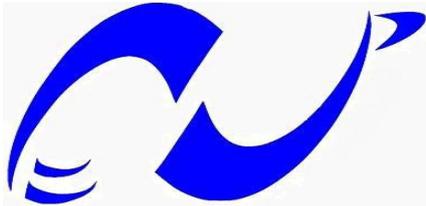


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

*LAVALEF*

Département : Génie Chimique

Laboratoire de Valorisation des Energies Fossiles

Mémoire de Master en Génie Chimique

## **Etude tridimensionnelle des films de savon**

Katia MEDJBER

Sous la direction de : M. T.AHMED-ZAID, Pr (ENP)  
Mme. S.HADDOUM, MCB, (ENP)

Présenté et soutenu publiquement le 15 Juin 2017

### **Composition du jury :**

<b>Président</b>	M. A.SELATNIA, Pr (ENP)
<b>Rapporteurs/ Promoteurs</b>	M. T.AHMED-ZAID, Pr (ENP) Mme. S.HADDOUM, MCB, (ENP)
<b>Examineurs</b>	M. OUADJAOUT, MAA, (ENP) Mme Y.TCHOULAK, MAA, (ENP)

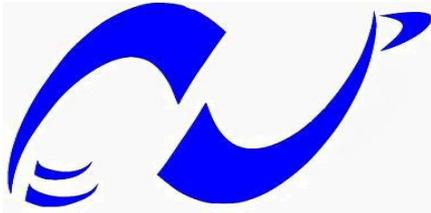
**ENP 2017**



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

*LVALEF*

Département : Génie Chimique

Laboratoire de Valorisation des Energies Fossiles

Mémoire de Master en Génie Chimique

# **Etude tridimensionnelle des films de savon**

Katia MEDJBER

Sous la direction de : M. T.AHMED-ZAID, Pr (ENP)  
Mme. S.HADDOUM, MCB, (ENP)

Présenté et soutenu publiquement le 15 Juin 2017

## **Composition du jury :**

<b>Président</b>	M. A.SELATNIA, Pr (ENP)
<b>Rapporteurs/ Promoteurs</b>	M. T.AHMED-ZAID, Pr (ENP) Mme. S.HADDOUM, MCB, (ENP)
<b>Examineurs</b>	M. OUADJAOUT, MAA, (ENP) Mme Y.TCHOULAK, MAA, (ENP)

**ENP 2017**

## *Dédicaces*

*Que ce travail témoigne de mes respects :*

### *A mes parents :*

*Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux. Je prie le bon Dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.*

### *A ma sœur et à mon frère ainsi que toute ma famille :*

*Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me porter.*

### *A tous mes professeurs :*

*Leur générosité et leur soutien m'oblige de leurs témoigner mon profond respect et ma loyale considération.*

### *A tous mes amis, plus spécialement à Charaf, Dihia et ma binôme Chaima:*

*Ma gratitude et mes sincères remerciements pour leur soutien, leurs encouragements et les bons moments qu'on a partagé.*

# *Remerciements*

*En tout premier lieu, nous remercions le bon Dieu, le tout puissant, de nous avoir donné la force pour survivre, ainsi que la patience et l'audace pour dépasser toutes les difficultés et accomplir ce travail.*

*Au terme de ce mémoire, nous saisissons cette occasion pour exprimer nos vifs remerciements à toute personne ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.*

*L'expression de notre haute reconnaissance à nos rapporteurs **Mr. Toudert Ahmed Zaid** et **M<sup>me</sup>. Haddoum Saliha**, qui nous ont encadré avec patience durant la réalisation de ce travail de fin d'études, et qui n'ont épargné aucun effort pour mettre à notre disposition la documentation et les explications nécessaires. Leurs conseils nous ont été bien utiles, notamment pour la rédaction de ce mémoire.*

*Nous exprimons également notre gratitude aux membres de jury, nos professeurs : **Mr. Selatnia**, **Mr. Ouadjaout** et **M<sup>me</sup>. Tchoulak** qui nous ont honoré en acceptant de juger ce modeste travail.*

*Enfin, nous tenons à remercier l'ensemble du corps professoral et administratif de la spécialité **Génie Chimique**, qui ont assuré notre formation et nous ont encouragé durant nos années d'études au département.*

## ملخص

يركز هذا العمل على دراسة أفلام الصابون بدعم حواف إطارات من مختلف الأشكال. يمكن دراسة الأنماط ثلاثية الأبعاد التي تم الحصول عليها بطرق مختلفة ولكنها تشكل أكبر التحديات من حيث الهندسة التفاضلية و لطوبولوجيا. لتحقيق، التوازن يسعى فليم الصابون دائما لاحتلال الحد الأدنى من المساحة السطحية وفقا للمبدأ المعروف بأن كل نظام يؤول بشكل عفوي إلى حالة الطاقة الأدنى. الأشكال المتحصل عليها بواسطة أفلام الصابون قد درست مسبقا في القرن 19 من طرف العالم جوزيف بلاطو.

من خلال تأمل الأفلام التي تحصلنا عليها في لمختبرا أردنا التحقق بواسطة قياس زوايا وأطوال الأفلام من بعض قوانين بلاطو التي تحكم السلوك المعقد لأفلام الصابون.

كلمات البحث : أفلام، الصابون، فقاعات إطارات ثلاثية الأبعاد المساحة، السطحية، الأدنى الطاقة الأدنى ، قوانين بلاطو.

## Abstract

The present work is a brief study of soap films supported by the edges of frames of different shapes. The three-dimensional patterns obtained can be studied in different ways, but it is from the perspective of differential geometry and topology that these films are most challenging.

The soap film will always seek, at equilibrium, to occupy the surface of minimal area, by virtue of the well-known principle that every system evolves spontaneously towards the state of minimal energy. The shape of soap films patterns was studied by the Belgian physicist J. Plateau in the 19th century. By observing the films obtained in the laboratory, we sought to verify, by measurements of angles and lengths of films, certain Plateau rules that govern the complex behavior of soap films.

**Keywords:** soap films, coalescent bubbles, three-dimensional contours, minimal surfaces, minimal energy, Plateau's laws.

## **Résumé**

Le présent travail s'intéresse à l'étude des films de savon supportés par les bords de cadres de différentes formes. Les motifs tridimensionnels obtenus peuvent être étudiés de différentes manières mais c'est sous l'angle de la géométrie différentielle et de la topologie que ces films posent le plus de défis.

Le film de savon cherchera toujours, à l'équilibre, à occuper la surface d'aire minimale, en vertu du principe bien connu que tout système évolue spontanément vers l'état d'énergie minimale. La forme des motifs et des formes obtenues à l'aide de films de savon a été étudié par le physicien belge J. Plateau au XIX<sup>ème</sup> siècle. En observant les films obtenus au laboratoire, nous avons cherché à vérifier, par des mesures d'angles et de longueurs de films certaines lois de Plateau qui régissent le comportement complexe des films de savon.

**Mots clé :** films de savon, bulles coalescentes, contours en trois dimensions, surfaces minimales, énergie minimale, règles de Plateau

# Table des matières

Liste des tableaux	
Liste des figures	
Liste des abréviations	
Introduction générale.....	13
Partie 1 : Revue bibliographique .....	15
Chapitre I : Etude générale des bulles et des films de savon .....	16
I.1. Généralités sur les mousses .....	17
I.1.1. Constituants physico-chimiques.....	17
I.1.2. Description des mousses à toutes les échelles de taille .....	18
I.1.3.1. Mécanismes de formation d'une mousse.....	20
I.1.3.2. Evolution d'une mousse après sa formation : drainage, mûrissement ou vieillissement et rupture .....	21
I.2. Introduction aux bulles et films de savon .....	23
I.2.1 Structure et caractéristiques d'une bulle de savon .....	23
I.2.1.1. Description d'une bulle de savon .....	23
I.2.1.2. Forme sphérique d'une bulle de savon .....	23
I.2.1.3. Lois de Laplace.....	24
I.2.2. Qu'est-ce qu'un film savonneux ? .....	25
I.2.3. Arrangement des films de savon : Lois de Plateau .....	25
I.2.4. Stabilité d'un film de savon .....	26
Chapitre II :Etude tridimensionnelle des bulles et des films de savon.....	28
II.1. Introduction .....	29
II.2. Notion de minimisation de la surface .....	29
II.2.1. Surfaces de films de savon topologiquement différentes.....	29
II.2.2. Quelques problèmes possédant des solutions analytiques .....	31
II.2.3. Solutions analogiques à certains problèmes non résolus .....	34
II.3. Grappe de bulles.....	46
II.3.1. Cas de deux bulles coalescentes .....	47
II.3.2. Cas de trois bulles coalescentes .....	50
II.3.4. Bulles piégées dans des cadres.....	57
Partie 2 :Expérimentation.....	60

Chapitre III :Partie Expérimentale .....	61
III.1. Produits et matériels utilisés.....	62
III.2.Recette du mélange utilisé .....	62
III.3. Protocole expérimental.....	63
III.4. Problème de Plateau .....	63
III.5. Résultats expérimentaux et interprétation .....	64
III.5.1. Résultats des expériences sur les films de savon.....	64
III.5.1.1. Cas du cadre tétraédrique.....	64
III.5.1.2. Cas du prisme triangulaire .....	65
III.5.1.3. Cas du cadre octaédrique .....	66
III.5.1.5. Cas du film formé entre deux anneaux coaxiaux parallèles.....	68
III.5.1.6. Cas du film en hélice.....	69
III.5.2. Résultats des expériences sur les bulles de savon .....	70
III.5.2.1. Cas de deux bulles coalescentes .....	70
III.5.2.2. Cas de trois bulles coalescentes .....	71
III.5.2.3. Cas d'un groupe de bulles coalescentes.....	72
III.5.2.4. Cas d'un amas de bulles retenues entre deux plaques de plexiglas .....	73
III.5.2.5. Cas de bulles piégées dans des cadres métalliques .....	74
III.6. Discussion des résultats.....	78
Conclusion générale .....	80
Références bibliographiques .....	83

## Liste des tableaux

Tableau I.1. Comparaison de l'aire des différentes formes géométriques ayant le même volume.....	10
--	----

## Liste des figures

Figure I.1. Mousse et ses constituants .....	17
Figure I.2. Structure d'une molécule tensioactive.....	17
Figure I.4. Bord de plateau entre les bulles .....	19
Figure I.5. Apparence d'une mousse tridimensionnelle en fonction de la fraction liquide (simulation numérique de A. Kraynik)..	19
Figure I.6. Effet Gibbs-Marangoni .....	21
Figure I.7. Photographie d'une mousse tridimensionnelle.....	22
Figure I.8. Bulle de savon .....	23
Figure I.9. Forces s'exerçant sur une bulle de savon .....	24
Figure I.10. Représentation schématique d'un film de savon .....	25
Figure I.11. Illustration des lois de Plateau .....	26
Figure I.12. Un film de savon en vue de coupe.....	26
Figure II.1. Différentes surfaces minimales: (a) a deux surfaces; (B) n'a qu'une seule surfac	30
Figure II.2. (a) Un film avec deux surfaces. (B) Une bande Möbius (une seule surface). .....	30
Figure II.3. Différentes surfaces minimales produites par un cadre en fil de fer qui a la forme d'écouteurs ; (a) et (b) de genre zéro, (c) de genre un.....	31
Figure II.4. Une cycloïde produite par le mouvement d'un point de la circonférence d'une roue qui roule sans glisser. ....	31
Figure II.5. (a) Une caténoïde produite par un film de savon formé entre deux anneaux de rayon a. (b) Une autre surface minimale contenue par deux anneaux, contenant un disque intermédiaire. ....	32
Figure II.6. (a) La surface minimale contenue par deux anneaux horizontaux parallèles avec des centres séparés par une distance horizontale, d et par une hauteur verticale h. (b) La variation de h avec d pour la surface limite joignant les deux anneaux. ....	33
Figure II.7. (a) Le minimum, la caténoïde, la surface contenue par deux entonnoirs coaxiaux. (b) La surface minimale contenue dans un quadrilatère déformé .....	34
Figure II.8. Les solides de Platon: (a) tétraèdre; (b) cube; (c) octaèdre; (d) dodécaèdre; (e) icosaèdres .....	35
Figure II.9. Le résultat du pincement de deux faces adjacentes d'un tétraèdre .....	35
Figure II.10. Surface minimale formée par un film de savon contenu dans un cadre tétraédrique .....	36
Figure II.11. Surface minimale formée par un film de savon contenu dans cinq bords du tétraèdre.....	37

Figure II.12. Surface minimale formée par un film de savon contenu par quatre bords du tétraèdre.....	37
Figure II.13. Solution du Problème de Steiner pour relier 4 points en configuration bidimensionnelle.....	38
Figure II.14. Surface minimale d'un film de savon formé par les douze bords d'un cube .....	38
Figure II.15. Surface minimale formée par la rupture de la surface «carré» au centre d'un cadre cubique .....	39
Figure II.16. Surface minimale formée par rupture des surfaces liées à deux faces du cube ..	39
Figure II.17. Surface minimale délimitée par les douze arêtes d'un octaèdre liées à deux faces du cube .....	40
Figure II.18. Surface minimale délimitée par un sous-ensemble d'arêtes de l'octaèdre liées à deux faces du cube .....	41
Figure II.19 (a). Surface minimale formée à l'intérieur d'un cadre dodécaédrique.....	42
Figure II.19 (b). Surface minimale formée à l'intérieur d'un cadre icosaédrique.....	42
Figure II.19 (c). Surface minimale à l'intérieur d'un tétraèdre tronqué.....	43
Figure II.19 (d). Surface minimale à l'intérieur d'un Cuboctaèdre.....	43
Figure II.19 (e). Surface minimale à l'intérieur d'un cube tronqué .....	43
Figure II.19 (f). Surface minimale à l'intérieur d'un octaèdre tronqué.....	43
Figure II.20. Configuration minimale du film de savon reliant cinq points.....	43
Figure II.21. Surface formée par le film de savon dans un prisme triangulaire .....	44
Figure II.22. Surface minimale formée par un cadre en forme de prisme triangulaire montrant un «triangle» horizontal .....	44
Figure II.23. Surface minimale produite par une hélice.....	45
Figure II.24. Deux bulles coalescentes.....	46
Figure II.25. Moitié supérieure d'une section passant par la ligne joignant les centres de courbure des trois surfaces externes de deux bulles coalescentes.....	48
Figure II.26. Trois bulles coalescentes.....	50
Figure II.27. Groupes de bulles de savon de même rayon. ....	52
Figure II.28. Groupes de bulles de rayons inégaux.....	53
Figure II.29. Groupes de bulles hémisphériques. Les angles de $120^\circ$ sont indiqués par des points. ....	53
Figure II.30. Radeaux de bulles .....	54
Figure II.31. Deux bulles cylindriques en contact. ....	55
Figure II.32. Film contenant des cellules polyédriques .....	55
Figures II.33. Bulles contenues dans des cadres .....	58

Figure III.1. Surface minimale formée par le film de savon dans un tétraèdre.....	64
Figure III.2. Surface minimale formée par le film de savon dans un prisme triangulaire .....	65
Figure III.3. Surface minimale formée par le film de savon dans un octaèdre contenant un hexagone au centre .....	66
Figure III.4. Surface minimale formée par le film de savon dans un cube .....	67
Figure III.5. Surface minimale (caténoïde) créée par le film de savon entre deux anneaux écartés.....	68
Figure III.6. Surface minimale (hélicoïde) créée par le film de savon dans une hélice. ....	69
Figure III.7. Deux bulles coalescentes .....	70
Figure III.9. Groupe de bulles coalescentes .....	72
Figure III.10. Amas de bulles formées entre deux plaques de plexiglas.....	73
Figure III.11. Bulle piégée dans un cadre cubique.....	74
Figure III.12. Bulle piégée dans un cadre tétraédrique .....	75
Figure III.13. Bulle piégée dans un prisme triangulaire.....	76

## Liste des abréviations

$\sigma$	Tension superficielle (N/m)
$\sigma_f$	Tension superficielle du film de savon (N/m)
$F$	Energie libre totale (N.m)
$F_B$	Energie libre à l'intérieur de la bulle de savon (N.m)
$A$	Aire du film (m <sup>2</sup> )
$P_f$	Excès de pression (N/m <sup>2</sup> )
$r$	Rayon d'une bulle (m)
$R$	Rayon de courbure (m)
$n$	Nombre de cotés dans un polyèdre régulier
$\theta$	Angles entre les coins des faces du polyèdre (°)
$v$	Nombre de sommet d'un polyèdre régulier
$\Phi$	Somme des angles entre les côtés entourant tout sommet du polyèdre régulier
$f$	Nombre de faces du polyèdre
$e$	Nombre de bords du polyèdre

## Introduction générale

En physique, le XIX<sup>e</sup> siècle est riche de découvertes. Pendant longtemps, il a semblé naturel, sinon nécessaire, que la recherche d'excellence soit faite aux limites de nos capacités technologiques, qui sont aussi, le plus souvent, les limites de nos moyens financiers. Le corollaire a été un certain mépris pour l'étude d'objets si familiers que les questions qu'ils engendrent paraissent enfantines.

Pourtant, les grandes interrogations sont quelquefois à la portée de celui qui, simplement, sait regarder. C'est ainsi que nous assistons depuis quelques années à un retour d'intérêt pour une physique à l'échelle humaine. L'étude de phénomènes quotidiens requiert en effet un réel talent d'observation et d'expérimentation. Parce qu'elle se cantonne rarement à un seul domaine, elle se nourrit d'échanges interdisciplinaires, elle devient aussi passionnante et riche, parce qu'elle impose parfois des changements radicaux de points de vue. Les mousses de savon illustrent de manière frappante cette trompeuse simplicité <sup>[1]</sup>.

Les mousses sont omniprésentes dans notre quotidien. Elles sont utilisées dans des domaines variés : la préparation de produits alimentaires et de cosmétiques, l'extraction pétrolière, la lutte contre les incendies, la flottaison des minerais, ou encore la décontamination nucléaire. Cette multiplicité d'usages tient à leur structure qui leur confère des comportements physiques originaux. De loin, elles ressemblent à une sorte de liquide épais et homogène, mais, observées de plus près, elles apparaissent comme un ensemble complexe de bulles de gaz, isolées les unes des autres par un film liquide. Finalement, la mousse n'est rien d'autre que du gaz dans du liquide : beaucoup de volume pour peu de matière.

Les physiciens étudient comment les caractéristiques des mousses liquides à l'échelle globale, telles que la consistance, la fluidité et la stabilité, naissent de cette structure et des propriétés physico-chimiques du liquide. Aujourd'hui, ils retracent les étapes qui jalonnent la vie d'une mousse : de sa formation, qui mène à un agglomérat désorganisé de bulles, jusqu'à sa disparition. Trois mécanismes gouvernent cet effondrement : le mûrissement qui impose l'évolution de la mousse en fonction des différences de pression dans les bulles, le drainage qui assèche la mousse, et la coalescence des bulles. Lors de ces étapes, des molécules tensioactives jouent un rôle déterminant.

Dans les mousses, la force dite de tension superficielle, tend à minimiser la surface des bulles. Les bulles s'agencent de façon à ce que, le long de l'ensemble des arêtes, les tensions entre faces s'équilibrent : les angles entre arêtes doivent être égaux, et les règles de Plateau deviennent alors apparentes (les bulles se rencontrent trois par trois avec des angles de 120 degrés). Outre la tension superficielle, les bulles sont également soumises à la pression exercée par les molécules de gaz piégées dans ces bulles. L'air s'oppose à l'effondrement des bulles et une taille d'équilibre est atteinte. Dans ces conditions, quelle forme ont les bulles? La réponse diffère selon la dimension de la mousse. À deux dimensions, le problème revient à trouver une configuration de bulles telle que leur périmètre total soit minimal. Faisons un détour par l'architecture des ruches : les abeilles qui construisent leur ruche de façon à économiser la cire

bâtissent des alvéoles dont la section est un réseau hexagonal... en «nid-d'abeilles» (la construction des abeilles est tridimensionnelle, mais elle se réduit à un problème à deux dimensions, car la ruche est identique à elle-même sur la troisième dimension). C'est le réseau de périmètre minimal ; si cette affirmation figure dans un traité d'apiculture datant de plus de 2 000 ans, elle n'a été démontrée qu'en 2001 par le mathématicien Thomas Hales, de l'Université du Michigan, et illustre le fossé qui existe souvent entre intuition et démonstrations rigoureuses.

Ainsi, à deux dimensions, les bulles s'agencent selon un réseau hexagonal. À trois dimensions, le problème est plus difficile : quelles bulles remplissent complètement l'espace sans laisser d'interstices, délimitant des angles de 120 degrés entre les faces, et assurant une surface totale minimale? En 1887, Lord Kelvin prétendit que le meilleur arrangement de bulles identiques est un pavage périodique d'un polyèdre à 14 faces nommé «tétrakaidécaèdre». Cette assertion a été admise, sans être prouvée, jusqu'à ce qu'en 1982, Fred Almgren, de l'Université de Princeton, la mette en doute ; en 1993, Denis Weaire et Robert Phelan, à Dublin, ont démontré qu'elle était fautive. En observant différents assemblages d'atomes présents dans les matériaux cristallins, ils ont imaginé un arrangement dont la surface est inférieure de 0,3 pour cent à celle de Kelvin. Aujourd'hui, on ignore si cette solution est la meilleure, et d'ailleurs D. Weaire et R. Phelan se gardent bien de l'affirmer. La question reste ouverte <sup>[2]</sup>.

Par ailleurs, l'étude des films de savon tridimensionnels consiste à plonger des cadres métalliques de différentes formes dans une solution savonneuse, ainsi les faces des cadres sont alors comblées par les films de savon. Cependant les interactions entre les films permettent de créer une surface particulière dite surface minimale.

Dans ce modeste travail qui comprend trois chapitres, nous nous proposons d'étudier les bulles et les films de savon en trois dimensions. Nous souhaitons vérifier expérimentalement les lois régissant ces bulles et ces films (minimisation de la surface et les lois de Plateau).

Après avoir introduit les notions essentielles des mousses liquides, des bulles et des films de savon dans le premier chapitre. Nous aborderons dans le second, le comportement des bulles et des films de savon à minimiser leurs surfaces.

Dans le troisième chapitre, nous décrirons l'expérience effectuée et les différents produits utilisés afin de vérifier ces lois et ces comportements décrits dans la littérature.

**Partie 1 :**

**Revue**

**bibliographique**

# **Chapitre I :**

# **Etude générale des**

# **bulles et des films de**

# **savon**

## I.1. Généralités sur les mousses

Une mousse résulte de l'empilement de très nombreuses bulles, ce qui lui donne à cet état de la matière d'extraordinaires propriétés. Nous décrivons ici la vaste classe des mousses liquides, dont les deux constituants élémentaires sont un gaz et un liquide (eau savonneuse). Elles sont en générale opaques, remarquablement stables et même élastiques.

### I.1.1. Constituants physico-chimiques

Une mousse est une dispersion de gaz dans un liquide. Les bulles, serrées les unes contre les autres, occupent la majorité du volume. La phase liquide, qui constitue les films de savon et leurs jonctions, y est continue, au contraire de la phase gazeuse. Elle contient des molécules particulières, les tensioactifs, qui stabilisent l'ensemble en se plaçant aux interfaces liquide/gaz.



Figure I.1. Mousse et ses constituants [3]

#### ➤ Définition d'un tensioactif

On appelle tensioactifs, ou encore agents de surface, les molécules modifiant les propriétés des interfaces. On qualifie ces composés d'amphiphiles, ces molécules comportant une partie hydrophile (ayant une affinité pour l'eau) et une autre hydrophobe (n'ayant pas d'affinité pour l'eau). C'est grâce à la présence de ces deux parties antagonistes que ces molécules s'adsorbent aux interfaces et en modifient les propriétés (altèrent à un certain degré la tension superficielle).

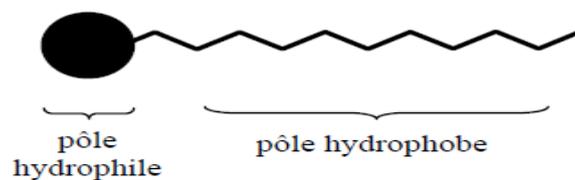


Figure I.2. Structure d'une molécule tensioactive [4]

## ➤ Tension superficielle

### Origine :

Il existe dans tout liquide des forces qui assurent l'attraction des molécules entre elles et donc la cohésion de la matière. Physiquement, la tension superficielle a pour origine les forces exercées sur une molécule par ses voisines.

À l'intérieur du liquide, les molécules sont en équilibre, les forces intermoléculaires, d'intensité égale dans toutes les directions, par conséquent, la résultante des forces est nulle. Par contre à la surface du liquide, les molécules sont toujours soumises à l'action d'une force d'attraction vers l'intérieur par les autres molécules au sein du liquide.

La tension superficielle est la tension élastique générée par l'interface tout le long de la surface afin de conserver l'équilibre.

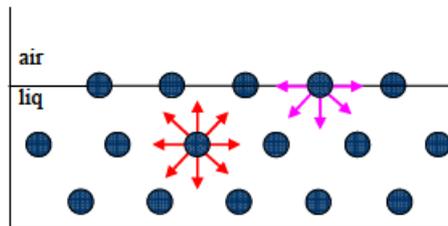


Figure I.3. Schématisation des forces intermoléculaires s'exerçant au sein d'un liquide et à sa surface <sup>[4]</sup>

### Définition énergétique :

Considérons un film de savon tendu sur un support plan. Le travail à fournir pour augmenter la surface de  $dS$  s'écrit :

$$dW = 2\sigma dS \quad (I.1)$$

Où le facteur 2 provient du fait que le film est composé de deux interfaces eau/air <sup>[5]</sup>.

$\sigma$  est exprimée en N/m

### I.1.2. Description des mousses à toutes les échelles de taille <sup>[6]</sup>

Une mousse comprend différentes échelles qui s'influencent mutuellement.

Le premier niveau, nanométrique, d'organisation d'une mousse, est celui de la molécule tensioactive, nécessaire pour stabiliser les films entourant les bulles. Les molécules de tensioactif s'adsorbent et s'organisent généralement à l'interface liquide/gaz en monocouche, la tête hydrophile dans le liquide et la queue hydrophobe dans le gaz. Les propriétés des interfaces ainsi formées seront dues aux propriétés de ces tensioactifs.

Le deuxième niveau constitue le film situé entre deux interfaces liquide-gaz. Ce film est stable le plus souvent grâce à la répulsion électrostatique des tensioactifs composants les deux interfaces ce qui empêche ces dernières de se rapprocher.

L'échelle au-dessus du film de savon, en terme de taille, est celle des canaux entre les bulles, appelés par les physiciens des mousses "bords de Plateau" sous le nom du physicien belge Joseph Antoine Ferdinand Plateau qui travailla sur la structure géométrique des bulles au XIX<sup>ème</sup> siècle (1801-1883).

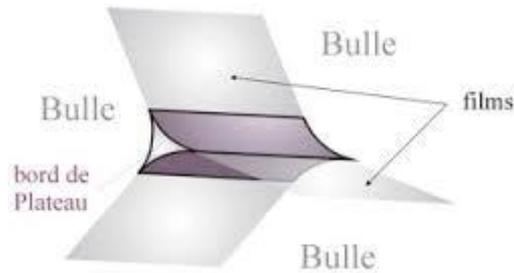


Figure I.4. Bord de plateau entre les bulles <sup>[6]</sup>

Au-dessus de ce réseau de canaux et des bulles, nous arrivons à l'échelle de la mousse à proprement parler. Deux paramètres peuvent permettre de définir cet objet, même s'ils évoluent au cours du temps : le diamètre des bulles, noté  $D$ , et la fraction liquide  $\epsilon$ . La figure I.5 présente des résultats de simulations numériques montrant l'apparence de la mousse en fonction de la fraction liquide.

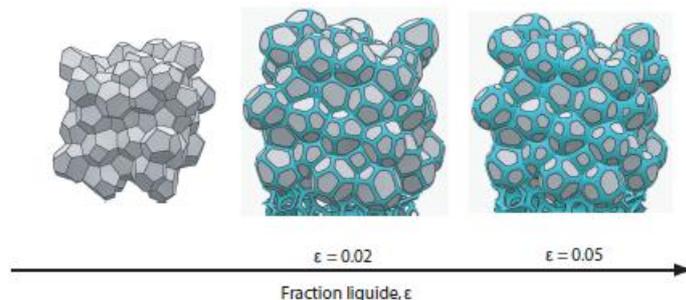


Figure I.5. Apparence d'une mousse tridimensionnelle en fonction de la fraction liquide (simulation numérique de A. Kraynik). Le liquide couvre rapidement une fraction importante de la surface des bulles.

On distingue généralement deux types de mousses :

Les mousses humides, qui contiennent une fraction volumique de liquide élevée (typiquement 5 % jusqu'à 30 % et même plus) et que l'on peut considérer comme des dispersions de gaz dans

un liquide pour lesquelles les bulles sont essentiellement sphériques et les bords de Plateau et les nœuds grossissent.

Les mousses dites sèches, qui contiennent très peu de liquide (2 % ou moins) et dont les bulles séparées par des films minces sont des polyèdres et les bords de Plateau et les nœuds sont très fins.

### **I.1.3. Etapes dans la vie d'une mousse : naissance, vie et mort et les phénomènes associés**

#### **I.1.3.1. Mécanismes de formation d'une mousse <sup>[7]</sup>**

##### Formation des bulles

Plusieurs méthodes sont possibles pour disperser un gaz dans un liquide : on peut insuffler le gaz dans le liquide, ou l'incorporer soit par bullage, soit par barbotage, fouettage ou brassage et entraînement de gaz au sein du liquide.

##### Addition des tensioactifs

La durée de vie d'une mousse peut être très variable : de quelques minutes à quelques heures ou bien jusqu'à quelques jours selon le mode de fabrication et les additifs utilisés (formulation).

Dans tous les cas, on ne peut obtenir de mousse dans un liquide pur. En effet, la formation de la mousse et sa durée de vie reposent entièrement sur la présence de composés tensioactifs qui s'adsorbent aux interfaces gaz-liquide et qui sont susceptibles de stabiliser les films durant les premiers instants de la vie de la mousse et permettre aux bulles de s'accumuler pour former la dispersion gaz-liquide.

##### Séparation par gravité

Les bulles ainsi formées se déplacent rapidement sous l'effet de la poussée d'Archimède et s'accumulent à la surface libre du liquide. Les bulles perdent leur sphéricité et les films de liquide qui se forment entre la surface libre et les bulles, ainsi qu'entre les bulles elles-mêmes, doivent résister à l'étirement produit par les contraintes mécaniques pour que la mousse puisse survivre. On parle alors d'élasticité de ces films due à l'effet Gibbs-Marangoni.

##### Effet Gibbs-Marangoni

Lors du rapprochement de deux bulles, le film liquide qui les sépare s'amincit en même temps que les interfaces liquide/gaz s'étirent. L'étirement des interfaces entraîne une diminution de la concentration de tensioactif aux interfaces. Il en résulte une augmentation de la tension superficielle dans la zone étirée et au même temps une différence de tension superficielle par rapport aux zones voisines. La force due au gradient de tension superficielle entraîne le liquide des zones épaisses du film vers les zones plus minces. Cet effet appelé effet de «Gibbs-Marangoni» s'oppose donc à l'étirement des films entre les bulles. Il a tendance à stopper l'étirement en conférant aux films étirés une certaine élasticité qui favorise la formation et la stabilisation de la mousse. Lorsque ce mécanisme n'existe pas, il n'y a pas de mousse <sup>[7]</sup>.

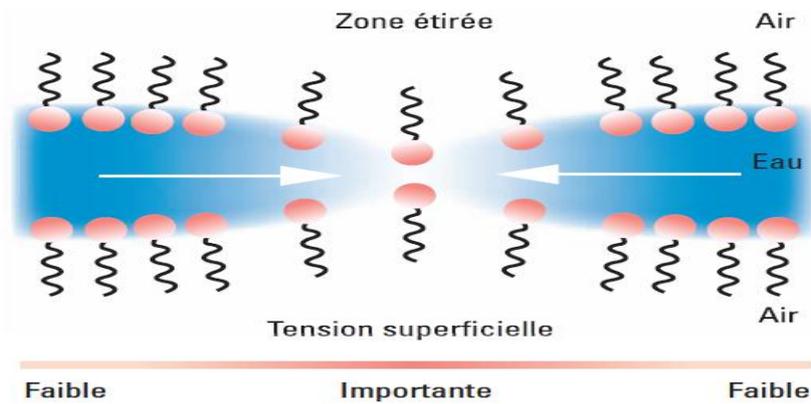


Figure I.6. Effet Gibbs-Marangoni [7]

### I.1.3.2. Evolution d'une mousse après sa formation : drainage, mûrissement ou vieillissement et rupture

La vie d'une mousse liquide est éphémère. Aussitôt après sa formation, trois mécanismes mènent à sa disparition, classés par ordre décroissant de durée : le mûrissement, lié à la pression du gaz, qui dure d'une minute à plusieurs heures ; le drainage, lié au liquide, qui intervient à l'échelle de la minute ; la rupture des films, phénomène presque instantané en l'absence de molécules stabilisatrices.

#### - Mûrissement

Le mûrissement dans les mousses est la conséquence de la différence de pression entre les différentes bulles décrite par la relation de Laplace.

$$\Delta P = P_A - P_B = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (I.2)$$

Dans le cas des mousses sèches tridimensionnelles, l'évolution du volume d'une bulle dépend du nombre de faces (et donc du nombre de voisines). Au cours du temps, les bulles ayant le moins de faces disparaissent au profit de celles qui ont le plus grand nombre de voisines. Ce régime est appelé mûrissement de Mullins [8,9].

Or, il s'avère que le nombre de faces est fortement corrélé au volume de la bulle. Ainsi, statistiquement, une bulle aura d'autant plus de faces que son volume sera important [8]. Par conséquent, les petites bulles auront tendance à disparaître au profit des plus grosses (mûrissement d'Ostwald). Comme la taille moyenne des bulles a tendance à augmenter, le nombre total de bulles dans un volume donné diminue. En réalité, pour des mousses de fraction liquide intermédiaire (ni très sèche ni très humide) les deux régimes (Ostwald et Mullins) coexistent. [6]

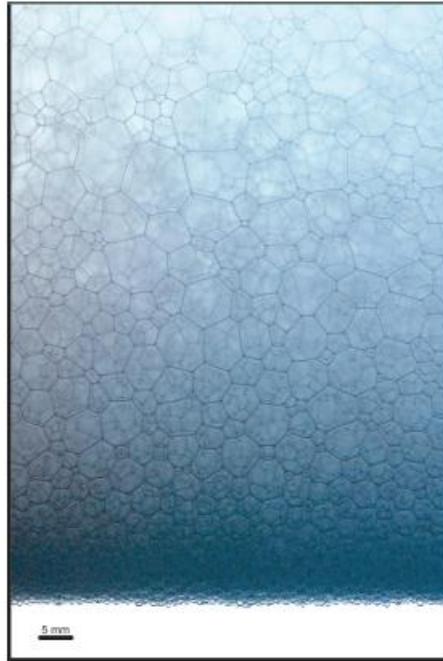


Figure I.7. Photographie d'une mousse tridimensionnelle <sup>[6]</sup>

## - Drainage

Soumis à la gravité terrestre, le liquide contenu dans la mousse s'écoule au travers du réseau de bords de Plateau, de nœuds et de films vers le bas de la mousse.

Cet écoulement réduit la proportion de liquide dans la partie supérieure de la mousse qui devient de plus en plus sèche.

## - Coalescence

Il s'agit de la rupture des films liquides qui constituent la paroi des bulles.

Ce processus conduit à la disparition de la mousse par diminution progressive du nombre total de bulles. En effet, lorsque la paroi entre deux bulles se rompt, les deux bulles en deviennent une seule. On dit qu'elles ont coalescé.

Le drainage et la coalescence sont étroitement liés. En effet, dans une mousse la coalescence débute généralement en haut de la mousse, là où la fraction liquide est la plus faible. Ainsi la fraction liquide et l'épaisseur des films semblent jouer un rôle déterminant dans la rupture des films.

## I.2. Introduction aux bulles et films de savon

### I.2.1 Structure et caractéristiques d'une bulle de savon

#### I.2.1.1. Description d'une bulle de savon

Une bulle de savon est une sphère constituée à partir d'eau, de savon et de l'air.

L'eau et le savon forment une paroi d'eau savonneuse autour de l'air que la bulle a réussi à emprisonner lors de sa formation. Cette paroi est en fait une paroi d'eau, à laquelle des molécules de savon se sont fixés, formant un ensemble relativement stable.

Ce sont les molécules de savon qui assurent cette stabilité, en effet, ces molécules amphiphiles, composées de deux parties, d'une tête hydrophile qui va former des liaisons avec l'eau, et d'une queue hydrophobe qui au contraire va montrer une répulsion pour l'eau et va s'orienter vers l'air. Figure (I.7)

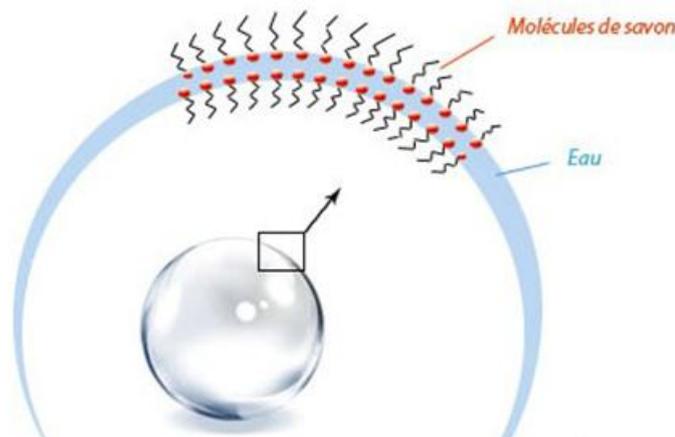


Figure I.8. Bulle de savon <sup>[10]</sup>

#### I.2.1.2. Forme sphérique d'une bulle de savon

La tension superficielle d'une bulle dépend de l'espace entre les molécules de savon. Plus elles sont éloignées les unes des autres, plus la tension superficielle de la bulle est élevée. Donc plus une bulle grandit, plus sa tension superficielle augmente, car elle aura le même nombre de molécules pour une plus grande surface, ce qui les oblige à s'écarter les unes des autres. C'est-à-dire que la tension augmente proportionnellement à la surface. Cela engendre une augmentation de l'énergie nécessaire pour maintenir la cohésion des molécules des membranes. Comme une bulle recherche absolument à avoir la tension superficielle la plus basse, elle prend la forme du solide ayant la plus petite surface pour le même volume. Et plus la surface de la bulle est petite, plus sa tension superficielle est faible. La sphère est le solide ayant la plus petite

aire pour un volume donné, c'est donc logiquement la forme des bulles. Le tableau I.1 nous le montre bien.

Tableau I.1. Comparaison de l'aire des différentes formes géométriques ayant le même volume. <sup>[10]</sup>

Forme	Nombre de faces	volume	Surface
Tétraèdre	4	16 cm <sup>3</sup>	46 cm <sup>2</sup>
Cube	6	16 cm <sup>3</sup>	39 cm <sup>2</sup>
Octaèdre	8	16 cm <sup>3</sup>	37 cm <sup>2</sup>
Dodécaèdre	12	16 cm <sup>3</sup>	34 cm <sup>2</sup>
Sphère	Infini	16 cm <sup>3</sup>	31 m <sup>2</sup>

### I.2.1.3. Lois de Laplace

Les bulles de savon sont soumises à différentes pressions qui s'exercent simultanément à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle :

- Une pression interne qui s'exerce à l'intérieur de la bulle et qui a tendance à dilater et à étirer la membrane de celle-ci ;
- Une pression externe (la pression atmosphérique) qui s'exerce à l'extérieur de la bulle et qui a tendance à la contracter sur elle-même ;
- La tension superficielle qui a pour effet de contracter la bulle sur elle-même.

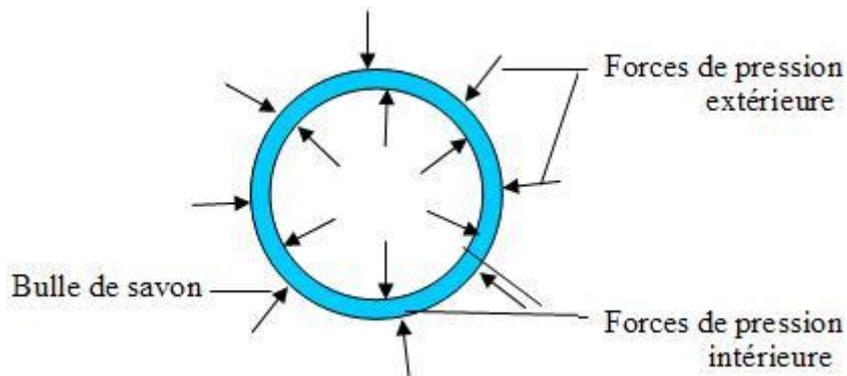


Figure I.9. Forces s'exerçant sur une bulle de savon <sup>[11]</sup>

Pour calculer la pression dans la bulle de savon, il faut prendre en compte le fait qu'il y a deux interfaces : une interface air/liquide puis une interface liquide/air. La différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur est donc doublée. On en déduit :

$$P_2 - P_1 = \frac{4\sigma}{R} \quad (I.3)$$

Où :

$P_1$  est la pression atmosphérique en pascals

$P_2$  est la pression de l'air dans la bulle en pascals

$\sigma$  est la tension superficielle du liquide en newtons par mètre.

$R$  est le rayon de la bulle en mètres.

## I.2.2. Qu'est-ce qu'un film savonneux ?

Un film de savon est principalement constitué de deux couches monomoléculaires de molécules de savon séparées d'une couche de solution de savon d'épaisseur variable.

Les molécules de tensioactif s'adsorbent aux deux interfaces air/eau et eau/air et s'organisent de manière à ce que leur partie hydrophile soit dirigée vers l'eau et leur partie hydrophobe orientée vers l'air.

C'est la présence de ces agents de surface qui rend l'existence du film possible car créer un film d'eau pure est impossible.

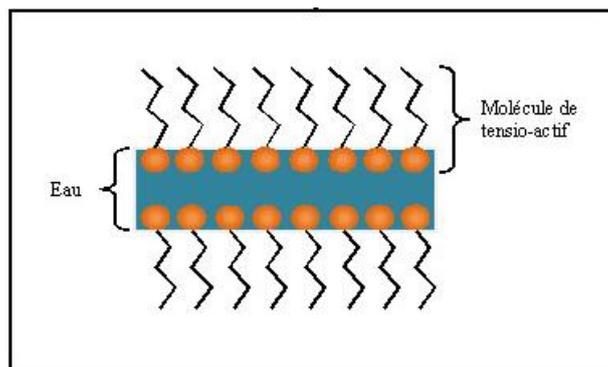


Figure I.10. Représentation schématique d'un film de savon <sup>[12]</sup>

## I.2.3. Arrangement des films de savon : Lois de Plateau

Au sein d'une mousse, deux bulles sont en contact via un film de savon. Le contact entre trois bulles est une ligne de liquide appelé "bord de Plateau" et le contact entre quatre bulles est un point de liquide appelée "vertex". Un bord de Plateau connecte ainsi trois films de savon et un vertex connecte quatre bords de Plateau. L'ensemble des bords de Plateau et des vertex forme un réseau interconnecté de liquide.

L'organisation des films de savon, bords de Plateau et vertex est régie par des lois de minimisation d'énergie de surface qui sont les lois de Plateau <sup>[26]</sup> énoncées par le physicien belge Joseph Antoine Ferdinand Plateau au XIX<sup>ème</sup> siècle :

- Les films ont une surface lisse, sans point anguleux ;

- Équilibre des films : la courbure moyenne des films de savon est constante ;
- Équilibre des bords de Plateau : les films se rencontrent par trois aux bords de Plateau en formant un angle de  $120^\circ$  pour annuler la résultante des forces induites par la tension des films sur le bord de Plateau ;
- Équilibre des vertex : les bords de Plateau se recoupernt par quatre au niveau des vertex en formant un tétraèdre régulier, avec des angles égaux à  $109.5^\circ$  entre les bords de Plateau.

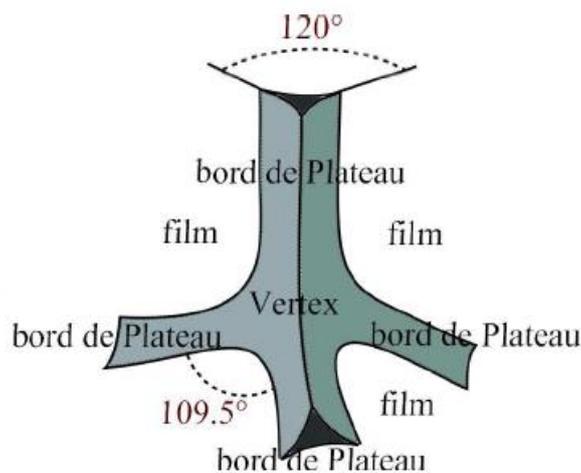


Figure I.11. Illustration des lois de Plateau <sup>[6]</sup>

## I.2.4. Stabilité d'un film de savon <sup>[12]</sup>

### A. Le potentiel DLVO

L'effet de peuplement de surface par les molécules tensioactives confère aux interfaces d'un film de savon une répulsion mutuelle, ce qui stabilise le film liquide, et justifie l'existence des bulles et des films de savon.

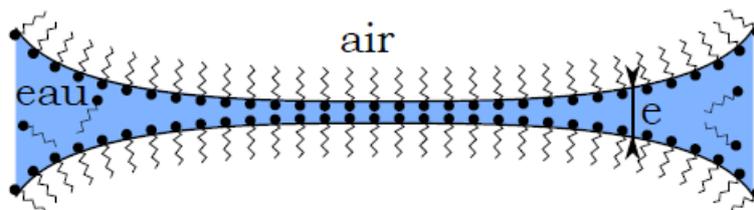


Figure I.12. Un film de savon en vue de coupe. <sup>[12]</sup>

Cet effet répulsif a deux sources distinctes, la première étant une répulsion électrostatique des têtes chargées (dans le cas d'un tensioactif chargé), la seconde une répulsion stérique. Ces deux effets répulsifs équilibrent un effet antagoniste, dont le rôle est joué ici par les forces attractives de van der Waals. En combinant les énergies potentielles associées à chaque phénomène, on obtient l'expression du potentiel DLVO<sup>[3]</sup>.

## B. Drainage

À sa création, un film est généralement doté d'une épaisseur de quelques microns. Avec des épaisseurs d'équilibre aussi petites devant la taille du film à sa création (deux à trois ordres de grandeur), on imagine aisément qu'au cours du temps, l'épaisseur du film en son centre va diminuer, ce qu'on appelle phénomène de drainage.

Le drainage est relié à la durée de vie du film. Dès sa création, un film est fragile et donc susceptible d'éclater. Or, le phénomène de drainage implique une diminution de l'épaisseur du film, ce qui fragilise encore plus le film. Donc, plus le temps passe et plus la probabilité de voir le film éclater augmente. En ralentissant le drainage, il est donc possible d'augmenter la durée de vie du film, car un film drainant lentement se fragilise moins rapidement et donc allonge sa durée de vie. Un moyen de ralentir le drainage est d'augmenter la viscosité du film. Pour augmenter la durée de vie du film, il est également possible de limiter l'évaporation de ce dernier.

D'après le potentiel DLVO, la force attirant les interfaces entre elles est la force de van der Waals. Cependant cette force est négligeable lorsque le film a une épaisseur de quelques microns, ce qui est le cas après la création du film. En dehors des forces de van der Waals, il existe d'autres forces mettant en œuvre un écoulement qui fait diminuer l'épaisseur du film. Comme pour tous les écoulements, c'est un gradient de pression qui en est à l'origine.

# **Chapitre II :**

# **Etude tridimensionnelle des bulles et des films de savon**

## II.1. Introduction

Quelle forme prend une pellicule élastique si elle est tendue sur un cadre? Cette question possède une réponse évidente si le cadre a la forme d'un cercle. Tout le monde sait que la peau (la pellicule «élastique») tendue sur le pourtour d'un tambour (le cadre) repose dans le plan de ce cadre. Nous n'avons guère besoin du calcul des variations pour répondre à cette question. Mais qu'advient-il si le cadre n'appartient pas à un plan?

La réponse est beaucoup moins évidente! Pourtant, on peut obtenir une réponse explicite facilement en plongeant des cadres métalliques de géométries diverses dans la solution. Lorsqu'on les en retirera, la pellicule savonneuse donnera une solution expérimentale à la question que nous venons de poser.

L'architecture de la dernière moitié de siècle a pu prendre de grandes libertés et s'éloigner des murs horizontaux et des toits plans. Plusieurs grands projets comportent des surfaces qui sont non planaires, particulièrement pour les toits. Quoique les matériaux soient loin d'être élastiques et souples, ces toits semblent parfois être des pellicules tendues sur un cadre de forme exotique.

Le calcul des variations permet de résoudre la question de la forme des pellicules élastiques si on la reformule en tenant compte du fait que la pellicule élastique décrit une surface dont l'aire est minimale. Nous savons tous intuitivement que la tension d'une bande ou d'une surface élastique est d'autant moins forte qu'elle est moins étirée. Minimiser la longueur d'une bande ou l'aire d'une surface consiste à minimiser les tensions qui s'y trouvent. Il en est de même pour les films de savon que nous nous proposons d'étudier. Aussi, résoudre la question originale revient à minimiser l'intégrale

$$I = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

qui représente l'aire de la partie du graphe d'une fonction  $f = f(x, y)$  située au-dessus d'un domaine  $D$  dont le pourtour est une courbe fermée  $C$  (le cadre). Dans cette formulation, cette question est un problème de géométrie classique nommé le problème des surfaces minimales.

## II.2. Notion de minimisation de la surface

### II.2.1. Surfaces de films de savon topologiquement différentes

Le mathématicien américain Richard Courant <sup>[13,14]</sup> s'est penché sur l'étude des surfaces de topologies différentes pouvant être obtenues avec des cadres filaires trempés dans une solution de savon. La modification de la forme du fil peut changer la nature topologique de la surface d'équilibre du film de savon. De plus, en faisant passer le film de savon d'une surface minimale à une autre, on peut également changer le caractère topologique de la surface. Ce changement peut être provoqué en soufflant sur le film par exemple, ou en le secouant.

Considérons un film de savon contenu par un anneau en fil de fer. Il présente deux surfaces (2 côtés) et un genre nul. Si l'anneau est déformé, le film de savon cherchera à reprendre une surface minimale déterminée par la nouvelle frontière, comme celles illustrées à la Fig. II.1 (a).

Le film gardera ses deux faces, mais peut aussi évoluer dans une autre configuration de surface minimale ne présentant qu'une seule face (figure II.1 (b)), telle une bande de Möbius. Une bande de Möbius peut être produite en utilisant deux anneaux coaxiaux en fil de fer (figure II.2 (a)). Si une découpe est faite dans les deux anneaux et que ceux-ci sont joints de façon à ce que l'anneau supérieur soit relié à l'anneau inférieur, comme le montre la Fig. II.2 (b), le film de savon délimité par le fil prendra la forme d'une bande de Moebius.

Un autre exemple intéressant est obtenu avec un cadre en fil de fer en forme « d'écouteurs » (figure II.3). Il existe trois configurations d'équilibre possibles pour le film de savon (figures II.3 (a), (b) et (c)) obtenu avec ce système. Les figures (a) et (b) présente une topologie de genre zéro, et la figure (c) un genre un. L'aire minimale absolue n'est pas évidente mais peut être déterminée, difficilement certes, par des mesures. La surface peut être basculée d'une forme à l'autre en soufflant sur le film de savon, ou en le secouant.

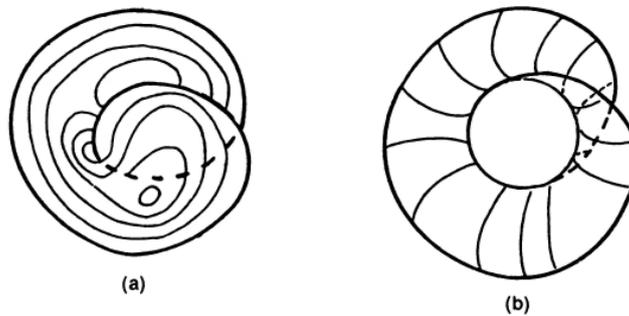


Figure II.1. Différentes surfaces minimales: (a) a deux surfaces; (B) n'a qu'une seule surface.<sup>[15]</sup>

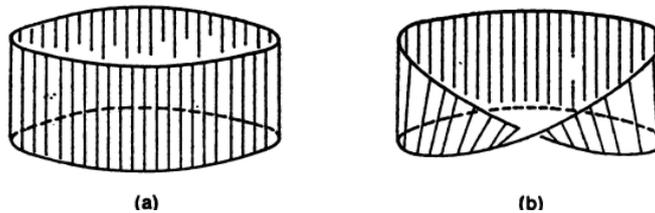


Figure II.2. (a) Un film avec deux surfaces. (B) Une bande Möbius (une seule surface).<sup>[15]</sup>

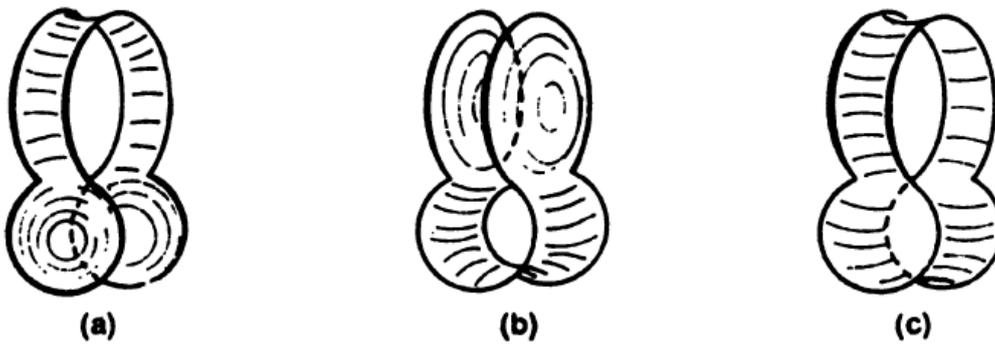


Figure II.3. Différentes surfaces minimales produites par un cadre en fil de fer qui a la forme d'écouteurs ; (a) et (b) de genre zéro, (c) de genre un. <sup>[15]</sup>

### II.2.2. Quelques problèmes possédant des solutions analytiques

La plupart des problèmes impliquant la minimisation de l'aire contenue entre des frontières fixes n'ont pas été résolus analytiquement par les mathématiciens. Quelques-uns pour lesquels des solutions existent sont examinés ici.

Leonard Euler <sup>[16]</sup> a établi, en 1744, une équation différentielle pour déterminer l'aire minimale contenue à l'intérieur d'une frontière fixe. Son analyse a ensuite été simplifiée par Lagrange <sup>[17]</sup>. Ces résultats sont issus d'études antérieures des problèmes de minimisation entreprises par d'éminents mathématiciens distingués <sup>[18]</sup> tels que Newton, Bernoulli, Euler (qui était l'élève de John Bernoulli), et plusieurs autres mathématiciens contemporains, ont résolu l'un des problèmes de minimisation les plus difficiles de leur époque, le problème de la courbe brachistochrone. Ce problème concerne la détermination du chemin parcouru par une particule tombant dans un champ gravitationnel du point A au point B de sorte que le temps de parcours soit réduit au minimum. John Bernoulli a montré que ce chemin est une cycloïde, qui est la courbe produite par un point sur la circonférence d'une roue qui roule, sans glisser, le long d'une fine droite (figure II.4).



Figure II.4. Une cycloïde produite par le mouvement d'un point de la circonférence d'une roue qui roule sans glisser. <sup>[15]</sup>

L'équation d'Euler-Lagrange s'applique au problème bien connu de la détermination du plus court chemin entre deux points. La solution évidente aboutit à la ligne droite entre les deux points. Dès que l'on s'attaque à des problèmes plus complexes, la résolution de l'équation différentielle augmente rapidement en difficulté. Nous considérerons ici un exemple (classique)

pour illustrer quelques-unes de ces difficultés. Il s'agit du problème de l'aire minimale formée entre deux anneaux coaxiaux parallèles de même diamètre.

On montrera que la surface minimale est une caténoïde ou une caténaire de révolution, délimitée par les deux anneaux, à condition que les anneaux soient suffisamment rapprochés. Une caténaire est la courbe suivie par une chaîne suspendue. Au fur et à mesure que la distance entre les anneaux augmente, la caténaire se rapproche davantage de l'axe (figure II.5). L'aire de la caténoïde est minimale lorsque la distance entre les deux anneaux est inférieure à  $1,056a$ , où  $a$  est le rayon des anneaux. Ce sera un minimum relatif pour des distances entre anneaux comprises entre  $1,056a$  et  $1,325a$ . Pour des distances supérieures à  $1,325a$ , Goldschmidt <sup>[19]</sup> a montré analytiquement en 1831 que la surface évolue de façon discontinue en deux disques, maintenus séparément par les deux anneaux. Ainsi, lorsque la distance entre les deux anneaux devient supérieure à  $1,056a$ , les deux disques forment une enveloppe d'aire minimale absolue. La solution de ce type de problème obtenue avec des surfaces discontinues est connue sous le nom de solution discontinue de Goldschmidt.

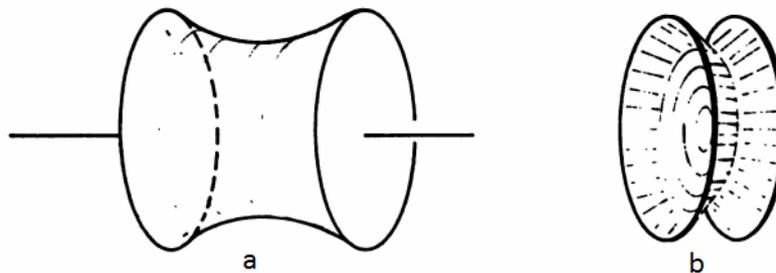


Figure II.5. (a) Une caténoïde produite par un film de savon formé entre deux anneaux de rayon  $a$ . (b) Une autre surface minimale contenue par deux anneaux, contenant un disque intermédiaire. <sup>[15]</sup>

Ces surfaces minimales peuvent être facilement obtenues à l'aide de films de savon. Lorsque deux anneaux sont plongés dans une solution de savon, on peut produire un film de savon continu, contenu entre les deux anneaux. Ce film aura une aire minimale au repos (à l'équilibre).

Il existe une autre surface qui aboutit à l'aire minimale contenue dans deux anneaux. Il s'agit d'une surface symétrique axialement, contenue par les deux anneaux, avec un disque vertical placé symétriquement entre les deux anneaux (Fig. II.5(b)). Sur la circonférence du disque vertical central, le gradient change de façon discontinue. La circonférence du disque est formée par l'intersection de trois surfaces. Les trois plans tangents sur ces surfaces, en tout point le long de la circonférence, se croisent à  $120^\circ$  l'un de l'autre. L'équation d'Euler-Lagrange n'est pas applicable à ce problème car la surface contient des discontinuités dans les gradients le long de la circonférence du disque central. Une solution analogique au problème de surface minimale peut être obtenue en immergeant deux anneaux dans une solution de bain de savon et en obtenant la surface d'équilibre. Si on provoque la rupture du film central, on obtient la caténaire de révolution, ou caténoïde (figure II.5(a)). Lors de la production de la caténaire de la révolution, il faut veiller à ce que le disque central ne soit pas formé ou à le rompre s'il s'est formé.

La solution au problème de minimisation de l'aire contenue entre deux anneaux peut être étendue au cas de deux anneaux qui ne sont plus coaxiaux et restent parallèles (figure II.6 (a)).

Comme les anneaux sont déplacés latéralement l'un par rapport à l'autre, en maintenant une distance,  $h$ , fixe entre les plans des anneaux, la surface devient une caténoïde déformée. La distorsion augmente avec la distance relative entre les anneaux jusqu'à ce que la distance horizontale entre les centres des anneaux,  $d$ , se trouve sur la courbe  $h$  en fonction de  $d$  représentée sur la Figure II.6 (b). Au-delà de cette valeur de  $d$ , on obtient la solution discontinue Goldschmidt. Si la distance horizontale,  $d$ , est supérieure au diamètre de l'anneau, la seule solution possible pour toute séparation,  $h$ , est la solution discontinue Goldschmidt composée de deux disques délimités par les anneaux. Le graphique (figure II.6 (b)) aura  $h = 1,325a$  pour une valeur nulle de  $d$ , qui correspond à la configuration « coaxiale » du problème.

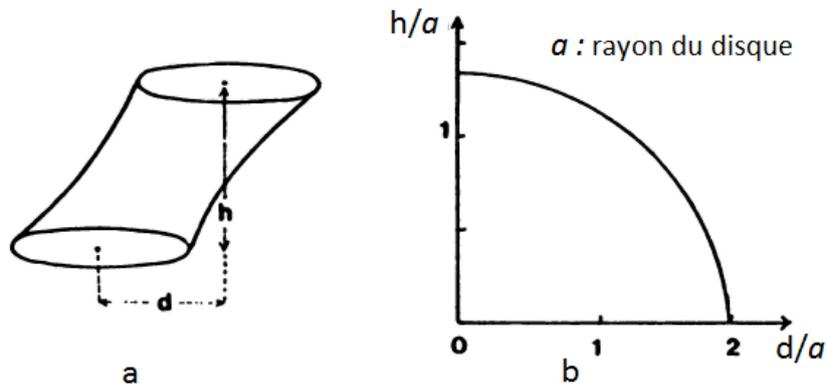


Figure II.6. (a) La surface minimale contenue par deux anneaux horizontaux parallèles avec des centres séparés par une distance horizontale,  $d$  et par une hauteur verticale  $h$ . (b) La variation de  $h$  avec  $d$  pour la surface limite joignant les deux anneaux.

En dehors cette courbe, on obtient la solution discontinue Goldschmidt. <sup>[15]</sup>

Une autre variante de ce problème peut être produite en utilisant deux entonnoirs coniques. La figure II.7 (a) montre la forme du film produit entre deux entonnoirs coaxiaux de diamètres différents placés face à face, le bord de l'entonnoir le plus petit pouvant se déplacer à l'intérieur de l'ouverture de l'entonnoir le plus grand. À l'équilibre, le film, par symétrie, formera un angle de contact de  $90^\circ$  avec la surface interne de l'entonnoir le plus grand, car l'entonnoir ne peut exercer qu'une force normale à sa surface pour équilibrer celle due à la tension du film. Cette surface peut être créée en plongeant les deux entonnoirs dans la solution de bain de savon. La bordure libre du film de savon, en contact avec la surface de l'entonnoir le plus grand, se déplacera à une position qui minimisera l'aire du film lorsque les deux entonnoirs sont maintenus séparés. Le film de savon prendra la forme d'une caténoïde à l'équilibre. Au fur et à mesure que les entonnoirs sont écartés, le film glissera vers l'ouverture de l'entonnoir le plus grand jusqu'à ce qu'une séparation ait lieu pour laquelle le film devient instable et évolue vers les surfaces discontinues de Goldschmidt.

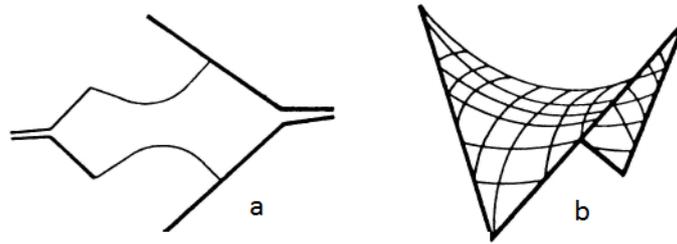


Figure II.7. (a) Le minimum, la caténoïde, la surface contenue par deux entonnoirs coaxiaux.  
 (b) La surface minimale contenue dans un quadrilatère déformé. <sup>[15]</sup>

À la fin du siècle dernier, H. A. Schwarz <sup>[20]</sup> a résolu de manière analogique un autre problème dans lequel la surface minimale est continue et possède des dérivées continues. Ce problème concerne l'aire minimale contenue dans un quadrilatère déformé (figure II.7 (b)). La solution peut être exprimée en termes d'intégrales hyper-elliptiques et a la forme d'une selle de cheval (figure II.7(b)). La surface analogique peut être obtenue en formant un film de savon dans un cadre de fil qui a la forme du quadrilatère déformé.

### II.2.3. Solutions analogiques à certains problèmes non résolus

Examinons à présent le cas des surfaces minimales qui n'ont pas été résolues analytiquement. Le meilleur choix de modèles filaires pour examiner les films de savon est sans doute ceux qui possèdent la symétrie la plus élevée. Aussi, les choix judicieux devraient porter sur des modèles représentés par les solides de Platon, tels que le tétraèdre, le cube; l'octaèdre, le dodécaèdre, etc. Ces derniers sont représentés sur la figure II.8 (a, b, c, d, e). Les solides de Platon possédants des faces régulières, sont tous congruents, avec des angles entre faces adjacentes égaux, et des angles aux sommets égaux.

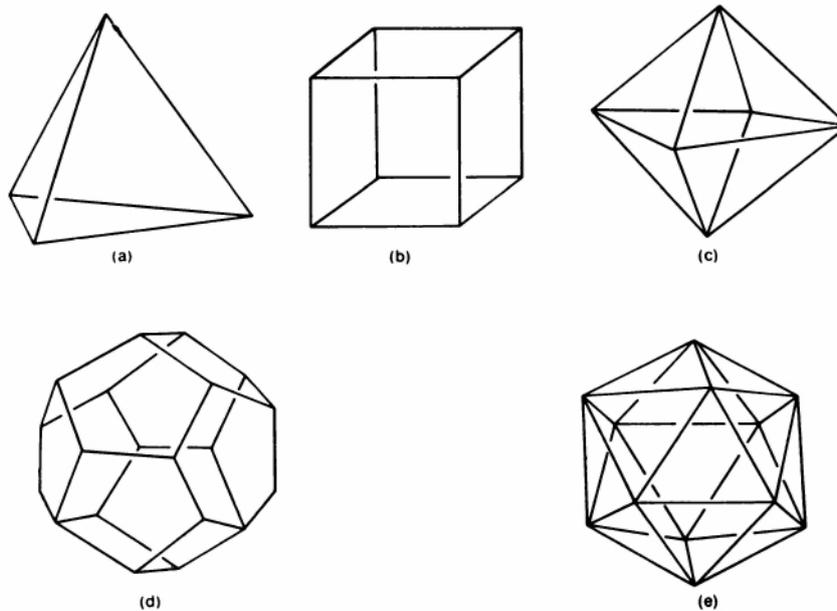


Figure II.8. Les solides de Platon: (a) tétraèdre; (b) cube; (c) octaèdre; (d) dodécaèdre; (e) icosaèdres. <sup>[15]</sup>

On pourrait conjecturer que la surface minimale délimitée par les six bords du tétraèdre est constituée par les trois faces triangulaires du tétraèdre. La quatrième face ne serait pas nécessaire car les surfaces formées par les trois faces sont jointes aux six bords. Une autre possibilité suggère qu'une aire encore plus petite pourrait être obtenue en pinçant ensemble une partie de deux surfaces adjacentes (figure II.9). Il y aurait alors une zone commune aux deux faces, deux sections des deux faces originales seraient fusionnées en une seule surface, réduisant ainsi l'aire totale. On pourrait étendre cette procédure à l'ensemble des faces voisines jusqu'à ce que la superficie minimale soit atteinte. Cela n'indique pas cependant quelle sera la forme de la surface finale.

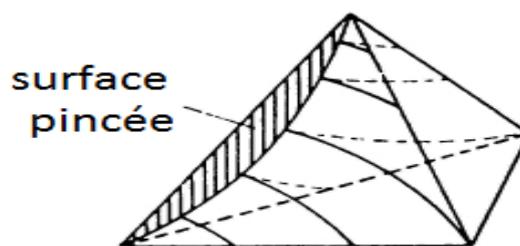


Figure II.9. Le résultat du pincement de deux faces adjacentes d'un tétraèdre. <sup>[15]</sup>

Une façon d'obtenir cette surface serait de plonger un cadre tétraédrique dans une solution de savon. La surface minimale est obtenue une fois le cadre retiré et que le film de savon se soit équilibré. La figure II.10 montre l'allure de cette surface finale. Les effets d'interférence produisent les franges colorées horizontales qui sont visibles sur la surface (irisations). La surface se compose de six surfaces planes, chacune ayant la forme d'un triangle isocèle et délimitée par un bord du tétraèdre. Toutes les surfaces se rencontrent au centre du tétraèdre. Chacun des deux bords internes d'une section triangulaire de film de savon est joint à deux

autres surfaces. Les quatre lignes de film de savon forment les bords internes des surfaces triangulaires, et chaque ligne relie un sommet du tétraèdre à son centre. Ces lignes sont chacune formées par l'intersection de trois plans triangulaires de film de savon.



Figure II.10. Surface minimale formée par un film de savon contenu dans un cadre tétraédrique <sup>[15]</sup>

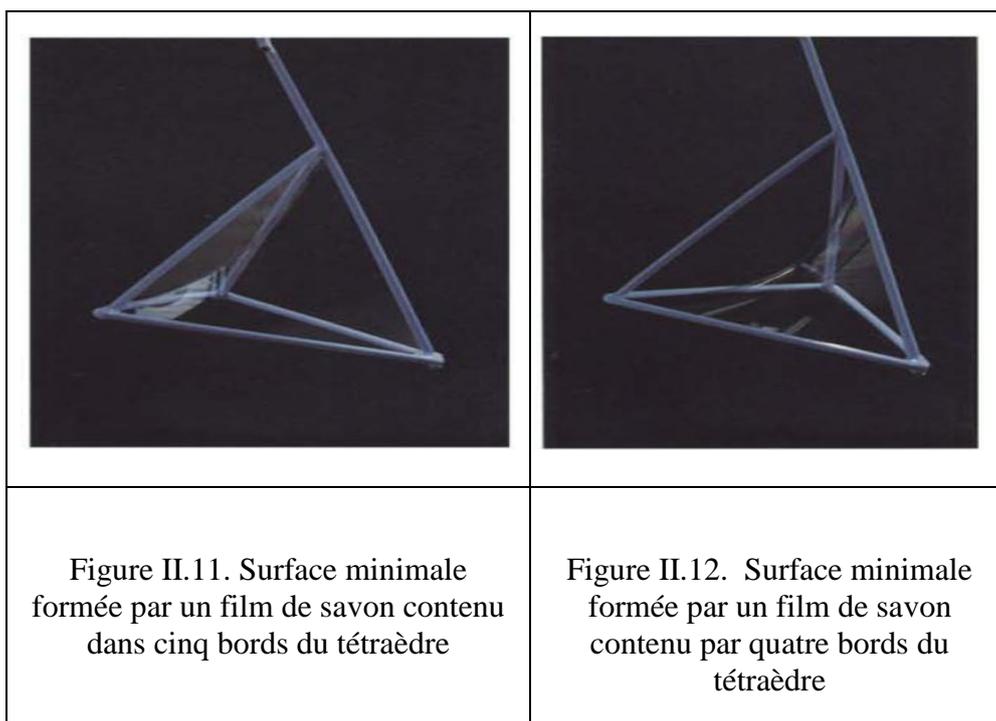
L'angle formé entre les sections adjacentes de film est de  $120^\circ$ . L'angle entre deux lignes peut être calculé à partir de cette information et vaut  $109^\circ 28'$ . Dans les solutions analogiques au problème de Steiner, l'angle entre deux lignes à l'intersection est également de  $120^\circ$  et on observe toujours trois lignes se réunissant à une intersection. Cela résultait de trois plans de film de savon, perpendiculaires aux plaques de plexiglas et qui se rejoignent le long d'une ligne. A l'équilibre, chaque plan de film de savon exerce une force identique au niveau de cette ligne, et, par conséquent, l'angle entre deux plans de film de savon doit être de  $120^\circ$ . Ceci est un résultat général observé au niveau des croisements de films de savon. Dans le cas du modèle tétraédrique, il y a trois surfaces planes (films de savon) se réunissant le long d'une ligne et les angles entre ces surfaces sont de  $120^\circ$ .

Joseph Plateau <sup>[21]</sup> a découvert expérimentalement, il y a plus d'un siècle, que les films de savon formés dans un cadre satisfaisaient toujours trois conditions géométriques:

- 1) Trois surfaces lisses d'un film de savon se croisent le long d'une ligne (bord de Plateau).
- 2) Les films se rencontrent par trois aux bords de Plateau en formant un angle de  $120^\circ$ .
- 3) les bords de Plateau se recoupent par quatre au niveau des vertex en formant un tétraèdre régulier, avec des angles égaux à  $\text{Arcos}(-1/3) \approx 109,5^\circ$  entre les bords de Plateau.

Ces conditions sont satisfaites par un film de savon formé dans le cadre tétraédrique. Les conditions fournies par Plateau s'appliquent aux surfaces délimitées par n'importe quel cadre. Ces surfaces ne doivent pas nécessairement être planes et les lignes de film de savon ne sont pas nécessairement des droites. Ce n'est que récemment, en 1976, que Frederick J. Almgren Jr. et Jean E. Taylor <sup>[22]</sup> ont montré que ces conditions découlent de l'analyse mathématique des surfaces minimales et des surfaces contenant des bulles d'air ou de gaz à différentes pressions, qui peuvent être décrites par l'équation différentielle de Laplace –Young.

Si l'un des films triangulaires formés à l'intérieur du tétraèdre est rompu, une nouvelle surface se formera présentant l'aire minimale contenue dans les cinq bords restants du tétraèdre (figure II.11). Les surfaces ne sont plus toutes planes. On distingue bien sur cette figure que les surfaces se rencontrent le long d'une ligne courbe. Un examen minutieux montrera que n'importe quel point le long de la ligne (incurvée) d'intersection des trois surfaces possède des plans tangents qui se croisent à  $120^\circ$ . Si la surface plane est rompue, de nouveau, le film de savon adoptera la surface minimale contenue dans les quatre arêtes restantes du tétraèdre. Ces arêtes forment un quadrilatère déformé (figure II.12) et forment ainsi une surface similaire à celle de la figure II.7 (b).



D'après les résultats trouvés pour l'aire minimale formée par les six bords du tétraèdre, on peut s'attendre à ce que l'aire minimale délimitée par les douze bords d'un cadre cubique soit constituée d'une série de surfaces délimitées chacune par le bord d'un cube et tous se réunissant en un point au centre. Si cela était le cas, il ne serait pas possible pour toutes les surfaces de satisfaire les conditions de Plateau. Les surfaces réunies au centre du cube ne se croiseraient pas à  $120^\circ$  et l'angle entre deux lignes ne serait pas de  $109^\circ 28'$ . Quelle est donc la forme de la surface minimale?

Un premier indice pour deviner la forme de la surface minimale peut être obtenu à partir de la solution au «cube» à deux dimensions; la solution du problème de Steiner pour relier quatre points disposés aux coins d'un carré est donnée sur la figure II.10. La configuration contient une ligne, pas un point, au centre. On peut s'attendre à ce que le cadre cubique ait un carré, plutôt qu'une ligne, au centre.

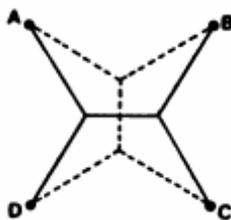


Figure II.13. Solution du Problème de Steiner pour relier 4 points en configuration bidimensionnelle.

La surface minimale formée lorsqu'on retire un cadre cubique d'une solution de savon est donnée sur la figure II.14. Il contient une surface «carrée» au centre. Le «carré» comporte quatre côtés courbes formés par des lignes de film de savon provenant de l'intersection de trois surfaces. Les côtés courbes du «carré» se croisent à  $109^{\circ}28'$ , comme le prévoient les règles de Plateau. Il y a aussi deux autres lignes de film qui se rencontrent à chaque coin du «carré» en formant des angles prédits par Plateau.



Figure II.14. Surface minimale d'un film de savon formé par les douze bords d'un cube <sup>[15]</sup>

Les bords et les coins du «carré» sont des surfaces qui se terminent sur les douze bords du cube. Ils ne sont pas tous planaires. Le plan du «carré» est toujours parallèle à l'une des faces du cube. Il peut basculer d'un plan à l'autre si on souffle sur celui-ci ou si on secoue le cadre. Il y a donc trois surfaces minimales avec la même aire. On se rappellera que, dans le cas du problème bidimensionnel, avec le réseau carré de points, la ligne centrale pouvait prendre deux positions possibles, parallèles à l'un ou l'autre des côtés du carré (Figure II.13).

En rompant différentes sections de la surface minimale on peut obtenir un sous-ensemble de surfaces minimales associées à un certain nombre de bords du cube. Ce nombre est inférieur ou égal à douze. Par exemple, en perçant le «carré» au centre avec une tige sèche, la surface minimale indiquée sur la figure II.15 est obtenue. C'est une surface d'aire minimale délimitée par les douze bords du cube. Il n'est pas évident de voir si cette surface a une aire plus grande ou plus petite que la précédente avec le «carré» central et il est difficile de déterminer les valeurs de toutes ces aires.

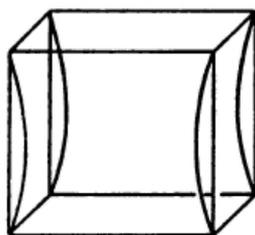


Figure II.15. Surface minimale formée par la rupture de la surface «carré» au centre d'un cadre cubique. <sup>[15]</sup>

La figure II.16 montre le résultat de la rupture des surfaces liées à deux faces du cube.

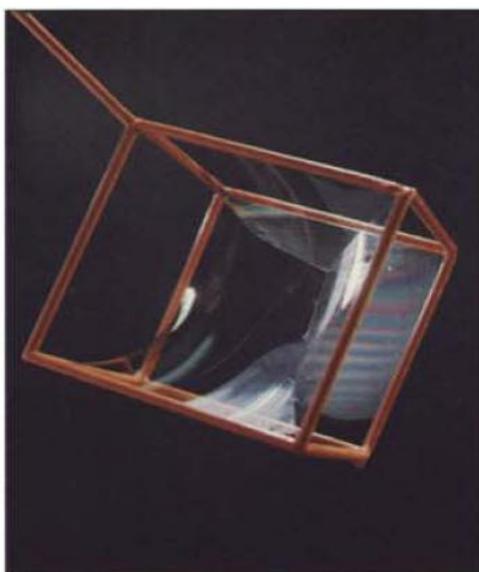


Figure II.16. Surface minimale formée par rupture des surfaces liées à deux faces du cube. <sup>[15]</sup>

Il existe de nombreuses surfaces minimales associées à des sous-ensembles de bords. Ils peuvent tous être obtenus en brisant des sections de surface de film de savon et fournissent des exemples qui illustrent les règles de Plateau.

Le cadre cubique produit des surfaces minimales avec des similitudes avec celles de son homologue bidimensionnel, le réseau carré de broches contenues entre deux plaques de plexiglas. Ceci est également vrai pour le tétraèdre et les trois broches contenues entre deux plaques parallèles. Le cadre octaédrique présente également des caractéristiques en commun avec son homologue bidimensionnel, avec 6 broches disposées en hexagone. Par conséquent, on peut s'attendre à ce qu'il y ait plusieurs surfaces minimales délimitées par les douze bords de l'octaèdre. Cela est effectivement le cas. Le trempage d'un motif en fil octaédrique dans une solution de savon peut donner différentes surfaces minimales de film. Celles-ci sont présentées dans les figures II.17 (a-e). Elles sont obtenues en retirant le cadre de la solution de savon sous différents angles. Alternativement, une des surfaces minimales peut être produite, puis cette surface peut être perturbée en secouant le cadre ou en soufflant sur la surface, de façon à

basculer dans une autre configuration minimale. De cette façon, toutes les surfaces minimales peuvent être générées.

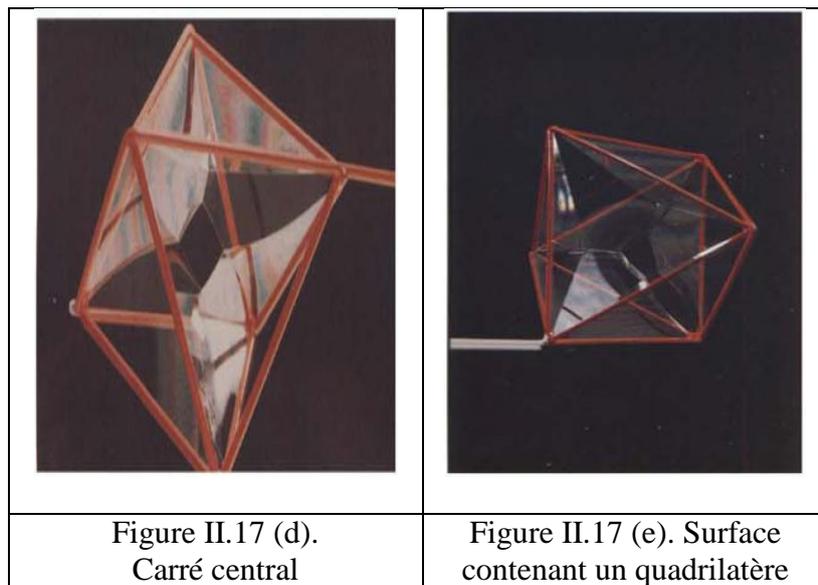
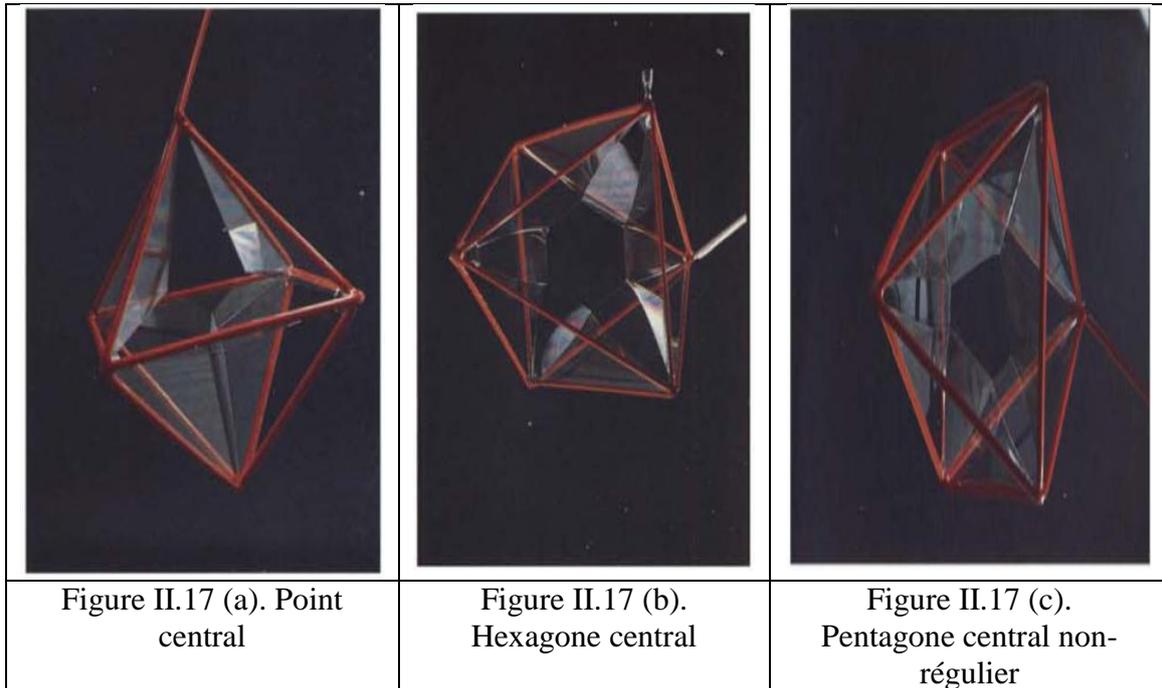


Figure II.17. Surface minimale délimitée par les douze arêtes d'un octaèdre liées à deux faces du cube

Une surface possédant une symétrie élevée, telle que celle représentée sur la figure (a) se compose d'un ensemble de films planaires sous forme de triangles et de cerfs-volants. Au centre de l'octaèdre, six films de savon en forme de cerfs-volants<sup>(\*)</sup> se rencontrent en un seul point. La région qui entoure ce point est géométriquement identique à celle au centre de la surface minimale du tétraèdre (figure II.10).

(\*)[En géométrie, un cerf-volant est un quadrilatère dont une des diagonales est un axe de symétrie (ou, ce qui est équivalent, un quadrilatère formé de deux paires de côtés adjacents égaux). Les diagonales peuvent se couper à l'intérieur (cerf-volant convexe) ou à l'extérieur («pointe de flèche » ou cerf-volant non convexe)]

Les figures II.17 (b-e) contiennent des films planaires hexagonaux, pentagonaux, carrés et quadrilatéraux dans la région centrale de l'octaèdre. Ces figures planes présentent des côtés curvilignes de film formés par l'intersection de trois surfaces. Les sommets de toutes les figures «polygonales» ont des angles de  $109^{\circ} 28'$ .

Les figures II.18 montrent une partie du sous-ensemble des surfaces formées par la rupture d'une ou plusieurs des sections de film de savon présentées dans les figures II.17 Dans la figure II.18 (a), la surface se forme de manière asymétrique sur deux des faces de l'octaèdre. La figure II.18 (b) contient une surface parallélépipédique dans le plan de l'un des carrés formant le cadre octaédrique et la figure II.18 (c) est une surface contenant une section de surface sous la forme d'un cerf-volant planaire.

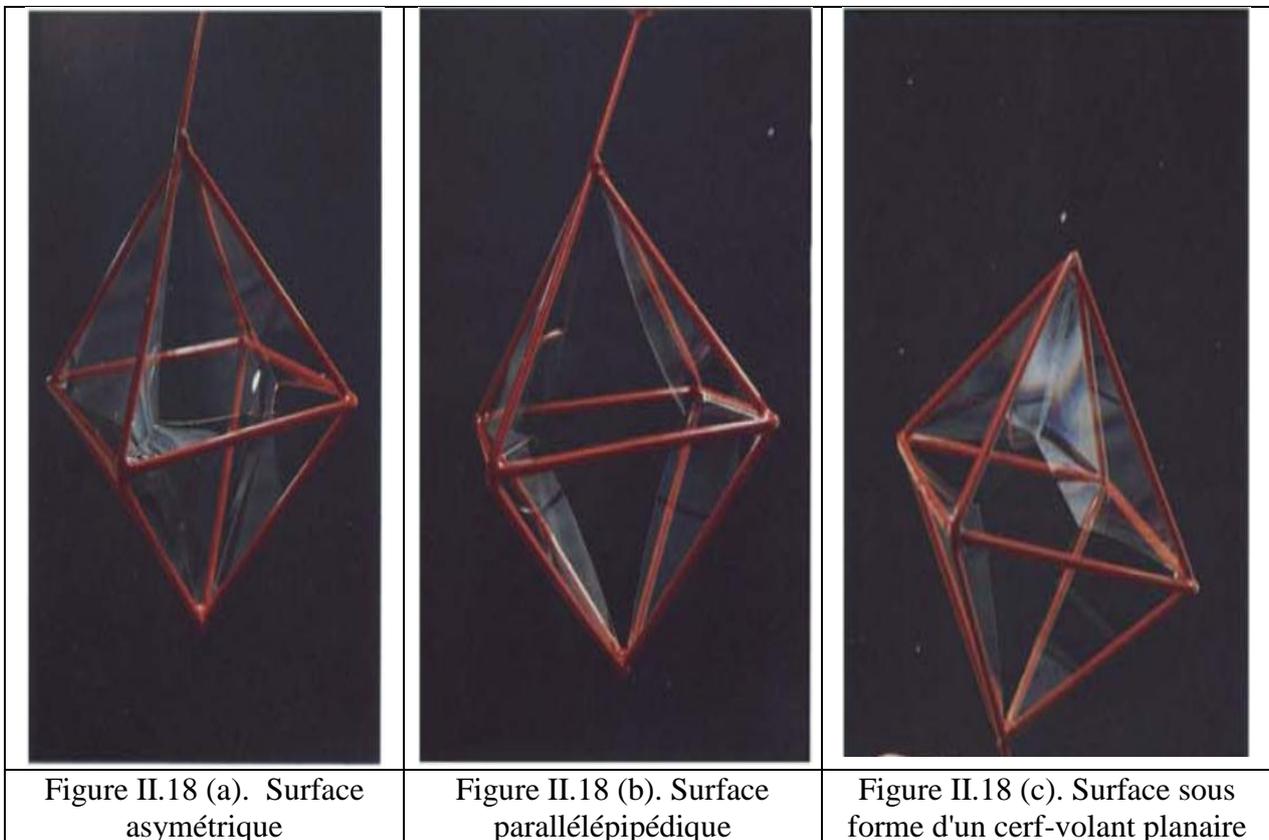


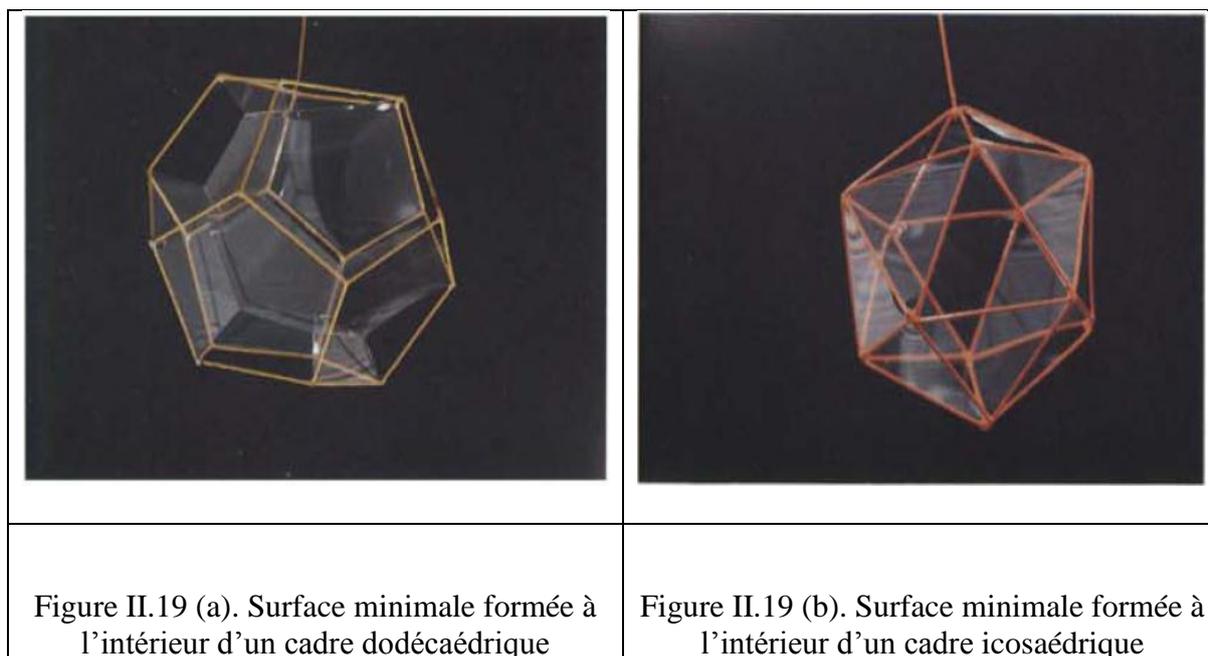
Figure II.18. Surface minimale délimitée par un sous-ensemble d'arrêtes de l'octaèdre liées à deux faces du cube

Les angles entre les faces adjacentes du dodécaèdre sont  $116^{\circ}36'$ . Comme ces angles sont inférieurs à  $120^{\circ}$ , la surface minimale délimitée par les bords d'un cadre dodécaédrique se formera à l'intérieur du cadre. Cette surface est illustrée sur la figure II.19 (a). La surface ne renferme pas complètement une bulle d'air car l'une des faces du dodécaèdre est ouverte, de sorte que les deux côtés de n'importe quelle section de la surface du film de savon sont à la pression atmosphérique. La surface est similaire à la surface bidimensionnelle formée par les broches disposées en forme de pentagone entre deux plaques parallèles (figure II.20). La surface

formée par le pentagone (5 faces) contient  $(5-1=4)$  côtés reliés par des surfaces aux bords du pentagone et a donc un côté ouvert.

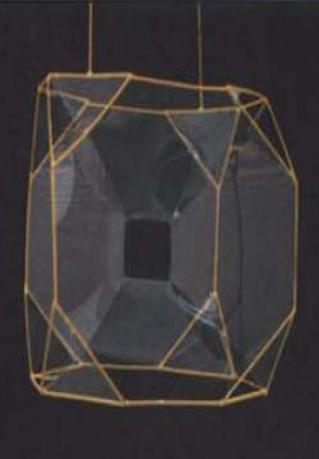
De même, dans le dodécaèdre, avec 12 faces, la surface minimale contient  $(12 - 1)$ , onze faces contraintes par des surfaces qui l'unissent aux bords du dodécaèdre.

L'angle dièdre (entre les faces adjacentes) de l'icosaèdre, est de  $138^{\circ}11'$ . Il est supérieur à  $120^{\circ}$ , et, de ce fait, la surface minimale se forme sur les faces du cadre. La surface se compose de 19 faces triangulaires planaires équilatérales et est représentée sur la figure II.19(b). La surface minimale, reliant tous les bords de la charpente, laisse une face ouverte. Ainsi, la différence de pression à travers l'une ou l'autre de ces surfaces est nulle et les sections triangulaires équilatérales de film de savon sont planes.



L'étude des surfaces minimales formées par un cadre de géométrie quelconque peut être faite à l'aide de films de savon. Après avoir examiné les surfaces formées par les cadres en forme de solides de Platon, on peut s'intéresser à l'étude des cadres en forme de solides d'Archimède (\*) (\*) [En géométrie, un solide d'Archimède est un polyèdre convexe semi-régulier, fortement symétrique, composé d'au moins deux sortes de polygones réguliers se rencontrant à des sommets identiques. Ils sont distincts des solides de Platon, qui sont composés d'une seule sorte de polygones se rencontrant à des sommets identiques].

Chaque face d'un solide d'Archimède est un polygone régulier, mais toutes les faces ne contiennent pas le même polygone. Chaque sommet du cadre est congruent avec tous les autres sommets. C'est-à-dire que les faces sont disposées autour de chaque sommet dans le même ordre. Les surfaces formées par certains cadres « d'Archimède » sont présentées dans les figures II.19 (c-f).

			
<p>Figure II.19 (c). Surface minimale à l'intérieur d'un tétraèdre tronqué</p>	<p>Figure II.19 (d). Surface minimale à l'intérieur d'un Cuboctaèdre</p>	<p>Figure II.19 (e). Surface minimale à l'intérieur d'un cube tronqué</p>	<p>Figure II.19 (f). Surface minimale à l'intérieur d'un octaèdre tronqué</p>

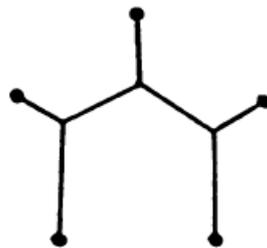


Figure II.20. Configuration minimale du film de savon reliant cinq points.

Une autre classe de cadres simples est représentée par les prismes.

Le prisme le plus simple est le prisme triangulaire. Si la hauteur du prisme est suffisamment grande, la surface du film de savon formée ressemblera à celle qui est montrée dans la figure II.21.

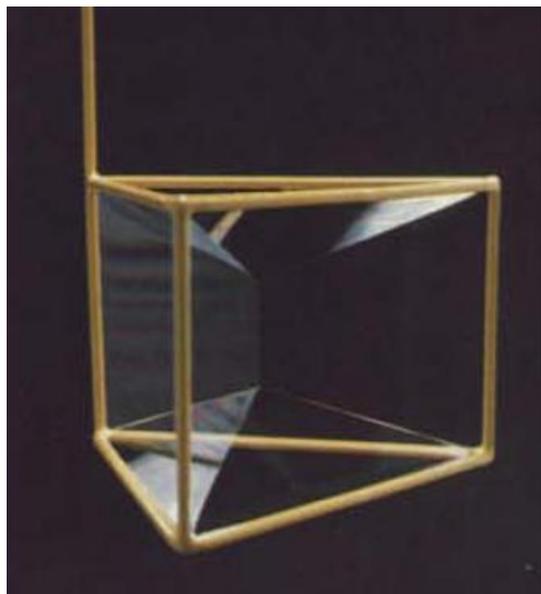


Figure II.21. Surface formée par le film de savon dans un prisme triangulaire <sup>[15]</sup>

Il contiendra trois plans verticaux de film de savon réunis, selon des angles de  $120^\circ$ , le long d'une ligne verticale dans l'axe central du prisme. Les sections de la surface du film de savon en haut et en bas du prisme sont identiques à celles d'un cadre tétraédrique. Si la hauteur du prisme est réduite, la longueur de la ligne verticale formée par les trois plans verticaux du film de savon est réduite. Finalement, sa longueur deviendra nulle. À ce stade, le film devient instable et évolue spontanément vers la configuration montrée à la Figure II.22. Cette surface contient une surface triangulaire horizontale. Il existe une gamme de hauteurs de prisme qui produisent deux configurations minimales, l'une avec une petite ligne verticale de film de savon le long de l'axe central et l'autre avec une surface triangulaire horizontale. La surface peut être perturbée pour la faire basculer d'une configuration à l'autre.

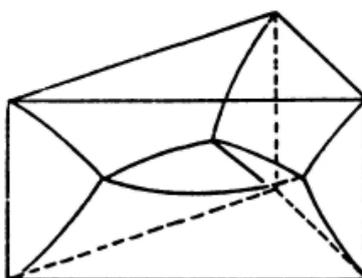


Figure II.22. Surface minimale formée par un cadre en forme de prisme triangulaire montrant un «triangle» horizontal. <sup>[15]</sup>

Lorsque la hauteur du prisme est suffisamment grande, une section transversale horizontale centrale du film est similaire à celle produite par trois broches séparant deux plaques de plexiglas parallèles. Pour les prismes ayant des bases de polygonaux, on obtient des surfaces

minimales avec une section horizontale centrale, à la demi-hauteur du prisme, similaires à celles produites par l'agencement polygonal de broches comme solution du problème de Steiner. La figure II.23 montre la surface minimale produite par une hélice reliée à un axe central. La surface se présente sous la forme d'une hélice ou d'un tire-bouchon.



Figure II.23. Surface minimale produite par une hélice <sup>[15]</sup>

Toutes les surfaces examinées dans cette section ont la propriété qu'il n'y a pas de différence de pression de part et d'autre du film de savon. Or la loi de Laplace-Young prévoit que cette différence de pression vaut :

$$P_b - P_a = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Où  $R_1$  et  $R_2$  sont les deux rayons de courbure principaux de la surface en un point quelconque. Ces deux rayons de courbures principaux existent pour la plupart des surfaces mais pas toutes. Dans le cas d'une sphère ces deux rayons sont égaux au rayon de la sphère.

Ainsi,  $P_b - P_a = 0$ , ce qui implique que :

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

Dans le cas de la surface formée à l'intérieur du tétraèdre, les sections de surface sont planes, donc  $R_1$  et  $R_2$  sont infinies. Dans le cas le plus général, le rayon de courbure  $R_1$  est égal en grandeur et de signe opposé à  $R_2$ . Ceci est illustré par le cas de la surface minimale formée par deux anneaux coaxiaux, la caténoïde (figure II.5 (a)). C'est également le cas de toutes les surfaces minimales formées par tous les modèles de cadres.

La propriété de surface minimale des films de savon est une conséquence de la minimisation de l'énergie libre des films de savon. Cette condition de minimisation conduit à une équation différentielle pour la surface, l'équation différentielle de Laplace-Young pour une pression excédentaire nulle. Dans le système plus général de surfaces de films et de bulles de savon, l'énergie libre se compose de deux termes. Une contribution de l'aire du film,  $A$ , et une contribution de l'air à l'intérieur de la bulle  $F_B$ . Cette énergie libre totale  $F$  est donc donnée par:

$$F = \sigma_f A + F_B$$

Où  $\sigma_f$  est la tension du film.

Cette énergie libre totale est minimisée lorsque le film de savon et les bulles atteignent l'équilibre thermodynamique. Cette condition de minimisation de l'énergie libre peut être ré-exprimée en utilisant l'équation différentielle générale de Laplace-Young.

### II.3. Grappe de bulles

Les bulles de savon sont de forme sphérique et se composent d'une mince couche d'eau avec des molécules de tensioactifs à chaque surface. Une bulle renferme de l'air, ou du gaz, à une pression supérieure à la pression externe. Des grappes de bulles de savon sont produites par des bulles sphériques qui se coalescent. La figure II.24 montre deux bulles qui ont coalescé.

La plus grosse partie de chaque bulle se compose d'une coque sphérique de film de savon et ces bulles sont séparées par un capuchon sphérique de film de savon. En général, les grappes de bulles de savon se composent d'un conglomérat de surfaces sphériques et de capuchons sphériques de film de savon.

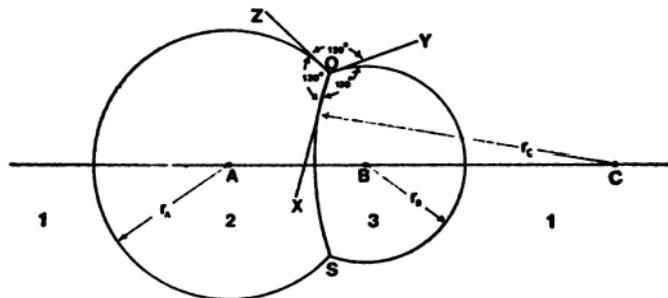


Figure II.24. Deux bulles coalescentes. <sup>[15]</sup>

Les grappes de bulles de savon sont des systèmes plus complexes que les films de savon simples contenus dans une frontière fixe. L'énergie libre des grappes dépendra de la surface du film de savon et du gaz contenu dans les bulles.

Dans le problème de Steiner, et les problèmes de surface minimale, l'équation de Laplace-Young se présente sous sa forme simple en raison de la surpression nulle à travers n'importe quel point sur la surface du film de savon. Dans le cas d'une bulle, ou des grappes de bulles, l'excès de pression sur toute surface n'est pas en général nul. Néanmoins, l'équation de Laplace-Young peut être appliquée dans ces conditions plus générales. Les règles de Plateau concernant les angles avec lesquels les surfaces et les films de savon se croisent s'appliquent également aux surfaces et aux lignes de film de savon produites par des grappes de bulles.

Il est intéressant d'examiner les propriétés géométriques de petits groupes de deux et trois bulles coalescentes afin de relier les propriétés géométriques aux résultats obtenus à partir de l'application de l'équation de Laplace-Young.

### II.3.1. Cas de deux bulles coalescentes

L'excès de pression,  $P_f$ , à l'intérieur d'une bulle sphérique de rayon  $r$  est donné par :

$$P_f = \frac{2\sigma_f}{r} \quad (\text{II.1})$$

Où  $\sigma_f$  est la tension du film.

La figure II.24 montre deux bulles coalescentes, de centres A et B, et de rayons  $r_A$  et  $r_B$  respectivement. Il existe trois régions de pression différentes, 1, 2 et 3. À l'intérieur de la bulle A, la pression est  $p_2$ , à l'intérieur de B,  $p_3$  et partout ailleurs  $p_1$ . Lorsque les bulles sont en équilibre, ces pressions sont constantes. Entre les régions 1 et 2, il y a une surpression de  $p_{21}$ , le rayon de courbure  $r$  est de  $r_A$ . Ainsi,

$$P_{21} = \frac{2\sigma_f}{r_A} \quad (\text{II.2})$$

De même, entre les régions 3 et 1 existe une surpression  $p_{31}$  et un rayon de courbure  $r_B$ , la surpression est donnée par :

$$P_{31} = \frac{2\sigma_f}{r_B} \quad (\text{II.3})$$

La surpression à travers la surface commune aux régions 3 et 2,  $P_{32}$ , est constante et liée au rayon de courbure de la surface,  $r_C$ , par:

$$P_{32} = \frac{2\sigma_f}{r_C} \quad (\text{II.4})$$

Les centres des bulles A et B doivent, par symétrie, se trouver sur la même ligne droite que le centre C de la sphère dont la surface commune, de rayon  $r_C$  fait partie.

La surpression  $p_{21}$  doit être égale à la somme des surpressions entre la région 2 et la région 3,  $p_{23}$  et  $p_{31}$ . Alors

$$P_{21} = P_{23} + P_{31} \quad (\text{II.5})$$

En remplaçant (1), (2) et (3) dans (4) :

$$\frac{2\sigma_f}{r_A} = -\frac{2\sigma_f}{r_C} + \frac{2\sigma_f}{r_B} \quad (\text{II.6})$$

Comme  $P_{23} = -P_{32}$ , nous aurons :

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_C} \quad (\text{II.7})$$

La relation réciproque a été obtenue en appliquant l'équation de Laplace-Young pour chaque surface sphérique. Nous allons voir que l'équation de Laplace-Young et les propriétés géométriques des films de savon sont étroitement liées. Dans cet exemple, il est possible de montrer que l'intersection de trois films de savon se fait avec des angles de  $120^\circ$ .

Examinons ces propriétés géométriques afin d'obtenir par une méthode alternative la relation (II.7) donnée plus haut.

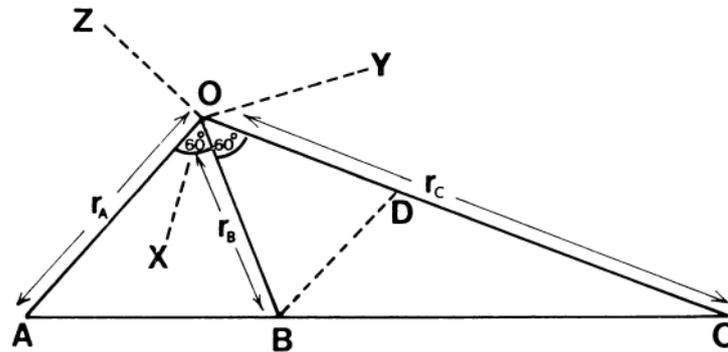


Figure II.25. Moitié supérieure d'une section passant par la ligne joignant les centres de courbure des trois surfaces externes de deux bulles coalescentes <sup>[15]</sup>

La figure II.25 ci-dessus montre la moitié supérieure d'une section passant par la ligne joignant les centres de courbure des trois surfaces externes des bulles de la Fig. II.24. Ces centres sont reliés à O, le point d'intersection des trois surfaces dans un plan contenant AC. Les plans tangents à O, OZ, OY et OX se croisent à des angles de  $120^\circ$ . Les rayons de courbure OA et OC (figure II.25) sont respectivement perpendiculaires aux plans tangents, OZ et OX. Ils doivent donc se croiser à  $120^\circ$ , c'est-à-dire

$$\widehat{AOC} = 120^\circ \quad (\text{II.8})$$

Comme les rayons de courbure des surfaces en O sont perpendiculaires aux plans tangents à O,

$$\widehat{AOZ} = 90^\circ \quad (\text{II.9})$$

Et

$$\widehat{BOY} = 90^\circ \quad (\text{II.10})$$

Dans la figure II.25,

$$\widehat{AOB} = \widehat{XOZ} + \widehat{XOY} - \widehat{AOZ} - \widehat{BOY} \quad (\text{II.11})$$

En utilisant la propriété géométrique qui prévoit que les plans tangents se croisent à  $120^\circ$ , et les relations (II.9) et (II.10), nous obtenons :

$$\widehat{AOB} = 120^\circ + 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ \quad (\text{II.12})$$

$$A\hat{O}B = 60^\circ \quad (\text{II.13})$$

On en déduit que :

$$B\hat{O}C = 60^\circ \quad (\text{II.14})$$

Pour obtenir la relation réciproque, il est nécessaire de construire une ligne passant par B, parallèle à OA (Figure II.25) et coupant OC en D. Les triangles AOC et BDC sont semblables. Aussi, le rapport des côtés vérifient la relation :

$$\frac{BD}{AO} = \frac{DC}{OC} \quad (\text{II.15})$$

Où :

$$DC = \frac{BD}{AO} OC \quad (\text{II.16})$$

$$DC = \frac{BD}{r_A} r_C \quad (\text{II.17})$$

Comme OA est parallèle à DB,

$$OBD = A\hat{O}B \quad (\text{II.18})$$

Et en tenant compte de (II.12),

$$OBD = 60^\circ \quad (\text{II.19})$$

Dans le triangle BOD, la somme des angles vaut  $180^\circ$  et conduit, en tenant compte de (II.14) et (II.19) à :

$$OBD = 60^\circ \quad (\text{II.20})$$

Par conséquent, le triangle OBD est équilatéral et

$$OD = BD = r_B \quad (\text{II.21})$$

Des relations (II.17) et (II.21)

$$DC = \frac{r_B}{r_A} r_C \quad (\text{II.22})$$

D'autre part

$$OD = OC - DC \quad (\text{II.23})$$

D'où (II.21) et (II.22)

$$r_B = r_C - \frac{r_B}{r_A} r_C \quad (\text{II.24})$$

En divisant par  $r_B r_C$ :

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_C} \quad (\text{II.25})$$

Ainsi, la relation réciproque (II.25) a été vérifiée par une méthode purement géométrique utilisant les propriétés des surfaces qui se croisent.

### II.3.2. Cas de trois bulles coalescentes

Dans le cas de deux bulles coalescentes, les rayons de courbure des trois surfaces sphériques,  $r_A$ ,  $r_B$  et  $r_C$  sont liés par la relation réciproque :

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_C} \quad (\text{II.26})$$

Les centres des sphères dont les surfaces font partie sont alignés. Pour trois bulles coalescentes (figure II.26), la relation réciproque se vérifie pour chaque paire de bulles. Ainsi, en plus de la relation (25), il existe des relations réciproques pour les rayons de courbure des surfaces le long des directions AD et BD, où D est le centre de la petite bulle.

Si E est le centre de la courbure et  $r_E$  le rayon de courbure de la surface séparant les bulles de centres A et D, la relation réciproque donne :

$$\frac{1}{r_D} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_E} \quad (\text{II.27})$$

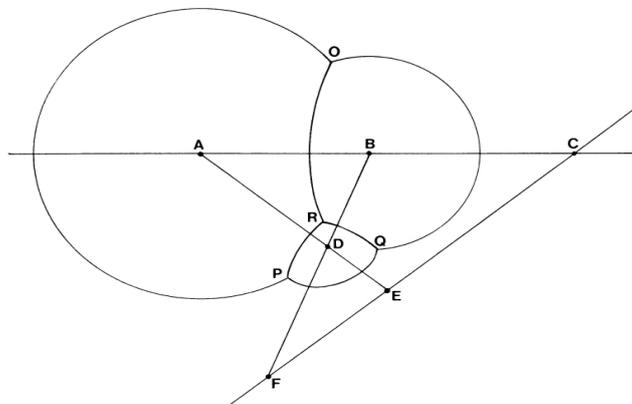


Figure II.26. Trois bulles coalescentes. <sup>[15]</sup>

De même pour les bulles aux centres B et D, en supposant que la surface intermédiaire a un rayon  $r_F$  et un centre F le long de BD,

$$\frac{1}{r_D} = \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_F} \quad (\text{II.28})$$

Les centres des surfaces intermédiaires C, E et F se situent respectivement sur les prolongements des segments AB, AD et BD. Il est possible de montrer que les points C, E et F sont tous alignés. Prouvons ce résultat dans la partie suivante.

Le théorème de Menelaus <sup>[19]</sup> indique que pour que les points C, E et F soient sur la même ligne droite, il faudrait que :

$$\left(\frac{BF}{FD}\right) \left(\frac{DE}{EA}\right) \left(\frac{AC}{CB}\right) = -1 \quad (\text{II.29})$$

Le signe (-) tient compte de la direction des lignes. Avec cette relation, nous pouvons montrer que C, E et F sont effectivement alignés.

Considérons d'abord le cas de deux bulles de savon (figure II.24) et appliquons-lui l'Equation (II.29). Les triangles AOC et BDC sont semblables et nous pouvons écrire :

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AO}{BD} \quad (\text{II.30})$$

Comme le triangle OBD est équilatéral,  $BD = OB = r_B$  et donc,

$$\frac{AO}{BD} = +\frac{r_A}{r_B} \quad (\text{II.31})$$

Par conséquent, de (II.30) et (II.31), on obtient :

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{r_A}{r_B} \quad (\text{II.32})$$

Ce résultat s'applique pour n'importe quel couple de bulles de la figure II.26. Nous pouvons donc écrire également que :

$$\frac{BF}{FD} = -\frac{r_B}{r_D} \quad (\text{II.33})$$

et

$$\frac{DE}{EA} = -\frac{r_D}{r_A} \quad (\text{II.34})$$

D'où en tenant compte de toutes ces relations :

$$\left(\frac{BF}{FD}\right) \left(\frac{DE}{EA}\right) \left(\frac{AC}{CB}\right) = \left(-\frac{r_B}{r_D}\right) \left(-\frac{r_D}{r_A}\right) \left(-\frac{r_A}{r_B}\right) \quad (\text{II.35})$$

$$\left(\frac{BF}{FD}\right) \left(\frac{DE}{EA}\right) \left(\frac{AC}{CB}\right) = -1 \quad (\text{II.36})$$

Les points C, E et F satisfont le théorème de Menelaus et sont donc alignés.

### II.3.3. Bulles de savon, radeaux ou amas de bulles de savon, mousse

Des grappes de bulles illustrent parfaitement les trois règles de Plateau. Dans les deux cas étudiés plus haut, les points O et S de la figure II.24 et P, Q, R et O de la figure II.26, se trouvent à l'intersection de trois surfaces. Les plans tangents à ces surfaces se coupent avec des angles de 120°.

Lorsqu'une grappe est formée de bulles de rayons différents, les faces intérieures seront incurvées. Ceci est dû à la différence de pression entre bulles voisines. Cependant, si les bulles sont de même rayon, cette différence de pression serait nulle. Ainsi, la surface normale commune aura une courbure nulle et prendra la forme d'un disque.

Un groupe de bulles coalescentes formées par des bulles de rayon égal sont toutes symétriques par rapport à un plan (figure II.27), et ont des frontières internes représentées par des lignes droites. L'agencement de ces lignes est caractérisé par des angles d'intersection de  $120^\circ$ . Les différentes configurations de ces lignes sont identiques à celles produites en utilisant des broches et des plaques parallèles utilisées pour résoudre les problèmes de Steiner.

La figure II.28 montre des coupes symétriques à travers des grappes de bulles de rayons différents, qui sont symétriques par rapport à un plan. Les angles de  $120^\circ$  sont indiqués par des points.

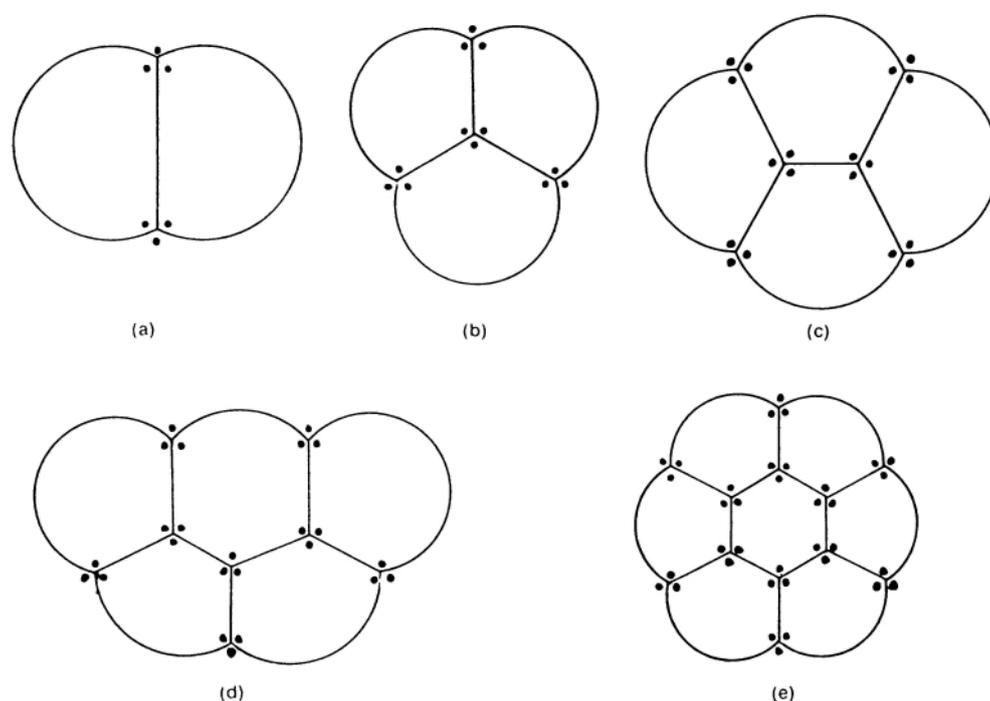


Figure II.27. Groupes de bulles de savon de même rayon.

Les angles de  $120^\circ$  sont indiqués par des points. <sup>[15]</sup>

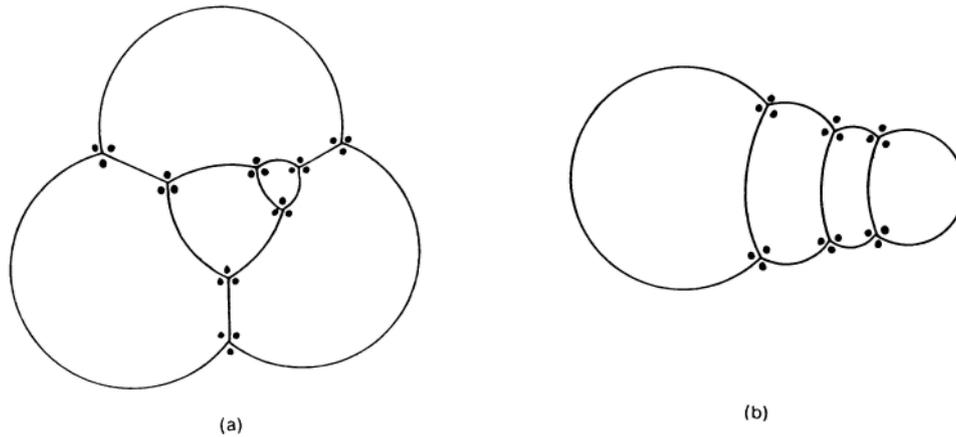


Figure II.28. Groupes de bulles de rayons inégaux.

Les angles de  $120^\circ$  sont indiqués par des points. <sup>[15]</sup>

Les bulles peuvent produire des grappes hémisphériques lorsqu'elles sont formées sur une surface humide ou à la surface d'une solution de bain de savon.

La figure II.29 montre des grappes hémisphériques symétriques de bulles symétriques autour d'un plan. Une section verticale symétrique a été prise à travers les bulles et les angles de  $120^\circ$  de l'intersection des surfaces sont matérialisés par des points.

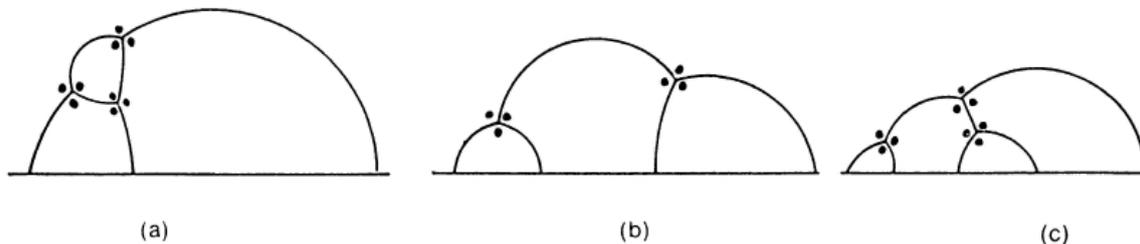


Figure II.29. Groupes de bulles hémisphériques. Les angles de  $120^\circ$  sont indiqués par des points. <sup>[15]</sup>

Si un grand nombre de bulles hémisphériques de même taille sont produites à la surface d'une solution de bain de savon, en utilisant un dispositif adéquat et un jet d'air de pression uniforme, elles auront tendance à former un réseau hexagonal (en nid d'abeilles, figure II.30). Lawrence Bragg <sup>[23]</sup> a utilisé de tels radeaux de bulles pour montrer que les réseaux bidimensionnels de bulles ont de nombreuses caractéristiques communes avec les réseaux cristallins atomiques tridimensionnels. Ces radeaux portent le nom de radeaux de Bragg.

Des dislocations peuvent être produites dans un radeau de Bragg. Cela peut se faire aisément en rompant des bulles consécutives dans une moitié des bulles dans une ligne de bulles passant par la région centrale du radeau de bulles. Ainsi, l'une des lignes de réseau des bulles se termine dans la région centrale du radeau produisant une dislocation (figure II.30 (b)). La dislocation est facilement observée si on regarde la plaque le long de la direction de réseau appropriée dans le plan de la plaque.

Un défaut peut être créé dans le réseau de bulles en augmentant ou en diminuant la taille d'une des bulles (figure II.30 (c)). Une bulle interstitielle, également, est facilement introduite dans le radeau de Bragg.

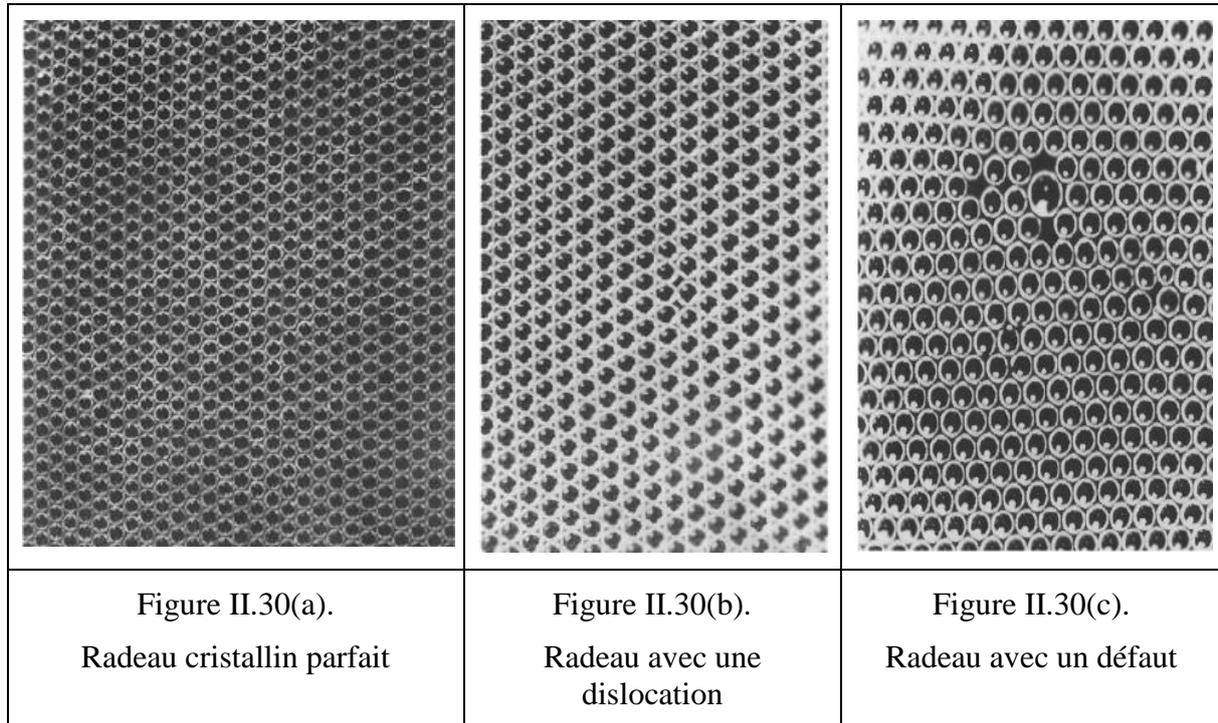


Figure II.30. Radeaux de bulles <sup>[15]</sup>

Toutes ces caractéristiques bidimensionnelles des amas de bulles rappellent l'agencement des atomes dans les matériaux cristallins. Les dislocations, les défauts de réseau, les limites de grains et la recristallisation sont tous des phénomènes qui se produisent dans des matériaux cristallins tridimensionnels.

La similitude entre le comportement des bulles hémisphériques dans un amas de bulles et des atomes dans un réseau cristallin n'est pas surprenante quand on considère les forces agissant entre deux bulles hémisphériques sur un radeau de Bragg. On constate que, lorsque les centres de deux bulles sont séparés par une distance très grande par rapport au diamètre d'une bulle, les bulles s'attirent faiblement. Lorsque la distance de séparation bulle-bulle diminue, la force d'attraction augmente et atteint une valeur maximale lorsque les centres sont séparés par une distance légèrement supérieure au diamètre d'une bulle. Lorsque la distance de séparation diminue encore, la force d'attraction diminue rapidement et devient fortement répulsive. La nature répulsive de la force est due à la coalescence des bulles. La quantité fixe d'air contenue dans chaque bulle produit une force répulsive de plus en plus forte à mesure que la séparation des bulles diminue. L'aire de la surface commune séparant les bulles augmente et, par conséquent, la force répulsive, qui est le produit de la pression de l'air par l'aire de cette surface commune, augmente.

Cette force fortement répulsive à courte distance et faiblement attractive à plus longue distance, avec une force d'attraction maximale à distance de séparation juste au-dessus du diamètre d'une bulle, rappelle à juste titre le potentiel de Lennard-Jones qui décrit l'interaction entre deux atomes au sein d'un gaz monoatomique. Par conséquent, il faut s'attendre à ce que les bulles aient un comportement similaire à un réseau bidimensionnel d'atomes et présentent de nombreuses caractéristiques communes avec les structures cristallines atomiques

tridimensionnelles. M. M. Nicholson <sup>[24]</sup> a étudié de manière extensive les forces entre deux bulles dans un radeau de Bragg en utilisant l'équation de Laplace-Young pour décrire la configuration de surface des deux bulles hémisphériques en interaction.

Les bulles formées entre des plaques parallèles séparées par une hauteur constante et en contact avec les deux plaques, seront, par symétrie, perpendiculaires aux plaques et présenteront donc des parois verticales. Dans le cas d'une seule bulle, elle sera de forme cylindrique, les extrémités du cylindre étant formées par les plaques parallèles.

Les groupes de bulles auront également des côtés verticaux. Ces côtés verticaux seront planaires si la différence de pression à travers la paroi de la bulle est nulle. Cela se produit dans le cas de la surface commune formée par la coalescence de bulles cylindriques de même taille. La figure II.31 montre deux bulles cylindriques de même taille avec une surface plane commune. Les règles du Plateau seront satisfaites par les surfaces et les parois de film de savon dans ces bulles.

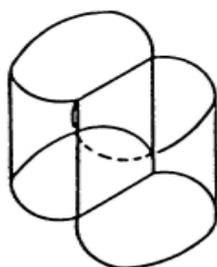


Figure II.31. Deux bulles cylindriques en contact. <sup>[15]</sup>

La mousse est une agglomération d'un grand nombre de bulles différentes (figure II.32). Chaque bulle dans la mousse est une cellule polyédrique avec un certain nombre de faces différentes. Chaque face est courbée en raison de la surpression à laquelle elle peut être soumise. Si la pression dans deux cellules adjacentes est la même, la surpression sur la face est nulle et la surface de séparation est plane.

La mousse ne contient que trois surfaces de film se croisant le long de lignes à  $120^\circ$  et quatre lignes de film de savon se réunissant en un point avec les lignes adjacentes se coupant à  $109^\circ 28'$ .

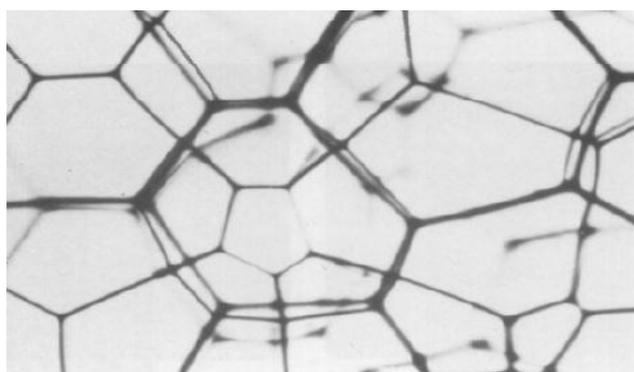


Figure II.32. Film contenant des cellules polyédriques <sup>[15]</sup>

Il est possible d'obtenir une approximation pour le nombre moyen de faces, de sommets et de bords associés à une cellule polyèdre de mousse <sup>[25]</sup> en assimilant une cellule moyenne dans la mousse à un polyèdre régulier à faces planes. C'est une approximation car les faces sont en

réalité légèrement courbées. Les formules valables pour les polyèdres, présentant des faces planes, peuvent ensuite être appliquées en utilisant le résultat que les angles entre les bords d'une cellule polyédrique de mousse sont  $109^{\circ}28'$ .

Si chaque face du polyèdre régulier, qui est une approximation de la cellule polyédrique moyenne, a  $n$  côtés et que les angles aux coins des faces sont égaux à  $\theta$ , alors la somme des angles du polygone ayant  $n$  côtés est :

$$n\theta = 180n - 360 \quad (\text{II.37})$$

L'application de ce résultat à une cellule polyédrique moyenne dans laquelle  $n$  n'est pas un nombre entier et la substitution de  $\theta$  par  $109,47^{\circ}$  donnent :

$$n = 5,10 \quad (\text{II.38})$$

Ainsi, à partir de ce calcul, le nombre moyen de bords associés à chaque face est de 5,10.

Il est possible de relier la somme des angles  $\Phi$  entre les côtés entourant tout sommet du polyèdre régulier, au nombre de sommets,  $v$ . En faisant la somme de tous les angles internes de toutes les faces,  $f$ , du polyèdre,

$$v\Phi = fn\theta \quad (\text{II.39})$$

Car chaque face polygone présente  $n$  angles internes. En considérant l'équation. (II.37), (II.39) devient :

$$v\Phi = f(180n - 360) \quad (\text{II.40})$$

Donc :

$$v\Phi = 180fn - 360f \quad (\text{II.41})$$

Le nombre total des bords,  $e$ , du polyèdre est la moitié du produit du nombre de faces et du nombre d'arêtes par face, donc

$$fn = 2e \quad (\text{II.42})$$

En substituant (II.42) par (II.41),

$$v\Phi = 360(e - f) \quad (\text{II.43})$$

Le théorème d'Euler<sup>[14]</sup> reliant  $e$ ,  $f$  et  $v$  implique que

$$e - f = v - 2 \quad (\text{II.44})$$

En remplaçant la valeur de  $(e-f)$  (II.43), dans la relation (II.44), on trouve :

$$v \Phi = 360 (v - 2) \quad (\text{II.45})$$

Donc

$$v = \frac{720}{(360 - \Phi)} \quad (\text{II.46})$$

En appliquant maintenant ce résultat à une cellule de mousse polyédrique moyenne, avec  $\Phi = 3\theta = 3 (109,47^\circ)$ , on trouve :

$$v = 22,79 \quad (\text{II.47})$$

Enfin, en utilisant le théorème d'Euler, (II.44) et (II.42),

$$v - 1/2 f n + f = 2 \quad (\text{II.48})$$

Ainsi

$$f = \frac{2(v-2)}{(n-2)} \quad (\text{II.49})$$

En remplaçant de (II.38) et (II.47),

$$f = 13,39 \quad (\text{II.50})$$

Ainsi, cette approximation donne un nombre moyen de faces d'une cellule en mousse de 13,39, un nombre moyen de sommets de 22,79 et un nombre moyen de côtés sur chaque face de 5,10.

### II.3.4. Bulles piégées dans des cadres

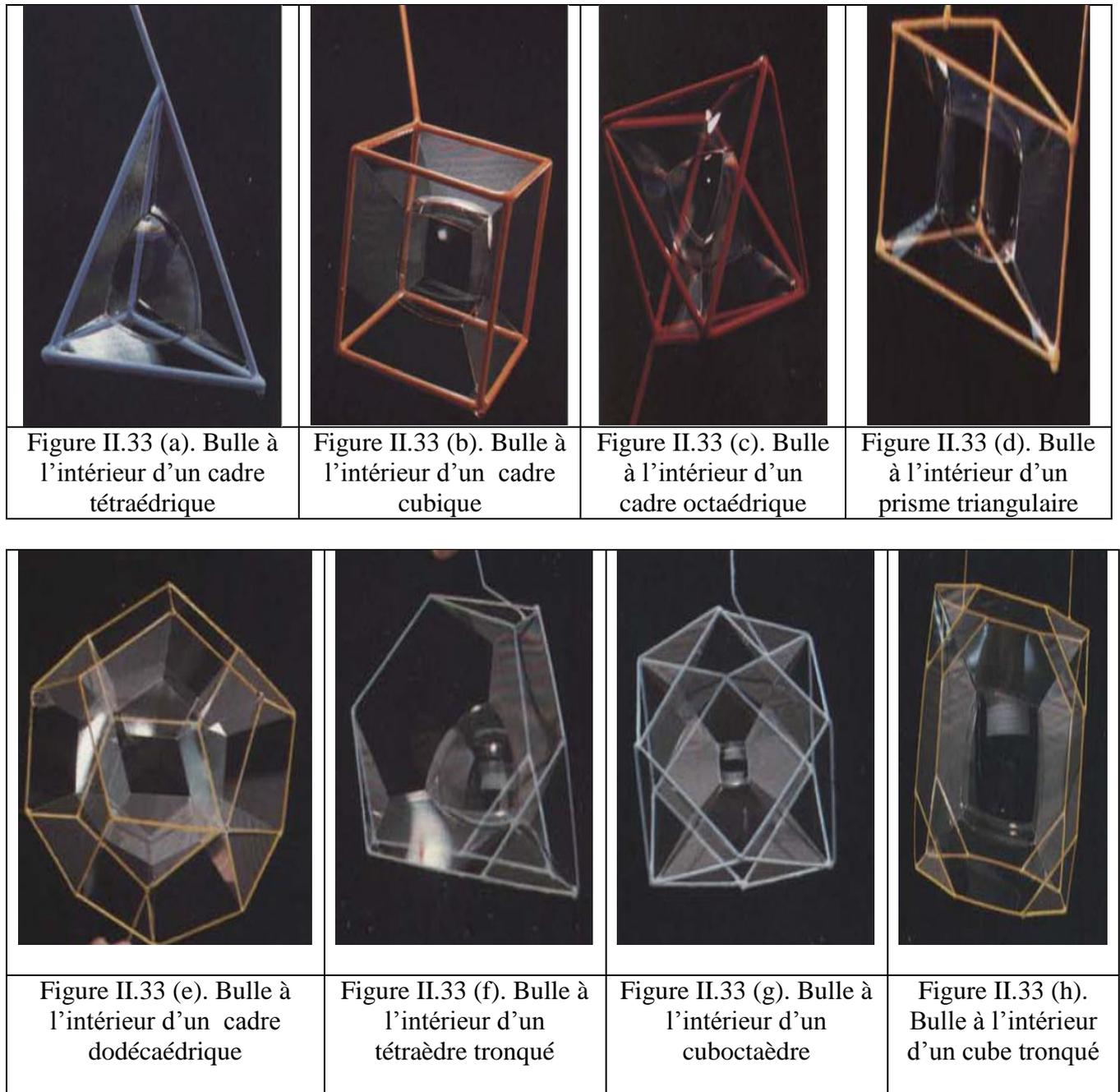
Il est possible de piéger une bulle de savon dans un cadre de sorte qu'elle soit contrainte par les surfaces attachées au cadre. Par exemple, dans le cas d'un cadre tétraédrique, on forme d'abord la surface minimale indiquée dans la figure II.10. Le tétraèdre est ensuite réintroduit dans la solution de bain de savon de sorte qu'une bulle d'air soit piégée entre la surface minimale et la surface de la solution de savon dans le bain. Lorsque le cadre est retiré de la solution de savon, la bulle d'air sera piégée dans la région centrale du cadre. Elle aura la symétrie du cadre et sera contrainte sous la forme d'une bulle tétraédrique par les surfaces attachées aux bords du cadre et à la bulle (figure II.33 (a)).

Les figures II.33 (b), (c), (d) et (e) montrent des bulles formées à l'intérieur des cadres ayant la forme d'un cube, d'un octaèdre, d'un prisme triangulaire et d'un dodécaèdre respectivement; (b), (d) et (e) contiennent des bulles avec la symétrie du cadre correspondant. La taille des bulles dépend de la quantité d'air piégée dans le cadre. Si une bulle est rompue, l'air sera relâché et la surface minimale associée au cadre se reformera. Alternativement, si les surfaces qui contraignent la bulle sont systématiquement rompues, la bulle deviendra de plus en plus sphérique. Finalement, lorsque toutes les surfaces contraignantes sont rompues, la bulle prendra une forme sphérique.

Le système composé d'un film de savon avec une bulle d'air piégée à l'intérieur possède, à température constante et pression extérieure, une énergie libre,  $F$ , qui se compose de deux contributions, une contribution,  $\sigma_f A$ , due à la surface (d'aire  $A$ ), où  $\sigma_f$  est la tension du film de savon. Il y a en outre une contribution de l'air piégé dans la bulle,  $F_B$ .  $F$  est la somme des deux

contributions,  $\sigma_f A$  et  $F_B$ , (équation  $(F = \sigma_f A + F_B)$ ).  $F$  est minimisée pour donner les configurations d'équilibre illustrées sur les figure II.33 (a-h).

Les figures II.33 (f-h) représentent trois cadres d'Archimède contenant des bulles.



Figures II.33. Bulles contenues dans des cadres <sup>[15]</sup>

Toutes les bulles formées à l'intérieur des cadres respectent les règles de Plateau. Trois surfaces se rencontrent toujours le long d'une ligne avec des angles de  $120^\circ$  et quatre lignes se croisent en un point de sorte que deux lignes quelconques forment un angle de  $109^\circ 28'$ .

Les cadres peuvent être construits à partir de matériaux facilement mouillés; Du bois, des métaux et de nombreux plastiques (pas de téflon). La solution de savon peut être préparée avec

de l'eau plus environ 1% de liquide vaisselle. Cette solution produira des films et des bulles qui dureront jusqu'à 20 secondes. Pour les films et les bulles plus durables, une solution spéciale devra être préparée. On trouve diverses formules dans la littérature et sur internet.

# **Partie 2 :**

# **Expérimentation**

# **Chapitre III :**

# **Partie Expérimentale**

Notre partie expérimentale s'intéresse à l'étude des surfaces d'aire minimale s'appuyant sur des contours donnés. Ce problème peut être abordé de manière analogique en observant les films de savon qui s'appuient sur des contours géométriques dans trois dimensions. Le film de savon cherchera toujours, à l'équilibre, à occuper la surface d'aire minimale, en vertu du principe bien connu que tout système évolue spontanément vers l'état d'énergie minimale. La forme des motifs et des formes obtenues à l'aide de films de savon a été étudié par le physicien belge J. Plateau au XIX<sup>ème</sup> siècle. On parle aujourd'hui de problème de Plateau.

Nous avons effectué des mesures des angles formés par les parois des films et des bulles de savon coalescentes et vérifié les résultats prévus par les lois de Plateau.

### III.1. Produits et matériels utilisés

#### Produits

Pour préparer une solution d'eau savonneuse produisant une mousse résistante et ayant la plus grande durée de vie, nous avons utilisé les ingrédients suivants :

- De l'eau de robinet
- De la liquide vaisselle du commerce (Fairy)
- Du saccharose (**Fluka. BioChemika. (D+)- Sucrose**. 87%, de masse molaire 342.3g/mol et de formule brut  $C_{12}H_{22}O_{11}$ ), pour limiter l'évaporation de l'eau et épaissir le mélange.
- De la glycérine (**Riedel-de haen. Glycerol approx**. 87%, de masse molaire 92.09g/mol et de formule brut  $C_3H_8O_3$ ), pour épaissir le mélange et ralentir les phénomènes de drainage et d'évaporation.

#### Matériels

Des cadres métalliques de différentes formes ont été réalisés à l'aide de baguettes de brasure:

- Un cube
- Un tétraèdre
- Un octaèdre
- Un prisme triangulaire
- Une hélice
- Deux anneaux de même diamètre ( $D= 60\text{mm}$ )
- Deux plaques de plexiglas

### III.2. Recette du mélange utilisé <sup>[26]</sup>

- 1 litre d'eau de robinet
- 40g de saccharose
- 250 ml de liquide vaisselle
- 50 ml de glycérine

### III.3. Protocole expérimental

- On prépare une solution d'eau savonneuse en mélangeant les différents produits cités ci-dessus jusqu'à ce qu'on obtienne une solution homogène et visqueuse.
- On laisse reposer la préparation le temps vieillir une nuit entière.
- On plonge les cadres métalliques dans la solution et on les ressort pour examiner le film formé.
- A l'aide d'un appareil photo numérique, on prend des photographies des films de savon supportés par les contours des différents cadres en vue de faire des mesures (angles, longueurs de films) sur l'image du motif obtenu.
- A l'aide d'un logiciel « Mesurim », on procède aux mesures pour vérifier les lois de Plateau.

### III.4. Problème de Plateau

Au XIX<sup>e</sup> siècle, le physicien belge Joseph Plateau découvrait que les membranes savonneuses formées dans des contours rigides en fil de fer représentaient une solution simple à certains problèmes mathématiques complexes qui exigent la détermination de surfaces d'aire minimale. Quelle est, par exemple, la forme de la surface d'aire minimale limitée par les douze arêtes d'un cube en fil de fer ?

La surprise fut grande quand on se rendit compte qu'on pouvait résoudre ce problème d'aire minimale en plongeant le cube dans une solution de savon : il se forme en effet à l'intérieur de cette armature, quand on l'enlève de son bain, une surface constituée d'un film liquide, limitée par les douze arêtes, et présentant la propriété d'avoir une aire minimale. Ce n'est que récemment que l'analyse a permis de décrire la géométrie de ces solutions expérimentales.

### III.5. Résultats expérimentaux et interprétation

#### III.5.1. Résultats des expériences sur les films de savon

##### III.5.1.1. Cas du cadre tétraédrique

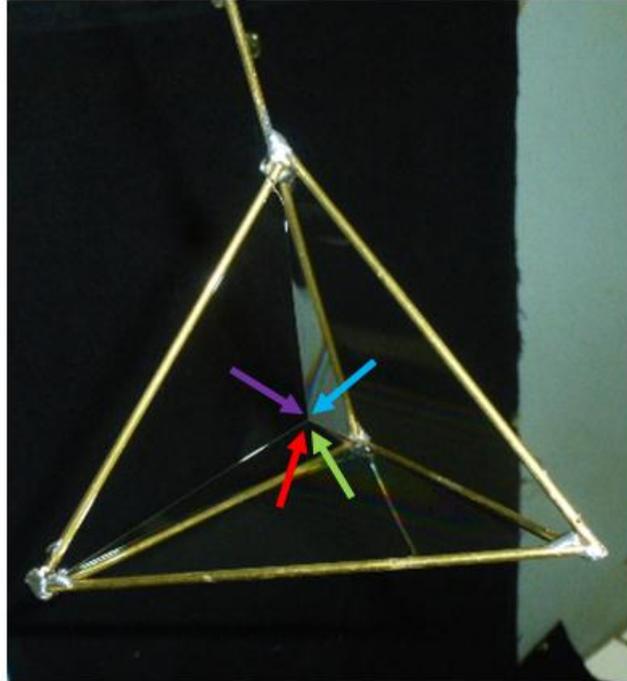


Figure III.1. Surface minimale formée par le film de savon dans un tétraèdre

On a procédé à la mesure des angles entre les films qui constituent cette surface minimale à l'aide du logiciel « Mesurim » et on a trouvé les résultats suivants:

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $120,68^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $119,24^\circ$
- L'angle désigné par la flèche violette vaut  $119,4^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $110,2^\circ$

#### **Interprétation :**

Quand on ressort le tétraèdre plongé dans la solution savonneuse préparée, on observe que le film de savon formé ne va pas remplir les quatre côtés du tétraèdre, mais va aller vers l'intérieur dans le but de minimiser son aire tel que prévu par les lois de Plateau.

On remarque aussi que les angles-mesurés à l'aide du logiciel « Mesurim » sont proches de  $120^\circ$  à l'intersection de trois films de savon et  $109^\circ,28'$  à la rencontre de quatre sections de film.

**III.5.1.2. Cas du prisme triangulaire**

Figure III.2. Surface minimale formée par le film de savon dans un prisme triangulaire

Après mesure des angles à l'aide du logiciel « Mesurim » on a obtenu les résultats suivants:

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $118,63^\circ$
- L'angle désigné par la flèche noire vaut  $120,47^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $118,7^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $118,3^\circ$
- L'angle désigné par la flèche violette vaut  $121,5^\circ$
- L'angle désigné par la flèche orange vaut  $118,5^\circ$

**Interprétation :**

A partir de l'expérience effectuée qui consiste à plonger le prisme triangulaire dans la solution d'eau savonneuse, on remarque que la surface minimale générée par le film est constituée de trois plans réunis selon des angles de  $120^\circ$ .

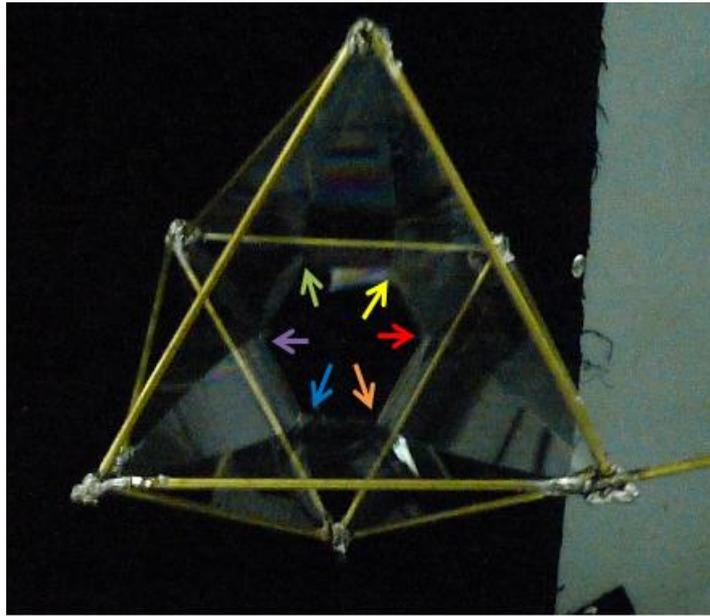
**III.5.1.3. Cas du cadre octaédrique**

Figure III.3. Surface minimale formée par le film de savon dans un octaèdre contenant un hexagone au centre

A l'aide du logiciel « Mesurim », on a mesuré les angles formés entre les différentes surfaces de films et on a trouvé les résultats suivants:

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $109,23^\circ$
- L'angle désigné par la flèche jaune vaut  $109,24^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $109,9^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $108,94^\circ$
- L'angle désigné par la flèche violette vaut  $109,44^\circ$
- L'angle désigné par la flèche orange vaut  $108,87^\circ$

**Interprétation :**

La figure III.3 montre la surface minimale que forme le film de savon dans un cadre octaédrique.

Cette surface comporte un hexagone central constitué par des lignes courbes de film de savon formées par l'intersection de trois surfaces. Ces lignes se croisent avec des angles de  $109^\circ 28'$ , ce que nous avons pu vérifier expérimentalement.

D'autres surfaces minimales peuvent être obtenues en secouant le cadre ou en soufflant dessus.

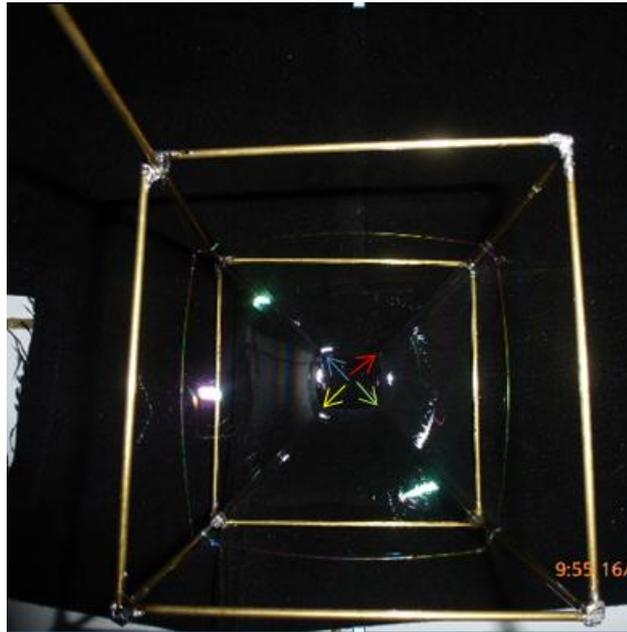
**III.5.1.4. Cas du cube**

Figure III.4. Surface minimale formée par le film de savon dans un cube

A l'aide du logiciel « Mesurim », on a procédé à la mesure des angles entre les différentes surfaces de film et on a obtenu les résultats suivants:

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $109,9^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $109,24^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $109,15^\circ$
- L'angle désigné par la flèche jaune vaut  $108,5^\circ$

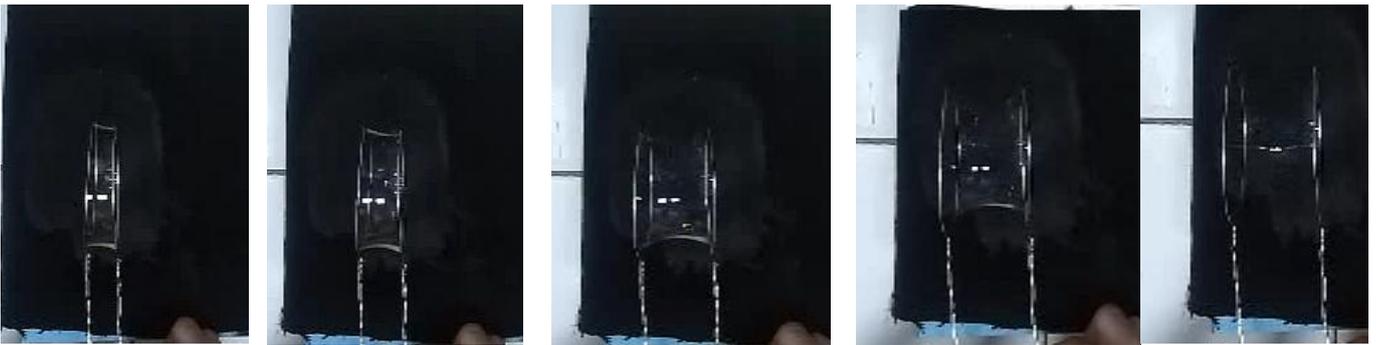
**Interprétation :**

Comme l'indique la figure III.4, en ressortant le cadre cubique de la solution savonneuse, on voit le film qui s'accroche aux contours du cadre sans remplir les surfaces qui le constituent. Un carré central est formé à l'intérieur du cube avec quatre côtés courbes formés par des lignes de film de savon provenant de l'intersection de trois surfaces. C'est la surface minimale que prend le film de savon dans un contour cubique.

A l'aide du logiciel « Mesurim », on a vérifié que les angles formés entre quatre bords de plateau sont de  $109^\circ 28'$  puisqu'on a trouvé des valeurs expérimentales assez proches.

III.5.1.5. Cas du film formé entre deux anneaux coaxiaux parallèles

Figure III.5. Surface minimale (caténoïde) créée par le film de savon entre deux anneaux écartés.

**Interprétation :**

Cette séquence de photos prises montre que la caténoïde s'étire et finit par se rompre ; le col de la caténoïde rétrécit au fur et à mesure que l'on écarte les deux anneaux l'un de l'autre jusqu'à rupture du film qui va se reformer sur les disques.

Le point de rupture mesuré correspond approximativement au rapport  $d/r$  prévu par la théorie.

Où :  $r$  : rayon des deux anneaux, égal à 30mm

$d$  : distance entre les deux anneaux à la rupture du film,

Nous trouvons (après plusieurs expériences) une valeur de  $d$  proche de 40mm

On a donc un rapport  $d/r = 1,33$

On observe que la valeur de  $d$  trouvée est supérieure à  $1,325r$ ,

La théorie prévoit qu'à des distances supérieures à  $1,325r$ , la surface évolue de façon discontinue en deux disques, maintenus séparément par les deux anneaux, d'après Goldschmidt.

### III.5.1.6. Cas du film en hélice



Figure III.6. Surface minimale (hélicoïde) créée par le film de savon dans une hélice.

#### **Interprétation :**

Pour minimiser sa surface dans ce cas, le film de savon s'appuie sur les contours de l'hélice en formant un hélicoïde.

### III.5.2. Résultats des expériences sur les bulles de savon

#### III.5.2.1. Cas de deux bulles coalescentes

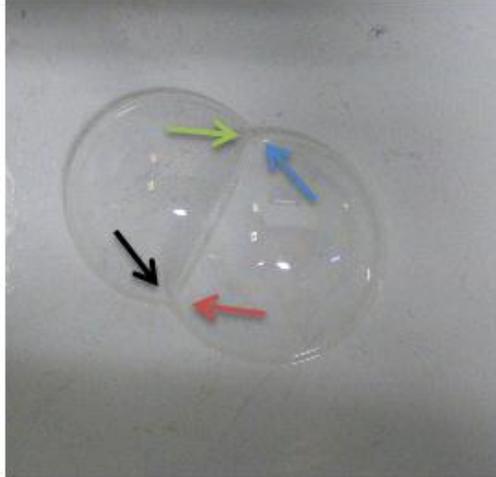


Figure III.7. Deux bulles coalescentes

A l'aide du logiciel « Mesurim » on a mesuré les angles formés entre le film de savon séparant les deux bulles et les surfaces des bulles et on a trouvé les résultats suivants :

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $119,8^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $119,8^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $119,7^\circ$
- L'angle désigné par la flèche noire vaut  $119,7^\circ$

#### **Interprétation :**

On voit sur la figure III.9 que la surface de contact des deux bulles est plane puisqu'elles ont presque la même taille. Chaque bulle, cherchant à avoir sa forme sphérique naturelle, essaie de pousser la surface de contact pour s'arrondir. Mais elle subit en même temps la poussée de la part de sa voisine. Il en résulte que les deux bulles doivent trouver un compromis qui se caractérise par une surface plane.

A partir des mesures effectuées, on constate que les angles formés entre les trois parois de film séparant les deux bulles sont de  $120^\circ$ .

**III.5.2.2. Cas de trois bulles coalescentes**

Figure III.8. Trois bulles coalescentes

A l'aide du logiciel « Mesurim » on a mesuré les angles formés entre les films de savon séparant les trois bulles et on a trouvé les résultats suivants :

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $119,97^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $120,1^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $119,91^\circ$

**Interprétation :**

D'après la figure III.10 et les mesures établies, on voit que les films de savon séparant les trois bulles se croisent en formant des angles de  $120^\circ$ , comme le prévoit les règles de Plateau.

III.5.2.3. Cas d'un groupe de bulles coalescentes

Figure III.9. Groupe de bulles coalescentes

A l'aide du logiciel « Mesurim » on a mesuré les angles formés entre les films de savon séparant les trois bulles et on a trouvé les résultats suivants :

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $119,8^\circ$
- L'angle désigné par la flèche noire vaut  $119,6^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $119,7^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $120,2^\circ$
- L'angle désigné par la flèche violette vaut  $119,9^\circ$
- L'angle désigné par la flèche orange vaut  $119,7^\circ$
- Le point blanc désigne un angle de  $120,08^\circ$
- ● Désigne un angle de  $120,1^\circ$
- ● Désigne un angle de  $120,02^\circ$
- ● Désigne un angle de  $120,06^\circ$
- ● Désigne un angle de  $120,3^\circ$
- ● Désigne un angle de  $120,09^\circ$
- ● Désigne un angle de  $119,7^\circ$
- ● Désigne un angle de  $120,2^\circ$
- ● Désigne un angle de  $120,1^\circ$
- ● Désigne un angle de  $119,7^\circ$
- ● Désigne un angle de  $119,9^\circ$
- ● Désigne un angle de  $119,9^\circ$

**Interprétation :**

A partir de la figure III.11 et les angles mesurés, on remarque que même dans le cas de plusieurs bulles séparées par des films de savon, l'agencement de ces films qui se croisent toujours en trois parois est caractérisé par des angles d'intersection de  $120^\circ$ .

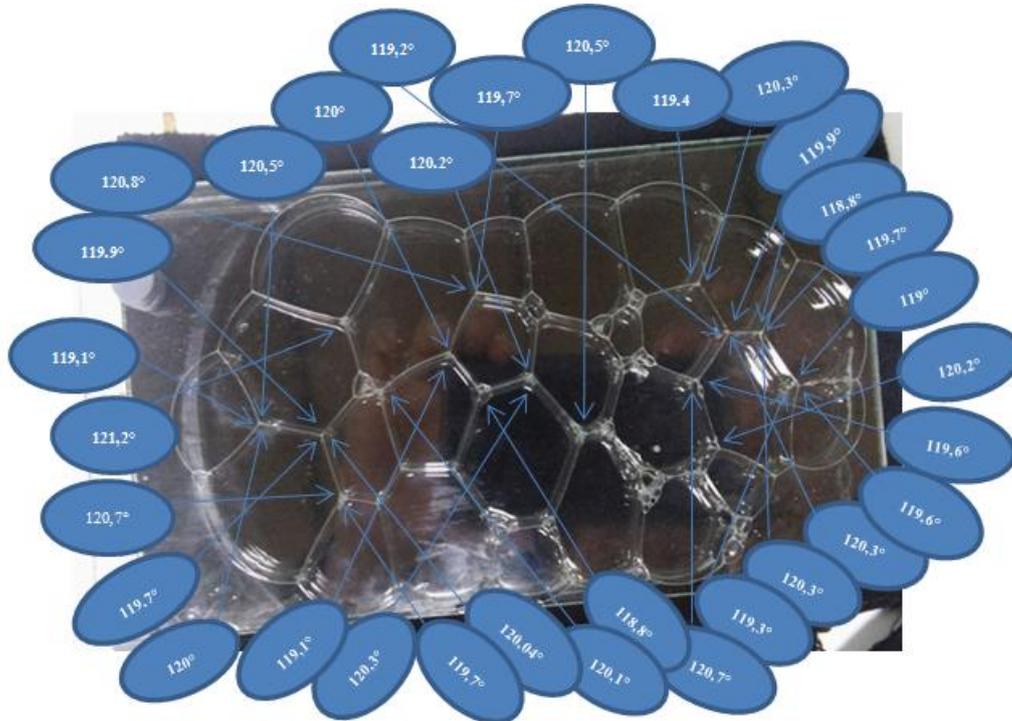
**III.5.2.4. Cas d'un amas de bulles retenues entre deux plaques de plexiglas**

Figure III.10. Amas de bulles formées entre deux plaques de plexiglas

**Interprétation :**

A partir de cette expérience et de la mesure des angles, on remarque que la structure ne ressemble pas tout à fait à une ruche d'abeille comme énoncé dans la littérature, car la taille des bulles diffère d'une bulle à une autre, par le fait que le dispositif expérimental utilisé pour cette manipulation ne permet pas de générer de bulles de tailles similaires. N'empêche que les lois de Plateau sont vérifiées partout, et les parois de films de savon séparant les bulles se croisent par trois en formant des angles de  $120^\circ$ .

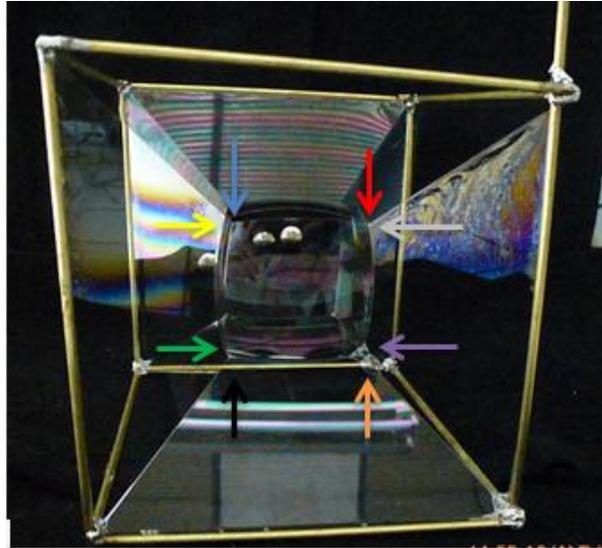
III.5.2.5. Cas de bulles piégées dans des cadres métalliques➤ **Bulle piégée dans un cadre cubique**

Figure III.11. Bulle piégée dans un cadre cubique

Après mesure des angles entre les surfaces des bulles et les surfaces (films de savon) attachés aux bords des différents cadres à l'aide du logiciel « Mesurim » on a obtenu les résultats suivants:

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $121^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $120,1^\circ$
- L'angle désigné par la flèche grise vaut  $119^\circ$
- L'angle désigné par la flèche violette vaut  $121,5^\circ$
- L'angle désigné par la flèche orange vaut  $119,3^\circ$
- L'angle désigné par la flèche noire vaut  $118,95^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $119,5^\circ$
- L'angle désigné par la flèche jaune vaut  $120,6^\circ$

➤ **Bulle piégée dans un cadre tétraédrique**

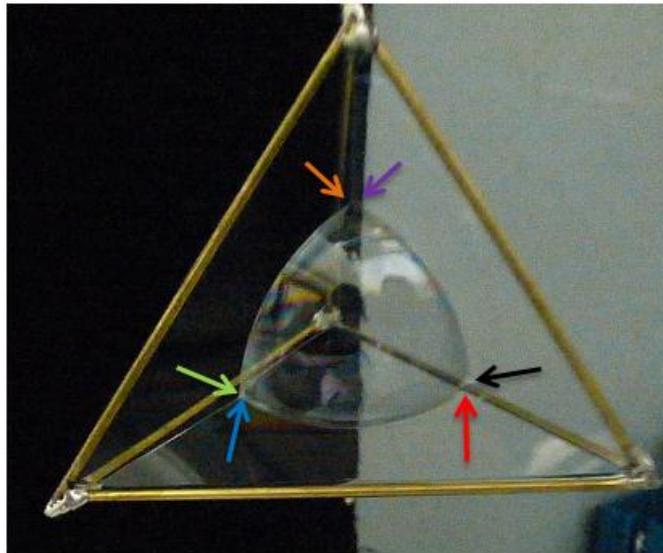


Figure III.12. Bulle piégée dans un cadre tétraédrique

Après mesure des angles entre les surfaces des bulles et les surfaces (films de savon) attachés aux bords des différents cadres à l'aide du logiciel « Mesurim » on a obtenu les résultats suivants:

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $120,4^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $120,3^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $119,3^\circ$
- L'angle désigné par la flèche noire vaut  $120,1^\circ$
- L'angle désigné par la flèche violette vaut  $119,4^\circ$
- L'angle désigné par la flèche orange vaut  $119,7^\circ$

➤ **Bulle piégée dans un prisme triangulaire**

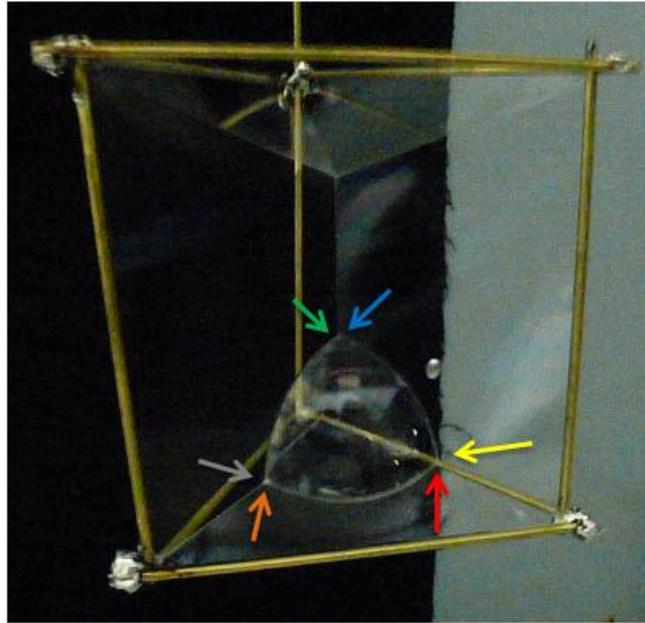


Figure III.13. Bulle piégée dans un prisme triangulaire

A l'aide du logiciel « Mesurim », on a mesuré les angles formés entre les surfaces des bulles et les surfaces (films de savon) attachés aux bords des différents cadres et on a obtenu les résultats suivants:

- L'angle désigné par la flèche bleue vaut  $119,4^\circ$
- L'angle désigné par la flèche verte vaut  $120,2^\circ$
- L'angle désigné par la flèche rouge vaut  $119,2^\circ$
- L'angle désigné par la flèche jaune vaut  $119,5^\circ$
- L'angle désigné par la flèche grise vaut  $120,3^\circ$
- L'angle désigné par la flèche orange vaut  $120,4^\circ$

### **Interprétation :**

La bulle de savon est piégée dans le cadre une fois la surface minimale formée. On introduit la bulle à l'aide d'une paille préalablement mouillée. La taille de la bulle peut être réglée à volonté en soufflant ou en aspirant de l'air.

D'après les figures III. (13, 14, 15), on voit que la bulle est piégée dans la région centrale du cadre, possède la symétrie du cadre et sera contrainte sous forme d'une bulle de même forme que celle du cadre (tétraédrique dans le cas d'un tétraèdre, cubique dans le cas d'un cube...) par les surfaces attachées aux bords du cadre et à la bulle.

En effectuant des mesures des angles entre les surfaces des bulles et les surfaces (films de savon) attachés aux bords des différents cadres, on remarque que toutes les bulles formées à l'intérieur des cadres respectent les règles de Plateau. Trois surfaces se rencontrent toujours le long d'une ligne avec des angles de  $120^\circ$ .

### III.6. Discussion des résultats

A partir des différentes expériences réalisées sur les films de savon, on constate qu'on plongeant les différents cadres métalliques (cube, tétraèdre, prisme triangulaire...) dans la solution d'eau savonneuse, le film de savon formé tend toujours à remplir le trou du motif (son intérieur) en s'appuyant sur ses contours, il s'avère que ces surfaces formées par le film sont minimales par rapport aux surfaces que peut former le film en remplissant les côtés des différents cadres.

Le film savonneux tend donc à utiliser le moins de surface possible pour remplir l'espace imposé par un contour donné. En ce sens, le film de savon est ce qu'on appelle, en mathématiques, une surface minimale.

On rappelle qu'un film de savon possède une énergie de tension de surface qui est proportionnelle à son aire. En conséquence, sa forme d'équilibre est celle qui réalise le minimum de surface.

De ce fait, on sait que la tension de surface mesure l'énergie qu'il faut apporter pour augmenter ou diminuer la surface de la membrane savonneuse d'une unité.

$$\sigma = \left( \frac{\partial F}{\partial S} \right)_{T, V, n_i}$$

Où :

$\sigma$ : Tension superficielle du film savonneux

F : Energie libre du film savonneux

S : Surface du film savonneux

L'évolution d'un système thermodynamique vers un état d'équilibre est caractérisée par l'inéquation  $dF < 0$ . Comme  $\sigma$  est par définition positive, il vient que  $dS < 0$ . Donc le film savonneux doit nécessairement diminuer sa surface libre pour être à l'équilibre thermodynamique.

Rappelons que les films de savon obéissent aussi à l'équation de Laplace-Young :  $\Delta P = 2 \sigma \gamma$

Où  $\Delta P$  désigne la différence de pression entre les deux faces de la surface et  $\sigma$  la tension superficielle, caractéristique du liquide dont est constituée cette surface, et  $\gamma$  la courbure moyenne.

Dans le cas d'un film de savon libre, la pression de l'air est la même de chaque côté, donc  $\Delta P = 0$  par conséquent la courbure moyenne est nulle : on retrouve alors la définition mathématique de la surface minimale.

Les deux équations précédentes montrent que pour être en équilibre, le film de savon tend donc à avoir la surface la plus minimale possible.

L'organisation des films et les bulles de savon sont régi par les lois de Plateau. Comme on l'a vérifié à partir des expériences réalisées, ces lois s'appliquent aux surfaces délimitées par n'importe quel cadre ainsi qu'aux films de savon produits dans les amas de bulles.

Les valeurs expérimentales des angles trouvées se rapprochent globalement des angles décrits par Plateau, la différence provient des erreurs de mesure.

# Conclusion générale

## Conclusion générale

L'objectif de ce modeste travail est d'étudier les bulles et les films de savon en trois dimensions et de vérifier les lois de Plateau qui les régissent.

La première partie de notre travail a été consacrée à l'étude générale des mousses qui sont omniprésentes dans notre quotidien et qui sont appliquées dans des domaines variés. Nous avons examiné leur structure, leur composition et leurs caractéristiques ainsi que les différents mécanismes qui les gouvernent depuis leur formation jusqu'à leur fin de vie.

Nous avons vu que les mousses résultent de l'empilement de nombreuses bulles séparées par des films liquides. Par ailleurs, nous avons procédé à l'étude de ces bulles et films de savon en général (définition, structure et stabilité).

La deuxième partie a porté sur les bulles et les films de savon en trois dimensions. Nous avons évoqué les différents problèmes mathématiques des surfaces minimales qui n'ont pas été résolus analytiquement, et pour lesquels les savants (mathématiciens ou physiciens) ont cherché des solutions analogiques, en faisant appel aux films de savon.

Nous avons exposé les différentes expériences et observations effectuées par le physicien J. Plateau sur les films de savon au XIX<sup>ème</sup> siècle.

De ces observations il a énoncé les différentes lois qui portent son nom :

- Trois surfaces lisses d'un film de savon se croisent le long d'une ligne (bord de Plateau).
- Les films se rencontrent par trois aux bords de Plateau en formant un angle de  $120^\circ$ .
- Les bords de Plateau se recoupent par quatre au niveau des vertex en formant un tétraèdre régulier, avec des angles égaux à  $\arccos(-1/3) \approx 109,5^\circ$  entre les bords de Plateau.

Ces règles de Plateau concernant les angles avec lesquels les surfaces et les films de savon se croisent s'appliquent également aux surfaces et aux lignes de film de savon produites par des grappes de bulles.

De plus, nous avons analysé les propriétés géométriques de petits groupes de deux et trois bulles coalescentes afin de relier les propriétés géométriques aux résultats obtenus à partir de l'application de l'équation de Laplace-Young.

La troisième et dernière partie présente la partie pratique, dont laquelle nous avons exposé les différentes expériences effectuées sur les films de savons tridimensionnels.

Les interactions entre les films permettent de créer une surface particulière dite surface minimale.

En mathématiques et en physique, une surface minimale est une surface minimisant son aire tout en réalisant une contrainte : un ensemble de points, ou le bord de la surface, est d'avance déterminé.

Nous avons pris des photographies de chaque expérience afin d'observer les différentes surfaces minimales générées par le film de savon dans les différents cadres utilisés, pour ensuite procéder à la mesure des angles formés entre les films de savon, à l'aide du logiciel « Mesurim ».

En perturbant la surface minimale formée par le film de savon dans un contour donné, celui-ci va chercher une autre surface minimale sous la nouvelle contrainte imposée, toujours dans le but de minimiser son énergie. Le film peut alors se retrouver dans un minimum local pour son état d'énergie. La surface minimale correspond au minimum global.

Les bulles de savon quant à elles utilisent ce même principe. Sauf qu'elles n'ont pas de support à proprement dit. Leur contrainte est l'air emprisonné dans la bulle qui exerce une pression sur les parois de celle-ci.

D'après les mesures des angles effectuées, nous avons trouvé des valeurs assez proches des valeurs des angles prévus par Plateau.

Notre but est ainsi atteint et les conditions de Plateau sur les bulles et les films de savon ont été vérifiées.

# Références bibliographiques

## Références bibliographiques

- [1]. **François Graner**. Physique de la vie quotidienne. Springer, 2003.
- [2]. **F. GRANER, Y. JIANG, E. JANIAUD et C. FLAMENT**. Equilibrium energies of 2D fluid foams, in Phys. Rev. E., vol. 63, pp. 11402/1-13, 2001.
- [3]. **I. Cantat, S. Cohen-Addad, F. Elias, F. Graner, R. Höhler, O. Pitois, F. Rouyer, and A. Saint-Jalmes**. Les mousses. Échelles. Belin, Paris, 2010.
- [4]. **Virginie NETO**. Nouvelles méthodes d'élaboration de tensioactifs glycosylés par métathèse croisée et cycloaddition 1,3-dipolaire. Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Limoges, 2007.
- [5]. **Sébastien Besson**. Propriétés adhésives entre deux bulles de savon. Dynamique des Fluides [physics.u-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007.
- [6]. **Reine-Marie Guillermic**. Propriétés physico-chimiques des mousses : études approfondies sur des mousses modèles et études exploratoires sur de nouvelles mousses. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Rennes 1, 2011.
- [7]. **L. CHOPLIN, J.L. SALAGER**. Mousse : Formation, formulation et propriétés. Technique de l'ingénieur, 10 mars 2008.
- [8]. **W.W. Mullins**. The statistical self-similarity hypothesis in grain growth and particle coarsening. J. Appl. Phys., 59 :1341, 1986.
- [9]. **W.W. Mullins**. Estimation of the geometrical rate constant in idealized three dimensional grain growth. Acta. Metall., 37 :2979, 1989.
- [10]. Travaux Personnels Encadrés (TPE): bulles de savon. 2013/2014 [En ligne] “<https://lesbullesdesavons.jimdo.com/les-bulles-de-savons/>”
- [11]. Travaux Personnels Encadrés (TPE): bulles de savon, Lycée Saint Exupéry de Lyon, 2015. [En ligne] « <http://lesbullesdesavon2015.pagesperso-orange.fr/BullesSavon.html>”
- [12]. **Sébastien Kosgodagan Acharige**. Vibration de films de savon. Physique [physics]. Université Denis Diderot - Paris 7, 2014.
- [13]. **Champion, F. C. and Davy, N**. Properties of Matter (Blackie), Ch. VII. 1961.
- [14]. **Courant, R. and Robbins, H**. What is Mathematics ? (Oxford), pp.329-361 and 385-397. 1973.
- [15]. **Cyril Isenberg**. The science of soap films and soap bubbles. University of kent at Canterbury. Dover Publications 1992.
- [16]. **Euler, L**. Opera Omnia (Orell Fussli), (1) Vols. 24-25. 1952.
- [17]. **Harkins, W. D**. The physical Chemistry of Surface Films (Reinhold). 1952.

- [18]. **Kline, M.** *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford). 1972.
- [19]. **Goldschmidt, B.** *Determinatio Superficei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum exam ortae*, Gottingen. 1831.
- [20]. **Schwarz, H. A.** *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 2 vols. Springer 1890.
- [21]. **Plateau, J. A. F.** *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (Gauthier-Villards, Trubner et cie, F. Clemm), 2Vols. 1873.
- [22]. **Almgren, F. J. Jr.** and **Taylor, J. E.** *The Geometry of soap films and soap bubbles*, *Scientific American*, 235, 1, pp. 82-93. July 1976.
- [23]. **Bragg, W. L.** and **Nye, J. F.** *A Dynamical Model of a Crystal Structure*, *Proc. Roy. Soc. London*, 190A, 474. 1947.
- [24]. **Nicholson, M.** *The Interaction between Floating Particles*, *Proc. Camb.Phil. Soc.*, 45, 288. 1949.
- [25]. **Schwarz, H. W.** *Rearrangements en Polyhedric Foam*, *Recueil*, 84, 771-781. 1964.
- [26]. *Bulles de savon : recette et astuces testées par les enfants*, [en ligne]  
 « <http://www.mespetsbonsheurs.com/bulles-de-savon-recette-et-astuces-testees-par-les-enfants/>

