

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Laboratoire de Commande des Processus



THESE

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de

Docteur en sciences

en **Génie Electrique**
Option : **Automatique**

par

Hocine BENSLIMANE

Magister en Automatique de l'ENP

Thème

Commande Itérative Adaptative des Systèmes Non Linéaires

Soutenue le 11/01/2018 devant le Jury composé de :

F. BOUDJEMA	Professeur à l'ENP	Président
H. CHEKIREB	Professeur à l'ENP	Rapporteur
A. BOULKROUNE	Professeur à l'université de Jijel	Rapporteur
N. BALI	Professeur à l'USTHB	Examineur
T. BOUDEN	Professeur à l'université de Jijel	Examineur
R. ILLOUL	MCA à l'ENP	Examineur
A. NAIT SEGHIR	MCA à l'USTHB	Examineur

ENP 2018

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Laboratoire de Commande des Processus



THESE

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de

Docteur en sciences

en **Génie Electrique**
Option : **Automatique**

par

Hocine BENSLIMANE

Magister en Automatique de l'ENP

Thème

Commande Itérative Adaptative des Systèmes Non Linéaires

Soutenue le 11/01/2018 devant le Jury composé de :

F. BOUDJEMA	Professeur à l'ENP	Président
H. CHEKIREB	Professeur à l'ENP	Rapporteur
A. BOULKROUNE	Professeur à l'université de Jijel	Rapporteur
N. BALI	Professeur à l'USTHB	Examineur
T. BOUDEN	Professeur à l'université de Jijel	Examineur
R. ILLOUL	MCA à l'ENP	Examineur
A. NAIT SEGHIR	MCA à l'USTHB	Examineur

ENP 2018

Avant-propos

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse a été effectué au Laboratoire de Commande de Processus (LCP) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, et au Laboratoire d'Automatique de Jijel (LAJ) de l'Université de Jijel.

Je tiens à remercier Messieurs les Professeurs, **H. Chekireb** et **A. Boulkroune**, pour la proposition du sujet de cette thèse et pour leurs conseils et leur soutien tout au long de ce travail.

J'ai été profondément honoré que Monsieur le Professeur **F. Boudjema**, ait accepté d'examiner ce travail et de présider ce Jury.

Que Messieurs les Professeurs, **T. Bouden**, **N. Bali** et, Messieurs les Maîtres de Conférences, **R. Illoul** et **A. Nait Seghir**, trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner et en prenant part à ce Jury.

Que tous mes amis et collègues trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance.

Enfin, je ne saurais terminer cet avant propos sans remercier toute ma famille pour son soutien pendant toutes mes études et particulièrement mes **parents**.

ملخص:

العمل المعروض في هذه الأطروحة يتعلق بتصميم مخططات التحكم بالتعلم التكراري التكيفي للأنظمة غير الخطية الإرتيابية التي تشتغل بصفة تكرارية في مجال زمني محدود بشرط الرصف. في هذا العمل قدمنا مجموعة من مخططات التحكم بالتعلم التكراري التكيفي للأنظمة غير الخطية التي لها شكل مثلثي الأفينية و غير الأفينية وكذلك الأنظمة غير الخطية الأفينية التي لها شكل مثلثي و مدخلها قابل للتشبع. القاسم المشترك بين مخططات التحكم المعروضة هو استعمال مقارنة التحكم بالتعلم التكراري الصلب للتعامل مع الدوال غير الخطية المجهولة و مقارنة التحكم بالتعلم التكراري التكيفي للتعامل مع الوسائط المجهولة. بالإضافة إلى هذا، إستعمال إجراءات التركيب بالخطو العكسي لتركيب قانون التحكم و استعمال مقارنة لياونوف لإثبات استقرار النظام في الحلقة المغلقة. النتائج النظرية تم تفعيلها عن طريق المحاكاة العددية لإبراز كفاءتها.

كلمات مفتاحية: التحكم بالتعلم التكراري التكيفي، الأنظمة غير الخطية التي لها شكل مثلثي، أفينية، غير أفينية، طريقة لياونوف، تشبع المدخل.

Abstract

This work deals with the adaptive iterative learning control design for uncertain nonlinear systems which perform the same task within a fixed time interval under the alignment condition. In fact, we propose adaptive iterative learning control schemes for strict feedback and pure feedback nonlinear systems and strict feedback nonlinear systems subjected to saturation at the input. The common factor between the developed control schemes is the use of the robust iterative learning control approach to handle the unknown nonlinear functions and the adaptive iterative learning control approach to handle the uncertain parameters. In addition, the backstepping procedure design is used for control design and the stability of closed-loop systems is performed by the Lyapunov method. The theoretical results are validated by simulation to show its performance.

Key words: adaptive iterative learning control, strict feedback nonlinear systems, pure feedback nonlinear systems, Lyapunov method, input saturation.

Résumé :

Le travail présenté dans cette thèse concerne la conception des schémas de commande par apprentissage itératif adaptative des systèmes non-linéaires incertains fonctionnant d'une manière répétitive sous la condition d'alignement. En fait, nous proposons des schémas de commande par apprentissage itératif adaptative pour les systèmes non-linéaires triangulaires affines et non affines en la commande et les systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande et en présence d'une saturation à l'entrée. Les schémas de commande développés se basent essentiellement d'une part sur l'utilisation de l'approche de commande par apprentissage itératif robuste pour manipuler les fonctions incertaines et d'autre part sur l'approche de la commande par apprentissage itératif adaptative pour manipuler les paramètres incertains. De plus, la synthèse des lois de commandes a été effectuée en se basant sur la procédure de synthèse par backstepping et l'analyse de la stabilité de ces systèmes en boucle fermée a été effectuée par la méthode de Lyapunov. En outre, la mise en œuvre, par simulation numérique, des lois de commande proposées à travers les exemples traités, nous a permis de vérifier leur faisabilité et d'évaluer leurs performances.

Mots clé : commandes par apprentissage itératif adaptative, systèmes non-linéaires triangulaires, affine, non affine, méthode de Lyapunov, saturation de l'entrée.

Table des matières

Introduction générale	07
------------------------------	----

Chapitre 1

Introduction à la CAI

1.1. Introduction	11
1.2. Concepts de base de la CAI	12
1.2.1. Pourquoi a-t-on recours à la CAI ?	12
1.2.2. En quoi consiste la CAI ?	13
1.3. Formulation du problème de CAI	13
1.3.1. Hypothèses	14
1.3.2. Objectif de la CAI	14
1.4. Synthèse de la CAI	14
1.4.1. CAI en boucle ouverte	15
1.4.2. CAI en boucle fermée	15
1.5. Conditions de continuité globale de Lipchitz	17
1.6. Condition d'initialisation identique dans la CAI linéaire	18
1.7. Analyse des performances	19
1.8. Conclusion	20

Chapitre 2

Etude bibliographique et position du problème

2.1. Introduction	21
2.2. Synthèse des travaux relatifs à la CAI adaptative	21
2.2.1. Synthèse par la fonctionnelle de Lyapunov	22
2.2.2. CAI adaptative	24
2.2.2.1. CAI adaptative de type 1	25
2.2.2.2. CAI adaptative de type 2	26
2.2.2.3. CAI adaptative de type 3	29
2.2.3. Condition d'initialisation identique dans la CAI adaptative	32
2.2.4. CAI robuste	34
2.2.5. CAI adaptative des systèmes non-linéaire triangulaires	36
2.2.5.1. CAI adaptative des systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande	36

2.2.5.2. CAI adaptative des systèmes non-linéaires triangulaires non affines en la commande	39
2.2.5.3. CAI adaptative des systèmes non-linéaires triangulaires avec saturation à l'entrée	41
2.3. Position du problème et contribution	43
2.4. Conclusion	44

Chapitre 3

CAI adaptative des systèmes non- linéaires incertains affines en la commande

3.1. Introduction	46
3.2. Modèle du système et formulation du problème	47
3.3. Synthèse de la CAI adaptative	48
3.4. Analyse de Stabilité et de convergence	54
3.5. Résultats de Simulation	59
3.5.1. Exemple 1	60
3.5.2. Exemple 2	66
3.6. Conclusion	73

Chapitre 4

CAI adaptative des systèmes non- linéaires incertains non affines en la commande

4.1. Introduction	75
4.2. Modèle du système et formulation du problème	76
4.3. Synthèse de la CAI adaptative	77
4.4. Analyse de Stabilité et de convergence	84
4.5. Résultats de simulation	88
4.5.1. Exemple 1	88
4.5.2. Exemple 2	94
4.6. Conclusion	100

Chapitre 5

CAI adaptative des systèmes non-linéaire incertains avec saturation à l'entrée

5.1. Introduction	102
5.2. Modèle du système et formulation du problème	103
5.3. Synthèse de la CAI adaptative	104
5.4. Analyse de Stabilité et de convergence	109

5.5. Résultats de simulation	115
5.6. Conclusion	120
Conclusion générale	122
Bibliographie	124
Annexe	130

Introduction générale

Pour les systèmes dynamiques fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fixe, il est bien établi que les schémas de commande synthétisée, sur la base des approches analytiques ou numériques, conduisent à une erreur de poursuite invariante sur tout l'intervalle de temps. Par ailleurs, *la commande par apprentissage itératif* (CAI) est une approche efficace pour surmonter les inconvénients de telles approches de commande, en particulier lorsque le système considéré fonctionne d'une manière répétitive [1]. De plus et en absence d'un modèle mathématique précis pour le système à commander, la CAI est souvent utilisée pour réaliser une poursuite parfaite sur un intervalle de temps fini. Cette dernière a été appliquée avec succès à de nombreux systèmes pratiques tels que les robots industriels, les disques durs, les systèmes multi-agents, les systèmes biologiques, etc [2]-[7].

Au cours de ces dernières décennies, un effort important de recherche dans le domaine de l'automatique a été consenti dans le sens de l'application de la CAI aux systèmes non-linéaires. Dans un premier temps, les lois de la CAI ont été principalement développées en utilisant la norme pondérée pour prouver la stabilité et la convergence des processus itératifs [1], [8]-[17]. En effet, l'idée principale de cette méthode consiste à calculer la commande actuelle à partir de la commande précédente et de l'erreur de poursuite en sortie dans le but d'améliorer successivement la précision de poursuite de la référence. Mais, la plupart de ces lois de la CAI ne permettent pas d'incorporer les connaissances disponibles sur le système. Par conséquent, les lois résultantes de la CAI peuvent éventuellement perdre l'avantage de la robustesse dans le domaine du temps, car elles évoluent seulement dans le domaine des itérations et évitent la synthèse par retour d'état et l'analyse de la stabilité dans le domaine du temps. De plus, il est bien établi que la méthode des normes n'est applicable qu'à la classe limitée des systèmes non-linéaires incertains à degré relatif nul, où la condition d'initialisation identique et celle globale de Lipschitz doivent être satisfaites [19]. Au cours de ces dernières années et en s'appuyant sur la méthode d'analyse de stabilité au sens de Lyapunov, les recherches dans le domaine de la CAI ont permis de

développer la CAI adaptative [18]-[27]. Cette dernière permet, entre les itérations successives, d'ajuster les paramètres de commande au lieu de l'entrée de commande elle-même. Cette nouvelle méthode de synthèse, qui est essentiellement une combinaison de la commande adaptative et la CAI classique, fournit des outils puissants qui permettent à même de traiter les systèmes non abordables par la méthode des normes. La robustesse du système en boucle fermée est garantie dans le domaine temporel de plus, la convergence de l'erreur de poursuite est assurée dans le domaine des itérations.

Parmi les nombreuses techniques de synthèse des lois de commande non-linéaire, la technique par backstepping [28] qui convient parfaitement à la synthèse des lois de commande des systèmes non-linéaires triangulaires inférieures. En effet, le modèle de ces systèmes se distingue par le fait que la dynamique d'une composante donnée du vecteur d'état est une fonction des composantes précédentes et de cette même composante. Ces systèmes se subdivisent essentiellement en deux grandes classes: les systèmes affines en la commande et les systèmes non affines en la commande. Malgré les nombreux travaux consacrés à la procédure de synthèse par backstepping pour les systèmes non-linéaires affines en la commande [26]-[32] peu de travaux se rapportent aux systèmes non-linéaires non affines en la commande [33]-[36]. Ainsi, pour ces derniers systèmes, peu de résultats sont disponibles dans la littérature spécialisée. Cependant, il est à noter que la technique par backstepping souffre du problème de l'explosion de la complexité quand l'ordre du système augmente [37]. En effet, cette complexité croissante est causée par les dérivations répétées des commandes virtuelles qui peuvent conduire à un algorithme compliqué ayant une lourde charge de calcul. Afin de remédier à ce problème, l'approche de la commande par backstepping filtrée a été proposée où, à chaque étape de la procédure conventionnelle de synthèse par backstepping, un filtre est introduit pour estimer la commande virtuelle [38]-[40].

Il convient de noter que toutes ces approches de commande, discutées ci-dessus, admettent l'hypothèse que les systèmes non-linéaires considérés ne sont pas soumis à des contraintes sur leurs entrées sous forme de saturation. En pratique, la saturation est généralement due à un dimensionnement physique limité des actionneurs, des capteurs ou des dispositifs d'interface. Par ailleurs, l'existence de saturation à l'entrée peut gravement diminuer la précision de commande ou provoquer des oscillations, et même elle peut conduire dans certaines situations à l'instabilité du système. Certaines procédures de synthèse de commande et d'analyse de la stabilité ont été élaborées pour les systèmes non-linéaires incertains et en présence de saturation pouvant affecter le signal d'entrée [41]-[48]. Parmi ces procédures, on trouve d'une part celles synthétisées en utilisant une approximation de la saturation par des fonctions continues, telle que la tangente

hyperbolique où la fonction d'erreur de Gauss [41]-[44] et d'autre part celles se basant sur la construction d'un système auxiliaire de même ordre que celui du système à commander [45]-[48]. En effet, ce système auxiliaire admet comme entrée l'erreur entre l'entrée de commande et l'entrée de commande saturée puis une modification de l'erreur de poursuite est effectuée compte tenu des signaux générés par le système auxiliaire. Ceci permet aux lois d'adaptation de rester opérantes même en présence de la saturation.

Motivés par les éléments présentés ci-dessus et en se basant sur la procédure de synthèse par backstepping ainsi que la méthode d'analyse de la stabilité et de la convergence par la fonctionnelle de Lyapunov, nous sommes parvenus à développer trois schémas de la CAI adaptative pour les systèmes non-linéaires triangulaires inférieurs. Ces derniers fonctionnent d'une manière répétitive pendant un intervalle de temps fini sous la condition d'alignement. Le premier schéma a été conçu pour les systèmes affines en la commande. Le deuxième schéma de commande est proposé pour les systèmes non affines en la commande. Enfin, le troisième schéma de la CAI adaptative a été développé pour les systèmes affines en la commande avec contrainte de saturation sur l'entrée.

L'ensemble de ces travaux sont organisés en cinq chapitres. *Le premier chapitre* est consacré à la présentation de certains techniques et résultats de base indispensables à la bonne compréhension de l'approche de la CAI. Nous abordons la question par les concepts intuitifs par la suite, nous étudions plus systématiquement la conception et l'analyse des lois de la CAI pour les systèmes non-linéaires.

Le deuxième chapitre est consacré d'une part à la synthèse bibliographique pour relever les principales approches de la CAI adaptative et la CAI robuste et d'autre part pour déterminer pour quelles classes de systèmes non-linéaires ces lois ont été établies. Nous discutons également le problème des conditions initiales et les solutions existantes.

Le troisième chapitre développe une loi de la CAI adaptative pour une classe de systèmes triangulaires inférieurs affine en la commande. Ces systèmes présentent des incertitudes paramétriques et non paramétriques et, fonctionnent d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fini. Cette loi de commande est constituée de trois termes : le premier terme est un mécanisme d'apprentissage itératif pour compenser les effets des incertitudes non paramétrique, le deuxième terme est un mécanisme d'adaptation par apprentissage itératif dans le domaine du temps pour compenser les effets des incertitudes paramétriques et le troisième terme

est un terme de robustesse pour compenser les effets des perturbations dynamiques et des erreurs d'apprentissage.

Le quatrième chapitre est réservé au développement d'une loi de la CAI adaptative pour une classe de systèmes triangulaires inférieurs, non-linéairement paramétrés et non affines en la commande. Ce schéma admet une structure proche de celle du schéma présenté au troisième chapitre, la différence majeure réside dans le fait que chaque composant du schéma de commande possède une structure différente de celle correspondante dans le schéma de commande présenté au chapitre trois.

Le cinquième chapitre introduit une nouvelle loi de la CAI adaptative pour les systèmes non-linéaires triangulaires inférieurs, non-linéairement paramétrés, affines en la commande et soumis à une saturation à l'entrée. Comparativement aux lois précédentes, les termes d'adaptation par apprentissage itératif sont définis dans le domaine d'itération. De plus, pour remédier au problème de la saturation, un système auxiliaire de même ordre que le système à commander est introduit. Ce dernier a comme entrée l'erreur entre la commande non saturée et celle saturée. Les états de ce système auxiliaire sont ensuite utilisés pour modifier les erreurs de poursuite. Cette procédure permet de maintenir opérationnelles les lois d'apprentissage itératif et les lois d'adaptations par apprentissage itératif même en régime de saturation de la commande.

Tout au long de cette thèse, nous allons utiliser la méthode par backstepping pour la conception des commandes proposées et la fonctionnelle de Lyapunov pour étudier la stabilité du système en boucle fermée et démontrer la convergence des erreurs de poursuite. De plus, les performances de chaque schéma de commande sont mises en évidence via des exemples de simulation.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale où nous résumons les résultats fondamentaux obtenus dans le cadre de cette thèse sans oublier de fournir quelques pistes de recherche à explorer en guise de perspectives pour nos travaux.

Introduction à la CAI

1.1. Introduction

On rencontre dans l'industrie des systèmes, tels que les robots manipulateurs, fonctionnant d'une manière répétitive; c'est-à-dire qu'ils sont amenés à exécuter une tâche d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fixe, de plus, la tâche doit être exécutée d'une manière aussi parfaite que possible. En effet, la sortie du système doit suivre avec grande précision une trajectoire de référence donnée sur un intervalle de temps fini. Par ailleurs, la CAI est apparue comme une approche de commande efficace pour répondre à ce type de problème de commande. L'idée de base de la CAI consiste donc à générer une séquence appropriée de la commande devant assurer une poursuite parfaite sur un intervalle de temps fini.

En outre, la CAI a été introduite initialement par Arimoto et ses collaborateurs [1] pour résoudre le problème de commande des systèmes fonctionnant d'une manière répétitive sous les mêmes conditions sur un intervalle de temps fixe. D'autre part, on peut intuitivement considérer *l'apprentissage comme étant un lien entre la connaissance et l'expérience*. C'est à dire le manque de connaissances peut être complété par l'expérience. La connaissance et l'expérience peuvent être traduites, dans le contexte technique, par la *modélisation* et *l'itération (la répétition) de lois de commande par apprentissage*. Il est possible de décrire l'apprentissage comme un processus réalisé via l'expérience lorsque la connaissance du système est partiellement disponible. En général, la CAI se caractérise par la capacité d'exploiter les informations issues du fonctionnement répétitif du système comme une expérience afin d'améliorer les performances de la commande du système même en cas d'une connaissance incomplète de la dynamique du système à commander.

Le but de ce chapitre est d'exposer quelques techniques et résultats de base indispensables à la bonne compréhension de l'approche de la CAI. Nous abordons la question par les concepts intuitifs et en suite, nous étudions plus systématiquement la conception et l'analyse des lois de la CAI pour les systèmes non-linéaires. Donc, cette étude concerne principalement les méthodes de base qui peuvent être considérées comme étant une généralisation de la commande PID classique au cas des systèmes répétitifs.

1.2. Concepts de base de la CAI

Dans cette section, nous allons répondre aux deux questions fondamentales suivantes :

- Pourquoi a-t-on recours à la CAI?
- En quoi consiste la commande par apprentissage itératif ?

1.2.1. Pourquoi a-t-on recours à la CAI ?

Nous considérons la classe des commandes devant assurer une poursuite parfaite sous un environnement de commande répétable. En effet, la poursuite parfaite implique que la trajectoire de référence, donnée sur un intervalle de temps fixe, soit suivie parfaitement du début à la fin du cycle. De plus, l'environnement de commande répétable impose que la trajectoire de référence et les conditions d'initialisation soient identiques pour toutes les itérations (cycles) de la commande.

La plupart des méthodes de commandes existantes, y compris la commande adaptative ou la commande robuste, sont inappropriées pour cette classe de problèmes de commande pour deux raisons. La première réside dans le fait que ces méthodes de commandes sont caractérisées par la convergence asymptotique dans le temps ainsi, la poursuite parfaite est irréalisable dans un intervalle de temps fini, même si l'erreur d'initialisation est nulle. La seconde raison, de loin la plus importante, est liée au fait que toutes ces méthodes sont incapables d'exploiter les informations issues de l'exécution précédente de la tâche qu'elle soit réussie ou non. Donc, sans apprentissage, les performances ne peuvent être améliorées en fonction de la répétition de la tâche (via la répétition de la commande). En effet, la CAI est apparue comme une alternative afin de répondre à ce type de problème de commande. Comme une bonne partie des systèmes industriels fonctionne d'une manière répétitive, la CAI est donc utile dans le contexte industriel où l'exemple typique est celui des robots manipulateurs. En effet, les robots manipulateurs sont habituellement exploités pour exécuter des tâches répétitives. C'est-à-dire, la trajectoire de référence est répétée sur un intervalle de temps donné et le suivie de cette trajectoire doit être parfait. C'est le cas dans l'industrie automobile où les robots manipulateurs ont investi

massivement le créneau, ils sont surtout utilisés sur les chaînes de montage pour la pose de pièces et la peinture des voitures.

1.2.2. En quoi consiste la CAI ?

La CAI est une procédure de commande réservée aux systèmes dynamiques incertains fonctionnant d'une façon répétitive sur un intervalle de temps fixe. Cette procédure est utilisée pour améliorer les performances de la réponse de cette classe de systèmes en exploitant judicieusement les informations issues des exécutions (itérations) précédentes. La question clé est donc de savoir de quelle manière la CAI peut exploiter pertinemment les informations issues des exécutions précédentes afin d'améliorer l'exécution actuelle? Dotée de cette qualité, par conséquent la CAI est souvent utilisée pour atteindre la poursuite parfaite sur un intervalle de temps fini, même si le modèle du système considéré est incertain (i.e., on ne dispose d'aucune information sur sa structure et/ou sur sa non-linéarité). Il existe deux approches principales pour la construction des lois de la CAI : la première concerne la CAI classique (linéaire) et la seconde est relative à la CAI adaptative.

- **La méthode de la CAI classique** propose des lois de commande constituant les fondements théoriques de la CAI. Ces lois se présentent comme une généralisation de la commande PID classique aux systèmes répétitifs.
- **La méthode de la CAI adaptative** est venue surmonter certaines limitations de la CAI classique. Cette méthode est développée en combinant la méthode de la CAI classique et celle de la commande adaptative.

Comme le but est de présenter succinctement les fondements de la CAI par conséquent ce chapitre est principalement dédié aux lois de la CAI classique.

1.3. Formulation du problème de CAI

On considère un système dynamique non-linéaire fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fini. La dynamique de ce système à la $k^{\text{ième}}$ itération peut être décrite d'une façon générale par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), u_k(t), t) \\ y_k(t) = h(x_k(t), u_k(t), t) \end{cases} \text{ où } t \in [0, T] \quad (1.1)$$

où $k \in \mathbb{N}$ est le nombre de cycle d'opération (itération), $x_k(t)$, $y_k(t)$ et $u_k(t)$ représentent respectivement, à la $k^{\text{ième}}$ itération, le vecteur des états, la sortie du système et l'entrée de

commande. On définit l'erreur de poursuite par $e_k(t) = y_k(t) - y_r(t)$ où $y_r(t)$ est la trajectoire de référence.

1.3.1. Hypothèses

Les hypothèses, listées ci-dessous, sont couramment admises dans le cadre des travaux consacrés à la CAI [1][8][9][11]:

- Chaque cycle se termine dans un temps fixe de durée $T > 0$.
- La même trajectoire est parcourue à chaque cycle et, cette trajectoire est connue à priori sur l'intervalle de temps $t \in [0, T]$.
- Les conditions initiales sont les mêmes pour chaque cycle : $x_k(0) = x_0$, pour $k = 1, 2, 3, \dots$
- L'invariance de la dynamique du système est assurée pour toutes itérations.
- La dynamique du système est inversible, c'est-à-dire pour une sortie désirée dérivable par morceaux $y_r(t)$, il existe une entrée unique $u_d(t)$ qui force la sortie du système à suivre $y_r(t)$.

1.3.2. Objectif de la CAI

L'objectif majeur de la CAI est de trouver une séquence des entrées de commande appropriés $u_k(t)$ qui force la sortie du système $y_k(t)$ à converger vers une trajectoire de référence $y_r(t)$ lorsque le nombre des itérations approche l'infinie, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$, où $e_k(t) = y_k(t) - y_r(t)$ représente l'erreur de poursuite.

1.4. Synthèse de la CAI

En général, une loi de commande par apprentissage itératif se présente sous la forme réursive suivante [49] :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + I(v_k(t)) \quad (1.2)$$

où $I(.)$ représente une fonction dépendant des informations $v_k(t)$ recueillies au cycle précédent et/ou actuel. Ces informations sont en général constituées par l'erreur de suivi et/ou ses dérivées et/ou ses intégrales. Le problème fondamental pour la détermination de la loi (1.2) réside dans le choix de la fonction $I(.)$ qui doit être d'une forme réursive simple et qui doit pouvoir assurer la convergence de l'erreur avec une vitesse de convergence satisfaisante. En général, le choix d'une fonction $I(.)$ linéaire par rapport à ses arguments peut satisfaire à ces exigences.

La forme générale (1.2) de la loi de la CAI conduit à deux schémas simples de commande à savoir : la CAI en boucle ouverte et celle en boucle fermée.

1.4.1. CAI en boucle ouverte

La commande actuelle par apprentissage itératif en boucle ouverte est conçue en utilisant uniquement les informations issues du cycle précédent. Il est important de noter que ce schéma est en boucle ouverte dans le domaine du temps. Une telle loi de commande est donnée par la forme réursive suivante [49] :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + I(e_k(t)) \quad (1.3)$$

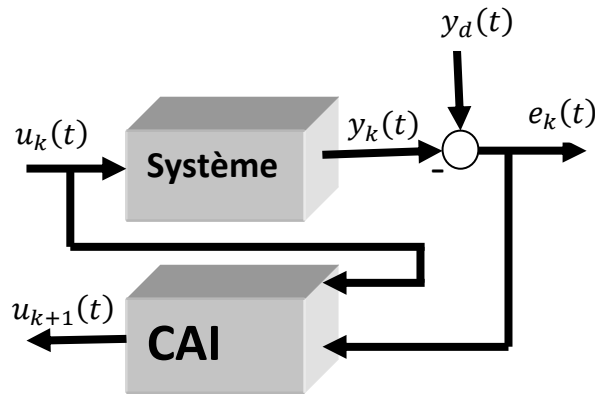


Figure 1.1 Schéma de la CAI en boucle ouverte

1.4.2. CAI en boucle fermée

La commande actuelle est obtenue en utilisant des informations issues du cycle précédent (relatives à la loi de commande) et des informations issues du cycle actuel (relatives à l'erreur de poursuite). Par conséquent, on aboutit à la forme suivante de la loi de commande [49]:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + I(e_{k+1}(t)) \quad (1.4)$$

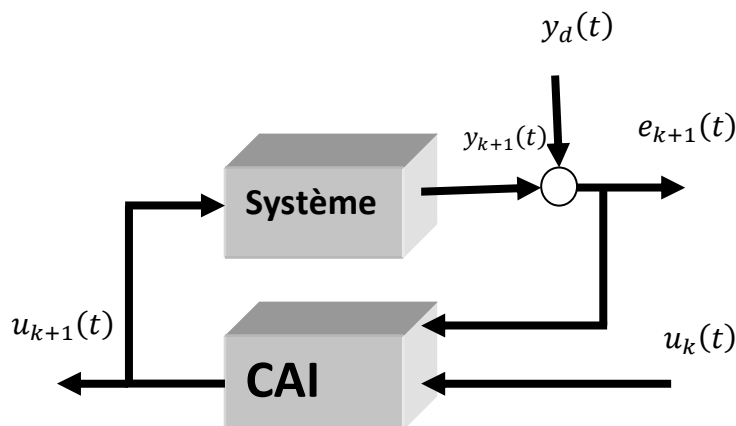


Fig.1.2 : Schéma de la CAI en boucle fermée

Il existe actuellement plusieurs lois de CAI linéaire destinée aux systèmes non-linéaires. Dans ce qui suit et pour faciliter la compréhension du principe de la CAI, nous allons présenter les deux lois de base les plus connues, CAI linéaire de type P et celui de type D. Considérons le système non-linéaire (1.1) et la loi de la CAI linéaire du type P donnée par [1] :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta e_k(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

où $\eta > 0$ est un gain d'apprentissage. Pour des raisons de simplicité, nous considérons que la commande initiale $u_0(t)$ est mise à zéro et donc on a : $u_0(t) = 0, \forall t \in [0, T]$. Il est également possible de l'initialiser par un certain mécanisme approprié.

La condition de convergence est imposée par l'inégalité suivante [1]:

$$\text{Max}_{h_u \in \mathcal{D}} |1 - \eta h_u| \equiv \gamma < 1 \quad (1.6)$$

$$\text{où } h_u(t) = \frac{\partial h(x_k(t), u_k(t), t)}{\partial u}$$

Il est clair que le système dynamique (1.1) admet un degré relatif nul. Dans la pratique, les systèmes non-linéaires sont dans la plupart des cas à degré relatif non nul. Ainsi, dans cette section, nous considérons la classe des systèmes dynamiques non-linéaires, à degré relatif non nul, ayant pour modèle mathématique:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), u_k(t), t) \\ y_k(t) = h(x_k(t), t) \end{cases} \quad (1.7)$$

où la sortie y_k ne dépend pas directement de l'entrée de commande u_k . Dans ce cas, la loi de la CAI (1.5) de type P n'est pas satisfaisante. Nous choisissons comme nouvelle variable de sortie la grandeur \dot{y}_k :

$$\dot{y}_k \equiv \bar{h}(x_k, u_k, t) = \frac{dh(x_k, t)}{dx_k} f(x_k, u_k, t) \quad (1.8)$$

Une CAI de type D est conçue en conséquence comme suit [12]:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta \dot{e}_k(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.9)$$

où $\eta > 0$ est un gain d'apprentissage et $\dot{e}_k(t) = \dot{y}_k - \dot{y}_r$. Pour des raisons de simplicité, nous considérons que la commande initiale $u_0(t)$ est nulle d'où, $u_0 = 0, \forall t \in [0, T]$. En outre, celle-ci peut être initialisée par un mécanisme approprié.

La condition de convergence est formulée comme suit [12] :

$$\text{Max}_{h_u \in \mathcal{D}} |1 - \eta \bar{h}_u| \equiv \gamma < 1 \quad (1.10)$$

$$\text{où } \bar{h}_u = \left(\frac{dh(x_k(t), t)}{dx_k} \right)^T \frac{df(x_k(t), u_k(t), t)}{du_k}.$$

Il est à noter que la condition (1.10) assure la convergence asymptotique de la dérivée de l'erreur de poursuite, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}(t) \rightarrow 0$. De plus, le fait que $\dot{e}_k(t) = 0$ et en vertu de la condition d'initialisation identique $e_k(0) = 0$, on obtient alors $e_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

A ce stade, il est important de signaler les travaux hybridant entre les lois linéaires P, D et I de la CAI pour proposer des lois de la CAI linéaire du type PI, PD ou PID [8][9][11]. En effet, ces lois permettent de bénéficier de l'avantage de chaque action du PID et d'améliorer la convergence de poursuite. Par ailleurs, ces deux schémas de CAI sont des lois en boucle ouverte (i.e. de la forme (1.3)) et, la convergence de l'erreur de poursuite, dans ce cas-là, est généralement prouvée en utilisant les normes pondérées. En outre, des lois de CAI linéaire en boucle fermée existent également et des études leurs ont consacrées pour les développer [49][53]. Cependant, c'est la fonctionnelle de Lyapunov qui est mise en œuvre pour l'analyse de la convergence de ces lois de CAI en boucle fermée. Il est à noter que cette technique sera discutée plus amplement au chapitre 2.

Par ailleurs, Il existe deux conditions indispensables à l'implémentation des lois de CAI : la condition de continuité globale de Lipchitz et la condition d'initialisation identique.

1.5. Conditions de continuité globale de Lipchitz

Pour le système (1.1), nous considérons que les fonctions non linéaires $f(x_k, u_k, t)$ et $h(x_k, u_k, t)$ et leurs premières dérivées par rapport à x_k et u_k sont bornées $\forall (x_k, u_k, t) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \times [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, donc, il existe des constantes L_f et L_h telles que :

$$|f(x_k, u_k, t) - f(x_{k-1}, u_{k-1}, t)| \leq L_f [|x_k - x_{k-1}| + |u_k - u_{k-1}|] \quad (1.11)$$

$$|h(x_k, u_k, t) - h(x_{k-1}, u_{k-1}, t)| \leq L_h [|x_k - x_{k-1}| + |u_k - u_{k-1}|] \quad (1.12)$$

Mathématiquement, il est connu que les conditions de continuité globale de Lipchitz garantissent l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle (1.1) pour n'importe quelle valeur initiale appartenant au domaine d'existence en entrée. Dans la théorie de la CAI, les conditions de continuité globale de Lipchitz sont d'une grande importance car elles

garantissent le comportement suivant du système : si l'entrée d'un système est finie alors la sortie ne peut pas diverger en un temps fini.

1.6. Condition d'initialisation identique dans la CAI linéaire

La condition de l'initialisation identique de la trajectoire réelle et de la trajectoire de référence constitue une hypothèse fondamentale dans le développement des lois de la CAI. Cette condition doit être vérifiée, si la poursuite souhaitée devrait être parfaite.

Considérons la loi de la CAI linéaire (1.5) et supposons l'existence d'une petite erreur d'initialisation :

$$e_k(0) = y_k(0) - y_r(0) = \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.13)$$

où ε est une petite constante. Notez que, dans le domaine des itérations, la loi de la CAI est essentiellement un intégrateur. A l'instant $t = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} u_{k+1}(0) &= u_k(0) + \eta e_k(0) \\ &= u_{k-1}(0) + \eta e_{k-1}(0) + \eta e_k(0) \\ &= \dots \\ &= u_0(0) + \eta \sum_{i=0}^k e_i(0) \\ &= u_0(0) + \eta(k+1)\varepsilon \end{aligned} \quad (1.14)$$

Par conséquent, la relation (1.14) montre clairement que lorsque le nombre d'itération k tend vers l'infini, la commande initiale au $k^{\text{ième}}$ cycle, $u_k(0)$, tend aussi vers l'infini.

Dans cette situation, sans connaître l'erreur d'initialisation et sans connaître la dynamique des états du système, la poursuite parfaite de la sortie ne peut être réalisée. Dans de telles circonstances, une solution pratique consiste à actualiser la loi de la CAI en introduisant un facteur d'oubli et de ce fait, l'algorithme de la CAI peut être alors modifié comme suit :

$$u_{k+1}(t) = \mu u_k(t) + \eta z_k(t) \quad (1.15)$$

où $\mu \in]0,1[$ est un facteur d'oubli et $z_k(t)$ représente l'une des grandeurs $e_k(t)$ ou $\dot{e}_k(t)$. Le facteur d'oubli empêche l'accumulation de l'erreur d'initialisation. De plus, le facteur d'oubli réduit également l'ensemble du profil de la commande sur l'intervalle $[0, T]$.

En substituant (1.15) dans elle-même avec décroissance de k , il vient :

$$\begin{aligned}
 u_{k+1}(0) &= \mu u_k(0) + \eta e_k(0) \\
 &= \mu^2 u_{k-1}(0) + \mu \eta e_{k-1}(0) + \eta e_k(0) \\
 &= \dots \\
 &= \mu^{k+1} u_0(0) + \eta \sum_{j=0}^k \mu^{k-j} e_j(0)
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Comme, la commande initiale $u_0(t)$ est pratiquement toujours choisie bornée, donc $\mu^{k+1} u_0(0) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$ et par conséquent de la relation (1.16), si $k \rightarrow \infty$ on a :

$$|u_{k+1}(0)| \leq \eta \sum_{j=0}^k \mu^{k-j} |e_j(0)| \leq \mu \varepsilon \frac{1 - \mu^{k+1}}{1 - \mu} \tag{2.17}$$

qui est évidemment toujours fini si $\mu \in]0,1[$.

1.7. Analyse des performances

La CAI permet de réaliser la poursuite parfaite dans un intervalle de temps fini, donc d'atteindre les performances souhaitées dans le domaine temporel. Toutefois, elle peut avoir un autre comportement selon l'axe des itérations. Il est bien connu qu'une séquence convergente peut produire une réponse inacceptable.

Du domaine de la commande classique, on sait que les performances sont évaluées en termes de temps de stabilisation, dépassement, fréquence d'oscillations, etc. De même dans le domaine de la CAI, il est nécessaire d'évaluer les performances de la commande. Pour une procédure d'itération, on doit évaluer ces performances en termes de la vitesse de convergence, de l'erreur maximale de poursuite et de l'intervalle maximal de la convergence monotone. D'une manière générale, il est très difficile d'évaluer le comportement d'un processus non-linéaire, et il l'est encore beaucoup plus pour la CAI où l'on doit évaluer les performances par rapport à l'axe du temps et par rapport à celui des itérations.

1.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques concepts et méthodes de base relatifs à la commande par apprentissage itératif, en répondant tout d'abord et intuitivement à quelques questions de base à savoir : la raison du recours à la CAI et en quoi consiste une CAI. Ensuite pour les systèmes ayant un fonctionnement répétitif, nous avons formulé la base théorique de cette approche par la CAI où nous avons explicité le cas des lois du type P et du type D. Ensuite, nous avons présenté les conditions indispensables à la stabilité et l'applicabilité de cette approche de commande à savoir les conditions de continuité globale de Lipchitz et la condition d'initialisation identique pour la CAI linéaire.

Par ailleurs, les méthodes de la CAI offrent deux degrés de liberté, l'un dans le domaine du temps et l'autre dans le domaine des itérations. Malgré la forme générale du système non-linéaire considéré (1.1), la formulation des lois de la CAI classique pour cette classe de systèmes reste extrêmement simple par rapport aux lois de commande obtenues par d'autres approches. De plus, ces dernières lois de commande sont incapables d'exploiter les connaissances dynamiques du système considéré, ce qui peut conduire à un manque de robustesse dans le domaine du temps.

Afin d'augmenter la robustesse des schémas de la CAI, une approche de la CAI, dite CAI adaptative, a été développée en combinant la commande adaptative et la CAI classique. Ainsi, bien que la condition de continuité globale de Lipchitz et celle d'initialisation identique soient relaxées, il n'y a aucune garantie que les performances dans le domaine des itérations puissent être améliorées. En outre, la procédure de la CAI adaptative fait l'objet de notre travail de recherche dans le cadre de cette thèse et une brève synthèse bibliographique lui est entièrement consacrée au chapitre 2.

Etude bibliographique et position du problème

2.1. Introduction

Notre thème de travail concerne la CAI adaptative des systèmes non-linéaires. Afin de placer notre thématique parmi les travaux proposés récemment dans le domaine, nous entamons ce chapitre par une étude succincte des travaux consacrés à la CAI adaptative des systèmes non-linéaires. De plus, pour les besoins du développement de nos approches dans les chapitres qui vont suivre, nous présentons d'une part la position du problème traité dans le cadre de ce travail de thèse et d'autre part nous mettons en évidence notre apport de recherche.

2.2. Synthèse des travaux relatifs à la CAI adaptative

Il est bien établi que l'application de la méthode de CAI classique souffre d'un certain nombre de problèmes à savoir : la condition de continuité globale de Lipchitz, la condition d'initialisation identique, et le manque de robustesse dans le domaine du temps. De plus, la synthèse de la commande n'exploite pas les connaissances disponibles sur le système [19]. Afin de surmonter ces problèmes, l'approche de la CAI adaptative a été développée [18]-[23] en se basant principalement sur les méthodes de la commande adaptative classique et la stabilité au sens de Lyapunov. Cette nouvelle méthode de synthèse fournit donc des outils puissants pour manipuler les systèmes non-linéaires complexes qui étaient difficiles à commander en utilisant l'approche classique. Pour la synthèse de la CAI adaptative, les paramètres de commande sont ajustés entre les itérations successives au lieu de la commande elle-même. L'ajustement des

paramètres de commandes peut être exécuté en fonction des itérations [19][20], en fonction du temps [18][19][23] ou encore, en combinant les deux [19][21][22].

Par ailleurs, l'approche par la CAI adaptative est utilisée pour commander les systèmes dynamiques qui présentent des incertitudes paramétriques qu'elles soient linéairement ou non-linéairement paramétrées. En outre, les incertitudes non paramétriques sont apparentées au cas des systèmes où les fonctions non-linéaires sont complètement inconnues ou partiellement connues. Pour manipuler ce dernier type d'incertitudes, il faut utiliser les techniques de la commande robuste [26][50]-[52]. De plus, puisque l'approche par la CAI adaptative s'intègre facilement à d'autres approches de commande, les recherches se sont donc orientées vers l'application de ces lois de commande sur une variété de classes de systèmes non-linéaires. Parmi lesquelles, on trouve les systèmes non-linéaires triangulaires affines et non affines en la commande et les systèmes non-linéaires triangulaires soumis à une saturation en entrée. La généralisation de la CAI adaptative, aux systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande, est directe [18][19]. Par contre, elle est relativement plus difficile pour le cas des systèmes non-linéaires triangulaires non affines en la commande. En effet, nous avons trouvé, via notre recherche bibliographique, une seule étude où, les systèmes flous sont mis en contribution [53], qui traite de ces systèmes. Par ailleurs, il est important de signaler que peu de travaux ont été consacrés aux systèmes non-linéaires présentant une saturation en entrée [54][55] de plus, il n'y a aucun résultat relatif à la CAI adaptative pour les systèmes non-linéaires triangulaires soumis à une saturation en entrée.

En premier lieu, nous présentons brièvement quelques méthodes de synthèse (les plus pertinentes) issues des travaux récents de recherche et qui sont exploitées dans le cas de la CAI adaptative et en second lieu la procédure utilisée lorsque le modèle du système est triangulaire inférieure.

Il convient de rappeler que la méthode de synthèse la plus utilisée dans le domaine de la CAI adaptative fait appel à la fonctionnelle de Lyapunov aussi, il nous a paru tout à fait naturel de lui consacrer un bref rappel dans le cadre de cette synthèse des travaux bibliographiques.

2.2.1. Synthèse par la fonctionnelle de Lyapunov

Une méthode efficace et couramment utilisée pour la synthèse des lois de CAI est la fonctionnelle de Lyapunov. Pour expliquer le principe de la méthode, on considère la classe des systèmes non-linéaires caractérisés par une entrée u , un vecteur d'état x et par une sortie y tels que : $u \in \mathcal{R}$, $x \in \mathcal{R}^n$ et $y \in \mathcal{R}$. Cette classe de systèmes s'écrit sous la forme générale :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

Pour concevoir une loi de commande par la méthode de Lyapunov classique, il faut trouver une fonction scalaire définie positive $V(x)$ et une loi de commande $u(x)$ de telle sorte que

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq -Y(x) \quad (2.2)$$

où $Y(x)$ est une fonction définie non-négative. L'existence d'une telle fonction $V(x)$, satisfaisant l'équation (2.2) sous la loi de commande stabilisante $u(x)$, assure la convergence asymptotique de x vers zéro. Un exemple simple de la fonction de Lyapunov est la fonction quadratique $V(x) = \frac{1}{2} x^T x$.

Ainsi, une fonction de Lyapunov quadratique, bien appropriée à la synthèse des lois de commande adaptative, est de la forme suivante :

$$V(x, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (2.3)$$

où $\tilde{\theta}$ est l'erreur d'estimation paramétrique. La théorie avancée de la stabilité, comme par exemple le lemme de Barbalat, est utilisé pour assurer la convergence asymptotique de x dans le cas où $\dot{V}(x, \tilde{\theta}) \leq -Y(x)$, qui est donc seulement semi-définie négative dans l'espace augmenté (x, θ) [56].

La méthode de Lyapunov a pu être étendue à l'analyse et à la synthèse des lois de la CAI. L'objectif est donc d'utiliser entièrement les connaissances des non-linéarités du système dans la synthèse de commande, comme pour la commande adaptative et la commande robuste des systèmes non-linéaires incertains. Toutefois, il existe une différence fondamentale entre la CAI et les autres techniques de commande, à savoir une tâche de la CAI doit être terminée en un intervalle de temps fini. La convergence temporelle asymptotique est impropre pour la CAI du fait que celle-ci n'admet pas de régime permanent, en d'autres termes le fonctionnement de la CAI sur un intervalle de temps fini peut être en régime transitoire.

La fonctionnelle de Lyapunov, permettant la synthèse et l'analyse de la CAI, peut être définie de différentes façons. Une forme simple de cette fonctionnelle est celle quadratique donnée par :

$$V(x, z) = \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} \int_0^t z^T z d\tau \quad (2.4)$$

où x représente généralement les états du systèmes, les erreurs ou les erreurs étendues. Dans les cas paramétrés, la variable z peut être remplacée par $\tilde{\theta}$, l'erreur d'estimation paramétrique [57]. Dans le cas non paramétré, z peut être remplacée par l'erreur d'estimation des fonctions non linéaires inconnues [26], ou par l'erreur d'estimation du profil de commande [54].

Il convient de noter que l'analyse, par la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov, d'une loi de la CAI adaptative s'effectue principalement en trois étapes. La première étape a pour but d'établir la bornitude de $V_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. La deuxième étape consiste à montrer que $V_k(t)$ est une séquence décroissante de k et donc bornée en raison de la bornitude de $V_0(t)$. Enfin à la troisième étape, il est montré que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0, \forall t \in [0, T]$.

2.2.2. CAI adaptative

Dans cette section, nous allons montrer comment étendre la procédure de commande adaptative au cas des systèmes répétitifs. En fait, nous présentons les lois d'adaptation par apprentissage itératif constituant la base de la CAI adaptative, ainsi que l'analyse de stabilité et de convergence de ces schémas en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov. Pour cela, nous considérons le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), u_k(t), \theta, t) \\ y_k(t) = h(x_k(t), t) \end{cases} \quad (2.5)$$

où $x_k \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état (pouvant représenter la dynamique de l'erreur), $u_k \in \mathcal{R}$ et $y_k \in \mathcal{R}$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système, $\theta \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur des paramètres inconnus, $f(x_k, u_k, \theta, t) : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}^p \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}^n$ est une fonction non-linéaire bornée sur $[0, T]$ si x_k et u_k sont également bornées sur le même intervalle $[0, T]$ de plus, $h(x_k, t) : \mathcal{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$ est une fonction non-linéaire bornée sur $[0, T]$ si x_k est bornée sur $[0, T]$.

Nous supposons d'une part qu'il est possible de synthétiser une loi de commande adaptative de la forme suivante :

$$u_k(t) = g(x_k, \hat{\theta}_k, t) \quad (2.6)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_k(t) = \pi(x_k, t) \quad (2.7)$$

Et d'autre part, qu'il existe une fonction définie positive de la forme suivante:

$$V(x_k, \tilde{\theta}_k) = \frac{1}{2} x_k^T x_k + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \quad (2.8)$$

Tel que :

$$\dot{V}(x_k, \tilde{\theta}_k) = x_k^T \dot{x}_k - \tilde{\theta}_k^T \dot{\hat{\theta}}_k \leq -cx_k^T x_k + \tilde{\theta}_k^T \pi(x_k, t) - \tilde{\theta}_k^T \dot{\hat{\theta}}_k = -cx_k^T x_k \quad (2.9)$$

où c est une constante positive et $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$ représente l'erreur d'estimation paramétrique. De plus, nous supposons que la fonction $\pi(x_k, t)$ est bornée sur $[0, T]$ si x_k l'est aussi.

Dans les sections qui vont suivre, nous allons déterminer les lois de commande adaptative (2.6) et (2.7) pour assurer la commande d'un système répétitif de la forme (2.5).

2.2.2.1. CAI adaptative de type 1

Lorsque le vecteur des paramètres inconnus θ est un vecteur constant et la tâche de poursuite est répétée sur un intervalle de temps finie $[0, T]$ au lieu de $[0, \infty[$. L'application de la loi d'adaptation (2.7) ne peut pas garantir la convergence de l'erreur de poursuite. En effet, la répétition de la même commande pour le même système produit les mêmes performances. Voyons comment la CAI adaptative pourra résoudre ce problème. Ici l'idée est directe ; en effet, elle consiste à estimer continuellement les paramètres inconnus tout le long de l'axe du temps lorsque la tâche de poursuite est répétitive, c'est-à-dire, qu'il faut lier les itérations successives par la condition suivante:

$$\hat{\theta}_{k+1}(0) = \hat{\theta}_k(T) \quad (2.10)$$

Il est à noter que la loi d'adaptation paramétrique (2.7) sous la condition (2.10), est un mécanisme d'adaptation agissant uniquement dans le domaine du temps.

Théorème 2.1 [18]: Si le système (2.5) est soumis à la loi de commande (2.6) incorporant la loi d'adaptation (2.7) sous la condition (2.10), par conséquent, la relation suivante est vérifiée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T(t) x_k(t) dt = 0 \quad (2.11)$$

Preuve [18]: La démonstration est effectuée en s'appuyant sur la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x_k, \tilde{\theta}_k) = \frac{1}{2} x_k^T x_k + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \quad (2.12)$$

La dérivée temporelle de celle-ci, en considérant (2.6)-(2.9), est donnée par :

$$\dot{V}(x_k, \tilde{\theta}_k) \leq -cx_k^T x_k \quad (2.13)$$

Puisque $t \in [0, T]$, on ne peut pas garantir la convergence asymptotique comme dans le cas de la commande adaptative. Il est à noter qu'à l'itération initiale $k = 0$ et si $x_k(0) = 0$, il n'y a donc aucun apprentissage et la commande appliquée est la commande adaptative pure, donc $x_k(t)$ et $\tilde{\theta}_k(t)$ sont bornée pour tout $t \in [0, T]$. Maintenant, on intègre la dérivée de $V_k(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ et, on utilise le fait que $|x_k(0)| = 0$ et $0 \leq |x_k(T)|$.

$$\begin{aligned} V(x_k(0), \tilde{\theta}_k(t)) &\leq V(x_k(T), \tilde{\theta}_k(T)) \\ &= V(x_k(0), \tilde{\theta}_k(0)) + \int_0^T \dot{V}(x_k(t), \tilde{\theta}_k(t)) dt \\ &\leq V(x_k(0), \tilde{\theta}_{k-1}(T)) - c \int_0^T x_k^T(t) x_k(t) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

De même, on a

$$V(x_k(0), \tilde{\theta}_{k-1}(t)) \leq V(x_k(0), \tilde{\theta}_{k-2}(T)) - c \int_0^T x_{k-1}^T(t) x_{k-1}(t) dt \quad (2.15)$$

La répétition de l'opération k fois conduit à la relation suivante :

$$V(x_k(0), \tilde{\theta}_k(t)) \leq V(x_k(0), \tilde{\theta}_0(T)) - c \sum_{j=1}^k \int_0^T x_j^T(t) x_j(t) dt \quad (2.16)$$

En considérant la limite de (4.16), il en résulte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(x_k(0), \tilde{\theta}_k(t)) \leq V(x_k(0), \tilde{\theta}_0(T)) - \lim_{k \rightarrow \infty} c \sum_{j=1}^k \int_0^T x_j^T(t) x_j(t) dt \quad (2.17)$$

Puisque $V(x_k(0), \tilde{\theta}_k(t))$ et $V(x_k(0), \tilde{\theta}_0(T))$ sont bornées, on peut conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau$ est convergente. D'où, $\int_0^T c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau$ converge asymptotiquement vers zéro suivant l'axe des itérations $\forall t \in [0, T]$, i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T(t) x_k(t) dt = 0 \quad (2.18)$$

2.2.2.2. CAI adaptative de type 2

Dans la section précédente et dans la condition où les inconnus sont des paramètres invariants, nous avons pu utiliser directement la fonction de Lyapunov pour la synthèse et l'analyse des lois de la CAI adaptative. Mais, lorsque les inconnus sont des paramètres variables dans le temps, la loi d'adaptation paramétrique (2.7) sous la condition (2.10) est inappropriée du

fait que, la loi d'adaptation paramétrique habituelle (2.7) est inapte à traiter le cas où les paramètres sont variables dans le temps. Cependant, pour la CAI adaptative, $\theta(t)$ est invariant en fonction des itérations, c'est à dire, pour tout instant $t \in [0, T]$, le terme $\theta(t)$ est considéré comme une constante dans le domaine des itérations. La solution est donc d'utiliser un mécanisme opérant uniquement dans le domaine des itérations pour estimer les paramètres inconnus. Cela conduit à une nouvelle loi d'adaptation par apprentissage itératif représentée par :

$$\hat{\theta}_{k+1}(t) = \hat{\theta}_k(t) + \pi(x_k(t), t), \text{ avec } \hat{\theta}_{-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (2.19)$$

Théorème 2.2 [19]: Si le système (2.5) est en boucle fermée avec la commande (2.6) incorporant la loi d'adaptation paramétrique (2.19), par conséquent on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T(t) x_k(t) dt = 0 \quad (2.20)$$

Preuve [19]: Puisque $\theta(t)$ est une variable temporelle, la fonction de Lyapunov traditionnelle est inappropriée dans ce cas. Pour faciliter l'analyse, on utilise donc la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$W(x_k, \tilde{\theta}_k) = \frac{1}{2} x_k^T x_k + \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k dt \quad (2.21)$$

Etape 1 : Bornitude de $W_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$

La dérivé temporelle de $W_k(t)$, en considérant (2.9) et (2.19), peut être déterminée par :

$$\begin{aligned} \dot{W}_k(t) &= -c x_k^T x_k + \pi(x_k, t) \tilde{\theta}_k + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &\leq (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}) \tilde{\theta}_k + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &= ((\theta - \hat{\theta}_{k-1}) - (\theta - \hat{\theta}_k)) \tilde{\theta}_k + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &= (\tilde{\theta}_{k-1} - \tilde{\theta}_k) \tilde{\theta}_k + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &= \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_k - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &\leq \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Comme $\hat{\theta}_{-1} = 0$ et donc que $\hat{\theta}_0(t) = \pi(x_0(t), t)$ par conséquent, il est clair que $\hat{\theta}_0(t)$ est borné si $x_0(t)$ l'est aussi. Donc, à partir de (2.22), $W_0(t)$ est bornée $\forall t \in [0, T]$.

Etape 2 : Bornitude de $W_k(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

La différence entre $W_k(t)$ et $W_{k-1}(t)$ peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta W_k(t) &= W_k(t) - W_{k-1}(t) \\
&= \frac{1}{2} x_k^T(t) x_k(t) - \frac{1}{2} x_{k-1}^T(t) x_{k-1}(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\tilde{\theta}_k^T(\tau) \tilde{\theta}_k(\tau) - \tilde{\theta}_{k-1}^T(\tau) \tilde{\theta}_{k-1}(\tau) \right) d\tau \\
&= \frac{1}{2} x_k^T(t) x_k(t) - \frac{1}{2} x_{k-1}^T(t) x_{k-1}(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \left((\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k)^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k) - 2(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k)^T \tilde{\theta}_k \right) dt
\end{aligned} \tag{2.23}$$

En remplaçant $\frac{1}{2} x_k^T x_k$ par sa forme intégrale dans la relation (2.23) de plus en exploitant (2.9) et (2.19), la relation (2.23) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\Delta W_k(t) &\leq \frac{1}{2} x_k^T(0) x_k(0) - \frac{1}{2} x_{k-1}^T(t) x_{k-1}(t) - \int_0^t (c x_k^T(\tau) x_k(\tau) - \pi(x_k(\tau), \tau) \tilde{\theta}_k) d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \left((\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k)^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k) - 2(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k)^T \tilde{\theta}_k \right) d\tau \\
&= \frac{1}{2} x_k^T(0) x_k(0) - \frac{1}{2} x_{k-1}^T(t) x_{k-1}(t) - c \int_0^t x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k)^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k) d\tau \\
&\leq \frac{1}{2} x_k^T(0) x_k(0) - \frac{1}{2} x_{k-1}^T(t) x_{k-1}(t) - c \int_0^t x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Du fait que $x_k(0) = x_{k-1}(T)$, l'inégalité (2.24) devient

$$\Delta W_k(T) \leq -c \int_0^T x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau < 0 \tag{2.25}$$

La relation (2.25) implique que $W_k(T)$ est borné $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $W_0(T)$ est bornée.

Etape 3 : Convergence de l'erreur de poursuite

A partir de (2.25), on peut directement tirer la relation suivante

$$W_k(T) \leq W_0(T) - \sum_{j=1}^k \int_0^T c x_j^T(\tau) x_j(\tau) d\tau \tag{2.26}$$

En considérant la limite de (2.26), il en résulte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(T) \leq W_0(T) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_0^T c x_j^T(\tau) x_j(\tau) d\tau \quad (2.27)$$

Puisque $W_k(T)$ est bornée, on peut conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau$ est convergente. D'où, $\int_0^T c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau$ converge asymptotiquement vers zéro suivant l'axe des itérations $\forall t \in [0, T]$, i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau = 0 \quad (2.28)$$

2.2.2.3. CAI Adaptative de Type 3

D'une manière générale, la loi d'adaptation par apprentissage itératif (2.19) n'est pas aussi lisse que celle (2.7). Dans la loi d'adaptation par apprentissage itératif (2.7), l'estimation paramétrique est proportionnelle à l'intégration du terme $\pi(x_k, t)$, alors que dans la loi d'adaptation par apprentissage itératif (2.19), l'estimation paramétrique est directement proportionnelle au terme $\pi(x_k, t)$. Dans [19] et [22], les auteurs proposent une loi d'adaptation par apprentissage itératif hybride combinant les deux lois précédentes (2.7) et (2.19) comme suit:

$$(1 - \gamma) \dot{\hat{\theta}}_k(t) = -\gamma \hat{\theta}_k(t) + \gamma \hat{\theta}_{k-1}(t) + \pi(x_k(t), t), \text{ avec } \hat{\theta}_{-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (2.29)$$

où $\gamma \in]0, 1[$ est un paramètre de pondération.

Il est clair que la loi d'adaptation paramétrique donnée par (2.29), est un mécanisme d'adaptation hybride combinant le domaine du temps et celui des itérations via le paramètre de pondération $\gamma \in]0, 1[$. En outre, si $\gamma = 0$, la loi d'adaptation est active uniquement dans le domaine du temps similaire à celle (2.7), et si $\gamma = 1$, la loi d'adaptation est active uniquement dans le domaine des itérations similaire à celle (2.19).

Cependant, une question demeure posée relative à la sélection d'une valeur appropriée pour le gain de pondération γ dans (2.29). Ce dernier doit réaliser un compromis entre la loi d'adaptation (2.7) et celle (2.19). Une suggestion serait de choisir γ proche de l'unité si les paramètres sont dominés par des facteurs variant dans le temps ou proche de zéro si ces paramètres sont des variables temporelles lentes.

Théorème 2.3 [19]: Si le système (2.5) est sous la conduite de la loi de commande (2.6) incorporant la loi d'adaptation paramétrique (2.29) et sous la condition (2.10), par conséquent on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T(t) x_k(t) dt = 0 \quad (2.30)$$

Preuve [19]: Pour apporter la preuve du *Théorème 2.2*, nous considérons la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$W(x_k, \tilde{\theta}_k) = V_k(t) + \frac{\gamma}{2} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau) \tilde{\theta}_k(\tau) d\tau \quad (2.31)$$

Avec $V_k(t) = \frac{1}{2} x_k^T x_k + \frac{1-\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k$.

Etape 1 : Bornitude de $W_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$

La dérivé temporelle de $W_k(t)$, en considérant (2.9) et (2.29), peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \dot{W}_k(t) &\leq -c x_k^T x_k + \pi(x_k, t) \tilde{\theta}_k - (1-\gamma) \tilde{\theta}_k^T \dot{\tilde{\theta}}_k + \frac{\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &\leq \tilde{\theta}_k^T (\gamma \hat{\theta}_k - \gamma \hat{\theta}_{k-1}) + \frac{\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &= \tilde{\theta}_k^T (\gamma(\theta - \hat{\theta}_{k-1}) - \gamma(\theta - \hat{\theta}_k)) \tilde{\theta}_k + \frac{\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &= \tilde{\theta}_k^T (\gamma \tilde{\theta}_{k-1} - \gamma \tilde{\theta}_k) + \frac{\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &= \gamma \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_{k-1} - \frac{\gamma}{2} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k \\ &\leq \frac{\gamma}{2} \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

où une version simplifiée de l'inégalité de Yong a été utilisée (i.e., $2ab = a^2 + b^2$). Du fait que $\hat{\theta}_{-1}(t) = 0$ et $\hat{\theta}_0(0) = \hat{\theta}_{-1}(T)$, il est clair que $W_0(t)$ est bornée. Par conséquent, $x_0(t)$ et $\tilde{\theta}_0(t)$ sont à leur tour bornés $\forall t \in [0, T]$.

Etape 2 : Bornitude de $W_k(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{N}_+$

La différence entre W_k et W_{k-1} peut être développée telle que :

$$\begin{aligned} \Delta W_k(t) &= V_k(t) - V_{k-1}(t) + \frac{\gamma}{2} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^T(\tau) \tilde{\theta}_k(\tau) - \tilde{\theta}_{k-1}^T(\tau) \tilde{\theta}_{k-1}(\tau)) d\tau \\ &= V_k(t) - V_{k-1}(t) - \gamma \int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau) (\hat{\theta}_k(\tau) - \hat{\theta}_{k-1}(\tau)) d\tau \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^T(\tau) \tilde{\theta}_k(\tau) - \tilde{\theta}_{k-1}^T(\tau) \tilde{\theta}_{k-1}(\tau))^2 d\tau \end{aligned} \quad (2.33)$$

En substituant $V_k(t)$ par sa forme intégrale dans la dernière relation de (2.33), celle-ci devient :

$$\Delta W_k(t) = V_k(0) - V_{k-1}(t) + \int_0^t \dot{V}_k(\tau) d\tau - \gamma \int_0^t \tilde{\theta}_k^T(\tau) (\hat{\theta}_k(\tau) - \hat{\theta}_{k-1}(\tau)) d\tau$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\tilde{\theta}_k(\tau) - \tilde{\theta}_{k-1}(\tau) \right)^T \left(\tilde{\theta}_k(\tau) - \tilde{\theta}_{k-1}(\tau) \right) d\tau \quad (2.34)$$

La relation (2.34), en compte tenu de (2.9) et (2.29), devient

$$\Delta W_k(t) \leq V_k(0) - V_{k-1}(t) - \int_0^t c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

Du fait que $V_k(0) = V_{k-1}(T)$, la relation (2.35) devient :

$$\Delta W_k(T) \leq - \int_0^T c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau \leq 0 \quad (2.36)$$

Comme $W_0(T)$ est bornée à cause de la bornitude de $W_0(t)$ sur $[0, T]$, il s'en suit que $W_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ ce qui implique que $V_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Etape 3 : Convergence de l'erreur de poursuite

A partir de (2.36), il est facile de montrer que

$$W_k(T) = W_0(T) + \sum_{j=1}^k \Delta W_j(T) \leq W_0(T) - \sum_{j=1}^k \int_0^T c x_j^T(\tau) x_j(\tau) d\tau \quad (2.37)$$

En considérant la limite de (4.37), il en résulte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(T) \leq W_0(T) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_0^T c x_j^T(\tau) x_j(\tau) d\tau \quad (2.38)$$

Puisque $W_k(T)$ est bornées, on peut conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau$ est convergente. D'où, $\int_0^T c x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau$ converge asymptotiquement vers zéro suivant l'axe des itérations $\forall t \in [0, T]$, i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T x_k^T(\tau) x_k(\tau) d\tau = 0 \quad (2.39)$$

Pour les trois lois d'adaptation par apprentissage itératif étudiées précédemment, la sélection du gain d'apprentissage Γ est liée aux performances de commande. Par ailleurs, la relation entre le gain d'apprentissage et les performances de commande est fortement non linéaire et non disponible analytiquement. Dans la plupart des travaux, effectués jusqu'à présent, le gain d'apprentissage est choisi heuristiquement. Cela est similaire à la commande adaptative, où l'ajustement du gain d'adaptation reste encore un problème ouvert. La CAI adaptative est une combinaison de la CAI et de la commande adaptative, par conséquent l'ajustement du gain

d'apprentissage pourrait être plus compliqué que pour la commande adaptative. En général, l'augmentation du gain d'apprentissage peut accélérer le processus d'apprentissage.

De plus, l'étude présentée ci-dessus pour les trois types de lois d'adaptations est une formulation du problème dans sa généralité. Cependant pour les systèmes fonctionnant d'une manière répétitive, la CAI adaptative peut facilement s'intégrer à d'autres méthodes de commande comme la commande robuste, le backstepping, ...etc [26][53][58].

2.2.3. Condition d'initialisation identique dans la CAI adaptative

Dans la conception et l'exécution de la CAI adaptative, l'information sur les états du système est incorporée. De ce point de vue, la CAI adaptative est en mesure de relaxer la condition d'initialisation identique.

Nous considérons les cinq types de condition d'initialisation suivants (exprimés en fonction de la fonction de Lyapunov V_k avec $V_k = \frac{1}{2}x_k^T x_k$) [59] :

- (a) $V_k(0) = 0$
- (b) $\sum_{i=1}^{\infty} V_k^2(0) = \varepsilon$ où ε est une constante.
- (c) $V_k(0) = \varepsilon \neq 0$ où ε est une constante.
- (d) $V_k(0)$ est aléatoire et bornée par une constante ε .
- (e) $V_k(0) = V_{k-1}(T)$.

La condition (a) est la condition d'initialisation identique idéale, qui est largement admise dans la plupart des schémas de la CAI. La condition (b) est la condition d'initialisation identique progressive, qui implique que la séquence $\{V_k^2(0)\}$ appartient à \mathcal{L}_2 , où $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k(0) = 0$. La condition (c) est le décalage fixe de la condition (a) et, les conditions (a)-(c) sont des cas spéciaux de la condition (d). La condition (e) est la condition d'alignement, qui est différente des autres conditions d'initialisation.

La condition d'initialisation identique dans la CAI implique généralement la réinitialisation temporelle et la réinitialisation spatiale. Bien que la réinitialisation temporelle soit naturelle pour une tâche qui doit être achevée et répétée en une période fini, la réinitialisation spatiale n'est pas une tâche facile. De ce fait, la condition de réinitialisation spatiale pose donc des difficultés de mise en œuvre supplémentaire. Dans un certain nombre d'applications pratiques, le système redémarre là où il s'est arrêté dans l'itération précédente. Par conséquent, la valeur finale de l'état à l'itération précédente devient la valeur initiale de l'état à l'itération

actuelle, $x_k(0) = x_{k-1}(T)$. Dans ce dernier cas, la condition d'alignement rend la condition de réinitialisation spatiale non nécessaire. Pour que la CAI opère sous la condition d'alignement, la trajectoire de référence doit être spatialement fermée (i.e : $y_r(0) = y_r(T)$).

Nous considérons encore la loi d'adaptation par apprentissage itératif (2.19). Donc, de la même fonctionnelle de Lyapunov (2.21) et, après considération de la limite de (2.24), on peut déduire l'inégalité suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(t) \leq W_0(t) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k V_j(0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k V_{j-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_0^T c V_j d\tau \quad (2.40)$$

L'inégalité (2.40) est vérifiée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. En remplaçant les cinq classes de conditions initiales dans (2.40), nous pouvons tirer les propriétés correspondantes relatives à la convergence d'erreur. Pour la condition (a) et (b), la fonction converge uniformément vers zéro lorsque k tend vers l'infini, c'est-à-dire,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k(t) = 0 \quad (2.41)$$

Pour les conditions (c) et (d), l'intégrale de la fonction converge vers un voisinage borné, c'est-à-dire,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T V_k(t) dt \leq \frac{\epsilon + \delta}{c} \quad (2.42)$$

où $\delta > 0$ est une constante arbitraire. Il est évident que la borne de la fonction peut être rendue suffisamment petite en utilisant un grand gain c . En utilisant la condition (e), l'intégrale de la fonction converge asymptotiquement vers zéro, c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T V_k(t) dt = 0 \quad (2.43)$$

Comme nous avons vu précédemment la CAI adaptative est utilisée dans le cas où les incertitudes du système peuvent être représentées par des paramètres inconnus qu'ils soient constants ou variables dans le temps. Par ailleurs, les fonctions non-linéaires incertaines non paramétriques présentent une autre classe d'incertitudes du système qui sont plus difficiles à traiter que les incertitudes paramétriques. L'utilisation de la loi d'adaptation par apprentissage (2.18) pour estimer $f(x_k)$ n'est pas appropriée car, $f(x_k)$ est une fonction dépendant de l'état du

système, c'est-à-dire dépendant de l'itération du fait que $x_k(t)$ varie d'une l'itération à l'autre. Donc, il est important de voir comment manipuler les incertitudes non paramétriques ou les fonctions inconnues ou partiellement connues. Cette importante question fait l'objet d'étude de la section suivante.

2.2.4. CAI robuste

Afin d'illustrer comment traiter les fonctions non-linéaires incertaines dans la synthèse des lois de CAI robuste, on considère le système suivant :

$$\dot{x}_k = u_k + f(x_k) \quad (2.44)$$

où $f(x_k)$ est une fonction non-linéaire inconnue localement Lipchitzienne. La seule information disponible a priori sur $f(x_k)$ est sa borne supérieure ou sa borne de variation.

- Norme bornée

$$\|f(x_k)\| \leq \rho(x_k)$$

- Variation à norme bornée

$$\|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \rho(x_k) \|x_k - x_{k-1}\|$$

- Norme bornée à coefficient inconnu

$$\|f(x_k)\| \leq \theta \rho(x_k)$$

où $\rho(x_k)$ est une fonction continue connue et bornée et, θ est un coefficient non négatif inconnu.

En premier lieu, nous nous concentrons sur le premier type d'incertitudes, c'est-à-dire, $\|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \rho(x_k) \|x_k - x_{k-1}\|$ où le terme $\rho(x_k)$ est une fonction connue et continuellement différentiable par rapport à x_k . Dans ce contexte, il y a lieu de signaler que la première étude, ayant abordée ce problème, se trouve dans [12] et [50]. Considérons une loi de la CAI robuste de la forme :

$$u_k = Proj(u_{k-1}) + (\bar{\rho}_k \kappa_k + 1) e_k \quad (2.45)$$

$$\text{où } \bar{\rho}_k = \sqrt{\dot{y}_r^2 + u_m} + \rho_k, \quad \kappa_k = \frac{\sqrt{e_k^2 + 3u_m^2 + 8u_m}}{(\sqrt{e_k^2 + 3u_m^2 + u_m})^2} \text{ et } Proj(a) = \begin{cases} a & |a| \leq u_m \\ u_m \text{sign}(a) & |a| > u_m \end{cases}$$

De plus, $u_m > 0$ est une borne de l'opérateur de projection satisfaisante $u_m \geq \sup_{t \in [0, T]} |u_d(t)|$ où $u_d(t)$ est le profil de la commande désirée. Dans la pratique, u_m est une contrainte physique du système ou une saturation virtuelle qui peut être assez grande mais finie.

Cette loi de la CAI robuste se compose de deux termes, l'un est le terme robuste et d'autre est le terme d'apprentissage. En effet, le terme robuste, $(\bar{\rho}_k \kappa_k + 1)e_k$, assure la bornitude de l'erreur de poursuite e_k et le terme d'apprentissage, $Proj(u_{k-1})$, assure la convergence de l'erreur de poursuite via les itérations.

Pour déduire la convergence d'apprentissage, on considère la fonctionnelle suivante :

$$W_k(t) = e^{-\lambda t} e_k^2(t) + \int_0^t e^{-\lambda \tau} \tilde{u}_k^2(\tau) d\tau \quad \text{où } \tilde{u}_k = u_d - u_k \quad (2.46)$$

où λ est un paramètre. La preuve de la stabilité et la convergence de la loi de la CAI robuste (2.44) est développée dans [12] et [50]. De ce fait, nous concluons que u_k converge vers u_d pour tout $t \in [0, T]$ et e_k converge uniformément vers zéros pour tout $t \in [0, T]$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

En deuxième lieu, nous considérons le deuxième type d'incertitudes, c'est-à-dire, $\|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \rho(x_k) \|x_k - x_{k-1}\|$ où $\rho(x_k)$ est une fonction connue et continuellement différentiable par rapport à x_k . Considérons la loi de CAI suivante [51]:

$$u_k(t) = \hat{u}_k(t) - \rho(x_k) e_k(t) \quad (2.47)$$

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_{k-1}(t) - \eta e_k(t), \quad \hat{u}_0(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.48)$$

L'équation (2.47) et celle (2.48) représente respectivement la loi de commande globale et la loi d'apprentissage où le paramètre $\eta > 0$ est un gain d'apprentissage. La loi de commande (2.47) se décompose en deux parties : le terme de la commande par apprentissage $\hat{u}_k(t)$ et le terme de la commande robuste $-\rho(x_k) e_k(t)$. Du fait que $\hat{u}_0(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et $\hat{u}_1(t) = -\eta e_1(t)$ par conséquent, la commande à la première itération est comme suit :

$$u_1(t) = -(\eta + \rho(x_k)) e_1(t) \quad (2.49)$$

Compte tenu de la relation entre le terme de la commande robuste et l'erreur de poursuite $e_k(t)$, l'effort de la commande de la partie robuste disparaîtra dès que $e_k(t) \rightarrow 0$. Ainsi, lorsque le nombre d'itérations augmente, u_k va être représenté d'une façon prépondérante par $\hat{u}_k(t)$.

La fonctionnelle suivante a été considérée pour l'analyse de stabilité et de convergence de la CAI robuste (2.47) et (2.48):

$$W_k(t) = \frac{1}{2} e_k^2(t) + \frac{1}{2\eta} \int_0^t \tilde{u}_k^2(\tau) d\tau, \tilde{u}_k = u_r - u_k \quad (2.50)$$

La preuve détaillée de la stabilité et la convergence de la CAI robuste (2.47) et (2.48) a été établie dans [51]. Ainsi, il a été conclu que si le système (2.44) est soumis à la loi de commande (2.47) et (2.48) sous la condition d'alignement, par conséquent, le terme $\int_0^t e_k(\tau) d\tau$ converge vers zéro pour tout $t \in [0, T]$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Récemment, la CAI robuste, des systèmes non-linéaires soumis à diverses incertitudes, est devenue un objet de recherche intensif dans le domaine de la commande [50]-[52]. Cependant, la synthèse des lois de la CAI robuste pour ce type de systèmes reste encore un problème ouvert. Par ailleurs, en raison de la difficulté à traiter directement les fonctions non-linéaires inconnues, des nouvelles lois de la CAI adaptative ont été proposées en ayant recours aux approximateurs universels basés sur les systèmes flous ou les réseaux de neurones [22] et [60].

En outre, les classes de systèmes non-linéaires, les plus fréquemment rencontrées dans la pratique, concernent celles des systèmes non-linéaires triangulaires affine et non affine en la commande. Pour ces classes de systèmes, la méthode de synthèse des lois de commandes, la plus courante et la plus efficace, est celle par backstepping.

2.2.5. CAI adaptative des systèmes non-linéaires triangulaires

En générale, la procédure de synthèse par backstepping est bien adaptée pour traiter les systèmes non-linéaires triangulaires. En outre, sur la base de la procédure de synthèse par backstepping, plusieurs schémas de CAI adaptative ont été développés pour les systèmes non-linéaires triangulaires [26], [48], [53], [58], [60], [61] et [62].

Nous considérons le problème de synthèse des lois de la CAI adaptative concernant en premier lieu les systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande et en second lieu ceux non affine en la commande.

2.2.5.1. CAI adaptative des systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande

Comme indiqué dans [18] et [19], la loi de CAI adaptative (2.6) incorporant une des lois d'adaptation par apprentissage itératif (2.7), (2.19) ou (2.29), peut être utilisée pour la commande des systèmes non-linéaires triangulaires affine en la commande. Pour cela, nous

considérons la classe de systèmes suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k} + \theta^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) \\ \dot{x}_{n,k} = u_k + \theta^T \psi_n(\bar{x}_{n,k}) \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (2.51)$$

où le vecteur $\bar{x}_{i,k}$ est défini tel que $\bar{x}_{i,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{i,k}]^T \in \mathcal{R}^i \times [0, T]$ avec $i = (1, n - 1)$ de plus, l'état du système est représenté à la $k^{\text{ième}}$ itération par le vecteur $\bar{x}_{n,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{n,k}]^T \in \mathcal{R}^n \times [0, T]$ où n dénote l'ordre du système. L'entrée et la sortie du système, à la $k^{\text{ième}}$ itération, sont respectivement définies par $u_k \in \mathcal{R}$ et $y_k \in \mathcal{R}$. Par ailleurs, le terme $\theta^T \psi_i(\bar{x}_{i,k})$, $i = (1, n)$ représente une fonction incertaine où $\theta \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur des paramètres inconnus et $\psi_i(\bar{x}_{i,k}): \mathcal{R}^i \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}^p$, $i = (1, n)$ est un vecteur de fonctions non-linéaires connues et continues.

Selon la loi d'adaptation par apprentissage itératif que nous allons utiliser, trois schémas de la CAI adaptative peuvent être conçues pour ce problème de commande [18] et [19]. Dans [18], une fonction de Lyapunov est utilisée pour prouver la stabilité et la convergence de la CAI adaptative (2.53) avec la loi d'adaptation par apprentissage itératif (2.54) sous la condition (2.10). Sur la base d'une fonctionnelle de Lyapunov, une preuve complète de la stabilité et de la convergence est donnée dans [19] pour la loi de la CAI adaptative (2.53) dotée de la loi d'adaptation par apprentissage itératif (2.55) et celle (2.56) sous la condition (2.10). Donc, le recours à la procédure de synthèse par backstepping [28] permet d'établir les lois virtuelles suivantes de la CAI adaptative:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k} = & -c_i z_{i,k} - z_{i-1,k} - w_{i,k}^T \hat{\theta}_k + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \alpha_{j-1,k}}{\partial x_{j,k}} x_{j+1,k} + \frac{\partial \alpha_{j-1,k}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j-1)} \right) - \kappa_i |w_{i,k}|^2 \\ & + \frac{\partial \alpha_{i-1,k}}{\partial \hat{\theta}_k} \Gamma \tau_{i,k} + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,k}}{\partial \hat{\theta}_{j,k}} \Gamma w_{i,k} z_{i,k} \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec

$$z_{i,k} = x_{i,k} - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1,k}, \quad \tau_{i,k} = \tau_{i-1,k} + w_{i,k} z_{i,k} \text{ et } w_{i,k} = \psi_i(\bar{x}_{i,k}) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,k}}{\partial x_{j,k}} \psi_i(\bar{x}_{i,k}).$$

Les constantes $c_i > 0$ sont des paramètres de conception et par commodité de notation, nous avons utilisés $x_{n+1,k} = u_k$ et $\alpha_{0,k} = 0$. La CAI adaptative est prise donc de la forme suivante :

$$u_k = \alpha_{n,k} + y_r^{(n)} \quad (2.53)$$

et la loi d'adaptation par apprentissage itératif peut prendre l'une des formes présentées en (2.7), (2.19) ou (2.29) telle que :

- Type 1

$$\dot{\hat{\theta}}_k = \Gamma \tau_{n,k}, \hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T) \quad (2.54)$$

- Type 2

$$\hat{\theta}_k(t) = \hat{\theta}_{k-1}(t) + \Gamma \tau_{n,k}, \hat{\theta}_{-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (2.55)$$

- Type 3

$$(1 - \gamma) \dot{\hat{\theta}}_k = -\gamma \hat{\theta}_k(t) + \gamma \hat{\theta}_{k-1}(t) + \Gamma \tau_{n,k}, \hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T), \hat{\theta}_{-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (2.56)$$

Ensuite, sur la base de la procédure de synthèse par backstepping, plusieurs schémas de la CAI adaptative ont été développés pour les systèmes non-linéaires triangulaires inférieurs et affines en la commande [58] et [61]. Dans [58], un schéma de CAI adaptative est présenté pour une classe de systèmes non-linéaires triangulaire incertains avec une direction de commande inconnue pour résoudre le problème de poursuite parfaite pendant un intervalle de temps fixe, des trajectoires non uniformes. Afin de résoudre encore le problème de poursuite de trajectoire non uniforme sur un intervalle de temps fini, un autre schéma de CAI adaptative est présenté dans [61] pour une classe de systèmes non linéaires triangulaires incertains.

Par ailleurs, la technique de backstepping souffre du problème de la dérivation temporelle des commandes virtuelles [37]. En effet, l'implémentation de la commande, conçue par la technique de backstepping, voit sa complexité augmenter avec l'ordre du système. Cette complexité croissante est causée par les dérivations répétées des commandes virtuelles et conduit inévitablement à un algorithme compliqué ayant une lourde charge de calcul. De ce fait, la procédure de synthèse par backstepping filtré est proposée afin de soulager le problème de l'explosion de la complexité. En effet, la méthode consiste à introduire des filtres passe-bas à chaque étape de la procédure conventionnelle de synthèse par backstepping pour approximer les commandes virtuelles [38]. De plus, pour la procédure conventionnelle de synthèse par backstepping et afin d'éviter le recours au calcul des dérivées analytiques des commandes virtuelles, plusieurs schémas de commande ont été développés [39], [58] et [26]. Parmi ces schémas de commande, on trouve ceux qui sont synthétisés en introduisant des filtres linéaires passe-bas du premier ordre comme dans [39]. Par contre en [63], des filtres du second ordre ont été introduits pour éviter le problème de dérivation analytique des commandes virtuelles. En [26], des filtres non-linéaires ont été adoptés pour synthétiser une loi de commande par backstepping pour les systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande et complètement connus.

2.2.5.2. CAI adaptative des systèmes non-linéaires triangulaire non affine en la commande

Dans la pratique, beaucoup de systèmes non-linéaires sont par nature non affines en la commande, on peut citer entre autres: certains processus chimiques et biochimiques [28][64], systèmes mécaniques [65], et systèmes aéronautiques [66], ...etc. Cependant, les résultats fondamentaux relatifs à la commande des systèmes affines en la commande ne peuvent pas être appliqués directement aux systèmes non affines en la commande. La synthèse de la commande pour ces systèmes est généralement plus difficile et compliqué. Afin de prendre en considération la structure non affine du modèle, deux approches sont généralement employées pendant la conception de la commande. *La première approche* se base sur la transformation du modèle original non affine en la commande en un nouveau modèle ayant une forme affine. En fait, il y a trois façons pour réaliser cette transformation, à savoir: 1) L'utilisation de développement en série de Taylor [67]. 2) L'emploi du théorème de la valeur moyenne [68]. 3) La différenciation, une fois par rapport au temps, de l'équation d'état original étant non affine en la commande de telle sorte que l'équation d'état résultante est affine en la dérivée de l'entrée de commande (cette dernière sera considérée par la suite comme une nouvelle entrée) [69]. *La deuxième approche* consiste à l'utilisation du théorème des fonctions implicites pour démontrer l'existence d'une commande idéale stabilisante au système non affine [69]. Notons que ce théorème des fonctions implicites ne donne aucun moyen pour la détermination d'une commande explicite idéale, en générale il est difficile de déterminer le modèle inverse d'un système non affine. Dans cette situation, certains chercheurs combinent le théorème des fonctions implicites avec celui des approximateurs universels, i.e. des réseaux de neurones (NN) [70] ou des systèmes flous [34], pour rapprocher cette commande idéale implicite.

D'autre part, les systèmes non-linéaires triangulaires inférieures non affines en la commande est une classe important de systèmes non-linéaires. Dans cette classe de systèmes, les variables d'état utilisés comme commande virtuelle et la commande réelle sont tous exprimés sous une forme non affine. Notons que la synthèse de commande pour ces systèmes est également difficile. Dans la littérature, particulièrement, on peut trouver un résultat traitant le problème de poursuite idéal sur un intervalle de temps fini pour les systèmes triangulaires inférieures non affines en la commande [53]. Pour illustrer ce résultat, considérons la classe suivante des systèmes non-linéaires:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k} + f_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) \\ \dot{x}_{n,k} = u_k + f_n(\bar{x}_{n,k}, u_k) \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (2.57)$$

où le vecteur $\bar{x}_{i,k}$ est défini tel que $\bar{x}_{i,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{i,k}]^T \in \mathcal{R}^i \times [0, T]$ avec $i = (1, n - 1)$ de plus, l'état du système est représenté à la $k^{ième}$ itération par le vecteur $\bar{x}_{n,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{n,k}]^T \in \mathcal{R}^n \times [0, T]$ où n dénote l'ordre du système. L'entrée et la sortie du système, à la $k^{ième}$ itération, sont respectivement définies par $u_k \in \mathcal{Ret}$ $y_k \in \mathcal{R}$. Par ailleurs, la fonction $f_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k})$, $\mathcal{R}^i \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$, $i = (1, n)$ représente un vecteur de fonctions non-linéaires connues et continues.

Notre tâche, dans ce contexte, est de faire étendre les lois de la CAI adaptative précédente à cette classe de systèmes non-linéaires. D'après notre synthèse bibliographique, une seule étude, abordant le problème de synthèse de la CAI adaptative de cette classe de systèmes, est mentionnée dans la littérature spécialisée [53]. Il est à noter que la procédure de synthèse par backstepping, de la CAI adaptative du système (2.57), fait appel aux systèmes flous. Pour $i = (1, n - 1)$, les commandes virtuelles prennent la forme suivante [53]:

$$\alpha_{i,k} = -c_i z_{i,k} - z_{(i-1)\phi,k} - \hat{\theta}_{i,k}^T \xi_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{(i+1)f,k}) - \frac{\hat{S}_{i,k}}{\Delta_k} z_{i\phi,k} - P_{i-1,k} \quad (2.58)$$

avec $z_{i\phi,k} = z_{i,k} - \phi_{i,k}(t) \text{Sat}\left(\frac{z_{i,k}}{\phi_{1,k}(t)}\right)$, $\phi_{1,k}(t) = \epsilon_{i,k} e^{-c_i t}$ et $z_{i,k} = x_{i,k} - \alpha_{i-1,k}$. Les constants $c_i > 0$ et $\epsilon_i > 0$ sont des paramètres de conception. De plus, par commodité, nous avons noté $x_{n+1,k} = u_k$ et $\alpha_{0,k} = y_r$.

Il est à noter que le signal filtré $\bar{x}_{(i+1)f,k}$ est obtenu à partir de $\bar{x}_{i+1,k}$ comme suit :

$$\bar{x}_{(i+1)f,k} = H_L(s) \bar{x}_{i+1,k}, \quad i = (1, n) \quad (2.59)$$

où $H_L(s)$ est un filtre passe-bas de type Butterworth et $P_{i-1,k}$ représenté par :

$$P_{i-1,k} = \frac{\partial \alpha_{i-1,k}}{\partial \hat{\theta}_{i-1,k}} \dot{\hat{\theta}}_{i-1,k} + \frac{\partial \alpha_{i-1,k}}{\partial \hat{S}_{i-1,k}} \dot{\hat{S}}_{i-1,k} + \dot{\alpha}_{i-1,k}, \quad i = (1, n) \quad (2.60)$$

Les lois d'adaptation par apprentissage itératif sont choisies telles que :

$$\dot{\hat{\theta}}_{i,k} = \Gamma_{1i} \xi_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{(i+1)f,k}) z_{i\phi,k}, \quad i = (1, n) \quad (2.61)$$

$$\dot{\hat{S}}_{i,k} = \Gamma_{2i} \frac{z_{i\phi,k}^2}{\Delta_k}, \quad i = (1, n) \quad (2.62)$$

où $\Gamma_{1i} > 0$ et $\Gamma_{2i} > 0$ sont les gains d'adaptation par apprentissage itératif. Donc pour $i = n$, la CAI adaptative pratique prend la forme de la commande virtuelle suivante:

$$u_k = \alpha_{n,k} \quad (2.63)$$

Comme dans ce cas, les lois d'adaptation utilisées sont du type 1, l'analyse de la stabilité et de la convergence peut donc être effectuée suivant les mêmes étapes que celles donnant la preuve du **Théorème 2.1**. De ce fait, les variables d'erreurs $z_{i\phi,k}$ convergent vers zéro via les itérations

d'apprentissage. Ceci conduit à la convergence des variables d'erreurs $z_{i,k}$ vers le voisinage de zéro via les itérations d'apprentissage. Une preuve complète de ce résultat est exposée dans la référence [53].

Ainsi que, les systèmes flous sont utilisés pour compenser les effets des fonctions non-linéaires inconnues $f_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k})$, c'est-à-dire les approximer en utilisant le théorème d'approximation universel, c'est à dire $f_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) = \theta^T \xi_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i+1,k}) + \varepsilon(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i+1,k})$. Par ailleurs, les travaux rapportés par la recherche bibliographique ne mentionnent pas le cas des fonctions $f_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k})$ partiellement connues ou incertaines.

2.2.5.3. CAI adaptative des systèmes non-linéaires triangulaires avec saturation à l'entrée

Parmi les problèmes rencontrés pendant l'implémentation pratique d'un système de commande on trouve le problème des non-linéarités d'entrée, telles que: la saturation, l'hystérésis, et la zone-morte. La saturation est une non-linéarité non lisse. Elle est très fréquente dans la plupart des applications pratiques: les actionneurs et les capteurs ont généralement des limites par rapport à ses entées, cela est due soit aux contraintes physiques soit aux exigences de sécurité. Si la saturation est ignorée pendant la phase de synthèse, en mettant en application cette commande, on peut avoir des dégradations significatives dans les performances du système. Ces dégradations peuvent se manifester par des dépassements, des oscillations de fortes amplitudes, des temps de réponse ou des régimes transitoires assez longs, et même dans certains cas ces dégradations peuvent conduire à l'instabilité du système lui-même.

Afin de prendre en considération l'effet de la saturation lors de la synthèse de lois de commande, deux approches sont généralement utilisées. *La première approche* consiste en l'approximation de la saturation par une fonction continue telle que la fonction tangente hyperbolique ou la fonction de Gauss [41]-[44] sous la condition que l'erreur due à cette approximation est supposée bornée. Dans [41], en s'aidant du concept de backstepping, une commande adaptative robuste a été développée pour des systèmes non-linéaires incertains avec saturation à l'entrée et des perturbations externes. Dans [43], En utilisant une procédure de synthèse par backstepping filtré, une commande adaptative a été conçue pour les systèmes non-linéaires incertains avec une saturation à l'entrée et une direction inconnue de commande. *La deuxième approche* se base sur la construction d'un système auxiliaire et une modification de l'erreur de poursuite telle qu'elle soit définie en fonction des états de ce système auxiliaire. Plusieurs schémas de commande pour les systèmes non-linéaires avec saturation ont été développés sur la base de cette idée [45]-[47]. Notons que la commande adaptative basée sur

cette approche permet aux lois d'adaptation de rester opérantes même si la saturation d'entrée est active. Cette approche a démontré son efficacité dans la commande de vol [71], la commande des véhicules [72], ...etc. Dans [46], une commande adaptative par backstepping basée sur un système auxiliaire a été conçue pour une classe des systèmes non-linéaires chaotiques. Des systèmes neuro-flous ont été incorporés, dans cette commande, pour estimer en ligne les dynamiques inconnues. Le système auxiliaire, de même ordre que le système à commander, est utilisé pour compenser l'effet de la saturation de l'entrée. Dans [47], une procédure de synthèse par backstepping filtré a été utilisée pour la synthèse d'une loi de commande floue adaptative pour une classe de systèmes non linéaires avec saturation à l'entrée et des perturbations externes. La contrainte de saturation a été compensée en modifiant l'erreur de poursuite via l'utilisation des signaux générés par un système auxiliaire.

Pour les systèmes non-linéaires, fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fixe et, soumis à une saturation à l'entrée, la conception d'une CAI adaptative est une tâche difficile. Les progrès récemment enregistrés dans la théorie de la CAI adaptative des systèmes non-linéaires en présence de la saturation d'entrée ont donné naissance à certains schémas. Entre autres, on peut exposer le schéma de la CAI adaptative, proposé dans [55], pour la classe de systèmes non-linéaires suivante :

$$\dot{x}_k = g(t)u(v_k) + f(x_k(t), \theta(t)) \quad (2.64)$$

où $x_k \in \mathcal{R}$ et $v_k \in \mathcal{R}$ sont respectivement l'état du système et la commande, $\theta(t)$ est un paramètre inconnu variant dans le temps, $g(t)$ est un gain d'entrée dérivable et la fonction $f(x_k(t), \theta(t)): \mathcal{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$ est non-linéaire paramétrique localement Lipchitzienne par rapport à ses arguments. Pour ce système, l'entrée de commande $v_k \in \mathcal{R}$ est soumise à une contrainte non-linéaire représentée par la fonction $u(\cdot)$. Celle-ci est une fonction de saturation et elle est décrite par le modèle suivant :

$$u(v_k) = Sat(v_k) = \begin{cases} u_M Sign(v_k), & |v_k| \geq u_M \\ v_k, & |v_k| < u_M \end{cases} \quad (2.65)$$

où u_M est une borne connue de $u(v_k)$.

Pour le système (2.64) et sous certaines hypothèses, la conception de la loi de la CAI adaptative (2.66) est réalisé dans la référence [55]:

$$v_k(t) = Sat(v_{k-1}(t)) - (c + \hat{a}_k(t))e_k(t), \quad v_{k-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (2.66)$$

Dans la relation (2.66), c est un paramètre de synthèse et $\hat{a}_k(t)$ sert à estimer les incertitudes temporelles du système $a(t)$. L'estimation du paramètre $a(t)$ est obtenue via la loi d'adaptation par apprentissage itératif suivante :

$$\hat{a}_k(t) = \text{Sat}\left(\hat{a}_{k-1}(t) + \eta e_k^2(t)\right), \quad \hat{a}_k(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (2.67)$$

où $\eta > 0$ est un gain d'apprentissage et la fonction Sat est définie telle que (2.65) où a_m est une borne connue de $a_k(t)$.

Afin de prouver la convergence du mécanisme d'apprentissage, la fonctionnelle suivante a été considérée:

$$W_k(t) = V_k(t) + \frac{1}{2q} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \tilde{a}_k^2(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{1}{2(c + \hat{a}_k(\tau))} e^{-\lambda\tau} \tilde{u}_k^2(\tau) d\tau \quad (2.68)$$

où $V_k(t) = \frac{1}{g(t)} e^{-\lambda t} e_k^2$, $\tilde{u}_k = u_r - u_k$ et $\tilde{a}_k = a(t) - \hat{a}_k(t)$.

Les preuves de la stabilité et de la convergence du schéma de la CAI adaptative (2.66) et (2.67) sont établies en détail dans la référence [55]. De ce fait, nous concluons que $x_k(t)$, $u_k(t)$ et $\hat{a}_k(t)$ restent toujours bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$ et que l'erreur e_k converge uniformément vers zéro pour tout $t \in [0, T]$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

2.3. Position du problème et contribution

Notre but dans cette thèse est de développer des procédures systématiques et récursives de synthèse des CAI adaptatives pour les systèmes non-linéaires, fonctionnant d'une manière répétitifs sous la condition d'alignement et dans le cas où ses modèles sont des généralisations des formes (2.51), (2.57) et (2.64). Il est à noter que les classes des systèmes (2.51) et (2.57) sont relativement simples à cause du type d'incertitudes considéré : incertitudes paramétriques en (2.51) et incertitudes non paramétriques en (2.57). Ces formes seraient autrement plus compliquées, si par exemple, nous considérons les classes de systèmes ayant les mêmes formes que celles (2.51) ou (2.57) mais présentant à la fois des incertitudes paramétriques et non paramétriques. Ainsi bien, l'augmentation de l'ordre du système (2.64) conduit à un système triangulaire affine en la commande avec saturation en entrée. En outre, la littérature spécialisée relative à la CAI adaptative ne mentionne aucun travail traitant de ces classes de systèmes en utilisant les méthodes de traitement des incertitudes utilisées dans la commande robuste comme il est indiqué en §2.2.4.

En conséquence, en se basant sur une combinaison de la CAI adaptative et la CAI robuste, notre contribution consiste à développer des procédures systématiques et récursives de synthèse de la CAI adaptative pour ces trois classes de systèmes non-linéaires. En effet, nous pouvons dire que, dans cette thèse, nous allons travailler sur deux axes. Le premier axe concerne le développement de nouvelles lois de la CAI adaptative et le deuxième axe est relatif à l'application de ces lois aux classes de systèmes mentionnées ci-dessous.

Par ailleurs, la conception des lois de commande pour les systèmes non-linéaires triangulaires par la procédure de synthèse par backstepping fait appel à la dérivation temporelle des commandes virtuelles. Il est important de noter que cette dérivation peut conduire à des algorithmes de commande beaucoup plus compliqués à exploiter. Pour notre part, nous allons introduire des filtres à chaque étape de synthèse pour éviter le problème de la dérivation des commandes virtuelles, ce qui conduit à des lois de commandes beaucoup plus simples et plus faciles à mettre en œuvre.

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un résumé des principaux résultats existants dans le domaine de la CAI adaptative que nous avons jugés utiles pour notre étude. Cette présentation permet de situer notre recherche dans ce domaine, même si toutes les techniques associées au paradigme de la CAI adaptative n'ont pas été détaillées. Afin de répondre aux besoins de notre recherche, la revue bibliographique a été délibérément orientée vers les résultats de la CAI adaptative que nous avons jugés utiles.

Par ailleurs, la fonctionnelle de Lyapunov est exploitée pour la synthèse des lois de la CAI adaptative des systèmes non-linéaires présentant des non-linéarités soit sous la forme de fonctions localement Lipschitziennes soit sous la forme d'incertitudes paramétriques. La fonctionnelle de Lyapunov est un outil puissant pour la synthèse et l'analyse des lois de CAI adaptative. En outre, la CAI adaptative est une approche, parmi celles nombreuses développées récemment, qui permet de résoudre avec succès le problème de poursuite parfaite sur un intervalle de temps fini où les incertitudes sont du type paramétrique. Les lois d'adaptation par apprentissage résultantes peuvent se classer en trois types : le premier type regroupe les lois d'adaptation évoluant seulement dans le domaine du temps. L'avantage principal de ce type de lois réside dans la faible taille de la mémoire requise pour l'implémentation pratique ainsi que la

simplicité de la synthèse. Les lois d'adaptations par apprentissage itératif, évoluant seulement dans le domaine des itérations, constituent le deuxième type. Ce type se caractérise par un mécanisme d'intégration discret dans le domaine des itérations et se dispense de la condition d'invariance des paramètres inconnus qui est nécessaire pour le premier type. Le troisième type combine les deux types précédents.

Dans les chapitres 3, 4 et 5, qui vont suivre, nous allons montrer comment combiner la méthode de la CAI robuste et celle de la CAI adaptative pour manipuler les incertitudes paramétriques et non paramétriques dans la synthèse des lois de la CAI adaptative. Les systèmes considérés sont d'une part ceux de la classe des systèmes non-linéaires triangulaires affine ou non affine en la commande et d'autre part ceux de la classe des systèmes non-linéaires triangulaires affine en la commande et soumis à une saturation en entrée.

CAI adaptative des systèmes non linéaires incertains affines en la commande

3.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la synthèse de la CAI adaptative pour une classe de systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande et présentant des incertitudes paramétriques et non paramétriques. Pour traiter ces systèmes, nous proposons une nouvelle procédure récursive et systématique de synthèse. En effet, nous proposons de développer une loi de commande constituée de trois termes : le premier terme est relatif à la loi d'apprentissage itératif pour manipuler les fonctions non-linéaires localement Lipchitziennes et inconnues, le second terme concerne la loi d'adaptation par apprentissage itératif pour estimer les paramètres inconnus et enfin, le troisième terme est un terme de robustesse pour compenser l'effet des perturbations et des erreurs d'apprentissage. En outre, cette loi de commande est développée en effectuant la synthèse par la méthode du backstepping filtré et l'analyse de stabilité par la fonctionnelle de Lyapunov.

3.2. Modèle du système et formulation du problème

Nous considérons la classe des systèmes non-linéaires incertains où la sortie doit suivre cycliquement une référence donnée dans un intervalle de temps fini. Cette classe est représentée par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k} + f_i(\bar{x}_{i,k}) + \theta^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) + d_i(\bar{x}_{n,k}, t) \\ \dot{x}_{n,k} = g(\bar{x}_{n,k})u_k + f_n(\bar{x}_{n,k}) + \theta^T \psi_n(\bar{x}_{n,k}) + d_n(\bar{x}_{n,k}, t) \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (3.1)$$

où les notations utilisées au niveau de la relation (3.1) sont définies ci-dessous.

Le vecteur $\bar{x}_{i,k}$ est défini tel que $\bar{x}_{i,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{i,k}]^T \in \mathcal{R}^i \times [0, T]$ avec $i = (1, n - 1)$ de plus, l'état du système est représenté, à la $k^{\text{ième}}$ itération, par le vecteur $\bar{x}_{n,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{n,k}]^T \in \mathcal{R}^n$ où n dénote l'ordre du système. L'entrée et la sortie du système, à la $k^{\text{ième}}$ itération, sont respectivement définies par $u_k \in \mathcal{R}$ et $y_k \in \mathcal{R}$. Par ailleurs, les fonctions $f_i(\bar{x}_{i,k})$ sont non linéaires continues mais inconnues définissant des applications dans $\mathcal{R}^i \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$, $i = (1, n)$. Les termes $\theta^T \psi_i(\bar{x}_{i,k})$, $i = (1, n)$ représentent des fonctions incertaines où $\theta \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur des paramètres inconnus et $\psi_i(\bar{x}_{i,k}) : \mathcal{R}^i \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}^p$, $i = (1, n)$ sont des vecteurs de fonctions non-linéaires connues et continues. La fonction $g(\bar{x}_{n,k})$, définie dans $\mathcal{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$, est une fonction continue satisfaisant la condition $g(\bar{x}_{n,k}) \neq 0, \forall \bar{x}_{n,k} \in \mathcal{R}^n$. Enfin, les perturbations inconnues, pouvant affecter le système, sont représentées par l'application $d_i(\bar{x}_{n,k}, t)$ qui est définie dans le domaine $\mathcal{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$, $i = (1, n)$. Pour toutes ces notations, la lettre $k \in \mathbb{Z}_+$ désigne l'indice des itérations.

Notre objectif est de synthétiser une loi de la CAI adaptative, u_k , assurant d'une part la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée $\forall t \in [0, T], \forall k \in \mathbb{Z}_+$ et d'autre part la convergence du signal de sortie y_k vers le signal de référence y_r , $\forall t \in [0, T]$, lorsque k tend vers l'infini.

La synthèse de cette loi de commande est effectuée en admettant les hypothèses suivantes communément admises dans le contexte.

Hypothèse 3.1: Les perturbations dynamiques inconnues $d_i(\bar{x}_{n,k}, t)$, $i = (1, n)$ sont bornées, c'est-à-dire, ils existent des fonctions connues et définies positives, $\mu_i(\bar{x}_{i,k})$, telles que :

$$|d_i(\bar{x}_{n,k}, t)| \leq \mu_i(\bar{x}_{i,k}), \quad \forall (\bar{x}_{i,k}, t) \in \Omega_{\bar{x}_{i,k}} \times \mathcal{R}_+$$

Hypothèse 3.2: Les fonctions non-linéaires $f_i(\bar{x}_{i,k})$, $i = (1, n)$ sont uniformément localement Lipchitziennes dans l'intervalle de temps $[0, T]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$, c'est-à-dire, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, il existe des constantes positives inconnues Δ_i , telles que:

$$|f_i(\bar{x}_{i,k}) - f_i(\bar{x}_{i,k-1})| \leq \Delta_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}|$$

Hypothèse 3.3: Le signal de référence y_r et sa première dérivée \dot{y}_r sont supposés bornés et continus.

3.3. Synthèse de la CAI adaptative

Dans cette section, en utilisant la procédure de synthèse par backstepping filtré, une nouvelle loi de la CAI adaptative est développée pour la classe des systèmes (3.1). La procédure de synthèse est effectuée en n étapes. A chaque étape, une CAI adaptative virtuelle, $\alpha_{i,k}$, $i = (1, n - 1)$ est conçue. La CAI adaptative pratique est obtenue à l'étape finale. Chaque étape de cette procédure est basée sur le changement de coordonnées suivant:

$$\begin{cases} z_{1,k} = x_{1,k} - y_r \\ z_{i,k} = x_{i,k} - \beta_{i-1,k}, \quad i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\beta_{i,k}$, est la sortie du $i^{\text{ième}}$ filtre non-linéaire ayant pour entrée $\alpha_{i,k}$, $i = (1, n - 1)$ et dont la dynamique est imposée telle que:

$$\dot{\beta}_{i,k} = -\sigma_i(\beta_{i,k} - \alpha_{i,k}) - \rho_i \text{Tanh}\left(\frac{\beta_{i,k} - \alpha_{i,k}}{\varepsilon_i}\right) - z_{i,k} \quad (3.3)$$

où $\sigma_i > 0$, $\rho_i > 0$ et ε_i sont des paramètres de synthèse. Dans ce chapitre, la grandeur $y_{i,k}$ représente le signal d'erreur, à l'itération k , entre la sortie et l'entrée du $i^{\text{ième}}$ filtre ainsi, on a : $y_{i,k} = \beta_{i,k} - \alpha_{i,k}$, $i = (1, n)$. En introduisant $y_{i,k}$ dans la relation (3.3), la dynamique de l'erreur $y_{i,k}$ prend donc la forme :

$$\dot{y}_{i,k} = -\sigma_i y_{i,k} - \rho_i \text{Tanh}\left(\frac{y_{i,k}}{\varepsilon_i}\right) - z_{i,k} - \dot{\alpha}_{i,k} \quad (3.4)$$

En tenant compte de (3.1), la dérivée temporelle de (3.2) conduit à:

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = x_{2,k} + f_1(x_{1,k}) + \theta^T \psi_1(x_{1,k}) - \dot{y}_r + d_1(\bar{x}_{n,k}, t) \\ \dot{z}_{i,k} = x_{i+1,k} + f_i(\bar{x}_{i,k}) + \theta^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) - \dot{\beta}_{i-1,k} + d_i(\bar{x}_{n,k}, t), \quad i = (2, n - 1) \\ \dot{z}_{n,k} = g(\bar{x}_{n,k})u_k + f_n(\bar{x}_{n,k}) + \theta^T \psi_n(\bar{x}_{n,k}) - \dot{\beta}_{n-1,k} + d_n(\bar{x}_{n,k}, t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Afin de compenser l'effet des fonctions non-linéaires inconnues $f_i(\bar{x}_{i,k})$, $i = (1, n)$, nous utilisons la loi d'apprentissage itératif imposée telle que :

$$\hat{f}_{i,k}(t) = \hat{f}_{i,k-1}(t) + \eta_i z_{i,k} + \sum_{j=1}^i r_{ij} (x_{j,k}(t) - x_{j,k-1}(t)), \quad i = (1, n) \quad (3.6)$$

où $\eta_i > 0$ et $r_{ij} > 0$ sont des gains d'apprentissage et $\hat{f}_{i,k}(t)$ dénotes l'estimé de $f_i(\bar{x}_{n,k})$ à la $k^{ième}$ itération avec $\hat{f}_{i,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T]$. De plus, on définit l'erreur d'apprentissage comme étant $\Phi_{i,k} = f_i(\bar{x}_{i,k}) - \hat{f}_{i,k}(t)$.

Puisque, les fonctions $f_i(\bar{x}_{i,k})$, $i = (1, n)$ sont supposées continues, il est tout à fait raisonnable d'admettre l'**Hypothèse 3.4** suivante :

Hypothèse 3.4: Les erreurs d'apprentissage $\Phi_{i,k}(t)$, $i = (1, n)$ sont bornées, c'est-à-dire, il existe des constantes positives $\bar{\Phi}_i$ telles que $|\Phi_{i,k}(t)| \leq \bar{\Phi}_i$.

A ce stade, il est possible d'entamer la synthèse de la CAI adaptative en utilisant la procédure de synthèse par backstepping filtré.

Etape 1: En cette étape, nous allons concevoir la première CAI adaptative virtuelle $\alpha_{1,k}$. La Substitution de la deuxième équation de (3.2) dans la première équation de (3.5) et après certaines manipulations, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,k} &= x_{2,k} + f_1(x_{1,k}) + \theta^T \psi_1(x_{1,k}) - \dot{y}_r + d_1(\bar{x}_{n,k}, t) \\ &= z_{2,k} + \alpha_{1,k} + y_{1,k} + \hat{f}_{1,k}(t) + \theta^T \psi_1(x_{1,k}) - \dot{y}_r + \Phi_{1,k}(t) + d_1(\bar{x}_{n,k}, t) \\ &= z_{2,k} + \alpha_{1,k} + y_{1,k} + \hat{f}_{1,k}(t) + \hat{\theta}_k^T \psi_1(x_{1,k}) - \dot{y}_r + \tilde{\theta}_k^T \psi_1(x_{1,k}) + \Phi_{1,k}(t) \\ &\quad + d_1(\bar{x}_{n,k}, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $\hat{\theta}_k$ est l'estimation du vecteur des paramètres inconnus θ dont, la loi d'adaptation sera définie ultérieurement et $\tilde{\theta}_k = \theta - \hat{\theta}_k$ est l'erreur d'estimation paramétrique.

La première loi de CAI adaptative virtuelle $\alpha_{1,k}$ est synthétisée comme suit :

$$\alpha_{1,k} = -c_1 z_{1,k} - \hat{f}_{1,k}(t) - \hat{\theta}_k^T \psi_1(x_{1,k}) + \dot{y}_r + u_{r1,k} \quad (3.8)$$

où $u_{r1,k}$ est un terme de robustesse imposé tel que :

$$\dot{u}_{r1,k} = -\gamma_{u1}u_{r1,k} - \gamma_{u1} \left(z_{1,k} + \frac{\chi_{1,k}u_{r1,k}}{u_{r1,k}^2 + \delta_{1,k}^2} \right), \quad u_{r1,k}(0) > 0 \quad (3.9)$$

avec

$$\dot{\delta}_{1,k} = -\gamma_{\delta1}\delta_{1,k} - \gamma_{\delta1} \frac{\chi_{1,k}\delta_{1,k}}{u_{r1,k}^2 + \delta_{1,k}^2}, \quad \delta_{1,k}(0) > 0 \quad (3.10)$$

où $\gamma_{u1} > 0$, $\gamma_{\delta1} > 0$ et $c_1 > 0$ sont des paramètres de synthèse et le terme $\chi_{1,k}$ est donné par :

$$\chi_{1,k} = \mu_1(x_{1,k})|z_{1,k}| + L_1|x_{1,k}(t) - x_{1,k-1}(t)| + \bar{\varepsilon}_1\rho_1$$

avec $\bar{\varepsilon}_1 = 0.2785\varepsilon_1$ et L_1 sera déterminé ultérieurement. Nous considérons maintenant la

fonction de Lyapunov suivante : $V_{1,k} = \frac{1}{2}z_{1,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_{u1}}u_{r1,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_{\delta1}}\delta_{1,k}^2 + \frac{1}{2}y_{1,k}^2$. La dérivée

temporelle de $V_{1,k}(t)$ est donnée par : $\dot{V}_{1,k} = z_{1,k}\dot{z}_{1,k} + \frac{1}{\gamma_{u1}}u_{r1,k}\dot{u}_{r1,k} + \frac{1}{\gamma_{\delta1}}\delta_{1,k}\dot{\delta}_{1,k} + y_{1,k}\dot{y}_{1,k}$.

En substituant (3.7) dans $\dot{V}_{1,k}(t)$ et en utilisant l'**Hypothèse 3.1**, il en résulte :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} \leq & z_{1,k}(\alpha_{1,k} + \hat{f}_{1,k}(t) + \hat{\theta}_k^T \psi_1(x_{1,k}) - \dot{y}_r) + z_{1,k}z_{2,k} + z_{1,k}y_{1,k} + \mu_1(x_{1,k})|z_{1,k}| \\ & + \tilde{\theta}_k^T \psi_1(x_{1,k})z_{1,k} + \Phi_{1,k}(t)z_{1,k} + \frac{1}{\gamma_{u1}}u_{r1,k}\dot{u}_{r1,k} + \frac{1}{\gamma_{\delta1}}\delta_{1,k}\dot{\delta}_{1,k} + y_{1,k}\dot{y}_{1,k} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La substitution de (3.4) et (3.8)-(3.10) dans (3.11), nous donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} \leq & -c_1z_{1,k}^2 + z_{1,k}z_{2,k} + \tilde{\theta}_k^T \psi_1(x_{1,k})z_{1,k} + \Phi_{1,k}(t)z_{1,k} - L_1|x_{1,k} - x_{1,k-1}| \\ & - \rho_1y_{1,k} \operatorname{Tanh}\left(\frac{y_{1,k}}{\varepsilon_1}\right) + |y_{1,k}||\dot{\alpha}_{1,k}| - \bar{\varepsilon}_1\rho_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

En supposant $\rho_1 \geq |\dot{\alpha}_{1,k}|$ et en utilisant le Lemme A.5, la relation (3.12) se réduit à :

$$\dot{V}_{1,k} \leq -c_1z_{1,k}^2 + z_{1,k}z_{2,k} + \tilde{\theta}_k^T \psi_1(x_{1,k})z_{1,k} + \Phi_{1,k}(t)z_{1,k} - L_1|x_{1,k}(t) - x_{1,k-1}(t)| \quad (3.13)$$

Il est à noter que le terme de couplage $z_{1,k}z_{2,k}$ sera éliminé à la prochaine étape.

Etape i où ($i = 2, \dots, n-1$): Cette étape est consacrée à la synthèse de la loi de CAI adaptative virtuelle $\alpha_{i,k}$, $i = (2, n-1)$. En substituant la $(i+1)^{\text{ième}}$ équation de (3.2) dans la $i^{\text{ième}}$ équation de (3.5) et après certaines manipulations, nous obtenons :

$$\dot{z}_{i,k} = z_{i+1,k} + \alpha_{i,k} + y_{i,k} + \hat{f}_{i,k}(t) + \theta^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) - \dot{\beta}_{i-1,k} + \Phi_{i,k}(t) + d_i(\bar{x}_{n,k}, t)$$

$$\begin{aligned}
&= z_{i+1,k} + \alpha_{i,k} + y_{i,k} + \hat{f}_{i,k}(t) + \hat{\theta}_k^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) - \dot{\beta}_{i-1,k} \\
&\quad + \tilde{\theta}_k^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) + \Phi_{i,k}(t) + d_i(\bar{x}_{n,k}, t)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Afin de stabiliser la dynamique (3.14), la $i^{\text{ème}}$ CAI adaptative virtuelle $\alpha_{i,k}$ est imposée telle que :

$$\alpha_{i,k} = -c_i z_{i,k} - z_{i-1,k} - \hat{f}_{i,k}(t) - \hat{\theta}_k^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) + \dot{\beta}_{i-1,k} + u_{ri,k} \tag{3.15}$$

où $u_{ri,k}$ est un terme de robustesse donnée par :

$$\dot{u}_{ri,k} = -\gamma_{ui} u_{ri,k} - \gamma_{\delta i} \left(z_{i,k} + \frac{\chi_{i,k} u_{ri,k}}{u_{ri,k}^2 + \delta_{i,k}^2} \right), u_{ri,k}(0) > 0 \tag{3.16}$$

avec

$$\dot{\delta}_{i,k} = -\gamma_{ui} \delta_{i,k} - \gamma_{\delta i} \frac{\chi_{i,k} \delta_{i,k}}{u_{ri,k}^2 + \delta_{i,k}^2}, \quad \delta_{i,k}(0) > 0 \tag{3.17}$$

où $\gamma_{ui} > 0$, $\gamma_{\delta i} > 0$ et $c_i > 0$ sont des paramètres de synthèse de plus, le terme $\chi_{i,k}$ est donné par :

$$\chi_{i,k} = \mu_i(\bar{x}_{i,k}) |z_{i,k}| + L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k}(t) - x_{j,k-1}(t)| + \bar{\varepsilon}_i \rho_i$$

avec $\bar{\varepsilon}_i = 0.2785 \varepsilon_i$ et L_i sera déterminé plus tard. Considérons maintenant la fonction de Lyapunov suivante : $V_{i,k} = V_{i-1,k} + \frac{1}{2} z_{i,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_{ui}} u_{ri,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_{\delta i}} \delta_{i,k}^2 + \frac{1}{2} y_{i,k}^2$. La dérivée temporelle de $V_{i,k}$ est telle que : $\dot{V}_{i,k} = \dot{V}_{i-1,k} + z_{i,k} \dot{z}_{i,k} + \frac{1}{\gamma_{ui}} u_{ri,k} \dot{u}_{ri,k} + \frac{1}{\gamma_{\delta i}} \delta_{i,k} \dot{\delta}_{i,k} + y_{i,k} \dot{y}_{i,k}$. En substituant (3.14) dans $\dot{V}_{i,k}$ et en utilisant l'**Hypothèse 3.1**, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{i,k} &\leq \dot{V}_{i-1,k} - z_{i-1,k} z_{i,k} + z_{i,k} y_{i,k} \\
&\quad + z_{i,k} (\alpha_{i,k} + z_{i+1,k} + z_{i-1,k} + \hat{f}_{i,k}(t) + \hat{\theta}_k^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) - \dot{\beta}_{i-1,k}) + \mu_i(\bar{x}_{i,k}(t)) |z_{i,k}| \\
&\quad + \tilde{\theta}_k^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) z_{i,k} + \Phi_{i,k}(t) z_{i,k} + \frac{1}{\gamma_{ui}} u_{ri,k} \dot{u}_{ri,k} + \frac{1}{\gamma_{\delta i}} \delta_{i,k} \dot{\delta}_{i,k} + y_{i,k} \dot{y}_{i,k}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

La substitution de (3.4) et (3.15)-(3.17) dans (3.18), conduit à :

$$\dot{V}_{i,k} \leq \dot{V}_{i-1,k} - c_i z_{i,k}^2 - z_{i-1,k} z_{i,k} + z_{i,k} z_{i+1,k} + \tilde{\theta}_k^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) z_{i,k} + \Phi_{i,k}(t) z_{i,k}$$

$$- \rho_i y_{i,k} \operatorname{Tanh} \left(\frac{y_{i,k}}{\varepsilon_i} \right) + |y_{i,k}| |\dot{\alpha}_{i,k}| - \bar{\varepsilon}_i \rho_i - L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k}(t) - x_{j,k-1}(t)| \quad (3.19)$$

En supposant $\rho_i \geq |\dot{\alpha}_{i,k}|$ et en utilisant le Lemme A.5, (3.19) peut être réduite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} &\leq \dot{V}_{i-1,k} - c_i z_{i,k}^2 - z_{i-1,k} z_{i,k} + z_{i,k} z_{i+1,k} + \tilde{\theta}_k^T \psi_i(\bar{x}_{i,k}) + \Phi_{i,k}(t) z_{i,k} \\ &\quad - L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k}(t) - x_{j,k-1}(t)| \end{aligned} \quad (3.20)$$

A l'étape $(i - 1)$, il a été obtenu

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i-1,k} &\leq - \sum_{j=1}^{i-1} c_j z_{j,k}^2 + z_{i-1,k} z_{i,k} + \tilde{\theta}_k^T \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j(\bar{x}_{j,k}) z_{j,k} + \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_{j,k}(t) z_{j,k} \\ &\quad - \sum_{l=1}^{i-1} L_l \sum_{j=1}^l |x_{j,k}(t) - x_{j,k-1}(t)| \end{aligned} \quad (3.21)$$

En substituant (3.21) dans (3.20), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} &\leq - \sum_{j=1}^i c_j z_{j,k}^2 + z_{i,k} z_{i+1,k} + \tilde{\theta}_k^T \sum_{j=1}^i \psi_j(\bar{x}_{j,k}) + \sum_{j=1}^i \Phi_{j,k} z_{j,k} \\ &\quad - \sum_{l=1}^i L_l \sum_{j=1}^l |x_{j,k} - x_{j,k-1}| \end{aligned} \quad (3.22)$$

où le terme de couplage $z_{i,k} z_{i+1,k}$ sera éliminé à la prochaine étape.

Etape n : Cette étape est consacrée à l'élaboration de la CAI adaptative pratique u_k . La substitution de la $n^{\text{ième}}$ équation de (3.2) dans la $n^{\text{ième}}$ équation de (3.5), conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n,k} &= g(\bar{x}_{n,k}) u_k + \hat{f}_{n,k}(t) + \tilde{\theta}_k^T \psi_n(\bar{x}_{n,k}) - \dot{\beta}_{n-1,k} + \tilde{\theta}_k^T \psi_n(\bar{x}_{n,k}) + \Phi_{n,k}(t) \\ &\quad + d_n(\bar{x}_{n,k}, t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

La CAI adaptative pratique u_k est imposée comme suit :

$$u_k = g^{-1}(\bar{x}_{n,k}) (-c_n z_{n,k} - z_{n-1,k} - \hat{f}_{n,k}(t) - \tilde{\theta}_k^T \psi_n(\bar{x}_{n,k}) + \dot{\beta}_{n-1,k} + u_{rn,k}) \quad (3.24)$$

où $u_{rn,k}$ est un terme de robustesse dont la dynamique est imposée telle que :

$$\dot{u}_{rn,k} = -\gamma_{un}u_{rn,k} - \gamma_{\delta n} \left(z_{n,k} + \frac{\chi_{n,k}u_{rn,k}}{u_{rn,k}^2 + \delta_{n,k}^2} \right), \quad u_{rn,k}(0) > 0 \quad (3.25)$$

avec

$$\dot{\delta}_{n,k} = -\gamma_{un}\delta_{n,k} - \gamma_{\delta n} \frac{\chi_{n,k}\delta_{n,k}}{u_{rn,k}^2 + \delta_{n,k}^2}, \quad \delta_{n,k}(0) > 0 \quad (3.26)$$

où $\gamma_{un} > 0$, $\gamma_{\delta n} > 0$ et $c_n > 0$ sont des paramètres de conception. Le terme $\chi_{n,k}$ correspond à :

$$\chi_{n,k} = \mu_n(\bar{x}_{n,k})|z_{n,k}| + L_n \sum_{i=1}^n |x_{i,k} - x_{i,k-1}|$$

où L_n sera déterminé plus tard. Considérons maintenant la fonction de Lyapunov suivante : $V_{n,k} = V_{n-1,k} + \frac{1}{2}z_{n,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_{un}}u_{rn,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_{\delta n}}\delta_{n,k}^2$. La dérivée temporelle de $V_{n,k}$ est telle que : $\dot{V}_{n,k} = \dot{V}_{n-1,k} + z_{n,k}\dot{z}_{n,k} + \frac{1}{\gamma_{un}}u_{rn,k}\dot{u}_{rn,k} + \frac{1}{\gamma_{\delta n}}\delta_{n,k}\dot{\delta}_{n,k}$. En substituant (3.23) dans $\dot{V}_{n,k}$ et en utilisant l'**Hypothèse 3.1**, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,k} &\leq \dot{V}_{n-1,k} - z_{n-1,k}z_{n,k} \\ &\quad + z_{n,k}(g(\bar{x}_{n,k})u_k + z_{n-1,k} + \hat{f}_{n,k}(t) + \hat{\theta}_k^T \psi_n(\bar{x}_{n,k}) - \hat{\beta}_{n-1,k}) + \mu_n(\bar{x}_{n,k})|z_{n,k}| \\ &\quad + \tilde{\theta}_k^T \psi_n(\bar{x}_{n,k})z_{n,k} + \Phi_{n,k}(t)z_{n,k} + \frac{1}{\gamma_{un}}u_{rn,k}\dot{u}_{rn,k} + \frac{1}{\gamma_{\delta n}}\delta_{n,k}\dot{\delta}_{n,k} \end{aligned} \quad (3.27)$$

En substituant (3.24)-(3.26) dans (3.27), celle-ci se réduit à :

$$\dot{V}_{n,k} \leq \dot{V}_{n-1,k} - z_{n-1,k}z_{n,k} + \Phi_{n,k}(t)z_{n,k} + \tilde{\theta}_k^T \psi_n(\bar{x}_{n,k})z_{n,k} - L_n \sum_{i=1}^n |x_{i,k} - x_{i,k-1}| \quad (3.28)$$

A l'étape $(n-1)$, il a été obtenu :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1,k} &\leq - \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_{i,k}^2 + \tilde{\theta}_k^T \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i(\bar{x}_{i,k}) z_{i,k} + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{i,k}(t) z_{i,k} + z_{n-1,k}z_{n,k} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| \end{aligned} \quad (3.29)$$

La substitution de (3.29) dans (3.28), conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,k} \leq & - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 + \tilde{\theta}_k^T \sum_{i=1}^n \psi_i(\bar{x}_{i,k}) z_{i,k} + \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k}(t) z_{i,k} \\ & - \sum_{i=1}^n L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.4. Analyse de la Stabilité et de la Convergence

Dans cette section, nous allons établir la stabilité du système en boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite en se basant sur la méthode d'analyse de stabilité par la fonctionnelle de Lyapunov. Les propriétés de stabilité et de convergence du schéma de la CAI adaptative proposée sont résumées dans le théorème ci-dessous.

Théorème 3.1 [26]: *Si le système non-linéaire (3.1), vérifiant les hypothèses 3.1-3.4, est sous la conduite de la commande caractérisée par la CAI adaptative pratique (3.24), les CAI adaptative virtuelles (3.8) et (3.15), la loi d'apprentissage itératif (3.6) et la loi d'adaptation par apprentissage itératif suivante :*

$$\hat{\theta}_k = \Gamma \sum_{i=1}^n \psi_i(\bar{x}_{i,k}) z_{i,k}, \quad \hat{\theta}_0(0) = 0 \quad (3.31)$$

où $\Gamma > 0$ est un paramètre de synthèse ; par conséquent, pour toute condition initiale satisfaisant la condition d'alignement : $V_{n,k}(0) = V_{n,k-1}(T)$ et $\hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, les résultats suivants sont vérifiés :

t1. Tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$

t2. $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{1,k} = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve: Considérons la fonctionnelle de Lyapunov suivante:

$$W_k(t) = V_k(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \quad (3.32)$$

où $V_k(t) = V_{n,k}(t) + \frac{1}{2\Gamma} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k$.

Etape 1 : Bornitude de $W_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$

En utilisant (3.30) et (3.31), la dérivé temporelle de (3.32) peut être exprimée sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{W}_k &= \dot{V}_{n,k} - \frac{1}{\Gamma} \tilde{\theta}_k^T \hat{\theta}_k + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k}^2 \\ &\leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^n L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| + \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k} z_{i,k} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k}^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

En utilisant la loi d'apprentissage itératif (3.6) et l'**Hypothèse 3.2**, (3.33) peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{W}_k &\leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^n L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i,k}}{\eta_i} (\hat{f}_{i,k} - \hat{f}_{i,k-1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i,k}}{\eta_i} \sum_{j=1}^i r_{ij} (x_{j,k} - x_{j,k-1}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k}^2 \\ &= - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^n L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i,k}}{\eta_i} (f_i(\bar{x}_{i,k}) - f_i(\bar{x}_{i,k-1})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i,k}}{\eta_i} \sum_{j=1}^i r_{ij} (x_{j,k} - x_{j,k-1}) + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i,k}}{\eta_i} (\Phi_{i,k-1} - \Phi_{i,k}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k}^2 \\ &= - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^n L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| - \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i,k}}{\eta_i} \sum_{j=1}^i r_{ij} (x_{j,k} - x_{j,k-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i,k}}{\eta_i} (f_i(\bar{x}_{i,k}) - f_i(\bar{x}_{i,k-1})) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k}^2 - \frac{1}{\eta_i} \Phi_{i,k} \Phi_{i,k-1} \right) \\ &\leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^n L_i \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| + \sum_{i=1}^n 2 \frac{\Delta_i}{\eta_i} |\Phi_{i,k}(t)| \sum_{j=1}^i |x_{j,k} - x_{j,k-1}| \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} (\Phi_{i,k}^2 - 2\Phi_{i,k} \Phi_{i,k-1}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant l'**Hypothèse 3.4** et en imposant

$$L_i \geq 2 \frac{\bar{\Phi}_i \Delta_i}{\eta_i}, \quad i = (1, n) \quad (3.35)$$

où $\Delta_i = \text{Max}\{\delta_{ij}\}$ avec $j = (1, i)$ alors, $\dot{W}_k(t)$ peut être bornée comme suit :

$$\dot{W}_k \leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} (\Phi_{i,k}^2 - 2\Phi_{i,k}\Phi_{i,k-1}) \quad (3.36)$$

Selon l'inégalité de Young (i.e. $2ab \leq a^2 + b^2$), nous avons :

$$2\Phi_{i,k}\Phi_{i,k-1} \leq \Phi_{i,k}^2 + \Phi_{i,k-1}^2.$$

D'où,

$$\dot{W}_k \leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 + \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k-1}^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k-1}^2. \quad (3.37)$$

Puisque $\hat{f}_{i,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T]$, il est claire que

$$\dot{W}_0 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} f_i^2(\bar{x}_{i,0}) \quad (3.38)$$

En intégrant (3.38) de 0 à t , on a

$$W_0(t) \leq V_0(0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t f_i^2(\bar{x}_{i,0}(\tau)) d\tau \quad (3.39)$$

Du fait que les fonctions $f_i(\bar{x}_{i,0})$, $i = (1, n)$ sont continues, elles sont donc bornées sur l'intervalle de temps $[0, T]$; alors, les intégrales $I_i = \int_0^T f_i^2(\bar{x}_{i,0}(t)) dt$ existent, d'où on a :

$$W_0(T) \leq V_0(0) + \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{2\eta_i} < \infty \quad (3.40)$$

ce qui implique que $W_0(t)$ est bornée $\forall t \in [0, T]$.

Etape 2 : Bornitude de $W_k(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

Compte tenu de (3.6) et des **Hypothèses 3.2 et 3.4**, la différence entre $W_k(t)$ et $W_{k-1}(t)$ peut être déterminée comme suit :

$$\Delta W_k = W_k - W_{k-1} = V_k - V_{k-1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t (\Phi_{i,k}^2(\tau) - \Phi_{i,k-1}^2(\tau)) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= V_k(t) - V_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) \left(\Phi_{i,k}(\tau) - \Phi_{i,k-1}(\tau) \right) d\tau \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \left(\Phi_{i,k}(\tau) - \Phi_{i,k-1}(\tau) \right)^2 d\tau \\
&= V_k(t) - V_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) \left(f_i(\bar{x}_{i,k}(\tau)) - f_i(\bar{x}_{i,k-1}(\tau)) \right) d\tau \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) \left(\hat{f}_{i,k}(\tau) - \hat{f}_{i,k-1}(\tau) \right) d\tau \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \left(\Phi_{i,k}(\tau) - \Phi_{i,k-1}(\tau) \right)^2 d\tau \\
&\leq V_k(t) - V_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) \left(f_i(\bar{x}_{i,k}(\tau)) - f_i(\bar{x}_{i,k-1}(\tau)) \right) d\tau \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) z_{i,k}(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^n \Phi_{i,k}(\tau) \sum_{j=1}^i r_{ij} \left(x_{j,k}(\tau) - x_{j,k-1}(\tau) \right) d\tau \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \left(\Phi_{i,k}(\tau) - \Phi_{i,k-1}(\tau) \right)^2 d\tau \\
&\leq V_k(t) - V_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) z_{i,k}(\tau) d\tau \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Phi}_i \Delta_i}{\eta_i} \int_0^t \sum_{j=1}^i |x_{j,k}(\tau) - x_{j,k-1}(\tau)| d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Phi}_i \Delta_i}{\eta_i} \int_0^t \sum_{j=1}^i |x_{j,k}(\tau) - x_{j,k-1}(\tau)| d\tau \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \left(\Phi_{i,k}(\tau) - \Phi_{i,k-1}(\tau) \right)^2 d\tau \\
&\leq V_k(t) - V_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) z_{i,k}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \int_0^t 2 \frac{\bar{\Phi}_i \Delta_i}{\eta_i} \sum_{j=1}^i |x_{j,k}(\tau) - x_{j,k-1}(\tau)| d\tau \\
& - \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{1}{2\eta_i} (\Phi_{i,k}(\tau) - \Phi_{i,k-1}(\tau))^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

où $\Delta_i = \text{Max}\{\delta_{ij}\}$ avec $j = (1, i)$. D'autre part, en utilisant (3.30) et (3.31), on peut réécrire V_k comme suit :

$$\begin{aligned}
V_k(t) & = V_k(0) + \int_0^t \dot{V}_k(\tau) d\tau \leq V_k(0) - \sum_{i=1}^n \int_0^t c_i z_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi_{i,k}(\tau) z_{i,k}(\tau) d\tau \\
& - \sum_{i=1}^n L_i \sum_{j=1}^i \int_0^t |x_{j,k}(\tau) - x_{j,k-1}(\tau)| d\tau.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

La substitution de (3.42) dans (3.41) et l'utilisation de la condition (3.35), conduit à :

$$\Delta W_k(t) \leq V_k(0) - V_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t c_i z_{i,k}^2(\tau) d\tau \tag{3.43}$$

A ce stade, en exploitant le fait que $V_k(0) = V_{k-1}(T)$, l'inégalité (3.43) se réduit à :

$$\Delta W_k(T) \leq - \int_0^T \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq 0 \tag{3.44}$$

L'inégalité (3.44) signifie que $W_k(T)$ est bornée pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $W_0(T)$ est bornée. De ce fait, il existe une constante finie ϖ satisfaisant :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^T \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq \varpi$$

Alors, on a

$$W_k(t) = V_k(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq V_k(t) + \varpi \tag{3.45}$$

ainsi

$$W_{k-1}(t) \leq V_{k-1}(t) + \varpi \tag{3.46}$$

D'autre part, à partir de (4.43), on obtient

$$\Delta W_k(t) \leq V_k(0) - V_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t c_i z_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq V_k(0) - V_{k-1}(t) \quad (3.47)$$

Compte tenant des relations (3.46) et (3.47), on peut conclure que

$$W_k(t) \leq V_k(0) + \varpi \quad (3.48)$$

Puisque $W_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, il est clair que $V_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. De (3.48) et le fait que $V_k(0) = V_{k-1}(T)$, on peut conclure que $W_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$; par conséquent, les signaux de la boucle de commande : $z_{i,k}, u_{ri,k}, \delta_{ik}, \tilde{\theta}_k, y_{i,k}$ et u_k sont bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$.

Etape 3 : Convergence de l'erreur de poursuite

Il est à noter que $W_k(T)$ peut être réécrite telle que : $W_k(T) = W_0(T) + \sum_{j=1}^k \Delta W_j(T)$; ainsi, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(T) = W_0(T) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \Delta W_j(T) \quad (3.49)$$

A partir de (3.44), nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(T) \leq W_0(T) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i z_{i,j}^2 dt. \quad (3.50)$$

En se basant sur (3.50) et puisque $W_k(T)$ et $W_0(T)$ sont bornées, on peut conclure que la série $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i z_{i,j}^2 dt$ est convergente. D'où, $\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i z_{i,k}^2 dt$ converge asymptotiquement vers zéro selon l'axe des itérations $\forall t \in [0, T]$, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i z_{i,k}^2 dt = 0$. De plus, puisque les grandeurs $z_{i,k}, u_{ri,k}, \delta_{ik}, \tilde{\theta}_k, y_{i,k}, u_k$ sont bornées, par conséquent $\dot{z}_{i,k}$ est aussi bornée. Ainsi, $z_{i,k}$ est uniformément continue et donc à partir du Lemme de Barbalat (Lemme A.1), on obtient $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{i,k} = 0$, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{1,k} = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

3.5. Résultats de Simulation

Dans cette section, afin d'illustrer l'efficacité et le mérite du schéma de la CAI adaptative présenté, deux exemples de simulation sont traités. Le premier exemple représente un système

non-linéaire du second ordre tandis que le deuxième exemple concerne une articulation d'un robot manipulateur actionnée par un moteur à courant continu.

3.5.1. Exemple 1

Nous considérons un système non-linéaire du second ordre affine en la commande. La sortie de ce dernier doit suivre d'une manière répétitive la référence $y_r = \sin^3(t)$ sur l'intervalle de temps fini $t \in [0, 2\pi]$. De plus, ce système est modélisé par les équations dynamiques suivantes [26]:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} + f_{1,k} + \theta^T \psi_{1,k} + d_{1,k} \\ \dot{x}_{2,k} = g_k u_k + f_{2,k} + \theta^T \psi_{2,k} + d_{2,k} \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (3.51)$$

où $f_{1,k}$ et $f_{2,k}$ sont deux fonctions continues inconnues, $\psi_{1,k} \in \mathcal{R}^2$ et $\psi_{2,k} \in \mathcal{R}^2$ sont deux vecteurs de fonctions connues, $\theta \in \mathcal{R}^2$ est le vecteur des paramètres inconnus, g_k est une fonction continue connue et non nulle de plus, $d_{1,k}$ et $d_{2,k}$ sont des perturbations inconnues.

Notre objectif est de synthétiser une loi de la CAI adaptative pour le système (3.51) telle que tous les signaux de la boucle de commande du système restent bornés et la sortie du système y_k converge vers le signal de référence y_r , $\forall t \in [0, 2\pi]$ lorsque k tends vers l'infini. Les dynamiques des erreurs sont donc données par :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = x_{2,k} + f_{1,k} + \theta^T \psi_{1,k} - \dot{y}_r + d_{1,k} \\ \dot{z}_{2,k} = g_k u_k + f_{2,k} + \theta^T \psi_{2,k} - \dot{\beta}_{1,k} + d_{2,k} \end{cases}$$

avec $z_{1,k} = x_{1,k} - y_r$ et $z_{2,k} = x_{2,k} - \beta_{1,k}$, où $\beta_{1,k}$ est la sortie du filtre non-linéaire dont la dynamique est imposée telle que : $\dot{\beta}_{1,k} = -10(\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}) - 10T \tanh\left(\frac{\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}}{\varepsilon_1}\right) - z_{1,k}$.

En appliquant la procédure développée à la section 3.3, nous pouvons construire la CAI adaptative pour le système (3.51) comme suit:

Etape 1: A partir de (3.6) et (3.8), on peut déduire la CAI adaptative virtuelle et les lois d'apprentissage itératif et d'adaptation par apprentissage itératif suivantes :

$$\alpha_{1,k} = -20z_{1,k} - \hat{f}_{1,k}(t) - \hat{\theta}_k^T \psi_{1,k} + \dot{y}_r + u_{r1,k}$$

$$\hat{f}_{1,k}(t) = \hat{f}_{1,k-1}(t) + 10z_{1,k} + 10(x_{1,k}(t) - x_{1,k-1}(t)),$$

où $\hat{f}_{1,-1}(t) = 0$ et $x_{1,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, 2\pi]$.

A partir de (3.9) et (3.10), le terme de robustesse est déduit tel que :

$$\dot{u}_{r1,k} = -10^{-5}u_{r1,k} - 10^{-5} \left(z_{1,k} + \frac{\chi_{1,k}u_{r1,k}}{u_{r1,k}^2 + \delta_{1,k}^2} \right), u_{r1,0}(0) = 0.1$$

avec

$$\dot{\delta}_{1,k} = -10^{-5}\delta_{1,k} - 10^{-5} \frac{\chi_{1,k}\delta_{1,k}}{u_{r1,k}^2 + \delta_{1,k}^2}, \quad \delta_{1,0}(0) = 0.1$$

où $\chi_1 = |z_{1,k}| + 10|x_{1,k}(t) - x_{1,k-1}(t)| + 0.15$.

Etape 2: A partir de (3.6) et (3.24), la CAI adaptative pratique et la loi par apprentissage itératif correspondante sont déduites telles que:

$$u_k = -30(x_{2,k} - \beta_{1,k}) - \hat{f}_{2,k}(t) - \hat{\lambda}_{2,k}s_{2,k} + \dot{\beta}_{1,k} + u_{r,k}$$

$$\hat{f}_{2,k}(t) = \hat{f}_{2,k-1}(t) + 10z_{2,k} + 10 \sum_{i=1}^2 (x_{i,k}(t) - x_{i,k-1}(t))$$

où $\hat{f}_{2,-1}(t) = 0$ et $x_{1,-1}(t) = 0$ et $x_{2,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, 2\pi]$.

A partir de (3.25) et (3.26), le terme de robustesse est obtenu tel que :

$$\dot{u}_{r2,k} = -10^{-5}u_{r2,k} - 10^{-5} \left(z_{2,k} + \frac{\chi_{2,k}u_{r2,k}}{u_{r2,k}^2 + \delta_{2,k}^2} \right), u_{r2,0}(0) = 0$$

avec

$$\dot{\delta}_{2,k} = -10^{-5}\delta_{2,k} - 10^{-5} \frac{\chi_{2,k}\delta_{2,k}}{u_{r2,k}^2 + \delta_{2,k}^2}, \quad \delta_{2,0}(0) = 0$$

où $\chi_2 = |z_{2,k}| + 10 \sum_{i=1}^2 |x_{i,k}(t) - x_{i,k-1}(t)|$.

Enfin, à partir de (3.31), la loi d'adaptation par apprentissage itératif est obtenue comme suit:

$$\dot{\hat{\theta}}_k = 10(\psi_1(x_{1,k})z_{1,k} + \psi_2(\bar{x}_{2,k})z_{2,k}) \text{ et } \hat{\theta}_0(0) = [0, 0]^T$$

Pour les besoins de la simulation relative à la dynamique du système (3.51), les fonctions non-linéaires continues et les perturbations dynamiques (supposées inconnues pour le calcul de la loi de commande), en plus des termes connus sont pris tels que :

$$f_{1,k} = x_{1,k} e^{-0.5x_{1,k}}, \quad f_{2,k} = x_{2,k} \sin(x_{1,k} + x_{2,k}), \quad \psi_{1,k} = [x_{1,k}^2 \ 0]^T, \quad \psi_{2,k} = [0 \ x_{1,k} x_{2,k}^2]^T,$$

$$g_k = 1 + x_{1,k}^2 x_{2,k}^2, \quad d_{1,k} = x_{1,k}^2 \sin^2(t), \quad d_{2,k} = \sin(x_{1,k} x_{2,k}) \cos(t) \text{ et } \theta = [2, 3]^T$$

Nous avons exécuté le système (3.51) pour 20 itérations sous la commande ci-dessus et la condition d'alignement suivante : $z_{1,k}(0) = z_{1,k-1}(2\pi)$, $z_{2,k}(0) = z_{2,k-1}(2\pi)$, $u_{r1,k}(0) = u_{r1,k-1}(2\pi)$, $u_{r2,k}(0) = u_{r2,k-1}(2\pi)$, $\delta_{1,k}(0) = \delta_{1,k-1}(2\pi)$, $\delta_{2,k}(0) = \delta_{2,k-1}(2\pi)$, $y_{1,k}(0) = y_{1,k-1}(2\pi)$, et $\hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(2\pi)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$.

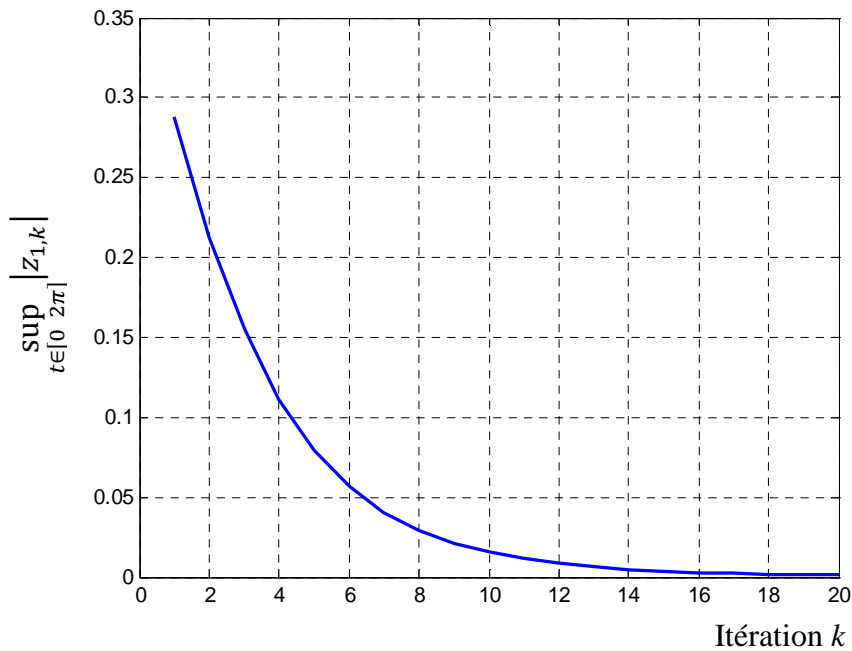


Fig.3.1 : Evolution de $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |z_{1,k}|$ du système (3.51) en fonction du nombre d'itérations.

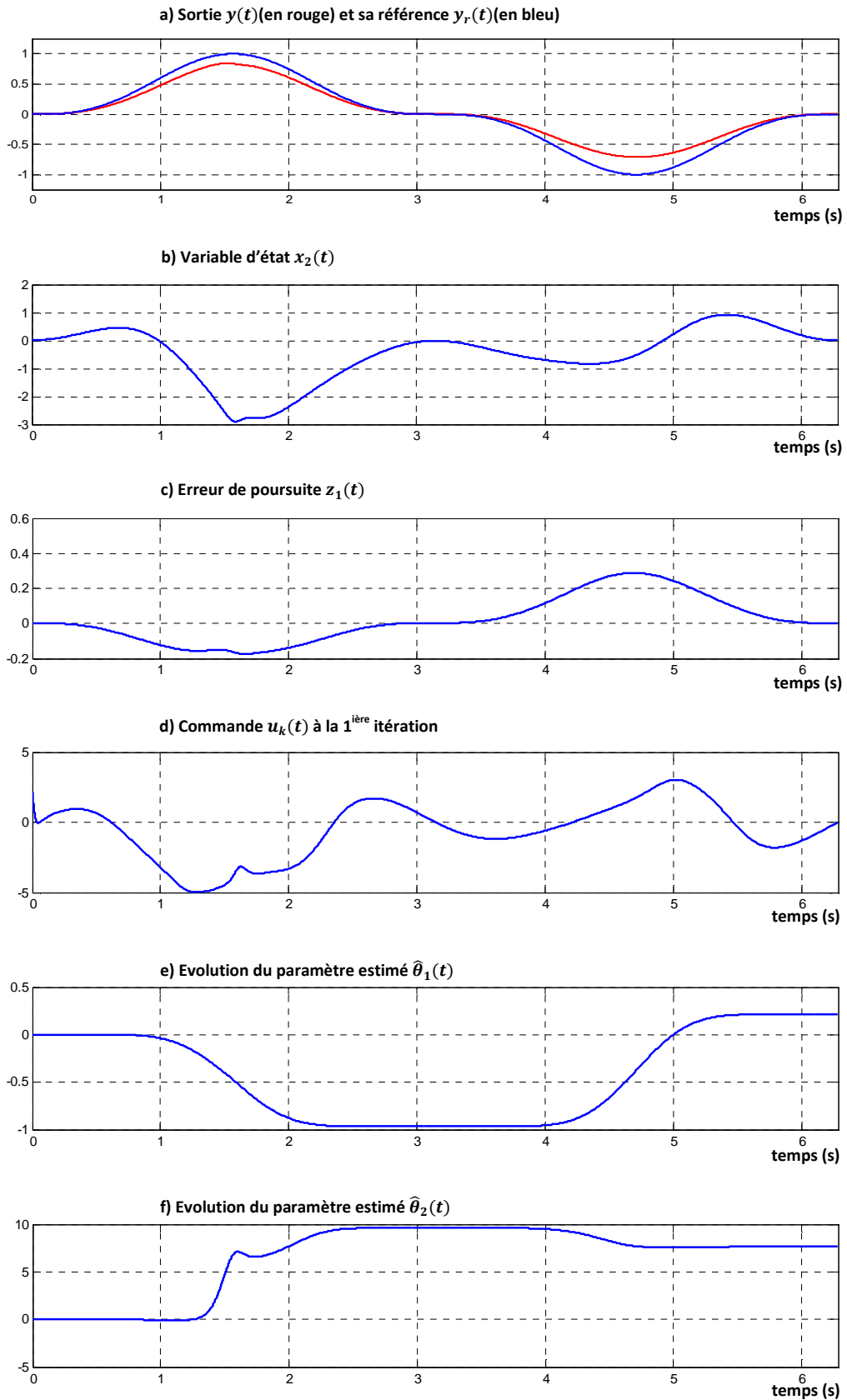


Fig.3.2 : Réponse du système (3.51) à la 1^{ière} itération.

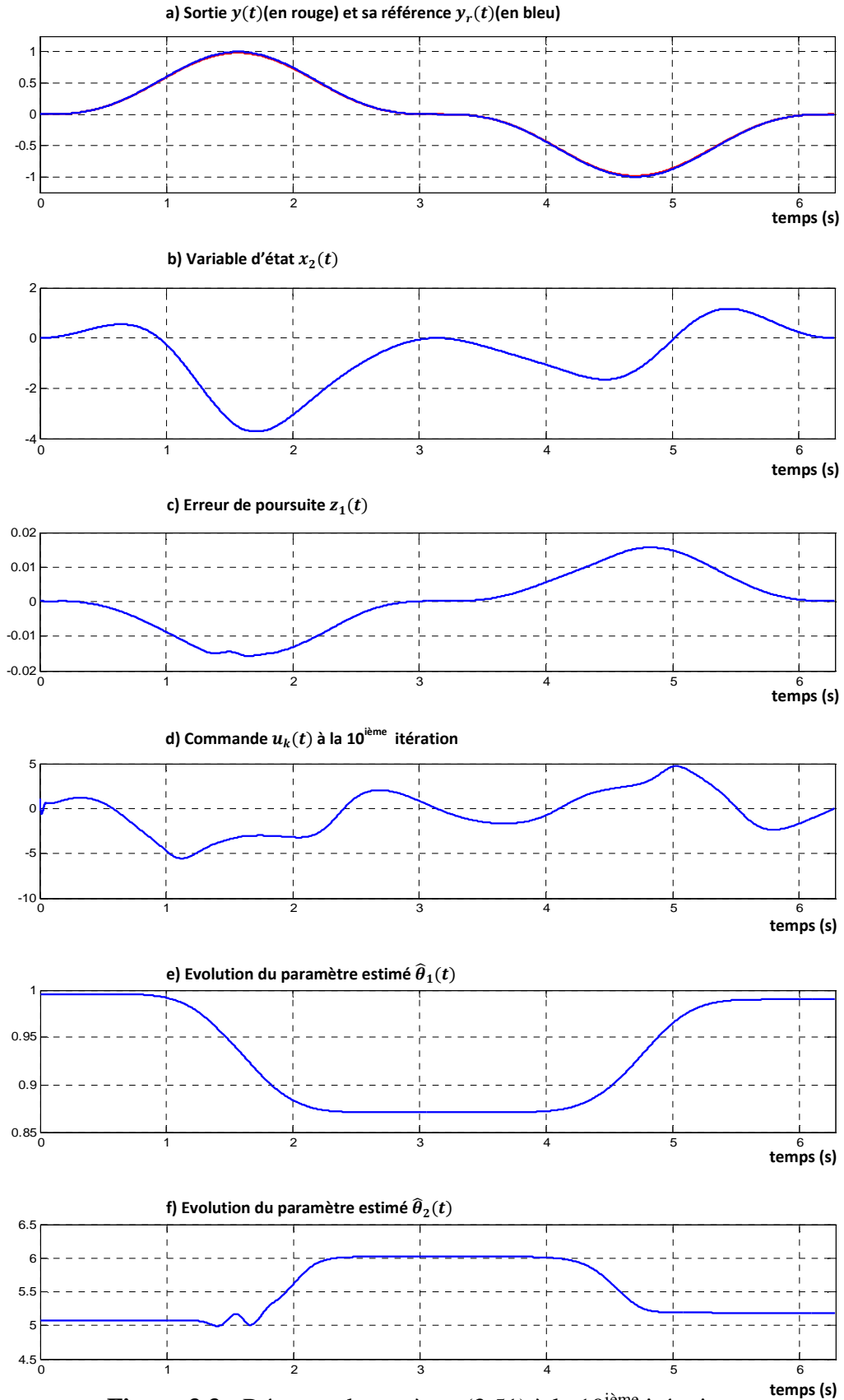


Figure 3.3 : Réponse du système (3.51) à la 10^{ème} itération

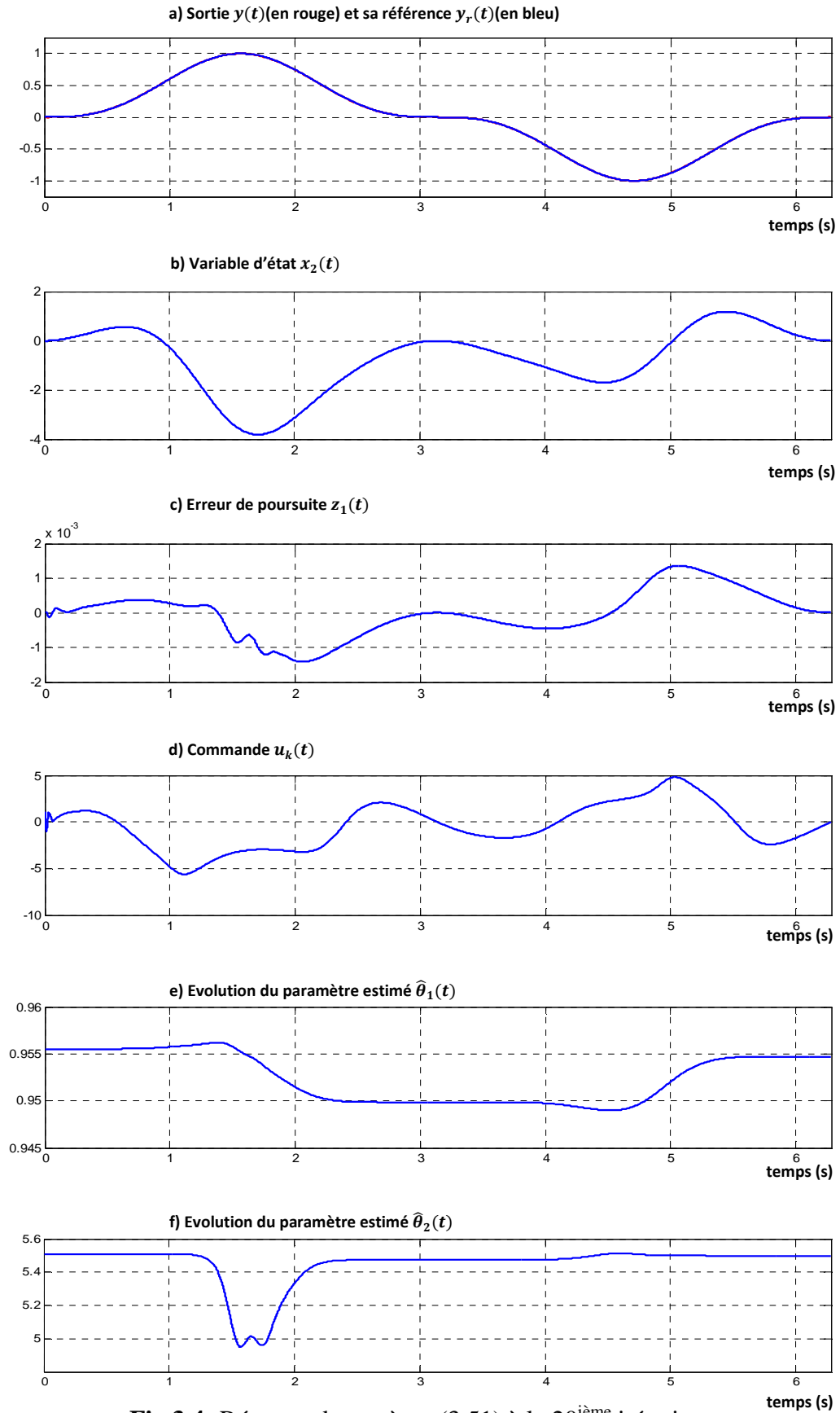


Fig.3.4: Réponse du système (3.51) à la 20^{ième} itération.

Les résultats de simulation sont représentés aux Figures 3.1 à 3.4. La Figure 3.1 donne l'évolution de l'erreur de poursuite maximale par itération, celle-ci matérialise la décroissance de cette grandeur itération après itération de plus cette erreur atteint à la vingtième itération, une valeur très faible. Les Figures 3.2 à 3.4 représentent l'évolution des principales grandeurs à la première itération ($k=1$), à la dixième itération ($k=10$) et, à la vingtième itération ($k=20$). En fait, à la première itération, la poursuite de la référence n'est pas encore réalisée cependant la sortie est lisse et reste proche de sa référence (Fig.3.2a) et l'erreur de poursuite est encore importante (Fig.3.2c). La poursuite de la référence s'améliore à la dixième itération comme le montre les figures (Fig.3.3a) et (Fig.3.3c). A la vingtième itération, la poursuite de la référence est pratiquement satisfaite (Fig. 3.4a) et l'erreur de poursuite prend des valeurs faibles (Fig. 3.4c). En outre, le signal de commande, appliqué à l'entrée du système, est continu et bornée à la première itération (Fig. 3.2d), à la dixième itération (Fig. 3.3d) et à la vingtième itération (Fig. 3.4d). Les profils des paramètres de commande $\hat{\theta}_{1,k}(t)$ et $\hat{\theta}_{2,k}(t)$ évoluent d'une manière continue et restent toujours bornées. Ceci est confirmé par les Figures 3.2e à 3.4e pour $\hat{\theta}_{1,k}(t)$ et par les Figures 3.2f à 3.4f pour $\hat{\theta}_{2,k}(t)$. Ces résultats révèlent la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et la poursuite, avec une bonne précision, de la trajectoire de référence par la sortie du système dès le vingtième cycle. Ceci apporte la preuve de l'efficacité du schéma proposé pour la commande des systèmes non-linéaires incertains fonctionnant d'une manière répétitive.

3.5.2. Exemple 2 : articulation d'un robot manipulateur

Nous considérons comme deuxième exemple le cas d'un robot manipulateur à un degré de liberté actionné par un moteur à courant continu. Ce dernier peut être modélisé comme suit [26]:

$$\begin{cases} D\ddot{q}_k + B\dot{q}_k + N\sin(q_k) = I_k + \Delta_I \\ M\dot{I}_k + HI_k = V_k - K_m\dot{q}_k \end{cases} \quad (3.52)$$

où q_k , \dot{q}_k et \ddot{q}_k représente respectivement, à la $k^{\text{ième}}$ itération, la position angulaire, la vitesse et l'accélération. I_k est le courant du moteur, V_k est la tension de commande en volt et Δ_I est la perturbation prise telle que $\Delta_I = 4\sin(t)$. Les valeurs des paramètres, en unité appropriée, sont comme suit : $D = 1$, $B = 1$, $M = 0.05$, $H = 0.5$, $N = 10$ et $K_m = 10$.

En posant $x_{1k} = q_k$, $x_{2k} = \dot{q}_k$ et $x_{3k} = \frac{I_k}{D}$, le système (3.52) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} \\ \dot{x}_{2,k} = x_{3,k} + f_2(x_{1,k}, x_{2,k}) + d_2 \\ \dot{x}_{3,k} = gu_k + f_3(x_{2,k}, x_{3,k}) \end{cases} \quad (3.53)$$

où $u_k = V_k$, $g = 1/DM$, $f_2(x_{1,k}, x_{2,k}) = -\frac{N}{D}\sin(x_{1,k}) - \frac{B}{D}x_{2,k}$, $f_3(x_{2,k}, x_{3,k}) = -\frac{K_m}{DM}x_{2,k} - \frac{H}{M}x_{3,k}$, et $d_2 = 4\sin(t)$.

Notre objectif consiste à forcer la sortie du système $y_k = x_{1,k}$ à suivre la trajectoire désirée $y_r = \sin(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Soit $z_{1,k} = x_{1,k} - y_r$ l'erreur de poursuite, la dynamique des erreurs du système est donc donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = x_{2,k} - \dot{y}_r \\ \dot{z}_{2,k} = x_{3,k} + f_{2,k} - \dot{\beta}_{1,k} + d_2 \\ \dot{z}_{3,k} = gu_k + f_{3,k} - \dot{\beta}_{2,k} \end{cases}$$

avec $z_{2,k} = x_{2,k} - \beta_{1,k}$ et $z_{3,k} = x_{3,k} - \beta_{2,k}$ où $\beta_{1,k}$ et $\beta_{2,k}$ sont les sorties de deux filtres non linéaires dont les dynamiques sont données par :

$$\dot{\beta}_{1,k} = -20(\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}) - 10Tanh\left(\frac{\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}}{\varepsilon_1}\right) - z_{1,k}$$

$$\dot{\beta}_{2,k} = -20(\beta_{2,k} - \alpha_{2,k}) - 10Tanh\left(\frac{\beta_{2,k} - \alpha_{2,k}}{\varepsilon_2}\right) - z_{2,k}.$$

En appliquant la procédure développée à la section 3.3, on peut concevoir une CAI adaptative pour le système (3.53) comme suit:

Etape 1 : A partir de (3.8), la première CAI virtuelle est déduite telle que :

$$\alpha_{1k} = -10z_{1k} + \dot{y}_r + u_{r1k}$$

A partir de (3.9) et (3.10), le terme de robustesse u_{r1k} est donc donnée par :

$$\dot{u}_{r1,k} = -10^{-5}u_{r1,k} - 10^{-5} \left(z_{1,k} + \frac{\chi_{1,k}u_{r1,k}}{u_{r1,k}^2 + \delta_{1,k}^2} \right), u_{r1,k}(0) > 0$$

avec

$$\dot{\delta}_{1,k} = -10^{-5}\delta_{1,k} - 10^{-5} \frac{\chi_{1,k}\delta_{1,k}}{u_{r1,k}^2 + \delta_{1,k}^2}, \quad \delta_{1,k}(0) > 0$$

où $\chi_{1,k} = 0.15$.

Etape 2: A partir de (3.6) et (3.15), la deuxième CAI adaptative virtuelle et la loi d'apprentissage itératif correspondante sont obtenues telles que :

$$\alpha_{2k} = -20z_{2k} - z_{1k} - \hat{f}_{2k} + \dot{\hat{\beta}}_{1k} + u_{r2k}$$

$$\hat{f}_{2,k}(t) = \hat{f}_{2,k-1}(t) + 2z_{2,k} + 20 \sum_{i=1}^2 (x_{i,k}(t) - x_{i,k-1}(t))$$

où $\hat{f}_{2,-1}(t) = 0$ et $x_{1,-1}(t) = 0$ et $x_{2,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, 2\pi]$.

A partir de (3.16) et (3.17), le terme de robustesse u_{r2k} est déduit comme suit :

$$\dot{u}_{r2,k} = -10^{-5}u_{r2,k} - 10^{-5} \left(z_{2,k} + \frac{\chi_{2,k}u_{r2,k}}{u_{r2,k}^2 + \delta_{2,k}^2} \right), u_{r2,k}(0) > 0$$

avec

$$\dot{\delta}_{2,k} = -10^{-5}\delta_{2,k} - 10^{-5} \frac{\chi_{2,k}\delta_{2,k}}{u_{r2,k}^2 + \delta_{2,k}^2}, \quad \delta_{2,k}(0) > 0$$

où $\chi_2 = |z_{2,k}| + 10 \sum_{i=1}^2 |x_{i,k}(t) - x_{i,k-1}(t)|$.

Etape 3: A partir de (3.6) et (3.24), la CAI adaptative pratique et la loi d'apprentissage itératif correspondante sont obtenues telles que :

$$u_k = -10z_{3k} - z_{2k} - \hat{f}_{3k} + \dot{\hat{\beta}}_{2k} + u_{r3k}$$

$$\hat{f}_{3,k}(t) = \hat{f}_{3,k-1}(t) + 5z_{3,k} + 20 \sum_{i=2}^3 (x_{i,k}(t) - x_{i,k-1}(t))$$

où $\hat{f}_{3,-1}(t) = 0$ et $x_{2,-1}(t) = 0$ et $x_{3,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, 2\pi]$.

A partir de (3.25) et (3.26), le terme de robustesse u_{r3k} est imposé comme suit :

$$\dot{u}_{r3,k} = -10^{-5}u_{r3,k} - 10^{-5} \left(z_{3,k} + \frac{\chi_{3,k}u_{r3,k}}{u_{r3,k}^2 + \delta_{3,k}^2} \right), u_{r3,k}(0) > 0$$

avec

$$\dot{\delta}_{3,k} = -10^{-5}\delta_{3,k} - 10^{-5} \frac{\chi_{3,k}\delta_{3,k}}{u_{r3,k}^2 + \delta_{3,k}^2}, \quad \delta_{3,k}(0) > 0$$

où $\chi_{3,k} = |z_{3,k}| + 10 \sum_{i=2}^3 |x_{i,k}(t) - x_{i,k-1}(t)|$.

Nous avons simulé durant 40 cycles le fonctionnement du système (3.53) sous la commande détaillée ci-dessus et dans la condition d'alignement suivante: $z_{1,k}(0) = z_{1,k-1}(T)$, $z_{2,k}(0) = z_{2,k-1}(T)$, $z_{3,k}(0) = z_{3,k-1}(T)$, $u_{r1,k}(0) = u_{r1,k-1}(T)$, $u_{r2,k}(0) = u_{r2,k-1}(T)$, $u_{r3,k}(0) = u_{r3,k-1}(T)$, $\delta_{1,k}(0) = \delta_{1,k-1}(T)$, $\delta_{2,k}(0) = \delta_{2,k-1}(T)$, $\delta_{3,k}(0) = \delta_{3,k-1}(T)$, $y_{1,k}(0) = y_{1,k-1}(T)$, $y_{2,k}(0) = y_{2,k-1}(T)$ et $\hat{\theta}_k(0) = \hat{\theta}_{k-1}(T), \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

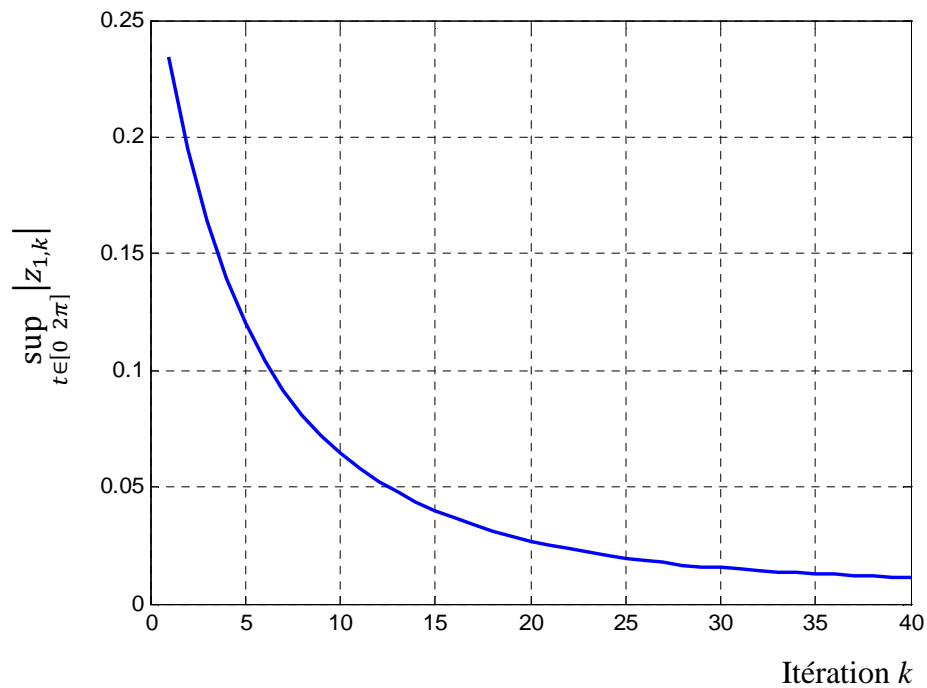


Fig. 3.5 : Evolution de $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |z_{1,k}|$ du système (3.53) en fonction du nombre d'itérations

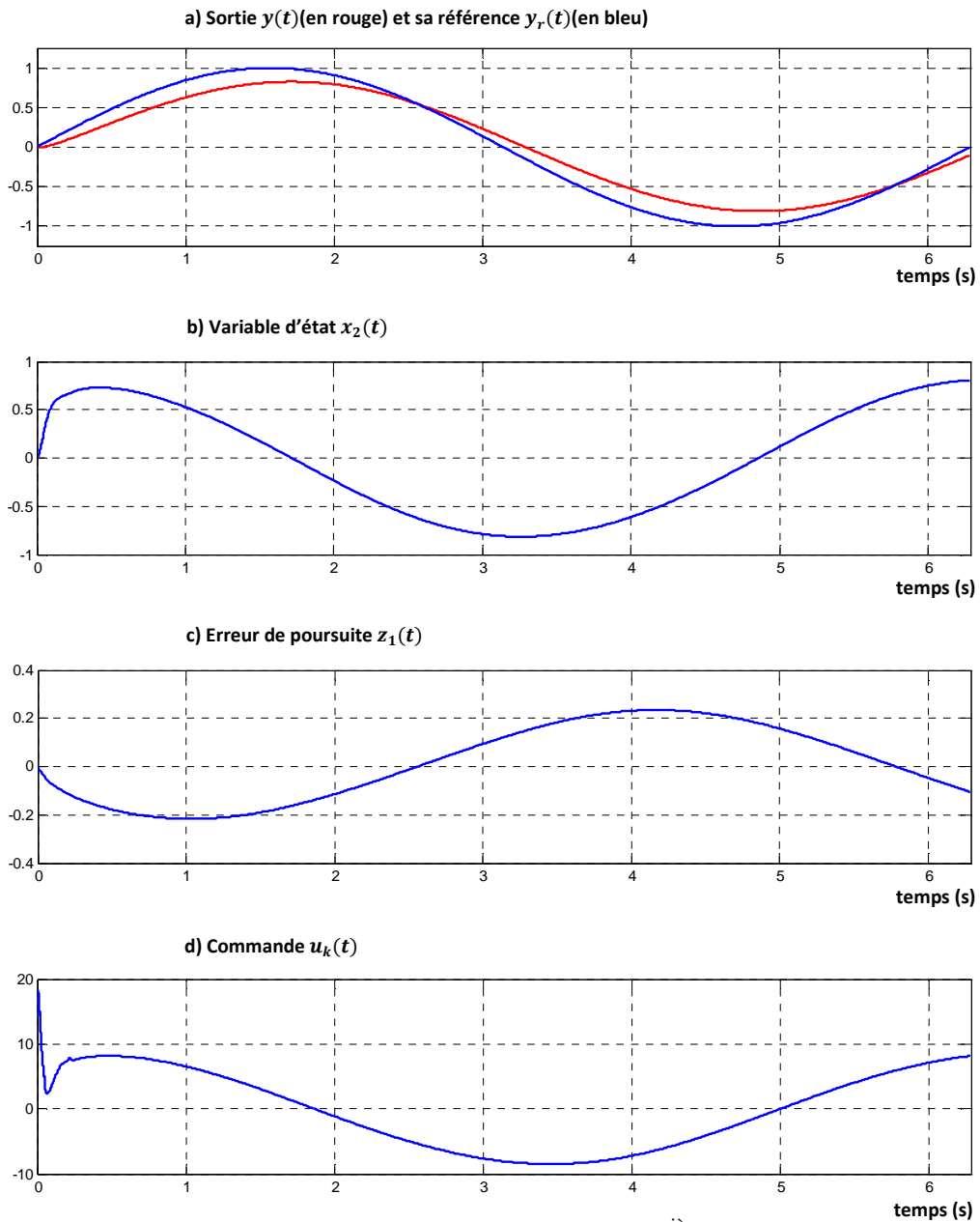


Fig.3.6 : Réponse du système (3.53) à la 1^{ière} itération.

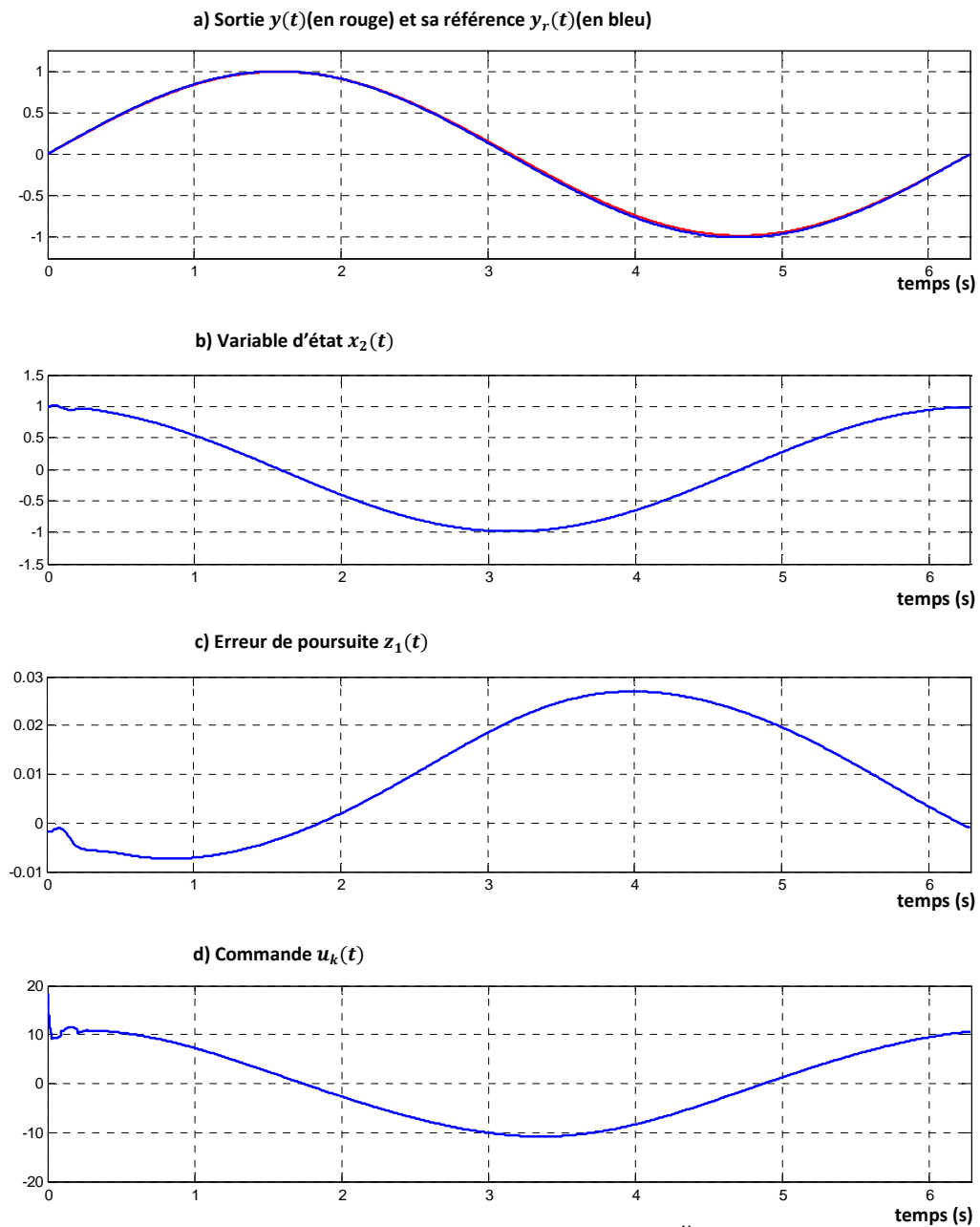


Fig. 3.7 : Réponse du système (3.53) à la 20^{ème} itération.

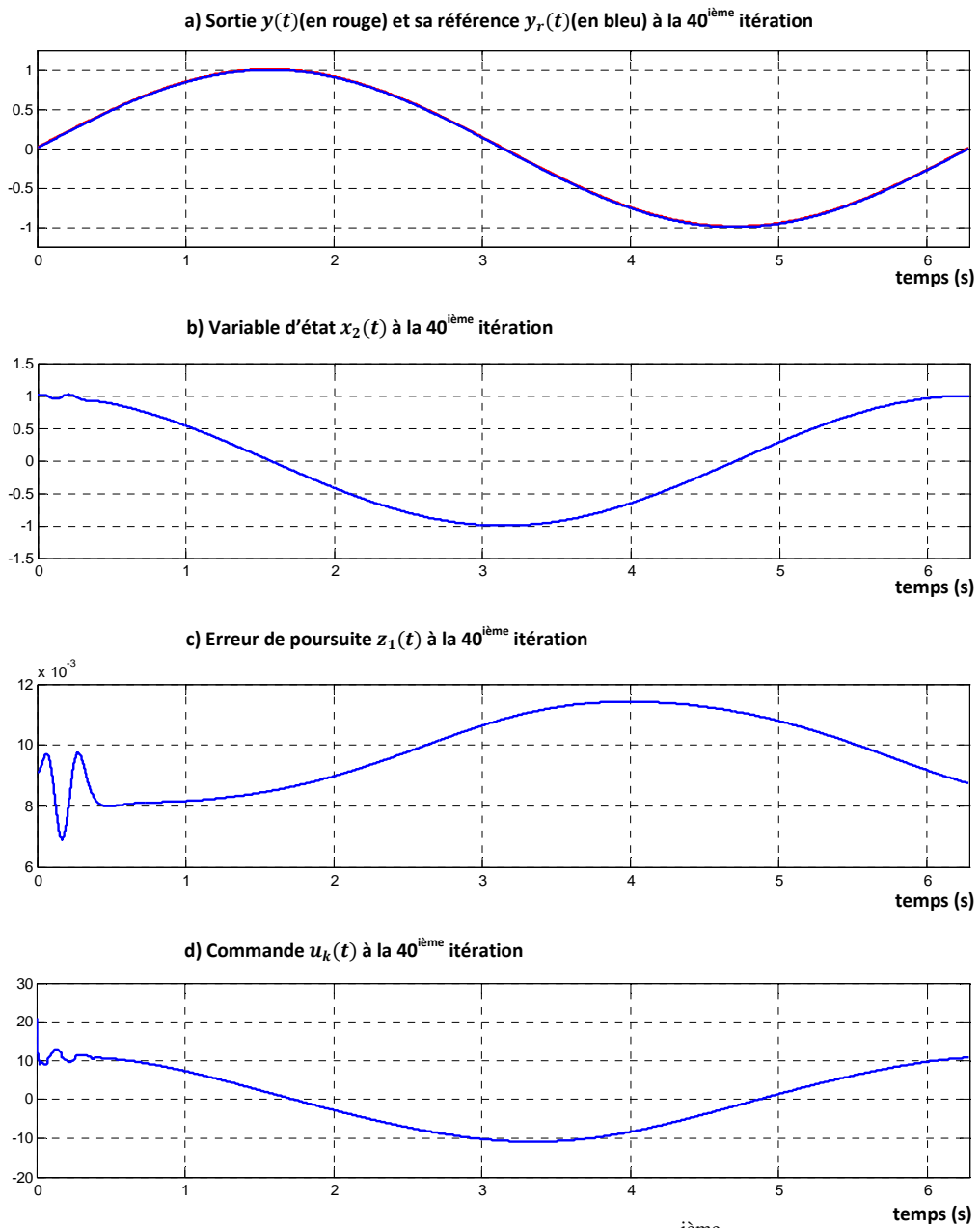


Fig. 3.8 : Réponse du système (3.53) à la 40^{ième} itération.

Les résultats de simulation du fonctionnement répétitif du système (3.53) sont représentés aux Figures 3.5 à 3.8. En outre, la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite, vers zéro en fonction du nombre d'itérations, est mise en évidence par la Figure 3.5 où cette erreur prend une valeur faible à la quarantième itération. Les signaux du système en boucle fermée évoluent selon les Figures 3.6 à 3.8 respectivement à la première itération ($k=1$), à la vingtième itération ($k=20$) et, à la quarantième itération ($k=40$). De la Figure 3.6, on note qu'à la première itération, la poursuite de la référence est encore insatisfaisante car l'erreur de poursuite est appréciable (Fig.3.6c) cependant la sortie reste lisse et dans le voisinage de la référence (Fig.3.6a). L'augmentation du nombre d'itérations permet d'améliorer la poursuite de la référence et à la vingtième itération, comme le montre les figures (Fig.3.7a) & (Fig.3.7c), une erreur de poursuite non négligeable persiste encore. Il faut attendre la quarantième itération pour que la poursuite de la référence soit pratiquement satisfaisante (Fig. 3.8a) et que l'erreur de poursuite prenne une faible valeur (Fig. 3.8c). En outre, d'après les figures 3.6b à 3.8b, la vitesse de l'articulation reste toujours bornée et évolue d'une manière continue. De plus, le signal de commande, appliqué à l'entrée du système, est continu et reste borné que ce soit à la première itération (Fig. 3.6d), à la vingtième itération (Fig. 3.7d) ou encore à la quarantième itération (Fig. 3.8d). Comme il a été démontré, ces résultats révèlent la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée de plus, la sortie du système $y_k(t)$ suit sa référence $y_r(t)$ avec une grande précision dès la quarantième itération. En outre, ces résultats prouvent l'efficacité du schéma proposé pour la commande des robots manipulateurs devant exécuter une tâche répétitive.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un schéma de la CAI adaptative pour une classe de systèmes non-linéaires triangulaires inférieurs et affine en la commande pouvant présenter des incertitudes paramétriques et non paramétriques. De plus, la sortie doit suivre une référence d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fini sous la condition d'alignement.

Afin d'établir ce schéma de commande et de synthétiser la loi de commande, nous avons exploité la procédure de synthèse par backstepping filtré. Ainsi, la loi de commande développée comporte principalement trois termes : un mécanisme d'apprentissage itératif pour manipuler les incertitudes non paramétriques, une loi d'adaptation par apprentissage itératif pour manipuler les incertitudes paramétriques et, un terme de robustesse pour compenser l'effet des perturbations dynamiques et certaines erreurs d'apprentissage.

Le schéma proposé se caractérise principalement par le fait que l'apprentissage itératif des fonctions non-linéaires inconnues a été traité et le problème de dérivation analytique des commandes virtuelles, associé à la procédure conventionnelle de synthèse par backstepping, a été évité en introduisant des filtres non-linéaires, à chaque étape de synthèse, pour approximer ces dérivées. Ceci a conduit à une commande beaucoup plus simple et exigeant moins de charge de calcul.

La méthode d'analyse de stabilité et de la convergence par la fonctionnelle de Lyapunov a été utilisée pour prouver que ce schéma de la CAI adaptative garanti la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite dans le domaine des itérations et la bornitude de tous les signaux de la boucle de commande. Les performances satisfaisantes de cette loi de commande ont été vérifiées en simulant deux exemples : le premier concerne un système d'ordre deux et le deuxième représente l'articulation d'un robot actionnée par un moteur à courant continu.

CAI adaptative des systèmes non linéaires incertains non affines en la commande

4.1. Introduction

Afin de résoudre le problème de poursuite idéal sur un intervalle de temps fini, nous proposons dans ce chapitre une schéma de CAI adaptative pour une classe de systèmes triangulaires inférieurs, non affine en la commande, non-linéairement paramétrés, et fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fini sous la condition d'alignement. En outre, la procédure de synthèse par backstepping est utilisée pour la conception de la loi de commande, et l'analyse de la stabilité et de la convergence est effectuée par la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov. Les difficultés principales à surmonter pendant la synthèse de commande sont: la forme non affine du système, l'existence des fonctions incertaines non-linéairement paramétrées, et des fonctions non-linéaires inconnues. Comme nous le monterons dans la suite de ce chapitre, ces difficultés peuvent être surmontées en utilisant le théorème de la valeur moyenne combiné à celui des fonctions implicites afin de transformer le système non affine en un système affine. Pour ce dernier système, les variables d'état à utiliser comme entrée de commande virtuelle et l'entrée de commande réelle apparaissent affine. De plus en utilisant le théorème de séparation, les paramètres non-linéaires connectés sont séparés des fonctions non-linéaires continues localement Lipchitziennes. Par la suite, des lois d'apprentissage itératif et des lois adaptation par apprentissage itératif sont conçues.

4.2. Modèle du système et formulation du problème

Considérons la classe de systèmes non-linéaires incertains où la sortie doit suivre répétitivement une référence donnée sur un intervalle de temps fini. Cette classe est représentée par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = f_{i1}(\bar{x}_{i,k}, \theta_i) + f_{i2}(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) \\ \dot{x}_{n,k} = f_{n1}(\bar{x}_{n,k}, \theta_n) + f_{n2}(\bar{x}_{n,k}, u_k) \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (4.1)$$

où les notations utilisées au niveau de la relation (4.1) sont définies ci-dessous.

Le vecteur $\bar{x}_{i,k}$ est défini tel que $\bar{x}_{i,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{i,k}]^T \in \mathcal{R}^i \times [0, T]$ avec $i = (1, n - 1)$ de plus, l'état du système est représenté, à la $k^{\text{ième}}$ itération, par le vecteur $\bar{x}_{n,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{n,k}]^T \in \mathcal{R}^n \times [0, T]$ où n dénote l'ordre du système. L'entrée et la sortie du système, à la $k^{\text{ième}}$ itération, sont respectivement définies par $u_k \in \mathcal{R}$ et $y_k \in \mathcal{R}$. Les termes $\theta_i \in \mathcal{R}, i = (1, n)$, représentent les paramètres non-linéaires connectés. Par ailleurs, les fonctions $f_{i1}(\bar{x}_{i,k}, \theta_i)$, définissant des applications dans $\mathcal{R}^i \times \mathcal{R} \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}, i = (1, n)$, sont non-linéaires paramétriques et continues, celles-ci sont supposées inconnues. De plus, les fonctions $f_{i2}(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k})$, définissant des applications dans $\mathcal{R}^i \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}, i = (1, n)$, sont non-linéaires continues et inconnues, celles-ci sont supposées différentiables par rapport à $x_{i,k}$ où $x_{n+1,k} = u_k$. Ici, $k \in \mathbb{Z}_+$ dénote l'indice des itérations et $t \in [0, T]$. Pour la synthèse de la loi de commande du système non-linéaire (4.1), nous recourons aussi aux fonctions suivantes :

$$g_{i,k} = g_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) = \frac{\partial f_{i2}(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k})}{\partial x_{i+1,k}}$$

$$g_{n,k} = g_n(\bar{x}_{n,k}, u_k) = \frac{\partial f_{n2}(\bar{x}_{n,k}, u_k)}{\partial u_k}$$

L'objectif recherché est de synthétiser une loi de la CAI adaptative assurant d'une part la bornitude de tous les signaux intervenant dans la boucle de commande du système $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et d'autre part la convergence du signal de sortie y_k vers une trajectoire de référence $y_r, \forall t \in [0, T]$ lorsque k tend vers l'infini.

La synthèse de la CAI adaptative pour le système (4.1) est menée dans la condition où les **Hypothèses 4.1, 4.2** et **4.3** suivantes sont satisfaites.

Hypothèse 4.1: Les signes de $g_{i,k}$ sont connus et il y a des constantes positives inconnues \bar{g}_i et \underline{g}_i telles que $0 < \underline{g}_i \leq |g_{i,k}| \leq \bar{g}_i$, $\forall (\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) \in \mathcal{R}^i \times \mathcal{R}$, $i = (1, n)$. Sans perte de généralité, on suppose également que $g_{i,k} \geq \underline{g}_i > 0$.

Hypothèse 4.2: Ils existent des constantes positives inconnues \underline{g}_i^d telles que $|\dot{g}_{i,k}| \leq \underline{g}_i^d$, $\forall (\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) \in \mathcal{R}^i \times \mathcal{R}$, $i = (1, n)$.

Hypothèse 4.3: Le signal de référence y_r et sa dérivée temporelle \dot{y}_r sont supposées bornées et continues.

4.3. Synthèse de la CAI adaptative

Dans cette section, en utilisant la procédure de synthèse par backstepping, nous allons synthétiser une nouvelle loi de la CAI adaptative pour la classe de systèmes (4.1). La procédure de synthèse comporte n étapes. A chaque étape, une CAI adaptative virtuelle, $\alpha_{i,k}$, $i = (1, n - 1)$, est développée. La CAI adaptative pratique est obtenue à l'étape finale. Chaque étape de cette procédure est basée sur le changement de coordonnées suivant:

$$\begin{cases} z_{1,k} = x_{1,k} - y_r \\ z_{i,k} = x_{i,k} - \alpha_{i-1,k}, \quad i = (2, n) \end{cases} \quad (4.2)$$

Compte tenu de (4.1), la dérivée temporelle de (4.2) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = f_{11}(x_{1,k}, \theta_1) + f_{12}(x_{1,k}, x_{2,k}) - \dot{y}_r \\ \dot{z}_{i,k} = f_{i1}(\bar{x}_{i,k}, \theta_i) + f_{i2}(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) - \dot{\alpha}_{i-1,k}, \quad i = (2, n - 1) \\ \dot{z}_{n,k} = f_{n1}(\bar{x}_{n,k}, \theta_n) + f_{n2}(\bar{x}_{n,k}, u_k) - \dot{\alpha}_{n-1,k} \end{cases} \quad (4.3)$$

Selon l'**Hypothèse 4.1**, on a :

$$\forall (x_{1,k}, x_{2,k}) \in \mathcal{R}^2; \quad \frac{\partial(f_{11}(x_{1,k}, \theta_1) + f_{12}(x_{1,k}, x_{2,k}) - \dot{y}_r)}{\partial x_{2,k}} = g_1(x_{1,k}, x_{2,k}) \geq \underline{g}_1 > 0.$$

$$\forall (\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) \in \mathcal{R}^{i+1}; \quad \frac{\partial(f_{i1}(\bar{x}_{i,k}, \theta_i) + f_{i2}(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) - \dot{\alpha}_{i-1,k})}{\partial x_{i+1,k}} = g_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) \geq \underline{g}_i > 0.$$

$$\forall (\bar{x}_{n,k}, u_k) \in \mathcal{R}^{n+1}; \quad \frac{\partial(f_{n1}(\bar{x}_{n,k}, \theta_n) + f_{n2}(\bar{x}_{n,k}, u_k) - \dot{\alpha}_{n-1,k})}{\partial u_k} = g_n(\bar{x}_{n,k}, u_k) \geq \underline{g}_n > 0.$$

Par ailleurs, d'après le lemme des fonctions implicites (Lemme A.3), pour chaque valeur de $\bar{x}_{i,k}$, il existe des fonctions continues $f_1^*(x_{1,k}, \dot{y}_r)$ et $f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \dot{\alpha}_{i-1,k})$ telles que :

$$f_{11}(x_{1,k}, \theta_1) + f_{12}(x_{1,k}, f_1^*(x_{1,k}, \dot{y}_r)) - \dot{y}_r = 0$$

$$f_{i1}(\bar{x}_{i,k}, \theta_n) + f_{i2}(\bar{x}_{i,k}, f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \dot{\alpha}_{i-1,k})) - \dot{\alpha}_{i-1,k} = 0, i = (2, n)$$

Donc, en exploitant le lemme des valeurs moyennes différentielles (Lemme A.2), nous pouvons exprimer (4.3) sous la forme (4.4) ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = g_{\vartheta_{1,k}}(x_{2,k} - f_1^*(x_{1,k}, \theta_1, \dot{y}_r)) \\ \dot{z}_{i,k} = g_{\vartheta_{i,k}}(x_{i+1,k} - f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k})), \quad i = (1, n) \\ \dot{z}_{n,k} = g_{\vartheta_{n,k}}(u_k - f_n^*(\bar{x}_{n,k}, \theta_n, \dot{\alpha}_{n-1,k})) \end{cases} \quad (4.4)$$

Avec :

$$g_{\vartheta_{1,k}} = \left. \frac{\partial(f_{11}(x_{1,k}, \theta_1) + f_{12}(x_{1,k}, x_{2,k}) - \dot{y}_r)}{\partial x_{2,k}} \right|_{x_{2,k}^{\vartheta_1}}; x_{2,k}^{\vartheta_1} = \vartheta_1 x_{2,k} + (1 - \vartheta_1) f_1^*(x_{1,k}, \theta_1, \dot{y}_r) \text{ et } 0 < \vartheta_1 < 1.$$

$$g_{\vartheta_{i,k}} = \left. \frac{\partial(f_{i1}(\bar{x}_{i,k}, \theta_i) + f_{i2}(\bar{x}_{i,k}, x_{i+1,k}) - \dot{\alpha}_{i-1,k})}{\partial x_{i+1,k}} \right|_{x_{i+1,k}^{\vartheta_i}}; x_{i+1,k}^{\vartheta_i} = \vartheta_i x_{i+1,k} + (1 - \vartheta_i) f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k}) \text{ et } 0 < \vartheta_i < 1.$$

$$g_{\vartheta_{n,k}} = \left. \frac{\partial(f_{n1}(\bar{x}_{n,k}, \theta_n) + f_{n2}(\bar{x}_{n,k}, u_k) - \dot{\alpha}_{n-1,k})}{\partial u_k} \right|_{u_k = u_k^{\vartheta_n}}; u_k^{\vartheta_n} = \vartheta_n u_k + (1 - \vartheta_n) f_n^*(\bar{x}_{n,k}, \theta_n, \dot{\alpha}_{n-1,k}) \text{ et } 0 < \vartheta_n < 1.$$

Compte tenu de (4.3) et du fait que $f(z_k) = f(z_0) + \sum_{j=1}^k (f(z_j) - f(z_{j-1}))$, par conséquent le système non-linéaire (4.4), peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = g_{\vartheta_{1,k}} \left(z_{2,k} + \alpha_{1,k} - f_1^*(x_{1,0}, \theta_1, \dot{y}_r) - \sum_{j=1}^k (f_1^*(x_{1,j}, \theta_1, \dot{y}_r) - f_1^*(x_{1,j-1}, \theta_1, \dot{y}_r)) \right) \\ \dot{z}_{i,k} = g_{\vartheta_{i,k}} \left(z_{i+1,k} + \alpha_{i,k} - f_i^*(\bar{x}_{i,0}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,0}) - \sum_{j=1}^k (f_i^*(\bar{x}_{i,j}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,j}) - f_i^*(\bar{x}_{i,j-1}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,j-1})) \right) \\ \quad i = (2, n-1) \\ \dot{z}_{n,k} = g_{\vartheta_{n,k}} \left(u_k - f_n^*(\bar{x}_{n,0}, \theta_n, \dot{\alpha}_{n-1,0}) - \sum_{j=1}^k (f_n^*(\bar{x}_{n,j}, \theta_n, \dot{\alpha}_{n-1,j}) - f_n^*(\bar{x}_{n,j-1}, \theta_n, \dot{\alpha}_{n-1,j-1})) \right) \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans ce qui suit, nous notons respectivement $f_1^*(x_{1,0}, \theta_1, \dot{y}_r)$ et $f_i^*(\bar{x}_{i,0}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,0})$, $i = (2, n-1)$ par $f_1^*(t)$ et $f_i^*(t)$, $i = (2, n-1)$. Du fait que les fonctions non-linéaires inconnues $f_i^*(t)$, $i = (1, n)$ sont invariantes dans le domaine des itérations, par conséquent, nous pouvons recourir à la loi d'apprentissage itératif suivante :

$$\hat{f}_{i,k}(t) = \hat{f}_{i,k-1}(t) - \eta_i z_{i,k}, \quad \hat{f}_{i,-1}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.6)$$

où $\hat{f}_{i,k}(t)$ représente l'estimé de $f_i^*(t)$ à la $k^{\text{ième}}$ itération et $\eta_i > 0$ est un gain d'apprentissage.

Afin de parvenir à synthétiser la CAI adaptative, nous avons encore besoin d'introduire l'**Hypothèse 4.4** suivante :

Hypothèse 4.4: Les fonctions non-linéaires $f_1^*(x_{1,k}, \theta_1, \dot{y}_r)$ et $f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k})$, $i = (2, n)$, sont uniformément localement Lipchitziennes pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$, c'est-à-dire, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, ils existent des fonctions continues définies positives, connues et bornées $h_i(\bar{x}_{i,k}, x_{i,k-1})$, $i = (1, n)$ et des termes paramétriques inconnus $\lambda_i(\theta_i)$, $i = (1, n)$, telles que :

$$\begin{aligned} |f_1^*(x_{1,k}, \theta_1, \dot{y}_r) - f_1^*(x_{1,k-1}, \theta_1, \dot{y}_r)| &\leq \lambda_1(\theta_1) h_1(x_{1,k}, x_{1,k-1}) |x_{1,k} - x_{1,k-1}| \\ |f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k}) - f_i^*(\bar{x}_{i,k-1}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k-1})| &\leq \lambda_i(\theta_i) h_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1}) \sum_{l=1}^i |x_{l,k} - x_{l,k-1}| \end{aligned}$$

Remarque 4.1: L'**Hypothèse 4.4** implique que les variances des fonctions non-linéairement paramétrées sont bornées par des fonctions connues, $h_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1})$, et par des termes paramétriques inconnus, $\lambda_i(\theta_i)$. En effet, l'**Hypothèse 4.4** permet de traiter les fonctions non-linéairement paramétrées, i.e. $f_1^*(x_{1,k}, \theta_1, \dot{y}_r)$ et $f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k})$. Certainement, si $f_1^*(x_{1,k}, \theta_1, \dot{y}_r)$ et $f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k})$ sont supposées différentiables par rapport à $\bar{x}_{i,k}$, en s'aidant du théorème des valeurs moyennes (Lemme A.2) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |f_1^*(x_{1,k}, \theta_1, \dot{y}_r) - f_1^*(x_{1,k-1}, \theta_1, \dot{y}_r)| &\leq g_1(x_{1,k}, x_{1,k-1}, \theta_1) |x_{1,k} - x_{1,k-1}| \\ |f_i^*(\bar{x}_{i,k}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k}) - f_i^*(\bar{x}_{i,k-1}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,k-1})| &\leq g_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1}, \theta_i) \sum_{l=1}^i |x_{l,k} - x_{l,k-1}| \end{aligned}$$

Finalement, l'emploi de la technique de séparation des paramètres pour des fonctions non-linéaires continues (lemme A.4) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} g_1(x_{1,k}, x_{1,k-1}, \theta_1) &\leq \lambda_1(\theta_1) h_1(x_{1,k}, x_{1,k-1}) \\ g_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1}, \theta_i) &\leq \lambda_i(\theta_i) h_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1}) \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de commencer la synthèse de la CAI adaptative par la procédure du backstepping.

Etape 1: Prenons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{1,k} = \frac{1}{2g_{\vartheta_{1,k}}} z_{1,k}^2 + \frac{1-\gamma_1}{2\Gamma_1} \tilde{\lambda}_{1,k}^2 \quad (4.7)$$

où $\Gamma_1 > 0$ est un gain d'adaptation par apprentissage et $0 < \gamma_1 < 1$ est un gain de pondération. En utilisant l'**Hypothèse 4.4**, la dérivée temporelle de $V_{1,k}(t)$ le long de la première équation de (4.5) est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} &= -\frac{\dot{g}_{\vartheta_{1,k}}}{2g_{\vartheta_{1,k}}^2} z_{1,k}^2 + z_{1,k} \left(z_{2,k} + \alpha_{1,k} - f_1^*(t) - \sum_{j=1}^k \left(f_1^*(x_{1,j}, \theta_1, \dot{y}_r) - f_1^*(x_{1,j-1}, \theta_1, \dot{y}_r) \right) \right) \\ &\quad - \frac{1-\gamma_1}{\Gamma_1} \tilde{\lambda}_{1,k} \hat{\lambda}_{1,k} \\ &\leq -\frac{\dot{g}_{\vartheta_{1,k}}}{2g_{\vartheta_{1,k}}^2} z_{1,k}^2 + z_{1,k} \left(z_{2,k} + \alpha_{1,k} - \hat{f}_{1,k}(t) \right) - \Phi_{1,k} z_{1,k} \\ &\quad + |z_{1,k}| \lambda_1(\theta_1) \sum_{j=1}^k h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1}) |x_{1,k} - x_{1,k-1}| - \frac{1-\gamma_1}{\Gamma_1} \tilde{\lambda}_{1,k} \hat{\lambda}_{1,k} \\ &\leq -\frac{\dot{g}_{\vartheta_{1,k}}}{2g_{\vartheta_{1,k}}^2} z_{1,k}^2 - \Phi_{1,k} z_{1,k} + 2|z_{1,k}| \lambda_1(\theta_1) \sum_{j=1}^k h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1}) |x_{1,k} - x_{1,k-1}| \\ &\quad + z_{1,k} (z_{2,k} + \alpha_{1,k} - \hat{f}_{1,k}(t) + \lambda_1(\theta_1) \sum_{j=1}^k h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1}) (x_{1,k} - x_{1,k-1})) \\ &\quad - \frac{1-\gamma_1}{\Gamma_1} \tilde{\lambda}_{1,k} \hat{\lambda}_{1,k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Soit $s_{1,k} = \sum_{j=1}^k h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1}) (x_{1,j} - x_{1,j-1})$, il est clair que $s_{1,k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1}) (x_{1,j} - x_{1,j-1})$, ce qui implique $s_{1,k} = s_{1,k-1} + h_1(x_{1,k}, x_{1,k-1}) (x_{1,k} - x_{1,k-1})$. Par Conséquent, $\dot{V}_{1,k}$ peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} &\leq -\frac{\dot{g}_{\vartheta_{1,k}}}{2g_{\vartheta_{1,k}}^2} z_{1,k}^2 + z_{1,k} (z_{2,k} + \alpha_{1,k} - f_{1,k}(t) + \hat{\lambda}_{1,k} s_{1,k}) + \tilde{\lambda}_{1,k} s_{1,k} z_{1,k} - \Phi_{1,k} z_{1,k} \\ &\quad + 2\lambda_1(\theta_1) |z_{1,k}| |s_{1,k}| - \frac{1-\gamma_1}{\Gamma_1} \tilde{\lambda}_{1,k} \hat{\lambda}_{1,k} \end{aligned} \quad (4.9)$$

où $\hat{\lambda}_{1,k}$ est l'estimation de $\lambda_1(\theta_1)$ à la $k^{\text{ième}}$ itération et $\tilde{\lambda}_{1,k} = \lambda_1(\theta_1) - \hat{\lambda}_{1,k}$ dénote l'erreur d'estimation paramétrique.

Prenons la première CAI adaptative virtuelle et la loi d'adaptation par apprentissage itératif associé comme suit :

$$\alpha_{1,k} = -c_1 z_{1,k} + \hat{f}_{1,k}(t) - \hat{\lambda}_{1,k} s_{1,k} + u_{r,k} \quad (4.10)$$

$$(1 - \gamma_1)\hat{\lambda}_{1,k}(t) = -\gamma_1\hat{\lambda}_{1,k}(t) + \gamma_1\hat{\lambda}_{1,k-1}(t) + \Gamma_1 s_{1,k} z_{1,k}, \quad \hat{\lambda}_{1,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (4.11)$$

où $c_1 > 0$ est un paramètre de synthèse et $u_{r,k}$ est un terme de commande robuste qui sera déterminé à la dernière étape.

En substituant (4.10) et (4.11) dans (4.9) et en utilisant les **Hypothèse 4.1 et 4.2**, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} \leq & -c_1^* z_{1,k}^2 + z_{1,k} z_{2,k} + \frac{\gamma_1}{\Gamma_1} \tilde{\lambda}_{1,k} (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{1,k-1}) - \Phi_{1,k} z_{1,k} + 2\lambda_1(\theta_1) |z_{1,k}| |s_{1,k}| \\ & + u_{r,k} z_{1,k} \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec $c_1^* = \left(c_1 - \frac{g_1^d}{2g_1^2}\right)$, où c_1 est choisi tel que $\left(c_1 - \frac{g_1^d}{2g_1^2}\right) > 0$.

Etape i où $(2, n - 1)$: D'une manière similaire à l'étape 1, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{i,k} = V_{i-1,k} + \frac{1}{2g_{\vartheta_{i,k}}} z_{i,k}^2 + \frac{1 - \gamma_i}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k}^2 \quad (4.13)$$

où $\Gamma_i > 0$ est un gain d'adaptation par apprentissage itératif et $0 < \gamma_i < 1$ est un gain de pondération. La dérivée temporelle de $V_{i,k}$, en tenant compte de la i^{th} équation de (4.5) et de **Hypothèse 4.4**, est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} = & \dot{V}_{i-1,k} - \frac{\dot{g}_{\vartheta_{i,k}}}{2g_{\vartheta_{i,k}}^2} z_{i,k}^2 - \frac{1 - \gamma_i}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} \dot{\lambda}_{i,k} \\ & + z_{i,k} \left(z_{i+1,k} + \alpha_{i,k} - f_i^*(t) - \sum_{j=1}^k \left(f_i^*(\bar{x}_{i,j}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,j}) - f_i^*(\bar{x}_{i,j-1}, \theta_i, \dot{\alpha}_{i-1,j-1}) \right) \right) \\ \leq & \dot{V}_{i-1,k}(t) - \frac{\dot{g}_{\vartheta_{i,k}}}{2g_{\vartheta_{i,k}}^2} z_{i,k}^2 + z_{i,k} \left(z_{i+1,k} + \alpha_{i,k} - \hat{f}_{i,k}(t) \right) - \Phi_{i,k} z_{i,k} \\ & + |z_{i,k}| \lambda_i(\theta_i) \sum_{j=1}^k h_i(\bar{x}_{i,j}, \bar{x}_{i,j-1}) \sum_{l=1}^i |x_{l,j} - x_{l,j-1}| - \frac{1 - \gamma_i}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} \dot{\lambda}_{i,k} \\ \leq & \dot{V}_{i-1,k}(t) - \frac{\dot{g}_{\vartheta_{i,k}}}{2g_{\vartheta_{i,k}}^2} z_{i,k}^2 + z_{i,k} \left(z_{i+1,k} + \alpha_{i,k} - \hat{f}_{i,k}(t) + \lambda_i(\theta_i) s_{i,k} \right) - \Phi_{i,k} z_{i,k} \\ & + 2\lambda_i(\theta_i) |z_{i,k}| |s_{i,k}| - \frac{1 - \gamma_i}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} \dot{\lambda}_{i,k} \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $s_{i,k} = s_{i,k-1} + h_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1}) \sum_{l=1}^i (x_{l,k} - x_{l,k-1})$, $\hat{\lambda}_{i,k}$ est l'estimation de $\lambda_i(\theta_i)$ à la $k^{\text{ième}}$ itération et $\tilde{\lambda}_{i,k} = \lambda_i(\theta_i) - \hat{\lambda}_{i,k}$ représente l'erreur d'apprentissage paramétrique.

Prenons la $i^{\text{ème}}$ CAI adaptative virtuelle et la loi d'adaptation par apprentissage itératif correspondante comme suit :

$$\alpha_{i,k} = -c_i z_{i,k} - z_{i-1,k} + \hat{f}_{i,k}(t) - \hat{\lambda}_{i,k} s_{i,k} + u_r \quad (4.15)$$

$$(1 - \gamma_i) \dot{\hat{\lambda}}_{i,k}(t) = -\gamma_i \hat{\lambda}_{i,k}(t) + \gamma_i \hat{\lambda}_{i,k-1}(t) + \Gamma_i s_{i,k} z_{i,k}, \quad \hat{\lambda}_{i,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (4.16)$$

où $c_i > 0$ est un paramètre de synthèse. En Substituant (4.15) et (4.16) dans (4.14) et en utilisant les **Hypothèse 4.1 et 4.2**, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} \leq & \dot{V}_{i-1,k} - c_i^* z_{i,k}^2 + z_{i,k} z_{i-1,k} + \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k-1} - \hat{\lambda}_{i,k}) - \Phi_{i,k} z_{i,k} \\ & + 2\lambda_i(\theta_i) |z_{i,k}| |s_{i,k}| + u_{r,k} z_{i,k} \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec $c_i^* = \left(c_i - \frac{g_i^d}{2g_i^2}\right)$, où c_i est choisi pour satisfaire $\left(c_i - \frac{g_i^d}{2g_i^2}\right) > 0$. À l'étape $(i - 1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i-1,k} \leq & - \sum_{m=1}^{i-1} c_m^* z_{m,k}^2 + z_{i-1,k} z_{i,k} + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{\gamma_m}{\Gamma_m} \tilde{\lambda}_{m,k} (\hat{\lambda}_{m,k-1} - \hat{\lambda}_{m,k}) - \sum_{m=1}^{i-1} \Phi_{m,k} z_{m,k} \\ & + \sum_{m=1}^{i-1} 2\lambda_m(\theta_m) |z_{m,k}| |s_{m,k}| + u_{r,k} \sum_{m=1}^{i-1} z_{m,k} \end{aligned} \quad (4.18)$$

En substituant (4.18) dans (4.17), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} \leq & - \sum_{m=1}^i c_m^* z_{m,k}^2 + z_{i,k} z_{i+1,k} + \sum_{m=1}^i \frac{\gamma_m}{\Gamma_m} \tilde{\lambda}_{m,k} (\hat{\lambda}_{m,k-1} - \hat{\lambda}_{m,k}) - \sum_{m=1}^i \Phi_{m,k} z_{m,k} \\ & + \sum_{m=1}^i 2\lambda_m(\theta_m) |z_{m,k}| |s_{m,k}| + u_{r,k} \sum_{m=1}^i z_{m,k} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Etape n: Prenons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{n,k} = V_{n-1,k} + \frac{1}{2g_{\vartheta n,k}} z_{n,k}^2 + \frac{1 - \gamma_n}{2\Gamma_n} \tilde{\lambda}_{n,k}^2 + \frac{1}{2v_1} u_{r,k}^2 + \frac{1}{2v_2} \delta_k^2 \quad (4.20)$$

où $\Gamma_n > 0$ est un gain d'adaptation par apprentissage itératif et $0 < \gamma_n < 1$ est un gain de pondération. En tenant compte de la $n^{\text{ème}}$ équation de (4.5) et de **l'Hypothèse 4.4**, la dérivée temporelle de $V_{n,k}$ est donnée par :

$$\dot{V}_{n,k} \leq \dot{V}_{n-1,k} - \frac{\dot{g}_{\vartheta n,k}}{2g_{\vartheta n,k}^2} z_{n,k}^2 - \frac{1 - \gamma_n}{2\Gamma_n} \tilde{\lambda}_{n,k} \dot{\hat{\lambda}}_{n,k} + \frac{1}{v_1} u_{r,k} \dot{u}_{r,k} + \frac{1}{v_2} \delta_k \dot{\delta}_k$$

$$\begin{aligned}
& + z_{n,k} \left(u_k - f_n^*(t) - \sum_{j=1}^k \left(f_i^*(\bar{x}_{i,j}, \theta_n, \dot{\alpha}_{i-1,j}) - f_i^*(\bar{x}_{i,j-1}, \theta_n, \dot{\alpha}_{i-1,j-1}) \right) \right) \\
& \leq \dot{V}_{n-1,k} - \frac{\dot{g}_{\vartheta_{n,k}}}{2g_{\vartheta_{n,k}}^2} z_{n,k}^2 + z_{n,k} (u_k - \hat{f}_{n,k}(t) + \hat{\lambda}_n s_{n,k}) + \tilde{\lambda}_n s_{n,k} z_{n,k} - \Phi_{n,k} z_{n,k} \\
& \quad + 2\lambda_n(\theta_n) |z_{n,k}| |s_{n,k}| - \frac{1-\gamma_n}{2\Gamma_n} \tilde{\lambda}_{n,k} \hat{\lambda}_{n,k} + \frac{1}{\nu_1} u_{r,k} \dot{u}_{r,k} + \frac{1}{\nu_2} \delta_k \dot{\delta}_k \tag{4.21}
\end{aligned}$$

où $s_{n,k} = s_{n-1,k} + h_n(\bar{x}_{n,j}, \bar{x}_{n,j-1}) \sum_{l=1}^n (x_{l,j} - x_{l,j-1})$, $\hat{\lambda}_{n,k}$ est l'estimation de $\lambda_n(\theta_n)$ et $\tilde{\lambda}_{n,k} = \lambda_n(\theta_n) - \hat{\lambda}_{n,k}$ est l'erreur d'estimation paramétrique.

La CAI adaptative réelle et la loi d'adaptation par apprentissage itératif correspondante sont imposées telles que:

$$u_k = -c_n z_{n,k} - z_{n-1,k} + \hat{f}_{n,k}(t) - \hat{\lambda}_{n,k} s_{n,k} + u_r \tag{4.22}$$

$$(1 - \gamma_n) \hat{\lambda}_{n,k}(t) = -\gamma_n \hat{\lambda}_{n,k}(t) + \gamma_n \hat{\lambda}_{n,k-1}(t) + \Gamma_n s_{n,k} z_{n,k}, \quad \hat{\lambda}_{n,-1}(t) = 0, \forall t \in [0, T] \tag{4.23}$$

où $c_n > 0$ est un paramètre de synthèse.

En substituant (4.22) et (4.23) dans (4.21) et en utilisant les **Hypothèses 4.1 et 4.2**, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{n,k} & \leq \dot{V}_{n-1,k} - c_n^* z_{n,k}^2 - z_{n-1,k} z_{n,k} + \frac{\gamma_n}{\Gamma_n} \tilde{\lambda}_{n,k} (\hat{\lambda}_{n,k-1} - \hat{\lambda}_{n,k}) - \Phi_{n,k} z_{n,k} + u_{r,k} z_{n,k} \\
& \quad + \frac{1}{\nu_1} u_{r,k} \dot{u}_{r,k} + \frac{1}{\nu_2} \delta_k \dot{\delta}_k \tag{4.24}
\end{aligned}$$

avec $c_n^* = \left(c_n - \frac{g_n^d}{2g_n^2} \right)$, où c_n est choisi tel que $\left(c_n - \frac{g_n^d}{2g_n^2} \right) > 0$. A l'étape $(n-1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{n-1,k} & \leq - \sum_{i=1}^{n-1} c_i^* z_{i,k}^2 + z_{n-1,k} z_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k-1} - \hat{\lambda}_{i,k}) - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{i,k} z_{i,k} \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-1} 2\lambda_i(\theta_i) |z_{i,k}| |s_{i,k}| + u_{r,k} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i,k} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

La substitution de (4.25) dans (4.24) conduit à :

$$\dot{V}_{n,k} \leq - \sum_{i=1}^n c_i^* z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k-1} - \hat{\lambda}_{i,k}) - \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k} z_{i,k} + \sum_{i=1}^n 2\lambda_i(\theta_i) |z_{i,k}| |s_{i,k}|$$

$$+u_{r,k} \sum_{i=1}^n z_{i,k} + \frac{1}{v_1} u_{r,k} \dot{u}_{r,k} + \frac{1}{v_2} \delta_k \dot{\delta}_k \quad (4.26)$$

La dynamique du terme de robustesse $u_{r,k}$ est imposée telle que :

$$\dot{u}_{r,k} = -\gamma_u u_{r,k} - \gamma_u \left(\sum_{i=1}^n z_{i,k} + \sum_{i=1}^n 2\kappa_i |z_{i,k}| |s_{i,k}| \frac{u_{r,k}}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2} \right) \quad (4.27)$$

avec

$$\dot{\delta}_k = -\gamma_\delta \delta_k - \gamma_\delta \sum_{i=1}^n 2\kappa_i |z_{i,k}| |s_{i,k}| \frac{\delta_k}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2} \quad (4.28)$$

où $\gamma_u > 0$, $\gamma_\delta > 0$ et $\kappa_i \geq \lambda_i(\theta_i)$ sont des paramètres de synthèse. La substitution de (4.27) et (4.28) dans (4.26) conduit à l'inégalité suivante :

$$\dot{V}_{n,k} \leq - \sum_{i=1}^n c_i^* z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k-1} - \hat{\lambda}_{i,k}) - \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k} z_{i,k} \quad (4.29)$$

4.4. Analyse de la stabilité et de la convergence

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité du système en boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov. Les propriétés de stabilité et de convergence du schéma de la CAI adaptative proposé sont résumées dans le théorème ci-dessous.

Théorème 4.1 [62] : *Si le système non-linéaire (4.1), vérifiant les hypothèses 4.1-4.4, est sous la conduite de la commande caractérisée par la CAI adaptative réelle (4.22), la loi d'adaptation par apprentissage itératif correspondante (4.23), les CAI adaptative virtuelles (4.10) et (4.15), les lois d'adaptation par apprentissage itératif correspondantes (4.11) et (4.16), et la loi d'apprentissage itératif (4.6); par conséquent, pour toute condition initiale satisfaisant la condition d'alignement : $V_{n,k}(0) = V_{n,k-1}(T)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, les résultats suivants sont vérifiés :*

t1. tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$.

t2. $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{1,k} = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve [62] : Considérons la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$W_k(t) = V_{n,k}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \quad (4.30)$$

Etape1 : Bornitude de $W_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$

En tenant compte de (4.29), la dérivée temporelle de (4.30) est donnée par:

$$\dot{W}_k \leq - \sum_{i=1}^n c_i^* z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k-1} - \hat{\lambda}_{i,k}) - \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k} z_{i,k} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k}^2 \quad (4.31)$$

En utilisant la loi d'apprentissage itératif (4.6) et les lois d'adaptation par apprentissage itératif (4.11), (4.16) et (4.23) et le fait que $\hat{\lambda}_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k-1} = \tilde{\lambda}_{i,k-1} - \tilde{\lambda}_{i,k}$ et $\hat{f}_{i,k}(t) - \hat{f}_{i,k-1}(t) = \Phi_{i,k-1} - \Phi_{i,k}$ par conséquent, $\dot{W}_k(t)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{W}_k &\leq - \sum_{i=1}^n c_i^* z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} (\tilde{\lambda}_{i,k-1} - \tilde{\lambda}_{i,k}) + \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\eta_i} \Phi_{i,k} (\Phi_{i,k-1} - \Phi_{i,k}) + \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k}^2 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n c_i^* z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} (2\tilde{\lambda}_{i,k} \tilde{\lambda}_{i,k-1} - \tilde{\lambda}_{i,k}^2) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} (2\Phi_{i,k} \Phi_{i,k-1} - \Phi_{i,k}^2) \\ &= - \sum_{i=1}^n c_i^* z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} (\tilde{\lambda}_{i,k} - \tilde{\lambda}_{i,k-1})^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k-1}^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} (\Phi_{i,k} - \Phi_{i,k-1})^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k-1}^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Puisque $\hat{f}_{i,-1}(t) = 0$ et $\hat{\lambda}_{i,-1} = 0 \forall t \in [0, T]$, il est claire que $\Phi_{i,-1} = f_i^*(t)$ et $\tilde{\lambda}_{i,-1} = \lambda_i(\theta_i)$.

Donc à l'itération initiale, l'inégalité (4.32) satisfait:

$$\dot{W}_0(t) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \lambda_i^2(\theta_i) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} (f_i^*(t))^2 \quad (4.33)$$

L'intégration de (4.33) de 0 à t nous donne

$$W_0(t) \leq V_{n,0}(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t \lambda_i^2(\theta_i) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t (f_i^*(t))^2 d\tau \quad (4.34)$$

Puisque $\lambda_i(\theta_i)$ et $f_i^*(t)$, $i = (1, n)$ sont des fonctions continues, elles sont donc bornées sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et donc, les intégrales $I_{1i} = \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_i^2(\theta_i) dt$ et $I_{2i} = \frac{1}{2} \int_0^T (f_i^*(t))^2 dt$ existent, d'où on a :

$$W_0(t) \leq V_{n,0}(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} I_{1i} + \sum_{i=1}^n \frac{I_{2i}}{\eta_i} < \infty \quad (4.35)$$

Ce qui implique la bornitude de $W_0(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$.

Etape 2 : Bornitude de $W_k(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

La différence de $W_k(t)$ entre deux itérations successives peut être évaluée par

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= W_k - W_{k-1} \\ &= V_{n,k}(t) - V_{n,k-1}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t (\tilde{\lambda}_{i,k}^2 - \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2) d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t (\Phi_{i,k}^2(t) - \Phi_{i,k-1}^2(t)) d\tau \end{aligned} \quad (4.36)$$

En exploitant la relation algébrique $(a - b)^2 - (a - c)^2 = (c - b)[2(a - b) + (b - c)]$ et en considérant la loi d'apprentissage itératif (4.6) et les lois d'adaptation par apprentissage itératif (4.11), (4.16) et (4.23), il en résulte :

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= V_{n,k}(0) + \int_0^t \dot{V}_{n,k}(t) d\tau - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k-1}) d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k} (\hat{f}_{i,k} - \hat{f}_{i,k-1}) d\tau - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t (\hat{\lambda}_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k-1})^2 d\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t (\hat{f}_{i,k} - \hat{f}_{i,k-1})^2 d\tau \\ &= V_{n,k}(0) + \int_0^t \dot{V}_{n,k}(t) d\tau - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k-1}) d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi_{i,k} z_{i,k} d\tau - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t (\tilde{\lambda}_{i,k} - \tilde{\lambda}_{i,k-1})^2 d\tau - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t (\Phi_{i,k} - \Phi_{i,k-1})^2 d\tau \\ &\leq V_{n,k}(0) + \int_0^t \dot{V}_{n,k}(t) d\tau - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k} (\hat{\lambda}_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k-1}) d\tau \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi_{i,k} z_{i,k} d\tau \quad (4.37)$$

La substitution (4.29) dans (4.37) conduit à :

$$\Delta W_k(t) \leq V_{n,k}(0) - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n c_i^* \int_0^t z_{i,k}^2 d\tau \quad (4.38)$$

De plus, en utilisant le fait que $V_{n,k}(0) = V_{n,k-1}(T)$, l'inégalité ci-dessus se réduit à :

$$\Delta W_k(T) \leq - \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i^* z_{i,k}^2 d\tau \leq 0 \quad (4.39)$$

L'inégalité (4.39) montre que $W_k(T)$ est décroissante suivant l'axe des itérations, ce qui implique la bornitude de $W_k(T)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $W_0(T)$ est bornée. Ainsi, il existe une constante ϖ finie satisfaisant la relation suivante:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^T \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^T \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq \varpi$$

Ensuite, nous avons

$$W_k = V_{n,k} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq V_{n,k}(t) + \varpi \quad (4.40)$$

ainsi

$$W_{k-1} \leq V_{n,k-1} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k-1}^2(\tau) d\tau \leq V_{n,k-1}(t) + \varpi \quad (4.41)$$

D'autre part, à partir de (4.38), on obtient

$$\Delta W_k \leq V_{n,k}(0) - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n c_i^* \int_0^t z_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq V_{n,k}(0) - V_{n,k-1}(t) \quad (4.42)$$

Compte tenu de (4.41) et (4.42), on peut conclure que :

$$W_k \leq V_{n,k}(0) + \varpi \quad (4.43)$$

Puisque $W_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, il est clair que $V_{n,k}(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. D'où, à partir de (4.43) et le fait que $V_{n,k}(0) = V_{n,k-1}(T)$, on peut conclure que $W_k(t)$ est bornée $\forall t \in$

$[0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Par conséquent, les signaux du système en boucle fermée, $z_{i,k}, u_{r,k}, \delta_k, \tilde{\lambda}_{i,k}, \Phi_{i,k}, u_k$, sont bornés pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ et pour tout $t \in [0, T]$.

Etape 3 : Convergence de l'erreur de poursuite

A partir de (4.39), nous avons

$$\begin{aligned} W_k(T) &= W_0(T) + \sum_{j=1}^k \Delta W_j(T) \\ &\leq W_0(T) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i^* z_{i,k}^2 d\tau \end{aligned} \quad (4.44)$$

En considérant la limite de (4.44), il en résulte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(T) \leq W_0(T) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n c_i^* \int_0^T z_{i,k}^2 d\tau \quad (4.45)$$

En se basant sur (4.45), et puisque $W_k(T)$ et $W_0(T)$ sont bornées, on peut conclure que la série $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n c_i^* \int_0^T z_{i,k}^2 d\tau$ est convergente. D'où, $\sum_{i=1}^n c_i^* \int_0^T z_{i,k}^2 d\tau$ converge asymptotiquement vers zéro suivant l'axe des itérations $\forall t \in [0, T]$, i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i^* \int_0^T z_{i,k}^2 d\tau = 0$. Puisque $z_{i,k}, u_{r,k}, \delta_k, \tilde{\lambda}_{i,k}, \Phi_{i,k}, u_k$ sont bornés, on a $\dot{z}_{i,k}$ est aussi bornée, ainsi $z_{i,k}$ est uniformément continue, donc à partir du Lemme de Barbalat, on obtient $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{i,k} = 0$, i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{1,k} = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

4.5. Résultats de simulation

Dans cette section, afin d'illustrer l'efficacité et le mérite du schéma de commande présentée, deux exemples de simulation sont proposés. En effet, le premier est un système non-linéaire théorique tandis que le deuxième représente une articulation d'un robot manipulateur actionnée par un moteur à courant continu.

4.5.1. Exemple 1

Considérons un système non-linéaire du second ordre non-linéairement paramétré et non affine en la commande. La sortie de ce dernier doit suivre d'une manière répétitive une trajectoire de référence $y_r = \sin^3(t)$ sur un intervalle de temps fini $t \in [0, 2\pi]$. De plus, ce système est représenté par les équations différentielles suivantes [69]:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = \sin(x_{1,k})x_{1,k}^{2\theta_1} + x_{2,k} + \frac{x_{2,k}^3}{5} \\ \dot{x}_{2,k} = x_{1,k}(1 + x_{2,k}^2)^{\frac{1}{3}}\theta_2^{x_{1,k}} + x_{2,k}^2 u_k + 2u_k + \frac{u_k^3}{7} \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (4.46)$$

Notre objectif de synthétiser une loi de la CAI adaptative pour le système (4.46) tel que tous les signaux, intervenant dans la boucle de commande du système, restent bornés et la sortie du système y_k converge vers le signal de référence y_r , $\forall t \in [0, 2\pi]$ lorsque k tends vers l'infini. La dynamique des erreurs est donc donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = \sin(x_{1,k})x_{1,k}^{2\theta_1} + x_{2,k} + \frac{x_{2,k}^3}{5} - \dot{y}_r \\ \dot{z}_{2,k} = x_{1,k}(1 + x_{2,k}^2)^{\frac{1}{3}}\theta_2^{x_{1,k}} + x_{2,k}^2 u_k + 2u_k + \frac{u_k^3}{7} - \dot{\alpha}_{1,k} \end{cases}$$

avec $z_{1,k} = x_{1,k} - y_r$, l'erreur de poursuite et $z_{2,k} = x_{2,k} - \alpha_{1,k}$, où $\alpha_{1,k}$ est la CAI adaptative virtuelle.

En appliquant étape par étape la procédure de conception présentée dans la section 4.3, nous pouvons construire une CAI adaptative pour le système (4.46) comme suit:

Etape 1: A partir de (4.6), (4.10) et (4.11), la CAI adaptative virtuelle, les lois d'adaptation par apprentissage itératif et les lois d'apprentissage itératif sont données par:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,k} &= -10z_{1,k} + \hat{f}_{1,k}(t) - \hat{\lambda}_{1,k}s_{1,k} + u_{r,k} \\ 0.5\hat{\lambda}_{1,k}(t) &= -0.5\hat{\lambda}_{1,k}(t) + 0.5\hat{\lambda}_{1,k-1}(t) + 5s_{1,k}z_{1,k}, \quad \hat{\lambda}_{1,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \\ \hat{f}_{1,k}(t) &= \hat{f}_{1,k-1}(t) - 5z_{1,k}, \quad \hat{f}_{1,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

où $s_{1,k} = s_{1,k-1} + (x_{1,k} - x_{1,k-1})$

Etape 2: A partir de (4.6), (4.22) et (4.23), la CAI adaptative réelle, les lois d'adaptation par apprentissage itératif et les lois d'apprentissage itératif sont déduites telles que :

$$\begin{aligned} u_k &= -20z_{2,k} - z_{1,k} + \hat{f}_{2,k}(t) - \hat{\lambda}_{2,k}s_{2,k} + u_{r,k} \\ 0.5\hat{\lambda}_{2,k}(t) &= -0.5\hat{\lambda}_{2,k}(t) + 0.5\hat{\lambda}_{2,k-1}(t) + 5s_{2,k}z_{2,k}, \quad \hat{\lambda}_{2,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \\ \hat{f}_{2,k}(t) &= \hat{f}_{2,k-1}(t) - 5z_{2,k}, \quad \hat{f}_{2,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

où $s_{2,k} = s_{2,k-1} + ((x_{1,k} - x_{1,k-1}) + (x_{2,k} - x_{2,k-1}))$.

A partir de (4.27) et (4.28), le terme de commande robuste est donné par :

$$\dot{u}_{r,k} = -10^{-5}u_{r,k} - 10^{-5} \left(z_{1,k} + z_{2,k} + \frac{\psi_k u_{r,k}}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2} \right), \quad u_{r0}(0) = 0.1$$

avec

$$\dot{\delta}_k = -10^{-5}\delta_k - 10^{-5} \frac{\psi_k \delta_k}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2}, \quad \delta_0(0) = 0.1$$

où $\psi_k = 10|z_{1k}||s_{1,k}| + 10|z_{2k}||s_{2,k}|$.

Nous avons simulé le fonctionnement du système (4.46) pour 20 itérations sous la CAI adaptative ci-dessus et la condition d'alignement suivante : $z_{1,k}(0) = z_{1,k-1}(2\pi)$, $z_{2,k}(0) = z_{2,k-1}(2\pi)$, $\lambda_{1,k}(0) = \lambda_{1,k-1}(2\pi)$, $\lambda_{2,k}(0) = \lambda_{2,k-1}(2\pi)$, $u_{r,k}(0) = u_{r,k-1}(2\pi)$ et $\delta_k(0) = \delta_{k-1}(2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

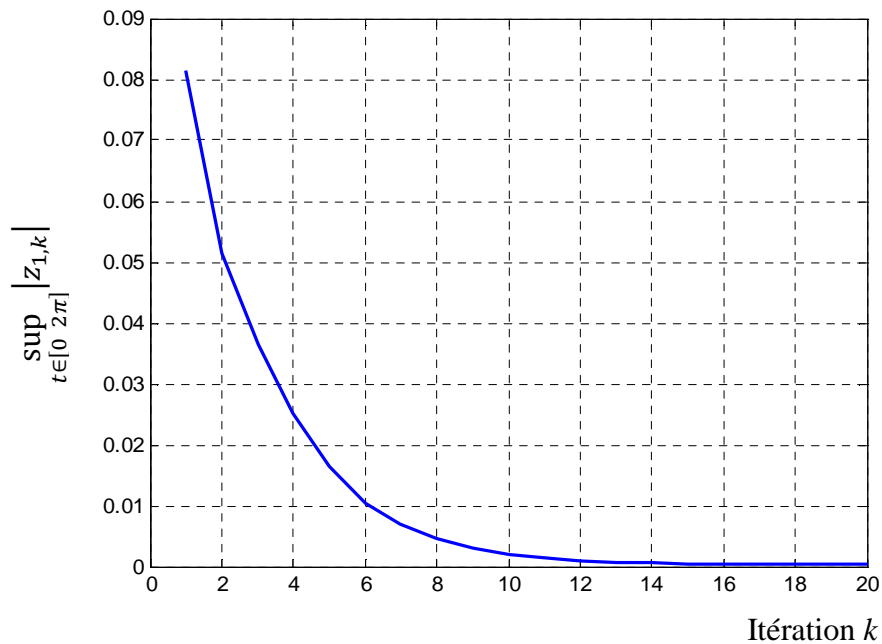


Fig. 4.1: Evolution de $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |z_{1,k}|$ du système (4.46) en fonction du nombre d'itérations.

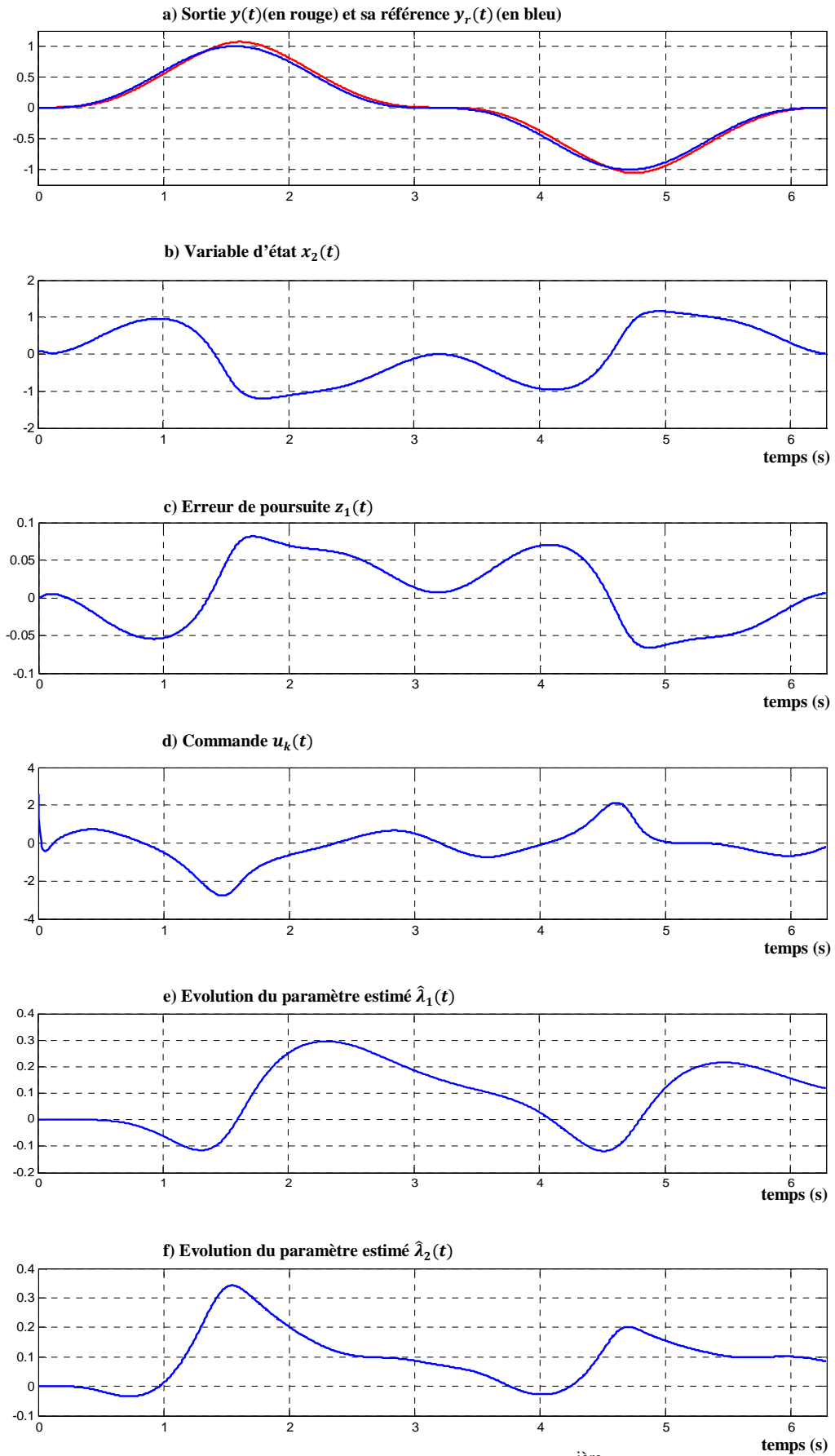


Fig. 4.2 : Réponse du système (4.46) à la 1^{ière} itération.

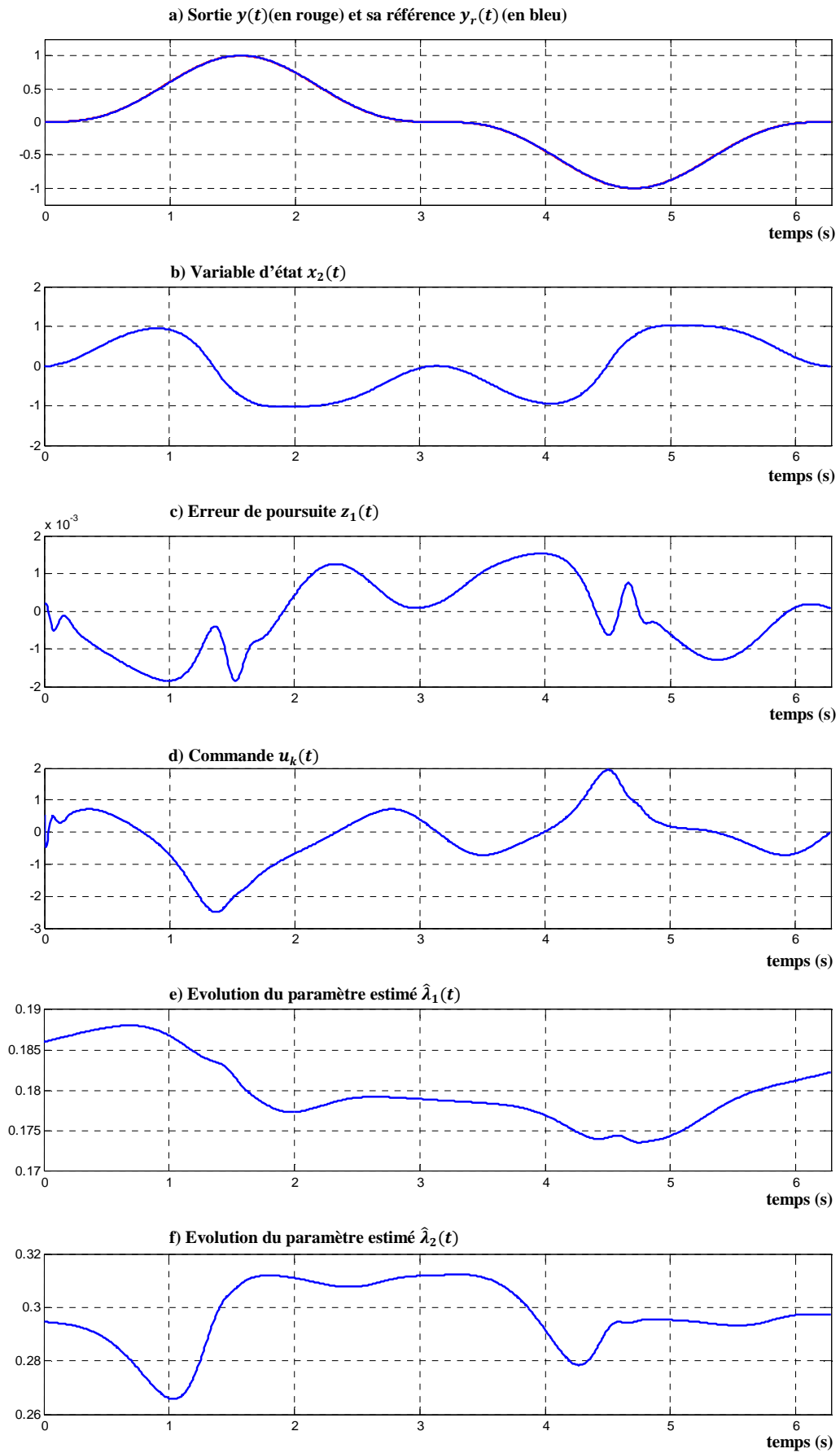


Fig.4.3 : Réponse du système (4.46) à la 10^{ème} itération.

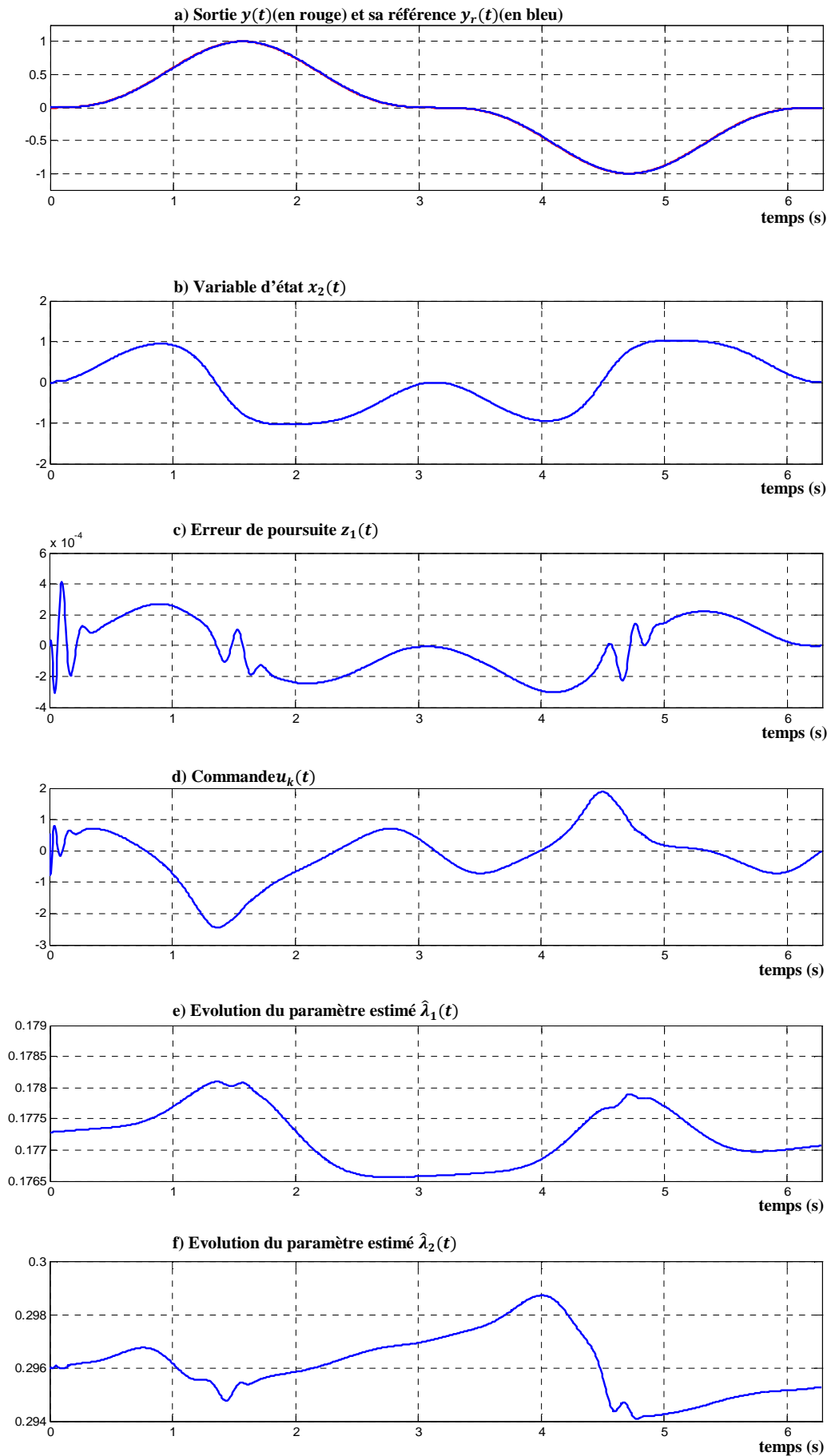


Fig.4.4 : Réponse du système (4.46) à la 20^{ième} itération.

Les résultats de simulation du système (4.46), sous la conduite de la CAI adaptative détaillée précédemment, apparaissent aux Figures 4.1 à 4.4. En outre, l'erreur de poursuite maximale par itération (qui est un indicateur important de la convergence) évolue selon la Figure 4.1 où on observe nettement la décroissance de cette grandeur itération après itération; celle-ci prend une valeur faible à la 20^{ième} itération. L'évolution des signaux du système en boucle fermée à la première itération, à la 10^{ième} itération et, à la 20^{ième} itération apparaissent respectivement aux Figures 3.2 à 3.4. Une recherche des bons paramètres de conception de commande nous a permis d'imposer dès la première itération une sortie assez proche de la référence (Fig. 4.2a), après 10 itérations celle-ci s'approche encore plus de la trajectoire de référence (Fig. 4.3a), et à la 20^{ième} itération celle-ci est pratiquement confondue avec la trajectoire de la référence (Fig. 4.4a). La représentation de l'évolution de l'erreur de poursuite à la première itération (Fig. 4.2c), à la dixième itération (Fig. 4.3c) et la vingtième itération (Fig. 4.4c) permet de mieux apprécier sa convergence. Les Figures 4.2d, 4.3d et 4.4d montrent un signal de commande continu, borné et dépourvu d'oscillations. De plus, les paramètres de commande $\hat{\lambda}_{1,k}(t)$ et $\hat{\lambda}_{2,k}(t)$ évoluent d'une manière continue et restent toujours bornées où les Figures 4.2e à 4.4e sont relatives au profil $\hat{\lambda}_{1,k}(t)$ et les Figure 4.2f à 4.4f concernent le profil de $\hat{\lambda}_{2,k}(t)$. Enfin, ces résultats confirment d'une part la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et d'autre part la poursuite de la sortie du système $y_k(t)$ de la trajectoire de référence $y_r(t)$ avec une précision satisfaisante lorsque $k = 20$. Ceci prouve l'efficacité du schéma proposé pour la commande des systèmes non-linéaires triangulaires et non affine en la commande lorsque la tâche est répétitive.

4.5.2. Exemple2 : Articulation d'un robot manipulateur

Considérons en deuxième exemple une articulation d'un robot manipulateur actionnée par un moteur à courant continu. Son modèle est donné par [69]:

$$\begin{cases} D\ddot{q}_k + B\dot{q}_k + N\sin(q_k) = I_k \\ M\dot{I}_k + HI_k = V_k - K_m\dot{q}_k \end{cases} \quad (4.47)$$

où q_k , \dot{q}_k et \ddot{q}_k représentent respectivement la position angulaire, la vitesse angulaire et l'accélération angulaire. I_k est le courant du moteur et V_k est sa commande en voltage. Les valeurs des paramètres, en unité appropriée, sont données par $D = 1$, $B = 1$, $M = 0.05$, $H = 0.5$, $N = 10$ and $K_m = 10$.

Posons $x_{1,k} = q_k$, $x_{2,k} = \dot{q}_k$ et $x_{3,k} = I_k$, (4.47) peut être exprimée comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1k} = x_{2,k} \\ \dot{x}_{2k} = \frac{1}{D} x_{3,k} - \frac{N}{D} \sin(x_{1,k}) - \frac{B}{D} x_{2k} \\ \dot{x}_{3k} = \frac{1}{M} V_k - \frac{K_m}{M} x_{2,k} - \frac{H}{M} x_{3,k} \end{cases} \quad (4.48)$$

Notre objectif est de forcer la sortie du système $y_k = x_{1,k}$ à converger vers sa trajectoire désirée $y_r = \sin(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ à travers les itérations. La dynamique des erreurs du système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = x_{2,k} - \dot{y}_r \\ \dot{z}_{2,k} = \frac{1}{D} x_{3,k} - \frac{N}{D} \sin(x_{1,k}) - \frac{B}{D} x_{2,k} - \dot{\alpha}_{1,k} \\ \dot{z}_{3,k} = \frac{1}{M} V_k - \frac{K_m}{M} x_{2,k} - \frac{H}{M} x_{3,k} - \dot{\alpha}_{2,k} \end{cases}$$

Avec $z_{1,k} = x_{1,k} - y_r$, l'erreur de poursuite de la sortie, $z_{2,k} = x_{2,k} - \alpha_{1,k}$ et $z_{3,k} = x_{3,k} - \alpha_{2,k}$, où $\alpha_{1,k}$ et $\alpha_{2,k}$ sont les CAI adaptative virtuelles. En appliquant étape par étape la procédure de conception présentée dans la section 4.3, nous pouvons construire la CAI adaptative pour le système (4.48) comme suit :

Etape 1 : Tenant compte de (4.10), la première CAI virtuelle est choisie comme suit :

$$\alpha_{1k} = -z_{1k} + \dot{y}_r + u_{r1k}$$

Etape 2 : Selon (4.6), (4.15) et (4.16), la deuxième CAI adaptative virtuelle et sa loi par apprentissage itératif et celle d'adaptation par apprentissage itératif sont obtenues telles que:

$$\begin{aligned} \alpha_{2,k} &= -5z_{2,k} - z_{1,k} + \hat{f}_{2,k}(t) - \hat{\lambda}_{2,k}s_{2,k} + u_{r,k} \\ \hat{f}_{2,k}(t) &= \hat{f}_{2,k-1}(t) - 5z_{2,k}, \quad \hat{f}_{2,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \\ 0.5\hat{\lambda}_{2,k}(t) &= -0.5\hat{\lambda}_{2,k}(t) + 0.5\lambda_{2,k-1}(t) + 5s_{2,k}z_{2,k}, \quad \hat{\lambda}_{2,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

où $s_{2,k} = s_{2,k-1} + (x_{2,k} - x_{2,k-1})$.

Etape 3 : A partir de (4.6), (4.22) et (4.23), la CAI adaptative pratique et sa loi d'apprentissage itératif et celle d'adaptation par apprentissage itératif sont déduites comme suit :

$$\begin{aligned} V_k &= -2z_{3,k} - z_{2,k} + \hat{f}_{2,k}(t) - \hat{\lambda}_{3,k}s_{3,k} + u_{r,k} \\ \hat{f}_{3,k}(t) &= \hat{f}_{3,k-1}(t) - 5z_{3,k}, \quad \hat{f}_{3,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \\ 0.5\hat{\lambda}_{3,k}(t) &= -0.5\lambda_{3,k}(t) + 0.5\lambda_{3,k-1}(t) + 5s_{3,k}z_{3,k}, \quad \hat{\lambda}_{3,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

où $s_{3,k} = s_{3,k-1} + (x_{3,k} - x_{3,k-1})$.

Compte tenu de (4.27) et (4.28), la dynamique du terme de la commande robuste déduit tel que :

$$\dot{u}_{r,k} = -10^{-5}u_{r,k} - 10^{-5} \left(z_{1,k} + z_{2,k} + \frac{\psi_k u_{r,k}}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2} \right), \quad u_{r0}(0) = 0.1$$

avec

$$\dot{\delta}_k = -10^{-5}\delta_k - 10^{-5} \frac{\psi_k \delta_k}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2}, \quad \delta_0(0) = 0.1$$

où $\psi_k = 10|z_{2,k}||s_{2,k}| + 10|z_{3,k}||s_{3,k}|$.

Nous avons exécuté le système (4.48) pour 20 itérations sous la commande ci-dessus et la condition d'alignement suivante : $z_{1,k}(0) = z_{1,k-1}(2\pi)$, $z_{2,k}(0) = z_{2,k-1}(2\pi)$, $z_{3,k}(0) = z_{3,k-1}(2\pi)$, $u_{r,k}(0) = u_{r,k-1}(2\pi)$, $\delta_k(0) = \delta_{k-1}(2\pi)$, $\hat{\lambda}_{2,k}(0) = \hat{\lambda}_{2,k-1}(2\pi)$, et $\hat{\lambda}_{3,k}(0) = \hat{\lambda}_{3,k-1}(2\pi) \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

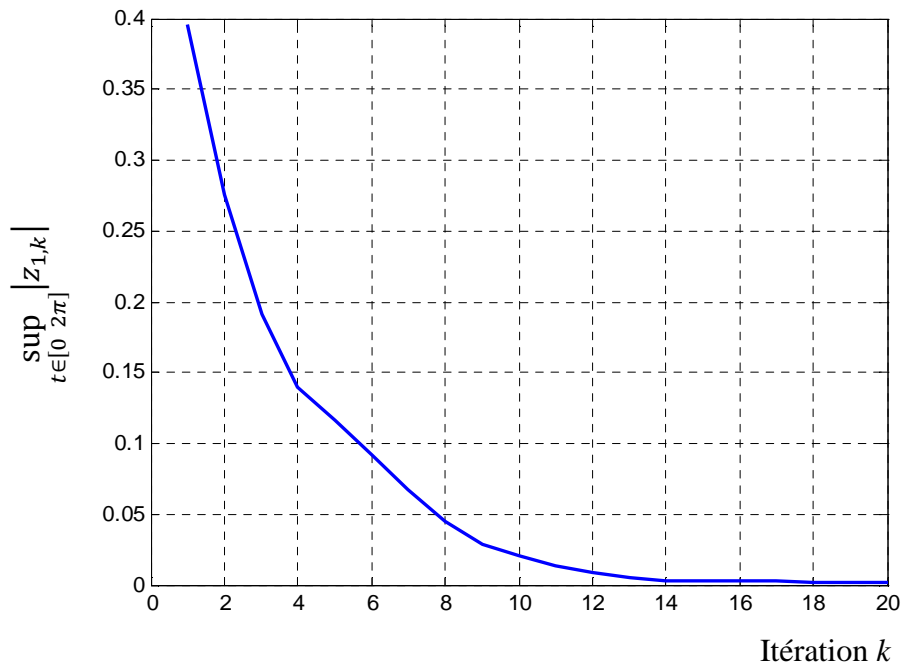


Fig. 4.5 : Evolution de $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |z_{1,k}|$ du système (4.48) en fonction du nombre d'itérations.

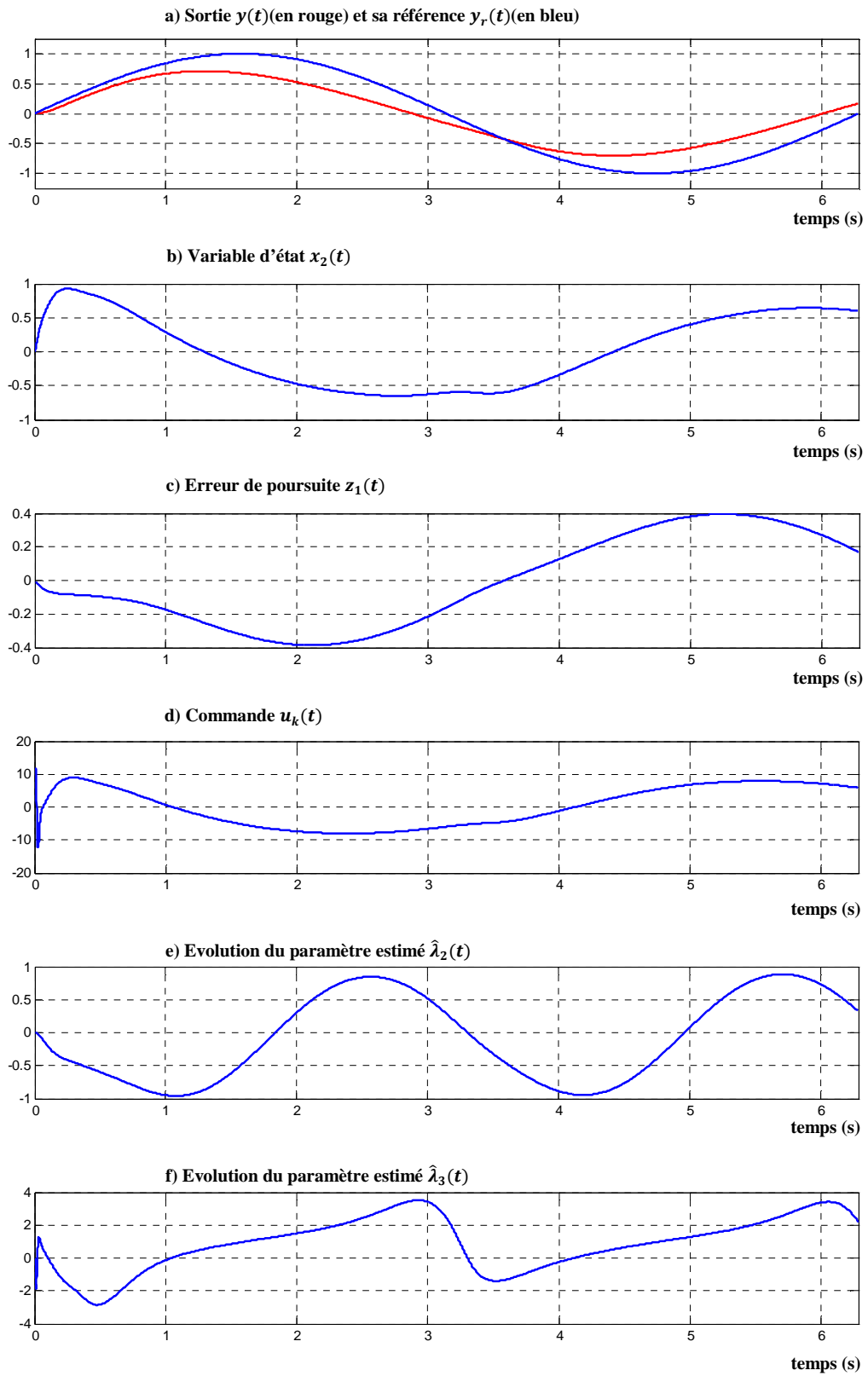


Fig.4.6 : Réponse du système (4.48) à la 1^{ière} itération.

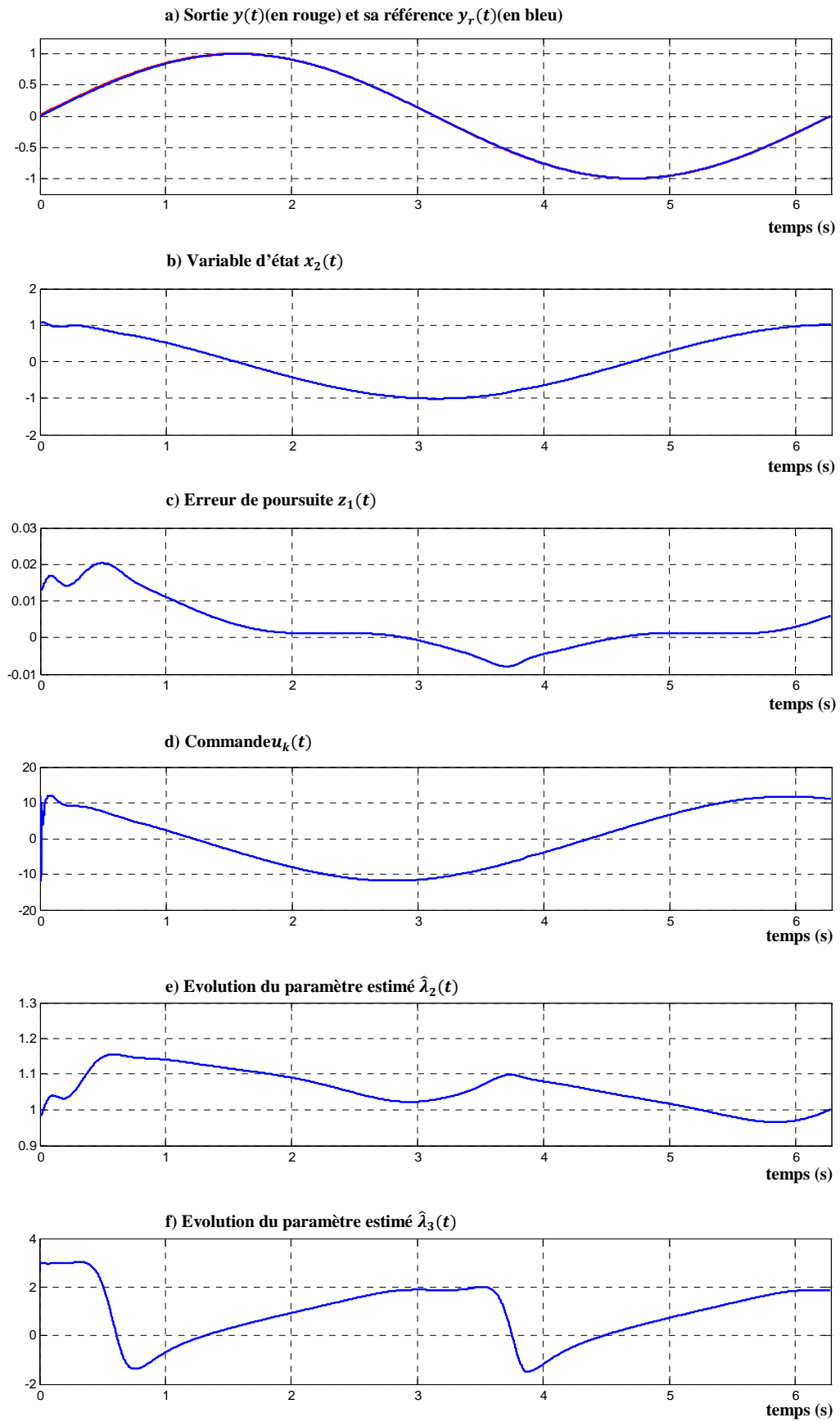


Fig.4.7 : Réponse du système (4.48) à la 10^{ème} itération.

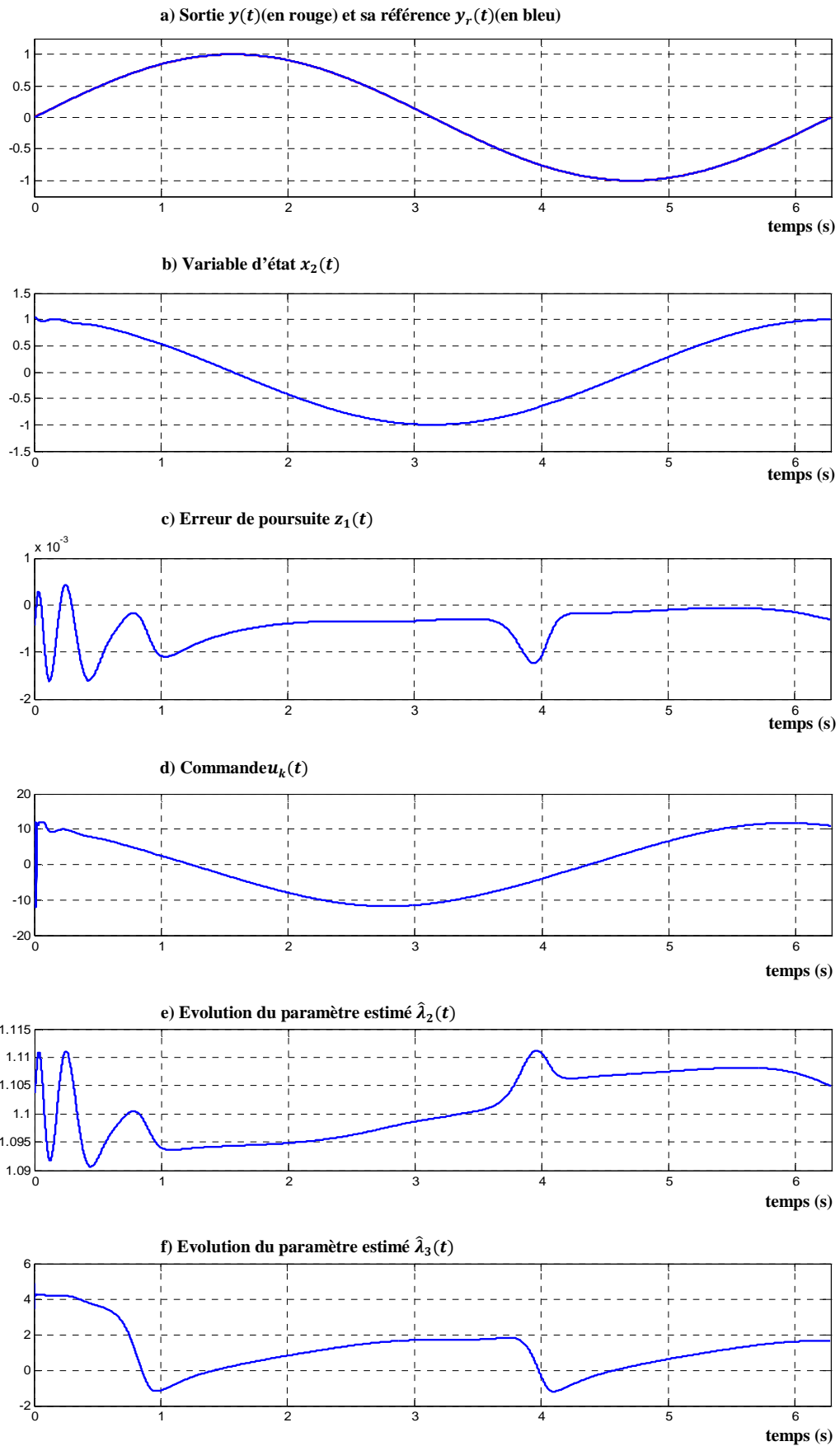


Fig.4.8 : Réponse du système (4.48) à la 20^{ème} itération.

Les résultats de simulation du fonctionnement itératif du système (4.48) apparaissent aux Figures 4.5 à 4.8. Pour bien matérialiser la convergence de l'erreur de poursuite, nous avons représenté, l'évolution de l'erreur de poursuite maximale par itération à la Figure 4.5. Cette dernière met en évidence la décroissance de cette grandeur avec l'augmentation du nombre d'itérations et cette erreur atteint, dès la 20^{ième} itération, une valeur faible. Les détails relatifs à la réponse du système apparaissent aux Figures 4.6 à 4.8 respectivement à la 1^{ière} itération, à la 10^{ième} et, à la 20^{ième} itération. En outre, à la première itération, la sortie reste lisse et suit sa référence (Fig. 4.6a) mais avec une erreur importante (Fig. 4.6c). A la dixième itération, comme il est montré aux Figure 4.7a et Figure 4.7c, la poursuite de la référence s'améliore nettement. Cependant, il faut attendre la 20^{ième} itération pour que l'erreur de poursuite prenne des valeurs faibles (Fig. 4.8c) et, la poursuite de la référence soit pratiquement satisfaite (Fig. 4.8a). En outre, d'après les Figures 3.6b à 3.8b, la vitesse de l'articulation reste toujours bornée et évolue d'une manière continue. De plus, le signal de commande, représenté à la 1^{ière} itération (Fig. 3.2d), à la 2^{ième} itération (Fig. 4.7d) et à la 20^{ième} itération (Fig. 4.8d) reste continu et borné. Les lois d'adaptation imposées pour les paramètres de commande $\hat{\lambda}_{1,k}(t)$ et $\hat{\lambda}_{2,k}(t)$ ont permis d'obtenir des profils évoluant d'une manière continue et les valeurs des paramètres restent toujours bornées. Ceci est confirmé par les Figure 4.6e à 4.8e pour $\hat{\lambda}_{1,k}(t)$ et par les Figure 4.6f à 4.8f pour $\hat{\lambda}_{2,k}(t)$. Ces résultats mettent en évidence d'une part la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et d'autre part, la poursuite avec une bonne précision de la référence par la sortie du système dès la 20^{ième} itération. Ceci prouve l'efficacité du schéma proposé pour la commande des robots manipulateurs en exécution d'une tâche répétitive.

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de poursuite idéale d'une classe de systèmes non-linéaires fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fixe. Cette classe est supposée triangulaire inférieure, non affine en la commande, et non-linéairement paramétrée. Pour répondre à ce type de problème, nous avons proposé un schéma de CAI adaptative. Pour la conception de la commande, nous avons utilisé la procédure de synthèse par backstepping et pour analyser la stabilité nous avons fait appel à la fonctionnelle de Lyapunov. La difficulté de synthèse liée à la structure non affine du système est surmontée en utilisant le théorème des valeurs moyennes combiné avec celui des fonctions implicites. De plus, les paramètres non-linéairement connectés sont séparés des fonctions non-linéaires localement Lipchitziennes, puis des lois d'apprentissage itératif et des lois d'adaptations par apprentissage

itératif sont conçues respectivement pour compenser les effets des fonctions non-linéaires inconnues et des termes paramétriques inconnues.

Comparativement à la commande par backstepping conventionnelle, ce présent schéma de la CAI adaptative n'exige ni la connaissance des dérivées des commande virtuelles ni la connaissance des dérivées d'ordre supérieures de la trajectoire de référence. Il garantit la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée et également la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro à travers les itérations. Les résultats de la simulation effectuée pour un système numérique d'ordre deux et une articulation d'un robot actionné par un moteur à courant continu montrent clairement les bonnes performances de poursuite de ce schéma de CAI adaptative.

CAI adaptative des systèmes non linéaires incertains avec saturation à l'entrée

5.1. Introduction

Une loi de CAI adaptative est développée dans ce chapitre pour résoudre le problème de la poursuite idéale sur un intervalle de temps fini dans le cas des systèmes triangulaires inférieurs non-linéairement paramétrés en présence de saturation à l'entrée. Cette commande est synthétisée en utilisant le concept de backstepping filtré et la fonctionnelle de Lyapunov. La conception de cette commande doit surmonter deux difficultés majeures: le problème lié aux fonctions non-linéairement paramétrées et celui de la compensation efficace de la saturation. Pour surmonter la première difficulté, on va séparer les paramètres inconnus des fonctions non-linéaires étant donné que celles-ci sont supposées continues et localement Lipchitziennes. Puis, des lois d'apprentissage itératif et des lois d'adaptation par apprentissage itératif sont conçues dans le domaine des itérations pour compenser les effets de certaines fonctions non-linéaires et de certains termes paramétriques inconnus. Pour pallier au problème de la saturation, un système auxiliaire de même ordre que celui du système à commander est construit. Ce dernier admet comme entrée l'erreur entre la commande non saturée et celle saturée. Ses états (i.e. les états du système auxiliaire) sont ensuite utilisés pour modifier les erreurs de poursuite. Ce mécanisme permet aux lois d'apprentissage itératif et aux lois d'adaptation par apprentissage itératif de rester opérantes même si la saturation est active.

5.2. Modèle du système et formulation du problème

Considérons la classe des systèmes non-linéaires, fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fixe, et dont la dynamique est représentée par les équations différentielles suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k} + f_i(\bar{x}_{i,k}, \theta_i) \\ \dot{x}_{n,k} = u(v_k) + f_n(x_k, \theta_n) \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (5.1)$$

où les notations utilisées au niveau de la relation (5.1) sont définies ci-dessous.

Le vecteur $\bar{x}_{i,k}$ est défini tel que $\bar{x}_{i,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{i,k}]^T \in \mathcal{R}^i \times [0, T]$ avec $i = (1, n - 1)$ de plus, l'état du système est représenté, à la $k^{\text{ième}}$ itération, par le vecteur $\bar{x}_{n,k} = [x_{1,k}, \dots, x_{n,k}]^T \in \mathcal{R}^n \times [0, T]$ où n dénote l'ordre du système. L'entrée et la sortie du système, à la $k^{\text{ième}}$ itération, sont respectivement définies par $u_k \in \mathcal{R}$ et $y_k \in \mathcal{R}$. Les termes, $\theta_i \in \mathcal{R}$, $i = (1, n)$, représentent les paramètres non-linéaires connectés. Par ailleurs, les fonctions $f_{i1}(\bar{x}_{i,k}, \theta_i)$, définissant des applications dans $\mathcal{R}^i \times \mathcal{R} \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$, $i = (1, n)$, sont non-linéaires paramétriques et continues où $k \in \mathbb{Z}_+$ dénote l'indice des itérations et le temps t est tel que $t \in [0, T]$. Pour ce système (5.1), la commande à l'entrée $v_k \in \mathcal{R}$ est soumise à une contrainte non-linéaire représentée par la fonction $u(\cdot)$. Cette dernière est une fonction de saturation laquelle est décrite par le modèle suivant :

$$u(v_k) = \text{Sat}(v_k) = \begin{cases} u_M \text{Sign}(v_k), & |v_k| \geq u_M \\ v_k, & |v_k| < u_M \end{cases} \quad (5.2)$$

où u_M est une borne connue de $u(v_k)$.

Notre objectif consiste à concevoir une loi de la CAI adaptative permettant d'une part d'assurer la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et d'autre part d'assurer, $\forall t \in [0, T]$, une faible erreur de poursuite du signal de sortie lorsque le nombre d'itérations tends vers l'infini.

Les hypothèses suivantes sont prises en considération dans le développement de la loi de la CAI adaptative.

Hypothèse 5.1 [41][47][48] : Le système (5.1) est ISS stable "input to state stable".

Hypothèse 5.2: Le signal de référence y_r et sa première dérivée temporelle \dot{y}_r sont bornés et continus.

Hypothèse 5.3: Les fonctions non-linéaires $f_i(\bar{x}_{i,k}, \theta_i)$, $i = (1, n)$, sont uniformément localement Lipchitziennes sur l'intervalle de temps $[0, T]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$. Ceci signifie que, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, il existe des fonctions connues, positives et continues $h_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1})$, $i = (1, n)$ et des termes paramétriques inconnus $\lambda_i(\theta_i)$, $i = (1, n)$, tels que

$$|f_i(\bar{x}_{i,k}, \theta_i) - f_i(\bar{x}_{i,k-1}, \theta_i)| \leq \lambda_i(\theta_i) h_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1}) \sum_{l=1}^i |x_{l,k} - x_{l,k-1}|$$

Remarque 5.1 : Il y a lieu de signaler que l'**Hypothèse 5.1** est tout à fait raisonnable car, un système non-linéaire ne peut être stabilisé globalement en présence d'une contrainte de saturation en son entrée. Si, par exemple, on prend le système suivant [41]:

$$\dot{x} = ax + u(v)$$

où $x \in \mathcal{R}$ est une variable d'état et $u(v) \in \mathcal{R}$ représente la commande soumise à la saturation (5.2); si de plus $a > 0$ et la valeur initiale x_0 satisfait la condition $x_0 > \frac{u_M}{a}$, par conséquent, il n'existe aucune commande satisfaisant la contrainte de saturation et stabilisant le système. De ce fait et pour faciliter l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée, l'**Hypothèse 5.1** est utilisée dans plusieurs travaux en autres [41][47][48].

5.3. Synthèse de la CAI adaptative

Dans cette section, en utilisant le concept de backstepping filtré, nous allons synthétiser une nouvelle CAI adaptative pour le système (5.1). Cette procédure contient n étapes, à chaque étape, une CAI adaptative virtuelle, $\alpha_{i,k}$, $i = (1, n - 1)$ est conçue. La CAI adaptative pratique u_k est obtenue à l'étape finale.

Afin de compenser l'effet de la saturation, le système suivant est utilisé pour générer les signaux $\omega_k = [\omega_{1,k}, \dots, \omega_{n,k}]^T$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{1,k} = \omega_{2,k} - c_1 \omega_{1,k} \\ \dot{\omega}_{i,k} = \omega_{i+1,k} - c_i \omega_{i,k}, i = (1, n - 1) \\ \dot{\omega}_{n,k} = \Delta u(v_k) - c_n \omega_{n,k} \end{cases} \quad (5.3)$$

où les coefficients c_i sont des constantes positives et $\Delta u_k = u(v_k) - v_k$ est la différence entre la commande saturé et la commande non saturé.

Il est claire que ω_k représente, une version filtrée de Δu_k et reste nulle tant qu'il n'y a pas de saturation et, ω_k devient non nulle en présence de la saturation. Autrement dit, ω_k est une convolution d'un terme exponentielle avec Δu_k et converge vers zéro si et seulement si Δu_k converge vers zéro. Pour le besoin de cette procédure, on introduit le changement de coordonnées suivant:

$$\begin{cases} z_{1,k} = x_{1,k} - y_r - \omega_1 \\ z_{i,k} = x_{i,k} - \beta_{i-1,k} - \omega_i, \quad i = (2, n) \end{cases} \quad (5.4)$$

où $\beta_{i,k}$, est la sortie du $i^{\text{ième}}$ filtre non-linéaire ayant pour entrée $\alpha_{i,k}$, $i = (1, n)$ et dont la dynamique est imposée telle que :

$$\dot{\beta}_{i,k} = -\sigma_i(\beta_{i,k} - \alpha_{i,k}) - \rho_i \frac{\beta_{i,k} - \alpha_{i,k}}{|\beta_{i,k} - \alpha_{i,k}| + \varepsilon_i} - z_{1,k} \quad (5.5)$$

où $\sigma_i > 0$ et $\rho_i > 0$ sont des paramètres de conception. Dans ce chapitre, la grandeur $y_{i,k}$ représente le signal d'erreur, à l'itération k , entre la sortie et l'entrée du $i^{\text{ième}}$ filtre ainsi, on a : $y_{i,k} = \beta_{i,k} - \alpha_{i,k}$, $i = (1, n)$. En introduisant $y_{i,k}$ dans la relation (5.5), la dynamique de l'erreur $y_{i,k}$ prend donc la forme :

$$\dot{y}_{i,k} = -\sigma_i y_{i,k} - \rho_i \frac{y_{i,k}}{|y_{i,k}| + \varepsilon_i} - \dot{\alpha}_{i,k} \quad (5.6)$$

La dérivée temporelle de (5.4), en compte tenue de (5.1) et (5.3), est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = x_{2,k} + f_1(x_{1,k}, \theta_1) - \dot{y}_r - \omega_2 + c_1 \omega_1 \\ \dot{z}_{i,k} = x_{i+1,k} + f_i(\bar{x}_{i,k}, \theta_i) - \dot{\beta}_{i-1,k} - \omega_{i+1} + c_i \omega_i, \quad i = (2, n-1) \\ \dot{z}_{n,k} = v_k + f_n(\bar{x}_{n,k}, \theta_n) - \dot{\beta}_{n-1,k} + c_n \omega_n \end{cases} \quad (5.7)$$

En tenant compte de (5.4) et en utilisant le fait que $f(x_k) = f(x_0) + \sum_{j=1}^k (f(x_j) - f(x_{j-1}))$, le système non-linéaire (5.7) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = z_{2,k} + y_{1,k} + \alpha_{1,k} + f_1(x_{1,0}, \theta_1) + \sum_{j=1}^k (f_1(x_{1,j}, \theta_1) - f_1(x_{1,j-1}, \theta_1)) - \dot{y}_r + c_1 \omega_1 \\ \dot{z}_{i,k} = z_{i+1,k} + y_{i,k} + \alpha_{i,k} + f_i(\bar{x}_{i,0}, \theta_i) + \sum_{j=1}^k (f_i(\bar{x}_{i,j}, \theta_i) - f_i(\bar{x}_{i,j-1}, \theta_i)) - \dot{\beta}_{i-1,k} + c_i \omega_i \\ \dot{z}_{n,k} = u_k + f_n(\bar{x}_{n,0}, \theta_n) + \sum_{j=1}^k (f_n(\bar{x}_{n,j}, \theta_n) - f_n(\bar{x}_{n,j-1}, \theta_n)) - \dot{\beta}_{n-1,k} + c_n \omega_n \end{cases} \quad (5.8)$$

Dans ce qui suit, nous notons par $f_i(t)$ la fonction $f_i(x_{i,0}, \theta_i)$, $i = (1, n)$. Puisque les fonctions non-linéaires inconnues $f_i(t)$, $i = (1, n)$ sont invariantes dans le domaine des itérations, il est alors possible d'utiliser le mécanisme d'apprentissage itératif suivant :

$$\hat{f}_{i,k}(t) = \hat{f}_{i,k-1}(t) + \eta_i z_{i,k}, \quad \hat{f}_{i,-1}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.9)$$

où $\hat{f}_{i,k}(t)$ dénote l'estimation de $f_i(t)$ à la $k^{\text{ième}}$ itération et η_i est un gain d'apprentissage. De plus, on définit l'erreur d'apprentissage comme étant $\Phi_{i,k} = f_i(t) - \hat{f}_{i,k}(t)$.

Maintenant, nous sommes en mesure de commencer la synthèse de la CAI adaptative en utilisant la procédure par backstepping filtré.

Etape 1: Considérons la fonction de Lyapunov $V_{1,k}(t) = \frac{1}{2}z_{1,k}^2 + \frac{1}{2}y_{1,k}^2$ dont la dérivée temporelle, tenant compte de la première équation de (5.8) et de l'**Hypothèse 5.3**, est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} \leq & z_{1,k} \left(z_{2,k} + y_{1,k} + \alpha_{1,k} + \hat{f}_{1,k}(t) + \lambda_1(\theta_1) \sum_{j=1}^k h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1})(x_{1,j} - x_{1,j-1}) - \dot{y}_r + c_1 \omega_1 \right) \\ & + \Phi_{1,k} z_{1,k} + 2|z_{1,k}| \lambda_1(\theta_1) \sum_{j=1}^k h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1}) |x_{1,k} - x_{1,k-1}| + y_{1,k} \dot{y}_{1,k} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Soit $s_{1,k} = \sum_{j=1}^k h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1})(x_{1,j} - x_{1,j-1})$, il est clair que $s_{1,k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} h_1(x_{1,j}, x_{1,j-1})(x_{1,j} - x_{1,j-1})$, ce qui implique $s_{1,k} = s_{1,k-1} + h_1(x_{1,k}, x_{1,k-1})(x_{1,k} - x_{1,k-1})$. Donc, $\dot{V}_{1,k}$ peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} \leq & z_{1,k} (z_{2,k} + y_{1,k} + \alpha_{1,k} + f_{1,k}(t) + \lambda_1(\theta_1) s_{1,k} - \dot{y}_r + c_1 \lambda_1) + \Phi_{1,k} z_{1,k} \\ & + 2\lambda_1(\theta_1) |z_{1,k}| |s_{1,k}| + y_{1,k} \dot{y}_{1,k} \end{aligned} \quad (5.11)$$

La première loi de CAI adaptative virtuelle est imposée comme suit:

$$\alpha_{1,k} = -c_1(x_{1,k} - y_r) - \hat{f}_{1,k}(t) - \hat{\lambda}_{1,k} s_{1,k} - \dot{y}_r + u_r \quad (5.12)$$

où $c_1 > \frac{1}{2}$ est un paramètre de conception et $\hat{\lambda}_{1,k}$ est l'estimation de $\lambda_1(\theta_1)$ à la $k^{ième}$ itération dont la loi d'adaptation par apprentissage itératif sera définie ultérieurement. De plus, $u_{r,k}$ est un terme de commande robuste qui sera défini à l'étape finale. La substitution de (5.6) et (5.12) dans (5.11) en concomitance avec l'utilisation de l'inégalité de Young, conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} \leq & -c_1 z_{1,k}^2 + \frac{1}{2} z_{1,k}^2 + \frac{1}{2} z_{2,k}^2 + \tilde{\lambda}_{1,k} s_{1,k} z_{1,k} + \Phi_{1,k} z_{1,k} + 2\lambda_1(\theta_1) |z_{1,k}| |s_{1,k}| + u_r z_{1,k} \\ & + |\dot{\alpha}_{1,k}| |y_{1,k}| - \rho_1 \frac{y_{1,k}^2}{|y_{1,k}| + \varepsilon_1} \\ \leq & -\bar{c}_1 z_{1,k}^2 + \frac{1}{2} z_{2,k}^2 + \tilde{\lambda}_{1,k} s_{1,k} z_{1,k} + \Phi_{1,k} z_{1,k} + 2\lambda_1(\theta_1) |z_{1,k}| |s_{1,k}| \\ & + \varepsilon_1 \rho_1 + u_r z_{1,k} \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\tilde{\lambda}_{1,k} = \lambda_1(\theta_1) - \hat{\lambda}_{1,k}$ est l'erreur d'estimation paramétrique, $\bar{c}_1 = c_1 - \frac{1}{2}$ et ρ_1 est choisi tel

que $\rho_1 \geq |\dot{\alpha}_{1,k}|$.

Étape i où $i = (2, n - 1)$: Similairement à l'étape 1, considérons la fonction de Lyapunov $V_{i,k}(t) = V_{i-1,k}(t) + \frac{1}{2}z_{i,k}^2 + \frac{1}{2}y_{i,k}^2$. En tenant en compte de la $i^{\text{ème}}$ équation de (5.8) et de l'**Hypothèse 5.3**, la dérivée temporelle de $V_{i,k}(t)$ vérifie l'inégalité:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} \leq & \dot{V}_{i-1,k} + z_{i,k}(z_{i+1,k} + y_{i,k} + \alpha_{i,k} + \hat{f}_{i,k}(t) + \lambda_i(\theta_i)s_{i,k} - \dot{\beta}_{i-1,k} + c_i\omega_i) + \Phi_{i,k}z_{i,k} \\ & + 2\lambda_i(\theta_i)|z_{i,k}||s_{i,k}| + y_{i,k}\dot{y}_{i,k} \end{aligned} \quad (5.14)$$

où $s_{i,k} = s_{i,k-1} + h_i(\bar{x}_{i,k}, \bar{x}_{i,k-1}) \sum_{l=1}^i (x_{l,k} - x_{l,k-1})$. La $i^{\text{ème}}$ CAI adaptative virtuelle est imposée comme suit:

$$\alpha_{i,k} = -c_i(x_{i,k} - \beta_{i-1,k}) - \hat{f}_{i,k}(t) - \hat{\lambda}_{i,k}s_{i,k} - \dot{\beta}_{i-1,k} + u_r \quad (5.15)$$

où $c_i > 1$ est un paramètre de conception et $\hat{\lambda}_{i,k}$ est l'estimation de $\lambda_i(\theta_i)$ à la $k^{\text{ème}}$ itération dont la loi d'adaptation par apprentissage itératif sera définie ultérieurement. En remplaçant (5.6) et (5.15) dans (5.14) en accord avec l'utilisation de l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} \leq & \dot{V}_{i-1,k} - \bar{c}_i z_{i,k}^2 - \frac{1}{2}z_{i,k}^2 + \frac{1}{2}z_{i+1,k}^2 + \tilde{\lambda}_{i,k}s_{i,k}z_{i,k} + \Phi_{i,k}z_{i,k} \\ & + 2\lambda_i(\theta_i)|z_{i,k}||s_{i,k}| + \varepsilon_i\rho_i + u_r z_{i,k} \end{aligned} \quad (5.16)$$

où $\tilde{\lambda}_{i,k} = \lambda_i(\theta_i) - \hat{\lambda}_{i,k}$ est l'erreurs d'estimation paramétrique, $\bar{c}_i = c_i - 1$ et ρ_i est choisi tel que $\rho_i \geq |\dot{\alpha}_{i,k}|$.

A l'étape $(i - 1)$, on a obtenu la relation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i-1,k} \leq & - \sum_{m=1}^{i-1} \bar{c}_m z_{m,k}^2 + \frac{1}{2}z_{i,k}^2 + \sum_{m=1}^{i-1} \tilde{\lambda}_{m,k}s_{m,k}z_{m,k} + \sum_{m=1}^{i-1} \Phi_{m,k}z_{m,k} \\ & + \sum_{m=1}^{i-1} 2\lambda_m(\theta_m)|z_{m,k}||s_{m,k}| + \sum_{m=1}^{i-1} \varepsilon_m\rho_m + u_r \sum_{m=1}^{i-1} z_{m,k} \end{aligned} \quad (5.17)$$

En substituant (5.17) dans (5.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,k} \leq & - \sum_{m=1}^i c_m z_{m,k}^2 + \frac{1}{2}z_{i+1,k}^2 + \sum_{m=1}^i \tilde{\lambda}_{m,k}s_{m,k}z_{m,k} + \sum_{m=1}^i \Phi_{m,k}z_{m,k} \\ & + \sum_{m=1}^i 2\lambda_m(\theta_m)|z_{m,k}||s_{m,k}| + \sum_{m=1}^i \varepsilon_m\rho_m + u_r \sum_{m=1}^i z_{m,k} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Étape n: Considérons la fonction de Lyapunov $V_{n,k}(t) = V_{n-1,k}(t) + \frac{1}{2}z_{n,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_1}u_{r,k}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\delta_k^2$.

En considérant la $n^{\text{ième}}$ équation de (5.8) et l'**Hypothèse 5.3**, l'inégalité ci-dessous peut être déduite pour la dérivée temporelle de $V_{n,k}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,k} \leq & \dot{V}_{n-1,k} + z_{n,k}(v_k + \hat{f}_{n,k}(t) + \lambda_n(\theta_n)s_{n,k} - \dot{\beta}_{n-1,k} + c_n\omega_n) \\ & + \Phi_{n,k}z_{n,k} + 2\lambda_n(\theta_n)|z_{n,k}||s_{n,k}| + \frac{1}{\gamma_1}u_{r,k}\dot{u}_{r,k} + \frac{1}{\gamma_2}\delta_k\dot{\delta}_k \end{aligned} \quad (5.19)$$

où $s_{n,k} = s_{n-1,k} + h_n(\bar{x}_{n,k}, \bar{x}_{n,k-1})\sum_{l=1}^n(x_{l,k} - x_{l,k-1})$. La CAI adaptative réelle est imposée comme suit:

$$v_k = -c_n(x_{i,k} - \beta_{i-1,k}) - \hat{f}_{n,k}(t) - \hat{\lambda}_{n,k}s_{n,k} - \dot{\beta}_{n-1,k} + u_r \quad (5.20)$$

où $c_n > 1/2$ est un paramètre de conception et $\hat{\lambda}_{n,k}$ est l'estimation de $\lambda_n(\theta_n)$ dont la loi d'adaptation par apprentissage itératif sera définie ultérieurement. En substituant (5.6) et (5.20) dans (5.19), il en résulte:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,k} \leq & \dot{V}_{n-1,k} - \bar{c}_n z_{n,k}^2 - \frac{1}{2}z_{n,k}^2 + \tilde{\lambda}_{n,k}s_{n,k}z_{n,k} + \Phi_{n,k}z_{n,k} + u_r z_{n,k} \\ & + \frac{1}{\gamma_1}u_{r,k}\dot{u}_{r,k} + \frac{1}{\gamma_2}\delta_k\dot{\delta}_k \end{aligned} \quad (5.21)$$

où $\bar{c}_n = c_n - 1/2$. A l'étape $(n-1)$, on a obtenu

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1,k} \leq & -\sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i z_{i,k}^2 + \frac{1}{2}z_{n,k}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_{i,k}s_{i,k}z_{i,k} + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{i,k}z_{i,k} + \sum_{i=1}^{n-1} 2\lambda_i(\theta_i)|z_{i,k}||s_{i,k}| \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \rho_i + u_{r,k} \sum_{i=1}^{n-1} z_{i,k} \end{aligned} \quad (5.22)$$

En substituant (5.22) dans (5.21), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n,k} \leq & -\sum_{i=1}^n \bar{c}_i z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_{i,k}s_{i,k}z_{i,k} + \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k}z_{i,k} + \sum_{i=1}^n 2\lambda_i(\theta_i)|z_{i,k}||s_{i,k}| + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \rho_i \\ & + u_{r,k} \sum_{i=1}^n z_{i,k} + \frac{1}{\gamma_1}u_{r,k}\dot{u}_{r,k} + \frac{1}{\gamma_2}\delta_k\dot{\delta}_k \end{aligned} \quad (5.23)$$

Le terme de commande robuste est imposé tel que

$$\dot{u}_{r,k} = -\gamma_u u_{r,k} - \gamma_u \left(\sum_{i=1}^n z_{i,k} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \rho_i + \sum_{i=1}^n 2\kappa_i |z_{i,k}| |s_{i,k}| \right) \frac{u_{r,k}}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2} \right) \quad (5.24)$$

avec

$$\dot{\delta}_k = -\gamma_\delta \delta_k - \gamma_\delta \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \rho_i + \sum_{i=1}^n 2\kappa_i |z_{i,k}| |s_{i,k}| \right) \frac{\delta_k}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2} \quad (5.25)$$

où $\gamma_u > 0$, $\gamma_\delta > 0$ et $\kappa_i \geq \lambda(\theta_i)$ sont des paramètres de conception. En substituant (5.24) et (5.25) dans (5.23), on obtient :

$$\dot{V}_{n,k} \leq - \sum_{i=1}^n \bar{c}_i z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_{i,k} s_{i,k} z_{i,k} + \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k} z_{i,k} \quad (5.26)$$

5.4. Analyse de la stabilité et de la convergence

Dans cette section, nous allons montrer la stabilité du système en boucle fermée et la convergence des erreurs de poursuite en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov. Les propriétés, assurées par la commande développée précédemment, sont données dans le théorème suivant.

Théorème 5.1 [48]: *Si le système non-linéaire (5.1), vérifiant les hypothèses 5.1-5.3, est sous la conduite de la commande caractérisée par la CAI adaptative réelle (5.20), les CAI adaptatives virtuelles (5.12) et (5.15), la loi d'apprentissage itératif (5.9) et la loi d'adaptation par apprentissage itératif suivante :*

$$\hat{\lambda}_{i,k} = \hat{\lambda}_{i,k-1} + \Gamma_i s_{i,k} z_{i,k}, \quad \hat{\lambda}_{i,-1}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], i = (1, n) \quad (5.27)$$

où $\Gamma_i > 0$ est un paramètre de synthèse ; par conséquent, pour toute condition initiale satisfaisant la condition d'alignement suivante : $V_{n,k}(0) = V_{n,k-1}(T)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, les résultats suivants sont vérifiés :

- t1. tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$;
- t2. $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{i,k} = 0 \forall t \in [0, T]$, c'est-à-dire, $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{1,k} = 0 \forall t \in [0, T]$;
- t3. de plus, lorsque la contrainte de saturation en entrée est active, l'erreur de poursuite $x_{1,k} - y_r$ est bornée par une inégalité dépendant des paramètres de conception et donc on a :

$$\int_0^T (x_{1,k} - y_r)^2 dt \leq \frac{1}{2\bar{c}_0} W_{k-1}(T) + \frac{1}{2\bar{c}_0} \int_0^T (\Delta u_k)^2 dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

où \bar{c}_0 est un paramètre de conception.

Preuve: On considère la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$W_k(t) = V_{n,k}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \quad (5.28)$$

Etape 1 : Bornitude de $W_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$

En considérant (5.26), la dérivée temporelle de (5.28) est donnée par :

$$\dot{W}_k \leq - \sum_{i=1}^n \bar{c}_i z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_{i,k} s_{i,k} z_{i,k} + \sum_{i=1}^n \Phi_{i,k} z_{i,k} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \dot{\tilde{\lambda}}_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \dot{\Phi}_{i,k}^2 \quad (5.29)$$

En utilisant la loi d'apprentissage itératif (5.9), la loi d'adaptation par apprentissage itératif (5.27), en tenant compte du fait que $\hat{\lambda}_{i,k} - \hat{\lambda}_{i,k-1} = \tilde{\lambda}_{i,k-1} - \tilde{\lambda}_{i,k}$ et $\hat{f}_{i,k}(t) - \hat{f}_{i,k-1}(t) = \Phi_{i,k-1} - \Phi_{i,k}$, par conséquent $\dot{W}_k(t)$ peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{W}_k &\leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k} (\tilde{\lambda}_{i,k-1} - \tilde{\lambda}_{i,k}) + \frac{1}{2\Gamma_i} \dot{\tilde{\lambda}}_{i,k}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\eta_i} \Phi_{i,k} (\Phi_{i,k-1} - \Phi_{i,k}) + \frac{1}{2\eta_i} \dot{\Phi}_{i,k}^2 \right) \\ &\leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} (2\tilde{\lambda}_{i,k} \tilde{\lambda}_{i,k-1} - \tilde{\lambda}_{i,k}^2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} (2\Phi_{i,k} \Phi_{i,k-1} - \Phi_{i,k}^2) \end{aligned} \quad (5.30)$$

En exploitant l'inégalité de Young, on peut déduire les deux inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\lambda}_{i,k} \tilde{\lambda}_{i,k-1} &\leq \tilde{\lambda}_{i,k}^2 + \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2 \\ 2\Phi_{i,k} \Phi_{i,k-1} &\leq \Phi_{i,k}^2 + \Phi_{i,k-1}^2 \end{aligned}$$

En substituant ces deux inégalités dans (5.30), il en résulte :

$$\begin{aligned} \dot{W}_k &\leq - \sum_{i=1}^n c_i z_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k-1}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \Phi_{i,k-1}^2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Puisque $\hat{f}_{i,-1}(t) = 0$ et $\hat{\lambda}_{i,-1} = 0 \forall t \in [0, T]$, il est clair que $\Phi_{i,-1} = f_i(t)$ et $\tilde{\lambda}_{i,-1} = \lambda_i(\theta_i)$.

Donc, à l'itération initiale l'inégalité (5.31) satisfait :

$$\dot{W}_0(t) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \lambda_i^2(\theta_i) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} f_i^2(t) \quad (5.32)$$

En intégrant (5.32) de 0 à t , on obtient

$$W_0(t) \leq V_{n,0}(0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^t \lambda_i^2(\theta_i) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t f_i^2(\tau) d\tau \quad (5.33)$$

Puisque $\lambda_i(\theta_i)$ et $f_i(t)$, $i = (1, n)$ sont des fonctions continues, elles sont donc bornées sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Donc, les intégrales $I_{1i} = \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_i^2(\theta_i) dt$ et $I_{2i} = \frac{1}{2} \int_0^T f_i^2(t) dt$ existent, d'où

$$W_0(t) \leq V_{n,0}(0) + \sum_{i=1}^n \frac{I_{1i}}{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^n \frac{I_{2i}}{\eta_i} < \infty \quad (5.34)$$

La relation (5.34) valide la bornitude de $W_0(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Etape 2 : Bornitude de $W_k(t)$, $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$

La différence de $W_k(t)$ entre deux itérations successives est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= W_k - W_{k-1} \\ &= V_{n,k}(t) - V_{n,k-1}(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^t (\tilde{\lambda}_{i,k}^2 - \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2) d\tau \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t (\Phi_{i,k}^2(t) - \Phi_{i,k-1}^2(t)) d\tau \end{aligned} \quad (5.35)$$

En exploitant la relation algébrique $(a - b)^2 - (a - c)^2 = (c - b)[2(a - b) + (b - c)]$ tout en tenant compte de la loi d'apprentissage itératif (5.9) et de la loi d'adaptation par apprentissage itératif (5.27), il en résulte :

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= V_{n,k}(0) + \int_0^t \dot{V}_{n,k}(t) d\tau - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k} s_{i,k} z_{i,k} d\tau - \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi_{i,k} z_{i,k} d\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^t (\tilde{\lambda}_{i,k} - \tilde{\lambda}_{i,k-1})^2 d\tau - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t (\Phi_{i,k} - \Phi_{i,k-1})^2 d\tau \end{aligned} \quad (5.36)$$

La substitution de (5.26) dans (5.36) donne

$$\Delta W_k \leq V_{n,k}(0) - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t \bar{c}_i z_{i,k}^2 d\tau \quad (5.37)$$

De plus, en utilisant le fait que $V_{n,k}(0) = V_{n,k-1}(T)$, on obtient

$$\Delta W_k(T) \leq - \sum_{i=1}^n \int_0^T \bar{c}_i z_{i,k}^2 d\tau \leq 0 \quad (5.38)$$

L'inégalité ci-dessus montre la décroissance de $W_k(T)$ suivant l'axe des itérations, ce qui implique la bornitude de $W_k(T)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ puisque $W_0(T)$ est bornée. Donc, il existe une constante finie ϖ satisfaisant :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^T \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^T \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq \varpi$$

Alors, on a :

$$W_k = V_{n,k} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq V_{n,k} + \varpi \quad (5.39)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} W_{k-1} &\leq V_{n,k-1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\Gamma_i} \int_0^t \tilde{\lambda}_{i,k-1}^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta_i} \int_0^t \Phi_{i,k-1}^2(\tau) d\tau \\ &\leq V_{n,k-1}(t) + \varpi \end{aligned} \quad (5.40)$$

D'autre part, de (5.37) on a :

$$\Delta W_k \leq V_{n,k}(0) - V_{n,k-1}(t) - \sum_{i=1}^n \int_0^t \bar{c}_i z_{i,k}^2(\tau) d\tau \leq V_{n,k}(0) - V_{n,k-1}(t) \quad (5.41)$$

De (5.40) et (5.41), on peut conclure que

$$W_k \leq V_{n,k}(0) + \varpi \quad (5.42)$$

Puisque $W_k(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, il est clair que $V_{n,k}(T)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. D'où, de (5.42) et compte tenu du fait que $V_{n,k}(0) = V_{n,k-1}(T)$, on peut conclure $W_k(t)$ est bornée $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et $\forall t \in [0, T]$. Par conséquent, les signaux du système en boucle fermée, $z_{i,k}$, $u_{r,k}$, δ_k , $\tilde{\lambda}_{i,k}$, $\Phi_{i,k}$, v_k , sont bornés pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ et pour tout $t \in [0, T]$.

Etape 3 : Convergence de l'erreur de poursuite

Il est à noter que $W_k(T)$ peut être réécrite telle que : $W_k(T) = W_0(T) + \sum_{j=1}^k \Delta W_j(T)$.

D'où on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(T) = W_0(T) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \Delta W_j(T) \quad (5.43)$$

A partir de (5.38), nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k(T) \leq W_0(T) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \int_0^T \bar{c}_i z_{i,k}^2 dt \quad (5.44)$$

En se basant sur (5.44), et puisque $W_k(T)$ et $W_0(T)$ sont bornées, on peut donc conclure que la série $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i z_{i,j}^2 dt$ est convergente. D'où, $\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i z_{i,k}^2 dt$ converge asymptotiquement vers zéro suivant l'axe des itérations $\forall t \in [0, T]$, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i z_{i,k}^2 dt = 0$. De plus, puisque $z_{i,k}$, $y_{i,k}$, $u_{r,k}$, δ_k , $\tilde{\lambda}_{i,k}$, $\Phi_{i,k}$, v_k sont bornées, $\dot{z}_{i,k}$ est aussi bornée, ainsi $z_{i,k}$ est uniformément continue, donc à partir du Lemme de Barbalat, on obtient $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{i,k} = 0$, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{1,k} = 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

A partir de (5.38), on obtient également

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T z_{i,k}^2 dt \leq \frac{1}{\bar{c}_0} (W_{k-1}(T) - W_k(T)) \leq \frac{1}{\bar{c}_0} W_{k-1}(T) \quad (5.45)$$

où $\bar{c}_0 = \min(\bar{c}_i)$, $i = (1, n)$.

Afin de démontrer la bornitude de l'erreur de poursuite $x_{1,k} - y_r$, nous devons déduire tout d'abord la bornitude de $\omega_{1,k}$. Pour cela, la fonction de Lyapunov $V_{\omega,k}(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{i,k}^2$ est considérée. En utilisant (5.3), la dérivée temporelle de $V_{\omega,k}(t)$ peut être calculée comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\omega,k} &= - \sum_{i=1}^n c_i \omega_{i,k}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{k,i} \omega_{k,i+1} + \omega_n \Delta u_k \\ &\leq - \sum_{i=1}^n \bar{c}_i \omega_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \Delta u_k \\ &\leq -\bar{c}_0 \sum_{i=1}^n \omega_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \Delta u_k \end{aligned} \quad (5.46)$$

où $\bar{c}_1 = c_1 - \frac{1}{2}$, $\bar{c}_i = c_i - 1$, $\bar{c}_n = c_n - \frac{1}{2}$ et $\bar{c}_0 = \min(\bar{c}_i)$ avec $i = (1, n)$.

En intégrant (5.46), on obtient

$$V_{\omega,k}(T) - V_{\omega,k}(0) \leq \bar{c}_0 \sum_{i=1}^n \int_0^T \omega_{i,k}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T (\Delta u_k)^2 dt$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \omega_{i,k}^2 dt \leq \frac{1}{\bar{c}_0} \left((V_{\omega,k}(0) - V_{\omega,k}(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T (\Delta u_k)^2 dt \right)$$

En fixant $\omega_{i,k}(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, la valeur initiale de la fonction de Lyapunov est $V_{\omega,k}(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Ensuite, la borne supérieure de $\sum_{i=1}^n \int_0^T \omega_{i,k}^2 dt$ peut être vérifiée comme suit:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T \omega_{i,k}^2 \leq \frac{1}{2\bar{c}_0} \int_0^T (\Delta u_k)^2 dt \quad (5.47)$$

Ainsi, de (5.45) et (5.47), on a

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T (x_{i,k} - \alpha_{i-1})^2 dt \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^T z_{i,k}^2 dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \omega_{i,k}^2 dt \leq \frac{1}{2\bar{c}_0} W_{k-1}(T) + \frac{1}{2\bar{c}_0} \int_0^T (\Delta u_k)^2 dt$$

ou encore

$$\int_0^T (x_{1,k} - y_r)^2 dt \leq \frac{1}{2\bar{c}_0} W_{k-1}(T) + \frac{1}{2\bar{c}_0} \int_0^T (\Delta u_k)^2 dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.48)$$

Remarque 5.2 : Il est important de noter que les variables d'état du système auxiliaire $\omega_{i,k}$, $i = (1, n)$ sont incorporées dans les lois d'adaptation par apprentissage itératif et les lois d'apprentissage itératif, pour permettre de tronquer l'apprentissage quand survient la saturation en entrée. Ceci est rendu possible grâce à une version modifiée de l'erreur de poursuite i.e., $z_{1,k} = x_{1,k} - y_r - \omega_{1,k}$, qui est tout à fait différente de la forme $(x_{1,k} - y_r)$ couramment utilisée dans la littérature de commande. L'inconvénient de cette dernière réside dans le fait que les estimations paramétriques deviennent très importantes car on n'a aucune garantie sur la convergence vers zéro de la grandeur $x_{1,k} - y_r$ quand la saturation d'entrée est active, ce qui est à même de faire perdre la stabilité du système en boucle fermée. Par contre, la nouvelle erreur $z_{1,k}$ permet de maintenir opérationnelles les lois d'apprentissage même en présence d'une saturation en entrée et de plus, un choix approprié des paramètres de synthèse peut atténuer l'effet de la saturation en entrée.

Remarque 5.3 : Supposons que la valeur initiale de ω_k est mise à zéro i.e., $\omega_k(0) = [\omega_{1,k}(0), \dots, \omega_{n,k}(0)]^T = [0, \dots, 0]^T \forall k \in \mathbb{Z}_+$ et que la saturation en entrée est inactive, donc $u_k = v_k$ avec $\Delta u_k = 0$ de ce fait, le système auxiliaire, tel que conçu, est inopérant. De plus, en absence d'une saturation en entrée, Δu_k devient nul et le signal ω_k converge vers zéro en un temps fini dépendant des paramètres de conception c_i , $i = (1, n)$.

5.5. Résultats de simulation

Considérons un système non-linéaire du second ordre fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fini $t \in [0, 2\pi]$. Ce système est décrit par les équations dynamiques suivantes [48]:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} + x_{1,k}e^{-\theta_1 x_{1,k}^2} \\ \dot{x}_{2,k} = u(v_k) + x_{1,k}(1 + x_{2,k}^2)^{\theta_2} \\ y_k = x_{1,k} \end{cases} \quad (5.49)$$

Notre objectif est de concevoir une CAI adaptative pour le système (5.49) assurant la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée aussi bien que la convergence de y_k vers sa trajectoire de référence $y_r = \sin^3(t)$ à travers les itérations. La valeur maximale de la saturation d'entrée est $u_M = 8.4$ et les valeurs vrais des paramètres inconnus sont $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 2$. Soit $z_{1,k} = x_{1,k} - y_r - \omega_{1,k}$ l'erreur de poursuite. La dynamique des erreurs de poursuite est donc donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,k} = x_{2,k} + x_{1,k}e^{\theta_1 x_{1,k}^2} - \dot{y}_r - \omega_{2,k} + c_1 \omega_{1,k} \\ \dot{z}_{2,k} = v_k + x_{1,k}(1 + x_{2,k}^2)^{\theta_2} - \dot{\beta}_{1,k} + c_2 \omega_{2,k} \end{cases}$$

Avec $z_{2,k} = x_{2,k} - \beta_{1,k} - \omega_{2,k}$, où $\beta_{1,k}$ est la sortie du filtre non-linéaire donné par:

$$\dot{\beta}_{1,k} = -20(\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}) - 10 \frac{\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}}{|\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}| + \varepsilon_1} - z_{1,k}$$

De plus, $\omega_{1,k}$ et $\omega_{2,k}$ sont générés par

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{1,k} = \omega_{2,k} - 20\omega_{1,k} \\ \dot{\omega}_{2,k} = \Delta u(v_k) - 30\omega_{2,k} \end{cases}$$

En appliquant, étape par étape, la procédure de conception présentée dans la section 5.3, nous pouvons construire une CAI adaptative pour le système (5.49) comme suit :

Etape 1: A partir de (5.9), (5.12) et (5.27), la CAI adaptative virtuelle, la loi d'apprentissage itératif et celle d'adaptation par apprentissage itératif sont déduites telles que :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,k} &= -20(x_{1,k} - y_r) - \hat{f}_{1,k}(t) - \hat{\lambda}_{1,k}s_{1,k} + \dot{y}_r + u_{r,k} \\ \hat{f}_{1,k}(t) &= \hat{f}_{1,k-1}(t) + 5z_{1,k}, \quad \hat{f}_{1,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \\ \hat{\lambda}_{1,k}(t) &= \hat{\lambda}_{1,k-1}(t) + 10^{-2}s_{1,k}z_{1,k}, \quad \hat{\lambda}_{1,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

où $s_{1,k} = s_{1,k-1} + 10(x_{1,k} - x_{1,k-1})$.

Etape 2: A partir de (5.9), (5.20) et (5.27), la CAI adaptative réelle, la loi d'apprentissage itératif et celle d'adaptation par apprentissage itératif sont obtenues telles que:

$$u_k = -30(x_{2,k} - \beta_{1,k}) - \hat{f}_{2,k}(t) - \hat{\lambda}_{2,k}s_{2,k} + \dot{\beta}_{1,k} + u_{r,k}$$

$$\hat{f}_{2,k}(t) = \hat{f}_{2,k-1}(t) + 2z_{2,k}, \quad \hat{f}_{2,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$\hat{\lambda}_{2,k}(t) = \lambda_{2,k-1}(t) + 10^{-2}s_{2,k}z_{2,k}, \quad \hat{\lambda}_{2,-1}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

où $s_{2,k} = s_{2,k-1} + 10 \left((x_{1,k} - x_{1,k-1}) + (x_{2,k} - x_{2,k-1}) \right)$.

Compte tenu de (5.24) et (5.25), le terme de commande robuste est imposé tel que :

$$\dot{u}_{r,k} = -10^{-5}u_{r,k} - 10^{-5} \left(z_{1,k} + z_{2,k} + \frac{\psi u_{r,k}}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2} \right), \quad u_{r0}(0) = 0.1$$

avec

$$\dot{\delta}_k = -10^{-5}\delta_k - 10^{-5} \frac{\psi \delta_k}{u_{r,k}^2 + \delta_k^2}, \quad \delta_0(0) = 0.1$$

où $\psi = 0.5 + 10|z_{1k}||s_{1,k}| + 10|z_{2k}||s_{2,k}|$.

Nous avons simulé le fonctionnement itératif du système (5.49) sur 20 itérations sous la CAI adaptative ci-dessus avec la condition alignement suivante : $z_{1,k}(0) = z_{1,k-1}(2\pi)$, $z_{2,k}(0) = z_{2,k-1}(2\pi)$, $u_{r,k}(0) = u_{r,k-1}(2\pi)$, $\delta_k(0) = \delta_{k-1}(2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

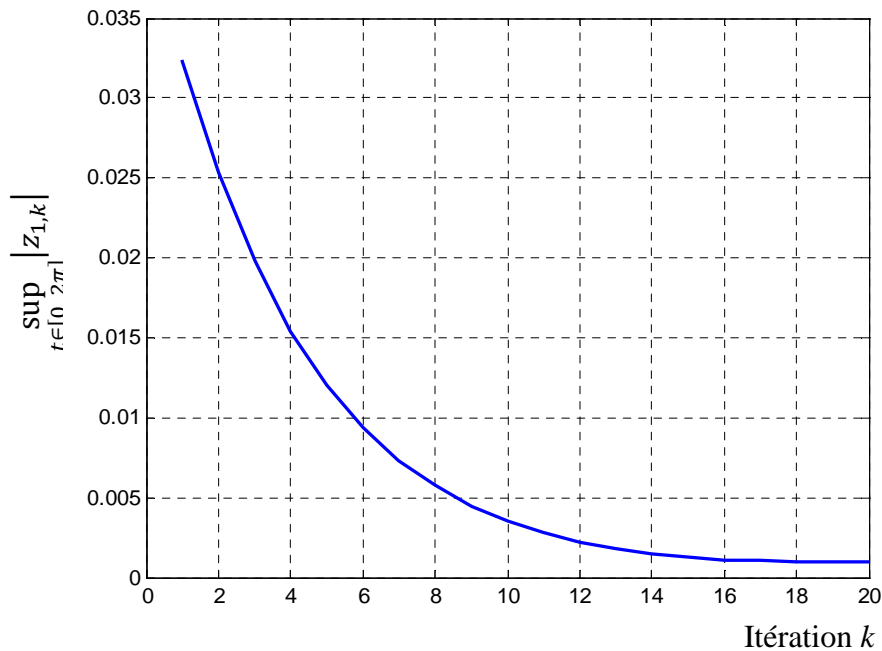


Fig. 5.1 : Evolution de $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |z_{1,k}|$ du système (5.49) en fonction du nombre d'itérations.

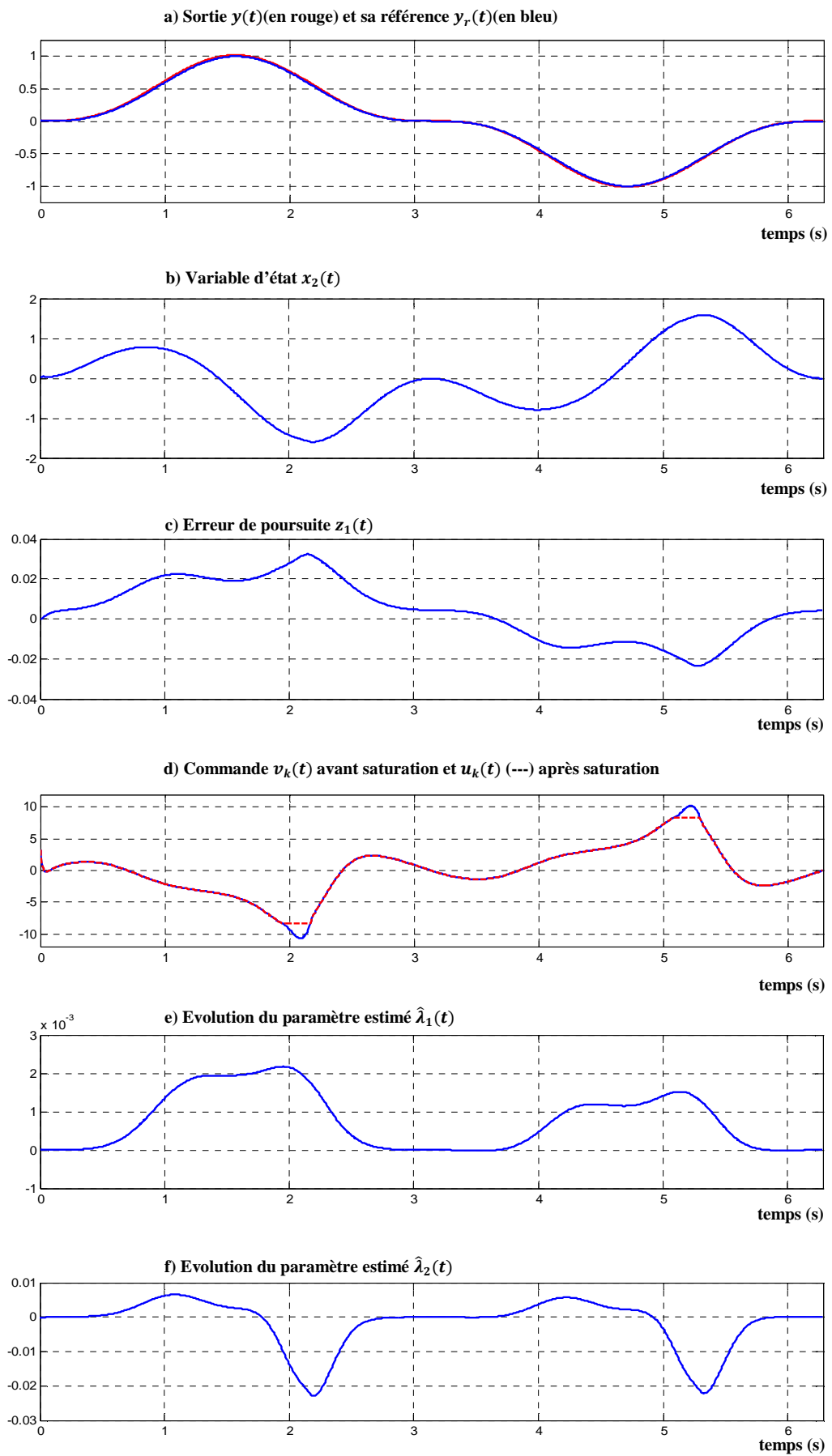


Fig. 5.2 : Réponse du système (5.49) à la 1^{ière} itération.

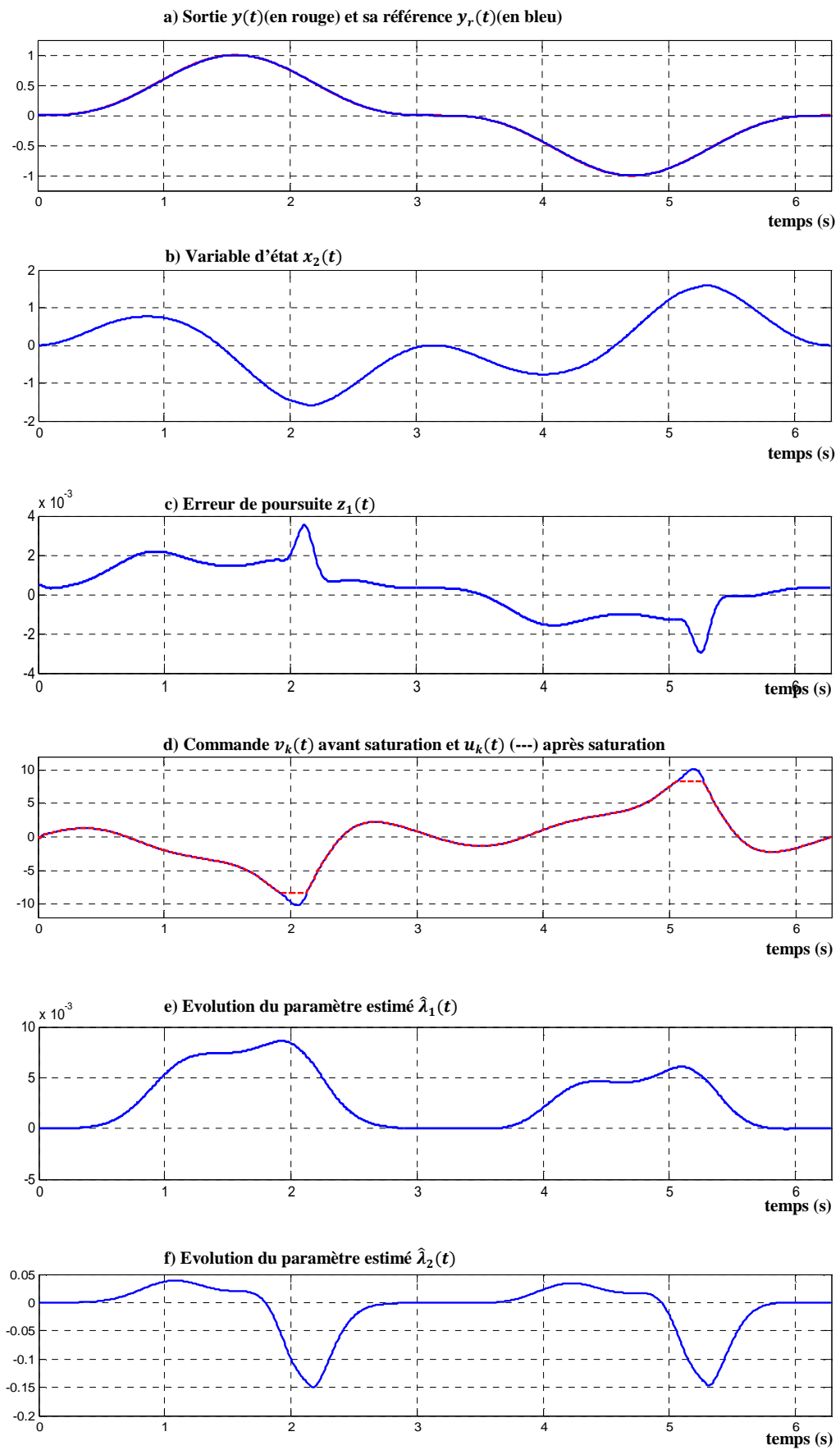


Fig. 5.3 : Réponse du système (5.49) à la 10^{ème} itération.

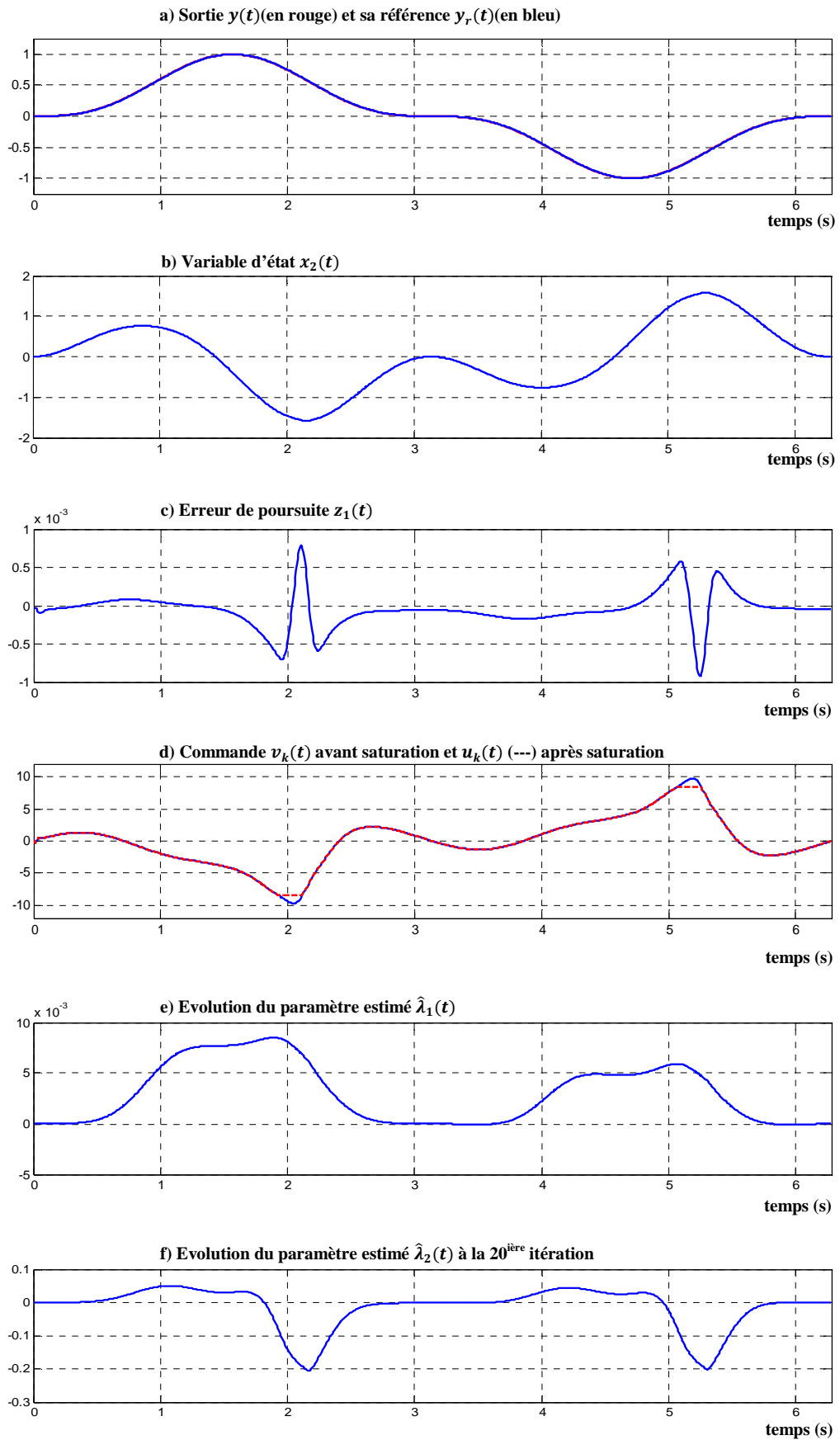


Fig.5.4 : Réponse du système (5.49) à la 20^{ième} itération.

Les Figures 5.1 à 5.4 présentent les résultats de simulation que nous avons obtenus. La Figure 4.1 donne l'évolution de l'erreur de poursuite maximale par itération, celle-ci matérialise la décroissance de cette grandeur itération après itération de plus cette erreur atteint à la vingtième itération, une valeur très faible. Les Figures 3.2 à 3.4 représentent les signaux du système en boucle fermée à la première itération ($k=1$), à la dixième itération ($k=10$) et, à la vingtième itération ($k=20$), respectivement. Il est à noter que déjà à la première itération le signal de sortie est proche de la référence (Fig. 5.2a) et que le signal de sortie s'approche plus au celui de référence à la dixième itération (Fig. 5.3a), à la vingtième itération le signal de sortie est pratiquement confondu avec celui de référence (Fig. 5.3a). Ceci est confirmé par l'évolution de l'erreur de poursuite de la sortie à la première itération (Fig. 5.2c), à la dixième itération (Fig. 5.3c) et à la vingtième itération (Fig. 5.4c). Par ailleurs, le signal de commande appliquée à l'entrée du système est représenté aux Figures 5.2d à 5.4d. Ces Figures montrent également l'effet de la contrainte de saturation sur le signal de commande. Les profils des paramètres de commande $\hat{\lambda}_{1,k}(t)$ et $\hat{\lambda}_{2,k}(t)$ évoluent d'une manière continue et restent toujours bornées. Ceci est confirmé par les Figures 4.2e à 5.4e pour $\hat{\lambda}_{1,k}(t)$ et par les Figures 5.2f à 5.4f pour $\hat{\lambda}_{2,k}(t)$. Par conséquent, ces résultats montrent clairement la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée $\forall t \in [0, T]$ et $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ et la sortie du système $y_k(t)$ suit la trajectoire de référence $y_r(t)$ avec une grande précision lorsque $k = 20$. Ce qui prouve l'efficacité du schéma proposé pour la commande des systèmes non-linéaires triangulaire et non affine en la commande à tâche répétitive.

5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un schéma de la CAI adaptative pour une classe de systèmes triangulaires inférieurs non-linéairement paramétrés, présentant une saturation à l'entrée. Cette classe de systèmes est supposée suivre répétitivement la même trajectoire de référence pendant un intervalle de temps fixe sous la condition d'alignement.

Dans ce schéma de commande, la procédure de synthèse par backstepping filtré est utilisée pour la synthèse de la loi de CAI adaptative d'une part de plus, l'analyse de stabilité et de convergence est effectuée en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov d'autre part. La difficulté de synthèse, liée à la contrainte de saturation en entrée, est surmontée en ayant recours à un système auxiliaire de même ordre que le système à commander. Ce dernier a comme entrée l'erreur entre la commande non saturée et celle saturée. Ses états (i.e. les états du système auxiliaire) ont été ensuite utilisés pour modifier les erreurs de poursuite. Ce mécanisme a permis aux lois d'apprentissage itératif et aux lois d'adaptations par apprentissage itératif de rester opérantes

même si la saturation est active. De plus, les paramètres non-linéairement connectés sont séparés des fonctions non-linéaires localement Lipchitzienne, puis des lois d'apprentissage itératif et des lois d'adaptation par apprentissage itératif ont été conçues pour compenser les effets des fonctions non-linéaires inconnues et des termes paramétriques inconnues.

Enfin, le schéma de la CAI adaptative proposé garantit non seulement la stabilité du système en boucle fermée pour toute itération et la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro à travers les itérations. De plus, il résout aussi le problème de la saturation à l'entrée et le problème lié à la dérivation des commandes virtuelles. Ce dernier, rencontré dans la procédure conventionnelle de synthèse par backstepping, est surmonté, comme aux chapitres 3, en introduisant des filtres non-linéaires à chaque étape de synthèse. Les résultats de simulation obtenue sont permis de vérifier clairement l'efficacité du schéma de commande proposé.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail de thèse était de développer des lois de commande par apprentissage itératif adaptative pour différentes classes de systèmes non-linéaires. Ces derniers représentent des systèmes physiques fonctionnant d'une manière répétitive sur un intervalle de temps fini. Ces classes sont représentées par les systèmes non-linéaires triangulaires affines et non affines en la commande ainsi que par les systèmes non-linéaires triangulaires affines en la commande et soumis à une saturation en entrée. L'élément commun, à toutes ces lois de commande proposées, réside d'une part dans l'utilisation de l'approche de la CAI robuste pour manipuler les incertitudes non paramétriques et de l'approche de la CAI adaptative pour manipuler les incertitudes paramétriques et d'autre part dans le recours à un terme de robustesse pour compenser l'effet des perturbations externes et/ou des erreurs d'apprentissage. Par ailleurs, la procédure de synthèse par backstepping est utilisée pour la synthèse des lois de la CAI adaptative et la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov est exploitée pour prouver la stabilité du système en boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite.

Ainsi, nous avons abordé la question, au premier chapitre, par un rappel succinct des fondements de base de la CAI dite classique par opposition à celle dite adaptative. En effet, nous avons surtout explicité en quoi consiste une CAI et quelles sont les lois de commande les plus courantes de la CAI linéaire.

Au deuxième chapitre, nous avons effectué une synthèse bibliographique d'une part pour relever les principales approches de la CAI adaptative et la CAI robuste et d'autre part pour déterminer pour quelles classes de systèmes non-linéaires ces lois ont été établies. Nous avons également discuté du problème de la condition d'initialisation qui peut être rencontré lors de l'établissement des lois de la CAI adaptative. En fin de ce chapitre, nous avons indiqué clairement en quoi consiste notre apport dans le cadre de cette thèse.

Le développement des travaux entrepris dans le cadre de cette thèse sont exposés aux chapitres 3, 4 et 5.

Ainsi au troisième chapitre, nous avons développé une loi de la CAI adaptative pour la classe des systèmes non-linéaires triangulaires inférieurs affines en la commande et présentant des incertitudes paramétriques et non paramétriques. Cette loi est constituée principalement d'un terme d'apprentissage itératif pour manipuler les incertitudes non paramétrique, d'un terme d'adaptation par apprentissage itératif dans le domaine du temps pour manipuler les incertitudes paramétriques et enfin d'un terme de robustesse pour compenser l'effet des perturbations dynamiques et des erreurs d'apprentissage.

Par ailleurs au quatrième chapitre, nous avons élaboré une loi de la CAI adaptative destinée à une classe de systèmes non-linéaires triangulaires inférieurs, non-linéairement paramétrés et non affines en la commande. En apparence, cette dernière loi a une structure proche de celle déjà présentée au chapitre trois. Mais, essentiellement, la structure de chaque composant de la loi de commande est différent de celui correspondant à la loi présentée au chapitre trois.

Enfin au cinquième chapitre, nous avons pu concevoir une loi de la CAI adaptative réservée à une classe de systèmes non-linéaires triangulaires inférieurs non-linéairement paramétrés et soumis à une saturation en entrée. Contrairement aux schémas précédents de commande, les termes d'adaptation par apprentissage itératif sont définis dans le domaine des itérations. Afin de remédier au problème de la saturation, un système auxiliaire de même ordre que celui du système à commander est construit. Ce système auxiliaire a comme entrée l'erreur entre la commande non saturée et celle saturée de plus, ses états servent à modifier les erreurs de poursuite. Ce mécanisme permet de maintenir opérationnelles les lois d'apprentissage itératif et les lois d'adaptation par apprentissage itératif même en régime de saturation.

Ce travail reste perfectible et ouvre la voie à d'autres axes de recherches, à savoir:

- 1- L'introduction des observateurs pour l'estimation des états. En fait, toutes les commandes développées dans cette thèse sont basées sur la supposition d'une mesure du vecteur d'état.
- 2- L'utilisation des approximateurs universels (comme les systèmes flous et les réseaux de neurones artificiels) pour approcher les non-linéarités incertaines.
- 3- La validation de ces commandes sur des systèmes réels (par exemple les robots manipulateurs).

Bibliographie

- [1] Arimoto, S., Kawamura, S., & Miyazaki, F. (1984). Bettering operation of Robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1(2), 123-140. doi:10.1002/rob.4620010203
- [2] Norrlof, M. (2002). An adaptive iterative learning control algorithm with experiments on an industrial robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(2), 245-251. doi:10.1109/tra.2002.999653
- [3] Tayebi, A., & Islam, S. (2006). Adaptive iterative learning control for robot manipulators: Experimental results. *Control Engineering Practice*, 14(7), 843-851. doi:10.1016/j.conengprac.2005.04.013
- [4] Chen, Y., Moore, K. L., Yu, J., & Zhang, T. (2008). Iterative learning control and repetitive control in hard disk drive industry—A tutorial. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 22(4), 325-343. doi:10.1002/acs.1003
- [5] Yang, S., Xu, J., Huang, D., & Tan, Y. (2014). Optimal iterative learning control design for multi-agent systems consensus tracking. *Systems & Control Letters*, 69, 80-89. doi:10.1016/j.sysconle.2014.04.009
- [6] Márquez-Vera, M., Ramos-Velasco, L., Suárez-Cansino, J., & Márquez-Vera, C. (2014). Fuzzy iterative learning control applied in a biological reactor using a reduced number of measures. *Applied Mathematics and Computation*, 246, 608-618. doi:10.1016/j.amc.2014.08.072
- [7] Roover, D. D., & Bosgra, O. (2000). Synthesis of robust multivariable iterative learning controllers with application to a wafer stage motion system. *International Journal of Control*, 73(10), 968-979. doi:10.1080/002071700405923
- [8] Xu, J., & Tan, Y. (2003). *Linear and nonlinear iterative learning control*. Berlin: Springer.
- [9] Ahn, H., Moore, K. L., & Chen, Y. (2007). Iterative learning control: Robustness and monotonic convergence for interval systems. London: Springer.
- [10] Xu, J., & Tan, Y. (2002). Robust optimal design and convergence properties analysis of iterative learning control approaches. *Automatica*, 38(11), 1867-1880. doi:10.1016/s0005-1098(02)00143-7
- [11] Ahn, H., Chen, Y., & Moore, K. L. (2007). Iterative Learning Control: Brief Survey and Categorization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 37(6), 1099-1121. doi:10.1109/tsmcc.2007.905759
- [12] Xu, J. (2011). A survey on iterative learning control for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 84(7), 1275-1294. doi:10.1080/00207179.2011.574236

- [13] Bu, X., Fu, Z., Yu, F., & Hou, Z. (2013). Iterative learning control for a class of non-linear switched systems. *IET Control Theory & Applications*, 7(3), 470-481. doi:10.1049/iet-cta.2012.0714
- [14] Madady, A. (2013). An extended PID type iterative learning control. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 11(3), 470-481. doi:10.1007/s12555-012-0350-4
- [15] Li, X., Zhang, J., Chow, T., & Ho, J. (2009). Iterative learning control with initial rectifying action for nonlinear continuous systems. *IET Control Theory & Applications*, 3(1), 49-55. doi:10.1049/iet-cta:20070486
- [16] Sun, M., & Wang, D. (2002). Iterative learning control with initial rectifying action. *Automatica*, 38(7), 1177-1182. doi:10.1016/s0005-1098(02)00003-1
- [17] Yang, Z., & Chan, C. (2009). Conditional iterative learning control for non-linear systems with non-parametric uncertainties under alignment condition. *IET Control Theory & Applications*, 3(11), 1521-1527. doi:10.1049/iet-cta.2008.0532
- [18] French, M., & Rogers, E. (2000). Non-linear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique. *International Journal of Control*, 73(10), 840-850. doi:10.1080/00207170040582
- [19] Tayebi, A., & Chien, C. (2007). A Unified Adaptive Iterative Learning Control Framework for Uncertain Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10), 1907-1913. doi:10.1109/tac.2007.906215
- [20] Tayebi, A. (2004). Adaptive iterative learning control for robot manipulators. *Automatica*, 40(7), 1195-1203. doi:10.1016/j.automatica.2004.01.026
- [21] Chien, C., & Tayebi, A. (2008). Further results on adaptive iterative learning control of robot manipulators. *Automatica*, 44(3), 830-837. doi:10.1016/j.automatica.2007.06.023
- [22] Chien, C. (2008). A Combined Adaptive Law for Fuzzy Iterative Learning Control of Nonlinear Systems With Varying Control Tasks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(1), 40-51. doi:10.1109/TFUZZ.2007.902021
- [23] Xu, J., & Xu, J. (2004). On Iterative Learning from Different Tracking Tasks in the Presence of Time-Varying Uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 34(1), 589-597. doi:10.1109/tsmcb.2003.818433
- [24] Chen, W., Chen, Y., & Yeh, C. (2012). Robust iterative learning control via continuous sliding-mode technique with validation on an SRV02 rotary plant. *Mechatronics*, 22(5), 588-593. doi:10.1016/j.mechatronics.2011.12.005
- [25] Li, X., Chow, T. W., & Cheng, L. (2013). Adaptive iterative learning control of non-linear MIMO continuous systems with iteration-varying initial error and reference trajectory. *International Journal of Systems Science*, 44(4), 786-794. doi:10.1080/00207721.2011.625480
- [26] Benslimane, H., Boukroune, A., & Chekireb, H. (2015). **Iterative Learning Control for**

Strict-Feedback Nonlinear Systems with Both Structured and Unstructured Uncertainties. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 41(9), 3683-3694. doi:10.1007/s13369-015-1901-9

- [27] Benslimane, H., Boulkroune, A., & Chekireb, H. (2015). Iterative learning control for nonlinear systems subject to both structured and unstructured uncertainties. *2015 3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT)*. doi:10.1109/ceit.2015.7233132
- [28] Krstić, M., Kanellakopoulos, I., & Kokotović, P. V. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. New York: Wiley.
- [29] Gong, J., & Yao, B. (2001). Neural network adaptive robust control of nonlinear systems in semi-strict feedback form. *Automatica*, 37(8), 1149-1160. doi:10.1016/s0005-1098(01)00069-3
- [30] Ho, H., Wong, Y., & Rad, A. (2008). Adaptive fuzzy approach for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form. *ISA Transactions*, 47(3), 286-299. doi:10.1016/j.isatra.2008.03.002
- [31] Li, T., Wang, D., Feng, G., & Tong, S. (2010). A DSC Approach to Robust Adaptive NN Tracking Control for Strict-Feedback Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 40(3), 915-927. doi:10.1109/tsmcb.2009.2033563
- [32] Liu, Y., Wang, W., Tong, S., & Liu, Y. (2010). Robust Adaptive Tracking Control for Nonlinear Systems Based on Bounds of Fuzzy Approximation Parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 40(1), 170-184. doi:10.1109/tsmca.2009.2030164
- [33] Wang, D., & Huang, J. (2002). Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form. *Automatica*, 38(8), 1365-1372. doi:10.1016/s0005-1098(02)00034-1
- [34] Zhang, T., Wen, H., & Zhu, Q. (2010). Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Systems in Pure Feedback Form Based on Input-to-State Stability. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(1), 80-93. doi:10.1109/TFUZZ.2009.2036906
- [35] Sun, G., Wang, D., & Peng, Z. (2012). Adaptive control based on single neural network approximation for non-linear pure-feedback systems. *IET Control Theory & Applications*, 6(15), 2387-2396. doi:10.1049/iet-cta.2011.0538
- [36] Shen, Q., Shi, P., Zhang, T., & Lim, C. (2014). Novel Neural Control for a Class of Uncertain Pure-Feedback Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25(4), 718-727. doi:10.1109/tnnls.2013.2280728
- [37] Yip, P. P., & Hedrick, J. K. (1998). Adaptive dynamic surface control: A simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 71(5), 959-979. doi:10.1080/002071798221650

- [38] Swaroop, D., Hedrick, J., Yip, P., & Gerdes, J. (2000). Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(10), 1893-1899. doi:10.1109/tac.2000.880994
- [39] Dong, W., Farrell, J. A., Polycarpou, M. M., Djapic, V., & Sharma, M. (2012). Command Filtered Adaptive Backstepping. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(3), 566-580. doi:10.1109/tcst.2011.2121907
- [40] Sun, G., Wang, D., Li, X., & Peng, Z. (2013). A DSC approach to adaptive neural network tracking control for pure-feedback nonlinear systems. *Applied Mathematics and Computation*, 219(11), 6224-6235. doi:10.1016/j.amc.2012.12.034
- [41] Wen, C., Zhou, J., Liu, Z., & Su, H. (2011). Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(7), 1672-1678. doi:10.1109/tac.2011.2122730
- [42] Chen, M., Tao, G., & Jiang, B. (2015). Dynamic Surface Control Using Neural Networks for a Class of Uncertain Nonlinear Systems With Input Saturation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 26(9), 2086-2097. doi:10.1109/tnnls.2014.2360933
- [43] Ma, Jianjun, Zhiqiang Zheng, and Peng Li. "Adaptive Dynamic Surface Control of a Class of Nonlinear Systems With Unknown Direction Control Gains and Input Saturation." *IEEE Transactions on Cybernetics* 45, no. 4 (2015): 728-41. doi:10.1109/tcyb.2014.2334695.
- [44] Li, Yongming, Shaocheng Tong, and Tieshan Li. "Direct adaptive fuzzy backstepping control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation." *Neural Computing and Applications* 23, no. 5 (2012): 1207-216. doi:10.1007/s00521-012-0993-3.
- [45] Esfandiari, K., Abdollahi, F., & Talebi, H. A. (2015). Adaptive Control of Uncertain Non affine Nonlinear Systems With Input Saturation Using Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 26(10), 2311-2322. doi:10.1109/tnnls.2014.2378991
- [46] Lin, D., Wang, X., & Yao, Y. (2011). Fuzzy neural adaptive tracking control of unknown chaotic systems with input saturation. *Nonlinear Dynamics*, 67(4), 2889-2897. doi:10.1007/s11071-011-0196-y
- [47] Gao, S., Ning, B., & Dong, H. (2016). Fuzzy dynamic surface control for uncertain nonlinear systems under input saturation via truncated adaptation approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 290, 100-117. doi:10.1016/j.fss.2015.02.013
- [48] Benslimane, H., Boulkroune, A., & Chekireb, H. (2018) Adaptive iterative learning control of nonlinearly parameterised strict feedback systems with input saturation. *International Journal of Automation and Control*, 12(2), 251-270. doi: 10.1504/ijaac.2018.10010881
- [49] Sun, M., & Wang, D. (2002). Closed-loop iterative learning control for non-linear systems with initial shifts. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(7), 515-538. doi:10.1002/acs.707.

- [50] Tan, Y., & Xu, J. (n.d.). Learning based nonlinear internal model control. *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003*. doi:10.1109/acc.2003.1243989
- [51] Xu, J., Jin, X., & Huang, D. (2013). Composite energy function-based iterative learning control for systems with nonparametric uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 28(1), 1-13. doi:10.1002/acs.2380
- [52] Jin, X., & Xu, J. (2013). Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric and nonparametric uncertainties. *Automatica*, 49(8), 2508-2516. doi:10.1016/j.automatica.2013.04.039.
- [53] Zhang, C., & Li, J. (2014). Adaptive iterative learning control for nonlinear pure-feedback systems with initial state error based on fuzzy approximation. *Journal of the Franklin Institute*, 351(3), 1483-1500. doi:10.1016/j.jfranklin.2013.11.018
- [54] Xu, J., Tan, Y., & Lee, T. (2004). Iterative learning control design based on composite energy function with input saturation. *Automatica*, 40(8), 1371-1377. doi:10.1016/j.automatica.2004.01.029
- [55] Zhang, R., Hou, Z., Ji, H., & Yin, C. (2014). Adaptive iterative learning control for a class of non-linearly parameterised systems with input saturations. *International Journal of Systems Science*, 47(5), 1084-1094. doi:10.1080/00207721.2014.911422
- [56] Slotine, J. E. (1991). *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice Hall.
- [57] Xu, J., & Tan, Y. (2002). A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11), 1940-1945. doi:10.1109/tac.2002.804460
- [58] Zhang, Zhang, C., & Li, J. (2015). Adaptive iterative learning control of non-uniform trajectory tracking for strict feedback nonlinear time-varying systems with unknown control direction. *Applied Mathematical Modelling*, 39(10-11), 2942-2950. doi:10.1016/j.apm.2014.10.070
- [59] Xu, J., & Yan, R. (2005). On initial conditions in iterative learning control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9), 1349-1354. doi:10.1109/tac.2005.854613
- [60] Xu, J., & Yan, R. (2011). Adaptive Learning Control for Finite Interval Tracking Based on Constructive Function Approximation and Wavelet. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(6), 893-905. doi:10.1109/tnn.2011.2132143.
- [61] Zhang, C., & Li, J. (2014). Adaptive Iterative Learning Control of Non-uniform Trajectory Tracking for Strict Feedback Nonlinear Time-varying Systems. *International Journal of Automation and Computing*, 11(6), 621-626. doi:10.1007/s11633-014-0819-0
- [62] Benslimane, H., Boulkroune, A., & Chekireb, H. (2017). Adaptive Iterative Learning Control of Nonlinearly Parameterized Pure Feedback Nonlinear Systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 28(6), 457-469. doi:10.1007/s40313-017-0316-0

- [63] Farrell, J., Polycarpou, M., Sharma, M., & Dong, W. (2009). Command Filtered Backstepping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6), 1391-1395. doi:10.1109/tac.2009.2015562
- [64] Na, J., Ren, X., Shang, C., & Guo, Y. (2012). Adaptive neural network predictive control for nonlinear pure feedback systems with input delay. *Journal of Process Control*, 22(1), 194-206. doi:10.1016/j.jprocont.2011.09.003
- [65] Ferrara, A., & Giacomini, L. (2000). Control of a Class of Mechanical Systems With Uncertainties Via a Constructive Adaptive/Second Order VSC Approach. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122(1), 33. doi:10.1115/1.482426
- [66] Hunt, L., & Meyer, G. (1997). Stable inversion for nonlinear systems. *Automatica*, 33(8), 1549-1554. doi:10.1016/s0005-1098(97)00064-2
- [67] Boulkroune, A., M'saad, M., & Farza, M. (2012). Adaptive fuzzy tracking control for a class of MIMO non affine uncertain systems. *Neurocomputing*, 93, 48-55. doi:10.1016/j.neucom.2012.04.006
- [68] Zhang, X., & Lin, Y. (2011). Adaptive tracking control for a class of pure-feedback non-linear systems including actuator hysteresis and dynamic uncertainties. *IET Control Theory & Applications*, 5(16), 1868-1880. doi:10.1049/iet-cta.2010.0711
- [69] Nijmeijer, H., & Schaft, A. J. (2010). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York, NY: Springer.
- [70] Miao, B., & Li, T. (2014). A Novel Neural Network Based Adaptive Control for a Class of Uncertain Strict-Feedback Nonlinear Systems. *Advances in Neural Networks – ISNN 2014 Lecture Notes in Computer Science*, 312-320. doi:10.1007/978-3-319-12436-0_35
- [71] Farrell, J., Sharma, M., & Polycarpou, M. (2005). Backstepping-Based Flight Control with Adaptive Function Approximation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28(6), 1089-1102. doi:10.2514/1.13030
- [72] Johnson, E. N., & Calise, A. J. (2003). Limited Authority Adaptive Flight Control for Reusable Launch Vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(6), 906-913. doi:10.2514/2.6934
- [73] Khalil, H. K. (2014). *Nonlinear systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [74] Beers, Y. (1957). *Mathematical analysis: a modern approach to advanced calculus*.
- [75] Lin, W., & Qian, C. (2002). Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: the smooth feedback case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8), 1249-1266. doi:10.1109/tac.2002.800773
- [76] Polycarpou, M.M., & Ioannou, P.A. (1996). A robust adaptive nonlinear control design. *Automatica* 32, 423–427.

Annexe

Dans cette annexe, nous allons rappeler quelques outils mathématiques que nous avons exploités pour développer nos travaux de recherche dans le cadre de cette thèse.

A.1. Définition des normes

Nous donnons, à titre de rappel, les définitions de quelques normes que nous avons exploitées dans le cadre de cette thèse. Soit, la fonction réelle $x(t)$ où $t \in [0, T]$, la norme \mathcal{L}_{pe} est définie comme suit :

$$\|x(t)\|_{pe} \triangleq \begin{cases} \left(\int_0^T \|x(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, \infty[\\ \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

où $\|x(t)\|$ représente une norme donnée de $x(t)$. Si $\|x\|_{pe}$ existe, on dit alors que $x(t) \in \mathcal{L}_{pe}$.

Par contre, la norme pondérée est définie comme suit :

$$\|x(t)\|_{\lambda} = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|x(t)\|\}$$

A.2. Théorèmes utiles

A.2.1. Lemme de Barbalat

Il est important de noter que la stabilité d'un système n'implique pas nécessairement la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. De ce fait, la convergence d'un système peut être validée par le recours à l'outil puissant que constitue le lemme de Barbalat. Ce dernier, largement utilisé dans le cadre de cette thèse, s'énonce comme suit :

Lemme A.1 [73]: *Soit la fonction $f(x): \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$; si $f(x)$ est une fonction uniformément continue et si $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(\tau) d\tau$ existe et elle est finie, alors le corolaire A1 est valide.*

Corolaire A.1 : *Soit la fonction $f(x): \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$; si $f(x), \dot{f}(x) \in \mathcal{L}_{\infty e}$ et $f(x) \in \mathcal{L}_{pe}$ pour $p \in [1, \infty[$ alors, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.*

A.2.2. Théorème des fonctions implicites et de la valeur moyenne

Pour traiter les systèmes non affines en la commande, les deux théorèmes suivants nous sont d'une grande utilité.

Si x et y sont deux points distincts dans \mathcal{R}^n , le segment $L(x, y)$ joignant x à y , est défini tel que:

$$L(x, y) = \{z/z = \mu x + (1 - \mu)y, 0 < \mu < 1\}$$

Lemme A.2 (Théorème des Valeurs Moyennes Différentielles) [73][74]: Soit une fonction non linéaire $f(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ continuellement différentiable en tout point x de l'ensemble ouvert $D \subset \mathcal{R}^n$ et, soient x et y deux points de D tels que $L(x, y) \subset \mathcal{R}^n$ par conséquent, il existe un point z du segment $L(x, y)$ tel que :

$$f(y) - f(x) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=z} (x - y)$$

La preuve du Lemme A.2 est exposée en détail à la référence [74].

Lemme A.3 (Théorème des Fonctions Implicites) [73]: Soit une fonction $f(x, y): \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$ continuellement différentiable en tout point (x, y) de l'ensemble ouvert $D \subset \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ et, soit (x_0, y_0) un point de D pour lequel $f(x_0, y_0) = 0$ et dont la matrice Jacobienne $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ est non singulière par conséquent, il existe un voisinage $U \subset \mathcal{R}^n$ de x_0 et un voisinage $V \subset \mathcal{R}^m$ de y_0 tels que pour tout $y \in V$ l'équation $f(x, y) = 0$ admet une solution unique $x \in U$. De plus, la solution peut être donnée par $x = g(y)$ où $g(\cdot)$ est une fonction continuellement différentiable au point $y = y_0$.

La preuve du Lemme A.3 est développée dans [73].

1.4.3 Théorème de séparation

Pour traiter les systèmes dynamiques non linéaires paramétriques, le lemme A.4 nous sera d'une grande utilité dans le cadre cette thèse. Ce lemme montre comment séparer les paramètres non-linéaires et connectés d'une fonction non linéaire paramétrique. Il fournit donc une méthode efficace pour manipuler les non linéarités paramétriques.

Lemme A.4 [75]: Pour toute fonction réelle continue $f(x, y)$, où $x \in \mathcal{R}^n$ et $y \in \mathcal{R}^m$, il existe des fonctions scalaires continues $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$, $c(x) \geq 1$ et $d(x) \geq 1$ tels que :

$$|f(x, y)| \leq a(x) + b(x)$$

$$|f(x, y)| \leq c(x)d(x)$$

La preuve du Lemme A.4 est exposée à la référence [75].

En plus des Théorèmes mentionnés ci-dessus, on ajoute le Lemme A.5 qui a été utilisé intensivement au chapitre 03 de cette thèse.

Lemme A.5 [76]: Pour tout $x \in \mathcal{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$|x| - x \operatorname{Tanh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \bar{\varepsilon} = 0.2785\varepsilon.$$

A.3. Stabilité entrée état

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrite par l'équation dynamique suivante:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{A.1})$$

Où $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathcal{R}^m$ est la commande et la fonction $f(x, t): \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^n$ est non linéaire continue.

Définition A.1 : Le système (A.1) est stable au sens entrée-état (ISS) par rapport à l'entrée u s'il existe une fonction β de classe KL et une fonction γ de classe K telle que, pour tout vecteur initial x_0 et pour toute entrée u continue et bornée sur \mathcal{R}^+ , la solution du système existe et vérifie la condition suivante :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma\left(\sup_{\tau \in [0, t]} (\|u(\tau)\|)\right)$$

Définition A.2 : Une fonction $V(x)$ continuellement différentiable est considérée comme une fonction de Lyapunov de la stabilité entrée sortie du système (A.1) si et seulement si

- Il existe deux fonctions γ_1 et γ_2 de classe \mathcal{K}_∞ , telles que :

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \gamma_2(\|x\|)$$

- Il existe deux fonctions γ_3 et γ_4 de classe \mathcal{K} , telles que

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|) + \gamma_4(\|u\|)$$

Alors, le système (A.1) est stable au sens entrée état avec

$$\gamma(s) = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3^{-1} \circ \gamma_4(s) \quad \forall s > 0$$

Par rapport à la stabilité asymptotique traditionnelle, la contrainte liée à la propriété ISS est plus forte puisqu'il s'agit de garantir que l'état reste borné si l'entrée est bornée, ce qui est loin d'être évident pour les systèmes non linéaires en général.