

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique



Département Electronique

Rapport de thèse de doctorat

Par : DJEDDOU Mustapha
Ingénieur d'Etat en Electronique (EMP)

Thème

**Estimation de la direction d'arrivée et de la fréquence Doppler
d'une cible radar évoluant à basse altitude.**

Soutenue le : 30/06/2005 à 10 h 00, devant le jury composé de

Président :	Ahmed Zergueras	Professeur à l'ENP.
Examineurs :	Salah Kellali	Maître de Conférence à l'EMP.
	Karim Abed-Meraim	Maître de Conférence à l'ENST de Paris.
	Abd El Azziz Ould-Ali	Maître de Conférence à l'EMP.
Directeur de thèse :	Adel Belouchrani	Maître de Conférence à l'ENP.
Invité :	M'hamed Dabouz	Docteur Ingénieur, CFDAT.

ENP, 10 Avenue Hassan Badi, BP 182, 16200 El Harrach, Alger

Résumé

Dans ce travail de thèse, nous avons considéré le problème d'estimation conjointe de paramètres des échos radar d'une cible évoluant à basse altitude. La propagation multi trajets des échos issus de la cible, l'évanouissement de la puissance du signal capté par le réseau d'antennes et le bruit additif intentionnel ou non intentionnel sont des problèmes qui rendent très difficile les opérations de traitement, localisation et/ou la poursuite d'une cible. Les méthodes classiques échouent dans le traitement de ce problème. Nous avons utilisés les techniques classiques pour le cas de radar passif où la direction d'arrivée est estimée. Nous avons développés des algorithmes avec des modèles mathématiques appropriés pour l'estimation conjointe des directions d'arrivée et les retards temporels correspondants puis les directions d'arrivée et les fréquences Doppler avec un bruit additif blanc. Pour le cas d'un bruit non blanc, nous avons développés deux algorithmes avec un modèle qui tient compte de la fluctuation de la cible et introduit une paramétrisation de la matrice de covariance du bruit. L'effort est dirigé vers la réduction de la dimension de recherche de la fonction coût de vraisemblance à minimiser. Les résultats ont montré la supériorité des algorithmes développés comparés aux méthodes conventionnelles.

Abstract

We have addressed the problem of joint parameter estimation for radar low elevation target. The multi path propagation of the echoes reflected by the target, the power fading of the signals collected by the array antenna and the additive natural/manmade noise are the major problems making the processing, localisation and tracking of the target very intractable. We have used the classical methods for passive radar where only the direction of arrival is estimated. We have derived algorithms with appropriate mathematical models for the joint estimation of the directions of arrivals and the corresponding temporal delays or directions of arrivals and the corresponding Doppler frequencies with a white additive noise. For a correlated noise, we have derived two algorithms with a new model for a fluctuating target and a parametric representation of the covariance noise matrix. The challenge was the reduction of the search dimension of the likelihood cost function in the minimisation procedure. The results point out the superiority of the proposed algorithms over classical methods.

ملخص

لقد قمنا في هذه الأطروحة بدراسة مشكل تقييم متصل لعوامل إشارة ارتدادية لأهداف رادارية ذات التحرك المنخفض. الانتشار المتعدد الطرق واضمحلال قوة الإشارة المفيدة الملتقطة من شبكة الهوائيات وإشارة التشويش الطبيعي أو المتعمدة يجعل عملية معالجة الإشارة و تحديد المكان أو مطاردة الهدف الراداري أمرا بالغ التعقيد عدة طرق اتقاقية تفشل في معالجة المشكل. لقد تم استعمال الطرق المعروفة في إطار الرادار الغير فعال. لقد قمنا بتطوير عدة خوارزميات لتقييم متصل لزوايا الوصول مع عامل التأخر الزمني للإشارات أو زوايا الوصول مع تردد Doppler. كل هذا مع إشارة تشويش غير متداخل. ثم قمنا بدراسة حول تواجد إشارة تشويش متداخلة. لهذا الغرض تم تطوير خوارزميتين لدراسة تحرك عشوائي للهدف الراداري. كل الجهد كان منصبا لتخفيض درجة التعقيد في البحث الاحتمالي. حاصل الخوارزمية المطورة تظهر أفضليته عن باقي الطرق الموجودة.

Remerciements

Je remercie avant tout, Dieu le tout puissant, pour m'avoir permis de présenter ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Adel Belouchrani pour m'avoir fait l'honneur de diriger cette thèse. Qu'il trouve ici mes respectueux remerciements pour l'intérêt et le soutien sans relâche qu'il m'a toujours accordé.

Mes remerciements s'adressent aussi à Ahmed Zergueras, Professeur à l'ENP, pour avoir accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont à Karim Abed-Meriem, Maître de conférence à ENST de Paris, Salah Kellali et Abd El Azziz Ould-Ali, Maîtres de conférence à l'EMP, qui ont bien voulu me faire l'honneur d'être membres du jury.

Je remercie aussi, M'hamed Dabouz, Docteur ingénieur au CFDAT pour m'avoir fait l'honneur d'accepter l'invitation.

Je tiens à remercier le Professeur Karim Drouiche pour m'avoir accueilli au laboratoire LPTM à l'université de Cergy Pontoise durant mon premier stage de recherche. Je remercie également Abd El Hak Zoubir, Professeur à l'université de Darmstadt, pour m'avoir accueilli au sein de son amusante équipe. J'ai beaucoup apprécié mon séjour dans son laboratoire.

Je remercie particulièrement Said Aouada pour son aide et sa contribution dans mes travaux publiés.

Je remercie aussi mes collègues, tout particulièrement Rezki Zaknoune, Lotfy Si Mohamed, Noureddine Goulmane pour leurs précieuses corrections, Ahmed Dalil et Ourezdini El hadi pour leurs aides.

Je remercie tout les membres de ma famille pour leurs patiences et leurs soutiens durant toute la durée qu'a pris la thèse.

*Je dédie cette thèse
A ma mère.
A mon père.
A ma femme.*

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
Abréviations	vii
Notations	viii
Table des figures	x
Introduction	1
1 Bases Théoriques	5
1.1 Modes d'opération Radar	6
1.1.1 Mode d'opération actif	8
1.1.2 Mode d'opération passif	8
1.2 Modèle des données de base	8
1.2.1 Paramétrisation du modèle	9
1.2.2 Hypothèses sur l'antenne réseau	10
1.3 Mode de propagation multi-trajets	13
1.4 Modèle de réflexion du terrain	18
1.5 Modélisation de la manœuvre des cibles	21
1.6 État de l'Art	22
2 Estimation des Paramètres en Mode Radar Passif	26
2.1 Modèles des signaux	27
2.2 Méthodes de décomposition en sous-espaces	30
2.2.1 Modèle des données en radar passif	30
2.2.2 Méthode MUSIC	31

2.2.3	Extension à MUSIC	32
2.2.4	Signaux échos cohérents	32
2.3	Méthodes du Maximum de Vraisemblance	34
2.3.1	Méthode du Maximum de Vraisemblance Déterministe (MVD)	34
2.3.2	Méthode du maximum de Vraisemblance Stochastique (MVS)	37
2.3.3	Approximations basées sur la décomposition en sous espace	37
2.4	Performances : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation	39
2.4.1	Borne de Cramer-Rao	39
2.4.2	Résultats de simulation	40
2.5	Conclusion	47
3	Estimation Conjointe des Directions d'Arrivée/Retards Temporels en Mode Radar Actif	48
3.1	Modélisation mathématique	50
3.2	Développement des méthodes	52
3.2.1	Méthode SI-JADE modifiée	54
3.2.2	Méthode JADE modifiée	56
3.3	Performances : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation	57
3.3.1	Borne de Cramer-Rao	57
3.3.2	Résultats de simulation	60
3.4	Conclusion	61
4	Estimation Conjointe des Directions d'Arrivée/Fréquences Doppler	63
4.1	Modélisation mathématique	64
4.2	Dérivation de la méthode Joint Angle and Frequency Estimation (JAFE)	65
4.3	Performance : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation	68
4.3.1	Borne de Cramer-Rao	68
4.3.2	Résultats de simulation	70
4.4	Conclusion	71
5	Estimation Conjointe des Directions d'Arrivée/Fréquences Doppler : Cas d'un bruit non blanc	73
5.1	Modélisation des données	74
5.2	Modèle du bruit	76
5.3	Développement des méthodes du maximum de Vraisemblance	77
5.3.1	Méthode "Approximate Maximum Likelihood-Oblique Projection (AML-OP)"	78

5.3.2	Méthode "Approximate Maximum Likelihood 2D (2D-AML)"	80
5.4	Performance : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation	81
5.4.1	Borne de Cramer-Rao	81
5.4.2	Résultats de simulation	84
5.5	Conclusion	88
	Conclusion générale	90
	Bibliographie	93
	A Algorithme 2D-Unitary ESPRIT	99
	B Mathématiques des projections obliques	102
	C Publications	105

Abréviations

2D	Dimension Deux
2D-AML	Two Dimension - Approximate Maximum Likelihood
ALU	Antenne Linéaire Uniforme
AML-OP	Approximate Maximum Likelihood based on Oblique Projection
CPI	Coherent Pulse Interval
CRB	Cramer-Rao Bound
DDA	Direction D'Arrivée
DFT	Discret Fourier Transform
EM	Expectation-Maximisation
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FD	Fréquence Doppler
FB	Forward-Backward
FIM	Fisher Information Matrix
JADE	Joint Angle and Delay Estimation
IQML	Iterative Quadratic Maximum Likelihood
JAFE	Joint Angle and Frequency Estimation
MV	Maximum de Vraisemblance
MVD	Maximum de Vraisemblance Déterministe
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification
MVS	Maximum de Vraisemblance Stochastique
PDF	Probability Density Function
PRI	Pulse Repetition Interval
RF	Radio Fréquence
rMSE	root Mean Squared Error
RSB	Rapport Signal à Bruit
SI-JADE	Shift Invariance - Joint Angle and Delay Estimation
SML	Stochastic Maximum Likelihood
SNR	Signal to Noise Ratio
SSF	Signal Subspace Fitting
SER	Surface Équivalente Radar
STAP	Space-Time Adaptive Processing
std	standard deviation
WSF	Weighted Subspace Fitting

Notations

Dans cette thèse, les matrices et les vecteurs sont représentés en gras, les majuscules sont utilisées pour désigner les matrices et les minuscules pour désigner les vecteurs. Le sens des symboles sont ceux indiqués ci-dessous, si une autre signification est voulue, elle est explicitement donnée :

\mathbf{A}^T	Opérateur de transposition.
\mathbf{A}^*	Complexe conjugué.
\mathbf{A}^H	Transposition Hermitienne.
$\mathbf{A}^\#$	Pseudo-inverse de \mathbf{A} .
$Tr\{\mathbf{A}\}$	Opérateur trace d'une matrice \mathbf{A} .
$det(\mathbf{A})$	Déterminant d'une matrice \mathbf{A} .
$vec(\mathbf{A})$	Vecteur colonne obtenu par empilement des colonnes de la matrice \mathbf{A} .
$\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$	Produit de Khatri-Rao, produit de Kronecker par colonne de \mathbf{A} et \mathbf{B} . Pour une matrice \mathbf{A} $N \times M$ et une matrice \mathbf{B} $K \times M$, il est défini par la matrice $NK \times M$ $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{a}_N \otimes \mathbf{b}_N \end{bmatrix}$ où \mathbf{a}_k est la k^{ieme} colonne de la matrice \mathbf{A} .
$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$	Produit de Hadamard, multiplication élément par élément.
$\mathbf{A} > \mathbf{B}$	La matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est définie positive.
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	en plus, $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$ veut dire $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est positive semi définie. Produit de Kronecker d'une matrice \mathbf{A} $N \times M$ et une matrice \mathbf{B} $K \times L$ définie par la matrice $NK \times ML$ $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1M}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}\mathbf{B} & \dots & a_{NM}\mathbf{B} \end{bmatrix}$
$\hat{\theta}$	Estimée du paramètre θ .
\mathbf{I}_m	Matrice identité $m \times m$. L'indice m est souvent omis.
$diag(\mathbf{A})$	Vecteur colonne contenant les éléments diagonaux de la matrice \mathbf{A} .
$diag(a_1, \dots, a_K)$	Matrice diagonale $K \times K$ dont les éléments diagonaux sont a_1 jusqu'à a_K .
$\ \mathbf{A}\ _F$	Norme matricielle de Frobenius, définie par $\ \mathbf{A}\ _F^2 = Tr\{\mathbf{A}\mathbf{A}^H\}$.
$[\mathbf{A}]_{ij}$ ou a_{ij}	Le $(i, j)^{ieme}$ élément de la matrice \mathbf{A} .

$\arg \max_x f(x)$	L'argument maximisant la fonction $f(x)$ par rapport à x .
$\arg \min_x f(x)$	L'argument minimisant la fonction $f(x)$ par rapport à x .
$\delta_{t,s}$	Kronecker delta.
$E[\cdot]$	Espérance mathématique d'une variable aléatoire.
$\Re[\cdot]$	Partie réelle d'une quantité complexe.
$\Im[\cdot]$	Partie imaginaire d'une quantité complexe.

Table des figures

1.1	Traitement des données dans un radar pulsé.	6
1.2	Antenne uniforme linéaire.	11
1.3	Diagramme de rayonnement d'une antenne uniforme et linéaire de 12 éléments.	12
1.4	Différents trajets possibles de propagation des signaux radar.	13
1.5	Modèle de réflexion multi-trajets.	14
1.6	Effet des trajets multiples sur la puissance reçue par le radar.	16
1.7	Géométrie de réflexion tenant compte de la sphéricité de la terre.	17
1.8	Réflexion spéculaire et diffusion.	19
1.9	Réflexion par une surface rugueuse.	19
1.10	Zone de Fresnel, géométrie pour une terre plate.	20
2.1	Spectre de puissance 2D d'un signal écho d'une cible située à une élévation de 45 degrés.	28
2.2	Spectre de puissance 2D d'un signal écho d'un brouilleur situé à une élévation de 10 degrés.	29
2.3	Spectre de puissance 2D d'un signal clutter.	30
2.4	Déviations standard vs RSB, Méthode MVD, $N = 24, M = 100, R_0 = 40$ km.	41
2.5	Déviations standard vs RSB, Méthode MVS, $N = 24, M = 100, R_0 = 40$ km.	41
2.6	Déviations standard, méthode SSF, $N = 24, L = 100, R_0 = 40$ km.	42
2.7	Déviations standard, Méthode WSF, $N = 24, L = 100, R_0 = 40$ km.	42
2.8	Déviations standard v.s M , Méthode MVD, $N = 24, RSB = 10dB, R_0 = 40$ Km.	43
2.9	Déviations standard v.s M , Méthode MVS, $N = 24, RSB = 10dB, R_0 = 40$ Km.	43
2.10	Exemple de poursuite angulaire, méthode MVD. $RSB = 20$ dB, $L = 200, N = 24$	44

2.11	Exemple de poursuite angulaire, méthode MVS. $RSB = 20 \text{ dB}$, $L = 200$, $N = 24$.	44
2.12	Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 0.5^\circ$.	45
2.13	Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 0.6^\circ$.	45
2.14	Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 1.2^\circ$.	46
2.15	Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 4^\circ$.	46
3.1	Modèle de réflexion et géométrie associée.	50
3.2	Schéma bloc de quelques opérations dans un récepteur radar.	51
3.3	Estimation de DDA de l'écho réfléchi. Valeurs des paramètres : (première approche : $L = 200$, $N = 10$, $M = 1$, $R_0 = 65 \text{ km}$., deuxième approche : $L = 200$, $M = 25$, $N = 10$, $R_0 = 65 \text{ km}$).	61
3.4	Estimation du retard temporel de l'écho réfléchi. Valeurs des pa- ramètres : (Première approche : $M = 1$, $N = 10$, $R_0 = 65 \text{ km}$. Deuxième approche : $M = 25$, $N = 10$, $R_0 = 65 \text{ km}$).	61
3.5	Poursuite de l'évolution de DDA (SI-JADE : $M = 200$, $N = 10$, $RSB =$ 20 dB , JADE : $M = 25$, $N = 10$, $P = 5$, $RSB = 20 \text{ dB}$).	62
4.1	Vitesse de la cible et géométrie multi-trajets.	65
4.2	Données disponibles pour le traitement.	66
4.3	Estimation de DDA de l'écho réfléchi. Valeurs des paramètres : $L = 100$, $N = 16$, $M = 14$, $R_0 = 32 \text{ km}$.	71
4.4	Estimation de la fréquence Doppler de l'écho réfléchi. Valeurs des pa- ramètres : $L = 100$, $N = 16$, $M = 14$, $R_0 = 32 \text{ km}$.	71
4.5	Poursuite de l'évolution des angles d'arrivée ($L = 100$, $N = 16$, $M = 14$, $RSB = 20 \text{ dB}$).	72
5.1	La rMSE de la DDA vs RSB pour les différentes méthodes. $N = 12$, $M =$ 200 , $L = 3$, $\rho = 0.9$.	85
5.2	La rMSE de la fréquence Doppler vs RSB pour les différentes méthodes. $N = 12$, $M = 200$, $L = 3$, $\rho = 0.9$.	85
5.3	La rMSE de la DDA vs coefficient de corrélation pour les différentes méthodes. $N = 14$, $L = 200$, $M = 3$, $RSB = 10 \text{ dB}$.	86
5.4	La rMSE de la fréquences Doppler vs coefficient de corrélation pour les différentes méthodes. $N = 14$, $L = 200$, $M = 3$, $RSB = 10 \text{ dB}$.	86
5.5	La rMSE de DDA vs le nombre d'élément de l'antenne pour les différentes méthodes. $L = 400$, $\rho = 0.95$, $M = 3$, $RSB = 10 \text{ dB}$.	87
5.6	La rMSE de la fréquences Doppler vs le nombre d'élément de l'antenne pour les différentes méthodes. $L = 400$, $\rho = 0.95$, $M = 3$, $RSB = 10 \text{ dB}$.	87
5.7	Poursuite des DDA direct et réfléchi pour les différentes méthodes. $N =$ 12 , $L = 200$, $\rho = 0.95$, $M = 3$, $RSB = 10 \text{ dB}$.	88

5.8	Comparaison du temps d'exécution relatif des différentes approches vs le nombre de capteurs.	89
A.1	Sous réseaux exploités.	100
B.1	Repères de projection oblique.	103
B.2	Géométrie associée à la projection oblique [59].	104

Introduction

CETTE thèse traite du problème d'estimation de paramètres en traitement d'antennes appliqué à un système radar. Les réseaux d'antennes sont utilisés dans une grande variété d'applications comme le radar, les capteurs passifs, le sonar, les télécommunications, la sismologie, la radioastronomie, le biomédical et l'analyse chimique.

Notre travail est orienté vers le résolution d'un problème spécifique concernant l'estimation de la direction d'arrivée et de la fréquence Doppler d'une cible évoluant à basse altitude. En plus des systèmes radar (terrestre ou embarqué sur un navire), le même phénomène est observé dans les systèmes sonar et dans les systèmes de localisation des stations émettrices pour la radionavigation. Mais le domaine qui a pris une grande importance ces dernières années est l'interception des missiles de croisière évoluant à basse altitude. La menace que présente les missiles s'élargit qualitativement à une multitude d'armements de précision, avec des trajectoires extrêmement variées qui compliquent la tâche de la défense aérienne : missiles anti navires à trajectoire rasante, missiles de croisière volant à basse altitude en suivi de terrain, bombes et missiles air-sol guidés, missiles anti-radars à trajectoire plongeante, missiles balistiques tactiques à arrivée quasi-verticale. Ce sont autant de menaces difficiles à contrecarrer et autant de cibles difficiles à atteindre, car plus rapides, plus petites, plus agiles, et capables d'attaquer en salves, pour saturer les défenses. Ces défenses reposent lourdement sur l'évolution des systèmes de détection et de poursuite et sur la capacité d'interception des missiles anti-missiles et anti-aéronefs. Donc, les méthodes développées trouveront leurs applications dans les systèmes radars (ou sonars) montés sur un support fixe ou embarqué dans les missiles d'interception.

La localisation et la poursuite de cibles dans un système radar impliquent l'estimation des déviations Doppler, des directions d'arrivée (azimut/élévation) et des différence de temps d'arrivée. Quand la cible est à proximité d'une surface réfléchissante, le signal écho reçu arrive au site radar à travers deux ou plusieurs trajets, même s'il n'existe qu'une seule cible dans l'environnement.

Quand il y a réflexion, il est possible que les ondes radars atteignent la cible et soient rétro-diffusées via deux trajets (un trajet direct dans l'air libre et un trajet indirect réfléchi par la surface de la terre ou de la mer). Bien qu'il est possible, en principe, d'avoir plus d'un rayonnement réfléchi, le cas de deux trajets est le plus courant et c'est ce cas qu'on désigne par le terme propagation multi-trajets. Dans un scénario multi-trajets, le radar observe deux cibles, la vraie cible et son image créée par l'interférence multi-trajets avec une position angulaire qui apparaît au dessous de la surface de la terre, mais avec une différence de résolution souvent inférieure à la résolution du radar. Par conséquent, les cellules distances du radar échouent dans la réjection de l'in-

terférence multi-trajets. En plus, les signaux direct et réfléchi se superposent de façon constructive ou destructive à cause du déphasage entre les deux échos. Cette différence de phase est principalement liée au coefficient de réflexion de la surface réfléchissante. Ce coefficient dépend de la longueur d'onde utilisée et des paramètres physiques de la matière de la surface de la terre telles que la constante diélectrique, la perméabilité, la conductivité, etc. En général, pour combattre le phénomène de l'évanouissement de la puissance, on utilise une agilité de fréquence. La réflexion spéculaire est directionnelle et suit les lois classiques de l'optique, les échos réfléchis sont cohérents. Ce phénomène provoque l'évanouissement de la puissance du signal qui a un effet majeur sur la poursuite des cibles.

En plus de cette réflexion, les échos issus d'une cible peuvent subir une diffusion. Ce dernier phénomène est moins critique que la réflexion et les signaux de diffusion s'ajoutent d'une façon non cohérente. Un autre problème qui survient dans la poursuite radar en basse altitude est la résolution angulaire très réduite entre les échos incidents. Cette différence angulaire est une petite fraction de la largeur de bande du faisceau. L'utilisation des techniques de formation de voies pour séparer spatialement les signaux direct et réfléchi est impossible. Ceci nous conduit à l'utilisation des méthodes haute résolution pour estimer les paramètres d'intérêt. L'estimation des paramètres est effectuée en observant un mélange linéaire d'échos radar et exploitant ainsi les connaissances *a priori* du modèle physique de propagation ainsi que la géométrie du réseau d'antennes. Ces connaissances *a priori* sont sujettes à des perturbations dues à l'environnement de propagation, aux imperfections des capteurs ou à toute autre imprécision.

En général, la matrice de covariance du bruit, affectant ces observations, est supposée connue à un facteur multiplicatif près. Dans plusieurs systèmes, le bruit dominant est le bruit thermique qui est approximativement égal dans tous les canaux. Dans ce cas, la covariance du bruit est une matrice identité multipliée par un facteur (variance du bruit) et cette supposition se trouve souvent justifiée. Dans notre travail, on s'intéresse aussi au cas de bruit externe dominant. Ce type de bruit introduit une corrélation entre les différents capteurs. On le retrouve dans plusieurs systèmes Radio Fréquence (RF) et dans la majorité des systèmes sonar. Quand la fonction de corrélation est connue (par collection des données en absence du signal écho cible), il est toujours possible de modifier les algorithmes pour tenir compte de cette fonction. On peut par exemple procéder au blanchiment des données avant l'application des algorithmes d'estimation.

Dans la pratique, le bruit d'environnement est inconnu et change lentement dans le temps. La question qui se pose est comment résoudre le problème d'estimation sans la caractérisation statistique complète du bruit. Ignorer la corrélation du bruit introduit des erreurs significatives dans les estimées et donne des résultats inacceptables. D'autre part, l'opération du traitement d'annulation du clutter par filtrage n'est pas parfaite. Vu que cette interférence est dominante par rapport au signal écho utile, les résidus du traitement du clutter s'ajoutent aux bruits externes et au bruit thermique interne. Une autre difficulté dont il faut tenir compte est la fluctuation de la cible. Quand la cible est stable et non fluctuante, la surface équivalente radar se réduit à un facteur constant multiplicatif durant toute la durée de l'analyse. Dans notre travail, on développe un modèle de données qui tient compte de la fluctuation de la cible selon des modèles

statistiques de modes de fluctuations. Dans la littérature ouverte le traitement de ce problème s'est réduit au cas de l'estimation d'un paramètre : les directions d'arrivée. Notre travail considère l'estimation conjointe des directions d'arrivée avec les retards temporels et les directions d'arrivée avec les fréquences Doppler. Le but de ce traitement en deux dimensions est d'avoir un degré de liberté supplémentaire pour prendre une décision sur la vraie direction d'arrivée de la cible.

Dans le chapitre I, nous donnons les bases théoriques liées aux problèmes traitées. Nous posons les hypothèses liées au réseau d'antennes utilisé et nous donnons des définitions des différents phénomènes liés à la propagation multi-trajets ainsi que l'état de l'art en la matière.

Dans le chapitre II, nous traitons le problème d'estimation des directions d'arrivée des ondes électromagnétiques incidentes sur un réseau d'antennes pour un radar passif où le récepteur est en mode écoute. La méthode classique de formation de voie est écartée vu sa faible résolution de séparation. Cette méthode ne parvient pas à séparer angulairement des cibles de moins d'une largeur de bande du faisceau. Une étude comparative des différentes méthodes est considérée. Les méthodes étudiées sont des approches du maximum de vraisemblance utilisant des informations *a priori* différentes sur les statistiques des signaux échos. Nous étudions, ensuite, les approches basées sur la décomposition en sous espaces signal et bruit. Dans cette partie, le bruit est supposé blanc et indépendant des signaux sources.

Dans une deuxième partie (chapitre III et IV), pour le cas du radar actif, nous considérons le problème de l'estimation conjointe de paramètres. Nous développons un modèle des données et des algorithmes pour l'estimation conjointe des angles d'arrivée et les retards temporels correspondants à chaque signal écho incident. Nous avons choisi d'estimer ces retards temporels pour obtenir un deuxième degré de liberté pour la prise de décision relative à la direction réelle de la cible.

L'utilisation d'un suréchantillonnage pour l'estimation des retards temporels est un grand handicap car nécessitant énormément de ressource en mémoire et en calcul. Pour cela nous proposons de faire une estimation conjointe des directions d'arrivée et des fréquences Doppler correspondantes. Ceci est aussi motivé par le fait que même si l'on a deux signaux issus d'une même cible, la différence de trajet donne des fréquences Doppler différentes. Un autre point important exploité est le changement du signe de la fréquence Doppler du signal écho rétrodiffusé due à la dépolarisation.

Le chapitre V traite du même problème mais avec un modèle de bruit différent. On a supposé, d'abord, que le bruit est caractérisé par une matrice de covariance inconnue puis, dans la deuxième partie, on a supposé que le bruit possède une forme structurée. Signalons que le bruit englobe tout signal indésirable, et peut être le clutter, les brouilleurs intentionnels ou non intentionnels ou tout simplement le bruit généré par les circuits électroniques du récepteur. Nous signalons que ce cas n'a pas été traité dans la littérature ouverte.

Deux approches ont été développées pour estimer les paramètres sous les conditions citées. La première repose sur la paramétrisation du signal bruit et la deuxième utilise les projections obliques en conjonction avec la solution du filtrage "zero forcing" pour réduire l'effet du bruit. Le principe des deux approches repose sur la réduction de

la complexité de la procédure d'optimisation de la fonction coût de vraisemblance dans les deux cas. La borne inférieure de Cramer-Rao a été développée pour les cas d'un bruit non blanc pour avoir une mesure de performance des estimateurs proposés par rapport à une borne théorique minimale. Nous traitons un cas non étudié dans la littérature qu'est le développement de la borne avec deux vecteurs de paramètres d'intérêt. L'expression de la borne est mise sous une forme très compacte.

CHAPITRE

1

Bases Théoriques

Dans ce chapitre, nous commençons par donner un bref aperçu sur les modes d'opération d'un radar, puis nous développons un modèle des données reçues par un réseau d'antennes. La section III est consacrée aux hypothèses et à la paramétrisation du modèle. La section IV est réservée à l'introduction des problèmes liés au scénario traité dans la thèse tel que le problème de propagation multi-trajets et la définition du coefficient de réflexion d'une surface réfléchissante. Ensuite, on passe en revue les différents modèles de manœuvre des cibles. En fin de chapitre, un état de l'art en la matière est donné.

1.1 Modes d'opération Radar

Les systèmes radar sont utilisés pour détecter des cibles et estimer leurs positions en transmettant une énergie électromagnétique et analyser l'énergie rétrodiffusée par ces dernières. Un radar Doppler pulsé transmet un paquet d'impulsions brèves avec une certaine fréquence porteuse. Un objet ou une cible, dans le champ de vision radar rétrodiffuse une partie de l'énergie transmise. Cette quantité d'énergie rétrodiffusée caractérise les objets via le paramètre Surface Équivalente Radar (SER). Si l'objet et/ou la plate forme radar sont en mouvement, il y aura une translation Doppler de la fréquence qui est fonction de la vitesse radiale ¹ de l'objet par rapport au radar. La distance peut être déterminée par le temps de l'aller retour de l'impulsion émise. Un radar moderne échantillonne le signal reçu. Les échantillons ainsi obtenus correspondent aux différentes distances des objets potentiels et sont souvent dites cellules distances. Le décalage Doppler est déterminé par la transmission d'une série d'impulsions et pour chaque cellule distance, on réalise une transformée de Fourier sur les séries d'impulsions. Le temps entre deux impulsions successives est dit intervalle de répétition des impulsions ou Pulse Repetition Interval (PRI). Le temps entre la première et la dernière impulsion dans le traitement Doppler est dit intervalle de traitement cohérent des impulsions ou Coherent Pulse Interval (CPI). La figure 1.1 illustre les différents concepts décrits.

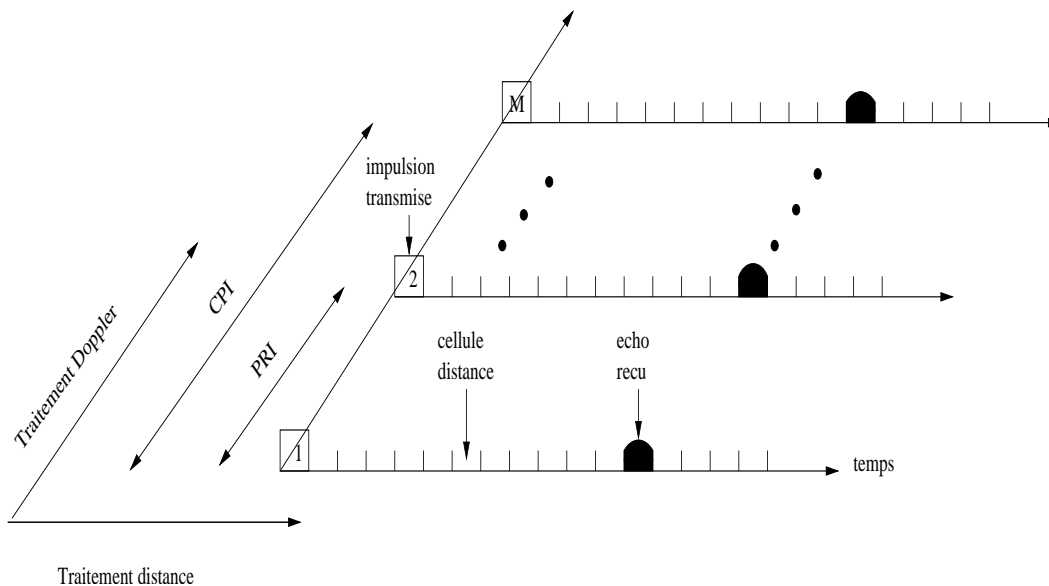


Fig. 1.1 — Traitement des données dans un radar pulsé.

La position angulaire de la cible est en général déterminée par le balayage d'un faisceau étroit à travers le volume de recherche ² et le récepteur radar surveille l'énergie du signal réfléchi, si l'énergie excède un certain seuil, une cible est détectée et l'angle est

¹Cette vitesse est une composante du déplacement des cibles rétrodiffusantes dans la direction de visée radar.

²Le volume de recherche est la zone de couverture radar balayée par le faisceau de rayonnement radar.

donné par la direction de pointage du rayonnement. Le balayage par faisceau peut être effectué soit mécaniquement par rotation de l'antenne ou d'une façon électronique par le réseau phasé. Un réseau phasé est un réseau d'antennes avec un déphaseur à la sortie de chaque détecteur. Par application d'un déphasage progressif aux éléments du réseau d'antennes, le retard de propagation entre les éléments pour un front d'onde incident peut être compensé. Ceci a pour effet de diriger le rayonnement vers une direction qui est déterminée par le déphasage progressif appliqué. L'avantage principal du balayage électronique, comparé au balayage mécanique, est sa flexibilité et sa rapidité. Plus récemment, des réseaux d'antennes numériques ont été utilisés dans les systèmes radars. La distinction entre le réseau phasé et le réseau numérique est que dans le premier, un faisceau est formé en utilisant un déphaseur analogique. La sortie est ensuite numérisée afin d'avoir des données numériques pour des traitements éventuels. Par contre, pour un réseau numérique, chaque élément de l'antenne fournit à sa sortie des données numériques.

Ainsi, un échantillonnage spatial de l'onde incidente est effectué sur les éléments du réseau. Cette opération donne une dimension spatiale au traitement numérique du signal. A chaque instant, un faisceau de balayage peut être obtenu en multipliant les sorties de chaque élément antenne par des nombres complexes qui produisent le déphasage voulu. Cette procédure est dite formation de voie numérique. Plus intéressant, le problème de trouver la direction des cibles peut être vu comme un problème d'estimation de paramètre :

Étant donné des données échantillonnées collectées par un réseau d'antennes, le but est de déterminer le meilleur estimateur possible des directions d'arrivée.

Pour résoudre ce problème, on a besoin d'un modèle mathématique des données collectées. En utilisant, la théorie de l'estimation, la solution est donnée par l'estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV). Dans le cas d'une seule cible noyée dans un bruit Gaussien blanc, la solution MV se réduit à la formation de voie conventionnelle. Cependant, pour des scénarios plus complexes avec des cibles multiples très proches ou avec des réflexions, l'estimateur MV est plus compliqué et souvent inadéquat bien qu'il possède de meilleures performances que le formateur de voie. Plusieurs solutions sous optimales ont été développées avec des performances et des complexités de calcul intermédiaires entre l'estimateur MV et le formateur de voie. Les méthodes basées sur la modélisation sont associées à des coûts élevés, en terme de hardware et complexité de calcul. En plus, ces méthodes sont sensibles aux erreurs de modélisation, ce qui nécessite une calibration précise du système. L'introduction de ces méthodes dans la pratique est très limitée, d'où l'intérêt d'orienter les techniques de traitement dans le sens d'un coût raisonnable.

Il existe deux modes d'opérations radar. Dans le mode actif, un signal est transmis (fréquence radio), une partie de la puissance est rétrodiffusée par une cible et reçue par le radar. Dans le mode passif, l'émetteur radar n'émet aucun signal, il est en écoute.

1.1.1 Mode d'opération actif

Le but de la surveillance et de la poursuite pour un système radar est, essentiellement, la détection de cible, l'estimation des directions de cibles, l'estimation de la distance et de la vitesse des cibles dans un environnement hostile. Ceci est accompli par la transmission d'un signal RF continu ou réparti dans le temps sous forme d'impulsions avec une certaine fréquence de répétition des impulsions et ayant une forme d'onde modulée. Le signal écho reçu sur une antenne réceptrice est converti en un signal en bande de base complexe et numérique. Les échantillons temporels reçus à partir de la même impulsion représentent des échantillons de distance. Dans une même cellule distance, les échantillons formés à partir des différentes impulsions représentent des échantillons temporels différents. En associant les signaux obtenus à partir des différents canaux d'un réseau d'antennes numérique, on forme un signal radar multidimensionnel. A partir de ces données sauvegardées, les cibles sont détectées, la distance et la vitesse des cibles sont ensuite estimées.

1.1.2 Mode d'opération passif

Le mode passif d'un radar peut être vu comme une écoute indiscrete du signal émis par la cible dans le but de l'estimation des paramètres de l'émetteur telles que la direction d'émission et la fréquence de l'émetteur.

La différence avec le mode actif du point de vue collection de données est que la dimension distance de la matrice du signal reçu est manquante vu qu'on ne peut mesurer le temps de propagation.

Dans cette thèse, nous nous intéressons dans la première partie, au mode passif et nous estimons les Directions D'Arrivée (DDA) des échos.

1.2 Modèle des données de base

Considérons un réseau d'antennes passif composé de N éléments localisés arbitrairement dans l'espace. Supposons qu'un signal temporel continu à valeurs réelles $\bar{s}(t)$, arrive sur l'antenne. Soit τ_n le retard temporel du signal au n^{ieme} élément, relativement à un point de référence fixe. Notons $h_n(t)$ la réponse impulsionnelle du n^{ieme} élément. La sortie du n^{ieme} élément de l'antenne est de la forme

$$\bar{x}_n(t) = h_n(t) * \bar{s}(t - \tau_n) + \bar{n}_n(t) \quad (1.1)$$

où $\bar{n}_n(t)$ est un bruit additif indépendant de $\bar{s}(t)$. Exprimons le signal $\bar{s}(t)$ comme un signal modulé ayant une fréquence centrale ω_c

$$\bar{s}(t) = u(t) \cos(\omega_c t + \phi(t)). \quad (1.2)$$

Si l'amplitude $u(t)$ et la phase $\phi(t)$ du signal varient lentement par rapport au temps de propagation à travers le réseau, on a

$$\begin{aligned} u(t - \tau_n) &\approx u(t) \\ \phi(t - \tau_n) &\approx \phi(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

et les signaux sont dits à bande étroite.

Pratiquement, la validité de ces hypothèses dépend de la taille physique de l'antenne. L'hypothèse du signal à bande étroite se traduit par :

$$\begin{aligned}\bar{s}(t - \tau_n) &= u(t - \tau_n) \cos(\omega_c(t - \tau_n) + \phi(t - \tau_n)) \\ &\approx u(t) \cos(\omega_c(t - \tau_n) + \phi(t)).\end{aligned}\quad (1.4)$$

Ainsi, cette hypothèse permet de modéliser un retard temporel par un simple déphasage du signal modulé. La sortie du n^{ieme} élément peut être alors exprimée par

$$\begin{aligned}\bar{x}_n(t) &\approx h_n(t) * u(t) \cos(\omega_c(t - \tau_n) + \phi(t)) + \bar{n}_n(t) \\ &= |H_n(\omega_c)| u(t) \cos(\omega_c(t - \tau_n) + \phi(t) + \arg(H_n(\omega_c))) + \bar{n}_n(t)\end{aligned}\quad (1.5)$$

où $H_n(\omega)$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h_n(t)$. Dans ce qui a précédé, nous avons supposé que $u(t - \tau_{max}) \approx u(t)$ où τ_{max} étant le retard de propagation maximal du canal.

Il est judicieux de faire une représentation complexe du signal $\bar{s}(t)$. Le retard temporel des signaux en bande étroite est exprimé par une multiplication d'un nombre complexe. La représentation complexe du signal $\bar{s}(t)$, est donnée par

$$s(t) = \bar{s}(t) + j\tilde{s}(t) \quad (1.6)$$

où $\tilde{s}(t)$ est la transformée de Hilbert de $\bar{s}(t)$. Le signal $s(t)$ est la représentation analytique du signal $\bar{s}(t)$. En absence du bruit, l'enveloppe complexe du signal a la forme suivante

$$\begin{aligned}x_n(t) &= \bar{x}_n(t) + j\tilde{x}_n(t) \\ &= H_n(\omega_c) e^{-j\omega_c\tau_n} u(t) e^{j(\omega_c t + \phi(t))} \\ &= H_n(\omega_c) e^{-j\omega_c\tau_n} s(t)\end{aligned}\quad (1.7)$$

où $\bar{x}_n(t)$ et $\tilde{x}_n(t)$ sont respectivement, les composantes en phase et en quadrature de $x_n(t)$.

L'hypothèse du signal à bande étroite signifie que l'enveloppe complexe du signal reste constante durant tout le temps de la traversée de l'antenne par le front d'onde, cette hypothèse est admise dans toute les méthodes développées.

1.2.1 Paramétrisation du modèle

Le vecteur des signaux observés sur l'ensemble des capteurs contient l'information temporelle et spatiale. Un ensemble de paramètres est associé à chaque signal. Ces paramètres peuvent inclure par exemple le nombre de source, la position des sources (l'élévation, l'azimut, la distance), la fréquence porteuse, la polarisation, etc. Soit le vecteur $\theta_i; i = 1 \dots d$ représentant la collection du paramètre associé au i^{ieme} signal et supposant que les antennes peuvent être modélisées comme des systèmes linéaires. Le signal reçu est une superposition des signaux individuels. Vu que les éléments de

l'antenne et le retard temporel de propagation sont sensibles aux paramètres des signaux, la réponse impulsionnelle et le retard temporel de chaque élément sont fonction du paramètre θ_i . Le modèle des données paramétré suivant est obtenu à la sortie du n^{ieme} élément.

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \sum_{i=1}^d H_n(\theta_i) e^{-j\omega_c \tau_n(\theta_i)} s_i(t) + n_n(t) \\ &= \sum_{i=1}^d a_n(\theta_i) s_i(t) + n_n(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le réseau d'antennes est composé de N éléments capteurs et si on collecte les sorties des éléments dans un vecteur de sortie, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^d \begin{bmatrix} a_1(\theta_i) \\ \vdots \\ a_N(\theta_i) \end{bmatrix} s_i(t) + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ \vdots \\ n_N(t) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^d \mathbf{a}(\theta_i) s_i(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le vecteur $\mathbf{x}(t)$ est un élément d'un espace de vecteurs complexes de dimension N . Le vecteur $\mathbf{a}(\theta)$ est la variété d'antenne. Le processus bruit $\mathbf{n}(t)$ est supposé aléatoire complexe, stationnaire, blanc et de moyenne nulle. La distribution de probabilité du bruit est gaussienne circulaire et complexe. Ainsi, les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{n}(t)$ sont indépendantes et identiquement distribuées avec des moments d'ordre deux :

$$\begin{aligned} E [\mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(s)] &= \mathbf{Q} \delta_{t,s} \\ E [\mathbf{n}(t) \mathbf{n}^T(s)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

où \mathbf{Q} est la matrice de covariance spatiale du bruit. Cette covariance est, en général, inconnue. Des hypothèses sur la structure de \mathbf{Q} seront discutées dans les prochains chapitres.

1.2.2 Hypothèses sur l'antenne réseau

La sortie complexe de l'antenne est décrite par (1.9). Pour des raisons de simplicité, on considérera le cas d'un seul paramètre inconnu, par exemple, la direction d'arrivée. Deux hypothèses concernent la variété d'antenne

$$\mathcal{A} = \{ \mathbf{a}(\theta_i), \theta_i \in \Theta \} \quad (1.11)$$

La première hypothèse est que la paramétrisation de la variété d'antenne est connue, ainsi pour chaque $\theta_i \in \Theta$, le vecteur $\mathbf{a}(\theta_i)$ est connu, Θ est défini comme étant l'ensemble

compact dans lequel le paramètre θ_i est susceptible de varier. Cette paramétrisation peut être développée analytiquement, mais en général l'antenne doit être calibrée, ce qui est coûteux en temps et en coût. La deuxième hypothèse stipule qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la variété d'antenne. Ainsi pour toute collection de d directions d'arrivée distinctes avec $\theta_i \in \Theta$ $i = 1, \dots, d$ et $d \leq N$, les vecteurs réponses de l'antenne correspondants sont linéaires et indépendants. En plus, ces vecteurs doivent être dérivables continuellement selon le paramètre θ . Dans le manuscrit, on suppose que l'antenne est linéaire et uniforme autrement ses caractéristiques sont explicitement spécifiées.

Pour illustrer la paramétrisation de la variété d'antenne, considérons une antenne linéaire uniforme avec N capteurs identiques, espacés uniformément de Δ , (figure 1.2). La direction d'arrivée θ est définie comme étant l'angle que fait l'onde incidente et la normale au réseau linéaire.

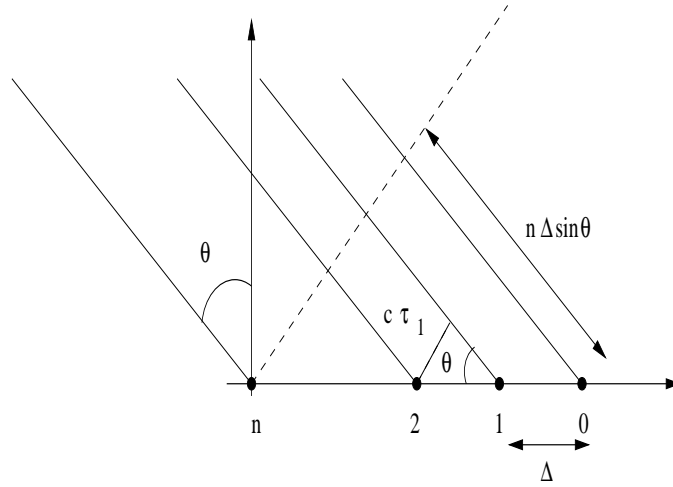


Fig. 1.2 — Antenne uniforme linéaire.

Il est clair qu'à partir de la figure 1.2, le retard de propagation τ_n , entre le 1^{er} et le $n^{\text{ième}}$ élément est donné par

$$\tau_n = \frac{(n-1)\Delta \sin \theta}{c} \quad (1.12)$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde. Les éléments individuels de l'antenne sont supposés isotropiques de gain unité $H_n(\theta) = 1$. Le vecteur directionnel est donné par

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[1 \quad e^{j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta} \quad \dots \quad e^{j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} (N-1) \sin \theta} \right] \quad (1.13)$$

où λ est la longueur d'onde. La méthode la plus simple pour trouver les directions d'arrivée des signaux est l'utilisation des méthodes de formation de voies conventionnelles. Dans cette approche, un faisceau est dirigé dans une seule direction à un instant donné par une application progressive de déphasage aux sorties des antennes pour compenser les retards de propagation des ondes incidentes. Le diagramme de directivité du réseau de l'antenne $B(\theta_1, \theta_2)$ est défini par le gain complexe du formateur de voie, quand il est dirigé vers la direction θ_1 avec une onde plane venant d'une direction θ_2 ,

$$B(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{a}^H(\theta_1)\mathbf{a}(\theta_2) \quad (1.14)$$

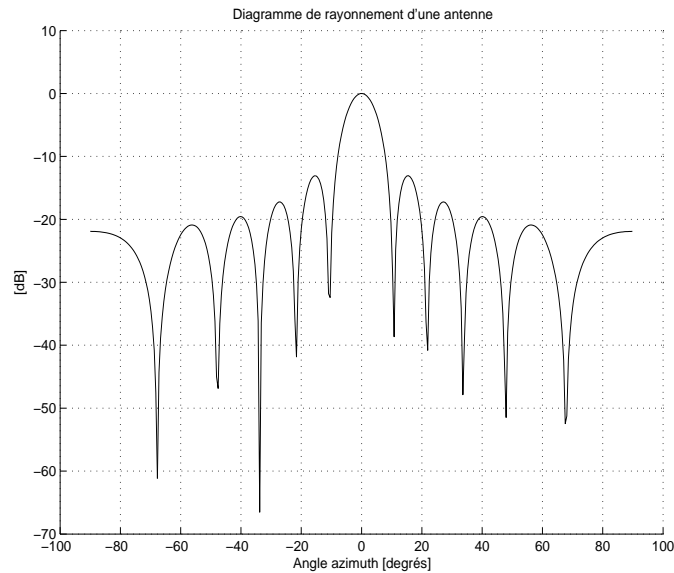


Fig. 1.3 — Diagramme de rayonnement d'une antenne uniforme et linéaire de 12 éléments.

La figure 1.3 nous montre un exemple de représentation de l'amplitude du diagramme de directivité pour un réseau linéaire uniforme de 12 éléments quand il est dirigé vers une direction perpendiculaire au réseau.

Le diagramme de directivité exhibe un lobe principal dans l'axe vertical de l'antenne avec plusieurs lobes secondaires. La largeur du lobe principal renseigne sur la capacité de résolution de deux ondes planes différentes. Pour qu'une ALU soit non ambiguë, on peut montrer que l'espace entre les éléments Δ doit être inférieur à $\frac{\lambda}{2}$ si $\Delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Si $\Delta \geq \frac{\lambda}{2}$, le recouvrement spatial se produit. Ceci se manifeste par des lobes additionnels de même hauteur que le lobe principal. Ces lobes sont dits "grating lobes" et introduisent des ambiguïtés en terme de position du pic maximal dans le diagramme de directivité.

Le modèle du réseau d'antennes décrit auparavant est très général. Nous allons être plus spécifique pour l'application radar. Deux modèles sont couramment utilisés pour $\mathbf{s}(t)$ dans la littérature de traitement d'antennes, les modèles stochastique et déterministe (ou modèles conditionnels et inconditionnels). Dans le modèle stochastique, $\mathbf{s}(t)$ est modélisé par une réalisation d'un processus stochastique (souvent Gaussien) de moyenne nulle et stationnaire. Si le processus est Gaussien, les paramètres à estimer sont les éléments de la matrice de covariance du signal. Dans le modèle déterministe, chaque échantillon de $\mathbf{s}(t)$ est vu comme un paramètre déterministe mais inconnu qu'il faut estimer. Un troisième modèle, est le modèle du signal déterministe paramétré. Dans ce modèle, on n'estime pas chaque échantillon de $\mathbf{s}(t)$ mais le signal est décrit par un nombre relativement réduit de paramètres. Il suffit donc d'estimer ces paramètres pour déterminer complètement le signal. Un exemple de modèle d'un signal paramétré est un signal de forme d'onde connue avec une amplitude et phase inconnues.

Dans le cas radar, la modélisation stochastique du signal est souhaitable pour des cibles à fluctuation rapide de la SER et pour la modélisation du bruit dû aux brouilleurs. Les modèles utilisés couramment pour la distribution statistique de SER des objets radar sont dits les cas de Swerling [57]. Une SER à fluctuation rapide est obtenue si la fréquence porteuse change d'une impulsion à une autre. Durant une CPI, un objet radar ayant une SER constante, peut être modélisé par un signal déterministe paramétrique. Dans ce cas, la forme d'onde du signal peut être une sinusoïde ayant une fréquence déterminée par la vitesse radiale entre l'objet et la plate forme radar. Ceci est dû à l'effet Doppler. Un modèle souhaitable pour le signal écho $s_i(t)$ de la i^{ieme} cible est alors une exponentielle complexe $s_i(t) = b_i e^{j\omega_i t}$ de fréquence ω_i . Les différents échantillons aux instants $t = 1, \dots, L$ correspondent alors aux différentes impulsions (PRI) pour une cellule distance particulière.

1.3 Mode de propagation multi-trajets

Considérons un radar monostatique sur une surface. L'onde transmise se propage dans toutes les directions, deux directions atteignent la cible : la première par voie directe, sans réflexion par la surface de la terre, La deuxième direction est celle obtenue après réflexion par la surface de la terre. La rétro diffusion par la cible se fait aussi à travers les mêmes directions (directe et après réflexion). Les différents cas sont montrés dans la figure 1.4

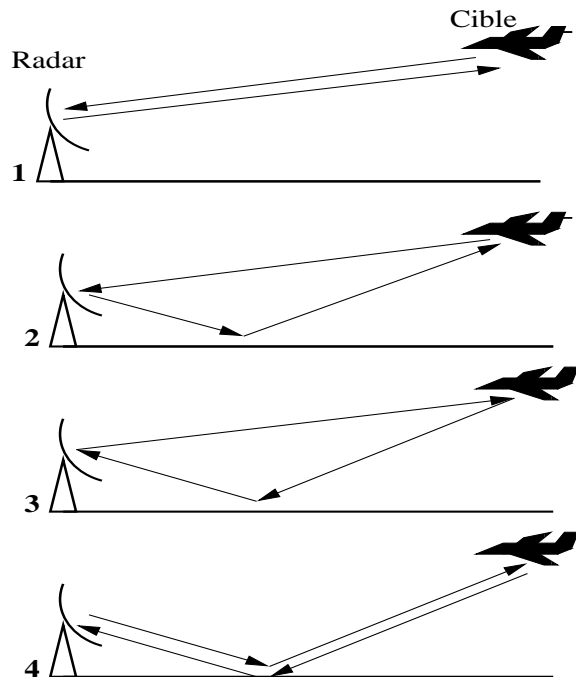


Fig. 1.4 — Différents trajets possibles de propagation des signaux radar.

La figure 1.5 montre que l'énergie rayonnée atteint la cible via deux trajets séparés. L'écho rétrodiffusé par la cible arrive au radar à travers les mêmes trajets. L'amplitude

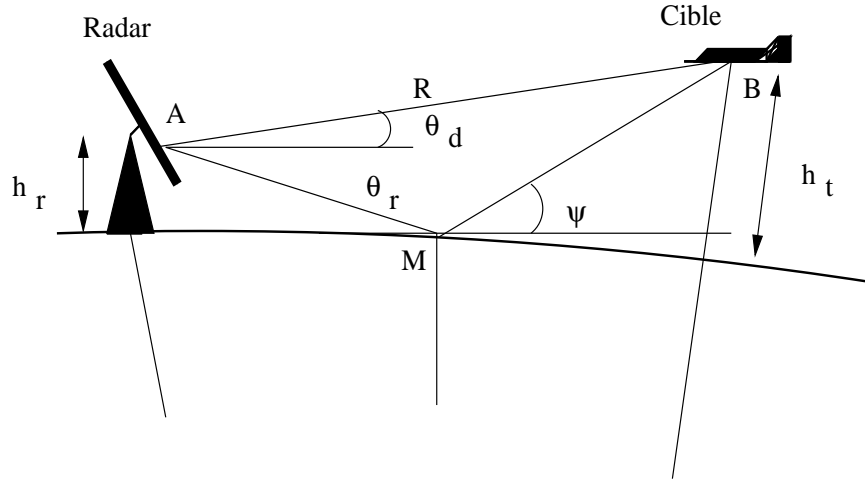


Fig. 1.5 — Modèle de réflexion multi-trajets.

du signal écho résultant dépendra des amplitudes et de la différence de phase entre le trajet direct et celui réfléchi. Le coefficient de réflexion de la surface peut être considéré, pour l'instant, comme une quantité complexe :

$$\Gamma = \rho e^{-j\phi} \quad (1.15)$$

où ρ est le module du coefficient de réflexion et ϕ est le déphasage introduit à la réflexion.

Dans ce qui suit, on suppose $\Gamma = -1$, l'onde réfléchie ne subit pas de changement en amplitude, mais sa phase est décalée de 180° . La différence entre les trajets AMB et AB pour $R \gg h_t$ est donné par la formule suivante :

$$D = 2h_r \sin \theta_d \quad (1.16)$$

pour θ_d petit, $\sin \theta_d$ est remplacé par $\frac{(h_t - h_r)}{R}$:

$$D = 2h_r \frac{(h_t - h_r)}{R} \quad (1.17)$$

si $h_t \gg h_r$, on a :

$$D \simeq \frac{2h_t h_r}{R} \quad (1.18)$$

Au niveau de la cible, la différence de phase totale entre les signaux direct et réfléchi est :

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2h_t h_r}{R} + \pi \quad (1.19)$$

On définit le facteur complexe F qui représente le rapport du champ résultant au niveau de la cible en présence de la surface de réflexion sur le champs direct. Par définition

$$F = 1 + \rho \exp(-j\Phi) \quad (1.20)$$

Le rapport de puissance est donné par $|F|^2$. Vu que le même phénomène est observé après rétrodiffusion d'une partie de la puissance par la cible vers le radar, le rapport des échos reçus avec et sans la présence d'une surface de réflexion est

$$|F|^4 = (1 + \rho^2 + 2\rho \cos \Phi)^2 \quad (1.21)$$

Quand l'angle de dépression est petite, $\rho = 1$ et (1.21) se réduit à

$$|F|^4 = 2(1 + \cos \Phi)^2 \quad (1.22)$$

En remplaçant (1.19) dans l'équation (1.22), on obtient

$$|F|^4 = 16 \sin^4 \frac{2\pi h_t h_r}{\lambda R} \quad (1.23)$$

L'équation radar décrivant la puissance de l'écho reçu doit être modifiée par le facteur de propagation F^4 .

Vu que le terme *sinus* dans (1.23) varie entre 0 et 1, le facteur F^4 varie entre 0 et 16 et en tenant compte de la relation de puissance 4 entre la distance et le signal écho, la portée radar varie entre 0 et 2 fois la portée du même radar dans l'espace libre. Le champ atteint son maximum quand son argument dans le terme en sinus est égal à $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{4h_t h_r}{\lambda R} = 2n + 1 \quad \text{maxima} \quad (1.24)$$

$$\frac{4h_t h_r}{\lambda R} = n \quad \text{minima} \quad (1.25)$$

La présence d'une surface plate conductrice et parfaite fait que le diagramme de directivité d'élévation a une structure lobée comme montrée dans la figure 1.6. Ainsi si la cible est dans le lobe elle est détectée à des distances doubles par rapport au cas où elle est dans l'espace libre, mais si elle est entre les lobes, théoriquement, elle ne sera pas détectée.

Par ailleurs, la rotondité de la terre ne peut être négligée quand on s'intéresse aux performances d'un radar aux angles d'élévation bas près de l'horizon. Dans ce cas le "lobbing" n'est pas très critique comme pour le cas approximatif de terre plate. Le rayonnement est plus divergent, ainsi les minima ne sont pas très profonds et les maxima ne sont pas grands. Pour pallier, au problème du "lobbing" et vu que les positions des lobes sont fonctions de la géométrie et de la fréquence transmise, un radar utilisant une agilité de fréquence peut être utilisé. Ainsi, les lobes sont déplacés par changement de fréquence.

Avant de passer au problème de la rotondité de la terre, on attire l'attention sur un autre phénomène qui se manifeste durant la propagation des ondes dans l'atmosphère. Ce phénomène est la réfraction due au changement de l'indice de réfraction de l'atmosphère. Les rayonnements ne sont pas rectilignes mais courbés. L'horizon radar se trouve ainsi un peu plus éloigné que l'horizon optique. Pour tenir compte de ce phénomène, le rayon de la terre doit être modifié en un rayon fictif

$$a_e = ka \quad (1.26)$$

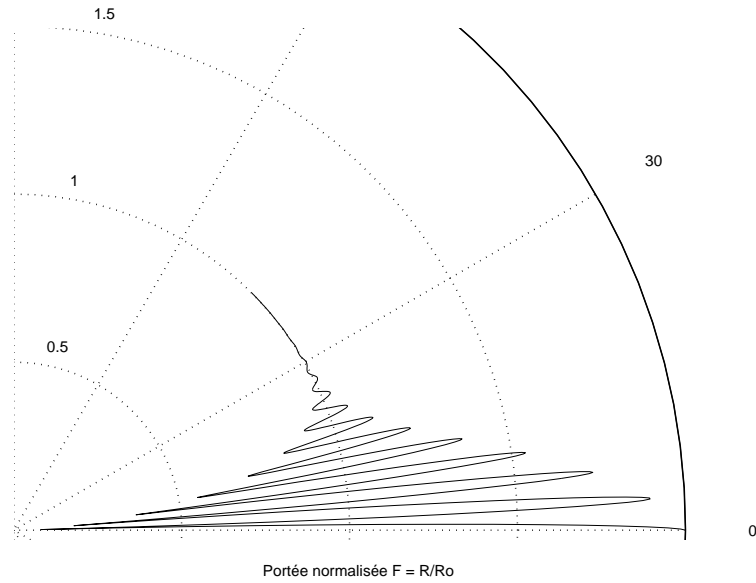


Fig. 1.6 — Effet des trajets multiples sur la puissance reçue par le radar.

où a est le rayon de la terre réel et $k = \frac{1}{1+a\left(\frac{dn}{dh}\right)}$, " $\frac{dn}{dh}$ " exprimant la variation de l'indice de réfraction n en fonction de la hauteur de propagation dans l'atmosphère. Pour des latitudes moyennes, les mesures expérimentales donnent $\frac{dn}{dh} \approx -\frac{1}{4a}$; ce qui donne $k = \frac{4}{3}$. Cette valeur de k a donné naissance à un modèle dit modèle : "4/3-earth model". Notons que ceci est valable pour les radars et cibles en basses et moyennes altitudes.

Pour un modèle de réflexion d'une surface plate, la différence de phase peut être déterminée par de simples formules. L'hypothèse de terre plate peut être faite sans commettre d'erreurs importantes si la hauteur de l'antenne est basse et l'angle d'élévation est "suffisamment" positif. Quand cette hypothèse n'est plus valide, la différence de trajet doit être calculée en utilisant la géométrie de réflexion tenant compte de la sphéricité de la terre. Pour tenir compte de l'effet de la rotondité de la surface de la terre, nous développons la géométrie associée à la réflexion voir la figure (1.7).

Le but est de trouver le point de réflexion M par le calcul de r_1 , on suppose connaître les grandeurs suivantes R, h_t, h_r , et a_e (le rayon de la terre effectif).

Si on prend comme référence le centre de la terre selon l'axe passant par la plateforme radar, on a la relation

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^{\theta_1} a_e d\delta \\ &= a_e \theta_1 \approx a_e \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1.27)$$

où $d\delta$ est un déphasage élémentaire.

En appliquant la loi des cosinus à l'angle OAB, on peut déterminer l'angle d'arrivée

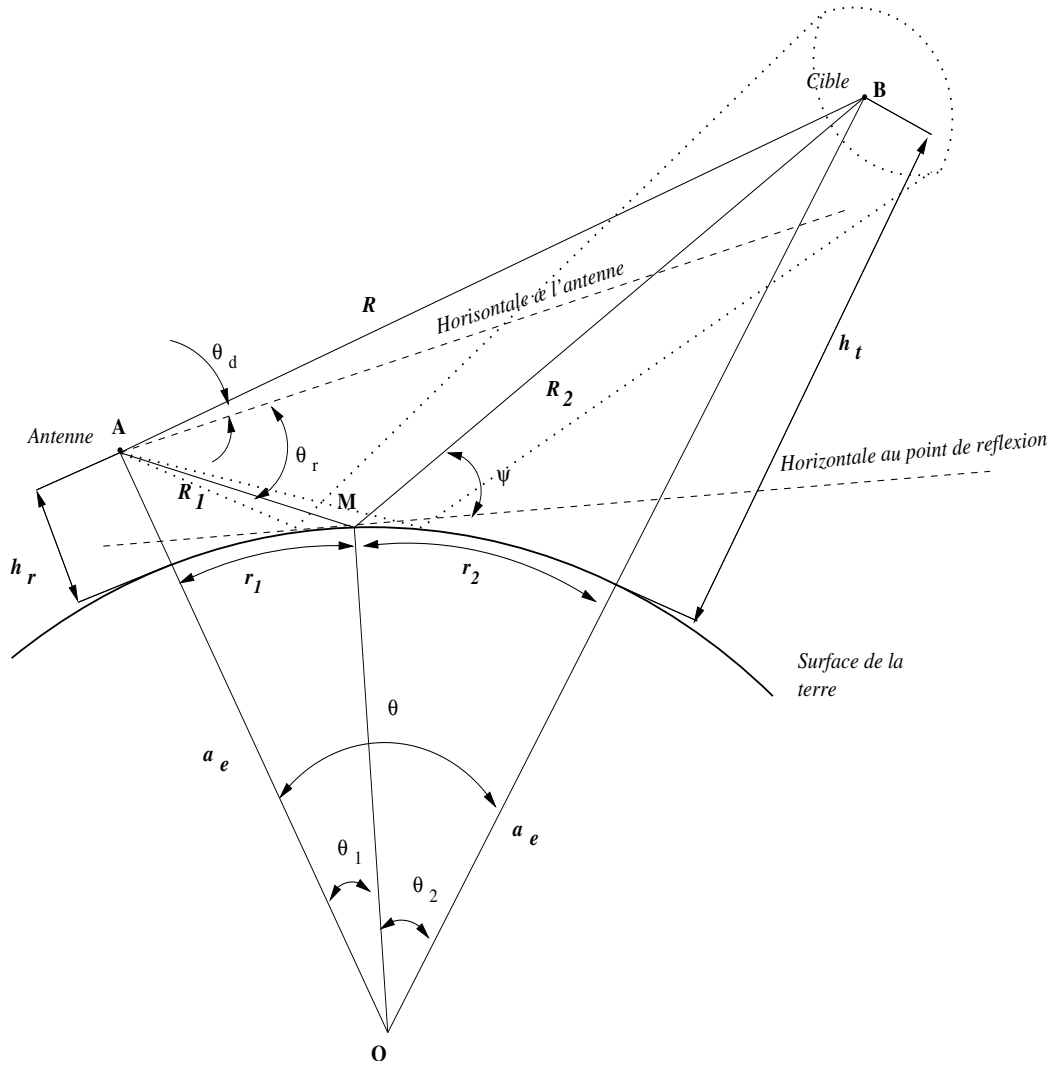


Fig. 1.7 — Géométrie de réflexion tenant compte de la sphéricité de la terre.

θ_d :

$$\begin{aligned} (a_e + h_t)^2 &= R^2 + (a_e + h_r)^2 - 2R(a_e + h_r) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_d\right) \\ &= R^2 + (a_e + h_r)^2 + 2R(a_e + h_r) \sin(\theta_d) \end{aligned} \quad (1.28)$$

de la même manière, en appliquant la loi des cosinus aux triangles OMA et OMB, on obtient respectivement

$$(a_e + h_r)^2 = R_1^2 + a_e^2 - 2R_1 a_e \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \quad (1.29)$$

donc

$$2a_e h_r + h_r^2 = R_1^2 + 2a_e R_1 \sin(\psi) \quad (1.30)$$

et

$$2a_e h_t + h_t^2 = R_2^2 + 2a_e R_2 \sin(\psi) \quad (1.31)$$

L'élimination de $\sin(\psi)$ entre ces équations, nous donne l'équation suivante

$$R_2(2a_e h_r + h_r^2 - R_1^2) = R_1(2a_e h_t + h_t^2 - R_2^2) \quad (1.32)$$

Pour avoir les distances R_1 et R_2 , on a besoin d'une autre équation qu'on obtient par application de la loi des cosinus au triangle AMB

$$\begin{aligned} R^2 &= R_2^2 + R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos(\pi - 2\psi) \\ &= R_2^2 + R_1^2 + 2R_1 R_2 \cos(2\psi) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Par élimination de ψ en utilisant les équations précédentes, on obtient l'équation

$$a_e ((R_2 + R_1)^2 - R^2) = (2a_e h_r + h_r^2 - R_1^2) (2a_e h_t + h_t^2 - R_2^2) \quad (1.34)$$

qu'on utilisera avec l'équation (1.32) pour avoir R_2 et R_1 .

D'autre part, le triangle AOM nous donne

$$R_1^2 = (a_e + h_r)^2 + a_e^2 - 2(a_e + h_r) a_e \cos \theta_1 \quad (1.35)$$

En obtenant θ_1 , on peut évaluer r_1 par l'équation (1.27), le point de réflexion est ainsi déterminé. On peut aussi évaluer l'angle d'élévation-image θ_r par application de la loi des cosinus au triangle AMB

$$R_2^2 = R^2 + R_1^2 - 2R R_1 \cos(\theta_d - \theta_r) \quad (1.36)$$

1.4 Modèle de réflexion du terrain

Le champs rayonné par une surface rugueuse est constitué de deux composantes : la composante de réflexion et la composante de diffusion (voir figure 1.8). Une surface rugueuse est souvent définie selon le critère de réflexion de Rayleigh. Ce critère détermine si la surface réfléchissante est plate ou rugueuse [3]. Les irrégularités de la surface (caractérisées par l'écart type de la hauteur Δh), la longueur d'onde, l'angle de dépression de l'onde, sa polarisation et la constante diélectrique de la terre influent sur les propriétés de la surface.

Une surface est considérée plate (voir figure 1.9) si

$$\Delta h < \frac{\lambda}{8 \sin \Psi} \quad (1.37)$$

où Δh : changement de la hauteur de la surface, Ψ : angle de dépression (grazing angle) et λ : la longueur d'onde. La surface est considérée rugueuse si

$$\Delta h > \frac{\lambda}{4 \sin \Psi} \quad (1.38)$$

Alors, à la limite de transition d'une surface plate en une surface rugueuse, on peut supposer

$$\Psi = \arcsin \frac{\lambda}{6\Delta h} \quad (1.39)$$

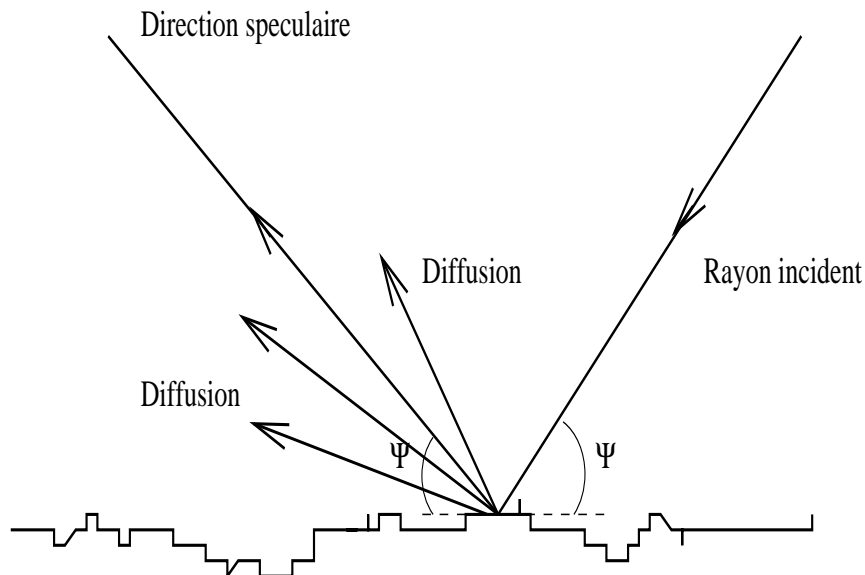


Fig. 1.8 — Réflexion spéculaire et diffusion.

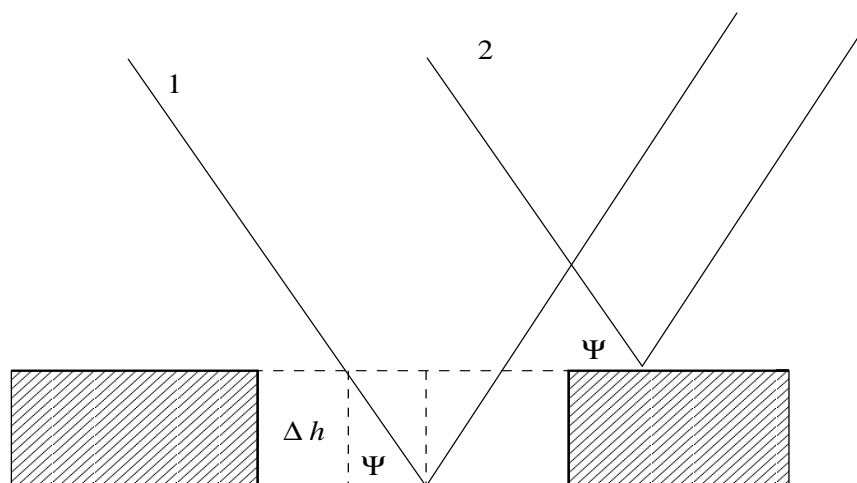


Fig. 1.9 — Réflexion par une surface rugueuse.

La réflexion à partir d'une surface plate contribuant à l'onde réfléchie est la 1^{ère} région de Fresnel. Cette région est celle qui entoure le point de réflexion.

La réflexion spéculaire est similaire à la réflexion par une surface plate dans le sens où elle est directionnelle et suit les lois classiques de l'optique. C'est le résultat d'une radiation cohérente à partir des points dans la première ellipse de Fresnel (voir figure 1.10). Ses ondes transmises sont approximativement à phase égale au niveau du récepteur.

Les réflexions de diffusion par contre ont une faible directivité et prennent place dans une surface plus grande que les premières zones de Fresnel. Ainsi, les réflexions individuelles s'ajoutent d'une façon incohérente pour former le champ résultant. La

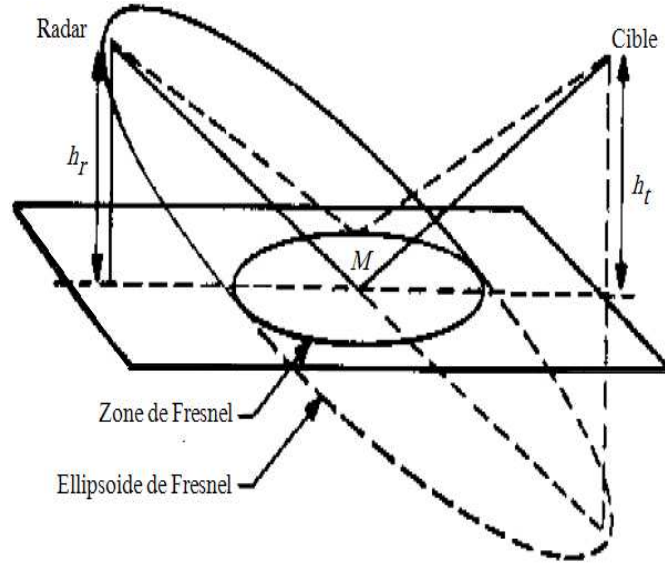


Fig. 1.10 — Zone de Fresnel, géométrie pour une terre plate.

distribution de l'amplitude du champ résultant peut être considérée comme une distribution de Rayleigh.

Coefficient de réflexion spéculaire

Ce coefficient est donné par

$$\rho_{sp} = \rho_0 \rho_s \quad (1.40)$$

où ρ_0 est le coefficient de réflexion d'une surface plate et ρ_s est le coefficient de réflexion spéculaire, avec

$$\rho_0 = \frac{Y^2 \sin \Psi - \sqrt{Y^2 - \cos^2 \Psi}}{Y^2 \sin \Psi + \sqrt{Y^2 - \cos^2 \Psi}}, \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{\frac{\varepsilon_{rc}}{\mu_{rc}}} \quad (1.41)$$

où ε_{rc} est la constante complexe diélectrique relative de la surface et μ_{rc} la perméabilité relative.

Le coefficient de réflexion spéculaire est un facteur par lequel le coefficient d'une surface plate est multiplié pour prendre en compte les irrégularités de la surface. Il est supposé ne dépendant que de la géométrie et des paramètres physiques du radar et non de la composition chimique du terrain.

La moyenne quadratique du coefficient de réflexion pour un modèle de surface Gaussien est donné par

$$\bar{\rho}_s^2 = e^{-(4\pi g)^2} \quad (1.42)$$

où $g = \frac{\sigma_h \sin \Psi}{\lambda}$ avec σ_h est l'écart type de la hauteur de la surface.

Il existe d'autres modèles utilisés pour déterminer le coefficient de rayonnement spéculaire qui conduit à des résultats similaires. Le modèle Gaussien est justifié par des résultats expérimentaux [4].

1.5 Modélisation de la manœuvre des cibles

La surface équivalente radar est une mesure de la capacité de la cible à rétrodiffuser les signaux radar dans la direction de visée radar. C'est aussi une mesure du rapport de la puissance rétrodiffusée par stéradian (unité d'angle solide) dans la direction du radar sur la densité de puissance interceptée par la cible.

La définition de la SER sous entend aussi que la totalité de l'énergie rayonnée n'atteigne pas la cible. Le facteur σ (SER cible) est généralement exprimé par le produit de trois facteurs

$$\sigma = \text{surface équivalente projetée} \times \text{réflectivité} \times \text{directivité} \quad (1.43)$$

La réflectivité exprime le pourcentage de la puissance interceptée et rétrodiffusée par la cible. La directivité est le rapport de la puissance re-rayonnée vers la direction radar sur la puissance qui pourrait être re-rayonnée si le rayonnement était uniforme dans toutes les directions.

La SER dynamique fluctue en amplitude et/ou en phase. La fluctuation en phase est dite "glint". La fluctuation en amplitude est dite "scintillation". Le "glint" fait que les fronts d'ondes rétrodiffusés par la cible, en champs éloignés, soient non plans. Pour la majorité des applications radar, les "glints" introduisent des erreurs linéaires dans les mesures radars et ainsi ils ne sont pas d'importance capitale.

La scintillation SER peut varier lentement ou rapidement selon la taille de l'objet, sa forme, sa dynamique et son mouvement relatif par rapport au radar. Ainsi, vu cette large variété de scintillation, la SER est un processus aléatoire.

Modèles statistiques de la SER

Swerling I et II

Dans le Swerling I, les échantillons de la SER mesurés par le radar sont corrélés sur toute la période de l'analyse, mais non corrélés d'une analyse à une autre (fluctuation lente). Dans ce cas, le radar traite l'amplitude du train d'impulsion entier comme une seule variable aléatoire dont la *pdf* est

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma_{moy}} \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_{moy}}\right) \quad \sigma \geq 0 \quad (1.44)$$

où σ_{moy} dénote la SER moyenne à travers toute la fluctuation cible. La phase initiale de chaque impulsion a une distribution uniforme dans $[0, 2\pi]$.

La fluctuation de la cible Swerling II est plus rapide que la Swerling I, les mesures d'une impulsion à une autre sont non corrélées. L'amplitude de chaque impulsion est

une variable aléatoire statistiquement indépendante. La distribution est aussi définie par l'équation 1.44.

Swerling III et IV

Les Swerling III et IV ont la même *pdf*

$$f(\sigma) = \frac{4\sigma}{\sigma_{av}^2} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\sigma_{av}}\right) \quad (1.45)$$

Les fluctuations en Swerling III sont similaires à celles en Swerling I dans le sens où chaque impulsion dans le train d'impulsion a la même amplitude, l'amplitude du train d'impulsion est une variable aléatoire avec un point dominant, correspondant à point de réflexion prédominant sur la cible, en plus d'une fonction de densité de probabilité de Rayleigh. Swerling IV est similaire à Swerling II mais avec un point dominant en plus. Les fluctuations III et IV sont applicables aux cibles représentées par un point de rétro diffusion dominant et plusieurs autres petits points réflecteurs.

1.6 État de l'Art

La localisation et la poursuite de cibles dans un système radar impliquent l'estimation des déviations Doppler, les directions d'arrivée (azimut/élévation) et temps/différence de temps d'arrivée. Quand la cible est à proximité d'une surface réfléchissante, le signal écho reçu arrive au site radar à travers deux ou plusieurs trajets. Même s'il n'existe qu'une seule cible dans l'environnement. Ce phénomène est dit propagation multi-trajets. Ce sont D. K. Barton [26] et W. D. White [28] qui ont établi un modèle détaillé de surface réfléchissante dans les différentes circonstances.

Dans un scénario multi-trajets, le radar observe deux cibles, la vraie cible et son image créée par l'interférence multi-trajets avec une position angulaire qui apparaît au dessous de la surface de la terre, mais avec une différence de résolution souvent inférieure à la résolution du radar. Par conséquent, les cellules distances du radar échouent dans la réjection de l'interférence multi-trajets. En plus, le signal direct et rétrodiffusé se superposent de façon constructive et destructive à cause du déphasage entre les deux échos. Cette différence de phase est principalement causée par le coefficient de réflexion de la surface réfléchissante. Ce coefficient dépend de la longueur d'onde utilisée et des paramètres physiques de la matière de la surface de la terre. Un autre problème qui survient dans la poursuite radar en basse altitude est la séparation angulaire très réduite entre les échos incidents, cette différence angulaire est une petite fraction de la largeur de bande du faisceau [26]. L'utilisation des techniques de formation de voies pour séparer spatialement les signaux direct et réfléchi est impossible. Ceci nous conduit à l'utilisation des méthodes de haute résolution pour estimer les paramètres d'intérêt.

Plusieurs techniques ont été proposées pour résoudre ce problème de poursuite en basse altitude. On distingue deux grandes familles d'approches : La première englobe toutes les techniques améliorées des systèmes mono pulse qui sont économiques puisqu'elles n'utilisent pas de systèmes d'antennes complexes. La seconde famille englobe toutes les techniques avancées du traitement d'antennes et du signal. Dans ce cas, on

a une complexité accrue vu qu'un réseau de capteurs est utilisé et chaque élément doit être équipé d'un récepteur.

Dans la première famille, les techniques les plus importantes sont la technique "double-null" [28] où le système monopulse conventionnel est modifié pour incorporer un deuxième nul indépendant que l'on peut modifier, le rôle de ce nul est l'élimination du signal réfléchi spéculaire. La technique dite "complex indicated angle" [29]-[30], est une technique monopulse basée sur l'utilisation d'un rapport complexe monopulse variable dans le temps de façon que la phase relative varie alors que l'amplitude de l'écho reste constante. Barton [26] a indiqué que ces méthodes sont sensibles aux effets de réflexion de la surface rugueuse et à la diffusion du rayonnement multi-trajets. Ainsi, ces techniques ne peuvent suivre des élévations inférieures au quart de la largeur du faisceau. Une autre technique dite "two-beam" est proposée par Nakatsura [31] qui peut suivre des élévations très réduites. Deux faisceaux sont utilisés et la hauteur de la cible est calculée en se basant sur la différence de phase entre les sorties des deux faisceaux. Néanmoins, cette technique souffre d'une sensibilité accrue à la phase.

La deuxième famille de méthodes utilisées pour la poursuite en basse altitude englobe toutes les méthodes du traitement d'antenne. Elles exploitent les nouvelles architectures et techniques développées dans les réseaux d'antennes phasés telles que le faisceau principal adaptatif, l'annulation des lobes secondaires, le contrôle de la forme du faisceau d'antenne et la poursuite précise des multi-trajets [32]. Des algorithmes de super résolution ont été proposés. Ils sont principalement divisés en deux catégories, les méthodes d'estimation de paramètres et les méthodes d'estimation du nombre d'ondes. Dans cette dernière catégorie, l'estimation est basée sur la décomposition de la matrice de covariance dont les éléments estiment la corrélation des signaux entre les éléments d'antennes. Dans cette sous famille, on cite : l'algorithme classique MUSIC [35], l'algorithme "modified forward-backward linear prediction" [7], l'algorithme du vecteur propre principal de Gram-Schmidt [8] et l'algorithme ESPRIT [36]. Cependant, tous ces algorithmes échouent en présence de signaux cohérents. La cohérence des signaux provoque le mauvais conditionnement de la matrice de covariance. Même en utilisant des algorithmes qui améliorent les performances de ces techniques comme le lissage spatial [37] ou le moyennage forward-backward [38], les performances obtenues restent dégradées et un biais est introduit dans les estimés des paramètres. Un autre désavantage dans le traitement de vecteurs propres est qu'il nécessite un nombre de vecteur de données au moins égal au nombre des éléments de l'antenne pour obtenir une matrice de covariance non singulière ³.

Dans [1], une technique qui traite le problème de la poursuite en basse altitude est proposée. Elle est basée sur une décomposition propre récursive avec l'utilisation d'une agilité de fréquence pour décorrélérer les signaux incidents. La technique consiste en premier, à l'actualisation de la matrice de covariance puis, à la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance et enfin à l'actualisation des estimés des angles par une recherche des pics ou des zéros donnés par les coefficients polynômiaux de normes minimales.

La première catégorie de techniques englobe toutes les approches paramétriques. Le

³Ceci est en relation avec l'identifiabilité des paramètres à estimer

signal reçu peut être paramétré via l'angle d'élévation. On a alors trois possibilités de niveaux de connaissance que l'on peut exploiter. La première possibilité est de supposer le problème comme étant un problème de localisation de deux sources inconnues. La deuxième possibilité est de considérer que la cible et son image sont liées via une relation géométrique. Si on a la distance de la cible, on peut estimer sa hauteur au lieu des deux angles d'arrivée. Le troisième niveau est la connaissance *a priori* du coefficient de réflexion en fonction de l'angle de dépression. Ainsi, on réduit le nombre de paramètres à estimer.

La catégorie de techniques la plus intéressante est celle de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour une estimation précise des paramètres avec un nombre raisonnable d'antennes. Les paramètres estimés tels que les angles d'arrivée, les retards temporels et les fréquences Doppler sont ceux qui maximisent la fonction de vraisemblance. L'avantage de ces techniques est qu'elles sont moins sensibles à la cohérence du signal comparées aux techniques de décomposition en sous espaces. Plusieurs travaux ont été publiés pour l'estimation des directions d'arrivée utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance. Les principaux articles sont ceux de Kaseinski et McGhee [43], Howard [30], Haykin et Reilly [54]-[55]. Nickel [53] a développé une méthode de recherche à gradient pour maximiser la fonction du vraisemblance pour une application radar spécifique. Toutes ces techniques d'estimation du maximum de vraisemblance [43]-[53] utilisent un modèle de DDA avec une connaissance *a priori* minimale.

Lo et Litva [52] ont montré qu'en introduisant une information *a priori* dans le processus du maximum de vraisemblance, les performances s'améliorent considérablement. Ces informations sont issues d'un modèle de signal multi-trajets hautement déterministe. Le modèle utilise une information géométrique et un ensemble de paramètres physiques tels que le gradient de réfractivité, le coefficient de réflexion, les coefficients de diffusion et spéculaire et le facteur de divergence. En comparant le modèle classique d'estimation de DDA (avec deux angles inconnus, deux amplitudes de signaux inconnues et deux phases de signaux inconnues) le nouveau modèle utilisant les connaissances *a priori* le nombre de paramètres à estimer est réduit à quatre paramètres inconnus (l'amplitude, la phase et les DDA). Les autres paramètres tels que la distance, la hauteur de la cible et l'angle de dépression sont exprimés en fonction des paramètres inconnus.

Dans le même contexte, un modèle basé sur la considération détaillée d'un modèle de réflexion multi-trajets et une géométrie cible-radar, est développé pour la poursuite en basse altitude par Turner et Bossé [48]-[50]. La connaissance *a priori* de la distance est utilisée ainsi que la hauteur du radar pour obtenir avec précision la hauteur de la cible comparée au modèle classique. Dans [50], un estimateur du maximum de vraisemblance basé sur une modélisation physique déterministe de réflexion multi-trajets est utilisé pour estimer la hauteur des cibles fluctuantes et non fluctuantes à basse altitude. Les informations, requises par le modèle, sont collectées par le radar dans le mode acquisition et les informations géométriques d'environnement sont introduites.

Dans [51], le facteur de diffusion est introduit dans le modèle pour tenir compte des composantes incohérentes du signal multi-trajets.

Dans les méthodes citées pour le traitement du problème, la matrice de covariance

du bruit est supposée connue à un facteur multiplicatif près. Dans plusieurs systèmes, le bruit dominant est le bruit thermique qui est approximativement de niveau égal dans tous les canaux. Dans ce cas, la covariance du bruit est une matrice identité multipliée par un facteur (variance du bruit) et cette supposition se trouve souvent justifiée. Dans notre travail, on s'intéresse au cas de bruit externe dominant. Ce type de bruit introduit une corrélation entre les différents capteurs. On retrouve ce type de bruit dans plusieurs systèmes RF et dans la majorité des systèmes sonar. Quand la fonction de corrélation est connue, il est toujours possible de modifier les algorithmes pour tenir compte de cette fonction. Dans la pratique, le bruit d'environnement est inconnu et change lentement dans le temps. La question qui se pose est comment résoudre le problème d'estimation sans la caractérisation statistique complète du bruit. Ignorer la corrélation du bruit introduit un biais significatif dans les estimés et cause des erreurs inacceptables. D'autre part, la majorité des méthodes supposent que le traitement d'annulation du clutter est parfait, or il est connu que cette interférence est plus accentuée que le signal écho utile et l'annulation totale du clutter par les différentes opérations de traitement est utopique. Les résidus du traitement du clutter s'ajoutent aux bruits externes et au bruit thermique interne. La majorité des méthodes citées ont traité le problème d'estimation des directions d'arrivée, en supposant la cible stable et non fluctuante. Dans ce cas, la surface équivalente radar se réduit à un facteur constant multiplicatif dans toute la durée de l'analyse. Dans notre travail, nous développons un modèle des données qui tient compte de la fluctuation de la cible selon un modèle Swerling I que l'on peut généraliser facilement aux autres modes de fluctuations. Notre travail considère aussi l'estimation conjointe des paramètres. Nous avons considéré l'estimation des directions d'arrivée avec les retards temporels et les directions d'arrivée avec les fréquences Doppler dans le but d'avoir un autre degré de liberté pour prendre une décision sur la vraie direction d'arrivée de la cible. En résumé, nous développons des modèles de données et des algorithmes d'estimation de plusieurs paramètres qui tiennent compte de la fluctuation de la cible avec un bruit blanc et/ou non blanc.

CHAPITRE

2

Estimation des Paramètres en Mode Radar Passif

Dans ce chapitre, nous étudions les performances des méthodes classiques d'estimation des angles d'arrivée dans un scénario de radar en écoute. Dans la section 1, les modèles des signaux utiles et l'environnement des interférences sont définis. Dans la section 2 et 3, nous étudions les méthodes de décomposition en sous espaces et les techniques du maximum de vraisemblance. Dans la section 4, nous développons la borne inférieure de Cramer-Rao et nous présentons quelques résultats de simulation.

2.1 Modèles des signaux

On considère un système radar qui émit M impulsions cohérentes et échantillonne les signaux échos reçus à la sortie des éléments d'antenne. Le récepteur est un réseau linéaire et uniforme de N éléments montés verticalement de façon que les DDA soient les élévations. La distance inter-capteurs est Δ . L'impulsion transmise est souvent une impulsion modulée en fréquence d'une façon linéaire ayant une durée T_p et une largeur de bande W_p . Le radar collecte L échantillons temporels à la sortie de chaque élément antenne à chaque PRI, ou chaque intervalle temporel correspond à une cellule distance radar. Le récepteur collecte ainsi un cube de données 3D qui représente les échos reçus durant un intervalle de traitement cohérent de M impulsions. Ce cube de donnée sera utilisé dans les chapitres III, IV et V.

Une cible mobile est typiquement modélisée par un vecteur directionnel spatio-temporel ayant un gain $\beta(t)$ dû à la SER et à l'atténuation de propagation. En général, elle occupe une cellule distance :

$$X_{cible}(t) = \mathbf{v}(\theta, f)\beta(t)\delta(t - \tau) \quad (2.1)$$

où $\delta(t)$ est une fonction impulsion discrète, $\mathbf{v}(\theta, f)$ est le vecteur variété de l'antenne dirigé vers la paire (θ, f) , est défini par

$$\mathbf{v}(\theta, \mathbf{f}) = b(f) \otimes \mathbf{a}(\theta) \quad (2.2)$$

où $\mathbf{a}(\theta)$ est défini par l'équation (1.13) et $\mathbf{b}(f)$ est donnée par

$$\mathbf{b}(f) = [1 \quad e^{j2\pi f T_R} \quad \dots \quad e^{j2\pi f (M-1)T_R}] \quad (2.3)$$

où T_R est la période PRI. Le temps que l'impulsion met pour retourner au radar est proportionnel à la distance radar-cible R

$$\tau = \frac{2R}{c} \quad (2.4)$$

La cible est caractérisée par une fréquence spatial γ , qui est relative à la direction d'arrivée de l'écho venant de la cible

$$\gamma = \frac{\Delta}{\lambda} \sin \theta \quad (2.5)$$

et la fréquence Doppler est :

$$f = \frac{2v_t}{\lambda} \quad (2.6)$$

où v_t est la vitesse radiale de la cible par rapport à la plate forme radar. La figure 2.1 nous donne un exemple du spectre bidimensionnel du signal cible.

La forme la plus fondamentale des interférences est le bruit thermique. Celui-ci, généré par les composants électroniques, est indépendant d'un récepteur à l'autre. En supposant un récepteur séparé dans chaque élément, le bruit thermique dans le réseau est spatialement et temporellement non corrélé (blanc). En général, les puissances des

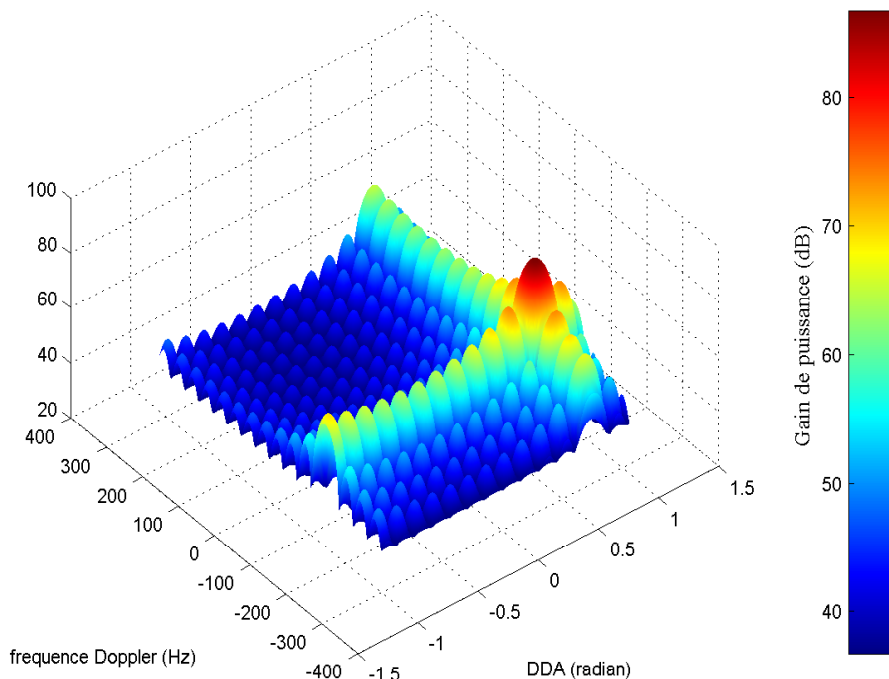


Fig. 2.1 — Spectre de puissance 2D d'un signal écho d'une cible située à une élévation de 45 degrés.

signaux échos et interférences sont exprimées par rapport à la puissance du bruit thermique. Une autre forme d'interférence (intentionnelle) est le brouillage de barrage qui provient d'une source localisée, temporellement non corrélée entre échantillons et entre PRI. Elle est modélisée comme un produit de Kronecker d'un vecteur bruit $N \times 1$ blanc et Gaussien $n_j(t)$ avec le vecteur directionnel spatial $\mathbf{a}(\theta)$

$$X_{jam}(t) = n_j(t) \otimes \mathbf{a}(\theta) \quad (2.7)$$

où la puissance de chaque composante de $n_j(t)$ est σ_j^2 .

En se basant sur ce modèle, le signal de brouillage n'a qu'une corrélation spatiale. Comme montrée dans la figure 2.2, l'énergie du signal de brouillage apparaît spatialement localisée et étalée sur l'axe Doppler.

Une autre source de bruit est celle des échos qui surviennent de la surface de la terre, de la mer, de la pluie, des bâtiments, etc. Ceci est appelé fouillis ou clutter. En absence de clutter, on peut supposé que le bruit est spatialement et temporellement blanc et Gaussien vu que tout bruit traversant un système linéaire a une distribution Gaussienne. C'est un modèle raisonnable pour le bruit interne du récepteur, par contre, ce n'est pas le cas pour le clutter vu qu'il est généralement corrélé en espace et en temps. Le clutter est modélisé par des distributions plus spécifiques (autre que la Gaussienne) telles que la distribution Weibbul, la log-normal et la distribution K. Si la plate forme radar est immobile, le signal clutter est centré autour de la fréquence Doppler zéro et peut être filtré par un filtre coupe-bande. Si la plate forme est en mouvement (radar

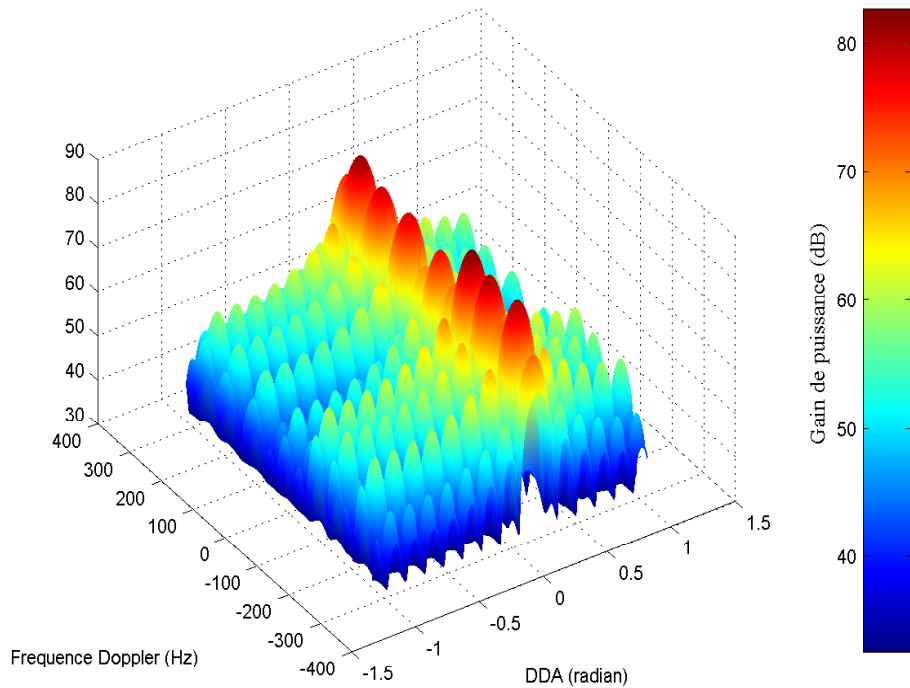


Fig. 2.2 — Spectre de puissance 2D d'un signal écho d'un brouilleur situé à une élévation de 10 degrés.

embarqué) la situation est plus difficile, la fréquence Doppler étant différente d'une direction à une autre. Une méthode pour traiter le problème est l'application d'un filtre spatio-temporel qui supprime le clutter. Les techniques pour supprimer d'une façon adaptative le clutter dans un système radar embarqué sont appelées techniques STAP (Space Time Adaptive Processing).

Les réflexions du signal dues au terrain, appelés le fouillis mono statique, accompagnent l'écho issu de la cible. Ces réflexions peuvent masquer le signal utile. Les caractéristiques du terrain varient d'un endroit à un autre et la structure de la corrélation du clutter résultant ne peut donc être facilement modélisée. Pour un émetteur omnidirectionnel et un terrain à réflexion uniforme, le signal clutter peut être modélisé par

$$X_c(t) = \alpha(t) \int_{\theta} \mathbf{a}\left(\frac{\Delta}{\lambda} \sin(\theta), \frac{2v_a}{\lambda} \sin(\theta + \theta_a)\right) d\theta \quad (2.8)$$

où v_a est la vitesse de la plate forme radar ($v_a = 0$ pour un radar fixe), θ_a est l'angle de désalignement entre les axes du réseau d'antenne et le vecteur vitesse de la plate forme.

Le facteur amplitude $\alpha(t)$ est considéré comme une variable aléatoire dont l'écart type est inversement proportionnel à l'indice distance. Ainsi, le clutter est non corrélé d'un échantillon à un autre, par contre, il est corrélé en espace et en Doppler (si la plate forme radar est en mouvement). La figure 2.3 nous donne la représentation bidimensionnelle du spectre d'un signal clutter dans un espace spatio-Doppler.

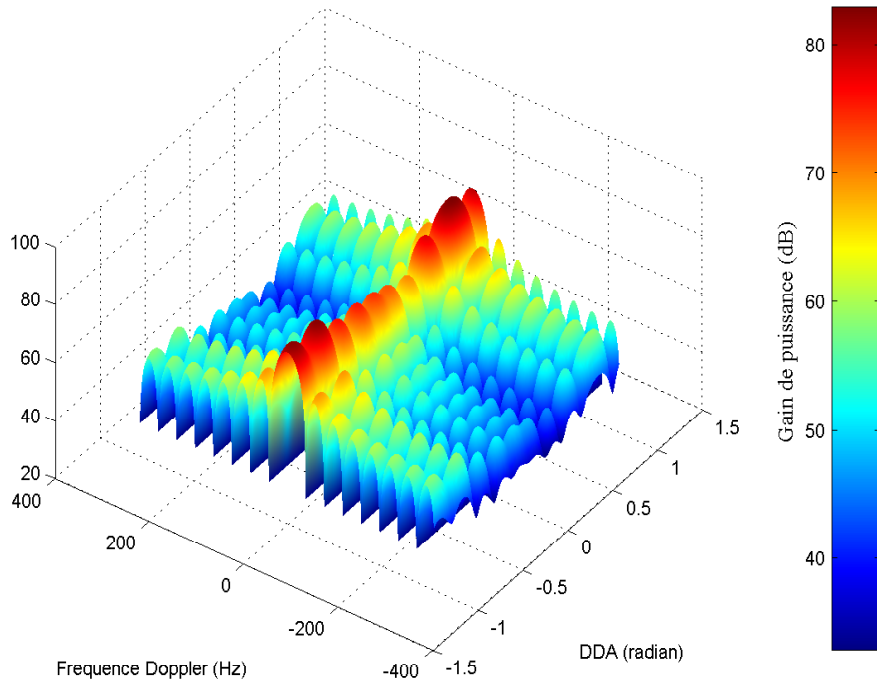


Fig. 2.3 — Spectre de puissance 2D d'un signal clutter.

2.2 Méthodes de décomposition en sous-espaces

2.2.1 Modèle des données en radar passif

Nous nous intéressons tout d'abord à l'estimation des directions d'arrivée des échos dans un contexte de radar passif. Dans ce cas, on ne dispose pas de référence distance, les données disponibles sont en 2D. Rappelons l'expression des données observées à la sortie des antennes

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.9)$$

Dans une première partie du travail, les paramètres d'intérêt sont de nature spatiale. Elles requièrent donc comme information la matrice d'intercovariance à travers les éléments de l'antenne

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \quad (2.10)$$

D'après (2.10) et (2.9) on a :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.11)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ est la matrice de covariance des signaux sources. La factorisation spectrale de $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ est d'une grande importance ; sa positivité conduit à :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \quad (2.12)$$

où \mathbf{U} est une matrice unitaire et $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ une matrice diagonale de valeurs propres réelles ordonnées de façon que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Chaque vecteur orthogonal à \mathbf{A} est un vecteur propre de $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ avec la valeur propre σ^2 . On a $N - d$ vecteurs linéairement indépendants (d est le nombre de source) et $\lambda_{d+1} = \lambda_N = \sigma^2$.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H \quad (2.13)$$

où $\mathbf{\Lambda}_n = \sigma^2 \mathbf{I}$. Les opérateurs de projection vers les sous espaces signal et bruit sont définis, dans le cas où l'inverse de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ existe, par

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad (2.14)$$

$$\mathbf{K}^\perp = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad (2.15)$$

On a alors :

$$\mathbf{I} = \mathbf{K} + \mathbf{K}^\perp \quad (2.16)$$

En pratique, comme on ne dispose que d'un nombre fini d'échantillons L , on utilise l'estimé de $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x(t_i) x(t_i)^H \quad (2.17)$$

où la représentation spectrale similaire à celle de $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ est définie par

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\mathbf{\Lambda}}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{\Lambda}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \quad (2.18)$$

On suppose le nombre de signaux connu. Dans ce qui suit on étudie les techniques d'estimation des paramètres les plus connues comme les méthodes spectrales et paramétriques. On fait abstraction, dans cette étude, des techniques classiques de formation de voies vu qu'elles se prêtent mal au problème posé.

2.2.2 Méthode MUSIC

La décomposition spectrale avec une structure exacte de la matrice de covariance est exprimée par

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (2.19)$$

où on suppose $\mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H$ est de rang plein. La matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}_s$ contient les d plus grandes valeurs propres. Étant donné que les vecteurs propres dans \mathbf{U}_n sont orthogonaux à \mathbf{A} , on a

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta) = 0 \quad \theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_d\} \quad (2.20)$$

Pour avoir des solutions d'estimation des directions d'arrivée uniques, le réseau est souvent supposé non ambiguë. Ainsi, toute collection de N vecteurs directionnels correspondants aux DDA distinctes η , forment un ensemble linéaire indépendant $\{\mathbf{a}(\eta_1), \dots, \mathbf{a}(\eta_N)\}$. Si $\mathbf{a}(\cdot)$ satisfaisant ces conditions et $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}$ est de rang plein, alors $\mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}$ est aussi de rang plein. Il s'ensuit alors que $\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ sont les seules solutions possibles de la relation (2.20), que l'on peut utiliser donc pour la localisation des

DDA. En pratique, l'estimée $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ de la matrice de covariance est obtenue et les vecteurs propres sont séparés en vecteurs propres signal et bruit. L'opérateur de projection orthogonale sur le sous espace bruit est estimé par

$$\hat{\mathbf{K}}^\perp = \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}^H \quad (2.21)$$

Le spectre spatial MUSIC est ainsi défini par ([9], [10]) :

$$P_d(\theta) = \frac{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{K}}^\perp\mathbf{a}(\theta)} \quad (2.22)$$

2.2.3 Extension à MUSIC

Plusieurs modifications ont été apportées à l'algorithme MUSIC pour pallier à des problèmes particuliers. La modification la plus notable est l'introduction d'une matrice de pondération \mathbf{W} qui transforme (2.22) en

$$P_d(\theta) = \frac{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{K}}^\perp\mathbf{W}\hat{\mathbf{K}}^\perp\mathbf{a}(\theta)} \quad (2.23)$$

\mathbf{W} est introduite pour tenir compte de l'influence de chaque vecteur propre. Il est clair qu'une pondération uniforme $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ nous donne MUSIC classique. Il a été démontré que c'est la pondération optimale dans le sens où elle fournit des estimés à variance asymptotique minimale [11]. Cependant, dans des scénarios difficiles où on ne dispose que d'un nombre limité d'échantillons, ou d'un rapport signal à bruit bas et des signaux hautement corrélés, un choix judicieux d'une pondération \mathbf{W} peut améliorer la résolution de l'estimateur sans pour autant augmenter sérieusement la variance. Un choix particulier de pondération est donné par [12]

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \quad (2.24)$$

où \mathbf{e}_1 est la première colonne de la matrice identité $L \times L$. Celle-ci correspond à l'algorithme Min-norm développé dans ([34], [5]) pour une antenne ALU. Comme montré dans [6], l'algorithme Min-norm donne un plus petit biais et une meilleure résolution que MUSIC classique quand il est appliqué à un réseau ALU.

2.2.4 Signaux échos cohérents

Dans le cas de notre étude, la propagation multi trajets fait que les signaux reçus par l'antenne sont cohérents. On se trouve ainsi avec une matrice de covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}$ à rang déficient (dégénéré), ce qui entraîne une divergence des vecteurs propres "signal" dans le sous espace bruit. Alors, en général, $\mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta) \neq 0$ pour tout θ et le spectre MUSIC échoue dans la détection des pics correspondants aux DDA recherchées. Dans le cas de deux signaux cohérents et un réseau ALU, il existe une façon directe de décorréler les signaux par l'usage d'un moyennage forward-backward. Soit le vecteur directionnel, pour un réseau ALU

$$\mathbf{a}(\theta) = [1 \quad e^{j\xi} \quad \dots \quad e^{j(N-1)\xi}]^T \quad (2.25)$$

On remarque que les éléments de ce vecteur restent invariants (à un facteur de pondération près) s'ils sont inversés et si on prend leurs conjugués complexes. Soit \mathbf{J} une matrice d'échange $N \times N$ dont les éléments de l'antidiagonale sont à 1 et les autres éléments sont nuls. Alors, pour un ALU

$$\mathbf{J}\mathbf{a}^*(\theta) = e^{-j(N-1)\xi}\mathbf{a}(\theta) \quad (2.26)$$

La matrice de covariance est centro-Hermitienne si

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^*\mathbf{J} \quad (2.27)$$

Dans (2.19), $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ est centro-Hermitienne si et seulement si la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}$ est diagonale, i.e., quand les sources sont non corrélées. Cependant, pour "doubler" le nombre d'échantillons et décorrélérer d'éventuelles paire de source corrélées dans le cas d'une matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}$ arbitraire, la propriété centro-Hermitienne est parfois forcée par ce qu'on appelle un moyennage Forward-Backward (FB).

En moyennant la matrice de covariance habituelle dans l'équation (2.27), qu'on appelle matrice de covariance backward, on obtient la matrice de covariance \mathbf{R}_{FB}

$$\mathbf{R}_{FB} = \frac{1}{2}[\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} + \mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^*\mathbf{J}] = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.28)$$

La matrice \mathbf{R}_{FB} (2.28) est souvent utilisée dans les algorithmes d'estimation des directions d'arrivée à la place de la matrice classique (2.19).

On a ainsi, la nouvelle matrice de covariance source qui est en général de rang plein

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{ss}} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} + \mathbf{D}\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^*\mathbf{D}^H) \quad (2.29)$$

où $\mathbf{D} = \text{diag} [e^{-j(\frac{2\pi}{\lambda})\Delta(N-1)\sin\theta_1} \quad \dots \quad e^{-j(\frac{2\pi}{\lambda})\Delta(N-1)\sin\theta_d}]$.

En présence de plus de deux sources cohérentes, une autre solution est proposée. Il s'agit de la technique de lissage spatial (spatial smoothing) qui consiste en la division de l'antenne ALU en un nombre de sous réseaux recouvrants. Les vecteurs directionnels des sous réseaux sont supposés identiques à un facteur d'échelle près et les matrices de covariance peuvent être moyennées ([14],[37]).

Comme en (2.29), le lissage spatial introduit une modulation de phase aléatoire qui tend à décorrélérer les signaux et causer la non déficience du rang. L'expression compacte de cette matrice "lissée" $\tilde{\mathbf{R}}$ peut être écrite en terme de matrice de sélection \mathbf{J}_k comme suit :

Soit P le nombre d'éléments dans le sous réseau et le nombre de sous réseaux est $K = N - P + 1$, alors, la matrice "lissée" est

$$\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{J}_k \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \mathbf{J}_k^T \quad (2.30)$$

avec

$$\mathbf{J}_k = [\mathbf{0}_{P \times (k-1)} | \mathbf{I}_P | \mathbf{0}_{P \times (N-k-P+1)}] \quad (2.31)$$

où \mathbf{I}_P est une matrice identité de dimension P . Le rang de la matrice de covariance source $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{ss}}$ moyennée augmente de 1 avec une probabilité 1 pour chaque sous réseau additionnel en moyenne [15], jusqu'à ce qu'elle atteigne sa valeur maximale d .

2.3 Méthodes du Maximum de Vraisemblance

Les méthodes "spectrales" sont très attractives en calcul, mais ne donnent pas une précision suffisante surtout dans le cas de signaux cohérents. Il est alors, souhaitable d'exploiter la structure du modèle des données. De telles méthodes sont dites paramétriques. Comme nous allons le constater, les signaux cohérents ne posent aucune difficulté pour ces méthodes. Le prix à payer pour cet apport d'efficacité et de robustesse est qu'elles demandent une recherche multi dimensionnelle pour trouver les estimés voulus. Deux hypothèses différentes sur le modèle du signal conduisent à deux approches du maximum de vraisemblance.

2.3.1 Méthode du Maximum de Vraisemblance Déterministe (MVD)

Pour ce cas, la SER est considérée constante du point de vue champs de rayonnement. Alors, la forme du signal écho peut être modélisée en bande de base comme un signal complexe sinusoidal dont l'amplitude dépend de la SER et la fréquence dépend de la vitesse radiale entre la cible et la plate forme radar. On suppose que la cible est à champ éloigné par rapport au radar. Et la forme du signal écho est à bande étroite par rapport à la fréquence porteuse et la taille de l'antenne. Maintenant, nous nous intéressons à la matrice de covariance des données dont la connaissance est essentielle dans un problème d'estimation de DDA, on a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (2.32)$$

La matrice de covariance théorique est :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.33)$$

avec $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H\}$. Cependant, en pratique, une matrice de covariance estimée est utilisée à la place de l'espérance mathématique dans l'équation (2.33). Dans ce cas, on dispose de L échantillons $\{x(t_i); i = 1, 2, \dots, L\}$, la matrice de covariance est alors

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{x}(t_i)\mathbf{x}(t_i)^H = \frac{1}{L} \mathbf{X}\mathbf{X}^H = \mathbf{A}\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H + \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{nn}} \quad (2.34)$$

avec $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{nn}} = \frac{1}{L}\mathbf{N}\mathbf{N}^H$ et $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{ss}} = \frac{1}{L}\mathbf{S}\mathbf{S}^H$

où $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_L)]$; $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(t_1), \dots, \mathbf{s}(t_L)]$; $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(t_1), \dots, \mathbf{n}(t_L)]$.

En se basant sur ces définitions, il apparaît que la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ contient toutes les informations spatiales et temporelles de tous les signaux. Le signal observé $\mathbf{x}(t)$ a une moyenne et une matrice de covariance

$$E[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) \quad (2.35)$$

$$E(\mathbf{x}(t) - E[\mathbf{x}(t)])(\mathbf{x}(t) - E[\mathbf{x}(t)])^H = \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.36)$$

Ceci implique que si on a L observations indépendantes, alors la fonction de densité de probabilité conditionnelle sous l'hypothèse d'un bruit, blanc, Gaussien et additif, i.e.

$$pdf_x = pdf_x(\mathbf{x}(t_1) \dots \mathbf{x}(t_L) | \theta, \mathbf{s}, \sigma^2) \quad (2.37)$$

est connue, soit

$$pdf_x(\mathbf{x}(t_1) \dots \mathbf{x}(t_L) | \theta, \mathbf{s}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^L \frac{1}{\pi^N \det \sigma^2 \mathbf{I}_N} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2\right) \quad (2.38)$$

En prenant le logarithme de l'équation (2.38) on a

$$LF = \ln(pdf_x) = -NL \ln(\pi \sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^L |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2 \quad (2.39)$$

soit

$$\hat{\sigma}^2 = \arg \max_{\sigma^2} \{LF\} \quad (2.40)$$

c'est à dire

$$\hat{\sigma}^2 = \arg \max_{\sigma^2} \left\{ -NL \ln(\pi \sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^L |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2 \right\} \quad (2.41)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2 \quad (2.42)$$

En substituant $\hat{\sigma}^2$ dans l'équation (2.39) et en maximisant le résultat selon les paramètres du signal, on a

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}, \hat{\mathbf{s}})_{ML} &= \arg \max_{\theta, \mathbf{s}} \left\{ -LN \ln(\pi \hat{\sigma}^2) - \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^L (|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2) \right\} \\ &= \arg \max_{\theta, \mathbf{s}} \left\{ -LN \left[\ln\left(\frac{\pi}{LN} \sum_{i=1}^L |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2\right) + 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

donc

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}, \hat{\mathbf{s}})_{ML} &= \arg \max_{\theta, \mathbf{s}} \left\{ -\ln\left(\sum_{i=1}^L |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2\right) \right\} \\ &= \arg \min_{\theta, \mathbf{s}} \left\{ \sum_{i=1}^L |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

En gardant constant le paramètre θ , l'expression (2.44) devient

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \left\{ \sum_{i=1}^M |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t_i)|^2 \right\} \quad (2.45)$$

l'équation (2.45) a une solution analytique donnée par l'expression suivante

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{A}(\theta)^H \mathbf{A}(\theta))^{-1} \mathbf{A}(\theta)^H \mathbf{X} \quad (2.46)$$

où

$$\hat{\mathbf{s}}(t_i) = (\mathbf{A}(\theta)^H \mathbf{A}(\theta))^{-1} \mathbf{A}(\theta)^H \mathbf{x}(t_i) \quad (2.47)$$

ainsi, $\hat{\mathbf{s}}$ est donnée en fonction de θ . En substituant $\hat{\mathbf{s}}(t_i)$ dans l'équation (2.44), on a

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^L (|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{K}_A \mathbf{x}(t_i)|^2) \quad (2.48)$$

avec $\mathbf{K}_A = \mathbf{A}(\theta)(\mathbf{A}(\theta)^H \mathbf{A}(\theta))^{-1} \mathbf{A}(\theta)^H$, on définit $\mathbf{K}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{K}_A$ ¹, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{ML} &= \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^L (|\mathbf{K}_A^\perp \mathbf{x}(t_i)|^2) \\ &= \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^L (|\mathbf{K}_A \mathbf{x}(t_i)|^2) \\ &= \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^L (\mathbf{x}(t_i)^H \mathbf{K}_A \mathbf{x}(t_i)) \\ &= \arg \max_{\theta} \{Tr(\mathbf{K}_A \mathbf{X} \mathbf{X}^H)\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

c'est à dire

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} \{Tr(\mathbf{K}_A \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}})\}. \quad (2.50)$$

L'équation (2.50) donne l'estimateur du maximum de vraisemblance pour les DDA. L'interprétation de l'équation (2.50) est que les données $x(t)$ sont projetées dans le sous espace orthogonal du modèle et une mesure de puissance est effectuée

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \|\mathbf{K}_A^\perp \mathbf{x}(t)\|^2 = Tr\{\mathbf{K}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}\} \quad (2.51)$$

Pour le cas stationnaire, l'erreur peut converger vers zéro quand le nombre d'échantillons augmente à l'infini. Ceci reste valable pour les signaux cohérents, bien que la précision pour un nombre d'échantillons réduit dépend de la corrélation des signaux. Pour calculer les estimés du maximum de vraisemblance déterministe, le problème d'optimisation non linéaire de dimension N (2.50) doit être résolu numériquement. Ayant des valeurs initiales adéquates (obtenues par les méthodes spectrales par exemple), la technique de Gauss-Newton ([16], [17]) converge souvent rapidement au minimum de (2.50). Autrement, la procédure converge vers un minimum local. On peut aussi utiliser des techniques telle que IQML [78].

¹ \mathbf{K}_A et \mathbf{K}_A^\perp sont les projecteurs orthogonaux sur les sous espaces signal et bruit, respectivement.

2.3.2 Méthode du maximum de Vraisemblance Stochastique (MVS)

Cette méthode est obtenue en modélisant les formes d'onde des signaux comme des processus aléatoires Gaussiens. Soit la forme d'onde du signal ayant une moyenne nulle et des propriétés de second ordre :

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(s)\} &= \mathbf{R}_{\text{ss}}\delta_{t,s} \\ E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^T(s)\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Le vecteur d'observation $\mathbf{x}(t)$, $t = 1, \dots, L$ est un processus aléatoire blanc, de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\mathbf{R}_{\text{xx}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.53)$$

Dans ce cas, l'ensemble des paramètres inconnus sont différents de ceux du modèle du signal déterministe. La fonction de vraisemblance dépend maintenant de θ , \mathbf{R}_{ss} et σ^2 . Alors, la fonction de densité conjointe des données est [62]

$$f_{\eta} = (2\pi)^{-\frac{L}{2}} \det \left\{ \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-\frac{L}{2}}(\eta) \right\} \exp \left\{ -\frac{L}{2} \text{Tr} \left[\mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1}(\eta) \hat{\mathbf{R}}_{\text{xx}} \right] \right\} \quad (2.54)$$

où $\eta = [\theta^T, \mathbf{R}_{\text{ss}}, \sigma^2]$ est le vecteur des paramètres inconnus et $\hat{\mathbf{R}}_{\text{xx}}$ est la matrice de covariance des données observées

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{xx}} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \quad (2.55)$$

La fonction *log-vraisemblance* (avec les termes constants ignorés) est proportionnelle à

$$l_{MVS} = \log \det \mathbf{R}_{\text{xx}} + \text{Tr} \{ \mathbf{K}_{\mathbf{A}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{\text{xx}} \} \quad (2.56)$$

bien que cette fonction présente une non-linéarité, ce critère permet une séparation explicite de certains paramètres. Pour θ fixe, le minimum selon σ^2 et \mathbf{R}_{ss} est

$$\sigma_{MVS}^2(\theta) = \frac{1}{M-d} \text{Tr} \{ \mathbf{K}_{\mathbf{A}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{\text{xx}} \} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{R}}_{\text{ss}} = \mathbf{A}^{\#} (\hat{\mathbf{R}}_{\text{xx}} - \hat{\sigma}_{MVS}^2 \mathbf{I}) \mathbf{A}^{\#H}$$

Avec ces estimés substitués dans (2.56), la forme compacte suivante est obtenue :

$$\hat{\theta}_{MVS} = \arg \min_{\theta} \{ \log |\mathbf{A} \hat{\mathbf{R}}_{\text{ss}} \mathbf{A}^H + \hat{\sigma}_{MVS}^2 \mathbf{I}| \} \quad (2.57)$$

C'est une fonction qui présente une non linéarité en fonction de son argument θ .

2.3.3 Approximations basées sur la décomposition en sous espace

Des méthodes paramétriques à base de sous espaces, qui ont les mêmes performances statistiques que les méthodes MV (pourvués que les sources ne soient pas corrélées [11])

ont été développées. Le coût de calcul pour ces méthodes ([17], [22], [23], [24]) (dites subspace fitting) est moindre que les méthodes MV.

Rappelons la structure de la décomposition propre de la matrice de covariance de l'observation

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{U}_s\mathbf{\Lambda}_s\mathbf{U}_s^H + \sigma^2\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H \quad (2.59)$$

Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{U}_s partagent le même espace quand $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}$ est de rang plein. Dans le cas général, le nombre des vecteurs propres du signal dans \mathbf{U}_s est égale à d' . La matrice \mathbf{U}_s partage un sous espace \mathbf{A} de dimension d' . Ceci peut être démontré en exprimant l'identité dans (2.58) par $\mathbf{I} = \mathbf{U}_s\mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H$, en annulant le terme $\sigma^2\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H$ dans (2.59), on aura

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{U}_s\mathbf{U}_s^H = \mathbf{U}_s\mathbf{\Lambda}_s\mathbf{U}_s^H \quad (2.60)$$

En post-multipliant à droite par \mathbf{U}_s (noter que $\mathbf{U}_s^H\mathbf{U}_s = \mathbf{I}$) et en réarrangeant, nous obtenons la relation

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{A}\mathbf{T} \quad (2.61)$$

où \mathbf{T} est la matrice $d \times d'$ de rang plein

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H\mathbf{U}_s(\mathbf{\Lambda}_s - \sigma^2\mathbf{I})^{-1} \quad (2.62)$$

La relation (2.61) forme la base de l'approche SSF (Signal Subspace Fitting). Les paramètres inconnus θ et \mathbf{T} sont à déterminer pour résoudre (2.61), la valeur θ obtenue est la vraie valeur, par ailleurs \mathbf{T} est un paramètre de nuisance. Si une estimée $\hat{\mathbf{U}}_s$ de \mathbf{U}_s est utilisée, cette solution n'aura pas lieu. Dans ce cas, on essaye de minimiser une certaine mesure de distance entre $\hat{\mathbf{U}}_s$ et $\mathbf{A}\mathbf{T}$. Pour cela, la norme de Frobenius se prête bien, et quand elle est mise au carré, elle peut être exprimée comme étant la somme de normes euclidiennes quadratiques des rangées ou des colonnes. Par cette formulation, la connection aux estimateurs moindres carrés standard devient claire. L'estimateur SSF est obtenu par résolution du problème d'optimisation non linéaire suivant

$$\{\hat{\theta}, \hat{\mathbf{T}}\} = \arg \min_{\theta, \mathbf{T}} \|\{\hat{\mathbf{U}}_s - \mathbf{A}\mathbf{T}\}\|_F^2 \quad (2.63)$$

Similaire au critère MV déterministe (2.50), ceci est un problème des moindres carrés non linéaire séparable. La solution, pour le paramètre linéaire \mathbf{T} (pour \mathbf{A} fixe et connue), est

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^\# \hat{\mathbf{U}}_s \quad (2.64)$$

qui, en le substituant dans (2.63) et en introduisant une pondération sur les valeurs propres, donne la fonction compacte du critère

$$\hat{\theta}_{SSF} = \arg \min Tr\{\mathbf{K}_A^\perp \hat{\mathbf{U}}_s \mathbf{W} \hat{\mathbf{U}}_s^H\} \quad (2.65)$$

Une question naturelle s'impose : comment choisir \mathbf{W} pour maximiser la précision (minimiser la variance de l'erreur de l'estimation). On peut montrer que les vecteurs propres projetés $\mathbf{K}_A^\perp(\theta_0)\hat{\mathbf{u}}_k$; $k = 1, \dots, d'$ sont asymptotiquement indépendants. Alors,

suivant la théorie des moindres carrés pondérés [25], \mathbf{W} doit être une matrice diagonale contenant l'inverse de la matrice de covariance de $\mathbf{K}_A^\perp(\theta_0)\hat{\mathbf{u}}_k; k = 1, \dots, d'$. Ceci nous conduit au choix

$$\mathbf{W}_{opt} = (\mathbf{\Lambda}_s - \sigma^2\mathbf{I})^2\mathbf{\Lambda}_s^{-1} \quad (2.66)$$

\mathbf{W}_{opt} dépend de quantités inconnues, on utilise plutôt

$$\hat{\mathbf{W}}_{opt} = (\hat{\mathbf{\Lambda}}_s - \hat{\sigma}^2\mathbf{I})^2\hat{\mathbf{\Lambda}}_s^{-1} \quad (2.67)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est une estimée consistante de la variance du bruit, par exemple la moyenne des $N - d'$ plus petites valeurs propres. L'estimateur, défini par (2.65) avec des pondérations données par l'équation (2.67), est dit Weighted Subspace Fitting (WSF) [24].

2.4 Performances : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation

2.4.1 Borne de Cramer-Rao

L'obtention des bornes de Cramer-Rao du MVD et du MVS est largement traitée dans la littérature (voir [11], [67] et [68] par exemple). Nous rappelons seulement les hypothèses et nous donnons l'expression de la borne pour les deux cas.

Les signaux sources sont des processus Gaussiens, temporellement blanc et le bruit est un processus Gaussien, spatialement et temporellement blanc. La matrice de covariance est

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.68)$$

Le vecteur des paramètres est $\eta = [\theta^T \ \rho^T \ \sigma]$, où $\theta = [\theta_1 \ \dots \ \theta_d]$ et ρ est le vecteur $d^2 \times 1$ formé des éléments $\{\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^{ii}\}$ et $\{\Re[\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^{ij}], \Im[\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^{ij}], j > i\}$. La matrice d'information de Fisher est donnée par

$$FIM_{k,l} = L \operatorname{Tr} \left(\frac{d\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}}{d\eta_k} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1} \frac{d\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}}{d\eta_l} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1} \right), \text{ pour } k, l = 1, 2, \dots, n + n^2 + 1 \quad (2.69)$$

Les paramètres ρ et σ sont des paramètres de nuisance, la borne CRB pour θ est donnée par

$$CRB(\theta) = \frac{\sigma^2}{2L} \left\{ \Re(\mathbf{D}^H \mathbf{\Pi}_A^\perp \mathbf{D}) \odot (\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{ss}})^T \right\}^{-1} \quad (2.70)$$

où $\mathbf{D} = \left[\frac{da(\theta_1)}{d\theta_1} \ \dots \ \frac{da(\theta_d)}{d\theta_d} \right]$, $\mathbf{\Pi}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ et \odot représente le produit de Hadamard.

Pour le cas déterministe, en tenant compte des hypothèses (2.35) et (2.36), le logarithme de la fonction de vraisemblance des données i. i. d. et Gaussiennes est

$$LF = \text{const} - NL \ln(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^L (\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t_i))^H (\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t_i)) \quad (2.71)$$

la dérivation selon les paramètres inconnus du vecteur $\eta = [\theta^T \ x(1) \ x(2) \ \dots \ x(L) \ \sigma]$ donne les différents éléments de la matrice d'information de Fisher. La borne de Cramer-Rao est donnée par

$$CRB(\theta) = \frac{\sigma^2}{2L} \left\{ \Re(\mathbf{D}^H \mathbf{\Pi}_A^\perp \mathbf{D}) \odot \left(\hat{\mathbf{R}}_{ss} \right)^T \right\}^{-1} \quad (2.72)$$

où

$$\hat{\mathbf{R}}_{ss} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L s(l)s(l)^H \quad (2.73)$$

2.4.2 Résultats de simulation

Dans cette partie, on présente certains résultats de performances relatifs à la première partie du travail, radar en mode passif. Dans les simulations, une mesure de performance particulièrement utile pour les techniques d'estimation des angles est le *rms* (root mean square) de l'erreur angulaire

$$\sigma_{e_\theta} = \sqrt{\{E|e_\theta|^2\}} \quad (2.74)$$

où e_θ est l'erreur d'estimation $e_\theta = (\theta - \hat{\theta})$. Pour les estimateurs non biaisés (c'est à dire $E\{e_\theta\} = 0$), le *rms* est aussi la déviation standard de l'erreur angulaire (std). Dans ce qui suit, le terme std est adopté et utilisé pour représenter la définition (2.74) du *rms* même pour un estimateur biaisé. En supposant un modèle de la surface de la terre 4/3, on utilise le scénario de simulation suivant (le même que celui en référence [1]) : soit un radar à une hauteur $h_1 = 20m$, la cible évolue à une altitude constante $h_2 = 1500m$. Deux signaux sont reçus avec des angles d'arrivées très proches. Les résultats sont obtenus après 500 exécutions de Monte Carlo et comparés à la borne de Cramer-Rao. Les méthodes de décomposition en sous espaces sont appliquées. Vu que les composantes du signal reçu sont très corrélées, ces méthodes donnent de mauvais résultats. Les signaux sont décorrélés par un pré traitement de la matrice de covariance des données en utilisant un "lissage" spatial ou un moyennage forward-backward.

Dans les figures (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7), on obtient la variation du std en fonction du RSB avec des paramètres indiqués sur les figures pour les techniques paramétriques (MVD, MVS, SSF et WSF). Ces méthodes "optimales" donnent toutes approximativement les mêmes performances. La précision de l'estimation augmente quand le RSB augmente.

Dans les figures (2.8) et (2.9), on fait varier le nombre des échantillons de traitement pour les méthodes MVD et MVS. Les mêmes remarques sont à noter, la résolution augmente quand le nombre d'échantillons augmente.

Les figures (2.10) et (2.11) nous donnent un exemple de poursuite de l'évolution de la cible avec un RSB fixe. Les Directions D'Arrivée (DDA) sont estimées à des distances différentes en utilisant les techniques MVD et MVS. La méthode MVS offre une meilleure poursuite que la technique MVD surtout à des angles d'arrivée très proches.

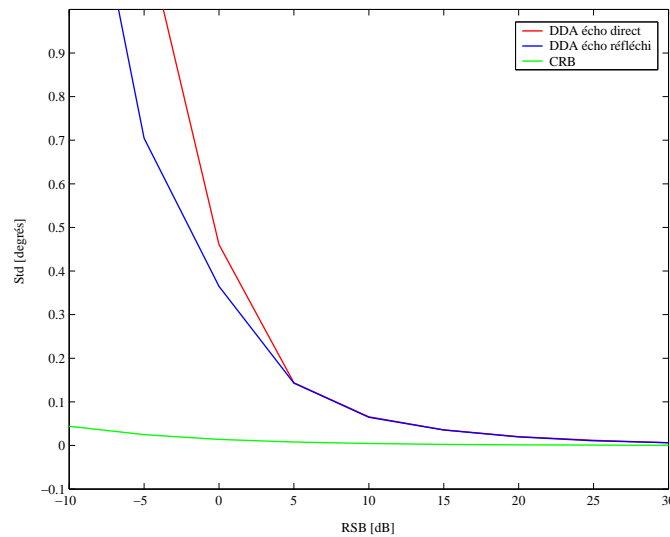


Fig. 2.4 — Déviation standard vs RSB, Méthode MVD, $N = 24$, $M = 100$, $R_0 = 40$ km .

Dans les figures (2.12), (2.13), (2.14) et (2.15), on fait varier la différence entre les DDA (direct et indirect). Il est clair que la résolution de la technique MUSIC augmente si on applique les pré traitements tels que le moyennage forward-backward et le “lissage” spatial. La technique MUSIC avec moyennage forward-backward dépasse en résolution les techniques MUSIC avec “lissage” spatial et MUSIC classique.

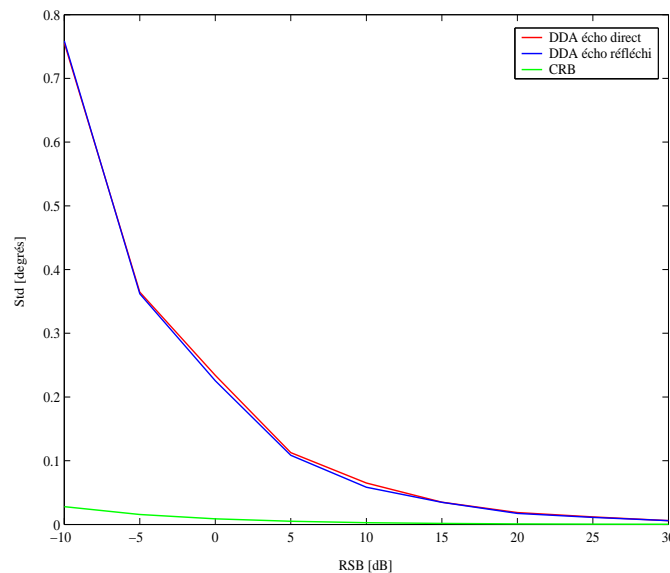


Fig. 2.5 — Déviation standard vs RSB, Méthode MVS, $N = 24$, $M = 100$, $R_0 = 40$ km .

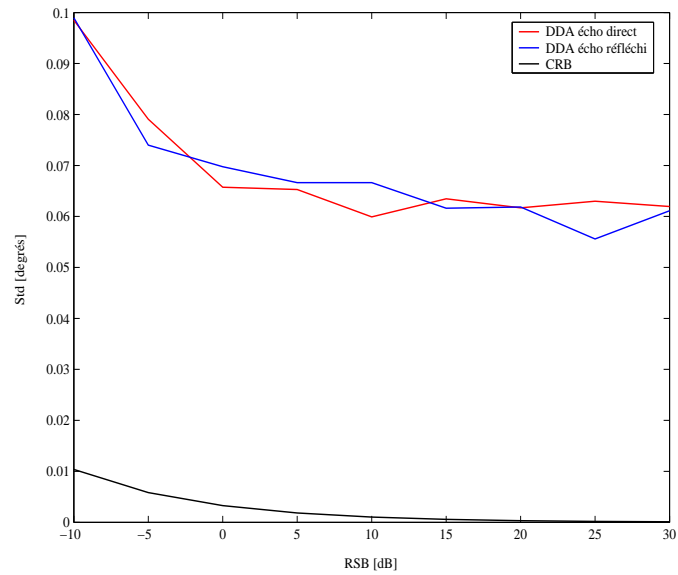


Fig. 2.6 — Déviation standard, méthode SSF, $N = 24$, $L = 100$, $R_0 = 40$ km.

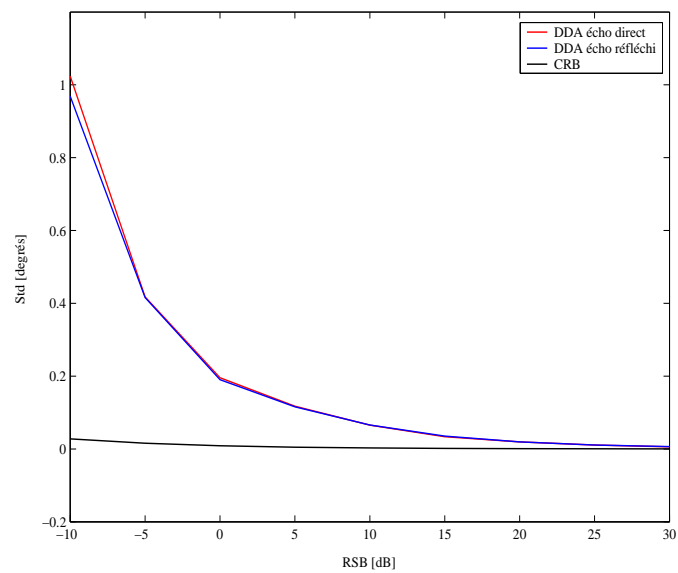


Fig. 2.7 — Déviation standard, Méthode WSF, $N = 24$, $L = 100$, $R_0 = 40$ km.

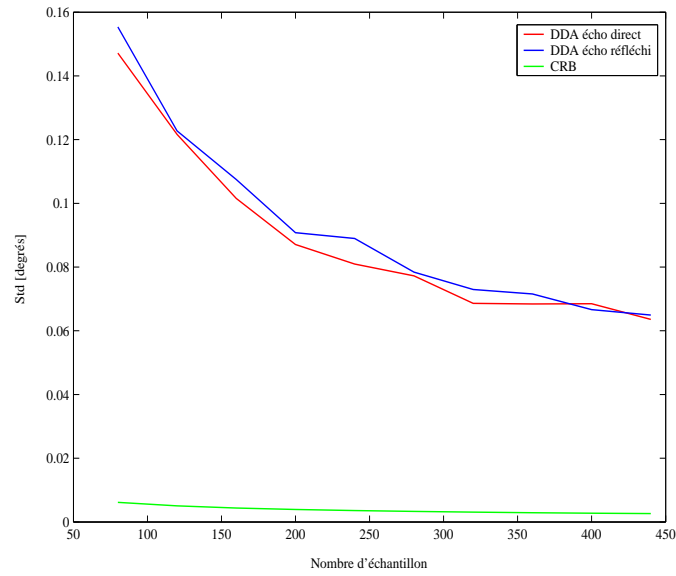


Fig. 2.8 — Déviation standard v.s M , Méthode MVD, $N = 24$, $RSB = 10dB$, $R_0 = 40 Km$.

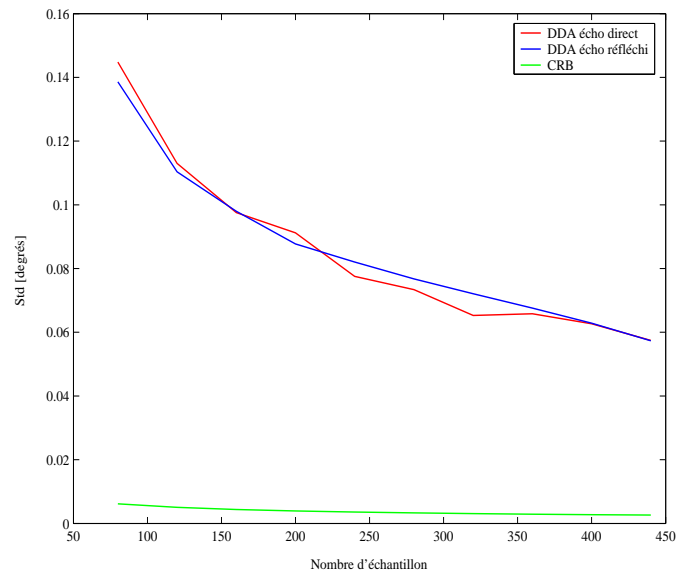


Fig. 2.9 — Déviation standard v.s M , Méthode MVS, $N = 24$, $RSB = 10dB$, $R_0 = 40 Km$.

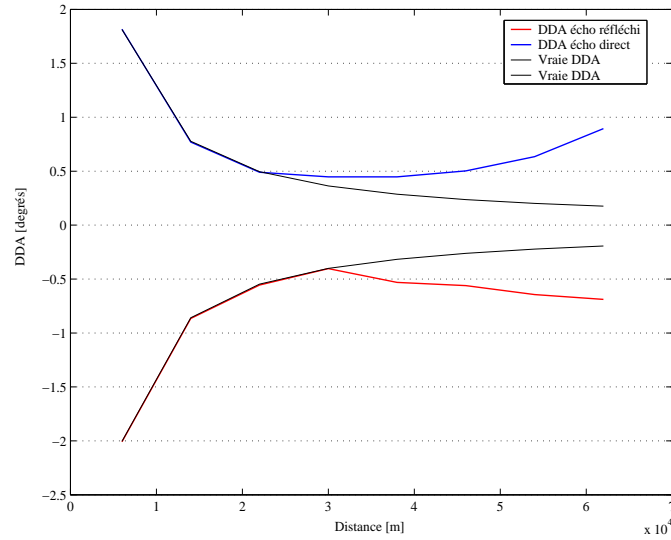


Fig. 2.10 — Exemple de poursuite angulaire, méthode MVD. $RSB = 20 \text{ dB}$, $L = 200$, $N = 24$.

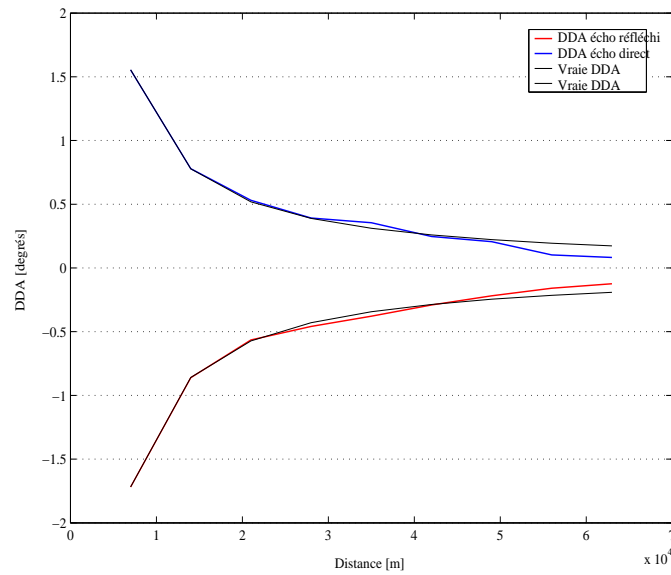


Fig. 2.11 — Exemple de poursuite angulaire, méthode MVS. $RSB = 20 \text{ dB}$, $L = 200$, $N = 24$.

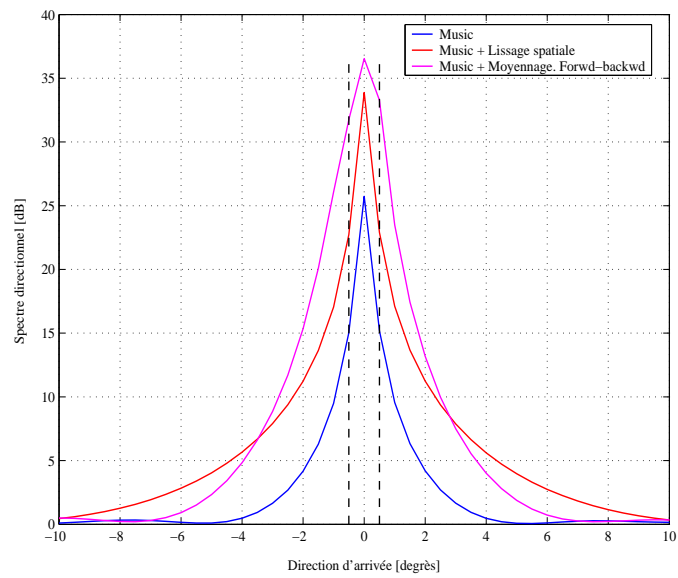


Fig. 2.12 — Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 0.5^\circ$.

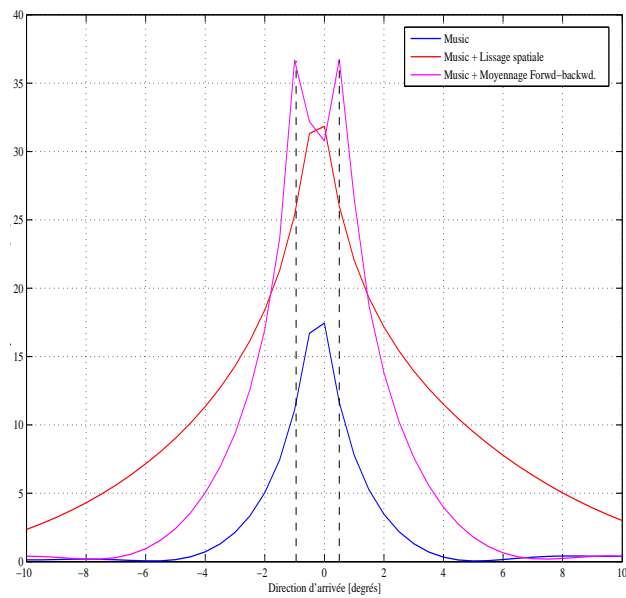


Fig. 2.13 — Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 0.6^\circ$.

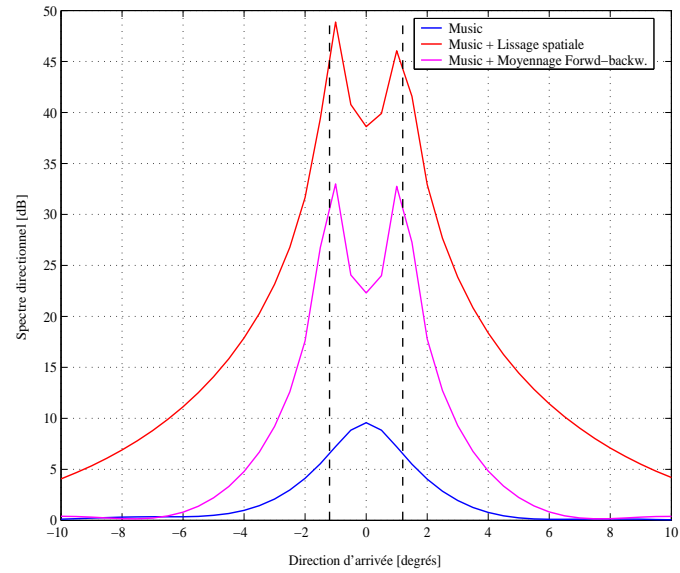


Fig. 2.14 — Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 1.2^\circ$.

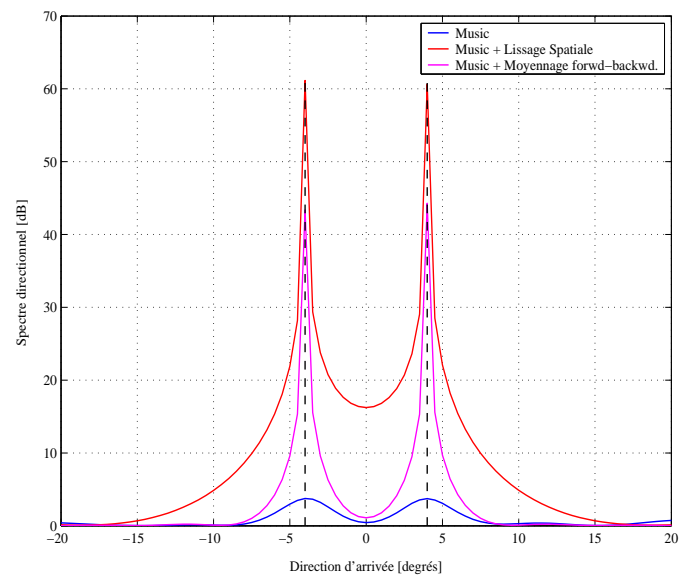


Fig. 2.15 — Spectre spatial pour MUSIC avec et sans traitement, $\theta_d = 4^\circ$.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu quelques techniques paramétriques et des techniques basées sur la décomposition en sous espaces. Ces techniques sont appliquées au scénario de cibles évoluant en basse altitude. Les angles d'arrivée incidents issus de l'écho direct et indirect sont très proches et plusieurs méthodes donnent une mauvaise résolution de ces angles et n'arrivent pas à séparer les deux signaux. Ceci est dû non seulement à la différence réduite entre ces angles mais aussi à la cohérence des signaux reçus. On a vu que l'application d'un pré traitement sur la matrice de covariance améliore les performances de résolution à un certain degré. Les méthodes de maximum du vraisemblance offrent approximativement les mêmes performances, mais sont très coûteuses en temps de calcul. Pour des différences d'angle très réduites, il faut s'orienter vers d'autres méthodes pour traiter ce problème.

Estimation Conjointe des Directions d'Arrivée/Retards Temporels en Mode Radar Actif

Dans un scénario multi-trajets, le radar voit la cible et son image. Cette dernière est créée par l'interférence avec une position angulaire qui apparaît au dessous de la surface réfléchissante, mais avec une différence de trajet souvent plus faible que la résolution du radar en distance. Pour pallier à ce problème, on peut prendre en considération les DDA et les retards temporels pour séparer les échos incidents. Ceci nous conduit au traitement spatio-temporel. Pour améliorer les estimateurs des paramètres de chaque signal, on doit choisir des cellules très étroites pour diminuer l'effet du clutter et les interférences et améliorer le Rapport Signal à Bruit (RSB). Pour cela, on utilise une cadence d'échantillonnage très élevée dans la fenêtre de traitement.

Dans ce chapitre, par l'utilisation de connaissance *a priori* de la forme d'onde émise, on applique les algorithmes JADE (Joint Angle And Delay Estimation) et SI-JADE (Shift-Invariance JADE) modifiés pour l'estimation conjointe des directions d'arrivée et les retards temporels correspondants. Les deux algorithmes ont été initialement développés pour le domaine des communications mobiles pour estimer le canal de transmission. La séquence d'apprentissage, utilisée en communication, est remplacée par la réplique de l'impulsion émise par le radar. Le traitement est fait dans le domaine réel après transformation de la matrice complexe. Ainsi, on suppose que l'impulsion émise est connue, les signaux échos incidents sont collectés par une antenne en bande étroite constituée au moins de deux éléments. Les déviations Doppler sont supposées négligeables par rapport à la largeur de bande de l'impulsion, laquelle est supposée très faible par rapport à la fréquence porteuse. On examine deux techniques différentes pour obtenir les estimateurs des paramètres. Dans la première, les données sont collectées durant une PRI (Pulse Repetition Interval) autour de la cellule distance et le radar doit donner une estimation à chaque nouvelle PRI. Dans la seconde approche, les données sont collectées durant plusieurs PRI successives et les estimées sont calculées en utilisant ce bloc de données. On suppose que les directions et les retards relatifs

des trajets ont une variation lente, ainsi, seules leurs amplitudes sont affectées par l'évanouissement de puissance.

Dans les deux approches, on utilise l'une des propriétés de la DFT (Discrete Fourier Transform) selon laquelle, la transformée d'un retard temporel est un déphasage dans le domaine fréquentiel. Ensuite, on applique une déconvolution en utilisant la DFT connue de l'impulsion émise. Le résultat de ces opérations est mis sous une forme spéciale pour avoir une forme classique d'estimation de DDA. L'algorithme 2-D ESPRIT [77] est utilisé pour avoir une estimation conjointe des paramètres. Pour contourner certains problèmes, tels que les trajets avec les mêmes retards (qu'est souvent le cas dans le scénario de poursuite en basse altitude), on peut utiliser certaines techniques comme le moyennage forward-backward [38] et/ou le lissage spatial [37].

A la différence de l'approche IQML [78], l'algorithme proposé fournit une solution analytique. Et à la différence des méthodes comme MUSIC, aucune recherche exhaustive n'est effectuée.

3.1 Modélisation mathématique

On considère une antenne linéaire uniforme constituée de N éléments identiques. On suppose que le radar observe les formes d'ondes reçues durant M PRI successives. Le scénario considéré est le suivant : le radar reçoit un signal direct et un signal réfléchi sous des angles d'élevation respectifs θ_d et θ_r (3.1). (voir figure pour la géométrie de propagation et la figure pour avoir une idée des différentes dans un récepteur radar hétérodyne).

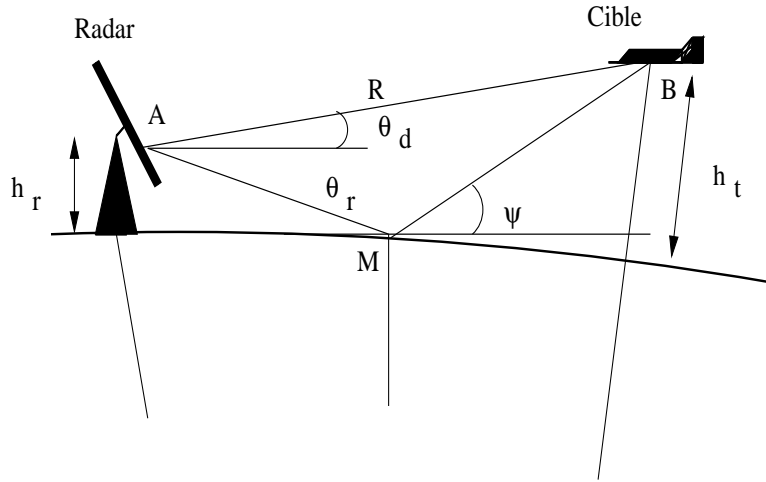


Fig. 3.1 — Modèle de réflexion et géométrie associée.

La figure 3.2 résume l'ensemble des opérations subies par chaque signal reçu un élément du réseau.

A la sortie de chaque élément, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_l(t) &= \mathbf{a}_l^d \beta_d s_d(t) + \mathbf{a}_l^r \rho e^{-j\alpha} \tilde{\beta}_r s_r(t) + \mathbf{n}_l(t) \\ l &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.1)$$

où \mathbf{a}_l^d et \mathbf{a}_l^r sont les réponses des antennes provoquées respectivement par les signaux direct $s_d(t)$ et réfléchi $s_r(t)$, avec $s_r(t) = s_d(t - \tau)$ et τ est le retard relatif entre le trajet direct et le trajet réfléchi. β_d et $\tilde{\beta}_r$ sont des facteurs complexes engendrés par l'effet Doppler et la surface équivalente radar (SER) de la cible. Ces facteurs sont relatifs aux signaux direct et indirect. $\mathbf{n}_l(t)$ est le bruit dans le récepteur de l'élément l , supposé un processus complexe de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$. L'angle α est défini comme étant la différence totale entre les trajets direct et indirect. L'amplitude ρ et l'angle de phase ϕ du coefficient de réflexion de la surface réfléchissante sont déterminés par les propriétés électromagnétiques de la surface [2], par l'angle de dépression ψ du rayon et par la polarisation de l'onde

$$\alpha = \frac{2\pi(R_1 + R_2 - R)}{\lambda} + \phi \quad (3.2)$$

où R_2 et R_1 sont les distances de la cible au point de réflexion et du point de réflexion au radar. R est la distance du trajet direct.

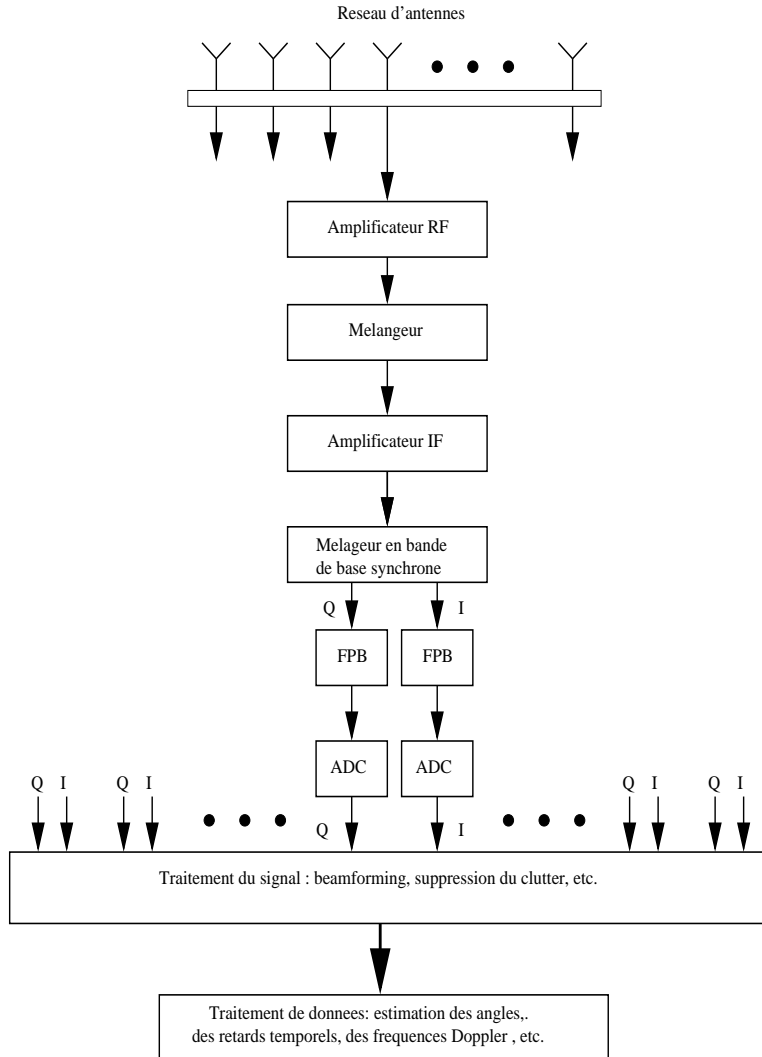


Fig. 3.2 — Schéma bloc de quelques opérations dans un récepteur radar.

Les échos (direct et réfléchi) sont supposés appartenir aux même cellules considérées pour le traitement. Une haute cadence d'échantillonnage est exigée pour avoir une estimation précise du retard.

Pour des raisons pratiques, ρ , $e^{-j\alpha}$ et $\tilde{\beta}_r$ qui apparaissent dans (3.1) sont combinés dans un seul facteur β_r :

$$\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{a}_l^d \beta_d s_d(t) + \mathbf{a}_l^r \beta_r s_d(t - \tau) + \mathbf{n}_l(t). \quad (3.3)$$

Utilisant la notation vectorielle, l'équation (3.3) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{S}^{(\tau)}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (3.4)$$

où $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$ sont, respectivement, des matrices observation et bruit $N \times L$. $\mathbf{S}^{(\tau)}(t) = [\mathbf{s}_d(t) \quad \mathbf{s}_d(t - \tau)]^T$ est la matrice signal, $\mathbf{b} = [\beta_d \quad \beta_r]$ et \mathbf{A} est la variété de l'antenne

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}_l^d \quad \mathbf{a}_l^r] \quad (N \times 2) \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_l^d &= \left[1 \quad e^{-j\xi_d} \quad \dots \quad e^{-j(N-1)\xi_d} \right]^T \\ \mathbf{a}_l^r &= \left[1 \quad e^{-j\xi_r} \quad \dots \quad e^{-j(N-1)\xi_r} \right]^T, \\ \xi_{d,r} &= 2\pi \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right) \sin \theta_{d,r}\end{aligned}$$

avec Δ est l'espacement entre les éléments de l'antenne.

3.2 Développement des méthodes

Dans cette section, nous commençons par donner les développements communs des algorithmes JADE et SI-JADE modifiés.

Supposons que $\mathbf{X}(t)$ est échantillonné à une fréquence élevée avec L échantillons dans chacune des M fenêtres de distance (chaque fenêtre a une longueur T_R). Les échantillons sont séparés de $\Delta t = \frac{T_R}{L}$. Les observations sont notées par x_{in}^l et sont données par $x_{in}^l = x_l(t_{in})$ où t_{in} est l'indice temps de l'échantillon

$$\begin{aligned}t_{in} &= (i-1)T_R + n\Delta t, \\ i &= 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, L\end{aligned}$$

Puis, notons $S_{in}^{(\tau)} = S^{(\tau)}(t_{in})$ et $n_{in}^l = n_l(t_{in})$ les échantillons de $S^{(\tau)}(t)$, et $n_l(t)$ aux instants t_{in} .

En définissant les matrices suivantes

$$\mathbf{X}_i(n) = \begin{bmatrix} x_{i1}^1 & x_{i2}^1 & \dots & x_{in}^1 & \dots & x_{iL}^1 \\ x_{i1}^2 & x_{i2}^2 & \dots & x_{in}^2 & \dots & x_{iL}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1}^N & x_{i2}^N & \dots & x_{in}^N & \dots & x_{iL}^N \end{bmatrix} \quad (N \times L) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{N}_i(n) = \begin{bmatrix} n_{i1}^1 & n_{i2}^1 & \dots & n_{in}^1 & \dots & n_{iL}^1 \\ n_{i1}^2 & n_{i2}^2 & \dots & n_{in}^2 & \dots & n_{iL}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{i1}^N & n_{i2}^N & \dots & n_{in}^N & \dots & n_{iL}^N \end{bmatrix} \quad (N \times L) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{S}_i^\tau(n) = \begin{bmatrix} s_{i1}^d & s_{i2}^d & \dots & s_{in}^d & \dots & s_{iL}^d \\ s_{i1}^r & s_{i2}^r & \dots & s_{in}^r & \dots & s_{iL}^r \end{bmatrix} \quad (2 \times L) \quad (3.8)$$

On obtient le modèle suivant :

$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{A}(\theta) \mathit{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{S}^\tau(n) + \mathbf{N}(n) \quad (3.9)$$

On considère, maintenant, la transformée de Fourier discrète de \mathbf{X} . Cette opération transforme un retard temporel en un déphasage dans le domaine fréquentiel. Soit $\tilde{\mathbf{s}}$ la

transformée de Fourier discrète connue des échantillons de l'impulsion émise $\mathbf{s}(n)$, alors on a

$$\tilde{\mathbf{s}}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \mathbf{s}(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} kn} \quad (3.10)$$

Si on considère le retard τ comme un entier et en utilisant la propriété de décalage temporel de la transformée de Fourier discrète, alors la DFT de la version échantillonnée de $\mathbf{s}(t - \tau)$ est

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}^\tau(k) &= \sum_{n=0}^{L-1} \mathbf{s}(n - \tau) e^{-j \frac{2\pi}{M} kn} \\ &= \phi^{k\tau} \sum_{n=-\tau}^{L-1-\tau} \mathbf{s}(n) e^{-j \frac{2\pi}{M} kn} \\ k &= 0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\phi = e^{-j \frac{2\pi}{M}}$. La translation du retard temporel en un déphasage linéaire progressif $e^{-j\omega\tau}$ ne se passe pas exactement, excepté pour certains cas spéciaux comme celui d'un signal avec un support temporel infini. Cependant, dans notre cas, le signal est suréchantillonné et le retard relatif entre les échos direct et réfléchi est très petit comparé à la largeur de l'impulsion de façon que $t_n - t_1 \gg \max(\tau)$. Ainsi, l'erreur induite par la contrainte de longueur devient petite et le modèle du domaine spectrale devrait être une approximation raisonnable. Ainsi, l'équation (3.11) devient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}^\tau(k) &= \phi^{k\tau} \sum_{n=0}^{L-1} \mathbf{s}(n) e^{-j \frac{2\pi}{M} kn} \\ &= \phi^{k\tau} \tilde{\mathbf{s}}(k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sous une forme matricielle, ceci donne

$$\tilde{\mathbf{S}}^\tau = \begin{bmatrix} 1 & \phi^\tau & (\phi^\tau)^2 & \dots & (\phi^\tau)^{L-1} \end{bmatrix} \text{diag}[\tilde{\mathbf{s}}] \quad (3.13)$$

Maintenant, par application de la DFT à \mathbf{X} et selon l'équation (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &= \mathbf{X}\mathbf{F} \\ &= \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{F} \text{diag}[\tilde{\mathbf{s}}] + \mathbf{N}\mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \phi^{\tau_d} & (\phi^{\tau_d})^2 & \dots & (\phi^{\tau_d})^{L-1} \\ 1 & \phi^{\tau_r} & (\phi^{\tau_r})^2 & \dots & (\phi^{\tau_r})^{L-1} \end{bmatrix}^T \quad (3.15)$$

En divisant la transformée de Fourier de l'impulsion échantillonnée émise dans son support non nul, le modèle devient

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{V}} \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\xi_d) & \mathbf{a}(\xi_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_d & 0 \\ 0 & \beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\phi_d) \\ \mathbf{f}(\phi_r) \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{V}} \quad (3.17)$$

où

$$\mathbf{f}(\phi_{d;r}) = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{d;r} & \dots & \phi_{d;r}^{M-1} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{a}(\xi_{d;r}) = \begin{bmatrix} 1 & \xi_{d;r} & \dots & \xi_{d;r}^{N-1} \end{bmatrix}^T \quad (3.19)$$

avec

$$\phi_{d;r} = e^{-j\frac{2\pi}{M}\tau_{d;r}}, \quad \text{et} \quad \xi_{d;r} = e^{j2\pi(\frac{\Delta}{\lambda})\sin\theta_{d;r}}$$

et $\tilde{\mathbf{V}}$ est la transformée de Fourier des échantillons du bruit après division par la transformée de l'impulsion émise.

Selon l'utilisation d'une ou plusieurs PRI pour avoir les estimés de DDA et les retards temporels, deux approches sont proposées.

3.2.1 Méthode SI-JADE modifiée

Dans cette approche [75], on se propose d'utiliser uniquement une seule PRI pour avoir les estimés de DDA et retards temporels ($M = 1$). On commence par construire la matrice des données; ceci se fait par l'exploitation de la propriété de l'invariance par décalage qui se trouve dans l'équation du modèle des données (3.16) et ensuite utiliser la technique de lissage spatial [37] pour combattre le problème des ondes ayant un même retard temporel. Nous commençons par définir deux entiers k_1 ($2 \leq k_1 \leq L$) et k_2 ($1 \leq k_2 \leq N - 1$) et définissons la matrice $(\cdot)^{(i,j)}$ issue de (\cdot) en ne retenant que les colonnes de j à $L - k_1 + j$ et les lignes i à $N - k_2 + i$.

En construisant les sous matrices suivantes de taille égales

$$\bar{\mathbf{X}}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_{i,j} & \dots & \tilde{\mathbf{X}}_{i,L-k_1+j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}_{N-k_2+i,j} & \dots & \tilde{\mathbf{X}}_{N-k_2+i,L-k_1+j} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$1 \leq j \leq k_1, 1 \leq i \leq k_2 \quad (3.21)$$

Définissons alors la matrice

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}^{(1,1)} & \dots & \bar{\mathbf{X}}^{(k_2,1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}^{(1,k_1)} & \dots & \bar{\mathbf{X}}^{(k_2,k_1)} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$k_1(N - k_2 + 1) \times k_2(L - k_1 + 1) \quad (3.23)$$

La motivation de cette formulation est de mettre \mathcal{X} sous la forme de factorisation suivante

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \text{diag}(\mathbf{b}) \mathcal{F} + \mathcal{V} \quad (3.24)$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\xi \\ \mathbf{A}_\xi \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{A}_\xi \Phi^{k_1-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\phi \circ \mathbf{A}_\xi \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi_d & \phi_r \\ \vdots & \vdots \\ \phi_d^{k_1-1} & \phi_r^{k_1-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_d & \xi_r \\ \vdots & \vdots \\ \xi_d^{N-1} & \xi_r^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\Phi = \text{diag} [\phi_d \quad \phi_r], \quad \xi = \text{diag} [\xi_d \quad \xi_r] \quad (3.27)$$

$$\mathcal{F} = [\mathbf{F} \quad \xi\mathbf{F} \quad \dots \quad \xi^{k_2-1}\mathbf{F}] \quad (3.28)$$

avec

$$\phi_i = e^{-j\frac{2\pi}{L}\tau_i}, \quad \xi_i = e^{j2\pi(\Delta/\lambda)\sin\theta_i} \quad (3.29)$$

\mathcal{A} peut être vu comme une variété d'antenne de dimension 2.

\mathcal{V} est la matrice bruit de la même forme que \mathcal{X} .

On applique l'algorithme modifié 2D-ESPRIT ([80], [77]) à l'équation (3.24) (voir annexe A pour les détails) pour avoir une association automatique des estimés DDA et des retards temporels.

Avant de faire la transformation de la matrice de covariance des données en valeurs réelles, il faut s'assurer que cette matrice est centro-hermitienne. La propriété centro-hermitienne est forcée par la méthode de moyennage forward-backward (voir les équations (2.28) et (2.29)). Ceci est effectué par la construction d'une nouvelle matrice de données

$$\mathcal{X}_e = [\mathcal{X} \quad \mathbf{J}\mathcal{X}^*] \quad (3.30)$$

On double ainsi le nombre d'échantillons et on décorrèle les éventuels signaux échos corrélés. On fait la transformation suivante pour travailler avec des matrices réelles et ainsi pouvoir appliquer ensuite une technique de diagonalisation simple qui exige des matrices à valeurs réelles

$$\mathcal{Y} = (\mathbf{K}_M \otimes \mathbf{K}_N) \mathcal{X}_e \quad (3.31)$$

où \mathbf{K}_M et \mathbf{K}_N sont définies dans l'annexe A. On calcule la matrice réelle \mathbf{E}_s qui représente le sous espace du signal utile. Cette matrice est formée par les d vecteurs singuliers gauches dominants des données transformées. On forme les matrices suivantes

$$\mathbf{E}_\phi = \mathbf{J}_\phi \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{E}_\xi = \mathbf{J}_\xi \mathbf{E}_s \quad (3.32)$$

$$\mathbf{E}'_\phi = \mathbf{J}'_\phi \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{E}'_\xi = \mathbf{J}'_\xi \mathbf{E}_s \quad (3.33)$$

et on forme le faisceau de matrice pour réaliser la diagonalisation conjointe de

$$\mathbf{E}_\xi^\# \mathbf{E}'_\xi = \mathbf{T}^{-1} \xi \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_\phi^\# \mathbf{E}'_\phi = \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T} \quad (3.34)$$

ensuite, on calcule la décomposition propre de la matrice à valeurs complexes

$$(\mathbf{E}_\phi^\# \mathbf{E}'_\phi) + j(\mathbf{E}_\xi^\# \mathbf{E}'_\xi) = \mathbf{T}^{-1} (\Phi + j\xi) \mathbf{T}. \quad (3.35)$$

Les estimés sont donnés par les parties réelles et imaginaires des valeurs propres

$$\xi_i = 2 \tan^{-1}(\Im \{\lambda_i\}) \quad \text{et} \quad \phi_i = 2 \tan^{-1}(\Re \{\lambda_i\}). \quad (3.36)$$

3.2.2 Méthode JADE modifiée

Dans cette approche [76], on se propose d'utiliser plusieurs PRI consécutives ($M \geq 2$) du signal reçu collecté à la sortie de l'antenne pour estimer les paramètres

On suppose que θ_i et τ_i sont invariants durant les PRI considérées et que les termes d'atténuation sont variables d'une PRI à une autre. Rappelons la formule identité suivante

$$\text{vec}(X \text{diag}(Y)Z) = (Z^T \circ X)Y \quad (3.37)$$

en utilisant l'identité (3.37), l'équation (3.16) devient

$$\text{vec}(\tilde{\mathbf{X}}_i) = (\mathbf{F}^T \circ \mathbf{A})\mathbf{b}_i + \text{vec}(\tilde{\mathbf{V}}_i), \quad i = 1, \dots, M \quad (3.38)$$

Cette opération consiste à prendre la transposée de chaque rangée de la matrice et à l'empiler au dessous de la ligne précédente. La matrice de donnée obtenue par collection et empilement des vecteurs de données (3.38) conduit à la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \left[\text{vec}(\tilde{\mathbf{X}}_1) \quad \dots \quad \text{vec}(\tilde{\mathbf{X}}_M) \right] \\ &= \mathcal{A}\mathbf{B} + \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.39)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left[\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_M \right] \\ \mathcal{V} &= \left[\text{vec}(\tilde{\mathbf{V}}_1) \quad \dots \quad \text{vec}(\tilde{\mathbf{V}}_M) \right]. \end{aligned}$$

L'hypothèse de la variation des facteurs complexes d'une PRI à une autre est très importante. Dans notre approche, par l'utilisation de plusieurs PRI dans un seul bloc de traitement, ces facteurs remplacent l'utilisation de l'agilité de fréquence utilisée pour combattre le problème de l'évanouissement de la puissance dans le cas de cibles évoluant à basse altitude. Ceci se justifie par le fait que l'environnement de réflexion change d'une PRI à une autre et vu que ces facteurs complexes dépendent aussi de la fluctuation de la SER.

On utilise la même procédure pour rendre la matrice des données centro-hermitienne et on applique les étapes de dérivation des estimés de la section précédente, on applique les étapes données par l'équation (3.31) jusqu'à l'équation (3.36).

L'association automatique des DDA et des retards correspondants aident dans la prise de décision pour rejeter l'écho réfléchi par la surface de la terre. Dans notre formulation le retard temporel associé au signal direct est nul. Bien qu'il existe une association naturelle des paramètres (vu que le retard le plus fort correspond à la DDA indirecte), on fait une association automatique pour éviter, en cas d'erreur d'estimation sur l'un des paramètres, de propager l'erreur aux autres paramètres.

3.3 Performances : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation

3.3.1 Borne de Cramer-Rao

Dans plusieurs situations réelles, le bruit dépend de l'électronique du récepteur, du clutter et même de brouilleurs intentionnels. Le bruit est un processus aléatoire, Gaussien, stationnaire, temporellement blanc et spatialement non corrélé avec une matrice de covariance $\sigma^2 I$. Quand le bruit est dominé par le clutter, il est corrélé mais on peut toujours blanchir les données en utilisant des mesures en absence de cibles.

Pour l'obtention de la CRB, on utilise le signal en domaine temporel vu qu'il n'est pas sujet à des approximations, comme celui utilisé dans l'équation (3.16) pour le domaine fréquentiel. On développe d'abord la CRB pour la deuxième approche, puis on extrapole pour la première approche.

Les données qui nous intéressent sont représentées dans l'équation (3.9), on doit faire une transformation pour mettre l'équation sous une forme adéquate. Puis, on applique l'opérateur "vec" (voir l'équation (3.37)) à l'équation (3.9) et on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(m) &= \text{vec}(\mathbf{X}(n)) \\ &= (\mathbf{S}^{(\tau)T}(n) \circ \mathbf{A}(\theta))\beta(m) + \text{vec}(\mathbf{V}(n)) \\ &= \mathbf{U}(\theta, \tau)\beta(m) + \mathbf{v}(m) \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (3.40)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\theta, \tau) &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\tau_d}^T(n) \otimes \mathbf{A}(\theta_d) & \mathbf{S}_{\tau_r}^T(n) \otimes \mathbf{A}(\theta_r) \end{bmatrix} \\ \beta(m) &= \begin{bmatrix} \beta_d & \beta_r \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{v}(m) &= \text{vec}(\mathbf{V}(m)) \end{aligned}$$

Sous une forme matricielle

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}(\theta, \tau)\mathbf{B} + \mathbf{V} \quad (3.41)$$

où

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) & \dots & \mathbf{y}(M) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta(1) & \dots & \beta(M) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(M) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

On suppose que les coefficients de $\beta(m)$ dans l'équation (4.14) sont modélisés comme des coefficients inconnus mais déterministes.

La fonction *log-vraisemblance* du processus observé dans ce cas peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} \ln J(\eta) &= \text{const} - LNP \ln \sigma_v^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sigma_v^2} \left\{ \sum_{m=1}^M [\mathbf{y}(m) - \mathbf{U}(\theta, \tau)\beta(m)]^* [\mathbf{y}(m) - \mathbf{U}(\theta, \tau)\beta(m)] \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Soit la moyenne $\mu(m) = \mathbf{U}(\theta, \tau)\beta(m)$. Le vecteur des paramètres d'intérêt est $\eta = [\sigma_v^2 \ \Re(\beta(m)) \ \Im(\beta(m)) \ \theta \ \tau]$, $m = 0 \dots M-1$ où $\mathbf{K}_N \sigma_v^2 = \sigma^2/L$ est la variance du bruit relatif à v . Le premier et le second terme dans l'équation (3.45) ne nous intéresse pas. La matrice d'information de Fisher $J(\eta)$ a la forme suivante

$$J(\eta) = E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \ln(J(\eta)) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \ln(J(\eta)) \right]^T \right\} \quad (3.46)$$

Les dérivées partielles pour calculer la FIM sont

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \Re(\beta(m))} = \Re \mathbf{U}(\theta, \tau) \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \Im(\beta(m))} = \Im \mathbf{U}(\theta, \tau) \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(m)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \mathbf{U}(\theta_i, \tau_i)}{\partial \theta_i} \beta_i(m) \\ &= \mathbf{d}_{\theta_i} \beta_i(m), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

et similairement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(m)}{\partial \tau_i} &= \frac{\partial \mathbf{U}(\theta_i, \tau_i)}{\partial \tau_i} \beta_i(m) \\ &= \mathbf{d}_{\tau_i} \beta_i(m), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

où \mathbf{d}_{θ_i} est la dérivée selon θ_i de la i -ième colonne de $\mathbf{U}(\theta, \tau)$

$$\mathbf{d}_{\theta_i} = \mathbf{S}_{\tau_i}^T(n) \otimes \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_i)}{\partial \theta_i} \quad (3.51)$$

aussi

$$\mathbf{d}_{\tau_i} = \frac{\partial \mathbf{S}_{\tau_i}^T(n)}{\partial \tau_i} \otimes \mathbf{a}(\theta_i). \quad (3.52)$$

Soit $\mathbf{D}_\theta = [\mathbf{d}_{\theta_d} \ \mathbf{d}_{\theta_r}]$, et $\mathbf{D}_\tau = [\mathbf{d}_{\tau_d} \ \mathbf{d}_{\tau_r}]$

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \theta} = \mathbf{D}_\theta \text{diag}[\beta], \quad \frac{\partial \mu(m)}{\partial \tau} = \mathbf{D}_\tau \text{diag}[\beta]. \quad (3.53)$$

Pour mettre l'équation sous une forme compacte, soit

$$\vartheta = [\theta \ \tau], \quad \Xi = [\mathbf{D}_\theta \ \mathbf{D}_\tau] \quad \mathcal{B}(m) = I_{2 \times 2} \otimes \text{diag}[\beta(m)] \quad (3.54)$$

alors

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \vartheta} = \Xi \mathcal{B}(m). \quad (3.55)$$

En calculant les éléments FIM, on obtient la matrice d'information de Fisher

$$\begin{bmatrix}
 \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{K} & 0 & \dots & 0 & u(1) & v(1) \\
 0 & 0 & \mathbf{K} & \dots & 0 & u(2) & v(2) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{K} & u(M) & v(M) \\
 0 & u^T(1) & u^T(2) & \dots & u^T(M) & & \\
 0 & v^T(1) & v^T(2) & \dots & v^T(M) & & \Gamma
 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

où

$$\gamma = CRB_{\sigma_v^2}^{-1} \quad (3.57)$$

$$\Gamma = \frac{2}{\sigma_v^2} \sum_{m=1}^M \Re(\mathcal{B}(m)^* \Xi^*) (\Xi \mathcal{B}(m)) \quad (3.58)$$

$$u(m) = \frac{2}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_\theta \text{diag}[\beta]) \\ \Im(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_\theta \text{diag}[\beta]) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$v(m) = \frac{2}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_\tau \text{diag}[\beta]) \\ \Im(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_\tau \text{diag}[\beta]) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{K} = \frac{2}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) & -\Im(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) \\ \Im(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) & \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Pour les paramètres d'intérêt (θ et τ), leur matrice CRB est obtenue par l'utilisation de la propriété d'inversion de matrice symétrique partitionnée

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D} \\ -\mathbf{D}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

où $\mathbf{D} = (\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ est le bloc inférieur 4×4 de $CRB^{-1}(\vartheta)$, on obtient (en omettant l'indice entre parenthèses)

$$\begin{aligned}
 CRB^{-1} &= \Gamma - \begin{bmatrix} u^T(1) & u^T(2) & \dots & u^T(m) \\ v^T(1) & v^T(2) & \dots & v^T(m) \end{bmatrix} \\
 &\quad \cdot \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u(1) & v(1) \\ u(2) & v(2) \\ \vdots & \vdots \\ u(m) & v(m) \end{bmatrix} \\
 &= \Gamma - \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} u^T(m) \\ v^T(m) \end{bmatrix} K^{-1} \begin{bmatrix} u(m) & v(m) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{2}{\sigma_v^2} \sum_{m=1}^M \{ \Re(\mathcal{B}^* \Xi^* (I - \mathbf{U}(\mathbf{U}^* \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^*) \Xi \mathcal{B}) \}. \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

L'inversion des deux cotés de l'équation ci dessus, nous donne l'expression de la CRB.

En suivant les mêmes étapes, on dérive la CRB pour la première approche en mettant dans l'équation (3.63) $M = 1$, on a

$$CRB^{-1} = \frac{2}{\sigma_v^2} \Re [\mathcal{B}^* \Xi^* (I - \mathbf{U}(\mathbf{U}^* \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^*) \Xi \mathcal{B}]. \quad (3.64)$$

3.3.2 Résultats de simulation

Soit le scénario de simulation suivant : on suppose un modèle de la terre 4/3 [2] ; un radar situé à une hauteur de $h_r = 20$ mètres. L'antenne est linéaire, uniforme et composée de N éléments. La cible est à une distance de $R_0 = 65$ km (40 miles nautiques) évoluant à une altitude constante $h_t = 1500$ mètres et à une vitesse de 1000 m/s. Deux signaux sont reçus avec des DDA différentes qui dépendent de la position de la cible (altitude et distance). A chaque distance spécifique, ses différentes distances (r_1, r_2, R_1, R_2) et l'angle ψ (voir figure 1.7) sont évalués selon la géométrie curviligne. La procédure d'évaluation de ses différents paramètres est décrite dans le chapitre deux (voir aussi les références [2] et [81]). On compare les performances des approches proposées avec la méthode MUSIC combinée avec une technique de lissage. Les résultats sont obtenus après 500 exécutions de Monte-Carlo et comparés avec la borne CRB.

La précision, en terme de la variation de std (Standard deviation) des estimés (angles et retards relatifs) en fonction du RSB, est évaluée à chaque PRI par la collection de L échantillons dans la première approche (les paramètres k_1 et k_2 , utilisés dans les simulations, sont mis respectivement à 1 et 3) et sur M PRI dans la deuxième approche. La précision est évaluée à la portée R_0 , où la différence entre les échos direct et réfléchi n'excède pas 2 degrés et le retard relatif correspondant à la différence de trajet ne dépasse pas quelques mètres.

Les figures 3.3 et 3.4 montrent l'écart type en fonction du RSB pour l'estimation des DDA et retards relatifs et comparé à la borne CRB. Les valeurs des paramètres sont indiquées dans les figures. La std décroît quand le RSB augmente (une meilleure précision d'estimation est réalisée pour les deux approches).

On note que les résultats obtenus avec les deux approches dépassent ceux obtenus avec MUSIC combinée à la technique de lissage spatial. En plus, les deux approches donnent une estimation conjointe sans recherche exhaustive dans l'espace de valeurs des paramètres. On remarque aussi que les courbes n'atteignent pas celle de la borne CRB.

La figure 3.5 montre un exemple de poursuite d'angle d'arrivée des échos direct et réfléchi. On note que plus la cible s'approche du radar, plus la poursuite est meilleure. Ceci peut être expliqué par le fait que l'angle de dépression augmente quand la distance entre la cible et le radar diminue et par conséquent la séparation angulaire est plus importante.

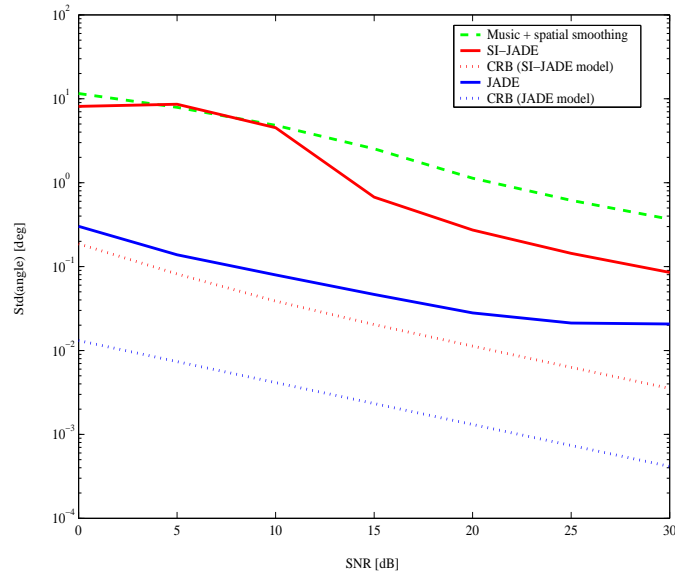


Fig. 3.3 — Estimation de DDA de l'écho réfléchi. Valeurs des paramètres : (première approche : $L = 200$, $N = 10$, $M = 1$, $R_0 = 65 \text{ km.}$, deuxième approche : $L = 200$, $M = 25$, $N = 10$, $R_0 = 65 \text{ km.}$)

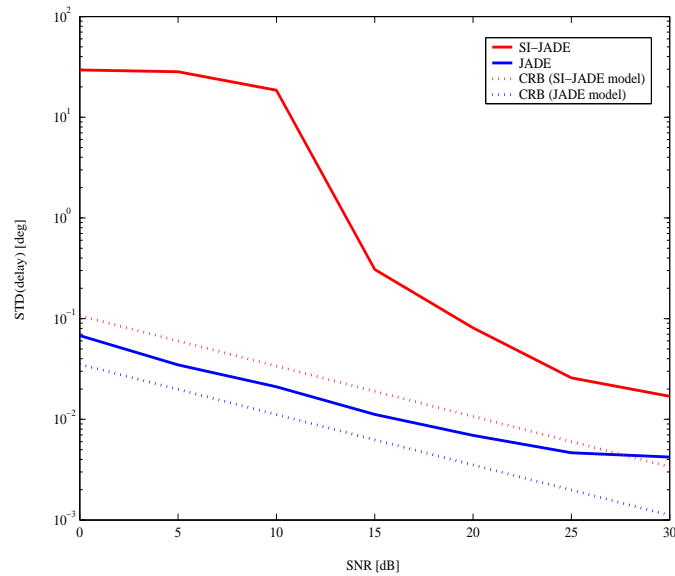


Fig. 3.4 — Estimation du retard temporel de l'écho réfléchi. Valeurs des paramètres : (Première approche : $M = 1$, $N = 10$, $R_0 = 65 \text{ km.}$ Deuxième approche : $M = 25$, $N = 10$, $R_0 = 65 \text{ km.}$)

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la dérivation de deux approches pour l'estimation des DDA et le retard temporel relatif dans une application radar. La différence entre les angles d'arrivées direct et indirect est une petite fraction de la largeur du fais-

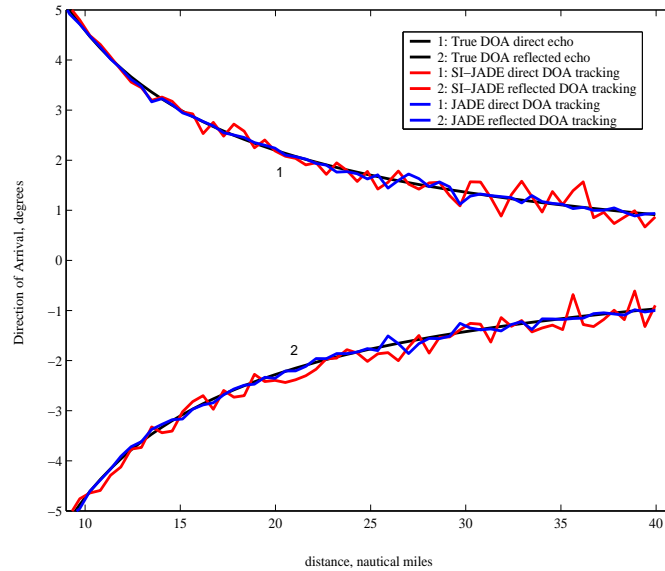


Fig. 3.5 — Poursuite de l'évolution de DDA (SI-JADE : $M = 200$, $N = 10$, $RSB = 20$ dB, JADE : $M = 25$, $N = 10$, $P = 5$, $RSB = 20$ dB).

ceau et le retard relatif est très petit comparé à la largeur de l'impulsion. La cible est observée par une antenne où le bruit est considéré temporellement et spatialement non corrélé. Deux approches ont été présentées : la première estime les paramètres à chaque PRI. La seconde considère plusieurs PRI consécutives. Les deux algorithmes se basent sur l'application de la DFT aux données collectées pour projeter le retard temporel en un déphasage dans le domaine fréquentiel. Puis, par construction d'une matrice de Hankel dans la première approche et l'application de l'opérateur de vectorisation aux données dans la seconde approche, le modèle des données est de la même forme qu'un modèle classique d'estimation de DDA. Ainsi, l'algorithme modifié 2D- ESPRIT est appliqué pour une estimation conjointe des retards et directions d'arrivée. Les simulations montrent que les performances obtenues avec les deux méthodes dépassent celles obtenues avec MUSIC.

Estimation Conjointe des Directions d'Arrivée/Fréquences Doppler

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré l'estimation des DDA avec les retards relatifs correspondants. Ceci n'est possible que si on suréchantillonne les signaux reçus à la sortie de chaque élément de l'antenne. Cette opération est fastidieuse en calcul et en espace mémoire. Dans ce chapitre, on prend en considération l'estimation conjointe des DDA et des fréquences Doppler pour séparer les échos incidents. Ceci nous conduit au traitement spatio-temporel. Pour améliorer les estimés de chaque signal, on doit choisir des cellules de distance très étroites pour diminuer le clutter, les interférences et améliorer le rapport signal à bruit.

Pour faire un traitement simultané, nous collectons des échantillons spatio-temporels des échos reçus durant des PRI consécutives à partir des sorties du réseau d'antennes. L'algorithme donne une estimation simultanée avec association automatique en utilisant l'algorithme 2D-ESPRIT. On suppose que les directions d'arrivée et fréquences Doppler ont une variation lente, ainsi seules leurs amplitudes sont affectées par l'évanouissement de puissance.

Les échos sont collectés avec une antenne à bande étroite constituée d'au moins deux éléments séparés par un espacement d'une demi longueur d'onde ou proche de cette valeur et les décalages Doppler sont petits comparés à la largeur de bande de l'impulsion, qui à son tour doit être plus petite que la fréquence porteuse.

L'ensemble des données est mis sous une forme spéciale pour pouvoir appliquer les techniques classiques d'estimation de DDA, tel que l'algorithme modifié 2D-ESPRIT [77] pour avoir une estimation conjointe des paramètres. Pour combattre certains problèmes qui surviennent dans la situation d'une cible évoluant à basse altitude, certaines techniques sont utilisées tels que le moyennage forward-backward [38] ou le lissage spatial [37].

4.1 Modélisation mathématique

On considère une antenne uniforme composée de N éléments identiques. On suppose que le radar observe ces formes d'ondes durant M PRI successives. Le scénario suivant est considéré : le radar reçoit un signal direct d'une direction d'angle d'élevation θ_d et un signal réfléchi à partir d'un angle θ_r (voir figure 4.1). Donc, pour $n = 1, \dots, N$, la sortie de chaque élément antenne peut être donnée par

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{a}_{d_n} \tilde{\beta}_d \mathbf{s}_d(t) + \mathbf{a}_{r_n} \gamma e^{-j\alpha} \tilde{\beta}_r \mathbf{s}_r(t) + \mathbf{v}_n(t) \quad (4.1)$$

où \mathbf{a}_{d_n} et \mathbf{a}_{r_n} sont les réponses des antennes aux signaux échos direct $\mathbf{s}_d(t)$ et indirect $\mathbf{s}_r(t)$, avec $\mathbf{s}_d(t) = s_{0d} e^{j2\pi f_d t}$ et $\mathbf{s}_r(t) = s_{0r} e^{j2\pi f_r (t-\tau)}$ et τ étant le retard relatif entre les trajets direct et indirect. s_{0d} et s_{0r} sont des facteurs d'atténuation dus à la propagation. $\tilde{\beta}_d$ et $\tilde{\beta}_r$ sont des facteurs complexes dus à la SER de la cible et $\mathbf{v}_n(t)$ est un bruit blanc et additif.

Pour des raisons de convenance, nous combinons les facteurs, qui apparaissent dans (4.1), $\tilde{\beta}_d$ et s_{0d} dans un seul facteur β_d et s_{0r} , γ , $e^{-j\alpha}$, et $\tilde{\beta}_r$ dans un autre facteur β_r , de façon que (4.1) devient

$$\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{a}_{d_n} \beta_d e^{j2\pi f_d t} + \mathbf{a}_{r_n} \beta_r e^{j2\pi f_r (t-\tau)} + \mathbf{v}_n(t). \quad (4.2)$$

Considérons l'ensemble des N éléments d'antenne, en utilisant la notation vectorielle, l'équation (4.2) peut être réécrite comme suit

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{S}(t, \tau, \mathbf{f}) + \mathbf{V}(t) \quad (4.3)$$

où $\mathbf{b} = [\beta_d \beta_r]^T$. La matrice du signal de dimension 2 est paramétrée comme suit $\mathbf{S}(t, \tau, \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} e^{j2\pi f_d t} & e^{j2\pi f_r (t-\tau)} \end{bmatrix}^T$, et la variété de l'antenne est définie par $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}_d \mathbf{a}_r]$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_d &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi \sin \theta_d \Delta / \lambda} & \dots & e^{-j(N-1)2\pi \sin \theta_d \Delta / \lambda} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{a}_r &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi \sin \theta_r \Delta / \lambda} & \dots & e^{-j(N-1)2\pi \sin \theta_r \Delta / \lambda} \end{bmatrix}^T \\ \theta &= [\theta_d \theta_r]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = [f_d f_r]^T \end{aligned}$$

où (θ_d, θ_r) et (f_d, f_r) sont respectivement, les directions d'arrivée et les fréquences Doppler des signaux direct et réfléchi. s_{0d} et s_{0r} sont les facteurs d'atténuation complexes correspondants, et Δ est l'espacement entre les éléments de l'antenne. Pour modéliser l'effet Doppler par un décalage de fréquence, la composante radiale de la vitesse de la cible doit être très faible devant la vitesse de propagation ($v/c \ll 1$) et le produit temps-largeur de bande de l'enveloppe complexe du signal doit être petit devant $c/(2v)$.

Le décalage fréquentiel entre les composantes direct et multi-trajets d'un signal cible est le résultat des composantes différentes de la vitesse de la cible projetées sur la ligne de vision radar et la ligne passant par le point de réflexion. Le décalage de la fréquence dû à la réflexion spéculaire est (voir figure 4.1)

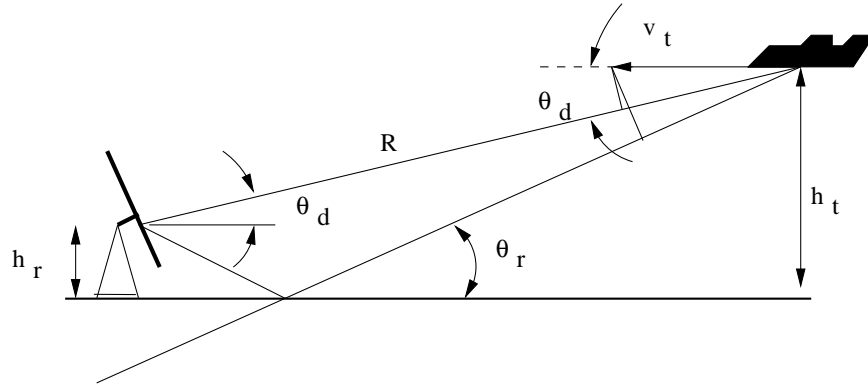


Fig. 4.1 — Vitesse de la cible et géométrie multi-trajets.

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= \frac{v_t}{\lambda} (\cos \theta_d - \cos \theta_r) \\
 &\approx \frac{v_t}{2\lambda} (\theta_d^2 - \theta_r^2) \\
 &= \frac{v_t h_t h_r}{\lambda R^2}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Les échos direct et indirect tombent dans la même cellule de distance vu qu'on utilise pas un suréchantillonnage. Ainsi, le retard relatif τ entre les deux trajets est assez petit et peut être négligé. Les deux signaux diffèrent par leurs amplitudes et leurs déphasages qui peuvent être incorporées dans les facteurs complexes. Alors, le modèle (4.3) devient

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_d & \mathbf{a}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_d & 0 \\ 0 & \beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j2\pi f_d t} \\ e^{j2\pi f_r t} \end{bmatrix} + \mathbf{V}(t) \tag{4.5}$$

Le bruit $\mathbf{V}(t)$ dépend des variables physiques, comme le bruit thermique, clutter et les interférences tel qu'un brouilleur. Donc, il est modélisé comme un processus aléatoire blanc et Gaussien.

4.2 Dérivation de la méthode Joint Angle and Frequency Estimation (JAFE)

Dans cette section, nous donnons les étapes de développement de la méthode. Notons que cette approche est différente de celle développée précédemment. Ainsi, aucune approximation, due à la transformation dans le domaine spectral, ni opération de déconvolution ne sont faites.

Les échantillons considérés sont disponibles pour le traitement en trois dimensions qui permet une discrimination des échos multiples en azimuth/élévation, distance et fréquence Doppler voir figure 4.2.

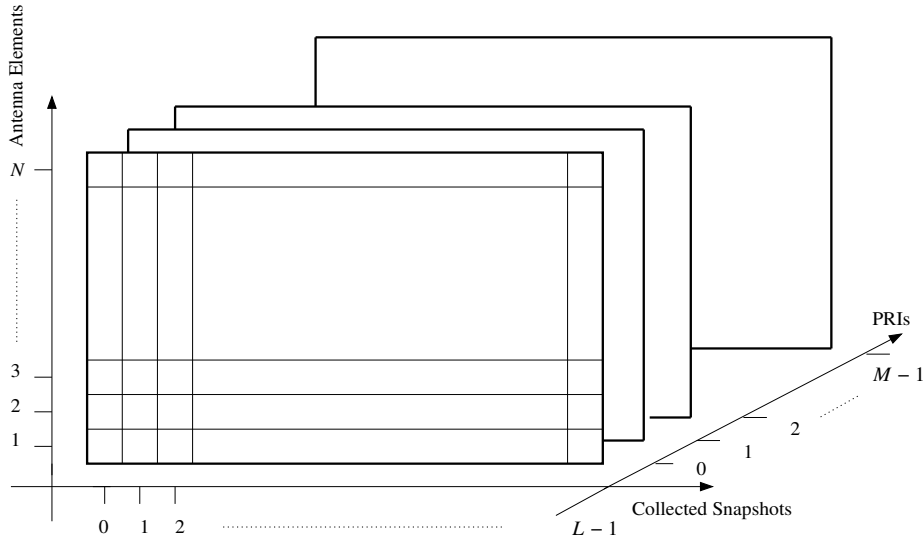


Fig. 4.2 — Données disponibles pour le traitement.

Dans notre cas, on s'intéresse à l'estimation de DDA-fréquence Doppler. On utilise plusieurs PRI consécutives ($M \geq 2$) du signal reçu, collectées aux sorties antennes pour avoir les estimés.

Supposons que $\mathbf{X}(t)$ est échantillonnée pour avoir L échantillons dans chacune des M fenêtres de distance (chaque fenêtre a une longueur T_R). Les échantillons sont séparés d'une quantité $\Delta t = \frac{T_R}{L}$. Les échantillons observés sont notés par $x^i(n, l)$ (l'échantillon à la $l^{\text{ième}}$ cellule distance, à la $i^{\text{ième}}$ PRI et à la sortie de la $n^{\text{ième}}$ sortie antenne) et sont donnés par $x^n(i, l) = x_n(t_{il})$ où t_{il} est l'indice temps

$$\begin{aligned} t_{il} &= (i-1)T_R + l\Delta t, \\ i &= 1, 2, \dots, M, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Le modèle obtenu est

$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{A}(\theta) \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{F}(n) + \mathbf{V}(n) \quad (4.6)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(n) &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\phi_d) \\ \mathbf{f}(\phi_r) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\phi_{d;r}) = [1 \quad \phi_{d;r} \quad \dots \quad \phi_{d;r}^{M-1}], \\ \phi_{d;r} &= e^{j f_{d;r} T_R} \end{aligned}$$

Après échantillonnage, on empile les données des impulsions à la sortie des éléments antennes à une cellule distance donnée l et à la $m^{\text{ième}}$ PRI

$$\mathbf{b}(l, m) = [\mathbf{x}_m^l(1) \quad \mathbf{x}_m^l(2) \quad \dots \quad \mathbf{x}_m^l(N)]^T \quad (4.7)$$

On forme ensuite un nouveau vecteur par empilement des vecteurs $\mathbf{b}(l, m)$ en variant l'indice l des cellules distances

$$\mathbf{g}(m) = [\mathbf{b}(1, m) \quad \mathbf{b}(2, m) \quad \dots \quad \mathbf{b}(L, m)]^T \quad (4.8)$$

L'étape suivante consiste à former la matrice de données par concatenation en colonne des vecteurs $\mathbf{g}(m)$ correspondants aux différentes PRI

$$\mathcal{X} = [\mathbf{g}(1) \quad \mathbf{g}(2) \quad \dots \quad \mathbf{g}(M)] \quad (4.9)$$

En faisant ainsi, l'opération est équivalente à l'application de l'identité suivante

$$\text{vec}(X \text{diag}(Y) Z) = (Z^T \circ X) Y \quad (4.10)$$

On fait l'hypothèse que θ_i et \bar{f}_i sont invariants sur les PRI considérées et les facteurs complexes varient d'une PRI à une autre.

En appliquant l'identité (4.10) à l'équation (4.6); on obtient

$$\text{vec}(\mathbf{X}_i) = (\mathbf{F}^T \circ \mathbf{A}) \mathbf{b}_i + \text{vec}(\mathbf{V}_i), \quad i = 1, \dots, M \quad (4.11)$$

Cette opération consiste à prendre le transposé de chaque rangée de la matrice et l'empiler au dessous de la transposé de la rangée précédente. La matrice des données est obtenue par la collection et l'empilement des vecteurs des données de (4.11) qui a la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= [\text{vec}(\tilde{\mathbf{X}}_1) \quad \dots \quad \text{vec}(\tilde{\mathbf{X}}_M)] \\ &= \mathcal{A} \mathbf{B} + \mathcal{V} \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbf{F}^T \circ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_M] \\ \mathcal{V} &= [\text{vec}(\tilde{\mathbf{V}}'_1) \quad \dots \quad \text{vec}(\tilde{\mathbf{V}}'_M)] \end{aligned}$$

L'hypothèse de variation des facteurs complexes d'une PRI à une autre est très importante. \mathcal{A} est une variété de l'antenne dirigée dans la direction θ et avec une fréquence normalisée \bar{f} . Cette matrice dépend de la géométrie de l'antenne et de la fréquence normalisée qui dépend de la vitesse de la cible par rapport à la plate forme radar. Quand θ et \bar{f} varient, la matrice trace une variété bidimensionnelle espace-fréquence, avec d trajets, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbf{F}^T(\phi) \circ \mathbf{A}(\theta) \\ &= [\mathbf{f}(\phi_1) \otimes \mathbf{a}(\theta_1) \quad \dots \quad \mathbf{f}(\phi_d) \otimes \mathbf{a}(\theta_d)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

On utilise l'algorithme modifié 2D-ESPRIT ([80], [77]) (voir annexe A pour les détails) pour avoir une association automatique des estimés DDA et des fréquences Doppler.

On utilise la même procédure de dérivation des estimés donnée dans le chapitre précédent, on applique les étapes données par l'équation 3.31 jusqu'à l'équation 3.36.

L'association automatique des DDA et des fréquences Doppler correspondantes aide dans la prise de décision pour la réjection de l'écho réfléchi par la surface de la terre.

4.3 Performance : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation

4.3.1 Borne de Cramer-Rao

Pour la dérivation de la borne CRB, on utilise le signal en domaine temporel (sans aucune approximation). Les données sont formulées dans l'équation (4.6), on fait une transformation pour mettre l'équation sous une forme adéquate. Puis, on applique l'opérateur "vec" (voir l'équation (4.10)) à l'équation (4.6), on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(m) &= \text{vec}(\mathbf{X}(n)) \\ &= (\mathbf{F}^T(n) \circ \mathbf{A}(\theta))\beta(m) + \text{vec}(\mathbf{V}(n)) \\ &= \mathbf{U}(\theta, \bar{f})\beta(m) + \mathbf{v}(m), \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.14)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\theta, \bar{f}) &= [\mathbf{s}_{\tau_d}^T(n) \otimes \mathbf{a}(\theta_d) \quad \mathbf{s}_{\tau_r}^T(n) \otimes \mathbf{a}(\theta_r)] \\ \beta(m) &= [\beta_d \quad \beta_r]^T \\ \mathbf{v}(m) &= \text{vec}(\mathbf{V}(m)) \end{aligned}$$

Sous une forme matricielle

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}(\theta, \bar{f})\mathbf{B} + \mathbf{V} \quad (4.15)$$

où

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1) \quad \dots \quad \mathbf{y}(M)] \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B} = [\beta(1) \quad \dots \quad \beta(M)] \quad (4.17)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}(1) \quad \dots \quad \mathbf{v}(M)] \quad (4.18)$$

On considère les coefficients de $\beta(m)$, dans l'équation (4.14), modélisés comme des coefficients inconnus mais déterministes.

La fonction *log-vraisemblance* du processus observé dans ce cas peut être exprimée par

$$\ln J(\eta) = \text{const} - MNL \ln \sigma_v^2 - \frac{1}{\sigma_v^2} \left\{ \sum_{m=1}^M [\mathbf{y}(m) - \mathbf{U}(\theta, \bar{f})\beta(m)]^* [\mathbf{y}(m) - \mathbf{U}(\theta, \bar{f})\beta(m)] \right\} \quad (4.19)$$

Soit la moyenne $\mu(m) = \mathbf{U}(\theta, \bar{f})\beta(m)$. Le vecteur paramètre d'intérêt est $\eta = [\sigma_v^2 \quad \Re(\beta(m)) \quad \Im(\beta(m)) \quad \theta \quad \bar{f}]$, où $\sigma_v^2 = \sigma^2/M$ est la variance du bruit relative à v . Les deux premiers termes dans l'équation (4.19) ne sont pas d'intérêt. La matrice d'information de Fisher $J(\eta)$ a la forme suivante

$$J(\eta) = E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \ln(J(\eta)) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln(J(\eta)) \right]^T \right\} \quad (4.20)$$

Les dérivées partielles pour calculer la FIM sont

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \Re(\beta(m))} = \Re \mathbf{U}(\theta, \bar{f}) \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \Im(\beta(m))} = \Im \mathbf{U}(\theta, \bar{f}) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(m)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \mathbf{U}(\theta_i, \bar{f}_i)}{\partial \theta_i} \beta_i(m) \\ &= \mathbf{d}_{\theta_i} \beta_i(m), i = 1, 2 \end{aligned}$$

et d'une façon similaire,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(m)}{\partial f_i} &= \frac{\partial \mathbf{U}(\theta_i, \bar{f}_i)}{\partial f_i} \beta_i(m) \\ &= \mathbf{d}_{\bar{f}_i} \beta_i(m), i = 1, 2 \end{aligned}$$

où \mathbf{d}_{θ_i} est la dérivée selon θ_i de la i -ième colonne de $\mathbf{U}(\theta, \bar{f})$

$$\mathbf{d}_{\theta_i} = \mathbf{s}_{\bar{f}_i}^T(n) \otimes \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_i)}{\partial \theta_i} \quad (4.23)$$

aussi

$$\mathbf{d}_{\bar{f}_i} = \frac{\partial \mathbf{s}_{\bar{f}_i}^T(n)}{\partial f_i} \otimes \mathbf{a}(\theta_i). \quad (4.24)$$

Soit $D_\theta = [\mathbf{d}_{\theta_d} \quad \mathbf{d}_{\theta_r}]$, et $D_{\bar{f}} = [\mathbf{d}_{\bar{f}_d} \quad \mathbf{d}_{\bar{f}_r}]$

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \theta} = \mathbf{D}_\theta \text{diag}[\beta], \quad \frac{\partial \mu(m)}{\partial \bar{f}} = \mathbf{D}_{\bar{f}} \text{diag}[\beta]. \quad (4.25)$$

Pour mettre l'équation sous une forme compacte, soit

$$\vartheta = [\theta \quad \bar{f}], \quad \Xi = [\mathbf{D}_\theta \quad \mathbf{D}_{\bar{f}}] \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(m) = \mathbf{I}_2 \otimes \text{diag}[\beta(m)] \quad (4.26)$$

alors

$$\frac{\partial \mu(m)}{\partial \vartheta} = \Xi \mathcal{B}(m). \quad (4.27)$$

Après le calcul des éléments de la FIM, on obtient la matrice d'information de Fisher

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & 0 & \dots & 0 & u(1) & v(1) \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & \dots & 0 & u(2) & v(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{K} & u(M) & v(M) \\ 0 & u^T(1) & u^T(2) & \dots & u^T(M) & & \\ 0 & v^T(1) & v^T(2) & \dots & v^T(M) & & \Gamma \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

où

$$\gamma = CRB_{\sigma_v^2}^{-1} \quad (4.29)$$

$$\Gamma = \frac{2}{\sigma_v^2} \sum_{m=1}^M \Re(\mathcal{B}(m)^* \Xi^*) (\Xi \mathcal{B}(m)) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} u(m) &= \frac{2}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_\theta \text{diag}[\beta]) \\ \Im(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_\theta \text{diag}[\beta]) \end{bmatrix} \\ v(m) &= \frac{2}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_{\bar{f}} \text{diag}[\beta]) \\ \Im(\mathbf{U}^* \mathbf{D}_{\bar{f}} \text{diag}[\beta]) \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \frac{2}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) & -\Im(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) \\ \Im(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) & \Re(\mathbf{U}^* \mathbf{U}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pour les paramètres d'intérêt (θ et \bar{f}), la matrice CRB est obtenue par l'utilisation de la formule d'inversion de matrice symétrique partitionnée

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BC^{-1}B^T)^{-1} & -A^{-1}BD \\ -DB^T A^{-1} & D \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

où $D = (C - B^T A^{-1} B)^{-1}$ est le bloc inférieur 2×2 de $CRB^{-1}(\vartheta)$, on obtient

$$\begin{aligned} CRB^{-1} &= \Gamma - \begin{bmatrix} u^T(1) & u^T(2) & \dots & u^T(m) \\ v^T(1) & v^T(2) & \dots & v^T(m) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u(1) & v(1) \\ u(2) & v(2) \\ \vdots & \vdots \\ u(m) & v(m) \end{bmatrix} \\ &= \Gamma - \sum_{n=1}^M \begin{bmatrix} u^T(n) \\ v^T(n) \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} u(n) & v(n) \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\sigma_v^2} \sum_{m=1}^M \{ \Re(\mathcal{B}^* \Xi^* (\mathbf{I} - \mathbf{U}(\mathbf{U}^* \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^*) \Xi \mathcal{B}) \}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

L'inversion des deux cotés de l'équation ci dessus donne l'expression de la borne CRB.

4.3.2 Résultats de simulation

On reprend le même scénario de simulation utilisé dans le chapitre précédent, les valeurs des différents paramètres sont indiquées dans les figures.

Les figures 4.3 et 4.4 montrent la variation de l'écart type en fonction du RSB pour les estimés des DDA et des fréquences Doppler, respectivement, comparée à la borne de Cramer-Rao. La std décroît quand le RSB augmente, une meilleure précision est accomplie. On remarque aussi que la borne CRB n'est pas atteinte.

La figure 4.5, montre un exemple de poursuite de DDA des échos direct et indirect. La précision de la poursuite s'améliore au fur et à mesure que la cible s'approche du site radar.

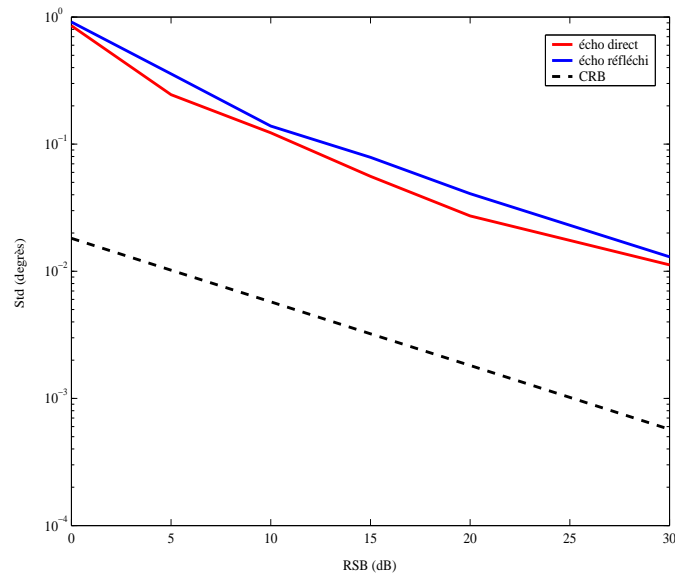


Fig. 4.3 — Estimation de DDA de l'écho réfléchi. Valeurs des paramètres : $L = 100$, $N = 16$, $M = 14$, $R_0 = 32 \text{ km}$.

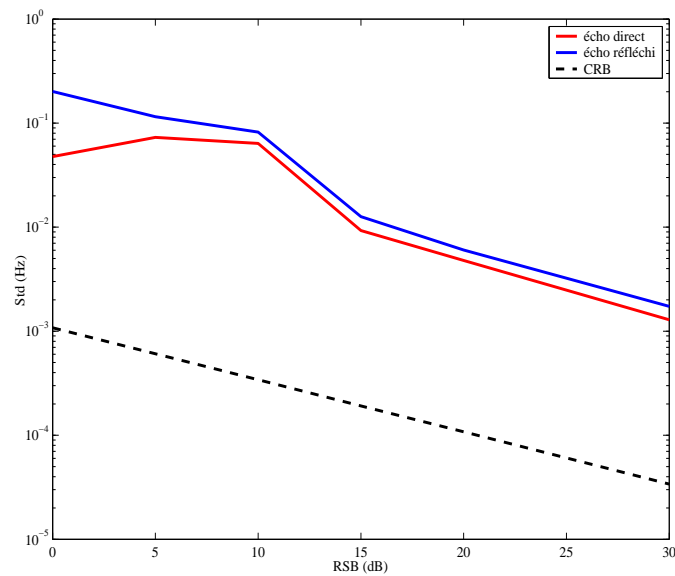


Fig. 4.4 — Estimation de la fréquence Doppler de l'écho réfléchi. Valeurs des paramètres : $L = 100$, $N = 16$, $M = 14$, $R_0 = 32 \text{ km}$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche d'estimation conjointe de DDA et fréquence Doppler. La méthode considère plusieurs PRI consécutives. L'algorithme est basé sur l'application d'une structure spécifique spatio-temporelle qui est équivalente à l'application de l'opérateur de vectorisation aux données. Le modèle de donnée devient de la même forme qu'un modèle classique d'estimation de DDA. Alors,

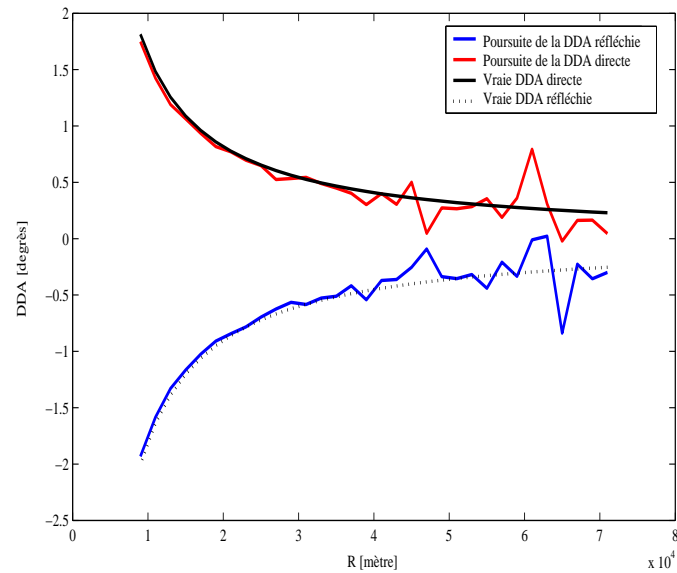


Fig. 4.5 — Poursuite de l'évolution des angles d'arrivée ($L = 100$, $N = 16$, $M = 14$, $RSB = 20$ dB).

l'algorithme modifié 2D-ESPRIT est appliqué pour une estimation conjointe des DDA et des fréquences Doppler des échos direct et indirect. Les simulations montrent les performances de la méthode et une comparaison avec la borne de Cramer-Rao est donnée.

CHAPITRE

5

Estimation Conjointe des Directions d'Arrivée/Fréquences Doppler : Cas d'un bruit non blanc

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de l'estimation des paramètres (DDA et FD) en supposant un bruit non blanc. Deux approches sont considérées, la première est une extension à deux dimensions de l'algorithme AML. Dans cette approche, la matrice de covariance est paramétrée par une sommation d'un produit de matrices connues avec des vecteurs inconnus. Dans la seconde approche, le bruit est divisé en deux composantes, l'une structurée et l'autre non structurée. La méthode de dérivation repose sur l'application de la solution du filtrage "zero forcing" en conjonction avec des projecteurs obliques pour obtenir une estimée de la matrice de covariance du bruit. Dans les deux cas, le défi est la réduction de la dimension de recherche dans la fonction coût du maximum de vraisemblance à minimiser.

5.1 Modélisation des données

Les échantillons considérés sont disponibles en trois dimensions pour le traitement. Ceci permet la discrimination des échos multiples en azimuth/élévation, distance et fréquence Doppler, d'une façon similaire au modèle STAP (Space-Time Adaptive Processing) (voir Figure 4.2). Dans notre cas, on s'intéresse à l'estimation conjointe des DDA et des FD. La troisième dimension (portée) est utilisée pour réduire l'effet de l'évanouissement de la puissance des signaux reçus d'une cible évoluant à basse altitude. On utilise plusieurs PRI consécutives ($M \geq 2$) pour calculer les estimés. On suppose que les DDA et les FD sont invariantes durant les PRI considérées, tandis que le facteur complexe varie d'une PRI à une autre i.e., \mathbf{b}_m , $m = 0, \dots, M - 1$.

Supposons que $\mathbf{x}(t)$ est échantillonné à une cadence très élevée avec L échantillons dans chacune des M PRI (chaque PRI a une longueur T_R). Les échantillons sont séparés par une quantité $\Delta t = \frac{T_R}{L}$. Les échantillons observés sont notés par $x_n(t_{l,m})$ (l'échantillon dans la l^{ieme} cellule distance, dans la m^{ieme} PRI et à la sortie du n^{ieme} élément antenne), avec $n = 1, \dots, N$; $l = 0, \dots, L - 1$ et $m = 0, \dots, M$, où $t_{l,m}$ est l'indice temps donné par

$$t_{l,m} = mT_R + l\Delta t \quad (5.1)$$

Ainsi, en omettant pour simplifier, la dépendance en θ et \mathbf{f} , les données reçues durant la m^{ieme} PRI peuvent être arrangées sous une forme matricielle comme suit

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}_m) \mathbf{S}_m + \mathbf{V}_m \quad (5.2)$$

où

$$\mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} \phi_d^{mT_R} & \phi_d^{\Delta t+mT_R} & \dots & \phi_d^{(L-1)\Delta t+mT_R} \\ \phi_r^{mT_R} & \phi_r^{\Delta t+mT_R} & \dots & \phi_r^{(L-1)\Delta t+mT_R} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

avec

$$\phi_d = e^{j2\pi f_d}; \quad \phi_r = e^{j2\pi f_r} \quad (5.4)$$

et

$$\mathbf{V}_m = [\mathbf{v}(t_{0,m}), \dots, \mathbf{v}(t_{(L-1),m})] \quad (5.5)$$

En définissant les matrices suivantes

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_d^{T_R} & \dots & \phi_d^{(i-1)T_R} & \dots & \phi_d^{(M-1)T_R} \\ 1 & \phi_r^{T_R} & \dots & \phi_r^{(i-1)T_R} & \dots & \phi_r^{(M-1)T_R} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_d^{\Delta t} & \dots & \phi_d^{(l-1)\Delta t} & \dots & \phi_d^{(L-1)\Delta t} \\ 1 & \phi_r^{\Delta t} & \dots & \phi_r^{(l-1)\Delta t} & \dots & \phi_r^{(L-1)\Delta t} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

le modèle de la matrice (5.2) pour la m^{ieme} PRI, peut être écrit comme suit

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}_m) [\text{diag}(\mathbf{e}_m) \mathbf{F}] + \mathbf{V}_m \quad (5.8)$$

où \mathbf{e}_m est la m^{ieme} colonne de \mathbf{E} .

Après échantillonnage, les colonnes de \mathbf{X}_m sont concatenées dans un vecteur \mathbf{y}_m de dimension LN comme suit

$$\mathbf{y}_m = \text{vec}(\mathbf{X}_m) \quad (5.9)$$

Pour des matrices arbitraires \mathbf{A} , \mathbf{C} et une matrice diagonale $diag(\mathbf{b})$, il est vérifié que $vec(\mathbf{A}diag(\mathbf{b})\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^T \circ \mathbf{A}) \mathbf{b}$, ainsi, il est facile d'écrire (5.9) comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m &= vec\{\mathbf{A} diag(\mathbf{b}_m) [diag(\mathbf{e}_m) \mathbf{F}] + \mathbf{V}_m\} \\ &= (\mathbf{F}^T \circ \mathbf{A}) vec[\mathbf{b}_m^T diag(\mathbf{e}_m)] + vec(\mathbf{V}_m) \\ &= (\mathbf{F}^T \circ \mathbf{A}) (\mathbf{b}_m \odot \mathbf{e}_m) + vec(\mathbf{V}_m) \end{aligned} \quad (5.10)$$

En répétant la même opération sur toutes les M PRI et en arrangeant les données obtenues dans une matrice

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_M] \quad (5.11)$$

$$= \mathbf{U}(\theta, \mathbf{f})\mathbf{H} + \mathbf{N} \quad (5.12)$$

où la matrice de direction espace-fréquence est définie par $\mathbf{U}(\theta, \mathbf{f}) = \mathbf{F}^T \circ \mathbf{A}$, et $\mathbf{H} = \mathbf{B} \odot \mathbf{E}$, avec $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_M]$. L'effet du bruit additif est donné par $\mathbf{N} = [vec(\mathbf{V}_1) \ \dots \ vec(\mathbf{V}_M)]$. Selon que les paramètres d'environnement sont supposés stables ou fluctuants, \mathbf{H} est modélisé comme inconnu déterministe ou aléatoire avec une densité de probabilité décrite dans [57]. Pour la simplicité et sans perte de généralité, on s'intéresse seulement au cas Swerling I [57], où l'amplitude à travers le train de PRI collecté est considérée comme une seule variable aléatoire ayant une distribution de Rayleigh, et la phase initiale de l'impulsion uniformément distribuée sur $[0 \ 2\pi]$.

Le traitement des données reçues sur plusieurs PRI dans un seul bloc exploite la diversité contenue dans les mesures multi dimensionnelles et réduit l'effet d'annulation de puissance présent dans un scénario des cibles rasantes, permettant l'estimation d'autant de trajets que de nombre d'antennes. θ et \mathbf{f} dépendent, respectivement, de la géométrie de l'antenne et de la vitesse de la cible. Quand ces paramètres varient, la matrice \mathbf{U} dans (5.12) décrit une variété spatio-fréquentielle. Notons qu'il est facile de faire l'extension du modèle au cas avec plusieurs trajets. Ainsi, si le nombre de trajets est d , la dimension de la matrice de variété $\mathbf{U}(\theta, \mathbf{f})$ est $LN \times d$, et la condition nécessaire sur $\mathbf{U}(\theta, \mathbf{f})$ pour l'identifiabilité des paramètres inconnus est $LN \geq d$ et $\mathbf{U}(\theta, \mathbf{f})$ est à rang plein d . Donc, si $d > 2$, on exige seulement $N = 2$ éléments d'antenne pour estimer les trajets inconnus, sous la condition que le nombre d'échantillons L dans chaque PRI est assez important. Dans ce qui suit, on suppose que les données sont modélisées comme un processus Gaussien, stochastique, avec une matrice de covariance des données \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} [\mathbf{y}_m \mathbf{y}_m^H] = \mathbf{U} \mathbf{R}_H \mathbf{U}^H + \mathbf{Q} \quad (5.13)$$

où \mathbf{R}_H est la matrice de covariance des facteurs d'échelle complexes inconnus dans \mathbf{H} , collectés à travers les M PRI, et \mathbf{Q} est la matrice de covariance du bruit \mathbf{N} . Puisque une mesure parfaite de \mathbf{R} ne peut être obtenue, la covariance $\hat{\mathbf{R}}$ définie par

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{y}_m \mathbf{y}_m^H \quad (5.14)$$

est utilisée. Définissons aussi le vecteur des paramètres inconnus réels $\eta = [\theta^T, \mathbf{f}^T, \rho^T, \mathbf{q}^T]^T$, ρ et \mathbf{q} étant les vecteurs d'éléments réels (partie réelle et partie

imaginaire) des éléments de \mathbf{R}_H et \mathbf{Q} . La fonction de vraisemblance d'une observation, $\mathbf{y}_m(t)$, est

$$l_m(\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{R})} e^{-\mathbf{y}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}} \quad (5.15)$$

5.2 Modèle du bruit

Dans (5.13), les hypothèses suivantes sur le bruit sont considérées

$$\begin{aligned} E[\mathbf{n}_m \mathbf{n}_n^H] &= \mathbf{Q} \delta_{mn} \\ E[\mathbf{n}_m \mathbf{n}_n^T] &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Les échantillons du bruit, \mathbf{n}_m (colonnes de \mathbf{N}) dans (5.12) sont modélisés comme une combinaison de deux parties. La première partie \mathbf{w}_m , est un bruit non structuré généré par l'électronique du récepteur. La seconde partie est un bruit externe structuré \mathbf{z}_m , résultant d'une opération de filtrage d'un processus inconnu ω_m à travers un système linéaire connu $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{LN \times K}$. Ce processus linéaire peut être vu comme un ensemble de K matrices de base formant le sous espace bruit (structuré). La dimension de \mathbf{G} est $LN \times K$, avec $LN \geq K$ et K connu. La matrice \mathbf{G} est connue à une matrice unitaire près. Ainsi, on peut modéliser le bruit additif comme

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_m &= \mathbf{z}_m + \mathbf{w}_m \\ &= \mathbf{G} \omega_m + \mathbf{w}_m \end{aligned} \quad (5.17)$$

La matrice de covariance est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{G} \omega \omega^H \mathbf{G}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_{LN-1} \\ \mathbf{q}_1^H & \mathbf{q}_0 & \cdots & \mathbf{q}_{LN-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_{LN-1}^H & \mathbf{q}_{LN-2}^H & \cdots & \mathbf{q}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.18)$$

où $\mathbf{q}_0 = \sigma^2$ est la puissance du bruit non structuré. Le vecteur de dimension $(2LN - 1)$ des paramètres inconnus du bruit est alors donné par $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_0, \Re(\mathbf{q}_1), \Im(\mathbf{q}_1), \dots, \Re(\mathbf{q}_{LN-1}), \Im(\mathbf{q}_{LN-1})]^T$.

Plus généralement, \mathbf{Q} peut être modélisée d'une autre façon, par une combinaison de $2LN - 1$ matrices de pondérations connues Φ_i et un ensemble de paramètres réels inconnus q_i (les éléments de \mathbf{q}) [58, 64], i.e.,

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{2LN-1} q_i \Phi_i \quad (5.19)$$

Un modèle de la matrice de covariance du bruit structuré doit être introduit pour assurer l'identifiabilité. Plusieurs modèles qui peuvent être écrits sous la forme (5.19) sont apparus dans la littérature [84], [83], et [82]. Dans ce qui suit on n'utilise aucune propriété autre que celle imposée par (5.19). Cependant, pour assurer que la paramétrisation utilisée donne une estimation unique, certaines restrictions sur le nombre

d'inconnus K sont bien sûre nécessaires. Si on suppose que le bruit de fond et le bruit du détecteur sont blanc mais avec des variances différentes dans tous les éléments, la matrice de covariance du bruit est diagonale avec des éléments diagonales différents ; $\mathbf{Q} = \text{diag}(\sigma_1 \dots \sigma_K)$. Alors, il est évident de choisir les matrices $\Phi_i = E_{ii}$ où E_{ii} a l'élément (i, i) égale à 1 et zéro ailleurs. Une autre possibilité, vérifiable pour un réseau d'antennes uniforme et linéaire, est que le bruit soit corrélé le long du réseau mais avec une profondeur de corrélation de N éléments. Ceci donne une matrice de covariance du bruit qui est en bande, hermitienne et Tœplitz avec une largeur de bande de profondeur N' ,

$$Q(k, l) = 0 \quad \forall |k - l| > N' \quad (5.20)$$

vu la structure hermitienne, il y a $K = 2N' + 1$ inconnues et ce sont des paramètres à valeurs réelles. Dans ce cas les matrices Φ_i sont composées de zéros, ± 1 , et/ou $\pm j$ le long des différentes diagonales. Un modèle pour le bruit ambiant basé sur l'expansion en série de Fourier de la fonction densité de puissance spatiale du bruit est présentée dans [83], et [82]. Il a été montré que cette approche conduit à une matrice de covariance du bruit approximative qui consiste en une somme de coefficient de Fourier pondérés. Les matrices de pondération sont fonction de la géométrie de l'antenne donc connus.

5.3 Développement des méthodes du maximum de Vraisemblance

En se basant sur la fonction de vraisemblance d'une observation (5.15), et vu que les échantillons sont indépendants et identiquement distribués, la vraisemblance de l'ensemble des données est donnée par

$$l(\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_M) | \eta) = \prod_{m=1}^M \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{R})} e^{-\mathbf{y}^H(t_m) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}(t_m)} \quad (5.21)$$

La fonction $\log(\cdot)$ étant monotone, la maximisation de $l(\eta)$ est équivalente à la minimisation de la fonction *log-vraisemblance*,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta) &= -\log(l(\eta)) \\ &= -\sum_{m=1}^M \log \left(\frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{R}(\eta))} e^{-\mathbf{y}^H(t_m) \mathbf{R}(\eta)^{-1} \mathbf{y}(t_m)} \right) \\ &= NM \log \pi + M \log \det(\mathbf{R}(\eta)) + \sum_{m=1}^M \mathbf{y}^H(t_m) \mathbf{R}(\eta)^{-1} \mathbf{y}(t_m) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Après normalisation (selon M) et en omettant les termes constants,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta) &= \log \det(\mathbf{R}(\eta)) + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{y}^H(t_m) \mathbf{R}(\eta)^{-1} \mathbf{y}(t_m) \\ &= \log \det(\mathbf{R}(\eta)) + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \text{Tr}(\mathbf{y}^H(t_m) \mathbf{R}(\eta)^{-1} \mathbf{y}(t_m)) \\ &= \log \det(\mathbf{R}(\eta)) + \text{Tr}\{\mathbf{R}^{-1}(\eta) \hat{\mathbf{R}}\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

On considère l'expression de la fonction de vraisemblance en fonction des éléments ρ de \mathbf{R}_H . On peut montrer qu'un estimateur consistant de \mathbf{R}_H peut être obtenu comme [58]

$$\hat{\mathbf{R}}_H = \{(\mathbf{U}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Q}^{-1}\} (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{Q}) \{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U})^{-1}\}. \quad (5.24)$$

Le remplacement de (5.24) dans (5.13) et ensuite dans la fonction *log-vraisemblance* (5.23) réduit clairement la dimension de la procédure de recherche dans l'opération d'optimisation. Cependant, l'optimisation directe reste non pratique vu la dépendance entre les paramètres inconnus ce qui implique d'importante non linéarité et reste ainsi non attractive. A ce stade, on essaye de simplifier davantage la fonction coût par le remplacement de \mathbf{Q} par une estimée favorable $\hat{\mathbf{Q}}$. Dans ce qui suit, nous décrivons deux approches pour résoudre le problème.

5.3.1 Méthode "Approximate Maximum Likelihood-Oblique Projection (AML-OP)"

En définissant les matrices suivantes $\mathbf{\Omega} = [\omega_1, \dots, \omega_M]$, $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M]$ et en utilisant les équations (5.10) et (5.17), l'équation (5.12) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{U}\mathbf{H} + \mathbf{G}\mathbf{\Omega} + \mathbf{W} \\ &= [\mathbf{U} \ \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} + \mathbf{W} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pourvue que la matrice composite $[\mathbf{U} \ \mathbf{G}]$ soit de rang plein et $2 + K \leq LN$ et nous supposons que le signal et l'interférence domine le bruit de fond, la solution du filtrage "Zero-Forcing" de l'équation (5.25) est donnée par [63]

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}} \\ \hat{\mathbf{\Omega}} \end{bmatrix} = [\mathbf{U} \ \mathbf{G}]^\# \mathbf{Y} \quad (5.26)$$

En utilisant des propriétés matricielles, l'équation (5.26) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}} \\ \hat{\mathbf{\Omega}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \mathbf{U} & \mathbf{U}^T \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{U} & \mathbf{G}^T \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \\ \mathbf{G}^T \end{bmatrix} \mathbf{Y} \\ &= \mathcal{H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T \\ \mathbf{G}^T \end{bmatrix} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Rappelons que la fonction *log-vraisemblance* est à exprimer en fonction des paramètres du bruit. On s'intéresse à l'estimation de $\mathbf{\Omega}$. Appliquons la formule d'inversion de matrices partitionnées (2×2), \mathcal{H}^{-1} peut être exprimée par

$$\mathcal{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_3 & \mathcal{H}_4 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} - \mathbf{B}]^{-1 T} \mathbf{A}^{-1} \\ \mathcal{H}_2 &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} - \mathbf{B}]^{-1} \\ \mathcal{H}_3 &= [\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} - \mathbf{B}^T]^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \\ \mathcal{H}_4 &= -[\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} - \mathbf{B}]^{-1} \end{aligned}$$

où $\mathcal{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$; $\mathcal{B} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}$ et $\mathcal{C} = \mathbf{U}^T \mathbf{G}$. $\hat{\Omega}$ est alors exprimé par :

$$\hat{\Omega} = (\mathcal{H}_3 \mathbf{U}^T + \mathcal{H}_4 \mathbf{G}^T) \mathbf{Y} \quad (5.29)$$

ou d'une façon équivalente, en utilisant les expressions de \mathcal{H}_3 et \mathcal{H}_4 , et après quelques manipulations algébriques,

$$\hat{\Omega} = (\mathbf{P}_{\mathbf{U}}^\perp \mathbf{G})^\# \mathbf{Y} \quad (5.30)$$

où $\mathbf{P}_{\mathbf{U}}^\perp$ est un projecteur orthogonal sur \mathbf{U} , donné par $\mathbf{P}_{\mathbf{U}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H$, \mathbf{I} étant la matrice identité avec la dimension appropriée. Notons que le projecteur est obtenu avec une variété d'antenne pour une variation d'échelle 2D des DDA et FD. Ce traitement peut être réalisé en "off-line" puisqu'il ne dépend pas des données.

Les techniques classiques de suppression du bruit en utilisant les projections orthogonales ont été développées pour les bruits de fond. Ces techniques modélisent le signal utile comme un vecteur évoluant sur un sous espace à rang réduit et le bruit comme un vecteur aléatoire qui peut exister dans n'importe où dans l'espace d'observation. Nous pouvons permettre aussi une modélisation du bruit corrélé par application d'une forme de densité de probabilité au vecteur bruit. Un autre cas de modélisation est la permission d'une dépendance totale de certains échantillons du bruit. En supposant que des composantes significatives du bruit évoluent dans un sous espace linéaire, ce bruit est dit bruit structuré. Quand une composante du bruit structuré est incluse dans un modèle des données reçues, les projections obliques émergent naturellement pour récupérer le signal utile (voir appendice B pour les détails des mathématiques des projections obliques).

En utilisant la structure connue de \mathbf{G} , l'estimateur du bruit structuré est

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}} &= \mathbf{G} \hat{\Omega} \\ &= \mathbf{G} (\mathbf{P}_{\mathbf{U}}^\perp \mathbf{G})^\# \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{G}\mathbf{U}} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (5.31)$$

où $\mathbf{E}_{\mathbf{G}\mathbf{U}}$ est le projecteur oblique (OP) ayant comme espace signal utile $\langle \mathbf{G} \rangle$ et comme espace nul $\langle \mathbf{U} \rangle$ [59]. Similairement, le projecteur oblique ayant un espace utile $\langle \mathbf{U} \rangle$ et un espace nul $\langle \mathbf{G} \rangle$ est donné par

$$\mathbf{E}_{\mathbf{U}\mathbf{G}} = \mathbf{U} (\mathbf{P}_{\mathbf{G}}^\perp \mathbf{U})^\#. \quad (5.32)$$

Soit le sous espace $\langle \mathcal{W} \rangle$ des composantes du bruit non structuré, ce bruit peut être supposé orthogonal au sous espace $\langle \mathbf{G} \rangle$, vu que toute composante de \mathbf{W} qui peut appartenir à $\langle \mathbf{G} \rangle$ peut être incluse dans le modèle de Ω . Ainsi, le sous espace $\langle \mathcal{W} \rangle$ est orthogonal au deux sous espaces $\langle \mathbf{U} \rangle$ et $\langle \mathbf{G} \rangle$.

Ce sous espace bruit peut être estimé en utilisant les propriétés algébriques où $\mathbf{I} = \mathbf{P}_{\mathcal{W}} + \mathbf{P}_{\mathbf{U}\mathbf{G}}$ et où $\mathbf{P}_{\mathbf{U}\mathbf{G}} = \mathbf{E}_{\mathbf{U}\mathbf{G}} + \mathbf{E}_{\mathbf{G}\mathbf{U}}$, est le projecteur dans l'espace partagé par $\langle \mathbf{U} \rangle$ et $\langle \mathbf{G} \rangle$, et $\mathbf{P}_{\mathcal{W}}$ est le projecteur dans le sous espace $\langle \mathcal{W} \rangle$. Par conséquent, en exploitant cette orthogonalité, un estimateur de \mathbf{W} peut être obtenu comme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}} &= \mathbf{P}_{\mathcal{W}} \mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{U}\mathbf{G}}) \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{U}\mathbf{G}}^\perp \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ceci nous conduit à l'estimateur de la matrice de covariance du bruit suivant

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Q}}(\theta, \mathbf{f}) &= \mathbf{R}_{\hat{z}\hat{z}} + \mathbf{R}_{\hat{w}\hat{w}} \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{G}\mathbf{U}}\mathbf{R}\mathbf{E}_{\mathbf{G}\mathbf{U}}^H + \mathbf{P}_{\mathbf{U}\mathbf{G}}^\perp\mathbf{R}\mathbf{P}_{\mathbf{U}\mathbf{G}}^{\perp H}.\end{aligned}\quad (5.34)$$

En remplaçant la matrice de covariance \mathbf{R} par son estimateur, la matrice de covariance des échantillons observés $\hat{\mathbf{R}}$ et après insertion de (5.34) dans (5.24), on obtient l'approximation suivante

$$\tilde{\mathbf{R}}(\theta, \mathbf{f}) = \hat{\mathbf{\Pi}}(\theta, \mathbf{f})(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{\Pi}}^H(\theta, \mathbf{f}) + \hat{\mathbf{Q}} \quad (5.35)$$

où $\hat{\mathbf{\Pi}}(\theta, \mathbf{f}) = \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^H \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^H \hat{\mathbf{Q}}^{-1}$.

Alors, la fonction de vraisemblance devient

$$\mathbf{L}_{OP}(\theta, \mathbf{f}) = \log \det(\tilde{\mathbf{R}}(\theta, \mathbf{f})) + Tr \left\{ \tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\theta, \mathbf{f}) \hat{\mathbf{R}} \right\} \quad (5.36)$$

Finalement, l'estimation des paramètres par la solution AML-OP se réduit à la résolution du problème d'optimisation suivant

$$\hat{\theta}, \hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\theta, \mathbf{f}} \{ \mathbf{L}_{OP}(\theta, \mathbf{f}) \} \quad (5.37)$$

5.3.2 Méthode "Approximate Maximum Likelihood 2D (2D-AML)"

Une approche alternative de l'AML-OP est d'utiliser une extension de l'algorithme Approximate Maximum Likelihood (AML) [64] et de l'appliquer au cas 2D. L'algorithme 2D-AML est basé sur l'application des propriétés de l'opérateur $vec(\cdot)$ à (5.13) et utilisant le développement dans (5.19),

$$\begin{aligned}vec(\mathbf{R}) &= vec(\mathbf{U}(\theta, \mathbf{f})\mathbf{R}_{\mathbf{H}}\mathbf{U}^H(\theta, \mathbf{f})) + vec(\mathbf{Q}) \\ &= [\mathbf{U}^*(\theta, \mathbf{f}) \otimes \mathbf{U}(\theta, \mathbf{f})] vec(\mathbf{R}_{\mathbf{H}}) + \sum_{i=1}^{2LN-1} q_i vec(\Phi_i) \\ &= \mathcal{U}(\theta, \mathbf{f})\mathbf{r}_{\mathbf{H}} + \mathcal{P}\mathbf{q} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{U}(\theta, \mathbf{f}) & \mathcal{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathbf{H}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{M}(\theta, \mathbf{f}) \mathbf{p}\end{aligned}\quad (5.38)$$

où $\mathcal{P} = [vec(\Phi_1) \dots vec(\Phi_{2LN-1})]$. A partir de l'équation (5.38), un estimateur consistant $\hat{\mathbf{p}}$ peut être obtenu comme

$$\hat{\mathbf{p}} = \left[\mathcal{M}^H \left(\hat{\mathbf{R}}^{-T} \otimes \hat{\mathbf{R}}^{-1} \right) \mathcal{M} \right]^{-1} \mathcal{M}^H \left(\hat{\mathbf{R}}^{-T} \otimes \hat{\mathbf{R}}^{-1} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (5.39)$$

où $\hat{\mathbf{r}} = vec(\hat{\mathbf{R}})$. La substitution de (5.39) dans (5.23) donne la fonction coût modifiée

$$\mathbf{L}_{2D-AML}(\theta, \mathbf{f}) = \log \det(\tilde{\mathbf{R}}(\theta, \mathbf{f})) + Tr \left\{ \tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\theta, \mathbf{f}) \hat{\mathbf{R}} \right\} \quad (5.40)$$

où $\tilde{\mathbf{R}}(\theta, \mathbf{f}) = \mathbf{R}(\theta, \mathbf{f}, \hat{\mathbf{p}})$. Par conséquent, l'estimation des paramètres se réduit à la solution du problème d'optimisation suivant

$$\hat{\theta}, \hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\theta, \mathbf{f}} \{ \mathbf{L}_{2D-AML}(\theta, \mathbf{f}) \} \quad (5.41)$$

Pour atteindre la convergence, les méthodes proposées ont besoin d'une bonne initialisation des paramètres. La technique Forward-Backward averaging est appliquée en premier aux données collectées pour décorréler les sources. Les paramètres d'initialisation peuvent être obtenus par l'application d'une technique de décomposition en sous espaces, tel que l'algorithme Joint Angle-Frequency Estimation (JAFE) décrit précédemment sous l'hypothèse d'un bruit spatialement blanc. Après la phase d'initialisation, l'algorithme quasi-Newton peut être utilisé pour résoudre le problème d'optimisation dans (5.37) et (5.41). Dans nos simulations, la méthode de BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfard and Shanno) [70]-[73] est appliquée. Elle est basée sur une procédure de recherche de direction de descente combinée quadratique et cubique. La formule de BFGS est utilisée pour actualiser les éléments de la matrice Hessienne, et la méthode DFP (Davidon, Fletcher and Powell) est utilisée pour obtenir une approximation efficace de l'inverse du Hessien [71, 74].

5.4 Performance : borne de Cramer-Rao et résultats de simulation

5.4.1 Borne de Cramer-Rao

Dans ce qui suit, on présente les détails de dérivation de la borne de Cramer-Rao stochastique. Rappelons que la borne CRB est donnée par l'inverse de la matrice d'information de Fisher (FIM) des paramètres inconnus d'intérêt. Le signal et le bruit sont des processus Gaussiens, temporellement blanc de moyenne nulle. Alors, les observations satisfont le modèle stochastique $y(t) \sim \mathbb{CN}(0, \mathbf{R})$, où \mathbf{R} est définie dans l'équation 5.13.

Définissons le vecteur des paramètres inconnus réels $\eta = [\theta^T, \mathbf{f}^T, \rho^T, \mathbf{q}^T]^T$, ρ et \mathbf{q} étant les vecteurs d'éléments réels (partie réelle et partie imaginaire) des éléments de \mathbf{R}_H et \mathbf{Q} . Le $(i, j)^{ieme}$ élément de la FIM \mathcal{F}_η est donné par [62]

$$\mathcal{F}_{i,j} = MTr \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_j} \right\} \quad (5.42)$$

Soit $\nu = [\theta^T \ \mathbf{f}^T]^T$, notons que

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_i} = \mathbf{D}_\theta \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T \mathbf{R}_H \mathbf{U}^H + \mathbf{U} \mathbf{R}_H \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T \mathbf{D}_\theta \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial f_i} = \mathbf{D}_f \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T \mathbf{R}_H \mathbf{U}^H + \mathbf{U} \mathbf{R}_H \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T \mathbf{D}_f \quad (5.44)$$

où \mathbf{i}_i est un vecteur dont les éléments sont nuls sauf pour le i^{ieme} élément qui est égale à 1, et

$$\mathbf{D}_\theta = \mathbf{F}^T \circ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} \quad \mathbf{D}_f = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{f}} \circ \mathbf{A} \quad (5.45)$$

soit $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_\theta \ \mathbf{D}_f]$. Utilisons l'expression de \mathbf{D} , (5.43) et (5.44) et les résultats de [65]-[67], notons que

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_i} \ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_j} \right] &= \mathbf{D} \{ \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T \mathbf{R}_H \mathbf{U}^H) \} + \\ &\quad \{ (\mathbf{U} \mathbf{R}_H \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T) \otimes \mathbf{1}_2^T \} \mathbf{D}^H \end{aligned} \quad (5.46)$$

où $\mathbf{1}_2 = [1 \ 1]^T$. A partir de (5.46) et en utilisant les résultats [65]-[67], on obtient ce qui suit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta\theta} &= M \mathcal{I}^T [\mathbf{D}_\theta^T \otimes (\mathbf{R} \mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_\theta^H] \\ &\quad \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes (\mathbf{R})^{-1} \right] \\ &\quad [\mathbf{D}_\theta^T \otimes (\mathbf{R} \mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_\theta^H]^H \mathcal{I} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ff} &= M \mathcal{I}^T [\mathbf{D}_f^T \otimes (\mathbf{R} \mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_f^H] \\ &\quad \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes (\mathbf{R})^{-1} \right] \\ &\quad [\mathbf{D}_f^T \otimes (\mathbf{R} \mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_f^H]^H \mathcal{I} \end{aligned} \quad (5.48)$$

où $\mathcal{I} = [\text{vec}(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1^T) \ \text{vec}(\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2^T)]$. D'une façon similaire à (5.46),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\nu\nu} &= M \mathcal{I}^T [\mathbf{D}^T \otimes (\mathbf{R} \mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}^H] \\ &\quad \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes (\mathbf{R})^{-1} \right] \\ &\quad [\mathbf{D}^T \otimes (\mathbf{R} \mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}^H]^H \mathcal{I} \end{aligned} \quad (5.49)$$

En utilisant la structure de \mathcal{I} , la propriété suivante peut être facilement vérifiée :

$$\mathcal{I}^T [\mathbf{A} \mathbf{B}] \mathcal{I} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} \quad (5.50)$$

l'équation (5.50) et l'identité suivante

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} \mathbf{D}) = \mathbf{A} \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \mathbf{D}, \quad (5.51)$$

permettent d'écrire $\mathcal{F}_{\nu\nu}$ comme [65, 66]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\nu\nu} &= 2M \Re \left\{ [\mathbf{1}_{22} \otimes (\mathbf{R}_H \mathbf{U}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{R}_H)] \odot (\mathbf{D}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D})^T + \right. \\ &\quad \left. [\mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{R}_H \mathbf{U}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D})] \odot [(\mathbf{R}_H \mathbf{U}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D})^T \otimes \mathbf{1}_2^T] \right\} \end{aligned} \quad (5.52)$$

avec $\mathbf{1}_{22} = \mathbf{1}_2 \mathbf{1}_2^T$. Le développement de \mathbf{Q} dans (5.19), donne

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{q_i q_j} &= M \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_j} \right\} \\ &= M \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1/2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_j} \mathbf{R}^{-1/2} \right\} \\ &= M \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1/2} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial q_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial q_j} \mathbf{R}^{-1/2} \right\} \\ &= M \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1/2} \Phi_i \mathbf{R}^{-1} \Phi_j \mathbf{R}^{-1/2} \right\} \end{aligned} \quad (5.53)$$

En utilisant les résultats de [65, 66], on obtient

$$\mathcal{F}_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = M\mathcal{P}^T \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1} \right] \mathcal{P} \quad (5.54)$$

où \mathcal{P} est défini dans (5.38).

Notons que $\mathbf{R}_{\mathbf{H}}$ a une structure hermitienne et elle est complètement inconnue. Ceci suggère que $\mathbf{R}_{\mathbf{H}}$ peut être réécrit comme une combinaison linéaire de matrices de base, de la même façon que \mathbf{Q} , i.e.,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{d^2} \rho_i \Phi_i \quad (5.55)$$

où d est le nombre de sources. Cependant, on peut montrer que la paramétrisation de $\mathbf{R}_{\mathbf{H}}$ en termes des Φ_i n'a pas d'impact sur l'expression finale du CRB [66]. Donc, de façon similaire à $\mathcal{F}_{q_i q_j}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\rho_i \rho_j} &= MTr \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_j} \right\} \\ &= MTr \left\{ \mathbf{R}^{-1/2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_j} \mathbf{R}^{-1/2} \right\} \\ &= MTr \left\{ \tilde{\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{H}}}{\partial \rho_i} \tilde{\mathbf{U}}^H \tilde{\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{H}}}{\partial \rho_j} \tilde{\mathbf{U}}^H \right\} \\ &= MTr \left\{ \tilde{\mathbf{U}} \Phi_i \tilde{\mathbf{U}}^H \tilde{\mathbf{U}} \Phi_j \tilde{\mathbf{U}}^H \right\} \end{aligned} \quad (5.56)$$

où $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{U}$. Comme précédemment, en utilisant les résultats [65]-[67], on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\rho\rho} &= M\mathcal{P}_{\rho}^T [\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{U}^H] \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1} \right] \\ &\quad [\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{U}] \mathcal{P}_{\rho} \end{aligned} \quad (5.57)$$

avec $\mathcal{P}_{\rho} = [\text{vec}(\Phi_1) \dots \text{vec}(\Phi_{d^2})]$ et $d = 2$.

Utilisons (5.49), (5.54) et (5.57), on obtient les inter-éléments suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\nu\mathbf{q}} &= M\mathcal{I}^T [\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{R}\mathbf{U}^H) + (\mathbf{U}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{1}_2^T \otimes \mathbf{D}^H] \\ &\quad \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1} \right] \mathcal{P} \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\nu\rho} &= M\mathcal{I}^T [\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{R}\mathbf{U}^H) + (\mathbf{U}^T \mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{1}_2^T \otimes \mathbf{D}^H] \\ &\quad \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1} \right] [\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{U}] \mathcal{P}_{\rho} \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\mathcal{F}_{\rho\mathbf{q}} = M\mathcal{P}^T \left[(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1} \right] [\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{U}] \mathcal{P}_{\rho} \quad (5.60)$$

Utilisons (5.49), (5.54), (5.57), (5.58), (5.59), (5.60) et les propriétés d'inversion de matrice partitionnée, on obtient l'expression de la borne CRB suivante

$$\begin{aligned} CRB_{\nu}^{-1} &= \mathcal{F}_{\nu\nu} + \mathcal{F}_{\nu\rho} \left(\mathcal{F}_{\rho\rho} - \mathcal{F}_{\rho\mathbf{q}} \mathcal{F}_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbf{q}\rho} \right)^{-1} \\ &\quad \left(\mathcal{F}_{\rho\mathbf{q}} \mathcal{F}_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbf{q}\nu} - \mathcal{F}_{\rho\nu} \right) + \\ &\quad \mathcal{F}_{\nu\mathbf{q}} \left(\mathcal{F}_{\mathbf{q}\mathbf{q}} - \mathcal{F}_{\mathbf{q}\rho} \mathcal{F}_{\rho\rho}^{-1} \mathcal{F}_{\rho\mathbf{q}} \right)^{-1} \\ &\quad \left(\mathcal{F}_{\mathbf{q}\rho} \mathcal{F}_{\rho\rho}^{-1} \mathcal{F}_{\rho\nu} - \mathcal{F}_{\mathbf{q}\nu} \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Utilisons les résultats de [65]-[67] et en les appliquant à (5.49), (5.54), (5.57), (5.58), (5.59) et (5.60), on obtient l'expression compacte suivante

$$CRB_\nu = \frac{1}{M} (\mathfrak{L} - \mathfrak{M}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{M})^{-1} \quad (5.62)$$

avec

$$\mathfrak{L} = 2\Re \left\{ \left[\mathbf{1}_{22} \otimes \left(\mathbf{R}_H \check{\mathbf{U}}^H \check{\mathbf{R}}^{-1} \check{\mathbf{U}} \mathbf{R}_H \right) \right]^T \odot \left[\check{\mathbf{D}}^H P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp \check{\mathbf{D}} \right] \right\} \quad (5.63)$$

$$\mathfrak{M} = 2\Re \left\{ (\mathbf{1}_2 \otimes \mathcal{I})^T \left(\check{\mathbf{D}}^H P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp \right) \otimes \left(\mathbf{R}_H^T \check{\mathbf{U}}^T \check{\mathbf{R}}^{-T} \right) \check{\mathcal{P}}^* \right\} \quad (5.64)$$

$$\mathfrak{T} = 2\Re \left\{ \check{\mathcal{P}}^H \left(\check{\mathbf{R}}^{-T} \otimes P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp \right) \mathcal{P} \right\} - \mathcal{P}^H \left[P_{\check{\mathbf{U}}}^{\perp T} \otimes P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp \right] \mathcal{P} \quad (5.65)$$

où

$$\check{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{-1/2} \quad (5.66)$$

$$\check{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{U} \quad (5.67)$$

$$\check{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{D} \quad (5.68)$$

$$\check{\mathcal{P}} = \left[\text{vec}(\check{\Phi}_1) \dots, \text{vec}(\check{\Phi}_{2LN-1}) \right] \quad (5.69)$$

$$\check{\Phi}_i = \mathbf{Q}^{-1/2} \Phi_i \mathbf{Q}^{-1/2} \quad (5.70)$$

5.4.2 Résultats de simulation

On envisage le scénario de simulation suivant : un radar sur une surface plate opérant à une hauteur de $h_1 = 3 \text{ m}$. L'antenne est une ALU de N éléments. La cible est à une distance de $R_0 = 12 \text{ km}$, évoluant à une altitude constante $h_2 = 200 \text{ m}$. La distance est supposée connue approximativement. La matrice de covariance du bruit est modélisée comme $\mathbf{Q}_{m,n} = \sigma_0^2 \rho^{|m-n|} e^{j\xi(m-n)}$, où ρ est le coefficient de corrélation et ξ est un facteur d'échelle. Le rapport du signal à bruit (RSB) est $10 \log_{10}(\sigma_s^2/\sigma^2)$, où σ_s^2 est la puissance du signal. On illustre les performances globales des approches proposées en termes de root Mean Squared Error (rMSE) en fonction du RSB, le coefficient de corrélation spatial ρ , le nombre de PRI collecté M et le nombre d'antennes N . On illustre l'effet de la différence angulaire sur la poursuite de DDA et on compare les performances des deux techniques à celles du maximum de vraisemblance stochastique classique (MVS) où le bruit est supposé spatialement et temporellement blanc et aussi à la borne CRB. L'ensemble des paramètres est indiqué dans les figures. Les résultats sont moyennés sur 200 réalisations de Monte-Carlo. Les résultats pour l'écho direct et réfléchi sont similaires, cependant seuls ceux correspondants à l'écho réfléchi sont montrés.

Les figures 5.1 et 5.2 illustrent les performances de l'AML-OP et la 2D-AML en fonction du RSB, en terme du rMSE. L'AML-OP présente de meilleurs résultats que le 2D-AML pour l'estimation des DDA et inversement, le 2D-AML supplante l'AML-OP pour l'estimation de la FD. Aussi, pour le jeu de valeurs de paramètres choisis, les deux estimateurs n'atteignent pas la CRB comme le montrent les résultats.

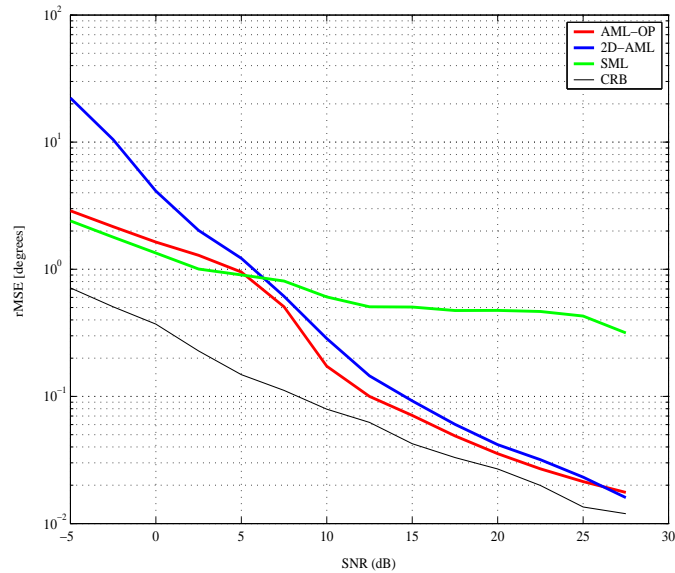


Fig. 5.1 — La rMSE de la DDA vs RSB pour les différentes méthodes. $N = 12, M = 200, L = 3, \rho = 0.9$.

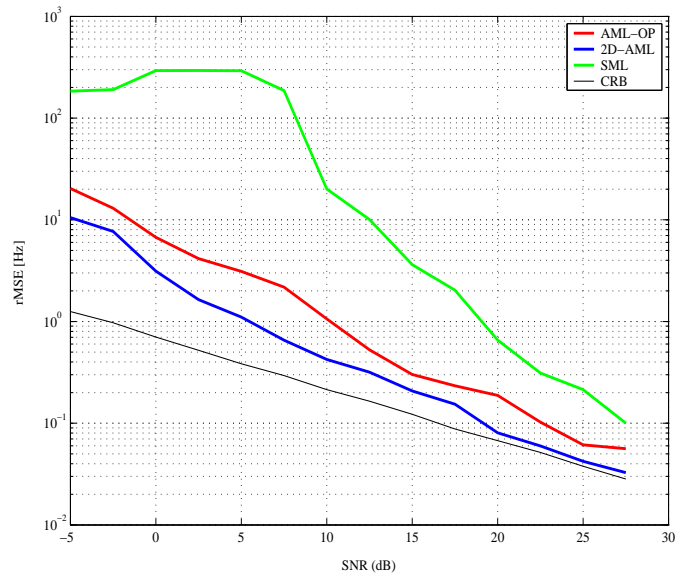


Fig. 5.2 — La rMSE de la fréquence Doppler vs RSB pour les différentes méthodes. $N = 12, M = 200, L = 3, \rho = 0.9$.

Les figures 5.3 et 5.4 montrent la variation de la rMSE quand le coefficient de corrélation ρ varie. Notons que la MVS diverge quand ρ approche 1. Comme prévu, l'AML-OP et le 2D-AML sont un peu mieux performants aux valeurs de ρ proche de 1. Plus généralement, les mêmes remarques que l'exemple précédent peuvent être réitérés ici.

Les figures 5.5 et 5.6 illustrent les performances quand le nombre des éléments de l'antenne augmente. D'une façon similaire, les mêmes remarques s'appliquent ici.

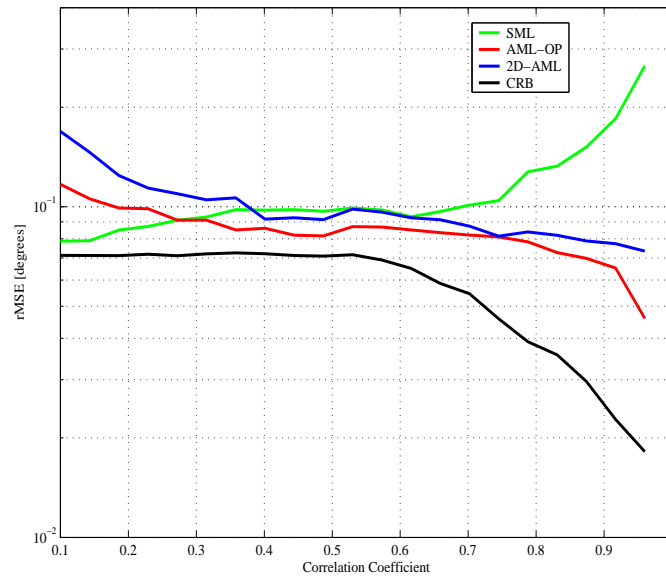


Fig. 5.3 — La rMSE de la DDA vs coefficient de corrélation pour les différentes méthodes. $N = 14$, $L = 200$, $M = 3$, $RSB = 10$ dB.

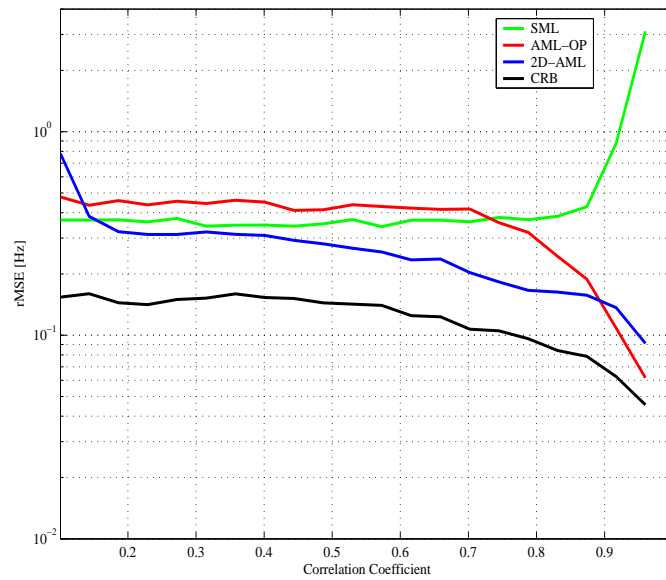


Fig. 5.4 — La rMSE de la fréquences Doppler vs coefficient de corrélation pour les différentes méthodes. $N = 14$, $L = 200$, $M = 3$, $RSB = 10$ dB.

La figure 5.7 montre l'amélioration de performance quand la différence d'angle entre les trajets direct et indirect augmente (quand la cible s'approche du site radar). Les autres paramètres sont fixés. On note que le 2D-AML et l'AML-OP donnent toujours des DDA séparées aux différentes distances ce qui n'est pas le cas de la MVS qui échoue dans la séparation des deux DDA qui fusionnent autour de 0° à une distance supérieure à 20km.

En comparant les deux approches avec la méthode classique du maximum de vrai-

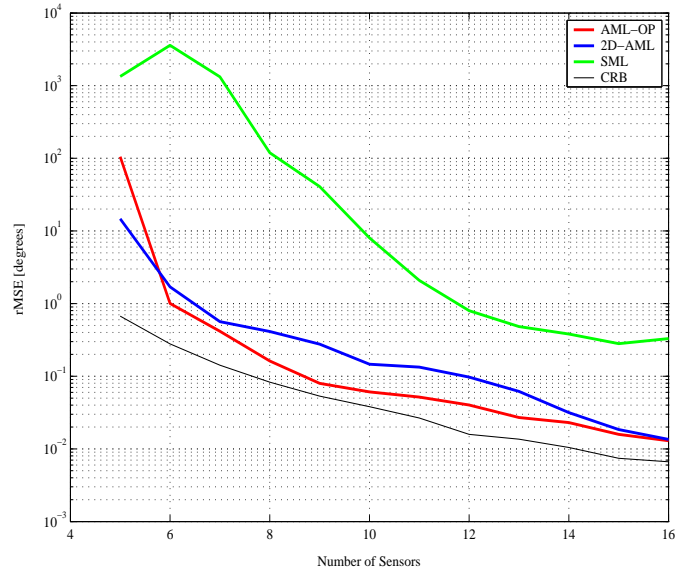


Fig. 5.5 — La rMSE de DDA vs le nombre d'élément de l'antenne pour les différentes méthodes. $L = 400$, $\rho = 0.95$, $M = 3$, $RSB = 10\text{dB}$.

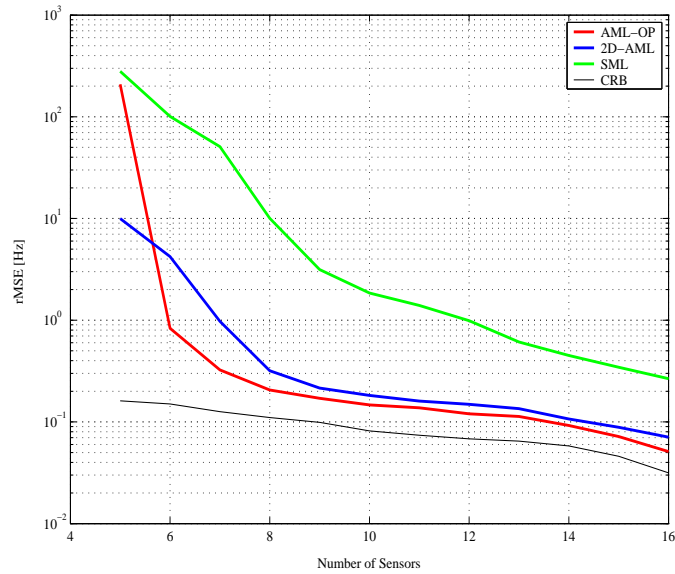


Fig. 5.6 — La rMSE de la fréquences Doppler vs le nombre d'élément de l'antenne pour les différentes méthodes. $L = 400$, $\rho = 0.95$, $M = 3$, $RSB = 10\text{dB}$.

semblance stochastique, il est prévisible à ce qu'elles donnent des estimés de meilleurs qualité. Ceci est dû au fait que les deux algorithmes tiennent compte de la structure du bruit. Mais ce gain en précision est associé à un coût de calcul important. L'algorithme 2D-AML par l'évaluation de la fonction coût (5.40) consomme $\mathcal{O}((NL)^3)$ cflops (opération de multiplication en complexe) pour chaque déterminant et opération d'inversion de matrice. En plus, l'inversion de la matrice de $(NL)^2 \times (NL)^2$ dans (5.39) consomme $\mathcal{O}((NL)^3)$ cflops, en utilisant la méthode d'élimination de Gauss. Cette par-

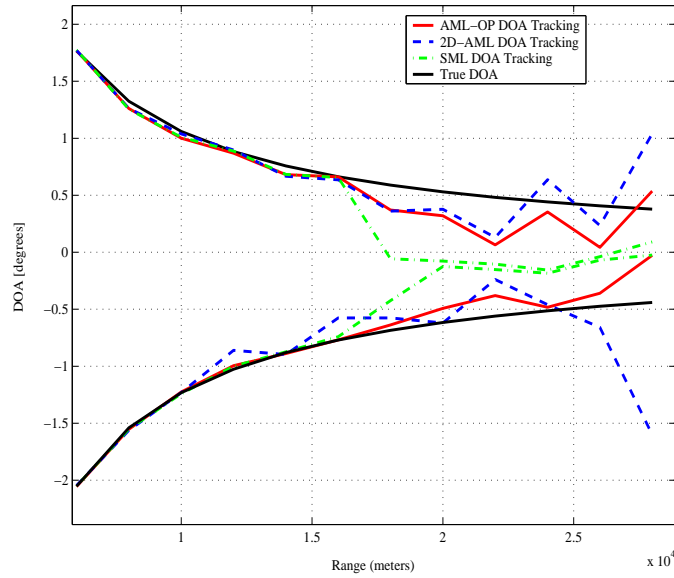


Fig. 5.7 — Poursuite des DDA direct et réfléchi pour les différentes méthodes. $N = 12$, $L = 200$, $\rho = 0.95$, $M = 3$, $RSB = 10\text{dB}$.

tie est la plus coûteuse en calcul. L’algorithme AML-OP demande la même charge de calcul pour l’évaluation de la fonction coût. Cependant, la taille des matrices est réduite par rapport à celles utilisées dans la 2D-AML. Dans l’équation (5.36), la complexité exigée n’est que de $\mathcal{O}((NL)^3)$. La figure 5.8 nous donne un exemple de comparaison en temps relatif consommé par les trois méthodes en fonction de la variation du nombre des éléments de l’antenne. Comme prévu, la 2D-AML consomme énormément de ressource de calcul pour des performances proches à celle de AML-OP. La MVS est la moins coûteuse en temps de calcul vu qu’il n’y a pas d’opération de vectorisation ainsi que les matrices de covariance sont de taille réduite comparées à celles utilisées dans la 2D-AML et l’AML-OP.

5.5 Conclusion

Le problème d’estimation conjointe des DDA et FD est traité dans le cas de bruit additive non blanc. Un modèle est développé pour mettre en évidence la stationnarité des paramètres d’intérêt sur l’intervalle temporel des observations. Ce modèle exploite la fluctuation des facteurs complexes et introduit une paramétrisation de la matrice de covariance du bruit. Cette paramétrisation conduit à deux estimateurs du maximum de vraisemblance approchés. La première approche utilise une combinaison de projections obliques et la solution du filtrage ”zero forcing” pour réduire l’effet du bruit. La deuxième est une extension de l’algorithme AML au cas à deux dimensions (2D-AML). La pertinence des deux approches est démontrée par simulations et une comparaison est faite avec la technique d’estimation classique pour montrer la dégradation en performance due à la sous modélisation du bruit. Les détails relatifs à la dérivation de la borne de Cramer-Rao qui correspondent au modèle développé sont aussi présentés. Les

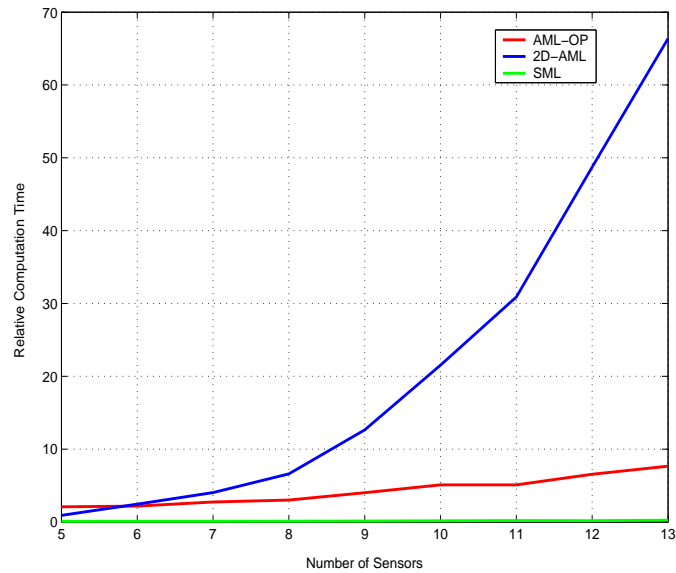


Fig. 5.8 — Comparaison du temps d'exécution relatif des différentes approches vs le nombre de capteurs.

techniques proposées exploitent l'avantage de diversité fournis par les PRI collectées et exploitent la structure du bruit, permettant l'estimation de plus d'un trajet que d'éléments d'antenne. Cependant, elles sont sous optimales vu quelles exhibent des variances d'estimation n'atteignant pas la borne de Cramer-Rao.

Conclusion générale

DANS ce travail de thèse, nous avons considéré le problème d'estimation de paramètres des signaux radars. En particulier, nous nous sommes intéressés au problème d'estimation conjointe de paramètres des échos radar d'une cible évoluant à basse altitude. Plusieurs problèmes apparaissent dans ce scénario. Le premier est la propagation multi-trajets des échos issus de la cible. En effet, la réflexion par le sol ou la surface de la mer induit le radar en erreur qui voit deux cibles la vraie et son image. L'autre problème concerne l'évanouissement de la puissance du signal capté par le réseau d'antennes. En effet, le signal résultant au niveau radar provient d'une façon constructive et destructive de plusieurs signaux. Aussi faut-il noter que la séparation angulaire des échos est une petite fraction de largeur de bande du faisceau ; ce qui rend les méthodes classiques d'estimation inadéquates.

Estimation des Paramètres en Mode Radar Passif

Pour aborder le problème, nous avons étudié l'estimation de paramètres pour un radar en mode passif. Le bruit additif est supposé temporellement et spatialement blanc. Nous avons étudié quelques techniques paramétriques et des techniques basées sur la décomposition en sous espaces. Les angles d'arrivées incidents issus de l'écho direct et indirect étant très proches, plusieurs méthodes échouent dans la résolution de ces angles et n'arrivent pas à séparer les deux signaux. Ceci est dû non seulement à la différence réduite entre ces angles mais aussi à la cohérence des signaux reçus. On a vu que l'application d'un pré traitement sur la matrice de covariance des données améliore les performances de résolution mais l'estimation reste toujours non satisfaisante. Les méthodes paramétriques offrent approximativement les mêmes performances, mais sont très coûteuses en temps de calcul.

Estimation des Paramètres en Mode Radar Actif : Estimation Conjointe des Angles d'Arrivée/Retards Temporels

Nous avons ensuite abordé le problème dans un contexte de radar actif. Les paramètres pris en considération sont les directions d'arrivée et les retards temporels correspondants. L'estimation est conjointe pour avoir une association automatique des paramètres. La cible est observée par un réseau d'antennes où le bruit est considéré temporellement et spatialement non corrélé. Deux approches ont été présentées ; la première estime les paramètres à chaque PRI. La seconde considère plusieurs PRI consécutives. Les deux algorithmes se basent sur l'application de la DFT aux données collectées pour transformer le retard temporel en un déphasage dans le domaine fréquentiel. Puis, par construction d'une matrice de Hankel dans la première approche et l'application de l'opérateur de vectorisation aux données dans la seconde approche, le modèle des données devient de la même forme qu'un modèle classique d'estimation de directions

d'arrivée. Ainsi, l'algorithme modifié 2D-ESPRIT est appliqué pour une estimation conjointe des directions d'arrivée et des retards. Les simulations montrent les performances des deux méthodes dans un scénario où les retards temporels sont presque identiques et la différence entre les directions d'arrivée est une petite fraction de la largeur du faisceau de rayonnement. Une comparaison avec la technique MUSIC (avec un lissage spatial) et la borne théorique CRB est faite.

Estimation Conjointe des Angles d'Arrivée/Fréquences Doppler

L'utilisation d'un suréchantillonnage pour estimer les retards temporels est un handicap vu qu'il nécessite un espace mémoire important et un temps de calcul énorme pour réaliser les opérations matricielles de grande dimension. Nous avons opté pour une approche d'estimation conjointe des directions d'arrivée et des fréquences Doppler. La méthode considère plusieurs PRI consécutives. L'algorithme est basé sur l'application d'une structure spécifique spatio-temporelle qui est équivalente à l'application de l'opérateur de vectorisation aux données observées. Le modèle des données devient de la même forme qu'un modèle classique d'estimation de direction d'arrivée. Nous avons opté pour l'algorithme ESPRIT à deux dimensions vu qu'il ne nécessite pas de recherche exhaustive pour avoir les estimés. Les simulations montrent les performances de la méthode et une comparaison avec la borne de Cramer-Rao est donnée.

Estimation Conjointe des Angles d'Arrivée/Fréquences Doppler : Cas d'un bruit non blanc

Tout le travail précédent était effectué sous l'hypothèse d'un bruit blanc, Gaussien, temporellement et spatialement non corrélé. Pour tenir compte des différents signaux indésirables qui se superposent avec le signal écho utile, nous avons développé deux méthodes pour une estimation des directions d'arrivée et des fréquences Doppler avec un bruit additif non blanc. Un modèle est développé qui tient compte de la fluctuation de la cible. Ce modèle exploite la variation des facteurs complexes et introduit une paramétrisation de la matrice de covariance du bruit. Cette paramétrisation conduit à deux estimateurs du maximum de vraisemblance approchés. La première méthode utilise une combinaison de projections obliques et la solution du filtrage "zero forcing" pour réduire l'effet du bruit, et la deuxième est une extension de l'algorithme AML au cas deux dimensions. Dans les deux cas, l'effort est dirigé vers la réduction de la dimension de recherche de la fonction coût de vraisemblance à minimiser. Les performances des deux méthodes sont démontrées par simulations et une comparaison est faite avec la technique d'estimation classique (SML) pour montrer l'amélioration en performance quand on tient compte de la modélisation du bruit. Les détails relatifs à la dérivation de la borne de Cramér-Rao qui correspondent au modèle développé sont aussi présentés. Les techniques proposées exploitent la diversité des données fournies par les PRI collectées et exploitent la structure du bruit.

Ainsi, notre travail est dirigé vers le traitement d'un problème crucial dans les systèmes radar de poursuite. Les missiles et avions volant à basse altitude, par-dessus la terre ou la mer, sont des menaces très sérieuses à ces systèmes de poursuite ou de recherche par infrarouge. En général, ces menaces sont furtives pour les deux bandes RF et infrarouge. Ainsi, leurs surfaces équivalents radars et leurs signatures thermiques infrarouge peuvent être assez petites. En plus, les cibles ayant des trajec-

toires en basse élévation, tels que : les missiles anti navires à trajectoire rasante, missiles de croisière volant à basse altitude en suivi de terrain ont leur signaux radars corrélés temporellement et spatialement dû à l'interférence multi-trajets. Ce problème multi-trajets demeure un énorme obstacle pour les algorithmes de détection et de poursuite existants. Des méthodes sont à développer pour répondre à des exigences pratiques importantes. Les échos clutter sont beaucoup plus intenses et dominants par rapport aux bruits intrinsèques des capteurs et de l'intensité du signal écho de la cible à détecter. Ceci a pour conséquence la nécessité de suppression complète du clutter, ce qui est pratiquement impossible à réaliser d'où la nécessité de prendre en compte les résidus de l'opération de suppression dans la modélisation du bruit. Les conditions extérieures des observations sont caractérisées par une haute variabilité et ne peuvent être prédites avec une précision suffisante. Les informations *a priori* (utilisées dans la majorité des méthodes citées dans l'état de l'art) nécessaires aux développements idéaux (Bayes) des algorithmes de traitement de données sont souvent non disponibles. Particulièrement, les modèles statistiques des signaux, clutter, etc. sont peu fiables. Ces modèles peuvent être utilisés pour des évaluations de performance plus que pour développer des algorithmes de traitement de données. Dans cette optique, nous pouvons affirmer que les méthodes développées dans le chapitre V répondent à cette exigence critique vu qu'elles ne nécessitent qu'un strict minimum de connaissance *a priori*.

Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse peut être étendu comme suit :

- Utilisation de l'algorithme EM (Expectation-Maximisation) pour la maximisation de vraisemblance ;
- Utilisation des algorithmes d'optimisation génétique pour une convergence plus rapide et plus stable ;
- Application des algorithmes développés à des données expérimentales.

Bibliographie

- [1] Yu, K. B., "Recursive Super-Resolution Algorithm for Low-Elevation Target Angle Tracking in Multipath," *IEE Proceedings on Radar and Sonar Navigations*, Vol. 141, No. 4, August 1994.
- [2] Blake L.V., "Prediction of Radar Range," in SKOLNICK, M.I.(Ed.); "*Radar Handbook*", McGraw-Hill, New York, 1990, 2nd edn.
- [3] Barton D. K. and Leonov S. A.(Ed.); "*Radar Technology Encyclopedia, (Electronic Edition)*" Artech House, Boston London.
- [4] SKOLNICK, M.I.(Ed.); "*Radar Handbook*," McGraw-Hill, New York, 1990, 2nd edn.
- [5] Reddi S., "Multiple Source Location - a Digital Approach," *IEEE Trans.*, AES, 15 :95-105, Jan. 1979.
- [6] Kaveh M. and Barabell A. J., "The Statistical Performance of the MUSIC and the Minimum-Norm Algorithms in Resolving Plane Waves in Noise," *IEEE Trans. ASSP*, ASSP-34 :331-341, April 1986.
- [7] Tufts D. W. and Kumaresan R., "Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids : Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood," *Proc. IEEE*, 70, pp. 975-989 September 1982.
- [8] Gabriel W. F., "A High Resolution Target Tracking Concept Using Spectral Estimation Techniques," *NLR Report 8797*. 31 st May 1984.
- [9] Schmidt R. O., "A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation," *PhD thesis*, Stanford Univ. Stanford, CA, Nov. 1981.
- [10] Bienvenu G., and Koop L., "Adaptivity to Background Noise Spatial Coherence for High Resolution Passive Methods," in *Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Processing*, pages 307-310, 1980.
- [11] Stoica P. and Nehorai A., "MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer-Rao Bound : Further Results and Comparisons," *IEEE Trans. ASSP*, ASSP-38 :2140-2150, December 1990.
- [12] Krim H. and Proakis J. G., "Smoothed Eigenspace-Based Parameter Estimation," *Automatica*, Special Issue on Statistical Signal Processing and Control, Jan. 1994.
- [13] Widrow B., Duvall K. M., Gooch R. P. and Newman W. C., "Signal Cancellation Phenomena in Adaptive Antennas : Causes and Cures," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, AP-30(5) :469-478, July 1982.

-
- [14] Evans J. E., Johnson J. R. and Son D. F., "Application of Advanced Signal Processing Techniques to Angle of Arrival Estimation in ATC Navigation and Surveillance Systems," *Technical Report*, MIT Lincoln Laboratory, June 1982.
 - [15] Cozzens J. H. and Sousa M. J., "Source Enumeration in Correlated Signal Environment," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 42(2) :304-317, Feb. 1994.
 - [16] Cadzow J. A., "Multiple Source Location - the Signal Subspace Approach," *IEEE Trans. ASSP*, ASSP-38 :1110-1125, July 1990.
 - [17] Viberg M. and Ottersten B., "Detection and Estimation in Sensor Arrays Using Weighted Subspace Fitting," *IEEE Trans. SP*, SP-39(11) :2436-2449, Nov. 1991.
 - [18] Stoica P., and Sharman K., "Performance Study of Conditionnal and Unconditionnal Direction of Arrival Estimation," *IEEE Trans. ASSP*, ASSP-38 :1783-1795, October 1990.
 - [19] Ottersten B. Viberg M. and Kailath T., "Analysis of Subspace Fitting and ML Techniques for Parameter Estimation from Sensor Array Data," *IEEE Trans. on SP*, SP-40 :590-600, March 1992.
 - [20] Böhme J. F., "Estimation of Spectral Parameters of Correlated Signals in Wave-Fields," *Signal Processing*, 10 :329-337, 1986.
 - [21] Jaffer A. G., "Maximum Likelihood Direction Finding in Stochastic Sources : a Separable Solution," in *Proc. ICASSP 88*, volume 5, pp 2893-2896, New York, April 1988.
 - [22] Stoica P. and Sharman K., "A Novel Eigenanalysis Methods for Direction Estimation," *Proc. IEE*, F :19-26, Feb. 1990.
 - [23] Stoica P. and Sharman K., "Maximum Likelihood Methods for Direction of Arrival Estimation," *IEEE Trans. ASSP*, ASSP-38 :1132-1143, July 1990.
 - [24] Viberg M. and Ottersten B., "Sensor Array Processing Based on Subspace Fitting," *IEEE Trans. SP*, SP-39(5) :1110-1121, May 1991.
 - [25] Golub G. H. and Vanloan C. F., "*Matrix computation*," Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD., Second edition, 1989.
 - [26] Barton D. K., "Low Angle Radar Tracking," *Proc. IEEE* vol. 62, no. 6, pp 687-704, Jun. 1974.
 - [27] Barton D. K., "Radar Multipath Theory and Experimental Data," *Radar 77*, pp. 308-312, 1977.
 - [28] White W. D., "Low Angle Radar Tracking in the Presence of Multi-Path," *IEEE Trans. on Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-10, pp. 335-352, 1974.
 - [29] Sherman S. M., "Complex Indicated Angles Applied to Unresolved Radar Targets and Multipath," *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-7, pp. 160-170, 1971.
 - [30] Howard D. D., "Experimental Results of the Complex Indicated Angle Technique for Multipath Correction," *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-10, pp. 779-787, 1974.

- [31] Nakatsuka K., "Two-Beam Technique for Tracking a Target at Low Elevation Angles," *IEE Proc. -F*, vol. 137, no. 6, pp. 397-406, Dec.1990.
- [32] Billam, McWhriter, Breems, Shore, Turner, Gröger, Nickel and wirth, "Antenna Array Signal Processing in Phased Array Radar," *NATO report*, AC/243 (panel 3/RSG.15) D/8, May 1988.
- [33] Burg J. P., "Maximum Entropy Spectral Analysis," *PhD Dissertation*, Stanford University, Stanford (CA), USA, 1975.
- [34] Kumaresan R. and Tufts D. W., "Estimating the Angles of Arrival of Multiple Plane Waves," *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-19, pp. 134-139, 1983.
- [35] Schmidt R., "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop*, RADC-TR-79-63. Rome Air Development Centre, Rome (NJ), USA, Oct. 1979.
- [36] Roy R. and Kailath T., "ESPRIT-Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, Jul. 1989.
- [37] Shan T. J., Wax M., and Kailath T., "On Spatial Smoothing for Direction of Arrival Estimation of Coherent Signals," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, no. 4, pp. 806-811, Apr. 1985.
- [38] Pillai S. U. and Kwon B. H., "Forward/Backward Spatial Smoothing Techniques for Coherent Signal Identification," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, vol. 1, pp. 8-15, Jan. 1989.
- [39] Linebarger D. A., DeGroat R. D. and Dowling E. M., "Efficient Direction Finding Methods Employing Forward-Backward Averaging," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 2136-2145, Aug. 1994.
- [40] Haardt M., "Efficient One-, Two-, and Multidimensional High-Resolution Array Signal Processing," *Ph.D. dissertation*, Tech. Univ. Munich, Munich, Germany, 1997.
- [41] Stoica P. and Jansson M., "On Forward-Backward MODE for Array Signal Processing," *Digital Signal Process.*, vol. 7, no. 4, pp. 239-252, Oct. 1997.
- [42] Rao B. D. and Hari K. V. S., "Weighted Subspace Methods and Spatial Smoothing : Analysis and Comparison," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 41, pp. 788-803, Feb. 1993.
- [43] Ksienski A. A. and McGhee R. B., "A Decision Theoretic Approach to the Angular Resolution and Parameter Estimation Problem for Multiple Targets," *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-4, pp. 443-455, 1968.
- [44] Cantrell B. H., Gordon, W. B., and Trunk G. V., "Maximum Likelihood Elevation Angles Estimation of Radar Targets using Subapertures," *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, AES-17, pp. 213-221, 1981.
- [45] Gordon W. G., "Improved Three Subaperture Method for Elevation Angle Estimation," *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, AES-19, pp. 114-122, 1983.
- [46] Haykin S., "Least Squares Adaptive Antenna for Angle-of-Arrival Estimation," *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 4, pp. 528-530, Apr. 1984.

- [47] Zoltowski M. D. and Lee T. S., "Maximum Likelihood Based Sensor Array Signal Processing in the Beamspace Domain for Low-Angle Radar Tracking," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 656-671, Mar. 1991.
- [48] Turner R. M. and Bossé E., "Maximum Likelihood Tracking using a Highly Refined Multipath model," *21st Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove (CA), USA, Nov. 2-4, 1987.
- [49] Bossé E. and Turner R. M., "Height Ambiguities in Maximum Likelihood Estimation with a Multipath Propagation model," *22nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove (CA), USA, Oct. 31-Nov. 2, 1988.
- [50] Bossé E., Turner R. M. and Lecours M., "Tracking swerling fluctuating targets at low altitude over the sea," *IEEE Trans. on AES*, Vol. AES-27 No. 5, pp. 806-822, Sept. 1991.
- [51] Bossé E., Turner R. M. and Riseborough E. S., "Model-Based Multifrequency Array Signal Processing for Low-Angle Tracking," *IEEE Trans. on Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-31, pp. 194-210, Jan. 1995.
- [52] Lo T. and Litva J., "Use of a Highly Deterministic Multipath Signal model in Low-Angle Tracking," *IEE Proc.-F*, vol. 138, no. 2, Apr. 1991.
- [53] Nickel U., "Angular Superresolution with Phased Array Radar : A Review of Algorithms and Operational Constraints," *IEE Proc.-F*, vol. 134, no. 1, pp. 53-59, Feb. 1982.
- [54] Haykin S. and Reilly J. P. "Maximum Likelihood Receiver for Low-Angle Tracking Radar. Part 1 : The Symmetric Case," *IEE Proc. -F*, vol. 129, no. 4, pp. 261-272, Aug. 1982.
- [55] Reilly J. P. and Haykin S., "Maximum Likelihood Receiver for Low-Angle Tracking Radar. Part 2 : The Nonsymmetric Case," *IEE Proc.-F*, vol. 129, no. 4, pp. 331-340, Oct. 1982.
- [56] Djeddou M. and Belouchrani A., "Parameter Estimation in Low-Elevation Target Tracking," *Proc. International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA-01)*, vol. 2, pp. 691-694, Kuala-Lumpur, Malaysia, Aug. 13-16, 2001.
- [57] Swerling P. "Probability of Detection for Fluctuating Targets, Special Monograph," *IRE Trans. Information Theory*, vol. IT-6, no. 2. pp. 269-308, Apr. 1960.
- [58] Böhme J. and Kraus D., "On Least Squares Methods for Direction of Arrival Estimation in the Presence of Unknown Noise Fields," *Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-88*, pp. 2785-2788, New York (NY), USA, Apr. 11-14, 1988.
- [59] Behrens R. T. and Scharf L. L., "Signal Processing Applications of Oblique Projection Operators," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 6, pp. 1413- 1424, Jun. 1994.
- [60] Lemma A., Van der Veen A. J., and Depretter E. F. "Joint Angle-Frequency Estimation using Multi-Resolution ESPRIT," *Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-98*, Seattle (WA), USA, pp.1957-1960, May 1998.

- [61] Gubner J. A. and Scharf L. L., "Detection of Subspace Waveforms in Subspace Interference and Noise," *Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-00*, pp.309-312, Istanbul, Turkey, Jun. 2000.
- [62] Scharf L. L., *Statistical Signal Processing : Detection, Estimation and Time Series Analysis*, Addison Wesley, New York (NY), USA, 1990.
- [63] Scharf L. L., "Blind Adaptation of Zero Forcing Projections and Oblique Pseudo-Inverses for Subspace Detection and Estimation When Interference Dominates Noise," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50. no.12, pp. 2938-2946, Dec. 2002.
- [64] Göransson B. and Ottersten B., "Direction Estimation in Partially Unknown Noise Fields," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47. no.9, pp. 2375-2385, Sep. 1999.
- [65] Pesavento M. and Gershman A. B. "Maximum-Likelihood Direction-Of-Arrival Estimation in the Presence of Unknown Nonuniform Noise," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 7, pp. 1310-11324, Jul. 2001.
- [66] Gershman A. B. Stoica P. Pesavento M. and Larsson E. G. "Stochastic Cramer-Rao Bound for Direction Estimation in Unknown Noise Fields," *IEE Proc. on Radar and Sonar Navig.* vol. 149, no.1, pp. 2-8, Feb. 2002.
- [67] Stoica P. Larsson E. G. and Gershman A. B. "The Stochastic CRB for Array Processing : A Textbook Derivation," *Signal Processing Lett.*, vol. 8, no. 5, pp.148-150, May 2001.
- [68] Weiss A. J. and Freidlander B., "On the Cramer-Rao Bound for Direction Finding of Correlated Sources," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41. pp. 495-499, Jan. 1993.
- [69] Kay S. M. and Nagesha V., "Maximum Likelihood Estimation of Signals in Auto-regressive Noise," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42. pp. 88-101, Jan. 1994.
- [70] Broyden, C.G., "The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms," *Journal Inst. Math. Applic.*, vol. 6, pp. 76-90, 1970.
- [71] Fletcher, R. and M.J.D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," *Computer Journal*, vol. 6, pp. 163-168, 1963.
- [72] Goldfarb, D., "A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means," *Mathematics of Computing*, vol. 24, pp. 23-26, 1970.
- [73] Shanno, D.F., "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization," *Mathematics of Computing*, vol. 24, pp. 647-656, 1970.
- [74] Davidon, W.C., "Variable Metric Method for Minimization," *A.E.C. Research and Development Report*, ANL-5990, 1959.
- [75] van der Veen A. J., Vanderveen M. C. and Paulraj A., "Joint Angle and Delay Estimation Using Shift-Invariance Techniques," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no.2, February 1998.
- [76] Vanderveen M. C., van der Veen A. J. and Paulraj A., "Estimation of Multipath Parameters in Wireless Communications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no.3, March 1998.

- [77] Zoltowski M., Haardt M. and Mathews C., "Closed-form 2-D Angle Estimation with Rectangular Arrays in Element Space or Beam Space via Unitary ESPRIT," *IEEE Transactions on Signal Processing* vol. 44, pp. 316-328, Feb. 1996.
- [78] Bresler Y. and Macovski A., "Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise," *IEEE Transactions Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 5, pp. 1081-1089, Oct. 1986.
- [79] Bresler Y. and Macovski A., "On the Number of Signals Resolvable by a Uniform Linear Array," *IEEE Transactions Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-34 :1361-1375, Oct. 1986.
- [80] Van der Veen A. J., Ober P. B. and Depretter E. F., "Azimuth and Elevation Computation in High Resolution DOA Estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1828-1832, July 1992.
- [81] Peebles Z. P. Jr., "Radar Principles," John Wiley & Sons, Inc. edn USA 1998.
- [82] Vanpoucke F. and Paulraj A., "A Harmonic Noise Model for Direction Finding in Colored Ambient Noise," *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 2, pp. 135-137, July 1995.
- [83] Friedlander B. and Weiss A. J., "Direction Finding using Noise Covariance Modelling," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 1557-1567, July 1995.
- [84] Fuchs J. J., "Estimation of the number of Signals in the Presence of Unknown Correlated Sensor Noise," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 1053-1061, May 92.
- [85] Bar-Shalom Y. and Blair W. D., "Tracking Low Elevation Targets in the Presence of Multipath Propagation," *IEEE Trans. AES*, vol. 30, No. 3, July 1994, pp. 973-979.
- [86] Brewer J. W., "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-25, No. 9, September 1978, pp. 772-781.
- [87] Daeipour E., Blair W. D. and Bar-Shalom Y., "Bias Compensation and Tracking with Monopulse Radars in the Presence of Multipath," *IEEE Trans. AES*, vol. 33, no. 3, pp. 863-882, July 1997.
- [88] Bar-Shalom Y. and Li X.-R., "Estimation and Tracking : Principles, Techniques, and Software," Artech House, MA, 1993.
- [89] Wang x., Challa S., and Evans R. J., "Gating Techniques for Maneuvering Target Tracking in Clutter," *IEEE Trans. AES*, vol. 38, No. 3, pp. 1087-1097, July 2002.
- [90] Wong K. M. and Reilly J.P., Wu Q. and S. Qiaao, "Estimation of Directions of Arrival of Signals in Unknown Correlated Noise," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42. pp. 2331-2341, Jan. 1994.
- [91] Viberg M., "Sensitivity of Parametric Direction Finding to Colored Noise Fields and Undermodeling," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 34(2). pp. 207-222, Nov. 1993.
- [92] Zoltowski M. D., "Beamspace ml Bearing Estimation for Adaptive Phased Array Radar," In Haykin S., editor, *Adaptive Radar Detection and Estimation*. John Wiley, New York, 1992.

A

Algorithmme 2D-Unitary ESPRIT

Reprenons l'équation (4.12). La première étape consiste à calculer la matrice d'estimation du sous espace signal \mathbf{E}_s contenant les bases des colonnes de \mathcal{A} en prenant les vecteurs singuliers correspondant aux d plus grandes valeurs singulières de la matrice réelle $\{\Re(\mathcal{Y}), \Im(\mathcal{Y})\}$, où \mathcal{Y} est

$$\mathcal{Y} = (\mathbf{K}_L \otimes \mathbf{K}_N) \mathcal{A} \quad (\text{A.1})$$

Les matrices \mathbf{K}_L et \mathbf{K}_N sont utilisées pour transformer les éléments complexes de la variété espace-temps en une variété à valeurs réelles. L'une des formes parmi d'autres de ces matrices (pour L et N pairs) est

$$\mathbf{K}_{2P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & j\mathbf{I}_P \\ \bar{\mathbf{I}}_P & -j\bar{\mathbf{I}}_P \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

et (pour L et N impairs)

$$\mathbf{K}_{2P+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & 0 & j\mathbf{I}_P \\ 0^T & \sqrt{2} & 0^T \\ \bar{\mathbf{I}}_P & 0 & -j\bar{\mathbf{I}}_P \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

\mathbf{I}_P est une matrice identité $P \times P$ et $\bar{\mathbf{I}}_P$ est une matrice identité anti diagonale $P \times P$. L'estimation de Φ et ξ à partir de \mathcal{Y} est basée sur les différentes structures d'invariance par décalage présentes dans \mathcal{A} . Définissons les matrices de sélection

$$\mathbf{J}_\xi = \mathbf{I}_L \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-1} & 0_1 \end{bmatrix}; \mathbf{J}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L-1} & 0_1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{J}'_\xi = \mathbf{I}_L \otimes \begin{bmatrix} 0_1 & \mathbf{I}_{N-1} \end{bmatrix}; \mathbf{J}'_\phi = \begin{bmatrix} 0_1 & \mathbf{I}_{L-1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N \quad (\text{A.5})$$

Les matrices de sélection permettent l'exploitation de l'invariance par décalage présente dans la variété espace-temps, la sélection des sous réseaux est montrée dans la figure A.1.

Pour estimer Φ , on forme les sous matrices de la première et les dernières $N(L-1)$ rangées de \mathcal{A} , respectivement, i.e.,

$$\mathbf{X}_\phi = \mathbf{J}_\phi \mathcal{A}, \quad \mathbf{X}'_\phi = \mathbf{J}'_\phi \mathcal{A} \quad (\text{A.6})$$

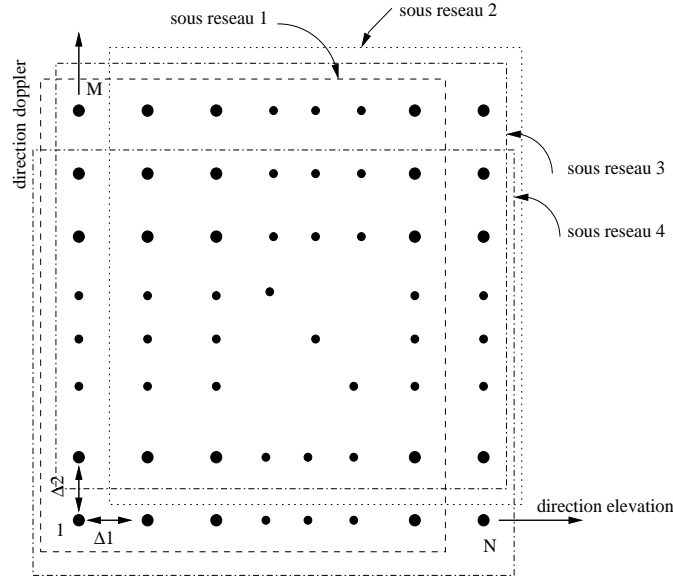


Fig. A.1 — Sous réseaux exploités.

par contre pour estimer ξ , on sélectionne les premières et les dernières $(N-1)L$ rangées respectivement

$$\mathbf{X}_\xi = \mathbf{J}_\xi \mathcal{A}; \quad \mathbf{X}'_\xi = \mathbf{J}'_\xi \mathcal{A} \quad (\text{A.7})$$

la propriété d'invariance par décalage de \mathcal{A} montre que

$$\mathbf{X}'_\xi = \mathbf{X}_\xi \xi; \quad \mathbf{X}'_\phi = \mathbf{X}_\phi \Phi. \quad (\text{A.8})$$

Définissons les matrices suivantes

$$\mathbf{E}_\phi = \mathbf{J}_\phi \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{E}_\xi = \mathbf{J}_\xi \mathbf{E}_s \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{E}'_\phi = \mathbf{J}'_\phi \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{E}'_\xi = \mathbf{J}'_\xi \mathbf{E}_s \quad (\text{A.10})$$

donc, on a la structure

$$\mathbf{E}_\xi = \mathbf{X}_\xi \mathbf{T}; \quad \mathbf{E}_\phi = \mathbf{X}_\phi \mathbf{T} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{E}'_\xi = \mathbf{X}'_\xi \xi \mathbf{T}; \quad \mathbf{E}'_\phi = \mathbf{X}_\phi \Phi \mathbf{T} \quad (\text{A.12})$$

\mathbf{T} est une matrice arbitraire et inversible. On utilise une approche de décomposition en sous espaces, on essaie d'avoir une matrice polynômial de la forme $(\mathbf{E} - \alpha \mathbf{F})$, ces matrices sont dites faisceaux de matrices.

Formons les faisceaux de matrices (en absence de bruit)

$$\mathbf{E}'_\phi - \lambda \mathbf{E}_\phi = \mathbf{X}_\phi [\Phi - \lambda \mathbf{I}_2] \mathbf{T} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{E}'_\xi - \lambda \mathbf{E}_\xi = \mathbf{X}_\xi [\xi - \lambda \mathbf{I}_2] \mathbf{T} \quad (\text{A.14})$$

Vue que Φ et ξ sont diagonales, les ϕ'_i , et ξ'_i sont donnés par la réduction de nombre de rang des faisceaux de matrices $(\mathbf{E}'_\phi, \mathbf{E}_\phi)$ et $(\mathbf{E}'_\xi, \mathbf{E}_\xi)$, respectivement. Ceci revient à

chercher les valeurs propres de $\mathbf{E}_\phi^\# \mathbf{E}'_\phi$ et $\mathbf{E}_\xi^\# \mathbf{E}'_\xi$. L'association automatique de chaque paire θ_i et \bar{f}_i vient du fait que $\mathbf{E}_\xi^\# \mathbf{E}'_\xi$ et $\mathbf{E}_\phi^\# \mathbf{E}'_\phi$ ont les mêmes vecteurs propres, qui est provoqué par le facteur commun \mathbf{T} .

Pour les obtenir, on doit diagonaliser conjointement

$$\mathbf{E}_\xi^\# \mathbf{E}'_\xi = \mathbf{T}^{-1} \xi \mathbf{T} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{E}_\phi^\# \mathbf{E}'_\phi = \mathbf{T}^{-1} \Phi \mathbf{T} \quad (\text{A.16})$$

Φ et ξ sont réelles, une façon de traiter une estimation conjointe avec une association automatique, on peut diagonaliser

$$(\mathbf{E}_\phi^\# \mathbf{E}'_\phi) + j(\mathbf{E}_\xi^\# \mathbf{E}'_\xi) = \mathbf{T}^{-1}(\Phi + j\xi)\mathbf{T} \quad (\text{A.17})$$

Alors, la partie réelle des valeurs propres donne Φ , la partie imaginaire donne ξ . On a

$$\xi_i = 2 \tan^{-1}(\Im \{\lambda_i\}) \text{ et } \phi_i = 2 \tan^{-1}(\Re \{\lambda_i\}) \quad (\text{A.18})$$

Cette méthode de diagonalisation conjointe donne de bon résultat et garantit qu'une seule matrice \mathbf{T} est utilisée. Le problème est quelle ne garantit pas que \mathbf{T} soit une matrice réelle. Ainsi, dans des cas critiques, il se peut que \mathbf{T} soit complexe, de façon que $\mathbf{T}(\mathbf{E}_\phi^\# \mathbf{E}'_\phi)\mathbf{T}^{-1}$ soit complexe. La partie réelle de ce terme doit donner un estimé de Φ , mais sa partie imaginaire donne une contribution dans l'estimation de ξ . Et d'une façon similaire, la partie réelle de $j\mathbf{T}(\mathbf{E}_\xi^\# \mathbf{E}'_\xi)\mathbf{T}^{-1}$ donne une contribution dans l'estimation de Φ . Un second problème est que la méthode ne peut être étendue au cas de plusieurs matrices, si on veut estimer conjointement les retards temporels, l'azimut et l'élévation par exemple.

Mathématiques des projections obliques

Dans cette annexe, nous donnons les formules de construction des projections obliques. La projection orthogonale est représentée par \mathbf{P} , souvent avec un indice indiquant le rang de la matrice. Les projections obliques sont représentées par \mathbf{E} , souvent avec un double indice, le premier indique l'espace signal le deuxième indique l'espace nul.

Les opérateurs de projection : Par le terme projection, on veut dire une matrice qui est idempotente (égale à son propre carré).

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^2. \quad (\text{B.1})$$

Les valeurs propres de la projection sont égales à 0 ou 1. Cependant, une matrice ayant des valeurs propres 0 ou 1 n'est pas nécessairement une projection.

Projection orthogonale : Une projection orthogonale a un espace nul qui est orthogonal à l'espace signal. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une projection soit orthogonale est d'être hermitienne et symétrique

$$\mathbf{P}^H = \mathbf{P}. \quad (\text{B.2})$$

Pour une projection orthogonale \mathbf{P}_H de l'espace engendré par le signal $\langle \mathbf{H} \rangle$ et d'espace nul $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{H} \rangle^\perp$, on a

$$\mathbf{P}_H \mathbf{H} = \mathbf{H} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{P}_H \mathbf{A} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Projection Oblique : Les matrices de projections qui ne sont pas orthogonales sont dites projections obliques. Les projections obliques sont idempotantes mais non symétriques. Pour une projection oblique \mathbf{E}_{HS} d'espace signal $\langle \mathbf{H} \rangle$ et d'espace nul $\langle \mathbf{S} \rangle$, on a

$$\mathbf{E}_{HS} \mathbf{H} = \mathbf{H} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{E}_{HS} \mathbf{S} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Construction de projection : Donnons maintenant les équations qui permettent la construction des matrices de projection à partir des sous espaces engendrés par les signaux utiles et des sous espaces nuls. Supposons \mathbf{H} une matrice complexe de taille

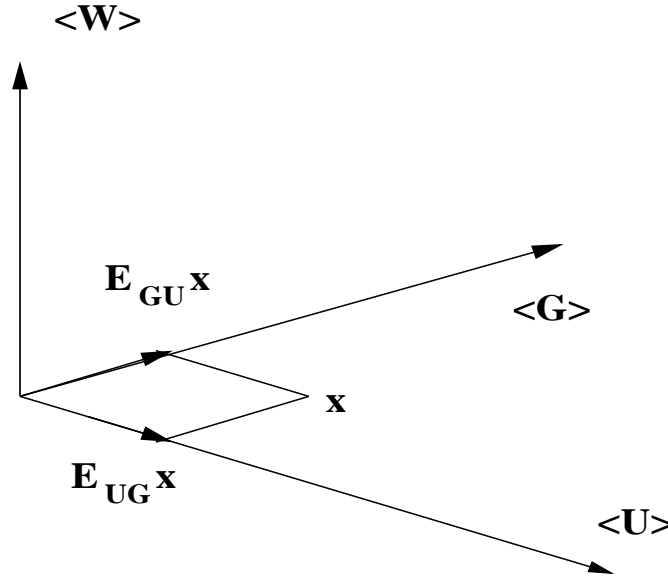


Fig. B.1 — Repères de projection oblique.

$n \times m$ de rang plein et \mathbf{S} une matrice complexe de taille $n \times t$. Supposons que $\langle \mathbf{H} \rangle$ et $\langle \mathbf{S} \rangle$ sont disjointes, ce qui nécessitent $m + t \leq n$.

La formule de construction de projecteurs orthogonaux de rang $\langle \mathbf{H} \rangle$ est

$$\mathbf{P}_{\mathbf{H}} = \mathbf{H} (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \quad (\text{B.7})$$

celui-ci est dit projecteur sur $\langle \mathbf{H} \rangle$. La projection orthogonale de rang $\langle \mathbf{H} \rangle^\perp$ est donnée par

$$\mathbf{P}_{\mathbf{H}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{H}}. \quad (\text{B.8})$$

Examinons maintenant, la matrice $(\mathbf{H} \ \mathbf{S})$ qui est construite par les colonnes de \mathbf{H} et \mathbf{S} . Supposons $m + t < n$, ainsi le rang colonne de $(\mathbf{H} \ \mathbf{S})$ est inférieur à n . La projection orthogonale du sous espace linéaire $\langle \mathbf{H} \ \mathbf{S} \rangle$ est

$$\mathbf{P}_{\mathbf{HS}} = (\mathbf{H} \ \mathbf{S}) \begin{pmatrix} \mathbf{H}^H \mathbf{H} & \mathbf{H}^H \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^H \mathbf{H} & \mathbf{S}^H \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^H \\ \mathbf{S}^H \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

On peut décomposer cette projection orthogonale comme suit

$$\mathbf{P}_{\mathbf{HS}} = \mathbf{E}_{\mathbf{HS}} + \mathbf{E}_{\mathbf{SH}} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{HS}} = (\mathbf{H} \ \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{H}^H \mathbf{H} & \mathbf{H}^H \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^H \mathbf{H} & \mathbf{S}^H \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^H \\ \mathbf{S}^H \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{SH}} = (\mathbf{0} \ \mathbf{S}) \begin{pmatrix} \mathbf{H}^H \mathbf{H} & \mathbf{H}^H \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^H \mathbf{H} & \mathbf{S}^H \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^H \\ \mathbf{S}^H \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Quelles sont les propriétés de $\mathbf{E}_{\mathbf{HS}}$ et $\mathbf{E}_{\mathbf{SH}}$? l'espace engendré de $\mathbf{P}_{\mathbf{HS}}$ est $\langle \mathbf{H} \ \mathbf{S} \rangle$ et on a $\langle \mathbf{H} \rangle$ et $\langle \mathbf{S} \rangle$ qui sont disjointes, aussi

$$\mathbf{P}_{\mathbf{HS}} (\mathbf{H} \ \mathbf{0}) = \mathbf{E}_{\mathbf{HS}} (\mathbf{H} \ \mathbf{0}) + \mathbf{E}_{\mathbf{SH}} (\mathbf{H} \ \mathbf{0}) \quad (\text{B.13})$$

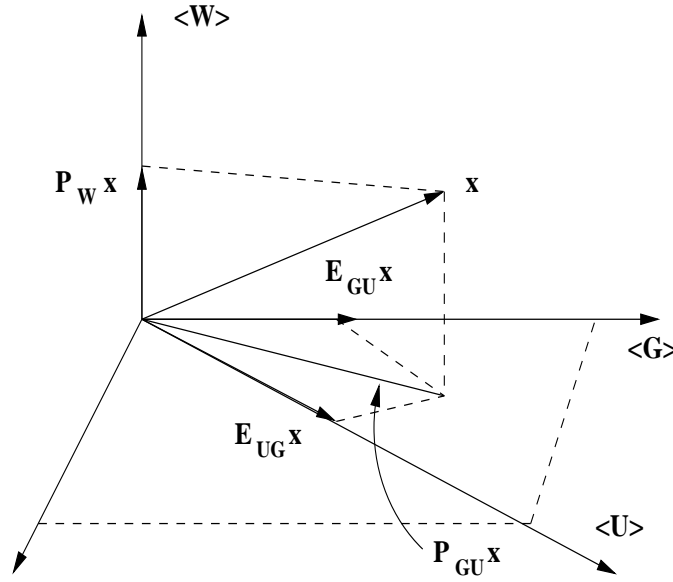


Fig. B.2 — Géométrie associée à la projection oblique [59].

$$\mathbf{E}_{\mathbf{HS}} (\mathbf{H} \ \mathbf{0}) = (\mathbf{H} \ \mathbf{0}) \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{SH}} (\mathbf{H} \ \mathbf{0}) = (\mathbf{0} \ \mathbf{0}) \quad (\text{B.15})$$

et

$$\mathbf{P}_{\mathbf{SH}} (\mathbf{0} \ \mathbf{S}) = \mathbf{E}_{\mathbf{HS}} (\mathbf{0} \ \mathbf{S}) + \mathbf{E}_{\mathbf{SH}} (\mathbf{0} \ \mathbf{S}) \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{HS}} (\mathbf{0} \ \mathbf{S}) = (\mathbf{0} \ \mathbf{0}) \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{SH}} (\mathbf{0} \ \mathbf{S}) = (\mathbf{0} \ \mathbf{S}) \quad (\text{B.18})$$

Les équations établissent les rangs de $\mathbf{E}_{\mathbf{HS}}$ et $\mathbf{E}_{\mathbf{SH}}$ comme étant $\langle \mathbf{H} \rangle$ et $\langle \mathbf{S} \rangle$ respectivement. Notons que :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{HS}}^2 = (\mathbf{E}_{\mathbf{HS}} + \mathbf{E}_{\mathbf{SH}}) (\mathbf{E}_{\mathbf{HS}} + \mathbf{E}_{\mathbf{SH}}) = \mathbf{E}_{\mathbf{HS}}^2 + \mathbf{E}_{\mathbf{SH}}^2 \quad (\text{B.19})$$

Les autres termes sont nuls. Cependant, $\mathbf{P}_{\mathbf{HS}}^2 = \mathbf{P}_{\mathbf{HS}} = \mathbf{E}_{\mathbf{HS}} + \mathbf{E}_{\mathbf{SH}}$ et $\langle \mathbf{E}_{\mathbf{HS}} \rangle = \langle \mathbf{H} \rangle$ est disjoint de $\langle \mathbf{E}_{\mathbf{SH}} \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle$, donc, $\mathbf{E}_{\mathbf{HS}}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{HS}}$ et $\mathbf{E}_{\mathbf{SH}}^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{SH}}$. Ainsi, on a établi que $\mathbf{E}_{\mathbf{HS}}$ et $\mathbf{E}_{\mathbf{SH}}$ sont des projections obliques d'espace signal utile $\langle \mathbf{H} \rangle$ et $\langle \mathbf{S} \rangle$ respectivement.

C**Publications**

1. Djeddou M., Belouchrani A. and Aouada S., "Maximum likelihood angle-frequency estimation in partially known correlated noise for low-elevation targets," Accepted for publication in *IEEE Transactions on Signal Processing*.
2. Djeddou M., Belouchrani A. and Aouada S., "Approximate ML direction finding in spatially correlated noise using oblique projections," *International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Montreal Canada May 2004.
3. Djeddou M., Aouada S. and Zoubir A., "Maximum likelihood angle-frequency parameter estimation in unknown noise fields for low-elevation target tracking," *International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA)*, Paris France August 2003.
4. Djeddou M., Belouchrani A., "Parameter estimation in low-elevation angle tracking situation," *International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA)*, Kuala Lumpur Malaysia August 2001.

Maximum Likelihood Angle-Frequency Estimation in Partially Known Correlated Noise for Low-Elevation Targets

Mustapha Djeddou, Adel Belouchrani, and Saïd Aouada

Abstract—In radar applications, the received echo signals reach the array elements via a multiplicity of paths despite the fact that there exists only one target. We address the problem of joint direction of arrival and Doppler frequency estimation using a sensor array in partially known additive noise. We consider a specular reflection model with a radar cross section fluctuating from one pulse repetition interval to another. The proposed model allows the estimation of more paths than sensors. Two approximate maximum likelihood algorithms are proposed. The first approach uses a linear expansion of the noise covariance matrix, whereas the second employs a combination of oblique projections and a zero-forcing solution to alleviate the effect of noise. In contrast to other classical methods, the two approaches are more robust to spatially correlated noise, and they employ more compact cost functions which reduce the dimension of the optimization search. Numerical simulations are provided to assess the basic performance of the two approaches, which are compared to the Cramér-Rao bound.

Index Terms—Maximum likelihood, noise modeling, low-elevation, direction finding, Doppler frequency.

I. INTRODUCTION

TARGET localization and tracking in radar systems involves the estimation of Doppler frequencies, directions of arrival (DOA) in azimuth/elevation, and time-difference of arrival (TDOA). Tracking low-flying targets is usually complicated because the received echo signal reaches the radar site via two or more paths. This is due to the close proximity of the target to a reflecting surface. A detailed model for the surface reflection in different situations has been established [1], [2]. The reflected signal consists of both specular and diffuse components. When the ray grazing angle is small, the specular component dominates. In the case of a two path scenario, the radar spots two targets, i.e., the true target and its image created by the reflected echo. For an elevation measurement, the reflected image usually has an angular position that appears to be below the surface, and a range difference often less than the range resolution of the radar. In addition, the direct and reflected signals add constructively or destructively due to their phase difference. Another problem that arises in low-angle tracking is the small angle separation between the impinging echoes (in terms of the beamwidth) [1]. Making use of classical beamforming to

spatially separate the two signals is therefore problematic. Among the various techniques that have been proposed to solve the problem, three main families of approaches can be distinguished.

The first family encompasses enhanced mono-pulse methods (reduced antenna complexity) such as the double-null [2] and the two-beam [3] techniques. These methods cannot track an elevation angle less than a quarter of the beamwidth, as they are sensitive to rough reflection surfaces, diffuse multipath and thermal noise [1], [3].

The second family consists of wave number estimation techniques (increased array complexity). These methods exploit a phased array architecture [4] and include for example MUSIC and ESPRIT [5]. Due to the requirements of these algorithms, their performance degrades with signal coherence. The performance can be enhanced through the use of spatial smoothing [6] and forward-backward averaging [7], provided the bias in the estimates is monitored.

The third family includes various parametric techniques where the problem at hand can be looked at in three different ways. First, the target and its image can be considered as two separate sources, second, the target and its image can be linked via a geometric relation and third, some a priori knowledge of the reflection coefficients can be used. These techniques are basically maximum likelihood (ML) estimators [8]-[13]. The advantage of ML is that it is less sensitive to signal coherence as compared to subspace decomposition techniques, provided that the stochastic properties of the data are known.

Introducing *a priori* knowledge in ML considerably improves the performance [12]. This knowledge is derived from a highly deterministic multipath model, using geometric information and a set of physical parameters like the refractivity gradient, the reflection coefficient, the specular and diffuse scattering coefficients, and the divergence factor [11]. Based on this information, a refined model (RM) has been developed for low angle tracking [10], [11], leading to a refined maximum likelihood (RML) technique, with a variant accounting for incoherent multipath signals [11]. Compared to the classical DOA model, with unknown pairs of angles, amplitudes and phases, the RM model has fewer unknown parameters (signal amplitude, signal phase, and height of the target) as the other parameters (range, height of the receiver, grazing angle, etc) are expressed in terms of the unknowns. This model assumes known environment parameters and spatially white noise and/or nonfluctuating complex amplitudes that account for reflection coefficients and radar cross section (RCS) factors

M. Djeddou and A. Belouchrani are with the Electrical Engineering Department, École Nationale Polytechnique (ENP), PO Box 182, El Harrach 16200, Algiers, Algeria.

S. Aouada is with the Signal Processing Group, Institute of Telecommunications, Darmstadt University of Technology (TUD), Merckstrasse 25, D-64283, Darmstadt, Germany, (email: aouada@ieee.org).

[10], [12]. In practice however, the environment parameters are difficult to obtain or unavailable.

In what follows, we investigate the problem of localization for low-elevation targets. We consider a specular reflection model, which is directional and follows the laws of classical optics. The RCS is assumed to be fluctuating from one pulse repetition interval (PRI) to another. We address joint ML estimation of DOAs and Doppler frequencies in the presence of a partially known noise field. Two approaches are highlighted to account for the effect of the noise. The first one uses *a priori* knowledge on the structure of the noise as it employs a linear expansion of its covariance matrix [14], and the second one is based on oblique projections [15] along with zero-forcing [16].

This paper is organized as follows: The data model describing all the parameters and assumptions on the signal are presented in Section II. In Section III, based on the particular noise field structure, two formulations of a modified ML estimator are provided. Simulation results assessing their basic performance are commented in Section IV. Comments and derivations related to the Cramér-Rao bound (CRB) based on the model of interest are left to the Appendix. The paper is finally concluded in Section V.

II. DATA MODEL

Consider a uniform linear array (ULA) of N identical antenna elements. We assume that the radar observes its received waveforms over M successive PRIs. The following scenario is considered: The radar receives a direct signal and a reflected echo from unknown angles.

Thus, for $n = 1, \dots, N$, the output of each antenna element can be given by

$$x_n(t) = A_{d_n} \beta_d S_d(t) + A_{r_n} \beta_r S_r(t) + v_n(t). \quad (1)$$

where A_{d_n} and A_{r_n} are the antenna responses to the direct and the reflected signals, $S_d(t)$ and $S_r(t)$, respectively. β_d and β_r are complex factors related to both signals and accounting for the RCS of the target [17], and $v_n(t)$ is the additive noise.

In our low-elevation scenario, for a small grazing angle, the direct and reflected echoes fall in the same range gate, and the two signals differ by their amplitudes and phase shifts. Hence, considering the set of all N antenna elements, using vector notation, the array output can be written as

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{s}(t, \mathbf{f}) + \mathbf{v}(t) \quad (2)$$

where $\text{diag}(\cdot)$ is a transformation of a vector into a diagonal matrix, $\mathbf{b} = [\beta_d \ \beta_r]^T$, and $(\cdot)^T$ denotes matrix transpose. $\mathbf{s}(t, \mathbf{f}) = [e^{j2\pi f_d t} \ e^{j2\pi f_r t}]^T$, and, in the case of a ULA, the spatial steering matrix is defined as $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{A}_d \ \mathbf{A}_r]$ with

$$\mathbf{A}_d = [1 \ e^{-j2\pi \sin \theta_d \Delta / \lambda} \ \dots \ e^{-j(N-1)2\pi \sin \theta_d \Delta / \lambda}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_r = [1 \ e^{-j2\pi \sin \theta_r \Delta / \lambda} \ \dots \ e^{-j(N-1)2\pi \sin \theta_r \Delta / \lambda}]^T \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_d \ \theta_r]^T \quad \text{and} \quad \mathbf{f} = [f_d \ f_r]^T \quad (5)$$

where θ_d , f_d and θ_r , f_r are the DOA and Doppler frequency of the direct and reflected signals, respectively, Δ is the antenna element spacing and λ is the wavelength.

The noise $\mathbf{v}(t)$ depends on physical variables such as thermal noise, clutter and possibly jammer interference.

A. Model Transformation

The samples under consideration are available in three processing dimensions, allowing the discrimination of multiple echoes in azimuth/elevation, range and Doppler frequency. In our case, we are interested in the joint DOA and Doppler frequency estimation, while the third dimension (range) is used to reduce the effect of the power nulling problem of the signals received from the low-elevation target [17]. We use several consecutive PRIs ($M \geq 2$) to calculate the estimates. We assume for simplicity that the DOAs and Doppler frequencies are invariant throughout the considered PRIs¹, while the complex factors \mathbf{b}_m , $m = 0, \dots, M-1$, vary from one PRI to another.

Over each of the M PRIs, we assume that $\mathbf{x}(t)$ is sampled at a high rate, and that L samples are collected. The observation samples are denoted by $x_n(t_{l,m})$, with $n = 1, \dots, N$; $l = 0, \dots, L-1$ and $m = 0, \dots, M$. In other words, $x_n(t_{l,m})$ is the l -th sample of the n -th antenna output over the m -th PRI.

Suppressing the dependence on $\boldsymbol{\theta}$ and \mathbf{f} , the received data over the m -th PRI can be arranged in matrix form as follows

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}_m) \text{diag}(\mathbf{e}_m) \mathbf{F} + \mathbf{V}_m \quad (6)$$

where

$$\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} \phi_d^{(m-1)T_R} & \phi_r^{(m-1)T_R} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

and

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_d^{\Delta t} & \dots & \phi_d^{(l-1)\Delta t} & \dots & \phi_d^{(L-1)\Delta t} \\ 1 & \phi_r^{\Delta t} & \dots & \phi_r^{(l-1)\Delta t} & \dots & \phi_r^{(L-1)\Delta t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

with

$$\phi_d = e^{j2\pi f_d} \quad \text{and} \quad \phi_r = e^{j2\pi f_r} \quad (9)$$

and

$$\mathbf{V}_m = [\mathbf{v}(t_{0,m}), \dots, \mathbf{v}(t_{(L-1),m})]. \quad (10)$$

After sampling, the columns of \mathbf{X}_m are concatenated in a LN -dimensional vector \mathbf{y}_m as follows

$$\mathbf{y}_m = \text{vec}(\mathbf{X}_m). \quad (11)$$

For arbitrary matrices \mathbf{A} , \mathbf{C} and a diagonal matrix $\text{diag}(\mathbf{b})$, it can be readily verified that $\text{vec}(\mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}) \mathbf{C}) = (\mathbf{C}^T \circ \mathbf{A}) \mathbf{b}$, where \circ denotes Khatri-Rao product (a column-wise Kronecker product). Hence, it is straightforward to write (6) as

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m &= \text{vec} \{ \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{b}_m) \text{diag}(\mathbf{e}_m) \mathbf{F} + \mathbf{V}_m \} \\ &= (\mathbf{F}^T \circ \mathbf{A}) (\mathbf{b}_m \odot \mathbf{e}_m) + \text{vec}(\mathbf{V}_m) \end{aligned} \quad (12)$$

where \odot denotes Schur-Hadamard (element-wise) product.

Repeating the same operation over all the M PRIs and arranging the obtained data vectors in a matrix leads to

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_M] \\ &= \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \mathbf{H} + \mathbf{N} \end{aligned} \quad (13)$$

where the space-frequency steering matrix is defined as $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = \mathbf{F}^T \circ \mathbf{A}$, and $\mathbf{H} = \mathbf{B} \odot \mathbf{E}$, with $\mathbf{B} =$

¹The PRI is assumed to be comprised within the coherent pulse interval (CPI).

$[\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_M]$. The effect of the additive noise is given by $\mathbf{N} = [\text{vec}(\mathbf{V}_1) \dots \text{vec}(\mathbf{V}_M)]$. Depending on whether the environment parameters are assumed steady or fluctuating, \mathbf{H} is modeled as deterministic unknown or as random with probability densities described in [18], respectively. For simplicity and without loss of generality, we focus only on the Swerling I case [18]. Thus, the pulse amplitude over the collected PRIs is considered as a single random variable with Rayleigh distribution. The initial pulse phase is assumed to be uniformly-distributed over $[0 \ 2\pi]$.

The unknown parameters $\boldsymbol{\theta}$ and \mathbf{f} depend on the array geometry and the target velocity, respectively. As they vary, matrix \mathbf{U} in (13) describes a space-frequency manifold. Note that it is straightforward to extend the model to the case of more than 2 paths. Processing the data received over several PRIs exploits the diversity among the multidimensional measurements and reduces the effect of power nulling in the scenario of a low grazing angle, making the estimation of more paths than antennas possible. Indeed, if the number of paths is d , the dimension of the manifold matrix \mathbf{U} is $LN \times d$, and the necessary condition on \mathbf{U} for the identifiability of the unknown parameters is $LN \geq d$ and \mathbf{U} is full rank, d . Thus, if $d > 2$, only $N = 2$ antennas are sufficient to recover the unknown paths, provided the number of samples over each PRI, L , is high enough.

In what follows we assume that the data is modeled as a Gaussian stochastic process, with a covariance matrix \mathbf{R} , given by

$$\mathbf{R} = E \{ \mathbf{y}_m \mathbf{y}_m^H \} = \mathbf{U} \mathbf{R}_H \mathbf{U}^H + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \quad (14)$$

where $E \{ \cdot \}$ denotes mathematical expectation, and $(\cdot)^H$ stands for Hermitian transpose. $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ is the covariance matrix of the noise \mathbf{N} , parametrized by the vector of unknown real elements \mathbf{q} . The following assumptions on the noise samples \mathbf{n}_m (columns of \mathbf{N}) are considered

$$E \{ \mathbf{n}_m \mathbf{n}_k^H \} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \delta_{mk} ; \quad E \{ \mathbf{n}_m^T \mathbf{n}_k \} = 0 \quad (15)$$

where $\delta_{mk} = 1$ for $m = k$ and 0 elsewhere.

\mathbf{R}_H is the covariance matrix of the unknown scaled samples in \mathbf{H} , collected over the M PRIs. The columns \mathbf{h}_m of \mathbf{H} are assumed to be independent from the noise and satisfy the following

$$E \{ \mathbf{h}_m \mathbf{h}_k^H \} = \mathbf{R}_H \delta_{mk} ; \quad E \{ \mathbf{h}_m^T \mathbf{h}_k \} = 0. \quad (16)$$

III. METHOD OUTLINE

A. Maximum Likelihood Estimation

Based on the above assumptions, the unconstrained negative log-likelihood (LL) function of the observed data, after normalization and omitting constant terms, is given by [19], [20]

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) = \ln |\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})| + \text{trace} \{ \mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\mathbf{R}} \} \quad (17)$$

where $|\cdot|$ stands for determinant, $\hat{\mathbf{R}}$ is the sample covariance matrix of the data, given by

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{y}_m \mathbf{y}_m^H = \frac{1}{M} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H \quad (18)$$

and $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\theta}^T, \mathbf{f}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \mathbf{q}^T]^T$ is the vector of unknown real parameters, with $\boldsymbol{\rho}$ being the vector of real entries (real and imaginary parts) of the elements of \mathbf{R}_H . At this stage, we seek a further simplified LL cost function by replacing $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ by a favorable estimate $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})$. In what follows, we describe two approaches to solve the problem.

B. 2D Approximate Maximum Likelihood (2D-AML)

In (14), the $(2LN-1)$ -dimensional vector of unknowns \mathbf{q} , is given as $\mathbf{q} = [q_0, \Re(q_1), \Im(q_1), \dots, \Re(q_{LN-1}), \Im(q_{LN-1})]^T$, where $q_0 = \sigma^2$, is the spatially uniform noise power, corresponding to the diagonal elements of $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$. More generally, $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ can be modeled as a linear combination of $2LN-1$ known weighting matrices Φ_i and a set of unknown real parameters q_i (the elements of \mathbf{q}) [14], [19], i.e.,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2LN-1} q_i \Phi_i. \quad (19)$$

In [19], an application to underwater acoustics of the model (19) is described. Other examples include cases where the noise covariance matrix is approximated by a sum of weighted Fourier coefficients and the base matrices Φ_i are functions of the known array geometry. This approximation is a result of a Fourier series expansion of the spatial noise power density function [21]. More general models are also considered where the noise is spatially correlated, with a banded and Toeplitz covariance matrix. Due to the Hermitian structure of $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$, the base matrices Φ_i have diagonals composed of zeros, ± 1 , and $\pm j$ [22].

The approach described herein is an extension of the approximate maximum likelihood (AML) algorithm [19] to the 2D case. The 2D-AML algorithm is based on the application of the properties of the $\text{vec}(\cdot)$ operator to (14) and using the expansion in (19),

$$\text{vec}(\mathbf{R}) = \text{vec}(\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \mathbf{R}_H \mathbf{U}^H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f})) + \text{vec}(\mathbf{Q}(\mathbf{q})). \quad (20)$$

Defining $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = [\mathbf{U}^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \otimes \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f})]$ and $\mathbf{r}_H = \text{vec}(\mathbf{R}_H)$, where $(\cdot)^*$ denotes complex conjugate, (20) can be written as

$$\text{vec}(\mathbf{R}) = [\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \quad \mathcal{P}] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_H \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (21)$$

where $\mathcal{P} = [\text{vec}(\Phi_1) \dots \text{vec}(\Phi_{2LN-1})]$.

Define the following

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = [\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \quad \mathcal{P}] \quad (22)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_H \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

From (21), a consistent estimate $\hat{\mathbf{p}}$ can be obtained as [19]

$$\hat{\mathbf{p}} = [\mathcal{M}^H(\hat{\mathbf{R}}^{-T} \otimes \hat{\mathbf{R}}^{-1}) \mathcal{M}]^{-1} \mathcal{M}^H(\hat{\mathbf{R}}^{-T} \otimes \hat{\mathbf{R}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}} \quad (24)$$

where $\hat{\mathbf{R}}$ is the sample covariance matrix of the data, defined in (18), and $\hat{\mathbf{r}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}})$.

Substituting (24) into (20) leads to the compressed LL function

$$\mathcal{L}_{2D\text{-AML}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = \ln |\hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f})| + \text{trace} \{ \hat{\mathbf{R}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \hat{\mathbf{R}} \} \quad (25)$$

where $\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}, \hat{\mathbf{p}})$. Consequently, estimation of the parameters reduces to solving the following optimization problem

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}} \left\{ \mathcal{L}_{2\text{D-AML}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \right\}. \quad (26)$$

C. Oblique Projection Approximate Maximum Likelihood (AML-OP)

In the following, the noise vectors \mathbf{n}_m in (13) are modeled as a combination of two parts as follows

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_m &= \mathbf{z}_m + \mathbf{w}_m \\ &= \mathbf{G}\boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{w}_m. \end{aligned} \quad (27)$$

The first part \mathbf{w}_m , is an unstructured noise generated internally by the electronics of the receiver. The second part is an external structured noise \mathbf{z}_m , resulting from filtering an unknown white process $\boldsymbol{\omega}_m$ through a known linear system $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{(LN \times K)}$, with $LN \geq K$ and K known. This linear process can be regarded as a set of K base matrices spanning the noise subspace (structured). Matrix \mathbf{G} models the effect of any non-noiselike signal that interferes with the transmitted pulse. It can be estimated off-line. This can be done, for example, using known target-free signals or, a known land clutter (environment) model. For instance, it is shown in [23] that low-angle land clutter is non-noiselike. Note that knowledge of \mathbf{G} up to a unitary matrix, say \mathbf{T} , is sufficient to retrieve the structured noise subspace, the latter being excited by a process $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_m = \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\omega}_m$ which is also white. Based on the above *a priori* knowledge, an alternative approach to the 2D-AML can be introduced to take into account the compound nature of the additive noise.

By defining the following matrices $\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_M]$ and $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M]$, and using (12) and (27), we can rewrite (13) as

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{U}\mathbf{H} + \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{W} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} + \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (28)$$

Provided that the composite matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{G} \end{bmatrix}$ has full rank, and $2 + K \leq LN$, under the assumption that the signal and interference dominate the background noise, the zero-forcing solution of (28) is given by [16]

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}} \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{G} \end{bmatrix}^\# \mathbf{Y} \quad (29)$$

where $(\cdot)^\#$ stands for Moore-Penrose pseudo-inverse.

Recalling that the LL function (17) is to be concentrated with respect to the noise parameters, we focus on the estimation of $\boldsymbol{\Omega}$. After some algebraic manipulations, it can be deduced that the estimate $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ is obtained as

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = (P_{\mathbf{U}}^\perp \mathbf{G})^\# \mathbf{Y} \quad (30)$$

where $P_{\mathbf{U}}^\perp$ is the orthogonal projector onto \mathbf{U} , given by $P_{\mathbf{U}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{U}(\mathbf{U}^H \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H$, with \mathbf{I} being the identity matrix (with appropriate dimensions). Note that the projector is obtained with the array manifold response for the 2D range variation

of the DOA and Doppler frequency. This processing can be carried-out off-line as it does not depend on the data.

Using the known structure of \mathbf{G} , the estimated structured noise is

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}} &= \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\Omega}} \\ &= \mathbf{G}(P_{\mathbf{U}}^\perp \mathbf{G})^\# \mathbf{Y} \\ &= E_{\mathbf{G}\mathbf{U}} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (31)$$

where $E_{\mathbf{G}\mathbf{U}}$ is the oblique projector (OP) with range $\langle \mathbf{G} \rangle$ and null space $\langle \mathbf{U} \rangle$ [15].

By neglecting the component of the unstructured noise² belonging to the subspace $\langle \mathbf{U} \rangle$, \mathbf{W} can be considered as belonging to a subspace $\langle \mathbf{W} \rangle$ which is orthogonal to both subspaces $\langle \mathbf{U} \rangle$ and $\langle \mathbf{G} \rangle$. Therefore, exploiting this orthogonality, an estimate of \mathbf{W} can be obtained as

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}} &= P_{\mathbf{W}} \mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{I} - P_{\mathbf{U}\mathbf{G}}) \mathbf{Y} \\ &= P_{\mathbf{U}\mathbf{G}}^\perp \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (32)$$

where $P_{\mathbf{U}\mathbf{G}}$ is the projector onto the subspace shared by $\langle \mathbf{U} \rangle$ and $\langle \mathbf{G} \rangle$. Thus, (32) leads to the following estimated noise covariance matrix

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) &= \mathbf{R}_{zz} + \mathbf{R}_{ww} \\ &= E_{\mathbf{G}\mathbf{U}} \mathbf{R} E_{\mathbf{G}\mathbf{U}}^H + P_{\mathbf{U}\mathbf{G}}^\perp \mathbf{R} P_{\mathbf{U}\mathbf{G}}^{\perp H}. \end{aligned} \quad (33)$$

Next, we consider the concentration of the LL function (17) with respect to the elements $\boldsymbol{\rho}$ of \mathbf{R}_H . It can be shown that a consistent estimate of \mathbf{R}_H can be obtained as [14]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_H &= \{(\mathbf{U}^H \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{q})\} (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{Q}(\mathbf{q})) \\ &\quad \{ \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{U})^{-1} \}. \end{aligned} \quad (34)$$

Inserting (34) in (14) and then in the LL function (17) clearly reduces the dimension of the optimization search. However this direct optimization remains unattractive as the dependence between the unknown parameters involves high nonlinearities.

A further simplification of the LL function can be obtained by substituting the covariance matrix \mathbf{R} by the sample covariance matrix $\hat{\mathbf{R}}$ and inserting (33) in (34). Thus, we obtain the following approximation

$$\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = \hat{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) (\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{Q}}) \hat{\boldsymbol{\Pi}}^H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) + \hat{\mathbf{Q}} \quad (35)$$

where $\hat{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = \mathbf{U} (\mathbf{U}^H \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \hat{\mathbf{Q}}^{-1}$. Then, the modified LL cost function becomes

$$\mathcal{L}_{\text{OP}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = \ln \left| \tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \right| + \text{trace} \left\{ \tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \hat{\mathbf{R}} \right\}. \quad (36)$$

Finally, estimation of the parameters through the AML-OP solution reduces to solving the following optimization problem

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}} \left\{ \mathcal{L}_{\text{OP}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \right\}. \quad (37)$$

In order to achieve convergence, the algorithms require good initial parameters. A forward-backward averaging technique

²Note that the unstructured noise can be assumed orthogonal to subspace $\langle \mathbf{G} \rangle$ without loss of generality, since any component of \mathbf{W} that would belong to $\langle \mathbf{G} \rangle$ can be included in the model of $\boldsymbol{\Omega}$.

[7] can be first applied to the collected data to decorrelate the sources and then, an initial estimate of the parameters of interest can be obtained using a standard subspace-separation technique, such as the joint angle-frequency estimation (JAFE) algorithm [24], [25], under the assumption that the noise is spatially white. After the initialization step, a quasi-Newton algorithm can be used to solve the optimization problem in (26) and (37). In our examples, the BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb and Shanno) method [26]-[29] is applied based on a mixed quadratic and cubic line search procedure. The BFGS formula is used to update the entry of the Hessian matrix, and the DFP (Davidon, Fletcher and Powell) method is used to obtain an efficient approximation of the inverse of the Hessian matrix [27].

IV. SIMULATION RESULTS

We use the following simulation scenario: Assume a 4/3-earth model [17]; a radar over a smooth earth is operating at a height of 3m. The array is a ULA of N sensors. The target is at a distance of 12km, flying at constant altitude of 200m. The range is assumed roughly known. L is set to a value around the range bin of the target echo.

The actual noise covariance matrix is modeled as $\mathbf{Q}_{m,n} = \sigma^2 \rho^{|m-n|} e^{j\xi(m-n)}$, where ρ is the correlation coefficient and ξ is a scaling factor. The unstructured noise component \mathbf{w}_m is modeled as a white noise with variance σ_w^2 , where $\sigma_w < \sigma$. The structure of the noise covariance matrix is of the form $\mathbf{Q} = \mathbf{G}\mathbf{G}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}$. Thus, the process \mathbf{G} is chosen to be the square-root matrix of $\mathbf{Q} - \sigma_w^2 \mathbf{I}$. Note that this is not a unique choice. In practice \mathbf{G} can be estimated up to a unitary matrix from known target-free signals or known land-clutter models. The value of the signal-to-noise ratio (SNR) is $10 \log_{10}(\sigma_s^2/\sigma^2)$, where σ_s^2 is the signal power.

Alternatively, the noise vector \mathbf{q} clearly contains $2LN - 1$ real elements, i.e., σ^2 for the main diagonal of \mathbf{Q} , $\sigma^2 \rho^k \cos(k\xi)$ for the real part of the k -th super- and sub-diagonals of \mathbf{Q} , and $\pm \sigma^2 \rho^k \sin(k\xi)$ for the imaginary part of the k -th super- and sub-diagonals of \mathbf{Q} , respectively, with $k = 1, \dots, LN - 1$. The corresponding base matrices Φ_i , $i = 1, \dots, 2LN - 1$, can be easily deduced to have diagonals composed of zeros, 1, and $\pm j$, as described in [22].

We illustrate the global performance of the proposed approaches in terms of the root mean squared error (rMSE) versus the SNR, the spatial correlation coefficient ρ , the number of collected PRIs M , and the number of sensors N . We also illustrate the effect of the range on the DOA tracking. We compare the performance of the two techniques to the classical stochastic maximum likelihood (SML), where the noise is assumed spatially and temporally white, as well as to the CRB which is provided by (47) in the Appendix. The parameter sets are indicated in the corresponding figure captions. The obtained results are averaged over 200 Monte-Carlo runs. The results for the direct and reflected echoes are similar, therefore only those corresponding to the reflected echo are shown.

Figures 1 and 2 illustrate the performance of AML-OP and 2D-AML versus SNR, in terms of rMSE. The AML-OP

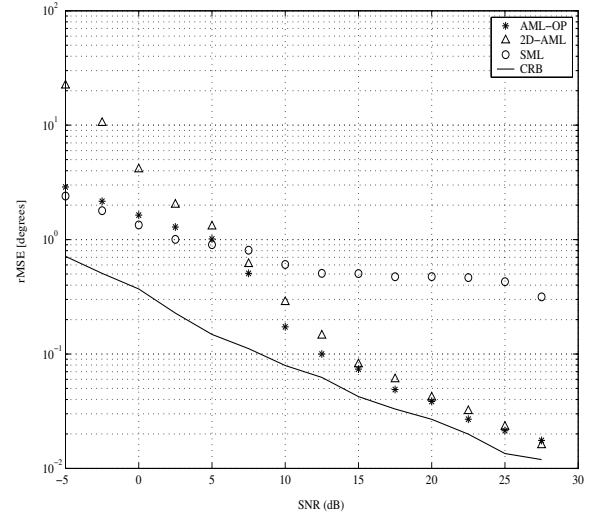


Fig. 1. rMSE of the DOA vs SNR for the different methods. $N = 12$, $M = 200$, $L = 3$, $\rho = 0.9$.

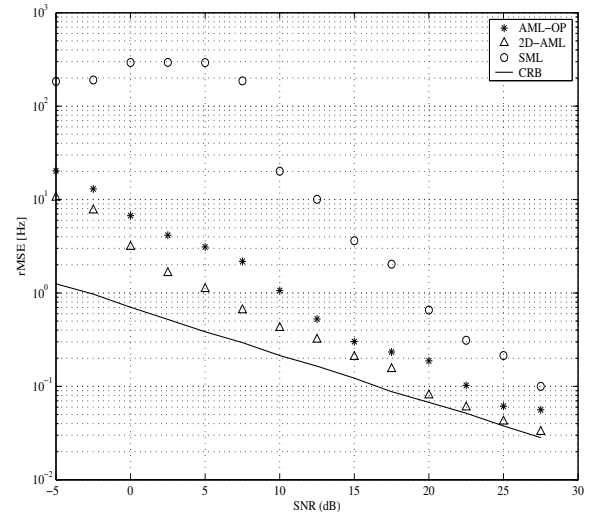


Fig. 2. rMSE of the Doppler frequency vs SNR for the different methods. $N = 12$, $M = 200$, $L = 3$, $\rho = 0.9$.

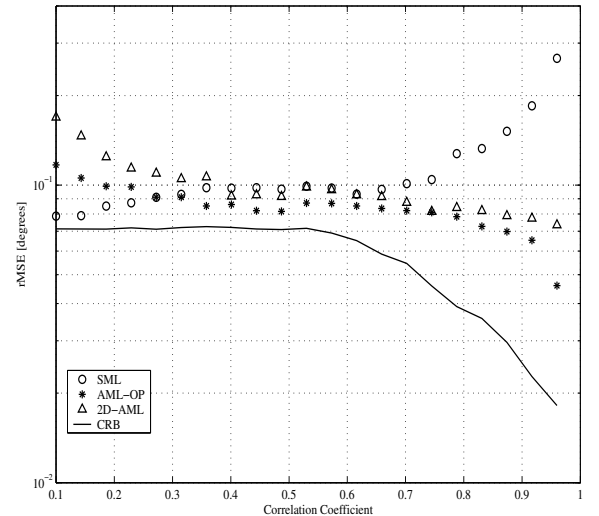


Fig. 3. rMSE of the DOA vs the correlation coefficient for the different methods. $N = 14$, $M = 200$, $L = 3$, SNR = 10dB.

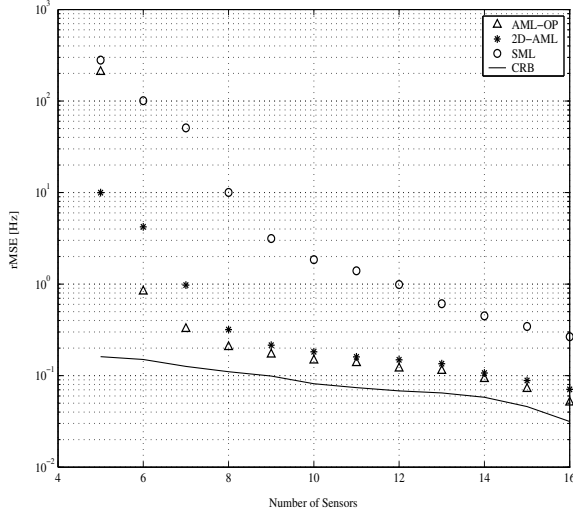


Fig. 4. rMSE of the Doppler frequency vs the number of sensors for the different methods. $M = 400$, $\rho = 0.95$, $L = 3$, $\text{SNR} = 10\text{dB}$.

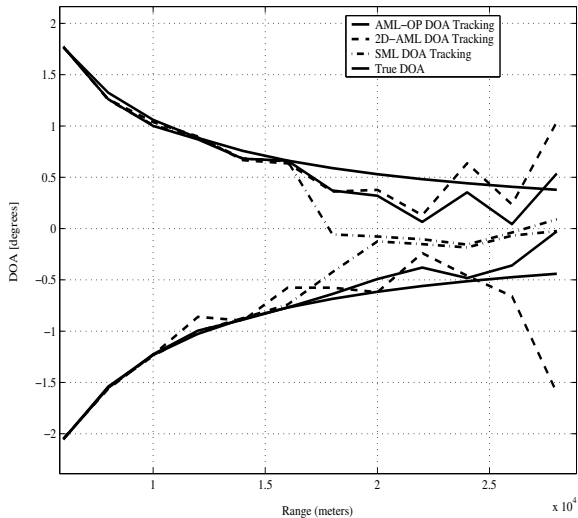


Fig. 5. Tracking of the direct and reflected DOAs for the different methods. $N = 12$, $M = 200$, $\rho = 0.95$, $L = 3$, $\text{SNR} = 10\text{dB}$.

performs slightly better than the 2D-AML for DOA estimation and inversely, 2D-AML outperforms the AML-OP for Doppler frequency estimation. Overall, the AML-OP is observed to perform similarly to SML for $\text{SNR} < 10\text{dB}$ and similarly to 2D-AML for $\text{SNR} > 10\text{dB}$. Also, AML-OP outperforms 2D-AML for low SNR. For the above settings the two estimators do not reach the CRB as the results show a bias in the estimates.

Figure 3 shows the variation of the rMSE of the estimated DOA as the correlation coefficient ρ vary. Note that the SML diverges as ρ approaches one. As expected, AML-OP and 2D-AML perform better at higher values of ρ . Variation of the rMSE of the Doppler frequency is similar, therefore it is not shown for conciseness purposes. More generally, the same remarks as for the previous example can be made here, especially with respect to the relative performance of AML-OP and 2D-AML.

Figure 4 illustrates the performance of the Doppler fre-

quency estimation as we increase the number of antenna elements. Similarly, the same remarks as above apply for this example too.

Figure 5 shows the improvement of the performance as the angle difference between the direct and reflected paths increases (as the target approaches the radar site). The other parameters are kept fixed. Observe that 2D-AML and AML-OP still provide separable DOAs at any range unlike SML which fails to separate two DOAs that are merged around 0° at a range superior to 20km.

V. CONCLUSION

The problem of joint estimation of directions of arrival (DOA) and Doppler frequencies is addressed in the case of an unknown correlated additive noise. A model is derived to highlight the stationarity of the parameters of interest over the observation interval. This model exploits the fluctuation of the complex amplitudes and introduces a parametrization of the noise covariance matrix. This parametrization leads to two approximate maximum likelihood estimators (AML). The first one is an extension of the AML to the case of a 2-dimensional search (2D-AML), and the second one uses a combination of oblique projections and zero-forcing (AML-OP) to alleviate the effect of the noise. Relevance of the estimation approaches is demonstrated through simulations and a comparison is made with a standard estimation technique to show the degradation in its performance due to noise mis-modeling. Details relative to the Cramér-Rao bound (CRB) which corresponds to the derived model are also presented. The proposed techniques take advantage of the diversity provided by the collected pulse repetition intervals (PRI) and exploits the structure of the noise, allowing the estimation of more paths than antenna elements. However, they remain suboptimal as they exhibit a residual bias in the estimates.

APPENDIX: CRAMÉR-RAO BOUND

In what follows, we present the details relative to the derivation of the stochastic CRB. Recall that the CRB is given by the inverse of the Fisher information matrix (FIM) of the unknown parameters of interest. Considering the vector of unknown real parameters $\boldsymbol{\eta}$ defined in Section III-A, the $(i, j)^{th}$ element of the FIM, $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}$, is given by [20]

$$\mathcal{F}_{i,j} = M \text{trace} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_j} \right\}. \quad (38)$$

Let $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{f}^T]^T$, and $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_\theta \quad \mathbf{D}_f]$, with

$$\mathbf{D}_\theta = \mathbf{F}^T \circ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad \text{and} \quad \mathbf{D}_f = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{f}} \circ \mathbf{A}. \quad (39)$$

Using the expression of \mathbf{D} and the results of [30]-[32], note that

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_j} \right] = \mathbf{D} \left\{ \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T \mathbf{R}_H \mathbf{U}^H) \right\} + \left\{ (\mathbf{U} \mathbf{R}_H \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i^T) \otimes \mathbf{1}_2^T \right\} \mathbf{D}^H \quad (40)$$

where $\mathbf{1}_2 = [1 \quad 1]^T$, and \mathbf{i}_i is a vector whose elements are zero but the i^{th} element which is equal to 1.

From (40) and using results of [30]-[32], we have the following

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta\theta} &= M\mathcal{I}^T [\mathbf{D}_\theta^T \otimes (\mathbf{R}\mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T\mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_\theta^H] \\ &\quad [(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes (\mathbf{R})^{-1}] \\ &\quad [\mathbf{D}_\theta^T \otimes (\mathbf{R}\mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T\mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_\theta^H]^H \mathcal{I} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ff} &= M\mathcal{I}^T [\mathbf{D}_f^T \otimes (\mathbf{R}\mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T\mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_f^H] \\ &\quad [(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes (\mathbf{R})^{-1}] \\ &\quad [\mathbf{D}_f^T \otimes (\mathbf{R}\mathbf{U}^H) + (\mathbf{R}^T\mathbf{U}^T) \otimes \mathbf{D}_f^H]^H \mathcal{I} \end{aligned} \quad (42)$$

where $\mathcal{I} = [\text{vec}(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1^T) \text{vec}(\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2^T)]$. From the structure of \mathcal{I} , it can be easily shown that $\mathcal{I}^T[\mathbf{A}\mathbf{B}]\mathcal{I} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$. Using this property with (40) and the identity $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{A}\mathbf{C} \otimes \mathbf{B}\mathbf{D}$, it can be readily verified that $\mathcal{F}_{\nu\nu}$ can be written as [30], [31]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\nu\nu} &= 2M\Re \left\{ [\mathbf{1}_{22} \otimes (\mathbf{R}_H \mathbf{U}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{R}_H)] \odot (\mathbf{D}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D})^T + \right. \\ &\quad \left. [\mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{R}_H \mathbf{U}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D})] \odot [(\mathbf{R}_H \mathbf{U}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D})^T \otimes \mathbf{1}_2^T] \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

with $\mathbf{1}_{22} = \mathbf{1}_2\mathbf{1}_2^T$.

Using results of [30], [31], from the expansion of \mathbf{Q} in (19), we get

$$\mathcal{F}_{\text{qq}} = M\mathcal{P}^T [(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1}] \mathcal{P} \quad (44)$$

where \mathcal{P} is defined in (21).

Note that \mathbf{R}_H has a Hermitian structure and is completely unknown. This suggests that \mathbf{R}_H can be written as a linear combination of d^2 base matrices, in the same way as \mathbf{Q} , where d is the number of sources, and in our case is equal to 2. Moreover, it can be shown that the parametrization of \mathbf{R}_H in terms of Φ_i 's does not have an impact on the final expression of the CRB on ν [31]. Thus, similarly to $\mathcal{F}_{q_i q_j}$, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\rho\rho} &= M\mathcal{P}_\rho^T [\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{U}^H] [(\mathbf{R}^T)^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1}] \\ &\quad [\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{U}] \mathcal{P}_\rho \end{aligned} \quad (45)$$

with $\mathcal{P}_\rho = [\text{vec}(\Phi_1) \dots \text{vec}(\Phi_{d^2})]$ and $d = 2$.

Using (43), (44) and (45), the cross-terms $\mathcal{F}_{\nu q}$, $\mathcal{F}_{\nu\rho}$ and $\mathcal{F}_{\rho q}$ can be easily deduced.

From the obtained expressions of the auto- and cross-terms along with properties of block-matrix inversion, we get the following expression for the CRB

$$\begin{aligned} \text{CRB}_\nu^{-1} &= \mathcal{F}_{\nu\nu} + \mathcal{F}_{\nu\rho} (\mathcal{F}_{\rho\rho} - \mathcal{F}_{\rho q} \mathcal{F}_{\text{qq}}^{-1} \mathcal{F}_{\text{q}\rho})^{-1} \\ &\quad (\mathcal{F}_{\rho q} \mathcal{F}_{\text{qq}}^{-1} \mathcal{F}_{\text{q}\nu} - \mathcal{F}_{\rho\nu}) + \\ &\quad \mathcal{F}_{\nu q} (\mathcal{F}_{\text{qq}} - \mathcal{F}_{\text{q}\rho} \mathcal{F}_{\rho\rho}^{-1} \mathcal{F}_{\rho q})^{-1} \\ &\quad (\mathcal{F}_{\text{q}\rho} \mathcal{F}_{\rho\rho}^{-1} \mathcal{F}_{\rho\nu} - \mathcal{F}_{\text{q}\nu}). \end{aligned} \quad (46)$$

Using the results of [30]-[32] and applying them to the above, the following closed-form expression can be deduced

$$\text{CRB}_\nu = \frac{1}{M} (\mathcal{L} - \mathfrak{M}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{M})^{-1} \quad (47)$$

with

$$\mathcal{L} = 2\Re \left\{ [\mathbf{1}_{22} \otimes (\mathbf{R}_H \check{\mathbf{U}}^H \check{\mathbf{R}}^{-1} \check{\mathbf{U}} \mathbf{R}_H)]^T \odot [\check{\mathbf{D}}^H P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp \check{\mathbf{D}}] \right\} \quad (48)$$

$$\mathfrak{M} = 2\Re \left\{ (\mathbf{1}_2 \otimes \mathcal{I})^T (\check{\mathbf{D}}^H P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp) \otimes (\mathbf{R}_H^T \check{\mathbf{U}}^T \check{\mathbf{R}}^{-T}) \check{\mathcal{P}}^* \right\} \quad (49)$$

$$\mathfrak{T} = 2\Re \left\{ \check{\mathcal{P}}^H (\check{\mathbf{R}}^{-T} \otimes P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp) \mathcal{P} \right\} - \mathcal{P}^H [P_{\check{\mathbf{U}}}^{\perp T} \otimes P_{\check{\mathbf{U}}}^\perp] \mathcal{P} \quad (50)$$

where

$$\check{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{-1/2} \quad (51)$$

$$\check{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{U} \quad (52)$$

$$\check{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{D} \quad (53)$$

$$\check{\mathcal{P}} = \left[\text{vec}(\check{\Phi}_1) \dots \text{vec}(\check{\Phi}_{2LN-1}) \right] \quad (54)$$

$$\check{\Phi}_i = \mathbf{Q}^{-1/2} \Phi_i \mathbf{Q}^{-1/2}. \quad (55)$$

VI. ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank Prof. A. M. Zoubir, the reviewers and the associate editor for their valuable comments.

REFERENCES

- [1] D. K. Barton, "Low Angle Radar Tracking", *Proc. IEEE*, vol. 62, no. 6, pp 687-704, Jun. 1974.
- [2] W. D. White, "Low Angle Radar Tracking in the Presence of Multi-Path", *IEEE Trans. on Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-10, pp. 335-352, 1974.
- [3] K. Nakatsuka, "Two-Beam Technique for Tracking a Target at Low Elevation Angles", *IEE Proc.-F*, vol. 137, no. 6, pp. 397-406, Dec.1990.
- [4] C. Pell, "Phased-Array Radars", *IEE Review*, vol. 34, no. 9, pp. 363-367, Oct. 1988.
- [5] S. Haykin, *Array Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), USA, 1984.
- [6] T. J. Shan, M. Wax, and T. Kailath, "On Spatial Smoothing for Direction of Arrival Estimation of Coherent Signals", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, no. 4, pp. 806-811, Apr. 1985.
- [7] S. U. Pillai and B. H. Kwon, "Forward/Backward Spatial Smoothing Techniques for Coherent Signal Identification", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 1, pp. 8-15, Jan. 1989.
- [8] A. A. Ksienski and R. B. McGhee, "A Decision Theoretic Approach to the Angular Resolution and Parameter Estimation Problem for Multiple Targets", *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-4, pp. 443-455, 1968.
- [9] B. H. Cantrell, W. B. Gordon, and G. V. Trunk, "Maximum Likelihood Elevation Angles Estimation of Radar Targets using Subapertures", *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, AES-17, pp. 213-221, 1981.
- [10] R. M. Turner and E. Bossé, "Maximum Likelihood Tracking using a Highly Refined Multipath Model", *Proc. Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove (CA), USA, Nov. 2-4, 1987.
- [11] E. Bossé, R. M. Turner, and E. S. Riseborough, "Model-Based Multifrequency Array Signal Processing for Low-Angle Tracking", *IEEE Trans. on Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-31, pp. 194-210, Jan. 1995.
- [12] T. Lo and J. Litva, "Use of a Highly Deterministic Multipath Signal Model in Low-Angle Tracking", *IEE Proc.-F*, vol. 138, no. 2, Apr. 1991.
- [13] M. Djeddou and A. Belouchrani, "Parameter Estimation in Low-Elevation Target Tracking", *Proc. Int. Symp. on Signal Processing and its Applications, ISSPA-01*, vol. 2, pp. 691-694, Kuala-Lumpur, Malaysia, Aug. 13-16, 2001.
- [14] J. F. Böhme and D. Kraus, "On Least Squares Methods for Direction of Arrival Estimation in the Presence of Unknown Noise fields", *Proc. Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-88*, pp. 2785-2788, New York (NY), USA, Apr. 11-14, 1988.
- [15] R. T. Behrens and L. L. Scharf, "Signal Processing Applications of Oblique Projection Operators", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 6, pp. 1413- 1424, Jun. 1994.
- [16] L. L. Scharf, "Blind Adaptation of Zero Forcing Projections and Oblique Pseudo-Inverses for Subspace Detection and Estimation When Interference Dominates Noise", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, no. 12, pp. 2938-2946, Dec. 2002.

- [17] L. V. Blake, "Prediction of Radar Range", in M. I. Skolnik (Ed.), *Radar Handbook*, McGraw-Hill, New York (NY), USA, 1990, 2nd Edn.
- [18] P. Swerling, "Probability of Detection for Fluctuating Targets, Special Monograph", *IRE Trans. Information Theory*, vol. IT-6, no. 2. pp. 269-308, Apr. 1960.
- [19] B. Göransson and B. Ottersten, "Direction Estimation in Partially Unknown Noise fields", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, no. 9, pp. 2375-2385, Sep. 1999.
- [20] L. L. Scharf, *Statistical Signal Processing : Detection, Estimation and Time Series Analysis*, Addison Wesley, New York (NY), USA, 1991.
- [21] B. Friedlander and A. J. Weiss, "Direction Finding using Noise Covariance Modeling", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 7, pp. 1557-1567, Jul. 1995.
- [22] J. -J. Fuchs, "Estimation of the Number of Signals in the Presence of Unknown Correlated Sensor Noise", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 5, pp. 1053-1061, May 1992.
- [23] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, McGraw-Hill, New York (NY), USA, 1980.
- [24] A. Lemma, A. J. Van der Veen, and E. F. Deprettere, "Joint Angle-Frequency Estimation using Multi-Resolution ESPRIT", *Proc. Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-98*, Seattle (WA), USA, pp.1957-1960, May 12-15, 1998.
- [25] M. C. Vanderveen, A. J. Van der Veen, and A. Paulraj, "Estimation of Multipath Parameters in Wireless Communications", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 3, pp. 682-690, Mar. 1998.
- [26] C. G. Broyden, "The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms", *Journal Inst. Math. Applic.*, vol. 6, pp. 76-90, 1970.
- [27] R. Fletcher and M. J. D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization", *Computer Journal*, vol. 6, pp. 163-168, 1963.
- [28] D. Goldfarb, "A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means", *Mathematics of Computing*, vol. 24, pp. 23-26, 1970.
- [29] D. F. Shanno, "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization", *Mathematics of Computing*, vol. 24, pp. 647-656, 1970.
- [30] M. Pesavento and A. B. Gershman, "Maximum-Likelihood Direction-Of-Arrival Estimation in the Presence of Unknown Nonuniform Noise", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 7, pp. 1310-11324, Jul. 2001.
- [31] A. B. Gershman, P. Stoica, M. Pesavento, and E. G. Larsson, "Stochastic Cramer-Rao Bound for Direction Estimation in Unknown Noise fields", *IEE Proc. on Radar and Sonar Navig.*, vol. 149, no.1, pp. 2-8, Feb. 2002.
- [32] P. Stoica P., E. G. Larsson, and A. B. Gershman, "The Stochastic CRB for Array Processing: A Textbook Derivation", *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 8, no. 5, pp.148-150, May 2001.

PLACE
PHOTO
HERE

Adel Belouchrani received the State Engineering degree (Ingénieur d'État) in 1991 from the École Nationale Polytechnique (ENP), Algiers, Algeria, the M.Sc. degree in signal processing from the Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), France, in 1992, and the Ph.D. degree in signal and image processing from Télécom Paris (ENST), France, in 1995.

He was a Visiting Scholar at the Electrical Engineering and Computer Sciences Department, University of California, Berkeley, from 1995 to 1996. He was with the Department of Electrical and Computer Engineering, Villanova University, Villanova, PA, as a Research Associate from 1996 to 1997. He also served as a Consultant to Comcast, Inc., Philadelphia, PA, during the same period. In February 1997, he was a Visiting Scientist at the Laboratory for Artificial Brain Systems, Riken, Japan. From August 1997 to October 1997, he was with Alcatel ETCA, Belgium. From May to June 2001, he was a Visiting Scholar at the Department of Cognitive Science of the University of California at San Diego, USA. From August to September 2001, he was a Visiting Researcher at the Brain Signal Processing Laboratory, Riken, Japan. From July to September 2003, he had a sabbatical stay at the Signal and Image Processing Department of ENST, Paris, France. From December 2003 to January 2004, he was an Invited Professor at Telekom Malaysia RnD, Kuala Lumpur, Malaysia. Since 1998, he has been with the Electrical Engineering Department of ENP as Associate Professor.

His research interests are in statistical signal processing and (blind) array signal processing with applications in biomedical engineering and communications, time frequency analysis, time frequency array signal processing, wireless and spread spectrum communications.

PLACE
PHOTO
HERE

Saïd Aouada was born in 1975, in Termez, USSR. He received the State Engineering degree (Ingénieur d'État) in electrical engineering (automatic control) in 1998 from the National Institute of Electricity and Electronics (INELEC), Boumerdès, Algeria, and the Magister degree in electronics (information processing) in 2000 from the National Polytechnic School (ENP), Algiers, Algeria.

From 1998 to 1999, he was a Teaching Assistant with the Institute of Electronics of Blida University of Technology, Algeria, and from 1999 to 2001, he was with the international division of Schneider Electric Industries, working in automation and industrial control. From 2001 to 2003, he was with the Communications and Signal Processing Group (CSP) at Curtin University of Technology, Perth, Australia. Since March 2003, he has been with the Signal Processing Group (SPG), Darmstadt University of Technology, Germany, as a Research Associate.

His research interests are in array signal processing (detection, estimation and system identification) with applications to radar and communication systems.

PLACE
PHOTO
HERE

Mustapha Djeddou was born in 1967, in Bejaia, Algeria. He received the State Engineering degree (Ingénieur d'État) in electrical engineering (electronics) in 1991 from the Military Polytechnic School (EMP), Algiers, Algeria, and the Magister degree in electronics (telecommunications) in 1998 from the National Polytechnic School (ENP), Algiers, Algeria.

He is currently a Lecturer and Researcher at EMP.

His research interests are in statistical signal processing with applications to radar and communications.

APPROXIMATE ML DIRECTION FINDING IN SPATIALLY CORRELATED NOISE USING OBLIQUE PROJECTIONS

Mustapha Djeddou*, Adel Belouchrani* and Saïd Aouada**

*Electrical Engineering Department, École Nationale Polytechnique (ENP),
PO Box 182, El Harrach 16200, Algiers, Algeria

**Signal Processing Group, Darmstadt University of Technology
Merckstrasse 25, D-64283, Darmstadt, Germany.

ABSTRACT

We consider the problem of Maximum Likelihood estimation of Directions of Arrival of multiple source signals in the presence of unknown spatially correlated Gaussian noise. Oblique Projections are used to separate the structured noise from the signal and an Approximate Maximum Likelihood solution is derived. The estimates are obtained by maximizing the modified cost function using a nonlinear optimization technique. Numerical simulations are provided to assess the performance of the proposed approach. Simulations include comparison to the Stochastic Maximum Likelihood and to the Weighted Subspace Fitting, as well as to the Cramér-Rao Bound.

1. INTRODUCTION

Direction Of Arrival (DOA) estimation of multiple narrow-band sources is well addressed in array signal processing. In the presence of spatially white Gaussian noise, many estimation techniques have been developed [1, 2]. However, when the noise is not spatially white, the classical techniques can be applied only if the data is prewhitened by measuring the spatial noise covariance matrix, under the conditions of large data sizes, high SNR and a stationary noise covariance matrix. Failure to fulfill these conditions results in highly biased estimates. When prewhitening is not possible, the noise is modeled as a spatially dependent process with an unknown covariance matrix. In this paper, we consider the problem of DOA estimation in the presence of unknown spatially correlated noise, modeled as a combination of a structured and an unstructured process [3]. An Approximate Maximum Likelihood (AML) solution is formulated where the dimension of the optimization problem is reduced through the estimation of the unknown noise parameters using Oblique Projections (OP). It is shown in Section 3 that the range and null space of the considered OP are the unstructured noise and signal with structured noise subspaces respectively.

2. DATA MODEL

Consider an array with K sensors, receiving d impinging source signals from respective directions of arrival $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_d]^T$, where $(\cdot)^T$ denotes matrix transpose. The sensor data output is written in vector form as

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t); \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

where

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_d)]$$

is the array spatial steering matrix, with $\mathbf{a}(\theta_i)$ being the array response to a path impinging from direction θ_i . It is assumed that the parameterization of the array response vectors is known and that no ambiguities are introduced in the manifold.

The signal waveform $\mathbf{s}(t)$ is modeled as a stationary stochastic process, independent of $\mathbf{n}(t)$, with zero mean and covariance matrix \mathbf{S} . The noise $\mathbf{n}(t)$ is modeled as a combination of two parts. The first part, $\mathbf{w}(t)$ is an unstructured noise generated internally by the electronics in the receiver. The second part is an external structured noise $\mathbf{z}(t)$, resulting from processing an unknown process $\mathbf{v}(t)$ through a known linear system $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^N$. This linear process can be regarded as a set of N base matrices spanning the noise subspace (structured). The dimension of \mathbf{B} is therefore $K \times N$, with $K \geq N$. Hence we can model the additive noise as

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (2)$$

$$= \mathbf{B}\mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (3)$$

Also, the following assumptions on the noise are considered

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] &= \mathbf{Q}\delta_{tk} \\ \mathbb{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

where $\mathbb{E}(\cdot)$ denotes expectation, $(\cdot)^H$ denotes Hermitian transpose and \mathbf{Q} is the spatial noise covariance matrix which, in the general case, can be modeled as

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_{K-1} \\ q_1^H & q_0 & \dots & q_{K-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{K-1}^H & q_{K-2}^H & \dots & q_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

where $q_0 = \sigma^2$ is the unstructured noise power. The $(2K - 1)$ -dimensional vector of unknown noise parameters is therefore given as $\mathbf{q} = [q_0, \Re(q_1), \Im(q_1), \dots, \Re(q_{K-1}), \Im(q_{K-1})]^T$.

The data covariance matrix can be written as

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \mathbf{Q} \quad (6)$$

Note that the dependence of \mathbf{A} on $\boldsymbol{\theta}$ is omitted for simplicity. The problem at hand is to estimate the parameters $\boldsymbol{\theta}$ from the collected data, using the known structure of the noise.

3. APPROXIMATE ML ESTIMATION

In (1), the collected data $\mathbf{x}(t)$, $t = 1, \dots, T$ is modeled as a zero mean random processes with covariance matrix (6). Thus, the joint density function of the data is given by [4]

$$f_{\boldsymbol{\eta}} = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \det \left\{ \mathbf{R}^{-\frac{T}{2}}(\boldsymbol{\eta}) \right\} \exp \left\{ -\frac{T}{2} \text{trace} \left[\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\mathbf{R}} \right] \right\} \quad (7)$$

where $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\theta}^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{q}^T]^T$ is the vector of unknown parameters, with $\mathbf{p} = [\Re(\mathbf{S}), \Im(\mathbf{S})]$ and $\hat{\mathbf{R}}$ is the sample covariance matrix of the data, given by

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \quad (8)$$

After normalization and omitting constant terms, it can be easily shown that the stochastic negative Log-Likelihood (LL) function of the observed data is [4]

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) = \ln \{ \det [\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})] \} + \text{trace} \left\{ \mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\mathbf{R}} \right\} \quad (9)$$

After some straightforward manipulations, the ML estimate of the covariance matrix \mathbf{S} is given by [5]

$$\hat{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) = (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (10)$$

and the insertion of (10) in (6) leads to the following concentrated expression

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \boldsymbol{\Pi}^H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) + \mathbf{Q} \quad (11)$$

where $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) = \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{Q}^{-1}$. Note that using the concentrated expression of the data covariance matrix (11) in the LL function (9) reduces the dimension of the optimization search. However this direct optimization remains unattractive as the dependence between the unknown parameters involves high nonlinearities. At this stage, we seek a further simplified cost function by replacing \mathbf{Q} by a favorable estimate $\hat{\mathbf{Q}}$. Note that since the structured noise part is uniquely parametrized by a given process \mathbf{B} , matrix \mathbf{Q} exhibits a unique dependence on \mathbf{B} . As mentioned previously, this process can be seen as the result of a linear expansion of the noise subspace and truncation after the N most significant terms, with the truncation error being taken care of in the unstructured part whose asymptotic properties are known.

Let the data vector $\mathbf{x}(t)$ defined in (1) be written in the following form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Provided that the composite matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ has full rank, and $d + N \leq K$, the zero forcing solution of equation (12) is given by

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^\dagger \mathbf{x}(t) \quad (13)$$

where $(\cdot)^\dagger$ stands for Moore-Penrose pseudo-inverse. Using matrix properties, equation (13) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

Recalling that the LL function is to be concentrated with respect to the noise parameters, we focus on the estimation of $\hat{\mathbf{v}}(t)$. Applying the inversion formula of 2×2 -block matrices, \mathbf{H}^{-1} can be expressed as

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathcal{A}^{-1} - \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} \left[\mathcal{C}^T \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} - \mathcal{B} \right]^{-1} \mathcal{C}^T \mathcal{A}^{-1} \\ \mathbf{H}_2 &= \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} \left[\mathcal{C}^T \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} - \mathcal{B} \right]^{-1} \\ \mathbf{H}_3 &= \left[\mathcal{C}^T \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} - \mathcal{B} \right]^{-1} \mathcal{C}^T \mathcal{A}^{-1} \\ \mathbf{H}_4 &= - \left[\mathcal{C}^T \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} - \mathcal{B} \right]^{-1} \end{aligned}$$

where $\mathcal{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\mathcal{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ and $\mathcal{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}$. Thus, $\hat{\mathbf{v}}(t)$ is obtained as

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = (\mathbf{H}_3 \mathbf{A}^T + \mathbf{H}_4 \mathbf{B}^T) \mathbf{x}(t) \quad (16)$$

or equivalently, using the expressions of \mathbf{H}_3 and \mathbf{H}_4 and after applying some algebraic manipulations,

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = (P_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{B})^\dagger \mathbf{x}(t) \quad (17)$$

where $P_{\mathbf{A}}^\perp$ is the orthogonal projector onto \mathbf{A} .

Using the known structure \mathbf{B} , the estimated structured noise is

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}}(t) \\ &= \mathbf{B} (P_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{B})^\dagger \mathbf{x}(t) \\ &= E_{\mathbf{B} \mathbf{A}} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

where $E_{\mathbf{B} \mathbf{A}}$ is the Oblique Projector (OP) with range $\langle \mathbf{B} \rangle$ and null space $\langle \mathbf{A} \rangle$, [6]. Similarly, the OP with range $\langle \mathbf{A} \rangle$ and null space $\langle \mathbf{B} \rangle$ is given as

$$E_{\mathbf{A} \mathbf{B}} = \mathbf{A} (P_{\mathbf{B}}^\perp \mathbf{A})^\dagger \quad (19)$$

By neglecting the component of the unstructured noise belonging to the subspace $\langle \mathbf{A} \rangle^\perp$, $\mathbf{w}(t)$ can be considered to belong to the subspace $\langle \mathbf{N} \rangle$ that is orthogonal to both subspaces $\langle \mathbf{A} \rangle$ and $\langle \mathbf{B} \rangle$. This noise subspace can be estimated using the following algebraic property $\mathbf{I} = P_{\mathbf{N}} + P_{\mathbf{A} \mathbf{B}}$, where $P_{\mathbf{A} \mathbf{B}} = E_{\mathbf{A} \mathbf{B}} + E_{\mathbf{B} \mathbf{A}}$, is the projector onto the space shared by $\langle \mathbf{A} \rangle$ and $\langle \mathbf{B} \rangle$ and $P_{\mathbf{N}}$ is the projector onto the subspace $\langle \mathbf{N} \rangle$. Thus, exploiting this orthogonality, an estimate of $\mathbf{w}(t)$ can be obtained as

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(t) &= P_{\mathbf{N}} \mathbf{x}(t) \\ &= (\mathbf{I} - P_{\mathbf{A} \mathbf{B}}) \mathbf{x}(t) \\ &= P_{\mathbf{A} \mathbf{B}}^\perp \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

and the estimated noise covariance matrix is

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}} + \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{w}} \hat{\mathbf{w}}} \\ &= E_{\mathbf{B} \mathbf{A}} \mathbf{R} E_{\mathbf{B} \mathbf{A}}^H + P_{\mathbf{A} \mathbf{B}}^\perp \mathbf{R} P_{\mathbf{A} \mathbf{B}}^H \end{aligned} \quad (21)$$

Under asymptotic conditions, replacing the covariance data matrix \mathbf{R} by the sample covariance matrix $\hat{\mathbf{R}}$ and inserting (21) in (10), we obtain the following approximation

$$\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{\theta}) (\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{Q}}) \hat{\boldsymbol{\Pi}}^H(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\mathbf{Q}} \quad (22)$$

¹Note that the unstructured noise can be assumed orthogonal to subspace $\langle \mathbf{B} \rangle$ without loss of generality since the component of $\mathbf{w}(t)$ that would belong to $\langle \mathbf{B} \rangle$ can be included in the model of $\mathbf{v}(t)$

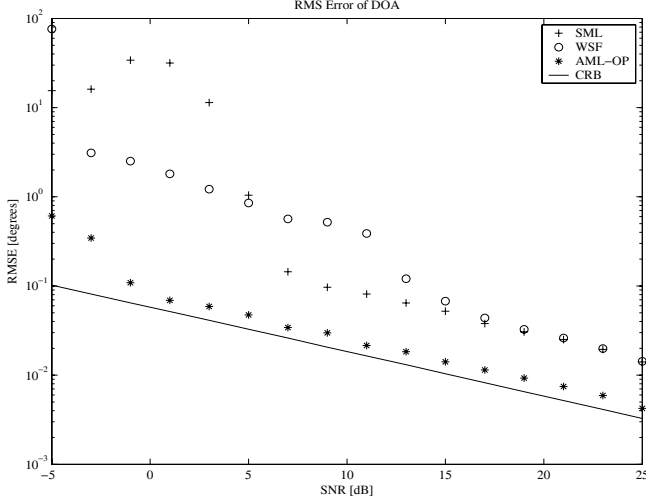


Fig. 1. Comparison of AML-OP, SML and WSF vs SNR. $T = 200$, $K = 10$, $\rho = 0.98$.

where $\hat{\mathbf{\Pi}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{Q}}^{-1}$. Thus, the modified LL cost function becomes

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \ln \left\{ \det \left[\tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}) \right] \right\} + \text{trace} \left\{ \tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{R}} \right\} \quad (23)$$

Finally, estimation of the parameters reduces to solving the following optimization problem

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \{ \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \} \quad (24)$$

In order to achieve convergence, the algorithm requires favorable initial parameters. One way among others to initialize the algorithm is to use a standard estimator such as ROOT-MUSIC [7]. We use a quasi-Newton algorithm to solve the optimization problem in (24) using the scoring technique [8] with a mixed quadratic and cubic line search procedure.

4. SIMULATION RESULTS

We use the following simulation scenario: assume a radar working in passive mode (only one set of snapshots is provided). The array is simulated as a Uniform Linear Array (ULA). Two impinging signals corresponding to two targets situated respectively at $\theta_1 = -3^\circ$ and $\theta_2 = 1^\circ$ with different Doppler frequencies and T samples are collected at each sensor. We illustrate the global performance of the proposed approach in terms of the Root Mean Square Error (RMSE) versus the Signal to Noise Ratio (SNR), the spatial correlation coefficient ρ , the number of collected snapshots T and the number of sensors K . We compare the performance of the proposed AML-OP approach versus SML and WSF [9] techniques where the noise is assumed white Gaussian and the Cramér-Rao Bound (CRB). The parameter set is indicated in the figure captions. The results are averaged after 200 Monte Carlo runs. As the performance is similar for the two DOAs, only the first DOA results are shown.

Figure 1 illustrates the performance of AML-OP, WSF and SML in terms of RMSE. As expected, the AML-OP performs better than the other techniques, especially at low SNR.

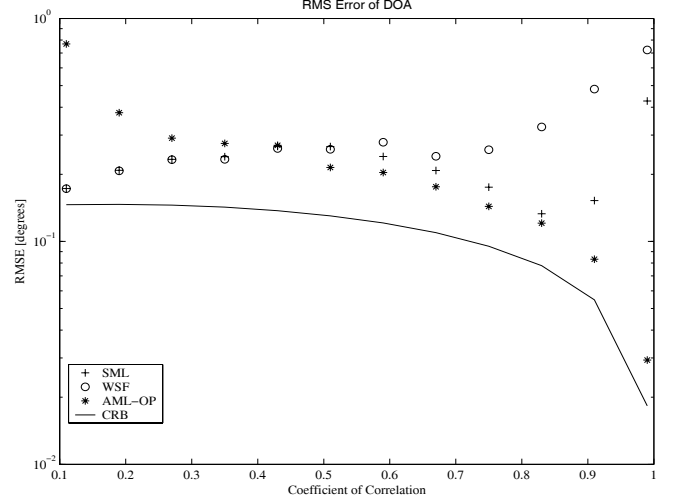


Fig. 2. Comparison of AML-OP, SML and WSF vs correlation coefficient. $T = 200$, $K = 8$, $SNR = 0dB$.

Figure 2 shows the variation of the RMSE with the coefficient of correlation ρ . As the correlation coefficient increases, AML-OP outperforms the other methods as the correlation in the noise is taken into account. For low value of ρ , the other techniques suit better the uncorrelated model. The AML-OP clearly outperforms the two other approaches only at ρ greater than 0.4.

Figure 3 illustrates the performance as we increase the number of antenna sensors. As the structured model is accounted for, AML-OP exhibits high performance.

Figure 4 shows the improvement of the performance as the number of collected data is increased while keeping the remaining parameters constant during simulation. Similar remarks as previously are noted.

5. CONCLUSION

In this paper, an AML estimator for DOA retrieving in the presence of structured and unstructured noise is proposed. The proposed approach uses an Oblique Projection to provide an estimate of the noise covariance matrix. Simulated data examples are provided to assess the performance of the AML-OP and to illustrate its relative superiority over two other techniques (SML, WSF) where the structure of noise is not taken into account.

6. APPENDIX CRAMÉR-RAO BOUND

Considering the covariance matrix of the received data

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{Q}$$

then the (i, j) -th element of the Fisher Information Matrix (FIM) is

$$\mathcal{F}_{i,j} = \text{trace} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \right] \mathbf{R}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \right] \right\} \quad (25)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, d^2 + d + 2K - 1 \quad (26)$$

Let $\mathbf{G} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})'$, where $(\cdot)'$ stands for differentiation with respect to the individual parameters. Using the results in [10], [11], the

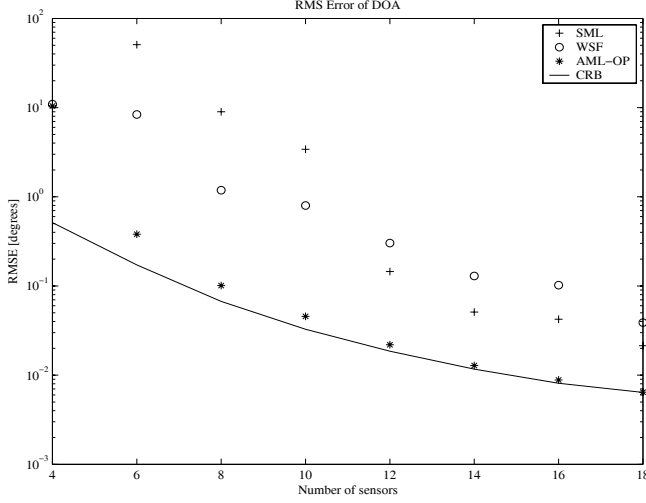


Fig. 3. Comparison of AML-OP, SML and WSF vs number of antennas. $T = 200$, $\rho = 0.9$, $SNR = 5dB$.

expressions of the (i, j) -th element of the FIM for the parameters of interest θ is given by

$$\mathcal{F}_{i,j} = \left[2\Re \left\{ \text{trace} \left\{ (\tilde{\mathbf{G}}^H P_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{G}})_{i,j} (\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{S}})_{i,j} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \mathcal{H} \mathcal{I} \mathcal{H}^T \right\} \right] \quad (27)$$

where $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{G}$, $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{-1/2}$, and the real matrices \mathcal{H} and \mathcal{I} are defined as follows

$$\mathcal{H} = 2\Re \left\{ (\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{S}})^T \odot (\tilde{\mathbf{G}}^H P_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp}) \right\}$$

and

$$\mathcal{I} = \left\{ (\tilde{\mathbf{R}}^{-1})^c \odot \tilde{\mathbf{R}}^{-1} - (P_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1})^c \odot (P_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{R}}^{-1}) \right\}^{-1}$$

respectively, with $(\cdot)^c$ denoting complex conjugate.

The closed-form expression of the CRB for the parameters

$$CRB_{\theta} = \left[2\Re \left\{ \text{trace} \left\{ (\tilde{\mathbf{G}}^H P_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{G}}) \odot (\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{S}}) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \mathcal{H} \mathcal{I} \mathcal{H}^T \right\}^{-1} \right] \quad (28)$$

7. REFERENCES

- [1] R.O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation", *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop*, pp. 243-258, October 1987.
- [2] P. Stoica and K.C. Sharman, "Maximum Likelihood Methods for Direction-Of-Arrival Estimation", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 7, pp. 1132-1143, July 1990.
- [3] S. Haykin, *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995, vol. 34 no. 2, pp. 207-222, November 1993.

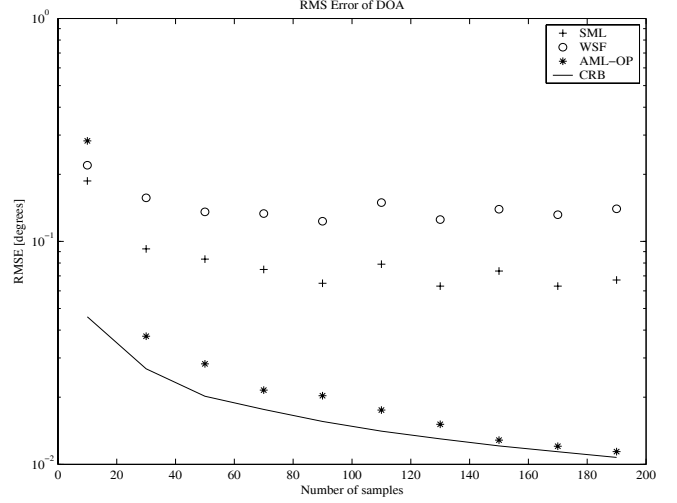


Fig. 4. Comparison of AML-OP, SML and WSF vs number of snapshots. $K = 10$, $\rho = 0.98$, $SNR = 5dB$.

- [4] L. L. Scharf, *Statistical Signal Processing : Detection, Estimation and Time Series Analysis*, Addison Wesley, 1990.
- [5] J. Böhme and D. Kraus, "On Least Squares Methods for Direction of Arrival Estimation in the Presence of Unknown Noise Fields," *In Proc. ICASSP 88*, April 1988.
- [6] R. T. Behrens and L. L. Scharf, "Signal Processing Applications of Oblique Projection Operators," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 6 pp. 1413- 1424, June 1994.
- [7] B. Rao, K. V. S. Hari, "Performance Analysis of Root-Music," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 37, no. 12, December 1989.
- [8] Dennis J. and Schnabel R., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice Hall. 1983.
- [9] M. Viberg, B. Ottersten, and T. Kailath, "Detection and Estimation in Sensor Arrays using Weighted Subspace Fitting," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, pp. 2439-2449, November 1991.
- [10] P. Stoica and A. Nehorai, "Performance Study of Conditional and Unconditional Direction-of-Arrival Estimation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, pp. 1783-1795, Oct. 1990.
- [11] M. Pesavento and A. B. Gershman, "Maximum-Likelihood Direction-Of-Arrival Estimation in the Presence of Unknown Nonuniform Noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 7, pp. 1310-1324, July 2001.

MAXIMUM LIKELIHOOD ANGLE-FREQUENCY PARAMETER ESTIMATION IN UNKNOWN NOISE FIELDS FOR LOW-ELEVATION TARGET TRACKING

Mustapha DJEDDOU

Said AOUADA and Abdelhak ZOUBIR

Electrical Engineering Department,
Ecole Nationale Polytechnique,
PO Box 182, El Harrach 16200, Algiers, Algeria

Signal Processing Group,
IT-Darmstadt University of Technology,
Meckstrasse 25, D-64283 Darmstadt, Germany

ABSTRACT

In radar applications, the received echo signals reach the array elements via a multiplicity of paths even though there exist only one target. So, it is often relevant to estimate the direction and the Doppler frequency of each path ray. We apply in this paper a 2D extension of the Approximate Maximum Likelihood (AML) algorithm to estimate these parameters using a sensor array in an unknown additive noise field. We consider the case where the complex fading factor fluctuates from one Pulse Repetition Interval (PRI) to another one. Numerical simulations are provided to assess the performance of the approach, which is compared to the standard stochastic maximum likelihood derived for a white Gaussian noise.

1. INTRODUCTION

When a target is in close proximity to a reflector surface, the received echo signal reaches the radar site via two or more paths. In the case of a two path scenario, the radar sees two targets, the true one and the target image created by the reflected echo with an angular position that appears to be below the surface, but with a range difference often less than the range resolution of the radar. In addition, the direct signal and the reflected one adds constructively or destructively due to a phase difference between the two echoes. Another problem, that arises in low-angle tracking is the small angle separation between the impinging echoes, this difference is a small fraction of the beam width [1]. Many solutions are proposed to deal with the problem, the most promising techniques are the Maximum Likelihood Estimators (MLE) using a reasonable number of antenna elements. The estimated parameters, like the Angles Of Arrival (AOA), the time delays and the Doppler frequencies, are which maximize the likelihood function. A Refined Model (RM) based on the consideration of a detailed specular multipath and target-radar geometry is developed for low angle tracking by Turner and Bossé [2]. The introduction of the RM in the MLE leads to a Refined Maximum Likelihood (RML)

model. The priori knowledge of the target range is used as well as the height of the radar to obtain a precise height of the target compared to the classical model. In [3], a diffuse factor is introduced in the model to account for the incoherent multipath signals. With these models, the environment parameters are supposed known, in practice however, the environment parameters are difficult to obtain or unavailable. A large number of methods [4], [5], [6], [7], [2] and [8] assume spatially white noise and/or nonfluctuating complex fading factors that accounting for reflection coefficient and Radar Cross Section (RCS) factor. We investigate in this paper the problem of fluctuating factors in the presence of non white noise.

2. DATA MODEL

Consider a uniform linear array consisting of N identical antenna elements. We assume that the radar observes its received waveforms over M successive PRI (Pulse Repetition Interval). The following scenario is considered: the radar receives a direct signal from an elevation angle θ_d and a reflected signal from angle θ_r (see figure 1). Thus, at the

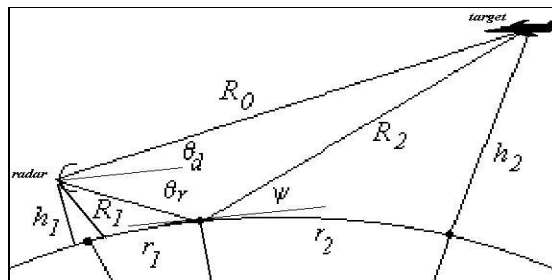


Figure 1: Reflection model for a spherical, smooth earth.

output of each antenna element, we have

$$x_l(t) = A_l^d \beta_d S_d(t) + A_l^r \rho e^{-j\alpha} \tilde{\beta}_r S_r(t) + n_l(t) \quad (1)$$

$$l = 1, 2, \dots, N$$

where A_l^d and A_l^r are the antenna responses to the direct $S_d(t)$ and the reflected $S_r(t)$ signals, respectively, with $S_r(t) = S_d(t - \tau_r)$ and τ_r is the relative delay between the direct path and the reflected one. β_d and $\tilde{\beta}_r$ are complex fading factors accounting for RCS of the target related to both the direct and reflected signals, $n_l(t)$ is the noise at the l -th element with unknown covariance matrix Q . The angle α is defined as the total phase difference between the direct and the reflected signals at the radar. The magnitude ρ and the phase angle ϕ of the reflection coefficient of the smooth flat surface are determined by the electromagnetic properties of the surface material (see reference [9]), by the grazing angle ψ of the ray and by the wave polarization

$$\alpha = \frac{2\pi(R_1 + R_2 - R_0)}{\lambda} + \phi \quad (2)$$

where R_2 and R_1 are the range from the target to the earth and from earth to radar, respectively, R_0 is the direct range. For convenience, ρ , $e^{-j\alpha}$, and $\tilde{\beta}_r$ which appear in (1) are combined in one factor β_r :

$$x_l(t) = A_l^d \beta_d S_d(t) + A_l^r \beta_r S_r(t) + n_l(t). \quad (3)$$

Using vector notation, equation (3) can be rewritten as

$$x(t) = A \text{diag}(B) S^{(\tau)}(t) + n(t) \quad (4)$$

where "diag(.)" is a transformation of a vector to a diagonal matrix $B = [\beta_d \ \beta_r]$ and $A(\theta) = [A_l^d \ A_l^r]$ with

$$\begin{aligned} A_l^d &= [1 \ e^{-j\xi_d} \ \dots \ e^{-j(N-1)\xi_d}]^T \\ A_l^r &= [1 \ e^{-j\xi_r} \ \dots \ e^{-j(N-1)\xi_r}]^T, \\ \xi_{d,r} &= 2\pi \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right) \sin \theta_{d,r} \end{aligned}$$

Δ is the antenna element spacing, λ is the wavelength and $S^{(\tau)}(t) = [s_{0d} e^{j\nu_d t} \ s_{0r} e^{j\nu_r (t-\tau)}]^T$ is a two dimensional signal vector. The direct and indirect echoes fall in the same range gate, the relative delay τ between the two paths is so small that it can be neglected. The two signals differ by their Doppler frequencies and amplitudes which can be incorporated in the fading factors. Model (1) becomes

$$x(t) = [A_l^d \ A_l^r] \begin{bmatrix} \beta_d & 0 \\ 0 & \beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\nu_d t} \\ e^{j\nu_r t} \end{bmatrix} + n(t) \quad (5)$$

3. METHOD OUTLINE

In this section, we give the development steps of the approach. The samples under consideration are available in three processing dimensions which allow discrimination of multiple echoes in azimuth/elevation, range and Doppler (see figure 2). In our case, we are interested in Angle-

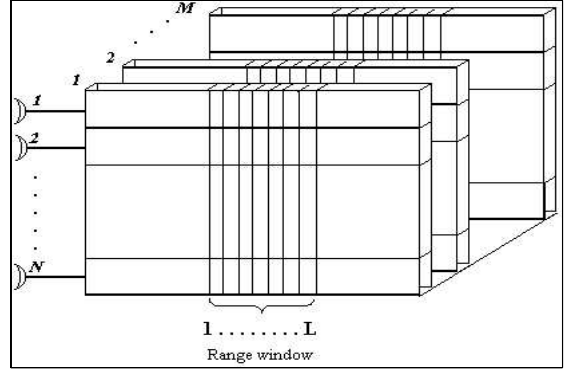


Figure 2: Available data samples for processing.

Doppler frequency parameter estimation, the third dimension (range) is used to reduce the effect of the power nulling problem of received signals from low elevation flying target. We use several consecutive PRIs ($M \geq 2$) of the received signal collected at the antenna outputs to provide the estimates of AOA and Doppler frequency. Let us assume that $x(t)$ is sampled at a high rate with L samples in each of the M PRI intervals (each PRI has length T_R). Samples are separated by an amount $\Delta t = \frac{T_R}{L}$. The observation samples are denoted by $x_n(t_{il})$ (the sample at the l^{th} range cell, at the i^{th} PRI and at the output of the n^{th} antenna) where t_{in} is the sample time. $t_{il} = (i-1)T_R + l\Delta t$, $i = 1, 2, \dots, M$, $l = 1, 2, \dots, L$ and $n = 1, 2, \dots, N$. The obtained model is

$$X(t_{il}) = A(\theta) \text{diag}(B_i) F(t_{il}) + n(t_{il}) \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} F(t_{il}) &= \begin{bmatrix} 1 & \phi_d^{\Delta t + T_R} & \dots & \phi_d^{(L-1)\Delta t + (M-1)T_R} \\ 1 & \phi_r^{\Delta t + T_R} & \dots & \phi_r^{(L-1)\Delta t + (M-1)T_R} \end{bmatrix} \\ \phi_{d,r} &= e^{j f_{d,r}} \end{aligned}$$

By defining the following matrices

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \phi_d^{T_R} & \dots & \phi_d^{(i-1)T_R} & \dots & \phi_d^{(M-1)T_R} \\ 1 & \phi_r^{T_R} & \dots & \phi_r^{(i-1)T_R} & \dots & \phi_r^{(M-1)T_R} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \phi_d^{\Delta t} & \dots & \phi_d^{(l-1)\Delta t} & \dots & \phi_d^{(L-1)\Delta t} \\ 1 & \phi_r^{\Delta t} & \dots & \phi_r^{(l-1)\Delta t} & \dots & \phi_r^{(L-1)\Delta t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

At a given PRI, we get

$$X(t_{il}) = A(\theta) \text{diag}(B_i) (\text{diag}(C_i) D) + n(t_{il}) \quad (9)$$

After sampling, we stack the element data from consecutive samples at PRI i , this operation is equivalent to apply the following property $\text{vec}(ABC) = (C^T \diamond A) \text{vec}(B)$ where

(\diamond) is Khatri-Rao product (a column-wise Kronecker product) and $vec(\cdot)$ is a vectorization operator. Hence

$$\begin{aligned} vec(X(i)) &= vec(A(\theta)diag(B_i)diag(C_i)D + n(i)) \\ &= (D^T \diamond A)vec(diag(B_i)(diag(C_i))) + V(i) \\ &= (D^T \diamond A)(B_i \odot C_i) + V(i) \end{aligned} \quad (10)$$

Next, we form the data matrix by arranging in column wise the stacked element data at given range cell over all samples of the range window. The obtained matrix is of the following form

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \begin{bmatrix} vec(X(1)) & \dots & vec(X(M)) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathcal{V} \end{aligned} \quad (11)$$

where $\mathcal{A} = D^T \diamond A$, $\mathbf{B} = B \odot C$ and $\mathcal{V} = [V(1) \dots V(M)]$. Note that the obtained equation has the same form as in [10]. We make the assumption that AOA and Doppler frequency are invariant throughout the considered PRIs and that the complex fading terms are varying from one PRI to another. By using several PRIs in one bloc data processing, these factors are equivalent to the frequency agility used for reducing the effect of power nulling in a low grazing angle scenario. This is justified by the fact that the reflection environment changes from one PRI to another. \mathcal{A} is a two-dimensional vector steered in the direction θ and the normalized doppler frequency \bar{f} , it is a response of the array manifold $A(\theta)$ (which depends on the array geometry) and \bar{f} which depends on the target velocity with respect to the radar platform. As θ and \bar{f} vary, the steering vector describes a multidimensional space-frequency manifold, with d paths, we have

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} f(\phi_1) \otimes A(\theta_1) & \dots & f(\phi_d) \otimes A(\theta_d) \end{bmatrix} \quad (12)$$

The covariance matrix of the antenna outputs is then given by

$$R = \mathcal{A}\mathcal{R}_b\mathcal{A}^H + \mathcal{Q} \quad (13)$$

where \mathcal{R}_b is the covariance matrix of the fading factors collected over M PRI and \mathcal{Q} is the noise covariance matrix after vectorization. The spatial noise covariance, \mathcal{Q} is modelled as a linear combination of known weighting matrices Φ_k and a set of unknown real parameters q_k .

$$\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^{(NL)^2} q_k \Phi_k \quad (14)$$

3.1. Maximum likelihood estimation

To derive the ML estimation, the joint density of the data has to be specified and is given by [11]

$$\begin{aligned} f_\eta &= (2\pi)^{-\frac{M}{2}} \left| R^{-\frac{M}{2}}(\eta) \right| \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \mathcal{X}^H(i) R^{-1}(\eta) \mathcal{X}(i) \right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{M}{2}} \left| R^{-\frac{M}{2}}(\eta) \right| \exp \left\{ -\frac{M}{2} \text{trace}[R^{-1}(\eta)\widehat{R}] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

where $(|\cdot|)$ stand for matrix determinant, $\eta = [\theta^T, \phi^T, q^T]^T$ is the vector of unknown parameters to be estimated and \widehat{R} is the sample covariance matrix of the data, given by

$$\widehat{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathcal{X}(i)\mathcal{X}^H(i) \quad (16)$$

After normalization (with M) and omitting constant terms, the stochastic negative log-likelihood function of the observed data becomes [11, 12]

$$\mathcal{L}(\eta) = \ln(|R(\eta)|) + \text{trace}\{R^{-1}(\eta)\widehat{R}\} \quad (17)$$

The Approximate Maximum Likelihood (AML) algorithm [12] is based on the observation that by applying the relation $vec(AYB) = (B^T \otimes A)vec(Y)$ to equation (13), we have

$$\begin{aligned} vec(R) &= vec(\mathcal{A}(\theta, \phi)\mathcal{R}_b\mathcal{A}^H(\theta, \phi)) + vec(\mathcal{Q}) \\ &= [\mathcal{A}^*(\theta, \phi) \otimes \mathcal{A}(\theta, \phi)]vec(\mathcal{R}_b) + \sum_{k=1}^{(NL)^2} q_k vec(\Phi_k) \\ &= \widetilde{A}(\theta, \phi)r_b + \Omega q \\ &= [\widetilde{A}(\theta, \phi) \Omega] \begin{bmatrix} r_b \\ q \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(\theta, \phi)z \end{aligned} \quad (18)$$

where $\Omega = [vec(\Phi_1) \dots vec(\Phi_M)]$. From equation (18), a consistent estimate \widehat{z} can be obtained [12]

$$\widehat{z} = [\mathcal{F}^H(\widehat{R}^{-T} \otimes \widehat{R}^{-1})\mathcal{F}]^{-1} \mathcal{F}^H(\widehat{R}^{-T} \otimes \widehat{R}^{-1})\widehat{r}_b \quad (19)$$

Substituting (19) into (17) leads to the modified cost function

$$\mathcal{L}(\theta, \phi) = \ln(|\widetilde{R}(\theta, \phi)|) + \text{trace}\{\widetilde{R}^{-1}(\theta, \phi)\widehat{R}\} \quad (20)$$

$$\theta, \phi = \arg \min_{\theta, \phi} \{\mathcal{L}(\theta, \phi)\} \quad (21)$$

where $\widetilde{R}(\theta, \phi) = R(\theta, \phi, \widehat{z})$. In order to achieve convergence, the algorithm needs a good initial parameters. This is done by first estimating the parameters of interest using the Joint Angle-Frequency Estimation (JAFE) [10] under the assumption that the noise is spatially white. The JAFE algorithm is a subspace decomposition technique. After the initialization step, we use a quasi-Newton algorithm to solve the optimization problem in (21) using the scoring technique [13] with a mixed quadratic and cubic line search procedure.

4. PRELIMINARY RESULTS

We use the following simulation scenario: assume a 4/3-earth model [9]; a radar over a smooth earth is at height of $h_1 = 5$ m. The array is simulated as a uniform linear array of N sensors. The target is at a distance of $R_0 = 15$ km, flying at constant altitude $h_2 = 100$ m. The range is assumed known, L is set at a value around the range bin of the target echo. We illustrate the global performance of the proposed technique by computing the root Mean Squared Error (rMSE) versus Signal to Noise Ratio (SNR) and the angular difference between direct echo and reflected one. We compare the technique to the standard stochastic maximum likelihood technique derived for a white Gaussian noise (SMLW)[14]. The parameter set is indicated in the figure captions. The results of simulations are averaged after 100 Monte Carlo runs. The results for the direct and the reflected echoes are similar, therefore we show only those corresponding to direct echo. Figures (3) and (4) illustrate the performance of 2D-AML in terms of rMSE, we note an increase in performance compared to SMLW where the noise is assumed white. The figure (5) shows the

improvement of the performance as the angle difference increase (as the target approaches the radar site). As expected, performance of SMLW is lower than that of 2D-AML as it miss-models the non-white nature of the additive noise.

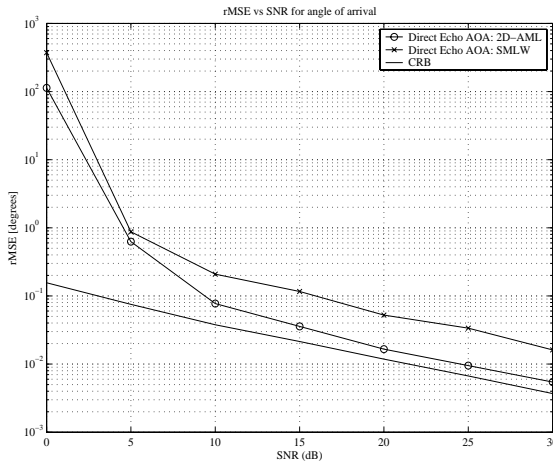


Figure 3: Comparison of 2D-AML and SMLW vs SNR for Angle of Arrival. $N = 8, L = 3, M = 50, \rho = 0.65, K = 14, R_0 = 15$ km.

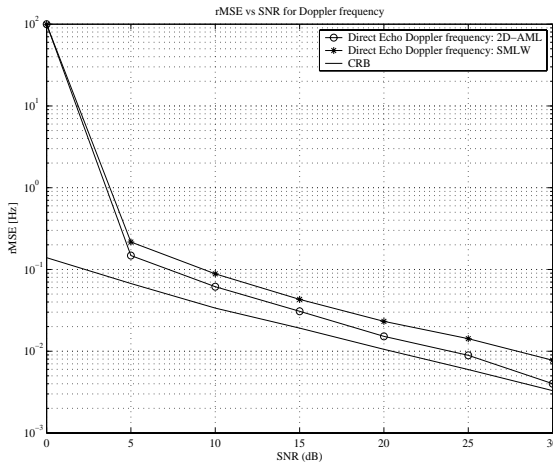


Figure 4: Comparison of 2D-AML and SMLW vs SNR for Doppler frequency. $N = 8, L = 3, M = 50, \rho = 0.65, K = 14, R_0 = 15$ km.

5. REFERENCES

- [1] Barton D. K., "Low angle radar tracking", *Proc. IEEE* Vol. 62, pp 687-704, June 1974.
- [2] Turner R. M. and Bossé E., "Maximum likelihood tracking using a highly refined multipath model", Presented at *21st Asilomar conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, Nov. 2-4, 1987.

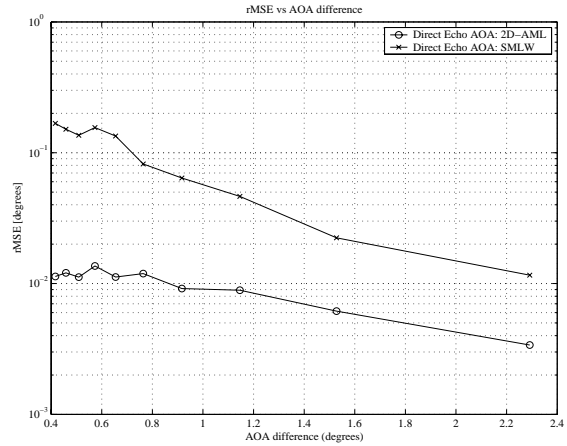


Figure 5: Comparison of 2D-AML and SMLW vs angle difference. $N = 8, L = 3, M = 50, \rho = 0.65, K = 14, SNR = 20$ dB

- [3] Bossé E., Turner R. M. and Riseborough E. S., "Model-based multifrequency array signal processing for low-angle tracking", *IEEE Trans. on AES*, Vol. AES-31 No. 1, pp. 194-210, Jan. 1995.
- [4] Lo T. and Litva J., "Use of a highly deterministic multipath signal model in low-angle tracking", *IEE Proceedings-F*, Vol.138, No. 2, Apr. 1991.
- [5] Nickel U., "Angular superresolution with phased array radar: A review of algorithms and operational constraints", *IEE Proceedings*, Pt. F, 134 pp. 53-59 Feb.1982.
- [6] Haykin S. and Reilly J. P. "Maximum likelihood receiver for low-angle tracking radar. Part 1: the symmetric case", *IEE Proceedings*, Pt. F, 129 pp. 261-272 Aug. 1982.
- [7] Reilly J. P. and Haykin S., "Maximum likelihood receiver for low-angle tracking radar. Part 2: the nonsymmetric case", *IEE Proceedings*, Pt. F, 129 pp. 331-340 Oct.1982.
- [8] Djeddou M. and Belouchrani A., "Parameter estimation in low-elevation target tracking", in *Proc. of the International Symposium on Sig. Proc. and its Applications (ISSPA)*. Kuala-Lumpur Malaysia, 13-16 Aug. 2001.
- [9] Blake L.V., "Prediction of radar range", in SKOLNICK, M.I.(Ed.), *Radar handbook*, McGraw-Hill, New York, 1990, 2nd edn.
- [10] Lemma A., Van der Veen A. J., and Depretter E. F., "Joint angle-frequency estimation using multi-resolution ESPRIT", in *Proc. IEEE ICASSP*, Seattle (WA), pp.1957-1960, May 1998.
- [11] Scharf L. L., *Statistical Signal Processing : Detection, estimation and time series Analysis*, Addison Wesley, 1990.
- [12] Göransson B. and Ottersten B., "Direction estimation in partially unknown noise fields", *IEEE Transactions on Signal Processing* vol. 47. NO.9, pp. 2375-2385, September 1999.
- [13] Dennis J. and Schnabel R., *Numerical Methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice Hall. 1983.
- [14] Kay S., *Fundamentals of statistical signal processing estimation theory*, Prentice-Hall Inc. Upper Saddle River NJ 1993.

PARAMETER ESTIMATION IN LOW-ELEVATION TARGET TRACKING

Mustapha Djeddou and Adel Belouchrani

Electrical Engineering Department
Ecole Nationale Polytechnique
B.O. 182 EL Harrach 16200, Algiers, Algeria
Email : belouchrani@hotmail.com

ABSTRACT

In radar applications, when a target is in close proximity to a reflectory surface, the received echo signal reaches the radar site via two or more paths, even though there exists only one target in the environment. So, it is often relevant to estimate the directions and the relative delays of each path ray. We present in this paper two approaches to jointly estimate these parameters based on a 2-D ESPRIT-like algorithm introduced first by Van de Veen et al. in communications. Numerical simulations are provided to access the performance of the proposed approaches, which are compared to the Cramer-Rao bound and the MUSIC algorithm combined with spatial smoothing.

1. INTRODUCTION

Target localization by radar site involves joint estimation of various parameters. The received echo signals reach the array elements via a multiplicity of paths even though there exists only one target. When a target is flying in proximity of earth, the radar sees two targets, the true one and the target image created by multipath interference. These two signals combined at the radar (constructively or destructively) yield a different angle measurement from the one that would have been made in the case of free earth reflection case. Yu [1] has developed a recursive scheme for tracking angles using frequency agile waveforms. However, his approach do not provide any information about the delay parameter. In this paper, by using the a-priori knowledge of the emitted pulse functions, we present an efficient algorithm for the simultaneous estimation of the arrival directions and the corresponding delays of both the direct return target and the reflected one. We investigate two different techniques to achieve the parameter estimation. In the first, the data is collected over one PRI (Pulse Repetition Interval) in the range bin of interest and the radar must provide the estimates of interest every new PRI, we use the technique developed in [2] and adapt it to radar application. In the second approach,

the data are collected over a few successive PRI, and the estimates are computed using a set of data bloc, we use the technique provided in [3] initially proposed for wireless communication. We make the assumption that directions and delays of paths have slow variations, as fading affects only their powers. In the two approaches, we use the fact that the application of the DFT (Discrete Fourier Transform) to the collected data, maps time delays to phase shifts in the frequency domain, and we then perform a deconvolution using the known DFT of the emitted pulse. The resulting data is set to a special form (depending on the approach) to look like the one of the classic DOA problem. Thus, we use a 2-D ESPRIT like algorithm [4] to provide a joint estimation of the parameters.

2. PROBLEM FORMULATION

Consider a uniform linear array consisting of N identical antenna elements. We assume that the radar observes its received waveforms over P successive PRI. The following scenario is considered: the radar receives a direct signal from an elevation angle θ_d and a reflected signal from angle θ_r (see figure 1). Thus, at the output

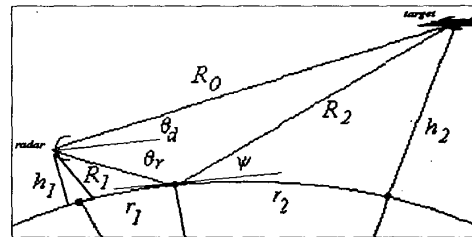


Figure 1: Reflection model for a spherical, smooth earth.

of each antenna element, we have

$$x_l(t) = A_l^d \beta_d S_d(t) + A_l^r \rho e^{-j\alpha} \tilde{\beta}_r S_r(t) + n_l(t) \quad (1)$$

$$l = 1, 2, \dots, N$$

where A_l^d and A_l^r are the antenna responses caused by the direct $S_d(t)$ and the reflected $S_r(t)$ signals, respectively, with $S_r(t) = S_d(t - \tau_r)$ and τ_r is the relative delay between the direct path and the reflected one. β_d and β_r are complex fading factors accounting for the Doppler effect and the radar cross section (RCS) of the target related to both the direct and reflected signals, $n_l(t)$ is the noise at the l -th element which is assumed complex process having zero mean, and covariance matrix $\sigma^2 \mathbf{I}$. The angle α is defined as the total phase difference of the direct and the reflected signals at the radar. The magnitude ρ and the phase angle ϕ of the reflection coefficient of the smooth flat surface are determined by the electromagnetic properties of the surface material (see reference [5]), by the grazing angle ψ of the ray and by the wave polarization

$$\alpha = \frac{2\pi(R_1 + R_2 - R_0)}{\lambda} + \phi \quad (2)$$

where R_2 and R_1 are the range from the target to the earth and from earth to radar, respectively, R_0 is the direct range. The echo returns (both the direct path and the reflected one) are assumed to be contained within the range gate considered for processing.

For convenience, ρ , $e^{-j\alpha}$, and β_r which appear in (1) are combined in one factor β_r :

$$x_l(t) = A_l^d \beta_d S_d(t) + A_l^r \beta_r S_d(t - \tau_r) + n_l(t). \quad (3)$$

Using vector notation, equation (3) can be rewritten as

$$x(t) = A \text{diag}(B) S^{(\tau)}(t) + n(t) \quad (4)$$

where $x(t)$ and $n(t)$ are the $N \times 1$ observation vector and noise vector, respectively, "diag(.)" is a transformation of a vector to a diagonal matrix, $(\cdot)^*$ is complex conjugate transpose operator, $S^{(\tau)}(t) = [S_d(t) S_d(t - \tau_r)]^T$ is a two dimensional signal vector, $B = [\beta_d \ \beta_r]$ and A is the direction of arrival matrix

$$A(\theta) = [A_l^d \ A_l^r] \quad (N \times 2)$$

where $A_l^d = [1 \ e^{-j\xi_d} \ \dots \ e^{-j(N-1)\xi_d}]^T$ and $A_l^r = [1 \ e^{-j\xi_r} \ \dots \ e^{-j(N-1)\xi_r}]^T$, with $\xi_{d,r} = 2\pi \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) \sin \theta_{d,r}$ and Δ the antenna element spacing.

3. METHOD OUTLINE

We assume that $x(t)$ is sampled at a high rate with M samples in each of the P range cells (each range cell has length T_R). Samples are separated by an amount of $\Delta t = \frac{T_R}{M}$. The observation samples are denoted by

x_{in}^l and are given by $x_{in}^l = x_l(t_{in})$ where t_{in} is the sample time $t_{in} = (i-1)T_R + n\Delta t$, $i = 1, 2, \dots, P$, $n = 1, 2, \dots, M$.

Next, denote by $S_{in}^{(\tau)} = S^{(\tau)}(t_{in})$ and $n_{in}^l = n_l(t_{in})$ the samples of $S^{(\tau)}(t)$, and $n_l(t)$ at instants t_{in} , respectively. By defining the following matrices

$$X(n) = [x_{i1}^j \ x_{i2}^j \ \dots \ x_{iM}^j] (N \times M)$$

$$V(n) = [v_{i1}^j \ v_{i2}^j \ \dots \ v_{iM}^j] (N \times M)$$

$$S^\tau(n) = \begin{bmatrix} s_{i1}^d & s_{i2}^d & \dots & s_{in}^d & \dots & s_{iM}^d \\ s_{i1}^r & s_{i2}^r & \dots & s_{in}^r & \dots & s_{iM}^r \end{bmatrix} (2 \times M)$$

with $x_{in}^j = [x_{in}^1 \ x_{in}^2 \ \dots \ x_{in}^N]^T$ and

$v_{in}^j = [v_{in}^1 \ v_{in}^2 \ \dots \ v_{in}^N]^T$
we obtain the following model

$$X(n) = A(\theta) \text{diag}(B) S^\tau(n) + V(n) \quad (5)$$

At this point, the Fourier transform of X is considered. This transformation maps a delay to phase shift in the frequency domain. If we consider the delay τ as an integer and use the time shift property of the Fourier transform, then, the DFT of the sampled version of $S(t - \tau)$ is

$$\begin{aligned} \widetilde{S^\tau}(k) &= \phi^{k\tau} \sum_{n=0}^{M-1} S(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \\ &= \phi^{k\tau} \widetilde{S}(k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (6)$$

where $\widetilde{S}(k) = SF$ is the Fourier transform of the emitted pulse, F denotes the DFT matrix of size $M \times M$, and $\phi = e^{-j\frac{2\pi}{M}\tau}$. In matrix form, this leads to

$$\widetilde{S^\tau} = [1 \ \phi^\tau \ (\phi^\tau)^2 \ \dots \ (\phi^\tau)^{M-1}] \text{diag}[\widetilde{S}] \quad (7)$$

Applying the DFT to X and according to equation (5), one obtains

$$\overline{X} = A \text{diag}(B) F \text{diag}[\widetilde{S}] + V F \quad (8)$$

where

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \phi^{\tau_d} & (\phi^{\tau_d})^2 & \dots & (\phi^{\tau_d})^{M-1} \\ 1 & \phi^{\tau_r} & (\phi^{\tau_r})^2 & \dots & (\phi^{\tau_r})^{M-1} \end{bmatrix}$$

In radar, the received pulse amplitude is generally modulated by Gaussian form due to antenna rotation. Thus, we may enhance the parameter estimation if we use a Gaussian replica of the known emitted pulse instead of the square emitted pulse.

By dividing out the known Fourier transform of the sampled emitted pulse on its nonzero support. The model becomes

$$\widetilde{X} = A \text{diag}(B) F + \widetilde{V} \quad (9)$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} a(\xi_d) & a(\xi_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_d & 0 \\ 0 & \beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\phi_d) \\ f(\phi_r) \end{bmatrix} + \tilde{V}' \quad (10)$$

where $f(\phi_{d,r}) = [1 \ \phi_{d,r} \ \dots \ \phi_{d,r}^{M-1}]$
 $a(\xi_{d,r}) = [1 \ \xi_{d,r} \ \dots \ \xi_{d,r}^{N-1}]^T$
 with $\phi_{d,r} = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r_{d,r}}$ and $\xi_{d,r} = e^{j2\pi(\frac{r}{\lambda}) \sin \theta_{d,r}}$.

\tilde{V}' is the Fourier transform of the noise samples after dividing out the Fourier transform of the emitted pulse. According of using one PRI or several PRI to provide the estimates of AOA and time delays, two approaches are in order:

3.1. First approach

In this approach, we propose to use only one PRI to provide the estimates of AOA and time delays ($P = 1$), we follow the same technique as in [2]. First, define two integers k_1 ($2 \leq k_1 \leq M$) and k_2 ($1 \leq k_2 \leq N - 1$) and define the notation $(\cdot)^{(i,j)}$ which means that we consider column j through column $M - k_1 + j$ and row i through row $N - k_2 + i$. Construct the following equal-sized sub matrices

$$\overline{X}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \overline{X}_{i,j} & \dots & \overline{X}_{i,M-k_1+j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{X}_{N-k_2+i,j} & \dots & \overline{X}_{N-k_2+i,M-k_1+j} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$1 \leq j \leq k_1, 1 \leq i \leq k_2$

then define the matrix

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \overline{X}^{(1,1)} & \dots & \overline{X}^{(k_2,1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{X}^{(1,k_1)} & \dots & \overline{X}^{(k_2,k_1)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$k_1(N - k_2 + 1) \times k_2(M - k_1 + 1)$

The motivation of this formulation is to put \mathcal{X} in the following factorization form

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \text{diag}(\mathcal{B}) \mathcal{F} + \mathcal{V} \quad (13)$$

where $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_\xi \\ A_\xi \Phi \\ \vdots \\ A_\xi \Phi^{k_1-1} \end{bmatrix} = A_\phi \circ A_\xi$.

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi_d & \phi_r \\ \vdots & \vdots \\ \phi_d^{k_1-1} & \phi_r^{k_1-1} \end{bmatrix} \quad A_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_d & \xi_r \\ \vdots & \vdots \\ \xi_d^{N-1} & \xi_r^{N-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\mathcal{F} = [\mathbf{F} \ \xi \mathbf{F} \ \dots \ \xi^{k_2-1} \mathbf{F}]$

$$\Phi = \text{diag}[\phi_d \phi_r], \quad \xi = \text{diag}[\xi_d \xi_r]$$

\mathcal{V} is the noise matrix with the same form as \mathcal{X} , 'o' is the Khatri-Rao product (a column wise Kronecker product) and '⊗' is the kronecker product.

Based on the shift invariance structure of matrix \mathcal{A} , The estimation of ξ_i and ϕ_i is performed by using a 2-D ESPRIT like algorithm ([4], [6]), we have

$$\xi_i = 2 \tan^{-1}(\text{Im} \{\lambda_i\}) \quad \text{and} \quad \phi_i = 2 \tan^{-1}(\text{Re} \{\lambda_i\}) \quad (15)$$

where λ_i are eigenvalues of pencil matrices. The automatic pairing of the AOA and the corresponding delays helps to make decision to reject the ray coming from earth surface. Generally, the relative delay of reflected path is larger than the relative delay of the direct path.

3.2. Second approach

In this approach, we propose to use several consecutive PRI ($P \geq 2$) of the received signal collected at the antenna outputs to provide the estimates of AOA and time delays. We make the assumption that θ_i and τ_i are invariant throughout the considered PRI's and that the complex fading terms are varying from one PRI to another. Using the following identity $\text{vec}(\mathcal{X} \text{diag}(\mathcal{Y}) \mathcal{Z}) = (\mathcal{Z}^T \circ \mathcal{X}) \mathcal{Y}$, where $\text{vec}(\cdot)$ is a vectorization operator, equation (9) becomes

$$\text{vec}(\tilde{X}_i) = (\mathbf{F}^T \circ \mathcal{A}) \mathcal{B}_i + \text{vec}(\tilde{V}'_i), \quad i = 1, \dots, P \quad (16)$$

This operation consists of taking the transpose of each row of a matrix and stacking it below the transpose of the previous row. The data matrix obtained by collecting and stacking the data vectors of (16) shows to have the following form (the same form as in [3])

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \mathcal{B} + \mathcal{V} \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \begin{bmatrix} \text{vec}(\tilde{X}_1) & \dots & \text{vec}(\tilde{X}_P) \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \dots & \mathcal{B}_P \end{bmatrix} \\ \mathcal{V} &= \begin{bmatrix} \text{vec}(\tilde{V}'_1) & \dots & \text{vec}(\tilde{V}'_P) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

The computation of ξ and Φ from \mathcal{X} is performed in the same way as in the first approach.

4. CRAMER-RAO BOUND DERIVATION

For the CRB derivation, we follow the same steps as in [3]. We obtain for the second approach the following CRB expression,

$$\text{CRB}^{-1} = \frac{2}{\sigma_v^2} \sum_{m=1}^P \{ \text{real}(\mathcal{B}^* \Xi^* (I - U(U^*U)^{-1}U^*) \Xi \mathcal{B}) \} \quad (18)$$

where $U(\theta, \tau) = [S_{\tau_d}^T(n) \otimes A(\theta_d) \quad S_{\tau_r}^T(n) \otimes A(\theta_r)]$, $B = I_{2 \times 2} \otimes \text{diag}[\beta_d \beta_r]$, $\Xi = [D_\theta D_\tau]$, $D_\theta = [d_{\theta_d} \quad d_{\theta_r}]$, and $D_\tau = [d_{\tau_d} \quad d_{\tau_r}]$ with $d_{\theta_i} = S_{\tau_i}^T(n) \otimes \frac{\partial a(\theta_i)}{\partial \theta_i}$, and $d_{\tau_i} = \frac{\partial S_{\tau_i}^T(n)}{\partial \tau_i} \otimes a(\theta_i)$.

The CRB expression for the first approach is obtained by setting in equation (18) $P = 1$, we have

$$CRB^{-1} = \frac{2}{\sigma_v^2} \text{real}(B^* \Xi^* (I - U(U^*U)^{-1}U^*) \Xi B). \quad (19)$$

5. SIMULATION RESULTS

We use the following simulation scenario (the same as the one of reference [1]): assume a 4/3-earth model [5]; a radar over a smooth earth is at height of $h_1 = 75$ ft. The target is flying at constant altitude $h_2 = 5000$ ft. Two signals are received with different AOA's and delays. We compare the performance of the proposed approaches to MUSIC algorithm combined with spatial smoothing technique. The results are obtained through 500 Monte-Carlo runs and compared with respect to the CRB.

Figures 2 and 3 show the experimental standard deviation of the estimates of the AOA and delays, versus the SNR, are compared to the CRB. The values of the setting parameters are indicated in the caption of the figure 2. The obtained results with the proposed approaches outperform those obtained with MUSIC combined with the spatial smoothing technique. Moreover, the two proposed approaches provide a joint estimation of the AOA and the delay unlike the MUSIC algorithm which estimates only the AOA.

Figure 4 shows the AOA tracking of the direct and reflected echoes using the two approaches, we note that tracking improves when the target approaches the radar. This can be explained by the fact that the grazing angle increases as the distance between target and radar decreases.

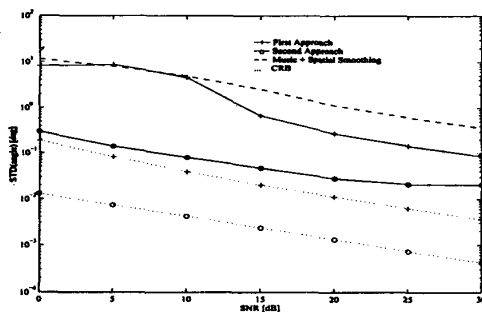


Figure 2: Reflected echo AOA estimate (first approach: $M = 200$, $N = 10$, $P = 1$, $R_0 = 40$ n.m., second approach: $M = 25$, $N = 10$, $P = 8$, $R_0 = 40$ n.m.).

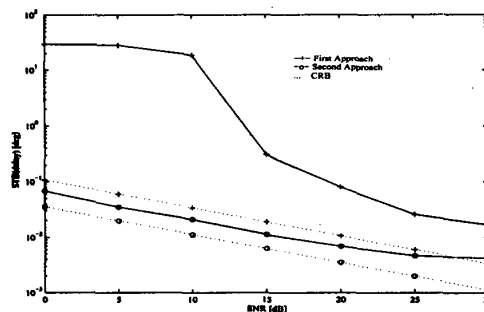


Figure 3: Reflected echo delay estimate.

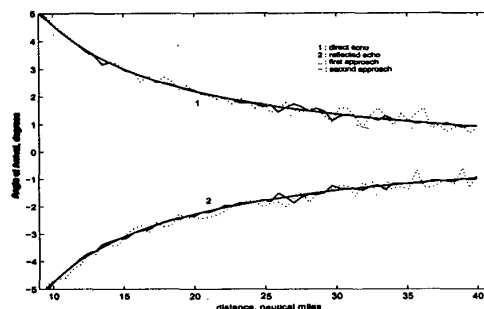


Figure 4: Angle of arrival tracking (first approach: $M = 200$, $N = 10$, $SNR = 20$ dB., second approach: $M = 25$, $N = 10$, $P = 5$, $SNR = 20$ dB.).

6. REFERENCES

- [1] K. B. Yu, "recursive super-resolution algorithm for low-elevation target angle tracking in multipath," *IEE Proceedings on Radar and Sonar Navigations*, Vol. 141, No. 4, August 1994.
- [2] A. J. van der Veen, M. C. Vanderveen, and A. Paulraj, "Joint Angle and Delay Estimation Using Shift-Invariance Techniques," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, NO.2, February 1998.
- [3] M. C. Vanderveen, A. J. van der Veen and A. Paulraj, "Estimation of Multipath Parameters in Wireless Communications", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, NO.3, March 1998.
- [4] M. Zoltowski, M. Haardt, and C. Mathews, "Closed-form 2-D angle estimation with rectangular arrays in element space or beam space via Unitary ESPRIT," *IEEE Transactions on Signal Processing* vol. 44, pp. 316-328, Feb. 1996.
- [5] L.V. Blake, "Prediction of radar range", in SKOLNICK, M.I.(Ed.); "Radar handbook" McGraw-Hill, New York, 1990, 2nd edn.
- [6] A. J. Van der Veen, P. B. Ober and E. F. Depretter, "Azimuth and elevation computation in high resolution DOA estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing* Vol. 40, pp. 1828-1832, July 1992.