

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

P0022/  
05B

Département : Génie Electrique

Filière : Electrotechnique

Laboratoire de Recherche en Electrotechnique

Projet de fin d'étude

en vue de l'obtention du titre  
d'Ingénieur d'état en Electrotechnique

Thème

APPLICATION D'UN CODE NUMERIQUE POUR  
LE CALCUL DES PERFORMANCES D'UN  
MOTEUR ASYNCHRONE A ROTOR MASSIF

Proposé et dirigé par :

Pr R. IBTIOUEN

Effectué par :

N. SABOUNI

Membres du Jury :

S. MEKHTOUB, MC à l'ENP

R. TAHMI, CC à l'ENP

R. IBTIOUEN, Pr à l'ENP

Octobre 2005

ENP, 10, avenue Hassen Badi, El-Harrach, ALGER

إلى والدي الكريمين

إلى شعب فلسطين الأبي،

إلى شعب الشيشان الصامد،

إلى شعب العراق المقاوم،

...

...

إلى عشاق الحرية في كل مكان.

## Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus distingués à Monsieur Rachid IBTIOUEN, professeur à l'ENP, pour avoir encadré ce travail et pour m'avoir guidé dans la rédaction de ce mémoire, et surtout pour avoir été si compréhensif et si patient avec moi.

Je remercie Monsieur Saïd MEKHTOUB, maître de conférence à l'ENP, pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie également Monsieur Redouane TAHMI, chargé de cours à l'ENP, pour avoir accepté de juger ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à Mademoiselle Ratiba AMIMER, magister à l'ENP, Monsieur Youcef OUAZIR, chargé de cours à l'USTHB et à mon ami Farouq MEZALI, magister à l'ENP pour m'avoir fait profiter de leur expérience en calcul numérique.

Je remercie enfin mes parents, mes frères : Imène, Youcef, Houda et Hanine et tous mes amis pour leur soutien moral et pour tout ce qu'ils ont pu m'apporter, notamment : Adel, Azzedine, Slimen et mon grand frère Sif-eddine.

## ملخص

قمنا بإجراء دراسة نظرية وعملية على الخصائص الميكانيكية والكهربائية لمحرك لاتزامني ذو الدوار المتجانس الأملس، وذلك باستخدام برنامج FEMM الذي يعتمد على حل معادلات الحقل الكهرومغناطيسي بواسطة طريقة العناصر المنتهية.

مقارنة النتائج المحصل عليها مع القياسات المأخوذة في المخبر أظهرت وجود تقارب لابأس به عند السرعات الكبيرة للدوار.

## كلمات مفتاحية

طريقة العناصر المنتهية، محرك لاتزامني ذو دوار متجانس، برنامج حساب الحقل الكهرومغناطيسي.

---

## Abstract

We carried out a theoretical and practical study of the electric and mechanical characteristics of an asynchronous motor with solid iron rotor by using a numerical code FEMM which is based on the resolution of the equations of the electromagnetic field by using the finite element method.

A comparison between the computed and measured values shows a good agreement for a high rotor speed.

## Keys words

Finite element method, asynchronous motor with solid iron rotor, Code FEMM.

---

## Résumé

Nous avons effectué une étude, théorique et pratique, portant sur les caractéristiques électrique et mécanique d'un moteur asynchrone a rotor massif lisse en utilisant le code de calcul numérique FEMM qui est basé sur la méthode des éléments finis.

Une comparaison entre les valeurs calculées et mesurées montre une bonne concordance pour les vitesses élevées du rotor.

## Mots clés

Méthode des éléments finis, moteur asynchrone à rotor massif lisse, code de calcul du champ électromagnétique FEMM.

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>		<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS</b>		
I. 1.	GENERALITES	3
I. 2.	EXPOSÉ SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	5
I. 2. 1.	Approximation par éléments finis	6
I. 2. 2.	Formulation intégrale de la méthode des éléments finis	12
I. 2. 3.	Discrétisation, Organisation matricielle et Résolution numérique	14
I. 2. 4.	Résumé	16
I. 3.	APPLICATION AU CALCUL D'UN MAS À ROTOR MASSIF	16
<b>CHAPITRE II : DESCRIPTION DU CODE FEMM</b>		
II. 1.	INTRODUCTION	21
II. 2.	PRESENTATION DE FEMM	21
II. 3.	DESCRIPTION ET APPLICATION DU CODE	24
II. 3. 1.	Première étape : Le Pré Processeur	24
II. 3. 1. a.	<i>Définition du type du problème</i>	24
II. 3. 1. b.	<i>Introduction de la géométrie</i>	25
II. 3. 1. c.	<i>Identification des matériaux utilisés</i>	31
II. 3. 1. d.	<i>Choix des conditions aux limites</i>	33
II. 3. 2.	Deuxième étape : Le Solveur	36
II. 3. 3.	Troisième étape : Le Post Processeur	40
<b>CHAPITRE III : EXPLOITATION DES RESULTATS</b>		
III. 1.	SCHEMA DU MONTAGE	44
III. 2.	RELEVES EXPERIMENTAUX	45

III. 3.	TRACES CARACTERISTIQUES	46
III. 4.	COMPARAISONS ET INTERPRETATIONS	47

CONCLUSION GENERALE		49
---------------------	--	----

BIBLIOGRAPHIE		50
---------------	--	----

ANNEXES		
---------	--	--

A.	PRESENTATION DU PROTOTYPE DU MAS A RML ETUDIEE	51
----	--	----

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

# GENERALE

Dans les applications industrielles de fortes puissances, l'entraînement à grande vitesse de rotation est obtenu avec des turbines à gaz ou à vapeur qui ne se prêtent pas facilement au réglage de la vitesse.

Durant ces deux dernières décades, les constructeurs de machines électriques sont, de plus en plus, confrontés à une demande sans cesse croissante de moteurs permettant l'attaque directe des organes entraînés et présentant des vitesses de rotation élevées ( $N > 30\,000$  tr/min pour de fortes puissances). Les développements dans les domaines de l'électronique de puissance et des techniques de commande ont rendu possible ce type d'entraînement à grande vitesse de rotation qui nécessite une bonne tenue mécanique des éléments rotatifs.

Les machines asynchrones à rotors massifs, les machines synchrones à rotors massifs munis d'enroulements et les machines à réluctance variable présentent un rotor solide et sont, de ce fait, envisageables pour des applications à grandes vitesses. En outre, ces moteurs apportent non seulement une compacité, donc une réduction de la taille et du poids, mais également une amélioration du rendement des systèmes entraînés [1].

La solution asynchrone paraît très intéressante : Elle présente un coût relativement réduit par rapport aux deux autres et se prête particulièrement à des vitesses de rotation élevées. Toutes fois, l'adoption d'un moteur à rotor massif conduit à une plus grande difficulté de calcul car les courants induits au rotor ne sont plus guidés comme dans les machines asynchrones classiques et ils peuvent se refermer avant d'avoir atteint les extrémités du rotor massif. Ainsi, différentes techniques de résolution ont été envisagées :

– *Les méthodes analytiques* : bien que rapides à mettre en œuvre, elles ne permettent toutefois pas la prise en compte de tous les phénomènes spécifiques à la machine asynchrone, comme par exemple la saturation.

– *La méthode des équations intégrales de frontières* : elle permet des calculs assez rapides mais ne permet pas la prise en compte de l'effet de saturation.



– *La méthode des différences finies* : elle est simple à mettre en œuvre et elle peut être utilisée même pour des problèmes non linéaires. Mais elle est limitée par la difficulté de placer un quadrillage régulier sur le domaine d'intégration.

– *La méthode des éléments finis* : Elle permet l'obtention d'un système d'équations différentielles du premier ordre analogue à celui obtenu par la méthode des différences finies mais sans la restriction de la régularité du maillage [2]. Elle permet, en plus, de tenir compte la saturation et de manière simple des conditions aux limites. Cette méthode est aussi très puissante lorsqu'on veut faire des couplages électromagnétiques ou magnétothermiques. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratiques : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur [3].

On peut aussi envisager une méthode hybride (méthode des éléments finis-méthode analytique par exemple) pour la prise en compte du mouvement dans les machines électriques [1].

Notre travail est subdivisé en trois parties :

La première consiste en un bref aperçu sur la méthode des éléments finis présentée dans son aspect général suivie d'un exemple d'application dans le domaine de l'électrotechnique. Les ingénieurs ont élaboré différents codes de calcul et de logiciels basés sur la méthode des éléments finis pour calculer des dispositifs électromagnétiques.

Au niveau de la deuxième partie, on présente un code de calcul par éléments finis gratuit et disponible sur Internet. C'est le code FEMM. Nous effectuons, en utilisant ce code, un calcul des performances en régime statique, dans le cas d'une machine asynchrone à rotor massif disponible au niveau du Laboratoire d'Electrotechnique de l'ENP.

La troisième partie de notre étude est consacrée à la validation par comparaison des résultats obtenus en utilisant le code FEMM avec les relevés expérimentaux.

# Chapitre I

---

## **PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

## I. 1. GENERALITES

L'évolution actuelle de la technologie amène l'Ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et sous des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Pour mener à bien ces projets, l'Ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système [3].

De façon générale, les différentes étapes d'analyse d'un problème physique s'organisent suivant le processus schématisé par la figure I.1. [4].

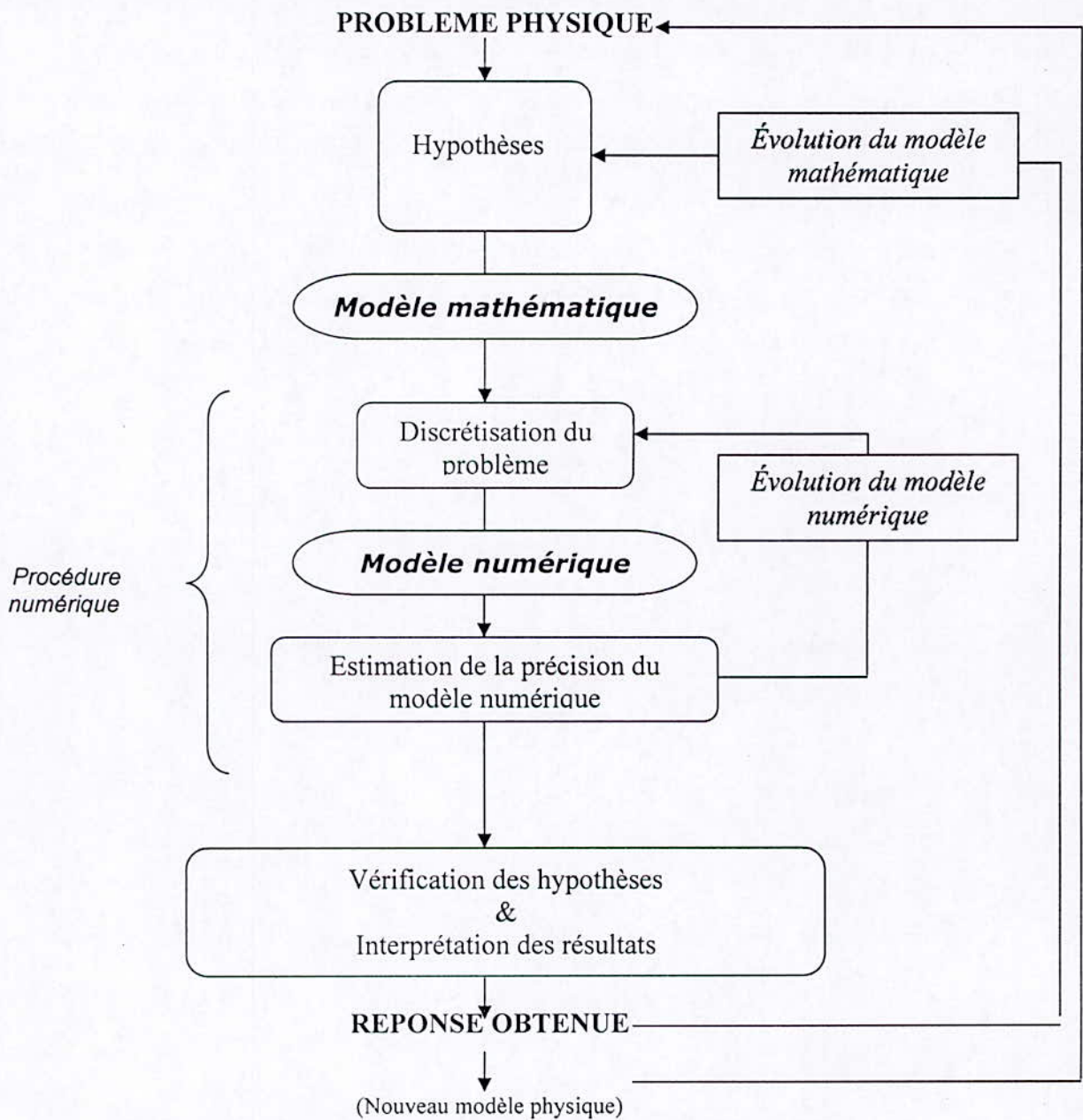


Fig. I.1. Processus d'analyse utilisant un modèle numérique

Si le modèle physique choisi, pour modéliser le problème réel, nous fournit les équations et les conditions aux limites, les mathématiques, par contre, sont souvent impuissantes pour en donner une solution analytique. Les mathématiques prouvent parfois l'existence et l'unicité de la solution, et il est prudent de s'en assurer avant de se lancer dans la recherche d'une solution numérique (en effet, si la solution n'est pas unique et que l'algorithme converge vers une solution, il n'est pas possible de se rendre compte de la non unicité. Si on utilise un autre algorithme, il peut très bien converger vers une autre solution).

L'analyse numérique fournit des solutions numériques. Elles sont plus pauvres qu'une solution analytique. Par exemple, il faut donner une valeur numérique aux caractéristiques du matériau ( $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ , etc.) ainsi qu'une définition numérique des conditions aux limites ( $A=0$ ,  $V=0$ , etc.). La solution calculée n'est donc valable que pour ce matériau et pour ces conditions aux limites, alors qu'une solution analytique conserve tous les paramètres et permet d'étudier leurs influences sur la solution. Pour avoir une idée de l'influence de ces paramètres, l'Ingénieur est réduit à recommencer le calcul avec d'autres valeurs et estimer leurs influences par comparaison des différents résultats.

Pour estimer une solution avec des valeurs de paramètres non calculés, on peut tenter une interpolation entre les solutions calculées mais il est généralement imprudent d'extrapoler. Une série de calculs numériques ne fournit pas de connaissance au sens strict du terme. En effet, entre les valeurs calculées, les solutions peuvent avoir des variations brusques insoupçonnées. Quand on effectue une interpolation entre deux solutions, on postule à une certaine régularité.

L'analyse numérique fournit plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations différentielles avec conditions aux limites parmi lesquelles, on peut citer la méthode de différences finies, la méthode des volumes finis et enfin la méthode des éléments finis, qui fait l'objet de ce Chapitre [5].

## I. 2. EXPOSÉ SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'Ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter effectivement les calculs [3].

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments, il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes d'approximations. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier [4].

Ainsi pour résoudre un problème physique par la méthode des éléments finis, on procède par étapes successives [5] :

1. On pose le problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivés partielles à satisfaire en tout point d'un domaine  $V$ , avec des conditions aux limites sur le bord  $\partial V$ .
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : *C'est la formulation variationnelle du problème.*
3. On divise  $V$  en sous domaines : *C'est le maillage.* Les sous domaines sont appelés *mailles.*
4. On choisit la famille de champ locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée *élément.*
5. On ramène le problème à un problème discret : *C'est la discrétisation.* En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée. Le problème fondamental de la méthode des éléments finis peut se résumer en deux questions:

- Comment choisir le problème discret dont la solution est "proche" de la solution exacte ?
  - Quelle signification donner au mot "proche" ?
6. On résout le problème discret : C'est la *résolution*.
  7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux noeuds et déduire d'autres grandeurs : C'est le *post-traitement*.
  8. On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et voir si elle satisfait les critères imposés par le cahier des charges : C'est l'*exploitation des résultats*.
- Les étapes 1, 2, 3, 4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de *pré-traitement*.

Le travail lors de ces différentes étapes est assisté par des logiciels. Il reste que pour maîtriser leur utilisation, il est indispensable de comprendre les fondements de la méthode, notamment les phases 3 et 4, ne serait-ce que pour comprendre et choisir intelligemment parmi les options qu'ils proposent.

C'est sous cette forme pragmatique que la méthode des éléments finis est utilisée par les Ingénieurs et que nous allons maintenant aborder (*tout ce qui suit est inspiré essentiellement de la référence [3]*).

### I. 2. 1. Approximation par éléments finis

En général, un système physique est caractérisé par des grandeurs ou fonctions dites exactes,  $u_{ex}(x)$  : vitesse, pression, champ électromagnétique, etc.

Choisir une fonction " approchée ", revient à rendre l'erreur :

$$e(X) = u(x) - U_{ex}(x) \quad (1.1)$$

aussi réduite que possible, où  $u(x)$  est la fonction approchée et  $u_{ex}(x)$  la fonction exacte.

Dans la pratique, on suppose que la fonction  $u_{ex}(x)$  est connue en  $n$  points ( $x_i \rightarrow u_{ex}(x_i) = u_{ex_i}$ ) et on fait coïncider la fonction approchée avec  $u_{ex}(x)$  en ces  $n$  points. Mathématiquement le problème se pose comme suit :

– Déterminer une fonction  $u(x)$  connue en  $n$  points de coordonnées  $x_i$ , où la fonction vaut  $u_i$  :

$$u(x_i) = u_{ex}(x_i) = u_i ; i = \overline{1, n} \quad (1.2)$$

Les fonctions  $u(x)$  sont souvent choisies de manière à être faciles à évaluer par ordinateur, à être intégrables ou à être dérivables explicitement. Ainsi l'approximation peut fournir :

- Une expression approchée en tout point  $x$  d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points ;
- Une solution approchée d'une équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles.

Les points  $(x_i ; u_{ex}(x_i))$  sont appelés **nœuds**.

La fonction approchée est le plus souvent linéaire en  $u_i$  :

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n = \langle N \rangle \{u_n\} \quad (1.3)$$

La relation (1.3) définit une **approximation nodale** et les fonctions  $N(x)$  sont **les fonctions d'interpolation**.

L'approximation nodale possède deux propriétés fondamentales :

$$\bullet \quad N_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\bullet \quad e(x_i) = 0 \quad (1.5)$$

La construction de la fonction  $u(x)$  devient difficile quand le nombre  $n$  des nœuds devient important.

Le problème se complique encore si le domaine  $V$  a une forme complexe et si la fonction  $u(x)$  doit satisfaire aux conditions aux limites sur la frontière de  $V$ .

Cela justifie l'utilisation de la méthode d'**approximation par élément finis** qui n'est autre qu'une méthode particulière d'approximation nodale par **sous domaines**. Elle présente les particularités suivantes :

- L'approximation nodale sur chaque sous-domaine  $V^e$  ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur  $V^e$  et sur sa frontière.
- Les fonctions approchées  $u^e(x)$  sur chaque sous domaine  $V^e$  sont construites de manière à être continues sur  $V^e$  et elles satisfont des conditions de continuité entre les éléments adjacents.

Les sous domaines  $V^e$  sont appelés des **éléments**.

Les points, en lesquels la fonction approchée  $u^e(x)$  coïncide avec la fonction exacte  $u_{ex}(x)$  sont les **nœuds d'interpolation** ou **points nodaux**.

Les valeurs  $u_i = u^e(x) = u_{ex}(x)$  sont les **variables nodales**.

Les points qui sont choisis pour définir la géométrie des éléments sont appelés **nœuds géométriques** (dans notre cas, les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation. L'élément est dit alors : *iso-paramétrique*).

On voit donc que l'approximation par élément finis nécessite deux choses :

- Il faut tout d'abord définir analytiquement la géométrie de tous les éléments, ce qui est plus au moins compliqué selon leurs formes.
- Il faut ensuite construire les fonctions d'interpolation  $N_i(x)$  correspondant à chaque élément.

La partition du domaine  $V$  en éléments  $V^e$  doit respecter les deux règles suivantes :

- a) Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leurs frontières communes, si elles existent. Cette condition exclut le recouvrement.
- b) L'ensemble de tous les éléments  $V^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine réel  $V$ . Nous excluons alors les "trous" entre éléments.

La figure I. 2. résume les différentes étapes d'approximation évoquées jusqu'ici.



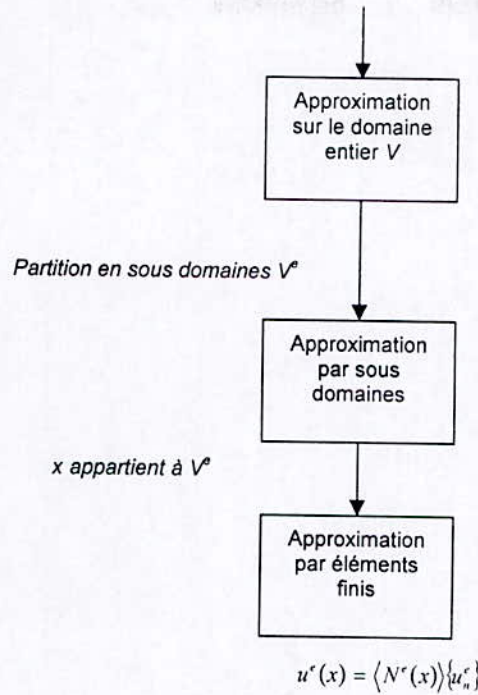


Fig. I. 2. Méthode d'approximation.

Pour simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe et les calculs complexes qu'ils induisent, introduisons la notion d'**élément de référence** : un élément de référence (Fig. 1. 3)  $V^r$  est un élément de forme très simple, repéré dans un **espace de référence**, qui peut être transformé en chaque élément réel  $V^e$  par une **transformation géométrique**  $\tau^e$ . Par exemple dans le cas d'un triangle [2] :

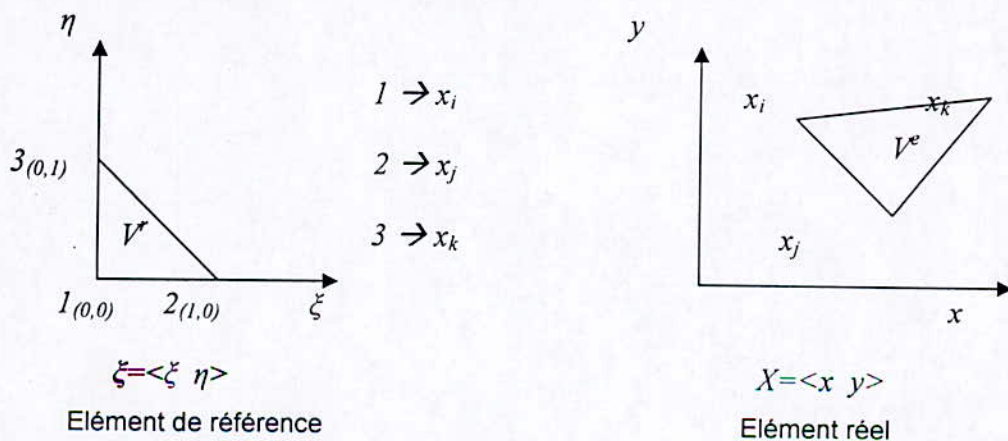


Fig. I. 3. Transformation géométrique d'un élément de référence en un élément réel.

La transformation  $\tau^e$  définit les coordonnées  $X^e$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  du point correspondant de l'élément de référence :

$$\tau^e : \xi \rightarrow X^e = X^e(\xi) \quad (1.6)$$

soit :

$$\tau^e : \xi \rightarrow X^e(\xi) = [N(\xi)]\{X_n\} \quad (1.7)$$

La transformation  $\tau^e$  est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes :

- Bijective en tout point  $\xi$  situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière.
  - Les nœuds de l'élément de référence  $V^r$  correspondent aux nœuds géométriques de l'élément réel.
  - Chaque frontière de l'élément de référence, définie par les nœuds géométriques de cette frontière, correspond à la frontière de l'élément réel définie par les nœuds correspondants.
- Soulignons qu'un même élément de référence  $V^r$  se transforme en tous les éléments réels  $V^e$  de même type par des transformations  $\tau^e$  différentes.

Ainsi, il nous serait facile de construire l'approximation nodale en suivant les étapes suivantes :

- Choix de la **base polynomiale**  $\langle P(\xi) \rangle$ , tel que :

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \{a\} \quad (1.8)$$

avec :  $a_i$  **variables généralisées** de l'élément.

- Evaluation de la **matrice nodale**  $[P_n]$ , tel que :

$$[P_n] = [P_j(\xi_i)] ; i, j = \overline{1, n} \quad (1.9)$$

- Inversion de la matrice nodale.
- Calcul de  $\langle N \rangle$  aux points désirés :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \quad (1.10)$$

En pratique, nous devons souvent exprimer les dérivées de  $u$  en  $x, y$  et  $z$ . Cela sera beaucoup moins compliqué si nous connaissons les dérivées de  $u$  en  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

ce que nous notons par :

$$\{\partial_{\xi}\} = [J]\{\partial_x\} \quad (1.12)$$

où  $[J]$  est la **matrice jacobienne** de la transformation géométrique  $\tau^e$ .

Tenant compte de l'équation (1.7), nous aurons :

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle \partial_{\xi} N \rangle \\ \langle \partial_{\eta} N \rangle \\ \langle \partial_{\zeta} N \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} \quad \{y_n\} \quad \{z_n\}] \quad (1.13)$$

Elle est donc le produit de deux matrices, l'une contenant les dérivées en  $\xi$  des fonctions d'interpolation et l'autre les coordonnées des  $n$  nœuds de l'éléments.

Il nous reste à calculer la matrice inverse de la jacobienne pour avoir :

$$\{\partial_x\} = [J]^{-1} \{\partial_{\xi}\} \quad (1.14)$$

Le jacobien de la transformation géométrique permet, en outre, de passer de l'intégration d'une fonction  $f$  définie sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence :

$$\int_{V^e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{V^r} f(\xi, \eta, \zeta) |\det[J]| d\xi d\eta d\zeta \quad (1.15)$$

## I. 2. 2. Formulation intégrale de la méthode des éléments finis

Les problèmes qui concernent les systèmes discrets et continus peuvent être classés en trois catégories :

- Problèmes d'équilibre ou de valeurs aux limites ;
- Problèmes de valeurs propres ou de valeurs critiques ;
- Problèmes de propagation ou de valeurs initiales.

Nous allons nous intéresser à la première catégorie, qui consiste à calculer  $u$  dans un cas stationnaire. Pour un système discret, les équations de comportement peuvent, en général, s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (1.16)$$

où :  $[K]$  est une matrice caractérisant le système ;

$\{U\}$  sont les variables inconnues ;

$\{F\}$  sont les sollicitations connues.

Le comportement d'un système continu est décrit par les équations aux dérivées partielles :

$$\mathcal{L}(u) + f_V = 0 \quad \text{sur un domaine } V \quad (1.17)$$

$$C(u) = f_S \quad \text{sur la frontière } S \text{ de } V \quad (1.18)$$

où :  $\mathcal{L}$  et  $C$  sont des opérateurs différentiels caractérisant le système,  $u$  sont les fonctions inconnues et  $f_V$  et  $f_S$  sont des fonctions connues dites sollicitations.

L'équation (1.18) représente les conditions aux limites qu'il faut satisfaire pour assurer l'unicité de la solution. Ces conditions aux limites sont :

- Condition sur  $u$  (dite condition de Dirichlet) :

$$u = u_S \quad \text{sur } S_u \quad (1.19)$$

où  $S_u$  représente partie de  $S$  sur laquelle est imposée cette condition.

– Condition sur  $\frac{\partial u}{\partial n}$  ou condition de flux :

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s \text{ sur } S_f \quad (1.20)$$

où  $S_f$  représente la partie de  $S$  sur laquelle est imposée cette condition.

Si  $\alpha \neq 0$ , cette condition est dite de Cauchy.

Si  $\alpha = 0$ , cette condition est dite de Neumann.

Or la méthode des éléments finis utilise une **formulation intégrale** (ou variationnelle) plutôt que les équations aux dérivées partielles. Cela est garanti par la **méthode des résidus pondérés**, qui consiste à rechercher des fonctions  $u$  qui annulent la **forme intégrale** :

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{ R(u) \} dV = \int_V \langle \psi \rangle \{ \mathcal{L}(u) + f_v \} dV = 0 \quad (1.21)$$

pour toute fonction de pondération  $\psi$ .

On appelle **résidu** la quantité  $R(u)$  qui s'annule quand  $u$  est solution de l'Equation (1.17).

L'intégration par partie de l'Equation (1.21) fournit des formes intégrales dites **faibles** qui présentent les avantages suivants :

- L'ordre maximum des dérivées de  $u$ , qui apparaissent dans la forme intégrale, diminue. Les conditions de dérivabilité de  $u$  sont moins fortes;
- Certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale au lieu d'être satisfaites identiquement par  $u$ .

Choisissant un ensemble de  $n$  fonctions de pondération indépendantes  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ . Soulignons que le nombre de fonctions de pondération doit être égal au nombre de paramètres d'approximation  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Le choix du type de fonctions  $\psi_i$  conduit à différentes méthodes : Collocation, Galerkin (la plus utilisée), moindre carrés, etc.

Nous nous intéressons dans le cadre de notre exposé qu'aux formes intégrales de **type Galerkin** pour lesquelles les fonctions de pondération sont l'ensemble des variations  $\delta u$  des fonctions  $u$  :

$$\psi = \delta u = \langle N \rangle \{ \delta u \} \quad (1.22)$$

soit :

$$W = \langle \delta u \rangle \int_V \{ N \} (\mathcal{L}(\langle N \rangle \{ u \}) + f_v) dV = 0 \quad (1.23)$$

Comme  $W$  doit s'annuler pour tout  $\{ \delta u \}$ , la relation précédente est équivalente aux  $n$  équations algébriques :

$$\begin{aligned} W_1(u) &= \int_V N_1 (\langle L(N) \rangle \{ u \} + f_v) dV = 0 \\ &\dots \\ &\dots \\ W_n(u) &= \int_V N_n (\langle L(N) \rangle \{ u \} + f_v) dV = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

### I. 2. 3. Discrétisation, Organisation Matricielle et Résolution Numérique

Remplaçons la forme intégrale de type Galerkin par une somme d'intégrales sur chaque élément  $V^e$  :

$$W = \sum_{e=1}^{n_{el}} W^e = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{V^e} \delta u^e (\mathcal{L}(u^e) + f_v) = 0 \quad (1.25)$$

où  $n_{el}$  est le nombre total d'éléments.

Pour calculer chaque terme  $W^e$ , dit **forme intégrale élémentaire**, utilisons une approximation par éléments finis de  $u$ , de  $\delta u$  et de leurs dérivées sur chaque élément  $V^e$  :

$$u^e = \langle N \rangle \{ u_n \} \quad (1.26a)$$

$$\delta u^e = \langle N \rangle \{ \delta u_n \} \quad (1.26b)$$

$$\frac{\partial u^e}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{u_n\} \quad (1.26c)$$

$$\delta \left( \frac{\partial u^e}{\partial x} \right) = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{\delta u_n\} \quad (1.26d)$$

Ainsi, tous calculs effectués, nous obtenons l'expression matricielle suivante de  $W^e$  discrétisée, qui est la base de la méthode des éléments finis :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) \quad (1.27)$$

où :  $[k]$  est la **matrice élémentaire** ;

$\{f\}$  est le **vecteur élémentaire des sollicitations** ;

$\{u_n\}$  est le **vecteur élémentaire des variables nodales**

$\{\delta u_n\}$  est le **vecteur élémentaire des variations des variables nodales**

L'**assemblage** est l'opération qui consiste à construire la **matrice globale**  $[K]$  et le **vecteur global des sollicitations**  $\{F\}$  à partir des matrices élémentaires  $[k]$  et des vecteurs élémentaires des sollicitations  $\{f\}$  ; elle permet donc le passage de la forme intégrale élémentaire à la forme intégrale globale :

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) = 0 \quad (1.28)$$

où :  $\{\delta U_n\}$  est le **vecteur global** de toutes les **variables nodales** du problème

$\{U_n\}$  est le **vecteur global des variations des variables nodales**.

Comme  $W$  doit être nulle pour tout  $\langle \delta U_n \rangle$ , nous obtenons le système d'équations en  $\{U_n\}$ :

$$[K] \{U_n\} = \{F\} \quad (1.29)$$

Il est clair que la mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite jusqu'ici nécessite l'utilisation des méthodes d'intégration numériques qui permettent de construire les matrices et les vecteurs élémentaires par intégration sur l'élément de

référence ainsi que des méthodes de résolution numérique des systèmes algébriques qui en résultent (après introduction des conditions aux limites).

### I. 2. 4. Résumé

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation par éléments finis de fonctions inconnues  $u$  pour discrétiser une forme intégrale  $W$ , puis à résoudre le système d'équations algébriques ainsi obtenu [3].

## I. 3. APPLICATION AU CALCUL D'UN MAS À ROTOR MASSIF

Nous allons dans ce paragraphe appliquer la méthode des éléments finis, décrite dans les paragraphes précédents, au calcul d'une machine asynchrone (MAS) à rotor massif lisse (RML).

Les hypothèses de travail sont les suivantes :

1. Modèle 2D ; ce qui suppose que la machine est infiniment longue suivant l'axe (effets de bords négligés).
2. La perméabilité du stator et sa conductivité sont supposées respectivement très grande et nulle (tôles feuilletées et isolées).
3. On travaille en régime linéaire, le fer statorique est supposé homogène et isotrope et le phénomène d'hystérésis est négligé.
4. La distribution spatiale de l'enroulement statorique est supposée sinusoïdale comme l'est également son alimentation par des courants triphasés équilibrés. On se limitera donc au premier harmonique d'espace de la densité de courant à la surface du stator.

Compte tenu des équations de Maxwell, des équations constitutives des milieux, des conditions aux limites et d'interfaces, le système physique pourra être représenté par le modèle mathématique suivant :

$$\frac{1}{\mu_r} \Delta \vec{A} + \mu_0 \left( \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.30)$$

$$A_1 = A_2 \quad (1.31)$$



$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} = J_s \quad (1.32)$$

$$\bar{A} = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial n} = 0 \quad (1.34)$$

tels que :  $\bar{A}$ ,  $\sigma$ ,  $\bar{J}_s$ ,  $\mu_r$  et  $\mu_0$  sont respectivement : le potentiel vecteur magnétique, la conductivité du milieu, la densité du courant statorique, la perméabilité magnétique relative du milieu et la perméabilité du vide.

En notation complexe, l'Equation (1.30) devient :

$$\frac{1}{\mu_r} \Delta \bar{A} + \mu_0 (\bar{J}_s - jg\omega\sigma \bar{A}) = 0 \quad (1.35)$$

où  $g$  est le glissement et  $\omega$  où est la pulsation.

On remplace, dans tout ce qui suit, la notation  $\bar{A}$  par  $A$ .

La fonctionnelle d'énergie associée à l'Equation (1.35) s'écrit alors :

$$W = \iint_V \left[ \frac{1}{2\mu_r} \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} - \mu_0 J_s A + jg\omega\sigma \frac{A^2}{2} \right] dx dy \quad (1.36)$$

Pour la discrétisation du domaine étudié, on choisit des éléments triangulaires à trois noeuds qui sont faciles à générer par des algorithmes automatiques de maillage et présentent l'intérêt de s'adapter à des structures complexes.

Une fois la maillage effectué, on passe à l'approximation par éléments finis de notre fonction inconnue  $A$ . Nous adoptons une approximation par une fonction bilinéaire de premier ordre de la forme :

$$A^e(x, y) = a + bx + cy = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

Dans chaque élément  $V^e$  on a pour les trois nœuds :

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (1.38)$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

En combinant (1.37) et (1.39) on aboutit à l'expression de l'approximation nodale suivante :

$$A^e(x, y) = N_1(x, y)A_1 + N_2(x, y)A_2 + N_3(x, y)A_3 \quad (1.40)$$

tel que les fonctions d'interpolations  $N_i$  s'écrivent comme suit :

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (P_i + Q_i x + R_i y) \quad (1.41)$$

avec :

$$P_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (1.41a)$$

$$Q_i = y_j - y_k \quad (1.41b)$$

$$R_i = x_k - x_j \quad (1.41c)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (P_i + P_j + P_k) \quad (1.41d)$$

$i, j$  et  $k$  représentent toute permutation circulaire dans le sens trigonométrique des indices 1, 2 et 3 respectivement.

Le théorème d'Euler montre que pour résoudre l'Equation (1.35), on doit rendre minimale la fonctionnelle d'énergie  $W$  ce qui est réalisé quand les dérivées partielles, par rapport à tous les potentiels des nœuds, sont nulles [3] :

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = \sum_{e=1}^{n^e} \frac{\partial W^e}{\partial A_i} = 0 \quad (1.42)$$

où :  $W^e$  est la contribution énergétique de l'élément  $e$

$n^e$  est le nombre des éléments finis constituant la subdivision du domaine  $V$

Tous calculs faits, cette dernière Equation peut se ramener à la résolution d'un système d'équations algébriques. Pour chaque élément, on obtient :

$$[M^e] \cdot [A^e] = [F^e] \quad (1.43)$$

où :

$[M^e]$  : matrice élémentaire d'ordre (3×3)

$[F^e]$  : vecteur élémentaire de dimension 3

tel que :

$$\bullet M_{ik} = \frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{Q_i Q_k + R_i R_k}{4\Delta} + jg\omega\mu_0\sigma \frac{\Delta}{12} \quad \text{si } i \neq k \quad (1.43a)$$

$$\bullet M_{ii} = \frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{Q_i^2 + R_i^2}{4\Delta} + jg\omega\mu_0\sigma \frac{\Delta}{6} \quad \text{si } i = k \quad (1.43b)$$

$$\bullet F_i = \frac{\mu_0 J_c \Delta}{3} \quad (1.43c)$$

Le calcul, des matrices élémentaires et des vecteurs élémentaires dans tous les éléments du domaine et la prise en compte des conditions aux limites, conduit à la résolution d'un système linéaire tel que :

$$[M] \cdot [A] = [F] \quad (1.44)$$

où :

$[M]$  : est la matrice de rigidité globale d'ordre  $(n \times m)$

$[A]$  : vecteur des potentiels inconnus de dimension  $n$

$[F]$  : vecteur source global de dimension  $n$

$n$  : Nombre de nœuds dans le domaine ( $V$ )

Ainsi, la résolution de ce système linéaire est effectuée en utilisant **la méthode de Gauss** [6].

# Chapitre II

---

## **DESCRIPTION DU CODE FEMM**

## II. 1. INTRODUCTION

Dans cette partie on va décrire et appliquer étape par étape, le code de calcul de dispositifs électromagnétiques en 2D, basé sur la méthode des éléments finis disponible gratuitement sur Internet et intitulé FEMM [8].

L'objectif consiste à présenter la procédure d'utilisation de FEMM sous forme conversationnelle afin de simplifier la tâche aux futurs utilisateurs. Comme exemple d'application, nous considérons le calcul, en régime permanent, des performances d'une machine asynchrone à rotor massif lisse disponible au Laboratoire de machines électriques de l'ENP (voir Annexe A.).

## II. 2. PRESENTATION DE FEMM

FEMM est un programme qui utilise la méthode des éléments finis pour résoudre et analyser les problèmes de l'électromagnétisme : statique et de faibles fréquences, en géométrie plane ou axisymétrique. Il comprend quatre outils principaux, à savoir : un pré processeur graphique (a graphical pre-processor), un mailleur (a mesh generator), un résolvant ou solveur (a solver) et un post-processeur graphique (a graphical post-processor).

1. **Le pré-processeur** permet aux utilisateurs de dessiner les différentes parties de l'élément à étudier, de définir les matériaux utilisés, d'imposer les conditions aux limites et ainsi de suite.
2. **Le mailleur** permet le maillage en éléments triangulaires des géométries à étudier via un logiciel connexe : Triangle.
3. **Le solveur** permet la résolution de problèmes magnétiques et électrostatiques plans et axisymétriques (incluant les problèmes de magnétostatique linéaire et non linéaire et les problèmes harmoniques à basses fréquences). Pour les problèmes de magnétostatique et d'électrostatique, un solveur utilisant le gradient conjugué basé sur le pré-conditionnement de sous-relaxation symétrique successif (Conjugate Gradient solver using a Symmetric Successive Over-Relaxation (SSOR) preconditioner) est employé. Pour les problèmes harmoniques, une implémentation complexe symétrique de l'algorithme du bi-gradient

conjugué (complex-symmetric implementation of the BiConjugate Gradient algorithm) est utilisée également avec le pré-conditionnement de type SSOR.

4. Le **post-processeur** graphique permet l'exploitation de la solution du problème. La solution peut être représentée par un tracé de densité ou par des vecteurs s'il s'agit d'une grandeur vectorielle. Un certain nombre de calcul intégral le long des contours et des aires prédéfinis est aussi accessible.

Un puissant langage (LUA [8 et 9]) est intégré avec FEMM. Il permet, aux utilisateurs, de créer de petits programmes spécifiques à leurs besoins, de décrire les géométries d'une façon paramétrique, d'optimiser et ainsi de suite. Le langage LUA est, en outre, implanté dans l'éditeur du programme FEMM de sorte que le cas échéant, des formules peuvent être incorporées au lieu des valeurs numériques.

Un autre atout de FEMM est qu'il est configuré pour fonctionner comme un "ActiveX server", c'est à dire que les analyses interactives de FEMM peuvent être intégrées avec les analyses d'autres programmes. FEMM supporte aussi le protocole MathLink pour communiquer avec le logiciel Mathematica.

Le concepteur de FEMM affirme que la seule restriction sur la taille des problèmes traités est la capacité de la mémoire disponible. Les utilisateurs peuvent facilement exécuter leurs simulations avec 1.000.000 éléments.

De façon simplifiée, on peut encore présenter FEMM ainsi. C'est une abréviation de Finite Element Method Magnetics. C'est un logiciel conçu pour un environnement Windows permettant la résolution des problèmes magnétiques 2D en régimes statiques et harmoniques, en utilisant la méthode des éléments finis. Il est divisé en quatre modules (Fig. II. 1.) :

1. "**femm-exe**" : C'est le programme d'entrée permettant de dessiner la géométrie de la structure étudiée, de définir les matériaux constituant la structure, les sources de champs ainsi que les conditions aux limites du problème.

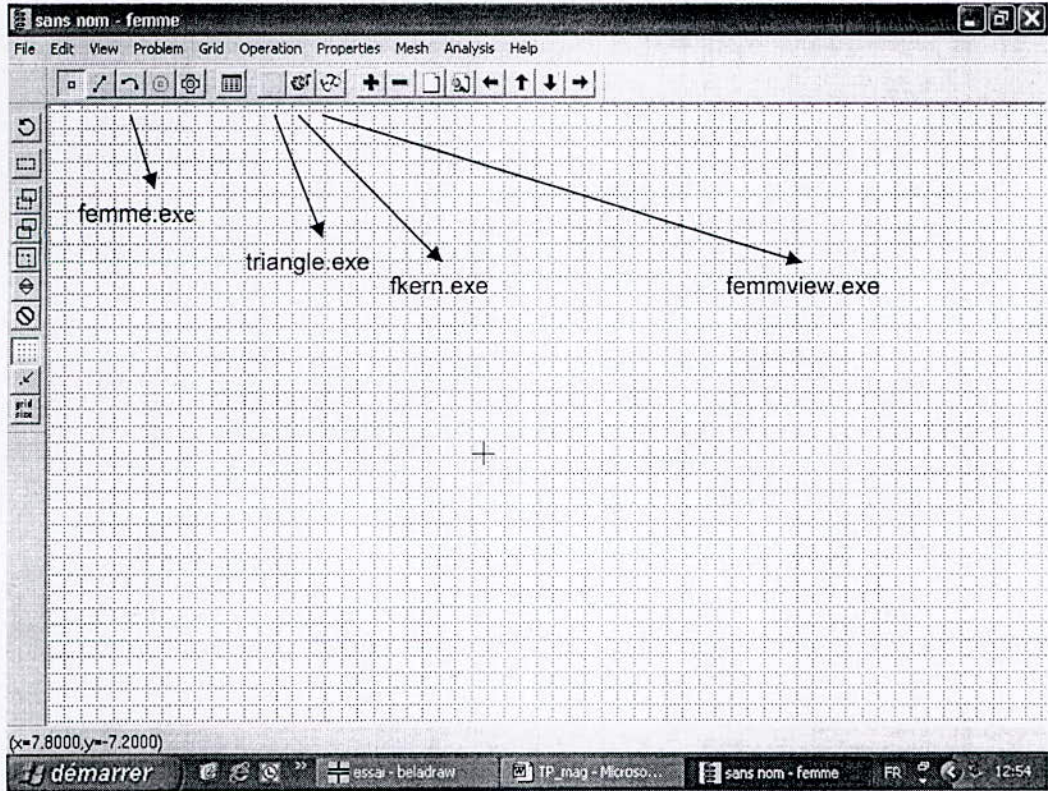


Fig. II. 1. Menu principal

2. "**triangle.exe**" : Cette partie discrétise le domaine en élément finis de formes triangulaires.
  3. "**fkern.exe**" : Avec ce programme, on obtient les valeurs du champ en résolvant les équations de Maxwell régissant le modèle.
  4. "**femmview.exe**" : On expose les résultats obtenus sous formes de contours ou de densité avec ce programme. Les points sont choisis de manière arbitraire dans le domaine étudié.
- La présentation des résultats sous forme de graphes en deux dimensions est obtenue à l'aide du programme annexe "**femplot.exe**".



## II. 3. DESCRIPTION ET APPLICATION DU CODE

### II. 3. 1. Première étape : le Pré Processeur

Le Pré Processeur est utilisé pour identifier le problème en définissant :

- Le type du problème.
- La géométrie.
- Les matériaux utilisés.
- Les conditions aux limites.

#### II. 3. 1. a. Définition du type du problème

Pour définir le type du problème, après avoir lancer FEMM, on va cliquer sur **Problem** dans la barre du menu principal (Fig. II.2) qui apparaît sous forme de boite de dialogue.

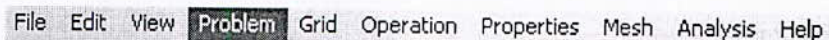


Fig. II.2. Barre du menu principal.

La première sélection permet de choisir le type de problème entre **Planar** (pour les problèmes plans en 2-D) ou **Axisymmetric** (pour les problèmes qui présentent une symétrie axiale).

La deuxième sélection sert à identifier l'unité de longueur associée au modèle géométrique (mm, cm, m, ...).

Ensuite, on a des cases à remplir : La première concerne la fréquence, on la laisse telle qu'elle, c'est à dire égale à zéro, si le problème est statique, sinon on introduit la fréquence imposée par la nature du problème. Dans ce dernier cas, le programme va considérer que toutes les grandeurs vectorielles oscillent selon une sinusoïde avec cette fréquence indiquée.

Si le type de problème choisi est plan, une deuxième case sera activée pour permettre d'introduire la longueur de la géométrie à étudier. L'unité de la valeur introduite sera celle déjà choisie dans la 2<sup>e</sup> sélection : **Length Units**. Cette valeur est très importante

puisqu'elle intervient dans le calcul de certaines intégrales (efforts suivant par exemple le tenseur des contraintes de Maxwell) dans l'étape Post Processeur.

Comme l'importance de la précision des calculs varie selon le problème traité, une case est proposée pour laisser le choix à l'utilisateur pour introduire la précision qui lui semble conforme avec le problème abordé.

Et finalement, si on est, par exemple, porté à utiliser la même géométrie dans plusieurs études, cela peut induire à une confusion, alors une case nous sera proposée pour y mettre nos commentaires.

### ➤ Application n° 1

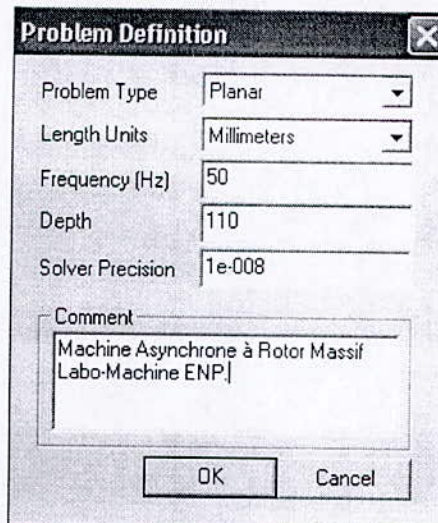


Fig. II. 3. Définition du problème.

### II. 3. 1. b. Introduction de la géométrie

Le Pré Processeur est toujours activé sur un des cinq modes suivants (Fig. II.4.) :

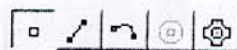


Fig. II. 4. Barre d'outils du mode "dessin".

- *Le mode Point* : Pour définir les nœuds de la géométrie.

- *Le mode Segment* : Pour connecter les nœuds afin de former les limites rectilignes et les interfaces planes.
- *Le mode Arc* : Pour connecter les nœuds afin de former les limites en arc et les interfaces curvilignes.
- *Le mode Bloque* : Pour définir le matériau et le maillage utilisé dans chaque région (voir section suivante).
- *Le mode Groupe* : Pour coller les différentes parties dans le cas où on les a dessinées séparément.

Généralement, l'utilisateur a besoin, pour mieux voir quelques détails par exemple, de manipuler sa géométrie : Agrandissement ou réduction de la taille globale, ou translation de l'objet (vers le haut, vers le bas, à droite ou à gauche) ou encore afficher l'objet en entier en une seule page. Pour exécuter ce genre de manipulations, une barre d'outils existe (Fig. II. 5.).

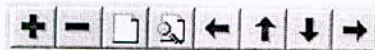


Fig. II. 5. Barre d'outils du mode "affichage"

Souvent, l'utilisateur commet des fausses manipulations, ce qui est tout à fait naturel, mais heureusement que le concepteur du logiciel a introduit une commande qui annule la dernière tâche exécutée ; ce qui nous épargne une énorme perte de temps. Cette commande se trouve dans la barre d'outils "édition" (Fig. II. 6.).

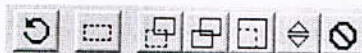


Fig. II. 6. Barre d'outils du mode "édition".

Dans la même barre, on trouve, respectivement, les fonctionnalités suivantes : Sélectionner un objet, lui changer sa position, le copier, lui changer d'échelle, faire une image symétrique par rapport à un axe défini **Mirror**, ou encore l'effacer carrément.

Pour des raisons de commodité, il y a des problèmes où on préfère travailler dans un système de coordonnées cartésiennes et, pour d'autres on privilégie plutôt un système de

coordonnées polaires. Ce choix est permis via la barre d'outils du mode "grille" (Fig. II. 7.).



Fig. II. 7. Barre d'outils du mode "grille".

Comme son nom l'indique, cette dernière barre nous offre la possibilité de faire des "grilles" dans l'espace du dessin par des points plus ou moins écartés selon le choix de l'utilisateur.

✦ **Remarque**

*Reste encore quelques commandes qu'on ne peut exécuter qu'avec le clavier ou la souris. Une liste détaillée est présente sur [9].*

➤ **Application n° 2**

*Pour l'exemple d'application étudié, qui est un moteur asynchrone à rotor massif dont le stator possède 36 encoches, on va se restreindre, à une seule encoche, puis on va faire 35 copies pour obtenir à la fin une coupe du stator entier.*

- choisir, par exemple, le système de coordonnées polaires (Fig. II. 8.)

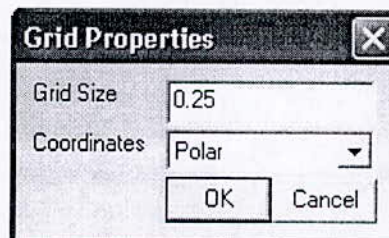


Fig.II. 8. Choix du système de coordonnées.

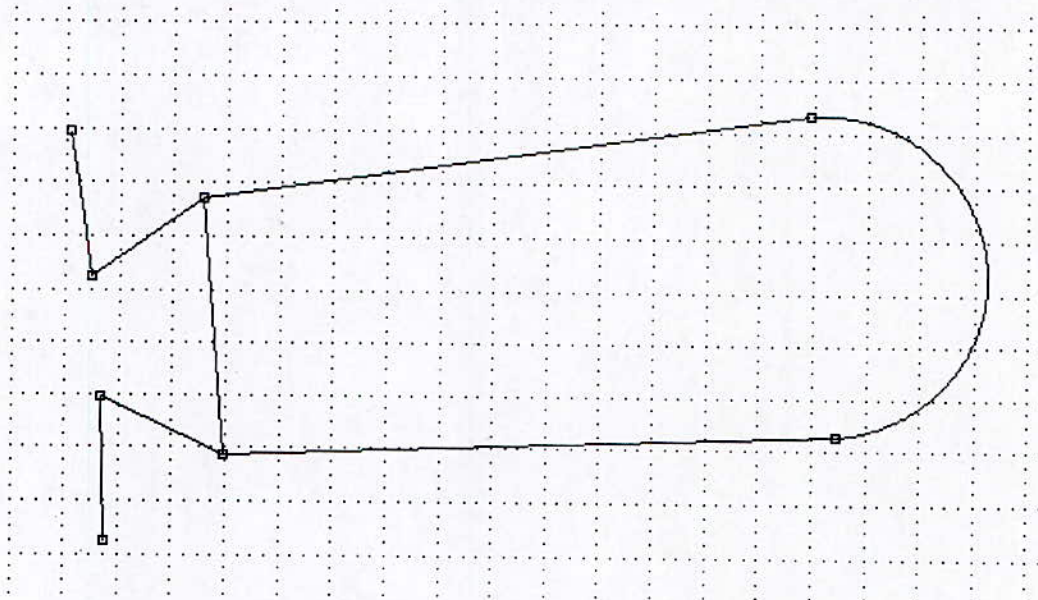
- insérer les points suivants (Tableau II.1.) qui correspondent aux paramètres géométriques de l'encoche statorique :

Rayon (mm)	Angle (°)
44.25	0
44.25	3.5
44.25	6.5
44.25	10
46.5	2
46.5	8
58	2
58	8
72.5	0
72.5	10

**Tableau II. 2.** Géométrie de l'encoche statorique

- connecter les points par des lignes et des arcs (Fig.II. 9.)

(Attention : respecter le sens de rotation quand vous connecter deux points par un arc !)

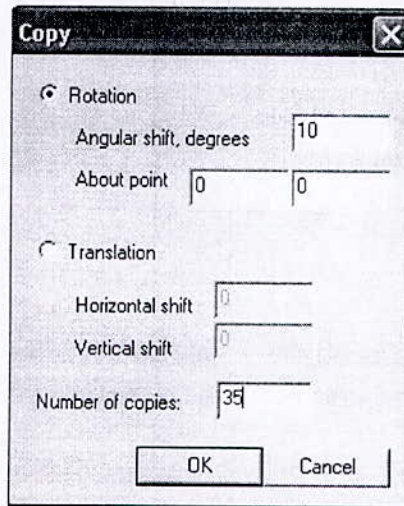


**Fig. II. 9.** Exécution de la géométrie de l'encoche statorique

- cliquer sur le mode Groupe

- sélectionner l'encoche entière

- faire 35 copies en remplissant la boîte de dialogue (Fig.II. 10.) pour obtenir enfin toutes les encoches statoriques



**Fig. II. 10.** Mode copies des encoches statoriques

- insérer maintenant les deux points suivants (Tableau II. 2.) et ensuite les raccorder par deux arcs de 180° pour obtenir le périmètre externe du stator

Rayon (mm)	Angle (°)
72.5	0
72.5	180

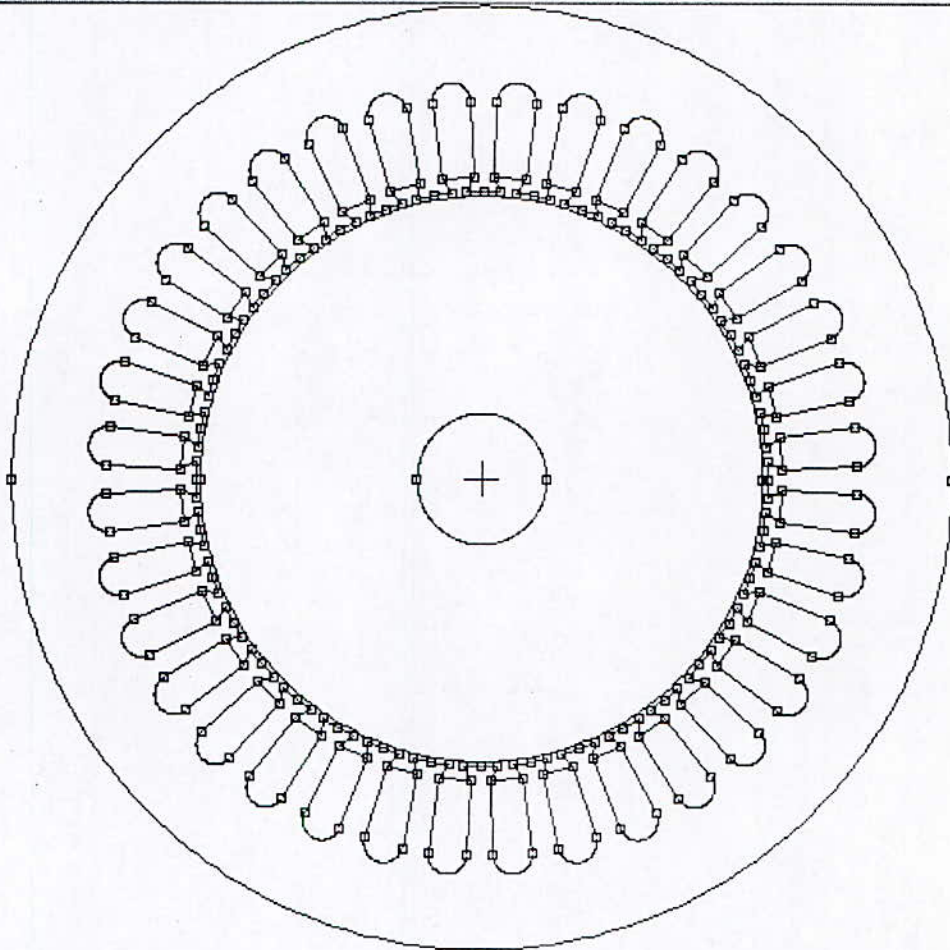
**Tableau II. 2.** Périmètre externe du stator

- reste à dessiner le rotor : Il suffit d'insérer les points qui apparaissent sur le tableau ci dessous (Tableau 3), puis les raccorder par des arcs de 180° (Fig.II. 11.)

Rayon (mm)	Angle (°)
10	0

10	180
43.85	0
43.85	180

**Taleau II. 3.** Exécution de la géométrie du rotor (massif lisse)



**Fig. II. 11.** Géométrie de la machine asynchrone à rotor massif (coupe transversale en 2D)

### II. 3. 1. c. Identification des matériaux utilisés

Une fois que la géométrie est introduite, on passe à l'identification de chaque bloc c'est-à-dire : Affecter à chaque bloc le matériau qui le constitue. Le logiciel propose une "bibliothèque" qui comporte une quarantaine de matériaux. Pour accéder à cette bibliothèque il faut dérouler le menu "**Propriétés**", cliquer sur "**Bibliothèque des matériaux**" (Fig. II. 12.) et ensuite dérouler le 1<sup>er</sup> menu à gauche. Une liste s'affiche pour permettre le choix des matériaux qui constituent le dispositif pour les ajouter, ensuite, un par un via la commande "**Ajouter le matériau sélectionné au modèle**".

Malgré la richesse de la "bibliothèque" proposée, il arrive, dans certains cas, d'avoir besoin d'autres matériaux (exemple de l'acier XC18 qui compose le rotor massif de notre machine asynchrone). Dans ce cas on ajoute les matériaux manquants à la bibliothèque tout en définissant leurs propriétés électrique et magnétique. Pour déterminer la caractéristique  $B(H)$ , il suffit juste d'introduire la perméabilité relative du matériau s'il est linéaire, sinon il faut insérer tous les points qui définissent sa caractéristique magnétique.

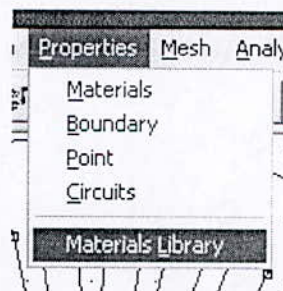


Fig. II. 12. Barre Propriétés des "matériaux"

Après avoir ajouté tous les matériaux qui composent la machine à étudier, on passe à l'affectation de chaque matériau à la région correspondante. Pour effectuer cela, on se met d'abord sous le mode "Bloc" puis on clique sur un des blocs avec la touche gauche de la souris, on sélectionne ce dernier point avec la touche droite, ensuite la barre d'espace nous affiche une boîte de dialogue (Fig. II. 13.) pour introduire les propriétés correspondantes au bloc choisi au début telles que le type du bloc, la taille du maillage, le circuit auquel appartient le bloc, etc.



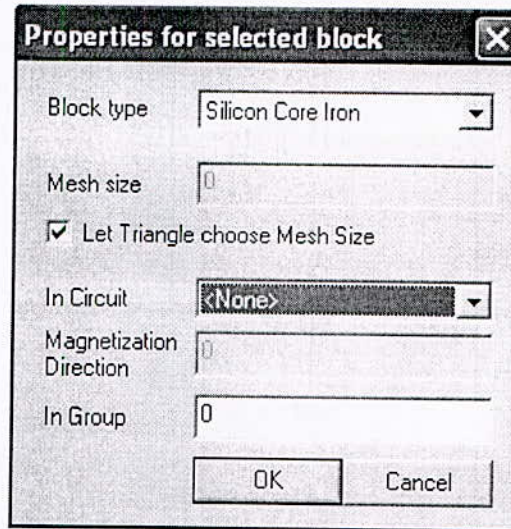


Fig. II. 13. Barre "bloques de propriétés"

➤ **Application n° 3**

Pour le cas du dispositif étudié, on n'a besoin que de trois types de matériaux : Le Silicon CoreIron au stator, le XC18 au rotor et l'Air au niveau de l'entrefer.

Comme le XC18 n'est pas disponible sur la "bibliothèque" de matériaux, on va l'ajouter et là deux cas se présentent : Ou bien on le considère linéaire et dans ce cas on met  $\mu = \text{constante}$  ou bien on le considère non linéaire et dans ce cas on va insérer l'ensemble des points qui définissent sa courbe caractéristique  $B(H)$  (Figs. II. 14 et 15).

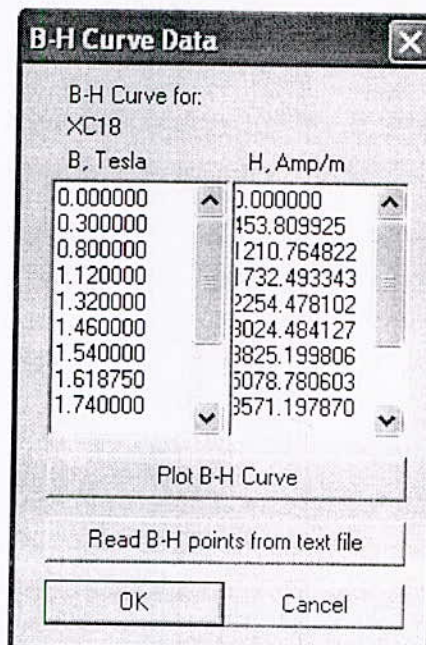


Fig. II. 14. Introduction de  $B(H)$

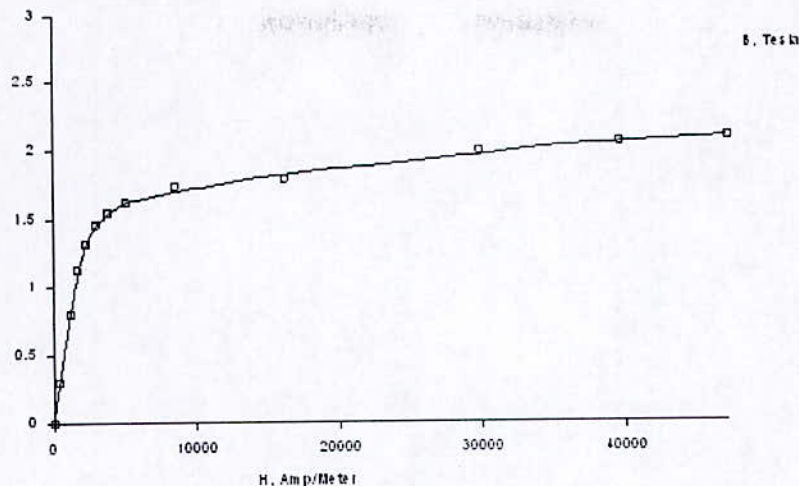


Fig. II. 15. Caractéristique magnétique du rotor

Ensuite on affecte chaque matériau au bloque approprié (Fig. II. 16.).

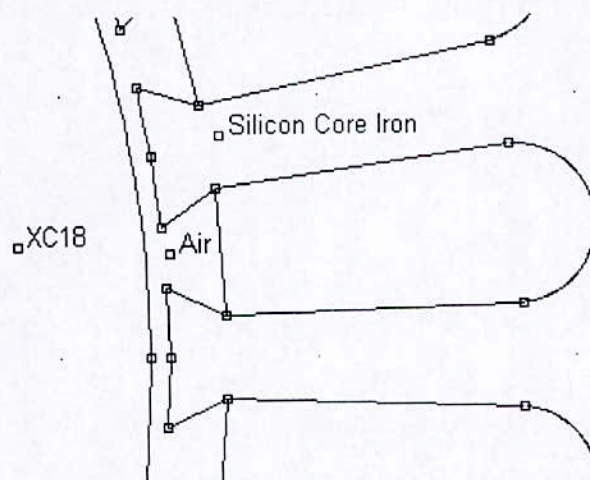


Fig. II. 16. Différents milieux

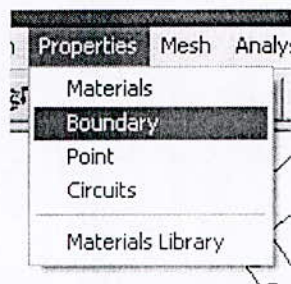
### II. 3. 1. d. Choix des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont des relations ou des valeurs imposées à un champ (scalaire, vectoriel, ou tensoriel) et/ou à ses dérivées sur les frontières. En pratique, les conditions aux limites sont nombreuses et très variées (Robin, Neumann, Cauchy, Dirichlet, etc.). Tout dépend de la nature du problème à traiter. Pour résoudre des problèmes électromagnétiques, le code de calcul numérique FEMM nous propose six types de conditions aux limites, à savoir :

- Vecteur potentiel imposé ;
- Peau à petite profondeur ;
- Mixte (entre les deux premiers) ;
- Image duale stratégique ;
- Périodicité ;
- Anti-périodicité.

Le lecteur intéressé, à plus de détails, est invité à se reporter au manuel de FEMM [9].

Comme on a fait dans le point précédent, là aussi il est recommandé de commencer d'abord par l'introduction des propriétés des conditions aux limites (Fig. II. 17.).



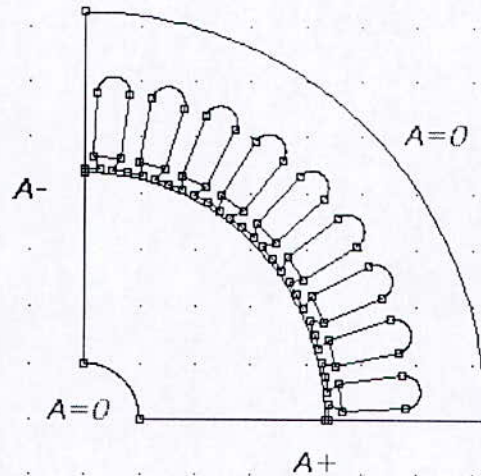
**Fig. II. 17.** Barre des conditions aux limites

Une fois tous les types de conditions aux limites à utiliser pour un problème donné introduits, on passe à l'affectation de chacun de ces types au bloc associé. Il suffit, en fait, de sélectionner l'élément de frontière en question (arc ou segment de droite), de cliquer sur la barre d'espace et de remplir le formulaire qui s'affiche sous forme de boîte de dialogue.

#### ➤ **Application n°4**

*Dans le cas considéré on peut procéder de deux manières différentes :*

1. *Travailler sur un seul pôle ; ce qui nécessite l'utilisation de la notion d'anti-périodicité ainsi que la condition de Dirichlet (Fig. II. 18.) ;*

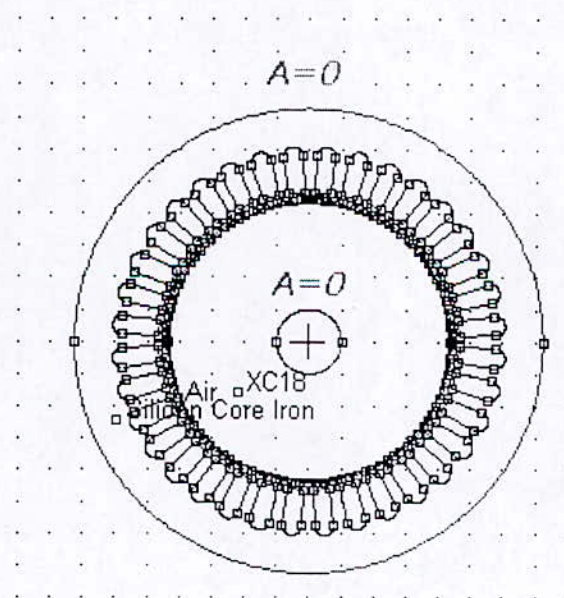


**Fig. II. 18.** Modèle d'étude 2D sur un pas polaire avec les conditions aux limites pour l'exemple considéré

✚ **Remarque**

*Veiller à ne pas donner le même nom à deux segments différents affectés par l'anti-périodicité sinon le modèle ne pourra pas être maillé !*

2. Travailler sur le modèle complet ce qui nécessite seulement la condition de Dirichlet (Fig. II. 19).



**Fig. II. 19.** Modèle 2D sur toute la machine

### II. 3. 2. Deuxième étape : Le Solveur

La principale opération effectuée par FEMM, lors de cette étape, est la résolution des équations de Maxwell après avoir, bien entendu, effectuer le maillage de la géométrie et imposer les valeurs effectives du courant statorique pour chaque valeur du glissement dans le cas de l'exemple considéré.

En fait, FEMM adopte une formulation en potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$ , telle que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1)$$

Vue que FEMM ne traite que des problèmes électromagnétiques plans ou axisymétriques, les trois composantes du potentiel vecteur magnétique  $A$  vont se réduire à une seule qui est perpendiculaire au plan d'étude (parallèle à l'axe de la machine c'est-à-dire dans le sens des courants statoriques).

L'avantage crucial de cette formulation est la réduction des équations de Maxwell à une seule :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu(B)} \nabla \times A \right) = -\sigma \dot{A} + J_s - \sigma \nabla V \quad (2)$$

Tel que  $J_s$  représente la densité de courant appliquée et le point le symbole de la dérivée du potentiel vecteur magnétique.

Comme FEMM considère, dans le cas des fréquences industrielles, les grandeurs vectorielles à variation sinusoïdale alors on peut passer à la notation complexe :

$$A = \text{Re} \left[ \vec{A} e^{j\omega t} \right] \quad (3)$$

Ce qui donne une nouvelle écriture de l'équation (2) :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu(B)} \nabla \times \bar{A} \right) = -j\omega\sigma\bar{A} + \bar{J}_s - \sigma\nabla V \quad (4)$$

C'est, en fait, cette dernière formulation qui sera prise en compte par FEMM pour résoudre les problèmes électromagnétiques. Il est clair que dans le cas de la magnétostatique on aura un modèle mathématique plus simple :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu(B)} \nabla \times A \right) = J$$

Pour exécuter cette étape, une barre d'outils existe. Elle comprend le mailleur et le solveur (Fig. II. 20.).



Fig. II. 20. Barre d'outils du mailleur et du solveur

### ➤ Application n° 5

*D'abord on va mailler notre modèle physique (Figs.II. 18 et 19.). Il est bien évident que le nombre de nœuds de la représentation complète (sur les quatre pôles) est plus grand que celui de la représentation partielle (sur un seul pôle) et donc un temps d'exécution plus grand aussi.*

### ✦ Remarque

*On peut augmenter le degré de la finesse du maillage en changeant, par exemple, les paramètres des arcs: dans l'exemple illustré sur la figure II. 21. on a fixé le nombre maximum de segments par degré à 1 pour tous les arcs qui délimite l'entrefer ainsi qu'au périmètre extérieure du stator et à 10 pour les autres arcs du modèle.*

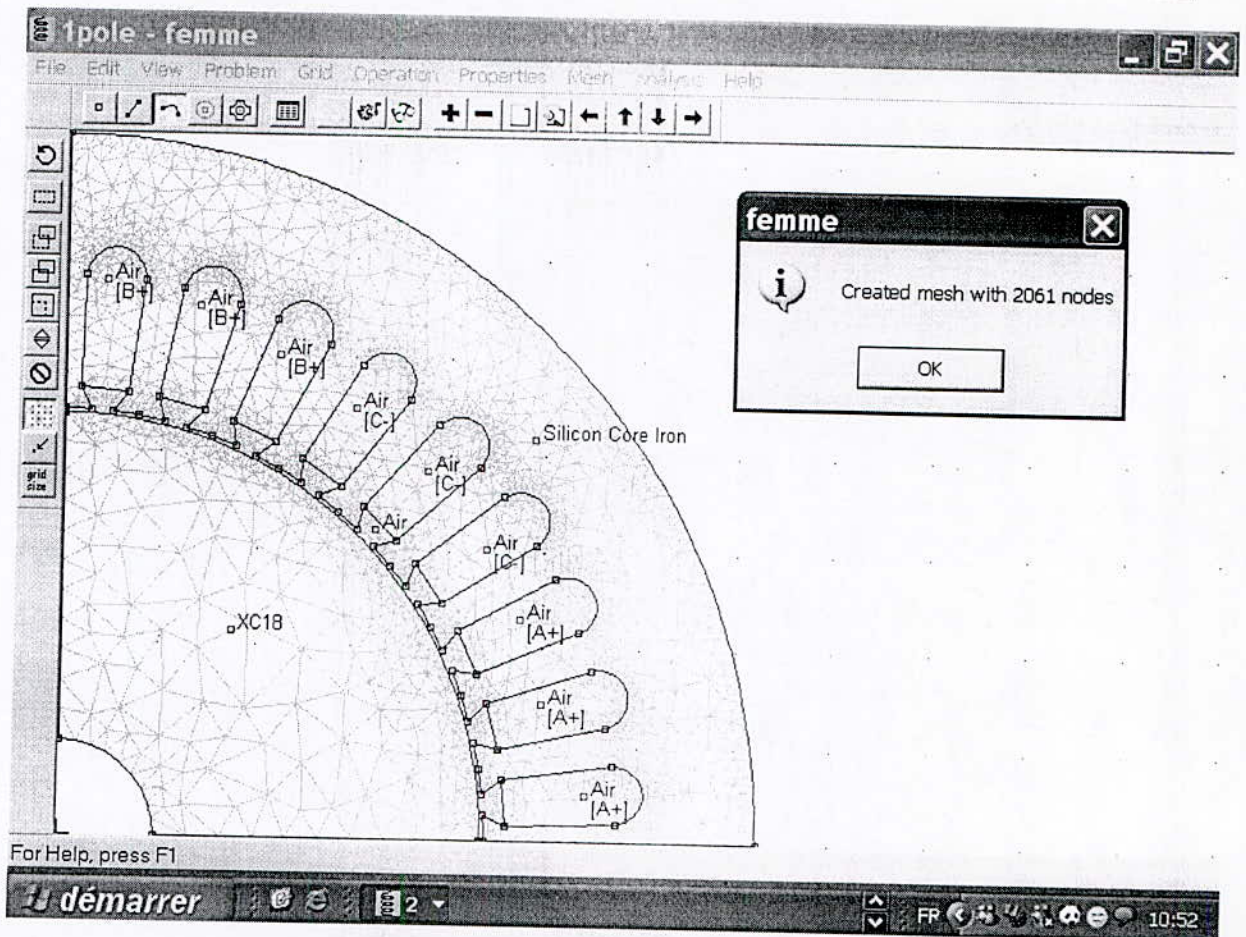


Fig. II. 21. Maillage d'un pôle de la géométrie

Maintenant on va passer au remplissage des encoches statoriques. A chaque fois, on va insérer la valeur efficace du courant selon le glissement qui lui correspond (en concordance avec la partie expérimentale). Au niveau de FEMM, on ne peut faire varier le glissement. Une solution astucieuse pourra contourner ce problème ; elle consiste à faire varier la conductivité au lieu du glissement.

La figure II. 22. montre la répartition du courant sur un pas polaire, tel que :

- Chaque couleur représente une phase : A, B ou C
- L'indice (+) représente un sens "sortant" du courant
- L'indice (-) représente un sens "rentrant" du courant
- Le facteur n représente le nombre de conducteurs par encoche, il est donc égale à 37 pour l'exemple considéré.

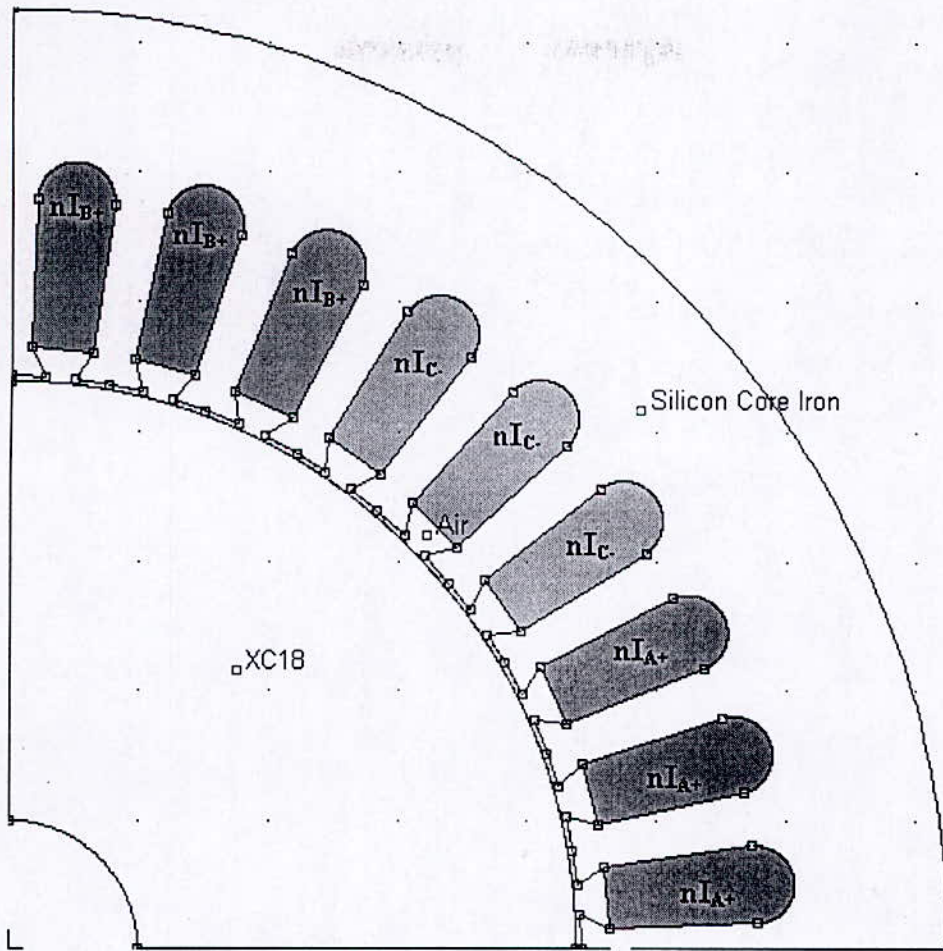


Fig. II. 22. Garnissage des courants statoriques

Tenant compte des équations qui lient les trois phases :

$$\begin{aligned}
 nI_A &= nI \\
 nI_B &= nI \cdot e^{-j2\pi/3} \\
 nI_C &= nI \cdot e^{+j2\pi/3}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
 nI_A &= nI \\
 nI_B &= nI \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 nI_C &= nI \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$



*ensuite on active le "solveur"...une fois l'exécution est terminée, les résultats sont alors prêt à l'exploitation via le "post processeur".*

### II. 3. 3. Troisième étape : Le Post Processeur

Permet l'exploitation graphique et numérique de la solution du problème. La solution peut être représentée par un tracé de densité ou par des vecteurs s'il s'agit d'une grandeur vectorielle (Fig. II. 23.). Un certain nombre de calcul intégral le long des contours et des aires prédéfinis est aussi accessible.



**Fig. II. 23.** Barre de tracés de champs (lignes, densités ou en vecteurs)

Tout comme le pré-processeur, le post processeur est toujours activé sur l'un des trois modes suivant (Fig. II. 24.):



**Fig. II. 24.** barre du mode "analysis"

- Le mode point : Pour avoir les valeurs locales du champs en tous point de la solution.
- Le mode contour : Permet, une fois le contour est défini, de tracer les valeurs du champ et le calcul de quelques intégrale de contour (Fig. II. 25, 26 et 27.).



**Fig. II. 25.** Barre de tracés et de calculs intégrales

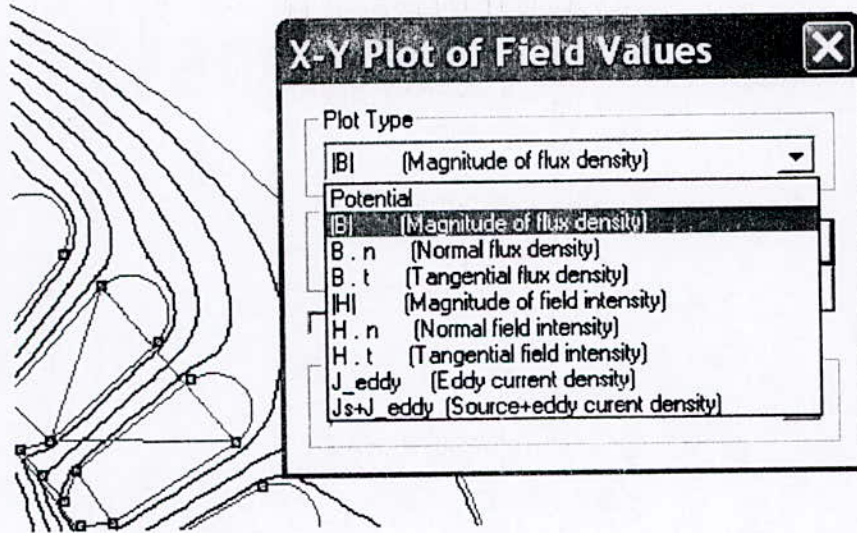


Fig. II. 26. Tracés possibles

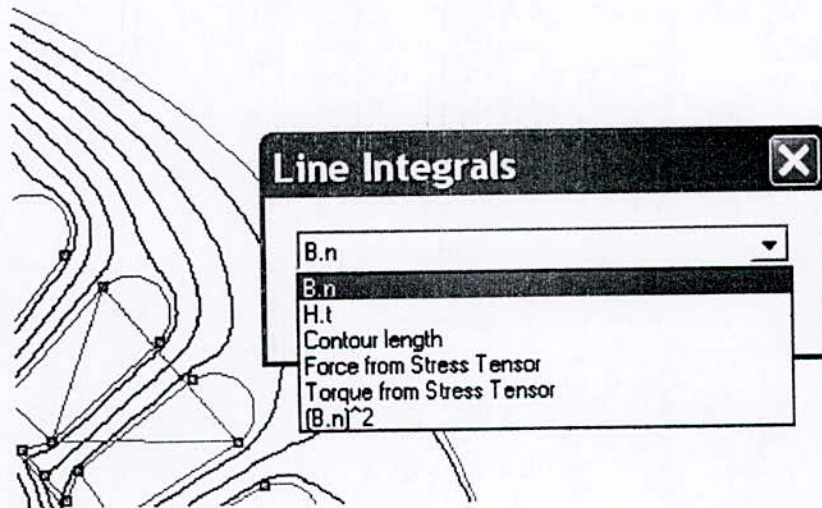


Fig. II. 27. Intégrales de lignes

- Le mode bloque : Permet, une fois le bloque est défini, de calculer quelques intégrale de surfaces et de volumes (Fig. II. 28.).

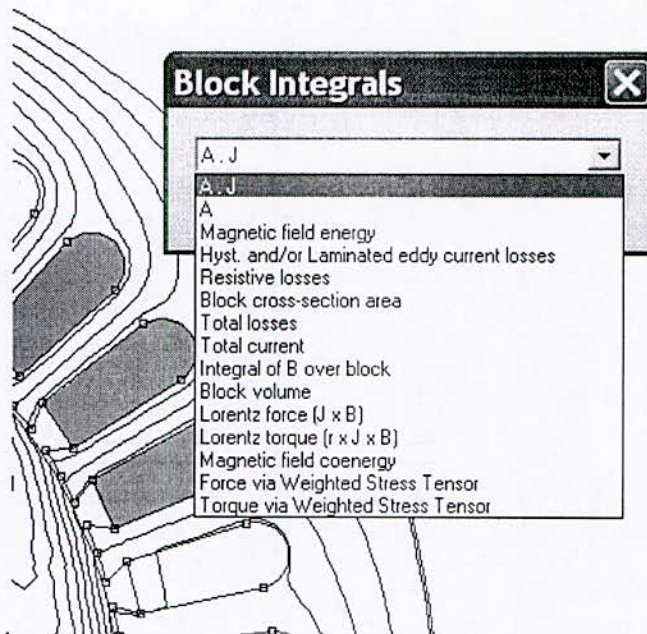
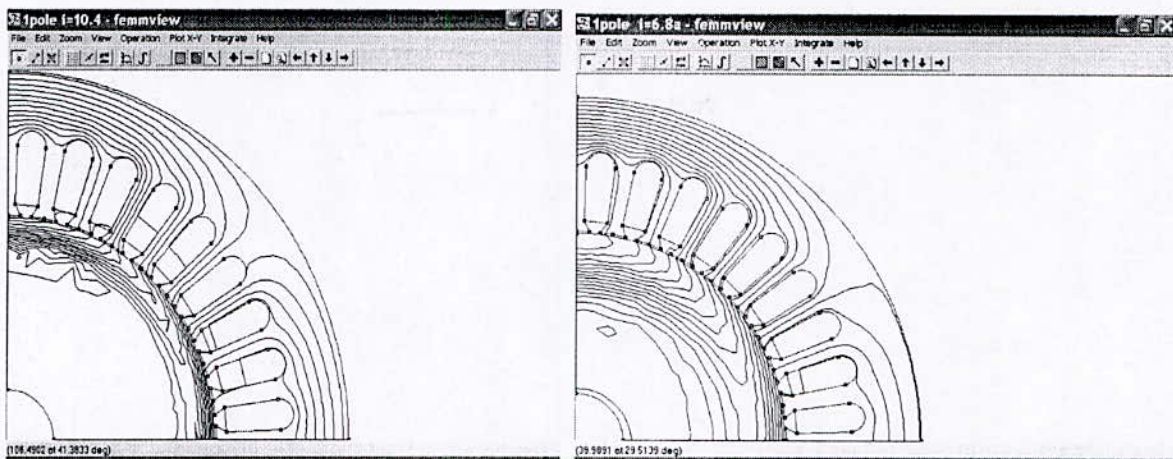


Fig. II. 28. Intégrales de surfaces et de volumes

➤ *Application n° 6*

on va, à titre indicatif, insérer deux points de fonctionnement choisis de façon à ce qu'il mettent en relief l'effet de la vitesse rotorique sur la pénétration des lignes du champs au rotor (Fig. II. 29 et 30.).



(a.)

(a'.)

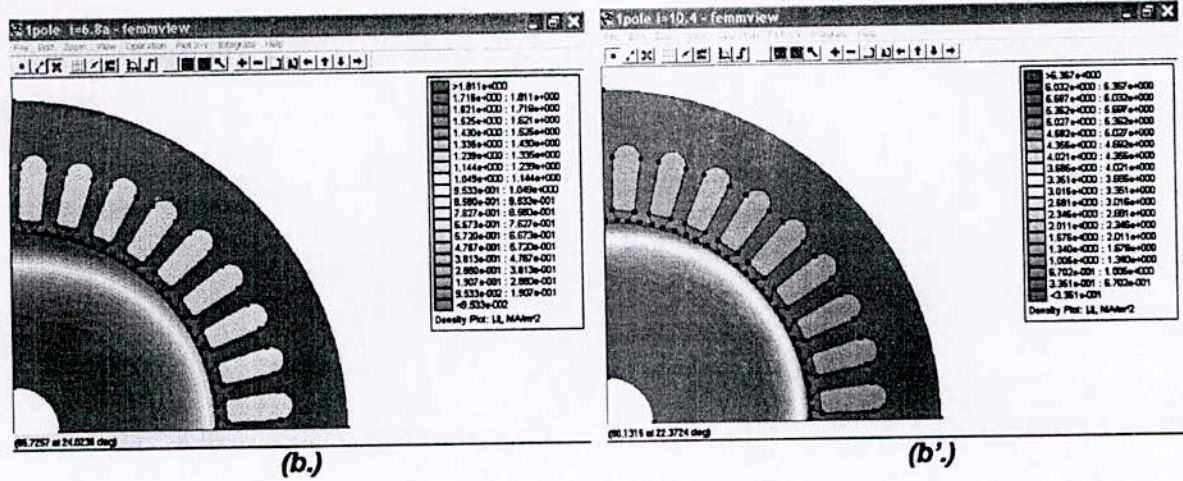


Fig. II. 30. (a, b)  $I=10.4$  A et  $g=0.42$

Fig. II. 29. (a', b')  $I=6.8$  A et  $g=0.06$

## Chapitre III

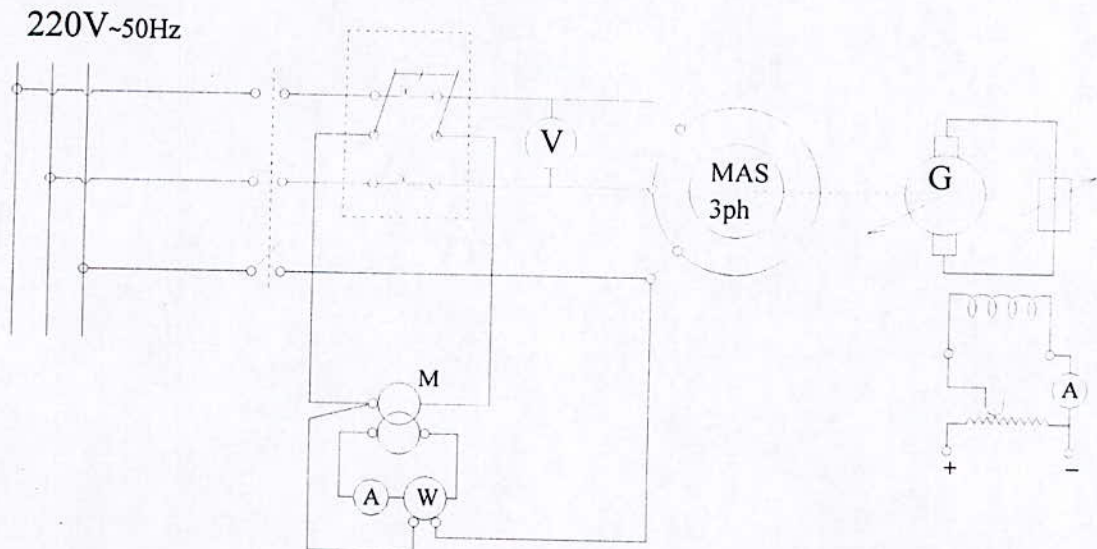
---

# **EXPLOITATION DES RESULTATS**

### III. 1. SCHEMA DU MONTAGE

La méthode utilisée est celle dite "méthode des deux wattmètres". C'est une méthode qui permet de mesurer la puissance active dans tous les cas et la puissance réactive si le récepteur est équilibré et en régime sinusoïdal.

On effectue le branchement des deux wattmètres comme suit :



**Fig. III.1.** Schéma du montage

### III. 2. RELEVES EXPERIMENTAUX

I (A)	W <sub>1</sub> (W)	W <sub>2</sub> (W)	N (tr/mn)	M (kg)	L (cm)
6.8	480	-1000	1325	0.98	39.5
7.6	800	-400	1275	0.98	52
8	240	1400	1175	1.96	39
8.4	200	1440	1150	1.96	38
8.6	120	-1600	1075	1.96	45
9	1680	-80	1050	1.96	47.5
9.2	20	-1800	975	1.96	53
9.6	1800	-20	950	1.96	55
10	0	2000	850	1.96	64
10.4	2000	0	812	1.96	64

(a)

g	I (A)	Γ (N.m)	cosφ
0.06	6.8	3.871	0,43
0.09	7.6	5.096	0.5
0.16	8	7.644	0.63
0.18	8.4	7.448	0.61
0.23	8.6	8.820	0.5
0.25	9	9.310	0.5
0.30	9.2	10.388	0.5
0.32	9.6	10.780	0.5
0.40	10	12.544	0.5
0.42	10.4	12.544	0.5

(b)

Tableau III. 1. (a, b) Relevés expérimentaux

### III. 3. TRACES CARACTERISTIQUES

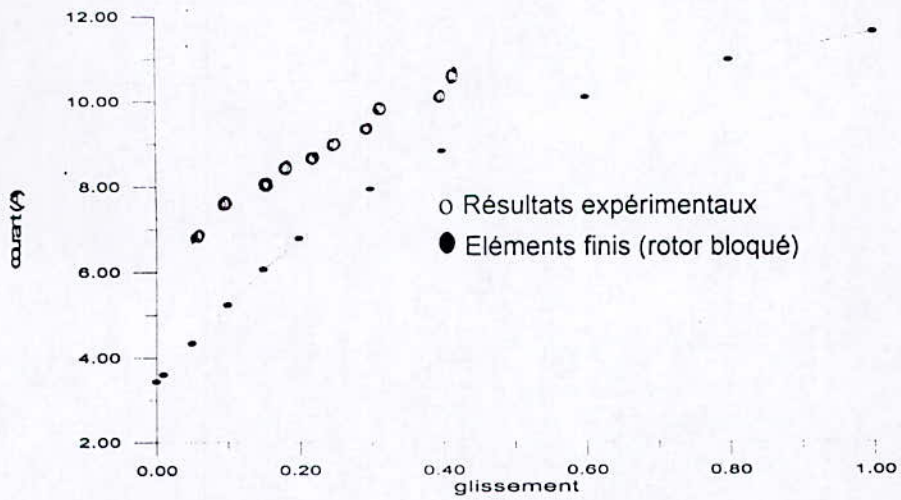


Fig. III.2. Courant statorique en fonction du glissement  
 $U=220V, 50\text{ Hz}$

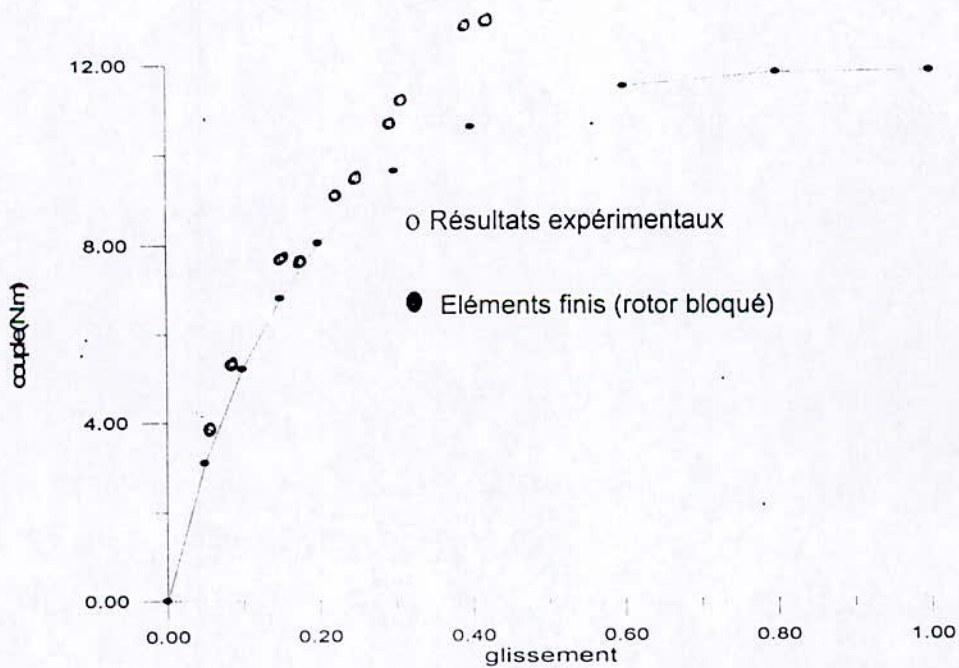


Fig. III.3. Couple en fonction du glissement  
 $(U = 220\text{ V}, f = 50\text{ Hz})$



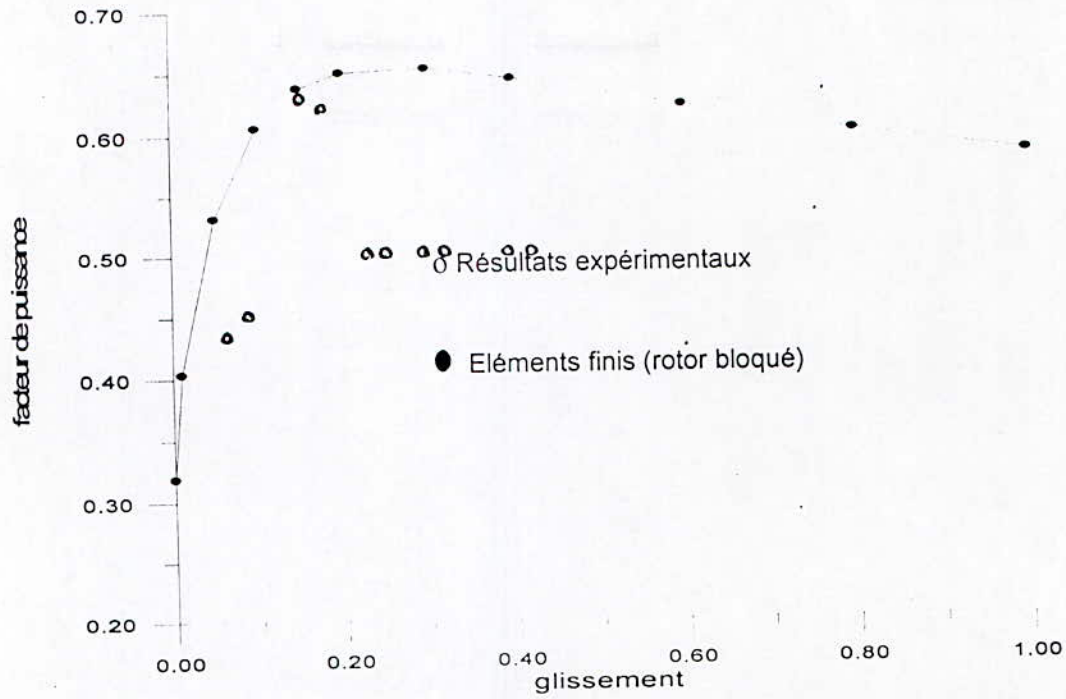


Fig. III.4. Facteur de puissance en fonction du glissement (U = 220 V f = 50 Hz)

### III. 4. COMPARAISONS ET INTERPRETATIONS

La Figure III. 2. montre la variation du courant statorique en fonction du glissement (caractéristique électromécanique de courant) sous tension et fréquence fixes (U = 220 V, 50 Hz). Les caractéristiques calculées en utilisant le code gratuit FEMM [6] et mesurées présentent les mêmes allures (au niveau des points accessibles aux mesures).

La Figure III. 3. représente la caractéristique mécanique pour la machine étudiée et ce, sous une tension de 220 V, 50 Hz. Pour des glissements inférieurs à 25%, cette caractéristique montre une bonne concordance entre les résultats calculés par FEMM et les relevés expérimentaux (8% de différence en moyenne). Par contre, pour le cas des glissements supérieurs à 25%, l'écart entre les points calculés et mesurés devient plus important.

La Figure III.4 montre la variation du facteur de puissance en fonction du glissement. La concordance entre les deux courbes est satisfaisante pour des valeurs de glissement inférieures à 20%. Elle marque une divergence d'environ 30% en moyenne pour des valeurs plus importantes du glissement.

Les écarts entre les valeurs calculées et celles mesurées pour les caractéristiques citées ci-dessus sont dues essentiellement aux causes suivantes :

- Le rotor étant légèrement excentré, les variations de l'entrefer introduisent ainsi un déséquilibre des courants statoriques dans les trois phases [1] ;
- L'échauffement du rotor se traduit par une modification des coefficients physiques ;
- Les erreurs de mesures ;
- L'imprécision de la géométrie des encoches introduite au niveau du code de calcul et à la finesse du maillage adopté.

**CONCLUSION**

**GENERALE**

Plusieurs codes et logiciels de calculs numériques 2 D et 3 D, basés sur la méthode des éléments finis, sont développés par différents Laboratoires dans diverses spécialités comme c'est le cas en Génie Electrique. En effet, la méthode des éléments finis est la méthode universellement utilisée dans le domaine des sciences de l'Ingénieur.

Comme un code numérique de calcul de dispositifs électromagnétiques est disponible gratuitement sur Internet, nous avons décidé de l'utiliser pour évaluer les performances d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse et bien sûr de valider les résultats obtenus en effectuant les relevés expérimentaux sur un prototype donné au niveau du Laboratoire de Recherche en Electrotechnique de l'ENP.

Avant d'effectuer ce travail, nous avons commencé par présenter la méthode des éléments finis dans son aspect théorique. Le code 2 D gratuit sur Internet est désigné par FEMM. Nous avons donné une description détaillée de la procédure d'utilisation et de calcul de ce code en considérant l'application citée ci-dessus.

Le calcul des performances de la machine asynchrone à rotor massif n'est pas aisé surtout en régime saturé. Grâce au code FEMM, nous avons pu l'effectuer moyennant toutefois certaines hypothèses simplificatrices en dehors de l'aspect 2D. La concordance des résultats calculés et mesurés est acceptable pour les vitesses élevées (glissement < 20%) toutefois elle l'est beaucoup moins pour le cas des vitesses de rotation plus faibles (forts glissements,  $g > 30\%$ ). Les écarts entre les résultats théoriques et mesurés sont dus entre autres aux effets d'extrémités, aux échauffements (influence sur les résistances rotorique et statorique), aux erreurs de mesures, aux harmoniques d'ordre supérieur, aux trajectoires indéfinies des courants induits, etc.

Nous aurions pu choisir une machine moins complexe que le moteur asynchrone à rotor massif, toutefois c'est avec ce type d'application qu'on est confronté à des problèmes où les logiciels basés sur la méthode des éléments finis sont utiles et nécessaires.

# **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] R. KECHROUD, "*Contribution à la modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange*", thèse de Doctorat d'Etat, ENP, avril 2002, Alger.
- [2] C. BARNETCHE, "*Calcul numérique de machines asynchrones en régime transitoire, en tenant compte de la saturation magnétique*", thèse de Doctorat, INPL, octobre 1997, Lorraine (France).
- [3] G. DHATT & G. TOUZOT, "*Une présentation de la méthode des éléments finis*", Maloine S.A. Editeur, Paris, 2<sup>e</sup> édition, 1984.
- [4] H. OUDIN, "*Méthode des éléments finis*", cours inédits, Ecole Centrale de Nantes.
- [5] J. GUARRIGUES, "*La méthode des éléments finis*", cours inédits, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, janvier 2002.
- [6] S. MEZANI, "*Calcul électromagnétique d'une machine asynchrone à rotor massif lisse en régime linéaire par la méthode des éléments finis*", Mini-Projet de Magister, USTHB, Alger, 1999.
- [7] R. AMIMER, "*Calcul numérique des performances en régime saturé d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse*", thèse de Magister, ENP, 2005, Alger.
- [8] <http://femm.foster-miller.net>
- [9] D. MEEKER, "*Finite Element Method Magnetic Version 3.3 User's manual*", mars 2003.

# **ANNEXES**

## A. PRESENTATION DU PROTOTYPE DU MAS A RML ETUDIEE

Le stator du prototype utilisé est de la forme cylindrique (Fig. A. 1.). A l'origine, il est conçu pour un moteur asynchrone triphasé classique à cage d'écureuil commercialisé par ELECTRO-INDUSTRES à Fréha (Azazga).

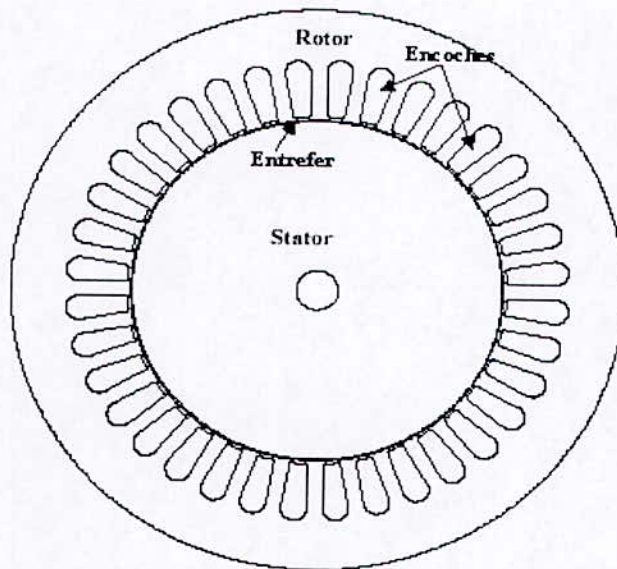


Fig. A. 1 Coupe transversale de la machine asynchrone à rotor massif lisse étudiée.

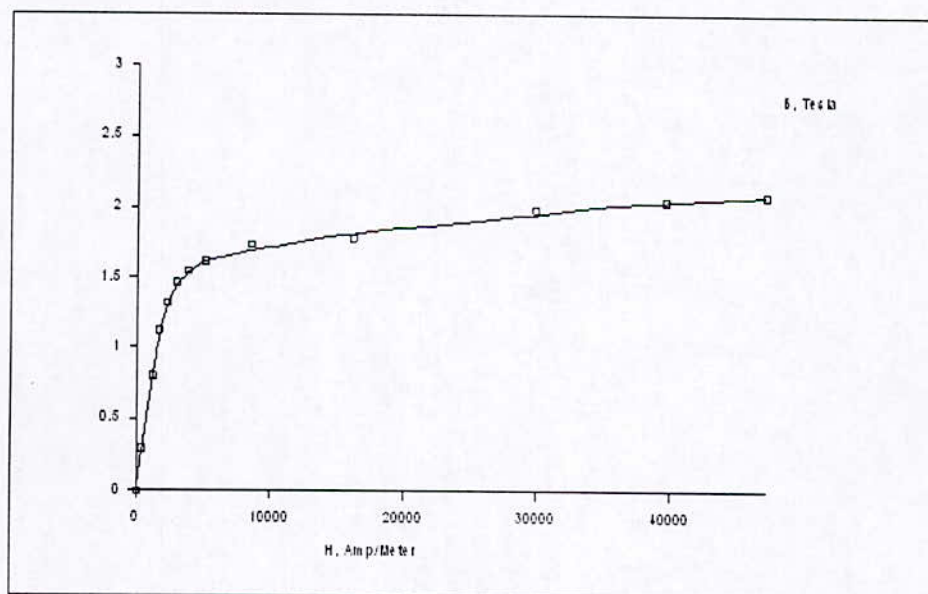


Fig. A. 2. Caractéristique Magnétique de l'acier rotorique XC18.



Le rotor est constitué d'un cylindre homogène en acier XC18. La caractéristique magnétique de l'acier rotorique (Fig. 2.2) a été relevée au Laboratoire de Machines Electriques de l'ENP grâce à deux un perméamètre d'Illioviçi type C et type K. Cette caractéristique peut être approximée par un polynôme impair de degré 11 dont l'équation est la suivante [1]:

$$H = 15.127B^{11} - 5.175B^9 + 1512.7B \quad (2.1)$$

Les principales caractéristiques de ce prototype sont els suivantes :

- Puissance nominale :  $P_n=2,2$  kW
- Type d'alimentation : triphasée
- Tensions d'alimentation :  $V_n/U_n=220/380$  V
- Courants d'excitation :  $I_n/J_n=9/5,2$  A
- Fréquence :  $f=50$  Hz
- Vitesse de rotation :  $\Omega_n=1410$  tr/min
- Nombre de pôles : 4 ( $p=2$ )
- Longueur utile de la machine :  $L_u = 110$  mm
- Facteur de puissance :  $\cos\varphi=0.8$

*Stator*

- Diamètre externe :  $D_{\text{sext}} = 145$  mm
- Diamètre interne :  $D_{\text{sint}} = 88,5$  mm
- Nombre total d'encoques : 36
- Nombre d'encoques par pôle et par phase : 3
- Nombre de conducteurs par encoche : 37
- Résistance statorique :  $R_s = 3,4 \Omega$  (mesurée à 75°C)
- Réactance de fuite :  $X_s = 10 \Omega$  (sous un essai homopolaire à 50 Hz)
- Résistivité :  $\rho = 1/\sigma = 1,87 \cdot 10^{-7} \Omega.m$

*Rotor*

- Massif : Acier XC18
- Diamètre externe :  $D_{\text{rext}} = 87,7$  mm
- Diamètre interne :  $D_{\text{rint}} = 20$  mm