

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



THESE

présentée au **Laboratoire de Commande des Processus**
en vue de l'obtention du titre de

Docteur

en Automatique
par

Salim LABIOD

Magister en Automatique de l'ENP

Thème

**Contribution à la Commande Adaptative Floue
des Systèmes Non Linéaires**

Soutenue publiquement le 29 Janvier 2005 devant le jury composé de:

F. BOUDJEMA	Professeur à l'ENP	Président
M. S. BOUCHERIT	Professeur à l'ENP	Rapporteur
H. CHEKIREB	Maître de Conférences à l'ENP	Examinateur
M. DJEMAI	Maître de Conférences à l'ENSEA (France)	Examinateur
H. SALHI	Maître de Conférences à l'Université de Blida	Examinateur
V. TOUTCHINE	Maître de Conférences à l'Université de Boumerdes	Examinateur
D. BOUKHETALA	Maître de Conférences à l'ENP	Invité
M. HAMADOUCHE	Docteur d'état au CFDAT (Réghaia)	Invité

AVANT-PROPOS

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse a été effectué au Laboratoire de Commande de Processus (LCP) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, et au Laboratoire d'Etudes et de Modélisation en Electrotechnique (LAMEL) de l'Université de Jijel.

Je tiens à remercier Monsieur **M. S. Boucherit**, Professeur à l'ENP, pour la proposition du sujet de cette thèse et pour ces conseils et son soutien tout au long de ce travail.

J'ai été profondément honoré que Monsieur **F. Boudjema**, Professeur à l'ENP, ait accepté d'examiner ce travail et de présider ce jury.

Que Monsieur **H. Chekireb**, Maître de Conférences à l'ENP, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Que Monsieur **M. Djemai**, Maître de Conférences à l'ENSEA – France, trouve ici ma respectueuse gratitude pour avoir accepté de prendre part à ce jury.

Que Monsieur **H. Salhi**, Maître de Conférences à l'Université de Blida, trouve ici ma respectueuse gratitude pour avoir accepté de prendre part à ce jury.

Que Monsieur **V. Toutchine**, Maître de Conférences à l'Université de Boumerdes, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de siéger dans ce jury.

Que Monsieur **D. Boukhetala**, Maître de Conférences à l'ENP, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de siéger dans ce jury.

Que Monsieur **M. Hamadouche**, Docteur d'état au CFDAT-Réghaia, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de siéger dans ce jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur **T. M. Guerra**, Professeur à l'Université de Valenciennes (France), pour l'intérêt qu'il a témoigné à l'égard de mon travail, et pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire LAMIH durant les années 2003 et 2004.

Que tous mes amis et collègues trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance.

Enfin, je ne saurais terminer cet avant-propos sans remercier toute ma famille pour son soutien pendant toutes mes études.

ملخص:

يهدف هذا العمل الى استعمال الجمل الغامضة في التحكم الآلي للأنظمة الديناميكية اللاخطية خاصة الأنظمة اللاخطية الممكن تحويلها إلى أنظمة خطية باستعمال تحويلات لاخطية. هدف التحكم هو جعل مخارج هذه الأنظمة تتبع مسارات مرجعية محددة مسبقا. يتطرق هذا العمل بصفة خاصة الى التحكم التلاؤمي الغامض المباشر وغير المباشر للأنظمة الديناميكية اللاخطية أحادية ومتعددة المداخل والمخارج وكذلك للأنظمة اللامركزية المتشابهة. القاسم المشترك بين طرق التحكم المدروسة يتمثل في استعمال الجمل الغامضة كتمثل عام للدوال المجهولة من أجل الحصول على تمثيل للمعادلة الديناميكية للنظام اللاخطي في بعض الحالات (الطريقة غير المباشرة)، أو من أجل الحصول على تمثيل لقانون تحكم مثالي مجهول في الحالات الأخرى (الطريقة المباشرة). بالإضافة إلى هذا، استعملنا طريقة ليابونوف لدراسة استقرار طرق التحكم التلاؤمي المقترحة وقدمنا بعض نتائج المحاكاة العددية لابرار كفاءة أدائها.

كلمات مفتاحية:

جمل غامضة، تحكم غامض، تحكم لاخطي، تحكم تلاؤمي، تحكم لامركزي، استقرار ليابونوف، أنظمة لاخطية، أنظمة متشابهة.

Résumé :

L'objectif de ce travail porte sur l'utilisation des systèmes flous comme outils d'approximation des fonctions dans la commande en poursuite des systèmes non linéaires incertains, et en particulier les systèmes non linéaires affines en la commande. Dans ce travail, on présente des méthodes de commande adaptatives floues directes et indirectes pour les systèmes non linéaires monovariables et multivariables, et pour une classe de systèmes non linéaires interconnectés avec des interconnexions inconnues. Le point commun entre les approches proposées est l'utilisation des systèmes flous pour approcher les dynamiques inconnues des systèmes, dans certains cas (approches indirectes), et pour approcher des lois de commande stabilisatrices dans d'autres cas (approches directes). De plus, l'analyse de la stabilité et de la robustesse des structures de commande proposées est effectuée par l'approche de Lyapunov. Pour chaque structure de commande, des résultats de simulation sont présentés pour montrer ses performances.

Mots-clés :

Systèmes flous, Commande floue, Commande non linéaire, Commande adaptative, Commande décentralisée, Stabilité de Lyapunov, Systèmes non linéaires, Systèmes interconnectés.

Abstract:

This work deals with the problem of adaptive control of nonlinear systems by using fuzzy universal approximators. The work focuses on the control problem of feedback linearizable nonlinear systems. The dissertation considers the direct and indirect adaptive fuzzy control methods of single-input single-output SISO nonlinear systems, multi-input multi-output MIMO nonlinear systems, and of a class of interconnected nonlinear systems with unknown interconnections. The common feature between all developed adaptive controllers is the use of fuzzy systems, that are updated on-line, with the purpose of producing approximations of the system's dynamics, in some cases (indirect methods), or of some unknown stabilizing controllers, in others (direct methods). In addition, stability and robustness analysis of the proposed control schemes are performed by using the Lyapunov synthesis method, and for each scheme, simulation results are given to highlight its performance.

Key words:

Fuzzy systems, Fuzzy control, Nonlinear control, Adaptive control, Decentralized control, Lyapunov stability, Nonlinear systems, Interconnected systems.

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre 1 Systèmes flous

1.1 Introduction	4
1.2 Ensembles nets et ensembles flous	4
1.2.1 Ensemble net	5
1.2.2 Ensemble flou	5
1.2.3 Fonction d'appartenance	6
1.2.4 Variable linguistique	7
1.2.5 Opérations sur les ensembles flous	8
1.2.6 Implication floue	10
1.2.7 Raisonnement flou	10
1.3 Structure d'un système flou	11
1.4 Représentation mathématique des systèmes flous	12
1.5 Système flou de Takagi-Sugeno	13
1.6 Approximation des fonctions par les systèmes flous	16
1.7 Conclusion	17

Chapitre 2 Commande adaptative floue des systèmes non linéaires monovariabiles

2.1 Introduction	19
2.2 Commande adaptative indirecte floue	22
2.2.1 Position du problème	22
2.2.2 Commande adaptative indirecte par les systèmes flous	23
2.2.2.1 Première approche	25
2.2.2.2 Deuxième approche	30
2.2.3 Résultats de simulation	33
2.3 Commande adaptative directe floue	37
2.3.1 Position du problème	37
2.3.2 Commande adaptative directe par les systèmes flous	39
2.3.3 Résultats de simulation	43
2.4 Conclusion	45

Chapitre 3

Commande adaptative floue des systèmes non linéaires multivariables

3.1 Introduction	46
3.2 Commande adaptative indirecte floue	48
3.2.1 Position du problème	48
3.2.2 Commande adaptative indirecte par les systèmes flous	51
3.2.3 Résultats de simulation	57
3.3 Commande adaptative directe floue	61
3.3.1 Position du problème	61
3.3.2 Commande adaptative directe par les systèmes flous	65
3.3.3 Résultats de simulation	70
3.4 Conclusion	72

Chapitre 4

Commande adaptative décentralisée floue des systèmes non linéaires interconnectés

4.1 Introduction	74
4.2 Commande adaptative décentralisée indirecte floue	75
4.2.1 Position du problème	75
4.2.2 Commande adaptative décentralisée indirecte par les systèmes flous	77
4.2.3 Résultats de simulation	83
4.3 Commande adaptative décentralisée directe floue	85
4.3.1 Position du problème	85
4.3.2 Commande adaptative décentralisée directe par les systèmes flous	87
4.3.3 Résultats de simulation	92
4.4 Conclusion	94

Conclusion générale	95
----------------------------------	----

Bibliographie	99
----------------------------	----

Introduction générale

Au cours des deux dernières décennies, un grand nombre de publications a été dédié au problème de commande des systèmes non linéaires. Un problème qui présente beaucoup de challenges puisque les systèmes non linéaires, contrairement aux systèmes linéaires pour lesquels l'automatique fournit une panoplie de méthodes pour la synthèse de la commande, ne disposent pas d'outils et de méthodes généraux pour l'analyse et la synthèse des systèmes et des lois de commande non linéaires. Ceci est dû au fait que les systèmes non linéaires possèdent des structures extrêmement variées, des dynamiques complexes et peuvent présenter toutes sortes de comportement étrange.

Au début, la commande des systèmes non linéaires était classique [SLO91], elle reposait sur la théorie de l'automatique linéaire. En fait, elle consiste à linéariser la dynamique non linéaire du système (approximation de premier ordre) autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les outils de la commande linéaire puissent être exploités pour la synthèse d'une loi de commande assurant les performances recherchées. Grâce à sa facilité d'implantation et de mise en œuvre, cette approche a remporté un grand succès auprès des industriels. Cependant, la nécessité d'atteindre de hautes performances dans des domaines de fonctionnement relativement larges, a imposé la prise en compte de la dynamique globale non linéaire des processus dans la synthèse de la commande.

L'introduction du formalisme de la géométrie différentielle et en particulier la technique de linéarisation entrée-sortie a connu un grand succès pour le développement de contrôleurs pour une classe des systèmes non linéaires, dits systèmes linéarisables par bouclage [ISI89, SLO91]. Cette classe de systèmes n'a pas uniquement un intérêt mathématique mais également une grande importance pratique, car, beaucoup de systèmes physiques appartiennent à cette classe, tels que les systèmes mécaniques et les machines électriques. L'idée de base de la linéarisation est la transformation d'un système non linéaire en un système linéaire, de telle sorte que les outils de la commande linéaire puissent être employés pour assurer les performances désirées. Cependant, cette technique ne peut être utilisée que pour les systèmes non linéaires dont le modèle

dynamique est parfaitement connu. Pour pallier ce problème, plusieurs approches de commande adaptative ont été introduites [SLO91, KRS95, KOK01]. Dans ces approches, on suppose que le modèle du système non linéaire peut être exprimé sous la forme d'un produit de fonctions non linéaires connues à l'aide de paramètres (constants et/ou lentement variables) inconnus. Malheureusement, il est souvent difficile, voire impossible de décrire tous les phénomènes mis en jeu dans un système à partir de fonctions non linéaires connues, notamment pour un système physique complexe. Une solution à ce problème peut être envisagée à partir d'une représentation de la dynamique du système non linéaire par un système flou où les relations entre les entrées, les sorties et les états sont exprimées par des règles floues de type « si-alors » [SUG85, SUG88].

Les systèmes flous sont des systèmes à base de connaissances construits à partir des opérateurs de la logique floue. La logique floue est conçue au milieu des années soixante à l'université de Berkeley en Californie par le professeur iranien Lotfi A. Zadeh. Cette logique est basée sur l'imitation des aspects approximatifs et qualitatifs du raisonnement humain. Cette théorie était mal perçue à l'époque du fait que le mode de penser était plus stricte et technique. De plus, le terme choisi « flou » n'a pas contribué à rendre son acceptation facile.

La première application de la logique floue en commande des processus est due à E. H. Mamdani et A. Assilian en 1974 [MAM77]. Depuis, cette technique a connu un développement croissant, qui s'est manifestait par la publication de nombreux ouvrages et papiers (voir, par exemple, [PRO78, WAN94, PAS98]), et par la mise en place de groupes de recherches spécialisés en commande floue sur tous les continents. La technique de commande floue est souvent présentée comme une technique robuste capable de compenser quasi naturellement les incertitudes et/ou le manque de connaissances précises quant au processus à commander. Dans la majorité des applications des contrôleurs flous, ce dernier est construit à partir de connaissances linguistiques fournies par un expert. Cependant, il est parfois difficile de construire la base des règles de commande pour certains systèmes, ou le besoin peut imposer l'ajustement des paramètres du contrôleur, dans le cas de systèmes à dynamiques variables par exemple. Pour surmonter ce problème et permettre aux contrôleurs flous une acquisition automatique de connaissances à partir de données numériques, les chercheurs ont introduit les techniques de commande adaptatives [WAN92c, WAN94, SPO96a, LAB98]. Dans ces techniques, la propriété d'approximation universelle des systèmes flous [WAN92a, WAN92b] est exploitée, et la stabilité et la robustesse de la structure de commande sont étudiées par l'approche de Lyapunov.

Ainsi, les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans cette logique. Ils portent sur l'utilisation des systèmes flous dans le cadre d'une application liée à la commande adaptative centralisée et décentralisée avec poursuite d'une trajectoire de référence pour une classe de systèmes non linéaires incertains.

La thèse est organisée en quatre chapitres. Le premier est consacré à l'étude de la logique floue, une logique qui permet de traiter mathématiquement des données incertaines et imprécises. Au début, sont exposées les concepts de bases de la logique flous. Par la suite, nous présentons la structure des systèmes flous et particulièrement celle des systèmes flous de Takagi-Sugeno.

Le deuxième chapitre présente le développement de la commande adaptative floue stable, avec ces deux approches directe et indirecte, pour une classe de systèmes non linéaires monovariables. Le problème de division par zéro dans le cas de la commande indirecte est résolu, en premier lieu, par l'utilisation d'un algorithme de projection et, en second lieu, par l'approximation de l'inverse du gain de commande estimé. Dans l'approche directe, une solution est donnée au problème de la dérivée du gain de commande en plus de la proposition d'une loi d'adaptation paramétrique de type proportionnel-intégral PI.

Le troisième chapitre présente la commande adaptative floue directe et indirecte pour une classe de systèmes non linéaires multivariables MIMO avec des non linéarités inconnues. Notre contribution au niveau de l'approche indirecte consiste en l'utilisation de l'inverse matriciel régularisé pour avoir une loi de commande bien définie avec une étude rigoureuse de la stabilité du système bouclé. Et dans l'approche directe, une loi d'adaptation paramétrique à σ -modification de type PI est proposée.

Le quatrième chapitre aborde le problème de l'application des systèmes flous à la commande adaptative directe et indirecte décentralisées pour une classe des systèmes non linéaires interconnectés. Dans ces deux approches de commande, la stabilité est assurée et le problème des interactions entre les sous-systèmes est soigneusement traité.

Toutes les techniques de commande floues proposées dans cette thèse assurent la stabilité et la robustesse des structures de commande par rapport aux erreurs d'approximations et aux perturbations. De plus, pour chaque technique proposée un exemple de simulation est donné pour montrer et mettre en évidence ses performances.

Chapitre 1

Systèmes flous

1.1 Introduction

La logique floue a été introduite par le professeur Lotfi Zadeh en 1965 comme une généralisation de la logique binaire [KOS92, WAN94]. L'intérêt de la logique floue réside dans sa capacité à traiter l'imprécis, l'incertain et le vague. Elle est issue de la capacité de l'homme à décider et agir de façon pertinente malgré le flou des connaissances disponibles. En effet, la logique floue a été introduite pour approcher le raisonnement humain à l'aide d'une représentation adéquate des connaissances.

Ces dernières années, la logique floue a été appliquée dans divers domaines. Cependant, la commande floue est le domaine qui suscite le plus de curiosité et s'avère être un champ d'application actif à travers le monde [WAN94, JAN95, MEN95, PAS98]. En fait, l'imitation des aspects qualitatifs et approximatifs du raisonnement humain a donné naissance à un autre type de système de commande qui trouve de puissantes applications, surtout dans les situations où le système à commander est mal défini mathématiquement et/ou en présence d'une expertise qui puisse fournir des règles de commande.

Dans ce chapitre, nous exposons un bref rappel sur la théorie des ensembles flous et un aperçu général sur la logique floue, en insistant sur les idées utilisées en commande floue. Ensuite, nous présentons la structure des systèmes flous et en particulier les systèmes flous de Takagi-Sugeno.

1.2 Ensembles nets et ensembles flous

Cette section présente les propriétés de base des ensembles nets et des ensembles flous. Les ensembles nets, dits aussi classiques ou ordinaires, sont caractérisés par des

fonctions caractéristiques. Les ensembles flous, qui sont une généralisation des ensembles nets, sont caractérisés par des fonctions d'appartenance.

1.2.1 Ensemble Net

Un ensemble est une collection d'objet. Un ensemble net A sur un référentiel X (dit aussi univers de discours) est une collection d'éléments de l'univers de discours, tel que chaque élément $x \in X$ appartient à 100% à A , ou n'appartient pas à 100% à A . Ceci peut être mieux décrit par une fonction caractéristique donnée par :

$$k_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (1.1)$$

Notons que l'univers de discours et lui même un ensemble net, sa fonction caractéristique, k_x , a la valeur 1 pour tous les élément de X .

Par exemple, un ensemble net définit sur \mathfrak{R} est donné par :

$$A = \{x \mid x \in \mathfrak{R}, a \leq x \leq b\}$$

Dans ce cas \mathfrak{R} est l'univers de discours est tout nombre réel est un élément valide dans cet univers. La Figure 1.1 montre la fonction caractéristique de cet ensemble.

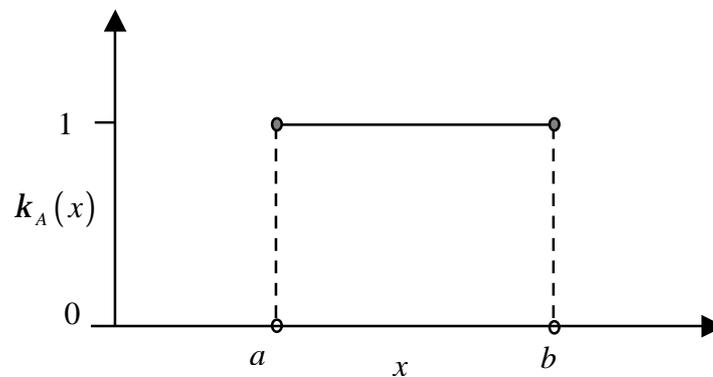


Figure 1.1. La fonction caractéristique de l'ensemble net A .

1.2.2 Ensemble flou

La notion d'ensemble flou provient du constat que « très souvent, les classes d'objets rencontrés dans le monde physique ne possèdent pas de critères d'appartenance bien définis » [MEN95]. Mathématiquement, un ensemble flou A est défini sur un univers de discours X , par une fonction d'appartenance $m_A(x)$ qui prend ces valeur dans l'intervalle $[0,1]$. Cette fonction donne le degré d'appartenance de chaque élément $x \in X$ à A . En

fait, un élément de l'univers de discours peut être entièrement ou partiellement membre de l'ensemble A . Un ensemble flou peut être représenté comme un ensemble de paires ordonnées:

$$A = \{ (x, m_A(x)) \mid x \in X \} \quad (1.2)$$

D'autres représentations sont possibles. Par exemple, si X est discret, A est représenté par:

$$A = \sum_{x \in X} m_A(x)/x \quad (1.3)$$

et si X est continu, A est représenté comme suit:

$$A = \int_X m_A(x)/x \quad (1.4)$$

Par exemple, si quelqu'un veut définir un ensemble flou A par les nombres naturels proche de 6. Cet ensemble peut être défini comme suit :

$$A = 0,1/3 + 0,3/4 + 0,6/5 + 1,0/6 + 0,6/7 + 0,3/8 + 0,1/9$$

et si quelqu'un veut définir l'ensemble A par les nombres réels proche de 6. Ceci peut être accompli par le choix de la fonction d'appartenance suivante :

$$m_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 6)^2}$$

donc A est donné par :

$$A = \int_{\mathfrak{R}} m_A(x)/x$$

1.2.3 Fonction d'appartenance

Pour faciliter le traitement numérique et l'utilisation des ensembles flous, il est nécessaire de donner une description mathématique aux fonctions d'appartenance. Pour des raisons de simplicité, les fonctions d'appartenance ci-dessous sont les plus souvent utilisées [JAN93, BUH94, WAN94, JAN95, LAB98]:

- **Fonction triangulaire** : Elle est définie par trois paramètres $\{a, b, c\}$:

$$m(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- **Fonction trapézoïdale** : Elle est définie par quatre paramètres $\{a, b, c, d\}$:

$$m(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

- **Fonction Gaussienne** : Elle est définie par deux paramètres $\{s, m\}$:

$$m(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right)$$

- **Fonction sigmoïdale** : Une fonction sigmoïdale est définie par deux paramètres $\{a, c\}$:

$$m(x) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x-c))}$$

La Figure 1.2 donne les formes de ces fonctions d'appartenance.

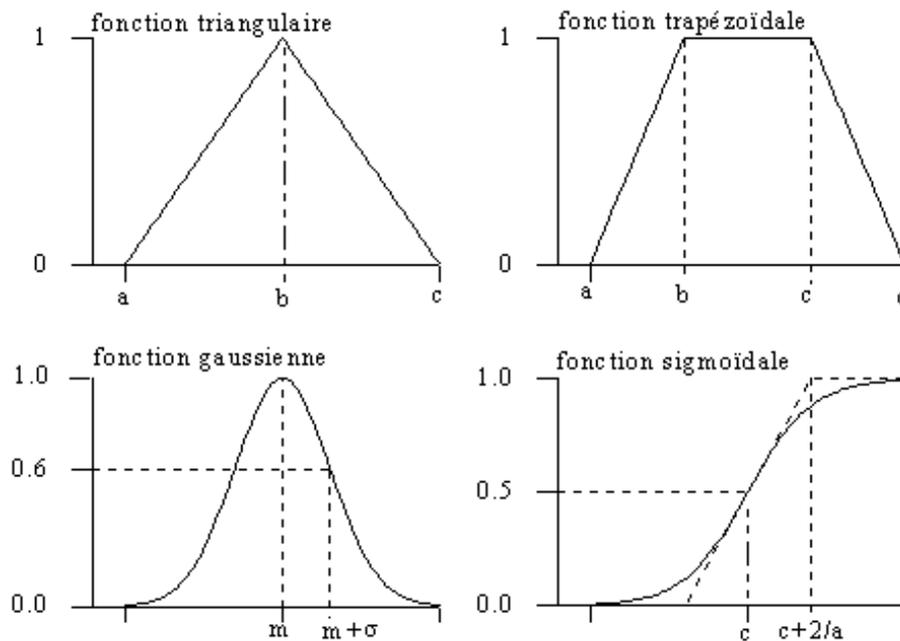


Figure 1.2. Formes des fonctions d'appartenance usuelles.

1.2.4 Variable linguistique

C'est une variable dont les valeurs ne sont pas des nombres, mais des mots ou phrases exprimés en langage naturel [WAN94, MEN95, PAS98]. La raison pour laquelle on utilise cette représentation, est que le caractère linguistique est moins spécifique que le caractère numérique.

Une variable linguistique x est généralement caractérisée par un triplet $\{x, T(x), X\}$ où x désigne le nom de la variable, X son univers de discours, et $T(x)$ son ensemble de termes ou valeurs linguistiques. Dans notre cas, l'univers de discours X est toujours un sous-ensemble des réels.

Par exemple, si l'erreur est considérée comme variable linguistique définie dans le domaine $X = [-10; 10]$, ses valeurs linguistiques peuvent être définies comme suit:

$$T(\text{erreur}) = \{ \text{Négative Grande (NG)}, \text{Négative Petite (NP)}, \text{Environ Zéro (EZ)}, \\ \text{Positive Petite (PP)}, \text{Positive Grande (PG)} \}$$

Ces valeurs linguistiques peuvent être considérées comme des ensembles flous dont les fonctions d'appartenance sont montrées en Figure 1.3.

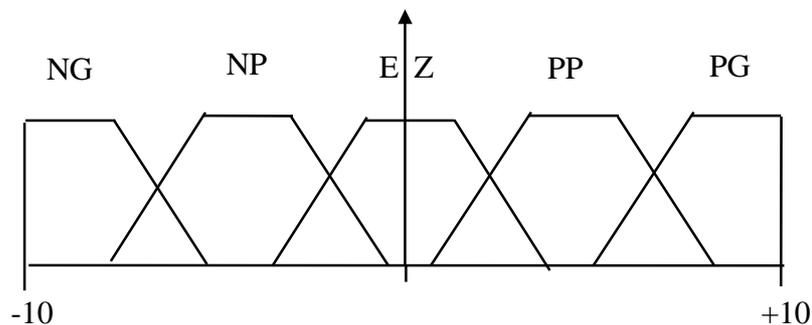


Figure 1.3. Fonctions d'appartenance de $T(\text{erreur}) = \{NG, NP, EZ, PP, PG\}$.

1.2.5 Opérations sur les ensembles flous

La représentation formelle des ensembles flous par des fonctions d'appartenance a permis de généraliser les opérateurs des ensembles classiques au cas flou.

Soit A et B deux ensembles flous définis dans l'univers de discours X par les fonctions d'appartenance $m_A(x)$ et $m_B(x)$ respectivement.

Egalité floue. Deux ensembles flous A et B sont égaux ($A = B$) si et seulement si

$$\forall x \in X : m_A(x) = m_B(x) \quad (1.5)$$

Sous-ensemble flou. A est un sous ensemble de B ($A \subseteq B$) si et seulement si

$$\forall x \in X : m_A(x) \leq m_B(x) \quad (1.6)$$

Complémentation floue. Le complément \bar{A} de l'ensemble flou A est défini par la fonction d'appartenance:

$$\forall x \in X : m_{\bar{A}}(x) = 1 - m_A(x) \quad (1.7)$$

Union floue. L'union de deux ensembles flous A et B est un ensemble flou ($A \cup B$) de fonction d'appartenance :

$$\forall x \in X : m_{A \cup B}(x) = m_A(x) \dot{+} m_B(x) \quad (1.8)$$

Le symbole « $\dot{+}$ » représente la co-norme triangulaire [PAS98]. La co-norme triangulaire la plus utilisée dans le domaine de la commande est :

$$m_A(x) \dot{+} m_B(x) = \max(m_A(x), m_B(x)) \quad (1.9)$$

Intersection floue. L'intersection de deux ensembles flous A et B est un ensemble flou ($A \cap B$) de fonction d'appartenance :

$$\forall x \in X : m_{A \cap B}(x) = m_A(x) * m_B(x) \quad (1.10)$$

Le symbole « $*$ » représente la norme triangulaire [PAS98]. Les normes triangulaires les plus utilisées dans le domaine de la commande sont :

$$m_A(x) * m_B(x) = \min(m_A(x), m_B(x)) \quad (1.11)$$

$$m_A(x) * m_B(x) = m_A(x) \times m_B(x) \quad (1.12)$$

Produit cartésien. Si A_1, \dots, A_n sont des ensembles flous respectivement définis sur X_1, \dots, X_n , leur produit cartésien est un ensemble flou, dénoté par $A_1 \times \dots \times A_n$, défini sur le produit $X_1 \times \dots \times X_n$ avec la fonction d'appartenance :

$$m_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = m_{A_1}(x_1) * \dots * m_{A_n}(x_n) \quad (1.13)$$

Relation floue. Une relation floue représente le degré de présence, ou d'absence d'une association entre les éléments de deux ou de plusieurs ensembles flous. Une relation floue d'ordre n est un ensemble flou défini sur $X_1 \times \dots \times X_n$ par l'expression suivante:

$$R_{X_1 \times \dots \times X_n} = \left\{ \left((X_1, \dots, X_n), m_R(x_1, \dots, x_n) \right) / (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \right\} \quad (1.14)$$

Composition des relations floues. Soit R et S deux relations floues définies respectivement dans $X \times Y$ et $Y \times Z$. La composition de R et S est un ensemble flou, symbolisé par $R \circ S$, de fonction d'appartenance:

$$m_{R \circ S}(x, z) = \left\{ (x, z), \sup_{y \in Y} (m_R(x, y) * m(y, z)) \right\} \quad (1.15)$$

1.2.6 Implication floue

L'implication floue est un opérateur qui permet d'évaluer le degré de vérité d'une règle de la forme

Si x est A Alors y est B

à partir des valeurs de la prémisse d'une part, et de celle de la conclusion d'autre part. Ce degré de vérité est évalué à partir des degrés d'appartenance de x à A et de y à B comme suit :

$$m_R(x, y) = \text{imp}(m_A(x), m_B(y)) \quad (1.16)$$

Les opérateurs les plus utilisés en commande floue sont les implications de Mamdani et de Larsen :

- Implication de Mamdani : $m_R(x, y) = \min(m_A(x), m_B(y))$ (1.17)

- Implication de Larsen : $m_R(x, y) = m_A(x) \times m_B(y)$ (1.18)

1.2.7 Raisonnement flou

On rappelle qu'en logique classique le modus ponens permet, à partir de la règle « *Si x est A alors y est B* » et du fait « *x est A* », de conclure le fait « *y est B* », qui sera ajouté à la base des faits. Zadeh a étendu ce principe au cas flou, principe que l'on appelle alors modus ponens généralisé [WAN94, PAS98]. Le modus ponens et le modus ponens généralisé se résument comme suit :

	Modus Ponens	Modus Ponens généralisé
Fait	<i>x est A</i>	<i>x est A'</i>
Règle	<i>Si x est A Alors y est B</i>	<i>Si x est A Alors y est B</i>
Déduction	<i>y est B</i>	<i>y est B'</i>

A partir de la règle « *Si A alors B* » et du fait « *A'* », on déduit un nouveau fait « *B'* » qui est caractérisé par un ensemble flou dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$m_{B'}(y) = \sup_x (m_{A'}(x) * m_R(x, y)) \quad (1.19)$$

Les fonctions d'appartenance $m_{A'}(x)$ et $m_R(x, y)$ caractérisent respectivement le fait « A' » et la règle.

1.3 Structure d'un système flou

Un système flou peut être interprété selon deux points de vue : mathématique ou logique. D'un point de vue mathématique, un système flou est une fonction non linéaire reliant un vecteur de données d'entrée à un vecteur de sortie et, de point de vue logique, un système flou est un système à base de connaissance particulière composé de quatre modules principaux, à savoir : la base de règles, la fuzzification, le moteur d'inférence et la défuzzification (Figure 1.4) [BUH94, WAN94, JAN95, MEN95, HEN97, LAB98] :

- **Base de règles :** La base de règles floues, ou base de connaissances, contient les règles floues décrivant le comportement du système; elle est le cœur du système entier dans le sens où tous les autres composants sont utilisés pour interpréter et combiner ces règles pour former le système final. Ces règles peuvent être fournies par un expert ou peuvent être extraites de données numériques. Dans les deux cas, les règles prennent la forme « *Si prémisse Alors conclusion* ». D'une manière générale, la base de règles d'un système flou doit respecter les conditions de complétude et de consistance afin d'assurer le bon fonctionnement de ce dernier. Une base de règles d'un système flou est dite complète si, pour chaque vecteur d'entrée, il existe au moins une règle floue activée. Afin d'assurer cette propriété, les fonctions d'appartenance doivent couvrir tout l'espace des variables d'entrée. Une base de règles d'un système flou est dite inconsistante, s'il existe deux règles floues ayant la même prémisse mais des conclusions différentes. La propriété de consistance permet d'éviter les contradictions dans une base de règles.
- **Fuzzification :** La fuzzification transforme la grandeur physique d'entrée en une grandeur floue. On l'utilise pour pouvoir activer les règles qui sont exprimées à l'aide de variables linguistiques associées à des ensembles flous. Dans la littérature de la commande floue, deux approches de fuzzification sont généralement utilisées, à savoir : la fuzzification singleton et la fuzzification non-singleton.

- **Moteur d'inférence** : Le moteur d'inférence flou transforme, à l'aide des techniques de raisonnement flou, la partie floue issue de la fuzzification en une nouvelle partie floue. En fait, le moteur d'inférence combine les règles floues, en utilisant les principes de la logique floue, pour effectuer une transformation à partir des ensembles flous dans l'espace d'entrée vers des ensembles flous dans l'espace de sortie.
- **Défuzzification** : La défuzzification transforme la grandeur floue issue de l'inférence en une grandeur physique. Cependant, il n'existe pas une procédure systématique pour choisir la stratégie de défuzzification. Un critère de choix des méthodes de défuzzification en commande floue est la simplicité des calculs. Ce critère a conduit à l'utilisation, le plus souvent, de la méthode de défuzzification dite la moyenne des centres « center-average ».

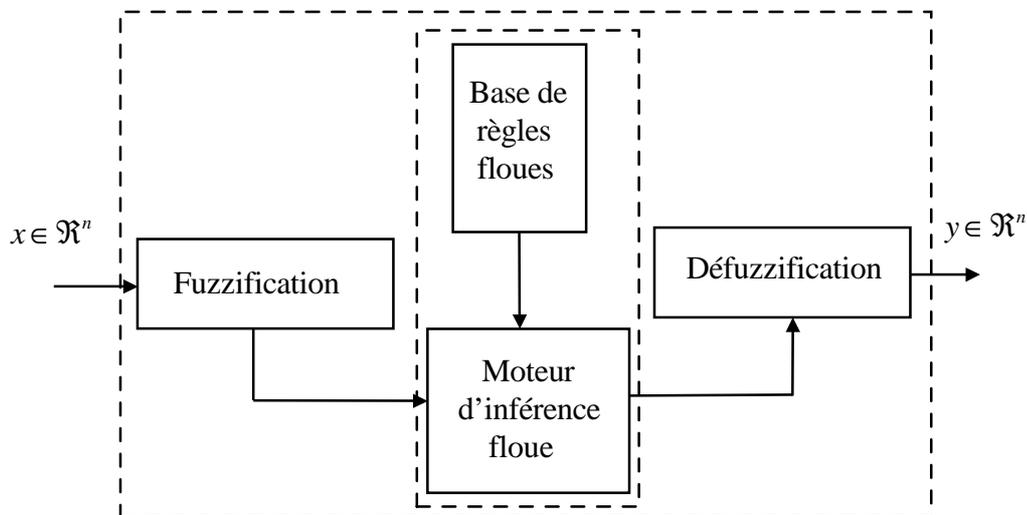


Figure 1.4. Configuration de base d'un système flou.

Il faut noter qu'il existe un grand nombre de possibilités de réalisation de systèmes flous. En effet, pour chaque module constitutif d'un système flou (Figure 1.4), il existe une multitude de choix différents, et chaque combinaison de ces choix engendre une classe de systèmes flous.

1.4 Représentation mathématique des systèmes flous

Dans cette section nous présentons les systèmes flous multi-entrées mono-sorties MISO. Le cas de plusieurs sorties peut être décomposé en un ensemble de sous systèmes MISO. Un système flou MISO permet de représenter une relation non linéaire entre un

ensemble d'entrée, notées $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in X \subseteq \mathfrak{R}^n$, et une sortie $y \in \mathfrak{R}$, avec $X = X_1 \times \dots \times X_n$ et $X_i \in \mathfrak{R}$. Cette relation est décrite par un ensemble de règles floues de la forme suivante [WAN94, LAB03c] :

$$R_k : \text{Si } x_1 \text{ est } \tilde{F}_1^k \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } \tilde{F}_n^k \text{ Alors } y \text{ est } B^k \quad (k = 1, \dots, N)$$

où $\tilde{F}_i^k \in \{F_i^1, \dots, F_i^{m_i}\}$, avec F_i^j , $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, n$, sont des ensembles flous définis sur X_i , B^k des ensembles flous définis dans \mathfrak{R} , et $N = \prod_{i=1}^n m_i$ est le nombre total des règles du système flou, i.e. la base de connaissances comporte toutes les combinaisons possibles des ensembles flous des variables d'entrée.

Si on choisit la fuzzification singleton et on considère le connecteur « et » comme le produit algébrique, le degré de vérité ou d'activation de chaque règle est donné par [WAN94]:

$$m_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n m_{\tilde{F}_i^k}(x_i), \quad m_{\tilde{F}_i^k} \in \{m_{F_i^1}, \dots, m_{F_i^{m_i}}\} \quad (1.20)$$

avec $m_{F_i^j}(x_i)$ la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou F_i^j .

En utilisant la méthode de défuzzification de la moyenne des centres, la sortie finale du système flou est donnée par [WAN94] :

$$y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}) y^k}{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x})} \quad (1.21)$$

avec y^k est le point dans laquelle $m_{B^k}(y)$ atteint sa valeur maximale. Généralement, on suppose que $m_{B^k}(y^k) = 1$.

Il faut noter qu'il existe plusieurs variantes des systèmes flous. Ces variantes résultent de la façon de représentation des opérations flous par les formules mathématiques [WAN94, PAS98].

1.5 Systèmes flous de Takagi-Sugeno

Dans la section précédente, nous avons présenté les systèmes flous à conclusions symboliques appelés systèmes flous standards, dits aussi de Mamdani. Ces systèmes utilisent en effet des conclusions symboliques de même nature que les prémisses et, de ce fait, des connaissances exprimées sous forme analytique décrivant la structure interne du

système ne peuvent pas être prises en compte directement. Sugeno et ces collaborateurs [SUG85], ont proposé une classe de systèmes flous qui permet de représenter ce type d'information. Les systèmes flous de cette classe sont appelés systèmes flous à conclusion fonctionnelle où systèmes flous de Takagi-Sugeno (TS).

Notons par $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ les entrées du système flou, et par y sa sortie. Pour chaque x_i est associé m_i ensembles flous F_i^j dans X_i , tel que pour $x_i \in X_i$, il existe au moins un degré d'appartenance $m_{F_i^j}(x_i) \neq 0$, où $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, m_i$. La base de règles du système flou comporte $N = \prod_{i=1}^n m_i$ règles floues de la forme [LAB03c]:

$$R_k : \text{Si } x_1 \text{ est } \tilde{F}_1^k \text{ et } \dots \text{ et } x_n \text{ est } \tilde{F}_n^k \text{ Alors } y = f_k(\mathbf{x}) \quad (k = 1, \dots, N)$$

où $\tilde{F}_i^k \in \{F_i^1, \dots, F_i^{m_i}\}$ et $f_k(\mathbf{x})$ est une fonction numérique dans l'espace de sortie. En général, $f_k(\mathbf{x})$ est une fonction polynomiale en fonction des variables d'entrées, mais elle peut être aussi une fonction arbitraire tant qu'elle puisse décrire convenablement le comportement du système étudié. Si $f_k(\mathbf{x})$ est une fonction linéaire, i.e.

$$f_k(\mathbf{x}) = a_0^k + \sum_{i=1}^n a_i^k x_i \quad (1.22)$$

alors on a affaire à un système flou de Takagi-Sugeno d'ordre un (TS1). Si par contre, $f_k(\mathbf{x})$ est un polynôme d'ordre zéro, i.e.

$$f_k(\mathbf{x}) = a^k \quad (1.23)$$

on a donc un système flou de Takagi-Sugeno d'ordre zéro (TS0).

Etant donnée que chaque règle possède une conclusion numérique, la sortie totale du système flou est obtenue par le calcul d'une moyenne pondérée, et de cette manière, le temps consommé par la procédure de défuzzification est évité. En fait, la sortie du système flou est donnée par la relation suivante [KOS92, JAN93, WAN94, JAN95] :

$$y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x})} \quad (1.24)$$

avec $m_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n m_{\tilde{F}_i^k}(x_i)$, $\tilde{F}_i^k \in \{F_i^1, \dots, F_i^{m_i}\}$

et qui représente le degré de confiance ou d'activation de la règle R_k .

Dans le cas d'un système flou TS1, la sortie est donnée par

$$y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}) [a_0^k + a_1^k x_1 + \dots + a_n^k x_n]}{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x})} \quad (1.25)$$

et dans le cas d'un système flou TS0, la sortie se simplifie à

$$y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x}) a^k}{\sum_{k=1}^N m_k(\mathbf{x})} \quad (1.26)$$

La Figure 1.5 montre une représentation schématique, sous forme d'un réseau, d'un système flou TS1 à deux entrées et deux ensembles flous pour chaque variable.

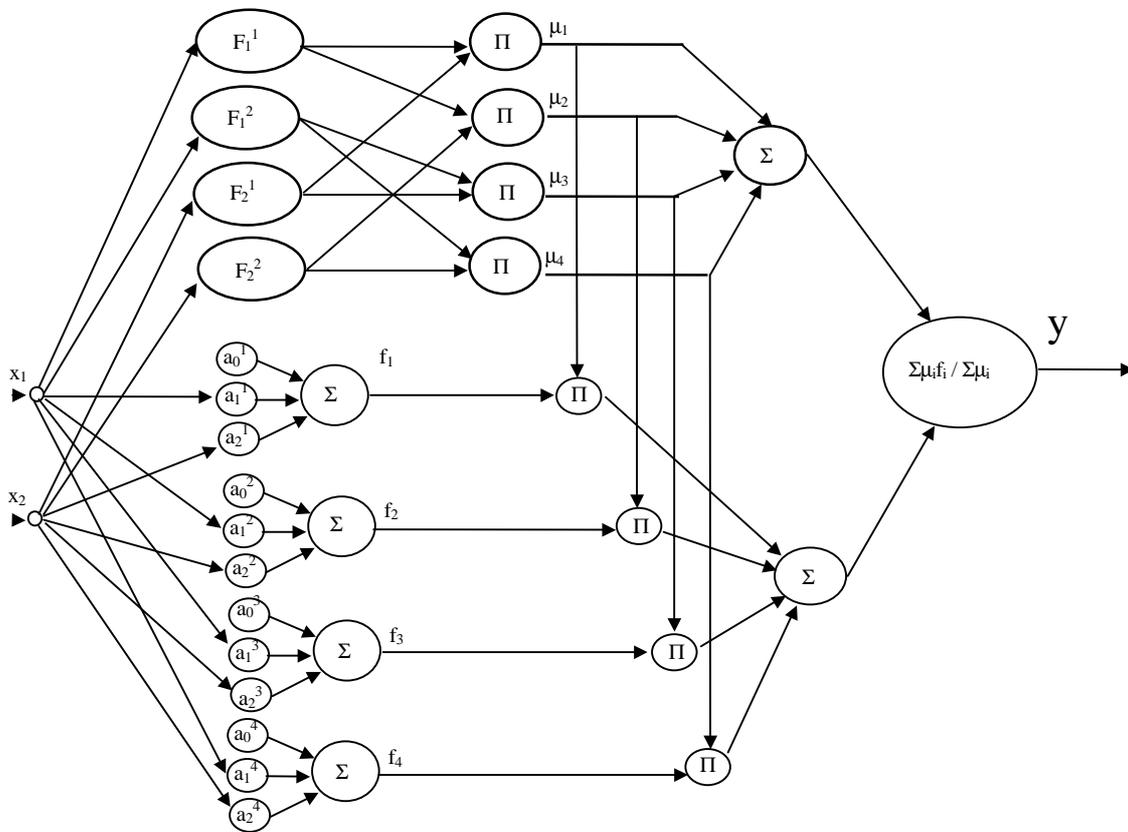


Figure 1.5. Représentation schématique d'un système flou de Takagi-Sugeno d'ordre 1.

Dans cette thèse on limite l'utilisation des systèmes flous à ceux qui seront directement exploités dans les approches de commande développées, à savoir les systèmes flous de Takagi-Sugeno à conclusion constante, i.e. les systèmes flous de Takagi-Sugeno d'ordre zéro. Il est à noter que le système flou TS0 (1.26) est équivalent au système flou de

Mamdani (1.21) utilisant une fuzzification singleton et la méthode de défuzzification du barycentre [WAN94].

En introduisant la notion de fonctions floues de base [WAN94], la sortie du système fou de TS0 (1.26) peut être écrite sous la forme :

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T(\mathbf{x})\mathbf{q} \quad (1.27)$$

avec

- $\mathbf{q} = [a^1 \ \dots \ a^N]^T$: vecteur constitué des paramètres de la partie conclusion des règles floues ;
- $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x}) \ \dots \ w_N(\mathbf{x})]^T$: vecteur des fonctions floues de base, dont chacune des composantes est donnée par :

$$w_k(\mathbf{x}) = \frac{m_k(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{x})}, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.28)$$

Les fonctions d'appartenance qui caractérisent les ensembles flous F_i^j sont choisies, dans cette thèse, des fonctions Gaussiennes définies par :

$$m_{F_i^j}(x_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x_i - c_i^j)}{v_i^j} \right]^2 \right\} \quad (1.29)$$

où c_i^j est la moyenne et v_i^j la variance. Notons que l'utilisation des autres formes pour les fonctions d'appartenance est possible.

1.6 Approximation des fonctions par les systèmes flous

Deux raisons principales amènent à utiliser les systèmes flous comme élément de base des contrôleurs adaptatifs. Premièrement, ce type de systèmes flous a la propriété d'approximateur universel de fonctions continues avec un degré de précision quelconque à condition d'utiliser un nombre suffisant de règles floues. Deuxièmement, les systèmes flous sont construits à partir de règles floues de la forme Si-Alors, de ce fait, les informations linguistiques ou mathématiques disponibles, issues d'une expertise peuvent éventuellement être incorporées dans le contrôleur.

Dans la littérature consacrée aux systèmes flous, on dispose d'un nombre important de publications montrant que les systèmes flous sont des approximateurs universels (voir par exemple [WAN92a, WAN92b, WAN94, JAN95]), c'est-à-dire, pour toute fonction

continue $f(\mathbf{x})$ définie sur un ensemble compact Ω , et pour toute constante positive ϵ , il existe un système flou $y(\mathbf{x})$ de la forme (1.26) tel que :

$$\text{Sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x}) - y(\mathbf{x})| < \epsilon \quad (1.30)$$

Notons, cependant, que la propriété d'approximation universelle ne donne pas une méthode de construction du système flou $y(\mathbf{x})$, elle garantit seulement son existence. De plus, pour un degré de précision quelconque, on a besoin d'un nombre important de règles floues.

Dans cette thèse on suppose que la structure du système flou et les paramètres des fonctions floues de base sont correctement spécifiés par l'utilisateur a priori, alors la propriété d'approximation universelle peut être satisfaite en sélectionnant seulement les paramètres de la partie conclusion. Cela veut dire que la décision de l'utilisateur est nécessaire pour déterminer la structure du système flou (c'est-à-dire, déterminer les entrées pertinentes, le nombre de fonctions d'appartenance pour chaque entrée, les paramètres des fonctions d'appartenance, le nombre de règles) et les paramètres de la conclusion seront calculés en ligne par des algorithmes d'adaptation.

Notons qu'il existe d'autres types d'approximateurs universels tels que les réseaux de neurones multicouches et les réseaux de fonctions à base radiales [WAN94]. Cependant, seuls les systèmes flous peuvent faire usage des connaissances linguistiques d'une manière systématique.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les principes de base des ensembles flous qui sont une généralisation du concept d'ensembles classiques. Contrairement à la fonction caractéristique d'un ensemble net qui prend la valeur 0 ou 1, la fonction d'appartenance d'un ensemble flou prend ses valeurs dans l'intervalle [0, 1].

A partir des ensembles flous, nous pouvons construire des systèmes flous. D'un point de vue mathématique, un système flou définit une relation non linéaire d'un espace d'entrée vers un espace de sortie, et d'un point de vue logique, un système flou est une machine de prise de décision composée de quatre parties essentielles : la fuzzification, la base de règles, le moteur d'inférence et la défuzzification. L'architecture d'un système flou est déterminée par une meilleure compréhension des ensembles flous et des opérateurs

flous. Nous avons constaté qu'il n'existe pas un seul type de système flou, mais il y en a plusieurs. Un utilisateur des systèmes flous doit décider sur la méthode de défuzzification, le type des fonctions d'appartenance, le type des règles floues, la méthode du raisonnement flou et la stratégie de défuzzification. En particulier, nous avons donné les expressions mathématiques des systèmes flous de Mamdani et de Takagi-Sugeno d'ordre 0 et d'ordre 1. Les propriétés d'un système flou sont en grande partie déterminées par ceux des fonctions d'appartenance et des opérateurs flous utilisés.

On a démontré [WAN92a, WAN92b, WAN94] que les systèmes flous sont des approximateurs universels. En fait, ils peuvent approcher n'importe quelle fonction à partir de données numériques. Cependant, ils souffrent du problème d'absence de méthodes systématiques pour choisir la structure optimale du système flou pour résoudre un problème donné. Nous avons montré également que la sortie globale d'un système flou de Takagi-Sugeno d'ordre 0 peut être donnée par une combinaison linéaire de ses fonctions floues de base. Cette propriété permet de faciliter l'étude de la stabilité des stratégies de commande adaptatives qui seront présentées dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Commande adaptative floue des systèmes non linéaires monovariables

2.1 Introduction

La commande d'un système non linéaire est une tâche difficile même quand le modèle dynamique du système est disponible. Ce problème de commande est d'autant plus ardu si le modèle dynamique est inconnu ou mal connu. Les progrès enregistrés ces deux dernières décennies dans la théorie de la commande des systèmes non linéaires ont donné naissance à certaines méthodes systématiques de synthèses de lois de commandes non linéaires. Parmi ces méthodes, on trouve la technique de linéarisation entrée sortie qui permet de faire l'analyse et la synthèse de la commande pour une large classe de systèmes non linéaires [ISI89, SLO91]. Cependant, cette technique ne peut être utilisée que pour les systèmes non linéaires dont le modèle dynamique est connu avec exactitude. Pour pallier ce problème, plusieurs approches de commande adaptative ont été introduites [SAS89a, SAS89b, SLO91, KRS95, KHA96, KOK01]. Dans ces approches, on suppose que le modèle du système non linéaire peut être exprimé sous la forme d'un produit de fonctions non linéaires connues à l'aide de paramètres (constants ou lentement variables) inconnus. Malheureusement, il est parfois difficile d'exprimer un modèle dynamique sous cette forme, notamment pour des systèmes non linéaires complexes.

Pour ce type de systèmes, une autre approche ayant connu un certain succès est la commande floue (voir, par exemple, [WAN94, PAS98, GUE03, PAR03]). Dans le but d'obtenir de meilleures performances, et en se basant sur la propriété d'approximation universelle des systèmes flous, plusieurs schémas de commande floue adaptative ont été proposés pour les systèmes non linéaires. Dans ces schémas adaptatifs, l'étude de la

stabilité est fondée sur l'approche de Lyapunov. On peut distinguer deux approches de commande floue adaptative : l'approche directe et l'approche indirecte. Dans l'approche directe, un système flou est employé pour décrire directement la loi de commande et les paramètres du système flou sont directement ajustés pour atteindre les objectifs de commande. Par contre, Dans l'approche indirecte, des systèmes flous sont utilisés pour estimer la dynamique du système et la loi de commande est obtenue à partir de ces estimées et elle repose sur le principe d'équivalence certaine. Il est à noter que l'approche indirecte permet d'exploiter toutes informations linguistiques concernant le modèle du système, et l'approche directe permet d'exploiter toutes informations linguistiques concernant sa commande [WAN94].

Dans [SU94] et [COM96] les auteurs proposent des lois de commande adaptative indirecte pour une classe de systèmes non linéaires monovariables avec un gain de commande constant. Pour une classe de systèmes non linéaires monovariables avec un gain de commande variable (fonction des variables d'état), des méthodes de commande floue adaptative indirecte sont développées dans [WAN94, SPO96a, BOU98b, CHA00, CHA01, HAN01, KOO01, ELS02, HOJ02, HAN03, LAB03b, LAB03c]. Il est à noter que dans cette approche de commande, il y a le problème de la possibilité de division par zéro et, dans ce cas, la loi de commande n'est pas bien définie. Dans [WAN94, SPO96a, CHA01, LAB03b], pour garantir que la loi de commande est bien définie à tout moment, les auteurs proposent l'utilisation d'un algorithme de projection pour l'adaptation des paramètres des systèmes flous. Cependant, les algorithmes avec projection nécessitent la connaissance de la région où se trouve les paramètres recherchés, et qui n'est pas facile à déterminer en pratique. Dans [KOO01], l'auteur propose l'utilisation d'un mécanisme de réinitialisation des paramètres sans donné de preuve de stabilité de l'algorithme. Par contre, dans les références [SAN92], [TON99] et [HAN01], pour éviter ce problème, les auteurs estiment directement l'inverse du gain de commande. Cependant, cette solution requiert la bornitude de la dérivée du gain de commande par une fonction connue, ce qui restreint l'applicabilité de l'approche. Dans [LAB03c], les auteurs proposent une solution à ce problème via l'approximation de l'inverse du gain de commande estimé. Il faut noter que dans certaines références (voir, par exemple, [CHE96, BOU98b, LEU99, HOJ02]), les auteurs supposent simplement que leurs lois de commande sont bien définies.

En ce qui concerne l'approche directe, pour des systèmes SISO avec un gain de commande constant, des méthodes sont développées dans [WAN92b, WAN94, TAN99,

TSA99], et dans [SPO96a, GAZ00, CHA01, WAN02, LAB03a] pour le cas des systèmes SISO avec un gain de commande variable. Il est à noter que l'approche directe ne pose pas de problème de singularité mais requiert la bornitude de la dérivée du gain de commande par une fonction continue. Cette fonction est supposée connue dans [SPO96a, GAZ00], mais supposée inconnue dans [LAB03a].

Dans la plus part des approches de commande adaptative floue proposées, les erreurs d'approximation sont traitées en utilisant un terme de commande robuste. Ce terme est soit une loi de commande de supervision [WAN92b, WAN94], soit un terme de commande de mode de glissement [SU94, SPO96a, GAZ00, LAB03b] et/ou un terme de commande H^∞ [CHE96, CHA01]. Il est à noter que seule l'utilisation d'un compensateur de type mode glissant permet de garantir la convergence vers zéro des erreurs de poursuite. En fait, une loi de supervision garantit seulement la bornitude des signaux de la boucle fermée, et un compensateur H^∞ peut atténuer l'effet des perturbations externes, en revanche, il ne peut pas atténuer l'effet des erreurs d'approximation d'une manière efficace [KAN98].

Dans ce chapitre, en premier lieu, deux approches de commande adaptative indirectes pour une classe de systèmes non linéaires monovariables utilisant les systèmes flous sont proposées. Les systèmes flous sont utilisés pour estimer en ligne la dynamique du système et la loi de commande est synthétisée en se basant sur ces estimées. Dans ces approches, les lois de commande sont bien définies à tout moment, et le problème des erreurs de reconstruction est traité par l'introduction d'un terme de robustification de type mode glissant. Les lois de commande et les lois d'adaptation sont obtenues en se basant sur des fonctions de Lyapunov candidates.

En second lieu, une approche de commande adaptative directe est développée. Dans cette techniques, les systèmes flous sont utilisés pour approcher une loi de commande idéale stabilisatrice. L'estimation des paramètres dans ce schéma direct suit une loi d'adaptation de type Proportionnel Intégral PI. La stabilité et la robustesse de la structure de commande sont étudiées par l'approche de Lyapunov. Notons que dans cette approche aucun terme de robustification n'est utilisée, et la robustesse de la structure de commande est renforcée par la loi d'adaptation de type PI.

Pour toutes les approches de commande développées, des résultats de simulation effectuée sur un pendule inversé sont données pour montrer les performances de ces approches.

2.2 Commande adaptative indirecte floue

2.2.1 Position du problème

Considérons le système mono-entrée mono-sortie décrit par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

ou, encore

$$y^{(n)} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (2.2)$$

où $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{X}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathfrak{U}$ est l'entrée de commande du système, $y \in \mathfrak{Y}$ est sa sortie, $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ sont des fonctions non linéaires continues incertaines.

L'objectif de la commande consiste à synthétiser une loi de commande assurant la bornitude de tous les signaux du système bouclé et la poursuite pour la sortie $y(t)$ d'une trajectoire de référence $y_d(t)$.

Hypothèse 2.1 : Le gain de commande $g(\mathbf{x})$ est différent de zéro pour tout x et de signe connu. Sans perte de généralité, il est supposé que $g(\mathbf{x}) \geq \underline{g} > 0$ avec \underline{g} une constante donnée.

Hypothèse 2.2 : Le vecteur d'état \mathbf{x} est mesurable.

Hypothèse 2.3 : La trajectoire désirée $y_d(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont connues et bornées.

Définissons l'erreur de poursuite par

$$e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (2.3)$$

et une erreur filtrée par

$$s(t) = \left(\frac{d}{dt} + I \right)^{n-1} e(t), \quad I > 0 \quad (2.4)$$

A partir de l'équation (2.4), on déduit que pour $s(t) = 0$, nous avons une équation différentielle linéaire dont la solution implique la convergence vers zéro de $e(t)$ et de ses

dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ [SLO91]. De plus, la bornitude du signal $s(t)$ par une constante Φ , entraîne la bornitude de l'erreur $e(t)$ et de ses dérivées par [SLO91]:

$$\left| e^{(j)}(t) \right| \leq 2^j I^{j-n+1} \Phi, j = 0, \dots, n-1 \quad (2.5)$$

De ce fait, l'objectif de la commande se simplifie à la synthèse d'un contrôleur garantissant la convergence vers zéro du signal $s(t)$.

La dérivée de (2.4) peut être écrite sous la forme

$$\dot{s} = v - f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})u \quad (2.6)$$

avec

$$v = y_d^{(n)} + a_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{e} \quad (2.7)$$

où

$$a_j = \frac{(n-1)!}{(n-j)! (j-1)!} I^{n-j}, j = 1, \dots, n-1.$$

Si les fonctions $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ sont connues, pour atteindre les objectifs de commande, la loi de commande suivante est une solution :

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x})} (-f(\mathbf{x}) + v + ks) \quad (2.8)$$

avec k une constante positive.

En utilisant (2.8), (2.6) devient

$$\dot{s} = -ks \quad (2.9)$$

ce qui implique que $s(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, et par conséquent [SLO91] $e^{(i)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

La loi de commande (2.8) du système (2.1) peut être facilement implantée si $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ sont parfaitement connues. Ces fonctions étant généralement incertaines, le but est alors de les approcher par des systèmes flous.

2.2.2 Commande adaptative indirecte par les systèmes flous

Dans cette partie, notre tâche est d'utiliser les systèmes flous pour approcher les fonctions non linéaires $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$. A partir des approximations floues, nous

proposons des lois de commande avec leurs lois d'adaptation pour atteindre les objectifs de commande et garantir la bornitude de tous les signaux du système bouclé.

Les systèmes flous de la forme de (1.27) sont utilisés pour identifier en ligne les fonctions $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$. Ces systèmes sont définis comme suit :

$$\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) = \mathbf{w}_f^T(\mathbf{x}) \mathbf{q}_f \quad (2.10)$$

$$\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) = \mathbf{w}_g^T(\mathbf{x}) \mathbf{q}_g \quad (2.11)$$

avec $\mathbf{w}_f(\mathbf{x})$ et $\mathbf{w}_g(\mathbf{x})$ sont des vecteurs de fonctions floues de base supposés convenablement fixés en avance par l'utilisateur, \mathbf{q}_f et \mathbf{q}_g sont les vecteurs de paramètres ajustés.

Les fonctions réelles $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ peuvent être exprimées en fonction des approximations floues de la manière suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f^*) + \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$g(\mathbf{x}) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) + \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

avec $\mathbf{e}_f(\mathbf{x})$ et $\mathbf{e}_g(\mathbf{x})$ représentent les erreurs d'approximation floue, \mathbf{q}_f^* et \mathbf{q}_g^* sont respectivement les paramètres optimaux de \mathbf{q}_f et \mathbf{q}_g , i.e., les valeurs des paramètres \mathbf{q}_f et \mathbf{q}_g minimisant respectivement les erreurs d'approximation $|\mathbf{e}_f(\mathbf{x})|$ et $|\mathbf{e}_g(\mathbf{x})|$. Ces paramètres optimaux satisfont :

$$\mathbf{q}_f^* = \arg \min_{\mathbf{q}_f} \left\{ \sup_{\mathbf{x}} |f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f)| \right\} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{q}_g^* = \arg \min_{\mathbf{q}_g} \left\{ \sup_{\mathbf{x}} |g(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)| \right\} \quad (2.15)$$

Notons que les paramètres optimaux \mathbf{q}_f^* et \mathbf{q}_g^* sont des constantes artificielles inconnues introduites uniquement pour faire l'étude théorique de la stabilité de l'algorithme de commande. En fait, la connaissance de leurs valeurs n'est pas nécessaire pour l'implantation des lois de commande adaptatives.

A partir de l'analyse ci-dessus, on peut écrire :

$$f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) = \mathbf{w}_f^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_f + \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

$$g(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) = \mathbf{w}_g^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_g + \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{q}}_f = \mathbf{q}_f^* - \mathbf{q}_f, \quad \tilde{\mathbf{q}}_g = \mathbf{q}_g^* - \mathbf{q}_g$$

sont les erreurs d'estimation paramétrique.

Hypothèse 2.4 : Les erreurs d'approximation sont bornées, i.e.

$$|e_f(\mathbf{x})| \leq \bar{e}_f, \quad |e_g(\mathbf{x})| \leq \bar{e}_g,$$

où \bar{e}_f et \bar{e}_g sont des constantes positives inconnues.

Cette hypothèse est raisonnable puisque nous supposons que les systèmes flous utilisés pour l'approximation des fonctions inconnues possèdent la propriété d'approximateur universel.

Considérons maintenant la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)} \left(-\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + v + ks \right) \quad (2.18)$$

cette loi de commande résulte de (2.8) en remplaçant les fonctions $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ par leurs approximations floues $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f)$ et $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)$, et elle ne peut garantir à elle seule la stabilité du système bouclé. Ceci est dû, d'une part, à l'existence des erreurs d'approximation et, d'autre part, au fait que cette loi de commande n'est pas défini lorsque $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) = 0$. Pour traiter le problème des erreurs d'approximation, on ajoute un terme de robustification à la loi de commande équivalente, et pour éviter la division par zéro lors du processus d'adaptation des paramètres \mathbf{q}_g , soit on modifie sa loi d'adaptation soit on modifie carrément la loi de commande. Dans ce qui suit, nous montrons comment modifier la loi de commande et/ou les lois d'adaptation pour surmonter ces problèmes.

2.2.2.1 Première approche

Dans cette section, nous proposons la loi de commande suivante :

$$u = u_a + u_r \quad (2.19)$$

La loi de commande (2.19) est la somme de deux termes : un terme de commande adaptative, u_a , utilisé pour compenser les non-linéarités du système, et un terme de robustification, u_r , introduit pour pallier le problème des erreurs d'approximation.

Le terme adaptatif est défini comme suit

$$u_a = \frac{1}{\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)} \left(-\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + v + ks \right) \quad (2.20)$$

et le terme de robustification u_r par

$$u_r = \frac{1}{\underline{g}} (\hat{e}_f + \hat{e}_g |u_a|) \text{sgn}(s) \quad (2.21)$$

avec \hat{e}_f et \hat{e}_g sont, respectivement, les estimées de \bar{e}_f et \bar{e}_g , et $\text{sgn}(s)$ est la fonction signe donnée par :

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} +1, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Notons que la loi de commande (2.20) n'est pas définie lorsque $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) = 0$. Pour éviter ce problème et garantir la bornitude des paramètres ajustés, nous proposons l'utilisation des lois d'adaptation avec projection. Tout d'abord, nous introduisons une hypothèse sur les paramètres optimaux \mathbf{q}_f^* et \mathbf{q}_g^* .

Hypothèse 2.5 : Les paramètres optimaux \mathbf{q}_f^* et \mathbf{q}_g^* sont bornés comme suit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_f^*\| &\leq M_f \\ g_{li} < \mathbf{q}_{gi}^* < g_{ui}, \quad i = 1, \dots, P_g \end{aligned}$$

avec M_f , g_{li} et g_{ui} des paramètres donnés.

Afin d'assurer la bornitude des paramètres estimés \mathbf{q}_f , la loi d'adaptation suivante est choisie [LAB03b]

$$\dot{\mathbf{q}}_f = -\mathbf{h}_f \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) s - \Phi_f \quad (2.23)$$

avec $\mathbf{h}_f > 0$ et Φ_f est définie comme suit :

$$\Phi_f = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mathbf{q}_f\| < M_f \\ \mathbf{h}_f \mathbf{r}_f \frac{|\mathbf{w}_f^T(\mathbf{x}) \mathbf{q}_f s|}{\mathbf{q}_f^T \mathbf{q}_f} \mathbf{q}_f & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.24)$$

avec $\mathbf{r}_f \geq 1$.

De la même manière, pour assurer la bornitude des paramètres estimés \mathbf{q}_g et garantir que $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \neq 0$, la loi d'adaptation choisie est [LAB03b]

$$\dot{\mathbf{q}}_g = -\mathbf{h}_g \mathbf{w}_g(\mathbf{x}) u_a s + \Phi_g \quad (2.25)$$

avec $\mathbf{h}_g > 0$ et Φ_g est donnée par :

$$\Phi_{g_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } g_{li} < q_{gi} < g_{ui} \\ h_g r_g \operatorname{sgn}(\tilde{q}_{gi}) |w_{gi}(\mathbf{x}) u_a s| & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.26)$$

avec $r_g \geq 1$.

Les bornes des erreurs d'approximation sont calculées à partir des lois

$$\dot{\hat{e}}_f = g_f |s| \quad (2.27)$$

$$\dot{\hat{e}}_g = g_g |s u_a| \quad (2.28)$$

avec $g_f > 0, g_g > 0$,

Remarque 2.1 : A partir de la supposition $g(\mathbf{x}) > 0$, et du fait que toutes les fonctions floues de base $w_{gi}(\mathbf{x})$ satisfont $w_{gi}(\mathbf{x}) \geq 0$ et ne s'annulent pas toutes en même temps, le choix $0 < g_{li} < g_{ui}$ permet d'avoir $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) > 0, \forall t$.

Théorème 2.1 : Considérons le système (2.1). Supposons que les hypothèses 2.1-2.5 sont satisfaites. La loi de commande définie par (2.19)-(2.21) avec les lois d'adaptation (2.23)-(2.28) garantit les propriétés suivantes :

- Les paramètres estimés \mathbf{q}_f et \mathbf{q}_g sont bornés et vérifient : $\|\mathbf{q}_f\| \leq M_f$ et $g_{li} \leq q_{gi} \leq g_{ui}$.
- La sortie du système, ses dérivées jusqu'à l'ordre n-1 et le signal de commande sont bornés, i.e. : $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t) \in L_\infty$.
- L'erreur de poursuite et ses dérivées convergent vers zéro, i.e., $e^{(i)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

1

Démonstration : En utilisant (2.19), l'équation (2.6) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v - f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})u_a - g(\mathbf{x})u_r \\ &= v - f(\mathbf{x}) - (g(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f))u_a - \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f)u_a - g(\mathbf{x})u_r \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.20), \dot{s} devient

$$\dot{s} = -ks - (f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f)) - (g(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f))u_a - g(\mathbf{x})u_r \quad (2.29)$$

et avec (2.16) et (2.17) elle devient

$$\dot{s} = -ks - \mathbf{w}_f^T(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{q}}_f - \mathbf{w}_g^T(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{q}}_g u_a - g(\mathbf{x})u_r - \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_g(\mathbf{x})u_a \quad (2.30)$$

Pour démontrer que $\|\mathbf{q}_f\| \leq M_f$, considérons la fonctions candidate suivante

$$V_f = \frac{1}{2} \mathbf{q}_f^T \mathbf{q}_f \quad (2.31)$$

d'où

$$\dot{V}_f = \mathbf{q}_f^T \dot{\mathbf{q}}_f \quad (2.32)$$

En utilisant (2.23), (2.32) devient

$$\dot{V}_f = -\mathbf{h}_f \mathbf{q}_f^T \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) s - \mathbf{q}_f^T \Phi_f \quad (2.33)$$

Dans le pire des cas, lorsque $\|\mathbf{q}_f\| = M_f$, en utilisant (2.24) il vient

$$\dot{V}_f \leq -\mathbf{h}_f (r_f - 1) \|\mathbf{q}_f^T \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) s\| \quad (2.34)$$

et avec $r_f \geq 1$, il vient $\dot{V}_f \leq 0$. On assure donc que $\|\mathbf{q}_f\| \leq M_f$ est toujours vérifiée.

Pour démontrer que les paramètres estimés \mathbf{q}_{gi} vérifient toujours $g_{li} \leq \mathbf{q}_{gi} \leq g_{ui}$, considérons la fonction suivante

$$V_{gi} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{gi}^2 \quad (2.35)$$

d'où :

$$\dot{V}_{gi} = -\tilde{\mathbf{q}}_{gi} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{gi} \quad (2.36)$$

Lorsque \mathbf{q}_{gi} n'est pas entre les bornes prévues, i.e., ne vérifie pas l'inégalité $g_{li} < \mathbf{q}_{gi} < g_{ui}$, en utilisant (2.25) et (2.26), (2.36) devient

$$\dot{V}_{gi} \leq -\mathbf{h}_g (r_g - 1) \|\tilde{\mathbf{q}}_{gi}\| |\mathbf{w}_{gi}(\mathbf{x}) u_a s| \quad (2.37)$$

Puisque $r_g \geq 1$, on a donc $\dot{V}_{gi} \leq 0$ et on peut conclure que $g_{li} \leq \mathbf{q}_{gi} \leq g_{ui}$ est satisfaite.

La bornitude des paramètres estimés ayant été prouvée, pour les autres points du théorème 2.1, on considère la fonction candidate suivante

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\mathbf{h}_f} \tilde{\mathbf{q}}_f^T \tilde{\mathbf{q}}_f + \frac{1}{2\mathbf{h}_g} \tilde{\mathbf{q}}_g^T \tilde{\mathbf{q}}_g + \frac{1}{2\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f^2 + \frac{1}{2\mathbf{g}_g} \tilde{\mathbf{e}}_g^2 \quad (2.38)$$

avec $\tilde{\mathbf{e}}_f = \bar{\mathbf{e}}_f - \hat{\mathbf{e}}_f$ et $\tilde{\mathbf{e}}_g = \bar{\mathbf{e}}_g - \hat{\mathbf{e}}_g$. La dérivée temporelle de V est

$$\dot{V} = s \dot{s} - \frac{1}{\mathbf{h}_f} \tilde{\mathbf{q}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_f - \frac{1}{\mathbf{h}_g} \tilde{\mathbf{q}}_g^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_g - \frac{1}{\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} \tilde{\mathbf{e}}_g \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_g$$

En utilisant (2.30), \dot{V} devient

$$\dot{V} = -k s^2 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (2.39)$$

avec

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -\tilde{\mathbf{q}}_f^T \left(s \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{h_f} \dot{\mathbf{q}}_f \right) - \tilde{\mathbf{q}}_g^T \left(s \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) u_a + \frac{1}{h_g} \dot{\mathbf{q}}_g \right) \\ \dot{V}_2 &= -s g(\mathbf{x}) u_r - s \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - s \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) u_a - \frac{1}{\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} \tilde{\mathbf{e}}_g \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_g\end{aligned}$$

Des lois d'adaptation (2.23) et (2.25), \dot{V}_1 se réduit à

$$\dot{V}_1 = \tilde{\mathbf{q}}_f^T \Phi_f - \tilde{\mathbf{q}}_g^T \Phi_g$$

En utilisant l'Hypothèse 2.4, \dot{V}_2 peut être bornée comme suit

$$\dot{V}_2 \leq -s g(\mathbf{x}) u_r + |s| \bar{\mathbf{e}}_f + |s u_a| \bar{\mathbf{e}}_g - \frac{1}{\mathbf{g}_f} (\bar{\mathbf{e}}_f - \hat{\mathbf{e}}_f) \dot{\hat{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} (\bar{\mathbf{e}}_g - \hat{\mathbf{e}}_g) \dot{\hat{\mathbf{e}}}_g$$

A partir des équations (2.27) et (2.28), \dot{V}_2 devient

$$\dot{V}_2 \leq -s g(\mathbf{x}) u_r + |s| \hat{\mathbf{e}}_f + |s u_a| \hat{\mathbf{e}}_g$$

En utilisant (2.21) et le fait $g(\mathbf{x}) \geq \underline{g} > 0$, il vient

$$\dot{V}_2 \leq -\left(g(\mathbf{x}) / \underline{g} \right) (|s| \hat{\mathbf{e}}_f + |s u_a| \hat{\mathbf{e}}_g) + |s| \hat{\mathbf{e}}_f + |s u_a| \hat{\mathbf{e}}_g \leq 0$$

Des résultats ci-dessus, (2.39) devient

$$\dot{V} \leq -k s^2 + \tilde{\mathbf{q}}_f^T \Phi_f - \tilde{\mathbf{q}}_g^T \Phi_g \quad (2.40)$$

Démontrons que $\tilde{\mathbf{q}}_f^T \Phi_f \leq 0$. Lorsque $\|\mathbf{q}_f\| < M_f$, $\Phi_f = 0$, la conclusion est évidente.

Quand $\|\mathbf{q}_f\| = M_f$, puisque $\|\mathbf{q}_f^*\| \leq M_f$, on a

$$2 \tilde{\mathbf{q}}_f^T \mathbf{q}_f = \|\mathbf{q}_f^*\|^2 - \|\mathbf{q}_f\|^2 - \|\mathbf{q}_f^* - \mathbf{q}_f\|^2 \leq 0 \quad (2.41)$$

d'où :

$$\tilde{\mathbf{q}}_f^T \Phi_f = \tilde{\mathbf{q}}_f^T \mathbf{q}_f \frac{|\mathbf{w}_f^T(\mathbf{x}) \mathbf{q}_f s|}{\mathbf{q}_f^T \mathbf{q}_f} \leq 0 \quad (2.42)$$

De la même manière, on peut démontrer que

$$\tilde{\mathbf{q}}_g^T \Phi_g \geq 0 \quad (2.43)$$

A partir de l'analyse ci-dessus, (2.40) devient :

$$\dot{V} \leq -k s^2 \quad (2.44)$$

Donc, $\dot{V} \leq 0$ et $V \in L_\infty$, ce qui implique la bornitude des signaux : $s(t)$, $\tilde{\mathbf{q}}_f(t)$, $\tilde{\mathbf{q}}_g(t)$, y , \dot{y} , \dots , $y^{(r-1)}$, $u(t)$ et $\dot{s}(t)$. Puisque $V(t)$ est une fonction non croissante en fonction

du temps et bornée inférieurement, la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V(\infty)$ existe. En intégrant (2.44) de 0 à ∞ , on obtient :

$$\int_0^{\infty} s^2(t) dt \leq \frac{V(0) - V(\infty)}{k} < \infty \quad (2.45)$$

et qui implique que $s(t) \in L_2$. Donc $s(t) \in L_2 \cap L_{\infty}$ et $\dot{s}(t) \in L_{\infty}$, et d'après le lemme de Barbalat [SLO91], on conclut que $s(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Par conséquent, l'erreur de poursuite et ses dérivées convergent vers zéro [SLO91], i.e., $e^{(i)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

1

Remarque 2.2 : Le terme de robustification donné par (2.21) peut être lissé par le remplacement de la fonction discontinue $\text{sgn}(s)$ par la fonction continue $\text{sat}(s/\Delta)$ où

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } |x| \leq 1 \\ -1 & \text{si } x < -1 \end{cases} \quad (2.46)$$

et Δ une constante positive arbitrairement petite. Dans ce cas, on ne peut qu'assurer la convergence de l'erreur de poursuite dans un voisinage autour de zéro.

Remarque 2.3 : L'algorithme de projection utilisé est différent de ceux utilisés dans [SPO96, WAN94, CHA01].

2.2.2.2 Deuxième approche

L'approche proposée dans la section précédente résout le problème de la division par zéro dans la loi de commande par l'utilisation d'un algorithme de projection. Cependant, cette algorithme nécessite la connaissance de la région admissible des paramètres estimés q_g , i.e., la région des paramètres où $g(x, q_g) \neq 0$. De plus, cet algorithme est discontinu et nécessite la spécification des valeurs d'un nombre important de paramètres de conception qui sont difficiles à déterminer. Pour ces raisons, nous proposons dans cette section une nouvelle loi de commande bien définie garantissant les objectifs de commande. Cette loi de commande est donnée par

$$u = u_a + u_r \quad (2.47)$$

La loi de commande (2.47) est la somme de deux termes : le terme de commande adaptative u_a , et le terme de robustification u_r .

Le terme adaptatif u_a est donné par [LAB03c]

$$u_a = \frac{\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)}{e_0 + \hat{g}^2(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)} \left(-\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + v + k s + \mathbf{b} \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) s \right) \quad (2.48)$$

avec e_0 est une constante positive petite et $\mathbf{b} > 0$.

Le terme robuste u_r est défini comme suit :

$$u_r = \frac{1}{\underline{g}} \left(\hat{e}_f + \hat{e}_g |u_a| + |\bar{u}| \right) \text{sgn}(s) \quad (2.49)$$

où \hat{e}_f et \hat{e}_g sont les estimés respectifs des bornes \bar{e}_f and \bar{e}_g , et

$$\bar{u} = \frac{e_0}{e_0 + \hat{g}^2(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)} \left(-\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + v + k s + \mathbf{b} \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) s \right) \quad (2.50)$$

L'estimation des paramètres suit les lois d'adaptation suivantes :

$$\dot{\mathbf{q}}_f = -\mathbf{h}_f \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) s \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_g = -\mathbf{h}_g \mathbf{w}_g(\mathbf{x}) s (u_a - \mathbf{b} s) \quad (2.52)$$

$$\dot{\hat{e}}_f = \mathbf{g}_f |s| \quad (2.53)$$

$$\dot{\hat{e}}_g = \mathbf{g}_g |s u_a| \quad (2.54)$$

avec $\mathbf{h}_f > 0$, $\mathbf{h}_g > 0$, $\mathbf{g}_f > 0$, $\mathbf{g}_g > 0$.

Théorème 2.2 : Considérons le système (2.1). Supposons que les hypothèses (2.1-2.4) sont satisfaites. La loi de commande définie par (2.47)-(2.49) avec les lois d'adaptation (2.51)-(2.54) garantit les propriétés suivantes :

- La sortie du système, ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ et le signal de commande sont bornés, i.e. : $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t) \in L_\infty$.
- L'erreur de poursuite et ses dérivées convergent vers zéro, i.e., $e^{(i)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

1

Démonstration : En utilisant les équations (2.47) et (2.48), et la relation

$$\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) u_a = -\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + v + k s + \mathbf{b} \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) s - \bar{u},$$

l'équation dynamique de l'erreur (2.6) peut être réécrite sous la forme

$$\dot{s} = -ks - \mathbf{b} \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) s - \left(f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) \right) - \left(g(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right) u_a - g(\mathbf{x}) u_r + \bar{u} \quad (2.56)$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\mathbf{b} g(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s$, l'équation (2.56) devient

$$\begin{aligned} \dot{s} = & -ks - \mathbf{b} g(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s - \mathbf{w}_f^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_f - \mathbf{w}_g^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_g (u_a - \mathbf{b} s) - g(\mathbf{x}) u_r \\ & + \bar{u} - \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) u_a \end{aligned} \quad (2.57)$$

Considérons maintenant la fonction candidate de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\mathbf{h}_f} \tilde{\mathbf{q}}_f^T \tilde{\mathbf{q}}_f + \frac{1}{2\mathbf{h}_g} \tilde{\mathbf{q}}_g^T \tilde{\mathbf{q}}_g + \frac{1}{2\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f^2 + \frac{1}{2\mathbf{g}_g} \tilde{\mathbf{e}}_g^2 \quad (2.58)$$

dont la dérivée temporelle est

$$\dot{V} = s\dot{s} - \frac{1}{\mathbf{h}_f} \tilde{\mathbf{q}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_f - \frac{1}{\mathbf{h}_g} \tilde{\mathbf{q}}_g^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_g - \frac{1}{\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} \tilde{\mathbf{e}}_g \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_g \quad (2.59)$$

A partir de (2.57), (2.59) devient

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -ks^2 - \mathbf{b} g(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s^2 - s \left\{ \mathbf{w}_f^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_f - \mathbf{w}_g^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_g (u_a - \mathbf{b} s) - g(\mathbf{x}) u_r \right. \\ & \left. + \bar{u} - \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) u_a \right\} - \frac{1}{\mathbf{h}_f} \tilde{\mathbf{q}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_f - \frac{1}{\mathbf{h}_g} \tilde{\mathbf{q}}_g^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_g - \frac{1}{\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} \tilde{\mathbf{e}}_g \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_g \end{aligned} \quad (2.60)$$

A partir de (2.51) et (2.52), on a

$$\mathbf{w}_f^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_f s + \frac{1}{\mathbf{h}_f} \tilde{\mathbf{q}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_f = 0 \quad (2.61)$$

$$\mathbf{w}_g^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_g s (u_a - \mathbf{b} s) + \frac{1}{\mathbf{h}_g} \tilde{\mathbf{q}}_g^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_g = 0 \quad (2.62)$$

et à partir de (2.53) et (2.54), on peut écrire

$$-s \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - s \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) u_a - \frac{1}{\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} \tilde{\mathbf{e}}_g \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_g \leq \hat{\mathbf{e}}_f |s| + \hat{\mathbf{e}}_g |s u_a| \quad (2.63)$$

D'après l'analyse précédente, on a

$$\dot{V} \leq -ks^2 - \mathbf{b} g(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s^2 - s g(\mathbf{x}) u_r + \bar{u} s + \hat{\mathbf{e}}_f |s| + \hat{\mathbf{e}}_g |s u_a| \quad (2.64)$$

En utilisant (2.49), (2.64) devient

$$\dot{V} \leq -ks^2 - \mathbf{b} g(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s^2 \quad (2.65)$$

Puisqu'on a supposé que $g(\mathbf{x}) \geq \underline{g}$, il est alors raisonnable de supposer que $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) > 0$ et, de ce fait, (2.65) peut être simplifiée à

$$\dot{V} \leq -ks^2 \quad (2.66)$$

ce qui prouve la stabilité de la structure de commande et implique la bornitude des signaux $V(t)$, $s(t)$, $\tilde{q}_f(t)$, $\tilde{q}_g(t)$, $\mathbf{x}(t)$ et $u(t)$. De ce fait, on déduit la bornitude du signal $\dot{s}(t)$. Par application du lemme de Barbalat [SLO91], on peut donc déduire la convergence vers zéro de $s(t)$ et par voie de conséquence la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$.

1

Remarque 2.4 : Pour avoir une loi de commande bien définie même lorsque $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) = 0$, nous avons remplacé $\hat{g}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)$ par $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) / (\mathbf{e}_0 + \hat{g}^2(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g))$.

Remarque 2.5 : Le terme $b \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) s$ dans (2.48), est ajouté pour avoir une nouvelle loi d'adaptation pour les paramètres \mathbf{q}_g (équation (2.52)). En fait, cette loi permet l'initialisation des paramètres \mathbf{q}_g par zéro. Ceci est un avantage, car dans cette approche on a pas besoin de connaissances a priori sur les valeurs optimales de \mathbf{q}_g . Effectivement, on peut remarquer que si $b = 0$ et $\mathbf{q}_g(0) = 0$, on a $u_a = 0$, $\dot{\mathbf{q}}_g = 0$ et $\mathbf{q}_g = 0, \forall t$.

Remarque 2.6 : Dans le cas où la borne \underline{g} est inconnue (voir hypothèse 2.1), au lieu du terme robuste (2.49), on utilise le terme robuste suivant :

$$u_r = (\hat{\mathbf{e}}_f + \hat{\mathbf{e}}_g |u_a| + \hat{\mathbf{e}}_{\bar{u}} |\bar{u}|) \text{sgn}(s)$$

avec $\hat{\mathbf{e}}_{\bar{u}}$ est estimé par

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_{\bar{u}} = \mathbf{g}_{\bar{u}} |s\bar{u}|$$

Ce terme robuste peut être adouci par le remplacement de la fonction signe par une fonction continue de saturation comme dans la première approche (voir remarque 2.2).

2.2.3 Résultats de simulation

Pour illustrer les performances des méthodes de commande proposées, nous considérons la commande en poursuite d'un pendule inversé [WAN94, CHA01]. Son modèle dynamique est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.67)$$

avec :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{g \sin x_1 - (m\ell x_2^2 \cos x_1 \sin x_1)/(m_p + m_c)}{\ell(4/3 - m_p \cos^2 x_1/(m_p + m_c))} \quad (2.68)$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\cos x_1/(m_p + m_c)}{\ell(4/3 - m_p \cos^2 x_1/(m_p + m_c))} \quad (2.69)$$

avec x_1 est la position angulaire du pendule et x_2 sa vitesse angulaire. Notons que les fonctions non linéaires $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ sont supposées inconnues. Dans cet exemple de simulation, les valeurs suivantes sont utilisées : $g = 9,8m/s^2$, $m_c = 1kg$, $m_p = 0,1kg$ et $\ell = 0,5m$. Notre objectif est de forcer la sortie du système à suivre la trajectoire : $y_d(t) = \sin(t)$. Il est à noter que dans les références [WAN94, CHA01], l'amplitude de la sinusoïde de référence est de 0,1 seulement.

Chacune des fonctions (2.68) et (2.69) est représentée par un système flou, et chaque système flou a pour entrée les variables x_1 et x_2 . Bien que $g(\mathbf{x})$ est fonction seulement de x_1 , nous utilisons un système flou avec les entrées x_1 et x_2 car la forme de la fonction est inconnue. Pour chaque variable d'entrée, on définit cinq fonctions d'appartenance Gaussiennes comme suit :

$$\begin{aligned} m_{F_i^1}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i + 1,25}{0,3}\right)^2\right\}, & m_{F_i^2}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i + 0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_i^3}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{0,3}\right)^2\right\}, & m_{F_i^4}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_i^5}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 1,25}{0,3}\right)^2\right\}, & & i = 1, 2. \end{aligned}$$

D'où, chaque système flou a une base de règles de 25 règles.

Première approche

Les paramètres de synthèse sont choisis comme suit : $I = 10$, $k = 5$, $\underline{g} = 0.1$, $h_f = 0.25$, $h_g = 0.25$, $r_f = 1.1$, $r_g = 1.1$, $g_f = 0.001$, $g_g = 0.001$, $g_{li} = 0.1$, $g_{ui} = 5$ et $M_f = 10$. Les conditions initiales choisies sont : $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $q_f(0) = 0$,

$q_g(0) = 0.5$, $\hat{e}_f(0) = 0$ et $\hat{e}_g(0) = 0$. Le terme de robustification lissé (remarque 2.2) est utilisé avec $\Phi = 0.05$.

Les résultats de simulation de $y = x_1$ et $\dot{y} = x_2$ sont donnés respectivement Figures 2.1 et 2.2. Le signal de commande u avec le terme adaptatif u_a sont montrés Figure 2.3. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.

Deuxième approche

Les paramètres de synthèse sont choisis comme suit : $I = 10$, $k = 5$, $b = 20$, $e_0 = 0.1$, $h_f = 0.25$, $h_g = 0.25$, $g_f = 0.001$, $g_g = 0.001$ et $g_u = 0.001$. Les conditions initiales choisies sont : $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $q_f(0) = 0$, $q_g(0) = 0$, $\hat{e}_f(0) = 0$, $\hat{e}_g(0) = 0$ et $\hat{e}_u(0) = 0$. Le terme de robustification donnée dans la remarque 2.6 est utilisé avec $\Phi = 0.05$.

Les résultats de simulation de la position, $y = x_1$, et de la vitesse, $\dot{y} = x_2$, sont donnés respectivement Figures 2.4 et 2.5. Le signal de commande u avec le terme adaptatif u_a sont montrés Figure 2.6. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.

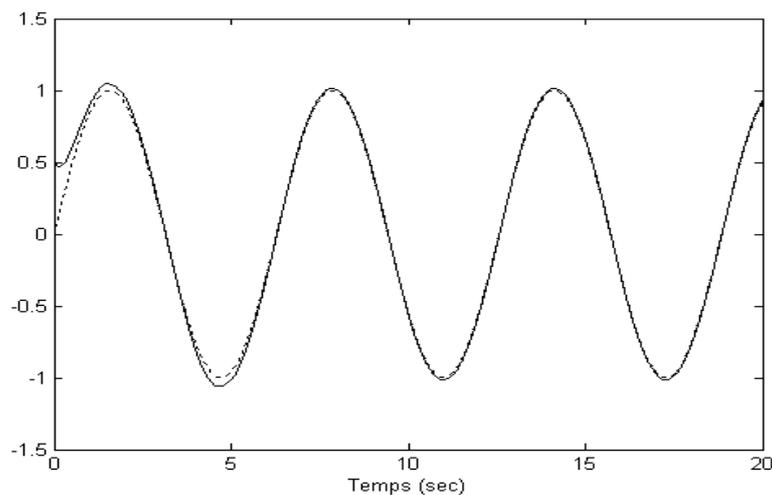


Figure 2.1 : Position du pendule ; réelle (trait continu), consigne (trait discontinu).

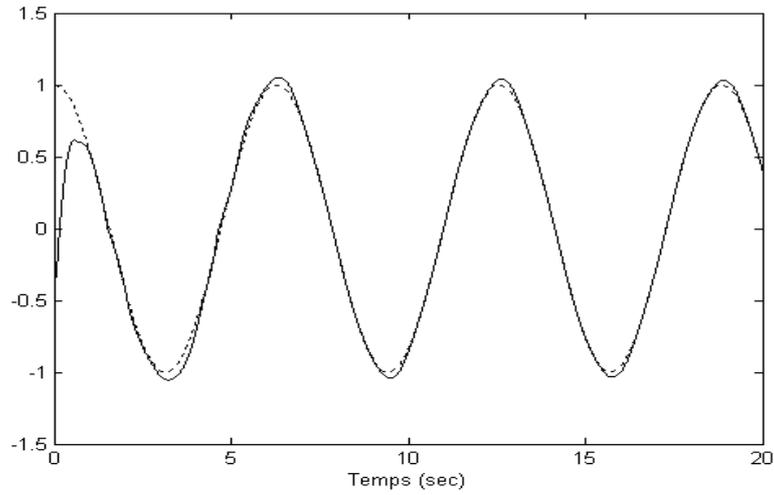


Figure 2.2 : Vitesse du pendule ; réelle (trait continu), consigne (trait discontinu).

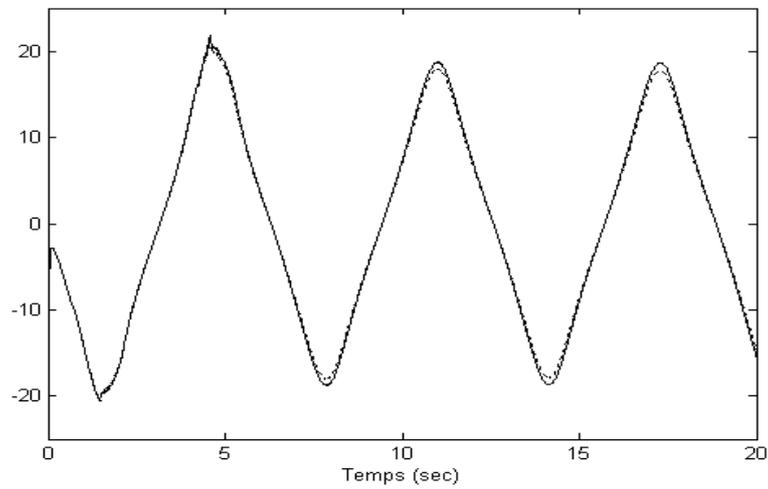


Figure 2.3 : Signaux de commande ; u (trait continu), u_a (trait discontinu).

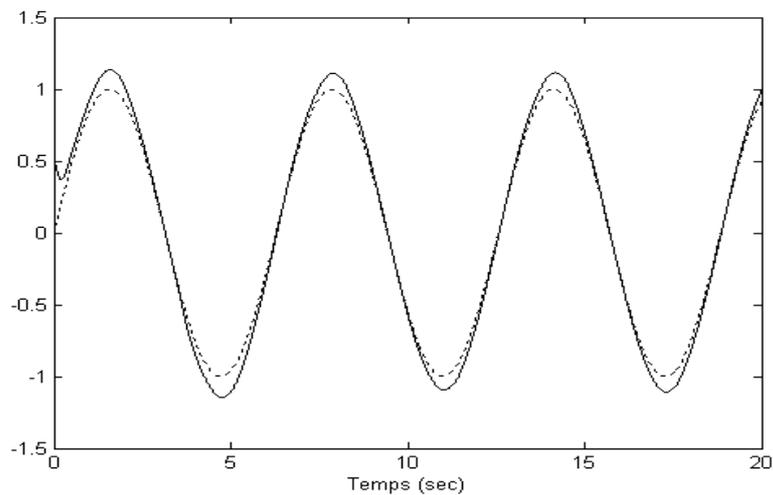


Figure 2.4 : Position du pendule ; réelle (trait continu), consigne (trait discontinu).

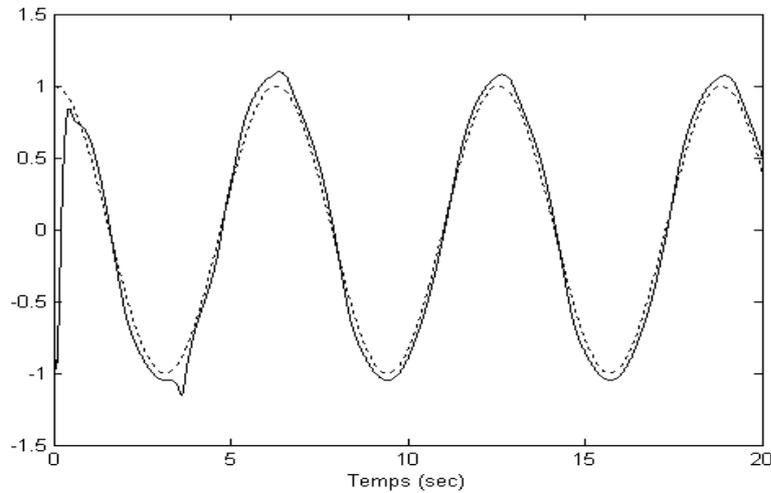


Figure 2.5 : Vitesse du pendule ; réelle (trait continu), consigne (trait discontinu).

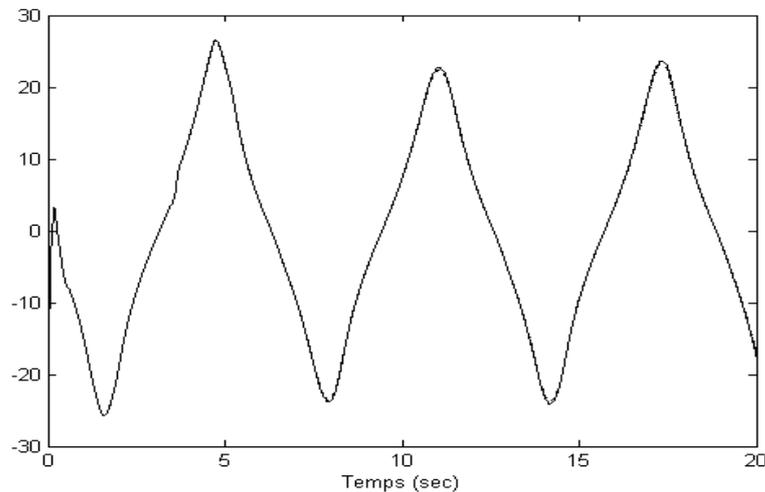


Figure 2.6 : Signaux de commande ; u (trait continu), u_d (trait discontinu).

2.3 Commande adaptative directe floue

2.3.1 Position du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires monovariables donnée par des équations différentielles de la forme (2.1), i.e.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.70)$$

avec $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathfrak{R}$ est l'entrée de commande, $y \in \mathfrak{R}$ est la sortie du système, et les fonctions non linéaires $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ sont supposées des fonctions continues incertaines.

L'objectif de la commande consiste à synthétiser une loi de commande assurant la bornitude de tous les signaux du système bouclé et la poursuite pour la sortie $y(t)$ d'une trajectoire de référence $y_d(t)$.

Les hypothèses suivantes sont nécessaire par la suite.

Hypothèse 2.6 : Le gain de commande $g(\mathbf{x})$ est différent de zéro pour tout \mathbf{x} et de signe connu. Sans perte de généralité, il est supposé que $g(\mathbf{x}) \geq \underline{g} > 0$, avec \underline{g} une constante inconnue.

Hypothèse 2.7 : Il existe une fonction positive continue inconnue $D(\mathbf{x})$ telle que :

$$|\dot{g}(\mathbf{x})| \leq D(\mathbf{x})$$

Hypothèse 2.8 : Le vecteur d'état \mathbf{x} est mesurable.

Hypothèse 2.9 : La trajectoire désirée $y_d(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont connues et bornées.

Définissons l'erreur de poursuite par

$$e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (2.71)$$

et une erreur filtrée par

$$s(t) = \left(\frac{d}{dt} + I \right)^{n-1} e(t), \quad I > 0 \quad (2.72)$$

Il apparaît clairement de (2.72) que l'équation différentielle linéaire $s(t) = 0$ possède la solution unique $e(t) = 0$. De plus, la bornitude de $s(t)$ entraîne la bornitude de $e(t)$.

La dérivée temporelle de (2.72) est

$$\dot{s} = v - f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})u \quad (2.73)$$

avec

$$v = y_d^{(n)} + a_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{e}$$

où a_j est donné par

$$a_j = \frac{(n-1)!}{(n-j)! (j-1)!} I^{n-j}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

Si les fonctions non linéaires $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ et $D(\mathbf{x})$ sont connues, les objectifs de commande peuvent être atteints en choisissant la loi de commande idéale suivante :

$$u = u^* = \frac{(v - f(\mathbf{x}))}{g(\mathbf{x})} + \frac{D(\mathbf{x})}{2g^2(\mathbf{x})}s + ks \quad (2.74)$$

avec $k > 0$.

Effectivement, considérons la fonction candidate suivante

$$V = \frac{1}{2g(\mathbf{x})}s^2 \quad (2.75)$$

dont la dérivée temporelle est

$$\dot{V} = -\frac{\dot{g}(\mathbf{x})}{2g^2(\mathbf{x})}s^2 + \frac{1}{g(\mathbf{x})}s\dot{s} \quad (2.76)$$

Par substitution de (2.74) dans (2.73) il vient

$$\dot{s} = -g(\mathbf{x}) \left(\frac{D(\mathbf{x})}{2g^2(\mathbf{x})} + k \right) s \quad (2.77)$$

En utilisant l'hypothèse 2.7 et (2.77), (2.76) devient

$$\dot{V} \leq -ks^2 \quad (2.78)$$

ce qui implique que $s(t)$ converge vers zéro, et par conséquent $e^{(i)}(t)$, $i = 0, \dots, n-1$, convergent vers zéro [SLO91].

Puisque les fonctions non linéaires $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ et $D(\mathbf{x})$ sont incertaines, l'implantation de la loi de commande idéale (2.74) est impossible. Dans cette situation, notre but est d'approcher cette commande idéale en utilisant les systèmes flous.

2.3.2 Commande adaptative directe par les systèmes flous

Dans cette section, notre objectif est d'approcher la commande idéale (2.74) pour réaliser une poursuite d'une trajectoire de référence donnée. Pour atteindre cet objectif, un système flou est utilisé pour estimer la commande dans son ensemble (approche directe).

Selon la propriété d'approximation universelle des systèmes flous, la commande idéale (2.74) peut être approchée par un système flou de la forme de (1.27) comme suit

$$u^* = ks + \mathbf{w}^T(\mathbf{x})\mathbf{q}^* + e(\mathbf{x}) \quad (2.79)$$

avec $e(\mathbf{x})$ l'erreur d'approximation, $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ est un vecteur de fonctions floues de base supposé convenablement fixé en avance par l'utilisateur, et \mathbf{q}^* est, en quelque sorte, le vecteur des paramètres optimaux minimisant la fonction $|e(\mathbf{x})|$, i.e.

$$\mathbf{q}^* = \arg \min_{\mathbf{q}} \left\{ \sup_{\mathbf{x}} |u^* - ks - \mathbf{w}^T(\mathbf{x})\mathbf{q}| \right\}$$

Nous supposons que l'erreur d'approximation est bornée, tel que

$$|e(\mathbf{x})| \leq \bar{e} \quad (2.80)$$

avec \bar{e} une constante positive inconnue. Notons que la borne \bar{e} dépend des fonctions floues de base choisies, i.e. plus ces fonctions sont convenablement choisies, plus la borne \bar{e} est petite.

Puisque les paramètres optimaux \mathbf{q}^* sont inconnues, il est nécessaire alors de les estimer pour la synthèse du contrôleur. Soit $\hat{\mathbf{q}}$ l'estimer de \mathbf{q}^* et qui sera calculé à partir d'un algorithme d'adaptation. Du fait, l'approximation floue adaptative de la commande idéale est définie par

$$\hat{u} = ks + \mathbf{w}^T(\mathbf{x})\hat{\mathbf{q}} \quad (2.81)$$

Maintenant, considérons la loi de commande suivante :

$$u = \hat{u} = ks + \mathbf{w}^T(\mathbf{x})\hat{\mathbf{q}} \quad (2.82)$$

Dans [SPO96a], les auteurs utilisent des termes robustes pour compenser l'effet de l'erreur d'approximation et garantir la stabilité du système bouclé. En fait, on peut stabiliser un système non linéaire en utilisant seulement ces termes robustes. Ceci soulève la question de la contribution exacte de l'adaptation elle-même par rapport aux termes de robustification. Dans cette approche, une loi l'adaptation paramétrique du type Proportionnel Intégral PI est proposée. Cette forme de loi d'adaptation est utilisée pour garantir la stabilité du système, avoir une erreur de poursuite suffisamment petite, et améliorer la robustesse de la loi de commande en présence d'une grande erreur de la reconstruction sans utilisation de terme robuste. La loi d'adaptation PI est donnée par [LAB03a] :

$$\mathbf{q}(t) = h_1 \int_0^t \mathbf{w}(\mathbf{x}(t)) s_{\Phi}(t) dt + h_2 \frac{\mathbf{w}(\mathbf{x}(t))s(t)}{e_0 + |s(t)|} \quad (2.83)$$

ou encore

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = h_1 \mathbf{w}(\mathbf{x}(t)) s_{\Phi}(t) + \dot{\mathbf{d}}(t) \quad (2.84)$$

avec

$$\mathbf{d}(t) = h_2 \frac{\mathbf{w}(\mathbf{x}(t))s(t)}{e_0 + |s(t)|} \quad (2.85)$$

avec h_1 , h_2 et e_0 sont des constantes positives de conception, et

$$s_\Phi(t) = s(t) - \Phi \operatorname{sat}(s(t)/\Phi) \quad (2.86)$$

où Φ est une constante positive petite et

$$\operatorname{sat}(s(t)/\Phi) = \begin{cases} 1, & \text{si } s(t) > \Phi \\ s(t)/\Phi, & \text{si } |s(t)| \leq \Phi \\ -1, & \text{si } s(t) < -\Phi \end{cases}$$

Le signal $s_\Phi(t)$ a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{s}_\Phi(t) &= s_\Phi(t) = 0 \quad \text{si } |s(t)| \leq \Phi ; \\ \dot{s}_\Phi(t) &= \dot{s}(t), \quad |s_\Phi(t)| = |s(t)| - \Phi \quad \text{si } |s(t)| > \Phi . \end{aligned}$$

La loi de commande (2.82) est synthétisée en se basant sur l'approche de Lyapunov et ses propriétés sont données par le théorème suivant.

Théorème 2.3 : Considérons le système non linéaire (2.70), la loi de commande (2.82) avec sa loi d'adaptation (2.83) ou (2.84). Si les hypothèses 2.6-2.9 sont satisfaites et le gain k satisfait l'inégalité $k\Phi \geq \bar{e}$, alors tous les signaux de la boucle fermée sont bornés et l'erreur de suivi de trajectoire et ses dérivées sont asymptotiquement bornées par : $|e^{(i)}(t)| \leq 2^i I^{i-n+1} \Phi$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

1

Démonstration : A partir de (2.73), $\dot{s}(t)$ est réécrite sous la forme

$$\dot{s} = v - f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(u^* - u) - g(\mathbf{x})u^* \quad (2.87)$$

En utilisant (2.74), (2.87) devient

$$\dot{s} = -g(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{2} g^{-2}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) + k \right) s + g(\mathbf{x})(u^* - u) \quad (2.88)$$

Définissons l'erreur paramétrique par $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^* - \mathbf{q}$, alors à partir de (2.79), (2.81) et (2.82), il vient

$$u^* - u = u^* - \hat{u} = \mathbf{w}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{e}(\mathbf{x}) \quad (2.89)$$

Alors, (2.88) peut être exprimée comme suit

$$\dot{s} = -g(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{2} g^{-2}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) + k \right) s + g(\mathbf{x}) \mathbf{w}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}} + g(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}) \quad (2.90)$$

On considère la fonction candidate suivante

$$V = \frac{1}{2} g^{-1}(\mathbf{x}) s_{\Phi}^2 + \frac{1}{2h_1} (\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{d})^T (\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{d}) \quad (2.91)$$

dont la dérivée temporelle est donnée par

$$\dot{V} = g^{-1}(\mathbf{x}) s_{\Phi} \dot{s}_{\Phi} - \frac{1}{h_1} (\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{d})^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{d}}) - \frac{1}{2} \dot{g}(\mathbf{x}) g^{-2}(\mathbf{x}) s_{\Phi}^2 \quad (2.92)$$

Lorsque $|s| \leq \Phi$, on a $\dot{s}_{\Phi} = 0$ et $s_{\Phi} = 0$, alors en utilisant la loi d'adaptation (2.84), on trouve $\dot{V} = 0$.

Lorsque $|s| > \Phi$, on a $\dot{s}_{\Phi} = \dot{s}$, alors par substitution de (2.90) dans (2.92) on trouve

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \left(k + \frac{1}{2} g^{-2}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) \right) s s_{\Phi} + s_{\Phi} \mathbf{w}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}} + s_{\Phi} \mathbf{e}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \dot{g}(\mathbf{x}) g^{-2}(\mathbf{x}) s_{\Phi}^2 \\ & - \frac{1}{h_1} (\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{d})^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{d}}) \end{aligned} \quad (2.93)$$

En utilisant la loi d'adaptation (2.84) et (2.85) et après simplification, on trouve

$$\dot{V} \leq -k s_{\Phi}^2 - k \Phi |s_{\Phi}| - 0.5 g^{-2}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) \Phi |s_{\Phi}| + \bar{e} |s_{\Phi}| - h_2 \frac{\mathbf{w}^T(\mathbf{x}) \mathbf{w}(\mathbf{x}) s s_{\Phi}}{e_0 + |s|} \quad (2.94)$$

Supposons que $k \Phi \geq \bar{e}$ et utilisant le fait $s s_{\Phi} \geq 0$, (2.94) se simplifie à

$$\dot{V}(t) \leq -k s_{\Phi}^2(t) \quad (2.95)$$

Ce qui démontre que $\dot{V}(t)$ est une fonction définie négative et, ceci, implique la bornitude des signaux $V(t)$, $s_{\Phi}(t)$ et $\tilde{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{d}(t)$ pour tout $t \geq 0$. Du fait que $\mathbf{d}(t)$ est une fonction bornée, on déduit la bornitude de $\tilde{\mathbf{q}}(t)$. Par conséquent, l'état $\mathbf{x}(t)$ et la commande $u(t)$ sont bornés. En utilisant le lemme de Barbalat [SLO91], on peut montrer que $s_{\Phi}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ et, de ce fait, les inégalités $|s(t)| \leq \Phi$ et $|e^{(i)}(t)| \leq 2^i I^{i-n+1} \Phi$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ sont obtenues asymptotiquement.

1

Remarque 2.7 : L'introduction de la fonction $\mathbf{d}(t)$ dans la fonction candidate de Lyapunov (2.91) a permis d'obtenir une loi d'adaptation du type PI pour les paramètres du contrôleur. Cette loi introduit un terme négatif dans la dérivée de la fonction candidate (voir équation (2.94)). Donc, la loi de commande serait plus robuste contre une erreur d'approximation importante. En quelque sorte, la loi d'adaptation type PI « remplace » les termes robustes utilisés dans l'approche directe présentée dans [SPO96a].

Remarque 2.8 : Les paramètres du système flou ne convergent pas vers des constantes mais resteront toujours bornés.

Remarque 2.9 : L'approche de commande directe développée dans [SPO96a] nécessite la connaissance de la borne $D(\mathbf{x})$. Par contre, notre approche suppose seulement l'existence de cette fonction et non sa connaissance.

2.3.3 Résultats de simulation

Pour tester les performances de l'approche de commande adaptative floue développée dans cette section, nous utilisons le pendule inversé donné en section 2.2.4.

On veut que la sortie du système suit la trajectoire désirée $y_d(t) = \sin(t)$. Pour cela, un système flou est utilisé pour produire le signal de commande. Le système flou a comme entrée le vecteur $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$. Pour chaque variable d'entrée on définit cinq fonctions d'appartenance :

$$\begin{aligned} m_{F_i^1}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i + 1,25}{0,3}\right)^2\right\}, \quad m_{F_i^2}(x_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i + 0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_i^3}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{0,3}\right)^2\right\}, \quad m_{F_i^4}(x_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_i^5}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 1,25}{0,3}\right)^2\right\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Les paramètres de conception sont choisis comme suit : $l = 10$, $k = 5$, $h_1 = 5$, $h_2 = 5$, $e_0 = 0.5$ et $\Phi = 0.05$. Les conditions initiales choisies sont : $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$ et $q(0) = 0$.

Les résultats de simulation de $y = x_1$ et $\dot{y} = x_2$ sont donnés respectivement Figure 2.7 et 2.8. Le signal de commande est montré Figure 2.9. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.

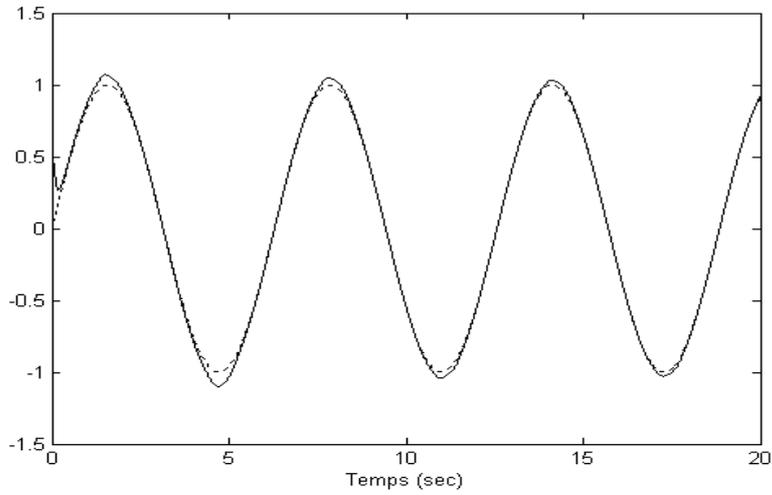


Figure 2.7 : Position du pendule ; réelle (trait continu), consigne (trait discontinu).

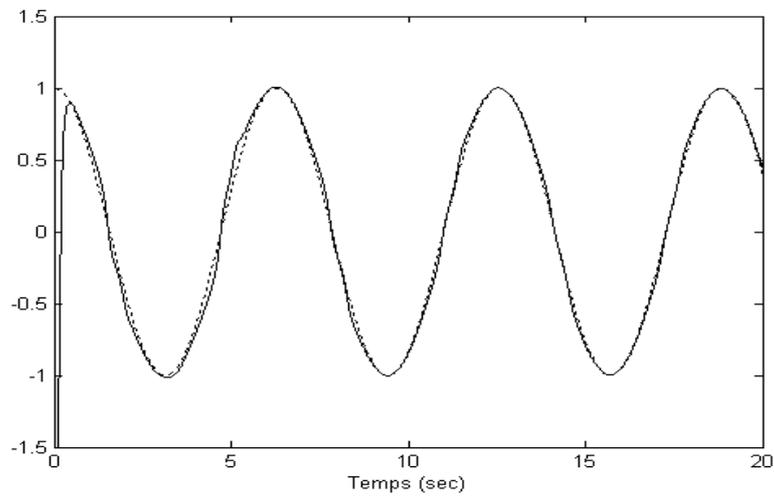


Figure 2.8 : Vitesse du pendule ; réelle (trait continu), consigne (trait discontinu).

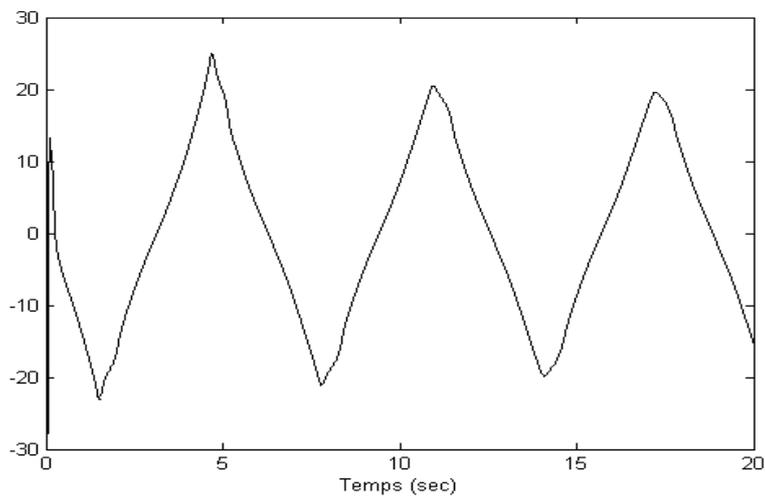


Figure 2.9 : Signal de commande u .

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé et développé les schémas de commande adaptative direct et indirect pour une classe de systèmes non linéaires monovariables en utilisant les systèmes flous.

Dans le schéma indirect, deux approches de commande sont proposées. Dans les deux cas, les systèmes flous sont utilisés pour identifier en ligne la dynamique inconnue du système. Dans chaque approche, à partir des approximations floues, une loi de commande adaptative, avec ces lois d'adaptation paramétrique, augmentée d'un terme de commande robuste est proposée. Le terme robuste de type mode glissant sert à la compensation des erreurs de reconstruction. La première approche indirecte évite le problème de singularité de la loi de commande par l'utilisation d'un algorithme de projection. Ce dernier permet de forcer les paramètres estimés à rester dans une région prédéfinie par l'utilisateur. Cependant, en pratique, la détermination de telle région n'est pas une tâche facile, car, les valeurs des paramètres désirés sont inconnues. Pour pallier à ce problème et réduire le nombre de paramètres de conception, dans la seconde approche, le problème de la singularité de la loi de commande est résolu par l'approximation de l'inverse du gain de commande estimé.

Le second schéma de commande proposé concerne la commande adaptative directe floue. Dans ce schéma, le but n'est pas d'approcher les dynamiques inconnues du système, mais plutôt d'approcher une loi de commande stabilisatrice inconnue, dite commande idéale. Le grand avantage de ce schéma c'est qu'il ne pose pas de problème de division par zéro. Toutefois, il requiert la bornitude de la dérivée du gain de commande par une fonction, condition non exigée pour le schéma indirect. Dans cette technique, une loi d'adaptation de type PI est proposée et l'étude de la stabilité ne dépend pas de la borne de la dérivée du gain de commande.

Les méthodes de commande développées n'exigent pas la connaissance du modèle dynamique du système, garantit la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite. Les résultats de la simulation effectuée sur un pendule inversé montrent les bonnes performances de poursuite de ces méthodes.

Chapitre 3

Commande adaptative floue des systèmes non linéaires multivariables

3.1 Introduction

La commande d'un système non linéaire MIMO est une tâche difficile même quand son modèle dynamique est disponible. Ce problème de commande est d'autant plus ardu si le modèle dynamique est inconnu ou mal connu. Les systèmes flous, avec leur propriété d'approximation universelle, ont été exploités par plusieurs chercheurs pour le développement de contrôleurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires MIMO. Dans ce sens, dans [CHE99, ORD99, CHA00, TON00, CHE03, GOL03, LAB03d, LI03, TON03a], les auteurs proposent des approches indirectes, et dans [ORD99, CHA00, LAB03e, LI03], des approches directes sont proposées.

La classe des systèmes MIMO considérée dans ces publications est de la forme :

$$\mathbf{y}^{(r)} = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u},$$

avec $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^p$ est le vecteur de commande, $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ est le vecteur de sortie, $F(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^p$ et $G(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ sont des fonctions non linéaires incertaines. Dans les approches indirectes, la loi de commande est de la forme :

$$\mathbf{u} = \hat{G}^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{v} - \hat{F}(\mathbf{x})),$$

avec \mathbf{v} est un vecteur des entrées auxiliaires, $\hat{F}(\mathbf{x})$ et $\hat{G}(\mathbf{x})$ sont des estimées, calculées en ligne, des fonctions $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{x})$. Il est évident que cette loi de commande n'est pas définie lorsque la matrice $\hat{G}(\mathbf{x})$ n'est pas inversible. Dans [CHE99, TON00, LI03, TON03a] les auteurs supposent que cette matrice est toujours inversible sans preuve de la validité de cette hypothèse. Dans [ORD99, CHA00,

GOL03], pour garantir que $\hat{G}(\mathbf{x})$ est toujours inversible, les auteurs proposent l'utilisation d'un algorithme de projection. Cependant, ce type d'algorithme complique la loi de commande et nécessite la connaissance de la région admissible des paramètres estimés (c'est-à-dire, la région des paramètres où la matrice $\hat{G}(\mathbf{x})$ est garantie d'être inversible). La détermination d'une telle région n'est pas une affaire triviale, pour cela, les auteurs dans [ORD99, CHA00] citent les cas où la matrice de commande est strictement diagonale dominante ou triangulaire supérieure (inférieure) comme exemples pour lesquels l'implantation d'un algorithme de projection est possible. Dans [CHA00], une autre alternative est présentée pour le cas où $G(\mathbf{x})$ est définie positive. Cependant, la loi de commande proposée est discontinue et exige la connaissance des bornes supérieures des normes des fonctions $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{x})$. Dans [CHE03], les auteurs estiment directement $G^{-1}(\mathbf{x})$ et, de ce fait, il n'y a pas de problème d'inversion matricielle. Néanmoins, l'approche proposée n'est applicable qu'aux systèmes avec une matrice de commande symétrique et définie positive. De plus, la loi de commande exige la bornitude de la norme de la dérivée temporelle de la matrice de commande par une fonction connue. Notons que l'approche développée dans [CHE03] est considérée comme indirecte puisque la loi de commande se calcule à partir d'un modèle estimé du système. Dans [LAB03d], les auteurs présentent, dans le cas où $G(\mathbf{x})$ est définie positive, une solution à l'inversion de la matrice de commande estimée en utilisant un inverse régularisé tout en assurant la convergence vers zéro des erreurs de poursuite.

En ce qui concerne l'approche directe, la commande se calcule directement sans passer par une approximation du modèle inconnu du système [ORD99, CHA00, LAB03e, LI03] et, de ce fait, aucun problème d'inversion matricielle ne se pose. Dans les approches directes présentées dans [CHA00, LI03], la matrice de commande est supposée connue et, de ce fait, ces approches ne peuvent pas être considérées comme de vrais schémas directs. Dans l'approche directe de [ORD99], les auteurs considèrent le cas où la matrice de commande est strictement diagonale dominante et requièrent des bornes connues pour les dérivées temporelles des éléments diagonaux de cette matrice. Dans [LAB03e], une approche directe est proposée pour une classe de système non linéaire MIMO où la matrice de commande n'est pas forcément diagonale dominante et sans connaissance des bornes des dérivées temporelles des éléments diagonaux de cette matrice.

Dans ce chapitre, nous développons des approches de commande adaptative directe et indirecte pour une classe de systèmes non linéaires multivariables utilisant les systèmes flous. Les lois de commande et les lois d'adaptation sont obtenues en se basant sur l'approche de Lyapunov. Les schémas de commande garantissent la stabilité du système global et la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée. Les architectures de commande proposées sont utilisées pour la commande en poursuite d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté.

3.2 Commande adaptative indirecte floue

3.2.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous considérons les systèmes non linéaires multivariables MIMO décrits par les équations différentielles

$$\begin{aligned} y_1^{(r_1)} &= f_1(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p g_{1j}(\mathbf{x})u_j \\ &\vdots \\ y_p^{(r_p)} &= f_p(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p g_{pj}(\mathbf{x})u_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{x} = [y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1-1)}, \dots, y_p, \dot{y}_p, \dots, y_p^{(r_p-1)}]^T$ est le vecteur d'état supposé mesurable, $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_p]^T$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$ est le vecteur de sortie, $f_i(\mathbf{x})$ et $g_{ij}(\mathbf{x})$, $i, j = 1, \dots, p$ sont des fonctions continues incertaines.

Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(r)} &= [y_1^{(r_1)} \quad \dots \quad y_p^{(r_p)}]^T \\ F(\mathbf{x}) &= [f_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_p(\mathbf{x})]^T \\ G(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) & \dots & g_{1p}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(\mathbf{x}) & \dots & g_{pp}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, le système dynamique (3.1) peut être réécrit sous la forme compacte suivante

$$\mathbf{y}^{(r)} = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.2)$$

L'objectif de la commande consiste à synthétiser une loi de commande $\mathbf{u}(t)$ qui assure la bornitude de toutes les variables de la boucle fermée ainsi que le suivi pour les sorties du système $y_1(t), \dots, y_p(t)$ de trajectoires de référence prédéterminées $y_{d1}(t), \dots, y_{dp}(t)$.

Les hypothèses suivantes sont nécessaires dans la suite.

Hypothèse 3.1 : La matrice $G(\mathbf{x})$ est définie positive et satisfait : $G(\mathbf{x}) \geq s_0 \mathbf{I}_p$, avec s_0 est une constante positive donnée.

Hypothèse 3.2 : Chaque trajectoire de référence $y_{di}(t)$, $i=1, \dots, p$, et ses dérivées $\dot{y}_{di}(t), \dots, y_{di}^{(r_i)}(t)$ sont supposées continues, bornées et connues, c'est-à-dire, $y_{di} \in C^{r_i}$.

Notons que l'Hypothèse 3.1 est une condition suffisante pour la commandabilité du système. Du fait, $G(\mathbf{x})$ est toujours inversible et le système (3.1) est linéarisable par retour d'état non linéaire. Bien que cette Hypothèse restreint la classe des systèmes MIMO, plusieurs systèmes physiques, tels que les robots manipulateurs, satisfont cette conditions [SLO91].

Soient $e_1(t), \dots, e_p(t)$ les erreurs de poursuites données par

$$\begin{aligned} e_1(t) &= y_{d1}(t) - y_1(t) \\ &\vdots \\ e_p(t) &= y_{dp}(t) - y_p(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

et $s_1(t), \dots, s_p(t)$ des erreurs filtrées définies comme suit

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \left(\frac{d}{dt} + I_1 \right)^{r_1-1} e_1(t), \quad I_1 > 0 \\ &\vdots \\ s_p(t) &= \left(\frac{d}{dt} + I_p \right)^{r_p-1} e_p(t), \quad I_p > 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

D'après (3.4), il vient que $e_i(t) \rightarrow 0$ quand $s_i(t) \rightarrow 0$ pour $i=1, \dots, p$. Dans ce cas, l'objectif de commande devient la synthèse d'une loi de commande assurant la convergence vers zéro de $s_i(t)$, $i=1, \dots, p$.

Les dérivées temporelles des erreurs filtrées sont données par

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= v_1 - f_1(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p g_{1j}(\mathbf{x})u_j \\ &\vdots \\ \dot{s}_p &= v_p - f_p(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p g_{pj}(\mathbf{x})u_j \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{aligned} v_1 &= y_{d1}^{(r_1)} + \mathbf{b}_{1,r_1-1}e_1^{(r_1-1)} + \dots + \mathbf{b}_{1,1}\dot{e}_1 \\ &\vdots \\ v_p &= y_{dp}^{(r_p)} + \mathbf{b}_{p,r_p-1}e_p^{(r_p-1)} + \dots + \mathbf{b}_{p,1}\dot{e}_p \end{aligned} \quad (3.6)$$

et

$$\mathbf{b}_{i,j} = \frac{(r_i-1)!}{(r_i-j)! (j-1)!} I_i^{r_i-j}, \quad i=1, \dots, p, \quad j=1, \dots, r_i-1$$

En posant

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= [s_1(t) \quad \dots \quad s_p(t)]^T \\ \mathbf{v}(t) &= [v_1(t) \quad \dots \quad v_p(t)]^T \end{aligned}$$

La forme compacte suivante peut être obtenue

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.7)$$

Si le système est parfaitement connu, i.e. les fonctions non linéaires $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ sont connues, pour atteindre les objectifs de commande, on peut utiliser la loi de commande non linéaire suivante

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})(-\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} + \mathbf{K}_0\mathbf{s}) \quad (3.8)$$

avec $\mathbf{K}_0 = \text{diag}[k_{01}, \dots, k_{0p}]$ et $k_{0i} > 0$ pour $i=1, \dots, p$.

Effectivement, par substitution de (3.8) dans (3.7), on obtient

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = -\mathbf{K}_0\mathbf{s}(t) \quad (3.9)$$

ou, encore

$$\dot{s}_i(t) = -k_{0i}s_i(t), \quad i=1, \dots, p \quad (3.10)$$

et qui implique que $s_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Par conséquent, $e_i(t)$ et tous ses dérivées jusqu'à l'ordre r_i-1 convergent vers zéros [SLO91].

Selon l'analyse ci-dessus, la loi de commande non linéaire (3.8) peut être facilement implantée si les fonctions non linéaires $f_i(\mathbf{x})$ et $g_{ij}(\mathbf{x})$ sont connues. Cependant, dans

notre problème, ces fonctions sont supposées incertaines, notre but est alors de les approcher par des systèmes flous.

3.2.2 Commande adaptative indirecte par les systèmes flous

Considérons le système (3.1), dans le cas où les fonctions $f_i(\mathbf{x})$ et $g_{ij}(\mathbf{x})$ sont connues avec exactitude, la loi de commande (3.8) peut garantir les objectifs de commande. Cependant, puisque ces fonctions sont incertaines dans notre problème, on ne peut pas les utiliser pour la construction de cette loi de commande. Pour cette raison, nous proposons dans cette section l'utilisation des systèmes flous pour l'approximation des fonctions inconnues, et se basant sur ces approximations, nous développons une loi de commande adaptative bien définie avec ses lois d'adaptation paramétrique afin de garantir les objectifs de commande.

Les fonctions non linéaires $f_i(\mathbf{x})$ et $g_{ij}(\mathbf{x})$ sont approchées par des systèmes flous de la forme (1.27) comme suit

$$\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{fi}) = \mathbf{w}_{fi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{q}_{fi}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.11)$$

$$\hat{g}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{gij}) = \mathbf{w}_{gij}^T(\mathbf{x}) \mathbf{q}_{gij}, \quad i, j = 1, \dots, p \quad (3.12)$$

avec $\mathbf{w}_{fi}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{w}_{gij}(\mathbf{x})$ sont des vecteurs de fonctions floues de base fixés par l'utilisateur, \mathbf{q}_{fi} et \mathbf{q}_{gij} sont les vecteurs des paramètres ajustés.

Soient

$$\mathbf{q}_{fi}^* = \arg \min_{\mathbf{q}_{fi}} \left\{ \sup_{\mathbf{x}} |f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{fi})| \right\} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{q}_{gij}^* = \arg \min_{\mathbf{q}_{gij}} \left\{ \sup_{\mathbf{x}} |g_{ij}(\mathbf{x}) - \hat{g}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{gij})| \right\} \quad (3.14)$$

les paramètres optimaux de \mathbf{q}_{fi} et \mathbf{q}_{gij} . Notons que les paramètres \mathbf{q}_{fi}^* et \mathbf{q}_{gij}^* sont des constantes artificielles introduites uniquement pour faire l'étude théorique, et la connaissance de leurs valeurs n'est pas nécessaire pour l'implantation de la loi de commande. Notons par

$$\tilde{\mathbf{q}}_{fi} = \mathbf{q}_{fi}^* - \mathbf{q}_{fi}, \quad \tilde{\mathbf{q}}_{gij} = \mathbf{q}_{gij}^* - \mathbf{q}_{gij}$$

les erreurs d'estimation paramétrique, et par

$$\mathbf{e}_{fi}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{fi}^*) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{e}_{gij}(\mathbf{x}) = g_{ij}(\mathbf{x}) - \hat{g}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{gij}^*) \quad (3.16)$$

les erreurs d'approximation minimales réalisables, et qui correspondent aux erreurs d'approximation obtenues lorsque les paramètres optimaux sont utilisés. Dans cette section, nous supposons que les systèmes flous utilisés sont convenablement choisis de sorte que la propriété d'approximation universelle n'est pas violée. Alors, il est raisonnable de supposer que les erreurs d'approximation sont bornées, i.e.

$$|\mathbf{e}_{fi}(\mathbf{x})| \leq \bar{e}_{fi}, \quad |\mathbf{e}_{gij}(\mathbf{x})| \leq \bar{e}_{gij},$$

où \bar{e}_{fi} et \bar{e}_{gij} sont des constantes positives inconnues.

Posons

$$\begin{aligned} \hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) &= \left[\hat{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{f1}) \quad \dots \quad \hat{f}_p(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{fp}) \right]^T \\ \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) &= \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{g11}) & \dots & \hat{g}_{1p}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{g1p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_{p1}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{gp1}) & \dots & \hat{g}_{pp}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_{gpp}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) &= \left[\mathbf{e}_{f1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \mathbf{e}_{fp}(\mathbf{x}) \right]^T \\ \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{g11}(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{e}_{g1p}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{gp1}(\mathbf{x}) & \dots & \mathbf{e}_{gpp}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{e}}_f &= \left[\bar{e}_{f1} \quad \dots \quad \bar{e}_{fp} \right]^T \\ \bar{\mathbf{e}}_g &= \begin{bmatrix} \bar{e}_{g11} & \dots & \bar{e}_{g1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{e}_{gp1} & \dots & \bar{e}_{gpp} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'après l'analyse précédente, il vient

$$F(\mathbf{x}) - \hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) = \hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f^*) - \hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

$$G(\mathbf{x}) - \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) = \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) - \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) + \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

Maintenant, considérons la loi de commande, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c$, où \mathbf{u}_c est une loi de commande équivalente [WAN94] donnée par

$$\mathbf{u}_c = \hat{G}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \left(-\hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + \mathbf{v} + K_0 \mathbf{s} \right) \quad (3.19)$$

cette loi de commande est obtenue à partir de (3.8) en substituant les fonctions réelles $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{x})$ par leurs approximations floues $\hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f)$ et $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)$.

La loi de commande (3.19) n'est pas définie lorsque la matrice $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)$ n'est pas inversible. Puisque cette matrice est générée en ligne via l'estimation des paramètres \mathbf{q}_g , l'implantation de ce contrôleur nécessite des précautions particulières afin de maintenir les paramètres \mathbf{q}_g dans une région où $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)$ est inversible.

Pour éviter ce problème, la loi de commande équivalente est modifiée comme suit

$$\mathbf{u}_c = \hat{G}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \left[e_0 I_p + \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \hat{G}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right]^{-1} \left(-\hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + \mathbf{v} + K_0 \mathbf{s} \right) \quad (3.20)$$

avec e_0 une constante positive petite.

Dans la loi de commande (3.20), nous avons remplacé $\hat{G}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)$ par l'inverse régularisé

$$\hat{G}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \left[e_0 I_p + \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \hat{G}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right]^{-1} \quad (3.21)$$

En effet, l'inverse régularisé (3.21) est toujours défini même lorsque $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g)$ n'est pas inversible et, de ce fait, la loi de commande (3.20) est toujours bien définie.

Notons que même si la loi de commande (3.21) est bien définie, elle ne peut à elle seule garantir la stabilité du système bouclé. Ceci est dû, d'un côté, aux erreurs introduites par l'approximation des fonctions réelles $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{x})$ par des systèmes flous et, d'un autre côté, à l'erreur introduite par l'utilisation de l'inverse régularisé à la place de l'inverse matriciel. Pour ces raisons et afin d'avoir une loi de commande ne dépendant d'aucune phase d'initialisation nous proposons la loi de commande

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_r \quad (3.22)$$

cette loi de commande est la somme de deux termes : un terme de commande, \mathbf{u}_c , représentant en quelque sorte une loi de commande équivalente, et un terme de commande robuste, \mathbf{u}_r , introduit pour pallier au problème des erreurs de reconstruction.

Le terme de commande, \mathbf{u}_c , est donné par

$$\mathbf{u}_c = \hat{G}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \left[e_0 I_p + \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \hat{G}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right]^{-1} \left(-\hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + \mathbf{v} + K_0 \mathbf{s} + k_1 \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \mathbf{s} \right) \quad (3.23)$$

et le terme de commande robuste est donné par

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{s} \|\mathbf{s}^T\| \left(\hat{\mathbf{e}}_f + \hat{\mathbf{e}}_g \|\mathbf{u}_c\| + \|\mathbf{u}_0\| \right)}{\mathbf{s}_0 \|\mathbf{s}\|^2 + d} \quad (3.24)$$

avec

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{e}_0 \left[\mathbf{e}_0 \mathbf{I}_p + \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \hat{\mathbf{G}}^T(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right]^{-1} \left(-\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) + \mathbf{v} + K_0 \mathbf{s} + k_1 \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \mathbf{s} \right) \quad (3.25)$$

et , $\hat{\mathbf{e}}_f$ et $\hat{\mathbf{e}}_g$ sont respectivement les estimés de $\bar{\mathbf{e}}_f$ et $\bar{\mathbf{e}}_g$, $k_1 > 0$, et d un paramètre variant dans le temps défini ci-dessous.

Pour atteindre les objectifs de commande, nous définissons les lois d'adaptation des paramètres comme suit

$$\dot{\mathbf{q}}_{f_i} = -\mathbf{h}_{f_i} \mathbf{w}_{f_i}(\mathbf{x}) s_i \quad (3.26)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{g_{ij}} = -\mathbf{h}_{g_{ij}} \mathbf{w}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) s_i (u_{c_j} - k_1 s_j) \quad (3.27)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_f = \mathbf{g}_f \|\mathbf{s}\| \quad (3.28)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_g = \mathbf{g}_g \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{u}_c^T\| \quad (3.29)$$

$$\dot{d} = -\mathbf{h}_0 \frac{\|\mathbf{s}^T\| \left(\hat{\mathbf{e}}_f + \hat{\mathbf{e}}_g \|\mathbf{u}_c\| + \|\mathbf{u}_0\| \right)}{\mathbf{s}_0 \|\mathbf{s}\|^2 + d} \quad (3.30)$$

$\mathbf{h}_{f_i} > 0$, $\mathbf{h}_{g_{ij}} > 0$, $\mathbf{g}_f > 0$, $\mathbf{g}_g > 0$, $\mathbf{h}_0 > 0$ et $d(0) > 0$.

Théorème 3.1 : Considérons le système non linéaire (3.1), et supposons que les hypothèses 3.1 et 3.2 sont satisfaites. Alors la loi de commande définie par les équations (3.22)-(3.25) avec les lois d'adaptation (3.26)-(3.30) appliquée au système (3.1) garantit la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée et la convergence vers zéro des erreurs de poursuite, i.e., $e_i^{(j)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 1, \dots, p$ et $j = 0, 1, \dots, r_i - 1$.

1

Démonstration : A partir de (3.7) et (3.22), il vient

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \left(\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right) \mathbf{u}_c - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \mathbf{u}_c - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r \quad (3.31)$$

Par substitution de (3.23) dans (3.31), on trouve

$$\dot{\mathbf{s}} = -K_0 \mathbf{s} - k_1 \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \mathbf{s} - \left(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) \right) - \left(\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right) \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_0 - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r \quad (3.32)$$

En utilisant (3.17) et (3.18), (3.32) devient

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} = & -K_0 \mathbf{s} - k_1 \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \mathbf{s} - \left(\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f^*) - \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) \right) - \left(\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right) \mathbf{u}_c \\ & - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_0 - \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) \mathbf{u}_c \end{aligned} \quad (3.33)$$

En ajoutant et en retranchant $k_1 \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s$ de (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{s} = & -K_0 s - k_1 \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s - \left(\hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f^*) - \hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_f) \right) \\ & - \left(\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) - \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) \right) (\mathbf{u}_c - k_1 s) - G(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_0 - \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) \mathbf{u}_c \end{aligned} \quad (3.34)$$

Multipliant (3.34) par s^T , il résulte

$$\begin{aligned} s^T \dot{s} = & -s^T K_0 s - \sum_{i=1}^p \mathbf{w}_{fi}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_{fi} s_i - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathbf{w}_{gij}^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{q}}_{gij} s_i (u_{cj} - k_1 s_j) \\ & - s^T k_1 \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s - s^T G(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r + s^T \mathbf{u}_0 - s^T \mathbf{e}_f(\mathbf{x}) - s^T \mathbf{e}_g(\mathbf{x}) \mathbf{u}_c \end{aligned} \quad (3.35)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} s^T s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{h_{fi}} \tilde{\mathbf{q}}_{fi}^T \tilde{\mathbf{q}}_{fi} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{1}{h_{gij}} \tilde{\mathbf{q}}_{gij}^T \tilde{\mathbf{q}}_{gij} \\ & + \frac{1}{2 \mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f^T \tilde{\mathbf{e}}_f + \frac{1}{2 \mathbf{g}_g} \text{tr}(\tilde{\mathbf{e}}_g^T \tilde{\mathbf{e}}_g) + \frac{1}{2 h_0} d^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec $\tilde{\mathbf{e}}_f = \bar{\mathbf{e}}_f - \hat{\mathbf{e}}_f$, $\tilde{\mathbf{e}}_g = \bar{\mathbf{e}}_g - \hat{\mathbf{e}}_g$.

La dérivée de V est

$$\dot{V} = s^T \dot{s} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{h_{fi}} \tilde{\mathbf{q}}_{fi}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{fi} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{1}{h_{gij}} \tilde{\mathbf{q}}_{gij}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{gij} - \frac{1}{\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} \text{tr}(\tilde{\mathbf{e}}_g^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_g) + \frac{1}{h_0} d \dot{d} \quad (3.37)$$

A partir de (3.35), \dot{V} peut être bornée comme suit

$$\dot{V} \leq -s^T K_0 s - k_1 s^T \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (3.38)$$

avec

$$\dot{V}_1 = - \sum_{i=1}^p \tilde{\mathbf{q}}_{fi}^T \left(\mathbf{w}_{fi}(\mathbf{x}) s_i + \frac{1}{h_{fi}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{fi} \right) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \tilde{\mathbf{q}}_{gij}^T \left(\mathbf{w}_{gij}(\mathbf{x}) s_i (u_{cj} - k_1 s_j) + \frac{1}{h_{gij}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{gij} \right) \quad (3.39)$$

$$\dot{V}_2 = -s^T G(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r + |s^T| |\mathbf{u}_0| + |s^T| |\bar{\mathbf{e}}_f| + |s^T| |\bar{\mathbf{e}}_g| |\mathbf{u}_c| - \frac{1}{\mathbf{g}_f} \tilde{\mathbf{e}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_f - \frac{1}{\mathbf{g}_g} \text{tr}(\tilde{\mathbf{e}}_g^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_g) + \frac{1}{h_0} d \dot{d} \quad (3.40)$$

Les lois d'adaptation (3.26) et (3.27) donnent

$$\dot{V}_1 = 0 \quad (3.41)$$

De (3.24), (3.25), (3.28), (3.29) et (3.30), il résulte

$$\dot{V}_2 \leq 0 \quad (3.42)$$

Des résultats ci-dessus, (3.38) peut être bornée par

$$\dot{V} \leq -s^T K_0 s - k_1 s^T \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*) s \quad (3.43)$$

A partir de l'hypothèse 1, $G(\mathbf{x})$ est une matrice définie positive, alors il est raisonnable de supposer que sa meilleure approximation $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g^*)$ est, au moins, semi-définie positive et, de ce fait, (3.43) peut être simplifiée à

$$\dot{V} \leq -s^T K_0 s \quad (3.44)$$

ce qui implique la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée et la convergence vers zéro de toutes les erreurs de poursuite.

1

Remarque 3.1 : L'implantation de la loi de commande (3.23) est rendue indépendante de toutes phases d'initialisation par l'introduction du terme $k_1 \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_g) s$. Cette modification a permis d'obtenir une nouvelle loi d'adaptation pour les paramètres q_{gij} (voir équation (3.27)) et, cette nouveauté est marquée par la présence du paramètre $k_1 s_j$. En effet, si on choisit $q_{gij}(0) = 0$ et $k_1 = 0$, le terme u_c va rester toujours égal à zéro, mais le choix $k_1 > 0$ permet d'éviter ce problème. Ceci montre que notre approche permet l'initialisation par zéro de q_g contrairement aux approches présentées dans [ORD99, CHA00, TON00, LI03, TON03a].

Remarque 3.2 : Les connaissances a priori sur le système devrait être bien exploitées dans la synthèse d'une loi de commande. Dans ce sens, puisque la matrice de commande $G(\mathbf{x})$ est supposée définie positive, on peut rajouter un terme de commande linéaire, $u_l = k_2 s$ avec $k_2 > 0$, à la loi (3.22). Par conséquent, la nouvelle loi de commande est

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_r \quad (3.45)$$

Dans ce cas, la dérivée temporelle de la fonction candidate peut être bornée comme suit

$$\dot{V} \leq -s^T K_0 s - k_2 s^T G(\mathbf{x}) s \quad (3.46)$$

et puisque $G(\mathbf{x})$ est définie positive, alors le terme linéaire ajoute un terme négatif à la dérivée de la fonction candidate et, de ce fait, il contribue à l'amélioration des performances et de la robustesse du contrôleur adaptatif.

Remarque 3.3 : Dans cette section, pour développer notre loi de commande adaptative, nous avons supposé que la matrice de commande est définie positive. Bien que cette hypothèse a permis de simplifier la synthèse du contrôleur, elle a limité la classe des systèmes non linéaires concernée. Notons que nos résultats peuvent être étendues aux

systèmes pour lesquels il existe une matrice connue $B(\mathbf{x})$ telle que la matrice $G'(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})B(\mathbf{x})$ est définie positive. Dans ce cas il suffit de choisir une nouvelle entrée \mathbf{u}' définie par: $\mathbf{u} = B(\mathbf{x})\mathbf{u}'$. Par exemple, si $G(\mathbf{x})$ est connue d'être définie négative, on prend $B(\mathbf{x}) = -I_p$, et si $G(\mathbf{x})$ est connue d'être strictement diagonale dominante avec les signes des éléments diagonaux connus, on prend $B(\mathbf{x}) = \text{diag}[\text{sign}(g_{11}(\mathbf{x})), \dots, \text{sign}(g_{pp}(\mathbf{x}))]$. Notons que ce dernier exemple est donné dans [ORD99, CHA00] comme un cas où un algorithme d'adaptation avec projection peut être utilisé pour garantir que la loi de commande est toujours bien définie. Il faut noter que l'utilisation d'un algorithme de projection est compliquée et nécessite au moins la connaissance des bornes et des signes des éléments diagonaux de la matrice $G(\mathbf{x})$.

3.2.3 Résultats de simulation

Pour montrer les performances de la méthode de commande floue adaptative indirecte proposée, cette partie, présente une simulation numérique effectuée sur un modèle dynamique de manipulateur à deux degrés de liberté. Le modèle dynamique du manipulateur est donné par les équations suivantes [SLO91, TON00]:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.47)$$

avec

$$M_{11} = a_1 + 2a_3 \cos(q_2) + 2a_4 \sin(q_2)$$

$$M_{22} = a_2$$

$$M_{21} = M_{12} = a_2 + a_3 \cos(q_2) + a_4 \sin(q_2)$$

$$h = a_3 \sin(q_2) - a_4 \cos(q_2)$$

et

$$a_1 = I_1 + m_1 l_{c1}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2$$

$$a_2 = I_e + m_e l_{ce}^2$$

$$a_3 = m_e l_1 l_{ce} \cos d_e$$

où u_1 et u_2 sont les couples de commande appliqués aux articulations, et les sorties sont les positions articulaires q_1 et q_2 . Dans cette simulation, les valeurs suivantes pour les paramètres sont utilisées

$$m_1 = 1, m_e = 2, l_1 = 1, l_{c1} = 0.5, l_{ce} = 0.6, I_1 = 0.12, I_e = 0.25, d_e = 30^\circ.$$

Posons $\mathbf{y} = [q_1, q_2]^T$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, $\mathbf{x} = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]^T$, et

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = -M^{-1} \begin{pmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$G(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) & g_{12}(\mathbf{x}) \\ g_{21}(\mathbf{x}) & g_{22}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = M^{-1} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

Alors, le modèle dynamique du robot donné par (3.47) peut être réécrit sous la forme entrée-sortie (3.1)

$$\ddot{\mathbf{y}} = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.48)$$

Il est bien connu que la matrice M est définie positive [SLO91] et, de ce fait, le modèle du robot satisfait l'hypothèse 3.1.

L'objectif de commande est de forcer les sorties du système q_1 et q_2 de suivre respectivement les trajectoires sinusoïdales $y_{d1}(t) = \sin(t)$ et $y_{d2}(t) = \sin(t)$.

Dans cette simulation, les fonctions $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{x})$ sont supposées inconnues, i.e. le contrôleur adaptatif ne nécessite pas la connaissance de ces fonctions comme dans le cas de la commande adaptative conventionnelle. En fait, le modèle dynamique est uniquement utilisé pour simuler le comportement du robot.

Etant donnée que les éléments de $F(\mathbf{x})$ et $G(\mathbf{x})$ sont incertaines, deux systèmes flous sont utilisés pour approcher les éléments de $F(\mathbf{x})$, et quatre systèmes flous sont utilisés pour approcher ceux de $G(\mathbf{x})$. Les systèmes flous utilisés pour approcher $F(\mathbf{x})$ ont les variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ comme entrées, et ceux utilisés pour décrire $G(\mathbf{x})$ ont $x_1(t)$ et $x_3(t)$ comme entrées. Pour chaque variable x_i , on définit trois fonctions d'appartenance Gaussiennes :

$$m_{F_i^1}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i+1.25}{0.6}\right)^2\right), m_{F_i^2}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{0.6}\right)^2\right),$$

$$m_{F_i^3}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-1.25}{0.6}\right)^2\right), i = 1, \dots, 4.$$

Le robot est initialement à $\mathbf{x}(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, et les valeurs initiales des paramètres ajustés sont prises égales zéro, i.e., $\mathbf{q}_f(0)=0$ et $\mathbf{q}_g(0)=0$. Les valeurs des paramètres de conception utilisées sont: $I_1=10$, $I_2=10$, $K_0=10I_2$, $k_1=5$, $s_0=0.1$, $e_0=0.1$, $h_{f_i}=0.5$, $h_{g_{ij}}=0.5$, $g_f=0.001$, $g_g=0.001$, $\hat{e}_{f_i}(0)=0$, $\hat{e}_{g_{ij}}(0)=0$, pour $i, j=1,2$, $h_0=0.001$ et $d(0)=1$.

Les résultats de simulation de la première articulation sont montrés Figure 3.1, ceux de la deuxième articulation Figure 3.2, et les signaux de commande sont montrés Figures 3.3 et 3.4. Nous constatons que les signaux de commande sont lisses et que les trajectoires réelles et désirées sont presque superposées. Ces résultats montrent les bonnes performances de commande et l'efficacité de l'approche proposée pour la commande des systèmes non linéaires incertains.

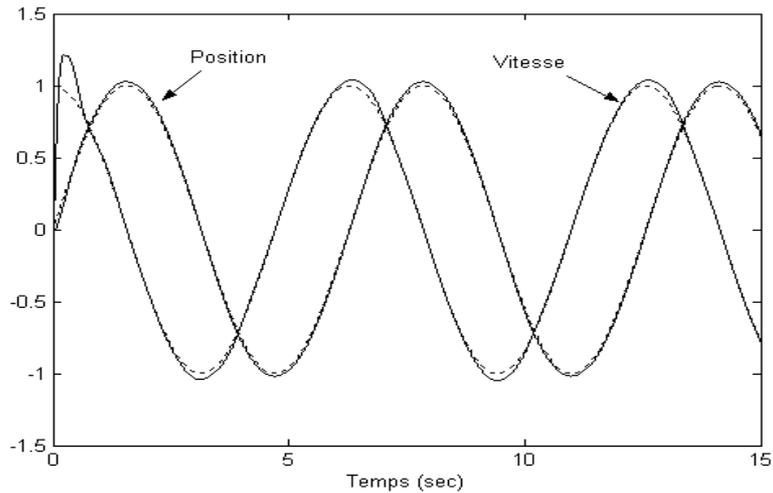


Figure 3.1 : Courbes de poursuite pour la liaison 1 ; sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

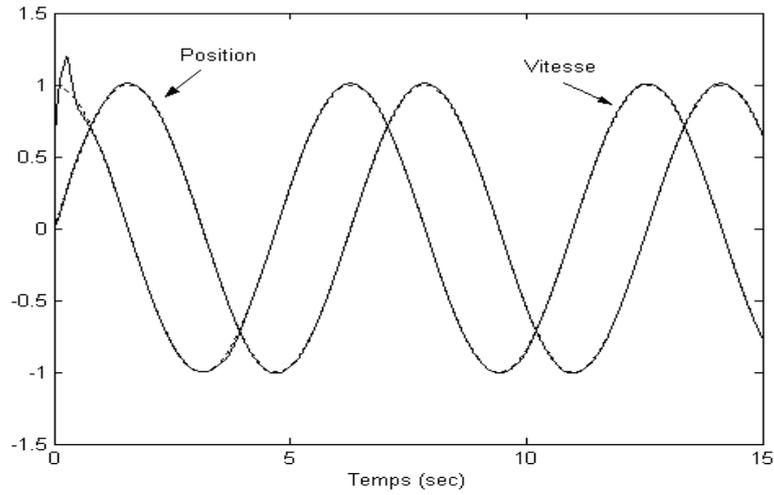


Figure 3.2 : Courbes de poursuite pour la liaison 2 ; sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

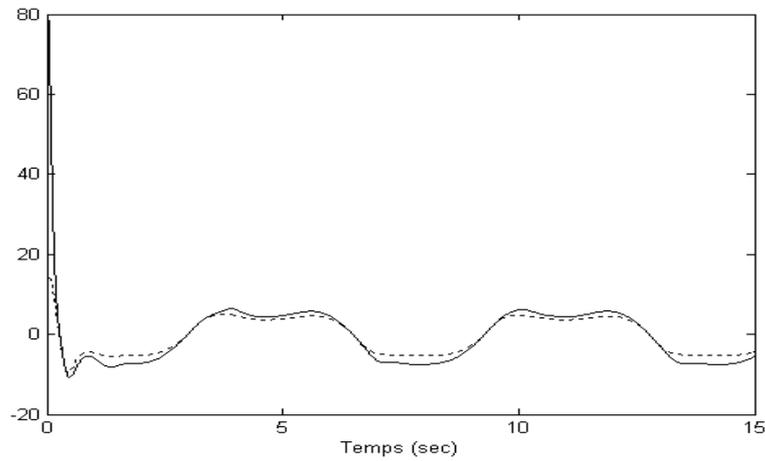


Figure 3.3 : Signaux de commande pour la liaison 1 ; u_1 (trait continu), u_{c1} (trait discontinu).

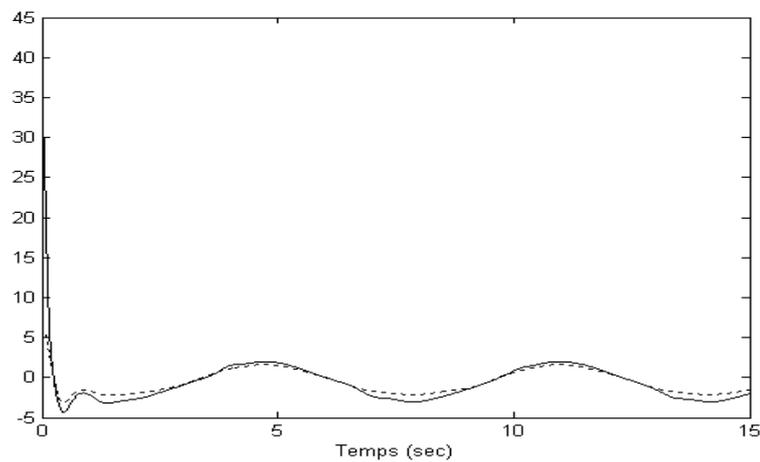


Figure 3.4 : Signaux de commande pour la liaison 2 ; u_2 (trait continu), u_{c2} (trait discontinu).

3.3 Commande adaptative directe floue

3.3.1 Position du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires multivariables décrite par les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} y_1^{(r_1)} &= f_1(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p g_{1j}(\mathbf{x}) u_j \\ &\vdots \\ y_p^{(r_p)} &= f_p(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p g_{pj}(\mathbf{x}) u_j \end{aligned} \quad (3.49)$$

où $\mathbf{x} = [y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(r_1-1)}, \dots, y_p, \dot{y}_p, \dots, y_p^{(r_p-1)}]^T \in \mathfrak{X}^n$ est le vecteur d'état supposé mesurable, avec $n = \sum_{i=1}^p r_i$, $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_p]^T \in \mathfrak{X}^p$ est le vecteur des entrées de commande, $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T \in \mathfrak{X}^p$ est le vecteur de sortie, et $f_i : D \subseteq \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $g_{ij} : D \subseteq \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $i, j = 1, \dots, p$, sont des fonctions non linéaires incertaines de classe C^1 avec D un ensemble compact. Le système (3.49) peut être écrit sous la forme compacte (3.2), i.e.

$$\mathbf{y}^{(r)} = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.50)$$

L'objectif de la commande consiste à synthétiser une loi de commande $\mathbf{u}(t)$ qui assure la bornitude de toutes les variables de la boucle fermée ainsi que le suivi pour les sorties du système $y_1(t), \dots, y_p(t)$ de trajectoires de référence prédéterminées $y_{d1}(t), \dots, y_{dp}(t)$.

Les hypothèses suivantes sont nécessaires dans la suite.

Hypothèse 3.3 : La matrice $G(\mathbf{x})$ est inversible pour tout $\mathbf{x} \in D$.

Hypothèse 3.4 : Dans l'ensemble compact D , chaque élément diagonal $g_{ii}(\mathbf{x})$ est borné, non nul et sa dérivée temporelle est bornée par une fonction positive continue inconnue $d_i(\mathbf{x})$, c'est-à-dire, $0 \leq |\dot{g}_{ii}(\mathbf{x})| \leq d_i(\mathbf{x})$. Du fait que chaque élément $g_{ii}(\mathbf{x})$ est supposé non nul et continu, on déduit donc qu'il est soit strictement positif, soit strictement négatif. Sans perte de généralité, nous supposons que tous les éléments diagonaux sont strictement positifs et signalons que les résultats de ce papier peuvent,

avec peu de modification, s'accommoder au cas où des éléments diagonaux sont strictement négatifs.

Hypothèse 3.5 : Chaque élément, hors de la diagonale, de la matrice $G(\mathbf{x})$ vérifie

$$\left| \frac{g_{ij}(\mathbf{x})}{g_{ii}(\mathbf{x})} \right| \leq \bar{g}_{ij}, \forall \mathbf{x} \in D$$

où \bar{g}_{ij} est une constante positive inconnue.

Hypothèse 3.6 : Chaque trajectoire de référence $y_{di}(t)$, $i=1, \dots, p$, et ses dérivées $\dot{y}_{di}(t), \dots, y_{di}^{(r_i)}(t)$ sont supposées continues, bornées et connues, c'est-à-dire, $y_{di} \in C^{r_i}$.

Remarque 3.4 : Il est à noter que l'hypothèse 3.3 est fréquente dans la littérature de la commande adaptative floue [ORD99, TON99, CHA00, CHE03, LI03]. En fait, cette hypothèse est une condition suffisante de contrôlabilité assurant l'existence d'un retour d'état non linéaire linéarisant pour le système (3.49). De même, L'hypothèse 3.4 est utilisée dans l'approche directe présentée dans [ORD99]. Notons que la supposition que les éléments diagonaux sont bornés est raisonnable. En fait, ces éléments sont supposés continus dans un ensemble compact et, de ce fait, bornés dans cet ensemble.

Posons

$$G_d(\mathbf{x}) = \text{diag} [g_{11}(\mathbf{x}), \dots, g_{pp}(\mathbf{x})]$$

$$D(\mathbf{x}) = \text{diag} [d_1(\mathbf{x}), \dots, d_p(\mathbf{x})]$$

Pour chaque sortie $y_i(t)$, $i=1, \dots, p$, on définit l'erreur de poursuite

$$e_i(t) = y_{di}(t) - y_i(t) \quad (3.51)$$

et l'erreur filtrée

$$s_i(t) = \left(\frac{d}{dt} + I_i \right)^{r_i-1} e_i(t), \quad I_i > 0 \quad (3.52)$$

A partir de l'équation (3.52), on déduit que pour $s_i(t) = 0$, $i=1, \dots, p$, nous avons un ensemble d'équations différentielles linéaires dont les solutions impliquent la convergence vers zéro de $e_i(t)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre r_i-1 . De plus, la bornitude du signal $s_i(t)$ par une constante Φ_i , entraîne la bornitude de l'erreur $e_i(t)$ et de ses dérivées par [SLO91]

$$\left| e_i^{(j)}(t) \right| \leq 2^j I_i^{j-r_i+1} \Phi_i, \quad j=0, \dots, r_i-1 \quad (3.53)$$

De ce fait, l'objectif de la commande se simplifie à la synthèse d'un contrôleur garantissant la convergence vers zéro des signaux $s_i(t)$, $i = 1, \dots, p$.

De l'équation (3.52), il vient

$$\dot{s}_i = v_i - f_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p g_{ij}(\mathbf{x}) u_j \quad (3.54)$$

où v_i est donné par

$$v_i(t) = y_{di}^{(r_i)}(t) + \mathbf{b}_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)}(t) + \dots + \mathbf{b}_{i,1} \dot{e}_i(t) \quad (3.55)$$

avec

$$\mathbf{b}_{i,j} = \frac{(r_i-1)!}{(r_i-j)! (j-1)!} I_i^{r_i-j}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r_i - 1$$

En posant

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= [s_1(t) \quad \dots \quad s_p(t)]^T \\ \mathbf{v}(t) &= [v_1(t) \quad \dots \quad v_p(t)]^T \end{aligned}$$

la forme compacte suivante peut être obtenue

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (3.56)$$

Si les fonctions non linéaires $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ et les bornes $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ sont connues, les objectifs de commande peuvent être atteints en choisissant la loi de commande idéale suivante

$$\mathbf{u}^* = [\mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x})]^{-1} \left(-\mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{v} + \mathbf{K} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{s} \right) \quad (3.57)$$

où $\mathbf{K} = \text{diag}[k_1, \dots, k_p]$, avec $k_i > 0$ pour $i = 1, \dots, p$.

Effectivement, considérons la fonction candidate suivante

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{s} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{g_{ii}(\mathbf{x})} s_i^2 \quad (3.58)$$

Cette fonction est définie positive puisque les éléments $g_{ii}(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, p$, sont supposés bornés et strictement positifs.

Par dérivation de l'équation (3.58), on obtient

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{G}}_d(\mathbf{x}) \mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{G}_d^{-1}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{s}} \quad (3.59)$$

Par substitution de (3.57) dans (3.56), on obtient

$$\dot{s} = -G_d(\mathbf{x}) \left(K s + \frac{1}{2} G_d^{-1}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) G_d^{-1}(\mathbf{x}) s \right) \quad (3.60)$$

En substituant (3.60) dans (3.59), on trouve

$$\dot{V} = -s^T K s - \frac{1}{2} s^T G_d^{-1}(\mathbf{x}) \dot{G}_d(\mathbf{x}) G_d^{-1}(\mathbf{x}) s - \frac{1}{2} s^T G_d^{-1}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) G_d^{-1}(\mathbf{x}) s \quad (3.61)$$

Etant donné que les éléments $g_{ii}(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, p$, sont supposés positifs et de dérivées temporelles bornées par $d_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, p$ (hypothèse 3.4), l'équation (3.61) peut être bornée comme suit :

$$\dot{V} \leq -s^T K s = -\sum_{i=1}^p k_i s_i^2 \quad (3.62)$$

Par conséquent, $V(t)$ est bornée et, de ce fait, $s_i(t)$ l'est aussi. Ceci implique la bornitude de l'erreur $e_i(t)$ et de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $r_i - 1$. A partir de la bornitude des trajectoires de références, on déduit la bornitude du vecteur d'état \mathbf{x} et, par voie de conséquence, la bornitude des signaux $\dot{s}_i(t)$. Pour démontrer la convergence des erreurs de poursuite vers zéro, nous introduisons la fonction $V_1(t)$ définie par

$$V_1(t) = V(t) - \int_0^t \left(\dot{V}(t) + s(t)^T K s(t) \right) dt \quad (3.63)$$

Il est bien clair que $V_1(t) \geq 0$, et par dérivation de $V_1(t)$, on obtient

$$\dot{V}_1(t) = \dot{V}(t) - \dot{V}(t) - s(t)^T K s(t) = -s(t)^T K s(t) \leq 0$$

De plus, $\ddot{V}_1(t) = -2s(t)^T K \dot{s}(t)$, est bornée du fait que $s(t)$ et $\dot{s}(t)$ sont bornées. De ce fait, $\dot{V}_1(t)$, est uniformément continue. Par application du lemme de Barbalat [SLO91], on déduit que $\dot{V}_1(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, ce qui implique que $s_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, et par conséquent [SLO91], l'erreur de poursuite $e_i(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $r_i - 1$ convergent vers zéro.

Dans cette partie, les fonctions non linéaires $F(\mathbf{x})$, $G(\mathbf{x})$ et $D(\mathbf{x})$ sont incertaines et, de ce fait, l'implantation de la loi de commande (3.57) est impossible. Dans ce cas, notre but est d'approcher cette commande idéale en utilisant des systèmes flous.

3.3.2 Commande adaptative directe par les systèmes flous

Rappelons que l'objectif est de pouvoir approcher la commande idéale (3.57) où les fonctions $F(\mathbf{x})$, $G(\mathbf{x})$ et $D(\mathbf{x})$ sont incertaines (mais satisfont les hypothèses 3.3, 3.4 et 3.5), afin de réaliser une poursuite de trajectoires prédéfinies. Pour atteindre cet objectif, les systèmes flous sont utilisés afin d'estimer la commande dans son ensemble (approche directe).

Dans un contexte général, on peut supposer que la loi de commande se décompose en une partie connue \mathbf{u}_k^* , et la partie inconnue à estimer \mathbf{u}_u^* , i.e. la commande idéale (3.57) s'écrit :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_u^*(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{u}_k^*(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3.64)$$

avec $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{s}^T, \mathbf{v}^T]^T$.

Il est à noter que le terme \mathbf{u}_k^* , dans l'équation (3.64), est introduit pour permettre à l'utilisateur d'exploiter toute information mathématique ou linguistique disponible sur la commande du système. Le terme \mathbf{u}_k^* peut, par exemple, correspondre à une expertise préalable, une loi existante issue de l'application des méthodes classiques de commande, une loi issue d'un modèle nominal du système, etc. Notons qu'un choix approprié de ce terme peut aider à l'amélioration des performances du contrôleur. Cependant, l'étude de la stabilité présentée ici ne dépend pas de \mathbf{u}_k^* et, de ce fait, ce terme peut être pris égal à zéro si aucune information préalable n'est disponible sur la manière de commander le système.

Supposons que la partie inconnue \mathbf{u}_u^* est une fonction continue, chacune de ses composantes peut alors être approchée par un système flou, de la façon suivante :

$$u_{ui}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_i) = \mathbf{w}_i^T(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{q}_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.65)$$

avec \mathbf{q}_i est le vecteur des paramètres ajustés et $\mathbf{w}_i(\bar{\mathbf{x}})$ est un vecteur de fonctions floues normalisées de base supposé fixer convenablement par l'utilisateur.

La fonction réelle $u_{ui}^*(\bar{\mathbf{x}})$ peut être exprimée de la façon suivante :

$$u_{ui}^*(\bar{\mathbf{x}}) = u_{ui}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_i^*) + e_i(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3.66)$$

avec $e_i(\bar{\mathbf{x}})$ est l'erreur d'approximation résultant de l'approximation de la partie inconnue par un système flou, et \mathbf{q}_i^* les paramètres optimaux de \mathbf{q}_i , c'est-à-dire, les

valeurs des paramètres q_i minimisant l'erreur $|e_i(\bar{x})|$. Ces paramètres optimaux satisfont

$$q_i^* = \arg \min_{q_i} \left\{ \sup_{\bar{x}} |u_{ui}^*(\bar{x}) - u_{ui}(\bar{x}, q_i)| \right\} \quad (3.67)$$

Notons que les q_i^* sont des constantes artificielles introduites uniquement pour faire l'étude théorique, et leur connaissance n'est pas nécessaire pour l'implantation de la loi de commande.

Posons

$$\begin{aligned} q &= [q_1^T \ \dots \ q_p^T]^T \\ w(\bar{x}) &= \text{diag} [w_1(\bar{x}), \dots, w_p(\bar{x})] \\ e(\bar{x}) &= [e_1(\bar{x}) \ \dots \ e_p(\bar{x})]^T \end{aligned}$$

d'où, on peut écrire

$$u_u(\bar{x}, q) = w^T(\bar{x})q \quad (3.68)$$

$$u_u^*(\bar{x}) - u_u(\bar{x}, q) = w^T(\bar{x})\tilde{q} + e(\bar{x}) \quad (3.69)$$

avec $\tilde{q} = q^* - q$ est l'erreur paramétrique.

Hypothèse 3.7 : L'erreur d'approximation $e(\bar{x})$ est bornée, i.e.,

$$\|e(\bar{x})\| \leq \bar{e},$$

où \bar{e} est une constante positive inconnue.

Hypothèse 3.8 : Les paramètres optimaux q^* sont bornées, i.e.,

$$\|q^*\| \leq M,$$

où M est une constante positive inconnue.

Remarque 3.5 : Du fait que les systèmes flous utilisés dans ce papier pour approcher la commande idéale sont supposés posséder la propriété d'approximation universelle, l'introduction des hypothèses 3.7 et 3.8 est raisonnable. De plus, nous n'exigeons pas, dans l'hypothèse 3.7, que la borne, \bar{e} , soit connue et/ou petite, mais seulement qu'elle soit constante. L'hypothèse 3.8 est peu contraignante puisque les paramètres optimaux sont des constantes et que la borne M n'est pas à être explicitée. Signalons qu'on a tout intérêt à ce que les erreurs d'approximation soient les plus petites possible afin que leur impact sur les performances de commande soit le plus faible possible. Cependant, pour

avoir des erreurs d'approximation petites, un nombre important de fonctions floues de base est nécessaire et, ceci, complique un peu les calculs.

L'approximation de la loi de commande (3.64) s'écrit alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_u(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{q}) + \mathbf{u}_k^*(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3.70)$$

L'estimation des paramètres suit la loi d'adaptation suivante [LAB03e]:

$$\mathbf{q}(t) = \frac{1}{1+h_2h_3} \left\{ h_1 \int_0^t (\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}})s - h_2\mathbf{q}) dt + h_3\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}})s \right\} \quad (3.71)$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = h_1(\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}})s - h_2\mathbf{q}) + \mathbf{j}(t) \quad (3.72)$$

avec

$$\mathbf{j}(t) = h_3(\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}})s - h_2\mathbf{q}) \quad (3.73)$$

et h_1 , h_2 et h_3 des constantes positives choisies par l'utilisateur.

Cette loi d'adaptation est du type « proportionnel intégral à σ -modification ». Cette forme de loi permet de rendre le contrôleur plus robuste et d'éviter le problème « d'explosion des paramètres » estimés. Notons que dans la littérature de la commande adaptative, la loi d'adaptation de type intégral à σ -modification est fréquemment utilisée [POL96].

L'équation (3.56) peut s'écrire comme suit

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v} - F(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})\mathbf{u}^* + G(\mathbf{x})(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \quad (3.74)$$

En utilisant (3.57), l'équation (3.74) devient

$$\dot{\mathbf{s}} = -G_d(\mathbf{x}) \left(K\mathbf{s} + \frac{1}{2}G_d^{-1}(\mathbf{x})D(\mathbf{x})G_d^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{s} \right) + G(\mathbf{x})(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \quad (3.75)$$

A partir des équations (3.64), (3.69) et (3.70), on a

$$\mathbf{u}^* - \mathbf{u} = \mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{e}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3.76)$$

En utilisant (3.76), l'équation (3.75) peut être réécrite sous la forme suivante

$$G_d^{-1}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}} = -K\mathbf{s} - \frac{1}{2}G_d^{-1}(\mathbf{x})D(\mathbf{x})G_d^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{s} + G_d^{-1}(\mathbf{x})G(\mathbf{x})[\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{e}(\bar{\mathbf{x}})] \quad (3.77)$$

ou encore

$$G_d^{-1}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}} = -K\mathbf{s} - \frac{1}{2}G_d^{-1}(\mathbf{x})D(\mathbf{x})G_d^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{s} + \mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{q}} + (G_d^{-1}(\mathbf{x})G(\mathbf{x}) - I_p)\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{q}} + G_d^{-1}(\mathbf{x})G(\mathbf{x})\mathbf{e}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3.78)$$

A partir des Hypothèses 3.5 et 3.7, et en tenant compte du fait que les fonctions floues de base sont toujours bornées, on peut démontrer qu'il existe des constantes positives g_0 et g_1 vérifiant les inégalités suivantes

$$\|G_d^{-1}(\mathbf{x})G(\mathbf{x})\mathbf{e}(\bar{\mathbf{x}})\| \leq g_0 \bar{e} \quad (3.79)$$

$$\|(G_d^{-1}(\mathbf{x})G(\mathbf{x}) - I_p)\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{q}}\| \leq g_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \quad (3.80)$$

Théorème 3.2 : Considérons le système (3.49) et supposons les hypothèses 3.3-3.8 satisfaites. En utilisant la loi de commande définie par (3.68) et (3.70) et la loi d'adaptation donnée par (3.71) (ou (3.72)-(3.73)), tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés.

1

Démonstration : Considérons la fonction candidate suivante :

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T G_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{s} + \frac{1}{2h_1} (\tilde{\mathbf{q}}^T + \mathbf{j}^T) (\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{j}) \quad (3.81)$$

sa dérivée temporelle s'écrit

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T G_d^{-1}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{s}} - \frac{1}{2} \mathbf{s}^T G_d^{-1}(\mathbf{x}) \dot{G}_d(\mathbf{x}) G_d^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{s} - \frac{1}{h_1} \tilde{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{j}}) - \frac{1}{h_1} \mathbf{j}^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{j}}) \quad (3.82)$$

A partir des équations (3.72), (3.78), (3.79) et (3.80), on peut écrire

$$\dot{V} \leq -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} + h_2 \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{q} - \frac{1}{h_1} \mathbf{j}^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{j}}) + g_0 \bar{e} \|\mathbf{s}\| + g_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{s}\| \quad (3.83)$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{q} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{q}^*\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\|^2$$

$$g_0 \|\mathbf{s}\| \bar{e} \leq \frac{g_0}{2} \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{g_0}{2} \bar{e}^2$$

$$g_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{s}\| \leq \frac{g_1}{2} \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{g_1}{2} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2$$

$$\mathbf{j}^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{j}}) = h_1 h_3 \|\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{s} - h_2 \mathbf{q}\|^2$$

l'équation (3.83) devient

$$\dot{V} \leq -\left(k_{\min} - \frac{(g_0 + g_1)}{2}\right) \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{1}{2} (h_2 - g_1) \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + g - h_3 \|\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{s} - h_2 \mathbf{q}\|^2 \quad (3.84)$$

où $k_{\min} = \min(k_1, \dots, k_p)$ et $g = \frac{g_0}{2} \bar{e}^2 + \frac{h_2}{2} \|\mathbf{q}^*\|^2$, et qui peut se réduire à

$$\dot{V} \leq - \left(k_{\min} - \frac{(g_0 + g_1)}{2} \right) \|s\|^2 - \frac{1}{2} (h_2 - g_1) \|\tilde{q}\|^2 + g \quad (3.85)$$

Une manière d'obtenir

$$\dot{V} \leq 0 \quad (3.86)$$

est que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$k_{\min} > (g_0 + g_1)/2 \quad (3.87)$$

$$h_2 > g_1 \quad (3.88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|s\| \geq \sqrt{\frac{2g}{2k_{\min} - g_0 - g_1}} \\ \text{ou} \\ \|\tilde{q}\| \geq \sqrt{\frac{2g}{h_2 - g_1}} \end{array} \right. \quad (3.89)$$

Pour (3.87), notons que k_{\min} peut en théorie toujours être considéré plus grand qu'une constante arbitraire, et pour (3.88) que h_2 est un paramètre de réglage libre.

La fonction candidate V est donc positive et sa dérivée temporelle est une fonction définie négative à l'extérieur d'un ensemble compact. Selon les extensions de la théorie de stabilité de Lyapunov [NAR87], les signaux $s(t)$ et $\tilde{q}(t)$ sont bornés. D'où, on déduit la bornitude des erreurs de poursuite, des états du système, des paramètres estimés et des signaux de commande.

1

Remarque 3.6 : Comparé aux contrôleurs directs développés dans [CHA00, LI03], notre contrôleur ne nécessite pas la connaissance de la matrice de commande $G(\mathbf{x})$. Et comparé aux travaux de [ORD99], notre approche de commande adaptative floue permet de s'affranchir d'un certain nombre d'hypothèses. Effectivement, les hypothèses de [ORD99] suivantes ne sont plus nécessaires :

- connaissance des bornes des erreurs de reconstruction (voir hypothèse 3.7) ;
- connaissance des bornes $d_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, p$ (voir hypothèse 3.4) ;
- chaque élément de la matrice de commande est borné, i.e., $|g_{ij}(\mathbf{x})| \leq \bar{b}_{ij}$ avec \bar{b}_{ij} des constantes positives connues, est remplacé par chaque élément $g_{ij}(\mathbf{x})$ vérifie ; $|g_{ij}(\mathbf{x})/g_{ii}(\mathbf{x})| \leq \bar{g}_{ij}$ avec \bar{g}_{ij} inconnu (voir hypothèse 3.5). Etant donné qu'en général les éléments diagonaux sont les termes prépondérant dans la

matrice de commande, on peut donc attendre à ce que les constantes \bar{g}_{ij} soient petites et, ceci, même si les fonctions $g_{ii}(\mathbf{x})$ et $g_{ij}(\mathbf{x})$ ne sont pas globalement bornées ;

- chaque élément diagonal de la matrice de commande vérifie : $0 < \underline{b}_{ii} \leq g_{ii}(\mathbf{x}) \leq \bar{b}_{ii}$ avec \bar{b}_{ii} et \underline{b}_{ii} des constantes positives connues, est remplacé par chaque élément de la diagonale est positif et borné ;
- La matrice $G(\mathbf{x})$ est strictement diagonale dominante.

3.3.3 Résultats de simulation

Pour montrer les performances de la méthode de commande floue adaptative directe proposée, cette partie, présente une simulation numérique effectuée sur le modèle dynamique de manipulateur donné en section 3.2.3. On peut démontrer que le modèle dynamique du robot satisfait les hypothèses 3.3, 3.4 et 3.5.

Deux systèmes flous, sont utilisés pour générer les commandes u_1 et u_2 . Chaque système flou a comme entrée le vecteur $\bar{\mathbf{x}} = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2 \quad s_1 \quad s_2]^T$. Notons que les variables v_1 et v_2 ne sont pas incluses dans le vecteur d'entrée des systèmes flous, d'une part, pour réduire la taille des systèmes flous et, d'autre part, du fait que ces variables sont fonctions des erreurs de poursuite qui sont incluses dans les signaux s_1 et s_2 . Dans cette simulation, pour chaque variable d'entrée \bar{x}_i , $i = 1, \dots, 6$, on définit trois fonctions d'appartenance Gaussiennes données par :

$$m_{F_i^1}(\bar{x}_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_i + 1,25}{0,6}\right)^2\right), \quad m_{F_i^2}(\bar{x}_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_i}{0,6}\right)^2\right),$$

$$m_{F_i^3}(\bar{x}_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_i - 1,25}{0,6}\right)^2\right).$$

Notons que d'autres choix pour les fonctions d'appartenance sont possibles [JAN93, WAN 94], telles que les fonctions triangulaires. Les valeurs initiales des paramètres des systèmes flous sont prises égales à zéro. Les valeurs des différents paramètres nécessaires à la synthèse de la loi de commande adaptative sont : $I_1 = 10$, $I_2 = 10$, $h_1 = 5$, $h_2 = 0.001$ et $h_3 = 5$. Les trajectoires de référence choisies sont : $y_{d1}(t) = \sin(t)$

et $y_{d2}(t) = \sin(t)$. Le terme \mathbf{u}_k^* n'est pas pris en compte, c'est-à-dire, nous supposons qu'il n'y a pas de connaissance a priori sur la commande du système.

Les Figures 3.5 à 3.7 présentent les résultats de simulation. La Figure 3.5 donne le suivi de trajectoire pour la première liaison, la Figure 3.6 celui de la deuxième, et la Figure 3.7 montre les signaux de commande. On peut constater que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées, et que les signaux de commande ne contiennent pas d'à-coups.

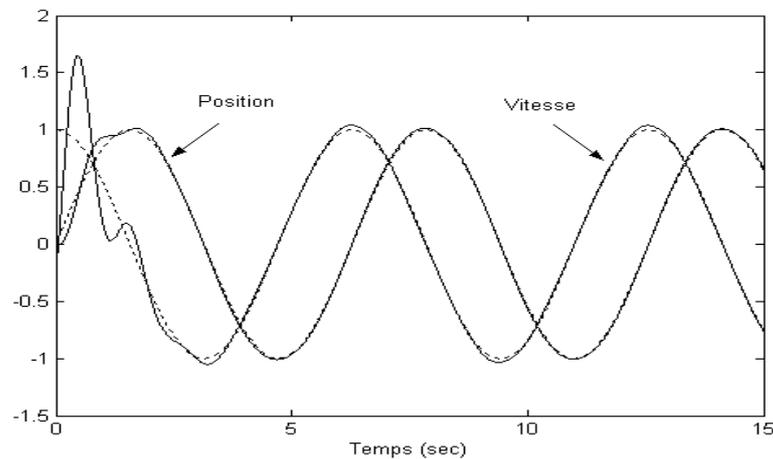


Figure 3.5 : Courbes de poursuite pour la liaison 1 ; sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

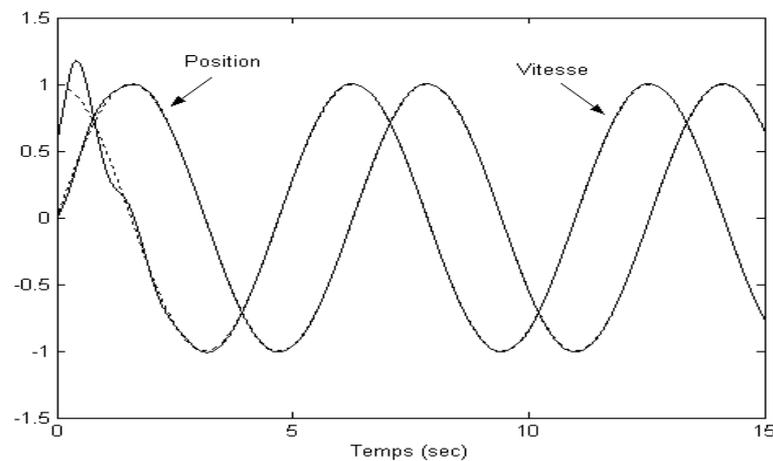


Figure 3.6 : Courbes de poursuite pour la liaison 2 ; sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

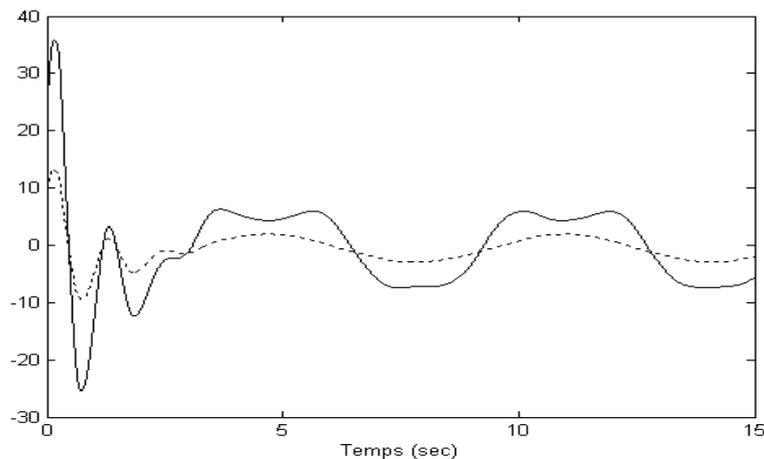


Figure 3.7 : Signaux de commande ; u_1 (trait continu), u_2 (trait discontinu)

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé la commande adaptative directe et indirecte floue des systèmes non linéaires multivariables MIMO incertains.

En premier lieu, nous avons proposé une loi de commande adaptative floue indirecte pour une classe des systèmes non linéaire MIMO. Dans ce schéma de commande, les systèmes flous sont utilisés pour approcher la dynamique inconnue du système et la loi de commande comporte deux termes : un terme de commande floue adaptatif et un terme de robustification pour remédier au problème des erreurs de reconstruction. L'approche de commande proposée n'exige pas la connaissance du modèle du système, garantit la bornitude de tous les signaux dans le système bouclé et assure la convergence vers zéro des erreurs de poursuite. De plus, cette approche évite le problème de singularité de la loi de commande par l'utilisation d'un inverse régularisé, et autorise l'initialisation par zéro de tout les paramètres ajustés dans les approximations floues. Par conséquent elle n'exige pas de connaissance a priori sur les valeurs désirées des paramètres ajustés.

En second lieu, un schéma de commande adaptative directe à l'aide des systèmes flous pour une classe de systèmes non linéaires multivariables incertains est proposé. Dans ce schéma, les systèmes flous sont utilisés pour générer directement les signaux de commande à appliquer au système pour garantir les objectifs de commande, et ceci sans identification de la dynamique inconnue du système. Dans ce schéma, nous avons proposé, pour l'adaptation des paramètres des systèmes flous, une loi du type

proportionnel intégral à σ -modification. La bornitude de tous les signaux dans le système bouclé a été démontrée en utilisant une fonction candidate de Lyapunov. L'avantage de cette approche est sa simplicité de mise en œuvre car, aucune information sur le comportement dynamique du système n'est nécessaire pour l'implantation de la loi de commande et la phase d'initialisation de l'algorithme n'exige pas de connaissance a priori. Cette approche peut également permettre d'incorporer dans le contrôleur toute information mathématique ou linguistique concernant la commande du système.

Les résultats de simulation effectuée sur un modèle de manipulateur ont montré la capacité des contrôleurs proposés pour la commande en poursuite des systèmes non linéaires multivariables incertains.

Chapitre 4

Commande adaptative décentralisée floue des systèmes non linéaires interconnectés

4.1 Introduction

Le problème de la commande décentralisée se pose lorsqu'on considère la commande des systèmes interconnectés composés de plusieurs sous-systèmes pouvant être géographiquement éloignés. En fait, la synthèse d'une loi de commande centralisée peut être complexe, coûteuse et/ou inefficace due à la nature modulaire du système qui peut empêcher le partage d'informations entre les différents sous-systèmes.

Des stratégies de commande adaptative décentralisées ont été développées dans [IOA86, GAV89, SHI92, JAI97]. Ces stratégies sont limitées aux cas des sous-systèmes linéaires connus et des interconnexions linéaires ou non linéaires. La commande adaptative décentralisée des robots manipulateurs a été étudiée dans [SER89, LIU97]. Dans [SPO96b], les auteurs proposent une approche adaptative décentralisée pour une classe de systèmes interconnectés avec des sous-systèmes non linéaires et des interconnexions inconnues. Néanmoins, cette approche est limitée au cas de non linéarités exprimées linéairement par rapport aux paramètres inconnus.

Les stratégies de commande adaptatives des systèmes non linéaires incluant les systèmes flous, comme éléments de base pour l'approximation de fonctions inconnues, sont répandues dans le domaine de la commande. Dans le but d'étendre les stratégies de commande adaptatives décentralisées au cas des systèmes non linéaires interconnectés avec des sous-systèmes non linéaires incertains et des interconnexions inconnues, des approches de commande adaptative floue décentralisée sont proposées dans [SPO97a, SPO97b, ZHA01, TON03b, LAB04]. Les approches proposées peuvent être classifiées en deux catégories : les approches directes et les approches indirectes. Les approches indirectes se basent sur l'approximation des non linéarités locales de chaque sous-

systèmes par des modèles flous. En revanche, les approches directes se basent sur l'approximation par des modèles flous des lois de commande stabilisatrices inconnues. Des approches décentralisées utilisant des réseaux de neurones peuvent être trouvées dans [SPO99, BOU98a, CHI98, HUA03].

Dans ce chapitre, nous proposons l'extension au cas décentralisé des approches de commande floues développées au deuxième chapitre pour les systèmes monovariables. Les schémas de commande proposés présentent deux principaux avantages. D'une part, l'utilisation des systèmes flous permet de surmonter le problème de connaissance des non linéarités locales de chaque sous-système. D'autre part, la structure décentralisée rend l'implantation sur des architectures parallèles possible et, de ce fait, le temps de calcul peut être considérablement réduit par rapport à la structure centralisée.

4.2 Commande adaptative décentralisée indirecte floue

4.2.1 Position du problème

Considérons un système non linéaire interconnecté Σ composé de N sous-systèmes non linéaires Σ_i , $i = 1, \dots, N$, donné par

$$\Sigma_i \begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2}, \dot{x}_{i2} = x_{i3}, \dots, \dot{x}_{i, n_i-1} = x_{i, n_i} \\ \dot{x}_{i, n_i} = f_i(\mathbf{x}_i) + g_i(\mathbf{x}_i)u_i + \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (4.1)$$

ou, encore

$$y_i^{(n_i)} = f_i(\mathbf{x}_i) + g_i(\mathbf{x}_i)u_i + \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (4.2)$$

avec $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, \dots, x_{i, n_i}]^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$ est le vecteur d'état du sous système Σ_i supposé mesurable, $u_i \in \mathfrak{R}$ est l'entrée de commande, $y_i \in \mathfrak{R}$ est la sortie, $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$ sont des fonctions non linéaires continues incertaines, et $\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ représente l'effet des interconnexions entre le sous système Σ_i et les autres sous systèmes.

L'objectif de commande est la synthèse des lois de commande adaptatives utilisant les systèmes flous pour chaque sous systèmes et, ceci, en utilisant uniquement les informations locales (variables d'état locales) propres à chaque sous système, de telle

sorte que chaque sortie $y_i(t)$ suit, le plus proche possible, une trajectoire de référence donnée $y_{di}(t)$ tout en garantissant la bornitude de tous les signaux du système entier.

Pour chaque sous-système Σ_i , on définit les erreurs de poursuites

$$e_i(t) = y_{di}(t) - y_i(t), \dots, e_i^{(n_i-1)}(t) = y_{di}^{(n_i-1)}(t) - y_i^{(n_i-1)}(t) \quad (4.3)$$

et le signal d'erreur

$$v_i(t) = y_{di}^{(n_i)}(t) + k_{i,n_i-1}e_i^{(n_i-1)}(t) + \dots + k_{i,0}e_i(t)$$

Posons

$$\mathbf{e}_i = [e_i, \dot{e}_i, \dots, e_i^{(n_i-1)}]^T$$

$$\mathbf{k}_i = [k_{i,0}, \dots, k_{i,n_i-1}]^T$$

d'où, on peut écrire

$$v_i = y_{di}^{(n_i)} + \mathbf{k}_i^T \mathbf{e}_i \quad (4.4)$$

Par introduction de (4.4) dans (4.1), il vient

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{b}_i \{v_i - f_i(\mathbf{x}_i) - g_i(\mathbf{x}_i)u_i - \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)\} \quad (4.5)$$

avec

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{i,0} & -k_{i,1} & -k_{i,2} & \dots & -k_{i,n_i-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}, \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_i} \quad (4.6)$$

Les paramètres de conception $k_{i,0}, \dots, k_{i,n_i-1}$ sont choisis de sorte que la matrice \mathbf{A}_i soit stable. Ainsi, pour toute matrice donnée $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T > 0$, il existe une matrice unique $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > 0$ solution de l'équation de Lyapunov

$$\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i = -\mathbf{Q}_i \quad (4.7)$$

Afin de développer notre contrôleur décentralisé, pour chaque sous-systèmes Σ_i , nous adoptons les hypothèses suivantes [LAB04].

Hypothèse 4.1 : Le gain de commande $g_i(\mathbf{x}_i)$ est non nul et de signe connu. Alors, il est soit strictement positif, soit strictement négatif. Sans perte de généralité, nous supposons que $g_i(\mathbf{x}_i) \geq \underline{g}_i > 0$, avec \underline{g}_i une constante donnée.

Hypothèse 4.2 : Chaque trajectoire de référence $y_{di}(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n_i sont supposées continues, bornées et connues.

Hypothèse 4.3 : Les interconnexions satisfont

$$|\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)| \leq d_{i,0} + \sum_{j=1}^N d_{i,j} \|e_j\| \quad (4.8)$$

avec $d_{i,0}, \dots, d_{i,N}$ sont des constantes positives inconnues, et $\|\cdot\|$ représente la norme Euclidienne.

Si on suppose que les sous-systèmes sont isolés l'un de l'autre, i.e. $\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$, et que les fonctions non linéaires $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$ sont parfaitement connues, alors pour atteindre les objectifs de commande, la loi de commande suivante est une solution

$$u_i = \frac{1}{g_i(\mathbf{x}_i)} (v_i - f_i(\mathbf{x}_i)) \quad (4.9)$$

Par substitution de (4.9) dans (4.5), on trouve

$$\dot{e}_i = A_i e_i \quad (4.10)$$

Puisque la matrice A_i est stable, on peut conclure alors que toutes les erreurs de poursuite convergent vers zéro.

Dans cette étude, les fonctions non linéaires $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$ sont incertaines et les interactions $\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ supposées non nulles. De ce fait, l'implantation de la loi de commande (4.9) est difficile voir même impossible. Notre but consiste alors à approcher les fonctions inconnues par des systèmes flous et de modifier la loi de commande (4.9) afin d'atteindre les objectifs de commande.

4.2.2 Commande adaptative décentralisée indirecte par les systèmes flous

Dans cette section, notre tâche consiste à utiliser les systèmes flous pour approcher les fonctions incertaines $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$, et à développer, à partir de ces approximations, des lois de commandes adaptatives décentralisées avec leurs lois d'adaptation paramétriques afin d'atteindre les objectifs de commande.

Alors, les systèmes flous sont utilisés pour identifier en ligne les fonctions non linéaires incertaines $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$. Elles sont approchées par

$$\hat{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{f_i}) = \mathbf{w}_{f_i}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_{f_i} \quad (4.11)$$

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{g_i}) = \mathbf{w}_{g_i}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_{g_i} \quad (4.12)$$

avec \mathbf{q}_{f_i} et \mathbf{q}_{g_i} sont les vecteurs des paramètres ajustés, $\mathbf{w}_{f_i}(\mathbf{x}_i)$ et $\mathbf{w}_{g_i}(\mathbf{x}_i)$ des vecteurs de fonctions floues de base supposés convenablement choisis par l'utilisateur.

Les fonctions réelles $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$ peuvent être exprimées sous la forme

$$f_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_{f_i}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_{f_i}^* + \mathbf{e}_{f_i}(\mathbf{x}_i) \quad (4.13)$$

$$g_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_{g_i}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_{g_i}^* + \mathbf{e}_{g_i}(\mathbf{x}_i) \quad (4.14)$$

avec $\mathbf{e}_{f_i}(\mathbf{x}_i)$ et $\mathbf{e}_{g_i}(\mathbf{x}_i)$ sont les erreurs d'approximation, $\mathbf{q}_{f_i}^*$ et $\mathbf{q}_{g_i}^*$ sont respectivement les paramètres optimaux de \mathbf{q}_{f_i} et \mathbf{q}_{g_i} minimisant les fonctions $|\mathbf{e}_{f_i}(\mathbf{x}_i)|$ et $|\mathbf{e}_{g_i}(\mathbf{x}_i)|$.

D'après la propriété d'approximation universelle des systèmes flous utilisés, on peut supposer alors la bornitude des erreurs d'approximation, i.e.

$$|\mathbf{e}_{f_i}(\mathbf{x}_i)| \leq \bar{\mathbf{e}}_{f_i}, |\mathbf{e}_{g_i}(\mathbf{x}_i)| \leq \bar{\mathbf{e}}_{g_i}$$

où $\bar{\mathbf{e}}_{f_i}$ et $\bar{\mathbf{e}}_{g_i}$ sont des paramètres positifs inconnus.

De l'analyse ci-dessus, on peut exprimer l'erreur d'identification des fonctions inconnues par

$$f_i(\mathbf{x}_i) - \hat{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{f_i}) = \mathbf{w}_{f_i}^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_{f_i} + \mathbf{e}_{f_i}(\mathbf{x}_i) \quad (4.15)$$

$$g_i(\mathbf{x}_i) - \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{g_i}) = \mathbf{w}_{g_i}^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_{g_i} + \mathbf{e}_{g_i}(\mathbf{x}_i) \quad (4.16)$$

avec $\tilde{\mathbf{q}}_{f_i} = \mathbf{q}_{f_i}^* - \mathbf{q}_{f_i}$, $\tilde{\mathbf{q}}_{g_i} = \mathbf{q}_{g_i}^* - \mathbf{q}_{g_i}$ sont les erreurs paramétriques.

L'utilisation d'une loi de commande équivalente du type

$$u_i = \frac{1}{\hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{g_i})} \{v_i - \hat{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{f_i})\} \quad (4.17)$$

ne peut garantir à elle seule la stabilité du système bouclé. Ceci est dû aux erreurs de reconstruction, à l'existence des interactions entre les sous-systèmes, et au fait que cette loi de commande n'est pas définie lorsque $\hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{g_i}) = 0$.

Pour éviter tous ces problèmes, nous proposons une loi de commande de la forme

$$u_i = u_{f_i} + u_{r_i} \quad (4.18)$$

cette loi de commande est la somme de deux termes : un terme de commande adaptatif, u_{f_i} , qui est une modification de la commande équivalente (4.17), et un terme de

commande robuste, u_{ri} , introduit pour compenser les effets des erreurs de reconstruction et les effets des interconnexions.

Afin d'avoir une loi de commande bien définie à tout moment, le terme adaptatif flou est défini comme suit

$$u_{fi} = \frac{\hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi})}{e_0 + \hat{g}_i^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi})} \left\{ v_i - \hat{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{fi}) + \mathbf{b}_i \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}) z_i \right\} \quad (4.19)$$

où e_0 une constante positive petite, \mathbf{b}_i une constante positive et

$$z_i = \mathbf{b}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i \quad (4.20)$$

avec \mathbf{P}_i est la solution de l'équation de Lyapunov (4.7).

Le terme de robustification est choisi comme suit

$$u_{ri} = \frac{1}{\underline{g}_i} \left(r_i (1 + |u_{fi}|) + |u_{0i}| \right) \text{sgn}(z_i) + \frac{1}{\underline{g}_i} \mathbf{a}_i z_i \quad (4.21)$$

avec r_i et \mathbf{a}_i sont des paramètres estimés en ligne par des lois d'adaptation données ultérieurement, et u_{0i} est donné par

$$u_{0i} = \frac{e_0}{e_0 + \hat{g}_i^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi})} \left\{ v_i - \hat{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{fi}) + \mathbf{b}_i \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}) z_i \right\} \quad (4.22)$$

Pour assurer les objectifs de commande, les lois d'adaptation suivantes sont adoptées

$$\dot{\mathbf{q}}_{fi} = -\mathbf{h}_{fi} \mathbf{w}_{fi}(\mathbf{x}_i) z_i \quad (4.23)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{gi} = -\mathbf{h}_{gi} \mathbf{w}_{gi}(\mathbf{x}_i) z_i (u_{fi} - \mathbf{b}_i z_i) \quad (4.24)$$

$$\dot{r}_i = \mathbf{h}_{ri} |z_i| (1 + |u_{fi}|) \quad (4.25)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{h}_{ai} z_i^2 \quad (4.26)$$

avec \mathbf{h}_{fi} , \mathbf{h}_{gi} , \mathbf{h}_{ri} et \mathbf{h}_{ai} sont des constantes positives spécifiées par l'utilisateur.

Théorème 4.1 : Considérons le système non linéaire interconnecté (4.1). Supposons les hypothèses 4.1-4.3 sont satisfaites. Alors, la loi de commande définie par les équations (4.19)-(4.22) avec les lois d'adaptation données par les relations (4.23)-(4.26) garantit la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée et la convergence vers zéro de toutes les erreurs de poursuite, i.e. $e_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 1, \dots, N$.

Démonstration : En utilisant la loi de commande (4.18), l'équation dynamique de l'erreur (4.5) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & \mathbf{A}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{b}_i \left\{ v_i - f_i(\mathbf{x}_i) - \left(g_i(\mathbf{x}_i) - \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}) \right) u_{fi} - \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}) u_{fi} \right. \\ & \left. - g_i(\mathbf{x}_i) u_{ri} - \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Par substitution de (4.19) dans (4.27), et en ajoutant et en retranchant $\mathbf{b}_i \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}^*)$, il vient

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & \mathbf{A}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{b}_i \left\{ -\mathbf{w}_{fi}^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_{fi} - \mathbf{w}_{gi}^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_{gi} (u_{fi} - \mathbf{b}_i z_i) - \mathbf{b}_i \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}^*) z_i \right. \\ & \left. + u_{0i} - \mathbf{e}_{fi}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{e}_{gi}(\mathbf{x}_i) u_{fi} - g_i(\mathbf{x}_i) u_{ri} - \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dans l'équation (4.28), nous avons utilisé l'égalité

$$\hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}) u_{fi} = v_i - \hat{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{fi}) + \mathbf{b}_i \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}) z_i - u_{0i}.$$

Pour démontrer le théorème 4.1, considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (4.29)$$

avec

$$V_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \frac{1}{h_{fi}} \tilde{\mathbf{q}}_{fi}^T \tilde{\mathbf{q}}_{fi} + \frac{1}{h_{gi}} \tilde{\mathbf{q}}_{gi}^T \tilde{\mathbf{q}}_{gi} + \frac{1}{h_{ri}} \tilde{r}_i^2 + \frac{1}{h_{ai}} \tilde{a}_i^2 \quad (4.30)$$

où $\tilde{r}_i = r_i^* - r_i$, $\tilde{a}_i = a_i^* - a_i$, r_i^* et a_i^* seront spécifiés ultérieurement.

La dérivée temporelle de (4.30) est

$$\dot{V}_i = \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_i \dot{\mathbf{e}}_i - \frac{2}{h_{fi}} \tilde{\mathbf{q}}_{fi}^T \dot{\mathbf{q}}_{fi} - \frac{2}{h_{gi}} \tilde{\mathbf{q}}_{gi}^T \dot{\mathbf{q}}_{gi} - \frac{2}{h_{ri}} \tilde{r}_i \dot{r}_i - \frac{2}{h_{ai}} \tilde{a}_i \dot{a}_i \quad (4.31)$$

Par substitution de (4.28) dans (4.31), il vient

$$\dot{V}_i = -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - 2\mathbf{b}_i \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}^*) z_i^2 + \dot{V}_{i1} + \dot{V}_{i2} \quad (4.32)$$

avec

$$\dot{V}_{i1} = -2\mathbf{w}_{fi}^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_{fi} z_i - 2\mathbf{w}_{gi}^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_{gi} (u_{fi} - \mathbf{b}_i z_i) z_i - \frac{2}{h_{fi}} \tilde{\mathbf{q}}_{fi}^T \dot{\mathbf{q}}_{fi} - \frac{2}{h_{gi}} \tilde{\mathbf{q}}_{gi}^T \dot{\mathbf{q}}_{gi} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i2} = & 2z_i \left\{ u_{0i} - \mathbf{e}_{fi}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{e}_{gi}(\mathbf{x}_i) u_{fi} - g_i(\mathbf{x}_i) u_{ri} - \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \right\} \\ & - \frac{2}{h_{ri}} \tilde{r}_i \dot{r}_i - \frac{2}{h_{ai}} \tilde{a}_i \dot{a}_i \end{aligned} \quad (4.34)$$

A partir des lois d'adaptation (4.23) et (4.24), on a

$$\dot{V}_{i1} = 0 \quad (4.35)$$

D'après l'hypothèse 4.3, le terme $|z_i \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)|$ peut être borné de la manière suivante

$$|z_i \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)| \leq d_{i,0} |z_i| + \sum_{j=1}^N d_{i,j} |z_i| \|e_j\| \quad (4.36)$$

En utilisant l'inégalité suivante

$$ab \leq \bar{a}a^2 + \frac{1}{4\bar{a}}b^2, \quad \bar{a} > 0$$

l'inégalité (4.36) devient

$$|z_i \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)| \leq d_{i,0} |z_i| + \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{a}_j z_i^2 + \frac{d_{i,j}^2}{4\bar{a}_j} \|e_j\|^2 \right\} \quad (4.37)$$

avec \bar{a}_j sont des paramètres positifs et seront spécifiés plus tard.

Les choix

$$r_i^* \geq \max(\bar{e}_{fi} + d_{0,i}, \bar{e}_{gi}) \quad \text{et} \quad a_i^* \geq \sum_{j=1}^N \bar{a}_j \quad (4.38)$$

avec les lois d'adaptation (4.25) et (4.26), et le terme de commande robuste (4.21), l'équation (4.34) peut être simplifiée à

$$\dot{V}_{i2} \leq \sum_{j=1}^N \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} \|e_j\|^2 \quad (4.39)$$

De l'analyse précédente, la relation (4.32) peut être bornée par

$$\dot{V}_i \leq -e_i^T Q_i e_i - 2b_i \hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}^*) z_i^2 + \sum_{j=1}^N \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} \|e_j\|^2 \quad (4.40)$$

Du fait que $g_i(\mathbf{x}_i)$ est supposé positif (voir hypothèse 4.1), il est raisonnable alors de supposer que sa meilleure approximation réalisable par les systèmes flous, i.e. $\hat{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_{gi}^*)$, l'est aussi. D'où on peut écrire

$$\dot{V}_i \leq -e_i^T Q_i e_i + \sum_{j=1}^N \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} \|e_j\|^2 \quad (4.41)$$

D'après (4.41), la dérivée de (4.29) peut être bornée par

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \dot{V}_i \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -e_i^T Q_i e_i + \sum_{j=1}^N \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} \|e_j\|^2 \right\} = -\sum_{i=1}^N e_i^T Q_i e_i + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\bar{a}_j} \left(\sum_{i=1}^N d_{i,j}^2 \right) \|e_j\|^2 \quad (4.42)$$

ou, encore

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^N e_i^T Q_i e_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\bar{a}_i} \left(\sum_{j=1}^N d_{j,i}^2 \right) \|e_i\|^2 \leq -\sum_{i=1}^N \left\{ I_{\min}(Q_i) - \frac{1}{2\bar{a}_i} \sum_{j=1}^N d_{j,i}^2 \right\} \|e_i\|^2 \quad (4.43)$$

avec $I_{\min}(Q_i)$ c'est la plus petite valeur propre de Q_i .

Le choix des paramètres \bar{a}_i tels que

$$\bar{a}_i \geq \frac{1}{2(I_{\min}(Q_i) - I_{0i})} \sum_{j=1}^N d_{j,i}^2, \quad I_{0i} > 0 \quad (4.44)$$

permet d'avoir

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^N I_{0i} \|e_i\|^2 \quad (4.45)$$

ce qui implique la bornitude de tous les signaux dans le système bouclé, i.e. les erreurs de poursuite e_i , les états x_i , les paramètres estimés q_{fi} , q_{gi} , r_i et a_i , les signaux de commande u_i , et la fonction candidate V sont tous bornés. Par conséquent, on peut démontrer que les erreurs $e_i(t)$ sont carrés intégrables et que $\dot{e}_i(t)$ sont bornées. D'où, par application du lemme de Barbalat [SLO91], on déduit la convergence vers zéro des erreurs de poursuite de tous les sous-systèmes.

1

Remarque 4.1 : Comparé aux contrôleurs indirects décentralisés développés dans [SPO97b, SPO99], notre contrôleur ne nécessite pas l'utilisation d'une loi d'adaptation avec projection pour éviter la division par zéro dans la loi de commande adaptative. De plus, dans notre contrôleur, l'initialisation par zéro de tous les paramètres ajustés des systèmes flous est possible. Comparé aux approches directes décentralisées, l'approche indirecte n'impose aucune condition sur la dérivée temporelle du gain de commande de chaque sous-système.

Remarque 4.2 : Dans le cas où la borne g_i est inconnue (voir hypothèse 4.1), le terme de commande robuste (4.21) se modifie à

$$u_{ri} = \left(r_i (1 + |u_{fi}|) + r_{ui} |u_{0i}| \right) \text{sgn}(z_i) + a_i z_i$$

avec

$$\dot{r}_{ui} = h_{ui} |z_i| |u_{0i}|$$

Ce terme robuste peut être lissé par le remplacement de la fonction discontinue $\text{sgn}(z_i)$ par la fonction continue $\text{sat}(z_i/\Phi_i)$, $\Phi_i > 0$ [SLO91]. Signalons que dans ce cas on

démontre seulement la convergence des erreurs de poursuite vers un voisinage autour de zéro.

4.2.3 Résultats de simulation

Pour illustrer les performances de la méthode de commande proposée, nous considérons la commande en poursuite d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté dont le modèle dynamique est donné au chapitre 3, section 3.2.3.

Chaque articulation est considérée comme un sous-système. Comme les fonctions non linéaires locales $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$ de chaque sous-systèmes sont supposées inconnues. Alors, chaque fonction inconnue est approchée par un système flou à deux entrées où on définit cinq fonctions d'appartenance pour chaque variable d'entrée telles que :

$$\begin{aligned} m_{F_{ij}^1}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij}+1,25}{0,3}\right)^2\right\}, & m_{F_{ij}^2}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij}+0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_{ij}^3}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij}}{0,3}\right)^2\right\}, & m_{F_{ij}^4}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij}-0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_{ij}^5}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij}-1,25}{0,3}\right)^2\right\}, & & i=1,2; j=1,2. \end{aligned}$$

avec $\mathbf{x}_1 = [q_1 \dot{q}_1]^T$, $\mathbf{x}_2 = [q_2 \dot{q}_2]^T$.

Les paramètres de synthèse sont choisis comme suit : $\mathbf{e}_0 = 0.1$, $\mathbf{k}_i = [1 \ 2]^T$, $b_i = 10$, $h_{f_i} = 1$, $h_{g_i} = 1$, $h_{a_i} = 0.001$, $h_{r_i} = 0.001$, $h_{u_i} = 0.001$ et

$$\mathbf{Q}_i = 10\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Les conditions initiales choisies sont : $x_{i1}(0) = 0$, $x_{i2}(0) = 0$, $q_{f_i}(0) = 0$, $q_{g_i}(0) = 0$, $a_i(0) = 0$, $r_i(0) = 0$ et $r_{u_i}(0) = 0$. Le terme de robustification donné dans la remarque 4.2 est utilisé avec $\Phi = 0.05$.

Les résultats de simulation de $y_1 = x_{11}$ et $\dot{y}_1 = x_{12}$ sont donnés Figure 4.1, et de $y_2 = x_{21}$ et $\dot{y}_2 = x_{22}$ sont donnés Figure 4.2. Les signaux de commande sont montrés Figure 4.3. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.

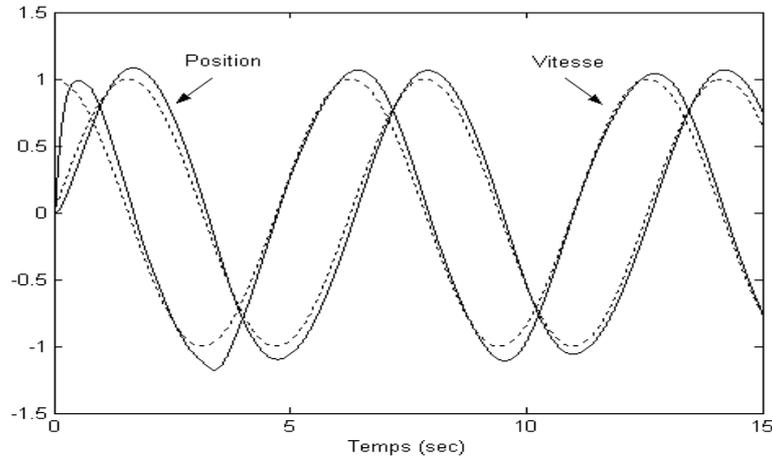


Figure 4.1 : Réponses du premier sous-système, sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

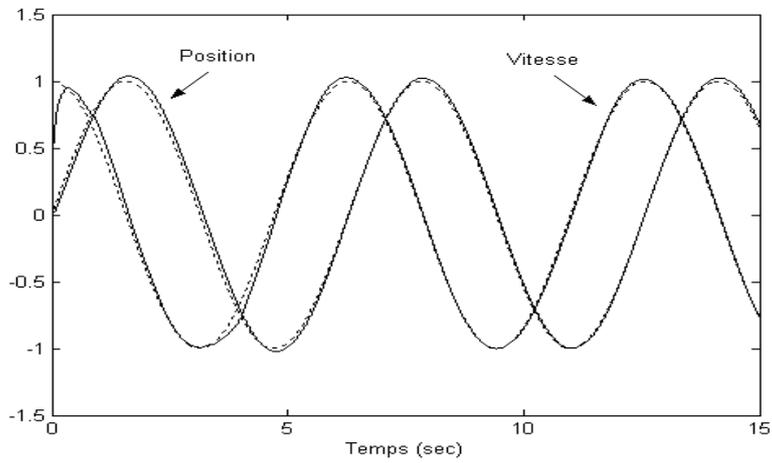


Figure 4.2 : Réponses du deuxième sous-système, sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

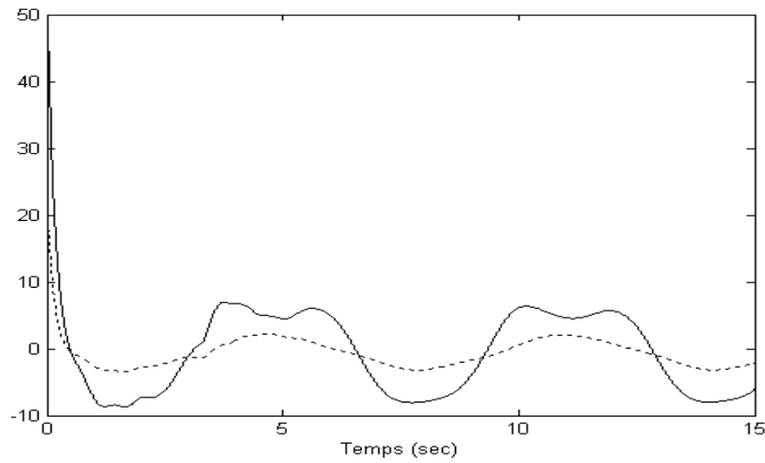


Figure 4.3 : Signaux de commande, u_1 (trait continu), u_2 (trait discontinu).

4.3 Commande adaptative décentralisée directe floue

4.3.1 Position du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires interconnectés Σ composé de N sous-systèmes non linéaires Σ_i , $i = 1, \dots, N$, donnés par des équations différentielles de la forme

$$\Sigma_i \begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2}, \dot{x}_{i2} = x_{i3}, \dots, \dot{x}_{i, n_i-1} = x_{i, n_i} \\ \dot{x}_{i, n_i} = f_i(\mathbf{x}_i) + g_i(\mathbf{x}_i)u_i + \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (4.46)$$

ou, encore

$$y_i^{(n_i)} = f_i(\mathbf{x}_i) + g_i(\mathbf{x}_i)u_i + \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (4.47)$$

avec $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, \dots, x_{i, n_i}]^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$ est le vecteur d'état du sous-système Σ_i supposé mesurable, $u_i \in \mathfrak{R}$ est l'entrée de commande, $y_i \in \mathfrak{R}$ est la sortie, $f_i(\mathbf{x}_i)$ et $g_i(\mathbf{x}_i)$ sont des fonctions non linéaires continues supposées incertaines, et $\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ représente l'effet des interconnexions entre le sous-système Σ_i et les autres sous-systèmes.

L'objectif de commande est la synthèse des lois de commande adaptatives utilisant les systèmes flous pour chaque sous système et, ceci, en utilisant uniquement les informations locales (variables d'état locales) propres à chaque sous système, de telle sorte que chaque sortie $y_i(t)$ suit, le plus proche possible, une trajectoire de référence donnée $y_{di}(t)$ tout en garantissant la bornitude de tous les signaux du système entier.

Pour chaque sous-système Σ_i , nous définissons l'erreur de poursuite par

$$e_i(t) = y_{di}(t) - y_i(t) \quad (4.48)$$

et la surface d'erreur

$$s_i(t) = \left(\frac{d}{dt} + I_i \right)^{n_i-1} e_i(t), I_i > 0 \quad (4.49)$$

Il est facile de voir que $s_i(t) = 0$ est une équation différentielle qui possède la solution $e_i(t) = 0$.

L'équation (4.49) peut être écrite sous la forme

$$s_i(t) = e_i^{(n_i-1)}(t) + k_{i, n_i-1} e_i^{(n_i-2)}(t) + \dots + k_{i, 2} \dot{e}_i(t) + k_{i, 1} e_i(t) \quad (4.50)$$

avec

$$k_{i,j} = C_{n_i-1}^{j-1} I^{n_i-j} = \frac{(n_i-1)!}{(n_i-j)!(j-1)!} I^{n_i-j}$$

L'équation (4.50) peut être considérée une équation différentielle de sortie $e_i(t)$ et d'entrée $s_i(t)$ et, de ce fait, elle peut s'écrire sous la forme d'état suivante

$$\dot{e}_i = A_i e_i + b_i s_i \quad (4.51)$$

avec $e_i = [e_i, \dot{e}_i, \dots, e_i^{(n_i-2)}]^T$, et

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{i,1} & -k_{i,2} & -k_{i,3} & \dots & -k_{i,n_i-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n_i-1) \times (n_i-1)}, b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n_i-1)} \quad (4.52)$$

Puisque la matrice A_i est stable, alors pour toute matrice donnée $Q_i = Q_i^T > 0$, il existe une matrice unique $P_i = P_i^T > 0$ solution de l'équation de Lyapunov

$$P_i A_i + A_i^T P_i = -Q_i \quad (4.53)$$

La dérivée temporelle de la surface d'erreur (4.49) est donnée par

$$\dot{s}_i = v_i - f_i(\mathbf{x}_i) - g_i(\mathbf{x}_i) u_i - \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (4.54)$$

avec

$$v_i = y_{di}^{(n_i)} + k_{i,n_i-1} e_i^{(n_i-1)} + \dots + k_{i,2} \ddot{e}_i + k_{i,1} \dot{e}_i$$

Afin de développer notre contrôleur direct décentralisé, les hypothèses suivantes sont nécessaires par la suite.

Hypothèse 4.4 : Le gain de commande $g_i(\mathbf{x}_i)$ est non nul, borné et de signe connu.

Alors, il est soit strictement positif, soit strictement négatif. Sans perte de généralité, nous supposons que $g_i(\mathbf{x}_i) \geq \underline{g}_i > 0$, avec \underline{g}_i une constante inconnue. De plus, la dérivée temporelle de $g_i(\mathbf{x}_i)$ est bornée par une fonction positive continue $D_i(\mathbf{x}_i)$, i.e.

$$|\dot{g}_i(\mathbf{x}_i)| \leq D_i(\mathbf{x}_i).$$

Hypothèse 4.5 : Chaque trajectoire de référence $y_{di}(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n_i sont supposées continues, bornées et connues.

Hypothèse 4.6 : Les interconnexions satisfont

$$|\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)| \leq g_i(\mathbf{x}_i) \left\{ d_{i,0} + \sum_{j=1}^N d_{i,j} (\|\mathbf{e}_j\| + |s_j|) \right\} \quad (4.55)$$

avec $d_{i,0}, \dots, d_{i,N}$ sont des constantes positives inconnues, $\|\cdot\|$ représente la norme Euclidienne et $|\cdot|$ la valeur absolue.

Si on suppose que les sous-systèmes sont isolés l'un de l'autre, i.e. $\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$, et que les fonctions non linéaires $f_i(\mathbf{x}_i)$, $g_i(\mathbf{x}_i)$ et $D_i(\mathbf{x}_i)$ sont parfaitement connues, alors la loi de commande idéale suivante assure les objectifs de commande

$$u_i = u_i^* = K_i s_i + \frac{1}{g_i(\mathbf{x}_i)} (v_i - f_i(\mathbf{x}_i)) + \frac{D_i(\mathbf{x}_i)}{2g_i^2(\mathbf{x}_i)} s_i + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i \quad (4.56)$$

avec K_i est un paramètre positif spécifié par l'utilisateur.

Effectivement, considérons la fonction candidate suivante

$$V_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \frac{1}{2g_i(\mathbf{x}_i)} s_i^2 \quad (4.57)$$

Par dérivation de (4.57), on trouve

$$\dot{V}_i = \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \frac{1}{g_i(\mathbf{x}_i)} s_i \dot{s}_i - \frac{\dot{g}_i(\mathbf{x}_i)}{2g_i^2(\mathbf{x}_i)} s_i^2 \quad (4.58)$$

De l'hypothèse 4.4 et des équations (4.51), (4.53), (4.54) et (4.56), l'équation (4.58) se simplifie à

$$\dot{V}_i \leq -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - K_i s_i^2 \quad (4.59)$$

Ceci implique que les erreurs $\mathbf{e}_i(t)$ et $s_i(t)$ convergent asymptotiquement vers zéro.

Dans cette étude, les fonctions non linéaires $f_i(\mathbf{x}_i)$, $g_i(\mathbf{x}_i)$ et $D_i(\mathbf{x}_i)$ sont supposées incertaines et les interactions $\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ supposées non nulles. De ce fait, l'implantation de la loi de commande (4.56) est difficile voir même impossible. Notre but consiste alors à approcher cette loi de commande par des systèmes flous.

4.3.2 Commande adaptative décentralisée directe par les systèmes flous

Du fait que les fonctions non linéaires $f_i(\mathbf{x}_i)$, $g_i(\mathbf{x}_i)$ et $D_i(\mathbf{x}_i)$ sont incertaines et que des interactions existent entre les différents sous-systèmes, il est clair que la commande idéale (4.56) ne peut être implantée pour commander le système interconnecté (4.46). Dans cette section, nous montrons comment construire un

contrôleur adaptatif direct décentralisé en utilisant les systèmes flous. Ces systèmes flous sont utilisés pour approcher la loi de commande idéale (4.56) dans son ensemble.

Supposons que chaque commande idéale locale donnée par (4.56) est une fonction continue, elle peut être alors approchée par un système flou de la façon suivante

$$\hat{u}_i^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i) = K_i s_i + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{w}_i^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_i \quad (4.60)$$

avec \mathbf{q}_i est le vecteur des paramètres ajustés, $\mathbf{w}_i(\mathbf{x}_i)$ un vecteur de fonctions floues de base supposé convenablement choisi par l'utilisateur.

La fonction réelle u_i^* peut être exprimée sous la forme

$$u_i^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i^*) = K_i s_i + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{w}_i^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_i^* + \mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i) \quad (4.61)$$

avec $\mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i)$ sont les erreurs d'approximation, \mathbf{q}_i^* sont les paramètres optimaux de \mathbf{q}_i minimisant la fonction $|\mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i)|$. D'après la propriété d'approximation universelle des systèmes flous utilisés, on peut supposer alors la bornitude de l'erreur d'approximation, i.e.

$$|\mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i)| \leq \bar{e}_i$$

où \bar{e}_i est un paramètre positif inconnu.

De l'analyse ci-dessus, on peut exprimer l'erreur d'identification de la commande idéale par

$$u_i^* - \hat{u}_i^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i) = \mathbf{w}_i^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i) \quad (4.62)$$

avec $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_i$ est le vecteur des erreurs paramétriques.

A partir de l'approximation floue (4.60) de la commande idéale (4.56), nous proposons pour chaque sous-système une loi de commande locale de la forme

$$u_i = \hat{u}_i^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i) + u_{ri} = K_i s_i + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{w}_i^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_i + u_{ri} \quad (4.63)$$

avec u_{ri} est un terme de commande robuste introduit pour compenser les effets des erreurs de reconstruction et les effets des interconnexions. Ce terme est choisi comme suit

$$u_{ri} = r_i \operatorname{sgn}(s_i) + \mathbf{a}_i s_i \quad (4.64)$$

avec r_i et \mathbf{a}_i sont des paramètres estimés en ligne par des lois d'adaptation données.

Pour assurer les objectifs de commande, les lois d'adaptation suivantes sont adoptées

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{h}_i \mathbf{w}_i(\mathbf{x}_i) s_i \quad (4.65)$$

$$\dot{r}_i = h_{ri} |s_i| \quad (4.66)$$

$$\dot{a}_i = h_{ai} s_i^2 \quad (4.67)$$

avec h_i , h_{ri} et h_{ai} sont des constantes positives spécifiées par l'utilisateur.

Théorème 4.2 : Considérons le système non linéaire interconnecté (4.46). Supposons les hypothèses 4.4-4.6 sont satisfaites. Alors, la loi de commande définie par les équations (4.63)-(4.64) avec les lois d'adaptation données par les relations (4.65)-(4.67) garantit la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée et la convergence vers zéro de toutes les erreurs de poursuite, i.e. $e_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 1, \dots, N$.

1

Démonstration : L'équation dynamique de l'erreur (4.54) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{s}_i = v_i - f_i(\mathbf{x}_i) - g_i(\mathbf{x}_i)u_i^* + g_i(\mathbf{x}_i)(u_i^* - u_i) - \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (4.68)$$

Par substitution de (4.56) dans (4.68), il vient

$$\dot{s}_i = g_i(\mathbf{x}_i) \left\{ -K_i s_i - 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i - \frac{D_i(\mathbf{x}_i)}{2g_i^2(\mathbf{x}_i)} s_i + (u_i^* - u_i) - \frac{\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{g_i(\mathbf{x}_i)} \right\} \quad (4.69)$$

Des équations (4.62), (4.63), il vient

$$\frac{\dot{s}_i}{g_i(\mathbf{x}_i)} = -K_i s_i - 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i - \frac{D_i(\mathbf{x}_i)}{2g_i^2(\mathbf{x}_i)} s_i + \mathbf{w}_i^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_i - u_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i) - \frac{\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{g_i(\mathbf{x}_i)} \quad (4.70)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (4.71)$$

avec

$$V_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \frac{1}{2g_i(\mathbf{x}_i)} s_i^2 + \frac{1}{2h_i} \tilde{\mathbf{q}}_i^T \tilde{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{2h_{ri}} \tilde{r}_i^2 + \frac{1}{2h_{ai}} \tilde{a}_i^2 \quad (4.72)$$

où $\tilde{r}_i = r_i^* - r_i$, $\tilde{a}_i = a_i^* - a_i$, r_i^* et a_i^* seront spécifiés ultérieurement.

La dérivée temporelle de (4.72) est

$$\dot{V}_i = \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_i \dot{\mathbf{e}}_i + \frac{1}{g_i(\mathbf{x}_i)} s_i \dot{s}_i - \frac{\dot{g}_i(\mathbf{x}_i)}{2g_i^2(\mathbf{x}_i)} s_i^2 - \frac{1}{h_i} \tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i - \frac{1}{h_{ri}} \tilde{r}_i \dot{r}_i - \frac{1}{h_{ai}} \tilde{a}_i \dot{a}_i \quad (4.73)$$

A partir de (4.51), (4.53) et (4.70), il vient

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - K_i s_i^2 + s_i \mathbf{w}_i^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_i - s_i u_{ri} + s_i \mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i) - s_i \frac{\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{g_i(\mathbf{x}_i)} \\ & - \frac{1}{h_i} \tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i - \frac{1}{h_{ri}} \tilde{r}_i \dot{r}_i - \frac{1}{h_{ai}} \tilde{a}_i \dot{a}_i \end{aligned} \quad (4.74)$$

A partir de la loi d'adaptation (4.65), on a

$$s_i \mathbf{w}_i^T(\mathbf{x}_i) \tilde{\mathbf{q}}_i - \frac{1}{h_i} \tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\mathbf{q}}_i = 0 \quad (4.75)$$

et du terme (4.64) et les lois d'adaptation (4.66) et (4.67), on a

$$s_i u_{ri} - \frac{1}{h_{ri}} \tilde{r}_i \dot{r}_i - \frac{1}{h_{ai}} \tilde{a}_i \dot{a}_i = -r_i^* |s_i| - a_i^* s_i^2 \quad (4.76)$$

Ainsi, (4.74) peut s'écrire comme suit

$$\dot{V}_i \leq -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - K_i s_i^2 + s_i \mathbf{e}_i(\mathbf{x}_i) - s_i \frac{\Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{g_i(\mathbf{x}_i)} - r_i^* |s_i| - a_i^* s_i^2 \quad (4.77)$$

D'après l'hypothèse 4.6, le terme $|s_i \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) / g_i(\mathbf{x}_i)|$ peut être borné de la manière suivante

$$\left| \frac{s_i \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{g_i(\mathbf{x}_i)} \right| \leq d_{i,0} |s_i| + \sum_{j=1}^N d_{i,j} |s_i| (\|\mathbf{e}_j\| + |s_j|) \quad (4.78)$$

En utilisant l'inégalité suivante

$$ab \leq \bar{a} a^2 + \frac{1}{4\bar{a}} b^2, \quad \bar{a} > 0$$

l'inégalité (4.78) peut s'écrire sous la forme

$$\left| \frac{s_i \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{g_i(\mathbf{x}_i)} \right| \leq d_{i,0} |s_i| + \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{a}_j s_i^2 + \frac{d_{i,j}^2}{4\bar{a}_j} (\|\mathbf{e}_j\| + |s_j|)^2 \right\} \quad (4.79)$$

avec \bar{a}_j sont des paramètres positifs et qui seront spécifiés plus tard.

En utilisant l'inégalité suivante

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

l'équation (4.79) devient

$$\left| \frac{s_i \Delta_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{g_i(\mathbf{x}_i)} \right| \leq d_{i,0} |s_i| + \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{a}_j s_i^2 + \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} (\|\mathbf{e}_j\|^2 + s_j^2) \right\} \quad (4.80)$$

De l'analyse précédente, (4.77) peut être bornée par

$$\dot{V}_i \leq -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - K_i s_i^2 + |s_i| \bar{e}_i + d_{i,0} |s_i| + \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{a}_j s_i^2 + \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} (\|\mathbf{e}_j\|^2 + s_j^2) \right\} - r_i^* |s_i| - a_i^* s_i^2 \quad (4.81)$$

Le choix

$$r_i^* \geq \bar{e}_i + d_{0,i} \quad (4.82)$$

permet de simplifier (4.81) à

$$\dot{V}_i \leq -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - K_i s_i^2 + \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{a}_j s_i^2 + \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} (\|\mathbf{e}_j\|^2 + s_j^2) \right\} - \mathbf{a}_i^* s_i^2 \quad (4.83)$$

D'après (4.83), la dérivée de (4.71) peut être bornée par

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \dot{V}_i \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - K_i s_i^2 + \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{a}_j s_i^2 + \frac{d_{i,j}^2}{2\bar{a}_j} (\|\mathbf{e}_j\|^2 + s_j^2) \right\} - \mathbf{a}_i^* s_i^2 \right\} \quad (4.84)$$

ou, encore

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^N \left\{ K_i s_i^2 + \left(I_{\min}(\mathbf{Q}_i) - \frac{1}{2\bar{a}_i} \sum_{j=1}^N d_{j,i}^2 \right) \|\mathbf{e}_i\|^2 \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\sum_{j=1}^N \bar{a}_j + \frac{1}{2\bar{a}_i} \sum_{j=1}^N d_{j,i}^2 \right) - \mathbf{a}_i^* \right\} s_i^2 \quad (4.85)$$

avec $I_{\min}(\mathbf{Q}_i)$ c'est la plus petite valeur propre de \mathbf{Q}_i .

Le choix des paramètres \bar{a}_i tels que

$$\bar{a}_i \geq \frac{1}{2(I_{\min}(\mathbf{Q}_i) - I_{0i})} \sum_{j=1}^N d_{j,i}^2, \quad I_{0i} > 0 \quad (4.86)$$

et du paramètre \mathbf{a}_i^* tel que

$$\mathbf{a}_i^* \geq \sum_{j=1}^N \bar{a}_j + \frac{1}{2\bar{a}_i} \sum_{j=1}^N d_{j,i}^2 \quad (4.87)$$

permet d'avoir

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^N \left\{ K_i s_i^2 + I_{0i} \|\mathbf{e}_i\|^2 \right\} \quad (4.88)$$

ce qui implique la bornitude de tous les signaux dans le système bouclé, i.e. les erreurs de poursuite e_i , les surfaces d'erreur s_i , les états x_i , les paramètres estimés q_i , r_i et a_i , les signaux de commande u_i , et la fonction candidate V sont bornés. Par conséquent, on peut démontrer que les erreurs $e_i(t)$ et $s_i(t)$ sont carrés intégrables et que $\dot{e}_i(t)$ et $\dot{s}(t)$ sont bornées. D'où, par application du lemme de Barbalat [SLO91], on déduit la convergence vers zéro des erreurs de poursuite et des surfaces d'erreurs de tous les sous-systèmes.

1

Remarque 4.3 : Dans le contrôleur direct décentralisé développé dans [SPO97a, SPO99], la dérivée du gain de commande est bornée par une constante et la stabilité du schéma de commande dépend de cette constante. Par contre, dans notre cas, cette borne est une fonction variable continue et la stabilité est indépendante de cette borne. Comparé aux approches indirectes décentralisées, l'approche directe ne pose pas de

problème de division par zéro et ne nécessite pas la connaissance de la borne inférieure du gain de commande.

Remarque 4.4 : Le terme de commande robuste donné par (4.64) peut être adouci par le remplacement de la fonction discontinue $\text{sgn}(s_i)$ par la fonction continue $\text{sat}(s_i/\Phi_i)$, $\Phi_i > 0$ [SLO91].

4.3.3 Résultats de simulation

Pour illustrer les performances de la méthode de commande proposée, nous considérons la commande en poursuite d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté dont le modèle dynamique est donnée au chapitre 3, section 3.2.3.

Deux systèmes flous sont utilisés pour générer les commandes u_1 et u_2 avec les entrées $\mathbf{x}_1 = [q_1 \quad \dot{q}_1]^T$ et $\mathbf{x}_2 = [q_2 \quad \dot{q}_2]^T$ respectivement. Pour chaque variable d'entrée x_{ij} on définit cinq fonctions d'appartenance telles que :

$$\begin{aligned} m_{F_{ij}^1}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij} + 1,25}{0,3}\right)^2\right\}, & m_{F_{ij}^2}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij} + 0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_{ij}^3}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij}}{0,3}\right)^2\right\}, & m_{F_{ij}^4}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij} - 0,625}{0,3}\right)^2\right\}, \\ m_{F_{ij}^5}(x_{ij}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{ij} - 1,25}{0,3}\right)^2\right\}, & & i = 1, 2; j = 1, 2. \end{aligned}$$

Les paramètres de synthèse sont choisis comme suit : $I_i = 10$, $K_i = 10$, $h_i = 1$, $h_{a_i} = 0.001$, $h_{r_i} = 0.001$, $Q_i = 10$ et $P_i = 0.5$. Les conditions initiales choisies sont : $x_{i1}(0) = 0$, $x_{i2}(0) = 0$, $q_i(0) = 0$, $a_i(0) = 0$ et $r_i(0) = 0$. Le terme de robustification donnée dans la remarque 4.4 est utilisé avec $\Phi = 0.05$.

Les résultats de simulation de $y_1 = x_{11}$ et $\dot{y}_1 = x_{12}$ sont donnés Figure 4.4, et de $y_2 = x_{21}$ et $\dot{y}_2 = x_{22}$ sont donnés Figure 4.5. Les signaux de commande sont montrés Figure 4.6. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.

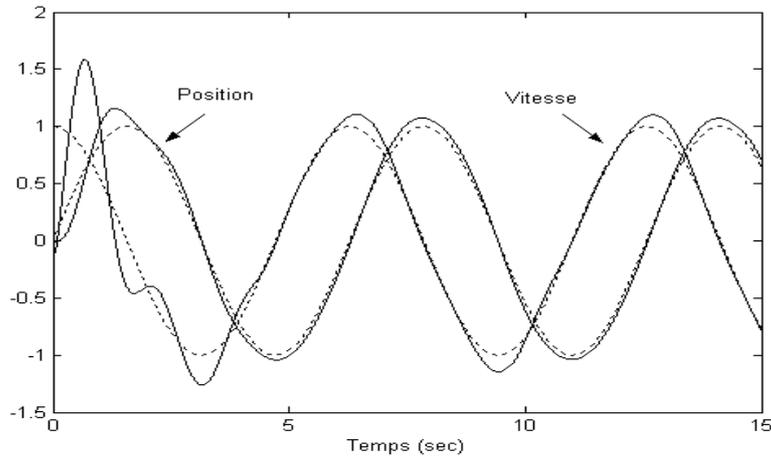


Figure 4.4 : Réponses du premier sous-système, sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

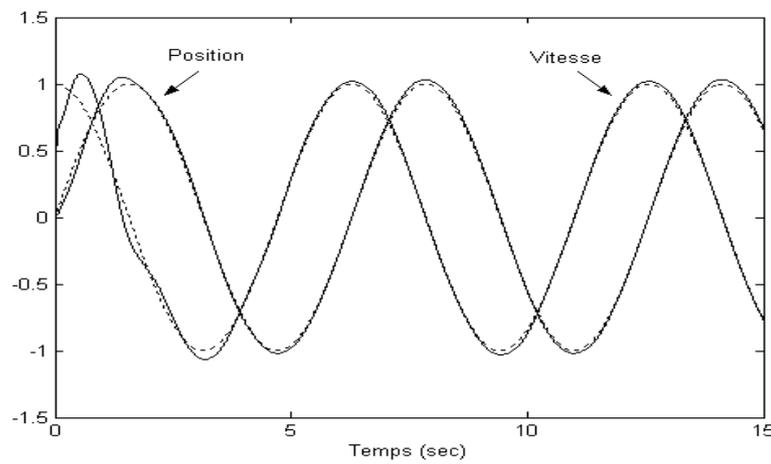


Figure 4.5 : Réponses du deuxième sous-système, sorties (traits continus), consignes (traits discontinus).

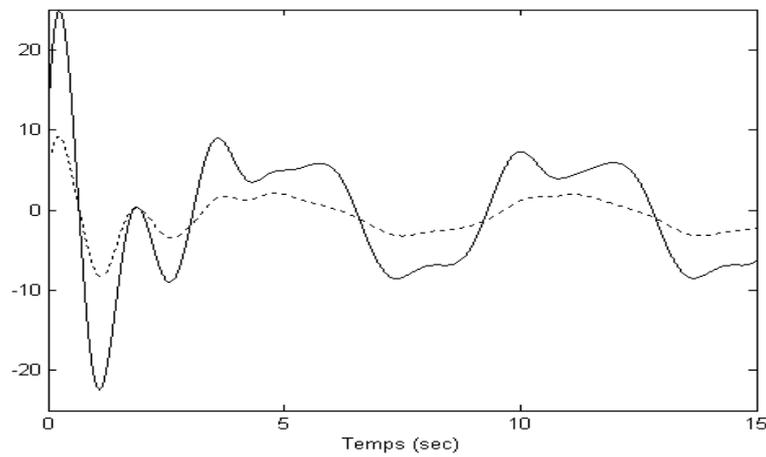


Figure 4.6 : Signaux de commande, u_1 (trait continu), u_2 (trait discontinu).

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié et développé la commande adaptative décentralisée pour une classe de systèmes non linéaires interconnectés en utilisant les systèmes flous. Deux approches de commande décentralisées stables ont été développées et testées avec succès.

La première, c'est l'approche indirecte, qui repose sur l'identification en ligne des non linéarités locales de chaque sous-système par des systèmes flous. La loi de commande consiste d'une loi de commande adaptative floue augmentée d'une composante de robustification. Ce terme de commande robuste est introduit pour assurer la stabilité et la robustesse de la structure de commande par rapport aux erreurs de reconstruction et aux effets des interconnexions entre les sous-systèmes. La loi de commande proposée est toujours bien définie, i.e. le problème de division par zéro ne se pose pas, et l'initialisation par zéro de tous les paramètres ajustés des systèmes flous utilisés est possible.

La deuxième approche proposée est l'approche directe. Dans cette technique, la loi de commande est composée d'une approximation floue d'une loi de commande idéale augmentée d'une composante de commande robuste pour assurer la stabilité et la robustesse de la structure de commande par rapport aux effets des interconnexions et des erreurs d'approximation. Dans cette approche, nous avons allégé la condition de la bornitude de la dérivée du gain de commande par une constante exigée dans [SPO97a, SPO99] par la bornitude par une fonction variable positive continue, qui est une condition moins restrictive.

Il faut noter que les algorithmes de commande décentralisés sont moins complexes comparés aux algorithmes centralisés et, de ce fait, leur implantation est plus facile et leur temps de calcul est réduit.

Conclusion générale

Le thème de recherche présenté dans cette thèse concerne le développement de stratégies de commande adaptatives utilisant les systèmes flous pour les systèmes non linéaires avec des non linéarités inconnues. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux systèmes non linéaires dits linéarisables par bouclage. Le facteur commun de toutes les techniques de commande proposées est l'utilisation des systèmes flous pour l'approximation des dynamiques inconnues des systèmes dans certains cas (approches indirectes), et pour l'approximation des lois de commandes stabilisatrices, dites commandes idéales, dans les autres cas (approches directes). Le problème des erreurs de reconstruction, inhérent à ce type de stratégies de commande, est traité par l'utilisation des termes de commande robuste de mode de glissement. La stabilité et la robustesse de toutes les structures de commande sont étudiées par l'approche de Lyapunov. L'avantage de ces stratégies est leur simplicité de mise en œuvre car, aucune information sur le comportement dynamique du système n'est nécessaire pour l'implantation de la loi de commande et la phase d'initialisation des algorithmes n'exige pas de connaissance a priori. De plus, les approches indirectes peuvent incorporer dans le contrôleur toute information mathématique ou linguistique concernant le système, et les approches directes peuvent incorporer dans le contrôleur toute information mathématique ou linguistique concernant sa commande. Dans ce qui suit, nous donnons un résumé des résultats obtenus et des perspectives à notre travail.

Dans le premier chapitre, une recherche bibliographique a été faite dont le but d'étudier les systèmes flous. A l'issue de cette recherche nous avons constaté qu'ils sont des systèmes non linéaires adaptatifs, capables de manipuler non seulement des données numériques mais également des informations linguistiques. En automatique, l'utilisation des systèmes flous comme éléments de base pour la modélisation et la commande des systèmes repose sur leur propriété d'approximation universelle. Cette utilisation nous épargne, dans la majorité des cas, de la connaissance détaillée du modèle du système et on se contente souvent de son comportement entrée-sortie.

Dans le deuxième chapitre, nous avons proposé et développé des schémas de commande adaptative direct et indirect pour une classe de systèmes non linéaires monovariables en utilisant les systèmes flous. Dans le schéma indirect, deux approches de commande sont proposées. Dans les deux cas, les systèmes flous sont utilisés pour approcher en ligne la dynamique inconnue du système. A partir de ces approximations, une loi de commande adaptative floue, avec ces lois d'adaptation paramétrique, augmentée d'un terme de commande robuste est proposée. La première approche indirecte évite le problème de singularité de la loi de commande par l'utilisation d'un algorithme de projection. Ce dernier permet de forcer les paramètres estimés à rester dans une région prédéfinie par l'utilisateur. Cependant, en pratique, la détermination de telle région n'est pas une tâche facile, car, les valeurs désirées des paramètres ajustés sont inconnues. Pour pallier à ce problème et réduire le nombre de paramètres de conception, une seconde approche est proposée, le problème de la singularité de la loi de commande est résolu par une approximation de l'inverse du gain de commande estimé. Le second schéma de commande proposé concerne la commande adaptative directe floue. Dans ce schéma, le but était l'approximation d'une loi de commande stabilisatrice inconnue et le problème de division par zéro ne se pose pas. Toutefois, il requiert la bornitude de la dérivée du gain de commande par une fonction, condition non exigée par le schéma indirect. Dans ce schéma direct, une loi d'adaptation de type PI est proposée, et la stabilité du système bouclé ne dépend pas de la borne de la dérivée du gain de commande comme c'est le cas dans l'approche de [SPO96a]. Les résultats de la simulation effectuée sur un pendule inversé vérifient l'analyse théorique.

Dans le chapitre trois, la commande adaptative directe et indirecte floue des systèmes non linéaires multivariables MIMO incertains est présentée. En premier lieu, la commande adaptative floue indirecte est développée pour une classe des systèmes non linéaire MIMO. Dans ce schéma de commande, les systèmes flous sont utilisés pour approcher la dynamique inconnue du système et la loi de commande comporte deux termes : un terme de commande floue adaptatif et un terme de robustification pour remédier au problème des erreurs de reconstruction. L'approche de commande proposée n'exige pas la connaissance du modèle du système, garantit la bornitude de tous les signaux dans le système bouclé et assure la convergence vers zéro des erreurs de poursuite. De plus, cette approche évite le problème de singularité de la loi de commande par l'utilisation d'un inverse régularisé, et autorise l'initialisation par zéro de tous les paramètres ajustés des approximateurs flous, et par conséquent n'exige pas de

connaissance a priori sur les valeurs désirées de ces paramètres. En second lieu, un schéma de commande adaptative directe à l'aide des systèmes flous pour une classe de systèmes non linéaires multivariables incertains est proposé. Dans ce schéma, les systèmes flous sont utilisés pour générer directement les signaux de commande à appliquer au système pour garantir les objectifs de commande, et ceci sans identification de la dynamique inconnue du système. Dans ce schéma, nous avons proposé, pour l'adaptation des paramètres des systèmes flous, une loi du type proportionnel intégral à σ -modification et la matrice de commande n'est pas obligatoirement diagonale dominante comme c'est le cas dans [ORD99]. Les résultats de simulation effectuée sur un modèle de manipulateur ont montré la capacité des contrôleurs proposés pour la commande en poursuite des systèmes non linéaires multivariables à dynamique inconnue.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié et développé la commande adaptative décentralisée pour une classe de systèmes non linéaires interconnectés en utilisant les systèmes flous. Deux approches de commande décentralisées stables ont été développées et testées avec succès. La première, c'est l'approche indirecte, qui repose sur l'identification en ligne des non linéarités locales de chaque sous-système par des systèmes flous. La loi de commande consiste d'une loi de commande adaptative floue augmentée d'une composante de robustification. Ce terme de commande robuste est introduit pour assurer la stabilité et la robustesse de la structure de commande par rapport aux erreurs de reconstruction et aux effets des interconnexions entre les sous-systèmes. La loi de commande proposée est toujours bien définie, et l'initialisation par zéro de tous les paramètres ajustés des systèmes flous utilisés est possible. La deuxième approche proposée est l'approche directe. Dans cette technique, la loi de commande est composée d'une approximation floue d'une loi de commande idéale augmentée d'une composante de commande robuste pour assurer la stabilité et la robustesse de la structure de commande par rapport aux effets des interconnexions et des erreurs d'approximation. Dans cette approche, nous avons allégé la condition de la bornitude de la dérivée du gain de commande par une constante exigée dans [SPO97a, SPO99] par la bornitude par une fonction variable positive continue, qui est une condition moins restrictive. Il faut noter que les algorithmes de commande décentralisés sont moins complexes comparés aux algorithmes centralisés et, de ce fait, leur implantation est plus facile et leur temps de calcul est réduit.

A l'issue de ces travaux, cette thèse ouvre de nouvelles perspectives de recherche parmi lesquelles nous citons:

- Dans les stratégies de commande développées dans cette thèse, le vecteur d'état est supposé disponible. En pratique, la mesure de tous les états est généralement impossible à cause de contraintes physiques et/ou du coût élevé des capteurs. Il serait alors intéressant de développer la commande adaptative floue avec observateur.
- L'approche adaptative indirecte développée au chapitre 3 nécessite une matrice de commande définie positive (définie négative), une extension de cette approche au cas général serait intéressante.
- L'approche adaptative directe développée au chapitre 3 assurent seulement la bornitude des erreurs de poursuite, on peut alors prévoir l'amélioration de cette approche pour assurer la convergence vers zéro de toutes les erreurs de poursuite.

Bibliographie

- [BOU98a] O. Bouhali, Etude et développement de méthodes de commande adaptative centralisée et décentralisée en utilisant différents types de réseaux de neurones artificiels : application au robot PUMA 560. Thèse de Magister, ENP, Oct. 1998.
- [BOU98b] R. Boukezzoula, S. Galichet and L. Foulloy, "Apprentissage de lois de commande floues pour les systèmes non linéaires (synthèse directe et indirecte)," *Actes des Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications LFA '98*, Rennes, pp. 19-27, 1998.
- [BUH94] H. Buhler, *Le réglage par logique floue*. Presses Polytechniques Rommandes, 1994.
- [CHA00] C.Y. Chang, "Robust tracking control for nonlinear MIMO systems via fuzzy approaches", *Automatica*, vol. 36, pp.1535-1545, 2000.
- [CHA01] C.Y. Chang, "Adaptive fuzzy-based tracking control for nonlinear SISO systems via VSS and H^∞ approaches," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol 9, pp. 278-292, 2001.
- [CHE96] B.S. Chen, C.H. Lee, and Y.C. Chang, " H^∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 32-43, 1996.
- [CHE99] Y.-M. Cheng, B.-S. Chen, and F.-Y. Chiau, "Adaptive wavelet network control design for nonlinear systems," *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A)*, vol. 22, no. 6, pp. 786-799, 1999.
- [CHE03] H. Chekireb, M. Tadjine and D. Bouchaffra, "Direct adaptive fuzzy control of nonlinear system class with applications," *Control and Intelligent Systems*, vol. 31, no. 2, 2003.
- [CHI98] C.-J. Chien and L.-C. Fu, "Adaptive control of interconnected systems using neural network design," in *Proc 37th IEEE CDC*, pp. 529-530, 1998.
- [COM96] S. Commuri and F.L. Lewis, "Design and stability analysis of adaptive-fuzzy controller for a class of nonlinear systems," *Proc. 35th CDC*, pp. 2729-2730, 1996.
- [ELS02] A.L. Elshafei, "Adaptive fuzzy control of nonlinear systems via a variable structure algorithm," in *Proc. 2002 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 620-625, 2002.
- [GAV89] D.T. Gavel and D.D. Siljak, "Decentralized adaptive control: structural conditions for stability," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 34, no. 4, pp. 413-425, 1989.

- [GAZ00] V. Gazi and K.M. Passino, "Direct adaptive control using dynamic structure fuzzy systems," in *Proc. of 2000 ACC*, pp. 1954-1958, June 2000.
- [GOL03] N. Golea, A. Golea, and K. Benmahammed, "Stable indirect fuzzy adaptive control," *Fuzzy sets and Systems*, vol. 137, pp. 353-366, 2003.
- [GUE03] T.M. Guerra, S. Delprat, and S. Labiod, "Nouvelles Conditions de stabilisation relâchées pour des descripteurs flous," *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications*, Tours, France, pp. 161-168, Nov. 2003.
- [HAN01] H. Han, C.Y. Su, and Y. Stepanenko, "Adaptive control of a class of nonlinear systems with nonlinearly parameterized fuzzy approximators," *IEEE Trans Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 315-323, 2001.
- [HAN03] H. Han and S. Murakami, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with state observer," in *Proc. 2003 IEEE International Symposium on computational Intelligence and Automation*, pp. 1399-1403, Japan, July 2003.
- [HEN97] M.M. Heniche, Sur l'utilisation des réseaux de neurones artificiels et des systèmes flous pour la linéarisation et la commande de processus chimiques non linéaires, Thèse de Magister, ENP, 1997.
- [HOJ02] M. Hojati and S. Gazor, "Hybrid adaptive fuzzy identification and control of nonlinear systems," *IEEE Trans Fuzzy Syst.*, vol. 10, no. 2, pp. 198-210, 2002.
- [HUA03] S. Huang, K.K. Tan, and T.H. Lee, "Decentralized control design for large scale systems with strong interconnections using neural networks," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 48, no. 5, pp. 805-810, 2003.
- [IOA86] P.A. Ioannou, "Decentralized adaptive control of interconnected systems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 31, pp. 291-298, Apr. 1986.
- [ISI91] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. New York, Springer Verlag, 1989.
- [JAI97] S. Jain and F. Khorrami, "Decentralized adaptive output feedback design for large scale nonlinear systems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 42, no. 5, pp. 729-735, 1997.
- [JAN93] J.R. Jang, "ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 23, no. 3, pp. 665-685, 1993.
- [JAN95] J.S.R. Jang and C.T. Sun, "Neuro-Fuzzy modeling and control," *Proc. IEEE*, vol. 83, no. 3, pp. 378-406, Mar. 1995.
- [KAN98] H.J. Kang, H. Lee, and M. Park, "Comments on H^∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 6, pp. 605-606, 1998.
- [KHA96] H.K. Khalil, "Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 2, pp. 177-188, Feb. 1996.
- [KOK01] P. Kokotovic and M. Arkac, "Constructive nonlinear control: a historical perspective," *Automatica*, vol. 37, pp. 637-662, 2001.

- [KOO01] K.M. koo, "stable adaptive fuzzy controller with time-varying dead-zone," *Fuzzy Sets and Systems*, vol 121, pp. 161-168, 2001.
- [KOS92] B. Kosko, *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- [KRS95] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control design*. New York: Wiley Interscience, 1995.
- [LAB98] S. Labiod, *Commande adaptative par systèmes flous: application aux robots manipulateurs*, Thèse de Magister, ENP, 1998.
- [LAB03a] **S. Labiod** and M.S. Boucherit, "Direct stable fuzzy adaptive control of a class of SISO nonlinear systems," *Archives of Control Sciences*, vol 13, no. 1, pp. 95-110, 2003.
- [LAB03b] **S. Labiod**, M.S. Boucherit, and T.M. Guerra, "Commande adaptative floue d'une classe de systèmes non linéaires monovariables," *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications*, Tours, France, pp. 169-176, Nov. 2003.
- [LAB03c] **S. Labiod**, M.S. Boucherit and O. Bouhali, "Stable indirect adaptive fuzzy control of a class of SISO nonlinear systems," *Acceptée in Archives of Control Sciences*.
- [LAB03d] **S. Labiod**, M.S. Boucherit, and T.M. Guerra, "Fuzzy adaptive control of a class of MIMO nonlinear systems," *Soumise à Fuzzy Sets and Systems*.
- [LAB03e] **S. Labiod**, M.S. Boucherit, and T.M. Guerra, "Commande adaptative floue d'une classe de systèmes non linéaires multivariables," *Soumise au Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*.
- [LAB04] **S. Labiod**, M.S. Boucherit, and T.M. Guerra, "Commande adaptative indirecte décentralisée floue des systèmes non linéaires interconnectés," *Soumise à Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2004)*, Tunisie, 22-24 Novembre 2004.
- [LEU99] Y.-C. Leu, T.-T. Lee, and W.-Y. Wang, "Observer-based adaptive fuzzy-neural control for unknown nonlinear dynamical systems," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 29, no. 5, pp. 583-591, Oct. 1999.
- [LI03] H.-X. Li and S. Tong, "A hibryd adaptive fuzzy control for a class of nonlinear MIMO systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, n° 1, p. 24-34, Feb. 2003.
- [LIU97] M. Liu, "Decentralized adaptive control for robot arm tracking," in *Proc. Int. Conf. Robotics Automat.*, pp. 1731-1736, 1997.
- [MAM77] E. H. Mamdani, "Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis," *IEEE Trans. Computers*, vol. 26, no. 12, pp. 1182-1191, Dec. 1977.
- [MEN95] J. M. Mendel, "Fuzzy systems for engineering: A tutorial," *Proc. IEEE*, vol. 83, no. 3, pp. 347-377, Mar. 1995.

- [NAR87] K. S. Narandra and A. M. Annaswamy, "A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, no. 2, pp. 134-145, Feb. 1987.
- [ORD99] R. Ordonez and K.M. Passino, "Stable multi-input multi-output adaptive fuzzy/neural control," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 7, n°3, p.345–353, 1999.
- [PAR03] J.-H. Park and G.-T. Park, "Adaptive fuzzy observer with minimal dynamic order for uncertain nonlinear systems," *IEE Proc. Contr. Theory Appl.*, vol. 150, no. 2, pp. 189-197, March 2003.
- [PAS98] K.M. Passino and S. Yurkovich, *Fuzzy Control*. Addison-Wesley Longman Inc., 1998.
- [POL96] M. M. Polycarpou, "Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 41, no. 3, pp. 447-451, Mar. 1996.
- [PRO78] T. J. Procyk and E. H. Mamdani, "A linguistic self-organizing process controller," *Automatica*, vol. 15, pp. 15-30, 1978.
- [SAN92] R. M. Sanner and J. J. E. Slotine, "Gaussian networks for direct adaptive control," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, pp. 837-863, Mar. 1990.
- [SAS89a] S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive Control, Stability, Convergence and Robustness*. Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [SAS89b] S. Sastry and A. Isidori, "Adaptive control of linearizable systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 34, pp. 1123-1131, 1989.
- [SER89] H. Seraji, "Decentralized adaptive control of manipulators: Theory, simulation, and experimentation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 5, no. 2, pp. 183-201, Apr. 1989.
- [SHI92] L. Shi and S.K. Singh, "Decentralized adaptive controller design for large scale systems with higher order interconnections," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 37, no. 8, pp. 1106-1118, 1992.
- [SLO 91] J.E. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [SPO96a] J.T. Spooner and K.M. Passino, "Stable adaptive control using fuzzy systems and neural networks," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, pp. 339-359, 1996.
- [SPO96b] J.T. Spooner and K.M. Passino, "Adaptive control of a class of decentralized nonlinear systems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 41, no. 2, pp. 280-284, 1996.
- [SPO97a] J.T. Spooner and K.M. Passino, "Direct adaptive fuzzy control for a class of decentralized systems," in *Proc. ACC*, pp. 2863-2867, 1997.
- [SPO97b] J.T. Spooner and K.M. Passino, "Indirect adaptive fuzzy control for a class of decentralized systems," in *Proc. ACC*, pp. 3306-3310, 1997.
- [SPO99] J.T. Spooner and K.M. Passino, "Decentralized adaptive control of nonlinear systems using radial basis neural networks," *IEEE Tans. Aut. Contr.*, vol. 44, no. 11, pp. 2050-2057, 1999.

- [SU94] C. Y. Su and Y. Stepanenko, "Adaptive control of a class of nonlinear systems with fuzzy logic," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 2, p.285-294, 1994.
- [SUG85] M. Sugeno and G. T. Kang, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [SUG88] M. Sugeno and G. T. Kang, "Structure identification of fuzzy models," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, pp. 15-33, 1988.
- [TAN99] Y. Tang, N. Zhang and Y. Li, "Stable fuzzy adaptive control for a class of nonlinear systems," *Fuzzy sets and Systems*, vol. 104, pp.279-288, 1999.
- [TON99] S. Tong, Q. Li and T. Chai, "Fuzzy adaptive control of a class of nonlinear systems," *Fuzzy sets and Systems*, vol. 101, pp. 31-39, 1999.
- [TON00] S. Tong, J. Tang, and T. Wang, "Fuzzy adaptive control of multivariable nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 111, pp.153-167, 2000.
- [TON02] S. Tong and H.-X. Li, "Direct adaptive fuzzy output tracking control of nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 128, pp.107-115, 2002.
- [TON03a] S. Tong and H.-X. Li, "Fuzzy adaptive sliding-mode control for MIMO nonlinear systems," *IEEE Trans Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 5, pp. 354-360, June 2003.
- [TON03b] S. Tong, H.-X. Li, and G. Chen, "Adaptive fuzzy control for a class of large-scale nonlinear systems," *IEEE Trans syst., Man, Cybern.- part B*, 2003.
- [TSA99] D.-L. Tsay, H.-Y. Chung, and C.-J. Lee, "The adaptive control of nonlinear systems using the sugeno-type of fuzzy logic," *IEEE Trans Fuzzy Syst.*, vol. 7, no. 2, pp. 225-229, April 1999.
- [WAN92a] L. X. Wang and J. M. Mendel, "Generating fuzzy rules from numerical data, with applications," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics*, vol. SMC-22, pp. 1414-1427, 1992.
- [WAN92b] L.X. Wang and J.M. Mendel, "Fuzzy Basis Functions, Universal Approximation and Orthogonal Least-Squares Learning," *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992.
- [WAN92c] L.X. Wang, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems," *Proc. 31st Conf. Dec. Contr.*, pp. 2511-2516, 1992.
- [WAN94] L.X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Clifs, NJ, 1994.
- [WAN02] C.-H. Wang, H.-L. Liu, and T.-C. Lin, "Direct Adaptive Fuzzy-Neural Control With State Observer and Supervisory Controller for Unknown Nonlinear Dynamical Systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 10, no. 1, pp. 39-49, Feb 2002.
- [ZHA01] T.-P. Zhang, "Stable adaptive fuzzy sliding mode control of interconnected systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 122, pp. 5-19, 2001.