous les points de lieu d'Evans (Corrigé) se trouvent plus éloignés de l'origine qu'avant correction, d'où pour un angle  $\psi$  donné le temps de réponse se trouve réduit.

Si l'on tient compte maintenant du pôle associé au zéro on voit que  $\beta$  demeure inchangée mais l'intersection des asymptotes du lieu d'Evans avec l'axe des réels s'éloigne de l'origine, on obtient

$$\delta' = \delta + (a-1)z_a / (n-m)$$

D'où la branche du lieu d'Evans correspondant à cette asymptote se trouve éloignée de l'origine en particulier le point pour lequel l'amortissement correspond à  $\Delta \sin \psi = \xi$  ce qui fait que la rapidité du système augmente



### I.5.2. Correcteur Integral.

La fonction de transfert d'un tel correcteur est de la forme

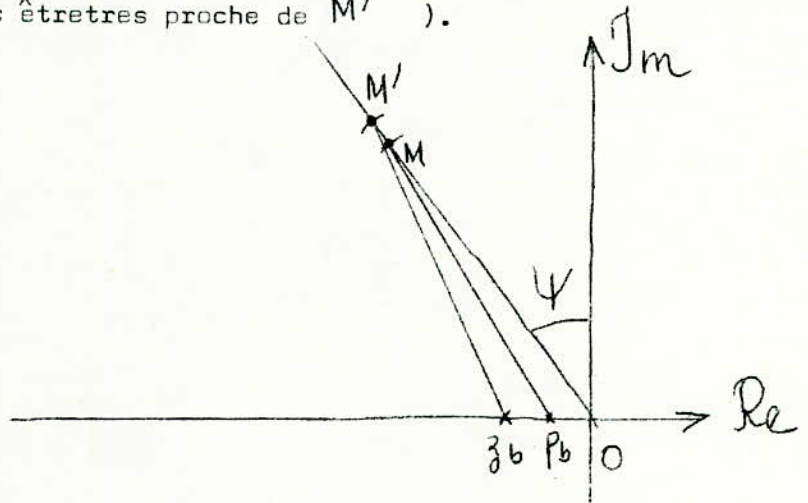
$$D(p) = b \frac{1 + \tau p}{1 + b \tau p}$$

En posant

$$z_b = -1/\tau \text{ et } p_b = -1/b\tau$$

Cette correction se traduit par l'adjonction d'un pôle et d'un zéro le pôle dans ce cas est plus proche de l'origine que le zéro.

On exige de cette correction de ne pas varier la valeur de  $k$  ( $M$  doit être très proche de  $M'$ ).



Pour cela il faut que  $p_b$  et  $z_b$  soient très proches l'un de l'autre relativement à la distance les séparant du point  $M$ . Cette correction étant d'autant plus efficace que  $b$  est grand on demande donc de ce correcteur d'avoir un  $b$  le plus important que possible et d'avoir  $|z_b - p_b|$  le plus petit possible. Pour satisfaire ces 2 exigences contradictoires il faut rapprocher le pôle  $p_b$  le plus possible de l'origine.

Cette correction multiplie le gain statique par  $b$   $K' = bK$

### I.5.3. Correcteur P.I.D.

Ce correcteur est formé par une combinaison de 3 actions proportionnelle intégrale différentielle.

Sa fonction de transfert est de la forme

$$D(p) = 1 + 1/\tau_1 p + \tau_2 p$$

$$D(p) = \left[ p^2 + \frac{1}{\tau_2} p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \right] / \tau_1 \tau_2 p$$

On pose

$$K = 1/\tau_1 \tau_2, \quad a_1 = 1/\tau_2 \quad \text{et} \quad a_2 = 1/\tau_1 \tau_2$$

$$D(p) = K (p^2 + a_1 p + a_2) / p$$

Il est ~~interdit~~ <sup>introduit</sup> à la fonction de transfert en boucle ouverte un pôle à l'origine .

Une action dérivée première et une action dérivée seconde.

L'action de ce correcteur dépend de 2 paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$   
 Le Correcteur P.I.D. permet d'augmenter le gain statique  $K$   
 la pulsation de résonance  $\omega_R$  et la pulsation de coupure  $\omega_c$   
 pour un coefficient de surtension  $Q$  fixé . Il autorise donc  
 une augmentation de la précision dynamique et de la précision  
 statique.



C H A P I T R E    I I

C A L C U L    D E S    C O R R E C T E U R S .

2.1. Position du problème.

Soit un système à retour unitaire ( tous les systèmes boucles peuvent être ramenés à un système à retour unitaire) de fonction de transfert en boucle ouverte

$$T(p) = \frac{K \prod_{l=1}^m (p + z_l)}{\prod_{j=1}^n (p + p_j)}$$

le problème reside dans la recherche des parametres  $z_l$  et  $p_w$  d'un correcteur de la forme.

$$D(p) = \frac{\prod_{l=1}^r (p + z_l)}{\prod_{w=1}^v (p + p_w)}$$

Qui procure au système en boucle fermée , les performances dynamiques et statiques exigées. Les performances statiques sont caractérisées par le Gain de position , de vitesse ou d'accélération ce gain dépend de nombre des pôles à l'origine . Si  $x$  est le nombre total des pôles à l'origine de la fonction de transfert en boucle ~~fermée~~ <sup>ouverte</sup> corrigée et que  $y$  est celui des pôles à l'origine produit par le correcteur en aura.

$$K_e = \frac{K \prod_{l=1}^m z_l \prod_{l=1}^r z_l}{\prod_{w=1}^v p_w \prod_{j=x-y+1}^n p_j}$$

D'autre part le regime dynamique est caractérisé par la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée les moins éloignée de l'origine.

On etudiera que les systèmes qui peuvent être ramenés à un système de second ordre par l'approximation des pôles dominants.

Cela suppose que ces systèmes presentent des pôles dominants qu'on représente par  $p_0, p_0^* = \zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

Ces racines appartiennent au lieu d'Evans du système corrigé donc elles doivent vérifier l'équation caractéristique de ce dernier .

On tire les relations suivantes qui vont nous permettre de calculer le correcteur de la condition des modules on tire

$$\frac{1}{K} = \frac{\prod_{i=1}^m |Z_i M|}{\prod_{j=1}^n |P_j M|} \cdot \frac{\prod_{e=1}^r |Z_e M|}{\prod_{w=1}^v |P_w M|}$$

on pose

$$L_s = \frac{\prod_{i=1}^m |Z_i M|}{\prod_{j=1}^n |P_j M|} \quad \text{et} \quad L_c = \frac{\prod_{e=1}^r |Z_e M|}{\prod_{w=1}^v |P_w M|}$$

on obtient la relation suivante

$$K L_s L_c = 1 \quad \Rightarrow \quad K L_s = \frac{1}{L_c} = Q \quad (1)$$

de la condition des angles on tire

$$\sum_{i=1}^m \text{Arg } Z_i M - \sum_{j=1}^n \text{Arg } P_j M + \sum_{e=1}^r \text{Arg } Z_e M - \sum_{w=1}^v \text{Arg } P_w M = (2\lambda + 1)\pi$$

on pose

$$\gamma_s = \sum_{i=1}^m \text{Arg } Z_i M - \sum_{j=1}^n \text{Arg } P_j M$$

$$\gamma_c = \sum_{e=1}^r \text{Arg } Z_e M - \sum_{w=1}^v \text{Arg } P_w M$$

on a alors la relation suivante :  $\gamma = \gamma_c = \pi - \gamma_s$

$\gamma$  = L'avance ou le retard de phase que doit fournir le correcteur  
relation caractérisant le régime statique

$$K_e = K \frac{\prod_{l=1}^r z_{el}}{\prod_{w=y+1}^w p_{w}} \cdot \frac{\prod_{l=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}$$

on pose  $E_c = \frac{\prod_{l=1}^r z_{el}}{\prod_{w=y+1}^w p_{w}}$  et  $E_s = \frac{\prod_{l=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}$

on obtient  $K_e = K E_c E_s$   $J = x - y + 1$  (3)

des équations (1) et (3) on tire  
 $K_e L_s / E_s = E_c / L_c$

$E_c$  étant l'atténuation introduite par le correcteur  
on pose  $\alpha = E_c$  on obtient  $R = Q\alpha = K_e L_s / E_s$   
 $Q, \gamma, \alpha$  sont des paramètres normalisés qui caractérisent le système et le correcteur.

Le problème de la correction trouve donc une même solution peu importe les singularités du système à corriger, pourvu que les besoins en gain et en phase soient représentés par les mêmes paramètres normalisés.

#### STRUCTURE DU MODELE :

Dans la plupart des problèmes pratiques, le réseau correcteur doit fournir de l'avance ou du retard de phase de façon à améliorer les performances dynamiques et statiques de l'ensemble. En général des modèles équivalents simples peuvent simuler le comportement en gain et en phase du système à l'emplacement des racines dominantes

Souvent ce même modèle représentera assez fidèlement la réponse harmonique dans la région de résonance du système en boucle ouverte. Le modèle qu'on a choisi est de la forme  $M(p) = \frac{K_0}{p(p+u)}$

Il est très important de remarquer que le modèle n'a que 2 pôles  
ceci simplifie considérablement les calculs du correcteur

### 2.3. CALCUL DU CORRECTEUR PAR AVANCE DE PHASE.

#### 2.3.1. CALCUL DES PARAMETRES.

Considérons le modèle choisi précédemment

$$M(p) = \frac{K_0}{p(p+u)}$$

et supposons un correcteur de la forme

$$D(p) = \frac{p+a}{p+b}$$

Notre travail se réduit à l'étude du système présenté par la  
figure 5

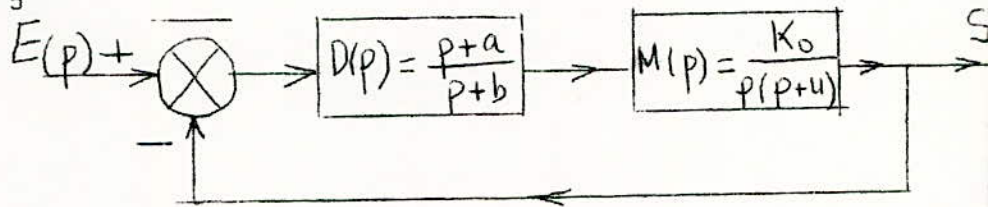


Fig 5

On impose au système un certain gain statique en boucle ouverte  
 $K$  et des pôles dominants  $p_0, p_0^* = -\omega_n \zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}$   
de la condition que les pôles  $p_0$  et  $p_0^*$  vérifient l'équation caracté-  
ristique du système corrigé et de la condition sur le gain  
statique découlent les valeurs de  $a, K_0$  et  $b$  et la  
valeur de la troisième racine.

$$1 + T(p) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{p+a}{p+b} \cdot \frac{K_0}{p(p+u)} = 0$$

$$p(p+b)(p+u) + K_0(p+a) = 0 \quad (4)$$

$p_0$  et  $p_0^*$  vérifient l'équation (4) alors on aura  
 $p(p+b)(p+u) + K_0(p+a)$  divisible par  $(p-p_0)(p-p_0^*)$

$$(4) \text{ donne } p^3 + p^2(u+b) + pbu + K_0p + K_0a = 0$$

$$p^3 + p^2(u+b) + p(ub + K_0) + K_0a = 0 \quad (4 \text{ bis})$$

on effectue la division

$p^3 + p^2(u+b) + p(ub + K_0) + K_0a$	$p - p_0$
$\underline{-p^3 + p_0p^2}$	$p^2 + p(u+b) +$
$p^2(u+b+p_0) + p(ub + K_0)$	$+ (ub + K_0 +$
$\underline{-p^2(u+b+p_0) + pp_0(u+b+p_0)}$	$+ p_0(u+b+p_0)$
$p[(u+b+p_0)p_0 + ub + K_0] + K_0a$	
$\underline{-p[(u+b+p_0)p_0 + ub + K_0] +$	
$+ p_0[ub + K_0 + p_0(u+b+p_0)] =$	
$K_0a + p_0[ub + K_0 + p_0(u+b+p_0)]$	

le reste doit etre nul d'où

$$K_0a + p_0[ub + K_0 + p_0(u+b+p_0)] = 0 \quad (5)$$

$p^2 + p(u+b+p_0) + [ub + K_0 + p_0(u+b+p_0)]$	$p - p_0^*$
$\underline{-p^2 + pp_0^*}$	
$p[u+b+p_0+p_0^*] + [ub + K_0 + p_0(u+b+p_0)]$	$p + [u+b+p_0 +$
$\underline{-p[u+b+p_0+p_0^*] + p_0^*[u+b+p_0+p_0^*]}$	
$ub + K_0 + p_0(u+b+p_0) + p_0^*[u+b+p_0+p_0^*]$	

le reste doit être nul. ~~de~~

$$ub + K_0 + p_0(u+b+p_0) + p_0^*(u+b+p_0+p_0^*) = 0$$

$$ub + K_0 + (p_0 + p_0^*)(u+b+p_0+p_0^*) - p_0 p_0^* = 0$$

si on remplace  $p_0$  et  $p_0^*$  par leur valeur  $p_0, p_0^* = -\omega_n \xi \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

$$ub + K_0 + 2x(u+b+2x) - x^2 - y^2 = 0$$

$$K_0 = x^2 + y^2 - 2x(u+b+2x) - ub \quad (6)$$

$$K_{e0} = K_0 \frac{1}{u} \cdot \frac{a}{b} = K_0 \frac{a}{bu} \Rightarrow K_0 = \frac{bu}{a} K_{e0} \quad (7)$$

$K_{e0}$  = gain statique du modèle corrigé

comme le reste de la division de  $p(p+b)(p+u) + K_0(p+a)$  par  $(p-p_0)$  ainsi que par  $(p-p_0^*)$  doit être nul, alors d'après (5)

$$K_0 a + ub p_0 + K_0 p_0 + p_0^2(u+b) + p_0^3 = 0$$

$$+ K_0 a + p_0^*(ub + K_0) + p_0^{*2}(u+b) + p_0^{*3} = 0$$

$$= 2K_0 a + (p_0 + p_0^*)(ub + K_0) + (p_0^2 + p_0^{*2})(u+b) + p_0^3 + p_0^{*3} = 0$$

$$2K_0 a + 2x(ub + K_0) + 2(x^2 - y^2)(u+b) + 2x^3 - 6xy^2 = 0$$

la relation (7) donne

$$2K_{e0} bu + 2x(ub + K_0) + 2(u+b)(x^2 - y^2) + 2x^3 - 6xy^2 = 0$$

la relation (6) donne

$$2K_{e0} bu + 2xub + 2(u+b)(x^2 - y^2) + 2x^3 - 6xy^2 + 2x[x^2 + y^2 - 2x(u+b)] = 0$$

on tire

$$b[2K_{e0}u + 2xu + 2(x^2 - y^2) - 4x^2 - 2xu] =$$

$$= -2u(x^2 - y^2) - 2x^3 + 6xy^2 - 2x(x^2 + y^2 - 2xu - 4x^2)$$

$$b = \frac{(x^2 + y^2)(u + 2x)}{(K_{e0}u - (x^2 + y^2))}$$

on remplace  $x$  par  $-\omega_n \xi$  et  $y$  par  $\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

$$\text{On tire que: } b = \frac{\omega_n^2 (2\xi\omega_n - u)}{(\omega_n^2 - K_{e0}u)} \quad (8)$$

Or  $2 = K_{e0}u / \omega_n e_1$  ( $e_1$ : distance du pôle  $(-u)$  à l'un des

$$\text{d'où } b = \frac{(2\omega_n \xi - u)}{(1 - Re_1/\omega_n)}$$

domina

Si l'on remplace  $x$  et  $y$  par leur valeur dans l'équation (6) on obtient

$$K_0 = \omega_m^2 - b(\mu - 2\omega_m \xi) + 2\omega_m \xi (\mu - 2\omega_m \xi)$$

$$K_0 = \omega_m^2 + (\mu - 2\omega_m \xi)(2\omega_m \xi - b) \quad (10)$$

de (7) et de (8) on tire

$$a = \frac{\omega_m^2}{k_0} [b + \mu - 2\xi \omega_m] \quad (11)$$

La troisième racine de l'équation caractéristique est donné par

$$p_3 + \mu + b + p_0 + p_0^* = 0$$

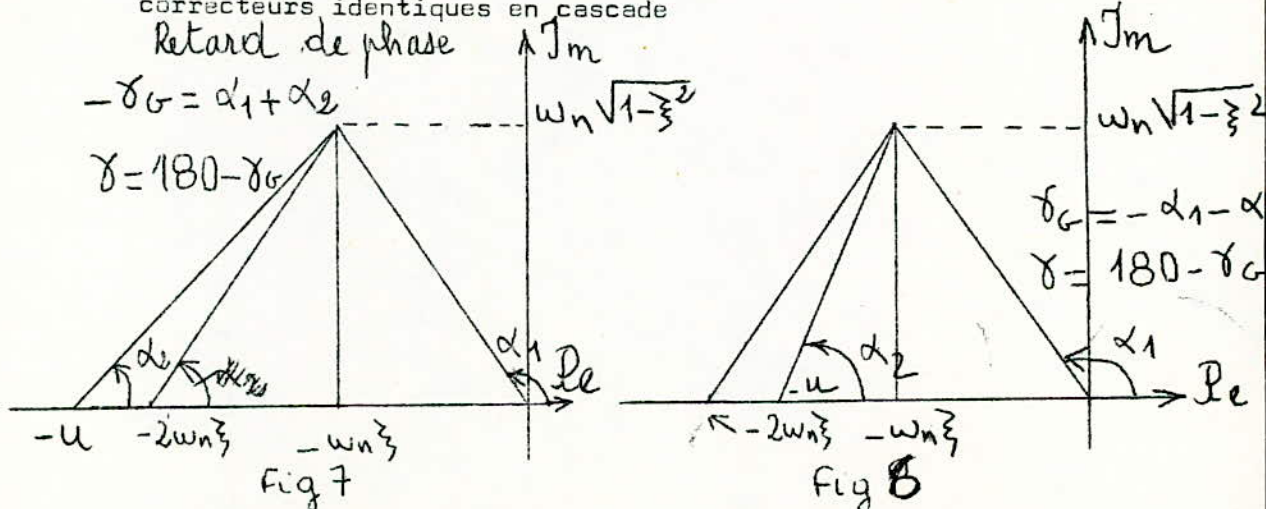
d'où

$$p_3 = -(\mu + b + p_0 + p_0^*)$$

$$p_3 = -(\mu + b - 2\xi \omega_m) \quad (12)$$

### 2.3.2. CALCUL DU NOMBRE DE CORRECTEUR.

Cette correction produit une avance de phase limitée comme les exigences du système peuvent être supérieures à la limite de l'avance produite par un seul correcteur on est amené à utiliser plusieurs correcteurs identiques en cascade



Les figures ci-dessus montrent les configurations des pôles du modèle

$$M(p) = \frac{K_0}{P(P+u)} \quad (13)$$

cas d'une avance de phase  $2 \xi \omega_n > u$

étant donné que le système doit rester impérativement stable il faut que  $b$  soit positif

$$\text{Donc } Kx_0 < \omega_n^2 / u$$

$$\text{Ou encore } R = Q\alpha < \omega_n / \alpha_1$$

Etant la distance du pôle dominant au pôle  $(-u)$  du modèle dans le cas où il nous faut plusieurs correcteurs identiques, le déphasage produit par les correcteurs en cascade est

et le  $Q = (Q_E)^n$  avec  $Q_E$  gain d'un seul correcteur

$$R = (R_E)^n$$

Donc la recherche du nombre de correcteurs nécessaires revient à trouver  $n$  tel que  $R_E = \sqrt[n]{R} = \sqrt{\frac{Kx_0 Ls}{E_s}} < \frac{\omega_n}{\alpha_1}$

$\alpha_1$  représente la distance de  $(-u)$  au pôle dominant dans le cas de plusieurs correcteurs.

#### 2.4. CALCUL DU CORRECTEUR P.I.D.

##### 2.4.1. CALCUL DES PARAMÈTRES A L'AIDE D'UN MODÈLE.

La fonction de transfert d'un tel correcteur est de la forme

$$D(p) = \frac{K_D}{P} (p^2 + a_1 p + a_2)$$



on associe au système le même modèle que précédemment  
c'est à dire

$$M(p) = \frac{K_{01}}{p(p+u)}$$

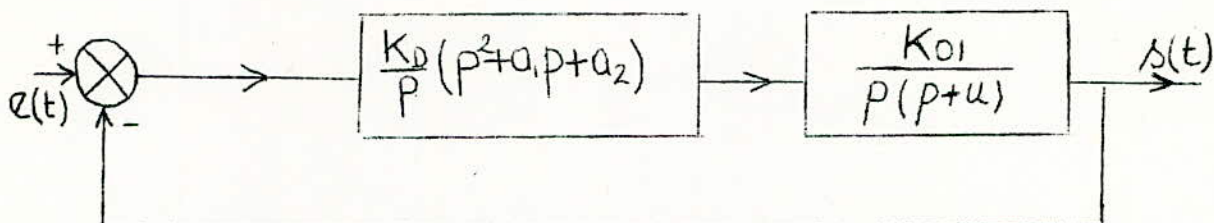
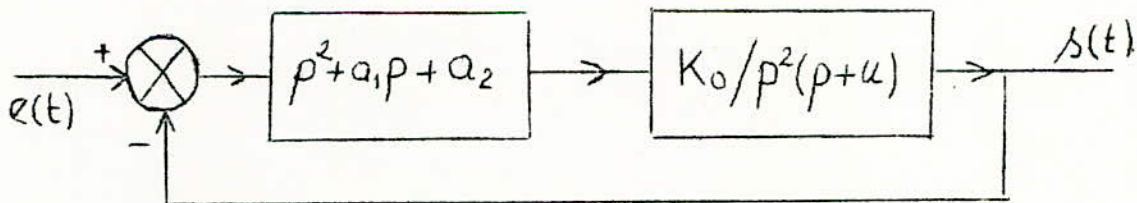


fig (8)

On peut associer la constante  $K_D$  et l'intégration au système équivalent et obtenir ainsi la structure fonctionnelle suivante



Avec  $K_0 = K_{01} K_D$  le modèle devient alors  $M_2(p) = \frac{K_0}{p^2(p+u)}$   
les paramètres normalisés du système équivalent sont obtenus de la même manière que pour le calcul du correcteur par avance de phase (8)

$$\text{avec } R = \frac{K_e L_s}{E_s} = K_{e0} \frac{u}{\omega_n^2 e_1} \quad (15)$$

$$K_e = K K_D E_s a_2 = K_2 E_s a_2$$

$K_{e0}$  = gain statique du modèle corrigé

on obtient alors

$$K_{e0} = K_0 a_2 / u = R \omega_n^2 a_1 / u \quad (16)$$

$$K_0 = R e_1 + 2 \zeta \omega_n - u \quad (17)$$

$$a_2 = K_{e0} \cdot u / K_0 \quad (18)$$

$$a_1 = (2 R a_1 \zeta \omega_n + \omega_n^2) / K_0 \quad (19)$$

$$K_2 = K \cdot K_D = K_e / E_s a_2 \quad (20)$$

$$a_1 = (2Rc_1 \xi \omega_n + \omega_n^2) / K_0 \quad (19)$$

$$K_2 = K \cdot K_D = K_e / E_s \cdot a_2$$

- Vu les performances de la régulation P.I.D.
  - faible écart maximum
  - écart permanent nul
  - ~~Max~~ Temps de réponse assez faible

On a préféré l'utiliser dans notre étude pour la correction du système

#### 2.4.2. CALCUL DES PARAMETRES DU CORRECTEUR A L'AIDE DU SYSTEME REEL.

Le passage par un modèle permet de simplifier les calculs quand la fonction de transfert en boucle ouverte du système à corriger  $T(p)$  est compliqué:

Dans notre cas on peut s'en passer car  $T(p) = K/p(p+p_1)(p+p_2)$  est simple (ne comporte que 3 pôles)

on cherche  $K_2, a_2, a_1$  tels que

$$K_e = K_2 a_2 / p_1 p_2$$

avec  $p_0, p_0^* = -\xi \omega_n \mp \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  des racines  
de l'équation caractéristique  $1 + T(p) = 0$

$$K_2(p^2 + a_1 p + a_2) + p^2(p+p_1)(p+p_2) = 0$$

on trouve que

$$\left\{ \begin{array}{l} K_2 = 2\xi \omega_n (p_1 + p_2) + \omega_n^2 (1 - 4\xi^2) - p_1 p_2 + K_e p_1 p_2 / \omega_n^2 \quad (21) \\ a_2 = K_e p_1 p_2 / K_2 \quad (22) \\ a_1 = \frac{\omega_n^2 (p_1 + p_2) - 2\xi \omega_n^3 + 2\xi K_e p_1 p_2 / \omega_n}{K_2} \quad (23) \end{array} \right.$$

Cette méthode paraît bien simple mais on a préféré la méthode utilisant le modèle car elle est plus générale et s'applique à l'étude de n'importe quel système.

### 2.4.3. LIEU D'EVANS DU SYSTEME.

#### LIEU D'EVANS DU SYSTEME NON CORRIGE;

$$T(p) = \frac{K}{p(p+p_1)(p+p_2)}$$

( fonction de transfert du système en boucle ouverte non corrigé.)

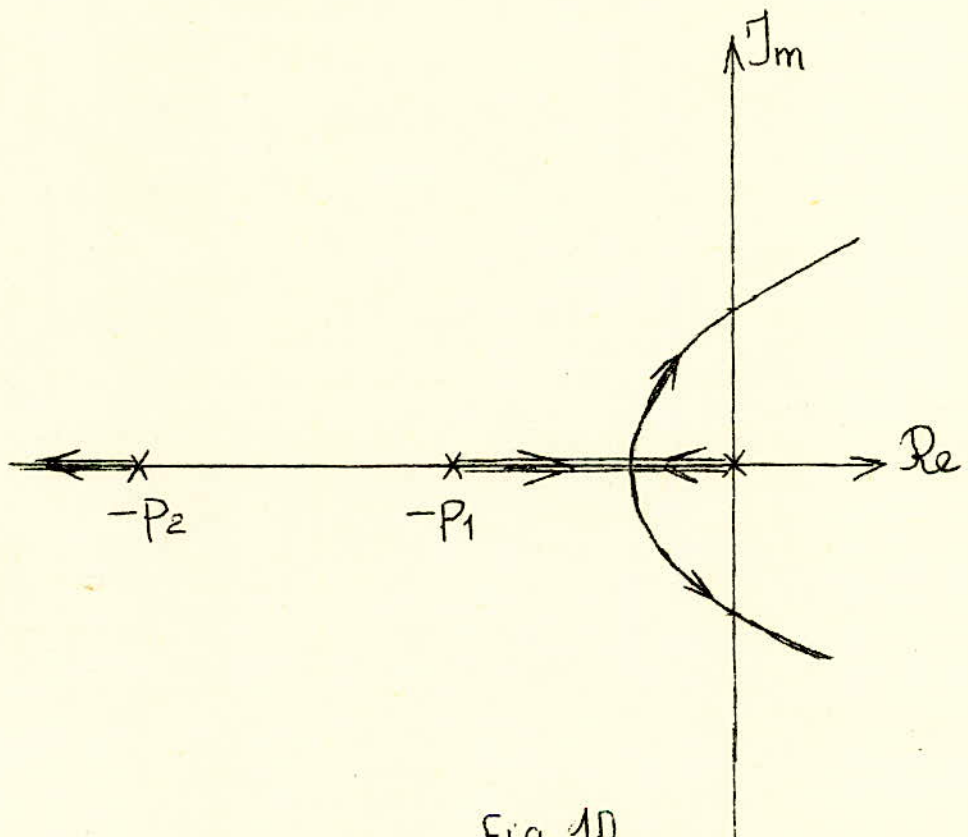


Fig 10

LIEU D'EVANS DU SYSTEME CORRIGE.

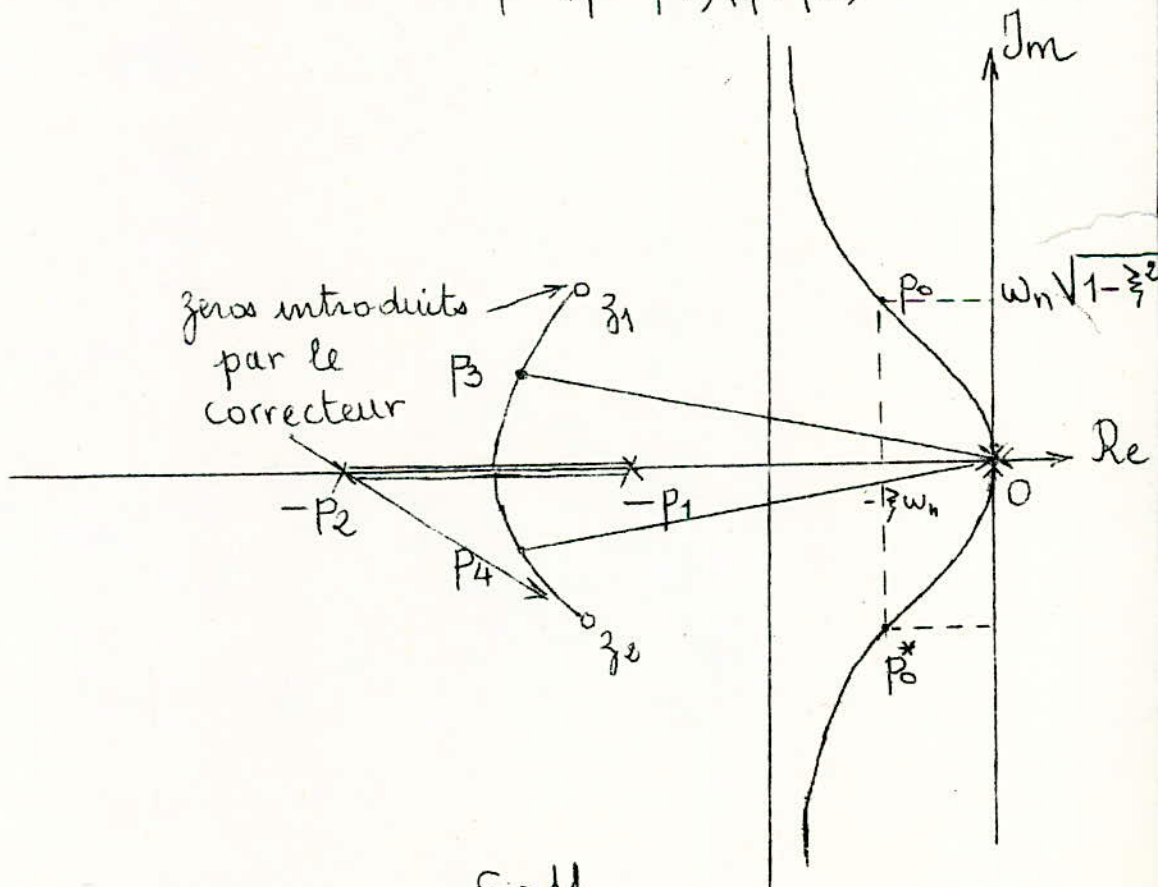
$$H_c(p) = \frac{K_2 (p^2 + a_1 p + a_2)}{(p - p_0)(p - p_0^*)(p - p_3)(p - p_4)}$$

fonction de transfert en boucle fermée  
du système corrigé

$p_3$  et  $p_4$  : la 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> racine de l'équation  
caractéristique du système corrigé

$$1 + T_c(p) = 0$$

$$\text{où } T_c(p) = \frac{K_2 (p^2 + a_1 p + a_2)}{p^2 (p + p_1)(p + p_2)}$$



CHAPITRE IIIALGORITHME3.1. RECHERCHE D'UNE POSITION DES POLES DE LA F.T.B.F. DU SYSTEME CORRIGE LUI CONFERANT UN FACTEUR DE SURTENSION  $Q = Q_e + 0,05$ 

On n'étudiera que les systèmes à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte est de la forme :

$$T(p) = K / p(p+p_1)(p+p_2)$$

On exige du système corrigé d'avoir une valeur  $Q_e$  du facteur de surtension et une précision donnée par une valeur  $K_e$  du gain statique .

Ces exigences se traduisent par l'imposition de deux pôles dominants  $p_0$  et  $p_0^*$   $= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$  ce système peut être assimilé à un système du second ordre pur de F.T.B.F.  $H_2 = K' / (p-p_0)(p-p_0^*)$

son facteur de surtension  $Q = 1/2\xi\sqrt{1-\xi^2}$

En prenant  $Q = Q_e = 1,3$  on trouve que  $\xi = 0,43$  ( $Q_e$  : valeur du facteur de surtension exigée )

Les conditions dominants la dominance des poles  $p_0$  et  $p_0^*$  portent sur deux facteurs essentiels : le module de la partie réelle des pôles non dominants et la grandeur relative du résidu en ces pôles .

-La partie réelle  $\sigma$  de tout pôle autre que  $p_0$  et  $p_0^*$  doit être assez supérieur en module à  $\xi\omega_n$  ( $\xi\omega_n = \text{Re}(p_0)$ )

-le résidu de  $S(p)$  en tout pôle autre que  $p_0$  et  $p_0^*$  doit être assez faible en module devant le résidu de  $S(p)$  au pôle  $p_0$ .

$$S(p) = \frac{H_c(p)}{p} = \frac{K_2 (p^2 + a_1 p + a_2)}{p(p-p_0)(p-p_0^*)(p-p_3)(p-p_4)}$$

$S(p)$  transformée de Laplace de la réponse du système corrigé à un échelon unité  $u(t)$ ,  $p_3$  et  $p_4$  sont la 3<sup>ème</sup> et la 4<sup>ème</sup> pôle de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé. Ces conditions nous donnent des relations très compliquées qui sont du 4<sup>ème</sup> degré en  $\xi$  et en  $\omega_n$ .

Etant donné qu'on ne peut pas imposer la dominance de  $p_0$  et  $p_0^*$  on va essayer d'imposer celle des pôles  $p_3, p_4$  (3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> racine de la F.T.B.O. du système corrigé.)

Comme notre étude porte sur la correction des asservissements de position de F.T.B.O.  $T(p) = \frac{K}{p(p+p_1)(p+p_2)}$  à l'aide d'un

correcteur P.I.D.

de fonction de transfert

$$D(p) = K_D (p^2 + a_1 p + a_2) / p$$

la F.T.B.O. du système corrigé

$$T_c(p) = \frac{K K_D (p^2 + a_1 p + a_2)}{p^2 (p+p_1)(p+p_2)} = \frac{K_2 (p^2 + a_1 p + a_2)}{p^2 (p+p_1)(p+p_2)} \quad K_2 = K K_D$$

la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigés sera alors

$$H_c(p) = \frac{K_2 (p^2 + a_1 p + a_2)}{K_2 (p^2 + a_1 p + a_2) + p^2 (p+p_1)(p+p_2)}$$

$$H_c(p) = \frac{K_2 (p-z_1)(p-z_2)}{(p-p_0)(p-p_0^*)(p-p_3)(p-p_4)}$$

$p_3, p_4$  s'obtiennent en cherchant les zéros du polynôme obtenue en divisant  $K_2 (p^2 + a_1 p + a_2) + p^2 (p+p_1)(p+p_2)$

par  $(p-p_0)(p-p_0^*)$  on trouve

$$p_{3,4} = \frac{(p_1 + p_2 - 2\xi\omega_n) \pm \sqrt{(p_1 + p_2 - 2\xi\omega_n)^2 - 4 K_2 p_1 p_2 / \omega_n^2}}{2} \quad (2)$$

La dominance de  $p_3$  et  $p_4$  est assurée si les zéros ( $z_1, z_2$ ) introduits par le correcteur sont proches des pôles  $p_0, p_0^*$  d'après les relations (21, 22, 23) en voit que lorsque  $\omega_n$  est faible

$$K_2 \approx K_e p_1 p_2 / \omega_n^2$$

$$a_2 \approx \omega_n^2$$

$$a_1 \approx 2\xi \omega_n$$

$$\text{d'où } z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \approx \frac{-2\xi \omega_n \pm \sqrt{4\xi^2 \omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$z_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = p_0, p_0^*$$

Donc la dominance de  $p_3, p_4$  est assurée pour les valeurs de  $\omega_n$  faibles.

Recherche de  $p_3, p_4$  tels que le facteur de surtension du système corrigé  $Q = Q_E \pm 0,05$  on se fixe une valeur de  $\xi (= 0,7)$  et on cherche la première valeur de  $\omega_n$  à partir de zéro qui nous donne  $Q = Q_E \pm 0,05$  de la manière suivante.

On part avec  $\omega_n = 0$  et on l'augmente par incrémentation de  $0,1$  jusqu'à ce que la valeur de  $Q - Q_E$  change de signe.

lorsque  $Q - Q_E$  change de signe on pose que

$$\omega_{n2} = \omega_n \quad \text{et} \quad \omega_{n1} = \omega_n - 0,1$$

$$Q(\xi, \omega_{n1}) = Q_1 \quad \text{et} \quad Q(\xi, \omega_{n2}) = Q_2$$

$$\Delta Q_1 = Q_1 - Q_E \quad \text{et} \quad \Delta Q_2 = Q_2 - Q_E$$

d'après la relation (24) on voit que plus  $\omega_n$  est faible plus  $p_3$  et  $p_4$  sont dominants. et plus l'amortissement introduit par ces pôles est faible donc plus le facteur de surtension  $Q$  du système est grand.

Donc pour les valeurs de  $\omega_n$  inférieures à la valeur cherchée on a  $Q - Q_E > 0$  d'où l'allure de la courbe  $\Delta Q(\omega_n)$  (fig 12) On voit sur le graphe représentant  $\Delta Q(\omega_n)$  que la valeur de  $\omega_n$  correspond au correcteur optimum (le correcteur opti-

étant défini comme étant le correcteur ~~optimum~~ P.I.D. qui pour  $\xi = 0,7$  donne au système un facteur de surtension  $Q$  tel que  $Q_E + 0,05 \leq Q \leq Q_E + 0,05$  ) est celle donnée par l'intersection de la courbe représentant  $\Delta Q(\omega_n)$  avec l'axe des abscisses.

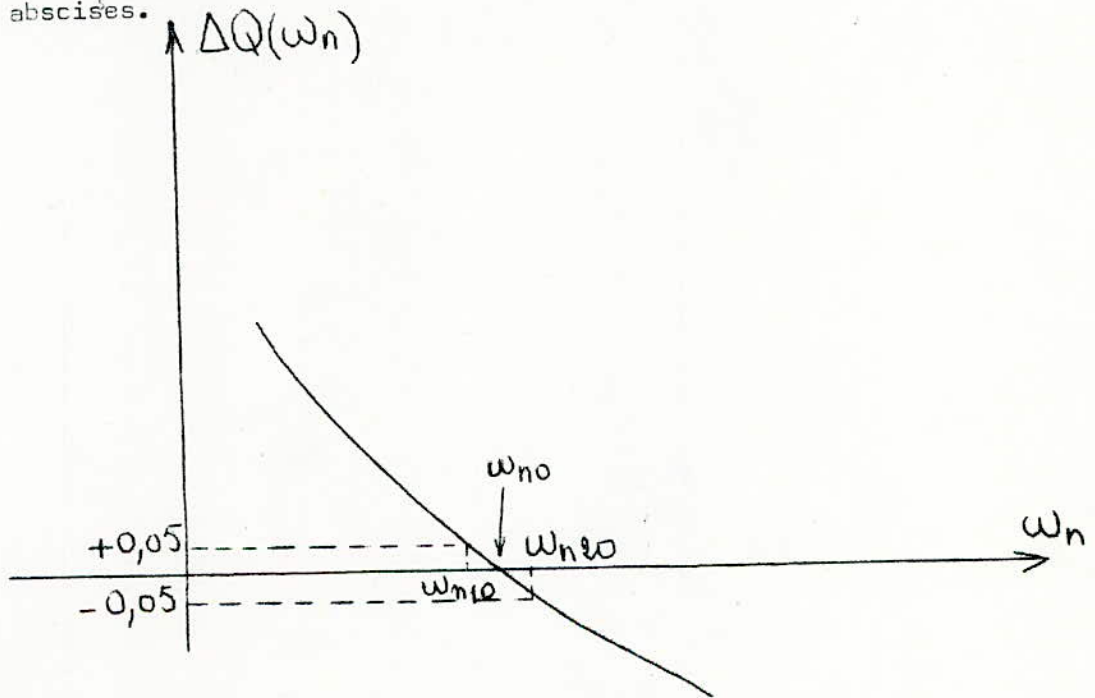


fig (12)

On peut considérer qu'une valeur de  $\omega_n$  appartenant à l'intervalle  $[\omega_{n10}, \omega_{n20}]$  est une bonne approximation de  $\omega_{n0}$  correspondant au correcteur optimum.

On calcule approximativement  $\omega_{n0}$  en cherchant une valeur de  $\omega_n$  tel que  $|\Delta Q(\omega_n)| < 0,05$  on procède pour cela par itération de la façon suivante, on calcule  $Q_1, Q_2$  ( $\Delta Q_1, \Delta Q_2$ ) à l'aide des sous-routines CORREC et QWR.

Le premier calcul le correcteur correspondant à une valeur de  $\omega_n$  donné et le second calcul le facteur de surtension et la pulsation de résonance du système corrigé pour un correcteur donné.

$\Delta Q_1$  et  $\Delta Q_2$  nous définissent deux points A et B, on cherche B' (intersection de AB et de l'axe des abscisses)



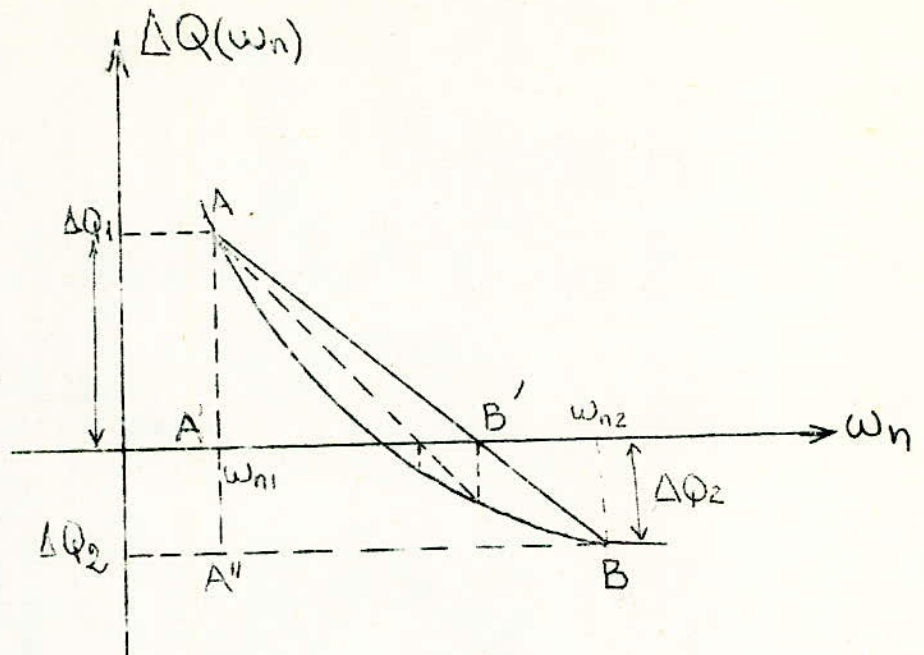


fig (13)

En considérant les triangles homothétiques  $AA'B'$  et  $AA''B''$   
 on trouve que  $A'B' = A''B \cdot AA'/AA''$

$$\Rightarrow A'B' = (\omega_{n2} - \omega_{n1}) \times \Delta Q_1 / (\Delta Q_1 - \Delta Q_2)$$

$$\text{d'où } \omega_{B'} = \omega_{n1} + (\omega_{n2} - \omega_{n1}) \Delta Q_1 / (\Delta Q_1 - \Delta Q_2)$$

on calcul ensuite à l'aide de CORREC et  $\Phi WR$

la valeur de  $\Delta Q$  correspondant à  $\omega_n$  et on vérifie si

$$-0.05 \leq \Delta Q \leq +0.05 \text{ en pose } \omega_{n0} = \omega_n$$

et on considère que le correcteur calculé est optimum alors on imprime ses paramètres ( $K_2, A_2, A_1, \varphi, \omega_R$ )

—  $\Delta Q > 0.05$  on pose  $\omega_{n1} = \omega_n$  et  $\Delta Q_1 = \Delta Q$  et on z

Les calculs du nouveau point  $B'$

$$- \Delta Q < -0.05 \quad \text{on pose } \omega_{n2} = \omega_n \text{ et } \Delta Q_2 = \Delta Q$$

et on refait les calculs du nouveau point  $B'$  jusqu'à ce qu'on ait

$$-0.05 \leq \Delta Q \leq 0.05$$

CALCUL DES PARAMETRES DU CORRECTEUR P.I.D.

3.2.1. Determination du Modele.

$$T'(p) = \frac{K_2}{p^2(p+p_1)(p+p_2)}$$

(  $T'(p)$  : F.T.B.O. du système équivalent en introduisant  $K_d$  et l'intégration du correcteur dans le système )

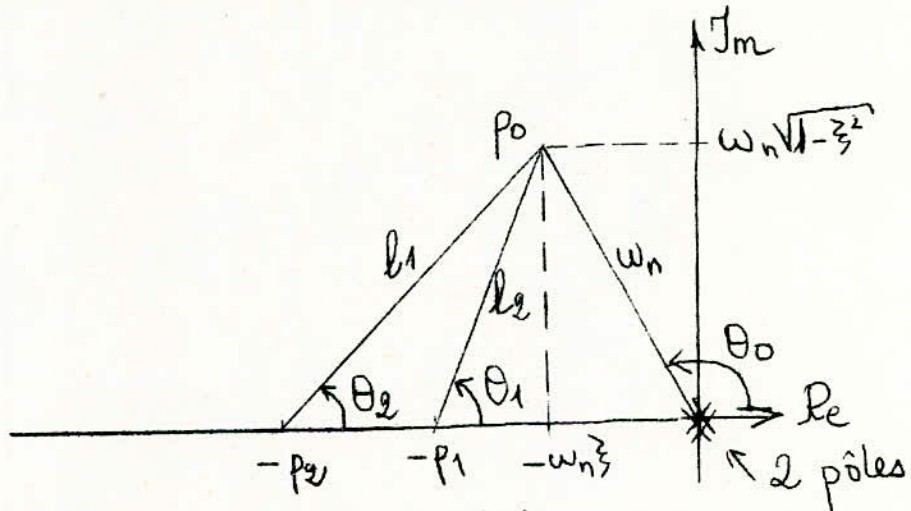


fig (14)

Le modèle est déterminé de façon à ce qu'il simule les mêmes paramètres normalisés ( $\xi, R$ ) que le système.

On calcule la phase  $\delta$  que doit introduire le correcteur et le paramètre  $R$

$$\delta = 180^\circ + 2\theta_0 + \theta_1 + \theta_2$$

$$\theta_0 = 180^\circ - \text{Arctg} \sqrt{1-\xi^2}/\xi$$

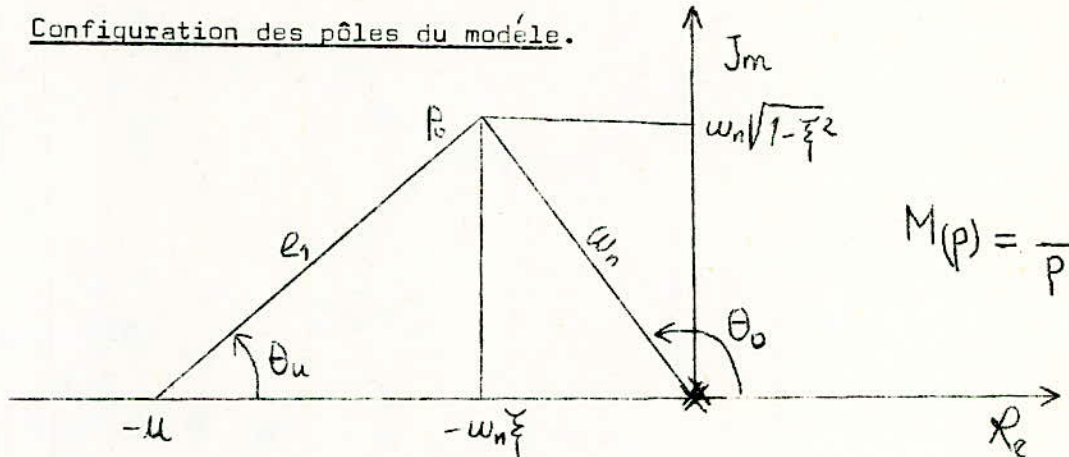
$$\theta_i = \begin{cases} \text{Arctg} \left[ \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{p_i - \xi \omega_n} \right] & \text{si } p_i > \omega_n \\ \text{Arctg} \left[ \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{p_i - \xi \omega_n} \right] + 180^\circ & \text{si } p_i < \omega_n \end{cases}$$

$$R = K_e L_s / E_s$$

$$L_s = \frac{1}{\omega_n^2 a_1 a_2} = \frac{1}{\omega_n^2 [\omega_n^2 + p_1^2 - 2p_1 \omega_n \xi]^{1/2} [\omega_n^2 + p_2^2 - 2p_2 \xi \omega_n]^{1/2}}$$

$$E_s = 1/p_1 p_2$$

Configuration des pôles du modèle.



$$M(p) = \frac{K_0}{p^2(p - p_2)}$$

fig (15)

$$\theta_u = \gamma - 2\theta_0 - 180^\circ = \theta_1 + \theta_2$$

$$\text{d'où } u = \omega_n \xi + \omega_n \sqrt{1-\xi^2} / \text{tg } \theta_u$$

$$a_1 = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} / \sin \theta_u$$

3.2.2. Détermination des paramètres du correcteur.

$$K_{e0} = R \omega_n^2 a_1 / u \quad K_{e0} \text{ gain statique du modèle corrigé'}$$

$$K_0 = R a_1 + 2\xi \omega_n - u$$

$$a_1 = (2R a_1 \xi \omega_n + \omega_n^2) / K_0$$

$$K_2 = K \cdot K_D = K_e / E_s a_2$$

$$a_2 = K_{e0} \cdot u / K_0$$

### 3.3. Calcul du facteur du Surtension $Q$ et de la pulsation de résonance $\omega_R$ du système corrigé.

Etant donné qu'on travaille dans le domaine des  $\omega_n$  faibles où les pôles  $p_3$  et  $p_4$  sont dominant on a

$$H_c(p) = \frac{K_2}{(p-p_3)(p-p_4)}$$

alors la pulsation de résonance  $\omega_R$  du système corrigé est

$$\text{proche de } \omega_0 = |\rho_3| \sqrt{1 - 2\xi_3^2}$$

$\xi_3$ : amortissement introduit par les pôles  $p_3$  et  $p_4$

$$\xi_3 = |\operatorname{Re}(p_3)| / |\rho_3|$$

$$\xi_3 = (p_1 + p_2 - 2\xi \omega_n) / 2 \sqrt{K_e p_1 p_2 / \omega_n^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_e p_1 p_2}{\omega_n^2} - (p_1 + p_2 - 2\xi \omega_n)^2 / 2}$$

Calcul de la première approximation de  $\omega_R$

On initialise  $Q = 0$

On cherche  $\omega_R$  dans le domaine  $[\omega_0/2, 2\omega_0]$

On part de  $\omega = \omega_0/2$  et on incrémente à chaque fois de  $0.1\omega$  (voir fig 16)

On compare à chaque fois la valeur de  $|H_c(j\omega)|$  avec la valeur de  $Q$

si  $|H_c(j\omega)| \geq Q$   
on pose

$$Q = |H_c(j\omega)| \text{ et } \omega_{R1} = \omega$$

et on refait le calcul avec une nouvelle valeur de  $\omega$  jusqu'à ce qu'on arrive à  $2\omega_0$  -- Si  $|H_c(j\omega)| \geq Q$

On refait le calcul avec une nouvelle valeur de  $\omega$  ce qu'on arrive à  $2\omega_0$

une fois qu'on aura trouvé  $\omega_{R1}$  on procède de la même façon qu'au précédemment mais cette fois dans l'intervalle

$[\omega_{R1}/1.1, 1.1\omega_{R1}]$  et avec un pas de  $0.01\omega$

(voir fig 17)

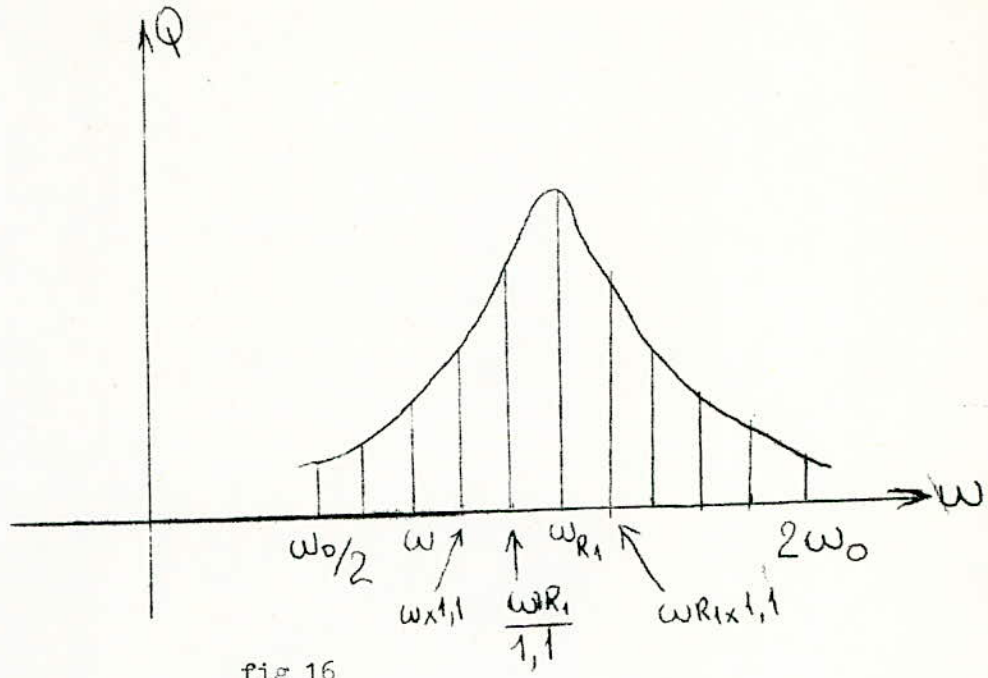


fig 16

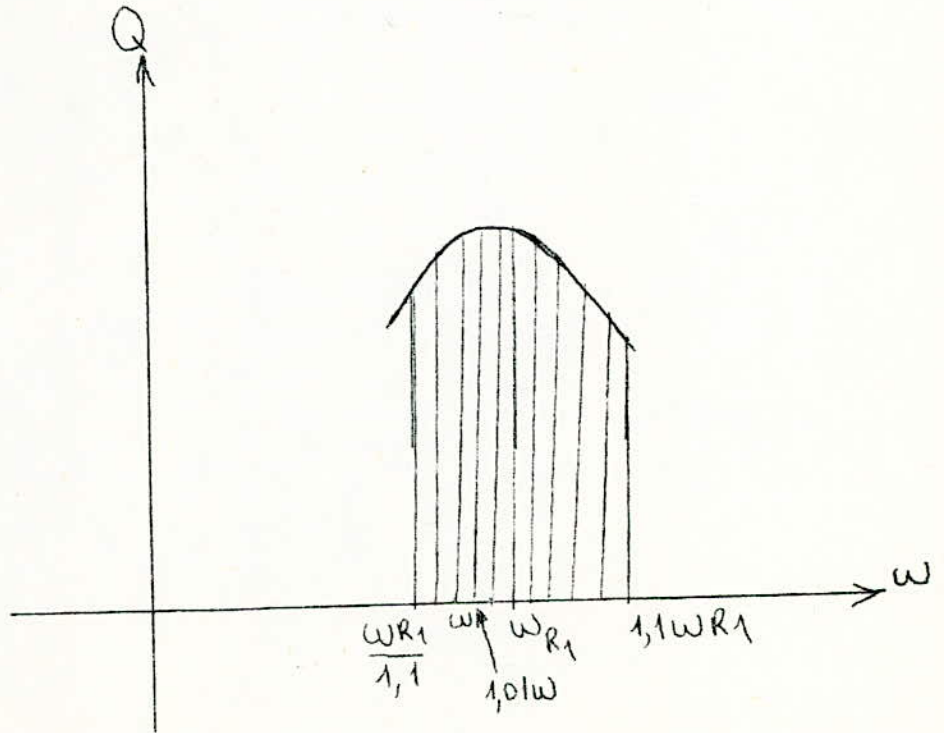


fig 17

3.4. ALGORITHME.DECLARATION DES VARIABLES.

Real : Q, Q<sub>E</sub>, WR, WN, XSI, P(1), P(2), TETA(1), TETA(2),  
E1, L(1), L(2), KE, KEO, KO, K2, A1, A2, R

Q : Facteur de surtension du système

Q<sub>E</sub> : Valeur de Q exigée

WR : Pulsation de résonance

WN, XSI : paramètres définissant les pôles  $p_0$  et  $p_0^*$

p(1), p(2) : 2 pôles de F.I.B.O. du système non corrigé

TETA1, TETA2, TETAU : phases intriduites aux pôles  
respectivement par p(1), p(2) et le pôle U du modèle

E1 : distance entre les pôles U et  $p_0$

L1 (L2) : distance entre p(1), p(2) et  $p_0$

KE : Gain statique exigé du système

KO : paramètre du modèle

KEO : Gain statique du modèle corrigé

K2 : Paramètre du système corrigé.

A1, A2 : paramètre du correcteur P.I.D.

R : Paramètre normalisé du correcteur

2 : LECTURE DES DONNEES:3; RECHERCHE DU CORRECTEUR OPTIMUM

à l'aide de la méthode indiquée au paragraphe 3.1.) et des sous-routines  
CORREC et QWR

4 Sortie des paramètres du correcteur:

K2, A2, A1, et le facteur de surtension  
et la pulsation de résonance du système corrigé.

5: SOUS PROGRAMME CORREC:

- Déclaration des variables
- Déterminations du correcteur suivant la méthode indiquée dans le paragraphe 3.2

$$\theta_i = \arctg \omega_n \sqrt{1-\xi^2} / p_i - \xi \omega_n \quad i = 1, 2$$

$$\theta_u = \theta_1 + \theta_2$$

$$u = \omega_n \xi + \omega_n \sqrt{1-\xi^2} / \operatorname{tg} \theta_u$$

$$E1 = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} / |\sin \theta_u|$$

$$L_i = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} / |\sin \theta_i| \quad i = 1, 2$$

$$R = K_e p_1 p_2 / L_1 L_2 \omega_n^2$$

$$A_2 = K_{e0} \cdot u / K_0$$

$$A_1 = K_e \xi R E_1 \xi \omega_n / K_0$$

$$K_2 = K_e p_1 p_2 / A_2$$

Return

End

6: SOUS PROGRAMME QWR:

- Déclaration des variables
- Calcul de Q et de  $\omega_R$  par la méthode indiquée dans le paragraphe 3.3.
- Return ; end

7: FONCTION H W:

La fonction H W calcule le modèle de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé.

- Déclaration des variables NUME, DENO

$$\text{NUME} = K_2 \sqrt{(A_2 - \omega^2)^2 + A_1^2 \omega^2}$$

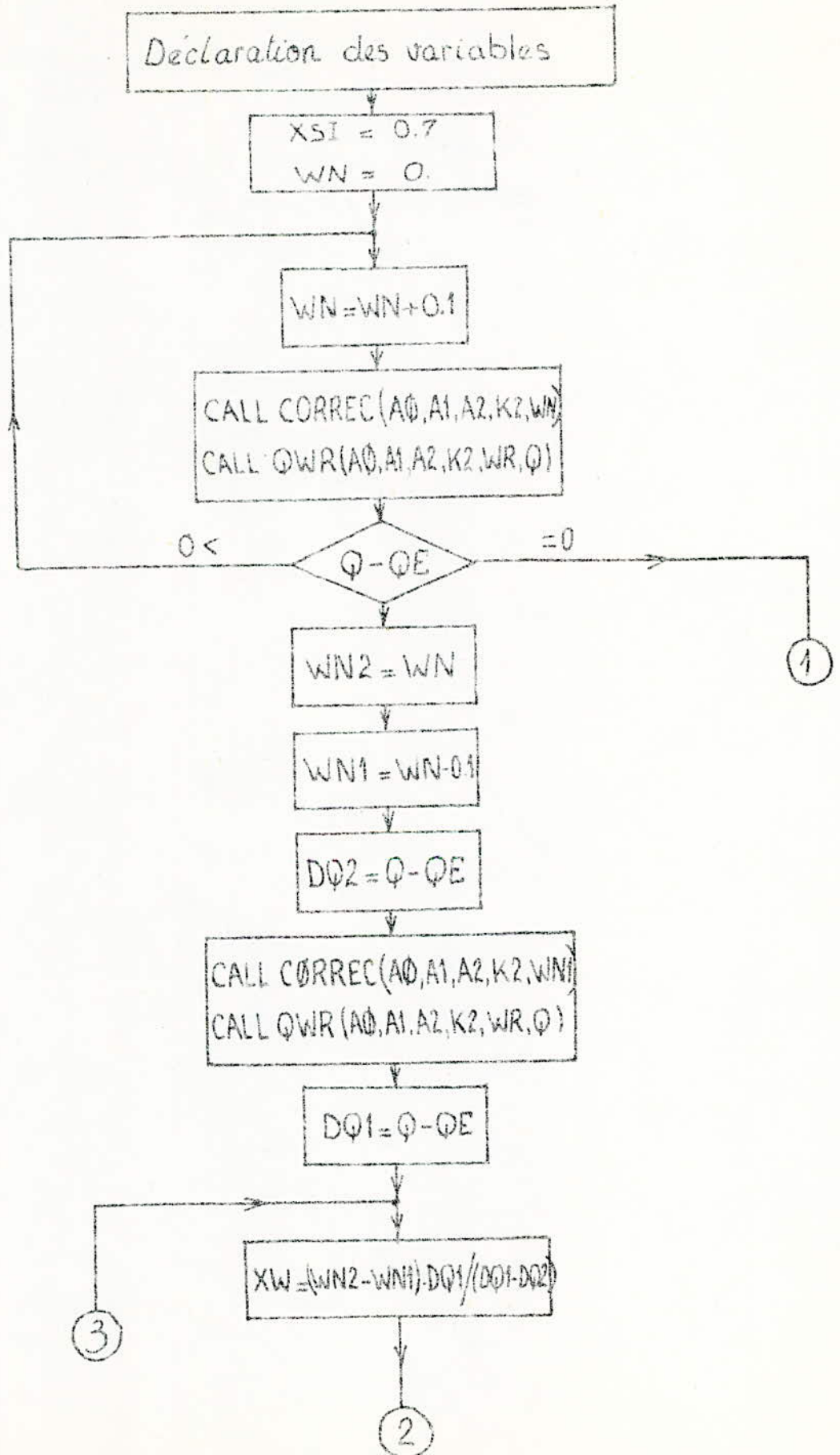
$$\text{DENO} = \sqrt{(\omega^4 - \omega^2(p_1 p_2 + K_2) + K_2 A_2)^2 + (A_1 \omega K_2 + \omega^3(p_1 + p_2))^2}$$

$$\text{HW} = \text{NUME} / \text{DENO}$$

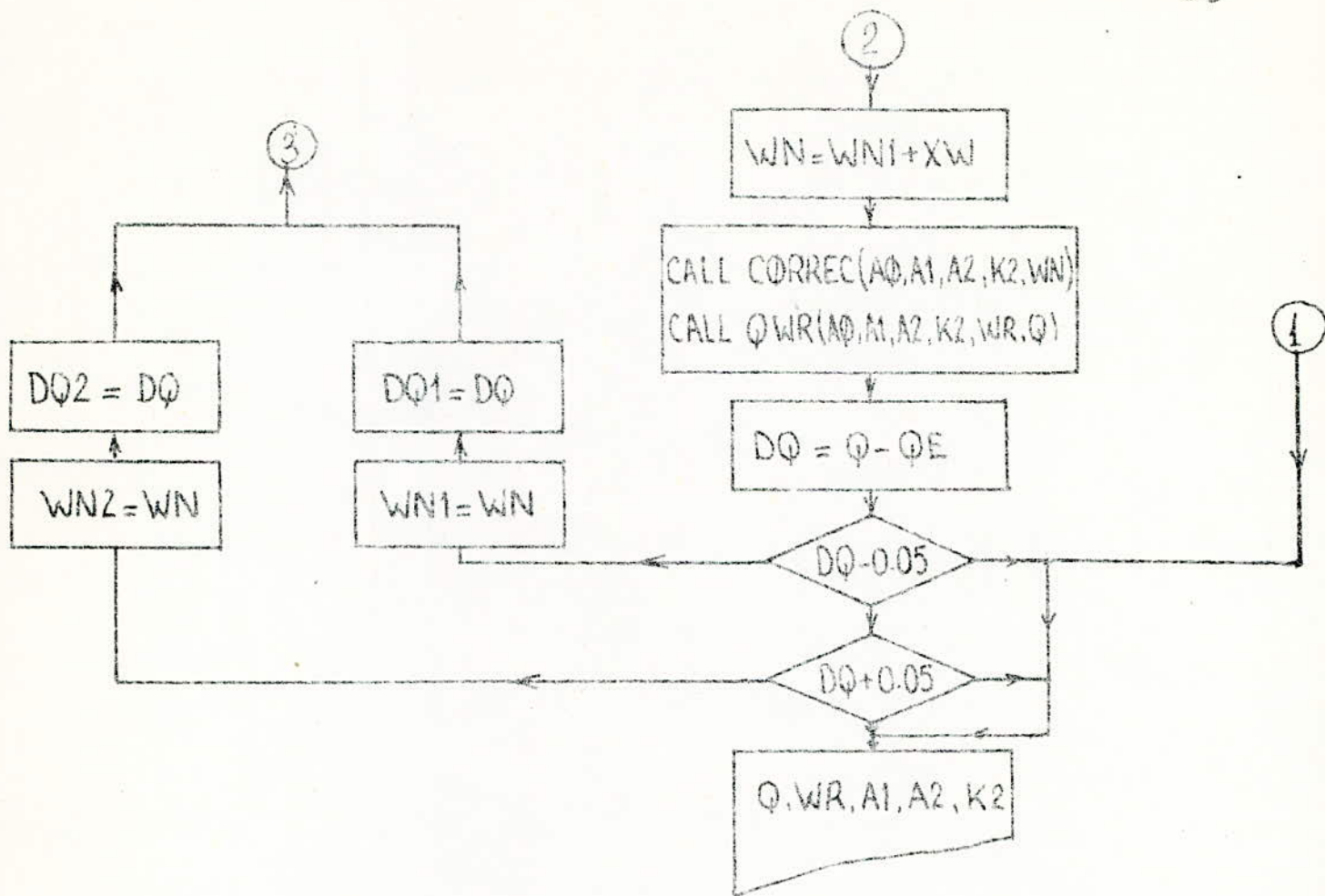
RETURN

END

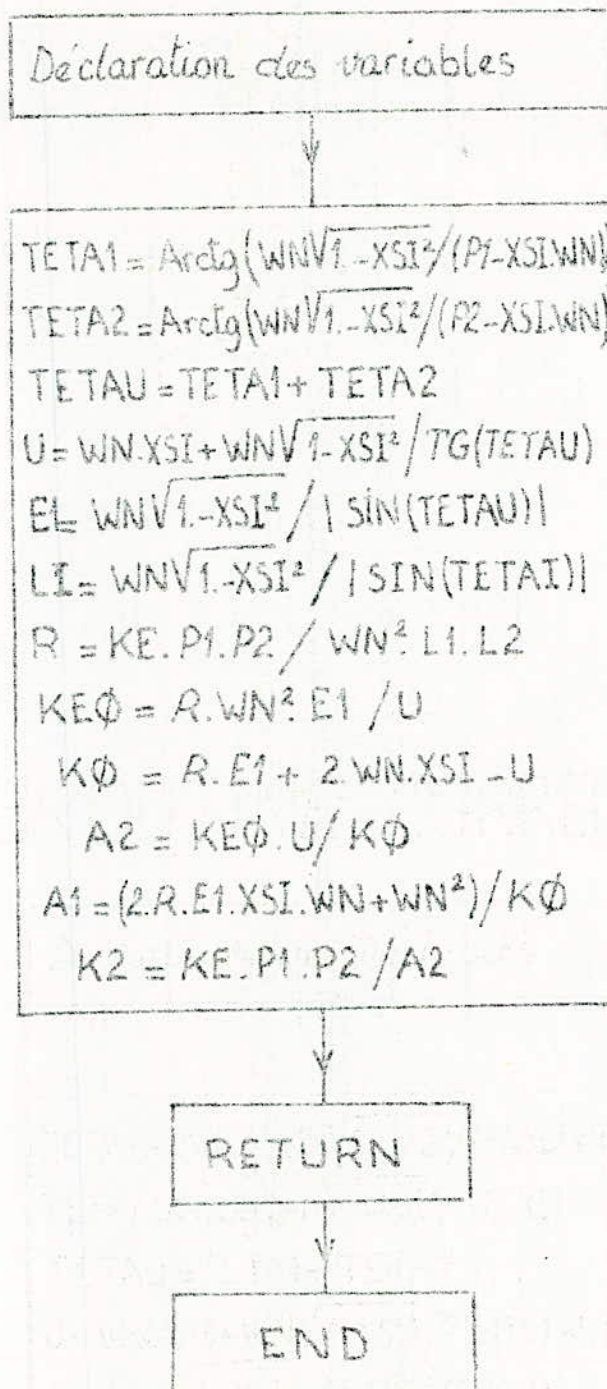
# PROGRAMME PRINCIPAL







## SUBROUTINE CORREC(A0,A1,A2,K2,WN)



## SUBROUTINE QWR(A1,A2,K2,P,KE,WR,Φ,XSI,W)

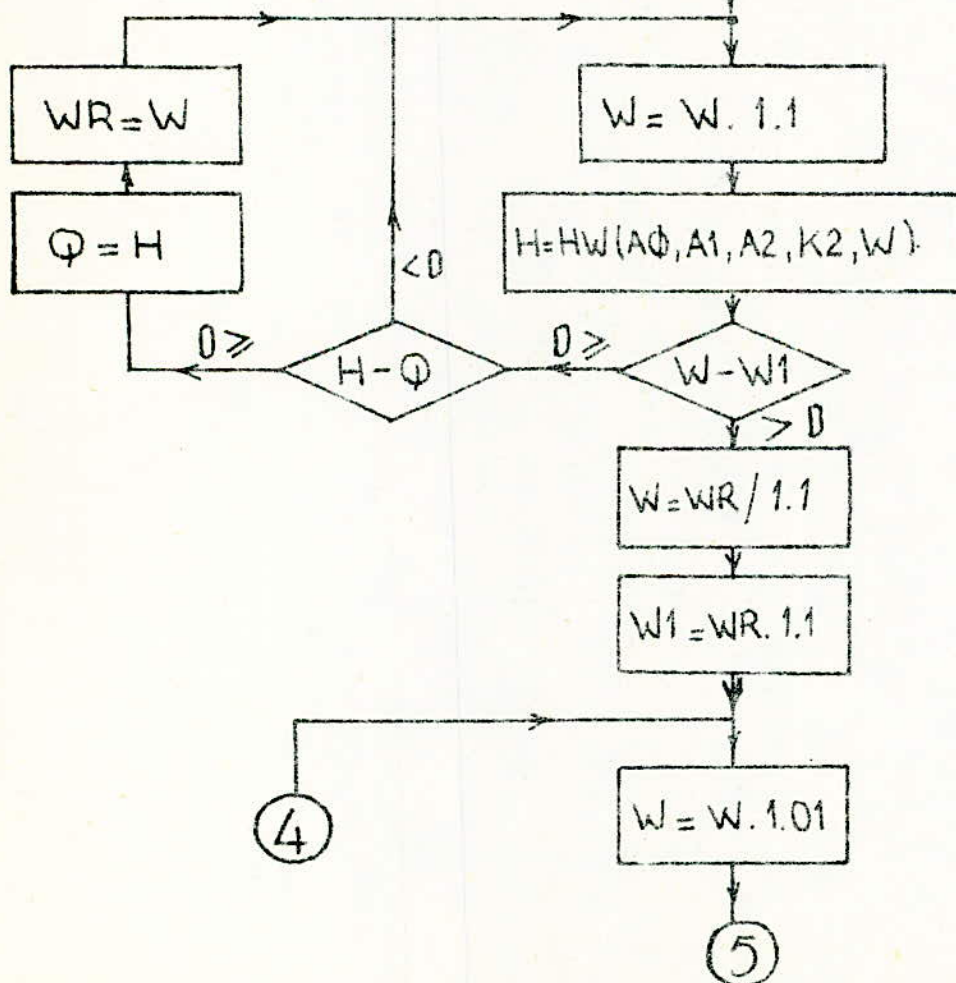
Déclaration des variables

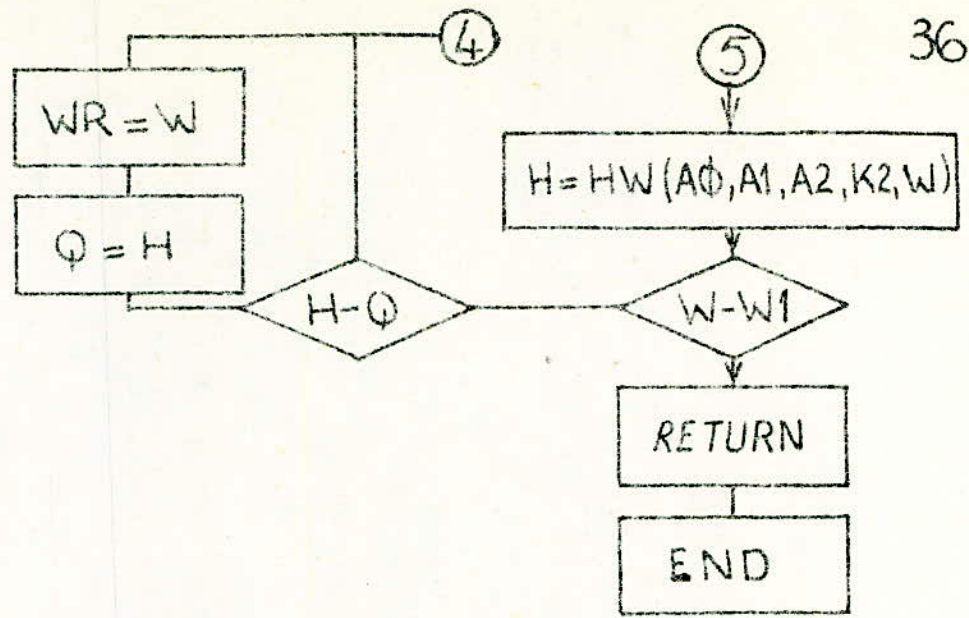
$$W\Phi = \sqrt{KE \cdot P1 \cdot P2 / WN^2 - (P1 + P2 - 2XSI \cdot WN)^2 / 2}$$

$$\Phi = 0$$

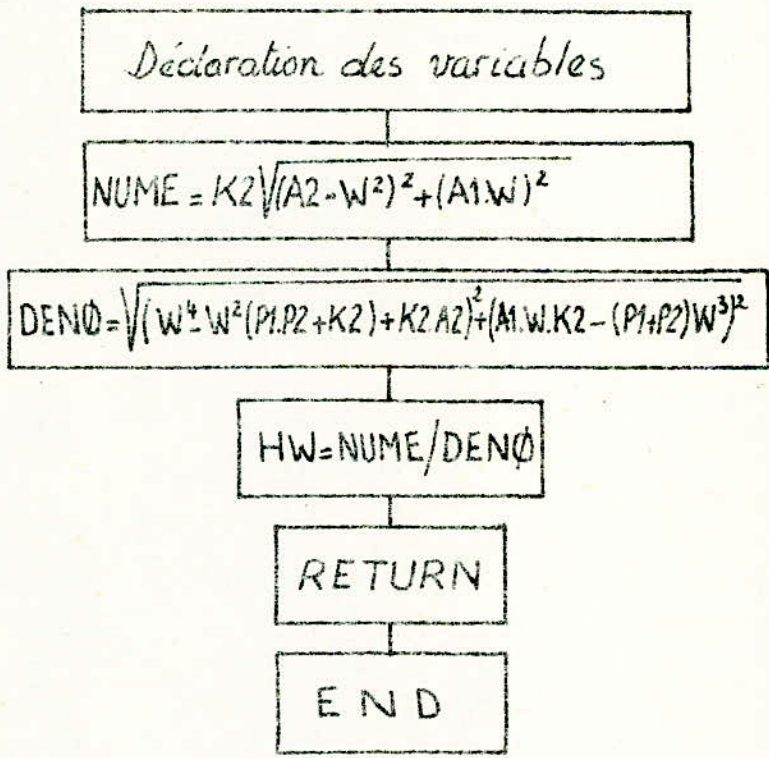
$$W = W\Phi / 2$$

$$W1 = 2 \cdot W\Phi$$





FUNTION · HW (A1, A2, K2, P)



## CHAPITRE IV

## PROGRAMMATION

## 4.1 Etude d'un exemple de systèmes asservis

Soit le système asservi de fonction de transfert en boucle ouverte

$$T(p) = K / p(p+20)(p+50)$$

On exige de ce système d'avoir

-Un gain statique  $KE=20$  d'où  $K=20 \cdot 50 \cdot KE = 2 \cdot 10^4$

-Un facteur de surtension  $QE = 1,3$

On utilise pour cela le programme correspondant à l'algorithme étudié dans le chapitre III avec les données suivantes:

$KE = 20$  ;  $QE = 1,3$  ;  $P(1) = 20$  ;  $P(2) = 50$

Le correcteur qu'on obtient à l'aide de ce programme a pour fonction de transfert:

$$D(p) = 7486,29 (p^2 + 2,2883p + 2,6715) / p$$

Ce correcteur procure au système:

- Un facteur de surtension  $Q = 1,2990$

- Une pulsation de résonance  $= 77,5671$

```

1      REAL X2, X3, P(2), A1, A2, B, C, XSI, X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12, X13, X14, X15, X16, X17, X18, X19, X20, X21, X22, X23, X24, X25, X26, X27, X28, X29, X30, X31, X32, X33, X34, X35, X36, X37, X38, X39, X40, X41, X42, X43, X44, X45, X46, X47, X48, X49, X50, X51, X52, X53, X54, X55, X56, X57, X58, X59, X60, X61, X62, X63, X64, X65, X66, X67, X68, X69, X70, X71, X72, X73, X74, X75, X76, X77, X78, X79, X80, X81, X82, X83, X84, X85, X86, X87, X88, X89, X90, X91, X92, X93, X94, X95, X96, X97, X98, X99, X100
2      C
3      C
4      C      COEFFICIENTS OF SYSTEMS ASSUMED
5      C      OF P.T. = 1.  T(P) = X/P*(P+P(1))+P+P(2)
6      C
7      C
8      DATA X6, X7, P(1), P(2)/20., 1., 3., 20., 50., /
9      X8 = 0.7
10     X9 = 1.
11     X10 = -1 + 0.1
12     CALL CORRPT(A1, A2, X2, X3, X4)
13     CALL CORRPT(A1, A2, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10)
14     IF (X1 - 0.5) 10, 3, 1
15     X11 = X1
16     X12 = X1 - 0.1
17     X13 = -0.5 * X1
18     CALL CORRPT(A1, A2, X2, X3, X4)
19     CALL CORRPT(A1, A2, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12, X13, X14, X15, X16, X17, X18, X19, X20, X21, X22, X23, X24, X25, X26, X27, X28, X29, X30, X31, X32, X33, X34, X35, X36, X37, X38, X39, X40, X41, X42, X43, X44, X45, X46, X47, X48, X49, X50, X51, X52, X53, X54, X55, X56, X57, X58, X59, X60, X61, X62, X63, X64, X65, X66, X67, X68, X69, X70, X71, X72, X73, X74, X75, X76, X77, X78, X79, X80, X81, X82, X83, X84, X85, X86, X87, X88, X89, X90, X91, X92, X93, X94, X95, X96, X97, X98, X99, X100)
20     X14 = -0.5 * X1
21     X15 = 0.5 * (X2 - X11) + X11 / (0.51 - 0.52)
22     X16 = -1 + X1
23     CALL CORRPT(A1, A2, X2, X3, X4)
24     CALL CORRPT(A1, A2, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12, X13, X14, X15, X16, X17, X18, X19, X20, X21, X22, X23, X24, X25, X26, X27, X28, X29, X30, X31, X32, X33, X34, X35, X36, X37, X38, X39, X40, X41, X42, X43, X44, X45, X46, X47, X48, X49, X50, X51, X52, X53, X54, X55, X56, X57, X58, X59, X60, X61, X62, X63, X64, X65, X66, X67, X68, X69, X70, X71, X72, X73, X74, X75, X76, X77, X78, X79, X80, X81, X82, X83, X84, X85, X86, X87, X88, X89, X90, X91, X92, X93, X94, X95, X96, X97, X98, X99, X100)
25     X17 = 0.5 * X1
26     X18 = 0.5 * X1
27     X19 = 0.5 * X1
28     X20 = 0.5 * X1
29     X21 = 0.5 * X1
30     X22 = 0.5 * X1
31     X23 = 0.5 * X1
32     X24 = 0.5 * X1
33     X25 = 0.5 * X1
34     X26 = 0.5 * X1
35     X27 = 0.5 * X1
36     X28 = 0.5 * X1
37     X29 = 0.5 * X1
38     X30 = 0.5 * X1
39     X31 = 0.5 * X1
40     X32 = 0.5 * X1

```

\* S/P. APPLES :

- : CORR
- : CORR
- : IC
- : FTD
- : STP
- : IMI1
- ORREP
- WR

*NSV	0000	**						
NOX	CL	TY	1300	4025	4010	T	CDX	OR
2	VI	-	0004	0014				
5	VI	-	0002	0018		X		
	TI	-	0008		0050	X		
0	VI	0	0004	0010				
1	VI	0	0004	0020				
2	VI	0	0004	0024				

```

41 SUBROUTINE CORRFC(A0,A1,A2,KP,RT)
42 REAL R(P),L(P),TETA(P),TETAU,0,10,XSI,E1,0,
43 KRF,KFO,KO,AP,AJ,KP,AD
44 DATA XE,00,P(1),P(P)/P0,1.5,P0,50./
45 XST=0.7
46 DO 30 T=1,P
47 000F 50 TETA(T)=ATAN(-XSI*RT(1.-XSI**P)/(P(1)-XSI*AD))
48 004A TETAU=TETA(1)+TETA(P)
49 0056 U=CN*XSI+SN*SQRT(1.-XSI**P)/TAN(TETAU)
50 007A E1=SN*SQRT(1.-XSI**P)/COS(STI(TETAU))
51 009A DO 50 J=1,P
52 009C 50 L(J)=SN*SQRT(1.-XSI**P)/COS(STI(TETA(T)))
53 00D2 R=KFO*(1)*P(P)/SN**P*L(1)*L(P)
54 00FE KFO=SN**P*E1/0
55 010F KO=R*E1+P.*XST*W-0
56 0120 AP=KFO*0/KO
57 012P A1=(2.*P*E1*(XSI*W+1)**P)/KO
58 014P KP=KE*P(1)*P(P)/A2
59 0156 AQ=1.
60 015A RETURN
61 015C END

```

\*\* S/P, APPLES :

ABS  
 SIN  
 TAN  
 SORT  
 ATAN  
 F:EXHI  
 M:MOVE

NAME	CL	TY	LD	R	ADRS	POIN	IN	COMM
CORRFC	VS							
A0	VF	R	00	4				
A1	VF	R	00	4				
A2	VF	R	00	4				
KP	VF	R	00	4				
W0	VF	R	00	0				
P	TL	R	00	8		0050	X	
L	TL	R	00	8		0052		
TETA	TL	R	00	8		0054		
TETAU	VL	R	00	4	0020			
U	VF	R	00	4	0030			
XSI	VL	R	00	4	0034			
E1	VL	R	00	4	0038			
R	VF	R	00	0	0050			
KF	VL	R	00	4	0040			Y
KFO	VL	R	00	4	0044			
KO	VL	R	00	2	0048			
QE	VL	R	00	4	0040			Y
408333 I3					0054			
I	VL	T	00	2	0054			
30 LI					0007	0050		

0001  
 0003  
 0004  
 411000 0  
 0002 0060  
 0064

```

62          SQRDOUTTAS D= (A0, A1, A2, KP, WR, WN, XSI)
63          REAL X(P), A0, A1, A2, KP, P, WR
64          DATA KF, WF, P(1), P(2)/20., 1., 2., 20., 50./
65          A0=SQR((KF*P(1)+P(2)) / (X*P-(P(1)+P(2))-P.*XSI*P))**2/2.)
66          Z=0.
67          X=X0/P.
68          I1=2.*X0
69          X=X*1.1
70          Z=H(A0, A1, A2, KP, P)
71          007#          IF(I=1) 10, 10, 11
72          008#          10 IF(H=0) 9, 9
73          009#          GOTO 1
74          009A          X=X
75          009B          GOTO 1
76          00A0          11 Z=Z/1.1
77          00A#          X=X*1.1
78          00B0          12 Z=Z*1.03
79          00B#          Z=H(A0, A1, A2, KP, P)
80          00C#          IF(I=1) 14, 10, 15
81          00D#          14 IF(H=0) 12, 13, 13
82          00E#          13 Z=0
83          00F#          X=X
84          00FA          GOTO 12
85          00FB          15 CONTINUE
86          00FB          RETURN
87          00F#          END
  
```

\*\* S/P. APPLES :

SQR  
F:EXRT  
M:MOVE  
F:CMPP  
HW

**NSV	0000	**						
NOV	CL	TY	EQC	ADRS	RTF	T	COND	
QWR	NS							
A0	VF	1	0004					
A1	VF	2	0004					
A2	VF	3	0004					
KP	VF	0	0004					
WR	VF	0	0004					
G	VF	2	0004					
WN	VF	2	0004					
XSI	VF	0	0004					
P	VI	0	0004	0037	0040		X	
KF	VI	0	0004	0037			X	
WF	VI	0	0004	0037			X	
W0	VI	0	0004	0042				
0000								
0004								
0002				0052				
41200000				0046				
00000000				0050				
W	VI	0	0004	0060				
W1	VI	0	0004	0064				
	LT			0054	0068			
4111909A				0064				
H	VI	0	0004	006E				



```

88          FUNCTO8 HA(A0,A1,A2,K2,P)
89          REAL A0,A1,A2,K2,P,P(2),DEN0,NUM0,KF
90          DATA KF,DF,P(1),P(2)/20.,1.3,20.,50./
91          NUM0=K2*SQRT((A2-A0+P**2)**2+(A1+P)**2)
92          DEN0=SQRT((P**4-P**2*(P(1)+P(2))+K2+K2*A2)**2+
93          5*(A1**2+P*(P(1)+P(2))**3)**2)
94          HW=NUM0/DEN0
95          VEI=...
96          P=...

```

\*\* S/P. APPRELS :

SOBT  
F:EXRI  
M:MOVE

\*\*NSV 0000 \*\*

NOV	CL	TY	LOC	ADR	PRJ	IC	CON	IMP
HW	VF	R	0004	0020				X
A0	VF	R	0004					
A1	VF	R	0004					
A2	VF	R	0004					
K2	VF	R	0004					
W	VF	R	0004					
P	TL	R	0004		0000			X
DEN0	VL	R	0004	0030				X
NUM0	VL	R	0004	0034				X
KF	VL	R	0004	0033				X
DF	VL	R	0004	0030				X
0002				0042				
0004				0052				
0000								
0003				0040				

%C/LINKDX/SI,HL  
LINKDX0020  
75FC 7600 9405

%L  
0000  
75FC 7608 9964

%P  
PARAMETRES DU CORRECTEUR P.T.O  
A1= 2.2063  
A2= 2.6715  
K2= 7486.2927

FACTEUR DE SURTENSION Q=1.2090

PULSATION DE RESONNANCE W0= 77.5571

STOP  
%E00

Pour des raisons techniques on n'a pas pu avoir une nette reproduction du programme. Alors on jugé utile de le reproduire ci-dessous.

```

REAL K2,KE,P(2),AO,A1,A2,Q,QE,XSI,WN,WN1,WN2,W,DQ1,DQ2,DQ
C CONCEPTION DES SYSTEMES ASSERVIS
C DE F.T.B.O  $T(p)=K/p \cdot (p+p(1)) \cdot (p+p(2))$ 
DATA KE,QE,P(1),P(2)/20.,1.3,20.,50./
XSI=0.7
WN=1.
81 WN=WN+0.1
CALL CORREC(AO,A1,A2,K2,WN)
CALL QWR(AO,A1,A2,K2,WR,Q,WN,XSI)
IF(Q-QE) 80,4,81
80 WN2=WN
WN1=WN-0.1
DQ2=Q-QE
CALL CORREC (AO,A1,A2,K2,WN1)
CALL QWR(AO,A1,A2,K2,WR,Q,WN,XSI)
DQ1=Q-QE
6 XW=(WN2-WN1)*DQ1/(DQ1-DQ2)
WN=WN1+XW
CALL CORREC (AO,A1,A2,K2,WN)
CALL QWR(AO,A1,A2,K2,WR,Q,WN,XSI)
DQ=Q-QE
IF(DQ-0.05) 3,4,5
5 WN1=WN
DQ1=DQ
GOTO 6
3 IF(DQ+0.05) 7,4,4
7 WN2=WN
DQ2=DQ
GOTO 6

```

```

4 WRITE(108,200)A1,A2,K2,Q,WR
200 FORMAT(5X,'PARAMETRES DU CORRECTEUR P.I.D.' /
A20X,'A1=',F10.4/20X,'A2=',F10.4/
B20X,'K2=',F10.4//5X,'FACTEUR DE SURTENSION Q=',
FF6.4//5X,'PULSATION DE RESONNANCE WR=',F10.4)
STOP
END

```

```

SUBROUTINE CORREC(A0,A1,A2,K2,WN)
REAL P(2),L(2),TETA(2),TETAU,U,WN,XSI,E1,R?
4KE,KEO,KO,A2,A1,K2,A0
DATA KE,QE,P(1),P(2)/20.,1.3,20.,50./
XSI=0.7
DO 30 I=1,2
30 TETA(I)=ATAN(WN *SQRT(1.-XSI**2)/P(I)-XSI*WN)
TETAU=TETA(1)+TETA(2)
U=WN**XSI+WN**SQRT(1.-XSI**2)/TAN(TETAU)
E1=WN**SQRT(1.-XSI**2)/ABS(SIN(TETAU))
DO 50 I=1,2
50 L(I)=WN**SQRT(1.-XSI**2)/ABS(SIN(TETA(I)))
R=KE**P(1)**P(2)/WN**2**L(1)**L(2)
KEO=R**WN**2**E1/U
KO=R**E1+2.**XSI**WN-U
A2=KEO**U/KO
A1=(2.**R**E1**XSI**WN+WN**2)/KO
K2=KE**P(1)**P(2)/A2
AO=1.
RETURN
END

```

40 bis

```
SUBROUTINE QWR(A0,A1,A2,K2,WR,Q,WN,XSI)
REAL P(2),A0,A1,A2,K2,WR,KE
DATA KE,QE,P(1),P(2)/20.,1.3,20.,50./
WO=SQRT(KE°P(1)°P(2)/WN°°2-(P(1)+P(2)-2.°XSI°WN)°°2/2)
Q=0.
W=WO/2.
W1=2.°WO
8 W=W°1.1
H=HW(A0,A1,A2,K2,W)
IF(W-W1) 10,10,11
10 IF(H-Q)8,9,9
9 Q=H
WR=W
GOTO 8
11 W=WR/1.1
W1=WR°1.1
12 W=W°1.01
H=HW(A0,A1,A2,K2,W)
IF(W-W1) 14,14,15
14 IF(H-Q) 12,13,13
13 Q=H
W R=W
GOTO 12
15 CONTINUE
RETURN
END
```

```

FUNCTION HW (A0,A1,A2,K2,W)
REAL A0,A1,A2,K2,W,P(2),DENO,NUME,KE
DATA KE,QE,P(1),P(2)/20.,1.3,20.,50./
NUME=K2° SQRT((A2-A0° W° 2)°° 2+(A1° W)°° 2)
DENO=SQRT((W° 4-W° 2° (P(1)° P(2)+K2)+K2° A2)°° 2+
5(A1° W° K2-(P(1)+P(2))° W° 3)°° 2)
HW=NUME/DENO
RETURN
END

```

PARAMETRE DU CORRECTEUR P.I.D.

A1= 2.2883

A2= 2.6715

K2= 7486.2927

FACTEUR DE SURTENSION Q=1.2990

PULSATION DE RESONNANCE WR= 77.5671

STOP

%EOD

## 4.2 Diagramme de Black

- Système non corrigé

$$\omega_R = 16 \text{ rd/s}$$

$$\text{Marge de phase} \approx 36^\circ$$

$$\text{Marge de gain} \approx 11 \text{ dB}$$

$$\text{Coefficient de surtension } Q = 1,74 \text{ soit } (4,8 \text{ dB})$$

- Système corrigé -

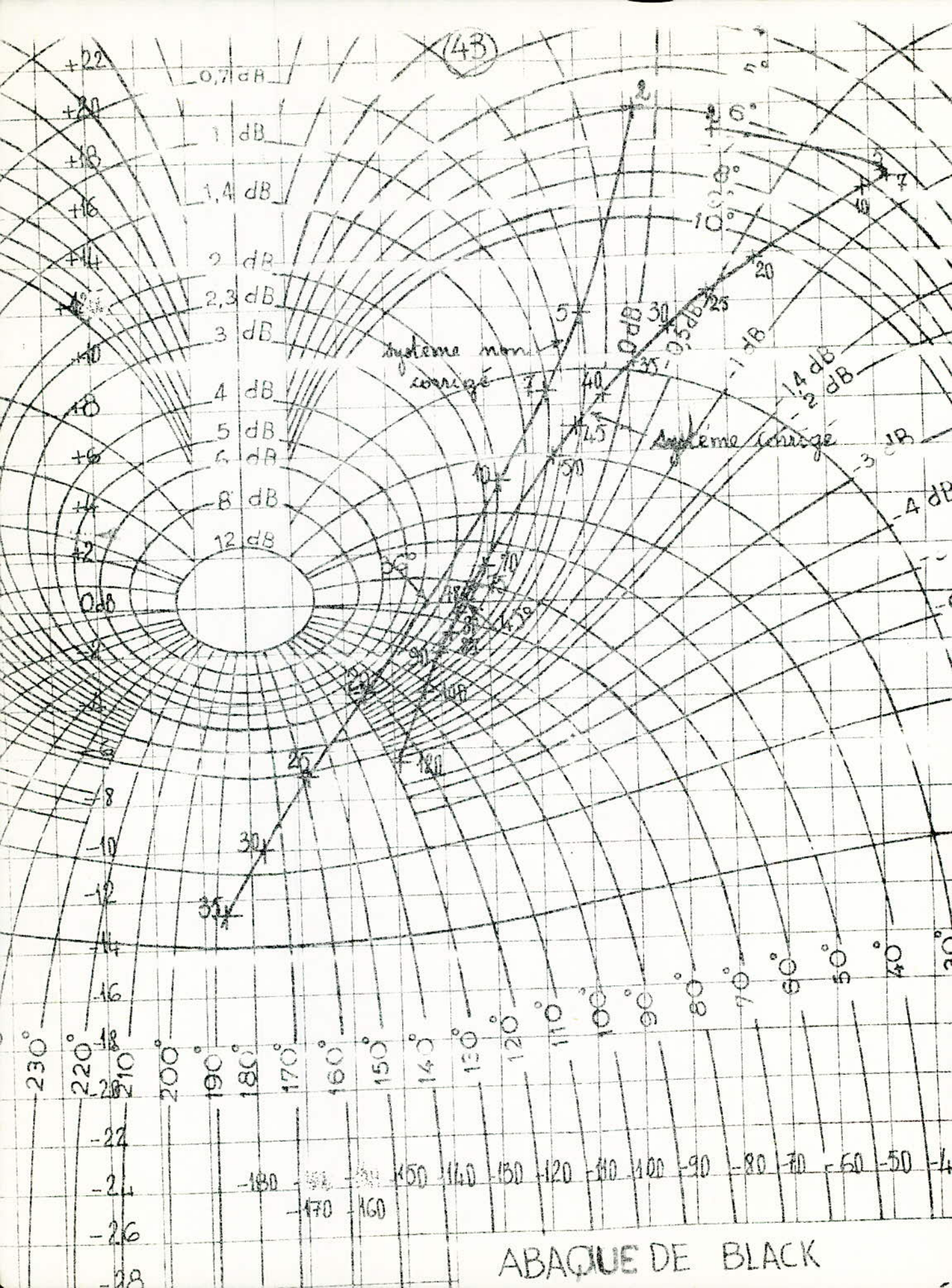
$$\omega_R = 78 \text{ rd/s}$$

$$\text{Marge de phase} \approx 45^\circ$$

$$\text{Marge de gain infinie}$$

La correction appliquée au système permet d'augmenter la fréquence de résonance en boucle fermée donc la rapidité du système et d'avoir un facteur de surtension  $Q = 1,3$  donc des performances dynamiques optimales avec un gain statique  $K_x = K_{\text{exigé}}$

(43)



ABAQUE DE BLACK

## CONCLUSION

Cette méthode permet le calcul systématique et rapide des réseaux correcteurs(P.I.D)à l'aide des calculateurs numériques.

Du point de vue théorique elle est plus performante que les méthodes de compensation classiques(méthodes graphiques....)

La détermination d'un réseau correcteur par cette méthode comme par les méthodes classiques, comporte des essais et des retouches, (dus aux différences entre le système réel et le système identifié correspondant).

Vu les approximations qu'on fait lors de l'identification d'un système à étudier, la précision de cette méthode est même exagérée



## APPENDICE

$\omega$	1	2	5	7	10	20	25	30	35	40
G dB non corr	26	20	11,75	8.5	4.9	-3,67	-7	-10	-12.7	-12.83
$\varphi$ non corr	-94	-98	-109.74	-117.26	-127.86	-156.8	-167.9	-177.27	-185.24	-192.09
G dB sys corr	24.53	18.96	17.18	16.9	16.45	13.83	12.43	11.03	9.67	8.35
$\varphi$ sys corr	-130.15	-81.81	-46.87	-46,33	-51.09	-73.37	-83.16	-91.65	-99	-105.37
$\omega$	45	50	70	75	78	80	85	90	100	120
G dB non corr	-17.45	-19.58	-26.83	-28.38	-29.28	-29.87	-31.27	-32.62	-34.14	-39.55
$\varphi$ non corr	-198	-203.2	-218.51	-221.37	-222.95	-223.96	-226.28	-228.41	-232.12	-239.49
G dB sys corr	7.1	5.87	1.55	0.60	0.04	-0.32	-1.20	-2.05	-3.65	-6.48
$\varphi$ sys corr	-110.92	-115.8	-130.38	-133.12	-134.64	-135.58	-137.83	-139.87	-143.43	-149

## B I B L I O G R A P H I E

- A.B. TURGEAN : Méthode systématique de compensation des systèmes asservis .  
Automatisme Tome XVIII Janvier 1973
- J.J DISTEFANO : Système asservis  
New York 1975 ( Serie SCHAUM)
- F de CARFORT, CFAULARD: Asservissement linéaires continus  
Paris 1971 ( Edition Dunod )
- MILSANT . F.: : Asservissement lineaire  
( Edition Eyrolles )
- J.G. GILLE , P DEGAULINE , M.PELEGRIN: Méthodes modernes d'etudes des systèmes asservis  
Paris 1960 ( Edition Dunod)

