



1 ex

DEPARTEMENT ELECTRICITE

FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

ETUDE D'UN ASSERVISSEMENT  
DE POSITION ECHANTILLONNE



Proposé Par :

Mr. ZEBROWSKI

(Maître de conférences)

Etudié Par :

N. LOUAM

M. KERMICHE

DEPARTEMENT ELECTRICITE  
FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

ETUDE D'UN ASSERVISSEMENT  
DE POSITION ECHANTILLONNE

Proposé Par :

**Mr. ZEBROWSKI**

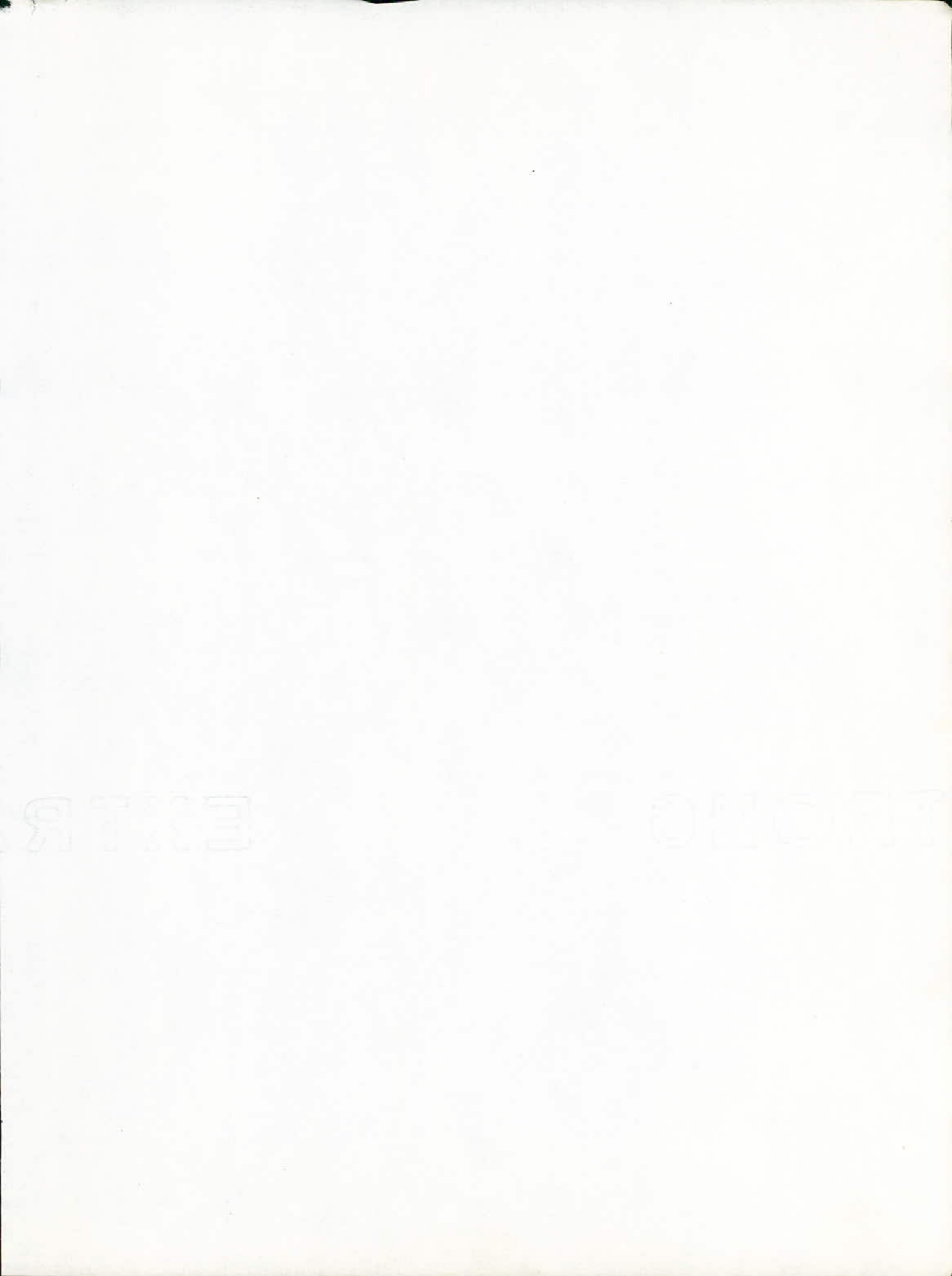
(Maître de conférences)

Etudié Par :

**N. LOUAM**

**M. KERMICHE**

*PROMOTION JUIN 1978*



*A Nos Parents*

*A Nos Cousins*

*A Nos Amis*



## 。 Remerciements 。

Que tous ceux qui ont contribué à notre formation trouvent ici, l'expression de notre profonde reconnaissance ainsi que nos plus vifs remerciements.

Nous remercions principalement, M<sup>r</sup> ZEBROWSKI, pour son aide et ses conseils tout au long de l'élaboration de ce projet.

Nos remerciements, vont aussi, à M<sup>r</sup> SINTES, pour les facilités qu'il nous a accordées, pour la réalisation de la maquette.

Que tous nos camarades de classe, trouvent ici, l'expression de notre sincère amitié.



# TABLE DES MATIERES.

	Pages
Introduction .....	1
CHAPITRE PREMIER. - Notions théoriques.....	3
1- Echantillonnage d'un signal.....	3
2- Transformée de Laplace d'un signal échantillonné.....	5
3- Spectre de fréquence d'un signal échantillonné.....	6
4- Théorème d'échantillonnage (de SHANNON).....	8
5- Reconstitution d'un signal échantillonné : Filtres.....	11
6- Transformée en $z$ .....	13
7- Transformée en $z$ modifiée.....	16
8- Relation entre la transformée en $z$ et celle en $z$ modifiée.....	18
CHAPITRE II. - Analyse et synthèse des asservissements linéaires échantillonnés.....	20
1- Fonctions de transfert des systèmes échantillonnés.....	20
2- Analyse des asservissements linéaires échantillonnés.....	36
2-1. Etude de la stabilité.....	36
2-2- Etude de la précision en régime permanent.....	44
2-3- Etude du régime transitoire.....	45
3- Synthèse des asservissements échantillonnés.....	48
3-1- Synthèse baséé sur les diagrammes de BODE.....	48
3-2- Synthèse par la méthode des pôles dominants (ZDAN).....	50
3-3- Synthèse en présence de perturbations.....	51
3-4 - Réseaux correcteurs échantillonnés.....	51

CHAPITRE III ... Application pratique à un asservissement échantillonné de position.....	55
1- Etude du moteur - réducteur - charge.....	56
2 - Analyse du système.....	60
2-1- Le système comporte un échantillonneur - bloqueur.....	60
2-2- Le système comporte uniquement un échantillonneur.....	83
CHAPITRE IV ... Réalisation pratique.....	99
1- Comparateur.....	99
2- Echantillonneur.....	99
3- Echantillonneur - bloqueur.....	100
4- Amplificateur.....	103
5 - Processus.....	103
6 - Choix des éléments.....	104
7- Remarques sur la réalisation pratique.....	105
8 - Essais.....	107
- Circuit imprimé.....	115
- Conclusion.....	116
- Annexe.....	118
- Bibliographie.....	119

*e*



## INTRODUCTION

Pour répondre aux exigences de la technologie moderne dans le domaine de l'automatisme, les systèmes de surveillance et de navigation, tels que le radar ou le sonar; les unités industrielles, comme par exemple, les laminaires, les centrales nucléaires ou thermiques; les unités de production chimique ou pétrolière; etc...; ont nécessité un contrôle judicieux et permanent du fonctionnement de leurs sous-systèmes et de leurs organes fonctionnels.

Un contrôle précis et rapide à la fois, n'a pu être obtenu qu'avec l'introduction d'ordinateurs et de calculateurs numériques dans les conduites de processus, en raison de leur rendement élevé, et où ils peuvent exécuter les calculs qui leurs sont demandés en un temps très petit par rapport à la constante de temps prépondérante de la chaîne à automatiser, c'est-à-dire travailler en un temps réel.

Par ailleurs, ces calculateurs numériques ne peuvent traiter de façon continue l'information analogique qu'après certaines opérations effectuées au préalable sur le signal; à savoir:

- Échantillonnage - Multiplexage - Quantification - Codage -

D'autre part, le phénomène d'échantillonnage est sur le plan théorique la caractéristique la plus importante de l'insertion des calculateurs dans la commande.

L'introduction de l'échantillonnage dans les boucles d'asservissement a nécessité l'utilisation de nouvelles méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes commandés par des ordinateurs.

Dans notre cas, nous en aborderons l'étude en se limitant aux systèmes échantillonnés linéaires. Pour ces systèmes, soumis à l'action des signaux intermittents, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour analyser le fonctionnement ou effectuer la synthèse à partir d'un cahier de charges :

- Méthode des transformées en  $z$  et en  $z$  modifiée qui est la transposition des méthodes utilisées pour les systèmes continus.

- Méthode des matrices temporelles.

- Méthode des équations d'état qui présentent un caractère très général et s'accommodent d'échantillonnages divers : à période constante ou variable, à échantillonneurs synchrones ou asynchrones ... etc.

Notre étude portera sur l'analyse et la synthèse d'un système asservi linéaire échantillonné de position par la méthode des transformées en  $z$ .

Par ailleurs, nous informons le lecteur que l'exposé rigoureux de la méthode repose sur la théorie des distributions. Pour faciliter la compréhension de cette méthode, nous présentons tout d'abord dans le premier chapitre des éléments mathématiques de base de la théorie des systèmes échantillonnés. Dans le second chapitre, nous traitons l'analyse et la synthèse des systèmes linéaires échantillonnés par la méthode des transformées

en  $z$ . Dans la troisième partie, nous abordons un cas pratique d'asservissement de position, dont le processus se compose d'un moteur, d'un réducteur et d'une charge.

Nous terminons notre étude par une réalisation pratique simulée.



# CHAPITRE I

## NOTIONS THÉORIQUES

Les systèmes échantillonnés ou pulsés se distinguent des systèmes à action permanente ou continue par le contenu informationnel du signal d'entrée qui agit sur le système, et modifie sa grandeur de sortie au rythme d'une fréquence constante  $1/T$  appelée fréquence d'échantillonnage ou fréquence du train d'impulsions.

### 1. Echantillonnage d'un signal

1.1. Définition: L'échantillonnage d'une fonction donnée du temps  $f(t)$  consiste à remplacer cette fonction par la suite discontinue de ses valeurs  $f(nT)$  aux instants respectifs d'échantillonnage  $t = nT$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). L'information recueillie est donc constituée par la suite des valeurs  $f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots$ . Mathématiquement, cela peut se traduire comme une modulation d'un train d'impulsions de Dirac  $\delta_T(t)$  par le signal  $f(t)$  qu'on note :

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) \quad (1)$$

où  $f^*(t)$  est la fonction échantillonnée ;  $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

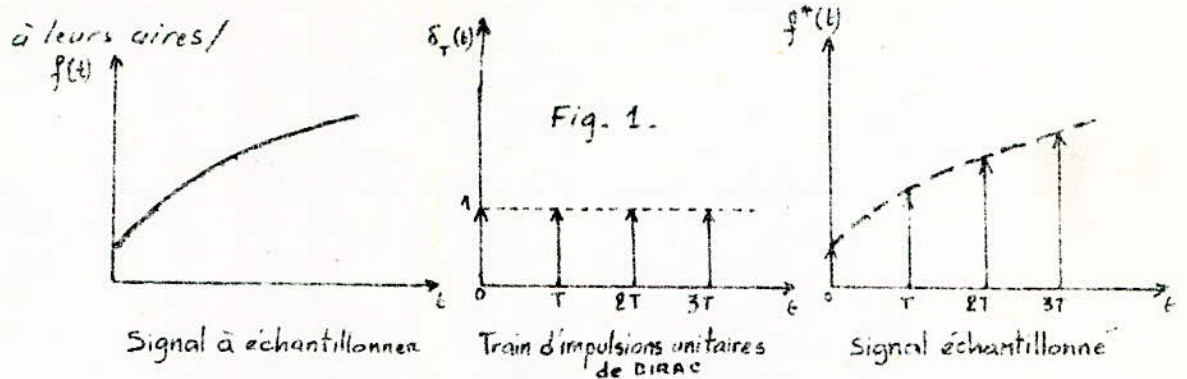
L'impulsion unitaire de Dirac est définie comme suit:  $\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t=0 \\ 0, & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$

1.2. Différents types d'échantillonnage: Il existe plusieurs types d'échantillonnage parmi lesquels, nous retiendrons :

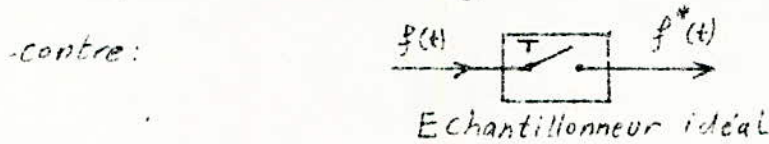
#### 1.2.1. Echantillonnage idéal (ou instantané). (Fig 1)

Dans ce cas, la largeur de l'impulsion d'échantillonnage est nulle (impulsion de Dirac). Les valeurs  $f(nT)$  sont représentées par des impulsions d'aires respectivement égales à  $f(nT)$  aux instants  $t = nT$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Nous représen-

-tons graphiquement ces impulsions par des flèches de longueur proportionnelles

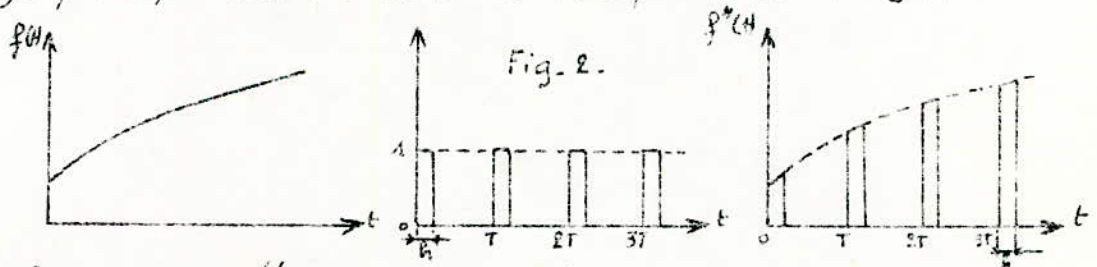


L'opération d'échantillonnage idéal est schématisée par le diagramme ci-

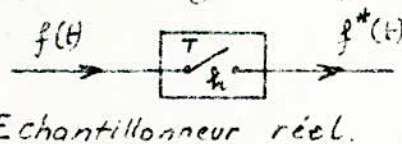


1.2.2. Echantillonnage non instantané (ou réel) : La durée  $h$  d'échantillon-

-nage qui se présente à l'instant  $nT$  n'est pas nulle. (Fig 2)



On symbolise l'échantillonnage réel par le diagramme suivant :



Le train d'impulsions peut être de période constante (Echantillonnage classique) ou variable. Dans toute la suite, nous ne considérons que l'échantillonnage classique.

Remarque : Les informations discrètes peuvent revêtir de multiples formes, par exemple, les échantillons peuvent être modulés en amplitude, en durée ou en position. Cependant, ce n'est que dans le cas d'échantillons modulés en amplitude dont l'amplitude et l'aire sont proportionnelles aux va-



-leurs discrètes, que nous avons à faire à un système linéaire. Les méthodes d'échantillonnage par modulation de durée ou de position ont pour effet de transformer un système linéaire en un système éminemment non linéaire.

## 2. Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

On note que la transformée de Laplace de  $\delta(t)$  est  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , et qu'une impulsion d'aire  $f(nT)$  à l'instant  $nT$  peut être considérée comme une impulsion d'aire  $f(nT)$  à  $t=0$  retardée de  $t = nT$ ; on peut donc la représenter par :

$f(nT) \cdot \delta(t - nT)$ . D'après le théorème du retard, on a :

$$\mathcal{L}\{f(nT) \cdot \delta(t - nT)\} = f(nT) \mathcal{L}\{\delta(t - nT)\} = f(nT) e^{-nT p}$$

où  $f^*(t) = f(t) \delta_T(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + f(2T)\delta(t-2T) + \dots + f(nT)\delta(t-nT) + \dots$

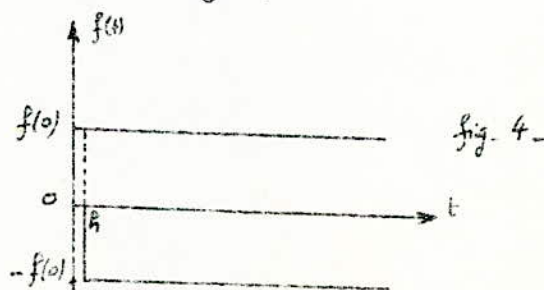
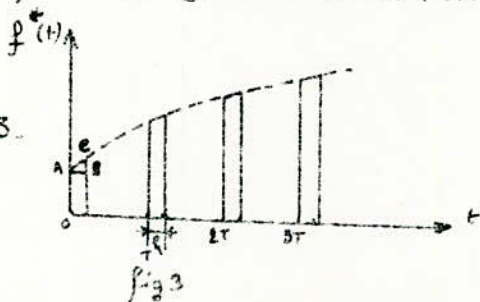
Soit 
$$F^*(p) = \mathcal{L}\{f^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nT p} \quad (2).$$

$F^*(p)$  est la transformée de Laplace échantillonnée (ou pulsée) de la fonction continue  $f(t)$  à la période d'échantillonnage  $T$ .

L'expression (2) suppose que les échantillons sont assimilés à des impulsions de DIRAC (durée d'échantillonnage nulle)

On notera que  $f^*(t)$  et  $F^*(p)$  ne dépendent que de la valeur de la fonction  $f(t)$  aux instants d'échantillonnage et non de la valeur de cette fonction entre les instants d'échantillonnage.

Si la durée  $h$  d'échantillonnage est petite devant  $T$  sans être infiniment petite, il y a lieu d'en tenir compte. (Fig 3).



$h$  est constante, si  $h$  est petite, on commet une erreur  $\frac{1}{2}h^2$

En remplaçant le premier échantillon par la somme de deux échelons (Fig 4) - dont la transformée de Laplace est :

$$f(0) \cdot \frac{1}{p} - f(0) \cdot \frac{1}{p} e^{-hp} = \frac{f(0)}{p} [1 - e^{-hp}] = \frac{f(0)}{p} [1 - (1 - hp + \frac{h^2 p^2}{2!} - \dots)] \approx hf(0)$$

Le deuxième échantillon donnera :  $h f(T) e^{-Tp}$

Le  $(n+1)^{\text{ième}}$  échantillon donnera :  $h f(nT) e^{-nTp}$

Si on désigne par  $f_h^*(t)$  la nouvelle fonction échantillonnée, et  $F_h^*(p)$  sa transformée de Laplace, on aura :

$$F_h^*(p) = \mathcal{L}[f_h^*(t)] \approx h \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTp} = h \mathcal{L}[f^*(t)]$$

Finalement :

$$\boxed{F_h^*(p) \approx h F^*(p)} \quad (3)$$

$h/T \rightarrow 0$   
 $h \neq 0$

Remarque : On peut aussi obtenir la transformée de Laplace de  $f^*(t)$  en appliquant le théorème de convolution :

$$F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\alpha) \delta_T(p-\alpha) d\alpha \quad \text{où } \alpha = c + jd$$

et avec  $\delta_T(p) = \mathcal{L}[\delta_T(t)] = 1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-Tp}}$  pour  $|e^{-Tp}| < 1$

Le calcul de cette intégrale par la méthode des Résidus donne :

$$\boxed{F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(p + jk \frac{2\pi}{T})} \quad (4)$$

Cette relation n'est valable que pour  $f(t) = 0$  lorsque  $t < 0$  et  $f(0^+) = 0$

sinon, on prendra :  $F^*(p) = \frac{1}{2} f(0^+) + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(p + jk \frac{2\pi}{T})$

3- Spectre de fréquence d'un signal échantillonné : Nous allons montrer ici que l'étude du spectre de fréquence d'un signal échantillonné permet de définir une période d'échantillonnage théorique ou pratique suffi-

-sante pour pouvoir reconstituer un tel signal.

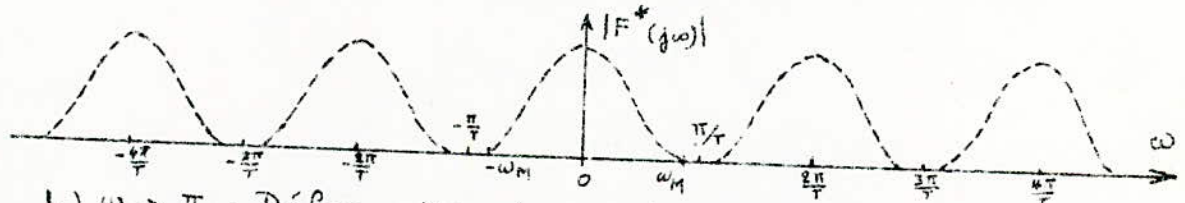
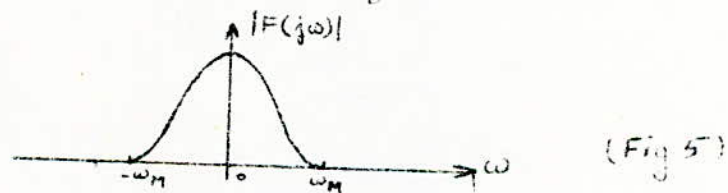
Il résulte de l'expression (4) que les pôles et zéros de la fonction  $F^*(p)$  sont obtenus à partir de ceux de  $F(p)$  par une infinité de translations de valeur  $\frac{2\pi}{T}$  dans le plan  $p$  parallèlement à l'axe imaginaire.

La fonction  $F(p)$  étant elle-même symétrique par rapport à l'axe réel, il suffit donc de connaître, pour déterminer  $F^*(p)$ , ses pôles et ses zéros situés dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{T}]$ . Le spectre de fréquence  $F^*(j\omega)$  de  $f^*(t)$  s'étale jusqu'à l'infini (Echantillonnage classique), il est obtenu aussi en faisant subir des translations de  $2\pi/T$  au spectre  $F(j\omega)$  et en effectuant la somme vectorielle. Deux cas peuvent se présenter lors de la reconstitution:

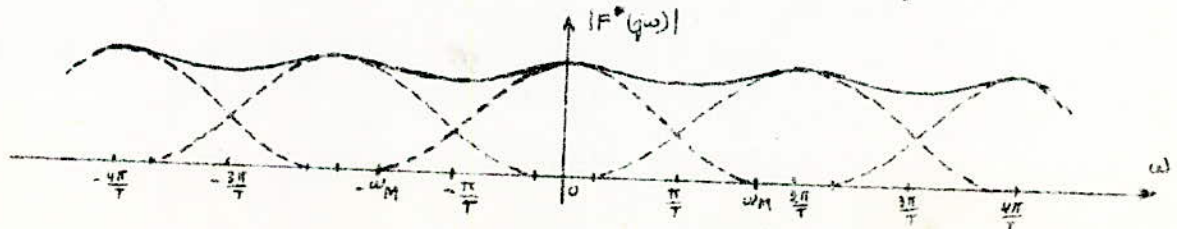
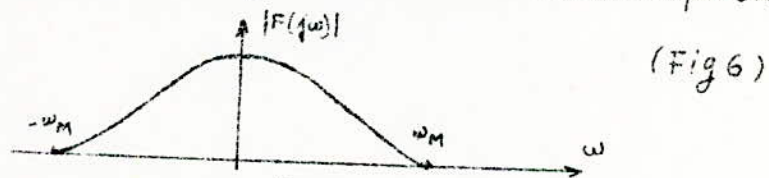
a)  $\omega_M < \frac{\pi}{T}$  : la reconstitution du signal est complète

$\omega_M$  est la pulsation maximale de  $F(j\omega)$

Ce cas peut être schématisé par la Fig 5 -



b)  $\omega_M > \frac{\pi}{T}$  : Déformation du spectre - reconstitution impossible /





Ces deux figures montrent que pour pouvoir reconstituer le signal incident à partir d'une suite d'impulsions distantes de  $T$  secondes, c'est à dire pour pouvoir reconstituer  $F(j\omega)$  à partir de  $F^*(j\omega)$ , il est impératif que  $\omega_m$  soit inférieur à  $(\pi/T)$ . Ceci constitue le théorème d'échantillonnage (de SHANNON) très important sur le plan théorique.

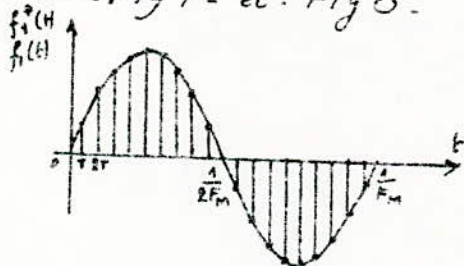
4. Théorème d'échantillonnage : On note que la démonstration du théorème a abouti à la relation suivante :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2F_M}\right) \cdot \frac{\sin 2\pi F_M \left(t - \frac{n}{2F_M}\right)}{2\pi F_M \left(t - \frac{n}{2F_M}\right)} \quad (5)$$

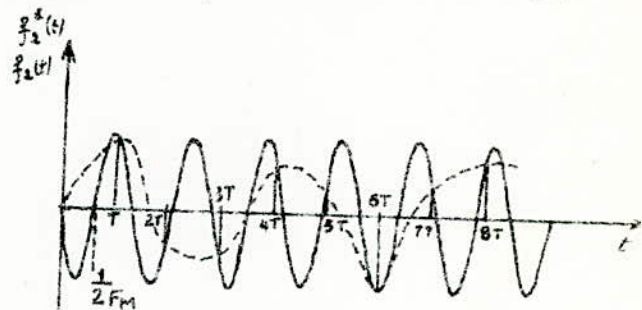
où  $x(t)$  est le signal à échantillonner ;  $F_M$  = la fréquence maximale du spectre de fréquence  $X(j\omega)$  de  $x(t)$ .

Il en résulte de la relation (5) qu'un signal  $x(t)$  dont les composantes spectrales ne dépassent pas la fréquence  $F_M$  est parfaitement déterminé par la connaissance des valeurs prises par ce signal en des points d'échantillonnage régulièrement répartis sur l'axe des temps avec l'intervalle  $\frac{1}{2F_M}$ , ceci constitue l'énoncé du théorème d'échantillonnage qu'on peut schématiser aussi

par les - Fig 7 - et - Fig 8 -



- Fig 7 :  $T < \frac{1}{2F_M}$  : Théorème respecté



- Fig 8 :  $T > \frac{1}{2F_M}$  : Théorème non respecté

Toutefois, le théorème de SHANNON suppose que le signal incident a un spectre limité en fréquence, ce qui n'est pas le cas dans la plupart des

signaux que l'on rencontre pratiquement.

En effet, un échantillonnage réel engendre toujours une dégradation des propriétés dynamiques du système et un retard dans la transmission de l'information; cela est dû à l'emploi de bloqueur (généralement bloqueur d'ordre zéro) et au choix de la fréquence d'échantillonnage.

A titre de comparaison entre les différents types d'échantillonnage, nous donnons les Fig 9 - 10 - 11. qui mettent en évidence, les déformations et les limitations des spectres de fréquence apportées par les échantillonnages réel et bloqué. Dans le cas de l'échantillonnage réel (Fig 10), on démontre que la transformée de Fourier  $F^*(f)$  de  $f^*(t)$  est.

$$F^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi h}{T}}{\frac{n\pi h}{T}} \cdot F(f - nF_e) \quad (6)$$

avec  $f$  = la fréquence, à ne pas confondre avec  $f(t)$  = signal,

Ainsi, le paramètre  $h$  a modifié le spectre en le limitant à  $\frac{1}{h}$ , mais il n'a pas changé sa forme. Il n'y a pas donc de distorsion de la partie centrale du spectre. Quant à l'échantillonnage bloqué (Fig 11) où l'impulsion a une durée  $h$  et une amplitude constante. La formule donnant le spectre de  $f^*(t)$  est :

$$F^*(f) = \frac{h}{T} \cdot \frac{\sin \pi f h}{\pi f h} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(f - nF_e) \quad (7)$$

Dans ce cas, en plus de la limitation du spectre apportée par le paramètre  $h$ , on a aussi une distorsion due au phénomène de blocage.

En pratique, on caractérise souvent un système par :

1°- La pulsation de coupure  $\omega_c$ , définie comme la pulsation pour laquelle le



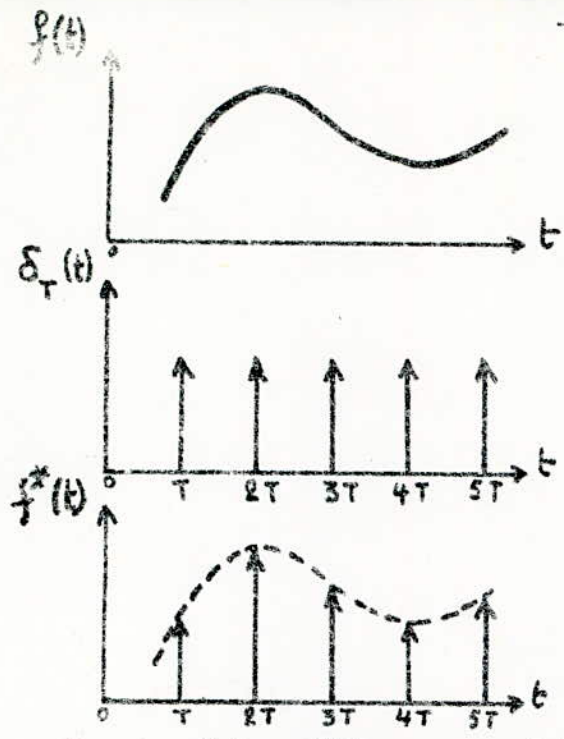


Fig. 9. échantillonnage idéal

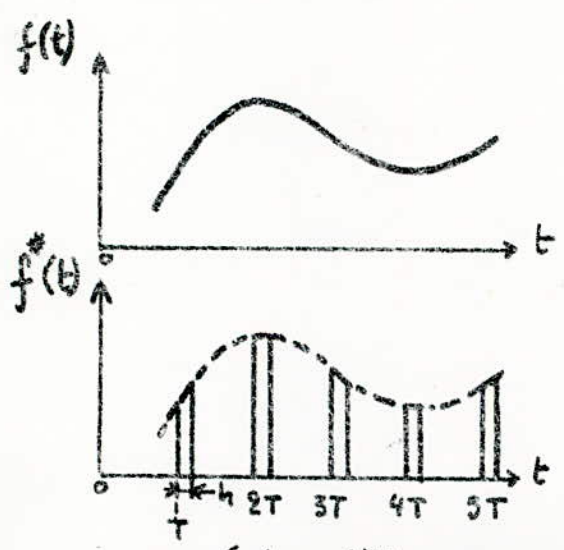
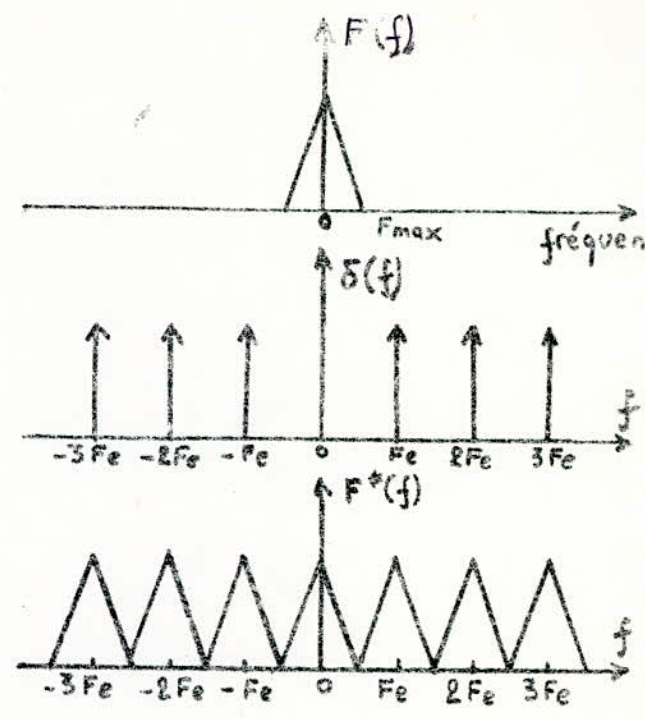


Fig. 10. échantillonnage réel

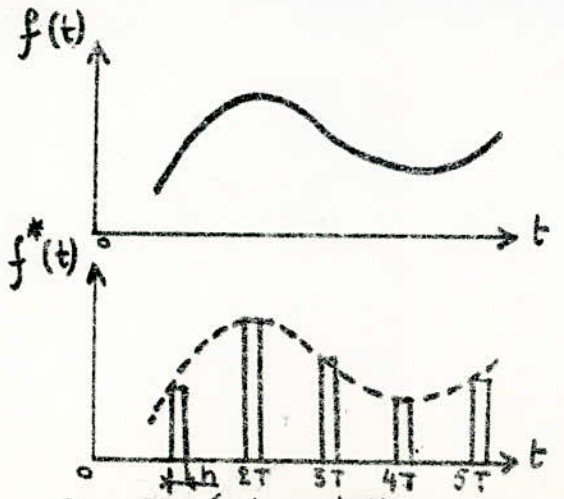
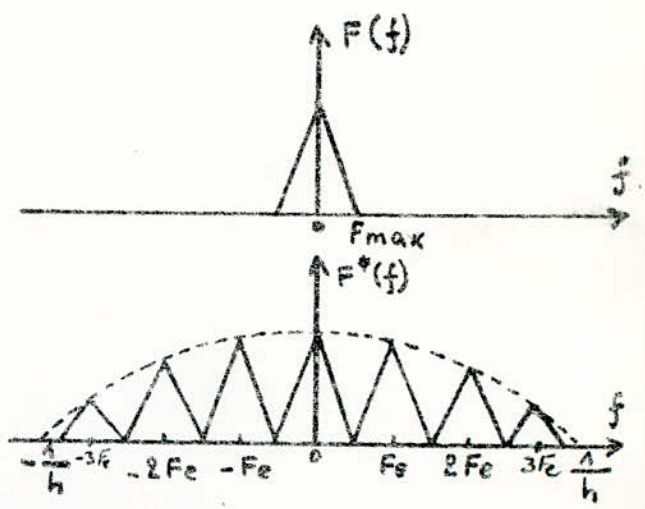
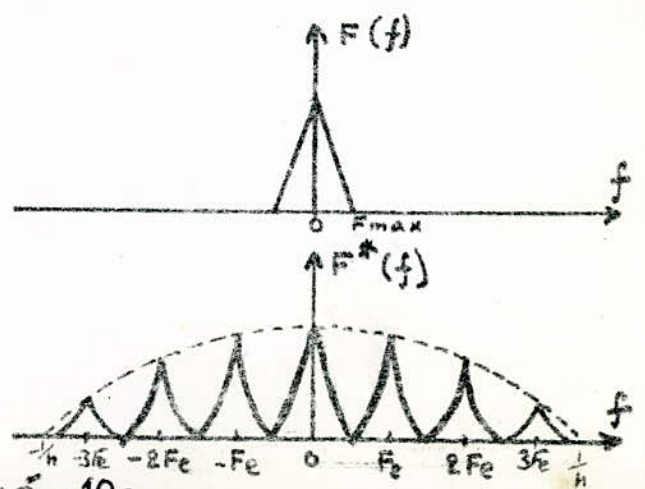
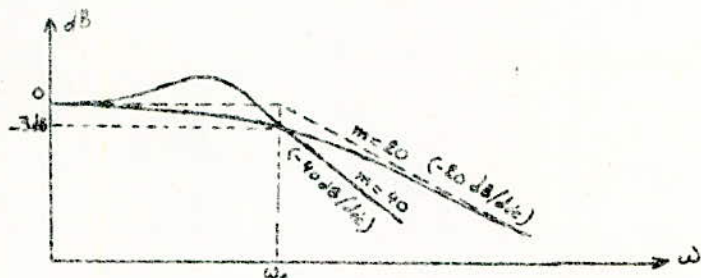


Fig. 11. échantillonnage bloqué



module a diminué de  $n$  dB par rapport à la valeur statique ( $\omega \rightarrow 0$ ). En général on prend  $n = 3$ .

2° - La rapidité de décroissance de sa courbe d'amplitude (-m dB/décade). Dans ce cas, on peut déterminer en fonction de  $m$  la valeur de la pulsation d'échantillonnage  $\omega_T = 2\pi/T$ , qui conduit à une certaine "erreur d'échantillonnage" définie comme le rapport de la valeur quadratique moyenne de l'erreur apparaissant sur le signal restitué à la valeur quadratique de celui-ci. (Fig 12).



- Fig 12 -

### 5 - Reconstitution d'un signal échantillonné : Filtres.

Il est en général nécessaire de transformer le signal échantillonné en un signal continu acceptable technologiquement par les actionneurs. Cette opération qui n'est autre que la reconstitution du signal continu à partir de ses échantillons, est réalisée à l'aide de filtres, parmi lesquels nous en étudierons que ceux qui sont physiquement réalisables : Les bloqueurs.

Ces éléments reçoivent à l'entrée, des impulsions  $f^*(t)$  constituant les échantillons successifs, et émettent à la sortie un signal continu  $s(t)$  différent de  $f(t)$  mais que l'on souhaiterait aussi proche que possible de  $f(t)$ . Posons  $t = nT + \tau$ ,  $0 < \tau < T$

Développons en série de Taylor  $f(t)$  au voisinage de  $t = nT$  :

$$f(nT + \tau) = f(nT) + \tau f'(nT) + \frac{\tau^2}{2!} f''(nT) + \dots$$

Approximons les dérivées successives par des différences finies :



$$f'(nT) \approx \frac{1}{T} [f(nT) - f((n-1)T)]$$

$$f''(nT) \approx \frac{1}{T^2} [f(nT) - 2f[(n-1)T] + f[(n-2)T]]$$

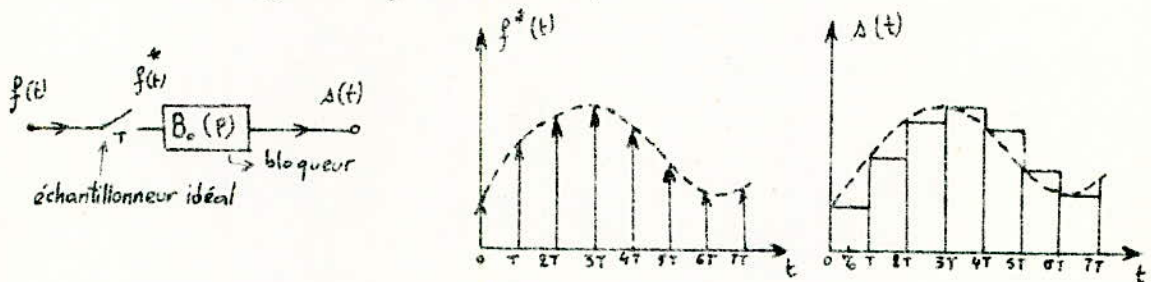
Il est évident que la reconstitution est d'autant meilleure que le nombre de termes dans le développement est grand.

$$\text{Soit : } f(nT + \tau) = f(nT) + \frac{\tau}{T} [f(nT) - f[(n-1)T]] + \frac{\tau^2}{2! T^2} [f(nT) - 2f[(n-1)T] + f[(n-2)T]] + \dots \quad (8)$$

Pour des raisons technologiques (réalisation complexe), nous ne considérons ~~pas~~ en pratique que les cas suivants :

a) Bloqueur  $B_0$  d'ordre zéro (ou élément de mise en mémoire)

Il est caractérisé par le fait que sa sortie entre les instants  $nT$  et  $(n+1)T$  est constante et égale à  $f(nT)$  (- Fig 13-).



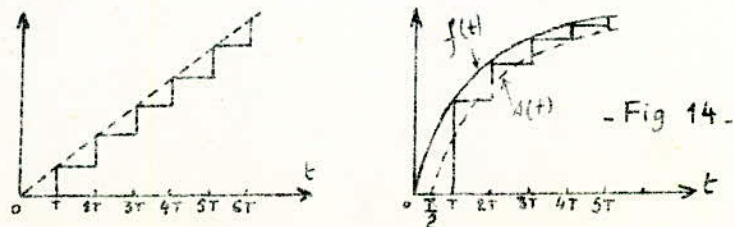
$$s(t) = f(nT + \tau) = f(nT)$$

- Fig 13 -

La fonction de transfert  $B_0(p)$  du bloqueur  $B_0$  est donc la transformée de Laplace d'une impulsion de largeur  $T$ .

$$\text{d'où } B_0(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-Tp}) \quad (9)$$

Le signal  $s(t)$  correspondant à l'échantillonnage de  $f(t) = u(t)$  (échelon) est  $s(t) = u(t)$ . Lorsque  $f(t) = t \cdot u(t)$  (rampe),  $s(t)$  est donné par la fig 14.



- Fig 14 -



On constate qu'en moyenne le signal  $s(t)$  obtenu a à peu près le même effet que  $f(t)$  retardé de  $T/2$ ; on mettra à profit cette remarque dans une des méthodes de synthèse des asservissements échantillonnés.

b) Bloqueur d'ordre 1 : Il permet l'extrapolation linéaire entre  $nt$  et  $(n+1)T$  à partir de  $f(nT)$  et  $f[(n-1)T]$  - (Fig 15) -



Pour  $nT < t < (n+1)T$ ; de l'expression (8)  $\Rightarrow s(t)$  est de la forme :

$$s(t) = f(nT) + \frac{t}{T} [f(nT) - f[(n-1)T]] \text{ avec } \tau = t - nT$$

5-1. Caractéristiques fréquentielles : la transmittance du bloqueur  $B_0$  d'ordre zéro est :  $B_0(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-Tp})$

En posant  $p = j\omega$ , on aura :  $B_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T e^{-j\omega T/2} \cdot \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j(\omega T/2)}$

$$B_0(j\omega) = T e^{-j\omega T/2} \cdot \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}$$

De ceci, on tire le module et l'argument de  $B_0(j\omega)$ .

$$|B_0(j\omega)| = T \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}, \quad \text{Arg } B_0(j\omega) = -T\omega/2$$

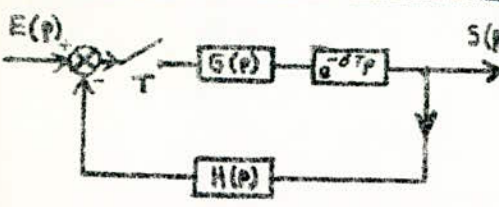
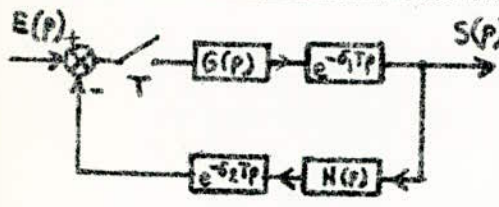
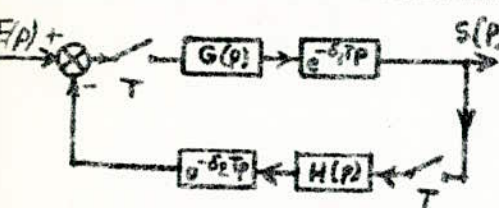
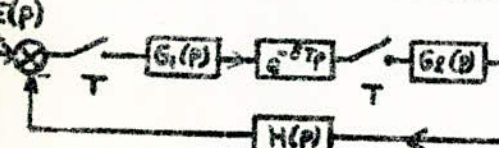
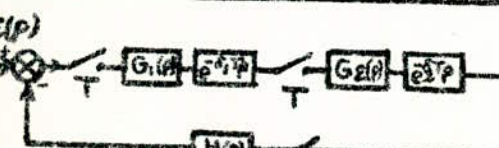
6. Transformée en z : Nous avons montré au paragraphe (2), que la transformée de Laplace  $F^*(p)$  d'un signal  $f(t)$  échantillonné à la période  $T$  est :  $F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTp}$

Si on pose  $z = e^{Tp}$ , on obtient :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (10)$$

On dira que  $F(z)$  est la transformée en z de  $f^*(t)$ . Dans cette expression,  $F(z)$  apparaît comme une série de puissances croissantes de  $z^{-1}$  et où les coefficients sont les valeurs de la fonction  $f(t)$  aux instants d'échantillonnage.

# Tableau - II -

structure de base	Transmittance en $S(z, m) / E(z)$ <i>z</i> modifiée	Transmittance en $z$ $S(z) / E(z)$
	$\frac{z^{-x} G(z, m')_{m' = m - \delta + x}}{1 + \overline{GH}(z, m)_{m_0 = 1 - \delta}}$ <p> <math>x = +1</math> si <math>0 &lt; m &lt; \delta</math>  <math>x = 0</math> si <math>\delta &lt; m &lt; 1</math> </p>	$\frac{G(z, m)_{m = 1 - \delta}}{1 + \overline{GH}(z, m)_{m = 1 - \delta}}$
	$\frac{z^{-x} G(z, m')_{m' = m - \delta_1 + x}}{1 + \overline{GH}(z, m)_{m_0 = 1 - \delta_1 - \delta_2}}$ <p> <math>x = 1</math> si <math>0 &lt; m &lt; \delta_1</math>  <math>x = 0</math> si <math>\delta_1 &lt; m &lt; 1</math> </p>	$\frac{G(z, m)_{m = 1 - \delta_1}}{1 + \overline{GH}(z, m)_{m = 1 - \delta_1 - \delta_2}}$
	$\frac{z^{-x} G(z, m')_{m' = m - \delta_1 + x}}{1 + G(z, m_1) \cdot H(z, m_2)_{m_1 = 1 - \delta_1, m_2 = 1 - \delta_2}}$ <p> <math>x = 1</math> si <math>0 &lt; m &lt; \delta_1</math>  <math>x = 0</math> si <math>\delta_1 &lt; m &lt; 1</math> </p>	$\frac{G(z, m)_{m = 1 - \delta_1}}{1 + G(z, m) \cdot H(z, m)_{m = 1 - \delta_1, m = 1 - \delta_2}}$
	$\frac{G_1(z, m_1)_{m_1 = 1 - \delta} \cdot G_2(z, m)}{1 + \overline{G_2 H}(z) \cdot G_1(z, m)_{m_0 = 1 - \delta}}$	$\frac{G_1(z, m)_{m = 1 - \delta} \cdot G_2(z)}{1 + \overline{G_2 H}(z) \cdot G_1(z, m)_{m = 1 - \delta}}$
	$\frac{z^{-x} G_2(z, m')_{m' = m - \delta_2 + x} \cdot G_1(z, m_1)_{m_1 = 1 - \delta_1}}{1 + G_1(z, m_1) \cdot \overline{HG_2}(z, m_2)_{m_2 = 1 - \delta_2}}$ <p> <math>x = 1</math> si <math>0 &lt; m &lt; \delta_2</math>  <math>x = 0</math> si <math>\delta_2 &lt; m &lt; 1</math> </p>	$\frac{G_2(z, m)_{m = 1 - \delta_2} \cdot G_1(z, m)_{m = 1 - \delta_1}}{1 + G_1(z, m) \cdot \overline{HG_2}(z, m)_{m = 1 - \delta_1, m = 1 - \delta_2}}$



Il faut remarquer dans ceci, que tout signal continu possédant une transformée de Laplace, possède une transformée en  $z$ ; mais des signaux différents possédant des transformées de Laplace différentes auront la même transformée en  $z$  si les valeurs de ces signaux sont identiques à des instants discrets  $t = nT$ . Par contre, au même signal continu correspondent plusieurs transformées en  $z$  suivant la période  $T$  choisie. Leurs formes seront identiques, mais les valeurs des coefficients qui y figurent seront différentes pour des valeurs différentes de  $T$ .

6-1. Propriétés de la transformée en  $z$ : Parmi ses propriétés nombreuses, nous retiendrons sans démonstration celles-ci:

a) Linéarité: On pose  $F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\}$

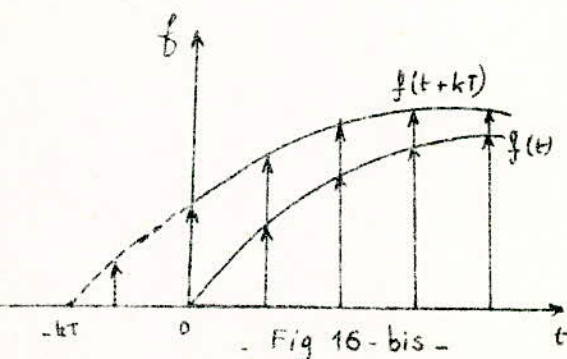
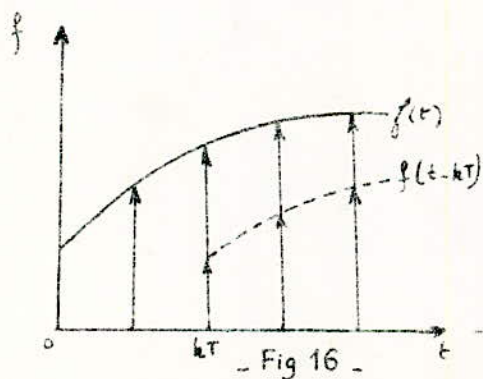
- Additivité:  $\mathcal{Z}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{Z}\{f_1(t)\} + \mathcal{Z}\{f_2(t)\}$ ;  $\forall f_1(t), f_2(t)$  nulles pour  $t < 0$

- Homogénéité:  $\mathcal{Z}\{k f(t)\} = k \mathcal{Z}\{f(t)\}$ ;  $\forall k$  constante et  $\forall f(t)$ .

b) Translation temporelle:

- Cas du retard:  $\mathcal{Z}\{f(t - kT)\} = z^{-k} \mathcal{Z}\{f(t)\}$  - Fig 16 -

- Cas de l'avance:  $\mathcal{Z}\{f(t + kT)\} = z^k \mathcal{Z}\{f(t)\} - z^k f(0) - z^{k-1} f(T) - \dots - z f[(k-1)T]$  - Fig 16-bis -



c) Translation complexe:

$$\mathcal{Z}\{F(p+a)\} = \mathcal{Z}\{e^{-at} f(t)\} = F(z e^{aT})$$

$$\mathcal{L}[F(p-a)] = \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(z e^{-aT})$$

Cas particulier : Si  $b = e^{-a} \Rightarrow \mathcal{L}[b^t f(t)] = F(z/b^T)$

d/ Multiplication par  $t^k$  :

$$\mathcal{L}[t^k f(t)] = -Tz \frac{d}{dz} [F_1(z)] \text{ avec } F_1(z) = \mathcal{L}[t^{k-1} f(t)]$$

e/ Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} z F(z)$$

f/ Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) F(z) \text{ si cette limite existe.}$$

g/ Théorème de La sommation :  $\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^n f(kT)\right] = \frac{z}{z-1} \cdot F(z)$

h/ Dérivation et intégration par rapport à un paramètre :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT, a)\right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_{a_0}^{a_1} f(nT, a) da\right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, a) da$$

i/ Théorème de la convolution discrète :

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) \cdot f_2[(n-k)T]\right]$$

6-2 - Inversion de la transformée en  $z$  : On note que la transformée en  $z$  ne contient pas toutes les informations relatives à la fonction  $f(t)$  mais seulement celles qui correspondent aux valeurs  $f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots$ . Le problème de l'inversion de la transformée en  $z$  consiste donc à retrouver ces valeurs  $f(nT)$  à partir de l'expression  $F(z)$ .

Plusieurs méthodes sont possibles, parmi lesquelles nous citerons :

6-2-1 - Méthode des résidus : On montre que :



$f(nT) = \sum_{p_i} [\text{Résidus de } z^{n-1} F(z)]_{z=p_i}$  avec  $p_i$  = pôles de  $F(z)$ .

6-2-2. Méthode de la division : On cherche à exprimer  $F(z)$

sous la forme :  $F(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} + \dots$ , qu'on compare avec :

$$F(z) = f(0) + f(T) \cdot z^{-1} + f(2T) \cdot z^{-2} + \dots ; \text{ puis on identifie :}$$

$$a = f(0), \quad b = f(T), \quad c = f(2T), \dots$$

Cette méthode s'applique lorsque  $F(z)$  se présente sous la forme d'une fraction rationnelle :  $N(z) / D(z)$ .

6-2-3. Méthode de la décomposition en éléments simples :

Cette méthode consiste à transformer une forme telle que :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{Az^k + Bz^{k-1} + \dots}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)\dots}, \text{ en une forme plus simple :}$$

$F(z) = \sum_i \frac{A_i z}{z-\lambda_i}$  en supposant que  $D(z)$  n'a pas de racines multiples; et où l'original en "t" de chacun de ces termes <sup>est</sup> dans le tableau donné en annexe.

7 - Transformée en z modifiée : (ou transformée en z avec retard)

la transformée en z modifiée tient compte seulement des valeurs intermédiaires entre les instants d'échantillonnage  $nT$  et  $(n+1)T$  contrairement à la transformée en z. Si l'on veut connaître théoriquement la valeur de  $f(t)$  à l'instant  $t = nT - \lambda T$  avec  $0 < \lambda < 1$ , il suffit de considérer un échantillonneur fictif précédé d'un retard  $\lambda T$  - Fig 17-

Fig 17.

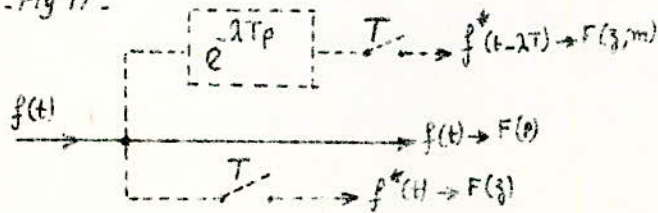
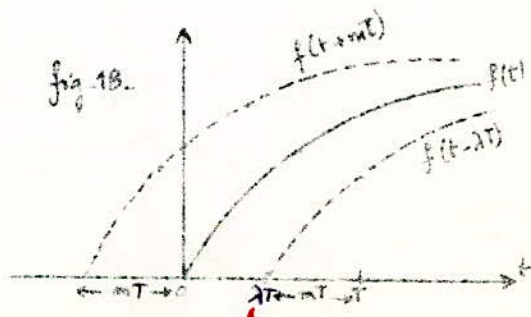


Fig 18.





En posant  $m = (1-\lambda) < 1$  (Fig 18)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-\lambda T) \cdot \delta_T(t)] &= \mathcal{L}[f(t-T+mT) \cdot \delta_T(t)] = e^{-pT} \mathcal{L}[f(t+mT) \cdot \delta_T(t)] \\ &= e^{-pT} \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+m)T] \cdot e^{-nTp} \quad \text{or } z = e^{Tp} \end{aligned}$$

Cette expression dépend de  $z$  et de  $m$ , nous l'écrivons sous la forme:

$$F(z, m) = \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+m)T] z^{-(n+1)} \quad (11)$$

### 7-1. Propriétés de la transformée en $z$ modifiée:

On représente la transformée en  $z$  modifiée de  $f(t)$  par le symbole

$$\mathcal{Z}_m[f(t)] = F(z, m).$$

Parmi ses propriétés, nous citerons sans démonstration celles-ci:

#### 7-2-1. Linéarité:

$$\mathcal{Z}_m[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 F_1(z, m) + k_2 F_2(z, m)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes.

#### 7-2-2. Théorème de la valeur initiale:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} f[(n+m)T] = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} z \cdot F(z, m)$$

#### 7-2-3. Théorème de la valeur finale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, m)T = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot F(z, m)$$

#### 7-2-4. Translation complexe:

$$\mathcal{Z}_m[F(p+a)] = e^{-aT(m-1)} \cdot F(ze^{aT}, m)$$

$$\mathcal{Z}_m[F(p-a)] = e^{aT(m-1)} \cdot F(ze^{-aT}, m)$$

avec  $F(ze^{aT}, m) = (ze^{-aT})^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+m)T] [ze^{-aT}]^{-n}$

#### 7-2-5. Multiplication par $t^k$ :

$$\mathcal{Z}_m(t^k f(t)) = T \left\{ (m-1) \mathcal{Z}_m[t^{k-1} f(t)] - z \frac{\partial}{\partial z} [\mathcal{Z}_m[t^{k-1} f(t)]] \right\}$$

7-2-6. Différentiation et intégration par rapport à un paramètre

$$\mathcal{Z}_m \left[ \frac{\partial}{\partial a} f[(n-1+m)T, a] \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, m, a)$$

$$\mathcal{Z}_m \left[ \int_{a_0}^{a_1} f[(n-1+m)T, a] da \right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, m, a) da$$

7-2. Inversion de la transformée en z modifiée

Comme pour la transformée en z, parmi les méthodes d'inversion de transformée en z modifiée, on peut citer:

7-2-1. Méthode des résidus:

$$f[(n-1+m)T] = \sum_{p_i} [\text{Résidus de } F(z, m) z^{n-1}]_{z=p_i}, \text{ avec } p_i \text{ pôles de } F(z, m)$$

7-2-2. Méthode de la division:

Cette méthode est applicable lorsque  $F(z, m)$  se présente sous la forme d'une fraction rationnelle. Elle est exactement la même que pour la transformée en z.

B. Relation entre la transformée en z et celle en z modifiée

On peut obtenir la transformée en z à partir de la transformée en z modifiée en considérant d'abord la relation suivante - Voir (11) -

$$F(z, m) = f(mT)z^{-1} + f(T+mT)z^{-2} + \dots + f(nT+mT)z^{-(n+1)} + \dots$$

On constate que si on fait  $m=1$ , le second membre donne  $F(z)$  à condition d'y ajouter  $f(0)$ . Par contre si l'on fait  $m=0$ , le second membre donne  $F(z)$  à condition de multiplier tous les termes par z.

donc soit:

$$\boxed{\begin{aligned} F(z) &= \lim_{m \rightarrow 0} z F(z, m) \\ F(z) &= \lim_{m \rightarrow 1} F(z, m) + f(0) \end{aligned}} \quad (12)$$

On notera que ces deux expressions ne sont équivalentes que lorsque  $f^*(t)$

ne présente pas de discontinuités aux instants  $nT$  d'échantillonnage.

Dans le cas contraire, on peut aussi définir  $F(z)$ , mais soit à partir de  $f(nT^-)$ , soit à partir de  $f(nT^+)$ , par des considérations physiques sur le processus réel d'échantillonnage.

Dans  $F(z, m)$ , on obtient donc:

- $f(nT^-)$  en prenant le coefficient de  $z^{-n}$  et en y faisant  $m=1$
- $f(nT^+)$  en prenant le coefficient de  $z^{-(n+1)}$  et en y faisant  $m=0$

Note: Nous avons établi en annexe des tables pour les transformées en  $z$  et en  $z$  modifiée de quelques fonctions usuelles comme pour les transformées de Laplace. On y trouvera dans ces tableaux la correspondance entre  $f(t)$ , sa transformée de Laplace  $F(p)$ , et ses transformées en  $z$  et en  $z$  modifiée  $F(z)$  et  $F(z, m)$ .

---

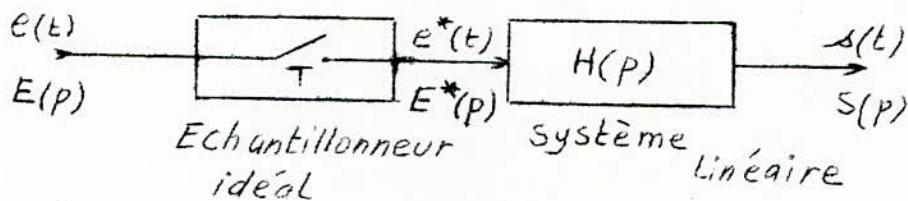


## CHAPITRE II

# ANALYSE et SYNTHÈSE des ASSERVISSEMENTS LINEAIRES ECHANTILLONNES

### 1- Fonctions de transfert des systèmes échantillonnés:

1-1- Schéma de base: Considérons un système linéaire échantillonné constitué par un échantillonneur idéal suivi d'un système linéaire de fonction de transfert  $H(p)$  - Fig 19-



- Fig 19 -

### 1-2- Relation entre l'entrée et la sortie

Nous avons vu au chapitre I, que la sortie d'un échantillonneur idéal était définie par :  $e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot \delta(t - nT)$

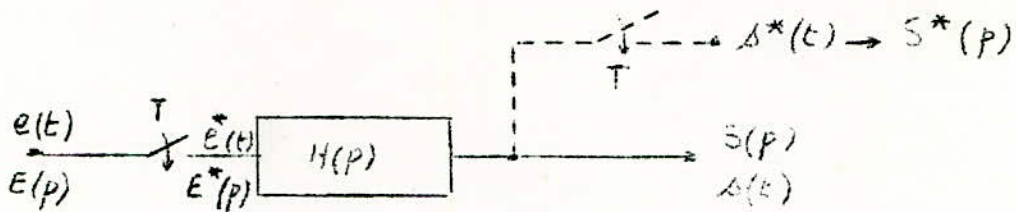
Le système linéaire continu  $H(p)$ , a à son entrée:  $E^*(p)$ , sa sortie sera donc donnée comme d'habitude telle que :

$$S(p) = H(p) \cdot E^*(p) = H(p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot e^{-nTp} \quad (13)$$

Remarque : L'expression (13) montre que le système linéaire échantillonné ne peut être représenté par une fonction de transfert entre les transformées de l'entrée et de la sortie comme c'était le cas pour un système linéaire continu.

### 1-3- Valeurs de la sortie aux instants d'échantillonnage:

La relation (13) qui permet le calcul de  $s(t)$  à tout instant est compliquée et peu commode d'emploi. Mais si on ne s'intéresse qu'aux valeurs de la sortie  $s(t)$  aux instants d'échantillonnage:  $0, T, 2T, \dots$  et non à la connaissance complète de  $s(t)$ , il est possible d'obtenir une relation simple entre l'entrée échantillonnée et la sortie échantillonnée. Pour cela, on introduit un échantillonneur fictif placé à la sortie du système et synchronisé avec celui de l'entrée - Fig 20 -



- Fig 20 -

Le système étant linéaire, la sortie à l'instant  $t = nT$  de prélèvement peut être obtenue par addition (principe de superposition) des réponses impulsionnelles du système. D'où en appelant  $h(t)$  la réponse du système à une impulsion unitaire, on peut écrire: - Fig 21 -

$$s(t) = e(0) \cdot h(t) \quad \text{pour } 0 \leq t < T$$

$$s(t) = e(0) \cdot h(t) + e(T) \cdot h(t-T) \quad \text{pour } T \leq t < 2T$$

$$s(t) = e(0) \cdot h(t) + e(T) \cdot h(t-T) + e(2T) \cdot h(t-2T) \quad \text{pour } 2T \leq t < 3T$$

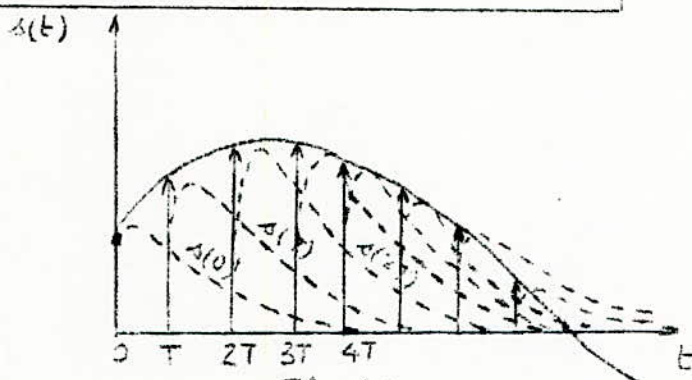
etc... ; et aux instants d'échantillonnage, on a:

$$s(0) = e(0) \cdot h(0)$$

$$s(T) = e(0) \cdot h(T) + e(T) \cdot h(0)$$

$$\Delta(2T) = e(0) \cdot h(2T) + e(T) \cdot h(T) + e(2T) \cdot h(0).$$

$$\Rightarrow \Delta(nT) = \sum_{m=0}^n e(mT) \cdot h[(n-m)T] \quad (14)$$



- Fig 21 -

Or d'après l'équation (2), on a aussi

$$S^*(p) = \Delta(0) + \Delta(T)e^{-Tp} + \Delta(2T)e^{-2Tp} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta(nT) \cdot e^{-nTp} \quad (15)$$

Les équations (14) et (15) donnent :

$$S^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n e(mT) \cdot h[(n-m)T] \cdot e^{-nTp} \quad (16)$$

A partir de cette expression, on peut vérifier que :

$$S^*(p) = \underbrace{[e(0) + e(T)e^{-Tp} + \dots]}_{E^*(p)} \cdot \underbrace{[h(0) + h(T)e^{-Tp} + \dots]}_{H^*(p)}$$

Soit : 
$$S^*(p) = E^*(p) \cdot H^*(p) \quad (17)$$

où  $H^*(p)$  est la transformée de Laplace par échantillonnage associée à la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , ce qui revient au même, à la fonction de transfert  $H(p)$ .



En d'autres termes, en ne considérant que des transformées de Laplace et fonctions de transfert pulsées, la transformée de la sortie d'un système linéaire pour une entrée échantillonnée est simplement la transformée de l'entrée multipliée par la fonction de transfert du système, exactement comme dans le cas des systèmes continus  $\rightarrow (17)$

1-4 - Transformée en  $z$  : En interchangeant l'ordre de sommation de l'expression (16) et en posant :  $n-m=k$  et  $e^{T_p}z$

On obtient :

$$S^*(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k(kT) \cdot e^{-kTp} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) e^{-mTp}$$

$$\text{d'où : } S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(kT) z^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) \cdot z^{-m}$$

Puisque  $k(kT) = 0$  pour  $k < 0$

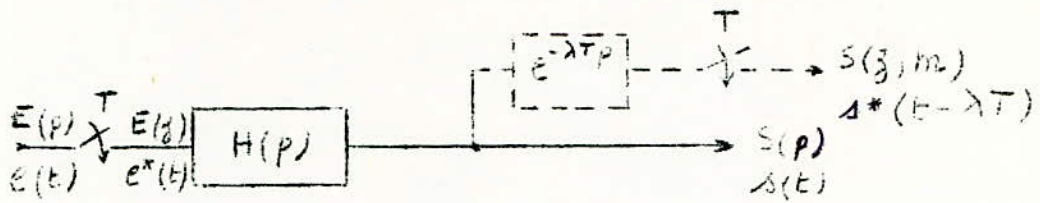
$$\text{donc : } \boxed{S(z) = H(z) \cdot E(z)} \quad (18)$$

$$\text{où : } H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(kT) z^{-k}$$

$$E(z) = \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) \cdot z^{-m} \text{ en vertu de la relation (10)}$$

Théorème 1 : La transformée en  $z$  de la réponse  $s(t)$  d'un système précédé d'un échantillonneur est égale au produit des transformées en  $z$  du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle du système.

1-5 - Transformée en z modifiée : - Fig 22 -



- Fig 22 -

D'après la formule (11) [chap. I], on peut écrire :

$$H(z, m) = h(mT) \cdot z^{-1} + h(T+mT) \cdot z^{-2} + h(2T+mT) \cdot z^{-3} + \dots$$

En posant :  $h_m = h(mT)$  ;  $h_{i+m} = h(iT+mT)$

Donc :  $H(z, m) = h_m z^{-1} + h_{1+m} z^{-2} + h_{2+m} z^{-3} + \dots$

De même :  $S(z, m) = s_m z^{-1} + s_{1+m} z^{-2} + s_{2+m} z^{-3} + \dots$  (x)

La réponse du système H à l'entrée échantillonnée  $e^*(t)$  est la somme des réponses à chaque échantillon de  $e(t)$ , on peut écrire alors :

$$s(mT) = e(0) \cdot h(mT)$$

$$s(mT+T) = e(0) \cdot h(T+mT) + e(T) \cdot h(mT)$$

$$s(mT+2T) = e(0) \cdot h(2T+mT) + e(T) \cdot h(T+mT) + e(2T) \cdot h(mT)$$

En introduisant la nouvelle notation et en multipliant chaque égalité par un  $z^{-i}$  particulier, on obtient :

$$s_m \cdot z^{-1} = e(0) \cdot h_m \cdot z^{-1}$$

$$s_{1+m} \cdot z^{-2} = e(0) \cdot h_{1+m} \cdot z^{-2} + e(T) \cdot z^{-1} \cdot h_m \cdot z^{-1}$$

$$s_{2+m} \cdot z^{-3} = e(0) \cdot h_{2+m} \cdot z^{-3} + e(T) \cdot z^{-1} \cdot h_{1+m} \cdot z^{-2} + e(2T) \cdot z^{-2} \cdot h_m \cdot z^{-1}$$

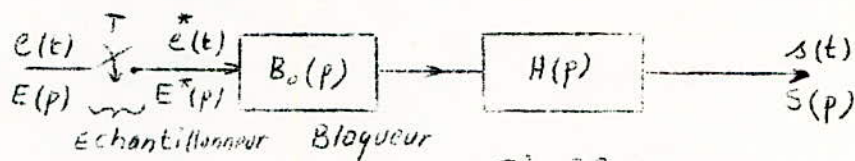
En additionnant membre à membre et en vertu de l'expression (2) on obtient :

$$S(z, m) = \underbrace{[e(0) + e(T) \cdot z^{-1} + e(2T) \cdot z^{-2} + \dots]}_{E(z)} \cdot \underbrace{[h_m \cdot z^{-1} + h_{m+1} \cdot z^{-2} + \dots]}_{H(z, m)}$$

$$\boxed{S(z, m) = E(z) \cdot H(z, m)} \quad (19)$$

Théorème 2 : La transformée en  $z$  modifiée de la réponse d'un système précédé d'un échantillonneur est égale au produit de la transformée en  $z$  du signal d'entrée par la transformée en  $z$  modifiée de la réponse impulsionnelle du système.

1-6- Système comportant un échantillonneur - bloqueur : fig 23



$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

Dans ce cas, c'est un signal en escalier qui est appliqué à  $H(p)$  et chaque impulsion à l'entrée est transformée à la sortie en un signal de la forme :  $e(iT) \cdot \{h(t-iT) - h(t-(i+1)T)\}$ ; où  $h(t)$  est la réponse de  $H(p)$  à l'échelon unité :  $h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau$

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N \leq t/T} e(iT) \cdot h(t-iT) - \sum_{i=0}^{N \leq t/T} h(t-(i+1)T) \cdot e(iT)$$

Si nous prélevons le signal d'entrée à des instants discrets, et si nous tenons compte de ce que :  $h(iT) = e(iT) = 0$  pour  $t < 0$  nous obtenons :



$$s(nT) = \sum_{i=0}^{\infty} e(iT) \cdot k(nT - iT) - \sum_{i=0}^{\infty} e(iT) \cdot k(nT - iT - T)$$

En multipliant cette expression par  $e^{-nTp}$  et en sommant sur  $n$  de 0 à l' $\infty$ , on aura :

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(nT) \cdot e^{-nTp} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} e(iT) \cdot k(nT - iT) \cdot e^{-nTp}}_A - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} e(iT) \cdot k(nT - iT - T) \cdot e^{-nTp}}_B$$

$$A = e(0) \cdot k(0) \rightarrow n=0$$

$$+ e(0) \cdot k(T) \cdot e^{-Tp} + e(T) \cdot k(0) \cdot e^{-Tp} \rightarrow n=1$$

$$+ e(0) \cdot k(2T) \cdot e^{-2Tp} + e(T) \cdot k(T) \cdot e^{-2Tp} + e(2T) \cdot k(0) \cdot e^{-2Tp} \rightarrow n=2$$

+ -----  
|  
+ -----  
|

$$A = e(0) \cdot [k(0) + k(T) \cdot e^{-Tp} + k(2T) \cdot e^{-2Tp} + \dots + k(nT) \cdot e^{-nTp} + \dots]$$

$$+ e(T) \cdot e^{-Tp} \cdot [k(0) + k(T) \cdot e^{-Tp} + k(2T) \cdot e^{-2Tp} + \dots + k(nT) \cdot e^{-nTp} + \dots]$$

$$+ e(2T) \cdot e^{-2Tp} \cdot [k(0) + \quad " \quad + \quad " \quad + \dots + \quad " \quad + \dots]$$

$$A = \underbrace{[e(0) + e(T) \cdot e^{-Tp} + e(2T) \cdot e^{-2Tp} + \dots + e(iT) \cdot e^{-iT} + \dots]}_{E^*(p)} \cdot \underbrace{[k(0) + k(T) \cdot e^{-Tp} + \dots + e(nT) \cdot e^{-nTp} + \dots]}_{H^*(p)}$$

$$\text{D'où : } A = E^*(p) \cdot H^*(p)$$

De la même manière que pour A, B s'écrit :

$$B = e^{-Tp} \cdot \underbrace{\left[ e(0) + e(T) \cdot e^{-Tp} + \dots + e(iT) \cdot e^{-iTp} + \dots \right]}_{E^*(p)} \cdot \underbrace{\left[ R(0) + R(T) \cdot e^{-Tp} + \dots + R(nT) \cdot e^{-nTp} + \dots \right]}_{H^*(p)}$$

$$\text{D'où : } B = e^{-Tp} \cdot E^*(p) \cdot H^*(p)$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(nT) e^{-nTp} = E^*(p) \cdot H^*(p) \cdot [1 - e^{-Tp}]$$

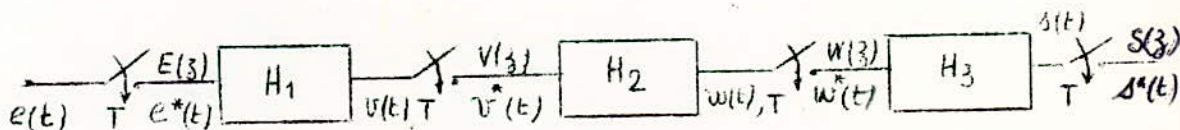
Passons à la transformée en  $z$ , car  $z = e^{Tp}$ , on aura :

$$S(z) = E(z) \cdot H(z) \cdot [1 - z^{-1}]$$

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{z} \cdot H(z)} \quad (20)$$

1-7- Systèmes en cascade :

1-7-1- Systèmes séparés par des échantillonneurs - Fig 24



- Fig 24 -

Le théorème 1 précédent donne :

$$V(z) = E(z) \cdot H_1(z)$$

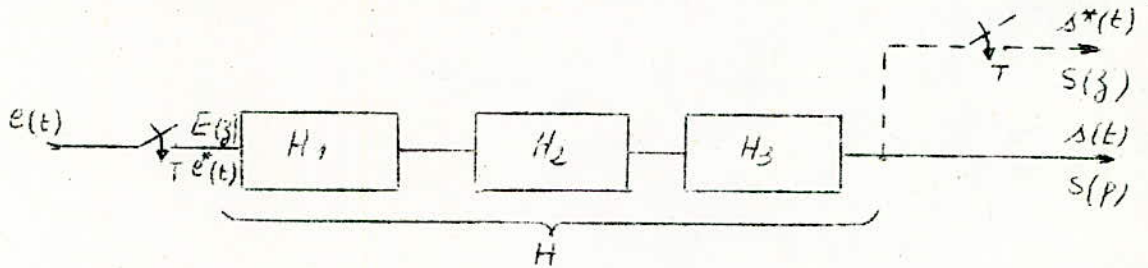
$$W(z) = V(z) \cdot H_2(z)$$

$$S(z) = W(z) \cdot H_3(z)$$

Les 3 relations ci-dessus donnent :

$$\boxed{S(z) = E(z) \cdot H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)} \quad (21)$$

### 1-7-2. Systèmes non séparés par des échantillonneurs - Fig 25



- Fig 25 -

En appliquant le théorème des systèmes continus, on peut écrire :

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = \mathcal{L}\{e^*(t)\} \cdot H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p), \text{ Soit : } S(p) = E^*(p) \cdot H(p)$$

En appliquant le théorème des systèmes échantillonnés (Théorème 1), on aura, en considérant cette fois-ci la sortie échantillonnée  $s^*(t)$  :

$$\boxed{S(z) = E(z) \cdot H(z) = E(z) \cdot \overline{H_1 H_2 H_3}(z)} \quad (22)$$

Remarque :  $\overline{H_1 H_2 H_3}(z) \neq H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)$

On notera aussi qu'à partir des expressions (21) et (22), on peut tirer les expressions des transformées en  $z$  modifiées, conformément à la formule (19) -

$$\text{Soit : } \boxed{S(z, m) = E(z) \cdot H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z, m)} \quad (21\text{bis})$$

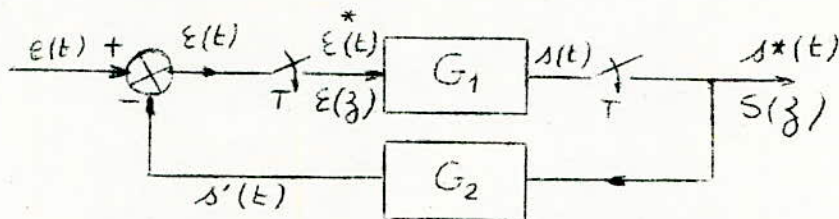
$$\boxed{S(z, m) = E(z) \cdot \overline{H_1 H_2 H_3}(z, m)} \quad (22\text{bis})$$



1-8 - Systemes bouclés : Il n'est possible de faire apparaître des transmittances échantillonnées en boucle fermée que dans le cas de systemes simples.

1-8-1 - Calcul par la transformée en  $z$  :

a/ Retour échantillonné : - Fig 26 -



- Fig 26 -

Les équations (18) et (21) donnent :

$$S(z) = E(z) \cdot G_1(z)$$

$$E(z) = E(z) - S'(z) = E(z) - S(z) \cdot G_2(z) = E(z) - E(z) \cdot G_1(z) \cdot G_2(z)$$

$$E(z) [1 + G_1(z) \cdot G_2(z)] = E(z)$$

D'où :

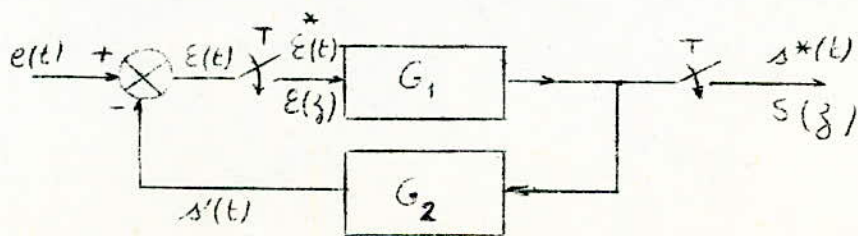
$$\boxed{E(z) = \frac{E(z)}{1 + G_1(z) \cdot G_2(z)}} \quad (23)$$

$$S(z) = E(z) \cdot G_1(z)$$

D'où :

$$\boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z) \cdot G_2(z)}} \quad (24)$$

b/ Retour non échantillonné : - Fig 27 -



- Fig 27 -

D'après les équations (18) et (22), on a :

$$\boxed{E(z) = \frac{1}{1 + \overline{G_1 \cdot G_2}(z)} \cdot E(z)} \quad (25)$$

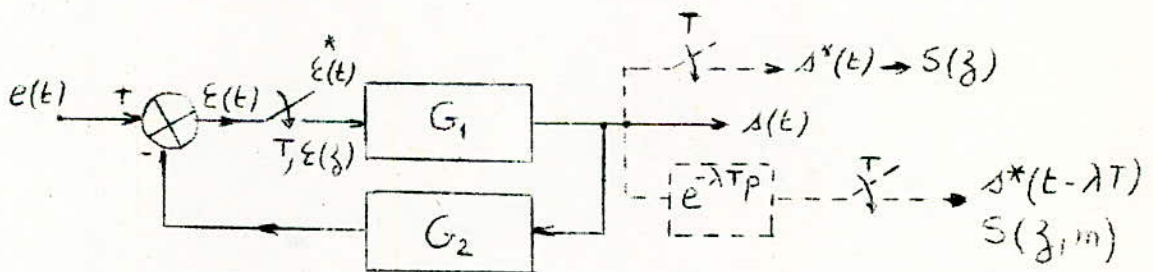
De même, on obtient, pour la transmittance :

$$\boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + \overline{G_1 \cdot G_2}(z)}} \quad (26)$$

Notons que :  $\overline{G_1 \cdot G_2}(z) \neq G_1(z) \cdot G_2(z)$

1-8-2. Calcul par la transformée en  $z$  modifiée :

Soit le système suivant - Fig 28 - où le signal d'erreur est échantillonné :



- Fig 28 -

D'après l'équation (19) :

$$S(z, m) = E(z) \cdot G_1(z, m)$$

D'après la relation (25) :


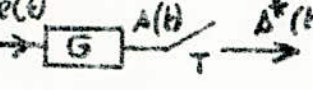


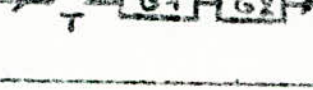
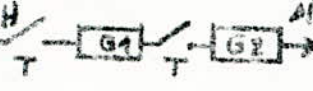
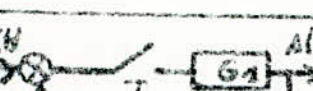

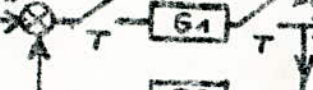
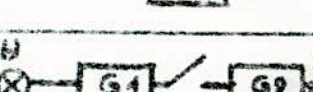
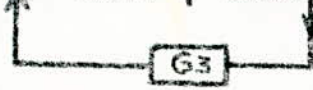
$$\boxed{S(z, m) = E(z) \cdot \frac{G_1(z, m)}{1 + \overline{G_1 \cdot G_2}(z)}} \quad (27)$$

Dans la pratique, on peut rencontrer plusieurs types de systèmes asservis échantillonnés, dont les structures de base diffèrent les unes des autres par les positions des échantillonneurs.

Quelques structures sont représentées dans le tableau suivant : Tableau I



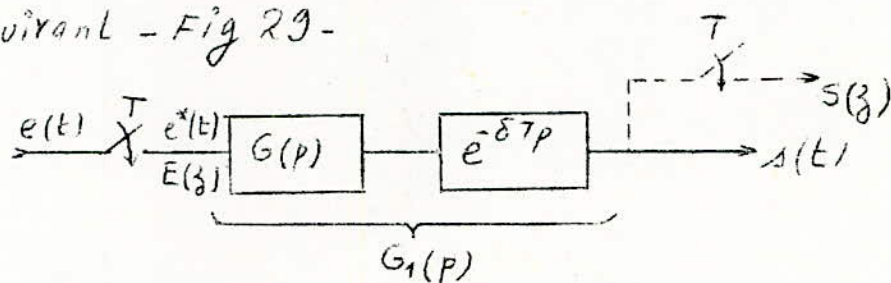
# Tableau. I.

Structure de base	Transformée en $\mathcal{Z}$ de la sortie : $S(\mathcal{Z})$	Transformée en $\mathcal{Z}$ modifiée de $S(\mathcal{Z}, m)$
	$S(\mathcal{Z}) = E(\mathcal{Z})$	$S(\mathcal{Z}, m) = E(\mathcal{Z}, m)$
	$\overline{E \cdot G}(\mathcal{Z})$	$\overline{E \cdot G}(\mathcal{Z}, m)$
	$E(\mathcal{Z}) \cdot G(\mathcal{Z})$	$E(\mathcal{Z}) \cdot G(\mathcal{Z}, m)$
	$E(\mathcal{Z}) \cdot \overline{G_1 \cdot G_2}(\mathcal{Z})$	$E(\mathcal{Z}) \cdot \overline{G_1 \cdot G_2}(\mathcal{Z}, m)$
	$E(\mathcal{Z}) \cdot G_1(\mathcal{Z}) \cdot G_2(\mathcal{Z})$	$E(\mathcal{Z}) \cdot G_1(\mathcal{Z}, m) \cdot G_2(\mathcal{Z}, m)$
	$E(\mathcal{Z}) \cdot \frac{G_1(\mathcal{Z})}{1 + \overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z})}$	$E(\mathcal{Z}) \cdot \frac{G_1(\mathcal{Z}, m)}{1 + \overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z})}$
	$E(\mathcal{Z}) \cdot \frac{G_1(\mathcal{Z})}{1 + G_1(\mathcal{Z}) \cdot G_2(\mathcal{Z})}$	$E(\mathcal{Z}) \cdot \frac{G_1(\mathcal{Z}, m)}{1 + G_1(\mathcal{Z}, m) \cdot G_2(\mathcal{Z}, m)}$
	$\frac{\overline{E G_1}(\mathcal{Z}) \cdot G_2(\mathcal{Z})}{1 + \overline{G_1 G_2 G_3}(\mathcal{Z})}$	$\frac{\overline{E G_1}(\mathcal{Z}) \cdot G_2(\mathcal{Z}, m)}{1 + \overline{G_1 G_2 G_3}(\mathcal{Z})}$
	$\frac{\overline{E G}(\mathcal{Z})}{1 + G(\mathcal{Z})}$	$\overline{E G}(\mathcal{Z}, m) - \frac{G(\mathcal{Z}, m) \cdot \overline{E G}(\mathcal{Z})}{1 + G(\mathcal{Z})}$
	$\frac{\overline{E G_1}(\mathcal{Z})}{1 + \overline{G_2 G_1}(\mathcal{Z})}$	$\overline{E G_1}(\mathcal{Z}, m) - \frac{\overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z}, m) \cdot \overline{E G_1}(\mathcal{Z})}{1 + \overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z})}$
	$\frac{\overline{E G_1}(\mathcal{Z}) + \overline{E G_2}(\mathcal{Z}) \cdot \overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z}) - \overline{G_2 G_1}(\mathcal{Z}) \cdot \overline{E G_1}(\mathcal{Z})}{1 + \overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z})}$	$\overline{E G_1}(\mathcal{Z}, m) - \frac{\overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z}, m) \cdot \overline{E G_1}(\mathcal{Z}) \cdot G_1(\mathcal{Z}, m)}{\overline{G_1 G_2}(\mathcal{Z}) + 1}$

### 1-9 - Systèmes comportant un retard pur :

On rencontre souvent dans la pratique, des systèmes comportant un certain nombre de petites constantes de temps que l'on assimile à un retard pur. Nous étudierons dans ce paragraphe les modifications des transformées en  $z$  et  $z$  modifiée pour ces types de systèmes.

1-9-1 - Systèmes en boucle ouverte : Soit le système suivant - Fig 29 -



- Fig 29 -

3 cas peuvent se présenter :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = k \text{ entier} \\ 0 \leq \delta \leq 1 \\ \delta = k + \delta' \text{ avec } 0 \leq \delta' \leq 1 \end{array} \right.$$

a)  $\delta = k$  entier : dans ce cas on a :

$$G_1(p) = e^{-kTp} \cdot G(p) \Rightarrow \begin{cases} G_1(z) = z^{-k} \cdot G(z) \\ G_1(z, m) = z^{-k} \cdot G(z, m) \end{cases} \quad (28)$$

b)  $0 \leq \delta \leq 1$

$$\mathcal{L}_m [f_c(t - \delta T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_c[(n-1+m-\delta)T] \cdot z^{-n} \text{ avec } 0 \leq m \leq 1$$

Posons :  $m' = m - \delta$  ; 2 cas à envisager :

$$1/0 \leq m \leq \delta \Rightarrow -\delta < m' < 0$$

On ne peut pas utiliser la transformée en  $z$  modifiée pour  $m'$ ,



Car  $Z_m$  suppose  $0 \leq m \leq 1$ . On considère alors  $(m'+1)$ , c'est à dire  $G(z, m'+1)$ , ce qui revient à avancer  $k(t-\delta T)$  de  $T$  et à multiplier le résultat par  $z^{-1}$  pour annuler cette avance de  $T$ .

Donc :

$$\boxed{Z_m[k(t-\delta T)] = z^{-1} G(z, m+1-\delta)} \quad \underline{0 \leq m \leq \delta} \quad (29)$$

2/  $\delta \leq m \leq 1$ , dans ce cas, on a simplement :

$$Z_m[k(t-\delta T)] = G(z, m-\delta) \quad (29 \text{ bis})$$

c/  $\delta = k + \delta'$  :

$k$  entier, c'est une combinaison des cas a) et b), d'où.

$$\boxed{Z_m[k(t-\delta T)] = z^{-k} \cdot Z_m[k(t-\delta' T)] = z^{-(k+1)} G(z, m+1-\delta')} \quad (30)$$

avec  $0 \leq m \leq \delta'$

$$\text{et } \boxed{Z_m[k(t-\delta T)] = z^{-k} G(z, m-\delta')} \quad (30 \text{ bis})$$

$\underline{\delta' \leq m \leq 1}$

1-9-2- Systèmes bouclés : En utilisant les résultats précédents, il est possible de déterminer les transmittances en  $z$  et en  $z$  modifiée de certaines structures de base comportant des retards purs : Tableau II.



## 2. ANALYSE DES ASSERVISSEMENTS LINEAIRES ECHANTILLONNES

2-1. Etude de la stabilité : Plusieurs méthodes sont possibles pour étudier la stabilité d'un système linéaire échantillonné. Parmi ces méthodes, nous exposerons celle-ci : Imaginons qu'un système soit au repos pour  $e = s = 0$ , à l'instant  $t = 0^-$  et  $e' = s' = 0$  pour  $t < 0$ ; et qu'il apparaisse un signal d'entrée  $e(t) = \delta(t)$ , à  $t = 0^+$ . Nous dirons que le système est stable si  $s(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ ; il faut donc que  $s(nT) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$ , c'est une condition nécessaire mais non suffisante.

Généralement  $S(z)/E(z)$  représente sous la forme d'une fraction rationnelle  $N(z)/D(z)$ , pour obtenir  $s(t)$ , il suffit de décomposer  $N(z)/D(z)$  en éléments simples de la forme:  $\frac{N(z)}{D(z)} = \sum_i \frac{a_i z}{z - \lambda_i}$ , en supposant que  $D(z)$  n'ait pas de racines multiples.

On pose  $\lambda_i = e^{-(\alpha_i + j\beta_i)T}$ :

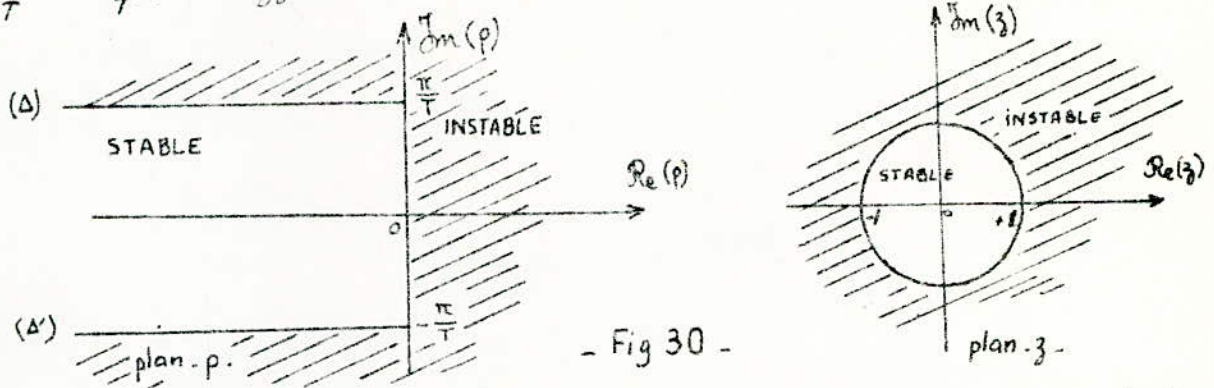
- a/ Si  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , d'après le tableau des transformées donné en annexe, l'originale est donnée par  $e^{-\alpha_i t}$  valable pour  $t = nT$ , c'est à dire  $[e^{-\alpha_i nT}] \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , à condition que  $\alpha_i > 0 \Rightarrow \lambda_i < 1$

- b/ Si  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , l'originale est donnée par  $e^{-(\alpha_i + j\beta_i)t}$  valable pour  $t = nT$ , c'est à dire  $[e^{-\alpha_i nT} e^{-j\beta_i nT}] \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , à condition que  $\alpha_i > 0$  ce qui implique  $|\lambda_i| < 1$

- En conclusion : Le système est stable si toutes les racines sont situées à l'intérieur du cercle de rayon 1 et de centre 0 du plan complexe de  $z$ .

On note que cette condition n'est autre que la transposition dans le

plan de  $z$  de la condition de stabilité dans le plan complexe  $p$  (demi-plan de gauche limité par les droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ , car  $w$  varie entre  $\frac{\pi}{T}$  et  $-\frac{\pi}{T}$ ; en effet:  $z_i = e^{T p_i}$ ,  $|z_i| < 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(p_i) < 0$ . (Fig 30)



- Fig 30 -

• L'étude de la stabilité revient donc à l'étude des pôles de la transmittance  $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}$ , c'est à dire à l'étude des racines de l'équation caractéristique  $D(z) = 0$

Dans le cas où une ou plusieurs racines  $z_m$  de  $D(z)$  se trouvent sur le cercle de centre l'origine et de rayon l'unité, le système est à la limite de stabilité.

$$\text{Or } z_m = e^{T p_m} \Rightarrow p_m = \frac{1}{T} \ln z_m$$

$z_m$  étant généralement complexe, donc:

$$p_m = \frac{1}{T} \ln |z_m| + \frac{j}{T} \arg z_m$$

De ceci, nous pouvons déduire les fréquences caractéristiques  $\omega_m$  et les coefficients d'amortissement  $\theta_m$  du système.

$$\text{Car } p_m = \theta_m + j \omega_m = \frac{1}{T} \ln |z_m| + \frac{j}{T} \arg z_m$$

$$\text{d'où : } \boxed{\theta_m = \frac{1}{T} \ln |z_m|, \quad \omega_m = \frac{1}{T} \arg(z_m)} \quad (31)$$

En général, pour juger la stabilité d'un système d'après l'étude de l'équation caractéristique  $D(z) = 0$ , on dispose de plusieurs cri-



tères, dits critères de stabilité. Parmi ces critères, nous nous proposons d'exposer successivement les critères algébriques et géométriques suivants:

### 2-1-1. Critères algébriques:

2-1-1-1. Critère de Schur-Cohn: Il permet de savoir si une équation polynomiale:  $D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ ;  $a_i = b_i + j d_i$ ; a ses racines inférieures à 1 en module.

Pour cela, on forme les  $n$  déterminants suivants:

$$\Delta_k = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 \end{array} & \begin{array}{cccc} a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-k+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} \bar{a}_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \dots & \dots & \bar{a}_n \end{array} & \begin{array}{cccc} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{k-1} \\ 0 & \bar{a}_0 & \dots & \bar{a}_{k-2} \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_0 \end{array} \end{array}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad \bar{a}_k = b_k - j d_k$$

Le critère s'énonce alors comme suit:

$D(z) = 0$  a ses racines inférieures à 1 en module si:

- \*  $\Delta_k < 0$  pour  $k$  impair
- \*  $\Delta_k > 0$  pour  $k$  pair



2-1.1-2 Critère de Routh-Hurwitz : Il permet de savoir si toutes les racines d'une équation  $D(p)$  sont à partie réelle négative, avec :

$$D(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 = 0$$

A cet effet, on forme le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-5} & b_{n-4} & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix}$$

Le critère s'énonce comme suit :

$D(p) = 0$ , a toutes ses racines à partie réelle négative si :

- Tous les  $b_i$  et tous les mineurs  $\Delta_i$  sont de même signe.

avec  $\Delta_1 = b_{n-1}$  ;  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n \\ b_{n-3} & b_{n-2} \end{vmatrix}$  ; ...

## 2-1-2 Critères géométriques :

2-1-2-1. Critère de Nyquist : Soit un système physique représenté par une fonction analytique  $f(x)$  de la variable  $x$ , possédant  $Z$  zéros et  $P$  pôles. Un tel système est stable si un contour  $\Gamma_x$  entoure dans le plan de la variable  $x$  les pôles et les zéros de  $f(x)$  dans un certain sens donné autant de fois que le contour  $\Gamma_f$  (Lieu transformé de  $\Gamma_x$ ) entoure dans le plan de la fonction  $f(x)$  l'origine dans le même sens, un nombre de tours égal à  $N = Z - P$

Pour élucider ce critère, on propose l'exemple suivant. (Fig 31)

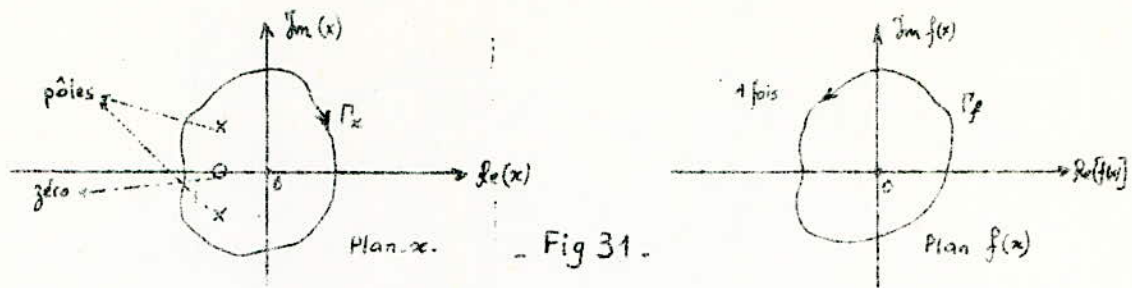


Fig 31.

- Fig 31 -  $Z = 1$ ,  $P = 2 \Rightarrow N = Z - P = -1 \Rightarrow N = +1$  dans le sens trigonométrique

2.1-2-2. Lieu de Nyquist: La relation (4) du chapitre I permet de tracer le lieu de transfert en boucle ouverte  $H^*(j\omega)$  à partir du lieu de transfert en boucle ouverte ordinaire  $H(j\omega)$ . Ce lieu  $H^*(j\omega)$  caractérise le comportement du système pour des entrées échantillonnées et peut être appelé le lieu de transfert échantillonné du système. En pratique, ce lieu s'obtient graphiquement à partir de 2 courbes  $U(\omega)$  et  $V(\omega)$  respectivement les parties réelle et imaginaire de  $H(j\omega)$ . Soit  $H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$

En remarquant que :  $T \cdot H^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega)$

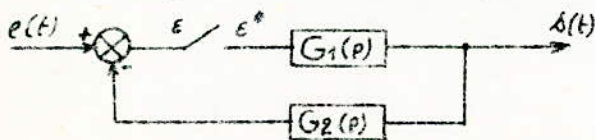
avec :  $U^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(\omega + k\Omega)$  avec  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  étant la période d'échantillonnage.  $V^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(\omega + k\Omega)$

On peut se servir du lieu de transfert  $H(j\omega)$  gradué en  $\omega$ , en notant que les quantités  $H[j(\omega + k\Omega)]$  s'additionnent vectoriellement et que

$H(-j\omega) = H(j\omega)$ , en effet :

$$T \cdot H^*(j\omega_1) = H(j\omega_1) + H[j(\omega_1 + \Omega)] + H[j(\omega_1 - \Omega)] + H[j(\omega_1 + 2\Omega)] + H[j(\omega_1 - 2\Omega)] + \dots$$

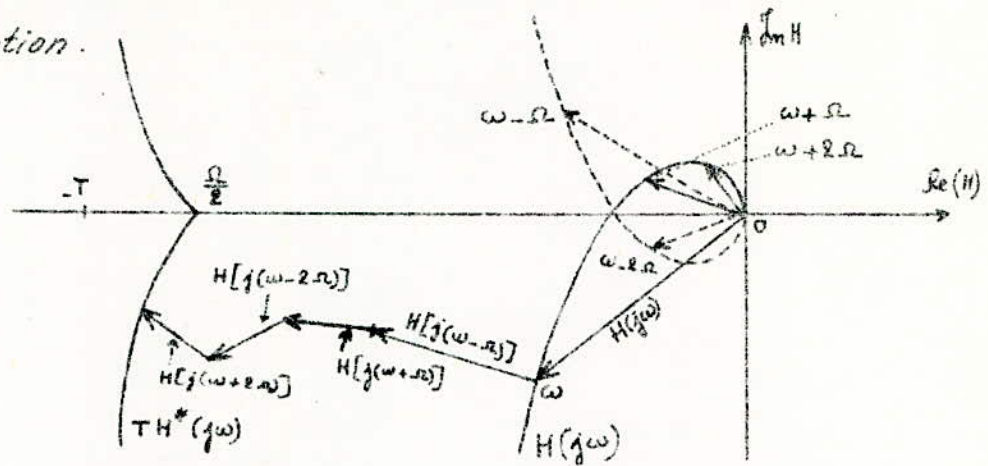
$H(j\omega)$  est la fonction de transfert du système en boucle ouverte - Fig 32.



$$H(p) = G_1(p) \cdot G_2(p)$$

$$H^*(j\omega) = \overline{G_1 \cdot G_2}^*(j\omega)$$

Cette méthode est illustrée par la - Fig 33 - qui représente la construction du lieu de transfert échantillonné à partir d'un système présentant une intégration.



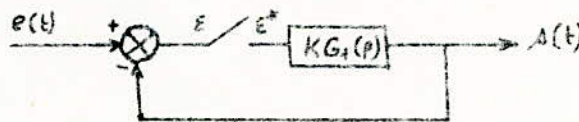
- Fig 33 -

En pratique, en raison du filtrage des hautes fréquences que réalisent la plupart des systèmes physiques, la sommation vectorielle converge rapidement et peut souvent être limitée à  $n=0, 1, 2, -1, -2$  voire même à  $n=0, 1, -1$ .

Graphiquement, on s'aperçoit que les vecteurs  $H[j(\omega + n\Omega)]$  sont en effet négligeables dès que  $n$  dépasse 2 ou 3.

Remarque : On notera que cette méthode suppose que le système de fonction de transfert  $H(p)$  est strictement linéaire, et elle ne s'applique pas directement si  $H(p)$  contient un retard pur (c'est-à-dire si on a par exemple un organe de mémoire).

2-1-2-3. Lieu des racines : Soit un système représenté par la-fig 34 -



Sa transmittance en  $z$  est :  $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{KG_1(z)}{1+KG_1(z)}$ , l'équation caractéristique est :  $1+KG_1(z) = 0$

On peut tracer le lieu des racines de cette équation en fonction d'un



paramètre et rechercher pour quelles valeurs de ce paramètre les racines sont à l'intérieur du cercle unité, ce qui donne les conditions de stabilité par rapport à ce paramètre. Le paramètre que l'on choisit généralement pour cette construction est le coefficient  $k$  qui apparaît lorsque l'on met  $KG_1(z)$  sous la forme :

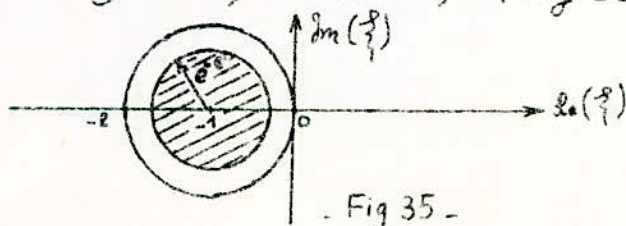
$$KG_1(z) = k \frac{(z-z_0)(z-z_1) \dots (z-z_n)}{(z-p_0)(z-p_1) \dots (z-p_m)} = kG(z)$$

La construction de ce lieu résulte de l'exploitation des propriétés de la relation :  $1 + kG(z) = 0$ , c'est à dire :  $|G(z)| = \frac{1}{k}$  ;  $\text{Arg } G(z) = \pi + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$

2-1-3. Degré de stabilité : Souvent, ce n'est pas seulement la stabilité d'un système échantillonné que l'on cherche à connaître, mais on s'intéresse aussi à ce que l'on appelle son degré de stabilité, qui se définit ici comme dans le cas des systèmes continus.

Dans ce dernier cas, on impose aux racines de  $D(z)$  d'avoir une partie réelle négative au moins égale à  $p_0 = \frac{\sigma}{T}$ . Pour adapter la même condition au cas des systèmes échantillonnés, nous introduisons d'abord un changement de variable tel que :  $z-1 = \xi$ .

Dans ce cas, le système est considéré stable si toutes les racines de  $D(\xi)$  se trouvent à l'intérieur du cercle de rayon 1 et de centre  $(-1, 0)$  dans le plan des  $\xi$ . Ensuite, il nous faut imposer aux racines de  $D(\xi)$  de se trouver à l'intérieur du cercle de rayon  $e^{-\sigma}$ , qui a le même centre que le cercle de rayon 1 du plan des  $\xi$ . (Fig 35)



Nous définissons le paramètre  $\sigma = p_0 \cdot T$ , comme étant le degré de stabilité d'un système échantillonné.

Généralement  $D(\frac{z}{T})$  s'écrit sous la forme :

$$D(\frac{z}{T}) = \frac{z^k}{T^k} + \sum_{m=0}^{k-1} a_m \frac{z^m}{T^m} \quad (32)$$

$$\text{ou } D(\frac{z}{T}) = a_0 + a_1 \frac{z}{T} + a_2 \frac{z^2}{T^2} + \dots + a_{k-1} \frac{z^{k-1}}{T^{k-1}} + \frac{z^k}{T^k} \quad (32, a)$$

Considérons tout d'abord le cas particulier où  $D(\frac{z}{T})$  admet une racine d'ordre  $k$  au centre du cercle du plan des  $\frac{z}{T}$ ; l'expression  $D(\frac{z}{T})$  est alors de

$$\text{la forme : } D(\frac{z}{T}) = (1 + \frac{z}{T})^k = \sum_{m=0}^k C_m^k \frac{z^m}{T^m}$$

où les coefficients  $C_m^k$  sont ceux du développement du binôme de degré  $k$ .

$$a_m = C_m^k = \frac{k!}{m!(k-m)!} \quad (33)$$

Ces coefficients  $a_m$  définissent un système échantillonné dont le degré de stabilité est infini ( $e^{-\sigma} = 0 \Rightarrow \sigma = \infty$ )

Nous définissons ces coefficients comme « optimaux ».

Cherchons maintenant les relations entre les coefficients  $a_m$  de  $D(\frac{z}{T})$  qui permettent de déterminer le degré de stabilité  $\sigma$ .

$$\text{Posons : } 1 + \frac{z}{T} = e^{-\sigma} \cdot (1 + \frac{z'}{T'})$$

$$\frac{z}{T} = \frac{z'}{T'} \cdot e^{-\sigma} - (1 - e^{-\sigma}).$$

Introduisons cette valeur de  $\frac{z}{T}$  dans (32, a), nous obtenons une relation analogue en  $\frac{z'}{T'}$ .

$$e^{k\sigma} \cdot D'(\frac{z'}{T'}) = a'_0 + a'_1 \frac{z'}{T'} + \dots + a'_{k-1} \frac{z'^{k-1}}{T'^{k-1}} + \frac{z'^k}{T'^k} \quad (32, b)$$

où les nouveaux coefficients  $a'_m$ , sont des combinaisons linéaires des anciens  $a_m$ . Déterminons ces coefficients  $a'_m$ , grâce aux critères de stabilité précédents, de telle sorte que le système correspondant soit stable; le système associé aux coefficients  $a_m$  est alors d'un degré de stabilité égal



à 0. L'application pratique du degré de stabilité à l'étude d'un système échantillonné s'en déduit alors immédiatement

2-2. Etude de la précision en régime permanent: On se propose de faire seulement une étude simple sur la précision d'un système à erreur échantillonnée en régime permanent, aux instants d'échantillonnage, en considérant 3 types d'entrées très répandues:

2-2-1. Constantes d'erreur en régime permanent: Fig 34. avec  $KG_1(p) = G(p)$ .

$$E(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{E(z)}{1+G(z)} \quad \text{conformément au}$$

théorème de la valeur finale.

2-2-1-1. Cas où l'entrée est un échelon de position.

$$e(t) = 1 \Rightarrow E(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow E_p(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+G(z)} = \frac{1}{1+G(1)} = \frac{1}{K_p}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(\infty) = \frac{1}{K_p}}$$

avec  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} (1+G(z))$  qui est appelée constante d'erreur de position.

2-2-1-2. Cas où l'entrée est un échelon de vitesse:

$$e(t) = t, \quad E(z) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$$

$$E_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)(1+G(z))} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)G(z)} = \frac{T}{K_v}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_v(\infty) = \frac{T}{K_v}} \quad \text{avec } K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) \text{ qui est appelé}$$

Constante d'erreur de vitesse



2-2-1-3. Cas où l'entrée est un échelon d'accélération :

$$e(t) = \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow E(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$E_a(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2(1+G(z))} = T^2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^2 G(z)} = \frac{T^2}{K_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_a(\infty) = \frac{T^2}{K_a}} \quad \text{avec } K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) \text{ qui est appelé}$$

constante d'erreur d'accélération.

2-3. Etude du régime transitoire : On se propose de faire cette étude à l'aide du lieu des racines.

Considérons un système (Fig 34) ayant pour transmittance en  $z$ :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{KG(z)}{1+KG(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad N(z) \text{ et } D(z) \text{ étant des polynômes en } z$$

(degré de  $D(z) >$  degré de  $N(z)$ )

Appliquons à l'entrée du système un échelon unité, on aura:

$$E(z) = \frac{z}{z-1}; \quad \text{Aux instants d'échantillonnage } nT, \text{ on a:}$$

$$s(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{z}{z-1} \cdot \frac{N(z)}{D(z)} \cdot z^{n-1} dz = \sum_{P_k} \text{Rés} \left[ \frac{N(z) \cdot z^n}{(z-1) \cdot D(z)} \right]$$

Si nous supposons que les pôles  $P_k$  sont distincts et situés à l'intérieur du contour  $\Gamma$  qui est le cercle de centre l'origine et de rayon l'unité dans le plan des  $z$  (Condition de stabilité), et en tenant compte du théorème des résidus, on peut écrire :

$$\boxed{s(nT) = \frac{N(1)}{D(1)} + \sum_{P_r} \frac{N(P_r)}{(P_r-1)D'(P_r)} \cdot P_r^n + \sum_{P_i} 2 \left| \frac{N(P_i)}{(P_i-1)D'(P_i)} \right| |P_i|^n \cos(n\theta_i + \phi_i)} \quad (34)$$

avec  $p_r$ : pôle réel.

$$p_{i+} = \alpha_i + j\beta_i; p_{i-} = \alpha_i - j\beta_i \text{ pôles imaginaires}$$

$$\theta_{i+} = \arg p_{i+} = \arctg \frac{\beta_i}{\alpha_i}; \phi_i = \arg \frac{N(p_i)}{(p_i-1) \cdot D'(p_i)} = \arg N(p_i) - \arg(p_i-1) - \arg D'(p_i)$$

$$D'(p_i) = \frac{d}{dz} [D(z)] \text{ pour } z = p_i \text{ de même que pour } D'(p_r)$$

Nous noterons que la formule (34) est appelée *formule de développement de Heaviside*, elle n'est valable qu'à la condition:

$$z = 1, \text{ n'est pas un zéro de } D(z).$$

$\mathcal{B}(nT)$  se compose alors de 3 termes.

1/  $\frac{N(1)}{D(1)}$ : représente le régime permanent.

En effet:  $S(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \left[ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{N(z)}{D(z)} \right] = \frac{N(1)}{D(1)}$  en vertu du théorème de la valeur finale.

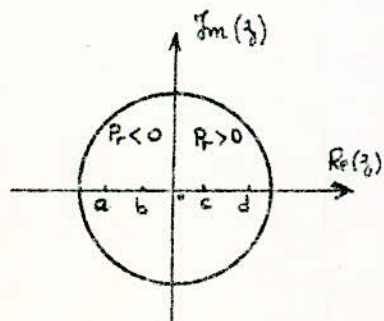
2/  $\sum_{p_r} \frac{N(p_r)}{(p_r-1) D'(p_r)} p_r^n$ : correspond au mode réel

$\frac{N(p_r)}{(p_r-1) D'(p_r)}$ : ne dépend pas de  $n$ ,  $\forall p_r$  donné; la discussion se fera donc suivant le terme  $p_r^n$ , en effet si:

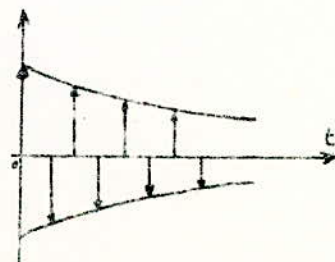
$$* p_r > 0 \Rightarrow \forall n, p_r^n > 0$$

$$* p_r < 0 \Rightarrow \begin{cases} p_r^n < 0 \text{ pour } n \text{ impair} \\ p_r^n > 0 \text{ pour } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Ce mode est schématisé par la Fig 36.

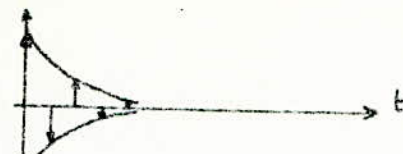


- Le pôle (a) correspond à:

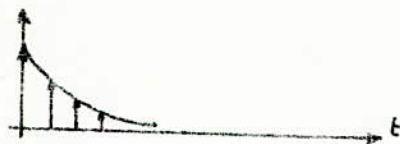


- Fig 36 -

Le pôle (b) correspond à :



Le pôle (c) correspond à :



Le pôle (d) correspond à :

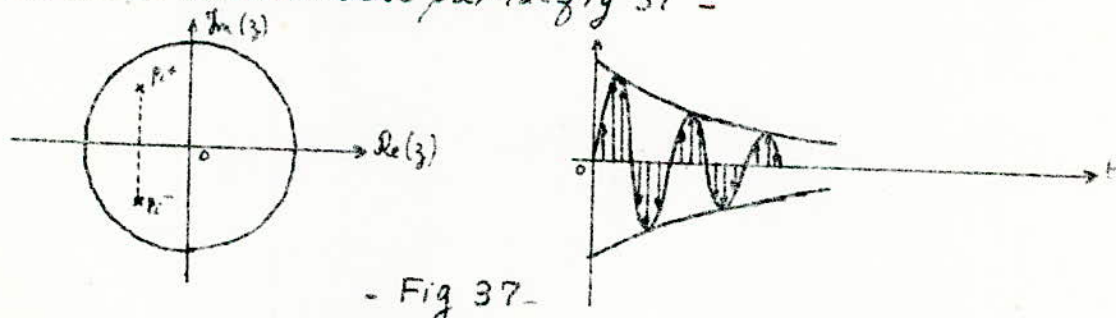


On note que plus le pôle est proche de l'origine, plus l'amortissement est grand, (b) et (c) par exemple).

$$3/ \sum_{p_i} 2 \left| \frac{N(p_i)}{(p_i-1)D'(p_i)} \right| \cdot |p_i|^n \cos(n\theta_i + \phi_i) : \text{représente le mode oscillatoire.}$$

Le terme en  $\cos(n\theta_i + \phi_i)$  donne des oscillations amorties par le terme  $|p_i|^n < 1$  (car  $|p_i| < 1$  est donné par la condition de stabilité).

Ce mode est schématisé par la fig 37 -



- Fig 37 -

Remarque : Dans le cas où la transmittance  $\frac{N(z)}{D(z)}$  possède 2 pôles dominants  $p_0$  et  $\bar{p}_0$  imaginaires conjugués, voisins de l'unité  $|p_0| \approx 1$ , l'influence des autres pôles proches de l'origine est <sup>donc</sup> négligeable (leurs amortissements <sup>sont</sup> grands).  $B(nT)$  se réduit alors à :

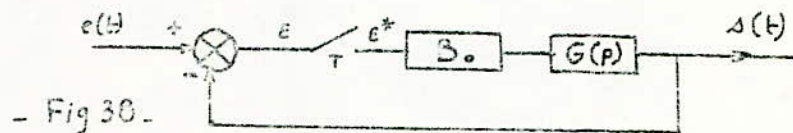
$$B(nT) \approx \frac{N(1)}{D(1)} + 2 \left| \frac{N(p_0)}{(p_0-1)D'(p_0)} \right| \cdot |p_0|^n \cos(n\theta_0 + \phi_0) \quad (34 \text{ bis})$$



En supposant que la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée, on peut dire que le dépassement balistique aura lieu pour  $s[(n+1)T] - s(nT) = 0$ , et on montre que si  $\theta_0 \neq 0$ ,  $n = \frac{1}{\theta_0} \left[ -\phi_0 - \frac{\theta_0}{2} \right]$  ce qui conduit en même temps à la conclusion suivante : Le temps de montée décroît quand  $\theta_0$  croît.

### 3 - Synthèse des asservissements échantillonnés :

Le problème se pose de la façon suivante : Étant donné un système de transmittance  $G(p)$  connue, c'est-à-dire le processus à commander ;  $B_0$  un bloqueur d'ordre zéro - Fig 30 -



On cherche à obtenir une sortie  $s(t)$  présentant certaines caractéristiques sur l'erreur permanente, le régime transitoire, ... lorsque l'entrée est d'un certain type donné. Si le système imposé ne répond pas à ces spécifications, on doit lui adjoindre un correcteur  $D$  conçu et calculé de façon à ce que ces conditions soient satisfaites. Pour cela, il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer ce correcteur  $D$  à partir d'un cahier de charges. Parmi ces méthodes, nous traiterons :

- La méthode basée sur les diagrammes de BODE
- La méthode des pôles dominants (Méthode de ZDAN).

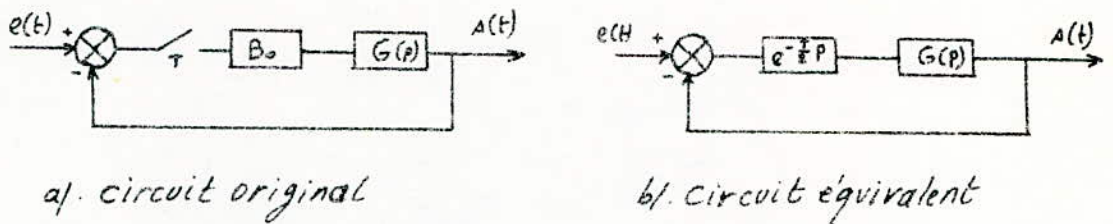
#### 3-1- Synthèse basée sur les diagrammes de BODE :

##### 3-1-1. Synthèse par la méthode du retard ( $T/2$ ).

Cette synthèse s'inspire de la remarque faite au chapitre I (§5-Fig14) à savoir que le signal sortant d'un bloqueur d'ordre zéro, peut en première

approximation être assimilé au signal d'entrée  $e(t)$  mais retardé de  $(T/2)$ , où  $T$  est la période d'échantillonnage.

Les schémas de la Fig 39 - ci-dessous, montrent les équivalences de structures impliquées par cette méthode.



- Fig 39 -

Le système équivalent est continu mais il n'est pas à minimum de phase puisqu'il comporte un retard pur  $(T/2)$ , ce qui nécessitera impérativement la construction des courbes de gain et de phase. Il suffit alors d'introduire le correcteur  $D$  entre  $B_0$  et  $G(p)$  [Fig 39 - a] - qui sera dans ce cas un correcteur "analogique"

3-1-2. Synthèse par la méthode de la transformée  $w = \frac{z-1}{z+1}$

Cette méthode permet d'utiliser la représentation de BODE sans faire l'approximation précédente.

$$\text{Posons } w = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$\text{or } z = e^{Tp} \quad (p=j\omega) \Rightarrow w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = \text{th } j \frac{T}{2} \omega$$

$$w = j \text{tg } \frac{T}{2} \omega = jv \quad \text{avec } v = \text{tg} \left( \frac{T}{2} \omega \right)$$

$v$  joue le rôle d'une pulsation fictive variant de 0 à  $\infty$  lorsque la pulsation réelle  $\omega$  varie de 0 à  $\pi/T$ .



Puis on procède de la manière suivante :

a/ On calcule  $\overline{B_0 \cdot G}(z)$

b/ On y remplace  $z$  par  $\frac{1+W}{1-W}$

On obtient alors  $\overline{B_0 \cdot G}(W)$  qui s'écrit aussi sous la forme :

$$K \frac{(1+aW)(1+bW)\dots}{W(1+a'W)\dots} = K \frac{(1+j\alpha v)(1+j\beta v)\dots}{j^v(1+j\alpha'v)\dots}$$

c/ Cette dernière forme permet d'utiliser les méthodes exposées pour les systèmes continus afin de tracer les courbes de gain et de phase.

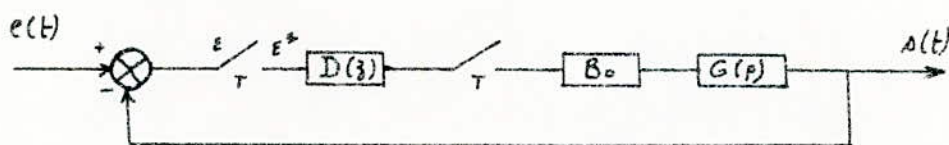
Notons que la courbe de gain se termine par une horizontale pour  $v \rightarrow \infty$  car pour  $\omega = \frac{\pi}{T}$ ,  $G^*(j\frac{\pi}{T})$  est réelle et finie.

d/ On adopte alors un correcteur par avance ou retard de phase pour respecter les conditions de marge et de précision; avec :

$$D(W) = K_1 \frac{1+\alpha W}{1+\beta W}; \begin{cases} \alpha > \beta \rightarrow D(W): \text{correcteur par avance de phase} \\ \alpha < \beta \rightarrow D(W): \text{correcteur par retard de phase} \end{cases}$$

e/ On remplace  $W$  par  $\frac{z-1}{z+1}$ , on obtient  $D(z)$ .

X Le système corrigé, se présente comme le montre la fig 40 - suivante.



- Fig 40 -

### 3-2. Synthèse par la méthode des pôles dominants (ZDAN).

Cette méthode consiste à approcher le comportement d'un système bouclé d'ordre supérieur à 2 caractérisé par 2 pôles dominants, à celui d'un système du second ordre.



Cette méthode doit en effet tenir compte des caractéristiques suivantes du système corrigé, à savoir.

- Le régime transitoire, défini par l'amortissement  $\zeta_0$  et la pulsation du système.

- Le régime permanent, caractérisé en général par une erreur nulle pour un échelon de position ou de vitesse.

- Suivant les spécifications données,  $D(z)$  n'est pas unique, le principe de cette méthode est d'avoir une expression  $D(z) \cdot G(z)$  simple. Pour cela  $D(z)$  doit comporter :

- Des pôles et des zéros compensant les zéros et les pôles de  $G(z)$  situés à l'intérieur du cercle unité du plan  $z$ .

- Autant de pôles sur le cercle  $|z| = 1$  qu'il est nécessaire, compte de ceux tenu de  $G(z)$ , pour que l'erreur en régime permanent soit nulle.

- Un gain ajustable  $K_D$ .

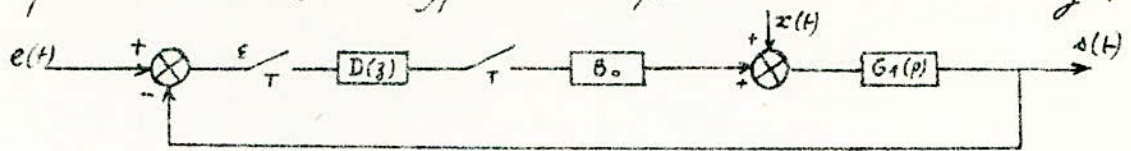
- Autant de paramètres qu'il ya de spécifications à satisfaire.

On note que, physiquement, cette compensation de pôles et de zéros n'est pas parfaite, néanmoins si ces couples sont situés à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$ , il ne peut en résulter une instabilité.

### 3-3. Synthèse en présence de perturbations :

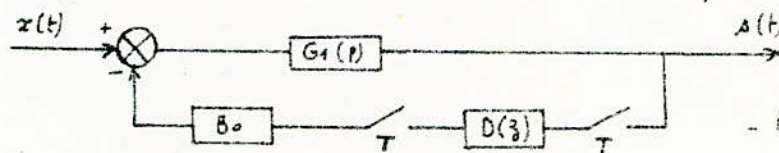
En pratique, un système physique est toujours soumis à des perturbations qui sont en général aléatoires. Une étude approfondie de la synthèse fait appel à une théorie statistique des systèmes. Nous nous limiterons dans ce paragraphe à montrer comment on peut faire la synthèse de réseaux correcteurs pour un système soumis à

des perturbations  $x(t)$  de type échelon, comme le montre la Fig 41 -



- Fig 41 -

En supposant  $e(t) = 0$ , on aura le schéma équivalent suivant (Fig 41 bis)



- Fig 41 bis -

$$S(z) = \frac{\overline{X G_1(z)}}{1 + D(z) \cdot \overline{B_0 G_1(z)}}$$

Ainsi, nous pouvons définir une pseudo-transmittance entre  $X(z)$  et  $S(z)$  :

$$F_x(z) = \frac{S(z)}{X(z)} = \frac{\overline{X G_1(z)}}{X(z) [1 + D(z) \cdot \overline{B_0 G_1(z)}]} = \frac{\overline{X G_1(z)} \cdot W(z)}{X(z)}$$

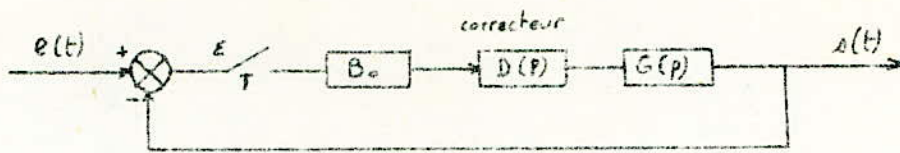
$$\boxed{F_x(z) = \frac{\overline{X G_1(z)}}{X(z)} [1 - F(z)]} \quad (35)$$

$$\text{où } W(z) = \frac{E(z)}{X(z)} \text{ et } F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \text{ (lorsque } x(t) = 0)$$

En conclusion, les techniques de synthèse étudiées dans le cas des systèmes continus se transposent aisément dans ce cas.

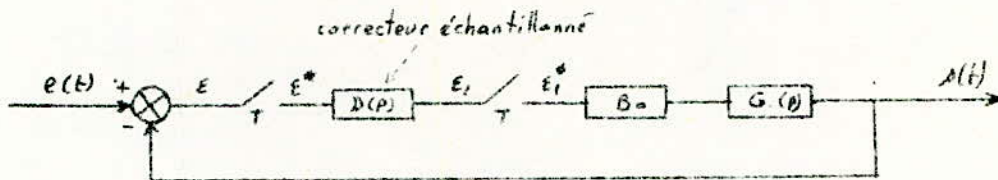
3-4. Réseaux correcteurs échantillonnés : Au lieu de chercher un réseau correcteur qui agit sur des signaux permanents comme le montre la Fig 42





- Fig 42 -

on peut chercher systématiquement des réseaux correcteurs qui ont pour rôle essentiel de modifier les valeurs des signaux aux instants d'échantillonnage, comme le montre la Fig 43 -



- Fig 43 -

Soit  $D(z)$  la fonction de transfert du réseau correcteur :

$$D(z) = \frac{E_1(z)}{E(z)} \text{ et soit } F(z) = \frac{S(z)}{E_1(z)}$$

La transmittance en  $z$  en boucle ouverte du système (Fig 43) est :

$$K \cdot G(z) = D(z) \cdot F(z) \quad \text{où } F(z) = S(z)/E_1(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{D(z) \cdot F(z)}{1 + D(z) \cdot F(z)} \Rightarrow \boxed{D(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)} \cdot \frac{1}{F(z)}} \quad (36)$$

Les méthodes de synthèse par les transformées en  $z$  indiquées précédemment donnent donc directement  $D(z)$ .

Il existe 2 façons principales pour réaliser un tel correcteur, suivant qu'il agit sur les signaux échantillonnés d'entrée de façon continue en fonction du temps, ou suivant qu'il ne fait lui-même intervenir que les valeurs des signaux aux instants d'échantillonnage.



Dans le premier cas, on a un correcteur analogique, dont la réalisation se rapproche de celle des réseaux correcteurs continus classiques; dans le deuxième cas, on a un correcteur numérique (ou digital) qui n'est autre qu'une machine à calculer particulière.

3-4-1. Correcteurs analogiques échantillonnés: Ce type de réseau qui opère sur des signaux échantillonnés présente une sortie continue qui est à son tour échantillonnée. Dans ces conditions, sa fonction de transfert  $D(p)$  s'obtient par transformation directe à l'aide des tables, de la fonction de transfert  $D(z)$  échantillonnée :

Remarque: Pour pouvoir réaliser un tel correcteur, il faut que  $D(z)$  développée en série de  $z^{-1}$  ne doit pas comporter des puissances positives de  $z$ , sinon la sortie anticiperait sur l'entrée; ce qui se traduit par:  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} \cdot D(z) = 0$

Généralement  $D(z)$  s'écrit:  $D(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$

3-4-2. Correcteurs numériques linéaires: Ils sont définis par un programme de calcul. Il s'agit d'obtenir une valeur de la sortie  $s(kT)$  au temps  $kT$ , fonction d'un certain nombre de valeurs:  $e(kT)$ ,  $e[(k-1)T]$ , ... et  $s[(k-1)T]$ ,  $s[(k-2)T]$ , ... Le calcul étant effectué par l'ordinateur commandant le processus en temps réel.

# CHAPITRE III

## APPLICATION PRATIQUE A UN ASSERVISSEMENT ECHANTILLONNE DE POSITION

Les asservissements de position connus aussi sous le nom de servo-mécanismes sont un cas particulier des asservissements à boucle de réaction qui constituent les systèmes à contrôle automatique.

Ce sont des dispositifs qui permettent de commander la position d'un objet mobile à partir d'un signal variable d'une manière arbitraire et ne fournissant qu'une faible énergie.

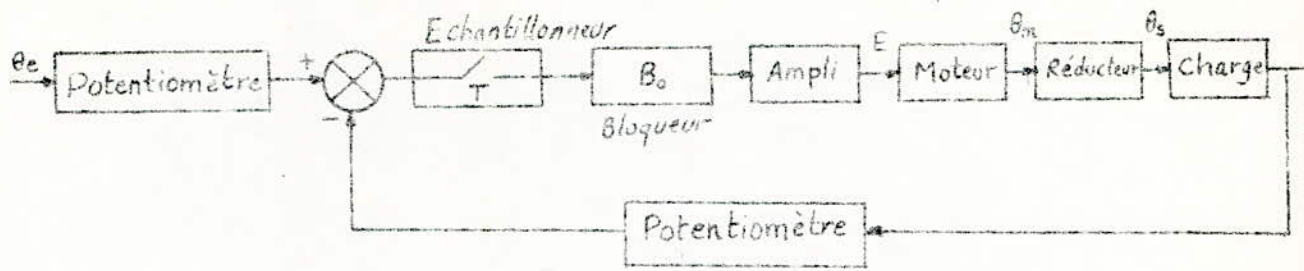
Notre étude consiste à régler une position représentant la grandeur de sortie d'un système, au moyen d'un moteur d'entraînement de façon, qu'à tout moment, la variation de la position de la sortie soit égale à celle de la position du signal de référence.

A l'asservissement de position ordinaire, nous avons ajouté dans notre étude un élément d'échantillonnage dont le but est : de pouvoir examiner les caractéristiques de fonctionnement des systèmes échantillonnés. Le servomécanisme échantillonné obtenu, est généralement constitué des éléments suivants :

- Détecteur d'écart ou comparateur.
- Echantillonneur - Bloqueur.
- Amplificateur
- Moteur - réducteur - charge (constituant le processus)

On se propose d'étudier le système asservi à erreur échantillonnée

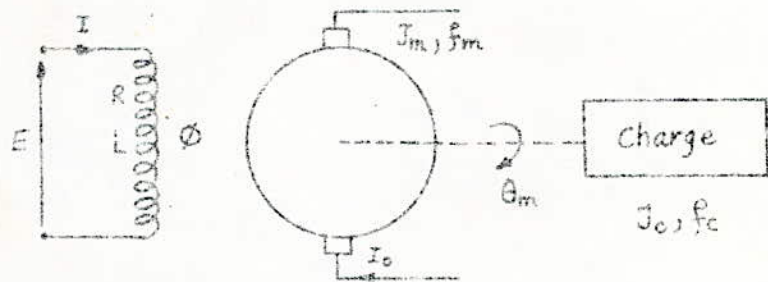
représenté par la figure suivante (Fig 44) :



- Fig 44 -

1- Etude du moteur-réducteur-charge : Le moteur considéré est à commande par inducteur à excitation séparée et où l'inducteur est alimenté par une tension  $E$ . L'induit est parcouru par une intensité constante  $I_0$ .

Etudions la relation existante entre la position  $\theta_m$  de l'arbre du moteur et la tension  $E$  de contrôle. (Fig 45).



- Fig 45 -

$$\text{On a : } E = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (37)$$

$$\text{et } \phi = k_1 I \quad (38)$$

$$\text{Le couple moteur } C_m = k_2 I_0 \phi \quad (39) \text{ d'une part,}$$

$$\text{d'autre part : } C_m = J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + f_m \frac{d\theta_m}{dt} \quad (40)$$

où :

- $f_m$  est le frottement du moteur ;  $\phi$  est le flux d'induction .
- $J_m$  est l'inertie du moteur ;  $J_c$  est l'inertie de la charge .
- $C_m$  est le couple du rotor ;  $f_c$  est le frottement de la charge .



Dans l'écriture des équations ci-dessus, on a supposé que toutes les conditions initiales sont nulles, qu'il n'y a pas de couple de rappel et que tous les éléments sont linéaires.

Des équations (37) et (38), on déduit, en tenant compte de :  $\frac{d}{dt} \leftrightarrow p$

$$\frac{\Phi}{E} = \frac{k_1}{Lp + R} = \frac{k_1/R}{(1 + T_1 p)} \quad \text{avec } T_1 = \frac{L}{R} \quad (41)$$

Des équations (39) et (40) et en tenant compte de :  $\frac{d^2}{dt^2} \leftrightarrow p^2$ , on tire :

$$\frac{\Theta_m}{\Phi} = \frac{k_2 I_0}{J_m p^2 + f_m p} = \frac{k_2 I_0 / f_m}{p(1 + T_2 p)} \quad \text{avec } T_2 = \frac{J_m}{f_m} \quad (42)$$

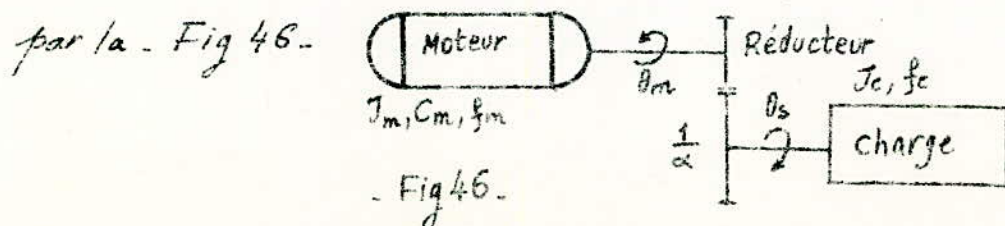
Les relations (41) et (42) sont respectivement les fonctions de transfert de l'inducteur et de l'induit.

La fonction de transfert du moteur est donc :  $\frac{\Theta_m}{E} = \frac{\Phi}{E} \cdot \frac{\Theta_m}{\Phi}$

$$\text{Soit : } \frac{\Theta_m}{E} = \frac{(k_1 k_2 I_0) / (f_m \cdot R)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{k_0}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \quad (43)$$

$$\text{avec } k_0 = \frac{k_1 k_2 I_0}{f_m \cdot R}$$

1-1. Calcul du rapport de réduction : Généralement une charge est toujours entraînée à une vitesse inférieure à celle de l'arbre du moteur auquel elle est liée. Pour cette raison, on emploie alors un réducteur de vitesse dont le schéma de principe est représenté par la - Fig 46 -



La relation (40) devient :  $C_m = J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + f_m \cdot \frac{d\theta_m}{dt} + C$  ; où  $C$  est le couple transmis par le réducteur (côté moteur). Sur le côté charge, on a :  $\alpha \cdot C$  avec  $\alpha = \frac{\theta_m}{\theta_s}$  ;  $\frac{1}{\alpha}$  est appelé le rapport de réduction

$$\text{d'où : } \alpha \cdot C = J_c \cdot \frac{d^2 \theta_s}{dt^2} + f_c \cdot \frac{d\theta_s}{dt}$$

Si on ramène le tout sur l'arbre du moteur, on obtient :

$$C_m = \underbrace{\left( J_m + \frac{J_c}{\alpha^2} \right)}_J \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + \underbrace{\left( f_m + \frac{f_c}{\alpha} \right)}_f \frac{d\theta_m}{dt}$$

où  $J$  et  $f$  sont respectivement l'inertie et le frottement ramenés sur l'arbre du moteur.

On montre que :  $\alpha = \sqrt{\frac{J_c}{J_m}}$  est un rapport approximatif, qu'on peut adopter par la suite.

Dans ce cas,  $T_2$  de la relation (43) s'écrit :

$$T_2 = \frac{J}{f} = \frac{J_m + \frac{J_c}{\alpha^2}}{f_m + \frac{f_c}{\alpha}} \quad (44)$$

$$\text{et } k_0 \text{ devient : } k_0 = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot I_0}{R \cdot f}$$

1-2- Caractéristiques du système : Le moteur considéré est un moteur à courant continu tiré d'un catalogue, il a les caractéristiques suivantes :

$$C_m = 0,3 \text{ Kg}\cdot\text{m}$$

$$J_m = 130 \cdot 10^{-7} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$$

$$f_m = 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rd}/\text{s}$$

$$R = 16,4 \Omega$$

$$L = 0,059 \text{ H}$$

$$I = 1,5 \text{ A}$$

$$E = 27 \text{ v.}$$

La charge est choisie comme suit :

- Inertie moyenne :  $J_m = 0,715 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

- frottement :  $f_c = 0,1 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rd} / \text{s}$

1-3. Calcul des constantes : on adoptera :  $\alpha = 3$

$$k_o = \frac{k_1 k_2 I_o}{R \cdot f} ; \text{ de l'équation (39) : } k_2 \cdot I_o = \frac{C_m}{\phi} \Rightarrow k_o = \frac{k_1 C_m}{R \cdot \phi \cdot f}$$

or de l'équation (38) :  $\frac{k_1}{\phi} = \frac{1}{I}$ , donc :  $k_o = \frac{C_m}{R I f} = \frac{C_m}{R I (f_m + \frac{f_c}{\alpha^2})}$

d'où :

$$k_o = \frac{0,3}{16,4 \cdot 1,5 (10^{-3} + \frac{0,1}{9})} \neq 1, \quad \underline{k_o \neq 1}$$

$$f = f_m + \frac{f_c}{\alpha^2} = \underline{12,11 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rd} / \text{s}}$$

$$T_1 = \frac{L}{R} = \frac{0,059}{16,4} \neq 0,00360 \text{ s} ; T_2 = \frac{J_m + \frac{J_{cm}}{\alpha^2}}{f} = \frac{(130 + \frac{715}{9}) \cdot 10^{-7}}{12,11 \cdot 10^{-3}} \neq 0,00173 \text{ s}$$

Le potentiomètre de conversion est caractérisé par le coefficient suivant :

$$k_p = \frac{E}{2\pi} = \underline{0,075 \text{ v} / \text{degré}}$$

L'équation (43) devient alors :

$$\boxed{\frac{\theta_m}{E} = \frac{1}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}} \quad (43 \text{ bis})$$

1-4 - Fonctions de transfert : Généralement, l'inertie de la charge n'est pas rigoureusement fixe, on se propose d'étudier sa variation dans l'intervalle :  $[J_m - 10\% \cdot J_m ; J_m + 10\% \cdot J_m]$

Du fait que  $J_m$  a une valeur numérique faible, on peut étudier la



La fonction  $F(p)$  aux 3 points caractéristiques suivants:

$J_{cm}(1-10\%)$ ,  $J_{cm}$ , et  $J_{cm}(1+10\%)$  et extrapoler les résultats à tous les points de cet intervalle.

Les fonctions de transfert correspondant aux 3 points choisis s'écrivent donc :

$$\bullet J_c = J_{cm} + 10\% \cdot J_{cm}; T_2 = 0,00180s; F(p) = \frac{1}{p(1+0,00360p)(1+0,00180p)} \quad (45)$$

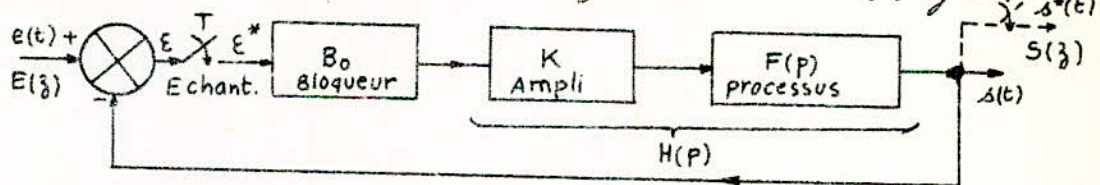
$$\bullet J_{cm}; T_2 = 0,00173s; F(p) = \frac{1}{p(1+0,00360p)(1+0,00173p)} \quad (46)$$

$$\bullet J_c = J_{cm} - 10\% \cdot J_{cm}; T_2 = 0,00160s; F(p) = \frac{1}{p(1+0,00360p)(1+0,00160p)} \quad (47)$$

## 2- Analyse du système :

### 2-1- Le système comporte un échantillonneur-bloqueur.

Notre étude revient donc à l'étude du système suivant : Fig 47.



- Fig 47-

En rappelle que 
$$F(p) = \frac{1}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

Le bloqueur choisi est un bloqueur d'ordre zéro  $B_0$  ayant pour fonction de transfert, d'après l'équation (9) du chapitre I :

$$B_0(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-Tp}), T \text{ étant la période d'échantillonnage.}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est : (Fig 47)

$$H(p) \cdot B_0(p) = \frac{K(1 - e^{-Tp})}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)} \quad (48)$$

La relation (48) est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples pour pouvoir utiliser les tables des transformées données en annexe.

$$B_0(p) \cdot H(p) = K(1 - e^{-T_1 p}) \left( \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{1+T_1 p} + \frac{D}{1+T_2 p} \right)$$

On détermine les constantes A, B, C et D par identification, soit:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -(T_1 + T_2) \quad ; \quad C = \frac{-T_1^3}{T_2 - T_1} \\ B = 1 \quad \quad \quad ; \quad D = \frac{T_2^3}{T_2 - T_1} \end{array} \right\} \quad (49)$$

2-1-1 Calcul par la transformée en z:

- La transmittance en z du système bouclé (Fig 47) est d'après le tableau I :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\overline{B_0 H}(z)}{1 + \overline{B_0 H}(z)}$$

D'après l'équation (20):  $\overline{B_0 H}(z) = K \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left[ \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{1+T_1 p} + \frac{D}{1+T_2 p} \right]$   
Comme la transformée en z est une opération linéaire:

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{1+T_1 p} + \frac{D}{1+T_2 p} \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{A}{p} \right] + \mathcal{Z} \left[ \frac{B}{p^2} \right] + \mathcal{Z} \left[ \frac{C}{1+T_1 p} \right] + \mathcal{Z} \left[ \frac{D}{1+T_2 p} \right]$$

D'après les tables des transformées en z (données en annexe), on tire:

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{1+T_1 p} + \frac{D}{1+T_2 p} \right] = A \cdot \frac{z}{z-1} + B \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{C}{T_1} \cdot \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{D}{T_2} \cdot \frac{z}{z - e^{-T/T_2}}$$

Posons:  $\lambda_1 = e^{-T/T_1}$ ;  $\lambda_2 = e^{-T/T_2}$ ;  $\frac{C}{T_1} = C'$ ;  $\frac{D}{T_2} = D'$

$$\overline{B_0 H}(z) = K \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \left[ A \cdot \frac{z}{z-1} + B \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} + C' \frac{z}{z-\lambda_1} + D' \frac{z}{z-\lambda_2} \right] \quad (50)$$

$$\overline{B_0 H}(z) = \frac{K \left[ z^3(A+C'+D') + z^2(BT - A - A(\lambda_1 + \lambda_2) - C'\lambda_2 - 2C' - D'\lambda_1 - 2D') + z(A\lambda_1\lambda_2 + C' + \right.}$$

$$\left. + A(\lambda_1 + \lambda_2) - BT(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C'\lambda_2 + D' + 2D'\lambda_1) - D'\lambda_1 - C'\lambda_2 + BT\lambda_1\lambda_2 - A\lambda_1\lambda_2 \right]}{(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} \quad (50 \text{ bis})$$



L'équation caractéristique  $(1 + \overline{B_0 H}(z)) \stackrel{E(z)}{=} 0$  s'écrit alors :

$$1 + \overline{B_0 H}(z) = \frac{z^3 [K(A+C'+D')+1] + z^2 [K(BT-A-A(\lambda_1+\lambda_2)-C'\lambda_2-2C'-D'\lambda_1-2D')-1-\lambda_1-\lambda_2] + z [K(A\lambda_1\lambda_2+C'+A(\lambda_1+\lambda_2)-BT(\lambda_1+\lambda_2)+2C'\lambda_2+D'+2D'\lambda_1)+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1+\lambda_2] + K[-D'\lambda_1-C'\lambda_2+\lambda_1\lambda_2(BT-A)]}{(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} \quad (51)$$

2-1-2. Étude de la stabilité : Avant d'aborder cette étude, on fait d'abord le changement de variable :

$$z = \frac{1+W}{1-W} \quad \text{dans l'équation caractéristique } 1 + \overline{B_0 H}(z) = 0$$

donnée ci-dessus (51).

Pour alléger l'écriture, on posera en outre :

$$K_1 = K[A+C'+D'] + 1$$

$$K_2 = K[BT - (1+\lambda_1+\lambda_2)A - C'(2+\lambda_2) - D'(2+\lambda_1)] - (1+\lambda_1+\lambda_2)$$

$$K_3 = K[A(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2) - BT(\lambda_1 + \lambda_2) + C'(1+2\lambda_2) + D'(1+2\lambda_1)] + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$K_4 = K[BT\lambda_1\lambda_2 - A\lambda_1\lambda_2 - D'\lambda_1 - C'\lambda_2] - \lambda_1\lambda_2$$

L'équation caractéristique ;  $1 + \overline{B_0 H}(z) = 0$  donne :

$$1 + \overline{B_0 H}(W) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1+W}{1-W}\right)^3 \cdot K_1 + K_2 \left(\frac{1+W}{1-W}\right)^2 + K_3 \left(\frac{1+W}{1-W}\right) + K_4 = 0$$

$$\text{Soit : } W^3(K_1 - K_2 + K_3 - K_4) + W^2(3K_1 - K_2 - K_3 + 3K_4) + W(3K_1 + K_2 - K_3 - 3K_4) + (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) = 0 \quad (52)$$

$$\text{Soit : } B_3 W^3 + B_2 W^2 + B_1 W + B_0 = 0 \quad (52 \text{ bis})$$

Pour que le système soit stable, il faut que l'équation (52) ait toutes ses racines à partie réelle négative, conformément au critère de ROUTH qui exige les 2 conditions suivantes :



a) Les coefficients  $B_3, B_2, B_1$  et  $B_0$  doivent être de même signe :

Nous remarquons que le terme constant de l'équation (52) s'écrit aussi, en remplaçant les " $K_i$ " par leurs expressions ci-dessus :

$$B_0 = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = KTB(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)$$

Or pour les valeurs de  $T$  comprises entre  $10^{-4}$ s et  $10^{-3}$ s, on remarque que le terme  $(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)$  est toujours positif;  $B$  étant égal à 1, le gain statique  $K$  ne peut être que positif, donc le terme

$B_0$  est positif dans l'intervalle de  $T$ :  $[10^{-4}$ s,  $10^{-3}$ s]; cette remarque nous amène à choisir donc tous les autres coefficients  $B_1, B_2, B_3$  positifs.

Considérons maintenant chaque coefficient :

a1/ Coefficient:  $B_3$ .

$$\text{Soit } B_3 = K_1 - K_2 + K_3 - K_4 = 0$$

En remplaçant  $K_1, K_2, K_3$  et  $K_4$  par leurs expressions, on tire  $K$ :

$$K = \frac{-(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)}{A(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2) - \frac{BT}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2) + 2C'(1 + \lambda_2) + 2D'(1 + \lambda_1)}$$

(53)

a2/ Coefficient:  $B_2$

$$\text{Soit } B_2 = 3K_1 - K_2 - K_3 + 3K_4 = 0$$

De la même manière que dans a1/, on tire  $K$ :

$$K = \frac{-(1 - \lambda_1 \lambda_2)}{A(1 - \lambda_1 \lambda_2) + \frac{BT}{4}(3\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - 1) + C'(1 - \lambda_2) + D'(1 - \lambda_1)}$$

(54)

a3/ Coefficient:  $B_1$ .

$$\text{Soit } B_1 = 3K_1 + K_2 - K_3 - 3K_4 = 0, \text{ on tire } K:$$

$$K = \frac{-(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)}{A(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2) + \frac{BT}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_1 \lambda_2)}$$

(55)

La condition que les coefficients  $B_3, B_2$  et  $B_1$  doivent être positifs, conduit à choisir des couples  $(K, T)$  correspondant à des points situés dans la zone se trouvant au dessus ou au dessous des courbes respectivement données par les équations (53), (54) et (55) suivant que le dénominateur de chacune de celles-ci soit respectivement positif ou négatif.

(Notons que le numérateur des 3 équations est toujours négatif)

b) Les mineurs  $\Delta_i$  de  $\Delta$  doivent être de même signe :

$$\text{soit } \Delta = \begin{vmatrix} B_2 & B_3 & 0 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = B_2 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} = B_1 B_2 - B_0 B_3$$

$$\Delta_3 = \Delta = B_2 B_0 B_1 - B_0^2 B_3 = B_0 (B_1 B_2 - B_0 B_3)$$

Or  $B_2$  est déjà positif (condition (a)), donc,  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  doivent être aussi positifs.

•  $B_0 > 0$  (condition (a)), donc les conditions  $\Delta_2 > 0$  et  $\Delta_3 > 0$  se réduisent à une seule condition:  $B_1 B_2 - B_0 B_3 > 0$

Remplaçons les " $B_i$ " par leurs expressions :

$$B_1 B_2 - B_0 B_3 = [(3K_1 + K_2 - K_3 - 3K_4)(3K_1 - K_2 - K_3 + 3K_4) - (K_1 - K_2 + K_3 - K_4)(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)] > 0$$

$$\text{Soit : } K_1^2 - K_4^2 + K_2 K_4 - K_1 K_3 > 0 \Rightarrow \boxed{K_1(K_1 - K_3) > K_4(K_4 - K_2)} \quad (56)$$

L'inéquation (56) représente la 2<sup>e</sup> condition du critère de ROUTH.

2-1-3. Etude de la précision du système : Nous calculerons successivement l'erreur  $E(nT)$  pour un échelon de position à l'entrée, puis



pour un échelon de vitesse (rampe).

$$a) \text{ Échelon de position : } e(t) = u(t) \Rightarrow E(z) = \frac{z}{z-1}$$

D'après l'expression (25) du chapitre II et en considérant la Fig 47 :

$$E(z) = E(z) \cdot \frac{1}{1 + \overline{B_0 H}(z)}$$

En utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot E(z) \frac{1}{1 + \overline{B_0 H}(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{1 + \overline{B_0 H}(z)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(nT) = \frac{1}{1 + \overline{B_0 H}(1)}$$

Or d'après l'expression de  $\overline{B_0 H}(z)$  (Formule (50)), on a :

$$\overline{B_0 H}(z) = K \frac{z-1}{z} \left[ A \cdot \frac{z}{z-1} + B \frac{Tz}{(z-1)^2} + C' \frac{z}{z-\lambda_1} + D' \frac{z}{z-\lambda_2} \right]$$

pour  $z \rightarrow 1$ ,  $\overline{B_0 H}(z) \rightarrow \infty$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} E(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \overline{B_0 H}(z)} = 0 \Rightarrow \boxed{E_p(\infty) = 0}$$

L'erreur de position est donc nulle  $\forall (K, T)$ ; ceci est normal du fait que le système de fonction de transfert  $H(p)$  comporte une intégration  $\Rightarrow$  (analogie avec les systèmes continus).

$$b) \text{ Rampe : } e(t) = t \cdot u(t) \Rightarrow E(z) = T \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \overline{B_0 H}(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{z-1} \cdot \frac{1}{1 + \overline{B_0 H}(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1) \overline{B_0 H}(z)}$$

$$\text{or } (z-1) \cdot \overline{B_0 H}(z) = K \left[ A(z-1) + BT + C' \frac{(z-1)^2}{z-\lambda_1} + D' \frac{(z-1)^2}{z-\lambda_2} \right]$$

$$\text{donc } \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \cdot \overline{B_0 H}(z)] = KBT = KT \text{ car } B=1$$

$$\text{d'où : } \boxed{E_v(\infty) = \frac{1}{K}}$$



L'erreur de traînage est donc inversement proportionnelle à  $K$  comme pour les systèmes continus, et en plus, elle est indépendante de  $T$ .

2.1-4 - Application au calcul de la stabilité du système

A) La charge a une inertie moyenne  $J_{em} = 0,715 \cdot 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$ .

$F(p)$  est donné par la relation (46);  $T_1 = 0,00360 \text{ s}$ ;  $T_2 = 0,00173 \text{ s}$

$$F(p) = \frac{1}{p(1 + 0,00360p)(1 + 0,00173p)}$$

D'après le système d'équations (49), on tire les constantes :

$$A = -5,33 \cdot 10^{-3}; \quad B = 1; \quad C' = \frac{C}{T_1} = 6,93 \cdot 10^3; \quad D' = \frac{D}{T_2} = -1,6 \cdot 10^3$$

La condition (a) précédente du critère de ROUTH impose les limites de  $K$  rassemblées dans le tableau suivant :

$T \text{ (s)}$	$B_3 > 0$	$B_2 > 0$	$B_1 > 0$	$B_0 > 0$
$10^{-4}$	$K > -22 \cdot 10^6$	$K < 8,4 \cdot 10^5$	$K < 5,6 \cdot 10^4$	$K > 0$
$2 \cdot 10^{-4}$	$K > -14,4 \cdot 10^6$	$K < 7,6 \cdot 10^5$	$K < 10,2 \cdot 10^3$	$K > 0$
$3 \cdot 10^{-4}$	$K > -4,5 \cdot 10^6$	$K < 4,6 \cdot 10^5$	$K < 7,2 \cdot 10^3$	$K > 0$
$4 \cdot 10^{-4}$	$K > -2 \cdot 10^6$	$K < 2,8 \cdot 10^5$	$K < 5364$	$K > 0$
$5 \cdot 10^{-4}$	$K > -10^6$	$K < 1,9 \cdot 10^5$	$K < 4334$	$K > 0$
$6 \cdot 10^{-4}$	$K > -6,7 \cdot 10^5$	$K < 1,4 \cdot 10^5$	$K < 3646$	$K > 0$
$7 \cdot 10^{-4}$	$K > -4,3 \cdot 10^5$	$K < 10^5$	$K < 3176$	$K > 0$
$8 \cdot 10^{-4}$	$K > -2,9 \cdot 10^5$	$K < 7,4 \cdot 10^4$	$K < 2824$	$K > 0$
$9 \cdot 10^{-4}$	$K > -2,1 \cdot 10^5$	$K < 5,7 \cdot 10^4$	$K < 2552$	$K > 0$
$10^{-3}$	$K > -1,5 \cdot 10^5$	$K < 4,5 \cdot 10^4$	$K < 2332$	$K > 0$

La condition (b) précédente du critère de ROUTH nous impose à fixer des valeurs à  $T$  pour trouver l'intervalle de  $K$  de stabilité correspondant à la période d'échantillonnage choisie.

Adoptons :  $T = 10^{-4}$  s, on calcule les expressions des " $K_i$ ", on trouve :

$$K_1 = 1; \quad K_2 = -K \cdot 10^{-8} - 2,91643; \quad K_3 = 22,2 \cdot 10^{-8} K + 2,83439;$$

$$K_4 = -5,91 \cdot 10^{-8} K - 0,91796.$$

L'expression (56) donne :  $29,018 \cdot 10^{-16} K^2 + 14,90623 \cdot 10^{-8} K - 1,2 \cdot 10^{-4} < 0$

C'est un trinôme du second degré en  $K$ , qui possède 2 racines réelles; le trinôme est du signe de  $(+a)$ , ( $a$ : coefficient de  $K^2$ ) pour les valeurs de  $K$  situées à l'extérieur des racines et du signe de  $(-a)$  pour les valeurs de  $K$  situées à l'intérieur des racines.

Les racines du trinôme sont :  $K_{1,2} = \begin{cases} -51,37 \cdot 10^6 \\ 805 \end{cases}$

Pour vérifier l'inégalité ci-dessus, il faut choisir  $K$ , tel que :

$$\underline{-51,37 \cdot 10^6 < K < 805.}$$

Les conditions (a) et (b) du critère de ROUTH nous imposent à choisir finalement :  $K < 805$  pour  $T = 10^{-4}$  s

Un calcul analogue (toujours avec une inertie moyenne ( $J_{em}$ )) satisfaisant aux conditions de stabilité du système, nous a conduit aux résultats suivants :

T(s)	K
$10^{-4}$	$K < 805$
$2 \cdot 10^{-4}$	$K < 997$
$10^{-3}$	$K < 2332$



B) La charge a une inertie  $J_c = J_{cm} (1 + 10\%)$ .  $J_c = 0,7865 \cdot 10^{-4} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$

Dans ce cas  $F(p)$  est donné par la relation (45) avec  $T_2 = 0,00180 \text{ s}$  et

$$T_1 = 0,00360 \text{ s}. \quad F(p) = \frac{1}{p(1 + 0,00360p)(1 + 0,00180p)}$$

Les valeurs des constantes, tirées du système d'équations (49) sont :

$$A = -5,4 \cdot 10^{-2}; \quad B = 1; \quad C' = 7,2 \cdot 10^{-3}; \quad D' = -1,8 \cdot 10^{-3}$$

La condition (a) du critère de ROUTH, impose, pour une période d'échantillonnage adoptée  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ , les limites de  $K$  suivantes :

$$\bullet \underline{B_3 > 0 \text{ (coefficient de } w^3)} \rightarrow K > -15 \cdot 10^6$$

$$\bullet \underline{B_2 > 0 \text{ (coefficient de } w^2)} \rightarrow K < 8 \cdot 10^5$$

$$\bullet \underline{B_1 > 0 \text{ (coefficient de } w)} \rightarrow K < 10,6 \cdot 10^3$$

Le coefficient  $B_0$  est toujours positif ( $K > 0$ )

La condition (b) du critère de ROUTH donne à la suite d'un calcul analogue au cas précédent (A), la condition suivante:  $\underline{-25,7 \cdot 10^7 < K < 795}$

Les 2 conditions réunies (a) et (b) donnent alors :

$$\boxed{K < 795 \text{ pour } T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}}$$

• Si on adopte  $T = 10^{-3} \text{ s}$ , on obtient de la même manière que pour  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  :

- La condition (a) impose :

$$\bullet \underline{B_3 > 0 \text{ (coefficient de } w^3)} \rightarrow K > -16,3 \cdot 10^4$$

$$\bullet \underline{B_2 > 0 \text{ (coefficient de } w^2)} \rightarrow K < 46961$$

$$\bullet \underline{B_1 > 0 \text{ (coefficient de } w)} \rightarrow K < 2321$$

$B_0$  est toujours positif ( $K > 0$ ) :

- La condition (b) impose :  $\underline{-99 \cdot 10^4 < K < 597}$

Les 2 conditions réunies imposent :

$$\boxed{K < 597 \text{ pour } T = 10^{-3} \text{ s}}$$



c) La charge a une inertie  $J_c = J_{cm}(1-10\%)$  :

$J_c = 0,6435 \cdot 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$ , dans ce cas  $F(p)$  est donnée par la relation (47) avec :  $T_1 = 0,00360 \text{ s}$  ;  $T_2 = 0,00160 \text{ s}$

$$\text{Soit } F(p) = \frac{1}{p(1+0,00360p)(1+0,00160p)}$$

Les valeurs des constantes, tirées du système d'équations (49), sont :

$$A = -5,2 \cdot 10^{-3} ; B = 1 ; C' = 6,48 \cdot 10^{-3} ; D' = -1,28 \cdot 10^{-3}$$

Un calcul analogue aux cas précédents nous impose à choisir pour :

$$* \underline{T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} \rightarrow K < 897}$$

$$* \underline{T = 10^{-3} \text{ s} \rightarrow K < 632}$$

Pour récapituler, nous donnons le tableau ci-dessous contenant les résultats trouvés précédemment :

T(s)	$J_c = 0,715 \cdot 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$	$J_c(1+10\%) = 0,7865 \cdot 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$	$J_c(1-10\%) = 0,6435 \cdot 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$
$2 \cdot 10^{-4}$	$K < 997$	$K < 795$	$K < 897$
$10^{-3}$	$K < 2332$	$K < 597$	$K < 632$

On constate que l'intervalle de K, qui donne la stabilité du système se rétrécit lorsque la valeur de l'inertie de la charge s'écarte de sa valeur moyenne  $J_{cm} = 0,715 \cdot 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$ .

2-1-5- Etude de la réponse  $s(nT)$  aux instants d'échantillonnage :

Nous allons étudier successivement la réponse  $s(nT)$  à un échelon unité puis à une rampe à l'entrée, pour 2 valeurs différentes de la période d'échantillonnage  $T$ , et pour 2 valeurs différentes de K.

Cela va nous permettre d'examiner l'influence de T et de K sur la durée

du régime transitoire, sur le coefficient d'amortissement et sur le temps de réponse du système.

2-1-5-1- Réponses à l'échelon unité :  $e(t) = u(t) \Rightarrow E(z) = \frac{z}{z-1}$

A- Adoptons  $T = 2 \cdot 10^{-4}$  s et  $K = 100$ , valeurs correspondant à un état stable du système.

En faisant le rapport des expressions (50 bis) sur (51), nous tirons la transmittance :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{(1,055z^2 + 9,86z + 0,885) \cdot 10^{-5}}{z^3 - 2,83677z^2 + 2,67956z - 0,84267}$$

d'où :  $S(z) = E(z) \cdot \frac{[1,055z^2 + 9,86z + 0,885] \cdot 10^{-5}}{z^3 - 2,83677z^2 + 2,67956z - 0,84267} = z \frac{[1,055z^2 + 9,86z + 0,885] \cdot 10^{-5}}{(z-1)(z^2 - 2,83677z^2 + 2,67956z - 0,84267)}$

A partir de  $S(z)$  obtenue, il s'agit maintenant de déterminer  $s(nT)$  aux instants d'échantillonnage. On utilise pour cela, la méthode des résidus qui donne :

$$s(nT) = \sum_{p_k} [\text{Résidus}(z^{n-1} S(z))]_{z=p_k}, \quad p_k \text{ sont les pôles de } S(z)$$

Or,  $\frac{S(z)}{E(z)}$  se présente sous la forme d'une fraction rationnelle telle que :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad \text{dans ce cas : } s(nT) = \sum_{p_k} \text{Rés} \left[ \frac{N(z) \cdot z^n}{(z-1) D(z)} \right]$$

avec  $N(z) = [1,055z^2 + 9,86z + 0,885] \cdot 10^{-5}$

$$D(z) = z^3 - 2,83677z^2 + 2,67956z - 0,84267$$

On remarque que  $z=1$  n'est pas une racine de  $D(z)$ , nous appliquerons donc la formule de développement de Heaviside ((34) Chap. II) correspondant à cette remarque :

$$d'où : s(nT) = \frac{N(1)}{D(1)} + \sum_{p_r} \frac{N(p_r)}{(p_r-1) D'(p_r)} p_r^n + \sum_{p_i} 2 \left| \frac{N(p_i)}{(p_i-1) D'(p_i)} \right| |p_i|^n \cos(n\theta_{i+} + \phi_{i+})$$

Déterminons d'abord les pôles de  $S(z)/E(z)$ .



$D(z)$  étant un polynôme du 3<sup>ème</sup> degré; en procédant par itérations successives, on tire la 1<sup>ère</sup> racine, réelle:  $z \# 0,87808$ . Pour déterminer les 2 autres racines, on divise  $D(z)$  par le polynôme:  $z - 0,87808$ .

On trouve le trinôme:  $z^2 - 1,95869z + 0,95968$  possédant une paire de racines complexes conjuguées:  $z_{1,2} \# 0,97934 \pm j0,02373$ .

Finalement les pôles de  $S(z)/E(z)$  sont donc:

- pôle réel:  $p_r \# 0,87808$

- pôles complexes:  $p_c \# 0,97934 \pm j0,02373$

On remarque que ces pôles sont bien situés à l'intérieur du cercle de centre l'origine et de rayon l'unité dans le plan  $z$ , ce qui correspond bien à l'état stable du système.

On calcule maintenant chaque terme de l'expression de  $s(nT)$ .

$$* \frac{N(1)}{D(1)} = \frac{1,18 \cdot 10^{-4}}{1,2 \cdot 10^{-4}} \# 1 \text{ (c'est le régime permanent)}$$

$$* N(p_r) \# -10,356 \cdot 10^{-5}$$

$$D'(z) = 3z^2 - 5,67354z + 2,67956 \Rightarrow D'(p_r) \# 10,811 \cdot 10^{-3}$$

$$* \frac{N(p_r)}{(p_r-1)D'(p_r)} \# \frac{-10,356 \cdot 10^{-5}}{-12,19 \cdot 10,811 \cdot 10^{-5}} \# -0,0785$$

$$* N(p_c) \# [11,552 + j \cdot 0,233] \cdot 10^{-5} \Rightarrow |N(p_c)| \# 11,556 \cdot 10^{-5}; \text{Arg } N(p_c) \# 1,4^\circ$$

$$D'(p_c) \# [-1,135 + j \cdot 4,805] \cdot 10^{-3} \Rightarrow |D'(p_c)| \# 4,93 \cdot 10^{-3}; \text{Arg } D'(p_c) \# -77^\circ$$

$$|p_c - 1| = 3,146 \cdot 10^{-2}; \text{Arg}(p_c - 1) \# -49^\circ$$

$$* 2 \left| \frac{N(p_c)}{(p_c-1)D'(p_c)} \right| \# 1,49; \theta_{i+} = \text{Arg } p_c = 1,4^\circ; |p_c| = 0,979$$

$$\phi_{i+} = \text{Arg } N(p_c) - \text{Arg}(p_c-1) - \text{Arg } D'(p_c) \# 127,4^\circ$$

Finalement la réponse du système, aux instants d'échantillonnage, à l'échelon unité pour  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ,  $K = 100$ ; est la suivante:

$$s(nT) \# 1 - (0,878)^n \cdot 7,85 \cdot 10^{-2} + 1,49 (0,979)^n \cos(1,4n + 127,4) \quad (57)$$



B) Adoptons  $T = 10^{-3}$ ;  $K = 100$

Le rapport des expressions (50 bis) sur (51) donne dans ce cas.

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{[2,158z^2 + 7,088z + 1,4] \cdot 10^{-3}}{z^3 - 2,31631z^2 + 1,75049z - 0,42354}$$

d'où :  $S(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{[2,158z^2 + 7,088z + 1,4] \cdot 10^{-3}}{z^3 - 2,31631z^2 + 1,75049z - 0,42354}$

Il s'agit comme dans le cas précédent de déterminer  $s(nT)$  connaissant  $S(z)$ . On applique aussi la méthode des résidus puis on utilise la formule de développement de Heaviside correspondant au cas :

$z = 1$  n'est pas une racine de  $D(z) = z^3 - 2,31631z^2 + 1,75049z - 0,42354$

$N(z) = (2,158z^2 + 7,088z + 1,4) \cdot 10^{-3}$

On cherche les pôles de  $S(z)/E(z)$ , c'est à dire les racines de  $D(z)$ .

Par itérations successives, on détermine la 1<sup>re</sup> racine de  $D(z)$ , réelle, qui est  $z \approx 0,5137$ . On divise ensuite  $D(z)$  par  $(z - 0,5137)$ , on trouve le trinôme :  $z^2 - 1,80261z + 0,82449$ , qui possède 2 racines complexes conjuguées.

$z_{1,2} \approx 0,90130 \pm j \cdot 0,11017$ .

Les pôles de  $S(z)/E(z)$  sont donc :  $p_r = 0,5137$ ;  $p_i = 0,90130 \pm j \cdot 0,11017$ , qui sont tous situés à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 1 du plan de  $z$ , (stabilité vérifiée). On détermine maintenant les termes de  $s(nT)$  dans la formule de Heaviside :

\*  $\frac{N(1)}{D(1)} = \frac{1,064 \cdot 10^{-2}}{1,064 \cdot 10^{-2}} = 1$  (Régime permanent)

\*  $D'(z) = 3z^2 - 4,63262z + 1,75049$ .

\*  $\frac{N(p_r)}{(p_r-1)D'(p_r)} = \frac{5,61 \cdot 10^{-3}}{-0,4863 \cdot 0,162} \approx -0,071$

$$N(p_{i+}) = (9,515 + j \cdot 1,209) \cdot 10^{-3} \Rightarrow |N(p_{i+})| = 9,59 \cdot 10^{-3}; \text{Arg } N(p_{i+}) \# 7,3^\circ$$

$$D'(p_{i+}) = -0,024 + j \cdot 0,085 \Rightarrow |D'(p_{i+})| = 8,82 \cdot 10^{-2}; \text{Arg}[D'(p_{i+})] \# -74,2^\circ$$

$$* p_{i+} - 1 = -0,09870 + j \cdot 0,11017 \Rightarrow |p_{i+} - 1| \# 0,148; \text{Arg}(p_{i+} - 1) \# -48,1^\circ$$

$$* 2 \cdot \left| \frac{N(p_{i+})}{(p_{i+} - 1) \cdot D'(p_{i+})} \right| \# 1,46$$

$$\Phi_{i+} = 7,3 + 48,1 + 74,2 = 129,6^\circ; \theta_{i+} = \text{Arg } p_{i+} \# 7^\circ$$

Enfin la réponse  $s(nT)$  à l'échelon unité pour  $T = 10^{-3}$  s et  $K = 100$  est:

$$s(nT) \# 1 - 0,071 \cdot (0,5137)^n + 1,46 (0,908)^n \cos(7n + 129,6) \quad (58)$$

c) Adoptons  $T = 10^{-3}$  s;  $K = 500$ : Dans ce cas, le rapport des expressions

$$(50bis) \text{ sur } (51) \text{ donne: } \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{[10,79z^2 + 35,44z + 7] \cdot 10^{-3}}{z^3 - 2,30768z^2 + 1,77885z - 0,41794}$$

$$\text{d'où: } S(z) = \frac{z}{(z-1)} \cdot \frac{(10,79z^2 + 35,44z + 7) \cdot 10^{-3}}{z^3 - 2,30768z^2 + 1,77885z - 0,41794}$$

$$\text{où: } D(z) = z^3 - 2,30768z^2 + 1,77885z - 0,41794$$

$$N(z) = (10,79z^2 + 35,44z + 7) \cdot 10^{-3}$$

•  $z = 1$  n'est pas une racine de  $D(z)$ , pour déterminer  $s(nT)$ , on appliquera donc la formule de Heaviside appropriée à cette remarque.

Toujours, par itérations successives, on détermine la première racine de  $D(z)$ , réelle, qui est:  $z \# 0,4306$ . On divise  $D(z)$  par  $(z - 0,4306)$  pour déterminer les 2 autres racines qui sont solutions du trinôme quotient:  $z^2 - 1,87708z + 0,997058$

Les racines de ce trinôme sont:  $z_{1,2} \# 0,93854 \pm j \cdot 0,29953$ .

$S(z)/E(z)$  possède donc les pôles suivants:

- pôle réel:  $p_r = 0,4306$ ; - pôles complexes:  $p_c = 0,93854 \pm j \cdot 0,29953$



On vérifie bien que les pôles sont situés à l'intérieur du cercle de centre l'origine et de rayon l'unité dans le plan des  $z$ . On calcule chaque terme de  $s(nT)$  comme précédemment (cas (A) et (B)).

$$* \frac{N(1)}{D(1)} = \frac{5,323 \cdot 10^{-2}}{5,323 \cdot 10^{-2}} = 1 \quad (\text{Régime permanent}).$$

$$N(p_r) = 24,26 \cdot 10^{-3}$$

$$D'(z) = 3z^2 - 4,61536z + 1,77885 \Rightarrow D'(p_r) = 0,348$$

$$* \frac{N(p_r)}{(p_r - 1) D'(p_r)} = \frac{24,26 \cdot 10^{-3}}{-0,569 \cdot 0,348} = -0,1225$$

$$N(p_i) = [48,798 + j \cdot 16,682] \cdot 10^{-3} \Rightarrow |N(p_i)| = 51,57 \cdot 10^{-3}; \text{Arg } N(p_i) = 19^\circ$$

$$D'(p_i) = -0,1794 + j \cdot 0,3043 \Rightarrow |D'(p_i)| = 0,3532; \text{Arg } D'(p_i) = -59,5^\circ$$

$$p_i - 1 = -0,06146 + j \cdot 0,29953 \Rightarrow |p_i - 1| = 0,30577; \text{Arg } (p_i - 1) = -78,4^\circ$$

$$* 2 \left| \frac{N(p_i)}{(p_i - 1) D'(p_i)} \right| = 0,955$$

$$\theta_{i+} = \text{Arg } p_i = 17,7^\circ; |p_i| = 0,985; \phi_{i+} = 19 + 59,5 + 78,4 = 157^\circ$$

La réponse  $s(nT)$  à l'échelon unité s'écrira finalement, pour :

$$T = 10^{-3} \text{ s}; K = 500$$

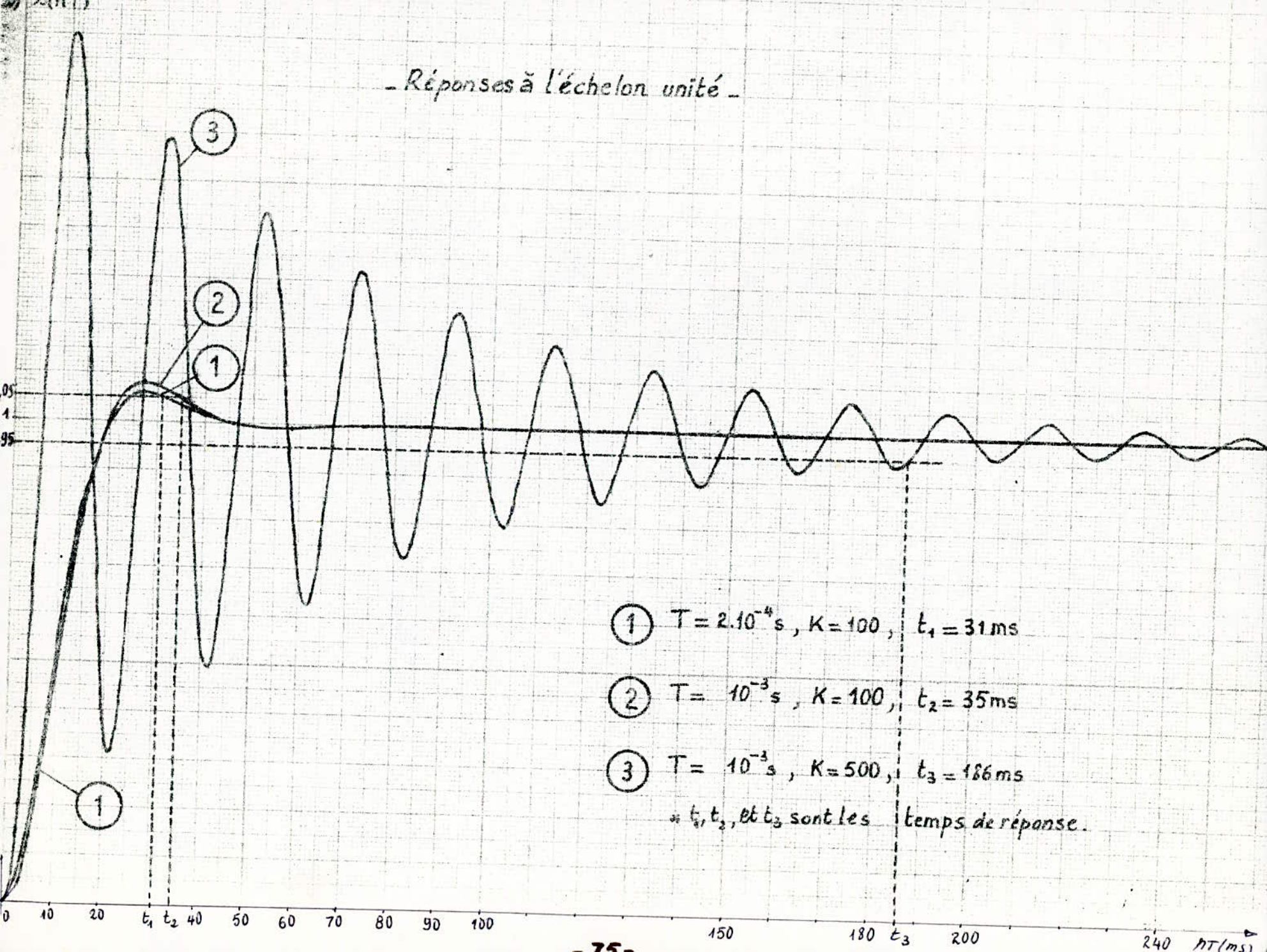
$$s(nT) = 1 - 0,1225 (0,4306)^n + 0,955 \cdot (0,985)^n \cos(17,7n + 157) \quad (59)$$

Les courbes de réponse correspondant aux relations (57), (58) et (59) sont représentées sur la feuille millimétrée (page 75).

Pour analyser ces réponses, nous allons étudier successivement les coefficients d'amortissement, les fréquences caractéristiques et les temps de réponse obtenus.



- Réponses à l'échelon unité -



## 1°/ Coefficients d'amortissement et fréquences caractéristiques:

En théorie (Chap. II), nous avons vu que les fréquences caractéristiques  $\omega_m$  et les coefficients d'amortissement  $\theta_m$  du système sont donnés par le système de relations (31).

$$\text{Soit: } \omega_m = \frac{1}{T} \arg z_m, \quad \theta_m = \frac{1}{T} \ln |z_m|$$

où  $z_m$  est le pôle dominant de  $S(z)$ .

1-1. Cas de la réponse  $s(nT)$ :  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ;  $K = 100$ .

$$z_m \approx 0,979 + j \cdot 0,023 \Rightarrow |z_m| \approx 0,979, \quad \arg z_m \approx 1,4^\circ$$

$$\text{d'où on tire: } \theta_m \approx \frac{\ln 0,979}{2 \cdot 10^{-4}} = \frac{-2,12 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = -106$$

$$\omega_m \approx \frac{1,4^\circ}{2 \cdot 10^{-4}} \approx 122 \text{ rd/s} \Rightarrow f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \approx 19,4 \text{ Hz}$$

1-2. Cas de la réponse  $s(nT)$ :  $T = 10^{-3} \text{ s}$ ;  $K = 100$

$$z_m \approx 0,90130 + j \cdot 0,11017 \Rightarrow |z_m| \approx 0,908; \quad \arg z_m \approx 7^\circ$$

$$\text{d'où: } \theta_m \approx \frac{\ln 0,908}{10^{-3}} \approx -96,5; \quad \omega_m \approx \frac{7^\circ}{10^{-3}} \approx 122 \text{ rd/s} \Rightarrow f_m \approx 19,4 \text{ Hz}$$

1-3. Cas de la réponse  $s(nT)$ :  $T = 10^{-3} \text{ s}$ ;  $K = 500$

$$z_m \approx 0,9385 \pm j \cdot 0,2495 \Rightarrow |z_m| \approx 0,985; \quad \arg z_m \approx 17,7^\circ$$

$$\text{d'où: } \theta_m \approx \frac{\ln 0,985}{10^{-3}} \approx -15,1$$

$$\omega_m \approx \frac{17,7^\circ}{10^{-3}} \approx 309 \text{ rd/s} \Rightarrow f_m \approx 49,2 \text{ Hz}$$

2°/ Temps de réponse: Nous avons pris le temps de réponse comme étant le temps à partir duquel la courbe de réponse devient complètement incluse dans la bande définie par  $\pm 5\%$  autour de la valeur donnant le régime permanent. D'après les graphes des réponses (page 75), on lit alors:

2-1. Courbe ( $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ;  $K = 100$ ): Le temps de réponse  $t_r \approx 31 \text{ ms}$



2-2- Courbe ( $T = 10^{-3} \text{ s}; K = 100$ ) : Le temps de réponse  $t_2 \approx 35 \text{ ms}$

2-3- Courbe ( $T = 10^{-3} \text{ s}; K = 500$ ) : Le temps de réponse  $t_3 \approx 186 \text{ ms}$ .

Nous récapitulons tous les résultats précédents dans le tableau suivant :

Réponse $\Delta/(NT)$	$ \theta_m $	$f_m$ (Hz)	temps de réponse $t_i$ (ms)
$T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}; K = 100$	106	19,4	31
$T = 10^{-3} \text{ s}; K = 100$	96,5	19,4	35
$T = 10^{-3} \text{ s}; K = 500$	15,1	49,2	186

Conclusion : D'après ces résultats et les graphes (p. 75), on conclue que pour une même valeur de  $K$ , moins la période d'échantillonnage  $T$  du système pulsé avec bloqueur est longue, plus le processus transitoire est court (voir tableau ci-dessus), et plus la courbe de réponse se rapproche de celle du système asservi continu correspondant; cela se comprend, car le bloqueur se comporte comme un filtre passe-bas; son effet est d'augmenter l'inertie du système en introduisant des constantes de temps dites de "lissage".

En outre, pour une même période d'échantillonnage  $T$ , quand le coefficient d'amplification  $K$  augmente, la durée des transitoires et la fréquence caractéristique  $f_m$  augmentent, l'amortissement diminue, il y a dans ce cas une accentuation des oscillations (voir courbe ③) et par la suite une diminution de la stabilité.

Comme pour les systèmes continus, le facteur  $K$  est aussi une source d'instabilité pour les systèmes asservis pulsés.

Enfin, l'erreur de position  $E_p(\infty)$  est bien nulle, ce qui est conforme à la théorie, car le processus comporte une intégration.



Remarque : Pour avoir plus de renseignements sur le signal de sortie, on doit déterminer la transformée en  $z$  modifiée, qui donne les valeurs exactes entre les instants successifs d'échantillonnage.

Néanmoins, étant donné qu'on a choisi des périodes d'échantillonnage relativement faibles, et de plus, d'après les résultats des tracés obtenus, nous jugeons que la précision, (sur les courbes tracées et complétées à partir des valeurs de  $s(nT)$ , aux instants d'échantillonnage, données par la transformée en  $z$  seule), est suffisante pour donner des conclusions raisonnables sur la réponse totale du système.

2-1-5-2- Réponses à une rampe :  $e(t) = t \cdot u(t) \Rightarrow E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

Soit :  $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow S(z) = T \frac{z N(z)}{(z-1)(z-1)D(z)} = Tz \frac{N(z)}{(z-1)D_1(z)}$

Dans ce cas  $D_1(z)$  possède une racine  $z = 1$  puisque  $D_1(z) = (z-1)D(z)$ .

Pour trouver  $s(nT)$ , on utilise la méthode des résidus, qui donne :

$$s(nT) = \sum_{Pr} \text{Res} \left[ \frac{N(z) T z^n}{D_1(z)(z-1)} \right]$$

$S(z)$  possède alors dans ce cas un pôle double  $z=1$ , en appliquant la méthode des résidus pour pôles multiples; la formule de développement de Heaviside correspondant à ce cas est la suivante :

$$\frac{s(nT)}{T} = \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{N(z) \cdot z^n}{D_1(z)(z-1)} \right]_{z=1} + \sum_{Pr} \frac{N(Pr)}{Pr (Pr-1) \cdot D'_1(Pr)} \cdot Pr^n + \sum_{Pi+} 2 \left| \frac{N(Pi+)}{(Pi+-1) D'_1(Pi+)} \right| |Pi+|^n \cos(n\theta_{i+}) \quad (60)$$

$\frac{s(nT)}{T} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{N(z) \cdot z^n}{D(z)} \right]_{z=1} + \sum_{Pr} \frac{N(Pr)}{Pr (Pr-1) D'_1(Pr)} \cdot Pr^n + \sum_{Pi+} 2 \left  \frac{N(Pi+)}{(Pi+-1) D'_1(Pi+)} \right   Pi+ ^n \cos(n\theta_{i+} + \phi_{i+}) \quad (60 \text{ bis})$
--

A) Adoptons :  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ ;  $K = 100$ .

D'après (2-1-5-1.A), et avec  $E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$ , on a :

$$S(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \cdot \frac{[1,055z^2 + 9,86z + 0,885] \cdot 10^{-5}}{z^3 - 2,83677z^2 + 2,67956z - 0,84267}$$

$$D(z) = z^3 - 2,83677z^2 + 2,67956z - 0,84267$$

$$D_1(z) = (z-1) \cdot D(z) ; N(z) = [1,055z^2 + 9,86z + 0,885] \cdot 10^{-5}$$

Calculons les termes de l'expression (60bis) :

$$\cdot \frac{d}{dz} \left[ \frac{N(z)}{D(z)} z^n \right]_{z=1} \neq n - 50$$

D'après (2-1-5-1.A), on a :  $p_r \neq 0,87808$  ;  $p_i = 0,97934 \pm j0,02373$

$$D'_1(z) = D(z) + (z-1)D'(z) \Rightarrow D'_1(p_r) \neq -1,218 \cdot 10^{-3}$$

$$N(p_r) \neq 10,356 \cdot 10^{-5} ; |p_i| \neq 0,979 ; \arg p_i \neq 1,4^\circ$$

$$(p_i - 1) = 3,146 \cdot 10^{-2} ; \arg(p_i - 1) \neq -49^\circ$$

$$\cdot \frac{N(p_r)}{(p_r - 1) D'_1(p_r)} \neq 0,7$$

$$|N(p_i)| \neq 11,556 \cdot 10^{-5} , \arg N(p_i) \neq 1,4^\circ$$

$$D'_1(p_i) \neq -9,05 \cdot 10^{-5} - j \cdot 12,65 \cdot 10^{-5} \Rightarrow |D'_1(p_i)| \neq 15,5 \cdot 10^{-5} ; \arg D'_1(p_i) \neq 54,4^\circ$$

$$\cdot 2 \left| \frac{N(p_i)}{(p_i - 1) D'_1(p_i)} \right| \neq 48$$

$$\theta_{i,r} = \arg p_i \neq 1,4^\circ ; \phi_{i,r} = \arg N(p_i) - \arg(p_i - 1) - \arg D'_1(p_i) \neq -4^\circ$$

Finalement la réponse  $s(nT)$  à la rampe aux instants d'échantillonnage pour

$T = 2 \cdot 10^{-4}$  s et  $K = 100$  est :

$$s(nT) \neq T [n - 50 + 0,7 \cdot (0,878)^n + 48 \cdot (0,979)^n \cos(1,4n - 4)] \quad (61)$$

B) Adoptons :  $T = 10^{-2}$  ;  $K = 100$ .

D'après (2-1-5-1-B), avec  $E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$ , on a :



$$S(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \cdot \frac{[2,158z^2 + 7,088z + 1,4] \cdot 10^{-3}}{z^3 - 2,31631z^2 + 1,75049z - 0,42354}$$

$$D(z) = z^3 - 2,31631z^2 + 1,75049z - 0,42354$$

$$D_1(z) = (z-1)D(z) ; N(z) = [2,158z^2 + 7,088z + 1,4] \cdot 10^{-3}$$

Comme dans (2-1-5-18) :  $p_r \neq 0,5137$

$$p_i \neq 0,90130 \pm j 0,11017 \Rightarrow \text{Arg}(p_i) \neq 7^\circ, |p_i| \neq 0,908$$

$$|p_i - 1| \neq 0,1483 ; \arg(p_i - 1) \neq -48,1^\circ$$

$$N(p_r) \neq 5,61 \cdot 10^{-3} ; |N(p_i)| \neq 9,59 \cdot 10^{-3} ; \arg N(p_i) \neq 7,3^\circ$$

On calcule les termes de l'expression (60bis) :

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{N(z)}{D_1(z)} \cdot z^n \right]_{z=1} \approx n - 10$$

$$D'_1(z) = D(z) + (z-1)D'(z) \Rightarrow D'_1(p_r) \neq -7,89 \cdot 10^{-2}, \text{ d'où :}$$

$$* \frac{N(p_r)}{(p_r-1)D'_1(p_r)} \neq 0,15.$$

$$D'_1(p_i) = -711,38 \cdot 10^{-5} - j 1120,86 \cdot 10^{-5} \Rightarrow |D'_1(p_i)| \neq 13,275 \cdot 10^{-3} ; \arg D'_1(p_i) \neq 57,5^\circ$$

$$\text{d'où : } 2 \cdot \left| \frac{N(p_i)}{(p_i-1)D'_1(p_i)} \right| \neq 9,8.$$

$$\theta_{i+} = \arg p_i \neq 7^\circ ; \phi_{i+} = 7,3 + 48,1 - 57,5 = -2,1^\circ$$

La réponse  $s(nT)$  à la rampe pour  $T = 10^{-3}$  ;  $K = 100$  s'écrit donc :

$$s(nT) \neq T [n - 10 + 0,15 (0,5137)^n + 9,8 (0,908)^n \cos(7n - 2,1)] \quad (62).$$

C) Adoptons :  $T = 10^{-3}$  ;  $K = 500$ .

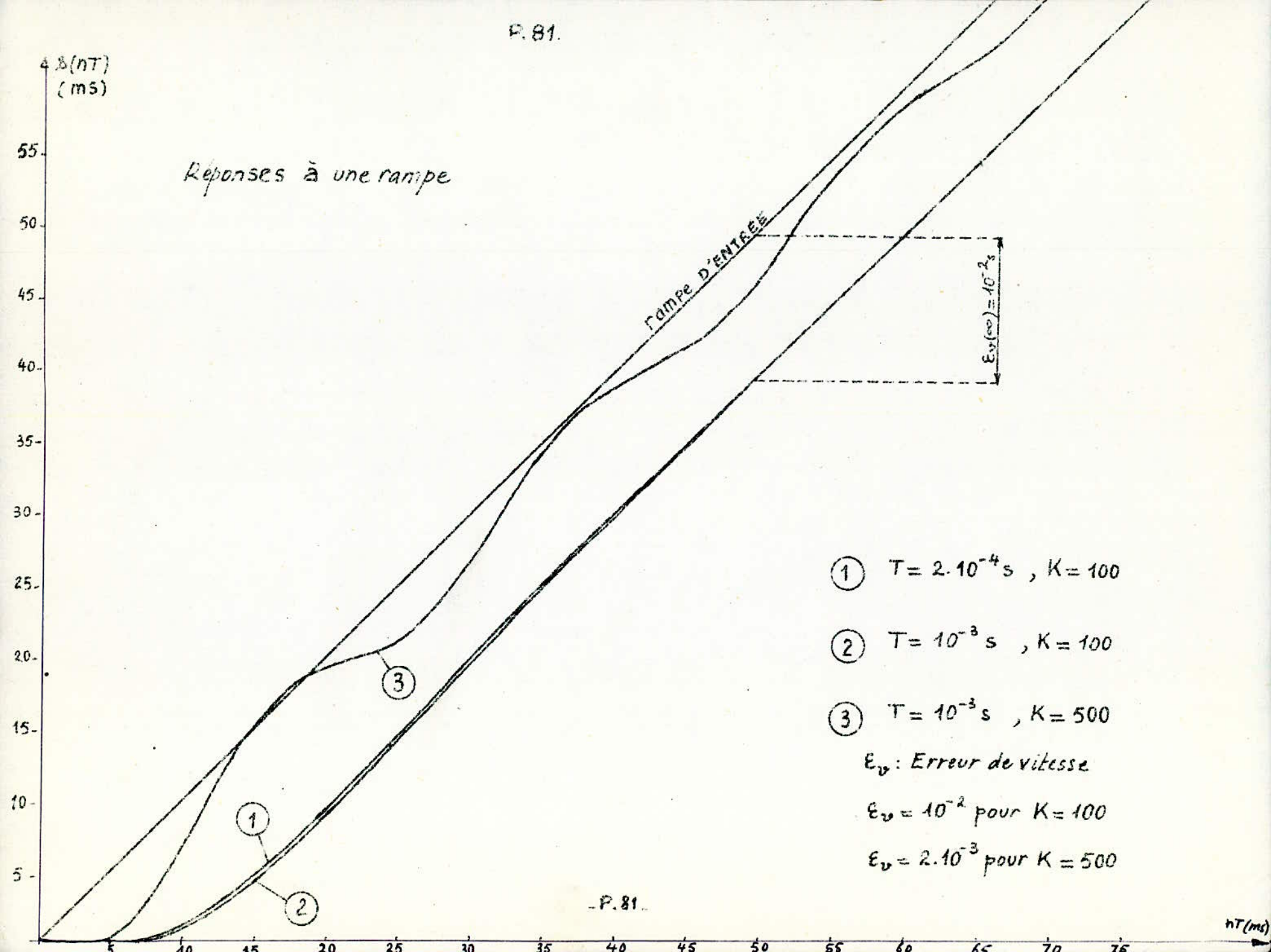
D'après (2-1-5-1 C) avec  $E(z) = (Tz) / (z-1)^2$

$$S(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \cdot \frac{[10,79z^2 + 35,44z + 7] \cdot 10^{-3}}{(z^3 - 2,30768z^2 + 1,77885z - 0,41794)}$$



$h(nT)$   
(ms)

Réponses à une rampe



①  $T = 2 \cdot 10^{-4} s$  ,  $K = 100$

②  $T = 10^{-3} s$  ,  $K = 100$

③  $T = 10^{-3} s$  ,  $K = 500$

$E_v$  : Erreur de vitesse

$E_v = 10^{-2}$  pour  $K = 100$

$E_v = 2 \cdot 10^{-3}$  pour  $K = 500$

$$D(z) = z^3 - 2,30768 z^2 + 1,77885 z - 0,41794$$

$$D_1(z) = (z-1) \cdot D(z) \Rightarrow D'_1(z) = z^3 + (z-1)D'(z)$$

$$N(z) = (10,79 z^2 + 35,44 z + 7) \cdot 10^{-3}$$

D'après (2-1-5-1. C), on a :

$$p_r \neq 0,4306 ; p_i = 0,93854 \pm j 0,29953 \Rightarrow |p_i| = 0,985 ; \theta_{i+} = \arg p_{i+} \neq 17,7^\circ$$

$$|p_{i+} - 1| \neq 0,3057 ; \arg(p_{i+} - 1) \neq -78,4.$$

$$N(p_r) = 24,26 \cdot 10^{-3} ; |N(p_{i+})| = 51,57 \cdot 10^{-3} ; \arg N(p_{i+}) \neq 19^\circ$$

Calculons les termes de l'expression (60 bis) :

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{N(z)}{D(z)} \cdot z^n \right]_{z=1} = n-2$$

$$D'_1(p_r) \neq -0,198 ; \frac{N(p_r)}{(p_r-1)D'_1(p_r)} \neq 0,215$$

$$D'_1(p_{i+}) = -8,012 \cdot 10^{-2} - j 7,244 \cdot 10^{-2} \Rightarrow |D'_1(p_{i+})| \neq 10,8 \cdot 10^{-2} ; \arg D'_1(p_{i+}) \neq 42^\circ$$

$$d'oi: 2 \cdot \left| \frac{N(p_{i+})}{(p_{i+}-1)D'_1(p_{i+})} \right| \neq 3,123.$$

$$\phi_{i+} \neq 19 + 78,4 - 42 \neq 55,4^\circ$$

Finalement  $s(nT)$  s'écrit pour  $T = 10^{-3} s$  et  $K = 500$  :

$$s(nT) \neq T [ n-2 + 0,215 (0,4306)^n + 3,123 (0,985)^n \cos(17,7n + 55,4) ]$$

(63).

Les courbes représentées par les équations (61), (62) et (63) sont représentées sur la feuille millimétrée (page 81).

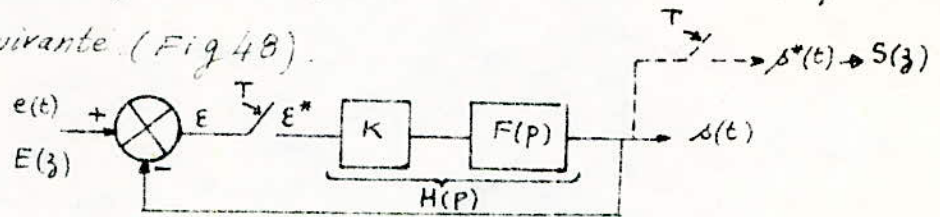
En analysant ces réponses, on conclue que lorsque  $K$  augmente, l'erreur de traînage diminue (car  $E_v(\infty) = \frac{1}{K}$ ) mais malheureusement la stabilité du système diminue. En effet pour  $T = 10^{-3} s$ ;  $K = 500$ , il y a apparition d'oscillations avec réduction de l'erreur (courbe ③,  $E_v(\infty) = 2 \cdot 10^{-3}$  d'après (63))

Pour les courbes correspondant à ( $T = 10^{-3} s$ ;  $K = 100$ ) et ( $T = 2 \cdot 10^{-4} s$ ;  $K = 100$ ) respectivement ② et ① sur le graphe (p. 81), l'erreur  $E_v(\infty) = 10^{-2}$

elle est la même pour les 2 courbes, car  $E(nT)$  ne dépend pas de  $T$ . Cependant, on constate que la courbe ① est légèrement plus amortie que la courbe ②; cela vient du fait qu'elle tend vers la réponse du système continu correspondant, à cause de la faiblesse de sa période d'échantillonnage et de l'effet de l'élément bloqueur, cité dans le cas de la réponse à l'échelon.

2-2 - Le système comporte uniquement un échantillonneur:

2-2-1- Fonction de transfert: Nous allons analyser dans ce paragraphe, le système précédent, comportant uniquement un échantillonneur, représenté par la figure suivante. (Fig 4B).



- Fig 4B -

$H(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$  ; décomposons  $H(p)$  en éléments simples :

$H(p) = K \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{1+T_1p} + \frac{C}{1+T_2p} \right)$  ; On détermine les constantes, A, B et C par identification ; on trouve :

$$A = 1, \quad B = \frac{-T_1^2}{T_1 - T_2}, \quad C = \frac{T_2^2}{T_1 - T_2} \quad (64)$$

A l'aide des tables de transformées en  $z$  (voir annexe), et du fait que :

$H^*(p) = T \cdot H(p) \Rightarrow H(z) = T \cdot \mathcal{Z}[H(p)]$ , on a donc :

$$H(z) = KT \left[ A \frac{z}{z-1} + \frac{B}{T_1} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{C}{T_2} \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} \right] \quad (65)$$

$$H(z) = KT \left[ A \frac{z}{z-1} + B' \frac{z}{z - \lambda_1} + C' \frac{z}{z - \lambda_2} \right] \text{ avec } B' = \frac{B}{T_1}; C' = \frac{C}{T_2},$$

$$\lambda_1 = e^{-T/T_1}; \lambda_2 = e^{-T/T_2}$$



La transmittance du système,  $S(z)/E(z)$  s'écrit :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{avec:}$$

$$N(z) = KT \left[ z^3(A+B'+C') - z^2(A(\lambda_1+\lambda_2) + B'(1+\lambda_2) + C'(1+\lambda_1)) + z(A\lambda_1\lambda_2 + B'\lambda_2 + C'\lambda_1) \right] \quad (66)$$

$$D(z) = z^3[1 + KT(A+B'+C')] - z^2[KT(A(\lambda_1+\lambda_2) + B'(1+\lambda_2) + C'(1+\lambda_1)) + 1 + \lambda_1 + \lambda_2] + z[KT(A\lambda_1\lambda_2 + B'\lambda_2 + C'\lambda_1) + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2] - \lambda_1\lambda_2 \quad (67)$$

2-2-2. Etude de la stabilité : Considérons l'équation caractéristique de la transmittance  $S(z)/E(z)$ , soit :

$$1+H(z) = \frac{D(z)}{(z-1)(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} ; \quad 1+H(z) = 0 \Rightarrow D(z) = 0$$

$$D(z) \text{ peut s'écrire aussi: } D(z) = K_1 z^3 + K_2 z^2 + K_3 z + K_4 = 0 \quad (67 \text{ bis})$$

Effectuons le changement de variable tel que :  $z = \frac{1+W}{1-W}$

$$\text{On obtient: } \left(\frac{1+W}{1-W}\right)^3 \cdot K_1 + \left(\frac{1+W}{1-W}\right)^2 \cdot K_2 + \left(\frac{1+W}{1-W}\right) \cdot K_3 + K_4 = 0$$

Cette équation se réduit à celle-ci :

$$W^3(K_1 - K_2 + K_3 - K_4) + W^2(3K_1 - K_2 - K_3 + 3K_4) + W(3K_1 + K_2 - K_3 - 3K_4) + (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) = 0 \quad (68)$$

Cette équation a la forme suivante :  $B_3 W^3 + B_2 W^2 + B_1 W + B_0 = 0$  (68 bis)

D'après le critère de ROUTH, l'équation (68 bis) a ses racines à partie <sup>réelle</sup> négative, correspondant au système stable, si les 2 conditions suivantes sont satisfaites :

a) Les coefficients  $B_3, B_2, B_1$  et  $B_0$  doivent être de même signe :

On remarque que  $B_0 = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = KTA(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)$  est positif dans l'intervalle de  $T = [10^{-4} \text{ s}, 10^{-3} \text{ s}]$  car  $A = 1$  et  $K$  ne peut être que positif. Cette remarque nous amène à choisir tous les " $B_i$ " positifs

Considérons maintenant chaque coefficient :

$$a_1/ \text{Coefficient } B_3 : B_3 = 2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2 + KT[A(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2) + B'(2 + 2\lambda_2) + C'(2 + 2\lambda_1)]$$

$$B_3 = 0 \Rightarrow K = \frac{-(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)}{T \left[ \frac{A}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2) + B'(1 + \lambda_2) + C'(1 + \lambda_1) \right]} \quad (69)$$

$$a_2/ \text{Coefficient } B_2 : B_2 = 4 - 4\lambda_1\lambda_2 + KT[A(3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2) + 4B' + 4C']$$

$$B_2 = 0 \Rightarrow K = \frac{-(1 - \lambda_1\lambda_2)}{T \left[ \frac{A}{4}(3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2) + B' + C' \right]} \quad (70)$$

a<sub>3</sub>/ Coefficient  $B_1$  :

$$B_1 = 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2 + KT[A(3 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2) + B'(2 - 2\lambda_2) + C'(2 - 2\lambda_1)]$$

$$B_1 = 0 \Rightarrow K = \frac{-(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)}{T \left[ \frac{A}{2}(3 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2) + B'(1 - \lambda_2) + C'(1 - \lambda_1) \right]} \quad (71)$$

La condition : Tous les " $B_i$ " positifs conduit à choisir des couples  $(K, T)$  correspondant à des points situés dans la zone se trouvant au dessus ou au dessous des courbes respectivement données par les expressions (69), (70) et (71), suivant que le dénominateur de chacune de celles-ci soit respectivement positif ou négatif.

b/ Les mineurs  $\Delta_i$  de  $\Delta$  doivent être de même signe :

Comme dans le cas du système comportant un échantillonneur-bloqueur, (cf 2-1-2-b), cette condition nous amène à l'inégalité suivante, (56) :

$$\underline{K_1(K_1 - K_3) > K_4(K_4 - K_2)} \quad (\text{Les } K_i \text{ sont données par (67) et (67bis)})$$

2-2-3. Etude de la précision du système : Comme dans le paragraphe (2-1-3), nous allons calculer l'erreur  $\varepsilon(nT)$  pour un échelon de position, puis pour une rampe à l'entrée.



a) Echelon de position: D'après le paragraphe (2-1-3-a), l'erreur de position s'écrit:  $E_p(\infty) = \frac{1}{1+H(1)}$

Or d'après (65):  $H(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \infty \Rightarrow \boxed{E_p(\infty) = 0}$

L'erreur de position est nulle, ce résultat est logique, car le processus comporte une intégration.

b) Rampe: D'après le paragraphe (2-1-3-b), l'erreur de vitesse s'écrit:

$$E_v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)H(z)}$$

D'après (65):  $(z-1)H(z) = KTz \left[ A + B' \frac{z-1}{z-\lambda_1} + C' \frac{z-1}{z-\lambda_2} \right]$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H(z) = AKT \Rightarrow \boxed{E_v(\infty) = \frac{1}{K}} \quad \text{car } A=1$$

L'erreur de traînage (de vitesse) est inversement proportionnelle à  $K$ ; elle ne dépend pas de  $T$ ; ce résultat est semblable au cas des systèmes asservis continus.

#### 2-2-4 - Application au calcul de la stabilité du système:

La charge a une inertie moyenne:  $J_{cm} = 0,715 \cdot 10^{-4} \text{ Kg-m}^2$ ;  $F(p)$  est donnée par (46) avec:  $T_1 = 0,00360 \text{ s}$ ;  $T_2 = 0,00173 \text{ s}$ .

D'après le système de relations, (64); on tire les valeurs des constantes:

$$\underline{A = 1}; \quad \underline{B' = -1,925}; \quad \underline{C' = 0,925}.$$

a) Adoptons la valeur de la période d'échantillonnage:  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

La 1<sup>ère</sup> condition du critère de ROUTH donne: (cf 2-2-2-a-a<sub>i</sub>)

- $B_0 > 0 \Rightarrow K > 0$
- $B_1 > 0 \Rightarrow K > -311345$
- $B_2 > 0 \Rightarrow K < 533254$



$$\cdot B_3 > 0 \Rightarrow K < 194167810$$

La 2<sup>e</sup> condition du critère de ROUTH, (cf 2-2-2-b) donne pour

$$T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} : K < 857,3.$$

En conclusion, en vertu du critère de ROUTH, le système est stable pour  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ , si  $K < 857,3$ .

b) Adoptons la valeur de la période d'échantillonnage:  $T = 10^{-3} \text{ s}$ :

La première condition du critère de ROUTH donne pour:

$$\cdot B_0 > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$\cdot B_1 > 0 \Rightarrow K > -14012,89$$

$$\cdot B_2 > 0 \Rightarrow K < 21604$$

$$\cdot B_3 > 0 \Rightarrow K < 361072.$$

La 2<sup>e</sup> condition du critère donne pour  $T = 10^{-3} \text{ s}$ ,  $K < 856,46$

En conclusion, d'après le critère de ROUTH, le système est stable pour  $T = 10^{-3} \text{ s}$  si  $K < 856,46$ .

On remarque que la limitation de  $K$ , ne dépend que très peu de la période d'échantillonnage  $T$ .

2-2-5. Étude de la réponse  $s(nT)$  aux instants d'échantillonnage:

Nous allons étudier, dans ce paragraphe la réponse  $s(nT)$  aux instants d'échantillonnage pour des entrées du type: échelon unitaire et rampe.

D'autre part, on se limite dans cette partie à faire apparaître seulement l'influence de la période d'échantillonnage  $T$  sur la réponse  $s(nT)$ .

L'étude de la réponse, pour <sup>de</sup> différentes valeurs du coefficient d'amplification  $K$ , n'a pas beaucoup d'importance, car nous le savons d'avance  $K$  ne fait introduire que des oscillations, elle est source d'instabilité'

comme nous l'avons vu dans le cas du système comportant un échantillonneur bloqueur.

2-2-5-1 - Réponses à l'échelon unitaire:  $e(t) = u(t) \Rightarrow E(z) = \frac{z}{z-1}$

A - Adoptons  $T = 10^{-3}$  s et  $K = 100$  (valeurs correspondant à un système stable, d'après (2-2-4) b), et d'après (2-2-1), on a:

$$S(z) = E(z) \cdot \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{N(z)}{D(z)}$$

En remplaçant  $\lambda_1, \lambda_2, K, T, A, B'$  etc' par leurs valeurs, les expressions (66) et (67) deviennent:

$$N(z) = (6,08237z^2 + 4,56462z) \cdot 10^{-3}$$

$$D(z) = z^3 - 2,31238z^2 + 1,74797z - 0,42494$$

$z=1$ , n'est pas une racine de  $D(z)$ , pour trouver la réponse  $s(nT)$  à l'échelon de position, on procède de la même manière que dans le cas du bloqueur, c'est à dire: on cherche d'abord les pôles de  $S(z)$  qui sont les racines de  $D(z)$ , on applique ensuite la formule du développement de Heaviside (34) ch. II).

Les racines de  $D(z)$  sont:  $z = 0,5246$ ;  $z_{1,2} = 0,8939 \pm j0,1055$

on vérifie bien que ces pôles de  $S(z)$  sont bien situés à l'intérieur du cercle de centre l'origine et de rayon l'unité dans le plan de  $z$ , le système est donc stable.

Calculons maintenant chacun des termes de la formule du développement de Heaviside (34), avec:  $p_r = 0,5246$ ;  $p_{i+} = 0,8939 + j0,1055$ .

$D'(z) \# 3z^2 - 4,6247z + 1,748$ ; on trouve:

$$\frac{N(z)}{D(z)} \# 1; N(p_r) = 4,068 \cdot 10^{-3}; D'(p_r) = 0,1475 \Rightarrow \frac{N(p_r)}{(p_r-1)D'(p_r)} = -5,8013 \cdot 10^{-2}$$

$$N(p_{i+}) = 8,872 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,629 \cdot 10^{-3} \Rightarrow |N(p_{i+})| \# 9,018 \cdot 10^{-3}; \arg N(p_{i+}) \# 10,4^\circ$$



$$D'(p_{i+}) = -2,215 \cdot 10^{-2} + j \cdot 7,794 \cdot 10^{-2} \Rightarrow |D'(p_{i+})| = 8,102 \cdot 10^{-2}; \arg D'(p_{i+}) = -74,1^\circ$$

$$p_{i+} - 1 = -0,1061 + j \cdot 0,1055 \Rightarrow |p_{i+} - 1| \neq 0,1493; \arg(p_{i+} - 1) \neq -45^\circ$$

$$\text{d'où : } 2 \left| \frac{N(p_{i+})}{(p_{i+} - 1)D'(p_{i+})} \right| \neq 1,5$$

$$\theta_{i+} = \arg p_{i+} = 6,7^\circ, \quad \phi_{i+} = 10,4 + 74,1 + 45 = 129,5; |p_{i+}| = 0,900.$$

Enfin, la réponse à l'échelon de position pour  $T = 10^{-3}$  s et  $K = 100$  s'écrit :

$$s(nT) \neq 1 - 0,058 \cdot (0,524)^n + 1,5(0,9)^n \cos(6,7n + 129,5) \quad (72)$$

B) Adoptons  $T = 2 \cdot 10^{-4}$  s,  $K = 100$  :

De la même <sup>manière</sup> que pour (A), en remplaçant  $\lambda_1, \lambda_2, K, T, A, B$  etc' par leurs valeurs dans les expressions (66) et (67), on obtient :

$$N(z) = 6,128 \cdot 10^{-5} z^2 + 5,672 \cdot 10^{-5} z$$

$$D(z) = z^3 - 2,83671 z^2 + 2,67951 z - 0,84268.$$

Toujours, en procédant comme dans le cas précédent (A); les racines de  $D(z)$  sont :  $z = 0,87879$  ;  $z_{1,2} = 0,97896 \pm j 0,02339$ .

Du fait que  $z = 1$ , n'est pas une racine de  $D(z)$ , on applique dans ce cas aussi la formule de développement de Heaviside ((34) chap II) dont on calcule chacun de ses termes, sachant que :

$$p_r = 0,87879; \quad p_i = 0,97896 \pm j \cdot 0,02339; \quad p_{i+} = 0,97896 + j \cdot 0,02339.$$

$p_r$  et  $p_i$  sont les pôles de  $S(z)$ , ils sont bien situés à l'intérieur du cercle de centre l'origine et du rayon l'unité; <sup>cela</sup> correspond à un système stable.

$$D'(z) \neq 3z^2 - 5,6734 z + 2,6795$$

$$N(p_r) \neq 9,717 \cdot 10^{-5}; \quad D'(p_r) \neq 1,058 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \frac{N(p_r)}{(p_r - 1)D'(p_r)} \neq -0,076$$

$$N(p_{i+}) = 11,422 \cdot 10^{-5} + j \cdot 0,413 \cdot 10^{-5} \Rightarrow |N(p_{i+})| \neq 11,43 \cdot 10^{-5}; \arg N(p_{i+}) \neq 2^\circ$$

$$D'(p_{i+}) = -1,094 \cdot 10^{-3} + j \cdot 4,686 \cdot 10^{-3} \Rightarrow |D'(p_{i+})| = 4,812 \cdot 10^{-3}; \arg D'(p_{i+}) \neq -77^\circ$$



$$p_{i+1} = -0,02104 + j \cdot 0,02339 \Rightarrow |p_{i+1}| = 3,146 \cdot 10^{-2}; \arg(p_{i+1}) \approx -48^\circ$$

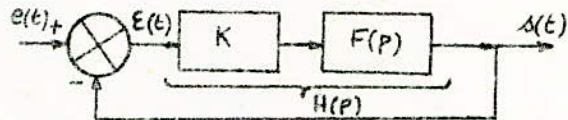
$$\text{d'où: } 2 \cdot \left| \frac{N(p_{i+1})}{(p_{i+1}-1)D'(p_{i+1})} \right| \approx 1,51$$

$$\theta_{i+1} = \arg p_{i+1} = 1,4^\circ; \phi_{i+1} \approx 2 + 48 + 77 = 127^\circ$$

Finalement la réponse  $s(nT)$  à l'échelon unitaire pour  $T = 2 \cdot 10^{-4}$  s et  $K = 100$  s'écrit :

$$s(nT) \approx 1 - 0,076 \cdot (0,878)^n + 1,51 \cdot (0,979)^n \cdot \cos(1,4n + 127) \quad (73)$$

c) Adoptons  $T = 0$  s;  $K = 100$  : Dans ce cas, le système est continu, il est représenté par la fig. 49 :



- Fig 49 -

En utilisant la transformée de Laplace; la fonction de transfert en boucle fermée du système s'écrit :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{100}{p(1+T_1p)(1+T_2p) + 100}$$

$$\text{car } H(p) = KF(p) = \frac{100}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$(S(p)/E(p)) \text{ peut s'écrire aussi: } \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{10^{-2}p(1+T_1p)(1+T_2p) + 1}$$

En remplaçant  $T_1$  et  $T_2$  par leurs valeurs :

$$T_1 = 0,00360 \text{ s et } T_2 = 0,00173 \text{ s, on obtient: } \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{6,23 \cdot 10^{-8}p^3 + 5,33 \cdot 10^{-5}p^2 + 10^{-2}p + 1}$$

Le polynôme :  $6,23 \cdot 10^{-8}p^3 + 5,33 \cdot 10^{-5}p^2 + 10^{-2}p + 1$  possède une

racine réelle :  $p = -645,36$  (trouvée par itérations successives), les 2 autres

racines sont solutions du trinôme :  $6,23 \cdot 10^{-8}p^2 + 1,31 \cdot 10^{-5}p + 0,155 \cdot 10^{-2}$ .

obtenu par division du polynôme :  $(6,23 \cdot 10^{-8}p^3 + 5,33 \cdot 10^{-5}p^2 + 10^{-2}p + 1)$  par le polynôme :  $p + 645,36$ .

Les racines de ce trinôme quotient sont complexes :  $p_{1,2} = -105,13 \pm j117,58$ .

Dans ce cas, aussi, on voit bien que les pôles de  $S(p)/E(p)$  ou bien les racines.

du dénominateur de  $S(p)/E(p)$  ont la partie réelle négative, ce qui vérifie la stabilité du système. D'autre part, on peut écrire aussi :

$$6,23 \cdot 10^{-8} p^3 + 1,31 \cdot 10^{-5} p + 0,155 \cdot 10^{-2} = 6,23 \cdot 10^{-8} [(p+105,13)^2 + (117,58)^2]$$

$$\text{D'où : } \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{6,23 \cdot 10^{-8} (p+645,36) [(p+105,13)^2 + (117,58)^2]}$$

Puisque l'entrée est un échelon unitaire :  $E(p) = \frac{1}{p}$ , donc :

$$S(p) = \frac{1}{6,23 \cdot 10^{-8} p \cdot (p+\delta) \cdot [(p+\alpha)^2 + \beta^2]} \quad (74) \quad \text{où : } \delta = 645,36 ;$$

$$\alpha = 105,13 ; \beta = 117,58.$$

Il s'agit maintenant de trouver  $s(t)$ , transformée inverse de Laplace de  $S(p)$ ; pour cela, nous décomposons  $S(p)$  en éléments simples comme suit :

$$S(p) = \frac{1}{6,23 \cdot 10^{-8}} \left[ \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\delta} + \frac{Cp+D}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} \right] \quad (75)$$

En effectuant  $S(p)$  et en identifiant avec l'expression (74), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} A(\alpha^2 + \beta^2)\delta = 1 \\ A + B + C = 0 \\ 2A\alpha + A\delta + 2\alpha B + C\delta + D = 0 \\ A(\alpha^2 + \beta^2) + 2A\alpha\delta + B\alpha^2 + B\beta^2 + D\delta = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, et après calcul, on trouve :

$$\frac{A}{6,23 \cdot 10^{-8}} = 1 ; \quad \frac{B}{6,23 \cdot 10^{-8}} \approx -0,081 ; \quad \frac{C}{6,23 \cdot 10^{-8}} \approx -0,919 ; \quad \frac{D}{6,23 \cdot 10^{-8}} \approx -245,7.$$

$$\text{Donc : } S(p) = \frac{1}{p} - 0,081 \cdot \frac{1}{p+\delta} - 0,919 \frac{p}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} - 245,7 \cdot \frac{1}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$S(p) = \frac{1}{p} - 0,081 \cdot \frac{1}{p+\delta} - 0,919 \left[ \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} \right] - 245,7 \frac{1}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$$



$$S(p) = \frac{1}{p} - 0,081 \frac{1}{p+8} - 0,919 \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} + \beta \frac{1}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} \left[ \frac{-245,7 + 0,919\alpha}{\beta} \right]$$

Ce qui donne numériquement :

$$S(p) = \frac{1}{p} - 0,081 \frac{1}{p+645,36} - 0,919 \frac{p+105,13}{(p+105,13)^2 + (117,58)^2} - \frac{117,58 \times 1,268}{(p+105,13)^2 + (117,58)^2}$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - 0,081 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+645,36}\right) - 0,919 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+105,13}{(p+105,13)^2 + (117,58)^2}\right] - 1,268 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{117,58}{(p+105,13)^2 + (117,58)^2}\right]$$

Or d'après les tables des transformées données en annexe, on trouve

$$\text{facilement : } s(t) = 1 - 0,081 e^{-645,36t} - 0,919 e^{-105,13t} \cdot \cos 117,58t - 1,268 e^{-105,13t} \cdot \sin 117,58t \quad (76)$$

L'angle (117,58) est exprimé en rad, en convertissant en degré, on trouve :

$$s(t) = 1 - 0,081 e^{-645,36t} - 0,919 e^{-105,13t} \cdot \cos(6,73 \cdot 10^3 t) - 1,268 e^{-105,13t} \cdot \sin(6,73 \cdot 10^3 t)$$

\* t exprimé en secondes. (76 bis)

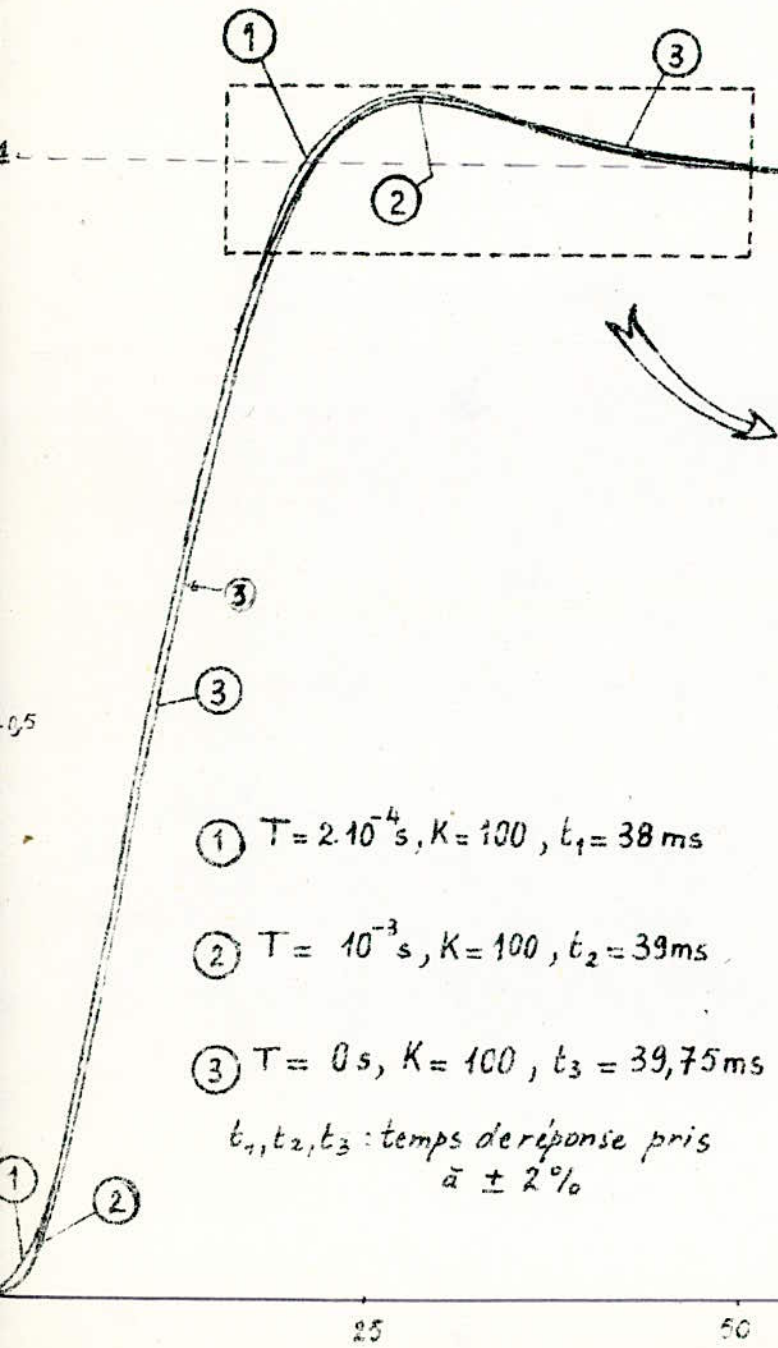
Les réponses représentées par les expressions (72), (73) et (76 bis) sont tracées sur la page 93. (La partie encadrée est agrandie).

Pour pouvoir analyser ces courbes, nous étudierons les coefficients d'amortissement et les temps de réponse.

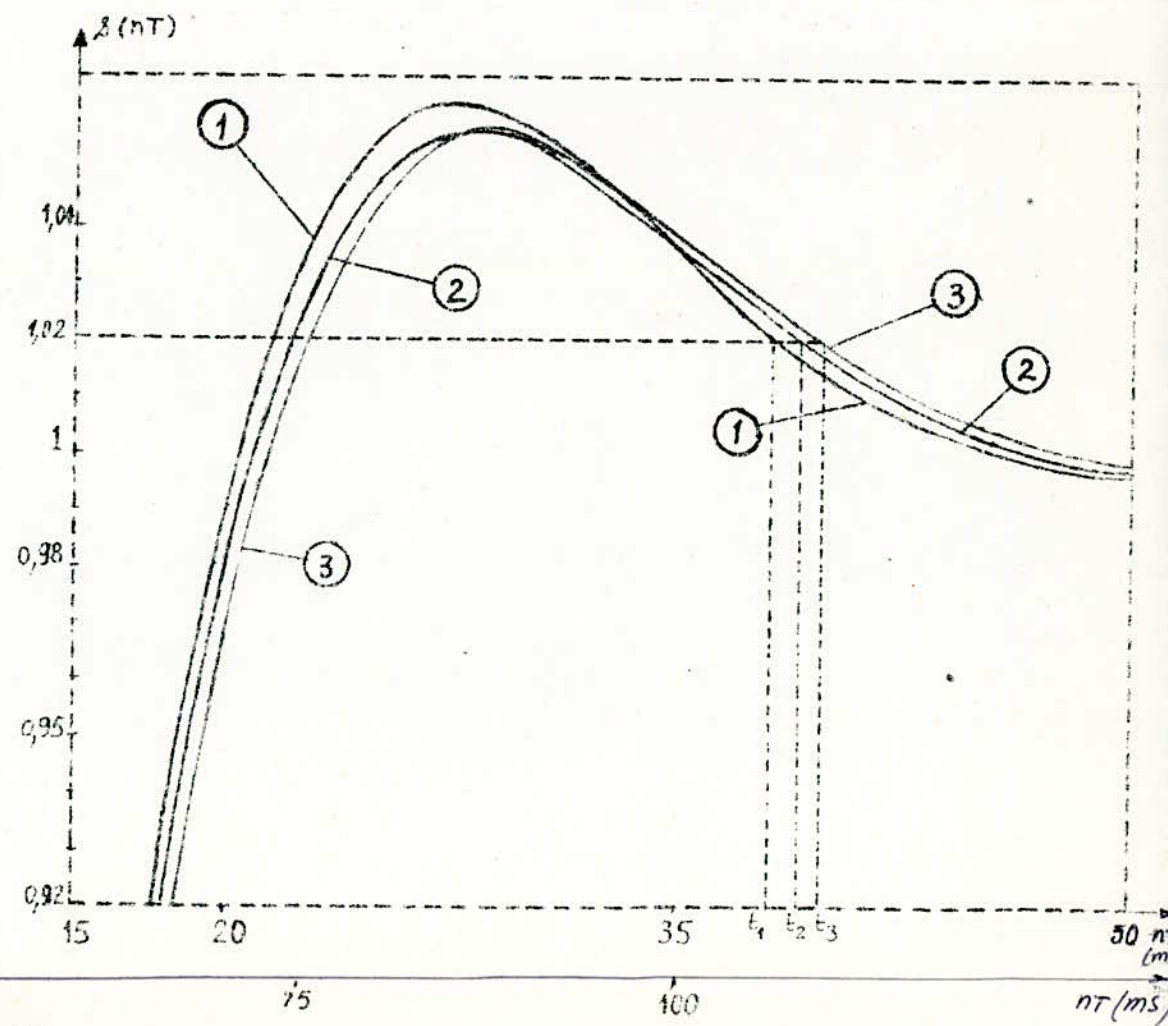
- Coefficients d'amortissement et temps de réponse : Le temps de réponse a été choisi à  $\pm 2\%$  de la valeur représentant le régime permanent (17) pour pouvoir déceler la légère différence entre les temps de réponse des 3 courbes très serrées.



Réponses à l'échelon unitaire : Le système comporte uniquement un échantillonneur.



- ①  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}, K = 100, t_1 = 38 \text{ ms}$
  - ②  $T = 10^{-3} \text{ s}, K = 100, t_2 = 39 \text{ ms}$
  - ③  $T = 0 \text{ s}, K = 100, t_3 = 39,75 \text{ ms}$
- $t_1, t_2, t_3$  : temps de réponse pris  
à  $\pm 2\%$



1°) Réponse  $s(nT)$  pour  $T = 10^{-3} s$ ;  $K = 100$ .

De la même manière que dans le cas du bloqueur-échantillonneur, l'amortissement  $\theta_m$  est donné par:  $\theta_m = \frac{\ln|z_m|}{T}$  où  $z_m$  est le pôle dominant.

Dans ce cas:  $|\theta_m| = \left| \frac{\ln 0,9}{10^{-3}} \right| \approx 105,36$ ; le temps de réponse  $t_2 \approx 39$  ms

2°) Réponse  $s(nT)$  pour  $T = 2 \cdot 10^{-4} s$ ;  $K = 100$

$$|\theta_m| = \left| \frac{\ln 0,979}{2 \cdot 10^{-4}} \right| \approx 106$$
; le temps de réponse  $t_1 \approx 38$  ms

3°) Réponse  $s(nT)$  pour  $T = 0 s$ ;  $K = 100$ .

$$|\theta_m| \approx \alpha = 105,13$$
; le temps de réponse  $t_3 \approx 39,75$  ms.

Récapitulons dans le tableau suivant:

$K=100$ ; $T$ en s	temps de réponse à $\pm 2\%$ (ms)	$ \theta_m $	$\omega_{\theta_m} = \frac{\arg z_m}{2\pi}$ (Hz)
$10^{-3}$	39	105,36	18,61
$2 \cdot 10^{-4}$	38	106	19,4
0	39,75	105,13	18,71

\*  $\theta_m$  est une pseudo-fréquence caractéristique.

De ces résultats, on voit que le processus transitoire est plus court dans le cas d'un système pulsé que dans le cas d'un système continu pour une même valeur du coefficient d'amplification  $K$ , on peut donc mettre en évidence un effet stabilisant de l'échantillonnage. La plupart des systèmes échantillonnés sont pour ainsi dire plus stables que les systèmes continus correspondants grâce à l'échantillonnage. On observe toujours cet effet lorsque la partie continue possède une fréquence propre qui n'est que faiblement amortie.

Cependant, on démontre que cet effet stabilisant de l'échantillonnage dépend fortement de la fonction d'échantillonnage. Cet effet se fait



surtout sentir dans le cas d'une fonction constante sur l'intervalle d'échantillonnage  $T$ .

De la même manière, que dans le cas du système comportant un bloqueur-échantillonneur, nous faisons remarquer dans ce cas aussi que pour avoir le tracé précis des courbes, il suffit de calculer la transformée en  $z$  modifiée de  $\frac{S(z)}{E(z)}$  du système, qui permet de donner les valeurs de  $s(nT)$  entre deux instants d'échantillonnage. Toutefois, en joignant par un trait continu les valeurs de  $s(nT)$  aux instants d'échantillonnage, nous estimons que la précision est très bonne, car la période d'échantillonnage est relativement petite.

2-2-5-2 - Réponses à une rampe:  $e(t) = t \cdot u(t) \Rightarrow E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

$$\text{Soit: } \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow S(z) = T \cdot z \cdot \frac{N(z)}{(z-1)^2 \cdot D(z)} = T \cdot z \cdot \frac{N(z)}{(z-1)(z-1)D(z)} = T \cdot z \cdot \frac{N(z)}{(z-1)D_1(z)}$$

Dans ce cas  $D_1(z)$  possède une racine  $z=1$  puisque:  $D_1(z) = (z-1)D(z)$ .

$S(z)$  possède alors un pôle double  $z=1$ ; pour trouver  $s(nT)$ , on appliquera la formule du développement de Heaviside appropriée à ce cas. (60bis).

Nous allons étudier la réponse  $s(nT)$  à une rampe pour les 2 cas suivants:

A) Adoptons  $T = 2 \cdot 10^{-4} s$ ,  $K = 100$ .

$$\text{D'après 2-2-5-1-B: } D(z) = z^3 - 2,83671z^2 + 2,67951z - 0,84268$$

$$p_r = 0,87879; \quad p_{i+} = 0,97896 + j \cdot 0,02339; \quad |p_{i+}| = 0,979; \quad \arg p_{i+} \approx 1,4^\circ$$

$$D_1(z) = (z-1)D(z) \Rightarrow D'_1(z) = D(z) + (z-1)D'(z)$$

$$N(z) = 6,128 \cdot 10^{-5} z^2 + 5,672 \cdot 10^{-5} z$$

$$N(p_r) = 9,717 \cdot 10^{-5}; \quad N(p_{i+}) = 11,422 \cdot 10^{-5} + j \cdot 0,413 \cdot 10^{-5} \Rightarrow |N(p_{i+})| = 11,43 \cdot 10^{-5}$$

$$\arg N(p_{i+}) \approx 2^\circ; \quad p_{i+} - 1 = -0,02104 + j \cdot 0,02339 \Rightarrow |p_{i+} - 1| = 3,146 \cdot 10^{-2}; \quad \arg(p_{i+} - 1) \approx -48^\circ$$

Calculons maintenant, chacun des termes de  $\frac{s(nT)}{T}$ , (60):



$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{N(z)}{D(z)} z^n \right]_{z=1} \# n-50$$

$$D'_1(p_r) \# -1,282 \cdot 10^{-3}, \text{ d'où : } \frac{N(p_r)}{(p_r-1)D'_1(p_r)} = 0,625$$

$$D'_1(p_{i+}) = -8,654 \cdot 10^{-5} - j \cdot 12,42 \cdot 10^{-5} \Rightarrow |D'_1(p_{i+})| = 15,137 \cdot 10^{-5}; \arg D'_1(p_{i+}) \# 55^\circ$$

$$\text{d'où : } 2 \cdot \left| \frac{N(p_{i+})}{(p_{i+}-1)D'_1(p_{i+})} \right| \# 48$$

$$\theta_{i+} = \arg p_{i+} \# 1,4^\circ; \phi_{i+} \# 2 \cdot 55 + 48 = -5^\circ$$

Enfin la réponse  $s(nT)$  à la rampe aux instants d'échantillonnage pour

$$T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}, K = 100, \text{ s'écrit :}$$

$$s(nT) = T \left( n-50 + 0,625 \cdot (0,878)^n + 48 (0,979)^n \cos(1,4n - 5) \right) \quad (77)$$

B) Adoptons  $T = 10^{-3} \text{ s}, K = 100$ .

$$\text{D'après 2-2-5-1-A, on a : } D(z) = z^3 - 2,31238z^2 + 1,74797z - 0,42494$$

$$p_r = 0,5246; \quad p_{i+} = 0,8939 + j \cdot 0,1055 \Rightarrow |p_{i+}| = 0,9; \arg p_{i+} = 6,7^\circ$$

$$p_{i+}^{-1} = -0,1061 + j \cdot 0,1055 \Rightarrow |p_{i+}^{-1}| = 0,1493; \arg(p_{i+}^{-1}) \# -45^\circ$$

$$D_1(z) = (z-1)D(z); \quad D'_1(z) = D(z) + (z-1)D'(z)$$

$$N(z) = (6,08237z^2 + 4,56462z) \cdot 10^{-3}$$

$$N(p_r) = 4,068 \cdot 10^{-3}$$

$$N(p_{i+}) = 8,872 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,629 \cdot 10^{-3} \Rightarrow |N(p_{i+})| = 9,018 \cdot 10^{-3}; \arg N(p_{i+}) = 10,4^\circ$$

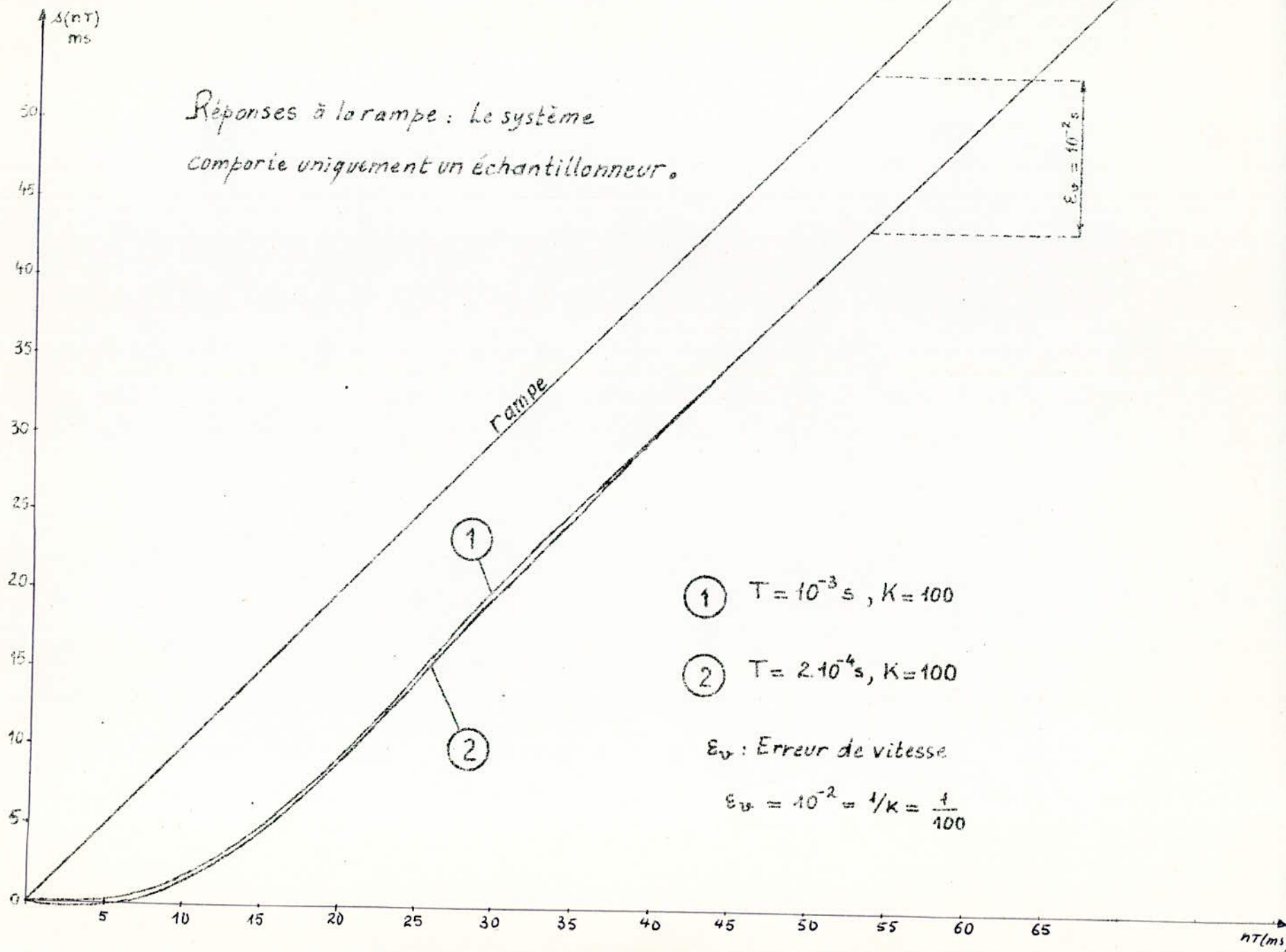
Calculons, comme dans (A), chacun des termes de l'expression (60)

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{N(z)}{D(z)} z^n \right]_{z=1} \# n-10$$

$$D'_1(p_r) = -7,005 \cdot 10^{-2}$$

$$D'_1(p_{i+}) = -5,839 \cdot 10^{-3} - j \cdot 1,0623 \cdot 10^{-2} \Rightarrow |D'_1(p_{i+})| \# 1,212 \cdot 10^{-2}; \arg D'_1(p_{i+}) \# 61,2^\circ$$

$$\text{d'où : } \frac{N(p_r)}{(p_r-1) \cdot D'_1(p_r)} \# 0,122; \quad 2 \cdot \left| \frac{N(p_{i+})}{(p_{i+}-1) \cdot D'_1(p_{i+})} \right| \# 10$$



Réponses à la rampe : Le système  
comporte uniquement un échantillonneur.

①  $T = 10^{-3} \text{ s}, K = 100$

②  $T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}, K = 100$

$\epsilon_v$  : Erreur de vitesse

$$\epsilon_v = 10^{-2} = 1/K = \frac{1}{100}$$

$$\theta_{i+} = \text{Arg } p_{i+} \approx 6,7^\circ ; \quad \phi_{i+} \approx 10,4^\circ + 45^\circ - 61,2^\circ = -5,8^\circ$$

Enfin la réponse  $s(nT)$  à la rampe aux instants d'échantillonnage pour  $T = 10^{-3}$  s et  $K = 100$  s'écrit :

$$s(nT) = T(n-10 + 0,122 \cdot (0,524)^n + 10 \cdot (0,9)^n \cos(6,7n - 5,8)) \quad (78)$$

Les courbes représentées par les expressions (77) et (78) sont tracées à la page 97.

Conclusion : De ces courbes tracées, nous voyons que l'erreur de vitesse  $\epsilon_v(\infty)$  est constante et ne dépend que du coefficient d'amplification  $K$ , ce qui est conforme à la théorie :  $\epsilon_v(\infty) = 10^{-2} = 1/K$  pour  $K = 100$ .

D'autre part, comme pour la réponse à l'échelon unitaire ; ici aussi, nous constatons que pour le même coefficient d'amplification  $K = 100$ , la courbe ① correspondant à  $T = 10^{-3}$  s est légèrement plus amortie que la courbe ② correspondant à  $T = 2 \cdot 10^{-4}$  s, qui tend, par la faiblesse de sa période d'échantillonnage, vers le système continu correspondant ; ce qui se traduit par un effet stabilisant apporté par l'échantillonneur.

Nous pouvons donc dire que les systèmes échantillonnés sont plus stables que les systèmes continus correspondants.



# CHAPITRE IV

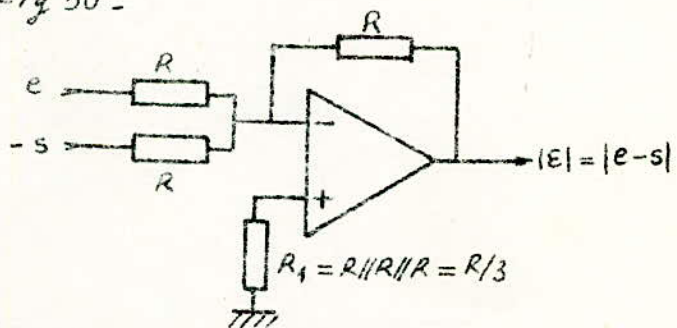
## REALISATION PRATIQUE

Nous rappelons que le servomécanisme étudié est composé des éléments suivants :

- Détecteur d'écart ou comparateur.
- Echantillonneur - bloqueur.
- Amplificateur
- Processus.

Etudions successivement les éléments énumérés ci-dessus :

1- Comparateur : Comme son nom l'indique, son rôle est de comparer généralement deux tensions. Dans notre <sup>cas</sup>, il s'agit de la tension d'entrée et celle de la sortie. Avec l'emploi d'amplificateur opérationnel, pour effectuer la fonction de comparaison, il est plus commode de réaliser un sommateur ayant à son entrée deux signaux de signes opposés. Son schéma de principe est le suivant : - Fig 50 -

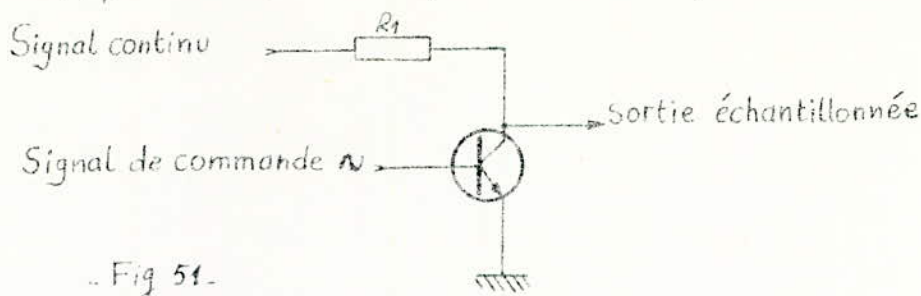


- Fig: 50 -

Du fait que l'entrée est appliquée à la borne inverseuse, la sortie sera inversée.

2- Echantillonneur : Nous rappelons, que pour avoir un système linéaire, l'échantillonneur doit être un modulateur d'impulsions en amplitude

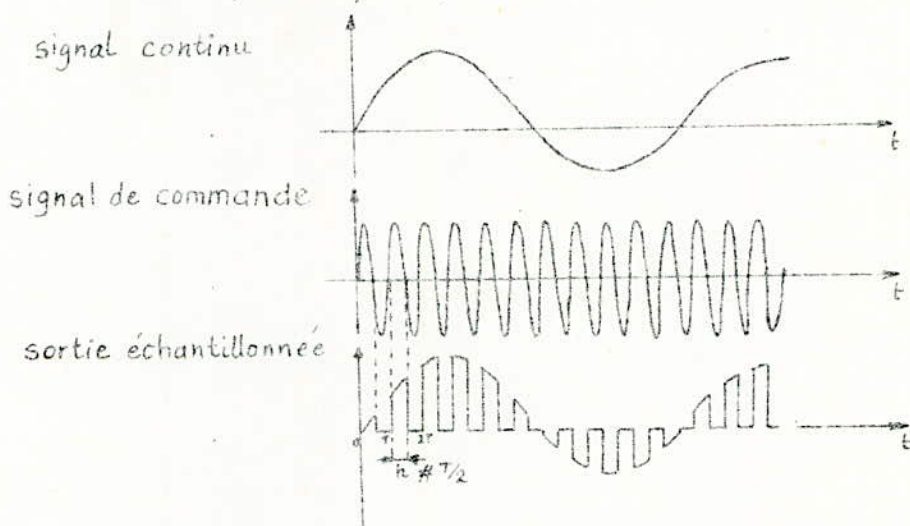
(MIA), que nous représentons par le schéma de principe suivant : Fig 51



- Fig 51 -

Suivant la valeur du signal de commande, le transistor va jouer le rôle d'un interrupteur (bloqué-saturé). Si la jonction base-émetteur (B-E) est polarisée en directe, l'interrupteur est 'fermé', donc la sortie est nulle (à la masse).

Par contre si la jonction <sup>B-E</sup> est polarisée en inverse, l'interrupteur est ouvert, alors la sortie reproduit pratiquement l'entrée. - Fig 52



- Fig 52 -

Remarques : 1) Le signal de commande est généralement un signal sinusoïdal délivré par un générateur.

2) En réalité lorsque la jonction B-E est polarisée en directe, le signal de sortie est égal à  $V_{CE\text{ sat}}$ .

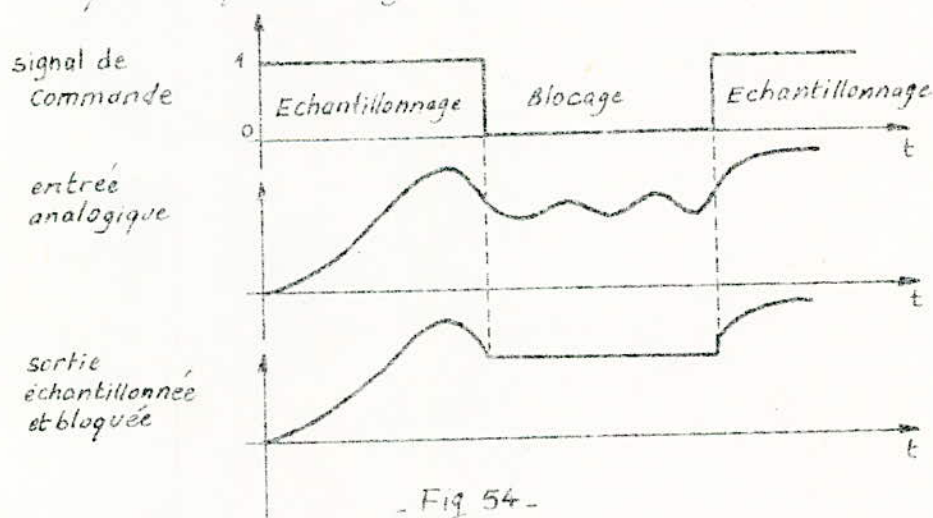
3- Echantillonneur - bloqueur : C'est un dispositif qui a 2 modes de travail, l'échantillonnage et le blocage ; il passe d'un mode à l'autre sous

L'action d'un signal de commande. (Fig 53)



- Fig 53 -

Pendant le temps d'échantillonnage correspondant généralement à un niveau logique "1" appliqué à l'entrée de commande, la tension de sortie suit fidèlement les variations du signal d'entrée. Quand le signal de commande change et atteint le niveau logique "0", le signal de sortie reste constant et égal à la dernière valeur reçue du signal d'entrée. Quand le signal de commande revient au niveau "1", la valeur du signal de sortie change instantanément et devient égale à la valeur du signal existant à l'entrée à cet instant. Le fonctionnement est représenté par la Fig 54.

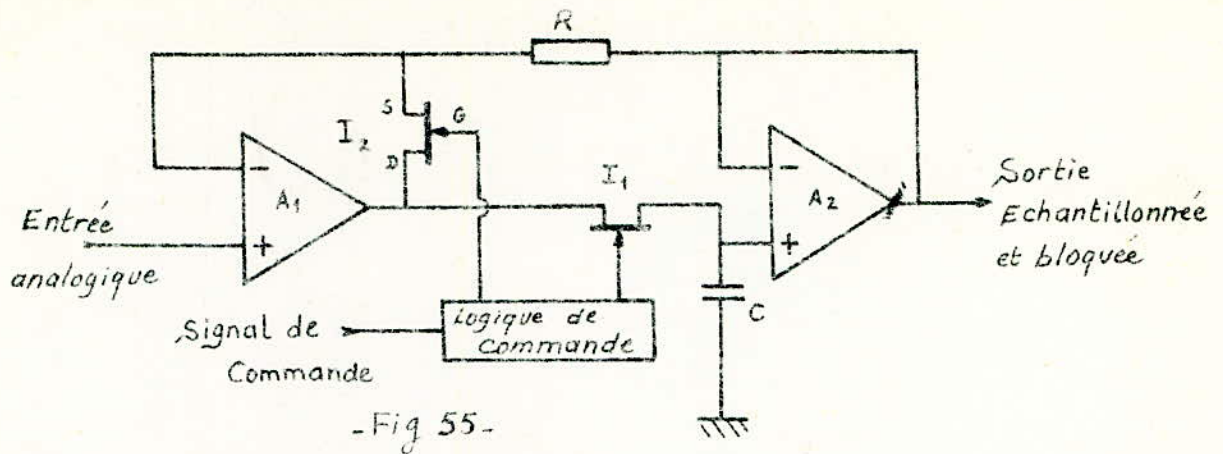


- Fig 54 -

Pour la réalisation de ces fonctions d'échantillonnage et de blocage, nous proposons le montage dont le schéma de principe est le suivant :

- Fig 55 -





- Fig 55 -

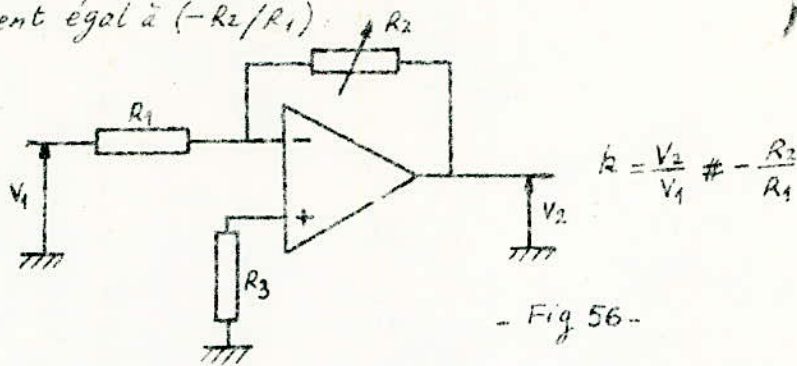
Le circuit comprend 2 amplificateurs opérationnels  $A_1$  et  $A_2$ , un condensateur  $C$  de blocage, 2 interrupteurs  $I_1$  et  $I_2$  à transistor à effet de champ (TEC) et leur circuit de commande. Ce système a un gain unité et fonctionne comme un système suiveur.

Dans le mode d'échantillonnage, le circuit de commande ouvre  $I_2$  et ferme  $I_1$ , alors la tension de sortie est égale à la tension d'entrée, le condensateur  $C$  se charge grâce au courant de sortie de  $A_2$ , jusqu'à ce que sa tension <sup>de charge</sup> soit égale à la tension d'entrée.

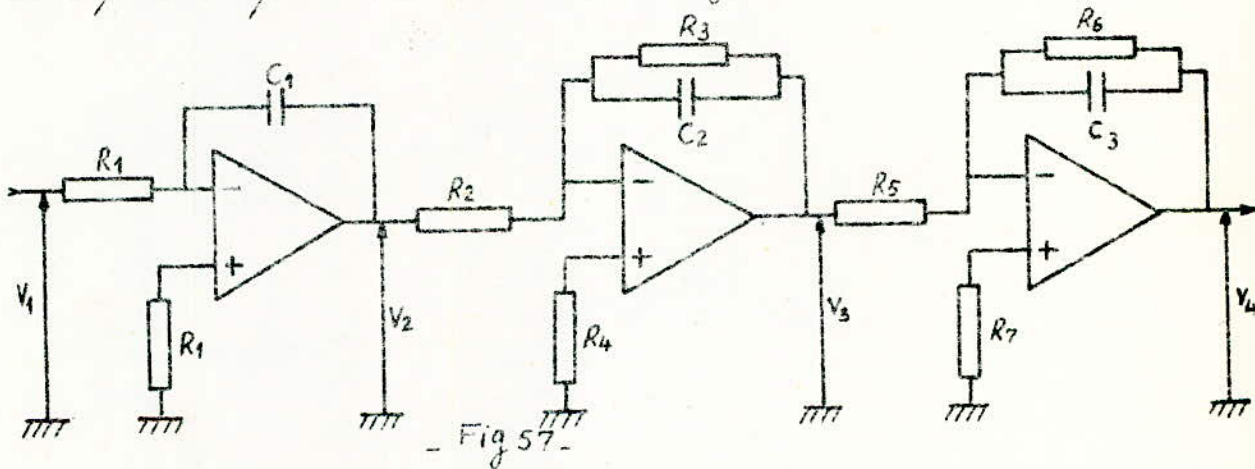
Dans le mode de blocage,  $I_1$  est ouvert et  $I_2$  est fermé; la tension de charge du condensateur ne décroît pratiquement pas parce que  $C$  voit d'un côté l'impédance d'entrée d'un amplificateur opérationnel à TEC monté en suiveur et de l'autre l'impédance d'un interrupteur à TEC ouvert. Lorsque  $I_2$  est fermé, il empêche  $A_1$  d'être saturé, comme ce dernier fonctionne en suiveur, les tensions sur le drain et la source de  $I_2$  sont égales.

La résistance  $R$  limite le courant qui passe entre les 2 amplificateurs dans le mode de blocage, la chute de tension aux bornes de cette résistance est égale à la différence entre les signaux d'entrée et de sortie.

4- Amplificateur : Le schéma de l'amplificateur choisi est représenté par la Fig 56. C'est un amplificateur de tension, inverseur, de gain  $G$  pratiquement égal à  $(-R_2/R_1)$ .



5- Processus : Le montage électronique pouvant réaliser la fonction de transfert du processus étudié, constitué par un moteur-réducteur-charge, est représenté par le schéma suivant : Fig 57-



En effet : si  $p = j\omega$ , on peut écrire :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-\frac{1}{C_1 p}}{R_1} = -\frac{1}{R_1 C_1 p} = -\frac{a}{p} \quad \text{avec } a = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$\frac{V_3}{V_2} = -\frac{R_3 // C_2}{R_2} = -\frac{1}{R_2} \frac{R_3 \frac{1}{C_2 p}}{R_3 + \frac{1}{C_2 p}} = -\frac{b}{1 + T_1 p} \quad \text{avec } b = \frac{R_3}{R_2}; T_1 = R_3 C_2$$

$$\frac{V_4}{V_3} = -\frac{R_6 // C_3}{R_5} = -\frac{d}{1 + T_2 p}, \quad \text{avec } d = \frac{R_6}{R_5}; T_2 = R_6 C_3$$

Finalement la fonction de transfert du processus simulé s'écrit :

$$F(p) = \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = -\frac{a}{p} \cdot \frac{b}{(1+T_1 p)} \cdot \frac{d}{(1+T_2 p)} = \frac{-\frac{R_3 R_6}{R_1 R_2 R_5 C_1}}{p(1+R_3 C_2 p)(1+R_6 C_3 p)} \quad (79)$$

$$\text{soit } k_0 = \frac{R_3 R_6}{R_1 R_2 R_5 C_1}$$

## 6- Choix des éléments :

### 6-1- Éléments du processus :

$$T_1 = R_3 C_2 = 0,0036 \text{ s, on fixe: } C_2 = 0,022 \mu\text{F} \Rightarrow R_3 = 164 \text{ K}\Omega$$

$$T_2 = R_6 C_3 = 0,00173 \text{ s, on fixe: } C_3 = 0,022 \mu\text{F} \Rightarrow R_6 \approx 78 \text{ K}\Omega$$

$$\text{D'autre part, nous devons avoir: } k_0 = 1 \Rightarrow \frac{R_3 R_6}{R_1 R_2 R_5 C_1} = 1$$

$$\text{On prendra: } C_1 = 10 \mu\text{F}; R_1 = R_2 = 100 \text{ K}\Omega, R_5 = 127 \text{ K}\Omega$$

Les autres résistances sont choisies comme suit :

$$R_4 = R_2 \parallel R_3 \approx 62 \text{ K}\Omega$$

$$R_7 = R_5 \parallel R_6 \approx 50 \text{ K}\Omega$$

### 6-2- Éléments du comparateur :

$$\text{Nous choisissons: } R = 10 \text{ K}\Omega \Rightarrow R_1 = \frac{R}{3} = (R \parallel R \parallel R) \approx 3,3 \text{ K}\Omega$$

### 6-3- Echantillonneur :

Nous choisissons:  $R = 560 \Omega$ ; Le transistor est du type: 2N2222

### 6-4- Amplificateur :

Nous choisissons un potentiomètre de  $500 \text{ K}\Omega$  (linéaire).

Nous prenons  $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$ ;  $R_3 \approx 3,3 \text{ K}\Omega$ ; théoriquement, l'amplificateur aura un gain maximum de 500. ( $k_{\max} = 500$ )

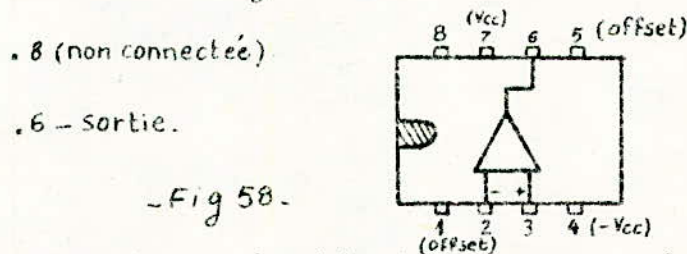
\* L'amplificateur opérationnel utilisé est le circuit intégré  $\mu\text{a}741\text{c}$  qui a les caractéristiques suivantes:



Tension de décalage à l'entrée	1mV	
Courant de décalage à l'entrée	30 nA	
Courant de polarisation	100 nA	
Résistance d'entrée	1 M $\Omega$	
Gain pour signaux forts (charge $\gg$ 2K $\Omega$ )	200.000	
Excursion de la tension de sortie (charge $\gg$ 10K $\Omega$ )		$\pm 14$ V
Gamme des tensions d'entrée		$\pm 15$ V
Rapport de réjection en mode commun (RRMC)		90 dB
Réjection de la tension d'alimentation		30 $\mu$ V/V
Consommation		50 mW
Tensions d'alimentation		$\pm 15$ V
Températures de service		-55° à 45°C

Le circuit intégré  $\mu$ A 741C présente une compensation en fréquence intégrée, et la sortie est protégée contre les courts circuits permanents; une méthode simple d'annulation de la tension de décalage est applicable.

Nous présentons à la Fig 58 - le mode de brochage du  $\mu$ A 741C.

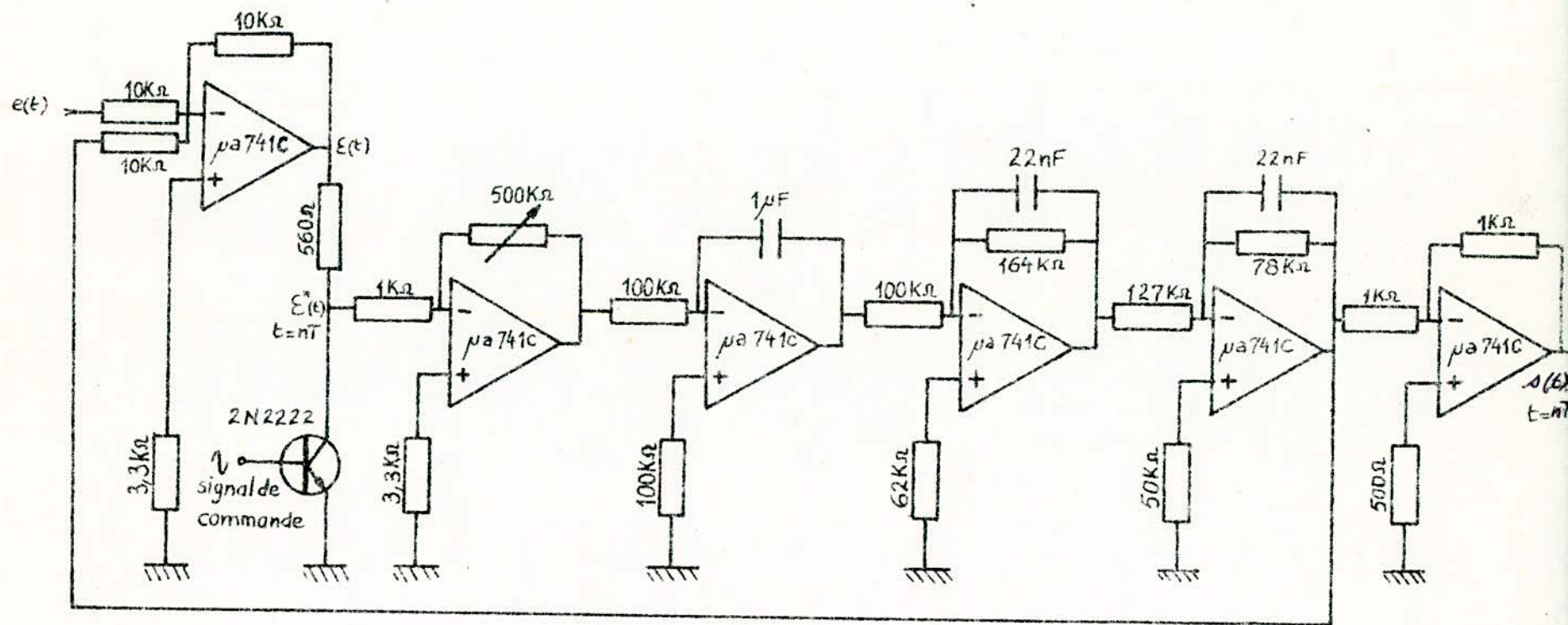


Le schéma complet de la réalisation du servomécanisme simulé est présenté à la page 106.

### 7 - Remarques sur la réalisation pratique (P 106 - Fig 59):

1°) Du fait que la capacité  $C_1 = 10 \mu$ F n'est pas disponible au laboratoire, nous avons utilisé une capacité  $C_1 = 1 \mu$ F; La constante  $k_0$  du processus

Schéma complet de réalisation du servomécanisme simulé.



- Fig 59 -

deviendra égal à  $k_0 = 10$ .

Puisque l'amplificateur et le processus sont placés en cascade (cf. p. 106; Fig 59) le coefficient d'amplification  $K$  sera égal à  $K = 10k$  où  $k$  est le gain de l'amplificateur considéré seul (cf. 6-4), donc  $k_{max}$  sera théoriquement égal à  $5000 = 10k_{max} = (10 \times 500)$ .

2°) Dans la chaîne directe (cf. p. 106), nous avons 5 amplificateurs-opérationnels, montés, chacun en inverseur, le signal de sortie sera donc inversé. La chaîne de retour ramène bien le signal de sortie inversé donc l'emploi du sommateur comme comparateur est justifié.

Pour avoir le signal de sortie non inversé, nous avons prévu un inverseur de gain unité, comme le montre le schéma complet de réalisation du servomécanisme (p. 106, Fig 59).

3°) Les valeurs des résistances non normalisées utilisées sont obtenues comme suit:  $164 \text{ K}\Omega = (82 + 82) \text{ K}\Omega$

$62 \text{ k}\Omega = (120 // 100) \text{ K}\Omega + 6,8 \text{ K}\Omega$ ;  $50 \text{ K}\Omega = (100 // 100) \text{ K}\Omega$ ;  $127 \text{ K}\Omega = (100 + 27) \text{ K}\Omega$

$78 \text{ K}\Omega = (39 + 39) \text{ K}\Omega$ ;  $500 \Omega = (1 // 1) \text{ K}\Omega$ .

Nous notons que toutes les résistances utilisées sont des résistances au carbone de tolérance  $\pm 5\%$ .

## 8 - Essais :

### 8-1- Matériel utilisé :

- Un oscilloscope HM 512
- Un générateur ( $\Omega, \nu$ ) PM 5105 LF (10Hz - 100KHz) PHILIPS
- Un générateur ( $\nu$ ) - (15Hz - 160KHz) BFGX 204A METRIX
- Un générateur "dents de scie" (Montage BOOTS RAP) conçu à l'école.



- Une alimentation stabilisée (+15V; -15V) conçue à l'école.

## 8-2 - Manipulations

Nous notons tout d'abord qu'un générateur de signaux parfaitement carrés et de fréquence  $f \leq 2\text{Hz}$  n'est pas disponible au laboratoire de l'école, ce qui ne nous a pas permis alors de mesurer les temps de réponse et les coefficients d'amortissement, et par la suite de comparer rigoureusement les résultats obtenus aux résultats théoriques.

En effet, si le générateur utilisé, délivre à l'entrée du servomécanisme un signal carré de fréquence  $f \approx 10\text{Hz}$ , cela entraîne  $T = \frac{1}{f} = 0,1\text{s}$ , donc la demi-période positive qui joue le rôle de l'échelon de position a une étendue maximale de  $0,05\text{s}$  ( $T/2$ ); or le temps de réponse pour une période d'échantillonnage  $T = 10^{-3}\text{s}$  et une amplification de  $K = 500$  est égal à  $0,186\text{s}$ . (Résultat théorique).

D'autre part, les générateurs de signaux carrés et de dents de scie utilisés ne délivrent pas des signaux parfaits pour les fréquences très faibles telle que  $f \approx 10\text{Hz}$ .

En effet pour des fréquences voisines de celle-ci, les signaux obtenus ont les formes suivantes, données par la Fig. 60.



signal "carré" - Fig 60 - signal en "dents de scie"

Toutefois, nous avons relevé dans ces conditions, les réponses

(photographiées de l'oscilloscope), que nous donnons donc, seulement à titre d'information.

Nous notons aussi que nous avons relevé les courbes représentant l'erreur  $\varepsilon(nT)$  pour montrer le phénomène d'échantillonnage.

Remarques importantes: Nous tenons à remarquer qu'au niveau de la réalisation, il y a une certaine atténuation comme dans le cas de n'importe quel système réel. Donc pour pouvoir comparer les résultats donnés par le montage pratique à ceux du montage théorique, nous devons tenir compte en premier lieu de cette atténuation.

Alors, le coefficient d'amplification mesuré se compose de 2 facteurs:

$K_m = K_1 \cdot K_2$  : - Le 1<sup>er</sup>,  $K_1$ , est un facteur de compensation de l'atténuation - - Le 2<sup>e</sup>,  $K_2$ , est un facteur d'amplification propre.

C'est ce facteur  $K_2$  que nous devons comparer au coefficient d'amplification théorique ( $K$ ).

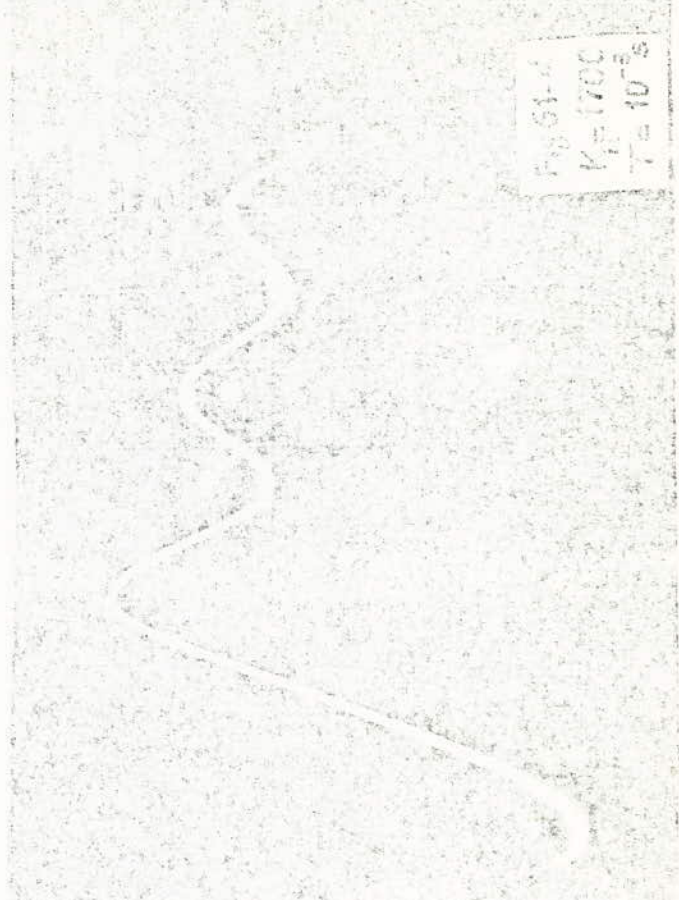
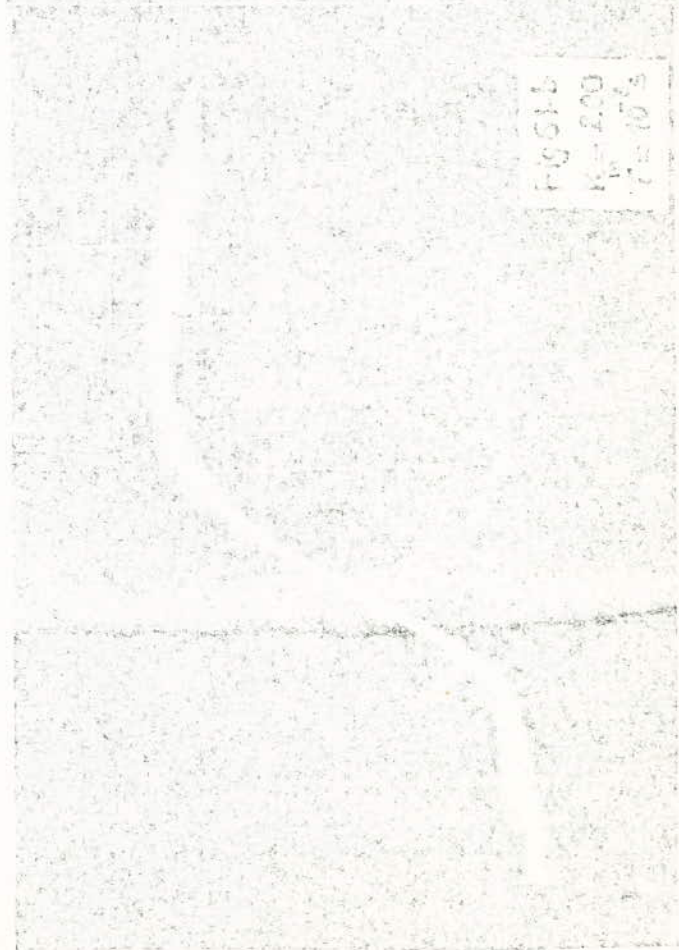
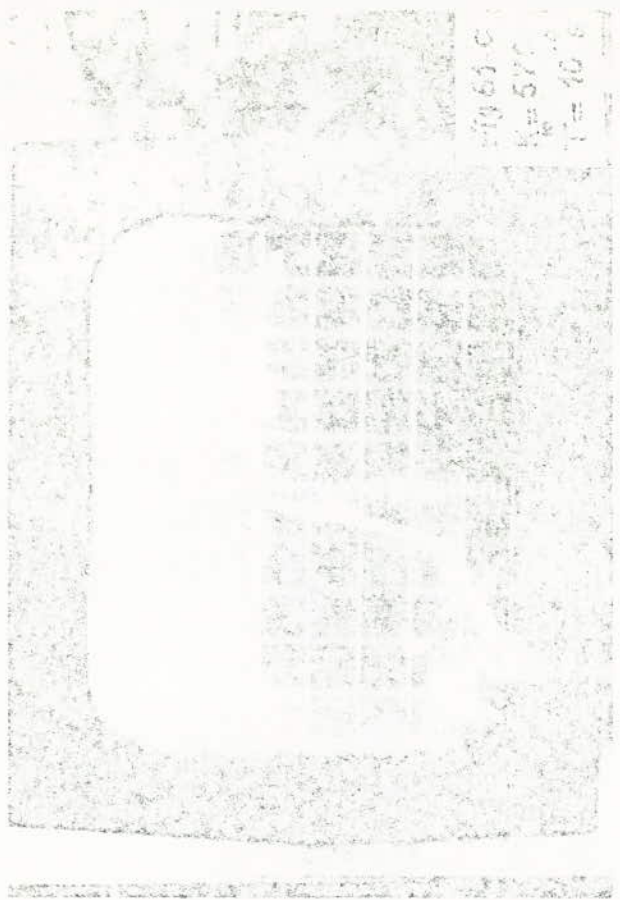
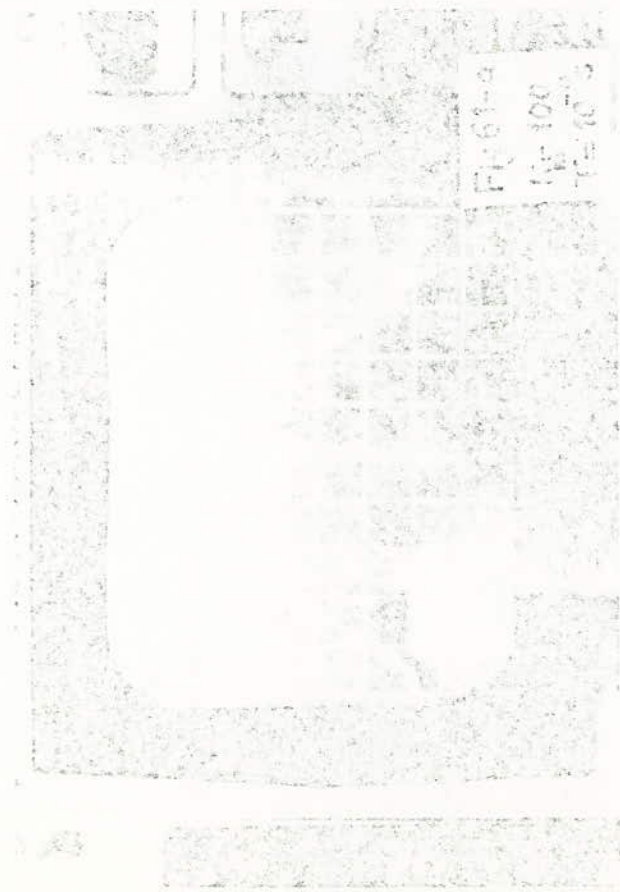
D'autre part, l'échantillonneur réalisé est évidemment un échantillonneur réel (La durée d'échantillonnage  $h$  n'est pas nulle) contrairement au cas théorique où l'échantillonneur était idéal; l'influence de cet échantillonneur réel sur le processus, se traduit par la nouvelle fonction de transfert :  $F_h^*(p) \neq \frac{h}{T} F(p)$  dans le cas où  $\frac{h}{T} \ll 1$  (cf. chap. I); donc l'échantillonneur réel introduit une atténuation donnée par le facteur " $h/T$ ".

Du fait, que la période d'échantillonnage choisie est faible, nous estimons que la durée d'échantillonnage est approximativement égale à : (cf. Fig 52)

$h = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{h}{T} = 0,5$ . Donc le coefficient d'amplification mesuré est égal



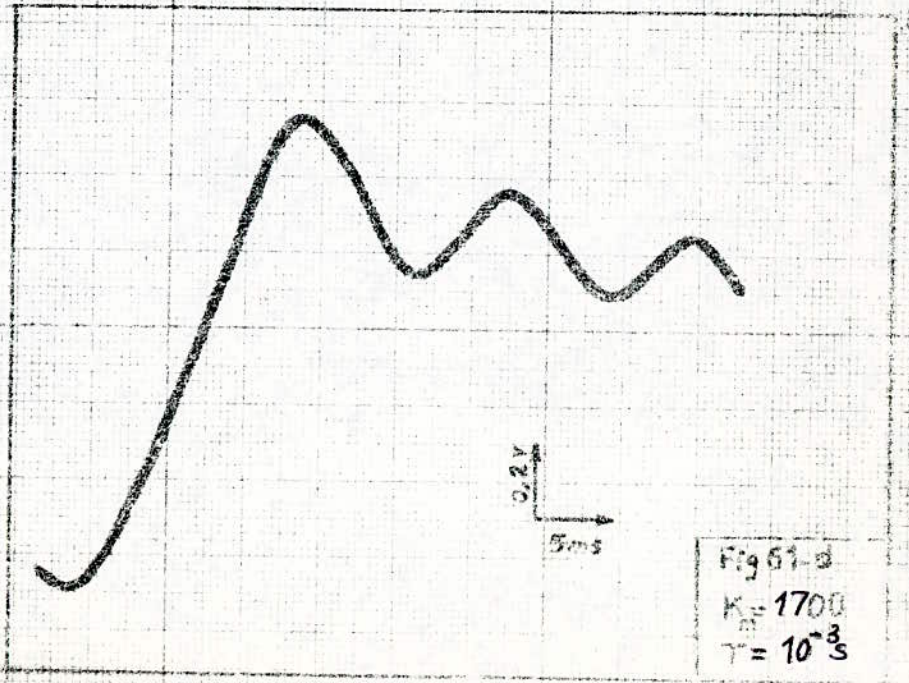
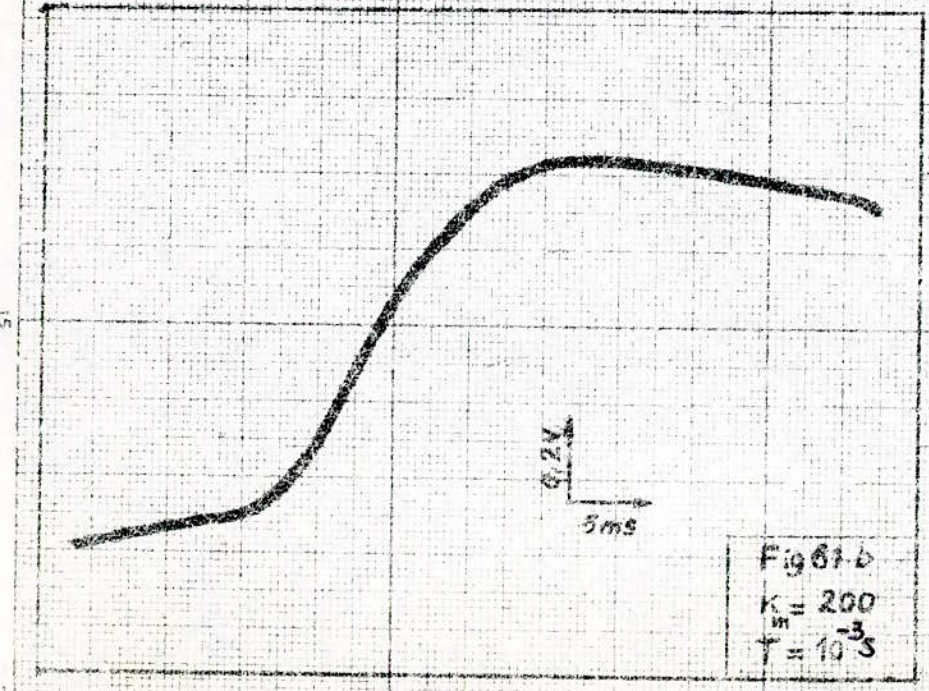
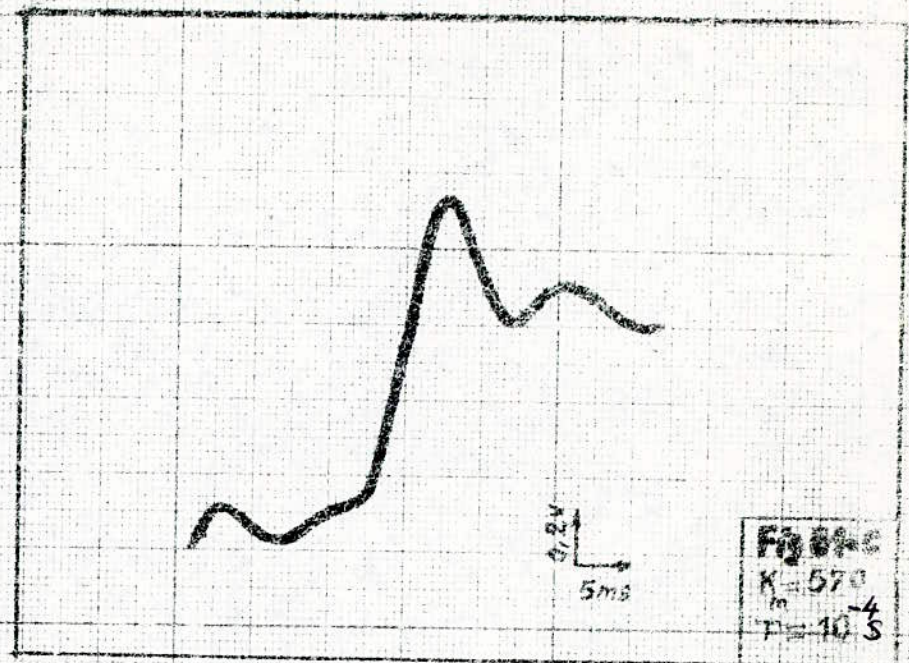
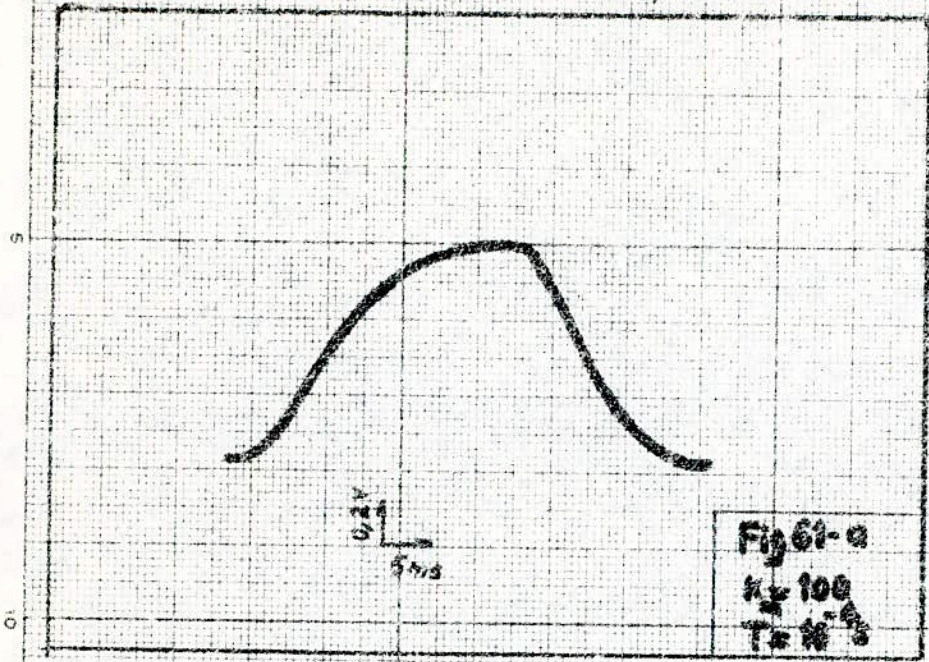
Figure 15 à l'échelle unitaire (Fig 61 - a-t - c-d)





- Reprise de la page 190 -  
 Réponses à l'échelon unitaire (Fig 61-a-b-c-d)

110 (bis)





est égal à :  $K_m \# \frac{1}{0,5} \cdot K_2$ , d'où, le facteur d'amplification propre

$K_2$  s'écrit :  $K_2 \# 0,5 K_m$

\* Ainsi, les réponses à l'échelon unitaire sont données par les courbes de La Fig 61 (a, b, c, d) de la page 110.

- La courbe de la Fig 61-a, correspond à :  $K_2 \# 50$ ;  $T = 10^{-4} s$ ,  
La réponse est très amortie.

- La courbe de la Fig 61-b, correspond à :  $K_2 \# 100$ ;  $T = 10^{-3} s$ ; elle  
a une allure très proche de celle de la courbe théorique.

- La courbe de la Fig 61-c, correspond à :  $K_2 \# 285$ ;  $T = 10^{-4} s$ , il y  
a apparition d'oscillations amorties.

- La courbe de la Fig 61-d, correspond à :  $K_2 \# 850$ ;  $T = 10^{-3} s$ ; c'est  
la limite de stabilité, car les oscillations deviennent entretenues.

Donc, le domaine de stabilité est donné pour ;  $K_2 < 850$ ; nous  
notons qu'il ne dépend pratiquement pas de la période d'échantillonnage  
 $T$ , ce qui est conforme aux résultats théoriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 2 \cdot 10^{-4} s, K < 857,3. \\ T = 10^{-3} s, K < 856,46. \end{array} \right\}$$

Les figures 62-a et 62-b, sont données à titre d'informations,  
elles représentent l'erreur échantillonnée :

- Fig 62-a : La fréquence d'échantillonnage :  $F = 360 \text{ Hz}$ .

- Fig 62-b : La fréquence d'échantillonnage :  $F = 1 \text{ KHz}$ .

\* Les réponses à la rampe sont données par les courbes de la Fig 63 (a, b, c, d)  
de la page 113.

- La courbe de la Fig 63-a correspond à :  $K_2 \# 50$ ;  $T = 10^{-3} s$ .



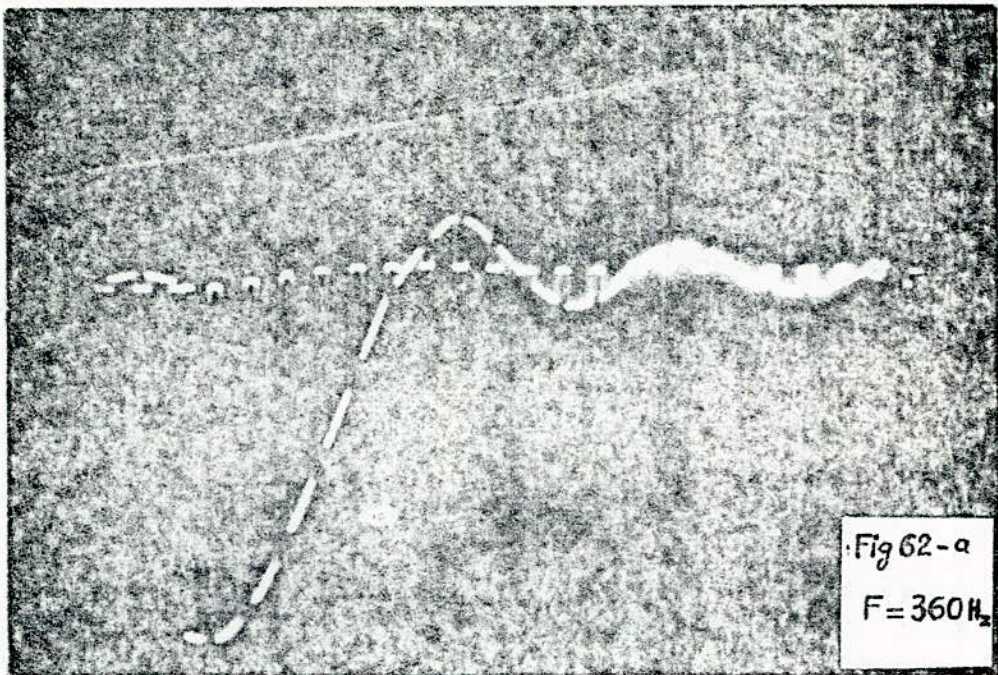


Fig 62-a-b : Erreur échantillonnée

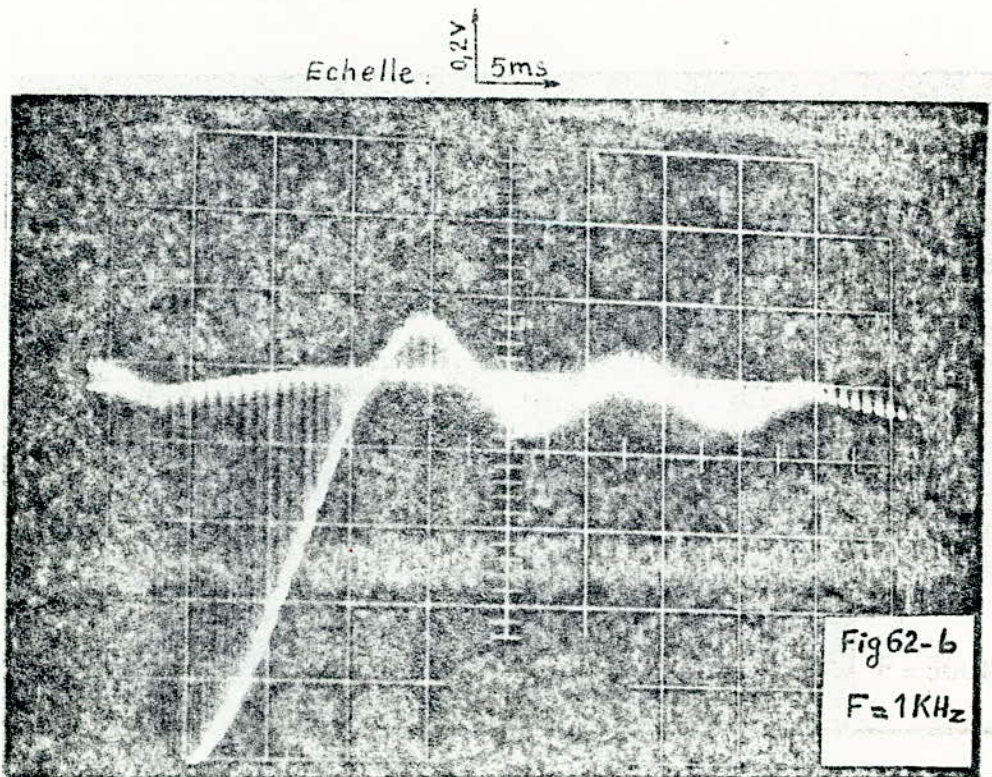
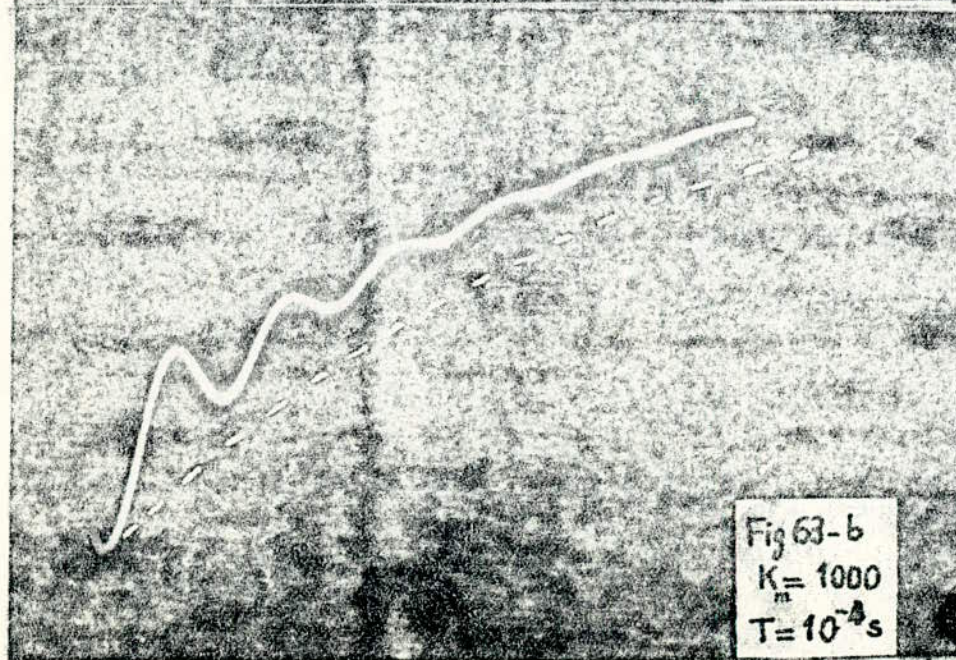
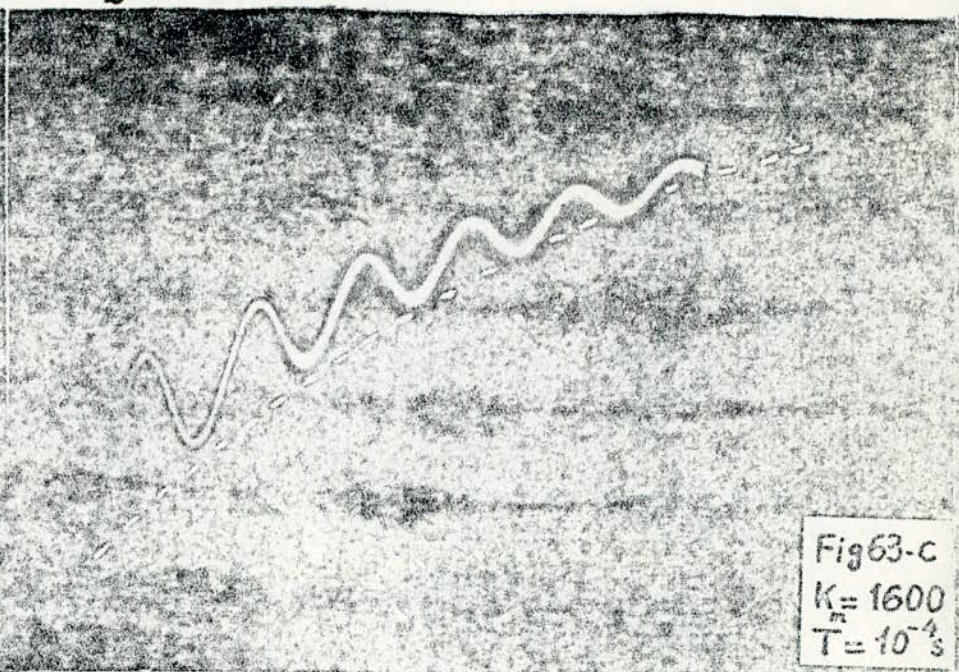
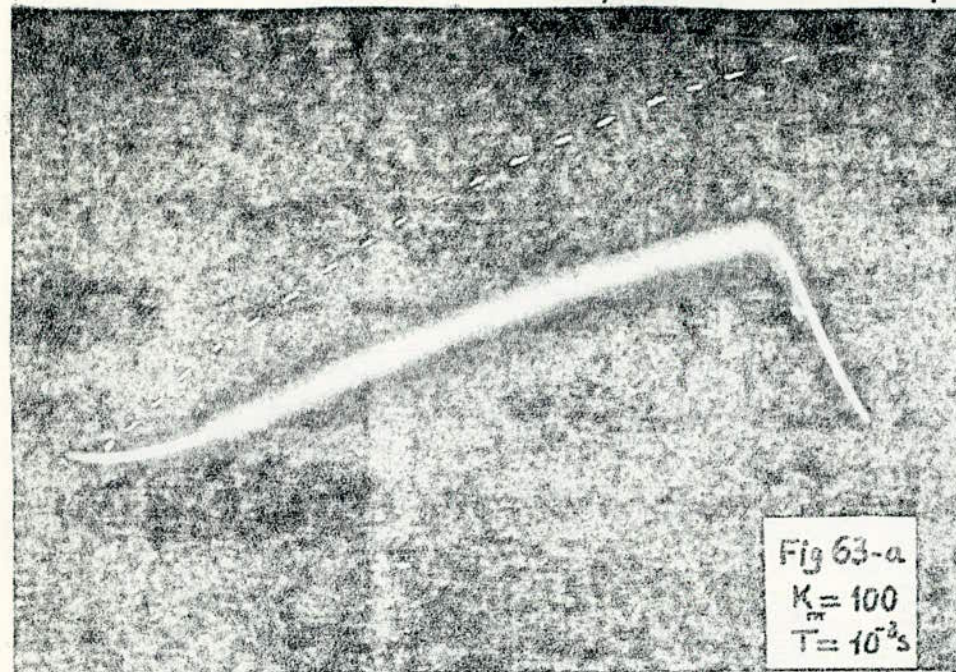


Fig 62-a-b : Erreur échantillonnée



Réponses à la rampe: Fig 63-a-b-c-d.



Scale: 2V, 10ms



il n'y a pas d'oscillations.

- La courbe de la Fig 63-b correspond à :  $K_2 \# 500$ ;  $T = 10^{-4} s$ ,

il y apparition d'oscillations amorties.

- La courbe de la Fig 63-c correspond à :  $K_2 \# 800$ ;  $T = 10^{-4} s$

- La courbe de la Fig 63-d correspond à :  $K_2 \# 800$ ;  $T = 10^{-3} s$

Notons que le signal d'entrée (rampe) est représenté en pointillé sur les courbes de la Fig. 63 (a-b-c-d).

Nous constatons que l'erreur de vitesse  $E_v$  diminue lorsque  $K$  augmente ce qui est conforme à la théorie ( $E_v = \frac{1}{K}$ ).

D'autre part, nous notons que pour le même coefficient d'amplification ( $K_m = 1600$ ); La courbe de la Fig 63-d, correspondant à  $T = 10^{-3} s$  est légèrement plus amortie que la courbe de la Fig 63-c, pour  $T = 10^{-4} s$ , ceci s'explique par l'effet stabilisant apporté par l'échantillonneur, comme nous l'avions fait remarquer en théorie.

Finalement, la Fig 64 - (page 115), représente le circuit imprimé complet du servomécanisme donné par la Fig 59 - P. 106.





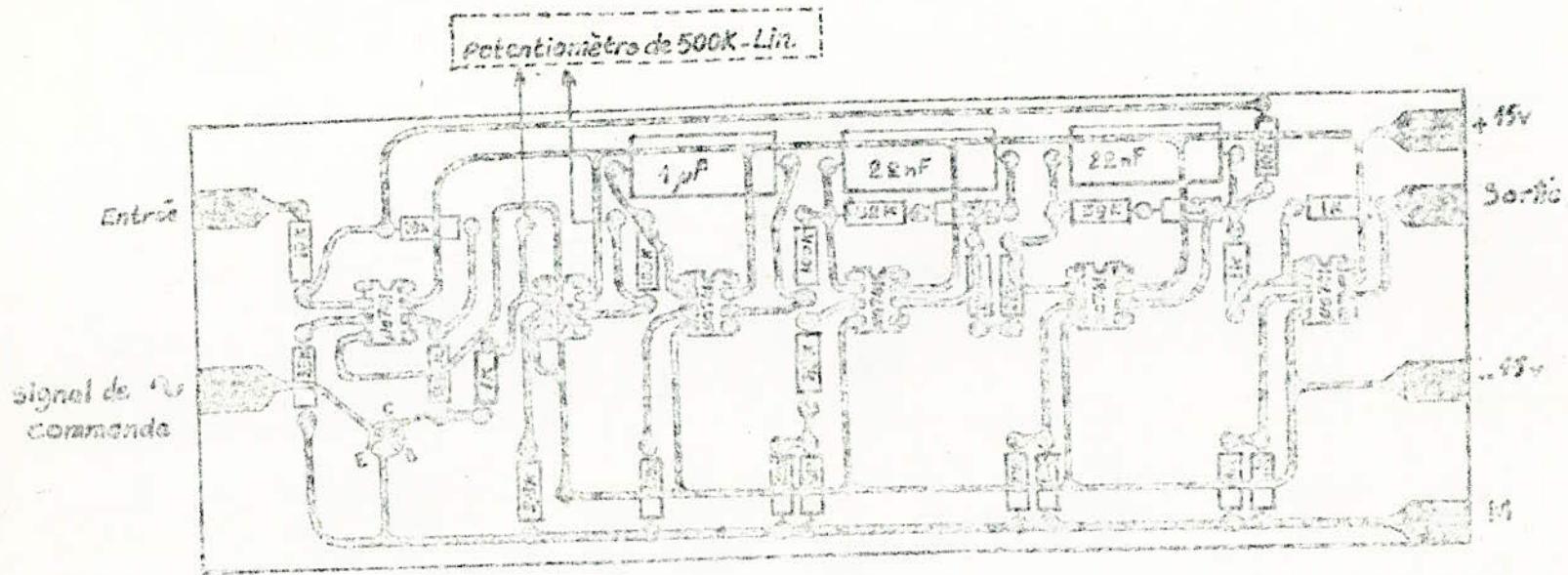


Fig 64 - Circuit imprimé complet du servomécanisme simulé de la Fig 59 - P106.

## • CONCLUSION •

Parmi les méthodes variées d'étude des systèmes échantillonnés, la méthode de la transformée en  $z$  que nous avons adoptée, constitue alors une des techniques d'analyse et de synthèse particulièrement simple et puissante compte-tenu des résultats obtenus.

L'étude que nous avons entreprise a fait apparaître un effet stabilisant introduit par l'échantillonnage. Cependant, cet effet n'a pas été très marqué dans l'asservissement de position choisi, du fait, de la grandeur relativement petite des constantes de temps du processus.

Mais, généralement, l'échantillonnage n'est pas utilisé dans ce but, il s'introduit surtout avec l'insertion de calculateurs dans les systèmes de commande. Le rôle de ces calculateurs est soit, de transmettre des informations à distance, soit de contrôler un système complexe contenant plusieurs paramètres (industries pharmaceutiques, ...).

La maquette réalisée représentant le servomécanisme simulé a donné les résultats attendus, qui ont été bien conformes aux résultats théoriques, et elle peut être utilisée de ce fait, comme un bon sujet de travaux pratiques de systèmes asservis ou de contrôle industriel. Malheureusement, le manque de matériel, ne nous a pas permis de réaliser des échantillonneurs - bloqueurs bien élaborés pour pouvoir étudier au mieux les caractéristiques et les performances du servomécanisme.

Plusieurs applications pratiques dérivent directement de notre système, telles que : Les contrôles spatiaux avec acquisition et poursuite de satellites,



les applications propres au champ de tir, comme la sauvegarde aérienne civile ou militaire, qu'il s'agisse d'avions ou de fusées; les techniques de contrôle de paramètres dans un processus de fabrication.

Cependant, toutes ces applications débordent du cadre de notre étude. Néanmoins, nous espérons que certaines d'entre-elles puissent être développées à partir de la base que constitue notre projet.



ANNEXE - table des transformées en  $z$  et de Laplace -

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$	$F(z)$	$F(z, m)$
$\delta(t - kT)$	$e^{-kTp}$	$z^{-k}$	$z^{m-k}$
$\delta(t)$	1	1 ou $z^{-0}$	0
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T}{(z-1)^2} + \frac{mT}{z-1}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2} \left[ \frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$	$T e^{-amT} \left[ \frac{e^{-aT} + m(z - e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^2} \right]$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z \sin m\beta T + \sin n\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$ <span style="float: right;"><math>n = 1 - m</math></span>
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - \cos \beta T)}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z \cos m\beta T - \cos n\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$ <span style="float: right;"><math>n = 2 - m</math></span>
$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+a)^2 + \beta^2}$	$\frac{z e^{-aT} \sin \beta T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \beta T + e^{-2aT}}$	$e^{-amT} \left[ \frac{z \sin m\beta T + e^{-aT} \sin n\beta T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \beta T + e^{-2aT}} \right]$ <span style="float: right;"><math>n = 1 - m</math></span>
$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos \beta T)}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \beta T + e^{-2aT}}$	$e^{-amT} \left[ \frac{z \cos m\beta T - e^{-aT} \cos n\beta T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \beta T + e^{-2aT}} \right]$ <span style="float: right;"><math>n = 1 - m</math></span>



# Bibliographie

- *Projet de fin d'études : Étude d'un asservissement de position*  
Promotion janv. 78 ENPA
- *Théorie et calcul des asservissements linéaires*  
J.-Ch. GILLE, P. DECAULNE, M. PÉLEGRIN DUNOD 1967
- *Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés*  
Y. SEVELY DUNOD UNIVERSITE 1973
- *Automatique Tome 2.*  
R. PRUDHOMME MASSON & CIE 1974
- *Introduction à la théorie des systèmes échantillonnés*  
J. TSCHAUNER DUNOD 1963
- *Dynamique statistique des systèmes linéaires de commande automatique.* V.V. SOLODOVNIKOV DUNOD 1965
- *Technologie et calcul pratique des systèmes asservis*  
P. NASLIN DUNOD 1968
- *Théorie et pratique des circuits de l'électronique et des amplificateurs.* Tome 3. J. QUINET, A. PETITCLERC  
DUNOD 1967
- *Applications pratiques de l'amplificateur opérationnel.*  
R. DUGEHAULT ETSF 1975

