

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

SIMULATION D'UNE ANALYSE SPECTRALE
NUMERIQUE D'E. E. G.

Proposé par :
D.E. AZOUZ

Etudié par :
N. BENIDDIR
K. DJEZZAR

Dirigé par :
D.E. AZOUZ

PROMOTION : JANVIER 1985

المسيرة الوطنية للعلوم الحديثة
العلمية
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

- . A mon père
- . A ma mère
- . A toute ma famille
- . A tous mes amis sincères

N. BENIDDIR

- . A mes parents
- . A toute ma famille
- . A mes amis (ies)

K. DJEZZAR

R E M E R C I E M E N T S

Nous tenons à exprimer nos plus vifs remerciements à notre promoteur Monsieur D.E. AZOUZ qui n'a ménagé ni ses efforts ni son temps pour nous aider et grâce à qui ce travail s'est réalisé dans de bonnes conditions.

Notre gratitude va aussi à Mr. R. BENIDDIR, Mme. A. MESSADI, Mr. KAOUAH, Dr. A. BENGOUNIA et Mr. K. BENAÏSSA pour leur aide considérable.

Que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

TABLE DES MATIERES

- INTRODUCTION
- PRESENTATION

PARTIE A

CHAPITRE 1 : PRELIMINAIRES MATHÉMATIQUES	
- DEFINITIONS FONDAMENTALES SUR LES SIGNAUX	1
- REPRESENTATIONS DES SIGNAUX	1
- ÉCHANTILLONNAGE	2
- LA TRANSFORMATION EN Z	4
- LA TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE	8
CHAPITRE 2 : LA TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE	
- PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE COOLEY - TUKEY	14
- ALGORITHME DE COOLEY	15
- ADAPTATION DE L'ALGORITHME À LA PROGRAMMATION	21
CHAPITRE 3 : FILTRAGE NUMÉRIQUE	
- FILTRES NON RÉCURSIFS ET RÉCURSIFS	25
- SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES	26
- STRUCTURES DES FILTRES NUMÉRIQUES	30
- LES FONCTIONS FENÊTRES	33
CHAPITRE 4 : ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE DES SIGNAUX ALÉATOIRES	
- DÉFINITIONS STATISTIQUES FONDAMENTALES	35
- ESTIMATEURS POUR LA CORRELATION	38
- ESTIMATEURS SPECTRAUX DE PUISSANCE	39
- APPLICATION DE LA FFT À L'ÉVALUATION DES ESTIMATEURS SPECTRAUX	43

PARTIE B

APPLICATION A L'ANALYSE SPECTRALE DE L'E.E.G.	46
- ELECTROENCEPHALOGRAPHIE	46
- ELECTROENCEPHALOGRAPHE	53
- UTILITE D'UNE ANALYSE SPECTRALE DE L'E.E.G	56
- CHOIX DE L'ESTIMATEUR SPECTRAL DE PUISSANCE	57
- DISCUSSION ET CALCUL DES CONTRAINTES	61
SIMULATION DES SIGNAUX E.E.G.	
- GENERATION NUMERIQUE DU MODELE	63
- BANDE DE FREQUENCE DU MODELE	66
- SYNTHESE DU FILTRE A 75 hz DU MODELE	67

PARTIE C

- PRESENTATION DES PROGRAMMES	
- PROGRAMME SIMULATION	
- PROGRAMME ANALYSE SPECTRALE	
- RESULTATS ANALYSE SPECTRALE	
- INTERPRETATION DES RESULTATS	
- RECOMMANDATIONS	
- CONCLUSION	
- ANNEXES	
- BIBLIOGRAPHIE	

I N T R O D U C T I O N

G E N E R A L I T E S

Dans l'électronique actuelle la part prise par les signaux numériques est de plus en plus grande. Ceci est dû à la facilité relative de construction et d'utilisation des circuits intégrés numériques (notamment les microprocesseurs) pouvant traiter de tels signaux par rapport aux circuits analogiques classiques. Le signal numérique étant généralement issu d'un signal analogique par les opérations d'échantillonnage et de conversion analogique-numérique, il est donc important en théorie du signal d'examiner dans quelles conditions ces opérations ne modifient pas la quantité d'information contenue dans le signal initial (analogique).

En matière de traitement numérique du signal sont donc apparues certaines théories descriptives des signaux et systèmes numériques.

A l'instar des signaux analogiques, les signaux numériques sont décrits soit, dans le domaine temps, soit dans celui des fréquences. La description fréquentielle (spectre d'amplitude ou de puissance) d'un signal numérique est assez difficile à visualiser sur le plan pratique.

L'analyse spectrale numérique des par la transformée de Fourier ne s'est développée que la mise au point en 1965 d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). Il aura fallu attendre 1975 pour voir apparaître les premiers analyseurs de spectres FFT temps réel ayant de bonnes caractéristiques principalement de stabilité, dynamique et de linéarité. L'analyse spectrale par FFT trouve actuellement de nombreux domaines d'applications surtout en basse fréquence où elle est plus performante que les systèmes analogiques. Comme exemple d'applications, il y a : la signature des machines tournantes, l'analyse des structures mécaniques, l'acoustique la médecine et l'électronique bien entendu où la connaissance des spectres de sortie par exemple permettent de déceler la distorsion harmonique engendrée par ceux-ci.

P R E S E N T A T I O N

L'objet de l'étude demandée consiste en l'analyse spectrale numérique des signaux issus d'un électroencéphalogramme dans le but d'une contribution à la conception d'un système complet d'analyse médicale. Cette analyse spectrale est réalisée par un programme estimant des spectres qui permettent une exploitation facile des résultats.

Dans la partie A, le chapitre I présente les notions théoriques et les mathématiques essentiellement appliquées pour le traitement numérique du signal. Le chapitre II décrit de façon détaillée l'algorithme de Cooley-Tukey de transformation de Fourier rapide (TFR ou FFT en anglais) faisant ressortir son caractère principal de calcul rapide de la transformée de Fourier discrète (TFD). La nécessité d'un filtrage s'étant imposée au cours de l'étude, le chapitre III traite des méthodes courantes d'analyse et de synthèse des filtres numériques. Par ailleurs, la nature des signaux à traiter étant aléatoire le chapitre IV précise les notions de stationnarité et d'ergodicité. De plus, la description fréquentielle des signaux aléatoires et les méthodes fondamentales d'estimation de spectres y sont développées.

Le chapitre I de la partie B décrit le système d'analyse spectrale de l'électroencéphalogramme (E.E.G) et développe toutes les méthodes utilisées lors de son établissement.

Dans le IIème chapitre de cette partie est établi un modèle de signal E.E.G (simulation) qui permet de tester le programme d'analyse spectrale.

La partie C comporte les programmes développés pour la simulation et l'analyse spectrale des signaux E.E.G ainsi que les résultats obtenus lors de leurs tests sur l'ordinateur VAX 750/11 (32 bits).

En conclusion, il sera donné quelques précisions sur les éléments à adjoindre ou à transformer dans le système en vue de son automatisation et de meilleures performances.

PARTIE A

- DEFINITIONS FONDAMENTALES SUR LES SIGNAUX -

LE SIGNAL :

Le signal peut être défini comme le support physique d'une information.

Mathématiquement, les signaux sont représentés par une fonction d'une ou plusieurs variables.

LE SIGNAL ANALOGIQUE :

Un signal est dit analogique lorsqu'il peut être représenté par une fonction d'une ou plusieurs variables continues.

Un signal analogique dont l'amplitude est discrète est appelé signal quantifié.

LE SIGNAL DISCRET :

Un signal est dit discret, ou échantillonné, lorsque sa représentation est une fonction d'une ou plusieurs variables discrètes.

Un signal discret, dont l'amplitude est discrète, est appelé signal numérique.

REPRESENTATION DES SIGNAUX

Le signal en général est susceptible de deux modes de représentations, selon la nature de la variable indépendante adoptée :

- . Si cette variable est le temps, la représentation est dite temporelle.
- . Si cette variable est la fréquence, la représentation est dite fréquentielle.

L'intérêt de décrire un signal dans les deux domaines (fréquence et temps) provient du fait que les deux descriptions se complètent.

L'outil fondamental de l'analyse fréquentielle est la transformation de Fourier (Annexe A1) où :

.../...

. La transformation directe fournit le spectre d'un signal défini dans le domaine temporel.

. La transformation inverse permet de revenir du spectre au signal initial.

E C H A N T I L L O N N A G E

La méthode la plus utilisée pour générer un signal discret est l'échantillonnage d'un signal analogique. Les échantillons sont prélevés périodiquement avec une période T_e appelée période d'échantillonnage.

Quelle que soit la valeur de T_e , le signal obtenu après échantillonnage sera un signal discret. Ce n'est que dans le cas de la reconstitution du signal analogique qu'il faut imposer une contrainte dans le choix de T_e .

THEOREME D'ECHANTILLONNAGE :

Un signal analogique $x(t)$ ayant une largeur de bande finie limitée à F (Hz) ne peut être reconstitué exactement à partir de ses échantillons $x(KT_e)$ que si ceux ci ont été prélevés avec une période T_e inférieure ou égale à $1/2 F$.

ECHANTILLONNAGE IDEALISE :

L'échantillonnage idéalisé est réalisé en multipliant un signal analogique $x(t)$ par un peigne de dirac $\Pi(t)$ (fig.A.1)

La transformée de Fourier (Annexe A) de ce produit est la convolution des transformées de deux signaux :

$$x(t) \Pi(t) \iff X(f) * \sum_n \left(\frac{1}{T_e}\right) \delta(f - n F_e)$$

$$\text{ou } X(f) * \sum_n \left(\frac{1}{T_e}\right) \delta(f - n F_e) = \frac{1}{T_e} \sum_n X(f - n F_e)$$

La figure A.1. montre que le spectre d'un signal échantillonné impulsionnellement est constitué par la répétition périodique du spectre de ce signal. Le non respect du théorème d'échantillonnage engendre un effet de recouvrement qui fausse la récupération fidèle du signal $X(f)$ initial.

DOMAINE TEMPOREL :

DOMAINE FREQUENTIEL :

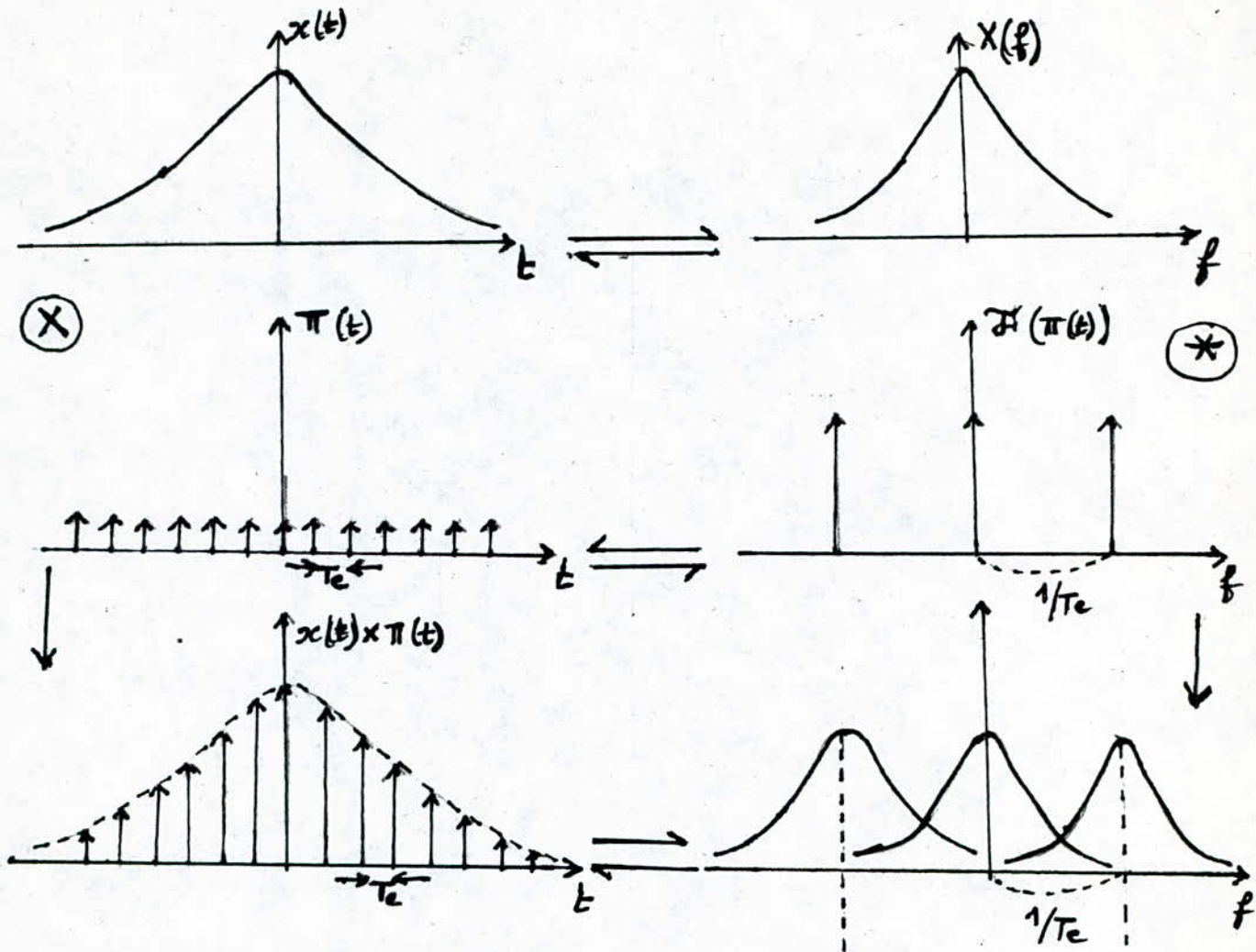


Fig. A.1 : Spectre du signal échantillonné.

AVEC :

- ⊗ : Multiplication de signaux .
- ⊛ : Convolution des signaux
- ↓ : résultat de l'opération .

En pratique, on cherche à diminuer la valeur de T_e afin d'éloigner les spectres secondaires et pouvoir alors filtrer correctement $X(f)$.

LA TRANSFORMATION EN Z :

La transformation en Z est un outil puissant, surtout sur le plan théorique. Elle peut être considérée comme une généralisation de la transformation de Fourier.

Elle permet, de part sa nature générale, la représentation d'un signal possédant une infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombres. Ces nombres caractérisent complètement le signal, et permettent de le reconstituer entièrement.

DEFINITION DE LA TRANSFORMÉE EN Z.

La transformée en Z, $X(Z)$ d'un signal $x(k)$ est définie par :

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) Z^{-k} \quad (1-1)$$

où Z est une variable complexe

et $X(Z)$ une fonction complexe de la variable Z.

Il est à noter, que dans l'étude des signaux et des systèmes causaux, on utilisera la transformée en Z unilatérale définie par :

$$X(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) Z^{-k} \quad (1-2)$$

EXISTENCE DE LA TRANSFORMÉE EN Z :

La série de puissance (1-1) pose le problème de convergence .

Dans ce cas on examine, le domaine de convergence de la série (1-2).

En général, cette série converge à l'extérieur d'un cercle de rayon R_x -, dans le plan de Z, donné par :

$$R_x = \lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)|^{1/k} \quad (1-3)$$

LA TRANSFORMÉE EN Z INVERSE

La relation donnant $x(k)$ à partir de $X(Z)$ est :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(Z) Z^{k-1} dZ \quad (1-4)$$

où Γ : contour d'intégration qui doit être dans la région de convergence, il doit être fermé et il doit entourer l'origine du plan des Z dans le sens positif.

Dans l'évaluation de la transformée en Z inverse, on distingue plusieurs méthodes telles que :

- . La méthode des résidus,
- . Le développement en série de puissance de z ,
- . le développement par division,

Des tables de transformées de fonctions de z primaires ont été établies pour faciliter l'évaluation de la transformée en z inverse à l'aide des méthodes de développements. (VOIR ANNEXE : A-4)

RELATION AVEC LA TRANSFORMÉE DE FOURIER :

A partir de la relation de définition (1-1) on démontre que la transformée de Fourier est la transformée en Z évaluée sur le cercle unité $|Z|=1$, autrement dit :

$$X(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{j\omega t_0 k} = X(f) \quad (1-5)$$

L'intérêt de cette relation réside dans le fait que même si la transformée de Fourier d'un signal donné ne converge pas (voir conditions de convergence en Annexe A1), la transformée en Z du même signal peut converger.

RELATION AVEC LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE :

Considérons la transformée de Laplace bilatérale $X_a(S)$ d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{st} dt \quad (1-6)$$

Si le signal $x_a(t)$ est échantillonné périodiquement avec la période T_e conformément au théorème d'échantillonnage

il vient $X_e(S) =$

$$X_e(S) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(kT_e) e^{-s k T_e} \quad (1-7)$$

Il ressort que la transformée de Laplace d'un signal échantillonné est la transformée en Z du signal numérique correspondant évalué pour $Z = e^{sT_e}$, ou a alors

$$X(Z) \Big|_{Z=e^{sT_e}} = X_e(S) \quad (1-8)$$

APPLICATION DU PLAN DES S SUR LE PLAN DES Z :

La relation $Z = e^{sT_e}$ établit l'application du plan complexe des S sur le plan complexe des Z et vice versa. Toutefois, cette application n'est pas bi-univoque. En effet, Z étant complexe d'où :

$$Z = |Z| e^{j \arg(Z)} = e^{\text{Log}|Z| + j \arg(Z)}$$

$$Z = e^{sT_e} \quad \text{d'où} \quad s = \frac{1}{T_e} \text{Log}|Z| + j \frac{\arg(Z)}{T_e}$$

usuellement $s = \sigma + j2\pi f$ d'où en identifiant parties réelles et imaginaires on obtient.

$$\sigma = \frac{1}{T_e} \text{Log}|Z| \quad (1-9)$$

$$f = \frac{\arg(Z)}{2\pi T_e} \quad (1-10)$$

Les deux relations ci-dessus indiquent que :

- l'axe imaginaire du plan des S est découpé en tranches de longueur $\frac{1}{T_e}$.
L'image de chacune de ces tranches dans le plan des Z est le cercle unité.
- La moitié gauche dans le plan des S est appliquée à l'intérieur du cercle unité dans le plan des Z.
- La moitié droite dans le plan des S est appliquée, dans le plan des Z, à l'extérieur du cercle unité.

TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRETE (T.F.D.)

La transformation de Fourier des signaux numériques, telle que définie en annexe (A1 et A3) n'est pas sous une forme appropriée pour un traitement numérique pratique.

Des modifications nous permettent d'obtenir une version discrète, appelée TFD, qui se présente sous une forme pratiquement utilisable.

Ce qui rend la TFD attractive, c'est l'existence d'un algorithme, présenté en détail au chapitre suivant, permet d'élargir le domaine d'utilisation de la TFD.

PRINCIPE DE PASSAGE DE LA TF A LA TFD.

Pour que la transformation de Fourier, donnée en Annexe (A-1) s'adapte au traitement numérique, il faut d'une part discrétiser la variable continue f et d'autre part, limiter la durée du signal $x(k)$ dans les relations directe et inverse :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} \quad (1-11)$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f k} df \quad (1-12)$$

La discrétisation de la fréquence se fait en remplaçant la variable continue f par une variable discrète n telle que :

$$f = n \Delta f \quad (1-13)$$

où Δf est l'incrément utilisé sur l'axe des fréquences.

$X(f)$ étant périodique de période 1, on peut diviser en N incréments.

$$\Delta f = \frac{1}{N} \quad (1-14)$$

Si la période choisie va de $-1/2$ à $1/2$, les N valeurs de la variable discrète n seront :

$$n = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (1-15)$$

Ce changement de variable approxime la transformée de Fourier inverse, relation (1-12), par une somme du type :

$$x(k) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (1-16)$$

La valeur exacte de cette somme sera dénotée par :

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (1-17)$$

Pour trouver la relation qui existe entre $x_p(k)$ et $x(k)$, on peut substituer la relation (1-11), modifiée avec le changement (1-13), dans la relation (1-17) dans la relation (1-17), il vient :

$$x_p(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iN+k) \quad \text{pour } k = -\infty, \dots, +\infty \quad (1-18)$$

La relation (1-18) indique que le signal périodique $x_p(k)$ est obtenu par répétition périodique de période N du signal $x(k)$.

Si la durée du signal aperiodique $x(k)$ est limitée à N chaque période du signal $x_p(k)$ est une réplique exacte de $x(k)$.

Si cette durée est supérieure à N , un recouvrement a lieu empêchant d'extraire $x(k)$ exactement à partir d'une période de $x_p(k)$. Ainsi nous n'aurons $x(k) = x_p(k)$ (1.18) que pour les signaux à durée limitée.

Si les signaux sont de durée M inférieure à N , il faut prolonger ces signaux de $(N-M)$ échantillons nuls.

Il est à remarquer que le changement de variable (1-13) qui n'est rien d'autre que l'échantillonnage de la transformée de Fourier (1-11) introduit la répétition périodique indiquée par (1-18).

En règle générale donc :

La transformée de Fourier, inverse aussi bien que directe, d'une fonction échantillonnée est une fonction périodique dont la période est l'inverse de la période d'échantillonnage.

DEFINITION DE LA T.F.D. POUR LES SIGNAUX PERIODIQUES :

(Voir en annexe(A6) Notation $W_N = \exp(j \frac{2\pi}{N})$)

les relations définissant la transformée de Fourier discrète pour des signaux périodiques de période N sont :

$$X_p(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) W_N^{-mk} \quad \text{pour } m = -N/2, \dots, N/2-1$$

$$\text{et } x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} X_p(m) W_N^{mk} \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1$$

DEFINITION DE LA T.F.D. POUR LES SIGNAUX APERIODIQUES :

(1-21)

Pour les signaux aperiodiques de durée limitée à N , la T.F.D sera

$$X(N) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) W_N^{-nk} \quad \text{avec } n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1$$

et la transformée inverse sera :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) W_N^{nk} \quad (1-23) \quad (1-22)$$

D'après ce qui a été développé dans le principe de passage de TF à T.F.D, il faut restreindre les valeurs de k à l'intervalle $(k_0, k_0 + N)$, pour cette dernière relation (1-23).

T.F.D POUR SIGNAUX REELS.

Il est possible de réduire de moitié les calculs définis par la T.F.D, pour un signal quelconque, en appliquant ce que l'on appelle encore : couplage de TFD.

Ceci n'est valable que pour des signaux réels.

C'est une méthode qui sera utilisée dans la partie C. pour le programme FFT.

Le calcul des TFD de deux suites périodiques réelles, $x(k)$ et $y(k)$ de même période N donne :

$$\begin{cases} X(n) = Ax(n) + j Bx(n) \\ Y(n) = Ay(n) + j By(n) \end{cases} \quad (1-24)$$

Il est possible de retrouver ce résultat en appliquant une seule T.F.D

Pour ceci, il faut former la suite $z(k)$ complexe telle que

$$z(k) = x(k) + j y(k) \quad (1-25)$$

La T.F.D de $Z(k)$ peut s'évaluer de deux manières :

$$Z(n) = A(n) + j B(n) \text{ ou bien}$$

$$Z(n) = X(n) + j Y(n) = Ax(n) - By(n) + j [Bx(n) + Ay(n)]$$

D'où les deux premières relations :

$$\begin{cases} A(n) = Ax(n) - By(n) \\ B(n) = Bx(n) + Ay(n) \end{cases} \quad (1-27)$$

Il se démontre que la partie réelle de la transformée de Fourier d'un signal réel est une fonction paire et que sa partie imaginaire est une fonction impaire.

d'où en remplaçant n par $(N - n)$, il vient les deux autres relations :

$$\begin{cases} A(N - n) = Ax(n) + By(n) \\ B(N - n) = -Bx(n) + Ay(n) \end{cases} \quad (1-28)$$

D'où en combinant (I - 27) et (I - 28) on tire les parties réelles et imaginaires de chacune des T.F.D de $X(n)$ et $Y(n)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x(n) = \frac{1}{2} [A(n) + A(N-n)] \\ B_x(n) = \frac{1}{2} [B(n) - B(N-n)] \\ A_y(n) = \frac{1}{2} [B(n) + B(N-n)] \\ B_y(n) = \frac{1}{2} [A(N-n) - A(n)] \end{array} \right.$$

(1 - 29)

T F D DES SIGMAUX A DUREE ILLIMITEE

Il a été montré précédemment qu'un signal ne peut être représenté complètement par N échantillons de sa transformée de Fourier qui si sa durée est limitée à N. On ne peut pas définir exactement la T.F.D d'un signal à durée illimitée.

La T.F.D dans ce cas, n'est définie qu'approximativement en limitant la durée du signal par un moyen appropriée.

Ces moyens de limitation de durée sont appelés fenêtres. Les principales fenêtres existantes ainsi que la qualité, de leur limitation de durée, sur la T.F.D seront examinées au chapitre 3 lors de l'étude du filtrage numérique.

LA TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE

L'emploi de la T.F.D, étudiée au chapitre 1, comporte une sévère limitation : En effet le calcul de N échantillons d'une période spectrale exige N^2 opérations.

Une organisation méthodique du calcul de la T.F.D ramène le nombre des opérations, à effectuer à une valeur de l'ordre $N \log_2 N$ (fig . A-2)

L'ensemble des méthodes permettant d'accélérer le calcul de la TFD constitue la T.F.R. La T.F.R a considérablement augmenté la rapidité, la souplesse et la précision du traitement du signal.

Les algorithmes constituant la T.F.R sont en nombre illimité. On se limitera dans cette étude, à l'algorithme de Cooley Tukey de base 2.

Le lecteur désireux approfondir d'autres algorithmes ou d'autres bases pourra se référer à (Lifferrmann, 1981).

Le but de cette étude est de mettre l'algorithme de Cooley Turkey sous une forme adaptée à la programmation en FORTRAN.

Cependant, pour faciliter la compréhension de cet algorithme, nous avons jugé utile de donner sa représentation graphique.

A cet effet, deux méthodes sont proposées :

- * La première, utilisant les équations mathématiques définissant les états intermédiaires de la représentation. Cette méthode demande beaucoup de calcul pour des $N \geq 2^3$
- * La deuxième, beaucoup plus pratique, permet une représentation graphique même pour N élevé, sans passer par les équations mathématiques.

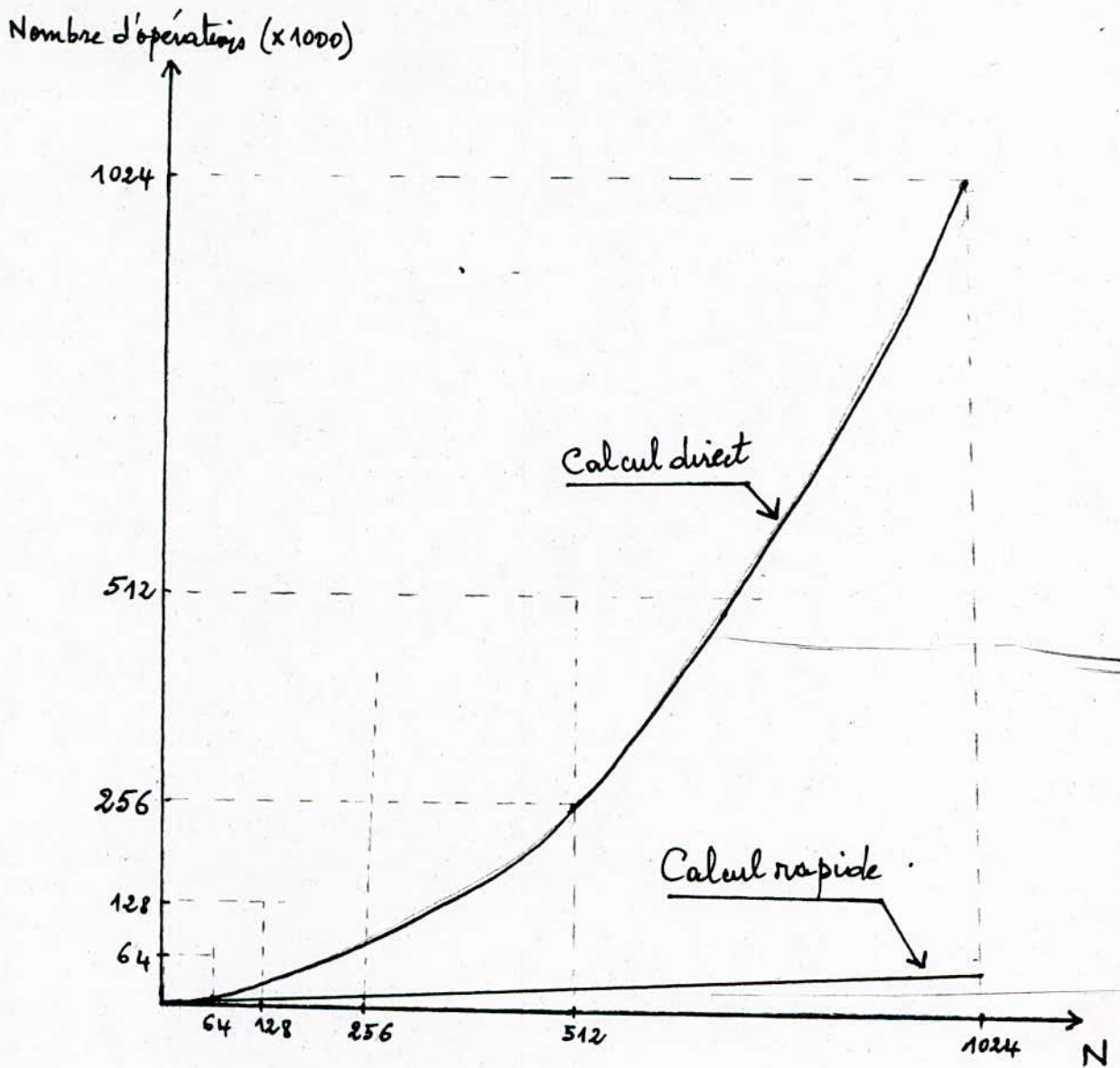


fig. A-2 : Courbe représentative du nombre d'opérations effectuées par le calcul direct et par le calcul rapide en fonction du nombre d'échantillons N .

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE COOLEY - TURKY

L'algorithme de Cooley, pour $N = 2^r$ points, consiste à passer par récurrence du signal initial x_0 à sa T.F.D., en faisant intervenir r signaux intermédiaires.

Ces derniers peuvent être considérés comme résultant de substitutions effectuées sur les indices définissant le signal par les indices définissant sa T.F.D.

Dans la relation de définition de la T.F.D à $N = 2^r$ points, nous avons

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi n k}{N}} \quad (2-1)$$

$n, k = 0, \dots, N-1$

Chacune des périodes contient 2^r échantillons, les variables discrètes n et k varient par valeurs entières :

- . de k_0 à $k_r - 1$ pour k
- . de n_0 à $n_r - 1$ pour r

notées au moyen de r digits.

Ce qui donne l'expression des T.F.D à $N = 2^r$ points :

$$X(n_{r-1}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \dots \sum_{k_{r-1}=0}^{1} x(k_{r-1}, \dots, k_0) W_N^{nk} \quad (2-2)$$

avec $W_N^{nk} = e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}$

Le produit nk peut se développer de deux façons:

- . si on le développe selon n , c'est la décimation fréquentielle de n k ce qui constitue l'algorithme de Sande,

- . si on le développe selon k , c'est la décimation temporelle de n k ce qui constitue l'algorithme de Cooley.

L'ALGORITHME DE COOLEY - TUKEY :

La méthode de développement du produit n k selon k fournit pour $N = 2^r$ les résultats suivants :

Le premier terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{C_0}$ avec :

$$C_0 = n_0 2^{r-1} k_{r-1} \quad (2-3)$$

Le deuxième terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{C_1}$ avec :

$$C_1 = (2_{n_1} + n_0) 2^{r-2} k_{r-2} \quad (2-4)$$

Le dernier terme de W_N^{nk} sera sous la forme $W_N^{C_{r-1}}$ avec :

$$C_{r-1} = (2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \dots + \dots + 2_{n_1} + n_0) k_0 \quad (2-5)$$

En remplaçant dans la relation (2 - 2), il vient :

$$X(n) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{r-1}}^1 x_0(k_{r-1}, k_{r-2}, \dots, k_0) W_N^{C_0} \dots W_N^{C_{r-1}} \quad (2-6)$$

Pour simplifier cette relation (2 - 6), nous définissons r signaux intermédiaires qui nous permettront de passer par récurrence du signal à son spectre :

$$x_{n_0}(n_0, k_{r-2}, \dots, k_0) = \sum_{k_{r-1}=0}^1 x_0(k_{r-1}, \dots, k_0) W_N^{C_0} \quad (2-7)$$

$$x_{n_1}(n_0, n_1, \dots, k_0) = \sum_{k_0=0}^1 x_{n_0}(n_0, n_1, \dots, k_0) W_N^{C_{r-1}} \quad (2-8)$$

La TFD, se déduira du dernier signal intermédiaire par le renversement de ses indices.

$$X(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_0) = x_{n_{r-1}}((n_0, n_1, \dots, n_{r-1})) \quad (2-10)$$

Les $(r+1)$ relations de récurrence définissent l'algorithme de Cooley de la TFR pour le cas $N = 2^r$.

Il est aisé de constater que le nombre des états intermédiaires pour un signal défini par $N = 2^r$ composantes est égal à $r = \log_2 N$.

REPRESENTATION GRAPHIQUE DE L'ALGORITHME DE COOLEY

Une manière plus exploitable que les expressions mathématiques serait de représenter l'algorithme de Cooley, graphiquement.

Cette représentation graphique sera mise à profit, pour établir l'algorithme de programmation de Cooley et pour faciliter sa compréhension.

CONSTRUCTION DES GRAPHES DE FLUENCE

Il nous a paru utile d'expliquer la méthode de construction à partir d'un exemple très simple : $N = 2^2$

Dans ce cas, la première relation intermédiaire sera :

$$x_{1c}(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W_4^{n_0 k_1} \\ n, k = 0, 1$$

d'où l'établissement du tableau suivant :

n_0	k_0	$x_{1c}(n_0, k_0) = x_0(0, k_0) W_4^{0 \cdot n_0} + x_0(1, k_0) W_4^{0 \cdot 2}$
0	0	$x_{1c}(0, 0) = x_0(0, 0) W_4^0 + x_0(1, 0) W_4^0$
0	1	$x_{1c}(0, 1) = x_0(0, 1) W_4^0 + x_0(1, 1) W_4^0$
1	0	$x_{1c}(1, 0) = x_0(0, 0) W_4^0 + x_0(1, 0) W_4^2$
1	1	$x_{1c}(1, 1) = x_0(0, 1) W_4^0 + x_0(1, 1) W_4^2$

Le graphe de fluence de ces quatre relations, qui représentent le premier état intermédiaire, est donné fig. A-3.

Quatre autres relations sont données par le deuxième état intermédiaires, ci-dessous :

$$x_{2c}(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_{1c}(n_0, k_0) W_4^{(2n_1 + n_0)k_0}$$

$$n_0, n_1 = 0, 1$$

qui de la même manière que précédemment donne un autre graphe de fluence.

En jumelant les deux graphes, on obtient le graphe de fluence de Cooley pour $N = 2^2$ points donné en fig. A - 4.

De la même manière, il est possible de représenter le graphe de fluence pour tout $N = 2^r$ points en utilisant les relations mathématiques (2 - 6) jusqu'à (2 - 10).

Pour illustrer la différence avec la cas $N = 2^2$ points, il est donné, en fig. A-5, le graphe pour $N = 2^3$ points.

GENERALISATION : METHODE PRATIQUE

Il est possible de trouver le graphe de fluence de Cooley pour tout $N = 2^r$. Cependant, il faut remarquer que cette méthode devient longue pour des $N \geq 2^3$.

L'examen des représentations précédentes montrent qu'il est possible de trouver des généralisations qui évitent de passer par les relations mathématiques pour obtenir les graphes.

a) Le nombre des signaux intermédiaires est égal à r dans tous les cas où $N = 2^r$; les graphes de Cooley sont tous formés par r colonnes de motifs, différentes les unes des autres.

b) Les motifs qui relient le signal à ses états intermédiaires sont des treillis.

Le nombre de treillis contenus dans la colonne de rang p d'un graphe de Cooley en $N = 2^r$ est égal à 2^{p-1} avec $p = 1, 2, \dots, r$

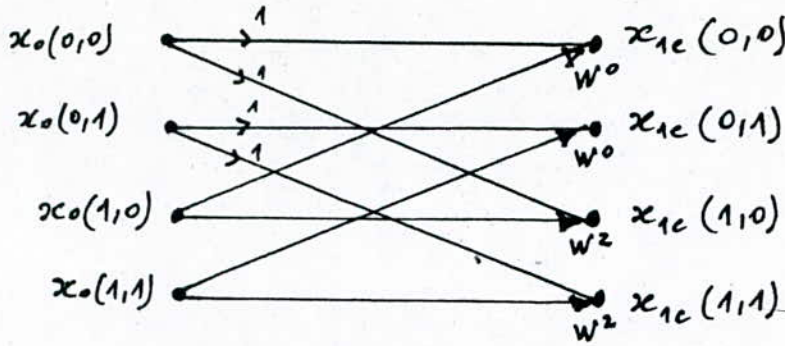
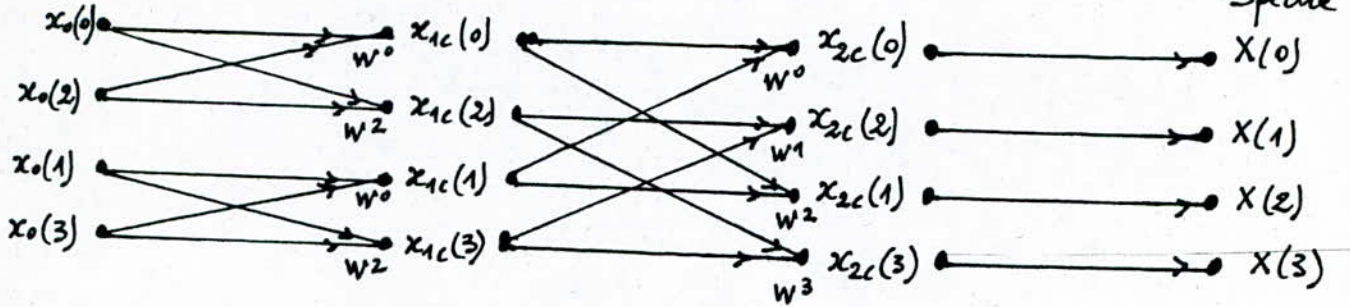


fig. A-3 : Premier état intermédiaire pour $N = 2^2$ points .

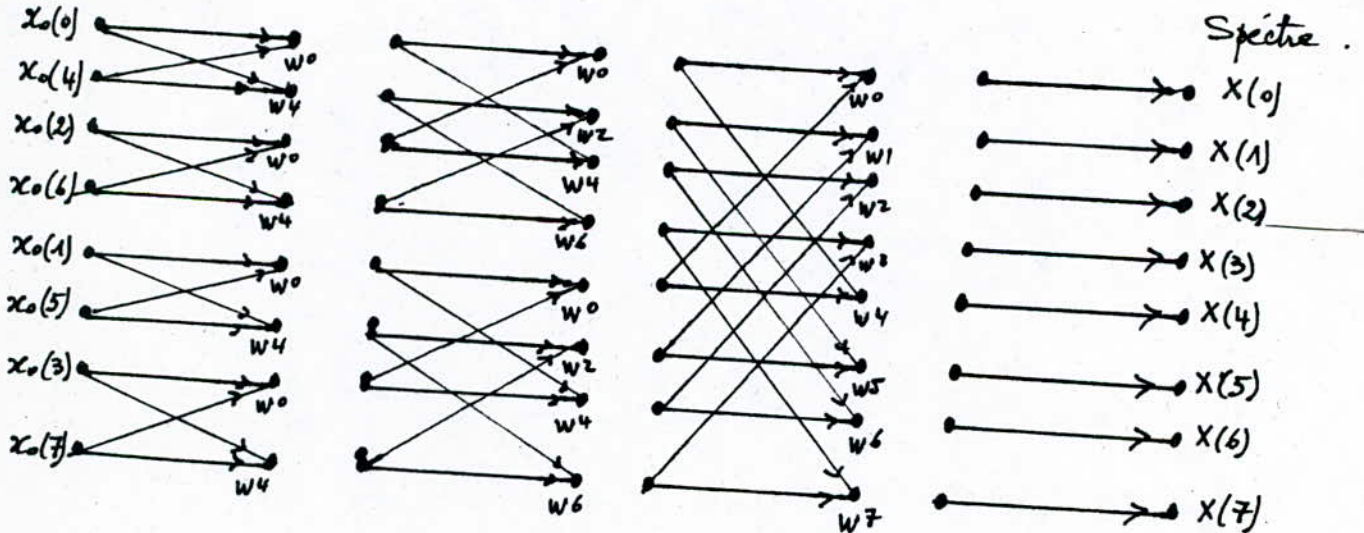
Signal initial



Spectre

fig. A-4 : Graphe de fluence pour $N = 2^2$ points .

Signal initial



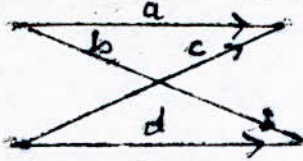
Spectre .

fig. A-5 : Graphe de fluence pour $N = 2^3$ points .

Il est à noter que ces graphes sont donnés dans le cas où le signal a subi une renversement binaire dans le but d'obtenir un spectre ordonné .

c) La multiplicité des treillis contenus dans la colonne de rang p d'un graphe de Cooley à 2^r points est égale à 2^{r-p} .

d) La représentation d'un treillis est la suivante :



Il a été vu que la représentation de Cooley a pour gains des branches :

$$a = b = 1$$

On sait que les gains des branches c et d sont de la forme :

$$c = W_N^i \quad \text{avec} \quad d = W_N^j \quad \text{avec} \quad j = i + N/2$$

Il suffit donc de connaître la loi de l'exposant i qui est la suivante :

DEFINITION :

Une colonne de rang p , d'un graphe de Cooley à $N = 2^r$ points, contient 2^{p-1} treillis ; soient $i_1, \dots, i_{2^{p-1}}$ les valeurs de i .

Par définition la liste de ces valeurs constitue l'adresse de i pour la colonne considérée.

1°) Le nombre de terme de l'adresse de la colonne de rang p , r est 2^{p-1}

2°) Ces termes sont constitués par les nombres entiers compris entre 0 et $2^{p-1} - 1$

3°) La première moitié d'une adresse est constituée de nombres pairs et la seconde moitié de nombres impairs.

4°) Le contenu d'une adresse s'obtient par renversement binaire

Règle du renversement binaire.

- mettre sous forme binaire les nombres entiers compris entre 0 et $2^{p-1} - 1$
- renverser les formes binaires ainsi obtenues
- Revenir à la notation décimale

Si l'on calcule les différents X_m pour les valeurs de m allant de 0 à $r-1$ (ce qui revient à calculer tous les états intermédiaires) en identifiant les X_{m-1} ($m=0$) aux X de la formule initiale, on aura :

$$Y (n_{r-1} 2^{r-1} + n_{r-2} 2^{r-2} + \dots + n_0 2^0)$$

$$\text{Sachant que : } W^{i+2r-1} = e^{j \frac{2 \Pi i}{N}} \quad (i + \frac{N}{2} = -W^i \text{ (Annexe A6)})$$

On peut écrire alors :

$$W (1. 2^{r-1} + n_{m-1} 2^{r-2} + \dots) = -W (2^{r-1} + n_m 2^{r-2} + \dots)$$

La formule de récurrence peut alors se décomposer en deux formules suivant que $n_m = 0$ ou que $n_m = 1$ ou que $n_m = 1$ connue ci-dessous :

$$X_m (J1) = X_{m-1} (J1) + X_{m-1} (J2) W^L$$

$$X_m (J2) = X_{m-1} (J1) - X_{m-1} (J2) W^L$$

avec

$$J1 = n_0 2^{r-1} + \dots + n_{m-1} 2^{r-m} + 0.2^{r-m-1} + k_{r-m-2} 2^{r-m-2} + \dots + k_0 2^0$$

$$J2 = J1 + 1.2^{r-m-1}$$

$$L = 0.2^{r-1} + n_{m-1} 2^{r-2} + \dots + n_0 2^{r-m-1} + 0.2^{r-m-2} + \dots + 0.2^0$$

Pour une valeur de m donnée, en prenant toutes les combinaisons possibles des indices n_s et i_s , on peut déterminer l'ensemble des couples de coefficients $J1$ et $J2$ nous permettant de calculer les N valeurs de X_m en fonction des valeurs de X_{m-1} .

$$\text{ON peut poser : } J1 = J0 + I$$

$$\text{Avec } J0 = n_0 2^{r-1} + n_1 2^{r-2} + \dots + n_{m-1} 2^{r-m}$$

$$\text{et } I = k_{r-m-2} 2^{r-m-2} + \dots + k_0 2^0$$

On aboutit ainsi à un moyen pratique, d'avoir toutes les informations fournis par un graphe de fluence de Cooley à partir du nombre de points $N = 2^r$ seulement, et ce en évitant tous calculs mathématiques ou schématisation trop long pour $N = 2^3$.

ADAPTATION DE L'ALGORITHME A LA PROGRAMMATION

Dans les sections précédentes il a été étudié et schématisé l'organisation méthodique des calculs de la T.F.D pour diminuer le nombre d'opérations et augmenter donc la rapidité des calculs.

Il sera à présent développé le même algorithme de Cooley - Tukey, dans le but de poser de nouvelles notations qui faciliteront sa programmation en FORTRAN (voir partie C).

Que l'on désire calculer la transformée de Fourier discrète directe ou inverse, on est amené à calculer des formules du type :

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{nk}$$

avec $W = e^{\pm j \frac{2\pi}{N}}$ et $0 \leq n \leq N-1$

On choisit pour N une puissance de 2, soit $N = 2^r$

En exprimant n et k selon les puissances de 2, il vient :

$$Y(n_{r-1} 2^{r-1} + n_{r-2} 2^{r-2} + \dots + n_0 2^0) =$$

$$= \sum_{k_{r-1}=0}^1 \sum_{k_{r-2}=0}^1 \dots \sum_{k=0}^1 X(k_{r-1} 2^{r-1} + \dots + k_0 2^0) W_N^{c_0} \dots W_N^{c_{r-1}}$$

avec c_0, c_1, \dots, c_{r-1} définient en (2-3) (2-4) et (2-6)

Si l'on considère la formule de récurrence suivante qui représente une étape intermédiaire d'ordre $(m+1)$ du calcul, il vient :

$$X_m(n_0 2^{r-1} + n_1 2^{r-2} + \dots + n_m 2^{r-m-1} + k_{r-m-2} 2^{r-m-2} + \dots + k_0 2^0) =$$

$$= X_{m-1}(n_0 2^{r-1} + \dots + n_{m-1} 2^{r-m} + 0 \cdot 2^{r-m-1} + k_{r-m-2} 2^{r-m-2} + \dots + k_0 2^0) +$$

$$+ X_{m-1}(n_0 2^{r-1} + \dots + n_{m-1} 2^{r-m} + 1 \cdot 2^{r-m-1} + k_{r-m-2} 2^{r-m-2} + \dots + k_0 2^0) \times$$

$$\times W(0 \cdot 2^{r-1} + \dots + n_0 2^{r-m-1} + 0 \cdot 2^{r-m-2} + \dots + 0 \cdot 2^0)$$

De manière à calculer toutes les valeurs possibles de J_1 pour une valeur de m donnée (c'est à dire dans une colonne du graphe de fluence) on fera prendre à J_0 toutes les valeurs correspondantes aux diverses combinaisons des n_s et pour chaque valeur de J_0 , on fera varier I entre 0 et 2^{r-m-1}

Les diverses valeurs possibles de J_0 et de L sont liées aux variations des indices n_s , on peut adopter la loi suivante :

1ere phase : $n_s = 0 \quad \forall s \in (0, m-1)$

On a $\begin{cases} J_0 = 0 = 0.2^{r-m} \\ \text{et} \\ L = 0 \end{cases}$

2eme phase $n_s = 0 \quad \forall s = \begin{cases} (0, m-1) \\ \neq m-1 \end{cases} \text{ et } n_{m-1} = 1$

On a $\begin{cases} J_0 = 2^{r-m} = 1.2^{r-m} \\ \text{et} \\ L = 2^{r-2} \end{cases}$

3eme phase $n_s = 0 \quad \forall s \in \begin{cases} (0, m-1) \\ \neq m-1 \end{cases} \text{ et } n_{m-2} = 1$

On a $\begin{cases} J_0 = 2^{r-m+1} = 2.2^{r-m} \\ L = 2^{r-3} \end{cases}$

4eme phase $n_s = 0 \quad \forall s = \begin{cases} (0, m-1) \\ \neq m-1 \\ \neq m-2 \end{cases} \text{ et } n_{m-2} = n_{m-1} = 1$

On a $\begin{cases} J_0 = 2^{r-m+1} + 2^{r-m} = 3.2^{r-m} \\ L = 2^{r-r} + 2^{r-3} \end{cases}$

Dernière phase : $n_s = 1$ $\forall s$

$$\text{On a } \begin{cases} JO = 2^{r-1} + 2^{r-2} + \dots + 2^{r-m+1} + 2^{r-m} = [2^m - 1][2^{r-m}] \\ L = 2^{r-2} + 2^{r-3} + \dots + 2^{r-m} - 1 \end{cases}$$

On voit que cela revient à poser :

$$JO = 2^{r-m} [JOO - 1]$$

et à faire varier JOO entre 1 et 2^m

Quand aux coefficients de L on voit que l'on peut les déterminer en calculant la suite des valeurs de 0 à $2^{r-1} - 1$ dans l'ordre croissant et en les reclassant en faisant une inversion binaire. C'est à dire, qu'au nombre

$$d_{r-2} 2^{r-2} + d_{r-3} 2^{r-3} + \dots + d_1 2^1 + d_0 2^0$$

on fait correspondre :

$$d_0 2^{r-2} + d_1 2^{r-3} + \dots + d_{r-3} 2^1 + d_{r-2} 2^0$$

Il est inutile de limiter les valeurs de L, le calcul sera automatiquement limité par la variation de JOO.

Il suffit de reconduire le calcul pour m variant de 0 à (n-1) et à la fin on aura un lot de valeurs :

$$X_{r-1} (n_0 2^{r-1} + n_1 2^{r-2} + \dots + n_{r-1} 2^0)$$

Les résultats obtenus correspondent bien aux diverses valeurs de Y de 0 à 2^{r-1} mais elles se trouvent dans l'ordre binaire inversé il faudra donc les reclasser dans l'ordre naturel en faisant une inversion binaire.

LE FILTRAGE NUMÉRIQUE

Ce chapitre est consacré à la fonction filtrage, qui apparaîtra lors de la simulation des signaux EEG, et qui du reste tient une grande place en matière de traitement numérique du signal.

En première définition, on dira que tout système linéaire est invariant peut être considéré comme un filtre à partir du moment où il peut altérer la distribution fréquentielle du signal qui se présente à son entrée.

Par rapport au filtre analogique qu'il remplace dans bien des cas, le filtre numérique possède à son actif ses performances, sa précision, sa grande variété, la souplesse de sa mise en forme, de son adaptation, l'absence de problèmes de réalisation technologique et la définition aux très basses fréquences.

En revanche, il convient de noter qu'il exige une très grande maîtrise non seulement théorique, mais aussi des problèmes de mise en oeuvre numérique.

N'ayant pas la prétention, ni la possibilité de s'étendre de façon complète et détaillée sur tout ce qui a trait aux filtres numériques, le but recherché est de faire ressortir en quelques pages, les problèmes créés par les méthodes de filtrage, en mettant l'accent sur les possibilités et les performances des filtres les plus connus.

DEFINITION :

Un filtre numérique F est un algorithme de calcul par lequel une séquence de nombres $(x(n))$ dite séquence d'entrée est transformée en une séquence de nombres $(y(n))$ dite séquence de sortie. Cette transformation altère en particulier la représentation fréquentielle de la séquence d'entrée. Le filtre effectue la transformation.

$$(y(n)) = F(x(n))$$

FILTRES NON RECURSIFS :

Le filtrage non récursif, ou à réponse impulsionnelle finie, consiste en une sommation pondérée des valeurs du signal d'entrée par les coefficients de la réponse impulsionnelle discrète $h(n)$ du filtre, soit un produit de convolution du type :

$$y(n) = \sum_{k=K}^L h(k) x(n-k) = h(n) * x(n) \quad (3-1)$$

La fonction de transfert en z du filtre s'obtient par

$$H(z) = \sum_{k=K}^L h(k) z^{-k} \quad (3-2)$$

où $(L-K)$ est l'ordre du filtre : nombre d'échantillons de la RIF.

FILTRES RECURSIFS :

Le filtrage récursif, ou à réponse impulsionnelle infinie, consiste en une sommation pondérée des valeurs du signal d'entrée $x(n)$ et les valeurs du signal de sortie précédemment calculées $y(n)$ par des coefficients a_k et b_j :

$$y(n) = \sum_{k=0}^L a_k x(n-k) - \sum_{j=1}^M b_j y(n-j) \quad (3-3)$$

La fonction de transfert est obtenue en calculant la transformée en z de l'équation précédente :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^L a_k z^{-k}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j z^{-j}} \quad (3-4)$$

M caractérise l'ordre du filtre.

La position des pôles dans le plan complexe par rapport au cercle unité fournit la stabilité du filtre (voir chapitre 1).

SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES :

SYNTHESE DES FILTRES NON RECURSIFS :

Les deux méthodes les plus utilisées pour la synthèse d'un filtre non récursif sont :

- la méthode des fenêtres
- la méthode d'échantillonnage en fréquence

Dans la méthode des fenêtres, la troncature et la pondération des échantillons de la réponse impulsionnelle mènent à un comportement fréquentiel qui ne peut être estimé qu'a posteriori.

Au contraire, dans la méthode d'échantillonnage en fréquence, le comportement fréquentiel est estimé a priori et des méthodes d'optimisation permettront de minimiser les ondulations de la courbe de réponse.

PRESENTATION DE LA METHODE D'ECHANTILLONNAGE EN FREQUENCE

Dans cette méthode, la courbe de réponse du filtre réel coïncidera avec celle du filtre passe bas idéal en un nombre fini de points. Il s'agit de fixer le nombre N de ces points et de préciser pour chaque point sa fréquence et la valeur associée du module de la fonction de transfert.

Pour des raisons de commodité, on choisit N points répartis de façon équadistances en fréquence sur l'intervalle $-\frac{F_e}{2}, +\frac{F_e}{2}$

donc d'abscisse $\frac{nF_e}{N}$ avec n variant de $-(N-1)/2$ à $(N-1)/2$.

Entre ces points, on observe des ondulations, dont l'amplitude doit rester inférieure à celle permise par le gabarit. C'est pour cela, qu'il est nécessaire d'optimiser la fonction de transfert.

Il convient donc de déterminer les échantillons $h(k)$ de la réponse impulsionnelle du filtre à partir de la connaissance des N échantillons choisis sur la courbe de réponse en fréquence.

La fonction de transfert isochrone du filtre est liée à sa réponse impulsionnelle par la relation :

$$H(j\omega) = \sum_{k=0}^{N'-1} h(k) e^{-jk 2\pi f / F_e} \quad (3-5)$$

N' étant le nombre a priori inconnu de termes de la réponse impulsionnelle finie du filtre.

Pour un échantillon d'abscisse $f = n \cdot F_e/N$, la valeur de la fonction de transfert, que l'on note $H(n)$ est

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N'-1} h(k) \exp(-jk 2\pi \frac{n}{N}) \quad (3-6)$$

Le choix de N points dans le domaine fréquentiel fournit N équations du type précédent. Un tel système de N équations linéaires à coefficients constants ne peut avoir une solution unique que si le nombre des inconnues est égal au nombre des équations soit :

$$N = N'$$

(27)

La résolution du système nous fournit donc N termes $h(k)$ de la réponse impulsionnelle finie, dont la connaissance permettra, le calcul de $v(n)$ la solution fournie par l'emploi de la transformée de Fourier discrète (chapitre 1) est =

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(n) \exp(j k 2\pi \frac{n}{N}) \quad (3-7)$$

ETUDE DES FONCTIONS D'INTERPOLATION :

Dans la méthode d'échantillonnage en fréquence, la courbe obtenue est confondue aux points d'échantillonnage avec celle du filtre prototype. Cependant il apparaît des ondulations entre les points d'échantillonnage. L'étude des fonctions d'interpolation permet d'expliquer l'origine de ces ondulations.

Considérons un échantillonnage de N points équirépartis en fréquence tel que tous les échantillons soient nuls, exceptés pour $n = \pm 1$ valeurs pour lesquelles par raison de symétrie $H(+1) = H(-1)$.

Le filtre est à phase nulle, non causal, de réponse impulsionnelle symétrique

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{H(1)}{N} \left[\exp(j 2\pi k \frac{1}{N}) + \exp(-j k 2\pi \frac{1}{N}) \right] \\ &= \frac{H(1)}{N} \cdot 2 \cos(k 2\pi \frac{1}{N}) \end{aligned}$$

La fonction de transfert isochrone de ce filtre est avec $M = (N-1)/2$:

$$H(j\omega) = \frac{H(1)}{N} \sum_{k=-M}^M \left[\cos(k 2\pi (\frac{f}{f_c} - \frac{1}{N})) + \cos(k 2\pi (\frac{f}{f_c} + \frac{1}{N})) \right]$$

En posant $\theta = \pi (\frac{f}{f_c} \pm \frac{1}{N})$ il convient d'évaluer

$$\sum_{k=-M}^M \cos(k 2\theta) = \frac{\sin(N\theta)}{\sin\theta} \quad (\text{FONDANECHÉ, 1981})$$

d'où

$$H(j\omega) = \frac{H(1)}{N} \left[\frac{\sin N\pi (\frac{f}{f_c} - \frac{1}{N})}{\sin\pi (\frac{f}{f_c} - \frac{1}{N})} + \frac{\sin N\pi (\frac{f}{f_c} + \frac{1}{N})}{\sin\pi (\frac{f}{f_c} + \frac{1}{N})} \right] \quad (3-8)$$

La fonction

$$I(f, 1) = \frac{1}{N} \frac{\sin N\pi (\frac{f}{f_c} - \frac{1}{N})}{\sin\pi (\frac{f}{f_c} - \frac{1}{N})} \quad (3-9)$$

est dite fonction d'interpolation.

Elle est nulle en tout point d'échantillonnage d'abscisse $f = n\omega_c/N$, sauf en $n = 1$, valeur pour laquelle $I(f, 1) = 1$ car $\frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \rightarrow 1$ lorsque $\theta \rightarrow 0$

Ainsi, les ondulations entre les points d'échantillonnage sont causées par les ondulations de la fonction $\frac{\sin N\theta}{\sin \theta}$

D'une manière générale, en étendant le calcul précédent à un filtre à N échantillons en fréquence, on peut écrire

$$H(f) = \sum_{n=-M}^M H(n) I(f, n) \quad (3-10)$$

OPTIMISATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT :

Les points d'échantillonnage sont choisis égaux à 1 dans la bande passante, à 0 dans la bande atténuée.

En pratique, ceci donne une zone de transition minimale mais l'ondulation entre points sera inacceptable.

L'optimisation consiste à ramener cette ondulation à une valeur acceptable en modifiant la valeur des échantillons les plus proches de la zone de transition.

si x et y sont les points les plus proches de la zone de transition, le module de la fonction de transfert s'écrit :

$$H(f) = 1 \cdot I(f, 0) + 1 \cdot [I(f, +1) + I(f, -1)] + \dots + H(x) [I(f, +x) + I(f, -x)] + H(y) [I(f, y) + I(f, -y)]$$

Pour trouver les valeurs à donner à x et y , il faut résoudre le système :

• bande passante : $|H(f) - 1| \leq \delta_1$

• bande atténuée : $|H(f) - 0| \leq \delta_2$

où δ_1 et δ_2 sont les ondulations tolérées respectivement dans la bande passante et atténuée.

SYNTHESE DES FILTRES RESURSIFS :

Il existe plusieurs méthodes pour la synthèse d'un filtre récursif.

Parmi ces méthodes, nous pouvons citer :

- La méthode par invariance impulsionnelle
- La méthode par invariance indicielle
- La méthode par transformation bilinéaire

La méthode par transformation bilinéaire a l'avantage par rapport aux deux autres de conserver la réponse fréquentielle. Cette méthode est basée sur les propriétés des filtres analogiques. Elle conduit à des filtres récursifs à une réponse impulsionnelle causale et infinie.

PRESENTATION DE LA METHODE PAR TRANSFORMATION BILINEAIRE :

Cette transformation établit une correspondance biunivoque entre un point du plan analogique normalisé et un point du plan numérique. Le principe, de cette correspondance, est établi dans le chapitre 1.

La formule de transformation de cette méthode est :

$$S_n = k \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

avec k : facteur d'adaptation en fréquence.

et $S_n = \frac{S}{\omega_0}$ où ω_0 est la pulsation de normalisation caractéristique du filtre analogique.

Dans cette méthode, il convient de choisir la fonction de transfert d'un filtre analogique prototype, selon les caractéristiques fixées par le cahier de charge, et de remplacer la variable $S_n = j \omega$ par $k \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$

$$k \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

Auparavant, il faut calculer le facteur d'adaptation en fréquence k qui permet de faire correspondre les réponses en fréquences du filtre analogique et du filtre numérique sur les intervalles $(-\infty, +\infty)$, $(-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2})$

$$k = \frac{\omega_{ano}}{\text{tg}(\omega_{do} \frac{T_e}{2})}$$

Où ω_{ano} et ω_{do} sont les valeurs caractéristiques respectivement dans les domaines analogique et numérique et où T_e est la fréquence d'échantillonnage.

Une fois la fonction de transfert en Z obtenue, il est impératif de vérifier la stabilité du filtre et ce en vérifiant que le module des pôles en Z est supérieur à l'unité c'est à dire que les pôles en Z se trouvent dans la zone de stabilité du plan des Z .

L'unité de calcul travaillant sur des nombres binaires, le choix de la façon dont vont être organisés les calculs de $y(n)$ est de première importance. En effet selon que le filtre est à réponse impulsionnelle finie ou infinie, la structure peut influencer sur, le temps de calcul et la précision, ou sur, la stabilité et la propagation des erreurs de troncatures.

STRUCTURE DES FILTRES NON RECURSIFS :

La structure de réalisation découle directement de l'algorithme de calcul :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

Elle nécessite donc N emplacements mémoire, la gestion de la table $[x(n-k)]$ et N multiplications

Les propriétés de symétrie de la séquence $h(k)$, utilisées pour réaliser des filtres à phase linéaire, permettent de diviser par 2 le nombre de multiplications. Cette structure est donnée figure = fig. A - 6

STRUCTURES DES FILTRES RECURSIFS

Le problème pour les filtres récursifs est de minimiser la propagation des erreurs et ceci surtout dans le but de conserver la stabilité.

Parmi les structures existantes, nous citons :

STRUCTURE FORME DIRECTE 1 :

Cette structure donnée fig.A-7 découle directement de l'algorithme de calcul des filtres récursifs.

Elle nécessite la gestion de deux tables, celle des $x(n-k)$ et celle des $v(n-j)$, $(L + M)$ emplacements mémoire, et autant de multiplications.

STRUCTURE FORME DIRECTE 2 :

Une amélioration possible de la structure précédente, en particulier n'avoir qu'une seule table à gérer, est d'introduire une variable intermédiaire $w(n)$, telle que :

$$H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \frac{Y(z^{-1})}{W(z^{-1})} \cdot \frac{W(z^{-1})}{X(z^{-1})}$$

en écrivant que :

$$\frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} \text{ égal au numérateur de } H(z^{-1})$$

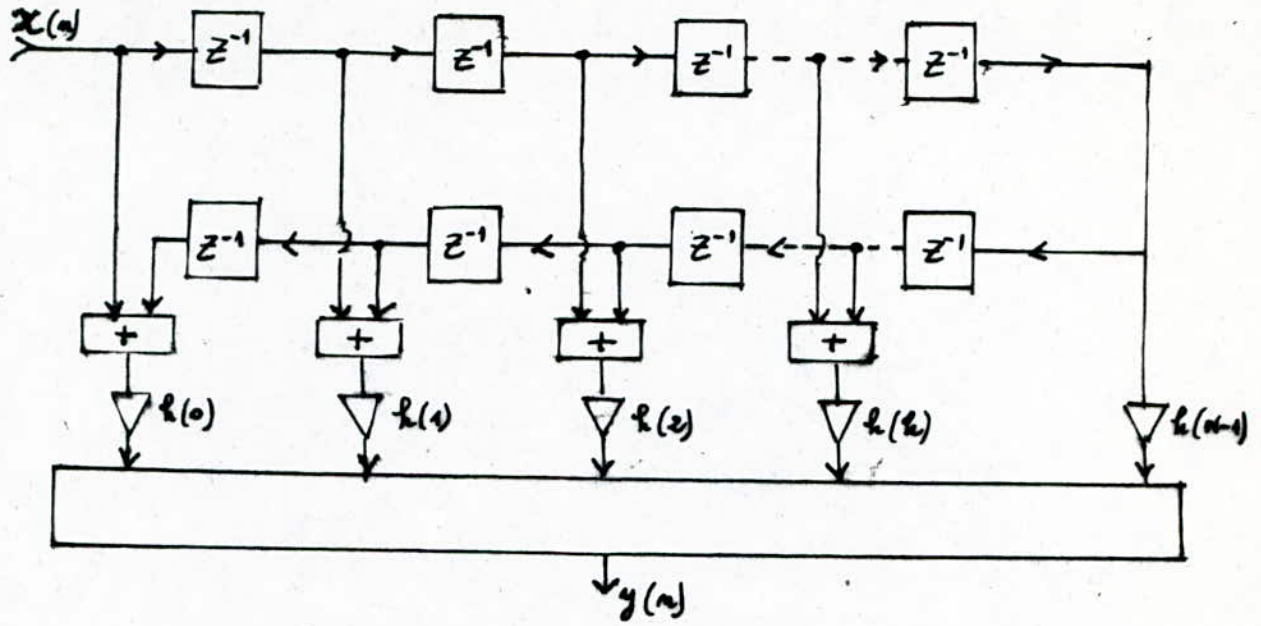


fig. A.6 : STRUCTURE NON RECURSIVE

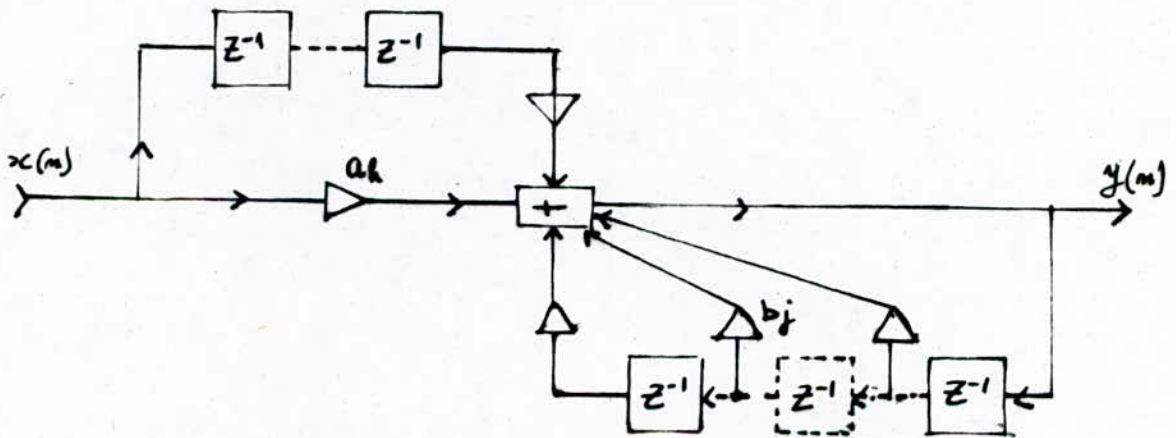


fig. A-7 : FORME DIRECTE 1.

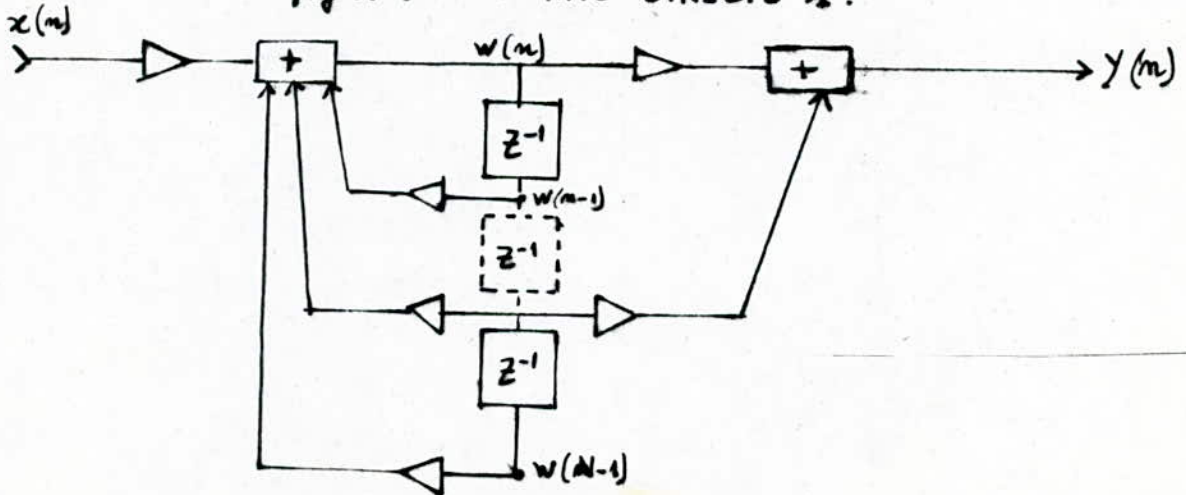


fig. A-8 : FORME DIRECTE 2.

$$\frac{W(z^{-1})}{X(z^{-1})}$$

égal à l'inverse du dénominateur de $H(z^{-1})$

Cette structure donnée, fig. A-8, nécessite la gestion de la seule table des $W(n-1)$, M emplacements mémoires et $(L + M)$ multiplications.

COMMENTAIRE (FONDANECHÉ, 1981)

Il faut bien reconnaître que, à l'heure actuelle, on ne dispose pas d'une théorie générale qui permette, dans chaque cas particulier, d'établir une hiérarchie entre les diverses structures, et par là, de choisir la structure optimale.

On est donc amené à simuler sur ordinateur, cas par cas, le comportement du filtre, et à évaluer le meilleur compromis entre les exigences contradictoires telles que : précision, coût, temps de calcul, place mémoire, stabilité.

COMPARAISON ENTRE LES FILTRES RECURSIFS ET NON RECURSIFS

FILTRES NON RECURSIFS :

- . Ils sont stables par définition car leur fonction de transfert ne contient pas de pôle.
- . Ils conservent la phase linéaire
- . Ils nécessitent un grand nombre de mémoires pour stocker les paramètres du filtre.
- . Le temps de calcul augmente avec l'ordre du filtre,
- . Les erreurs de troncatures ne peuvent affecter la stabilité.

FILTRES RECURSIFS :

- . Ils nécessitent peu de mémoires et effectuent peu d'opérations donc ils sont adaptés au calcul en temps réel.
- . Ils peuvent poser des problèmes de stabilité car leur fonction de transfert contient des pôles.
- . Ils sont sensibles aux erreurs de troncatures des coefficients du point de vue précision.
- . Ils n'assurent pas la linéarité de la phase.
- . Risque de propagation des erreurs car chaque sortie dépend de la précédente.

Une autres manière de filtrer un signal est de lui appliquer une fonction fenêtre.

Dans le domaine temporel, la troncature d'un signal de durée illimitée, se fait en le multipliant par une fenêtre. Cette multiplication se traduit par un produit de convolution dans le domaine fréquentiel.

Le rôle joué et les effets causés par les fonctions fenêtres sont, dans tout traitement numérique du signal, à analyser et à prendre en compte pour une bonne interprétation des résultats.

En général, trois problèmes se posent lors de la troncature d'un signal par une fenêtre.

- . Choix de la bonne fenêtre,
- . Position de la fenêtre par rapport au signal,
- . Choix de la durée N ,

La position de la fenêtre est choisie de manière à conserver les échantillons importants du signal. Son ouverture est choisie en fonction de la durée du signal à conserver.

Le choix de la fenêtre n'apparaît que dans le domaine fréquentiel.

En effet, la troncature d'un signal par une fenêtre introduit dans le domaine fréquentiel des oscillations parasites aux discontinuités. Ce phénomène est connu sous le nom de Gibbs. Ces oscillations sont plus ou moins amples selon la fenêtre choisie.

Un autre paramètre dont il faut tenir compte dans le domaine fréquentiel, est la largeur de base du pic principal.

Des tables sur les fenêtres données en annexe A7 et A8 on peut remarquer que plus la fenêtre caractérise par une bonne atténuation du phénomène de Gibbs plus elle possède une largeur du pic central grande.

Il apparaît donc que c'est à l'utilisateur de faire le choix de la fenêtre qui convient au cas de son problème. Il doit faire un compromis entre l'atténuation du phénomène de Gibbs, qui améliore la qualité de la troncature, et la largeur du pic central, qui se rapporte à la résolution fréquentielle de la fenêtre. Il faut préciser que la largeur de base du pic central doit être choisie telle que :

$$B_i = \frac{\delta_i}{N} \leq \Delta f$$

Où B_i : est la largeur de base du pic central de la fenêtre.

δ_i = une caractéristique de la fenêtre (voir annexe A7).

N = ouverture de la fenêtre

Δf = Résolution fréquentielle du signal

En effet, la convolution de la fenêtre par le signal ne permet de détecter distinctement deux raies du signal séparées de Δf que si la condition ci-dessus est respectée.

Les annexes A7 et A8 donnent les caractéristiques des fenêtres les plus utilisées ainsi que leurs transformations de Fourier. L'atténuation du phénomène de Gibbs est exprimée en db par

$$\lambda_i = 20 \log_{10} \left| \frac{W_i(f_s)}{W_i(0)} \right|$$

où $W_i(f_s)$ est le niveau du lobe secondaire le plus élevé et où $W_i(0)$ est le niveau du lobe principal.

ANALYSE SPECTRALE NUMERIQUE DES SIGNAUX ALEATOIRES

Le but de ce chapitre est d'étudier les méthodes permettant l'analyse spectrale des signaux aléatoires, en vue d'en choisir celle qui convient à l'étude des signaux EEG.

Les méthodes utilisées précédemment pour l'analyse de signaux déterministes, ne peuvent pas s'appliquer directement aux signaux aléatoires.

La représentation fréquentielle, des signaux aléatoires, fait appel à une description statistique.

L'analyse spectrale, des signaux aléatoires, est donc un problème d'estimation.

Le lecteur qui n'est pas familier avec les notions élémentaires de la théorie des probabilités, pourra se référer à l'annexe A.10 ou bien à (KUNT, 1981)

Cette étude commence par les estimateurs des fonctions d'autocorrelations (et d'intercorrelation) qui permettent d'aboutir aux estimateurs spectraux et de donner leurs propriétés.

L'application de la T.F.R, aux estimateurs spectraux, est aussi étudiée.

Les démonstrations longues et d'intérêt secondaire dans le cadre de cette étude sont omises. Le lecteur pourra se référer à (KUNT 1981)

DEFINITIONS STATISTIQUES FONDAMENTALES

LA FONCTION D'AUTOCORRELATION

Pour un signal aléatoire stationnaire, elle est définie par l'espérance mathématique suivante :

$$Y_x(k) = E[x(l) x(l+k)] \quad (4-1)$$

L'hypothèse d'ergodicité permet d'identifier les moyennes temporelles et les moyennes d'ensembles, ce qui donne :

$$Y_x(k) = \overline{x(l) x(l+k)} \quad (4-2)$$

où la barre supérieure représente la moyenne selon la variable l . bis

LA DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE

La densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire est définie par :

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Psi_x(k) e^{-j2\pi f k} \quad (4-3)$$

C'est donc la transformée de Fourier de la fonction d'auto-correlation .

LA FONCTION D'INTERCORRELATION :

La fonction d'intercorrelation de deux signaux aléatoires est définie par :

$$\Psi_{xy}(k) = E [x(l) y(l+k)] = \overline{x(l) y(l+k)} \quad (4-4)$$

LA DENSITE INTERSPECTRALE DE PUISSANCE

La densité interspectrale de puissance est définie par

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Psi_{xy}(k) e^{-j2\pi f k} \quad (4-5)$$

C'est donc la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrelation .

Le rôle de l'analyse spectrale numérique est d'estimer des relations fonctionnelles telles que (4.2) , (4.3.), (4.4.), (4.5) à partir d'un nombre fini K d'échantillons des signaux $x(k)$ et $y(k)$.

ESTIMATEURS POUR LA CORRELATION :

Le but de ce paragraphe est d'établir les différents estimateurs qu'on utilise pour l'estimation des fonctions de corrélation, ainsi que leurs propriétés. Pour simplifier les développements, on admettra que la valeur moyenne des signaux considérés est nulle. Cette hypothèse, qui n'est pas restrictive et qui est valable en pratique, permet d'identifier la fonction de covariance à la fonction de corrélation (Annexe A.11)

ESTIMATEURS NON BIAISE :

La relation (4.1) peut être mise sous la forme :

$$\Psi_x(k) = \overline{u_k(1)} \quad \text{avec } u_k(1) = x(1) x(1+k) \quad (4-6)$$

Pour une valeur donnée de k , il s'agit donc d'estimer la valeur moyenne d'un signal u_k . Comme, on ne dispose que de K valeurs de $x(k)$, la valeur moyenne de u_k ne peut être estimée qu'à partir de $(K-k)$ valeurs de u_k . (1)
En appliquant l'estimateur de valeur moyenne (annexe A11.) au signal u_k (1), il vient :

$$c'_x(k) = \frac{1}{K-|k|} \sum_{\ell=0}^{K-|k|-1} u_k(\ell) = \frac{1}{K-|k|} \sum_{\ell=0}^{K-|k|-1} x(\ell) x(\ell+k) \quad (4-7)$$

Il faut appliquer cet estimateur pour les $(2K-1)$ valeurs possibles de k , avec $|k| < K$. Le signal donné par la relation (4.7) pour toutes les valeurs de k , est une estimation de la fonction d'auto corrélation $\psi_x(k)$

BIAIS DE L'ESTIMATEUR

Le biais $B_{c'_x(k)}$ peut être calculé aisément, en effet :

$$E[c'_x(k)] = \frac{1}{K-|k|} \sum_{\ell=0}^{K-|k|-1} \psi_x(k) = \psi_x(k)$$

d'où

$$B_{c'_x(k)} = E[c'_x(k)] - \psi_x(k) = 0$$

L'estimateur $c'_x(k)$ est donc non biaisé.

VARIANCE DE L'ESTIMATEUR $c'_x(k)$

Le calcul de la variance est très long et compliqué. Il sera omis dans ce texte. Le calcul, dont le détail peut être trouvé dans (KUNT, 1991), conduit au résultat :

La variance de l'estimateur $c'_x(k)$ est proportionnelle à $1/K$ d'où :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{Var}[c'_x(k)] = 0$$

Comme le biais est aussi nul, l'estimateur $c'_x(k)$ est un estimateur consistant

ESTIMATEUR BIAISÉ :

Un autre estimateur qu'on utilise très souvent est donné par :

$$C_x(k) = \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{k-|k|-1} x(l) x(l+k) \quad (4-8)$$

En comparant les relations (4-7) et (4-8), il vient :

$$C_x(k) = \frac{K-k}{K} C'_x(k) \quad (4-7)$$

BIAIS $B_{C_x}(k)$ DE L'ESTIMATEUR $C_x(k)$

Le calcul du biais, se fait de la manière suivante :

$$B_{C_x}(k) = E[C_x(k)] - \Psi_x(k) = \left(\frac{K-k}{K} - 1 \right) \Psi_x(k) = -\frac{k}{K} \Psi_x(k)$$

L'estimateur $C_x(k)$ est donc biaisé.

VARIANCE DE L'ESTIMATEUR $C_x(k)$

De même que précédemment, ce calcul étant très long, nous ne donnerons que les résultats qui nous intéressent directement :

On peut montrer (KUNT, 1981) que cette variance tend vers zéro lorsque K tend vers l'infini. Il est en est de même pour le biais.

Donc l'estimateur $C_x(k)$ est un estimateur consistant.

COMPARAISON DES DEUX ESTIMATEURS $C_x(k)$ et $C'_x(k)$:

Le choix entre $C_x(k)$ se porte normalement sur l'estimateur consistant $C'_x(k)$ non biaisé. Toutefois suivant la valeur du décalage k par rapport à la durée d'observation K , l'un des estimateurs prend le dessus sur l'autre C_x , suivant le cas, leurs variances et leurs biais varient en sens inverses.

Pour une comparaison valable entre les deux estimateurs, il faut comparer leur erreur quadratique moyenne (annexe A.11).

JENKIS et WATTS (KUNT, 1981) ont montré que l'erreur quadratique moyenne de $C_x(k)$ est nettement inférieure à celle de $C'_x(k)$ - Paradoxalement, le choix devait donc se porter sur $C_x(k)$.

Un compromis, pour améliorer les deux estimateurs serait d'augmenter la durée d'observation K . Ainsi $C_x(k)$ est asymptotiquement non biaisé.

ESTIMATEUR POUR L'INTERCORRELATION

Les méthodes développées pour l'autocorrelation s'appliquent pour l'intercorrelation avec de légères modifications. Soient $x(k)$ et $y(k)$, deux signaux aléatoires stationnaires, ergodiques et à valeur moyenne nulle.

L'estimateur d'intercorrelation est donné par :

$$C_{xy}(k) = \begin{cases} \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{K-k-1} x(l) y(l+k) & \text{pour } 0 \leq k < K \\ \frac{1}{K} \sum_{l=-k}^{K-1} x(l) y(l+k) & \text{pour } -K < k \leq 0 \end{cases} \quad (4-10)$$

La deuxième expression, pour les valeurs négatives de k , peut être mise sous la forme suivante :

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{K} \sum_{l'=0}^{K+k-1} x(l'-k) y(l') \quad \text{pour } -K < k \leq 0 \quad (4-11)$$

L'espérance mathématique de cet estimateur est donnée par :

$$E[C_{xy}(k)] = \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{K+k-1} E[x(l) y(l+k)] = \left(1 - \frac{k}{K}\right) \varphi_{xy}(k) \quad (4-12)$$

En utilisant la relation (4-11), on obtient :

$$E[C_{xy}(k)] = \left(1 + \frac{k}{K}\right) \varphi_{xy}(k) \quad \text{pour } -K < k \leq 0 \quad (4-13)$$

d'où, en général, on aura

$$E[C_{xy}(k)] = \left(1 - \frac{|k|}{K}\right) \varphi_{xy}(k) \quad \text{pour } -K < k < K \quad (4-14)$$

Cette relation (4-14) montre que l'estimateur $C_{xy}(k)$ est biaisé.

Comme dans le cas de $C_x(k)$, sa variance est inversement proportionnelle à K .

On peut établir des relations similaires pour un estimateur non biaisé $C'_{xy}(k)$ en remplaçant le facteur multiplicatif $\frac{1}{K}$ dans (4-10) par $1/(K-k)$

LES ESTIMATEURS SPECTRAUX DE PUISSANCE

En vertu, de la définition (4-3), il est tentant de penser que la transformée de Fourier d'un bon estimateur de corrélation pourrait être satisfaisante pour l'estimation de la densité spectrale de puissance.

Malheureusement, ce n'est pas le cas. On étudie, dans cette section les propriétés d'un tel estimateur et d'autres estimateurs spectraux plus satisfaisants qu'on peut déduire du premier.

ESTIMATEUR SPECTRAL SIMPLE

L'estimateur spectral simple, est la transformée de Fourier de l'estimateur $C_x(k)$, on a :

$$S_x(f) = \sum_{k=-(K-1)}^{K-1} C_x(k) e^{-j2\pi f k} \quad (4-15)$$

Une terminologie ancienne est d'appeler $S_x(f)$ périodogramme.

En utilisant la définition (4-8) dans (4-15) il vient :

$$S_x(f) = \frac{1}{K} |X_K(f)|^2 \text{ avec } X_K(f) = \sum_{k=0}^{K-1} x(k) e^{-j2\pi f k} \quad (4-16)$$

Le biais de l'estimateur simple est la différence entre $E[S_x(f)]$ et le spectre cherché $\phi_x(f)$ -

$$E[S_x(f)] = \sum_{k=-(K-1)}^{K-1} \frac{K-|k|}{K} \phi_x(k) e^{-j2\pi f k} \quad (4-17)$$

A cause du terme $\frac{K-|k|}{K}$, l'espérance mathématique de $S_x(f)$ n'est pas la transformée de Fourier de la fonction $\phi_x(k)$. Donc $S_x(f)$ est un estimateur biaisé.

Il est très difficile d'établir la variance de l'estimateur $S_x(f)$ appliqué à un signal $x(k)$ de distribution quelconque. C'est pourquoi, on donnera le résultat pour le cas d'un bruit blanc gaussien :

$$\text{Var}[S_x(f)] = \sigma_x^4 = \phi_x^2(f)$$

On remarque que cette variance ne dépend pas de la durée d'observation K . On ne dispose donc d'aucun paramètre pour la réduire.

L'estimateur spectral simple n'étant pas consistant, il faut établir d'autres estimateurs spectraux.

Parmi toutes les possibilités qui existent, nous avons préféré celles qui consiste à modifier l'estimateur spectral simple. Ceci provient du fait que l'on peut utiliser la T.F.R pour évaluer $S_x(f)$ à l'aide de la relation (4-16).

: ESTIMATEUR SPECTRAL MOYENNE :

La méthode directe de réduire la variance d'un estimateur est de calculer une moyenne sur plusieurs estimateurs indépendants. Pour l'appliquer à l'estimateur spectral simple, il faut diviser le signal observé sur une durée K en L sections $x_l(k)$ de durée M chacune. On a :

$$x_l(k) = x(k + (l-1)M) \quad (4-18)$$

avec $k = 0, \dots, M-1$; $K = ML$ et $l = 1, \dots, L$

On évalue ensuite L estimateurs simples du type :

$$S_{x_l}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_l(k) e^{-j2\pi f k} \right|^2 \quad (4-19)$$

avec $l = 1, \dots, L$

L'estimateur spectral moyenné est alors donné par :

$$\bar{S}_x(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{x_l}(f)$$

Pour calculer le biais de cet estimateur, il faut d'abord calculer :

$$E[\bar{S}_x(f)] = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L E[S_{x_l}(f)] = E[S_{x_l}(f)] \quad (4-20)$$

Où on peut interpréter la relation (4-17) comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, vue à travers une fenêtre triangulaire.

Dans le domaine fréquentiel, on a le produit de convolution.

$$E[S_{x_l}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} W_T(g) \phi_x(f-g) dg \quad (4-11)$$

La même relation reste valable pour l'espérance mathématique (4-20) avec la fonction $W_T(f)$ dont le lobe principal est L fois plus large.

Donc le biais de $\bar{S}_x(f)$ est plus grand que le biais de $S_x(f)$.

Pour ce qui est de la variance :

$$\text{Var}[\bar{S}_x(f)] = \frac{1}{L} \text{Var}[S_{x_l}(f)] = \frac{1}{L} \phi_x^2(f) = \frac{M}{K} \phi_x^2(f)$$

Ce qui montre que la variance de l'estimateur modifié décroît proportionnellement à la durée d'observation K .

On peut dire que pour diminuer le biais, il faut augmenter M et pour diminuer la variance, il faut augmenter L .

La difficulté de cet estimateur est de trouver un compromis entre L et M;

ESTIMATEUR SPECTRALE ADOUCI.

Un autre moyen de réduire la variance de l'estimateur spectral simple est de le filtrer. On considère $S_x(f)$ comme un signal que l'on filtre avec un filtre dont la réponse impulsionnelle est $W(f)$. Il s'agit bien sûr d'un filtrage fréquentiel. On obtient ainsi un estimateur adouci, donné par :

$$\tilde{S}_x(f) = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(g) W(f-g) dg \quad (4-29)$$

On peut interpréter cet estimateur comme la transformée de Fourier du produit de l'estimateur $C_x(k)$ et d'un fenêtrage $W(k)$ de durée finie $(2M-1)$.

On aura :

$$\tilde{S}_x(f) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} W(k) C_x(k) e^{j2\pi f k} \quad (4-24)$$

Cette relation met en évidence les contraintes à poser sur les fonctions fenêtrages.

Comme la densité spectrale de puissance et toute estimation de celle-ci doivent être des fonctions réelles et positives, la fonction $W(k)$ doit être paire et sa transformée $W(f)$ doit être positive.

Le calcul du biais $B_{\tilde{S}}(f) = E[\tilde{S}_x(f)] - \phi_x(f)$ est d'autant plus faible que M est grand. Inversement, une diminution de M provoque une perte de résolution fréquentielle.

Le calcul de la variance, donne :

$$\text{Var}[\tilde{S}_x(f)] = \frac{1}{K} \int_{-1/2}^{1/2} \phi_x^2(f) W^2(f-g) dg$$

Ce qui montre que la variance de l'estimateur adouci est inversement proportionnelle à la durée d'observation K.

ESTIMATEUR SPECTRAL MODIFIÉ :

Une combinaison des deux méthodes précédentes conduit à l'estimateur modifié.

Le signal observé est à nouveau divisé en L sections de durées $M = \frac{K}{L}$.

Toutefois, dans ce cas, chaque section est multipliée par une fonction fenêtrage $W(k)$ avant le calcul de l'estimateur simple.

L'équivalent de l'estimateur spectral simple est alors donné par :

$$R_{xe}(f) = \frac{1}{MP} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_e(k) w(k) e^{j2\pi f k} \right|^2 \quad (4-5) \quad (42)$$

$$P = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W^2(k) \quad \text{avec } l = 1, \dots, L$$

Le facteur de normalisation P est nécessaire pour que l'estimateur ^{soit} asymptotiquement non biaisé. L'estimateur s'exprime par :

$$\bar{R}_x(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L R_{xe}(f) \quad (4-6)$$

Le calcul montre que

- le biais tend vers une valeur nulle.

- la variance est $\text{Var} [\bar{R}_x(f)] = \frac{1}{L} \phi_x^2(f)$

en choisissant donc le nombre de section L grand, la variance tend vers zéro.

LES ESTIMATEURS INTERSPECTRAUX DE PUISSANCE

La méthodologie utilisée pour les estimateurs spectraux peut être suivie pour établir des estimateurs interspectraux.

ESTIMATEUR INTERSPECTRAL SIMPLE

C'est la transformée de Fourier de l'estimateur $C_{xy}(k) =$

$$S_{xy}(f) = \sum_{k=-(K-1)}^{K-1} C_{xy}(k) e^{-j2\pi f k} \quad (4-7)$$

qui peut aussi s'exprimer comme un produit de T.F.D. =

$$S_{xy}(f) = \frac{1}{K} X^*(f) Y(f) \quad (4-8)$$

où

$X^*(f)$ est le conjugué de $X(f)$

On peut montrer, comme précédemment que l'estimateur $S_{xy}(f)$ est asymptotiquement non biaisé et que sa variance ne dépend pas de la durée d'observation K.

ESTIMATEUR INTERSPECTRAL MOYENNE :

Il est défini par :

$$\bar{S}_{xy}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} S_{x_e y_e}(f) \quad (4-9)$$

ESTIMATEUR INTERSPECTRAL ADOUCI :

Il est défini par :

$$\tilde{S}_{xy}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{xy}(g) W(f-g) dg$$

ou encore

$$S_{xy}(f) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} W(k) C_{xy}(k) e^{-j2\pi f k} \quad (4-30)$$

le contrôle du biais se fait d'après la fonction fenêtrée utilisées.

ESTIMATEUR INTERSPECTRAL MODIFIÉ :

Il est défini par :

$$R_{x_e y_e}(f) = \frac{1}{MP} \left[\sum_{k=0}^{M-1} x_e(k) w(k) e^{-j2\pi f k} \right]^* \left[\sum_{k=0}^{M-1} y_e(k) w(k) e^{j2\pi f k} \right]$$

avec $l = 1, \dots, L$

$$P = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} w^2(k)$$

$$\text{donc } R_{xy}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L R_{x_e y_e}(f)$$

APPLICATION DE LA T.F.R. A L'EVALUATION DES ESTIMATEURS SPECTRAUX

La T.F.R peut également être utilisée avantageusement pour l'évaluation des estimateurs spectraux.

L'estimateur spectral simple $S_x(f)$ s'obtient directement à l'aide de la relation (4-16). Il suffira donc d'évaluer $X_k(f)$ aux fréquences harmonique $f_n = \frac{n}{2M}$ à l'aide de la T.F.R.

Aux fréquences harmoniques, l'estimateur spectral moyenné est donné par :

$$\bar{S}_x(n) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{x_l}(n)$$

Il faut donc évaluer L estimateurs simples et calculer leur valeur moyenne.

Chacun de ces estimateurs est du type

$$S_{x_e}(n) = \frac{1}{M} |X_{ne}(n)|^2 = \frac{1}{M} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_e(k) e^{-j \frac{2\pi n k}{2M}} \right|^2$$

Il peut donc être évalué à l'aide de la T.F.R.

Cette même procédure est également applicable à l'estimateur modifié. Toutefois l'équivalent de la formule (4-30) sera la suivante :

$$R_{x_e}(m) = \frac{1}{MP} \left| \sum_{k=0}^{2M-1} x_e(k) w(k) e^{-j \frac{2\pi m k}{2M}} \right|^2 \quad (4-33)$$

Avant d'évaluer la T.F.D, il faut donc multiplier chaque section $x_1(k)$ du signal analysé par la fenêtre temporelle $w(k)$.

Pour ce qui est de l'estimateur adouci, il nécessite l'évaluation préalable de l'estimateur de corrélation $C_x(k)$. Il faut ensuite multiplier cette estimation par la fonction fenêtre appropriée $w(k)$. La T.F.D de ce produit fournit l'estimateur adouci. Pour augmenter le nombre de points dans la représentation $\tilde{S}_x(m)$, on peut calculer la T.F.D sur une durée supérieure à $(2M-1)$.

$$\tilde{S}_x(m) = \sum_{k=-L}^{L-1} C_x(k) w(k) e^{-j \frac{2\pi m k}{2L}}$$

avec $L > M$

Il faut remarquer que la résolution fréquentielle est la qualité de l'estimateur sont régis par la forme et la durée de la fenêtre choisie.

TABLE-A-1: RECAPITULATION POUR COMPARISON DES PROPRIETES DES ESTIMATEURS SPECTRAUX DE PUISSANCE.

	ESTIMATEUR SPECTRAL SIMPLE	ESTIMATEUR SPECTRAL MOYENNE
FORMULE DE DEFINITION	$S_x(f) = \frac{1}{K} \left \sum_{k=0}^{K-1} x(k) e^{-j2\pi f k} \right ^2$	$\bar{S}_x(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{x_l}(f)$ avec $S_{x_l}(f) = \frac{1}{M} \left \sum_{k=0}^{M-1} x_l(k) e^{-j2\pi f k} \right ^2$
FORMULE DE PROGRAMMATION TFR	$S_x(m) = \frac{1}{K} \left \sum_{k=0}^{2K-1} x(k) e^{j\frac{2\pi a k}{2K}} \right ^2$	$\bar{S}_x(m) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{x_l}(f)$ avec $S_{x_l}(f) = \frac{1}{M} \left \sum_{k=0}^{2M-1} x_l(k) e^{-j\frac{2\pi a k}{2M}} \right ^2$
COMMENTAIRES	<ul style="list-style-type: none"> - Estimateur spectral biaisé - Variance proportionnelle au carré du spectre cherché. Aucun paramètre pour la réduire. - Il est sujet aux phénomènes de distributions fréquentielle car contient implicitement une fenêtre rectangulaire - Résolution fréquentielle meilleure que moyenné et modifié mais moins bonne qu'adouci. - Résolution dynamique moins bonne que moyenné et modifié mais meilleure qu'adouci. 	<ul style="list-style-type: none"> - Biais plus grand que celui de l'estimateur simple. On peut le réduire en augmentant la durée de la section M. - Variance inversement proportionnelle à L. La difficulté est de trouver un compromis entre L et M. - Sujet aux phénomènes de distributions fréquentielle car contient implicitement une fenêtre rectangulaire - Résolution fréquentielle moins bonne qu'adouci et simple mais meilleure que modifié - Résolution dynamique bonne.

SUITE DE LA TABLE-A-1 PRÉCÉDENTE DE
COMPARAISON DES ESTIMATEURS SPECTRAUX

	ESTIMATEUR SPECTRAL ADOUCI :	ESTIMATEUR SPECTRAL MODIFIÉ :
FORMULE DE DEFINITION	$\tilde{S}_x(f) = \int_{-L/2}^{L/2} S_x(g) w(f-g) dg$ $\tilde{S}_x(f) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w(k) C_x(k) e^{-j2\pi f k}$	$R_{xx}(f) = \frac{1}{MP} \left \sum_{k=0}^{M-1} x_c(k) w(k) e^{j2\pi f k} \right ^2$ $P = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} w^2(k)$ $\bar{R}_x(f) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L R_{xx}(f)$
FORMULE DE PROGRAMMATION TFR	$\tilde{S}_x(m) = \sum_{k=-L}^{L-1} C_x(k) w(k) e^{-\frac{j2\pi m k}{2L}}$ <p>avec $L > M$</p>	$R_x(m) = \frac{1}{MP} \left \sum_{k=0}^{2M-1} x_c(k) w(k) e^{-\frac{j2\pi m k}{2M}} \right ^2$
COMMENTAIRES	<ul style="list-style-type: none"> - Biais d'autant plus faible que l'ouverture de la fenêtre petite (M grand) - - Variance inversement proportionnelle au nombre de sections - Très bonne résolution fréquentielle. - Mauvaise résolution dynamique que qui peut être améliorée par le choix de la fenêtre - Pour avoir une estimation positive et réelle, il faut choisir la fenêtre $w(k)$ paire et sa transformée doit être positive. - Effet de filtrage de plus de l'ouverture du pic central de la fenêtre spectrale. 	<ul style="list-style-type: none"> - Biais asymptotiquement nul grâce au facteur de normalisation P - Variance inversement proportionnelle à L. - Résolution fréquentielle s'améliore en augmentant la durée d'une section M. - Bonne résolution dynamique - Pas de contrainte sur le signe, ni sur la transformée de Fourier de la fenêtre. - Avec le choix d'une fenêtre autre que rectangulaire, l'estimateur devient moins sensible aux phénomènes de distribution fréquentielle. - Se prête mieux à la programmation à l'aide de la T.F.R.

PARTIE B

APPLICATION A L'ANALYSE SPECTRALE DE L'ELECTROENCEPHALOGRAMME (E.E.G.)

Une analyse statistique des signaux de l'E.E.G n'étant pas à notre portée, vue qu'elle doit être issue de relevée expérimentaux d'échantillons du signal.

La documentation relevée à ce niveau, indique que dans l'analyse des signaux d'E.E.G, les modèles mathématiques utilisés sont fondés sur l'assimilation des variations de voltage en fonction du temps à :

" une série temporelle stationnaire (si possible ergodique)". (BUGARD 1974)

L'objet de cette partie, est d'adapter les techniques d'analyse spectrale étudiée dans la partie A, aux signaux E.E.G en vu d'établir un programme en FORTRAN réalisant cette analyse spectrale.

Dans les applications médicales, les techniques de transformée de FOURIER sont surtout appliquées au dépouillement d'E.E.G.

La méthode utilisée ici est la numérisation du signal et son étude par la transformée de Fourier rapide sur ordinateur.

ELECTROENCEPHALOGRAPHIE

DEFINITION ET HISTORIQUE

L'électroencéphalographie est une technique d'enregistrement graphique des variations des potentiels de divers points du cerveau.

C'est Han BERGER, en 1929, qui créa le terme d'electro-encéphalographie et qui réalisa le premier appareil de détection et d'enregistrement des principales ondes cérébrales. Depuis, lors il est devenu un moyen classique d'investigation en neuropsychiatrie.

TECHNIQUE ET DUREE D'ENREGISTREMENT

Le sujet est étendu au repos physique, mental et sensoriel.

Les électrodes sont posées sur le scalp. Les pulsations neuronales ne rencontrent guère d'obstacles sérieux que dans la pellicule de sébum du cuir chevelu qui doit être frotté avec un mélange d'alcool, d'acétone et d'éther.

On préfère le placement d'électrodes selon la méthode dite "10-20" (47)
(fig. B/1) Dix neuf ou vingt et une électrodes sont utilisées. Un tel nombre permet une bonne séparation des rythmes et diminue le risque de passer à côté d'un foyer localisé. Les électrodes sont disposées de façon précise sur le scalp, symétriques des deux côtés et équidistantes les unes des autres.

• deux sortes de dérivations peuvent être utilisées :

- Avec des dérivations unipolaires, on mesure la différence de potentiel entre deux électrodes, l'une placée dans une zone active et l'autre placée dans une zone inactive (placée au menton, lobe de l'oreille, référence instrumentale,...)

- Avec des dérivations bipolaires, on mesure la différence de potentiel entre deux électrodes actives.

Ce dernier dispositif permet une localisation précise des lésions car il permet de faire varier la distance entre deux électrodes.

Un enregistrement standard dure environ vingt minutes, il est divisé en général, comme ci-dessous..

- Un enregistrement au repos de 5 à 10 Minutes durant lequel, il est demandé l'ouverture et la fermeture des yeux.

Cette phase sert surtout à apprécier les réactions d'arrêt et la répartition topographique des ondes cérébrales.

- 2 hyper de 3 minutes chacune sont demandées.

- des stimulations lumineuses intermittentes (SLI) sont pratiquées aussi.

Il est à noter, que ces durées peuvent être modifiées par le technicien suivant les cas de malades.

DIFFICULTES D'ENREGISTREMENTS :

Un tracé E.E.G peut se trouver surchargé d'artéfacts. (différence de potentiel extra cérébrale) dont les plus fréquents sont ;

Electromyogramme, electrodermogramme, mouvements respiratoires, électrocardiogramme, mouvements oculaires, tremblements, secteur.

Ces différents artéfacts peuvent masquer des ondes cérébrales.

Certains peuvent être éliminés par un technicien attentif, d'autres par l'électroencéphalographe grâce aux ifilts ou à l'ampli différentiel qu'il contient.

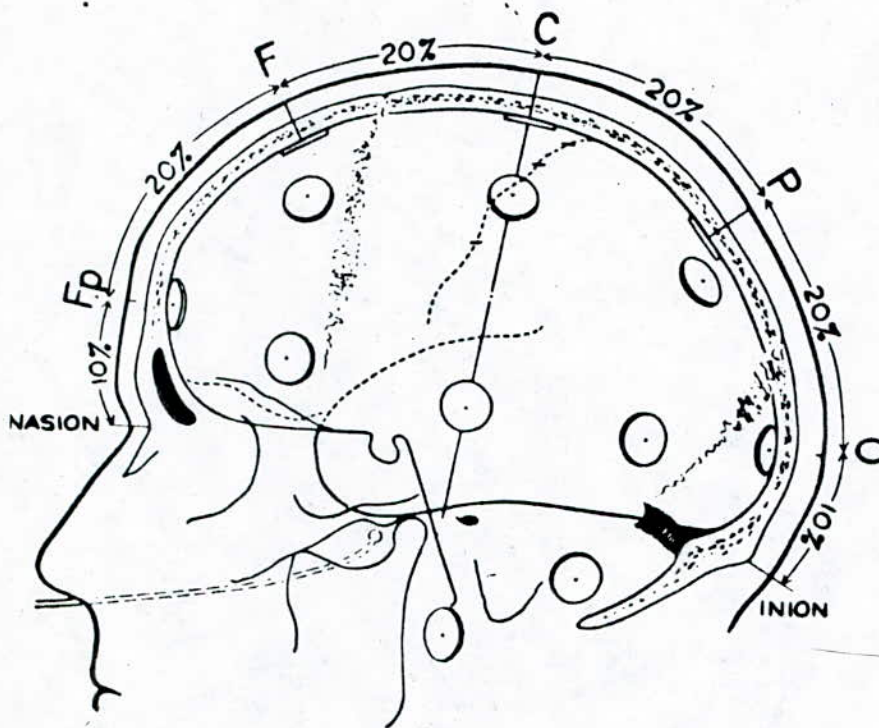


Fig BI : EMPLACEMENT DES ELECTRODES SELON LE SYSTEME "10-20"
(NECTOR, 1976)

% : REPRESENTE LA DISTANCE ENTRE ELECTRODES EN FONCTION
DE LA LONGUEUR NASION - INION

AVEC :

- FP : Point Fronto-Polaire
- F : Point Frontal
- C : Point Central ou Rolandique
- P : Parietal
- O : Point Occipital

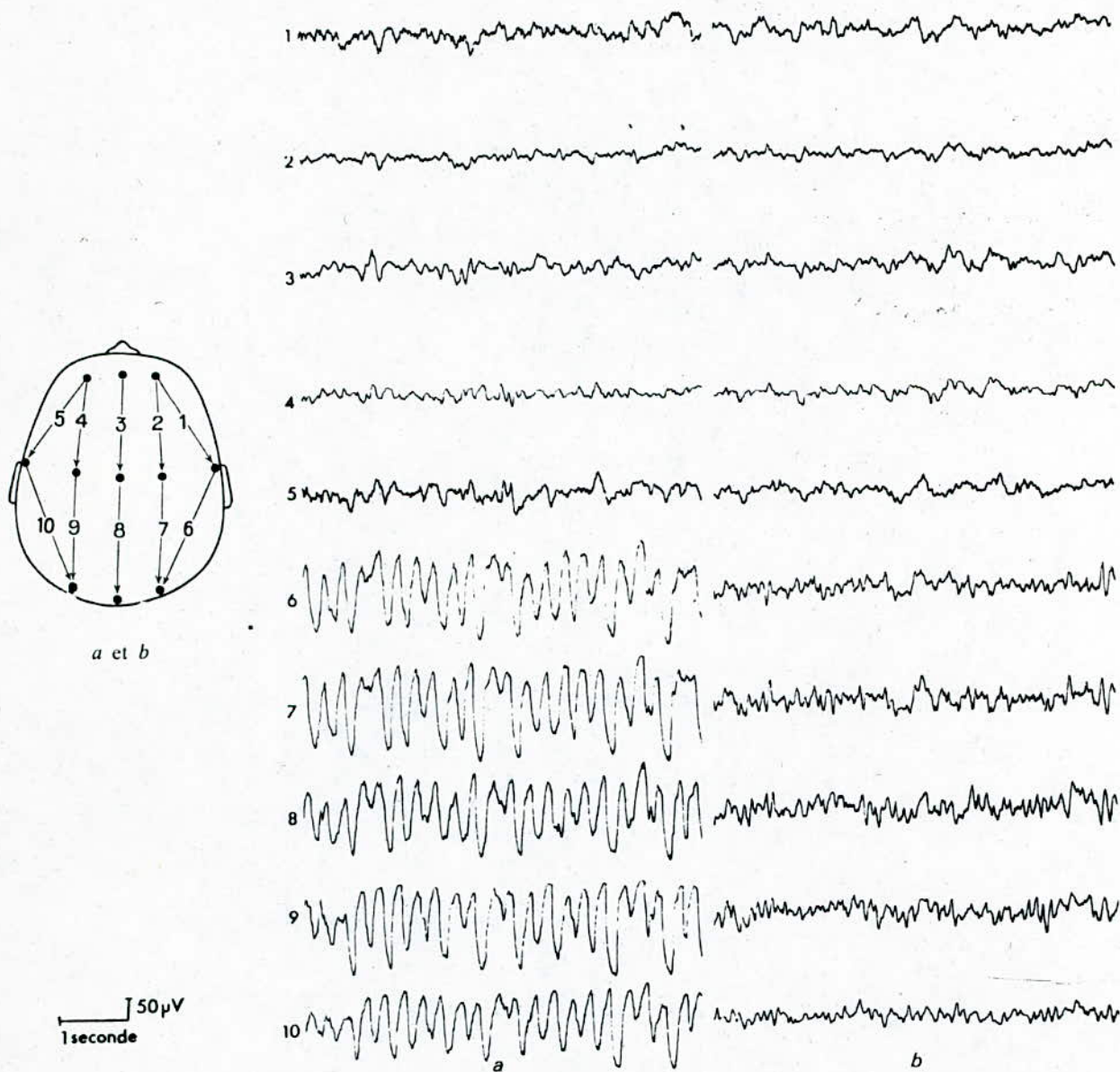


fig. B.2 : ENREGISTREMENT DES MINUTES QUI SUIVENT L'HYPERPNÉE. (HECTOR, 1976)

Un cas particulier de l'enfant.

7 ans. — Troubles caractériels. Lenteur. Enurésie.

a) Tracé spontané, repos, yeux fermés. Ondes lentes permanentes de 3-4 Hz sur les régions occipitales.

b) Une minute après une hyperpnée de trois minutes. Le rythme lent occipital fait place à une activité alpha presque normale. Les yeux sont fermés et l'enfant n'est pas somnolent. Les ondes lentes réapparaissent plusieurs minutes plus tard.

Cette réaction — apparemment contradictoire — n'est pas exceptionnelle chez l'enfant.

Les électroencéphalographistes désignent par des lettres grecques des rythmes électriques différents :

RYTHME ALPHA :

Il est caractéristique des régions occipitale et occipito pariétales.

Il ne manque pratiquement jamais chez l'adulte normal. On l'appelle rythme de repos. En effet, il s'installe lorsque l'individu est au repos, étendu, les yeux fermés à l'abri des stimulations sensorielles.

L'ouverture des yeux suffit pour le stopper.

Il consiste dans la succession d'ondes sinusoïdales régulières dont la fréquence est de l'ordre de 8 à 12 Hertz et d'amplitude de 30 à 50 μv sur le scalp.

RYTHME BETA

Ce rythme est caractéristique des régions rolandiques et frontales chez l'adulte normal. Il passe souvent inaperçu en raison de sa faible amplitude.

Il disparaît pendant le sommeil et les conditions de son blocage sont en relation avec l'activité motrice volontaire et la préparation à l'action.

Il est caractérisé par des ondes sinusoïdales très peu amples (5 à 10 μv) et de fréquence de 14 à 25 Hertz.

RYTHME DELTA

Ce rythme est caractéristique de certains états pathologiques. Il apparaît aussi au cours du sommeil profond. C'est des ondes amples et lentes de fréquence 1 à 3 hz.

RYTHME THETA

Ce rythme est caractéristique des régions pariéto temporales. Il est souvent difficile à mettre en évidence chez l'adulte normal où il est masqué par le rythme Alpha

Il s'agit d'ondes sinusoïdales de 4 à 7 Hz de plus de 50 μv .

RYTHME MU :

Il caractérise les régions centrales (rolandiques) Il est atténué par les mouvements (réels ou imaginaires) et la stimulation tactile.

C'est des ondes sinusoïdales de 7 à 11 Hertz (fig.B3).

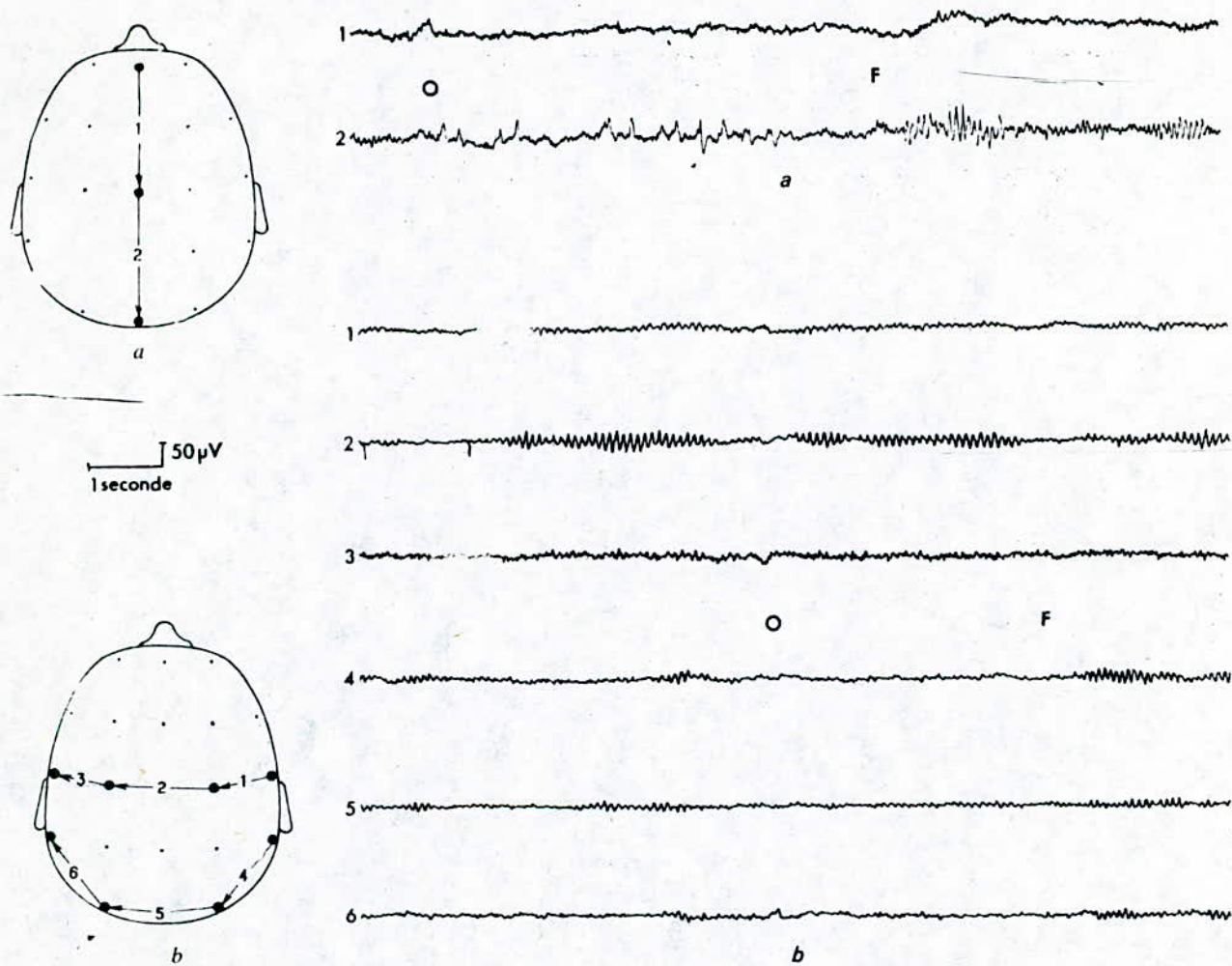


fig. 8.3: ONDES LAMBDA (occipitales). — ONDES MU (rolandiques). (HECTOR, 1976)

a) 55 ans. — Ondes lambda apparaissant lorsque les yeux sont ouverts, sur le territoire occipital médian (2).

b) 26 ans. — Ondes mu ou rythmes rolandiques en arceaux (1-2-3). Elles ne sont pas interrompues par l'ouverture des yeux.

Le rythme alpha s'enrichit à leur fermeture (off effect physiologique) (4-5-6).

Le tracé, enregistré et annoté par un personnel technique spécialisé, doit être lu et interprété par un médecin expérimenté.

En général, l'interprétation en fonction de la clinique se fait en appréciant avec précision :

- Activité de fond, symétrie ou asymétrie
- Réactivité à l'ouverture des yeux et à d'autres stimulations
- Effets des épreuves d'activation (hyperpnée)
- Figure anormale au repos

UN tracé E.E.G est anormal :

- S'il est le fait d'une maniaise organisation topographique.
- S'il y a asymétrie trop marquée. Les asymétries sont significatives quand elles portent sur les fréquences en effet du point de vu amplitude, les ondes du côté droit sont toujours plus amples que celles de gauche.
- S'il y a manque de réactivité,
- S'il y a grande sensibilité aux activations
- S'il comporte des activités delta ou un excès de theta
- S'il comporte des figures qui n'existe pas normalement dans un tracé
- S'il y a absence totale d'activité

APPLICATIONS ET INTERET DU E.E.G EN MEDECINE

Les applications du E.E.G en médecine sont nombreuses, nous allons citer quelques maladies détectables à l'aide du E.E.G (ceci en plus de l'épilepsie)

MENINGITE

Au cours de méningites lymphocytaires aiguës bénignes d'origine virale, on aura un ralentissement du rythme de base et une surcharge d'ondes theta.

ABCES DU CERVEAU

Les abcès situés au niveau des hémisphères cérébraux sont remarquables par leur intensité (amplitude), ce n'est que sans antibiotique que l'on voit apparaître une activité δ dans la région en question.

Elles atteignent les régions temporales et frontales. Elle se caractérisent par des réponses asymétriques et des ondes lentes à grandes amplitudes

MALADIE D'ALZHEIMER

Elle atteint les régions pariéto occipitales, où les ondes ~~X~~ sont remplacées par δ et θ .

L'ELECTROENCEPHALOGRAPHE

Malgré la multitude d'aspect des appareils d'E.E.G, les principes fondamentaux restent les mêmes. Dans tous les appareils, on peut considérer trois parties distinctes (fig. P.3. BIC)

- Les circuits d'entrée qui transmettent, aux amplificateurs les variations de potentiels " captées " par les électrodes.
- Les amplificateurs
- Le système enregistreur qui traduit le signal traité pour le rendre lisible et utilisable.

A différents niveaux sont situées les commandes qui permettent de connaître et de régler avec une grande précision la quantité et la qualité de l'amplification.

LES AMPLIFICATEURS :

Les premiers étages d'amplification sont appelés : préamplificateurs, c'est à ce niveau que se situent les réglages des différents paramètres :

- amplification
- constante de temps
- filtres

En général, l'amplification est réglée à $100 \mu\text{V/cm}$, la constante de temps à 0,3 seconde et la vitesse de déroulement du papier à 15 mm/s.

Les filtres permettent d'atténuer les bandes de fréquences et d'éliminer certains artéfacts. Il existe, en général, quatre filtres : 15, 30, 45, et 75 Hz. Le plus souvent, c'est le filtre à 75 Hz qui est le plus utilisé.

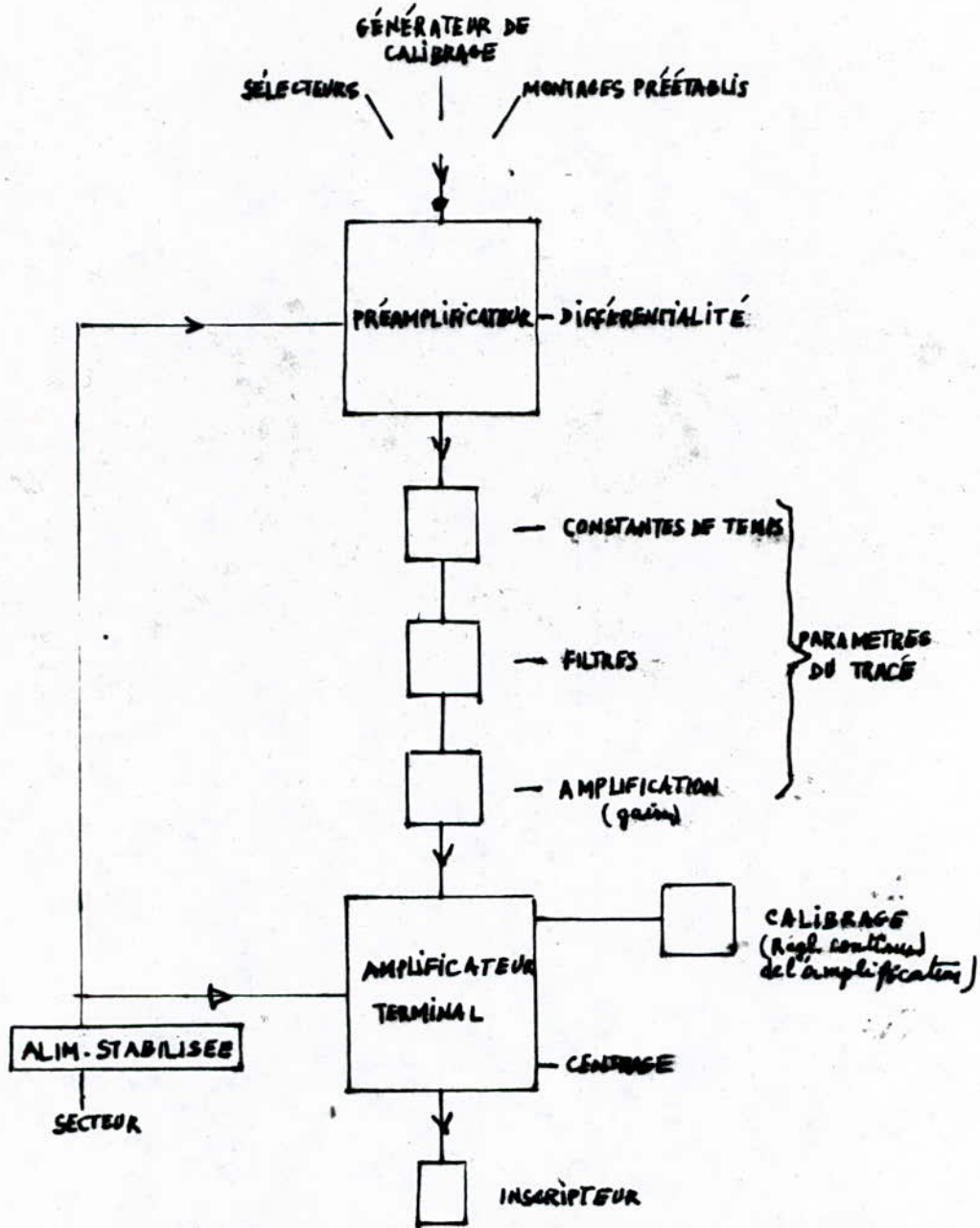


fig B.3.bis: SCHEMA D'ENSEMBLE D'UN APPAREIL EEG.

Elles sont situées avant les amplificateurs terminaux. Les signaux sortent sur une bande passante beaucoup plus large que celle dont on dispose au niveau des galvanomètres -inscripteurs : jusqu'à 5000 Hz quand aucun filtre n'est enclenché.

Ces signaux sont utilisables sur bandes magnétiques, scope ou peuvent être envoyés vers un analyseur ou un moyennneur.

PARAMETRES IMPORTANTS POUR L'ANALYSE SPECTRALE DU E.E.G

Le signal E.E.G est considéré comme une variable aléatoire. Un des paramètres le plus généralement étudié est le spectre de puissance défini par :

$$S(f) = E [X(f) X^*(f)]$$

où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal et $X^*(f)$ sont complexe conjugué.

Pour diminuer l'erreur entre le spectre mesuré et le spectre réel, il est nécessaire d'effectuer un moyennage sur plusieurs spectres.

Un autres paramètre important est le cross spectre entre deux enregistrements simultanés d'E.E.G.

Il est défini par :

$$S_{xy}(f) = E [X_x(f) X_y^*(f)]$$

Ce cross spectre permet de calculer deux informations importantes qui sont, le spectre de cohérence défini par :

$$C_{xy}(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f) S_y(f)}$$

et le spectre de phase :

$$\phi(f) = \arg S_{xy}(f)$$

Tous les paramètres cités ci-dessus peuvent être calculés numériquement, donc d'une façon plus précise, plus rapide et plus fiable et ceci est possible grâce à la transformée de Fourier rapide.

DE l'étude précédente, de l'électroencéphalographie, il est aisé de voir qu'une visualisation du spectre du E.E.G peut permettre et faciliter l'interprétation du neurologue. Parmi les informations utiles que peut fournir une analyse spectrale, nous citons :

SYMETRIE :

Lors de l'interprétation du tracé E.E.G, il est très important d'apprécier la symétrie des ondes émises par deux électrodes situées symétriquement à gauche et à droite.

Les spectres de cohérence et de phase fournissent des informations précises et plus fiables que le tracé dans le temps. En effet, la symétrie des ondes émises est plus significative du point de vu fréquence que du point de vu amplitude dans le temps.

SUPERPOSITION D'ONDES

Il existe des cas d'anomalie où le tracé dans le temps est une superposition d'ondes: cas de la méningite, par exemple, où le rythme de base est recouvert par des ondes thêta.

L'analyse spectrale des ondes émises par la région en question, permet de visualiser la composition en fréquences des ondes superposées.

DIFFICULTES D'APPRECIATION :

Il est difficile d'apprécier le type d'ondes d'après le tracé temporel. Ceci oblige le médecin à compter le nombre de cycles. L'erreur n'est pas permise d'autant plus qu'il y a une répartition bien précise des rythmes cérébraux (fig.B/2)

FACILITE DE LECTURE :

La visualisation du spectre libère le neurologue de la fatigante tâche de parcourir, plusieurs pages sur plusieurs canaux à l'oeil, pour apprécier la symétrie ou le rythme de fond et lui permet de se consacrer entièrement à l'interprétation.

Ainsi, l'analyse spectrale du E.E.G augmente la précision, permet un gain de temps et évite bien des erreurs.

Toutefois, le médecin ne peut se passer du tracé dans le temps qui peut lui apporter des informations complémentaires très utiles : entre autre, l'appréciation du temps mis pour une réaction.

CHOIX DE L'ESTIMATEUR SPECTRAL DE PUISSANCE

Les paramètres importants permettant une analyse spectral des signaux du E.E.G se résument à un calcul d'estimation spectrale .

L'étude de quatre estimateurs spectraux avant été faite dans la partie A, l'objet de cette partie est de choisir celui qui s'adapte à l'analyse du tracé du E.E.G.

La table de comparaison A-2 Fournit la définition et les propriétés suivantes pour l'estimateur spectral modifié.

avec

$$\bar{R}_x(m) = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L R_{x_e}(n)$$

et

$$R_{x_e}(n) = \frac{1}{MP} \left| \sum_{k=0}^{2M-1} x_e(k) w(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{2M}} \right|^2$$

$$P = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} w^2(k)$$

BIAIS DE L'ESTIMATEUR MODIFIÉ :

Grâce au facteur de normalisation P, le biais de cet estimateur est asymptotiquement nul.

VARIANCE

La variance de cet estimateur est donnée par :

$$\text{Var}[\bar{R}_x(f)] \approx \frac{1}{L} \phi_x^2(f)$$

Il est possible d'arriver à une variance satisfaisante en choisissant un nombre de sections L élevé.

MOYENNAGE SUR PLUSIEURS SPECTRES :

Par définition, l'estimateur modifié sectionne le signal en L sections de durée M chacune.

Le résultat de l'estimation est un moyennage du spectre de chaque section. Ce moyennage augmente la précision de l'estimation et diminue donc l'erreur entre le spectre estimé et le spectre réel.

RESOLUTION DYNAMIQUE

Cet estimateur possède la meilleure résolution dynamique de tous les autres estimateurs.

La raison est que le signal sectionne et multiplié par une fenêtre est élevé au carré par définition de l'estimateur modifié. Au niveau de la densité spectrale de puissance, c'est le carré de la fonction fenêtre qui intervient ce qui creuse l'écart entre le niveau de lobe principal et le niveau des lobes secondaires (voir choix de la fenêtre).

RESOLUTION FREQUENTIELLE

La résolution fréquentielle de cet estimateur est quelconque mais elle peut être améliorée.

En effet, l'écart de fréquence entre deux points consécutif est :

$$\Delta f = \frac{F_{max}}{M}$$

Ainsi en choisissant une durée de section M élevée, il est possible d'améliorer la résolution fréquentielle de cet estimateur. Le pouvoir séparateur de cet estimateur sera étudié lors du choix de la fenêtre.

SENSIBILITE AU PHENOMENE DE DISTRIBUTION FREQUENTIELLE

Cet estimateur est le moins sensible des estimateurs aux phénomènes de distributions fréquentielles.

Ceci est dû à la multiplication du signal par une fenêtre dans le domaine temporel et à l'élévation au carré de la fenêtre qui atténue les phénomènes de GIBBS (voir choix de la fenêtre).

APPLICATION DE LA T.F.R.

De la formule de définition de $R_{xr}(n)$, on peut dire que l'estimateur spectral modifié est la transformée de Fourier au carré, du signal sectionné $x_e(k)$ multiplié par une fenêtre $W(k)$.

De ce fait, il est aisément calculable à l'aide de la T.F.R.

Il apparait donc que l'estimateur spectral modifié est un estimateur consistant approchant le spectre réel grâce à son moyennage, ayant une bonne résolution dynamique et une résolution fréquentielle qui peut être améliorée.

Il se prête bien à la programmation à l'aide de la T.F.R. c'est donc un estimateur qui peut être utilisé pour l'analyse spectral des signaux du E.E.G.

Pour appliquer l'estimateur spectral modifié, il est nécessaire d'effectuer dans le domaine temporel, la multiplication de chaque section du signal par une fenêtre.

Cette pondération des échantillons du signal est un produit de convolution dans le domaine fréquentiel, et permet de réduire les phénomènes de distributions des composantes fréquentielles.

Du choix de la fenêtre dépendent la résolution dynamique et le pouvoir séparateur de l'estimateur.

Il a été montré, dans la partie A, que le choix de la fenêtre se fait selon deux critères :

... Atténuation des phénomènes de GIBBS, qui influent sur la résolution dynamique.

... Largeur de base du pic principal qui influe sur le pouvoir séparateur.

Or quand l'un des critères décroît l'autre croît.

Il faut donc trouver un compromis qui s'adapte à cette application.

L'équation d'une fonction fenêtre de Hamming centrée en $M/2$ est :

$$W_H(k) = 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi(k - M/2)}{M}$$

Cette fenêtre a 99,96 % de son énergie dans le lobe principal. Le lobe secondaire le plus important se situe à environ 40 db au dessous du lobe principal.

Ce n'est pas la fenêtre la plus performante du point de vue atténuation des phénomènes de Gibbs, mais ceci est compensé par son élévation au carré dans l'estimation spectral modifié. En effet, cette élévation au carré creuse l'écart entre le niveau du lobe principal et le niveau des lobes secondaires. Ce qui revient à une bonne atténuation des phénomènes de GIBBS donc à une bonne résolution dynamique et une atténuation du phénomène de distribution des composantes fréquentielles.

Cette fonction $W_H(k)$ est obtenue par superposition de trois répliques de la fonction fenêtre rectangulaire décalées par pas de $1/N$. Cette superposition produit un pic central, dans la fonction $W_H(k)$, dont la largeur de base est de $4/M$ où M est la durée d'une section du signal.

Pour assurer, une fine détection des raies, dans le domaine fréquentiel, il faut respecter la condition :

$$\frac{4}{M} \leq \Delta f$$

où Δf est la résolution fréquentielle voulue.

Ainsi le pouvoir séparateur de l'estimateur sera satisfaisant.

Il est à remarquer que la largeur du pic principal de la fenêtre peut être diminuer en choisissant une durée de section M grande.

La fenêtre de Hamming réalise bien le compromis entre les deux critères de choix de la fenêtre. Il faut noter aussi, que le calcul des échantillons de la fenêtre de Hamming à l'aide d'un ordinateur, est aisé.

DISCUSSION DES CONTRAINTES :

De ce qui précède, il est apparu des contraintes qu'il faut choisir minutieusement afin d'arriver à une estimation spectrale satisfaisante.

L'organigramme donné ci-après permet de choisir méthodiquement toutes les contraintes qui sont liées entre elles, ou n'en oubliant aucune.

CALCUL DES CONTRAINTES :

L'électroencéphalogramme est généralement équipé de quatre filtres. Nous supposons dans le cadre de ces calculs que c'est le filtre à 75 hz qui est enclenché.

Ce qui nous donne une bande passante des signaux à analyser de :

$$\text{bande passante} = 0 - 75 \text{ hz}$$

La fréquence maximale est donc :

$$f_{\max} = 75 \text{ hz}$$

De façon générale, pour étudier un signal, il faut d'abord définir la fréquence d'échantillonnage en respectant le théorème d'échantillonnage -(partie A) .

En pratique, on considère qu'une fréquence d'échantillonnage de 4 à 5 fois supérieure à la fréquence maximale donne de bons résultats :

$$\text{d'où } f_e = 4 \times f_{\max} = 300 \text{ hz}$$

une résolution fréquentielle de :

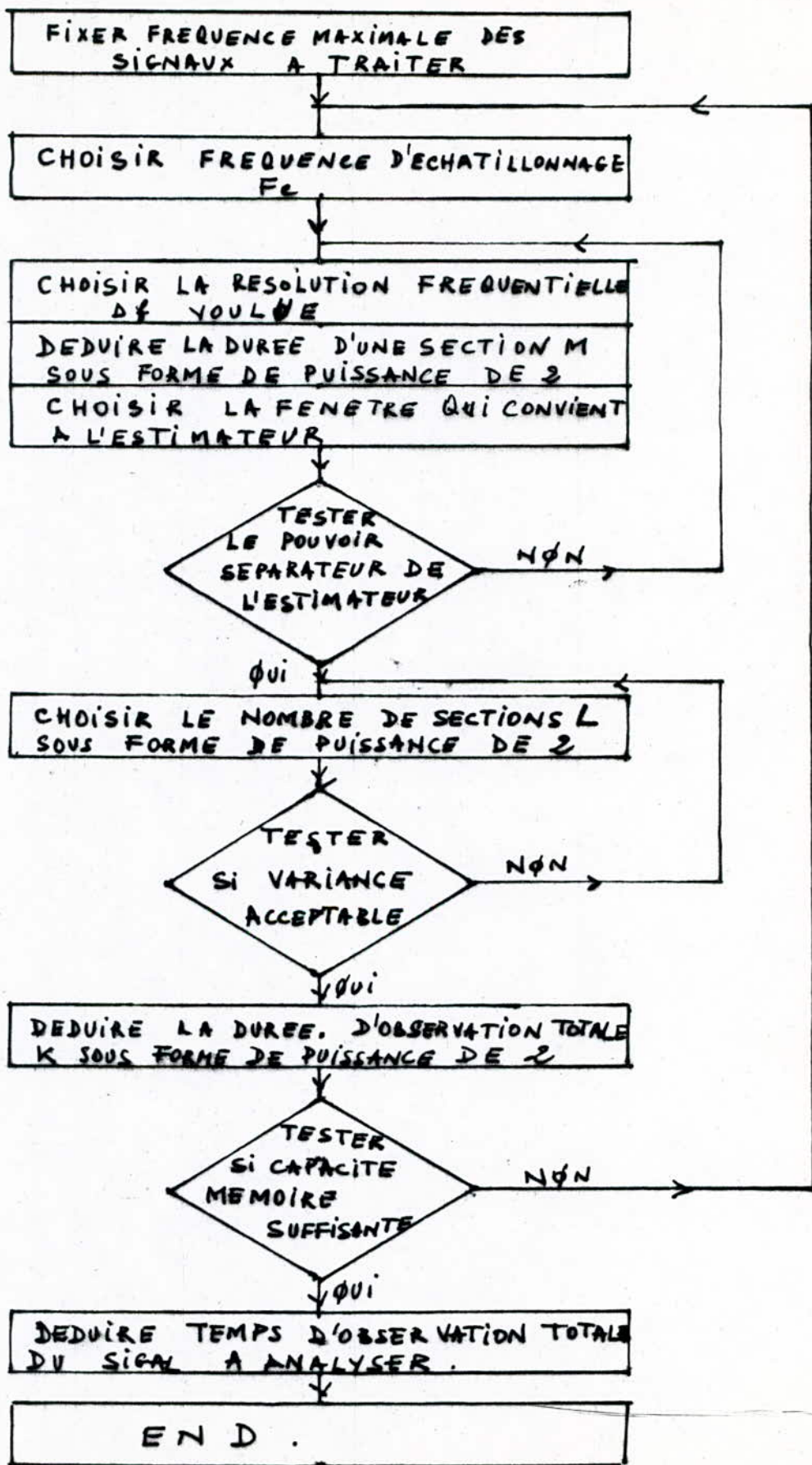
$$\Delta f = 0,146 \text{ Hz}$$

Nous donne un nombre de points numérisés par section de :

$$M = 512$$

La fenêtre choisie étant la fenêtre de Hamming : ayant une largeur du pic central

$$B = \frac{4}{M} < \Delta f \text{ car } \Delta f = \frac{75}{M}$$



Ce qui confère à l'estimateur un bon pouvoir séparateur. Des expériences ont montré qu'un nombre de section $8 \leq L \leq 32$ (Kobayashi) donne de bons résultats pour la variance, d'où :

$$L = 16$$

la durée d'observation totale ou le nombre total d'échantillons numérisés sera de :

$$K = LM = 8192$$

Suivant le calculateur utilisé, il faut voir si la capacité mémoire est suffisante.

Ce qui donne, dans ce cas, une durée d'analyse du signal médical de T.

$$T = \frac{K}{F_e} = \frac{8192}{300} = 27 \text{ secondes}$$

Il est évident que cette durée peut être augmentée en augmentant K (donc M ou L) ou en diminuant la fréquence d'échantillonnage F_e .

Il apparait deux manières d'augmenter la durée d'analyse du phénomène médical.

- Lors de l'utilisation d'un filtre plus bas (15,30 ou 45 Hz) la fréquence d'échantillonnage F_e peut être réduite sans risque sur la qualité de la numérisation.

Augmenter le nombre d'échantillons total K, c'est augmenter soit la durée d'une section M, ce qui améliore la résolution fréquentielle, soit le nombre de section L, ce qui améliore la variance de l'estimateur modifié.

La durée d'analyse du signal du F.E.G dépend donc des capacités mémoires pour emmagasiner les échantillons et de la souplesse du système d'acquisition de données qui permet de faire varier la fréquence d'échantillonnage.

SIMULATION DES SIGNAUX E.E.G.

PREAMBULE

Afin de tester le programme "analyse spectrale de l'E.E.G" la simulation du signal par l'établissement d'un modèle est exposée ci-après.

Une étude approfondie de tracés typiques d'E.E.G pris sur des cas réels, montre que ces signaux peuvent être simulés par un modèle déterministe ayant une configuration fréquentielle concorde avec celle attendue des signaux E.E.G.

Avant d'entamer la génération du modèle proprement dite, il est important de noter que le signal obtenu par programmation est indéfini dans le domaine des fréquences et du temps.

Pour une simulation, il est possible par l'adoption de valeurs déterminées de certains paramètres (approchant par exemple ceux définissant l'E.E.G dans le domaine fréquentiel et temporel) de donner au signal numérique un sens physique déterminé.

En ce sens le modèle généré, simulera donc un signal de fréquence maximale $f = 150$ Hz composé d'un bruit pseudo blanc de variance très faible et de 4 sinusoïdes d'amplitude, et de fréquences différentes.

Le caractère aléatoire de s signaux E.E.G est simulé par le choix arbitraire des amplitudes et des fréquences des 4 sinusoïdes.

Le bruit blanc simulera de son côté la présence inéluctable du bruit de quantification (dit aussi erreurs de quantification), ainsi que les différents artéfacts dont la nature aléatoire renforce le caractère aléatoire que doit avoir le modèle.

Le programme d'analyse spectrale établi aura donc pour tâche de mettre en évidence 3 raies de puissances connues correspondants aux sinusoïdes, simulant par exemple la présence des trois principales ondes α , δ et θ en présence de bruit.

La représentation spectrale théorique du modèle est donnée par la figure fig. B4.

Poussant plus loin le modèle, il est apparu possible de réaliser, la simulation du filtrage des signaux qui se fait normalement analogiquement à 75 Hz sur les appareils électroencéphalogramme, couramment employés. A cette fin un filtre non récursif passe bas est utilisé. La synthèse de ce filtre est donnée dans ce chapitre.

(63)
La fonction filtrage aura pour but d'éliminer la fréquence f_{s4} (fig B-4)
d'une sinusoïde du modèle située en dehors de la bande passante du filtre.

GENERATION NUMERIQUE DU MODELE

Comme il a été annoncé dans le préambule ci-dessus, il est nécessaire de définir certains paramètres pour le signal généré :

- . La fréquence maximum du signal
- . La fréquence d'échantillonnage
- . LE nombre $N = 2^{13} = 8192$ d'échantillons générés
- . Le nombre d'échantillons dans une section :
 $M = 512 = 2^9$
- . Le nombre de sections : $L = 16$

Le signal numérique modèle est issu de l'échantillonnage du signal analogique (par programme) donné à la figure fig.B.5.

Le bruit pseudo blanc est considéré comme un signal additif qui engendrera une légère distorsion de forme des sinusoïdes.

Sa génération et sa puissance seront examinées par la suite.

GENERATION DU BRUIT PSEUDO BLANC

En théorie, le bruit blanc est un signal aléatoire à bande infinie. En pratique il est simulé par une séquence de nombre suivant une loi de probabilité gaussienne et de taille suffisamment grande. La variance de la loi (écart type au carré) indique la puissance du bruit. La bande de fréquence du signal ainsi obtenu est nécessairement limitée. Une technique très répandue permet de générer un signal pseudo aléatoire à distribution gaussienne à partir d'un signal pseudo aléatoire à distribution uniforme. Ceci se fait à l'aide d'une relation de récurrence du type : (KUNT, 1981) :

$$z(k) = y(k) \cos[2\pi x(k+1)] \sigma + m$$

où $y(k)$ est un signal pseudo aléatoire ayant la distribution de Rayleigh définie par la relation

$$y(k) = \sqrt{2\sigma^2 \text{Log} \frac{1}{x(k)}}$$

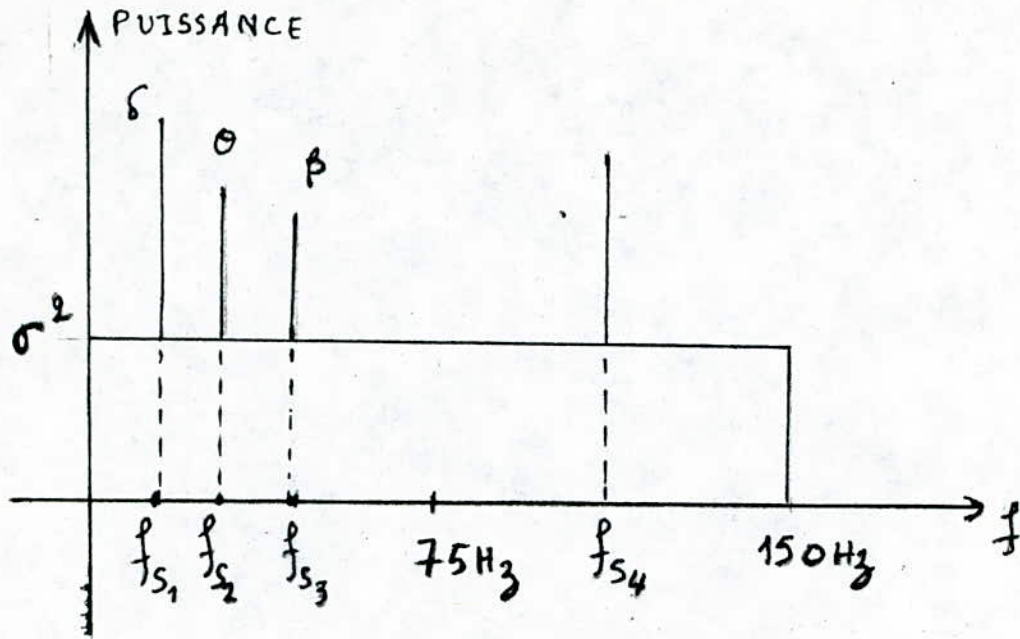


Fig B4: Représentation Spectrale théorique du modèle.

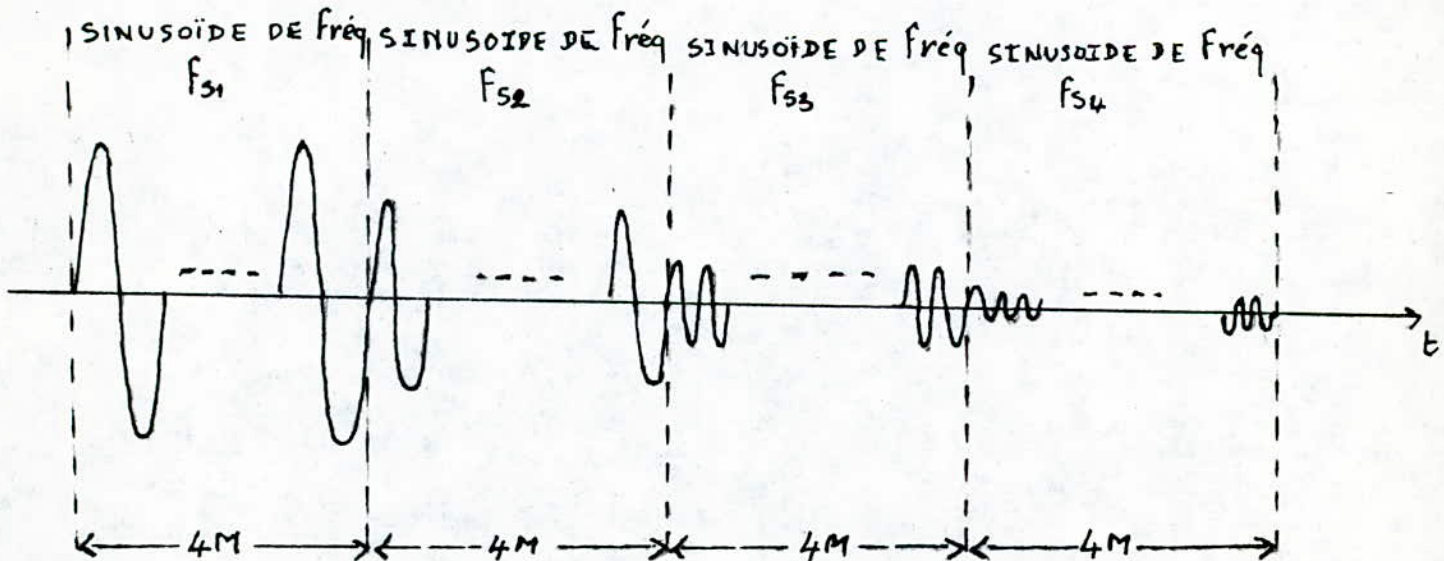


Fig B5: Modèle de l'EEG

et où $x(k)$ est le signal pseudo aléatoire à distribution uniforme. (65)

Le signal $z(k)$ ainsi généré possède la distribution de gauss de moyenne m et de variance σ^2 . C'est cette méthode qui est programmée dans ce projet pour générer le bruit blanc de moyenne $m = 0$

GENERATION DE SIGNAUX A DISTRIBUTION UNIFORME

Il existe différentes méthodes pour générer des signaux pseudo aléatoires à distribution uniforme. La méthode la plus couramment utilisée est celle définie par la relation de récurrence : (LABARRERE, 1982).

$$x(k+1) = [Kx(k)] \text{ mod } 2^{N-1}$$

Où x et K sont des entiers et N le nombre de bits du mot binaire, du calculateur sur lequel est programmée la relation. Afin de générer sans problème les $x(k)$, il faut choisir $x(0)$ impaire (nombre initiale)

$$K = 9m \pm 3 \quad m \text{ entier}$$

$$(K \text{ est choisie de l'ordre de } 2^{(N-1)/2})$$

Ces conditions assure la périodicité maximum 2^{N-3} de la séquence pseudo aléatoire générée.

enfin, pour obtenir une variable aléatoire uniformément répartie sur $(0,1)$ il faut diviser le résultat par 2^{N-1}

GENERATION DES SINUSOÏDES

Les s paramètres énoncés précédemment permettent de fixer certaines caractéristiques des sinusoides à générer dans le modèle.

Le modèle (fig.85) s'adapte bien à l'estimation spectrale réalisée par l'estimateur modifié (cf chapitre précédent:)

$$\text{Etant donné : } K = 8192, L = 16 \quad f_e = 300 \text{ Hz}$$

La durée D_{ss} d'observation du signal de simulation est déduite par :

$$D_{ss} = K T_e = \frac{K}{f_e} = \frac{8192}{300} = 27,31 \text{ seconde}$$

D'une façon analogue la durée d'une section de M échantillons sera :

$$\Delta t_m = M T_e = \frac{M}{f_e} = \frac{512}{300} \approx 1,71 \text{ seconde}$$

On veut avoir un nombre entier de période d'une sinusoïde sur une section de M échantillons. Les sinusoides s'engendreront par la relation :

$$S(k) = R \sin \left[\frac{2\pi}{M} I k \right]$$

où I entier prenant 3 valeurs de puissance de 2 différentes,
et où k variable entière.

On remarque qu'il y aura I périodes de la fonction générée sur Δt_M
lorsque k varie par valeurs entières croissante de 1 à un multiple de I .

En particulier sur $4 \Delta t_M$, il est donc possible de simuler des sinusoides

de fréquence $f_s = \frac{I}{\Delta t_M}$ cycles par seconde

$$(f_s = \frac{I}{\Delta t_M} = \frac{I}{M T_e} = \frac{I}{M} f_e)$$

d'amplitudes $R_i, i = 1, 2, 3, 4$

choisies suivant la séquence

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R_3 = \frac{1}{2}$$

$$R_4 = \frac{\sqrt{e}}{4}$$

CHOIX DES FREQUENCES DE SINUSOIDES

Elles sont choisies de manière à approcher les valeurs réels des fréquences
des ondes typiques observées en électroencéphalographie :

On a donc :

Pour $I = 2^2 = 4$, $f_{s_1} = \frac{4}{1,71} = 2,34 \text{ Hz}$
fréquence qui simulera δ

pour $I = 2^3 = 8$, $f_{s_2} = \frac{8}{1,71} = 4,68 \text{ Hz}$
 f_{s_2} simulera une onde θ

pour $I = 2^4 = 16$, $f_{s_3} = \frac{16}{1,71} = 9,37 \text{ Hz}$

f_{s_3} simulera une onde β

Pour engendrer une sinusoïde telle que sa fréquence soit en dehors de la bande
[0,75 Hz] il suffit de choisir par exemple $I = 170$
correspondant à une fréquence $f_{s_4} = 100 \text{ Hz}$

BANDE DE FREQUENCE DU MODELE

Le respect du théorème de Shannon, amène à considérer que la bande de
fréquence du signal décrit par 8192 échantillons est régie par l'inégalité :

$$B \leq \frac{1}{2T_e} = \frac{f_e}{2} = \frac{K}{2D_{ss}} = 150 \text{ Hz}$$

Les échantillons générés peuvent être donc considérés comme 8192 échantillons provenant de l'échantillonnage d'un signal composé d'un bruit blanc de bande maximale $B = 150$ Hz, et de 4 sinusoïdes de fréquences et d'amplitudes différentes. Le tout étant échantillonné à la fréquence f_e de 300 Hz.

PUISSANCE DU BRUIT

On montre que la puissance du bruit pseudo blanc est égale à la variance de la loi Gaussienne générée utilisée pour le générer.

$$P_{BB} = \sigma^2 = \text{VAR}(X_e)$$

X_B = Variable aléatoire, amplitude du bruit.

Pour que les sinusoïdes du modèle soient détectables dans le spectre il faut considérer une puissance du bruit très faible devant la celle des sinusoïdes.

La puissance moyenne d'un signal sinusoïdal

$$\text{et : } P_{\text{moy}} = \frac{R_i^2}{2}$$

où R_i amplitude de la sinusoïde

Il faut assurer donc :

$$\sigma^2 = \frac{R_i^2}{2}$$

FILTRAGE A 75 Hz =

A partir du signal défini précédemment, modèle de l'E.E.G, il est possible de simuler le filtrage de celui ci à 75 Hz--

Ce filtrage est généralement réalisé de façon analogique sur les appareils enregistreurs de l'E.E.G. Le filtrage numérique appliqué sur le modèle montre la possibilité d'adjonction de filtres numériques dans le système d'analyse spectrale numérique.

La figure (fig. B.6) montre l'action du filtre sur le spectre du modèle.

Parmi les types de filtres numériques étudiés au chapitre 2 de la partie A, on choisit le filtre non récursif (à réponse impulsionnelle finie RIF) et ce pour deux raisons :

- ce filtre a la propriété de garder la phase linéaire. En effet, un des résultats de ce projet est le calcul du spectre de phase.

- Ce filtre est stable par définition.

Parmi les méthodes les plus utilisées, la méthode d'échantillonnage en fréquence est la plus séduisante.

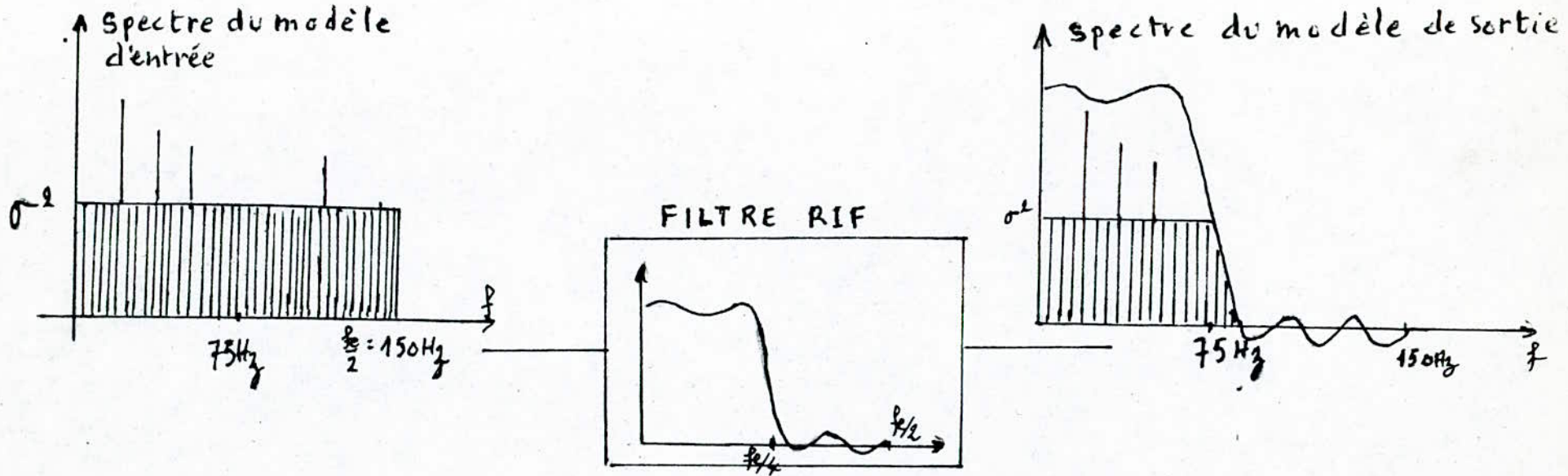


Fig B6 : Action du filtre numérique sur le modèle généré.

- Le comportement fréquentiel est estimé à priori

- L'optimisation permet de limiter les ondulations de la fonction de transfert à des valeurs tolérables.

SPECIFICATIONS /

- Bande passante = 0,75 Hz

donc fréquence de coupure à 75 Hz

- Fréquence d'échantillonnage = $f_e = 300$ Hz

- Bande passante plate linéaire

- Atténuation = - 12 db /décade ou plus

- Ondulations tolérées dans bande passante et atténuée =

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,05$$

CALCUL DU FILTRE :

Sur la courbe de réponse du filtre passe bas idéal, on choisit $N = 19$ échantillons répartis uniformément sur l'axe des fréquences (fig. B.7)

De ceci, on peut écrire :

$$\begin{array}{ll} H(0) = 1 & H(5) = H(-5) = 0 \\ H(1) = H(-1) = 1 & H(6) = H(-6) = 0 \\ H(2) = H(-2) = 1 & H(7) = H(-7) = 0 \\ H(3) = H(-3) = 1 & H(8) = H(-8) = 0 \\ H(4) = H(-4) = 1 & H(9) = H(-9) = 0 \end{array}$$

La relation (3 - 7) de la partie A, fournit la réponse impulsionnelle cherchée.

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(m) \exp\left(j 2\pi k \frac{m}{N}\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} N \cdot h(k) = & H(0) + H(-1) \exp\left(-j k \frac{2\pi}{19}\right) + H(1) \exp\left(j k \frac{2\pi}{19}\right) + \\ & + H(-2) \exp\left(-j \frac{4\pi k}{19}\right) + H(2) \exp\left(j \frac{4\pi k}{19}\right) + \\ & + H(-3) \exp\left(-j \frac{6\pi k}{19}\right) + H(3) \exp\left(j \frac{6\pi k}{19}\right) + \\ & + H(-4) \exp\left(-j \frac{8\pi k}{19}\right) + H(4) \exp\left(j \frac{8\pi k}{19}\right) \end{aligned}$$

Tout calcul fait, on arrive à l'expression :

(70)

$$h(k) = \frac{1 + 2 \cos\left(\frac{k 2\pi}{19}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi k}{19}\right) + 2 \cos\left(\frac{6\pi k}{19}\right) + 2 \cos\left(\frac{8\pi k}{19}\right)}{19}$$

d'où le tableau des valeurs :

k	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
h(k)	0,4737	0,3408	0,0267	0,1072	0,0278	0,0655
k	± 6	± 7	± 8	± 9		
h(k)	0,0229	-0,0481	-0,0333	0,0388		

Ces valeurs de h(k) nous permettent de calculer la fonction de transfert =

$$H(j\omega) = h(0) + 2 \sum_{k=1}^9 h(k) \cos\left(k 2\pi f / f_e\right)$$

d'où le tableau des valeurs suivant =

f / f _e	0	0,028	0,083	0,1389	0,1944
H(if / f _e)	0,9895	0,9658	1,062	0,9798	1,125
f / f _e	0,25	0,3055	0,3611	0,4167	0,4722
H(if / f _e)	0,2383	0,094	0,01135	0,0583	0,037

A l'aide de ces points, il est possible de tracer la courbe H(f) représentée figure (fig.B.7) Sur la courbe de réponse, on constate :

- les courbes idéale et réelle sont confondues aux points d'échantillonnage.
- Une forte ondulation apparaît entre les points d'échantillonnage. Les valeurs d'ondulation dépassant le gabarit fixé, se trouvent proches de la zone de transition.

OPTIMISATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT

L'étude de la fonction d'interpolation et l'optimisation ont été faites au chapitre 3 de la partie A.

La fonction de transfert peut s'écrire

$$H(f) = 1 \cdot I(f, 0) + 1 \cdot [I(f, +1) + I(f, -1)] + 1 \cdot [I(f, +2) + I(f, -2)] + 1 \cdot [I(f, +3) + I(f, -3)] + H(4) [I(f, +4) + I(f, -4)] + H(5) [I(f, +5) + I(f, -5)]$$

soient donc :

$$H(f) = A(f) + H(4) B(f) + H(5) C(f)$$

Les fréquences pour lesquelles apparaît l'ondulation maximale dans les bandes passante et atténuée sont respectivement :

$$f_1 = \frac{7 F_e}{36} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{11 F_e}{36}$$

Pour ces fréquences, le calcul donne :

	$f_1 = \frac{7}{36} F_e$	$f_2 = \frac{11}{36} F_e$
A (f)	0,3016	0,0539
B (f)	0,8087	- 0,1329
C (f)	0,2448	0,2582

Or pour ces fréquences, il faut respecter le gabarit où les ondulations sont fixées à :

$$\begin{aligned} &= \delta_1 = 0,05 \text{ dans la bande passante} \\ &= \delta_2 = 0,05 \text{ dans la bande atténuée} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} H\left(\frac{7}{36} F_e\right) = 1 + \delta_1 = 1,05 \\ H\left(\frac{11}{36} F_e\right) = 0 - \delta_2 = -0,05 \end{cases}$$

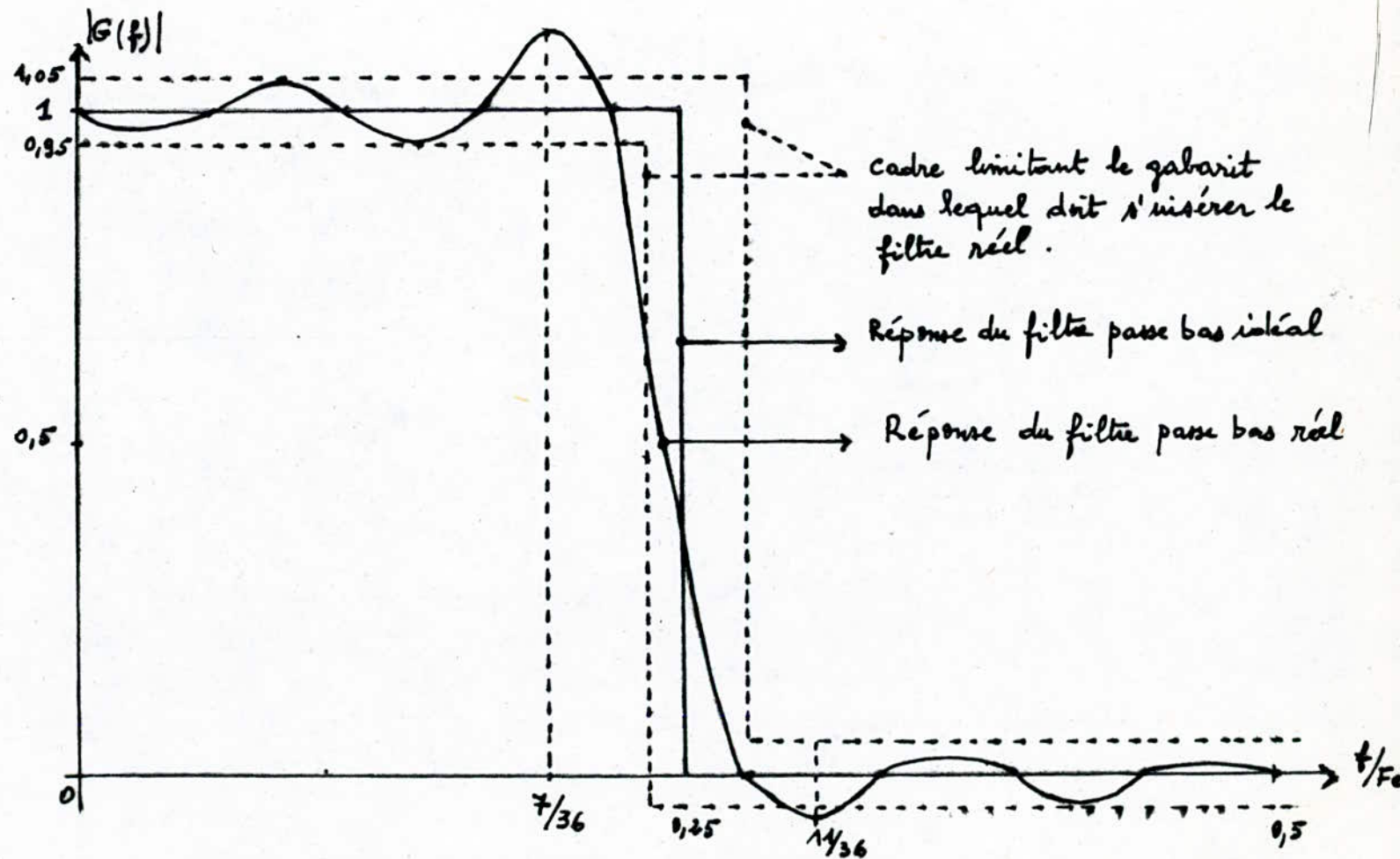


fig. B 7: Courbe de réponse du filtre d'ordre $N = 19$, avant optimisation, par échantillonnage en fréquence.

D'où le système de deux équations à 2 inconnues =

$$\begin{cases} 0,8087 H(4) + 0,2448 H(5) = 1,05 - 0,3016 = 0,7484 \\ -0,1329 H(4) + 0,2582 H(5) = -0,05 - 0,05329 = -0,10329 \end{cases}$$

Ce système admet pour solution =

$$H(4) = 0,9062 \text{ et } H(5) = 0,06326$$

A partir de ces nouveaux échantillons, nous aurons =

$$\begin{aligned} H(0) &= 1 & H(5) &= H(-5) = 0,06326 \\ H(+1) &= H(-1) = 1 & H(6) &= H(-6) = 0 \\ H(+2) &= H(-2) = 1 & H(7) &= H(-7) = 0 \\ H(3) &= H(-3) = 1 & H(8) &= H(-8) = 0 \\ H(4) &= H(-4) = 0,9062 & H(9) &= H(-9) = 0 \end{aligned}$$

Les nouvelles valeurs de la réponse impulsionnelles sont :

k	+ 0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5
h(k)	0,4704	0,2869	0,02878	-0,0988	-0,0269	0,0534
k	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9		
h(k)	0,0248	-0,0346	-0,0219	0,0265		

et ce à l'aide de la formule

$$h(k) = \frac{1 + 2 \cos k \frac{2\pi}{19} + 2 \cos \frac{4\pi k}{19} + 2 \cos \frac{6\pi k}{19} + 1,812 \cos \frac{8\pi k}{19} + 0,127 \cos \frac{10\pi k}{19}}{19}$$

Les nouvelles valeurs de h(k) nous permettent de trouver la nouvelle fonction de transfert optimisée $H(jf/F_e)$

$$H(j\omega) = h(0) + 2 \sum_{k=1}^9 h(k) \cos \left(k \frac{2\pi f}{F_e} \right)$$

d'où le tableau de valeurs :

f/F_e	0	0,028	0,083	0,1389	0,1944
$H(jf/F_e)$	0,9866	0,9844	1,022	0,9634	1,049
f/F_e	0,25	0,3055	0,3611	0,4167	0,4722
$H(jf/F_e)$	0,4897	-0,0568	0,0272	-0,0248	0,0157

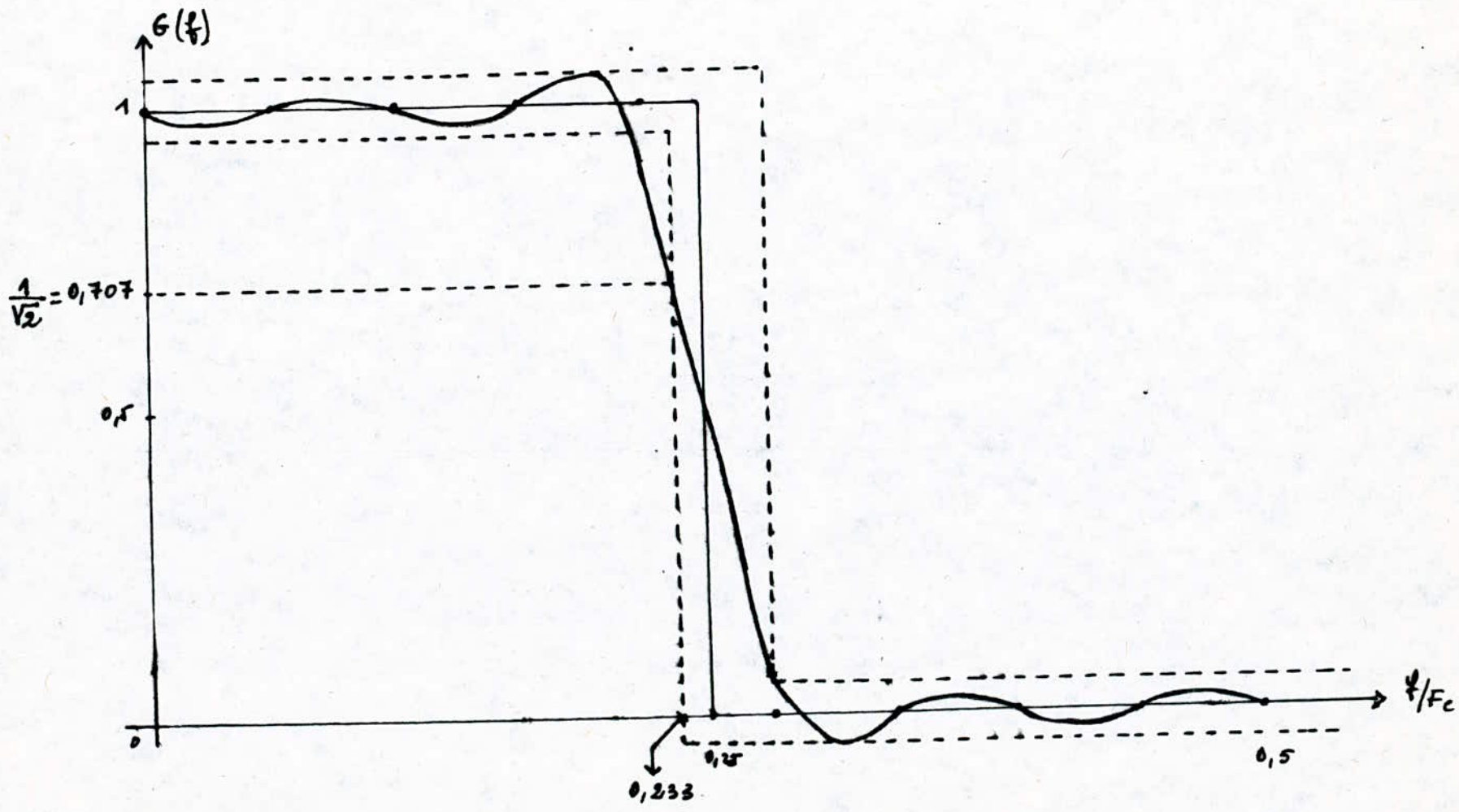


fig. B. 8 : Courbe de réponse du filtre d'ordre $N = 19$, après optimisation de la fonction de transfert.

Ces dernières valeurs permettent le traçage de la fonction de transfert optimisée du filtre donnée par la figure (fig.B.8)

La structure de ce filtre est donnée au chapitre 3 de la partie A.

Résultats :

. Fréquence de coupure à 3^e dB du filtre

$$f_c = \frac{f_e}{0,233} \quad \text{d'où } f_c = 70 \text{ Hz}$$

. Les ondulations de la fig. B.8 s'insèrent bien dans le gabarit fixé par le cahier de charge.

CONCLUSION

Ayant défini tous les paramètres du modèle engendré, on est maintenant en mesure de tester les performances du programme "analyse spectrale de l'E.E.G" tant sur le plan de la résolution obtenue que sur celui de la rapidité et de la précision des calculs.

PARTIE C

PRESENTATION DES PROGRAMMES

Les programmes, ci dessous, ont été développés en FORTRAN sur l'ordinateur VAX 11/750 de DI GITAL.

. PROGRAMME SIMULATION DE L'EEG =

Le programme génère un signal, composé de=

- Bruit Blanc à distribution Gaussienne de moyenne nulle et d'écart type = 0,01

- et de 4 sinusoides d'amplitudes et de fréquences différentes-
le signal simule les signaux d'un electroencephalogramme comme décrit dans la partie B-

le filtrage à 75 Hz y est aussi réalisé (voir commentaires du programme)
le filtre gère un table XR (K 1) contenant les échantillons du signal composé-

A la sortie, du filtre, une affectation permet de créer un signal Z (K1) rigoureusement indentique au premier Y (K 1)-

L'enregistrement effectué, en fin de programme sur fichier à accès direct sera pour le programme d'analyse spectrale de fichier de données (signaux à analyser)-

En outre, cette façon de faire permet de rendre le soft du programme "Analyse spectrale" independant des programme simulation.

. PROGRAMME ANALYSE SPECRALE =

Le programme effectue divers calculs necessaires à l'estimation de spectres-il utilise la FFT, (Fast Fourier Transform)dont l'algorithme est donne au chapitre 2 en subroutine principale - l'estimateur spectral utilise est l'estimateur modifié comme développé dans la partie B-

Les principales parties de ce programme sont =

- Calcul des échantillons de la fenêtre de Hamming. Ce calcul a été optimisé en utilisant la propriété de symetrie de la fenêtre de troucature-

De plus, celle ci peut aisement être remplacer par une autre fenêtre, en chargeant simplement la formule de définition (Annexe 17) le facteur de normalisation, entrant dans la définition de l'estimateur modifié y est aussi inclus.

- L'estimation des spectres = cette partie permet la lecture des deux signaux (euregistrés sur fichier à accès direct) par section de M échantillons ainsi que la multiplication de ceux-ci par les échantillons de la fenêtre précédemment calculés.

La transformée de Fourier des deux signaux XR et YI est réalisée par la subroutine FFT qui constitue la charnière de ce programme. Le chapitre 1, explique le principe de l'utilisation de la FFT couplée dans le cas de deux signaux réels cette subroutine FFT, ayant elle même des sousroutines RCOM et C.MULT, effectue le calcul pour un signal complexe de partie réelle XR et de partie imaginaire YI - les résultats écrasent les données XR et YI reçues en arguments.

La subroutine RCOM réalise la représentation en matrice $(2,2)$ d'un nombre complexe la subroutine CMULT permet de remplacer la multiplication de deux nombres complexes par la multiplication de deux matrices $(2,2)$ issues de la subroutine RCOM.

La subroutine CRCOM permet de mettre sous forme matricielle, de dimension $(2,2)$, le conjugué d'un nombre complexe.

Les quatre équations qui suivent l'appel de la FFT effectuent la reconstitution des parties réelles et imaginaires des spectres des deux signaux XR et YI (voir chapitre 1). la suite du programme calcule les spectres de puissance :

- Spectres propres de chacun des signaux XR YI
- Interspectre de XR et YI
- Spectre de phase entre XR et YI

Enfin, il faut noter que la boucle DO 3I = 1, L permet de calculer la moyenne des spectres sur 16 sections de durée M chacune.


```

*****
C      P R O G R A M M E      S I M U L A T I O N      E . E . G
*****
C      TABLE XR      : SIGNAL 1
C      TABLE Z      : SIGNAL 2
C      TABLE G      : COEF DU FILTRE
C      BRUIT BLANC:BB(K)
C      ORDRE DU FILTRE: IORD
C      REAL G(19),Z(8192),Y(8192),XR(8192)
      INTEGER F
      K=8192
      M=512
      RAC2=0.707106781
      DEPI=6.28318307179586
      R=1
      F=4
      C=0
      D=0.01
      IE=15
      IS=0
      A=0
      IORD=19
      N=IORD-1
      NOR=10
      G(1)=0.4704
      G(2)=0.2869
      G(3)=0.02878
      G(4)=-0.0988
      G(5)=-0.0269
      G(6)=0.0534
      G(7)=0.0248
      G(8)=-0.0346
      G(9)=-0.0219
      G(10)=0.0265
      ID=8192
C      GENERATION DU MODELE
      DO2J=1,4
      J1=1+(J-1)*4*M
      DO 3 K1=J1,(J1-1)+4*M
      S=R*SIN((DEPI*F*K1)/M)
      IS=IE*899
      IS=MOD(IS,ID)
      IF(IS.LT.0) IS=IS+ID+1
      A=IS
      A=A*0.30517 E-04
      R1=A
      IE=IS
      IS=IE*899
      IS=MOD(IS,ID)
      IF(IS.LT.0) IS=IS+ID+1
      A=IS
      A=A*0.30517 E-04
      R2=A
      IE=IS
      AO=SQRT(-2*ALOG(R1))*COS(DEPI*R2)
      BB=A0*D+C
      XR(K1)=S+BB
      CONTINUE

```

```
R=R*RAC2
F=F*2
IF(F-32) 2,4,2
4 F=170
2 CONTINUE

C FILTRE 75HERTZ
DO20I=1,K
SM=0
DO21J1=1,10
IF(I-J1)22,23,23
22 IF((I+J1)-10)21,25,25
23 IF((I+J1)-N)24,27,27
SM1=SM+G(J1)*XR(I-J1)
GOTO30
25 SM1=SM+G(J1)*XR(I-N+J1)
GOTO30
27 SM1=SM+G(J1)*(XR(I-J1)+XR(I-N+J1))
30 SM=SM1
21 CONTINUE
Y(I)=SM
Z(I)=Y(I)
20 CONTINUE
C CREATION FILE DATA MODELE
OPEN (UNIT=30,FILE='SIM',STATUS='NEW',FORM='FORMATTED',ACCESS='DIRECT
+,RECL=42)
DO6I=1,K
WRITE(30,5,REC=I)I,Z(I),I,Y(I)
5 FORMAT(I5,3X,F12.8,2X,I5,3X,F12.8)
6 CONTINUE
CLOSE(UNIT=30)
END
```

```

*****
C   P R O G R A M M E   A N A L Y S E   S P E C T R A L E
*****
C   TABLEAU ECHANTILLONS FENETRE HAMMING :FH
C   FACTEUR DE NORMALISATION :SFH
C   TABLEAU DE L'ESTIMATION DU SPECTRE DE X :SPX
C   TABLEAU DE L'ESTIMATION DU SPECTRE DE Y :SPY
C   TABLEAU DE L'ESTIMATION DU SPECTRE DE COHERENCE:SPCH
C   TABLEAU DE L'ESTIMATION DE L'INTERSPECTRE:SPXY
C   TABLEAU DE L'ESTIMATION DU SPECTRE DE PHASE:PHXY
REAL FH(512),XR(512),YI(512),XY(2,2),Y(2,2),CX(2,2)
+,SPX(512),SPY(512),SPXY(512),SPCH(512),PHXY(512)
+,SXR(512),SXI(512),SYR(512),SYI(512),YR(512)
DEPI=6.28318531
CHOIX=-1
K=8192
M=512
L=16
NC=9
C   CALCUL ECHANTILLONS FENETRE HAMMING
SFH=0.0
DO1I=1,M/2
X=FLOAT(I)
Y1=FLOAT(M)
Z=X/Y1
FH(I)=0.54+(0.46)*COS(DEPI*(Z-0.5))
FH(M+1-I)=FH(I)
IF(I.EQ.M/2) GOTO2
C   CALCUL FACTEUR DE NORMALISATION
SFH=SFH+2*FH(I)**2
GOTO1
2   SFH=SFH+FH(I)**2
1   CONTINUE
SFH=SFH*M/(2*L)
C   PREPARATION DE SECTION A ANALYSER
C   LECTURE DANS FICHER DE DONNEES
OPEN(30,FILE='SIM',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT'
+,FORM='FORMATTED',RECL=42)
DO 9 I=1,M
SPX(I)=0.0
SPY(I)=0.0
SPXY(I)=0.0
PHXY(I)=0.0
9   CONTINUE
DO3I=1,L
J1=I*M
DO4J=J1-M+1,J1
5   READ(30,5,REC=J)XXR,YYI
FORMAT(8X,F12.8,10X,F12.8)
XR(J-(I-1)*M)=FH(J-(I-1)*M)*XXR
YI(J-(I-1)*M)=FH(J-(I-1)*M)*YYI
4   CONTINUE
CALL FFT(NC,XR,YI,CHOIX)

```



```

C      CALCUL DES SPECTRES
      DOBN=1,M
      SXR(N)=0.5*(XR(N)+XR(1-N+2*M))
      SYR(N)=0.5*(YI(N)+YI(1-N+2*M))
      SXI(N)=0.5*(YI(N)-YI(1-N+2*M))
      SYI(N)=0.5*(XR(1-N+2*M)-XR(N))
      PSX=((SXR(N)**2)+(SXI(N)**2))/SFH
      PSY=((SYR(N)**2)+(SYI(N)**2))/SFH
      SPX(N)=SPX(N)+PSX/L
      SPY(N)=SPY(N)+PSY/L
      CALL RCOM(SYR(N),SYI(N),Y)
      CALL CRCOM(SXR(N),SXI(N),CX)
      CALL CMULT(CX,Y,XY)
      PSXY=SQRT(XY(1,1)**2+XY(1,2)**2)/SFH
      IF(XY(1,1).NE.0.0)GOTO16
      IF(XY(1,2).GT.0.0)GOTO19
      HPXY=-DEPI/4
      GOTO15
19     HPXY=DEPI/4
      GOTO15
16     HPXY=ATAN(XY(1,2)/XY(1,1))
15     SPXY(N)=SPXY(N)+PSXY/L
      PHXY(N)=PHXY(N)+HPXY/L
8      CONTINUE
3      CONTINUE
      WRITE(*,18)
18     FORMAT(9X,'SPCH',10X,'PHXY',12X,'SPX',12X,'SPY',12X,'SPXY')
      DO20I=1,M
      WRITE(*,17)I,SPCH(I),PHXY(I),SPX(I),SPY(I),SPXY(I)
17     FORMAT(I5,1X,E14.8,1X,E14.8,1X,E14.8,1X,E14.8,1X,E14.8)
20     CONTINUE
      END

```

```

*****
SUBROUTINE FFT(NC,XR,YI,CHOIX)
*****
REAL XR(512),YI(512),IOX(9),WK(2,2),A(2,2),Q(2,2)
NP=2**NC
DO1I=1,NC
IOX(I)=2**(NC-I)
1 CONTINUE
C FIXATION COLONNE DE CALCUL
DO 65 MP1=1,NC
MEX2=2**(MP1-1)
NMEX2=NP/MEX2
MOIT=NMEX2/2
L=0
C FIXATION DU TREILLI DE CALCUL
DO 64 J00=1,MEX2
FL=FLOAT(L)
FNP=FLOAT(NP)
V=CHOIX*6.2831853*(FL/FNP)
AC=COS(V)
AS=SIN(V)
CALL RCOM(AC,AS,WK)
J0=NMEX2*(J00-1)
C CALCUL SUR TREILLI
DO2I=1,MOIT
J1=J0+I
J2=J1+MOIT
CALL RCOM(XR(J2),YI(J2),A)
CALL CMULT(A,WK,Q)
XR(J2)=XR(J1)-Q(1,1)
YI(J2)=YI(J1)-Q(1,2)
XR(J1)=XR(J1)+Q(1,1)
YI(J1)=YI(J1)+Q(1,2)
2 CONTINUE
C CALCUL DE L'EXPOSANT DE W
DO3I=2,NC
II=I
IF(L-IOX(I)) 205,23,23
23 L=L-IOX(I)
3 CONTINUE
205 L=L+IOX(II)
64 CONTINUE
65 CONTINUE
L=0
C RENVERSEMENT BINAIRE
DO7J=1,NP
IF(L-J)5,32,32
32 RES1=XR(J)
RES2=YI(J)
XR(J)=XR(L+1)
YI(J)=YI(L+1)
XR(L+1)=RES1
YI(L+1)=RES2
5 CONTINUE
DO6I=1,NC
II=I
IF(L-IOX(I))25,26,26
26 L=L-IOX(I)
6 CONTINUE
25 L=L+IOX(II)
7 CONTINUE

```

```

34      IF(CHOIX-.0)34,33,33
        DOBI=1,NP
        XR(I)=XR(I)/FNP
        YI(I)=YI(I)/FNP
8       CONTINUE
33      RETURN
        END

```

```

*****

```

```

        SUBROUTINE RCOM(R,X,A)

```

```

*****

```

```

C       REPRESENTATION COMPLEXE SOUS FORME MATRICIELLE

```

```

        DIMENSION A(2,2)

```

```

        A(1,1)=R

```

```

        A(1,2)=X

```

```

        A(2,1)=-X

```

```

        A(2,2)=R

```

```

        RETURN

```

```

        END

```

```

*****

```

```

        SUBROUTINE CMULT(A,B,C)

```

```

*****

```

```

C       MULTIPLICATION DE MATRICES

```

```

        DIMENSION A(2,2),B(2,2),C(2,2)

```

```

        C(1,1)=A(1,1)*B(1,1)+A(1,2)*B(2,1)

```

```

        C(1,2)=A(1,1)*B(1,2)+A(1,2)*B(2,2)

```

```

        C(2,2)=C(1,1)

```

```

        C(2,1)=-C(1,2)

```

```

        RETURN

```

```

        END

```

```

*****

```

```

        SUBROUTINE CRCOM(XR,YI,CXC)

```

```

*****

```

```

C       REPRESENTATION COMPLEXE CONJUGUEE

```

```

        DIMENSION CXC(2,2)

```

```

        CXC(1,1)=XR

```

```

        CXC(1,2)=-YI

```

```

        CXC(2,1)=YI

```

```

        CXC(2,2)=XR

```

```

        RETURN

```

```

        END

```


RESULTAT ANALYSE SPECTRALE EEG

	SPCH	PHXY	SPX	SPY
1	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12455211E-02	0.12455211E-02
2	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.22906420E-03	0.22906420E-03
3	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.16421595E-05	0.16421595E-05
4	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.74987181E-01	0.74987181E-01
5	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.41568220E+00	0.41568220E+00
6	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.74721918E-01	0.74721918E-01
7	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.20934513E-05	0.20934513E-05
8	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.37383571E-01	0.37383571E-01
9	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.20765010E+00	0.20765010E+00
10	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.37419867E-01	0.37419867E-01
11	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.91911426E-06	0.91911426E-06
12	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11764043E-05	0.11764043E-05
13	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.64169069E-06	0.64169069E-06
14	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.16321467E-05	0.16321467E-05
15	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.96966608E-06	0.96966608E-06
16	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.18783158E-01	0.18783158E-01
17	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10387191E+00	0.10387191E+00
18	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.18665114E-01	0.18665114E-01
19	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13571835E-05	0.13571835E-05
20	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.20844700E-05	0.20844700E-05
21	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.69469451E-06	0.69469451E-06
22	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.72812367E-06	0.72812367E-06
23	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.36039438E-06	0.36039438E-06
24	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.67730349E-06	0.67730349E-06
25	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.46051451E-06	0.46051451E-06
26	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.53450930E-06	0.53450930E-06
27	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.24955664E-05	0.24955664E-05
28	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.14610283E-05	0.14610283E-05
29	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.72717972E-06	0.72717972E-06
30	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.14799884E-05	0.14799884E-05
31	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.65102364E-06	0.65102364E-06
32	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.16155866E-06	0.16155866E-06
33	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.35112198E-07	0.35112198E-07
34	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.62544456E-06	0.62544456E-06
35	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17163060E-05	0.17163060E-05
36	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.72898251E-06	0.72898251E-06
37	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13016287E-06	0.13016287E-06
38	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13182058E-05	0.13182058E-05
39	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.21567143E-05	0.21567143E-05
40	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.41066531E-06	0.41066531E-06
41	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.35407868E-06	0.35407868E-06
42	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11532343E-05	0.11532343E-05
43	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.15021542E-05	0.15021542E-05
44	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10096738E-05	0.10096738E-05
45	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.24167568E-06	0.24167568E-06
46	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17297089E-05	0.17297089E-05
47	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.27410756E-05	0.27410756E-05
48	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.84618512E-06	0.84618512E-06
49	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.85787997E-06	0.85787997E-06
50	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13949898E-05	0.13949898E-05
51	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.22107529E-05	0.22107529E-05
52	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.19826775E-05	0.19826775E-05

53	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.89930558E-06	0.89930558E-06
54	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.38867029E-06	0.38867029E-06
55	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13497606E-06	0.13497606E-06
56	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.70440234E-06	0.70440234E-06
57	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.70062278E-07	0.70062278E-07
58	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17153560E-06	0.17153560E-06
59	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.40245442E-06	0.40245442E-06
60	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11530917E-05	0.11530917E-05
61	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.57403224E-06	0.57403224E-06
62	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.40689511E-06	0.40689511E-06
63	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10960674E-05	0.10960674E-05
64	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.95061057E-06	0.95061057E-06
65	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.51568747E-06	0.51568747E-06
66	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.74211584E-06	0.74211584E-06
67	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.32440906E-06	0.32440906E-06
68	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.50666250E-06	0.50666250E-06
69	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.52112426E-06	0.52112426E-06
70	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10029028E-05	0.10029028E-05
71	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.30704544E-06	0.30704544E-06
72	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17180240E-06	0.17180240E-06
73	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.19079556E-06	0.19079556E-06
74	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.74972650E-06	0.74972650E-06
75	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.19930312E-05	0.19930312E-05
76	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.21509986E-05	0.21509986E-05
77	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.59511291E-06	0.59511291E-06
78	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10405373E-05	0.10405373E-05
79	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12335854E-05	0.12335854E-05
80	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.97468224E-07	0.97468224E-07
81	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.73454589E-06	0.73454589E-06
82	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.16569243E-05	0.16569243E-05
83	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.15320394E-05	0.15320394E-05
84	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.92297410E-06	0.92297410E-06
85	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.56034429E-06	0.56034429E-06
86	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10197890E-05	0.10197890E-05
87	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.38074904E-06	0.38074904E-06
88	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.95840744E-06	0.95840744E-06
89	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.49761582E-06	0.49761582E-06
90	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.95513940E-06	0.95513940E-06
91	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.81478453E-06	0.81478453E-06
92	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.94779483E-06	0.94779483E-06
93	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.50253203E-06	0.50253203E-06
94	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11239118E-05	0.11239118E-05
95	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.34813337E-06	0.34813337E-06
96	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.60162796E-06	0.60162796E-06
97	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.27479385E-06	0.27479385E-06
98	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13625994E-06	0.13625994E-06
99	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.34684220E-06	0.34684220E-06
100	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.73803318E-06	0.73803318E-06
101	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.94771684E-06	0.94771684E-06
102	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.18476757E-05	0.18476757E-05
103	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17725648E-05	0.17725648E-05
104	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.92628818E-06	0.92628818E-06
105	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.21183122E-06	0.21183122E-06
106	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11347166E-05	0.11347166E-05
107	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.26537436E-05	0.26537436E-05

108	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11601315E-05	0.11601315E-05
109	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.69741748E-06	0.69741748E-06
110	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.54914688E-06	0.54914688E-06
111	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.32650243E-06	0.32650243E-06
112	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.55077300E-06	0.55077300E-06
113	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.27105517E-06	0.27105517E-06
114	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.46565196E-06	0.46565196E-06
115	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.64300815E-06	0.64300815E-06
116	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.94832302E-06	0.94832302E-06
117	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.55222836E-06	0.55222836E-06
118	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.45541199E-06	0.45541199E-06
119	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.61391427E-06	0.61391427E-06
120	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.68901431E-06	0.68901431E-06
121	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.18457820E-05	0.18457820E-05
122	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.22946624E-05	0.22946624E-05
123	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17139488E-05	0.17139488E-05
124	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.94304579E-06	0.94304579E-06
125	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.14188126E-06	0.14188126E-06
126	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.98185251E-06	0.98185251E-06
127	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.96134181E-06	0.96134181E-06
128	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.53371804E-06	0.53371804E-06
129	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.36575887E-07	0.36575887E-07
130	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.87588364E-06	0.87588364E-06
131	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.15552240E-05	0.15552240E-05
132	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.77810370E-06	0.77810370E-06
133	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17433395E-06	0.17433395E-06
134	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.45563519E-06	0.45563519E-06
135	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.79994345E-06	0.79994345E-06
136	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.61784340E-06	0.61784340E-06
137	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.39620019E-07	0.39620019E-07
138	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.89677320E-06	0.89677320E-06
139	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.21771148E-05	0.21771148E-05
140	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.58561682E-06	0.58561682E-06
141	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.45787283E-06	0.45787283E-06
142	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13907394E-05	0.13907394E-05
143	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.26898995E-05	0.26898995E-05
144	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.38857274E-06	0.38857274E-06
145	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.48469303E-06	0.48469303E-06
146	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13824682E-05	0.13824682E-05
147	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.23596297E-05	0.23596297E-05
148	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.14618172E-05	0.14618172E-05
149	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.29953051E-06	0.29953051E-06
150	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11845608E-05	0.11845608E-05
151	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.90065134E-06	0.90065134E-06
152	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.78225099E-06	0.78225099E-06
153	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.70310740E-07	0.70310740E-07
154	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.22887076E-06	0.22887076E-06
155	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.74312135E-06	0.74312135E-06
156	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.16183851E-05	0.16183851E-05
157	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.35362814E-06	0.35362814E-06
158	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12402535E-05	0.12402535E-05
159	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.20716652E-05	0.20716652E-05
160	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.57082502E-06	0.57082502E-06
161	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.56520196E-06	0.56520196E-06
162	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.67339403E-06	0.67339403E-06
163	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.21700423E-05	0.21700423E-05
164	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.73249788E-06	0.73249788E-06
165	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.26255529E-06	0.26255529E-06
166	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.16558917E-05	0.16558917E-05

167	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.74316449E-06	0.74316449E-06
168	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.18724683E-06	0.18724683E-06
169	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.19686327E-06	0.19686327E-06
170	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.93542300E-02	0.93542300E-02
171	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.51918000E-01	0.51918000E-01
172	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.93850205E-02	0.93850205E-02
173	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.39479812E-06	0.39479812E-06
174	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.95878215E-06	0.95878215E-06
175	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12772828E-05	0.12772828E-05
176	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.16019374E-07	0.16019374E-07
177	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.31295104E-06	0.31295104E-06
178	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.46317879E-06	0.46317879E-06
179	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12579666E-05	0.12579666E-05
180	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.55849449E-06	0.55849449E-06
181	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.51983500E-06	0.51983500E-06
182	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13435775E-05	0.13435775E-05
183	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11171097E-05	0.11171097E-05
184	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.99607098E-06	0.99607098E-06
185	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12658091E-06	0.12658091E-06
186	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.11820956E-05	0.11820956E-05
187	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.26824421E-05	0.26824421E-05
188	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.82335134E-06	0.82335134E-06
189	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12018312E-06	0.12018312E-06
190	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12615425E-05	0.12615425E-05
191	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.31877557E-05	0.31877557E-05
192	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.24608348E-05	0.24608348E-05
193	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.29278070E-06	0.29278070E-06
194	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.99966519E-06	0.99966519E-06
195	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.22786189E-05	0.22786189E-05
196	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.96163456E-06	0.96163456E-06
197	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10765549E-06	0.10765549E-06
198	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.12509797E-05	0.12509797E-05
199	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13051393E-05	0.13051393E-05
200	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.52682469E-06	0.52682469E-06
201	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.35967528E-06	0.35967528E-06
202	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17182816E-05	0.17182816E-05
203	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.22229788E-05	0.22229788E-05
204	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.62255816E-06	0.62255816E-06
205	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.42781232E-06	0.42781232E-06
206	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.14083564E-05	0.14083564E-05
207	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.26105224E-06	0.26105224E-06
208	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.35709698E-06	0.35709698E-06
209	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.90994853E-07	0.90994853E-07
210	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.67818627E-06	0.67818627E-06
211	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.74079873E-06	0.74079873E-06
212	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.10278342E-05	0.10278342E-05
213	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.19781659E-06	0.19781659E-06
214	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.13341355E-05	0.13341355E-05
215	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.17041700E-05	0.17041700E-05
216	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.83411328E-06	0.83411328E-06
217	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.32973384E-06	0.32973384E-06
218	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.91073639E-06	0.91073639E-06
219	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.33622368E-06	0.33622368E-06
220	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.95473411E-06	0.95473411E-06
221	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.63051510E-06	0.63051510E-06
222	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.20144358E-06	0.20144358E-06
223	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.45113208E-06	0.45113208E-06
224	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.32588403E-06	0.32588403E-06
225	0.10000000E+01	0.00000000E+00	0.42743125E-06	0.42743125E-06

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Le test du programme Analyse spectrale, à l'aide du modèle généré, a donné les résultats (ci-joints) suivants :

- . Spectre de cohérence égal a 1

Ce qui interprète la similitude rigoureuse entre les deux signaux analysés. Pour un EEG, ceci signifie que le sujet est normal car les deux signaux pris en deux points symétriques du crâne délivrent des ondes symétriques en fréquence.

- . Spectre de phase nul.

Ce qui signifie qu'il n'y a aucun déphasage entre les deux signaux. En médecine ce cas se rencontre pour un EEG normal.

- . Positions des raies des spectres propres :

Sans l'utilisation du filtre à 75 Hz, ce programme permet de détecter quatre raies dont la position, c'est-à-dire la fréquence, est celle prévue par la théorie dans la partie B.

- . La puissance des raies est à peu de chose près, celle prévue dans la partie B. Cette différence est due :

- Au moyennage sur 16 sections, alors que le modèle simulé n'est pas de même amplitude sur 16 sections (voir partie B)
- A la fonction fenêtre choisie dont l'amplitude est de $M/2$ dans le domaine fréquentielle.

Ceci peut s'interpréter comme une estimation spectrale satisfaisante.

En médecine, ceci permet au neurologue de connaître les ondes cérébrales émises par la zone du crâne en question.

Dans notre cas par exemple, nous avons détectés des ondes delta (3 Hz), thêta (5 Hz), alpha (10 Hz) et une onde extra cérébrale (100 Hz).

L'onde à 100 Hz peut être éliminé en utilisant le filtre. Notre filtre étant calculé à la main donc d'un ordre réduit ($M = 19$), élimine même l'onde à 10 Hz. Ceci est dû à l'imprecision des calculs à la main,

Malgré l'optimisation, la fonction de transfert de ce filtre possède des ondulations trop grandes nuisants à sa précision. Sa réponse en fréquence n'est pas plate entre les points d'échantillonnage. Un remède est de calculer un filtre d'un ordre plus élevé à l'aide d'un ordinateur.

- La puissance du bruit est de l'ordre 10^{-5} ce qui concorde avec la théorie.
- Le biais et la variance de cet estimateur sont satisfaisants.

En effet, grâce au facteur de normalisation, défini pour l'estimateur spectral modifié, les raies des sinusoides sont détectées aux fréquences prévues par la théorie. La bonne variance maîtrisée à l'aide de L (nombre de sections) permet de rendre l'estimateur choisi performant car il détecte la quatrième raie malgré sa faible puissance (0,016) cette variance permet aussi de limiter les fluctuations du bruit.

- La fenêtre de Hamming utilisée ici n'introduit pas d'oscillation de Gibbs remarquables et possède un bon pouvoir séparateur des raies. La largeur de base de son lobe principal est de $\frac{4}{M}$, permet de détecter deux raies séparées de moins que 0,146 Hz qui est la résolution fréquentielle dans notre cas. Cependant l'essai d'autres fonctions fenêtres telles que Blackman ou Kaiser permettra d'améliorer la puissance des raies détectées.
- Les résultats de ce programme ne contiennent pas de phénomènes de distribution des composantes fréquentielles (Tab. A-1).
- Le calcul de 16 FFT donc une moyenne sur 16 spectres qui permet de diminuer l'erreur entre le spectre mesuré et le spectre réel, a duré 35 secondes sur le VAX 11/750 et ce pour un nombre de points total $K = 8192$.

Nous pouvons donc affirmer que l'objectif visé a été atteint, en effet :

- Les résultats sont satisfaisants et concordent avec les calculs de la partie B.
- Le programme développé, utilise une seule FFT pour traiter deux signaux réels, donc un temps de calcul réduit, et le système d'écrasement des données par les résultats à tous les niveaux, ce qui constitue un gain de places mémoires dans l'ordinateur.

Cependant, nous recommandons :

- Le calcul du filtre par ordinateur pour améliorer ses performances et sa précision.
- L'essai d'autres fonctions fenêtres telles que celles de Blackman ou Kaiser pour améliorer la puissance détectée.
- Le test du programme à l'aide d'un autre modèle simulant un cas anormal du point de vue médical.
- D'autres recommandations pour réaliser un système complet d'analyse spectrale de l'EEG, peuvent être trouvées dans la suite de cette partie.

RECOMMANDATIONS :

La technique numérique d'analyse spectrale de l'E.E.G exposée dans ce compte rendu peut faire l'objet de maintes adonctions pour en faire un système complet d'investigations médicales. De plus, moyennant certaines transformations du point de vue Software et Hardware § (telles que le filtrage en temps réel ou par la mise au point d'une unité de traitement rapide du signal E.E.G) on peut envisager certaines améliorations des performances du système initialement envisagé. Le synoptique donné à la figure (fig 6.1) répond à certains critères à prendre en compte dans le choix des différents éléments le constituant. Les quatre grandes lignes directrices ayant conduit à son établissement sont les suivantes : (PIERMONT, 1976)

- les informations électriques à numériser,
- la destination des mesures,
- le mode d'exploration des informations électriques,
- le coût,

LES INFORMATIONS ELECTRIQUES A NUMERISER

C'est le plan qui doit être examiné en premier car il intervient sur tous les autres. Il met en évidence certains critères :

GRANDEUR :

En effet, de la connaissance de la dynamique des informations électriques à numériser résulte le choix de l'étendue de mesure du convertisseur à utiliser et la décision de l'interposition éventuelle d'amplificateurs.

RANDE DE FREQUENCE :

Cette donnée est essentielle pour le choix de la bonne fréquence d'échantillonnage. Dans le cas de l'E.E.G le système est prévu pour être raccorder à un point de l'électroencéphalogramme où le signal a déjà subi un filtrage analogique. La fréquence d'échantillonnage est alors choisie suivant le principe du théorème de Shannon. Il serait souhaitable suivant le filtrage analogique effectué avoir une fréquence d'échantillonnage pouvant être changée à volonté.

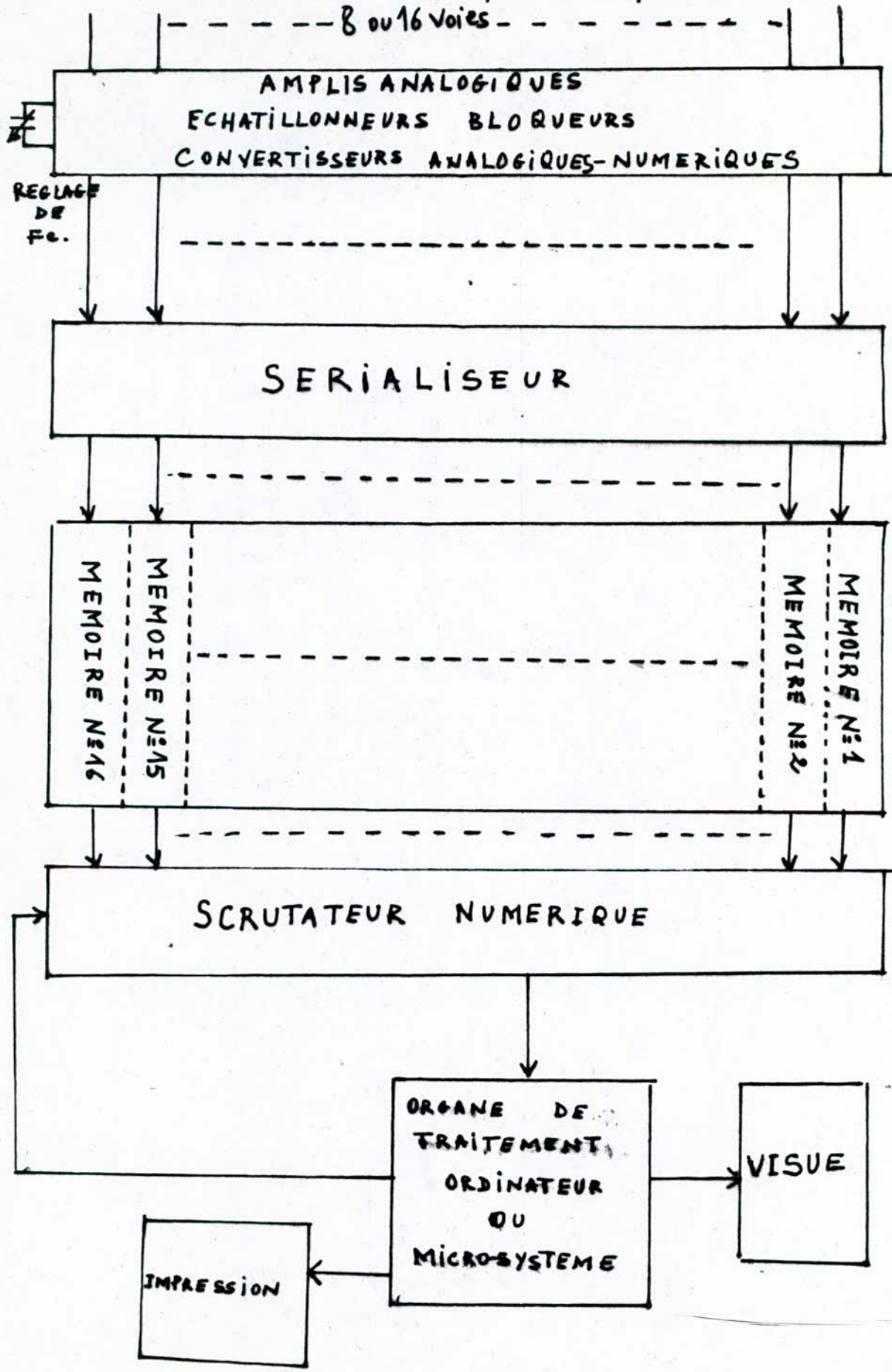


fig.C.1: SYNOPTIQUE DU SYSTEME

Elle détermine le choix des mémoires numériques ainsi que leurs nombre servant d'unité de stockage de l'information à traiter. De plus la durée pendant laquelle les mesures seront accumulées détermine la capacité nécessaire des mémoires numériques ainsi que leur type. De là on pourra décider d'associer ou non un ordinateur et éventuellement d'en délimiter sa puissance.

LE MODE D'EXPLORATION DES INFORMATIONS ELECTRIQUES

Pour clarifier le mode d'exploration des informations électriques on citera le mode de l'analyse spectrale de l'E.E.G pour qui ce mode est principalement imposé par l'utilisation de la F.F.T couplée (bicanal).

En effet, la FFT couplée permet de traiter simultanément deux signaux numériques donnés. Si ces signaux sont issus de deux mémoires numériques différentes le mode d'exploration des informations électriques se fera par paires de mémoires où est stockée l'information à traiter.

LE COUT

Sur le plan industriel, l'aspect financier d'une réalisation peut être un critère important à prendre en compte. Afin d'éliminer le risque d'un étonnement douloureux, au vu d'une proposition finale chiffrée, il convient de confronter, pour chaque critère important, les avantages de la solution proposé et son coût.

Dans le cas de l'analyseur de spectre d'E.E.G numérique deux alternatives peuvent être envisagées. Elles résident dans le choix de l'organe de traitement des signaux.

TRAITEMENT PAR MINI ORDINATEUR UNIVERSEL

Le traitement de l'analyse spectrale de l'E.E.G par ordinateur peut s'avérer dans certains cas rentable à la condition où son utilisation ne soit pas réservée uniquement à cet usage. En effet, vu les performances limitées de fonctionnement en temps réel des mini ordinateurs de coût moyen actuellement sur le commerce, l'utilisation de ceux ci en analyse spectrale où le traitement rapide d'une grande quantité d'informations est souhaitable peut se révéler inintéressante pratiquement.

Elle détermine le choix des mémoires numériques ainsi que leurs nombre servant d'unité de stockage de l'information à traiter. De plus la durée pendant laquelle les mesures seront accumulées détermine la capacité nécessaire des mémoires numériques ainsi que leur type. De là on pourra décider d'associer ou non un ordinateur et éventuellement d'en délimiter sa puissance.

LE MODE D'EXPLORATION DES INFORMATIONS ELECTRIQUES

Pour clarifier le mode d'exploration des informations électriques on citera le mode de l'analyse spectrale de l'E.E.G pour qui ce mode est principalement imposé par l'utilisation de la F.F.T couplée (bicanal).

En effet, la FFT couplée permet de traiter simultanément deux signaux numériques donnés. Si ces signaux sont issus de deux mémoires numériques différentes le mode d'exploration des informations électriques se fera par paires de mémoires où est stockée l'information à traiter.

LE COUT

Sur le plan industriel, l'aspect financier d'une réalisation peut être un critère important à prendre en compte. Afin d'éliminer le risque d'un étonnement douloureux, au vu d'une proposition finale chiffrée, il convient de confronter, pour chaque critère important, les avantages de la solution proposé et son coût.

Dans le cas de l'analyseur de spectre d'E.E.G numérique deux alternatives peuvent être envisagées. Elles résident dans le choix de l'organe de traitement des signaux.

TRAITEMENT PAR MINI ORDINATEUR UNIVERSEL

Le traitement de l'analyse spectrale de l'E.E.G par ordinateur peut s'avérer dans certains cas rentable à la condition où son utilisation ne soit pas réservée uniquement à cet usage. En effet, vu les performances limitées de fonctionnement en temps réel des mini ordinateurs de coût moyen actuellement sur le commerce, l'utilisation de ceux ci en analyse spectrale où le traitement rapide d'une grande quantité d'informations est souhaitable peut se révéler inintéressante pratiquement.

Le synoptique de la figure C1 fait apparaître un certain nombre de blocs réalisant l'acquisition des données et le mode d'explorations de celles ci par l'organe de traitement.

- SYSTEME DE NUMERISATION DU SIGNAL

Après l'échantillonnage blocage des signaux, prélevés sur les n locaux de l'électroencéphalogramme ($n = 8$ ou 16 pour les appareils courants), s'opère la conversion analogique numérique dans un code binaire adapté au code machine de l'organe de traitement.

- SERIALISEUR

Afin de réduire le nombre des conducteurs devant relier chaque C.A.N à la cellule mémoire lui correspondant, un sérialiseur est disposé après le convertisseur pour transposer la donnée numérique, acquise dans le code binaire décimal dans le code binaire - série.

DISPOSITIF DE MEMORISATION ET DE SCRUTATION NUMERIQUE

Le dispositif de mémorisation et de scrutation des valeurs numériques est placé auprès de l'ordinateur (organe de traitement). Les valeurs numériques sont stockées dans des mémoires spécifiques. Le nombre de ces mémoires est égal à celui des voies d'analyse. Le contenu de chacune des mémoires est transféré, successivement dans l'organe de traitement à la demande de ce dernier. Les mémoires sont repérés par des adresses. Le contenu d'une paire de mémoire est exploité quant les adresses, notées par l'organe de traitement dans un code binaire, correspondent à celles des mémoires à explorer. Un signal d'occupation, issu du dispositif de mémorisation et de scrutation, oblige l'ordinateur à l'organe de traitement à rester en attente quand la mémoire qu'il appelle est en cours de chargement.

DISPOSITIF D'IMPRESSION DES RESULTATS DU TRAITEMENT

Pour une utilisation pratique des résultats il faut prévoir un affichage ou impression de ceux ci sur imprimantes. Les résultats attendus étant des spectres un aspect graphique de ceux ci serait souhaitable suivant un format préétabli.

TRAITEMENT PAR SYSTEMES NUMERIQUES A BASE DE MICROPROCESSEUR

Le traitement de l'analyse spectrale de l'E.E.G par des microsystèmes spécifiquement adaptés à cette application permet d'atteindre des performances appréciables surtout du point de vue de la rapidité des calculs.

De plus, l'utilisation de microsystèmes en matière d'analyse spectrale s'impose à cout à peu près égal par rapport à l'utilisation de mini ordinateur, par le fait qu'ils rendent le système indépendant et par suite pouvant figurer dans la panoplie d'appareils du laboratoire d'analyse de l'E.E.G.

RECOMMANDATION SUR LA TRANSFORMATION DU SOFT

Par souci de précision et de meilleures performances du programme analyse spectrale de l'E.E.G, il serait intéressant de pouvoir introduire un filtrage numérique du signal. En effet un banc de filtres numérique passe bas ou passe bande permettrait, sur demande de l'utilisateur, du système d'avoir un effet de loupe sur le domaine d'analyse fréquentielle visé.

Le filtrage réduisant la bande de fréquence du signal, l'analyse spectrale fixée auparavant pour la bande maximale des signaux se fera donc avec une meilleure résolution fréquentielle.

Une étude approfondie des filtres numériques a montré que pour le choix du type et de la structure du filtre à utiliser il est nécessaire au concepteur de se baser sur quelques considérations telles que temps de calcul, place mémoire, précision des calculs stabilité, facilité de mise en oeuvre ou de conception. Il faut noter de plus qu'il n'existe pas de méthodes théoriques à l'heure actuelle permettant de décider avant essai de la structure optimale à adopter en fonction caractéristiques du signal à filtrer. Seule la simulation préalable sur ordinateur peut guider l'utilisateur dans le choix du filtre, en fonction des caractéristiques de son problème.

Comme dans le cas de tout traitement numérique, la précision des résultats obtenus par le filtrage numérique est très assujettie aux notions de quantification de l'entrée (précision du système d'acquisition de données), précision de coefficients du filtre (cadrage des nombres sur le calculateur). En outre la vitesse de traitement des données est liée à l'arithmétique de calcul envisagée pour la réalisation du filtre.

C O N C L U S I O N

L'idée générale qui a guidé ce travail a été d'écrire et de programmer en FORTRAN un algorithme d'analyse spectrale pour les signaux de l'E.E.G.

Cette analyse numérique exige une grande maîtrise théorique et pose de nombreux problèmes de mise en oeuvre sur ordinateur.

En effet, pour arriver à des résultats satisfaisants, il est nécessaire de choisir les paramètres de l'analyse avec soin et il faut bien connaître leurs rôles et leurs effets.

Dans le cadre de ce projet, une modeste mise en oeuvre d'un système numérique d'analyse spectrale de l'E.E.G est proposée ainsi que des recommandations sur une technique permettant son développement en un appareillage qui pourrait trouver sa place dans un laboratoire d'E.E.G.

ANNEXE A

ANNEXE

A1 : Transformation de Fourier :

Par définition, la transformation de Fourier des signaux analogiques est :

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

La transformation inverse est donnée par :

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f) e^{j2\pi ft} df$$

La transformation de Fourier des signaux numériques est donnée par :

$$X(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi fk}$$

La transformation inverse pour des signaux numériques est :

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fk} df$$

Dans le cas où la période est égale à 1.

Il est à remarquer que $X(f)$ est périodique de période 1 et que $X_a(f)$ n'est pas périodique.

A2 : Existence de la transformée de Fourier :

La condition suffisante pour que $X(f)$ existe est =

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| < \infty$$

Ceci montre qu'il faut que ce soient des signaux à énergie finie. Ceci découle de l'inégalité.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 \leq \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \right]^2$$

A3 : PRINCIPALES PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER DE SIGNAUX
NUMERIQUES

$x(k)$	$X(f)$ périodique de période $T = 1$
$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \text{EXP}(j2\pi fk) df$	$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \text{EXP}(-j2\pi fk)$
$x(k)$ REEL	$\text{Re}(X(-f)) = \text{Re}(X(f))$ fonction paire
$x(k)$ REEL	$\text{Im}(X(-f)) = -\text{Im}(X(f))$ fonction impaire
$x(k-k_0)$	$X(f) \text{EXP}(-j2\pi f k_0)$
$z(k) = x(k); y(k)$	$Z(f) = X(f) * Y(f)$ Convolution
$\phi_{xy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) y(l+k)$	$\phi_{XY}(f) = X^*(f) Y(f)$
$x(-k)$ REEL	$X^*(f)$ (conjugué de $X(f)$)
$z(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) y(l+k)$	$z(f) = X(f) Y(f)$
$z(k) = x(k) y(k)$	$z(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(g) Y(f-g) dg$

A4: PRINCIPALES PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION EN Z

$x(k)$	$X(z)$
$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz$	$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$ pour $R_{x-} < z < R_{x+}$
$ax_1(k) + bx_2(k)$	$aX(z) + bX_2(z)$; $\text{MAX}(R_{x1-}, R_{x2-}) < z < \text{MIN}(R_{x1+}, R_{x2+})$
$x(k-k_0)$	$z^{-k_0} X(z)$ pour $R_{x-} < z < R_{x+}$
$a^k x(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$ pour $ a R_{x-} < z < a R_{x+}$
$k x(k)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$ pour $R_{x-} < z < R_{x+}$
$\dot{\phi}_{xy}(k) = x(1) y(1+k)$	$\dot{\phi}_{XY}(z) = X\left(\frac{1}{z}\right) Y(z)$
$y(k) = x(1) g(k-1)$	$Y(z) = X(z) G(z)$ pour: $\text{MAX}[R_{x-}, R_{g-}] < z < \text{MIN}[R_{x+}, R_{g+}]$
$x(k) y(k)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint X(w) Y\left\{\frac{z}{w}\right\} w^{-1} dw$ $R_{x-} R_{y-} < z < R_{x+} R_{y+}$
$x(0)$; (valeur initiale)	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

A5 : PRINCIPALES PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE

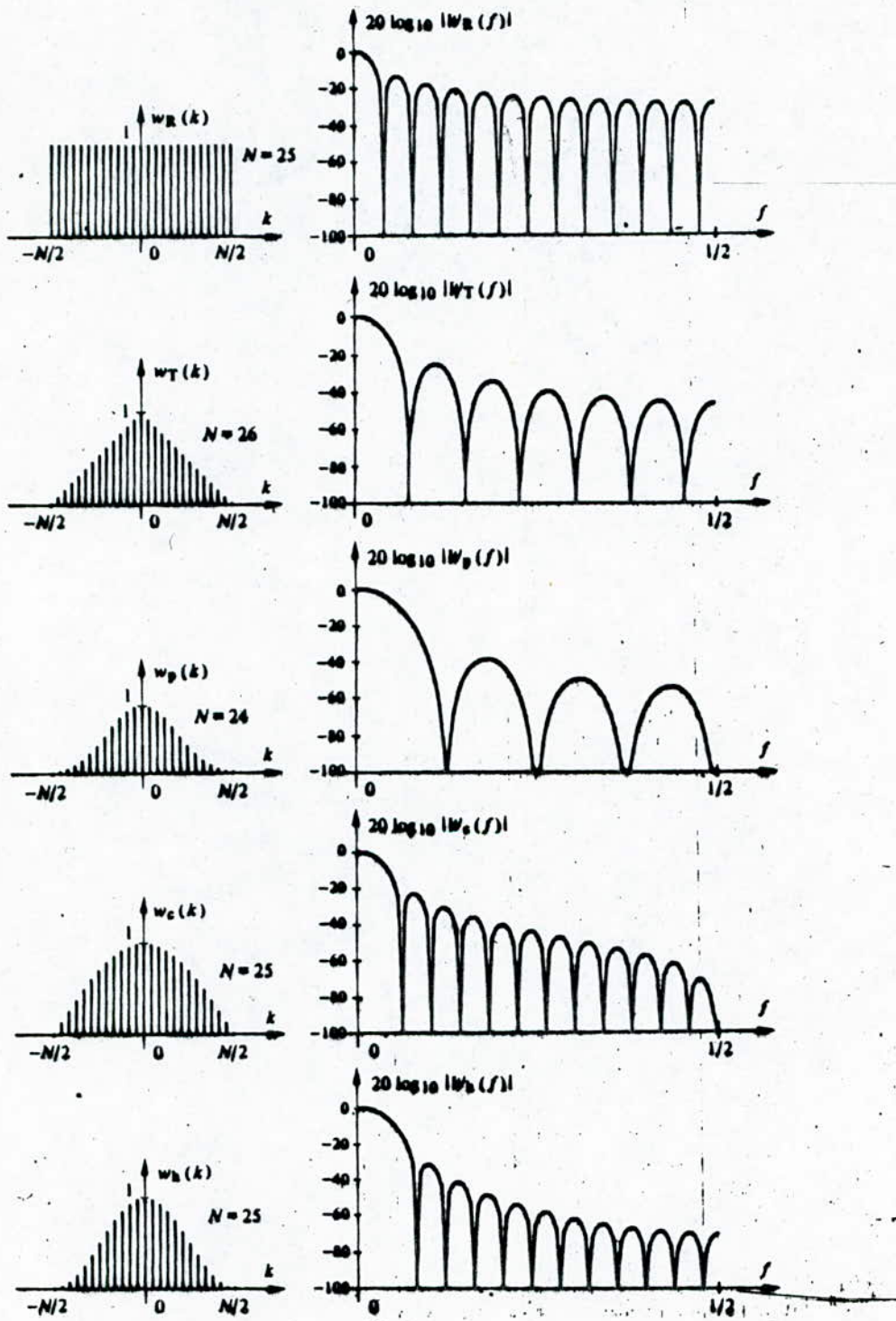
$x(k)$	$X(n)$
$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(n) W_N^{nk}$	$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk}$ $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$
$ax_1(k) + bx_2(k)$	$aX_1(n) + bX_2(n)$
$x(k-k_0)$ décalage cyclique	$W_N^{-nk_0} X(n)$
$x_p(k-k_0)$; x_p periodique	$W_N^{-nk_0} X_p(n)$
$W_N^{nok} x(k)$	$X(n-n_0)$
$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l) y_p(l+k)$ x_p, y_p : périodiques	$\Phi_{XY}(n) = \frac{1}{N} X_p^*(n) Y_p(n)$ TFD à N points
$\phi_{xy}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) y(l+k)$	$\Phi_{XY}(n) = X^*(n) Y(n)$ TFD à $N_x + N_y - 1$ points
$y_p(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_p(k) g_p(k-l)$	$Y_p(n) = X_p(n) G_p(n)$ TFD à N points
$y(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(k) g(k-l)$	$Y(n) = X(n) G(n)$ TFD à $N_x + N_y - 1$ points
$y_p(k) = x_p(k) g_p(k)$	$Y_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_p(m) G_p(n-m)$
$y(k) = x(k) g(k)$	$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) G(n-m)$

A6 : PRINCIPALES PROPRIETES DU TERME/ : $W_N = \text{EXP}(j2\pi/N)$

!	NOTATION :	$W_N = \text{EXP}(j2\pi/N)$!
!		$W_N^{nk} = \text{EXP}(j2\pi nk/N)$!
!	SEPARABILITE :		!
!		$W_N^{k+1} = W_N^k \cdot W_N^1$!
!	PERIODICITE :		!
!		$W_N^{k+1N} = W_N^k$ où 1: nombre entier	!
!		$W_N^k = W_N^{k \bmod(N)}$!
!	VALEURS SPECIALES :		!
!		$W_N^{1N} = 1$!
!		$W_N^{N/2} = -1$!
!		$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$!
!		$W_N^2 = W_{N/2}$!
!		$\forall l \in \mathbb{N}$!
!	ORTHOGONALITE :		!
!		$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k=1N \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$!

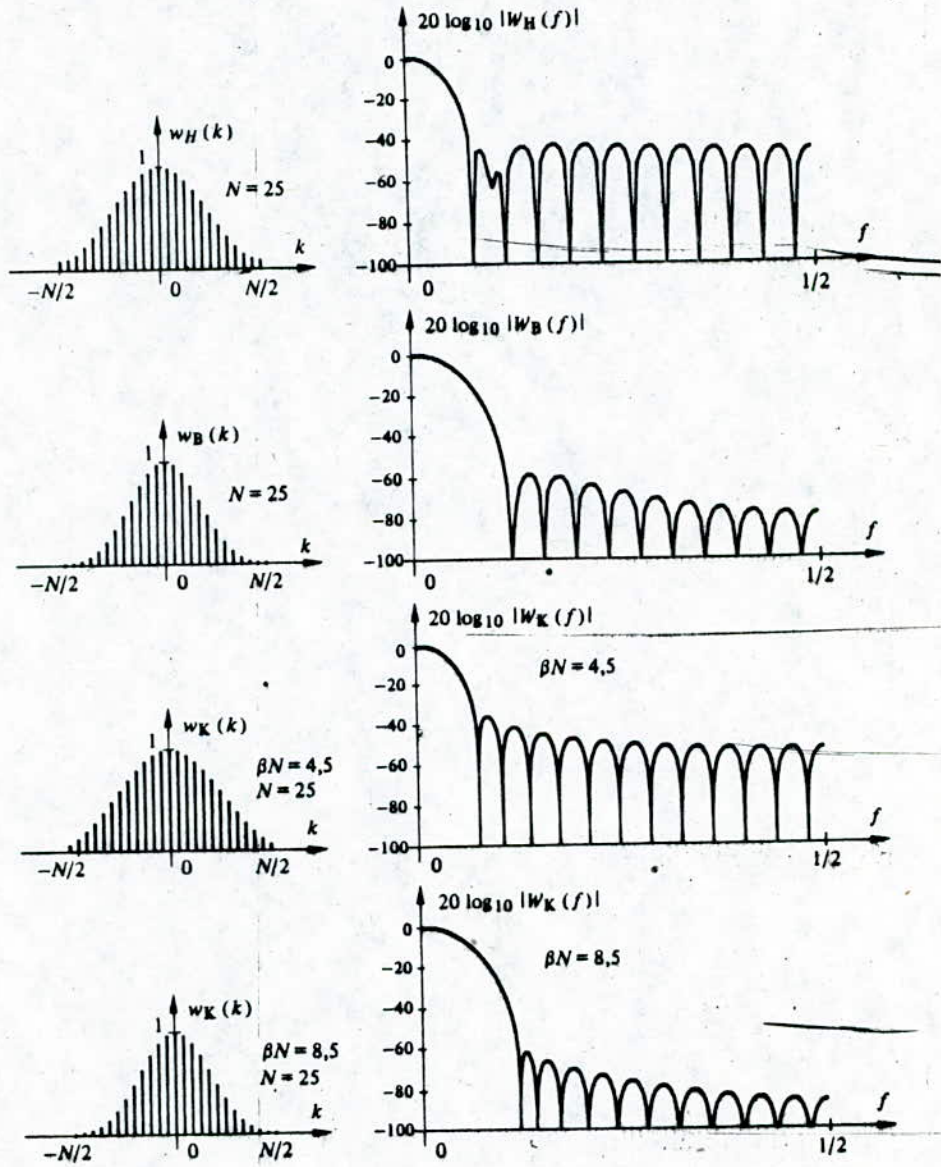
A-7 : TABLE RESUMANT LES PROPRIETES PRINCIPALES DES FONCTIONS FENETRES.

FONCTIONS FENETRES	FORMULE DE DEFINITION	$A_i = 20 \log_{10} \left \frac{W_i(f)}{W_i(0)} \right $	LARGEUR DE BASE DU PIC CENTRAL
RECTANGULAIRE W_R	$W_R(k) = \begin{cases} x(k) & \text{pour } k \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$	-13 dB	$2/N$
TRIANGOLAIRE W_T	$W_T(k) = \begin{cases} 1 - \frac{2 k }{N} & \text{pour } k \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	-26 dB	$4/N$
PARABOLIQUE W_P	$W_P(k)$ est obtenue par le produit de convolution d'une fenetre rectangulaire et d'une fenetre triangulaire		$6/N$
COSINOÏDALE W_C	$W_C(k) = \begin{cases} \cos \frac{\pi k}{N} & \text{pour } k < N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	-24 dB	$3/N$
HANNING W_H	$W_H(k) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \text{ pour } k \leq N/2$	-32 dB	$4/N$ pour $N=9$
HAMMING. W_H	$W_H(k) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha) \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) & \text{pour } k \leq N/2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$	-43 dB	$4/N$ pour $0 < \alpha < 1$ et $N=9$
BLACKMAN W_B	$W_B(k) = \begin{cases} a_0 + 2 \sum_{l=1}^L a_l \cos \frac{2\pi k l}{N} & \text{pour } k \leq N/2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$	-59 dB	$6/N$ pour $L=2$
KAISER W_K	$W_K(k) = \begin{cases} \frac{I_0[\beta \sqrt{N^2 - 4k^2}]}{I_0(\beta N)} & \text{pour } k \leq N/2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$	I_0 : fonction de Bessel. βN à choisir entre [4,9]	la largeur du pic central augmente avec β



Suite à la page suivante

TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX



A.10 DEFINITIONS SUR LES SIGNAUX ALÉATOIRES

SIGNAUX ALÉATOIRES

Un signal aléatoire est un signal dont l'évolution au cours du temps obéit à des lois statistiques. Un tel signal ne possède pas une description temporelle analytique. Il est considéré comme une réalisation typique d'un processus aléatoire. Le comportement global de ce processus peut être décrit par des lois statistiques.

STATIONNARITÉ :

Un signal aléatoire est dit stationnaire si certaines de ses propriétés statistiques sont invariantes dans toute translation de l'origine des temps.

Stationnarité au sens strict :

Un signal aléatoire $x(t)$ est stationnaire au sens strict si sa loi temporelle est invariante dans tout changement de l'origine des temps.

En outre sa moyenne $m = E[x(t)]$ est considérée constante et indépendante du temps. Sa fonction d'autocorrélation $\Gamma(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$ ne dépend que de la durée d'observation $\tau = t_2 - t_1$

STATIONNARITÉ AU SENS LARGE :

Un signal aléatoire $X(t)$ réel ou complexe est dit stationnaire du deuxième ordre ou au sens large s'il est du second ordre c'est à dire si

$$\forall t, E\{|x(t)|^2\} < \infty \text{ et si}$$

$$- E[x(t)] = m$$

$$- \Gamma(t_1 - t_2) = \Gamma(t_1, t_2)$$

$$- \Gamma(\tau) \text{ est continue à l'origine.}$$

ERGODISME

Un processus stationnaire est ergodique si toutes ses moyennes temporelles sont égales ou moyennes statistiques ou d'ensemble.

En particulier :

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$E[x(t)x(t+z)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+z) dt$$

SIGNAUX ALÉATOIRES DISCRETS

Ce sont des signaux issus de l'échantillonnage d'un signal aléatoire continu.

Pour une bonne application du théorème d'échantillonnage, nous imposerons au signal aléatoire continu à ce qu'il soit à spectre borné.

Pour définir de tel signaux, nous adopterons la définition suivante :

Un signal aléatoire $x(k)$ à temps discret est entièrement défini par la loi de probabilité de la suite de variables aléatoires $x(k)$.

De plus, les propriétés de stationnarité et d'ergodicité sont aussi définissables, par transposition directe des définitions données pour les signaux à temps continu.

A.11 QUELQUE ELEMENTS DE LA THEORIE DE L'ESTIMATION

Dans la théorie de l'estimation, on utilise les données disponibles pour estimer la valeur d'un paramètre caractéristique et pour établir la précision sur cette estimation.

Par exemple, à partir de K échantillons d'un signal aléatoire $x(k)$, on peut estimer sa valeur moyenne à :

$$\hat{m}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x(k)$$

BIAIS ET VARIANCE

Pour une comparaison objective, on utilise souvent deux grandeurs pour caractériser un estimateur : le biais et la variance.

Le biais d'un estimateur \hat{X} est par définition, la différence entre son espérance mathématique et la vraie valeur cherchée X , c'est à dire

$$E_{\hat{X}} = E[\hat{X}] - X$$

Si le biais est nul, la densité de probabilité de l'estimation est centrée sur la valeur cherchée. On dira que l'estimateur est non biaisé .

Un estimateur dont le biais n'est pas nul est dit estimateur biaisé.

La variance d'un estimateur \hat{X} est une mesure de l'étendue de la densité de probabilité. Elle est définie par :

$$\text{Var}[\hat{X}] = E[(\hat{X} - E[\hat{X}])^2] = \sigma_{\hat{X}}^2$$

Une faible valeur de la variance indique une concentration de la densité de probabilité autour de la valeur moyenne $E[\hat{X}]$

Un estimateur satisfaisant doit posséder un biais et une variance aussi petits possibles. Si le biais et la variance d'un estimateur tendent vers zéro, lors qu'on augmente le nombre N de variables observées : l'estimateur est dit consistant.

ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE

En général, la diminution du biais provoque l'augmentation de la variance et vice-versa. Le compromis entre les deux peut être étudié à l'aide de l'erreur quadratique moyenne, définie par :

$$E_{qm}(\hat{X}) = E[(\hat{X} - X)^2]$$

d'où $E_{qm}(\hat{X}) = \sigma_{\hat{X}}^2 + B_{\hat{X}}^2$

DEFINITION DE LA FONCTION D'AUTOCOVARIANCE :

Pour un signal aléatoire stationnaire et ergodique, elle est définie par :

$$\begin{aligned} \gamma_x(k) &= E[(x(l) - m_x)(x(l+k) - m_x)] \\ &= E[x(l) - m_x][x(l+k) - m_x] \end{aligned}$$

ou m_x est la valeur moyenne du signal $x(k)$, on peut montrer que : (ZITTE, 1981)

$$\gamma_x(k) = \gamma_x(k) + m_x^2$$

où $\gamma_x(k)$ est la fonction d'autocorrélation.

B I B L I O G R A P H I E

(KUNT 1981) : TRAITEMENT NUMERIQUE DES SIGNAUX

M.KUNT - DUNOD - 1981

(LABARRERE,1982): LE FILRAGE ET SES APPLICATIONS

M.LABARRERE-JP. KRIEF- B.GIMONET . CEPADUES 1982

(LIFERMANN,1980): LES METHODES RAPIDES DE TRANSFORMATION DU SIGNAL:FOURIER,
WALSH,HADAMARD,HAAR.

J.LIFERMANN - MASSON- 1980

(FONDANECHÉ,1981): FILTRES NUMERIQUE.PRINCIPES ET REALISATIONS

P.FONDANECHÉ ,P.GILBERTAS -MASSON- 1981

(BELLANGER,1981) : TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL.THEORIE ET PRATIQUE.

M.BELLANGER -MASSON- 1981

(PELLETIER,1971) : TECHNIQUES NUMERIQUE APPLIQUEES AUX CALCUL SCIENTIFIQUE.

P.PELLETIER -MASSON- 1971

(HECTOR,1976)/: L'ENREGISTREMENT ENCEPHALOGRAPHIQUE.

M.L.HECTOR -MASSON- 1976 -

(GASTAUD,1979): LA TRANSFORMEE DE FOURIER

GEORGES GASTAUD -Revue: MESURES-REGULATION-AUTOMATISME
-MARS 1979-

(HAZEMANN,1980): ABC D'ELECTROENCEPHALOGRAPHIE.

P.HAZEMANN ,M.MASSON -MASSON - 1980

(MORIN,1979): PHYSIOLOGIE DU SYSTEME NERVEUX CENTRAL.

G.MORIN MASSON- 1979

(BUGARD,1974):STRESS,FATIGUE,DEPRESSION

P: BUGARD -DOIN- 1974