

7/95

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT

*Génie Electrique*

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

*Aspect continu et échantionné de  
la commande non linéaire et  
influence des techniques de  
modulation appliquées au MAS*

Proposé par :

M<sup>r</sup> F. BOUDJEMA  
M<sup>r</sup> M. S. BOUCHERIT  
M<sup>r</sup> H. CHEKIREB

Etudié par :

BARA Redouane  
D. HAMID Ouadjana

Dirigé par

M<sup>r</sup> F. BOUDJEMA  
M<sup>r</sup> M. S. BOUCHERIT  
M<sup>r</sup> H. CHEKIREB

PROMOTION

Juin 1995

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

*Genie Electrique*

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

*Aspect continu et échantionné de  
la commande non linéaire et  
influence des techniques de  
modulation appliquées au MAS*

Proposé par :

M<sup>r</sup> F. BOUDJEMA  
M<sup>r</sup> M. S. BOUCHERIT  
M<sup>r</sup> H. CHEKIREB

Etudié par :

BARA Redouane  
D. HAMID Oudjana

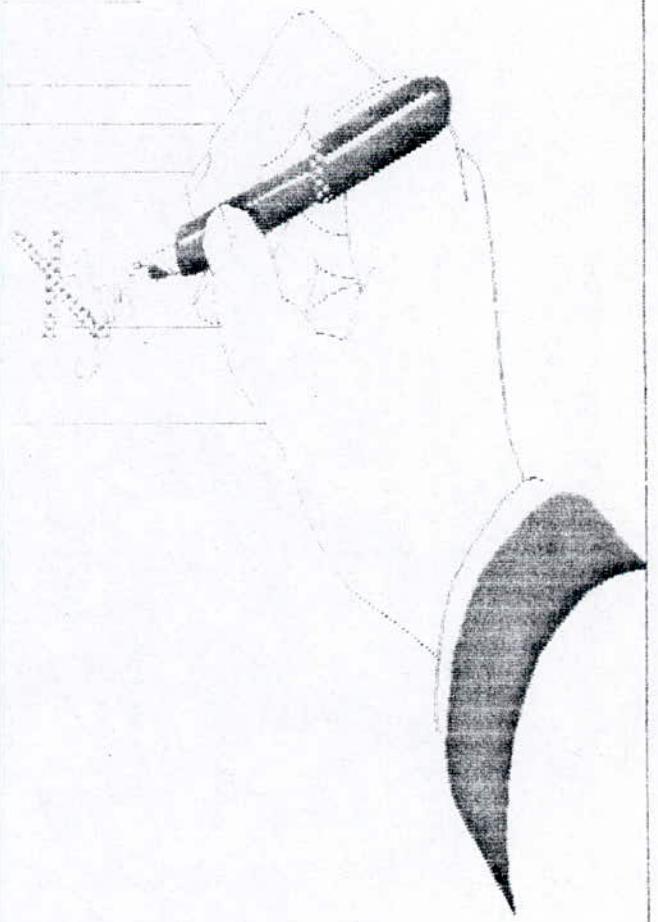
Dirigé par

M<sup>r</sup> F. BOUDJEMA  
M<sup>r</sup> M. S. BOUCHERIT  
M<sup>r</sup> H. CHEKIREB

PROMOTION

Juin 1995

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique



## REMERCIEMENTS

Nous remercions Dieu de nous avoir donné la force physique et intellectuelle pour accomplir ce travail, et pour les richesses dont il nous a comblé.

Nous remercions nos promoteurs M<sup>rs</sup> CHEKIREB, M.S. BOUCHERIT et F. BOUJEMMAA enseignants à l'école nationale polytechnique, pour leur aide, leurs encouragements, et la patience avec laquelle ils ont bien voulu travailler avec nous.

Nous remercions les respectables membres du jury pour avoir bien voulu évaluer notre travail.

Nous remercions M<sup>r</sup> ILLOUL pour son aide fructueuse, ainsi que M<sup>r</sup> BARA ,M<sup>r</sup> OULMASSE et Mlle Nadia pour le matériel informatique qu'ils ont bien voulu mettre à notre disposition.

Nous remercions enfin M<sup>r</sup> R.B. BOUYADJRA, M<sup>r</sup> S. BERKATI et A. NASBA pour leurs encouragements, ainsi que tous ce qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce modeste travail.

## DEDICACES

A mes parents.

A mes frères: HAMMOU, MOHAMED et HOCINE.

A mes soeurs: KARIMA, YAMINA et HAJAR ainsi qu'à NADIA.

A tous mes amis.

HAMID OUDJANA DAOU

## DEDICACES

A mon Père.

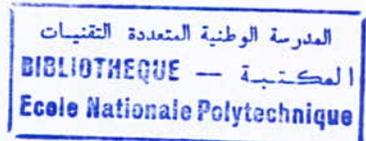
A ma belle mère.

A mes frères et soeurs.

A tous mes amis.

REDHOUANE

## TABLE DES MATIERES



### Introduction générale

### Chapitre 1 - Modélisation de la machine asynchrone

1-1. Equations générales de la machine .....	
1-1-1. Hypothèses .....	
1-1-2. Equations électriques .....	
1-1-3. Equations mécanique .....	
1-2 Modèle bipttose de la machine .....	
1-2-1. Transformation de park .....	
1-2-2. Equations électrique .....	
1-2-3. Equations mécanique .....	
1-2-4. Modèle du moteur exprime dans un référentiel lié du champs tournant .....	
1-2-5. Modèle du moteur commande par orientation du champ. ....	
1-3. Modernisation de l'onduleur de tension commandé en M L I .....	
1-3-1. Modulation de largeur d'impulsion (MLI) .....	
1-3-2. Onduleur .....	
1-4. Conclusion .....	

### Chapitre 2 - linéarisation exacte et commande du moteur asynchrone

2-1 Objectif de la commande .....	
2-2. Linéarisation exacte et découplage E/S .....	
2-2-1. Modèle du moteur .....	
2-2-2. Degré relatif vectoriel .....	

2-2-3. commande linéorisante .....	
2-3. commande par placement de pôles .....	
2-4. mise en oeuvre de la commande .....	
2-5. Résultats de la simulation et commentaires .....	
2-6. Conclusion .....	

### **Chapitre 3 - Linéarisation partielle et commande du moteur asynchrone.**

3.1. Objectif de la commande .....	
3.2. Linéarisation partielle et découpage E/S .....	
3.2.1. Modèle du moteur .....	
3.2.2. Degré relatif vectoriel .....	
3.2.3. Forme normale .....	
3.2.4. Commande linéarisante .....	
3.3. Commande par placement de pôles .....	
3.4. Résultats de la simulation et commentaires .....	
3.5. Conclusion .....	

### **Chapitre 4 - Commande non linéaire à échelles de temps multiples**

4-1. Introduction .....	
4-2. Le discrétisé exact .....	
4-3. Invariante de la distribution d'inobservabilité aux instants d'échantillonnage par commande non linéaire à échelle de temps multiples .....	
4-3-1. Linéariations entrée -sortie avec consigne externe constante par morceaux .....	
4-3-2. Poursuite asymptotique d'une trajectoire de référence .....	

- 4-3-3. La dynamique des zéros des systèmes non linéaires sous multi-  
échantillonnage .....
- 4-3-4. Calcul de la commande à échelles de temps multiples .....
- 4-3-5. Recherche d'une solution .....
- 4-4. Le cas multivariable .....
- 4-5. La commande à échelles de temps multiples d'ordre N .....
- 4-6. Conclusion. ....

#### **Chapitre 5 - Commande à échelles de temps multiples d'un moteur asynchrone:**

- 5.1. Modèle du moteur .....
- 5.2. Synthèse de la commande à échelles de temps multiples .....
- 5.3. Résultats de simulation et commentaires .....

#### **Conclusion Générale**

#### **Références Bibliographiques**

#### **Annexes**

## LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES

$C_{em}$	Couple électromagnétique;
$C_r$	Couple résistant;
$C_{mec}$	Couple mécanique;
$s, r$	Relativement au stator, au rotor;
$d, q$	Axe direct, axe en quadrature;
$i_a, i_b, i_c$	Courants instantanées des phases de la machine;
$i_{ds}, i_{qs}$	Courant statorique d'axe direct en quadrature;
$i_{dr}, i_{qr}$	Courant rotorique d'axe directe, en quadrature;
$\omega_m$	Vitesse angulaire du rotor (rd/s);
$\omega_a$	Vitesse angulaire du référentiel (rd/s);
$\omega_r$	Pulsation rotorique (rd/s);
$\omega_s$	Pulsation statorique (rd/s);
$R_s, R_r$	Résistance d'une phase statorique, rotorique;
$L_s, L_r$	Inductance cyclique statorique d'axe direct, en quadrature;
$U_a, U_b, U_c$	Tensions instantanées des phases de la machine;
$U_{ds}, U_{qs}$	Tension statorique d'axe direct, en quadrature;
$\sigma$	Coefficient de dispersion de la machine;
$L_m$	Inductance mutuelle stator-rotor;
$L_{ms}$	Inductance mutuelle entre phases statoriques;
$L_{mr}$	Inductance mutuelle entre phases rotoriques;
$j$	Inertie des masses tournantes;

$p$	Nombre de paires de pôles;
$\psi_s, \psi_r$	Flux statorique, rotorique;
$\psi_{ds}, \psi_{qs}$	Flux statorique, d'axe direct, en quadrature;
$\psi_{dr}, \psi_{qr}$	Flux rotorique d'axe direct, en quadrature;
$f$	Coefficient de frottements;
$A_t(\theta)$	Matrice de transformation de PARK;
$\frac{d}{dt}$	Opérateur dérivée;
$x$	Vecteur d'état;
$U$	Vecteur de commande;
$z$	Vecteur d'état dans l'espace de BRUNOWSKY;
$h(x)$	Fonction de sortie du système;
$f(x), g(x)$	Champs de vecteurs;
$y$	Sortie du système;
$\phi$	Fonction de transformation;
$L_f h(x)$	Dérivée de Lie de $h(x)$ se lon le champ de vecteurs $f$ ; Facteur intégral.
$\delta$	Période d'échantillonnage;
$\Sigma_c$	Système continu;
$\Sigma_d$	Système discretisé;
$o$	Composition des applications;
$m$	Indice de modulation
$r_c$	Coefficient de réglage.

## INTRODUCTION GENERALE

Dans les applications nécessitant la variation de vitesses se sont les machines à courant continu (M.C.) qui furent les premières à faire leur apparition sur le marché industriel.

Ceci grâce à la simplicité de leur commande, mais ces machines nécessitent souvent un entretien coûteux dû à la présence du collecteur mécanique.

Actuellement, les recherches sont développées autour d'une nouvelle classe de machines électriques à savoir la machine asynchrone et la machine synchrone. Ceci car ces machines sont robustes du point de vue construction et ne présentent pas des collecteurs mécaniques donc pas d'entretien.

Le développement de l'électronique de puissance a poussé l'étude des entraînements réglés à courants alternatifs et le progrès croissant de la micro-informatique a ouvert la voie à l'utilisation des techniques de l'automatique moderne dans la commande de ces entraînements.

Parmi ces techniques, l'approche de la "linéarisation par retour d'état" est aujourd'hui confirmée par un grand nombre d'applications dans divers domaines comme celui de la robotique, de l'aérospatial, de l'électronique ou de la biologie et représente une approche efficace pour l'analyse et la commande des systèmes non linéaires analytiques.

Brièvement, cette approche consiste à se ramener par bouclage sur l'état (statique ou dynamique) à un ensemble de sous-systèmes linéaires monovariés faciles à commander. Ainsi, plusieurs problèmes déjà étudiés et résolus dans le cas des systèmes linéaires peuvent être aussi abordés dans le cas non linéaire, comme par exemple le problème de la stabilisation, du découpage, du rejet de perturbations etc. ([14]).

La mise en œuvre sur ordinateur de la commande "linéarisante" pose de nombreux problèmes dus à la préservation sous échantillonnage de certaines propriétés des systèmes en temps continu. En effet, l'utilisation de dispositifs de

blocage d'ordre zéro pour l'implantation d'une telle commande détruit en général les propriétés concernant la linéarisation et le découpage et les phénomènes d'instabilité apparaissent rapidement. Pour masquer ces problèmes, les schémas actuels utilisent une période d'échantillonnage très petite.

Afin de surmonter cette difficulté, d'autres schémas de commande échantillonnée plus sophistiqués peuvent être proposés afin de garantir la préservation, sous échantillonnage de propriétés structurelles du système bouclé continu. Dans le cas de la linéarisation entrée/sortie (E/S), la commande par échelle de temps multiples, par exemple, permet d'assurer la reproduction du comportement E/S du système continu aux instants d'échantillonnage tout en prenant en compte les objectifs de linéarisation et de découplage ([15]).

*L'objet de ce travail se situe en trois étapes :*

- **1<sup>ère</sup> étape :**

modernisation de la machine asynchrone et mise sous forme d'état.

- **2<sup>ème</sup> étape :**

Application de la linéarisation exacte par retour d'état statique et dynamique des zéros, suivie d'une éventuelle mise en œuvre de la commande aux modèles non linéaires de la machine asynchrone.

- **3<sup>ème</sup> étape :**

Tester l'efficacité de la commande à échelle de temps multiples, ainsi que la robustesse de celle-ci par rapport à l'augmentation du pas d'échantillonnage.

## CHAPITRE 1

### MODELISATION DE LA MACHINE

Le moteur asynchrone est le moteur d'induction le plus répandu pour obtenir de la puissance mécanique à partir du réseau alternatif. Simple et robuste de construction. Car il ne possède pas de collecteur). C'est le moteur le moins onéreux dont le prix de revient est le plus faible pour une puissance donnée surtout s'il est à cage d'écureuil.

Plusieurs techniques de commande de degré de complexité différentes ont été proposées pour la commande de cette machine [1], [2], [3], [4]. Les conditions de fonctionnement et le domaine d'application imposent le choix de l'une de ces techniques.

En comparaison avec la machine à courant continu, le comportement dynamique de la machine asynchrone est plus complexe. Elle représente un grand défi lors de la commande à cause de la non-linéarité de son modèle dynamique, de la non accessibilité de son flux rotorique et de la variation considérable des valeurs de ces résistances rotoriques avec la température et sous l'effet de peau, ce qui altère considérablement la dynamique du système.

Généralement, la théorie des deux axes (référentiel biphasé de PARK) est utilisée pour faciliter la modélisation [5]. En effet, par le biais de cette transformation les paramètres variant dans le temps sont éliminés, puis sont exprimés avec les variables dans un nouveau système de deux axes orthogonaux d-q (au lieu de trois) découplés mutuellement.

Dans ce chapitre il est présenté le modèle dynamique de la machine qui met en évidence son aspect non linéaire. Dans le repère d-q le modèle de la machine peut être exprimé dans un système d'axes soit tournant soit stationnaire.

### 1.1. Equations générales de la machine

La machine asynchrone, avec la répartition de ses enroulements et sa géométrie propre est très complexe pour se prêter à une analyse tenant compte de sa configuration exacte. Il est alors nécessaire d'adopter des hypothèses simplificatrices.

#### 1.1.1. Hypothèses

Pour des raisons de simplification, il est fait les hypothèses suivantes [6]:

- La machine est symétrique à entrefer constant;
- Le circuit magnétique est supposé parfaitement feuilleté;
- La saturation du circuit magnétique et les courants de Foucaults sont négligeables;
- L'effet de peau et d'encochage sont négligeables.

#### 1.1.2. Equations électriques

Les équations électriques de la machine sont données par les formes matricielles suivantes:

- Au stator

$$[\mathbf{U}_s] = \mathbf{R}_s [\mathbf{I}_s] + \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\psi}_s] \quad (1.1)$$

- Au rotor

$$[\mathbf{U}_r] = \mathbf{R}_r [\mathbf{I}_r] + \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\psi}_r] \quad (1.2)$$

Où  $[\mathbf{U}_s]$ ,  $[\mathbf{I}_s]$ , et  $[\boldsymbol{\psi}_s]$  sont données par:

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_s] &= [U_{as} \ U_{bs} \ U_{cs}]^T \\ [\mathbf{I}_s] &= [I_{as} \ I_{bs} \ I_{cs}]^T \\ [\boldsymbol{\psi}_s] &= [\psi_{as} \ \psi_{bs} \ \psi_{cs}]^T \end{aligned} \quad (1.3)$$

et  $[U_r]$ ,  $[I_r]$ ,  $[\Psi_r]$  par :

$$\begin{aligned} [U_r] &= [U_{ar} \ U_{br} \ U_{cr}]^T \\ [I_r] &= [I_{ar} \ I_{br} \ I_{cr}]^T \\ [\Psi_r] &= [\Psi_{ar} \ \Psi_{br} \ \Psi_{cr}]^T \end{aligned} \tag{1.4}$$

Les flux totalisés couplés avec les phases rotoriques et statoriques peuvent être exprimés aussi sous forme matricielle par :

$$[\Psi_s] = [L_s] [I_s] + [L_m] [I_r] \tag{1.5}$$

$$[\Psi_r] = [L_r] [I_r] + [L_m] [I_s] \tag{1.6}$$

où les matrices  $[L_s]$ ,  $[L_r]$  et  $[L_m]$  sont données par :

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_s & L_{ms} & L_{ms} \\ L_{ms} & L_s & L_{ms} \\ L_{ms} & L_{ms} & L_s \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_r & L_{mr} & L_{mr} \\ L_{mr} & L_r & L_{mr} \\ L_{mr} & L_{mr} & L_r \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$[L_m] = l_m \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Nous obtenons par substitution les équations suivantes:

$$[U_s] = R_s [I_s] + [L_s] \frac{d}{dt} [I_s] + \frac{d}{dt} [L_m][I_r] \quad (1.10)$$

$$[U_r] = R_r [I_r] + [L_r] \frac{d}{dt} [I_r] + \frac{d}{dt} [L_m][I_s] \quad (1.11)$$

Les équations ainsi obtenues sont à coefficients variables dans le temps, et la transformation de **PARK** s'impose alors comme alternative dans le but d'obtenir un modèle équivalent plus simple à manipuler.

### 1.1.3. Equation mécanique :

L'équation mécanique de la machine est donnée par :

$$C_{em} = J \frac{d\omega_m}{dt} + f\omega_m + C_r' \quad (1.12)$$

où

$C_{em}$  est le couple électromagnétique de la machine;

$C_r'$  est le couple résistant imposé à la machine;

$f$  est le coefficient de frottement;

$J$  est le moment d'inertie des masses tournantes.

## 1.2. Modèle biphasé de la machine

### 1.2.1. Transformation de Park :

Comme nous l'avons mentionné antérieurement, la transformation de **PARK** nous permet d'exprimer le modèle dynamique de la machine asynchrone dans un nouveau référentiel et cela en transformant les trois enroulements de la machine en deux autres équivalent du point de vue électrique et magnétique (Figure. 1.1).

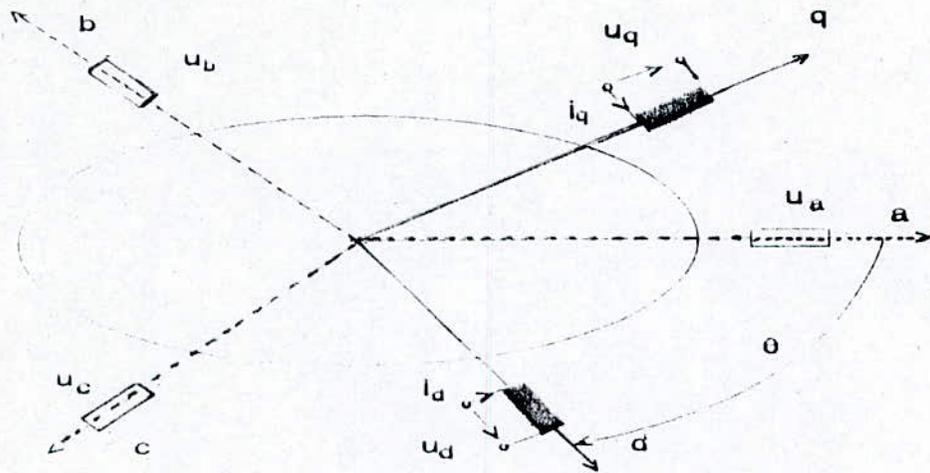


Fig. I.1: Transformation de PARK

Ainsi, nous pouvons exprimer dans le repère de **PARK** l'écriture transformée suivante :

$$M_{dq} = A_t(\theta) \cdot M_r \tag{1.13}$$

où,

$M_r$  est un vecteur de grandeurs physiques pouvant être des courants, des flux ou des tensions.

$M_{dq}$  est l'image de  $M_r$  dans le repère de PARK.

Avec  $A_t(\theta)$ , la matrice unique de transformation pour les courants, les flux et les tensions définie par :

La matrice de transformation inverse est donnée quant à elle par l'expression suivante :

$$A_t(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Cette matrice nous permet d'exprimer les valeurs réelles des grandeurs considérées.

$$A_t(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

### 1.2.2 Equation électriques

Dans le but d'obtenir un système d'équations différentielles à coefficients constants, nous utilisons la méthode de transformation de **PARK**, qui nous permet de transformer les enroulements statoriques et rotoriques en des enroulements orthogonaux équivalents (Figure 1.2). En effet l'application de cette méthode aux équations électriques données sous forme matricielle par (1.1) et (1.2) donne :

$$U_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d}{dt} \psi_{ds} - \omega_a \psi_{qs} \quad (1.16)$$

$$U_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d}{dt} \psi_{qs} - \omega_a \psi_{ds}$$

$$U_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d}{dt} \psi_{dr} - (\omega_a - \omega_r) \psi_{qr} \quad (1.17)$$

$$U_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d}{dt} \psi_{qr} + (\omega_a - \omega_r) \psi_{dr}$$

ou  $\omega_a$  et  $\omega_r$  sont respectivement la vitesse du nouveau repère (d,q) et la pulsation électrique des grandeurs rotoriques.

L'application de cette méthode donne pour les équations des flux :

$$\begin{aligned} \psi_{ds} &= L_s i_{ds} + L_m i_{dr} \\ \psi_{qs} &= L_s i_{qs} + L_m i_{qr} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \psi_{dr} &= L_r i_{dr} + L_m i_{ds} \\ \psi_{qr} &= L_r i_{qr} + L_m i_{qs} \end{aligned} \tag{1.19}$$

où  $L_s = l_s - l_{ms}$ ,  $L_r = l_r - l_{mr}$ , et  $L_m = (3/2) l_m$ .

En remplaçant les courants rotoriques de l'équation (1.18) par leurs valeurs respectives déduites de (1.19) nous aurons :

$$\begin{aligned} \psi_{dr} &= \frac{L_r}{L_m} (\psi_{ds} - \sigma L_s i_{ds}) \\ \psi_{qr} &= \frac{L_r}{L_m} (\psi_{qs} - \sigma L_s i_{qs}) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Les équations différentielles des courants dans le repère de PARK sont déduites de (1.20), ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{di_{ds}}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_s} \frac{d}{dt} \psi_{ds} - \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \frac{d}{dt} \psi_{dr} \\ \frac{di_{qs}}{dt} &= \frac{1}{\sigma L_s} \frac{d}{dt} \psi_{qs} - \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \frac{d}{dt} \psi_{qr} \end{aligned} \tag{1.21}$$

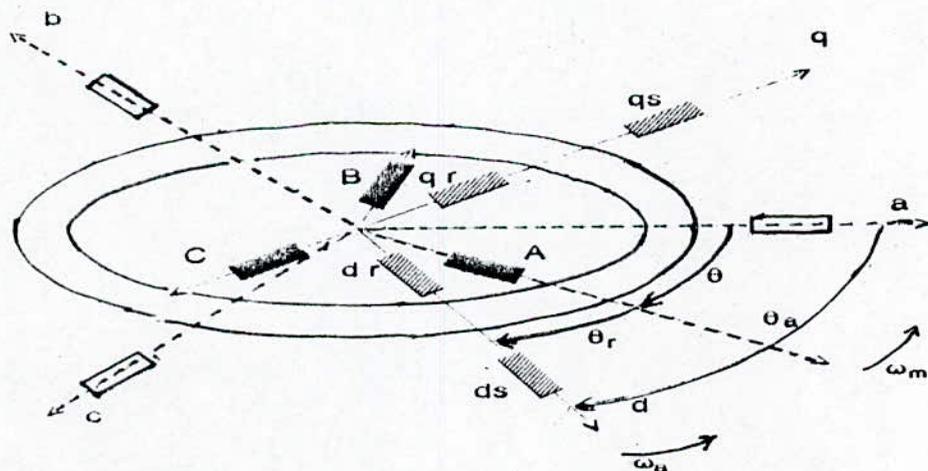


Fig. I.2 : Application de la transformation de Park

Finalement, nous aboutissons au modèle dynamique flux rotoriques/courants statoriques :

$$\begin{aligned} \frac{di_{ds}}{dt} &= - \left( \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{L_m^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{ds} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega_r \psi_{qr} + \omega_a i_{qs} \\ &\quad + \left( \frac{R_r}{L_r} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \right) \psi_{dr} + \frac{U_{ds}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{qs}}{dt} &= - \left( \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{L_m^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{qs} - \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega_r \psi_{dr} - \omega_a i_{ds} \\ &\quad + \left( \frac{R_r}{L_r} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \right) \psi_{qr} + \frac{U_{qs}}{\sigma L_s} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{dr}}{dt} &= (\omega_a - \omega_r) \psi_{qr} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{dr} + \frac{R_r}{L_r} L_m i_{ds} \\ \frac{d\psi_{qr}}{dt} &= - (\omega_a - \omega_r) \psi_{dr} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{qr} + \frac{R_r}{L_r} L_m i_{qs} \end{aligned}$$

Qui peut être écrit sous forme condensée en prenant comme vecteur d'état  $x_1 = [i_{ds} \ i_{qs} \ \psi_{dr} \ \psi_{qr}]^T$  et  $U = [U_{ds} \ U_{qs}]$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1) U \quad (1.23)$$

### 1.2.3 Equation mécanique

L'expression du couple électromagnétique est donnée par [5] :

$$C_{em} = p (\psi_{ds} i_{ds} - \psi_{qs} i_{qs}) \quad (1.24)$$

Qu'on peut exprimer aussi à l'aide des flux rotoriques et des courants statoriques par :

$$C_{em} = \frac{p L_m}{L_r} (\psi_{dr} i_{qs} - \psi_{qr} i_{ds}) \quad (1.25)$$

En supposant que les frottements de la machine sont compris dans le couple résistant, l'expression du couple électromagnétique donné par (1.12) s'écrit alors :

$$C_{em} = J \frac{d\omega_m}{dt} + C_r \quad (1.26)$$

Ainsi, nous aboutissons, après transformation à l'équation différentielle suivante :

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = C_{em} - C_r \quad (1.27)$$

$C_r$  représente le couple résistant englobant les frottements  $f$ .

#### 1.2.4 Modèle du moteur exprimé dans un référentiel lié au champ tournant

En associant le modèle dynamique flux rotoriques/courants statoriques donné par les équations différentielles (1.22) et l'équation mécanique donnée par (1.27) nous aboutissons au modèle dynamique global de la machine exprimé dans un référentiel lié au champ tournant ( $\omega_a = \omega_s$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{di_{ds}}{dt} &= - \left( \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{L_m^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{ds} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega_r \psi_{qr} + \omega_s i_{qs} \\ &\quad + \left( \frac{R_r}{L_r} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \right) \psi_{dr} + \frac{U_{ds}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{qs}}{dt} &= - \left( \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{L_m^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{qs} - \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega_r \psi_{dr} - \omega_s i_{ds} \\ &\quad + \left( \frac{R_r}{L_r} + \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \right) \psi_{qr} + \frac{U_{qs}}{\sigma L_s} \\ \frac{d\psi_{dr}}{dt} &= (\omega_s - \omega_r) \psi_{qr} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{dr} + \frac{R_r}{L_r} L_m i_{ds} \\ \frac{d\psi_{qr}}{dt} &= - (\omega_s - \omega_r) \psi_{dr} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{qr} + \frac{R_r}{L_r} L_m i_{qs} \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{p L_m}{J L_r} (\psi_{dr} i_{qs} - \psi_{qr} i_{ds}) - \frac{C_r}{J} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ces équations peuvent être écrites sous la forme condensée suivante:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u \quad (1.29)$$

Nous pouvons ainsi, exprimer deux autres modèles de la machine, soit dans un référentiel lié au stator ( $\omega_a = 0$ ), soit dans un référentiel lié au rotor ( $\omega_a = \omega_m$ ).

### 1.2.5 Modèle du moteur commandé par orientation du champ

Dans le but de commander le moteur, nous avons choisi un deuxième modèle qui s'adapte à la stratégie de commande que nous allons adopter par la suite. En effet, si nous choisissons un référentiel qui nous garantit une composante nulle du flux selon l'axe q ( $\psi_{qr} = 0$ ) (figure 1.3), nous pouvons régler le flux en contrôlant le courant  $i_{ds}$  et la vitesse du rotor de la machine en contrôlant le courant  $i_{qs}$ . Les trois dernières équations différentielles du système (1.28) s'écrivent alors :

$$\frac{d\psi_{dr}}{dt} = -\eta \psi_{dr} + L_m \eta i_{ds} \quad (1.30)$$

$$0 = -(\omega_s - p\omega_m) \psi_{dr} + L_m \eta i_{qs} \quad (1.31)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{pL_m}{JL_r} \psi_{dr} i_{qs} - \frac{C_r}{J} \quad (1.32)$$

L'équation (1.31) nous permet d'éliminer la grandeur de commande  $\omega_s$  du système d'équation différentielles (1.28). Sa valeur à chaque instant est donnée par l'équation suivante :

$$\omega_s = p\omega_m + \frac{L_m \eta i_{qs}}{\psi_{dr}} \quad (1.33)$$

L'intégration de l'équation (1.33) nous permet de déterminer la position du référentiel à chaque instant.

Finalement, en remplaçant  $\omega_s$  par sa valeur dans le système différentiel (1.28), nous aboutissons au modèle dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{di_{ds}}{dt} &= - \left( \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{L_m^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{ds} + \frac{R_r}{L_r} \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \psi_{dr} \\ &\quad + \frac{R_r}{L_r} L_m \frac{i_{qs}^2}{\psi_{dr}} + p i_{qs} \omega_m + \frac{U_{ds}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{qs}}{dt} &= - \left( \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{L_m^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{qs} - \frac{R_r}{L_r} L_m \frac{i_{qs} i_{ds}}{\psi_{dr}} \\ &\quad - p \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \omega_m \psi_{dr} - p i_{ds} \omega_m + \frac{U_{qs}}{\sigma L_s} \\ \frac{d\psi_{dr}}{dt} &= \frac{R_r}{L_r} L_m i_{ds} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{dr} \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{p L_m}{J L_r} \psi_{dr} i_{qs} - \frac{C_r}{J} \end{aligned} \tag{1.34}$$

**Remarque :** d'autres modèles dynamiques peuvent être utilisés selon la stratégie de commande adoptée (voir à titre d'exemple [7] , [8] , [9] , [10] ).

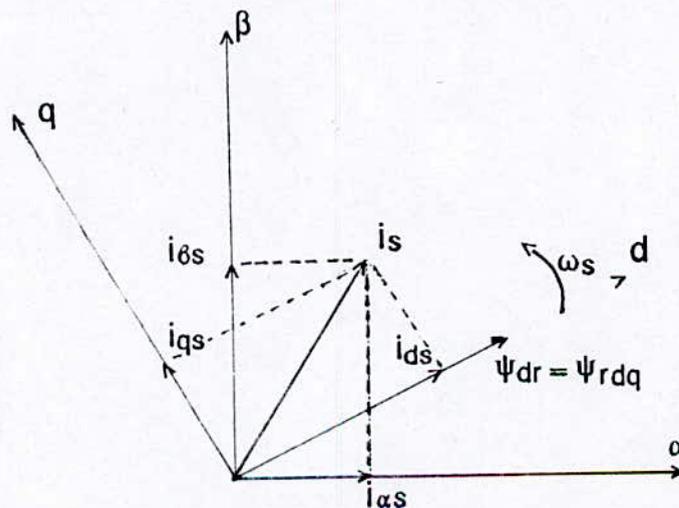


Fig. I.3 : Orientation du flux

### 1.3. Modélisation de l'onduleur de tension commandé en MLI

Dans cette section on présentera l'association du moteur asynchrone à un onduleur triphasé commandé par M.L.I. (triangulo-sinusoïdale).

#### 1.3.1. Modulation de la largeur d'impulsion (M.L.I.) : [11]

La M.L.I. permet de former chaque alternance de la tension de sortie de plusieurs créneaux. Pour aboutir à cela, on adopte une certaine technique de commande des interrupteurs de l'onduleur.

La M.L.I. est caractérisée par deux paramètres :

\* l'indice de modulation  $m$  : représente le rapport de la fréquence de la porteuse (modulante) à la fréquence de référence :

$$m = \frac{f_p}{f}$$

\* le coefficient de réglage en tension  $r$  : représente le rapport de l'amplitude de l'onde de référence à la valeur de crête de la porteuse :

$$r_c = \frac{A_{v_{ref}}}{\frac{V}{2}}$$

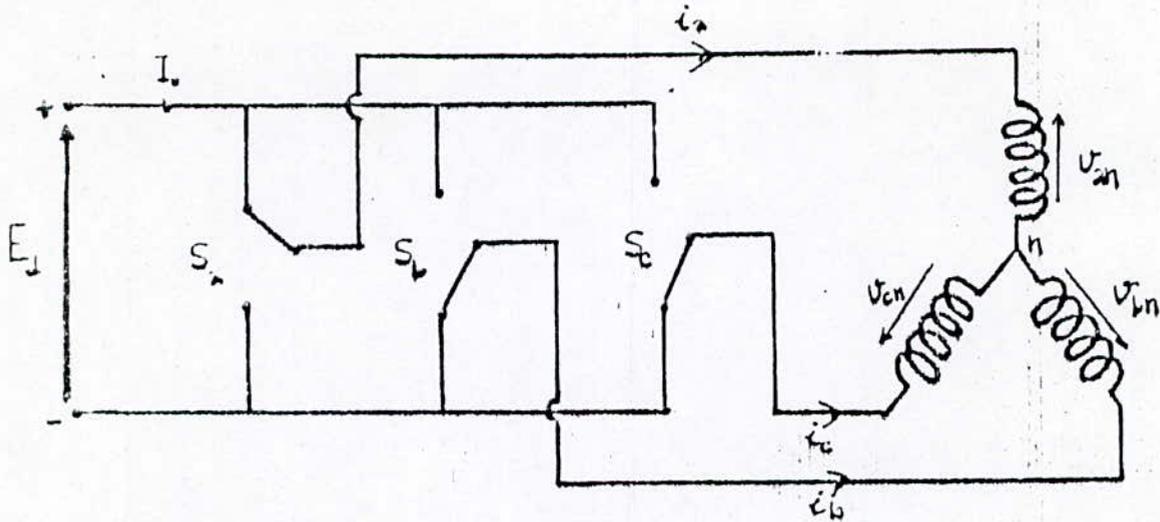
Les instants de commutation sont obtenus par comparaison de trois signaux de référence correspondants aux tensions de sortie désirées de fréquence  $f$  à un signal triangulaire de fréquence  $f_p$  nettement supérieure à  $f$ .

#### 1.3.2. Onduleur M.L.I. [12]

Tout d'abord, il est important de noter que la commutation des interrupteurs (composants électriques : thyristors; transistors, ... schuntés en anti-parallèle par des diodes) est supposée instantanées. Chaque bras de l'onduleur triphasé est considéré comme un inverseur que l'on associe une fonction logique.

$$S_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_i \text{ fermé, } \acute{T}_i \text{ ouvert} \\ 0 & \text{si } \acute{T}_i \text{ fermé, } T_i \text{ ouvert} \end{cases} \quad (1.35)$$

La schématisation de l'association onduleur-MAS est représentée par la figure suivante :



Fif. (1.4)

- tensions simples et tensions composées :

Les tensions à la sortie de l'onduleur sont données par [12] [13] :

Les tensions biphasées seront données par:

$$\begin{bmatrix} U_{ab} \\ U_{bc} \\ U_{ca} \end{bmatrix} = E_d \begin{bmatrix} S_a - S_b \\ S_b - S_c \\ S_c - S_a \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \frac{E_d}{3} \begin{bmatrix} 2S_a - S_b - S_c \\ 2S_b - S_a - S_c \\ 2S_c - S_a - S_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_d \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

#### 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle dynamique de la machine asynchrone, déduit à partir de ses équations électriques et mécaniques. Nous avons utilisés la méthode de transformation de PARK pour éliminer les effets du couplage entre les phases rotoriques et les phases statoriques (les coefficients de couplage varient avec la position du rotor), et ainsi obtenir un modèle simple et plus facile à manipuler. Nous avons montré aussi que selon le choix du référentiel et des variables, plusieurs modèles peuvent être déduits. Les modèles ainsi obtenus sont non linéaires, multi-entrées/multi-sorties et de plus, ils présentent un couplage E/S, ce qui justifie pleinement l'utilisation des techniques de commande non linéaires.

## Chapitre 2

# LINEARISATION EXACTE ET COMMANDE DU MOTEUR ASYNCHRONE

Dans ce chapitre, il est présenté la commande linéarisante d'un moteur asynchrone basée sur les concepts développés dans le deuxième chapitre. La linéarisation exacte du système par bouclage statique et transformation de coordonnées est assurée par un choix adéquat des sorties en relation avec l'objectif de la commande. Après détermination du degré relatif vectoriel, le système est mis sous la forme normale et la commande qui linéarise et découple le système est synthétisée. Par la suite, nous appliquons au système ainsi linéarisé et découplé une commande par placement de pôles. L'étude de la robustesse et les résultats de la simulation sont présentés à la fin de ce chapitre une étude sur l'alimentation de la MAS par un onduleur MLI sera présenté.

### 2.1. Objectif de la commande

Considérons le modèle du moteur asynchrone (1.34) où les commandes sont  $u_{ds}$  et  $u_{qs}$ , les images des tensions statoriques dans le repère de PARK. Le choix des sorties est d'une grande importance dans ce genre de commande, en effet, il nous assure la linéarisation exacte du système si elle est possible. Par conséquent, notre objectif, est dans une première étape, de linéariser et découpler le système via une commande linéarisante basée sur un choix adéquat des sorties, puis dans une deuxième étape de commander les sorties du système ainsi linéarisé (la vitesse du rotor et le flux rotorique selon l'axe d sont les deux sorties qui permettent une linéarisation exacte du système), puis dans une troisième étape, nous introduirons l'influence d'un onduleur MLI sur les performances du système déjà réglé.

Remarque : Le choix d'une autre sortie autre que le flux ( $i_{ds}$  ou  $i_{qs}$  par exemple) introduit une dynamique des zéros d'ordre 1 et le système n'est pas linéarisable exactement par retour d'état statique.

## 2.2. Linéarisation exacte et découplage E/S

### 2.2.1. Modèle du moteur

En adoptant les notations suivantes:

$\eta = R_r/L_r$ ,  $\beta = L_m/\sigma L_s L_r R_r$ ,  $\alpha = pL_m/JL_r$ ,  $\gamma = (R_s/\sigma L_s + L_m^2 R_r/\sigma L_s L_r^2)$  et en prenant comme vecteur d'état  $x = [i_{ds} \ i_{qs} \ \psi_{dr} \ \omega_m]^T$ , le système donné par les équations différentielles (1.34) peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\gamma x_1 + \rho x_2 x_4 + \eta \beta x_3 + L_m \eta \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{U_{ds}}{\sigma L_s} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\gamma x_2 - \beta \rho x_4 x_3 - L_m \eta \frac{x_1 x_2}{x_3} - p x_1 x_4 + \frac{U_{qs}}{\sigma L_s} \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\eta x_3 + L_m \eta x_1 \\ \frac{dx_4}{dt} &= \alpha x_3 x_2 - \frac{C_r}{J} \end{aligned} \quad (2.1)$$

En relation avec la stratégie de commande adoptée et l'objectif du réglage, nous choisissons comme sortie:  $h_1(x) = x_3$  (composante du flux rotorique selon l'axe d) et  $h_2(x) = x_4$  (la vitesse du rotor). Pour simplifier les calculs, nous étulisons les notations suivantes:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\gamma x_1 + \rho x_2 x_4 + \eta \beta x_3 + L_m \eta \frac{x_2^2}{x_3} \\ f_2(x) &= -\gamma x_2 - \beta \rho x_4 x_3 - L_m \eta \frac{x_1 x_2}{x_3} - p x_1 x_4 \\ f_3(x) &= -\eta x_3 + L_m \eta x_1 \\ f_4(x) &= \alpha x_3 x_2 - \frac{C_r}{J} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$g_1 = \left[ \frac{1}{\sigma L_s} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad g_2 = \left[ 0 \ \frac{1}{\sigma L_s} \ 0 \ 0 \right]^T \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Degré relatif vectoriel

Nous savons que le degré relatif d'un système correspond en nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître explicitement au moins une entrée (cas des systèmes MIMO). Dans ce but, considérons chacune des sorties du système (2.1) et calculons leurs dérivées successives jusqu'à faire apparaître au moins une entrée.

**1<sup>ère</sup> sortie :**  $h_1(x) = x_3$

$$\frac{dh_1(x)}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = f_3(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_1(x)}{dt^2} &= \frac{d^2 x_3}{dt^2} = L_m \eta \frac{dx_1}{dt} - \eta \frac{dx_3}{dt} \\ &= \eta (L_m f_1(x) - f_3(x)) + \frac{L_m \eta}{\sigma L_s} U_{ds} \end{aligned}$$

Ainsi, le degré relatif correspondant à la première sortie  $h_1(x) = x_3(x)$  est égal à 2 ( $r_1 = 2$ ).

**2<sup>ème</sup> sortie :**  $h_2(x) = x_4$

$$\frac{dh_2(x)}{dt} = \frac{dx_4}{dt} = f_4(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_2(x)}{dt^2} &= \frac{d^2 x_4}{dt^2} = \alpha \left( x_2 \frac{dx_3}{dt} + x_3 \frac{dx_2}{dt} \right) \\ &= \alpha \left( x_2 f_3(x) + x_3 f_2(x) \right) + \frac{\alpha x_3}{\sigma L_s} U_{qs} \end{aligned}$$

Le degré relatif correspondant à la deuxième sortie  $h_2(x) = x_4$  est aussi égal à  $2(r_2=2)$ .

Alors, comme le degré relatif vectoriel vérifie la condition (voir annexe 1) i.e  $r_1 + r_2 = n = 4$ , nous pouvons conclure qu'il est possible de linéariser exactement le système (2.1) au moyen d'une transformation de coordonnées et d'un bouclage non linéaire.

Dans le but de mettre le système donné par les équations différentielles (2.1) sous forme normale, considérons la transformation de coordonnées non linéaire suivante:

$$\begin{aligned} Z_1 &= h_1(x) = X_3 \\ Z_2 &= L_f h_1(x) = f_3(X) \\ Z_3 &= h_2(x) = X_4 \\ Z_4 &= L_f h_2(x) = f_4(X) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La transformation inverse de coordonnées s'écrit alors:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{z_2 + \rho z_1}{L_m \rho} \\ X_2 &= \frac{z_4 + Cr}{\alpha z_1} \\ X_3 &= z_1 \\ X_4 &= z_3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

A partir de (2.4) nous aboutissons à la forme normale du système (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= z_2 \\ \dot{Z}_2 &= \rho L_m f_1(x) = f_3(X) \frac{L_m \rho}{\sigma L_s} u_{ds} \Big|_{x = \phi^{-1}(z)} \\ \dot{Z}_3 &= z_4 \\ \dot{Z}_4 &= \alpha (x_2 f_3(x) + x_3 f_2(x)) \frac{\alpha x_3}{\sigma L_s} u_{qs} \Big|_{x = \phi^{-1}(z)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $x = \phi^{-1}(x)$  est la transformation de coordonnées inverse donnée par (2.5). Par ailleurs, la matrice de découplage est donnée par:

$$A(X) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f h_1(x) & L_{g2} L_f h_1(x) \\ L_{g1} L_f h_2(x) & L_{g2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta Rr & 0 \\ 0 & P \frac{\beta x_3}{J} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Elle est non singulière pour tout  $x_3 \neq 0$ . i.e pour un flux non nul.

Cette condition est toujours vérifiée dès que le moteur est sous tension. D'un autre coté la matrice de découplage inverse est donnée par:

$$A^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta Rr} & 0 \\ 0 & \frac{J}{P\beta x_3} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

### 2.2.3 - Commande linéarisante

Finalement, à partir de la matrice donnée par (2.8), nous pouvons synthétiser la commande qui linéarise et découple le système (schéma bloc de la figure (II.I)):

$$u = -A^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} + A^{-1}(x) v \quad (2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} L_f^2 h_1(x) &= (Mf_1(x) - f_3(x)) \\ L_f^2 h_2(x) &= (x_3 f_2(x) + x_2 f_3(x)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

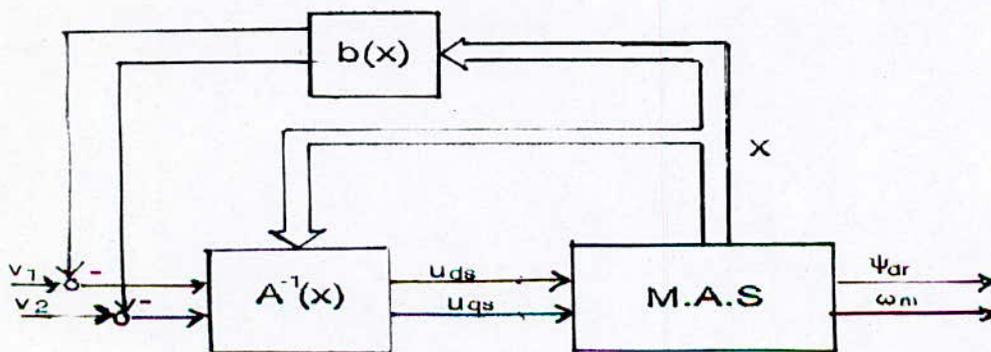


Fig. II.I: Structure générale de la commande par bouclage statique.

Ainsi, à partir de (2.9) et (2.10) la commande  $u$  s'écrit d'une manière plus explicite:

$$u = \begin{bmatrix} u_{ds} \\ u_{qs} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\sigma L_s}{L_m} (L_m f_1(x) - f_3(x)) \\ \frac{\sigma L_s}{L_m} (x_3 f_2(x) - x_2 f_3(x)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_1}{R_r} \\ \frac{JV_2}{p\beta x_3} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Son application au système (2.1), donné sous forme normale (2.6), nous fait aboutir au système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le système ainsi obtenu est constitué de deux sous systèmes linéaires et découplés. La forme (2.12) appelée forme canonique de BRUNOWSKY est donnée sous forme matricielle par:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \quad (2.13)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z$$

Cette forme correspond au schéma bloc de la figure (II.2)

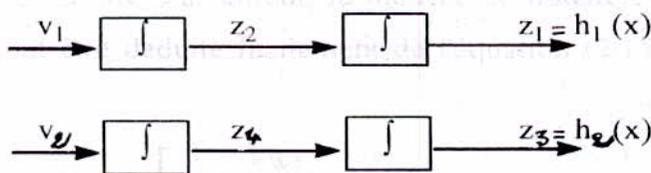


Fig. II.2: système linéarisé et découplé

### 2.3 Commande par placement de pôles

La technique de commande par placement de pôles consiste à imposer la dynamique désirée au système, au moyen d'un retour d'état linéaire en assignant les

#### 2.4. Mise en oeuvre de la commande:

Pour une éventuelle mise en oeuvre de la commande, la figure (2.5) donne une vue globale de l'algorithme de commande implémenté par micro-processeur. La stratégie de commande des interrupteurs, ainsi que la vitesse et le flux rotorique à la sortie du modèle non linéaire du MAS sont donnés par les courbes de simulation à la figure (2.10).

#### 2.5 Résultats de simulation et commentaires:

Dans ce chapitre, la simulation va être effectuée sur le modèle à flux orienté de la machine avec retour d'état comme technique de commande pour les consignes de réglage suivantes:

- un échelon de 1500 tr/mn pour la vitesse
- un échelon de 0,3 wb pour le flux.

La simulation des résultats à porter sur les points suivants:

- les figures: (2.1), (2.2), (2.3), illustrent l'évolution des grandeurs de la machine pour trois choix de paires de pôles pour la vitesse tandis que celle du flux reste inchangée.

- pour mettre en vigueur l'efficacité de la commande, une perturbation de charge nominale est testée sur les réponses du système au régime établi, celui là rejette celle-ci comme le montre ces cas de figures.

- un résultat important mérite d'être mentionné, c'est que le flux reste insensible à la perturbation.

- l'itération la vitesse d'une dynamique à une autre, diminue de plus en plus le temps de réponse de celle-ci, donc une évolution plus rapide vers la consigne.

- le passage d'un choix de paire de pôles pour la vitesse, entraîne une augmentation du pic du courant en quadrature  $i_{qs}$  au démarrage qui risque d'être inadmissible pour le moteur, tandis que celui du courant  $i_{ds}$  reste constant du moment que la commande du flux n'a subi aucun changement et ceci met ainsi en évidence le découplage entre les deux sous systèmes.

- étant donné ce compromis: rapidité du système - pic du courant  $i_{qs}$  au démarrage, les limites de fonctionnement de la machine nous obligent à choisir la paire de pôles qui aboutit à une satisfaction du compromis considéré dans notre cas on choisit:  $\rho_{1,2} = -10 \pm j$  pour la vitesse et  $\rho'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux avec un pic du courant  $i_{qs}$  au démarrage de 3,9 A.

- avec ces paires de pôles choisies pour la vitesse et pour le flux, le système répond avec succès à un changement de consigne de vitesse au régime permanent (consigne inverse de -1500tr/mn), (fig. 2.5).

- afin de tester la sensibilité du système vis-à-vis des variations paramétriques, une dérive en premier lieu de 50% sur J est considérée, notons alors la non affectation de celle-ci sur le comportement de la machine, ce qui explique la robustesse de la commande par rapport à J (fig. 2.6).

- en deuxième lieu, sur la figure (2.7) un autre test de robustesse est considéré, c'est celui d'une erreur de 50% sur la résistance rotorique  $R_1$  alors ici les choses se détériorent considérablement. En effet les réponses du système, présentent un écart statique important au régime établi. Pour remédier à cela, un changement de pôles est proposé (fig. (2.8))  $\rho_{1,2} = -50 \pm j$ ; pour la vitesse et  $\rho'_{1,2} = -50 \pm j = -100 \pm j$  pour le flux, qui entraîne malheureusement un pic du courant  $i_{qs}$ , important. Afin de respecter le compromis déjà cité, une limitation des courants  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$  s'impose. Dans notre cas, on admet 1,5 à 2 fois le courant nominal; soit une borne de  $\pm 4A$ . Le comportement du système en insérant une limitation est simulé à la fig (2,9).

- enfin, nous complétons notre simulation par une éventuelle mise en oeuvre de la commande et ceci en considération du fonctionnement réel de la machine: alimentation de celle-ci par un onduleur de tension commandé en tension (stratégie MLI).

Les résultats sont obtenus par  $M = 9$ .

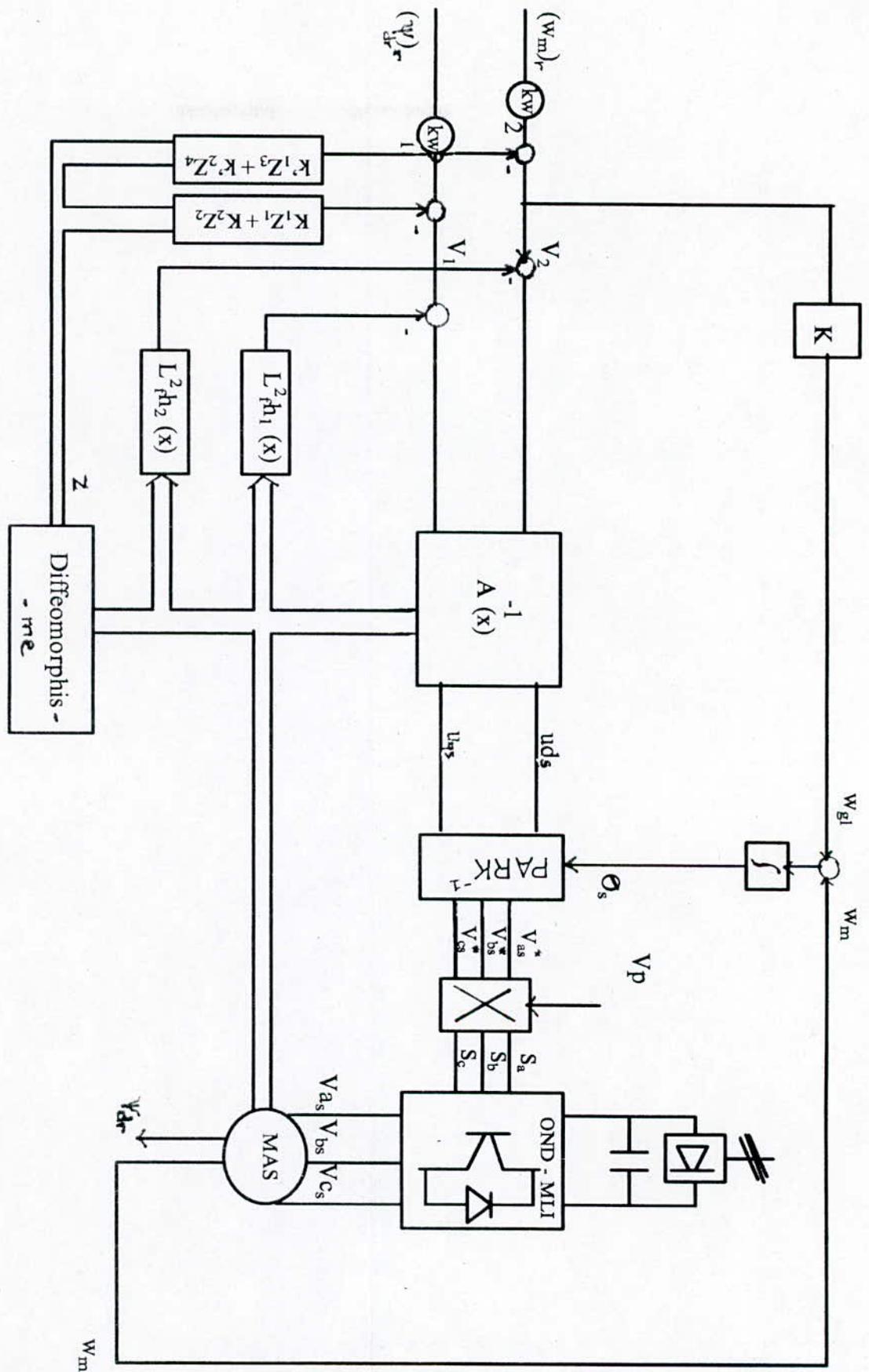


Fig. (II-5) Mise en oeuvre de l'algorithme de commande

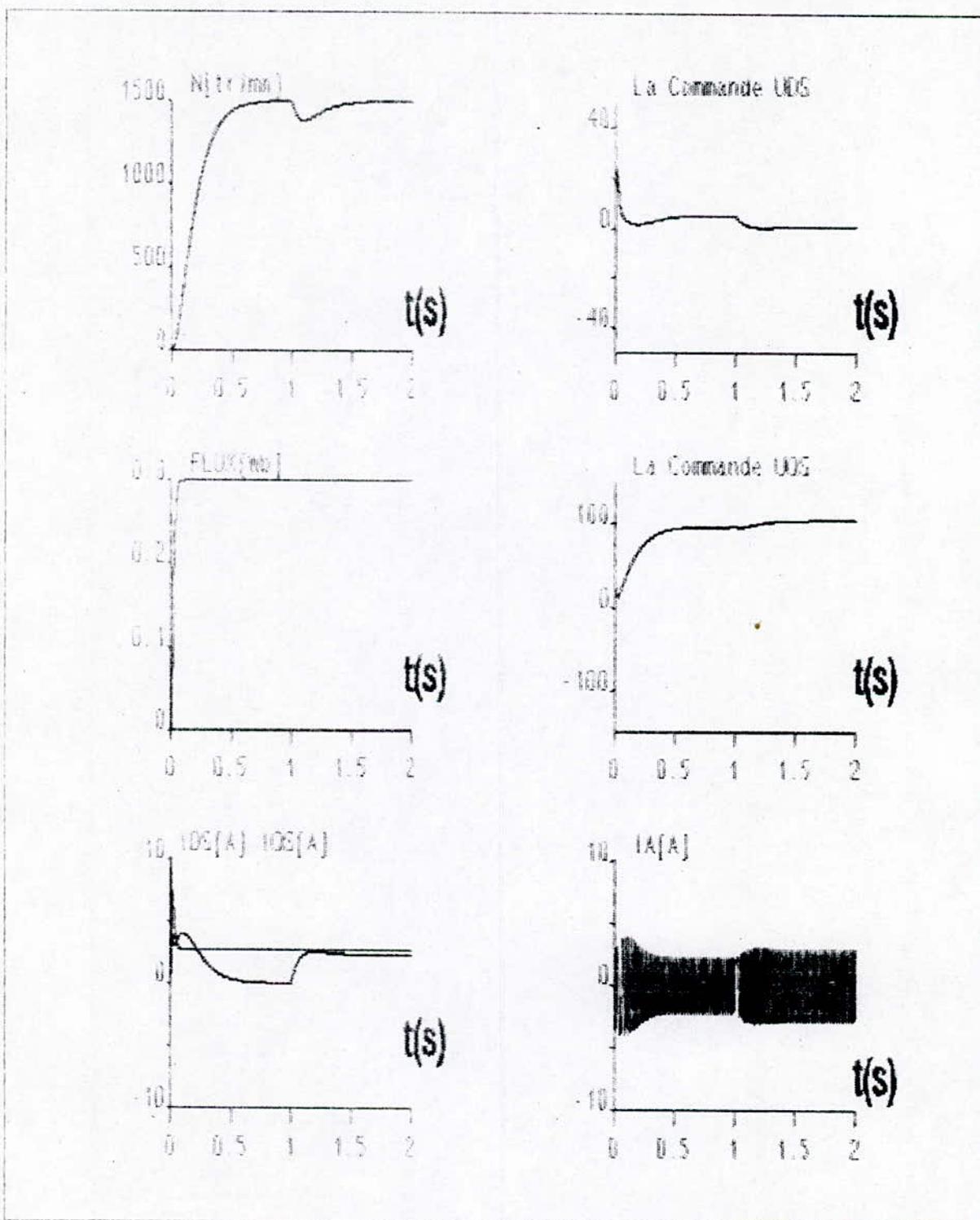


FIG. 2.1: Evolution des grandeurs d'état et de commandes avec charge au régime établi.  $P_{1,2} = -10 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux.

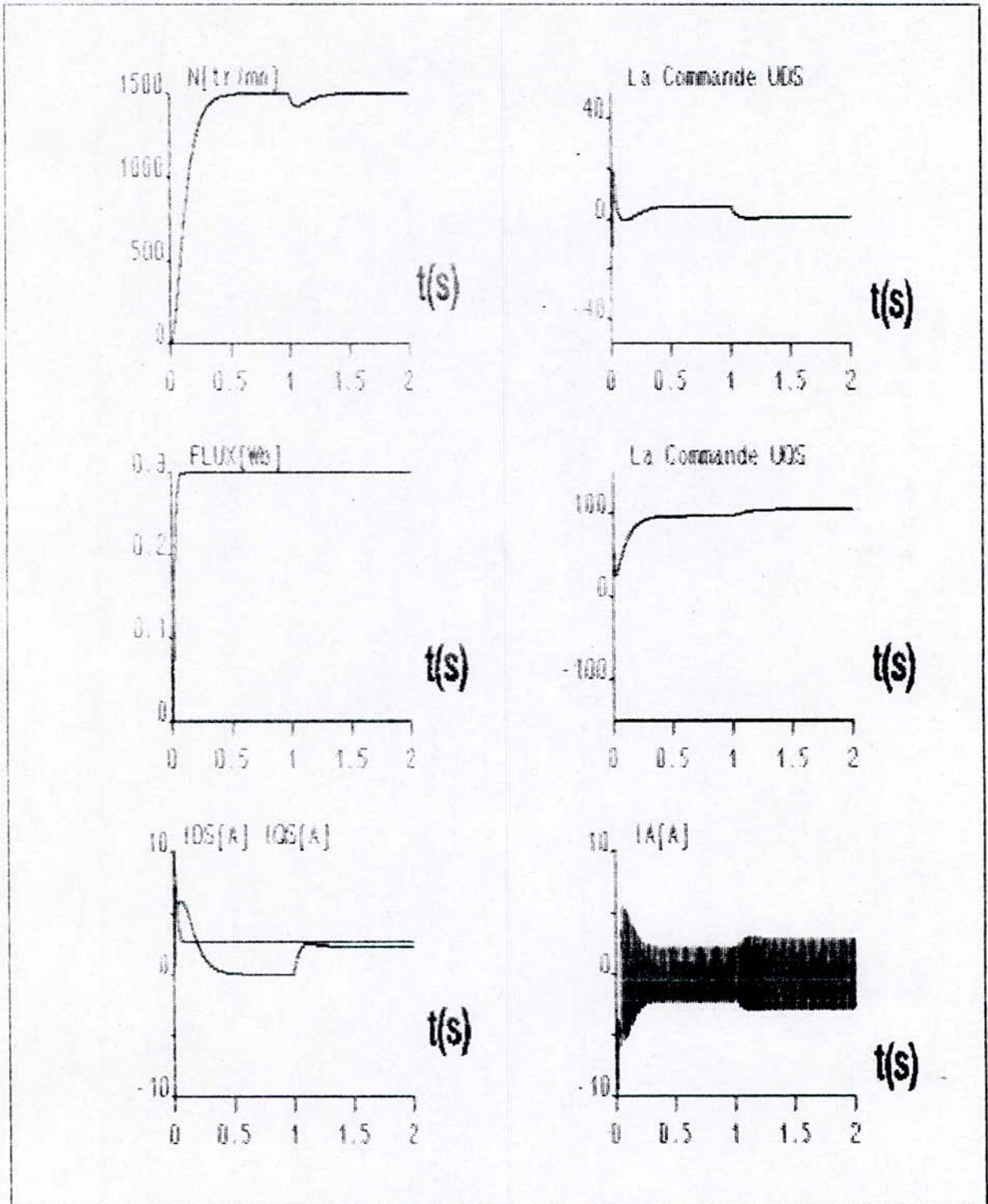


FIG.2.2: Evolution des grandeurs d'état et de commandes avec charge au régime établi.  $P_{1,2} = -15 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux.

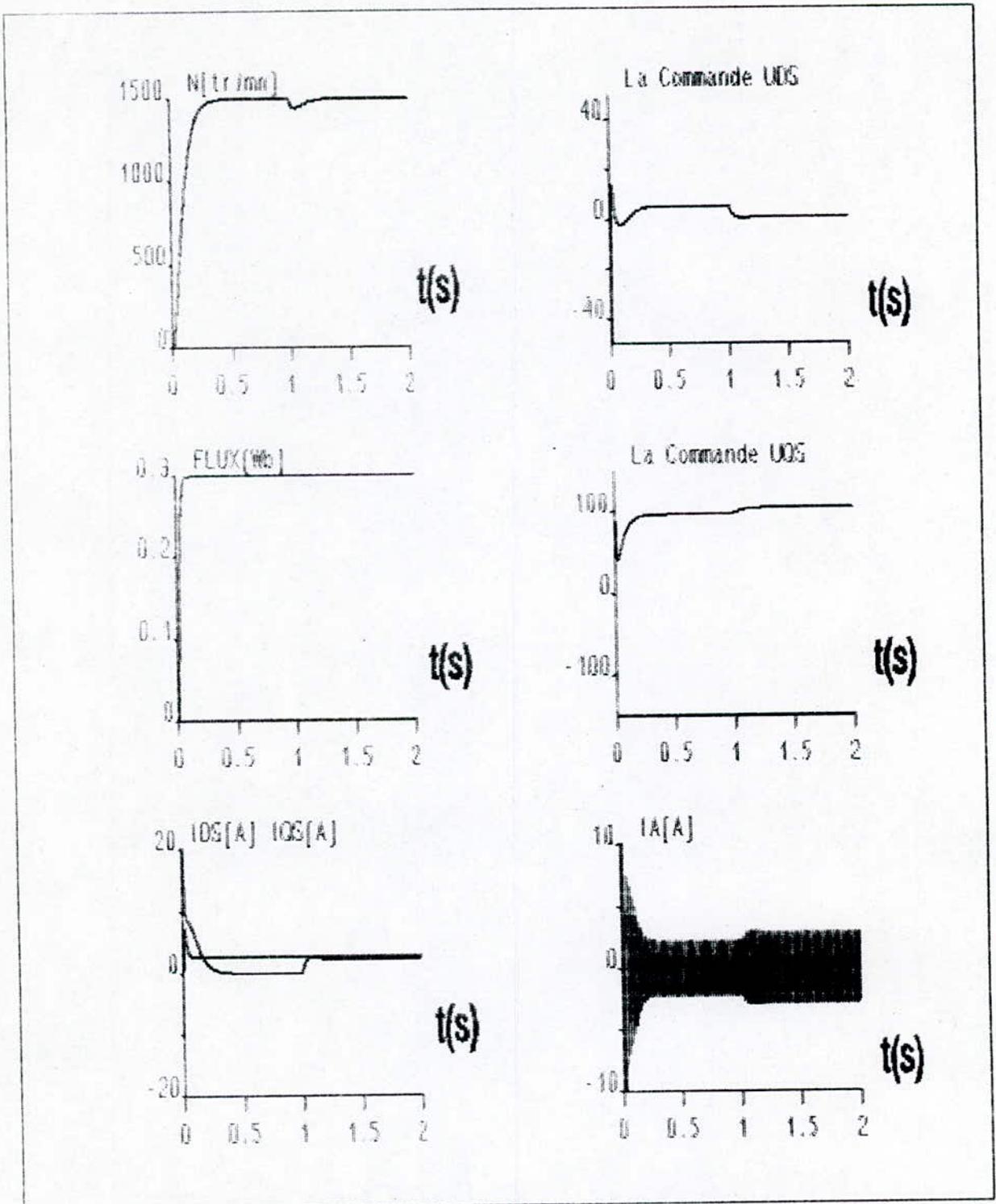


FIG. 2.3: Evolution des grandeurs d'état et de commandes avec charge au régime établi.  $P_{1,2} = -20 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux.

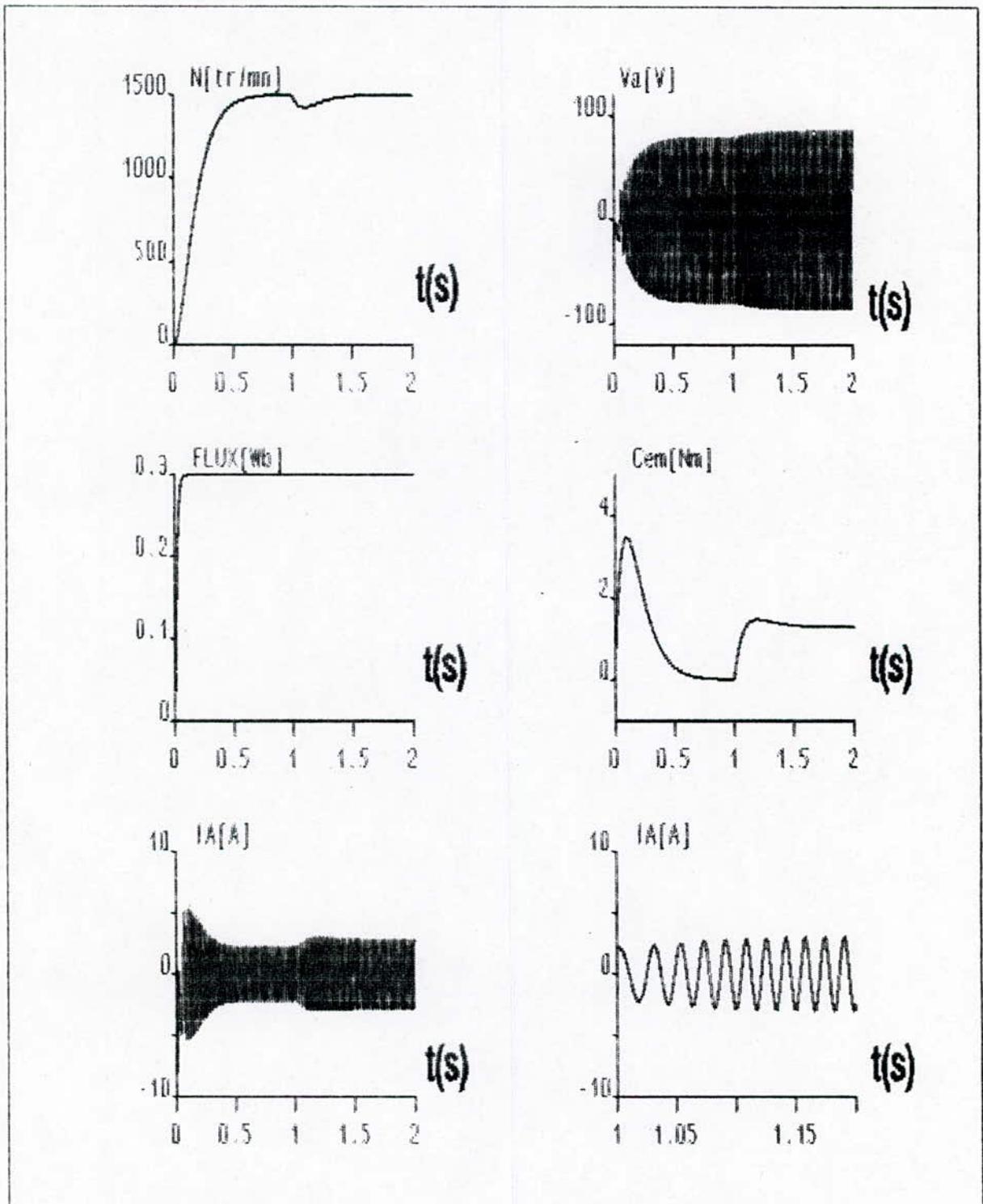


FIG.2.4: Evolution du courant de ligne et de la tension de phase avec charge au régime établi.  $P_{1,2} = -10 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux.

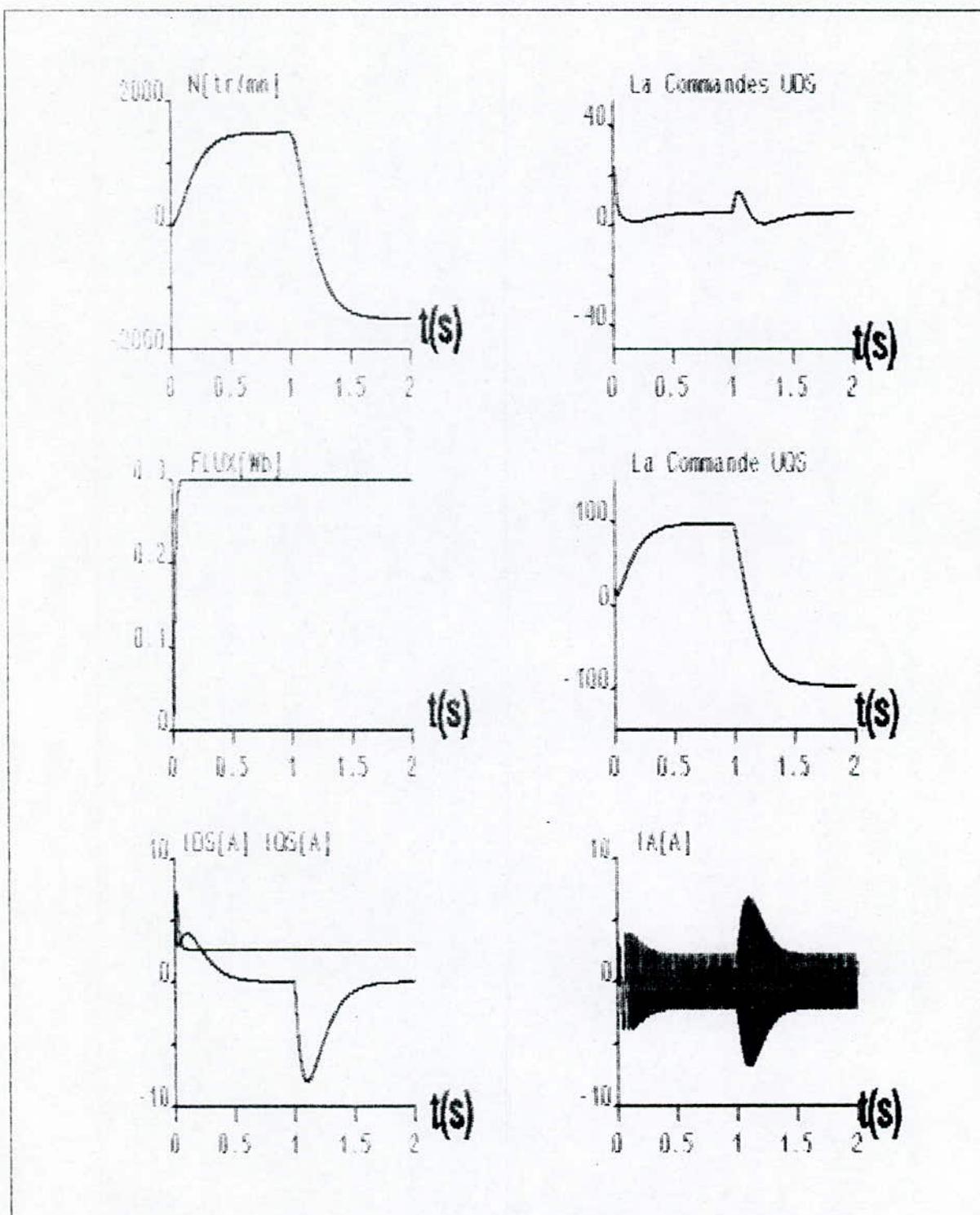


FIG.2.5: Evolution des grandeurs d'état et de commande avec changement de consigne pour la vitesse à  $t=1$ s.

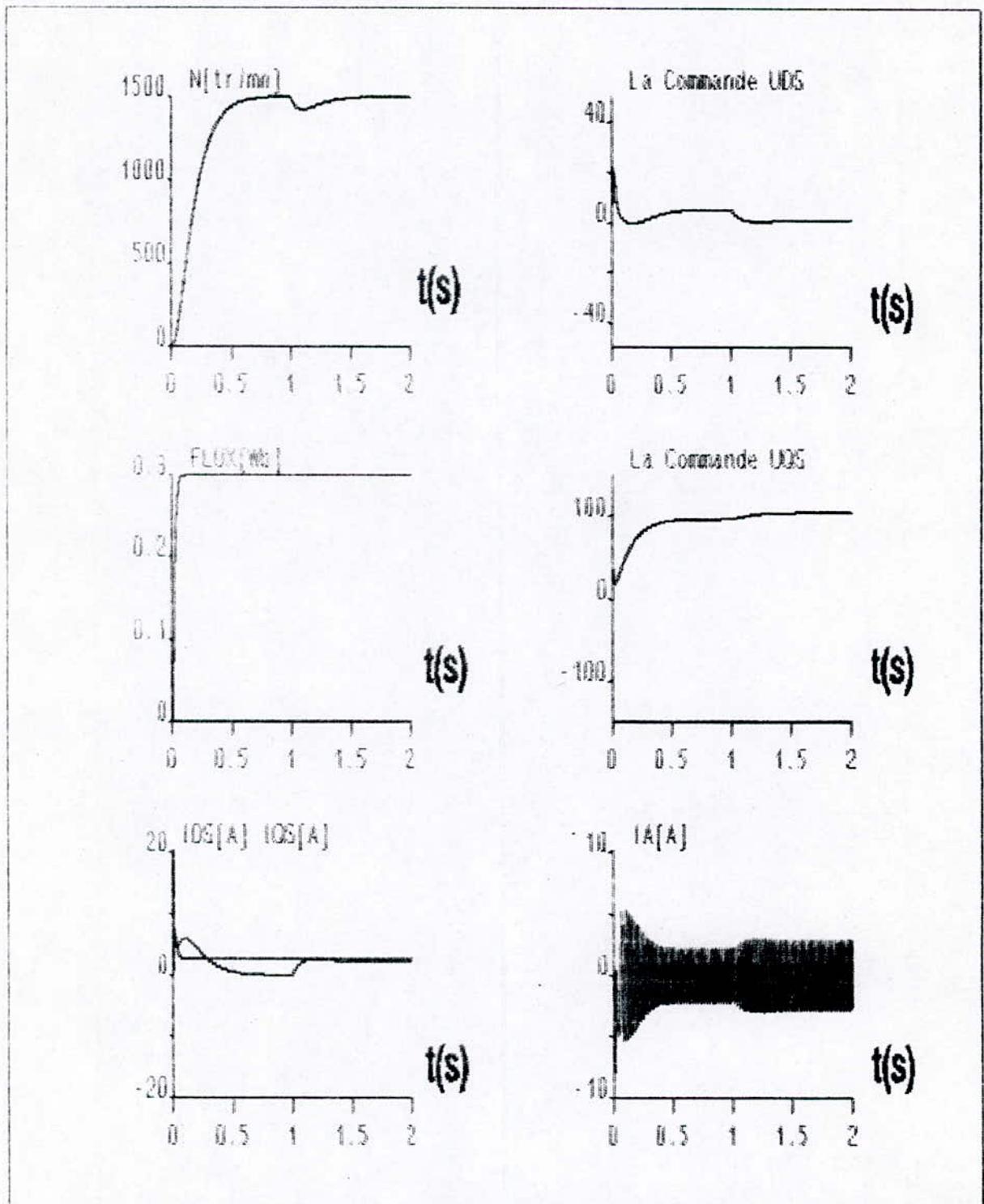


FIG. 2.6: Effet d'une erreur de 50% de  $J$  sur l'évolution des grandeurs de la machine, avec charge au régime établi.

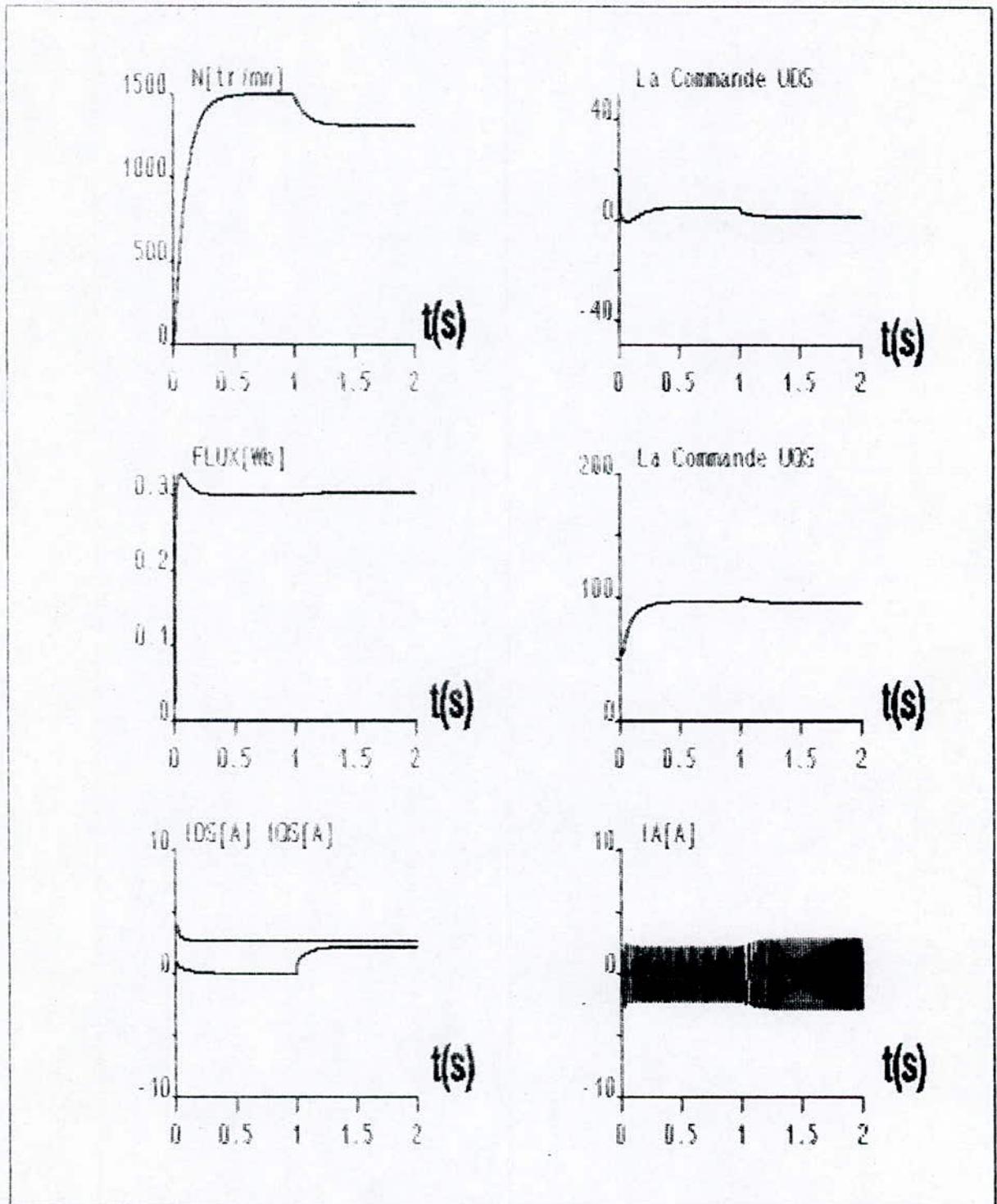


FIG.2.7: Effet d'une erreur de 50% de  $R_r$  sur l'évolution des grandeurs de la machine avec une charge au régime établi.

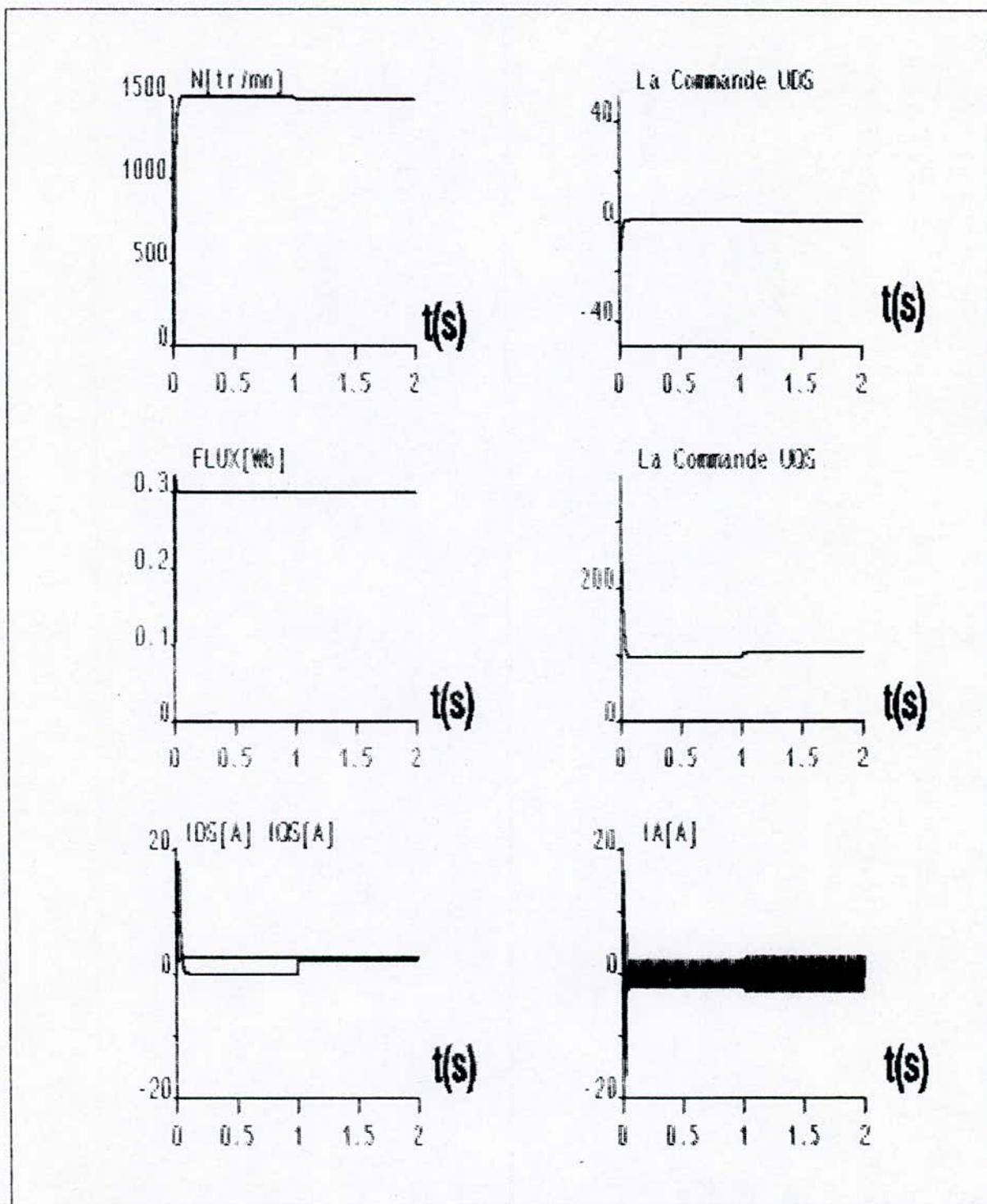


FIG.2.8: Changement de pôles:  $P_{1,2} = -50 \pm j$  pour la vitesse,  $P'_{1,2} = -200 \pm j$  pour le flux en présence d'une charge au régime établi. L'erreur sur  $R_r$  est de 50%.

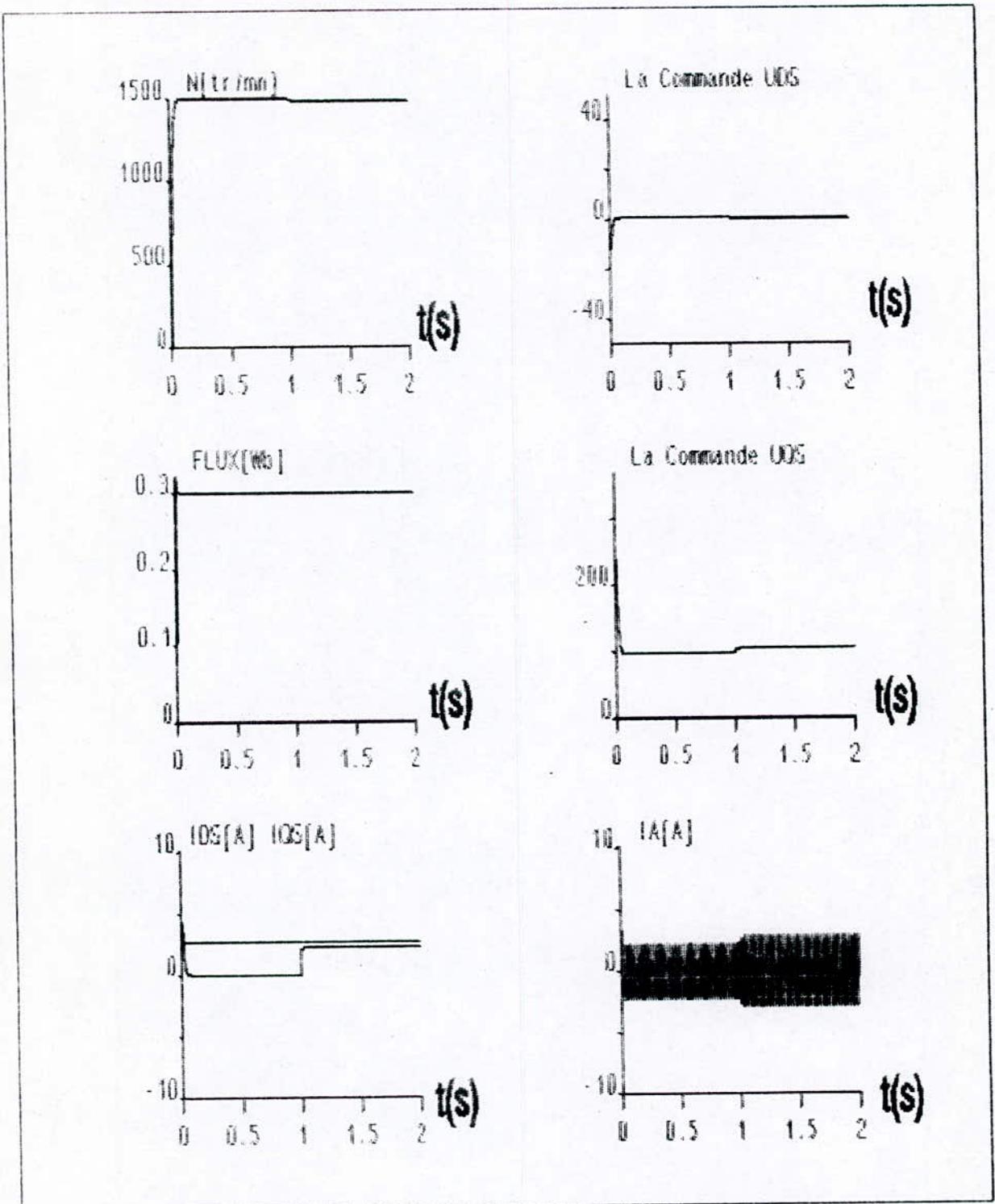


FIG.2.9: Changement de pôles:  $P_{1,2} = -50 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -200 \pm j$  pour le flux, en présence d'une limitation en courant. l'erreur sur  $R_r$  est de 50%.

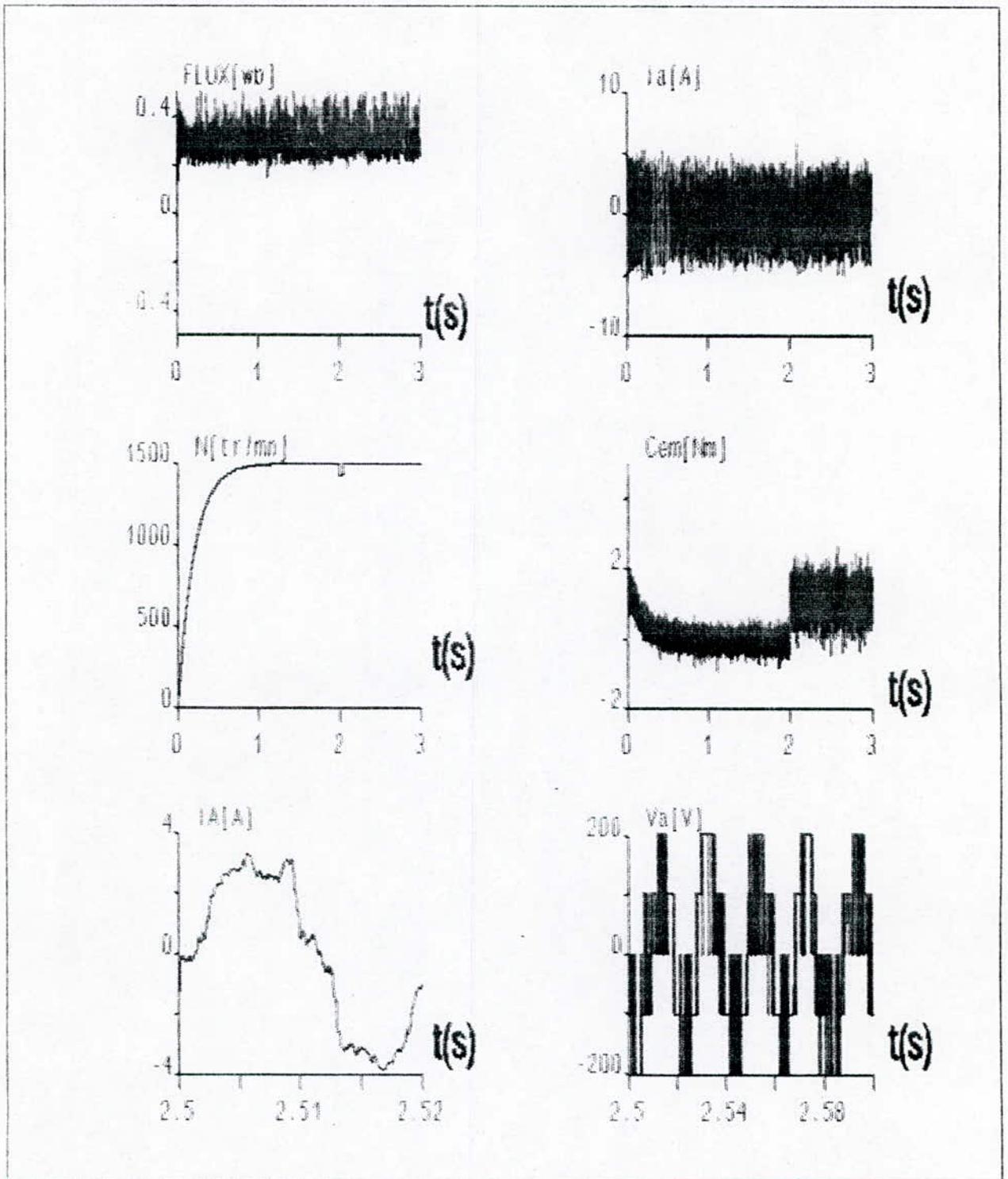


FIG.2.10: Simulation de l'association onduleur MLI-MAS en charge au régime établi ( $m=9$ ).

## 2.6. Conclusion

Dans cette partie, le MAS a pu être commandé et testé avec succès en manipulant uniquement son modèle réduit fictif. Vue la simplicité du modèle obtenu après linéarisation exacte et différents morphisme, la technique de commande par placement de pôles donne de bonnes performances et ceci malgré la délimitation du choix des pôles par le pic du courant au démarrage. En effet, pour des paires de pôles choies, en loccurence  $p_{1,2} = -10 \pm j$  pour la vitesse et  $p_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux, le système présente de bonnes performances et un bon temps de réponse et cela même en présence d'une charge nominale au régime établi. Des tests de robustesse de la commande vis-à-vis des paramètres a montré que pour une erreur de 50% sur  $R_r$  le système aux deux sorties : la vitesse et le flux se trouvent altérés pour les pôles choisis. Pour remédier à cela un changement de pôles a été proposé mais qui agit d'une façon néfaste sur le pic du courant au démarrage qui atteint une valeur importante, ce qui évoque la nécessité d'introduire une limitation en courant. Par contre les résultats ont montré que le système pour une dérive de 50% sur  $j$  reste robuste. Enfin, une éventuelle mise en oeuvre pratique de la stratégie de commande a été introduite et qui présente comme nous l'avons constaté une certaine simplicité dans son implémentation.

## Chapitre 3

# LINEARISATION PARTIELLE ET COMMANDE DU MOTEUR ASYNCHRONE

Nous présentons dans ce chapitre, la linéarisation partielle et le découplage d'un moteur asynchrone basée sur les concepts développés dans le (voir annexe 2). Dans le but de synthétiser la commande qui linéarise partiellement et découple le système, ce dernier est mis sous la forme normale laquelle présente - dans ce cas - une dynamique inobservable. Par la suite, nous appliquons aux système ainsi linéalisé partiellement une commande par placement de poles similaires à celle introduite au deuxième (2ème) chapitre, en prenant soin de vérifier le comportement de la dynamique des zéros. De même, l'étude de la robustesse ainsi qu'une éventuelle mise en oeuvre de l'association onduleur MLI - moteur asynchrone similaire à celle du deuxième chapitre seront présentées à la fin suivies des résultats de simulation correspondants.

### 3.1. Objectif de la commande

Considérons le modèle du moteur asynchrone (1.28) constituée de deux courants statoriques, des deux flux rotoriques et de la vitesse du rotor, où les deux commandes sont  $U_{ds}$ ,  $U_{qs}$ , les images des tensions statoriques dans le repère de PARK. Etant donné que le système n'est pas linéarisable exactement par bouclage statique, notre but est alors de trouver en premier lieu, une commande qui linéarise et découple partiellement le système, puis, en deuxième lieu, de commander les sorties du système ainsi linéarisé, en l'occurrence le flux rotorique et la vitesse du rotor.

Troisième étape voir l'influence d'une alimentation réelle de l'ensemble onduleur MLI - MAS sur les performances du système global déjà réglé.

### 3.2. Linéarisation partielle et découplage E/S

#### 3.2.1. Modèle du moteur

Considérons le modèle dynamique du moteur asynchrone (1-28) introduit au premier chapitre, exprimé dans un référentiel lié au champ tournant ( $\omega_a = \omega_s$ ). Si nous posons:

$x = [i_{ds} \ i_{qs} \ \psi_{dr} \ \psi_{qr} \ \omega_m]^T$ , le modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\gamma x_1 + \omega_s x_2 + \beta \rho x_5 x_4 + \eta \beta x_3 + \frac{U_{ds}}{\sigma L_s} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega_s x_1 - \gamma x_2 - \beta \rho x_5 x_3 + \eta \beta x_4 + \frac{U_{qs}}{\sigma L_s} \\ \frac{dx_3}{dt} &= (\omega_s - \rho x_5) x_4 - \eta x_3 + L_m \eta x_1 \\ \frac{dx_4}{dt} &= -(\omega_s - \rho x_5) x_3 - \eta x_4 + L_m \eta x_2 \\ \frac{dx_5}{dt} &= \alpha (x_3 x_2 - x_4 x_1) - \frac{C_r}{J} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pour des raisons de simplification, nous posons :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\gamma x_1 + \omega_s x_2 + \beta \rho x_5 x_4 + \eta \beta x_3 \\ f_2(x) &= -\omega_s x_1 - \gamma x_2 - \beta \rho x_5 x_3 + \eta \beta x_4 \\ f_3(x) &= (\omega_s - \rho x_5) x_4 - \eta x_3 + L_m \eta x_1 \\ f_4(x) &= -(\omega_s - \rho x_5) x_3 - \eta x_4 + L_m \eta x_2 \\ f_5(x) &= \alpha (x_3 x_2 - x_4 x_1) - \frac{C_r}{J} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$g_1 = \left[ \frac{1}{\sigma L_s} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad g_2 = \left[ 0 \ \frac{1}{\sigma L_s} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (3.3)$$

Il a été montré que le modèle (3.1.) constitué des deux courants statoriques, des deux flux rotoriques et de la vitesse du rotor n'était pas linéarisable exactement par bouclage statique (voir annexe1), quoiqu'une linéarisation partielle est possible.

### 3.2.2 Degré relatif vectoriel

En relation avec l'objectif de la commande, considérons les deux sorties et déterminons alors le degré relatif correspondant à chaque sortie :

**1<sup>ère</sup> sortie** :  $h_1(x) = x_5$

$$\frac{dh_1(x)}{dt} = \frac{dx_5}{dt} = f_5(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_1(x)}{dt^2} &= \frac{d^2 x_5}{dt^2} = \alpha (x_2 f_3(x) + x_3 f_2(x)) \\ &\quad - \alpha (x_4 f_1(x) + x_1 f_4(x)) \\ &\quad - \frac{\alpha}{\sigma L_s} (x_4 u_{ds} - x_3 u_{qs}) \end{aligned}$$

Ainsi, le degré relatif correspondant à la première sortie  $h_1(x)$  est égal à 2 ( $r_1 = 2$ ).

**2<sup>ème</sup> sortie** :  $h_2(x) = x_3^2 + x_4^2$

$$\frac{dh_2(x)}{dt} = \frac{d(x_3^2 + x_4^2)}{dt} = 2x_3 f_3(x) + 2x_4 f_4(x)$$

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dt^2} = \frac{d(2x_3 f_3(x) + 2x_4 f_4(x))}{dt} = -4\eta (x_3 f_3(x) + 2x_4 f_4(x))$$

$$+ 2L_m \eta (x_1 f_3(x) + x_3 f_1(x) + x_2 f_4(x) + x_4 f_2(x) + \frac{2L_m \eta}{\sigma L_s} (x_4 f_4(x)))$$

nous poserons par la suite :

$$f_6(x) = \alpha (x_2 f_3(x) + x_3 f_2(x) - x_4 f_1(x) - x_1 f_4(x))$$

$$f_7(x) = -4\eta (x_3 f_3(x) + x_4 f_4(x))$$

$$-2L_m\eta (x_1 f_3(x) + x_3 f_1(x) + x_4 f_1(x))$$

Le degré relatif correspondant à la deuxième sortie  $h_2(x) = x_3^2 + x_4^2$  est aussi égal à 2 ( $r_2 = 2$ ).

En conséquence, comme  $r_1 + r_2 = 4$  ( $r_1 + r_2 < n$ ), le système n'est pas linéarisable exactement par bouclage statique. Pour pouvoir le commander, il nous faut le linéariser en partie et vérifier que la dynamique des zéros associée est stable.

### 3.2.3. Forme normale

Dans le but de mettre le système sous forme normal, considérons la transformation de coordonnées non linéaire suivante [16], [17] :

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1(x) = x_5 \\ z_2 &= L_f h_1(x) = f_5(x) \\ z_3 &= h_2(x) = x_3^2 + x_4^2 \\ z_4 &= L_f h_2(x) = 2(x_3 f_3(x) + x_4 f_4(x)) \\ z_5 &= \text{Arctg}\left(\frac{x_4}{x_3}\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Où  $z_3$  est choisi de manière à compléter le difféomorphisme, avec  $L_g z_5 = 0$ . Par ailleurs, le Jacobien de cette transformation est donné par la matrice suivante :

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha x_4 & 0 & 2L_m\eta x_3 & 0 \\ 0 & \alpha x_3 & 0 & 2L_m\eta x_4 & 0 \\ 0 & \alpha x_2 & 2x_3 & 4f_3(x) - 2L_m\eta x_1 & \frac{-x_4}{x_3^2 + x_4^2} \\ 0 & -\alpha x_1 & 2x_4 & 4f_4(x) - 2L_m\eta x_2 & \frac{x_3}{x_3^2 + x_4^2} \\ 1 & 0 & 0 & 4px_3x_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Il nous faut alors, vérifier la propriété que le Jacobien de  $\Phi(x)$  est non nul. Dans ce but, calculons le déterminant de la matrice (3.5) :

$$\text{Det} \left( \frac{d\Phi(x)}{dx} \right) = -4L_m\eta\alpha (x_3^2 + x_4^2) \quad (3.6)$$

Il est non nul pour  $x_3^2 + x_4^2 \neq 0$  i.e.  $\psi_r^2 \neq 0$ , valeur qui est toujours vérifiée dès que le moteur est sous tension. En plus, il nous faut ajouter la condition pour garantir l'existence de la transformation inverse. Ainsi, la transformation de coordonnées inverse  $x = \Phi^{-1}(z)$  correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\cos(z_5)}{\sqrt{z_3}} \left( \frac{z_4 + 2\eta z_3}{2L_m\eta} \right) - \frac{\sin(z_5)}{\alpha\sqrt{z_3}} \left( z_2 + \frac{C_r}{J} \right) \\ x_2 &= \frac{\sin(z_5)}{\sqrt{z_3}} \left( \frac{z_4 + 2\eta z_3}{2L_m\eta} \right) + \frac{\cos(z_5)}{\alpha\sqrt{z_3}} \left( z_2 + \frac{C_r}{J} \right) \\ x_3 &= \sqrt{z_3} \cos(z_5) \\ x_4 &= \sqrt{z_3} \sin(z_5) \\ x_5 &= z_1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Finalement, la forme normale du système (3.1) est donnée par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_6(x) - \frac{\alpha}{\sigma L_s} (x_4 u_{ds} - x_3 u_{qs}) \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= f_1(x) + \frac{2L_m\eta}{\sigma L_s} (x_3 u_{ds} - x_4 u_{qs}) \\ \dot{z}_5 &= \frac{x_3 f_4 - x_4 f_3}{x_3^2 + x_4^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.2.4. Commande linéarisante

Avant de calculer la commande qui linéarise partiellement et découple le système, il nous faut calculer la matrice de découplage du système. Nous obtenons :

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f h_1(x) & L_{g2} L_f h_1(x) \\ L_{g1} L_f h_2(x) & L_{g2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma L_s} \begin{bmatrix} -\alpha x_4 & \alpha x_3 \\ 2L_m \eta x_3 & 2L_m \eta x_4 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Donc,  $A(x)$  est non singulière pour  $x_3^2 + x_4^2 \neq 0$  i. e.  $\psi_r^2 \neq 0$ , valeur qui est toujours vérifiée dès que le moteur est sous tension. Par ailleurs, l'inverse de cette matrice est égale à :

$$A^{-1}(x) = -\frac{\sigma L_s}{2L_m \eta \alpha (x_3^2 + x_4^2)} \begin{bmatrix} -2L_m \eta x_4 & \alpha x_3 \\ 2L_m \eta x_3 & \alpha x_4 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Finalement, la commande qui linéarise partiellement et découple le système (3.1) donné sous sa forme normale (3.8) est :

$$u = -A^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} + -A^{-1}(x) v \quad (3.11)$$

$$L_f^2 h_1(x) = f_6(x)$$

$$L_f^2 h_2(x) = f_7(x)$$

L'application de cette commande au système donné sous sa forme normale (3.8) nous fait aboutir au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= z_2 \\
 z_2 &= v_1 \\
 z_3 &= z_4 \\
 z_4 &= v_2 \\
 z_5 &= \frac{x_3 f_4(x) - x_4 f_3(x)}{x_3^2 + x_4^2} \Phi^{-1}(z)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Par conséquent, le système obtenu est constitué de deux parties (schéma bloc de la figure (3.1)) la première composé de deux sous systèmes linéaires et découplés, la seconde d'un système qui constitue la partie non linéaire et inobservable.

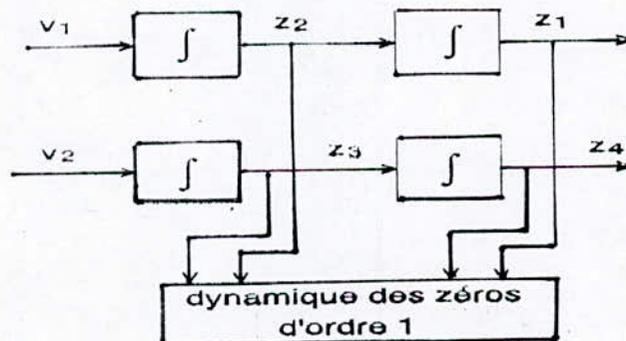


fig. III.1 système linéarisé partiellement et découplé.

### 3.3 Commande par placement de poles

Le retour d'état linéaire que nous allons injecter au système (3.12) est identique à celui introduit dans le deuxième chapitre (équation (2.14)). Le système en boucle fermée peut être représenté par le schéma de figure suivante :

De même, la matrice de transfert en boucle fermée du système, ainsi que les coefficients la caractérisants sont identiques à ceux introduits dans le deuxième chapitre.

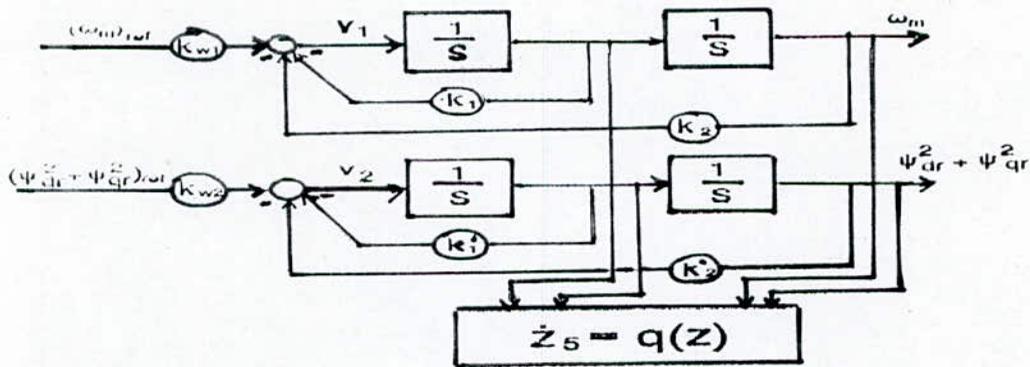


Fig. III.2 : Technique de commande par retour d'état en présence d'une dynamique des zéros d'ordre 1.

### 3.4 Résultats de simulation et commentaires :

Avec les mêmes consignes de réglage à savoir :

1500 tr/mn pour la vitesse et 0,3 wb pour le flux, la technique de commande par retour d'état similaire à celle introduite au chapitre précédent est adoptée pour le réglage des deux sous systèmes du modèle de la machine lié au repère synchrone. Ainsi, après des tests d'imposition de pôles par simulation, les résultats montrent que le bon placement est en relation avec le pic du courant admissible au démarrage, on choisi :  $P_{1,2} = -10 \mp j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \mp j$  pour le flux. La figure (3.1) nous donne une idée sur l'évolution de la dynamique des zéros qui reste stable et bornée, et ceci grâce au choix du difféomorphisme.

Pour mettre en vigueur l'efficacité de la commande on a relevé le comportement de la machine en présence d'une charge nominale au régime établi qui est rejetée immédiatement par le système.

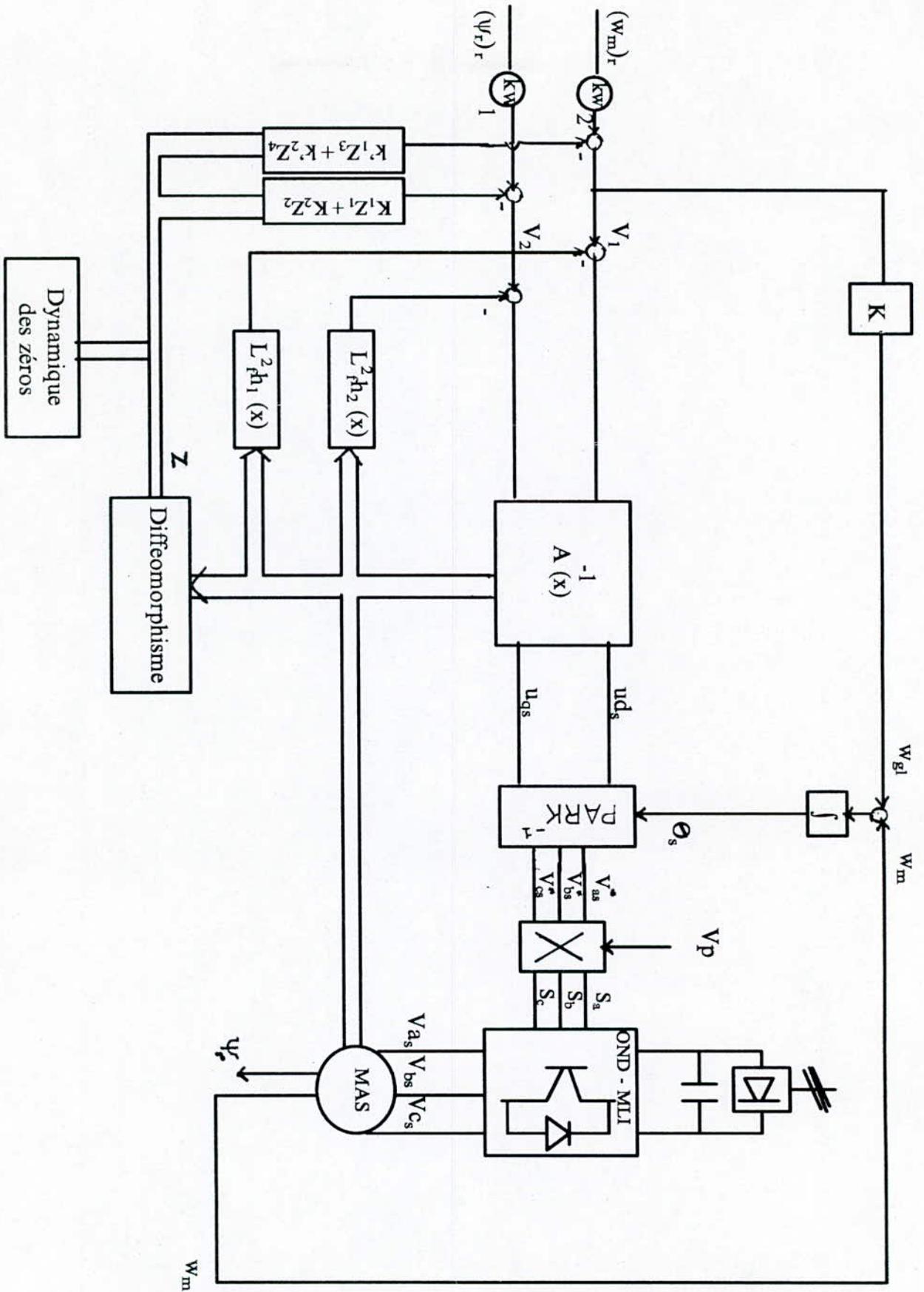


Fig. (III.3) Mise en oeuvre de l'algorithme de commande

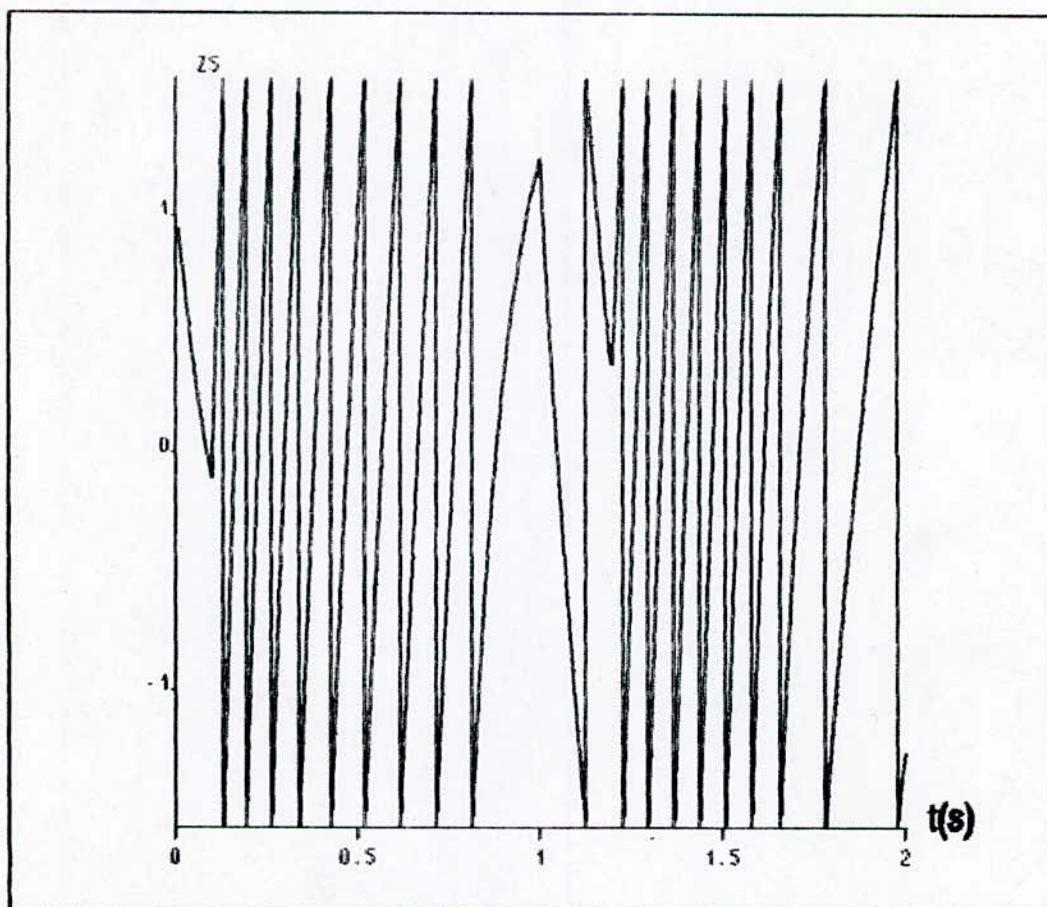


FIG.3.1: Evolution de la dynamique des zéros.

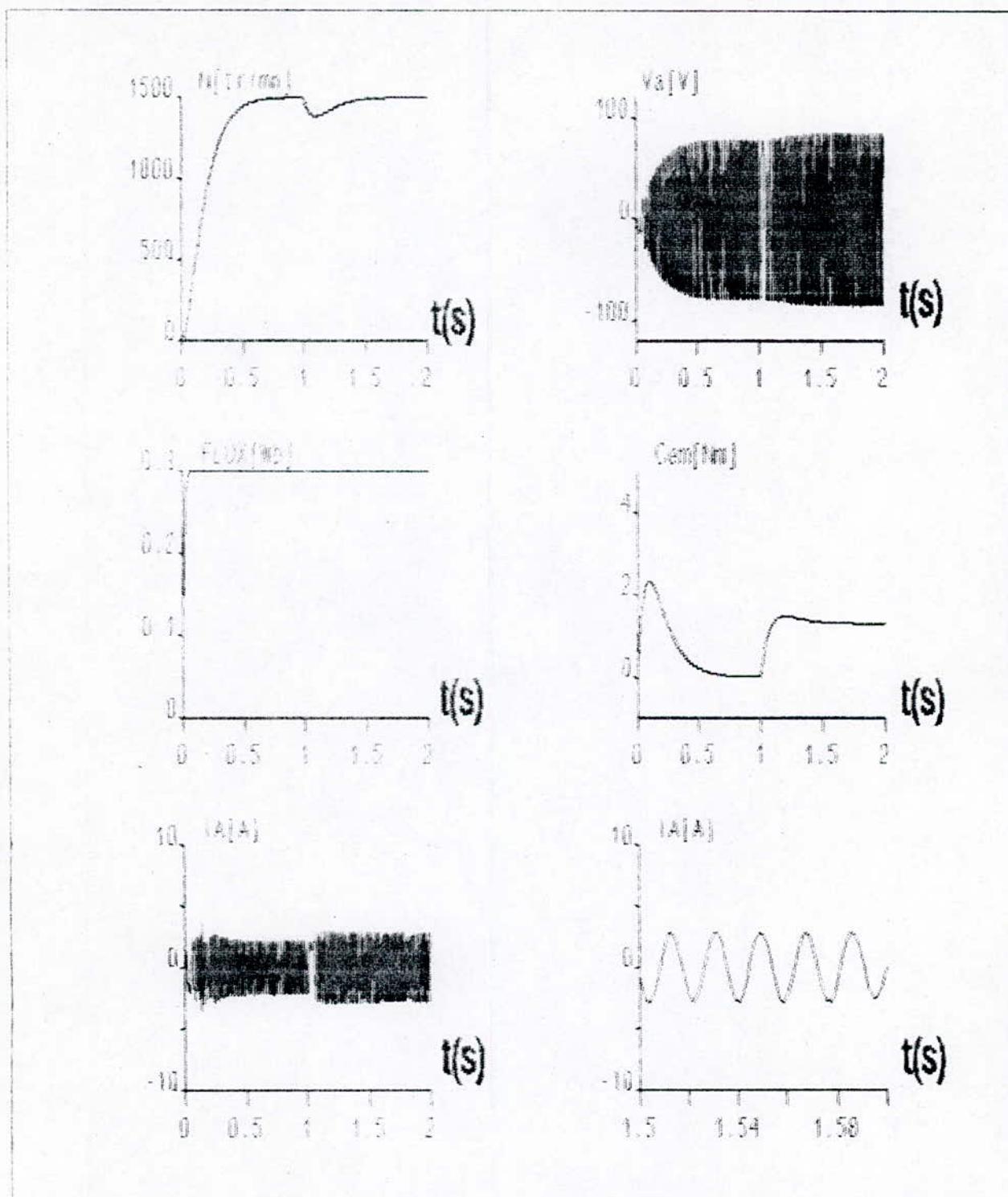


FIG.3.2: Evolution des grandeurs de la machine en présence d'une charge au régime établi.  $P_{1,2} = -10 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux.

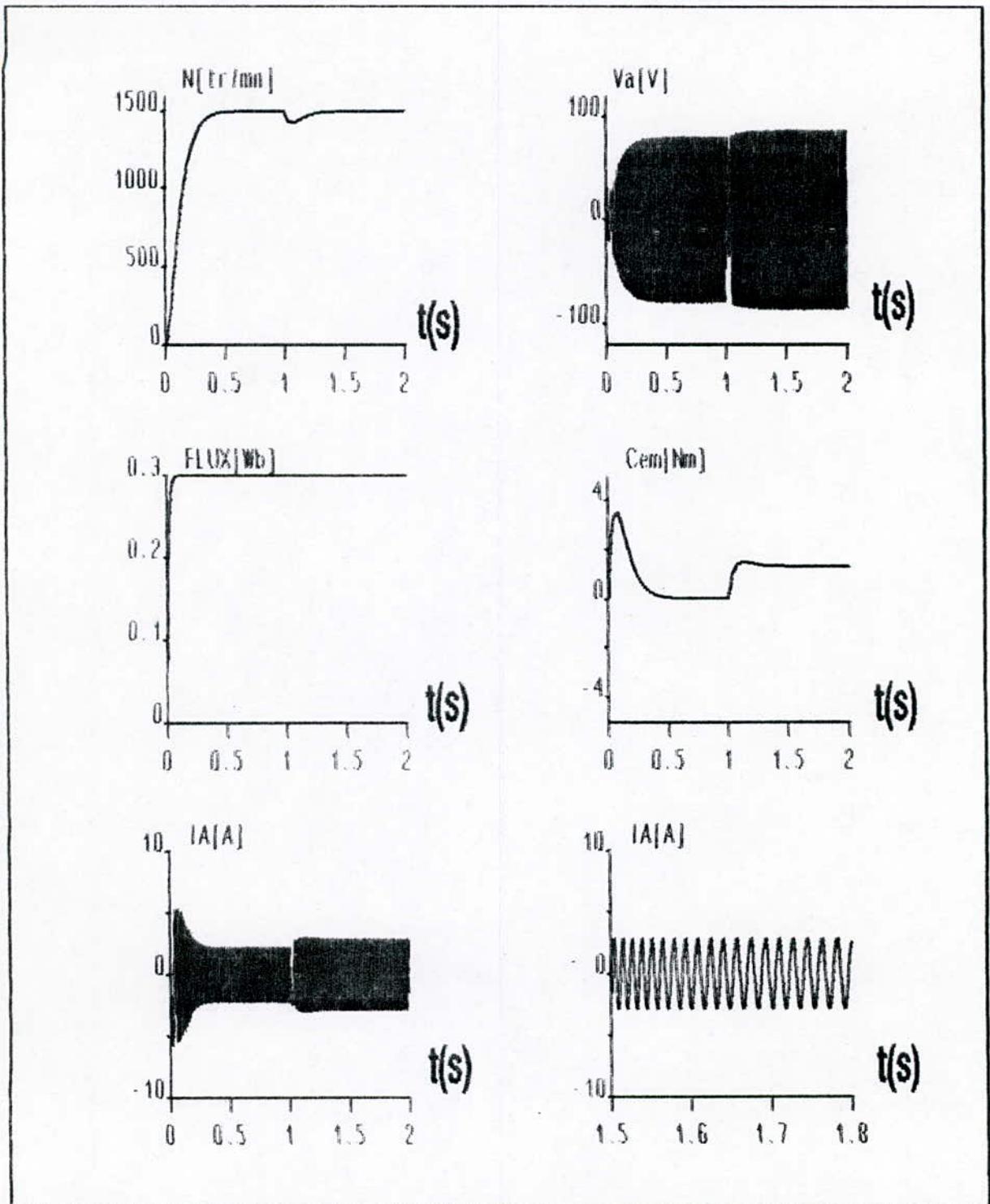


FIG.3.3: Evolution des grandeurs de la machine en présence d'une charge au régime établi.  $P_{1,2} = -15 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux

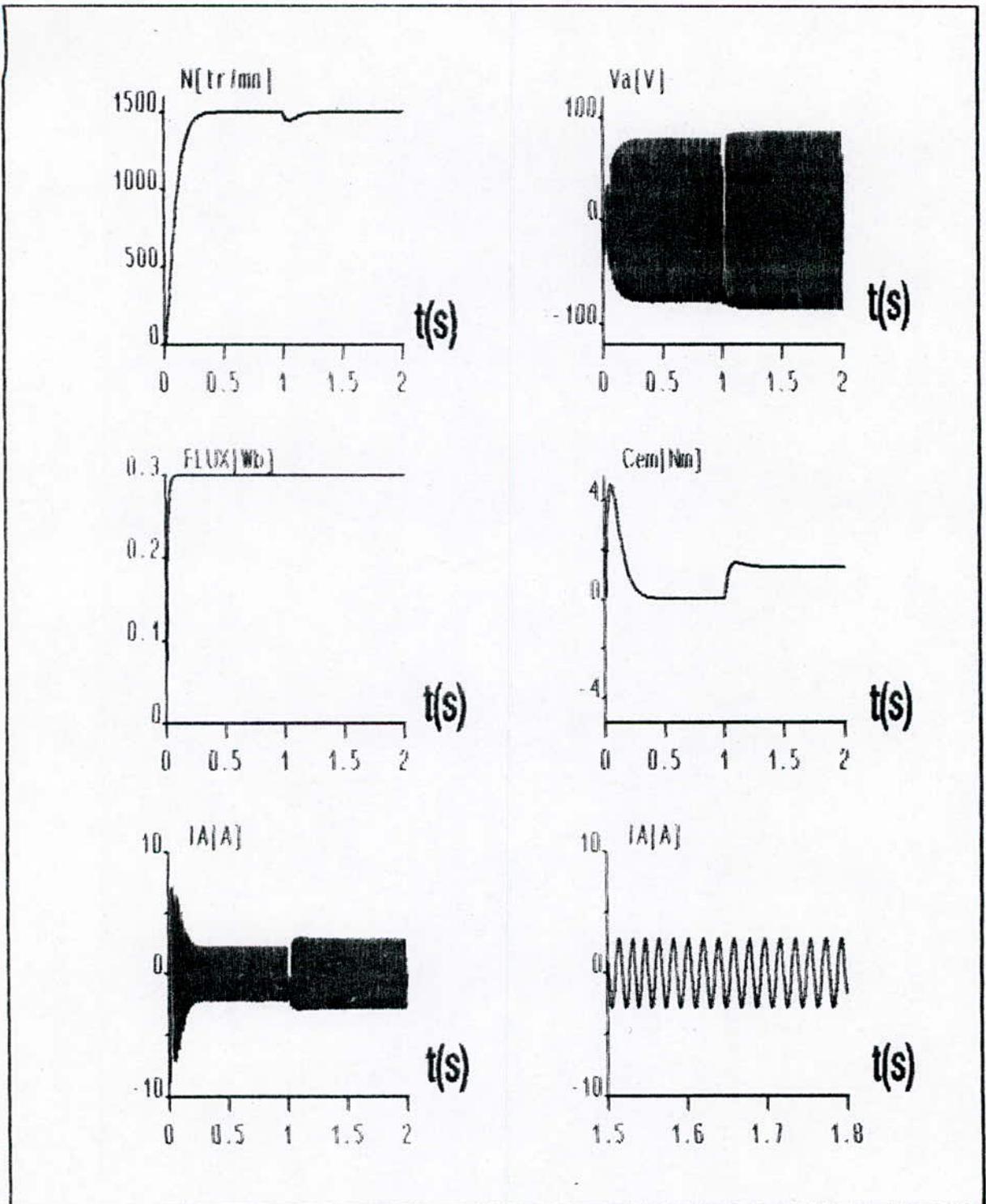


FIG.3.4: Evolution des grandeurs de la machine en présence d'une charge au régime établi.  $P_{1,2} = -20 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -100 \pm j$  pour le flux

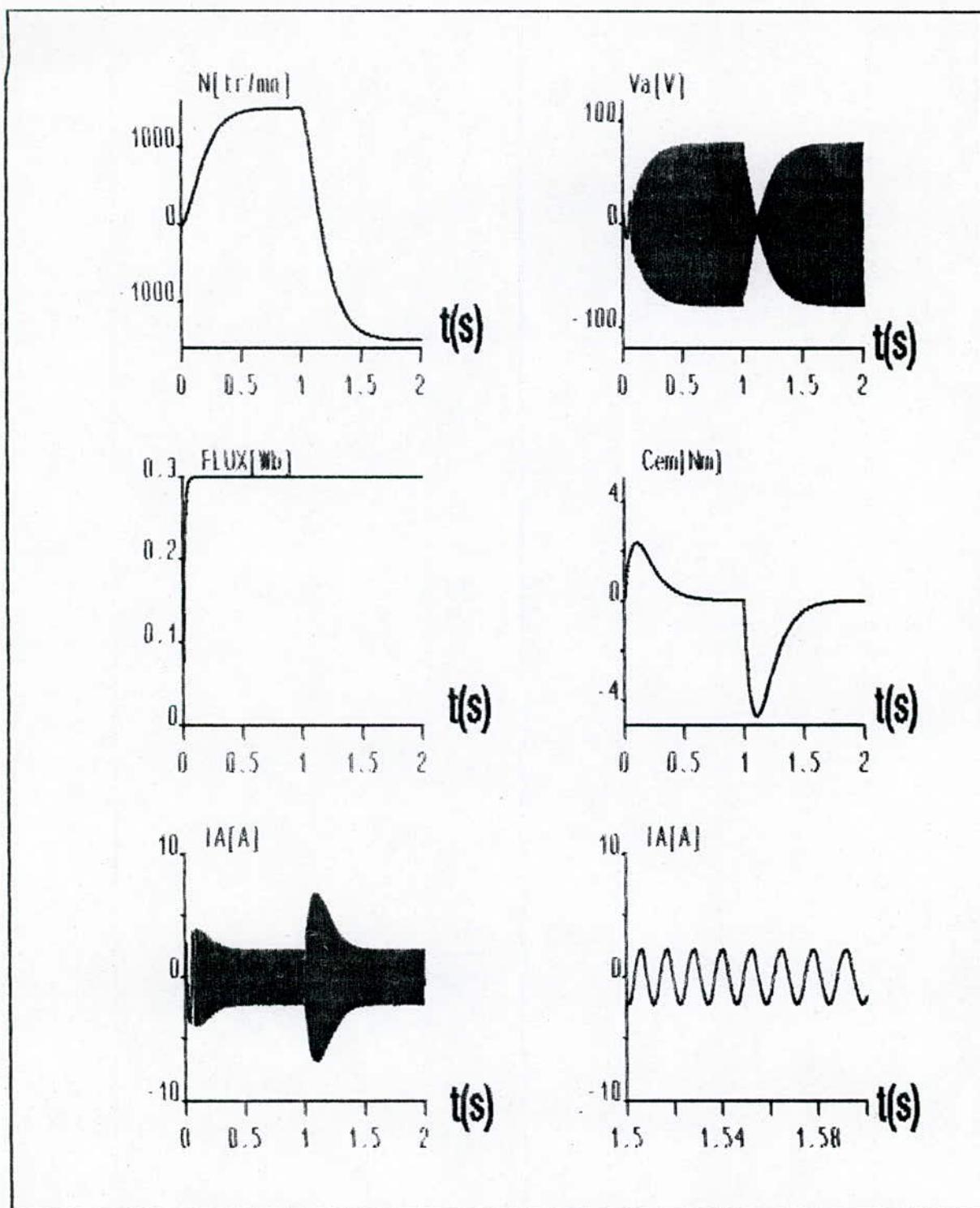


FIG.3.5: Evolution des grandeurs de la machine à un changement de consigne de vitesse à  $t=1$ s.

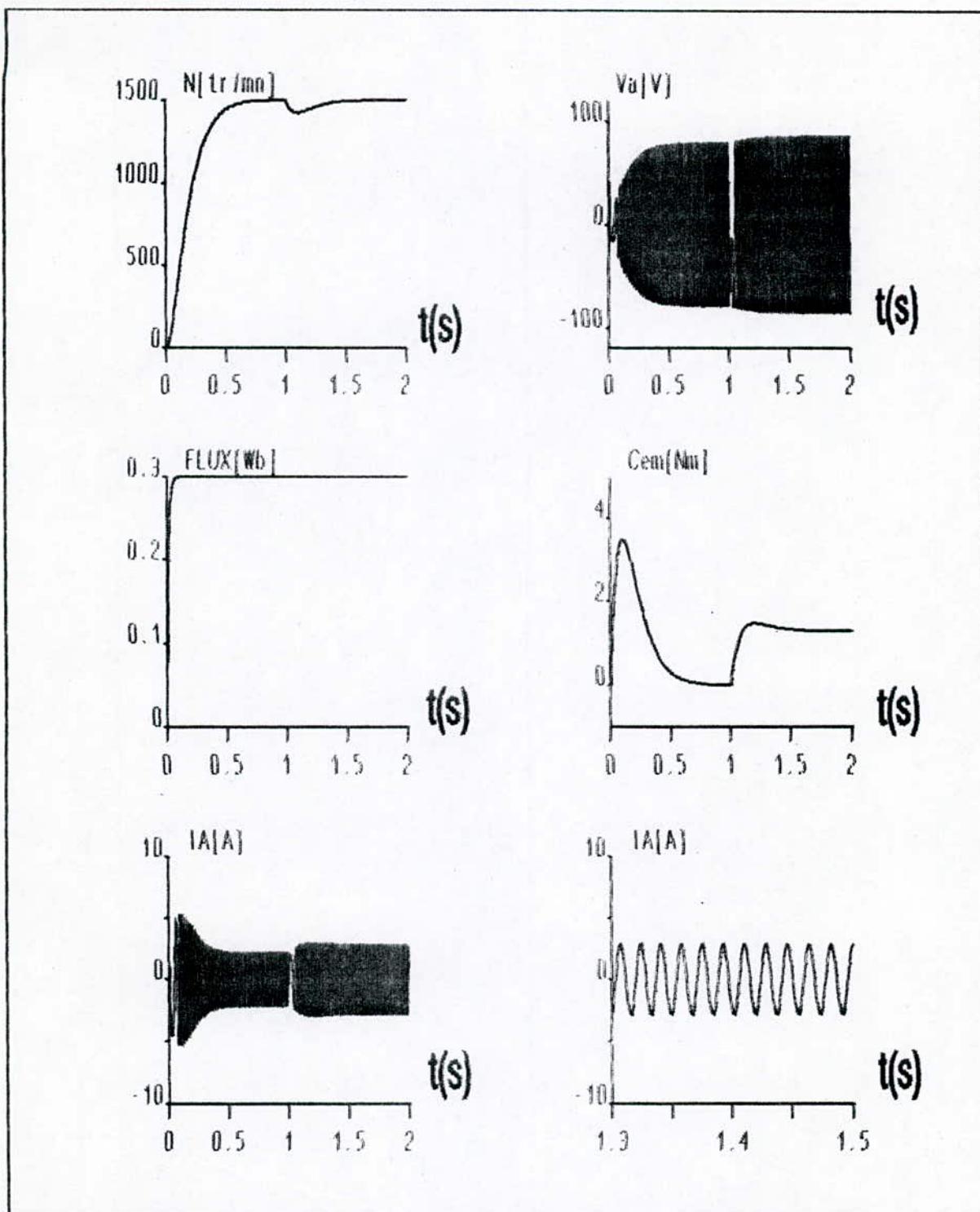


FIG.3.6: Effet d'une erreur de 50% de  $j$  sur l'évolution des grandeurs de la machine avec une charge nominale au régime établi.

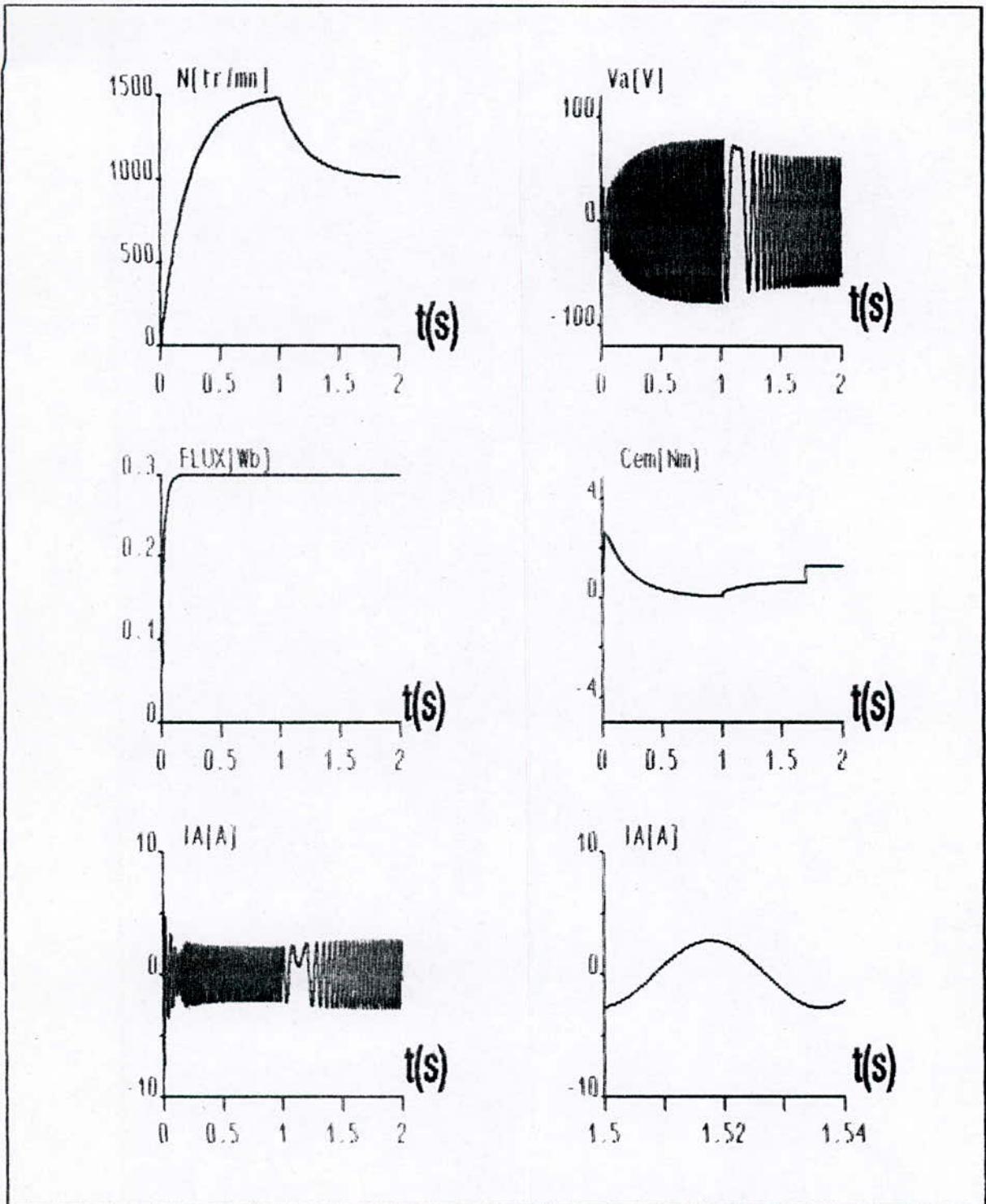


FIG.3.7: Effet d'une erreur de 50% de  $R_r$  sur l'évolution des grandeurs de la machine en présence d'une charge au régime établi.

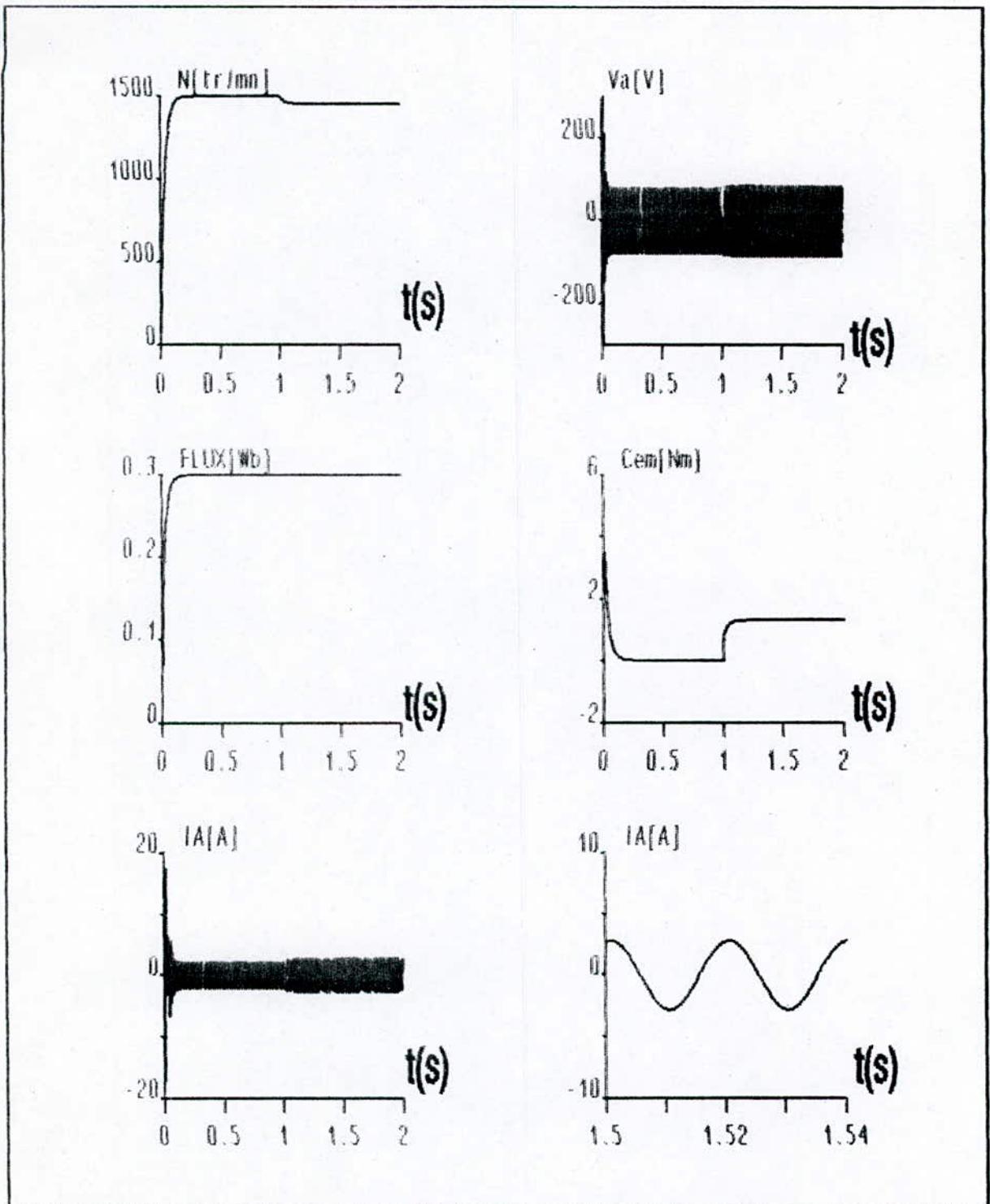


FIG. 3.8: Changement de pôles:  $P_{1,2} = -50 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -200 \pm j$  pour le flux avec charge au régime établi. L'erreur sur  $R_r$  est de 50%.

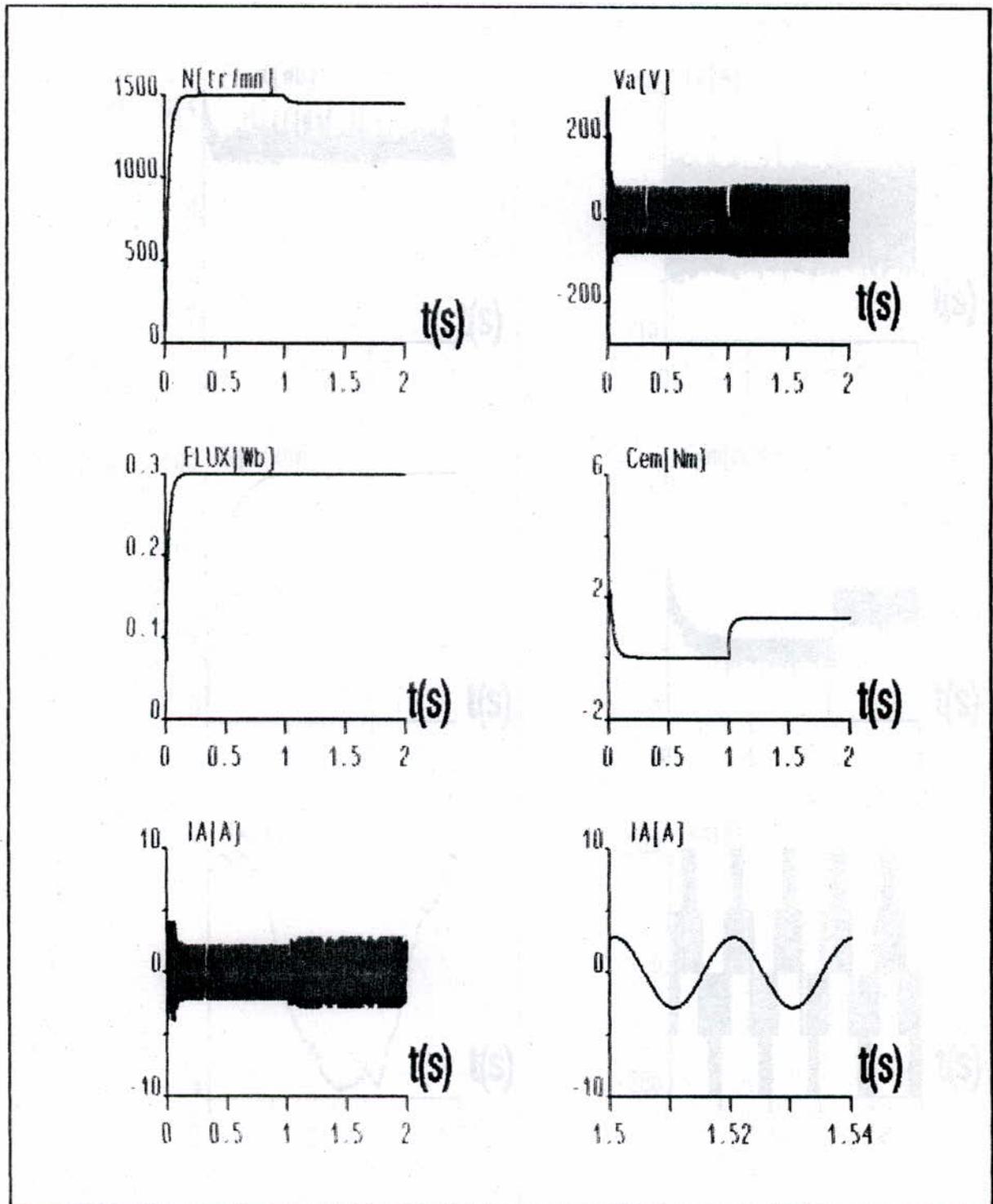


FIG. 3.9: Changement de pôles:  $P_{1,2} = -50 \pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2} = -200 \pm j$  pour le flux en présence d'une limitation en courant. L'erreur sur  $R_r$  est de 50%.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué au modèle du moteur exprimé dans le repère synchrone la technique de linéarisation partielle par retour d'état dynamique et difféomorphisme qui donne de bonnes performances. D'après les résultats de simulation, les pôles choisis pour la commande de vitesse et de flux permettent d'avoir des réponses d'une évolution assez rapide avec un pic de courant au démarrage qui reste acceptable, tout en rejetant une perturbation introduite au régime établi.

Une détérioration sur la réponse de vitesse a été constaté dès qu'il y a une variation sur la résistance rotorique, pour cela on a effectué un changement de pôles qui permet de surmonter ce problème, malheureusement pour ces paires de pôles choisis le pic du courant au démarrage demeure important, ce qui évoque la nécessité d'insérer une limitation. Enfin, une éventuelle mise en oeuvre similaire à celle du chapitre précédent a été présenté avec un algorithme d'implémentation de la commande.

## Chapitre 4

# COMMANDE NON LINEAIRE A ECHELLE DE TEMPS MULTIPLES

### 4.1 - Introduction

L'extension au cas discret [18,19, 20] ou sous discrétisation de résultats obtenus pour la commande de systèmes en temps continu est loin d'être évidente. Lorsque par exemple la mise en oeuvre numérique de lois de bouclage conçues sur des systèmes décrits par des équations différentielles est considérée, un schéma par simple échantillonnage et tenue (bloqueur d'ordre zero) de la commande continue, peut conduire à une perte de la propriété de stabilité du système continu en boucle fermée [29]. L'apparition de ces instabilités est fonction de la période d'échantillonnage  $\delta$  utilisée. Le système à commander peut être vu comme un système en boucle ouverte entre les instants d'échantillonnage. Ainsi, l'utilisation de périodes d'échantillonnage importantes par rapport à la dynamique du procédé, entraîne la perte de certaines propriétés structurelles conduisant à des instabilités et au non respect des objectifs de commande initialement fixés.

Une solution, employée dans le domaine linéaire, consiste à concevoir des schémas de commande numérique sur la base d'un modèle discret, le *discrétisé exact*, provenant de l'échantillonnage du procédé continu. Le système discrétisé exact est déterminé afin de reproduire exactement, aux instants d'échantillonnage, l'état du système en temps continu auquel il est associé, lorsque la commande est bloquée sur des intervalles d'amplitudes  $\delta$ . Dans le cas non linéaire, le calcul du *discrétisé exact* présente des difficultés particulières et conduit naturellement à la notion de discrétisation approchée. Ceci est analysé dans divers travaux parus dans la littérature à partir de [21].

Des problèmes intrinsèques à la discrétisation de systèmes non linéaires continus ont

été relevés par l'introduction en [22] de la notion de la *dynamique des zéros* pour les systèmes sous échantillonnage. A partir de cette notion, un résultat bien connu dans un contexte linéaire [28], est généralisé au cas non linéaire [23] ; à savoir, l'apparition sous discrétisation de zéros instables. Afin de maintenir, sous discrétisation, la stabilité de la *dynamique des zéros*, des lois de bouclage à échelle de temps multiples sur l'état sont conçues en [24], sur la base du *discrétisé exact*. Ces lois de bouclage se ramènent, dans le cas d'un *degré relatif* égal à un, à des bouclages par bloqueur d'ordre zero et termes correcteurs présentés en [25]. Les bouclages multi-échantillonnés se caractérisent par un échantillonnage plus rapide de la commande que de la mesure de l'état du système. Cette stratégie permet de maintenir, aux instants d'échantillonnage, les performances du système en temps continu [26]. En outre, il est possible de fixer et de satisfaire des objectifs de commande typiquement discrets ou même proposer des solutions à des problèmes qui n'en possèdent pas en temps continu. L'évolution du système entre les instants d'échantillonnage reste difficile à caractériser.

Le présent chapitre est organisé comme suit. On présente d'abord la technique de commande à échelle de temps multiples reposant sur le discrétisé exact d'un système non linéaire, ainsi que les propriétés d'invariance qu'elle confère à la boucle fermée. On la calcule ensuite dans le cas d'un système mono-entrée mono-sortie de degré relatif égal à  $r$ , afin de satisfaire l'objectif de la poursuite des trajectoires de référence désirées. Finalement, l'extension dans le cas multivariable, ainsi que l'utilisation d'une commande à échelles de temps multiples d'ordre égal à la dimension de l'état du système, lorsque le problème de la stabilisation du point d'équilibre est considérée, sont discutés.

## 4.2 - La commande à échelle de temps multiples

Dans la suite nous considérons le cas d'un système non linéaire analytique, mono-entrée mono-sortie, décrit par les équations suivantes:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

où le vecteur d'état  $x(t)$  est défini dans un ouvert  $M$  de  $R^n$ , la commande scalaire  $u(t) \in \mathbb{R}$  et la sortie scalaire  $y(t) \in \mathbb{R}$ .  $f$  et  $g$  sont des champs de vecteur analytique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $h$  est une fonction analytique de  $R^n$  dans  $R$ .

### 4.2.1 - Le discrétisé exact

Dans ce paragraphe, nous allons donner une représentation par espace d'état en temps discret qui reproduit, aux instants d'échantillonnage, le comportement entrée-état (et donc le comportement entrée-sortie) d'un système continu commandé par des commandes constantes sur la période d'échantillonnage  $\delta$ . Plus précisément, la commande utilisée est de la forme :

$$u(t) = u(k), \quad k\delta \leq t \leq (k+1)\delta, \quad k > 0 \quad (4.2)$$

**Proposition 1 ([21])** *Etant donné un système continu  $\Sigma$  décrit par l'équation (4.1) et commandé par (4.2), le système en temps discret suivant, noté  $\Sigma_D$ , est appelé le discrétisé exact :*

$$(\Sigma_D) : \begin{cases} x_D(k+1) = F^\delta(\delta, x_D(k)), u(k) = e^{\delta(L_f + u(k)L_g)} (Id) |_{X_D(k)} \\ y_D(k) = h(x_D(k)) \end{cases} \quad (4.3)$$

Pour  $\delta \in [0, \delta_0]$  et pour la même initialisation ( $x_D(0) = x(0)$ ),  $\Sigma_D$  reproduit aux instants d'échantillonnage  $t = k\delta$ ,  $k \geq 1$  le comportement entrée-état du système continu  $\Sigma$  ( $x_D(k) = x(k)$ ,  $k \geq 1$ ) et donc son comportement entrée-sortie.

#### 4.2.2. Invariance de la distribution d'inobservabilité aux instants d'échantillonnage, par commande non linéaire à échelles de temps multiples

On suppose dans la suite, que le degré relatif associé au système continu (4.1) est égal à  $r$ , ce qui s'explique comme suit :

$$\begin{aligned} L_g h &= L_g L_f h = \dots = L_g L_f^{r-2} h \equiv 0 \\ L_g L_f^{r-1} h &\neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous allons montrer, que lorsqu'un système continu sous bouclage continu qui le linéarise se caractérise par un degré relatif  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ), afin de reproduire son comportement entrée-sortie aux instants d'échantillonnage avec un bouclage échantillonné, une condition suffisante est la reproduction à chaque pas de la sortie ainsi que de ses  $r - 1$  premières dérivées. On remarque ici que cette reproduction est seulement une condition suffisante et non nécessaire. En effet, il a été montré en [25, 27], qu'il est possible à l'aide

de termes correcteurs ajoutés à la commande continue bloquée pendant la période  $\delta$ , de trouver un bouclage échantillonné afin de faire coïncider aux instants d'échantillonnage la sortie du système continu avec bouclage échantillonné, avec celle du système continu avec bouclage continu; ceci s'effectue sans reproduction des dérivées de la sortie.

Les rappels qui suivent sont principalement issus de [24], et montrent que la stratégie précédemment énoncée (reproduction de la sortie et de ses  $r - 1$  premières dérivées), permet aussi de maintenir sous discrétisation l'invariance de la distribution d'inobservabilité du système en temps continu.

#### 4.2.2.1 - Linéarisation entrée-sortie avec consigne externe constante par morceaux

Le système (4.1) ayant un degré relatif  $r$ , la dérivée d'ordre  $r$  de la sortie est la première dérivée dépendant de l'entrée :

$$y = h(x)$$

$$\dot{y} = L_f h(x)$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x)$$

$$y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x)$$

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u \quad (4.5)$$

La dernière équation de (4.5) correspond au comportement entrée-sortie du système en temps continu. La loi de commande non linéaire:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-L_f^r h(x) + v) \quad (4.6)$$

qui existe grâce à la définition du degré relatif, linéarise le comportement entrée-sortie:

$$y^{(r)}(t) = v(k) \quad (4.7)$$

où l'on suppose que  $v$  est tenu constant pendant la période d'échantillonnage. A partir

l'erreur aux instants d'échantillonnage, il suffit de reproduire à tous les instants la sortie du système continu bouclé ainsi que ses  $r - 1$  premières dérivées.

Le comportement entrée-sortie ( dernière équation de (4.5)), du système (4.1), représente la partie observable, une partie de dimension  $n - r$  étant rendu inobservable par la sortie. Pour reproduire alors la sortie du système continu à tous les pas  $t = k\delta$ , il suffit de reproduire à chaque pas l'état observable  $(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})$  de ce système.

#### 4.2.2.3 - La dynamique des zéros des systèmes non linéaires sous multi-échantillonnage

Dans le domaine linéaire, l'emplacement des pôles et des zéros d'un système, joue un rôle fondamental dans différentes techniques pour la conception de systèmes de commande. Sous échantillonnage (transformation en  $z$ ), les pôles  $p_i$  d'un système continu, sont transformés comme :

$$P_i \rightarrow e^{P_i \delta} \quad (4.13)$$

où  $\delta$  est la période d'échantillonnage. L'image du demi-plan-gauche sous une telle transformation, est le disque unitaire (préservation de la stabilité). En revanche, la caractérisation de zéros obtenus après échantillonnage d'un système continu par bloqueur d'ordre zéro, n'est pas aisée. Le caractère de déphasage minimal n'est généralement pas préservé et est fonction à la fois de la période d'échantillonnage et du schéma de discrétisation utilisé. L'apparition de zéros instables sous échantillonnage est un phénomène fréquent. En effet, lorsque l'échantillonnage s'effectue par bloqueur d'ordre zéro et pour des périodes d'échantillonnage suffisamment petites, un système linéaire de degré relatif  $r \geq 2$  comporte toujours des zéros instables; [15]

Le même cas de figure est aussi rencontré dans le cas de système non linéaire, où l'on note une augmentation de la dimension de la dynamique inobservable sous discrétisation par bloqueur d'ordre zéro [23, 26]. En effet, la sortie du *discrétisé exact* s'écrit :

$$\begin{aligned} y_D(k+1) &= h \circ x_D(k+1) = h \circ e^{\delta(L_f + u(k)L_g)(Id)} \Big|_{x_D(k)} \\ &= e^{\delta(L_f + u(k)L_g)(h)} \Big|_{x_D(k)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

De la définition du *degré relatif*, on déduit que dans le développement en série de (4.14), la commande apparaît la première fois dans le terme :

$\frac{\delta^r}{r!} (L_f^+ u(k) L_g) \circ L_f^{r-1} h|_{x_D}(k)$  et que clairement, le *degré relatif* associé à la sortie  $y_D(k)$

est égal à un. On note alors sous discrétisation par bloqueur d'ordre zéro, l'augmentation de la dimension de la dynamique inobservable qui passe de  $n - r$  à  $n - 1$ . De plus, la *dynamique des zéros*, associée à cette dynamique inobservable, est instable en général [23].

Il s'agit de diviser la période d'échantillonnage en  $r$  sous intervalles d'amplitude

$\delta = \frac{\delta}{\rho}$  et d'appliquer sur chacun de ces sous intervalles, une certaine loi de com-

mande  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , calculée de façon à reproduire la sortie et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r - 1$  aux instants d'échantillonnage ( l'état du système étant toujours mesuré à chaque période d'échantillonnage  $\delta$ ). Les  $r$  commandes  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , donnent les degrés de liberté suffisants pour pouvoir reproduire aux instants d'échantillonnage les variables  $y$ ,  $y^{(i)}$ , ...,  $y^{(r-1)}$ . De l'analyse faite précédemment, on déduit les propriétés d'invariance. En considérant un système fictif multi-entrée multi-sortie, ayant les  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  comme ses entrées et  $y$ ,  $y^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq r - 1$  comme ses sorties (un degré relatif égal à un est associé à chaque sortie fictive), on a alors un degré relatif total égal à  $r$  et l'on maintient ainsi la même dimension pour la partie inobservable.

Le fait que l'on revient sur l'hypersurface sur laquelle évolue la dynamique des zéros, aux instants d'échantillonnage, (quand on choisit les  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  et les conditions initiales pour annuler identiquement la sortie), ne permet pas de conclure quant à la stabilité de cette dynamique. Ceci sera discuté plus longuement dans la suite de ce chapitre.

#### 4.2.2.4 Calcul de la commande à échelle de temps multiples

On va calculer dans ce paragraphe les commandes  $u_i$ ,  $1 < i < r$  assurant des comportements désirés pour la sortie du système continu ainsi que ses dérivées sous multi-échantillonnage. Le système continu sera en effet commandé par une commande à échelles de temps multiples de la forme:

$$u(t) = u_i(k), \left(k + \frac{i-1}{r}\right) \delta \leq t \leq \left(k + \frac{i}{r}\right) \delta, \quad 1 \leq i \leq r \quad (4.15)$$

On utilise dans la suite l'indice "c" pour les variables se référant au système continu bouclé par une commande continue et des variables sans indice se référant au système

continu bouclé par une commande à échelle de temps multiples.

La commande (4.15) étant constante dans des intervalles d'amplitude  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{r}$

on déduit que l'état  $(x(k+1)\delta) = x_{k+1}$  du système continu commandé par une commande à échelles de temps multiples à l'instant  $t = (k+1)\delta$  (comme fonction de son état  $x(k\delta) = x_k$  à l'instant  $t = k\delta$ ), est donné par l'équation:

$$x_{k+1} = e^{\delta(Lf+u_1(k)Lg)} \circ e^{\delta(Lf+u_2(k)Lg)} \circ \dots \circ e^{\delta(Lf+u_r(h)Lg)} (Id) | x_k \tag{4.16}$$

Il s'agit ici de la composée itérée  $r$  fois d'exponentielles formelles de la forme (4.3), chacune d'entre elles étant soumises aux commandes successives et constantes  $u_1, \dots, u_r$  appliquées pendant les  $r$  sous périodes d'échantillonnage  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{r}$  respectivement. Utilisant la propriété de l'opérateur exponentiel, rappelée précédemment, et en notant avec  $y^{(i)}_{k+1}$  la quantité  $y^{(i)}(t)|_{t=(k+1)\delta}$  on déduit que les fonctions  $y, y^{(i)} = L^i f h, 1 \leq i \leq r-1$ , sont données par les expressions suivantes, à l'instant  $t = (k+1)\delta$ , lorsque le système (4.1) est commandé par (4.15) (voir la Fig 4.2).

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= e^{\delta(Lf+u_1(k)Lg)} \circ e^{\delta(Lf+u_2(k)Lg)} \circ \dots \circ e^{\delta(Lf+u_r(h)Lg)} (Id) | x_k \\ \dot{y}_{k+1} &= e^{\delta(Lf+u_1(k)Lg)} \circ e^{\delta(Lf+u_2(k)Lg)} \circ \dots \circ e^{\delta(Lf+u_r(h)Lg)} (L_f h) | x_k \\ y_{k+1}^{(r-1)} &= e^{\delta(Lf+u_1(k)Lg)} \circ e^{\delta(Lf+u_2(k)Lg)} \circ \dots \circ e^{\delta(Lf+u_r(h)Lg)} (L_f^{r-1} h) | x_k \end{aligned} \tag{4.17}$$

On souhaite reproduire aux instants d'échantillonnage le comportement (sortie et ses dérivées) du système continu (4.1) bouclé par (4.6), (4.9) (Fig 4.1), avec une commande discrète  $\gamma_D(x(k))$  du type (4.15) ( Fig 4.2). Pour cela on calcule la commande  $\gamma_D(x(k))$  à échelles de temps multiples de telle sorte que les système  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  aient, aux instants d'échantillonnage, les même sorties et les même dérivées de sortie jusqu'à l'ordre  $r-1$ :

$$y_{c,k} = y_k, \quad y_{c,k}^{(i)} = y_k^{(i)}, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq r-1 \tag{4.18}$$

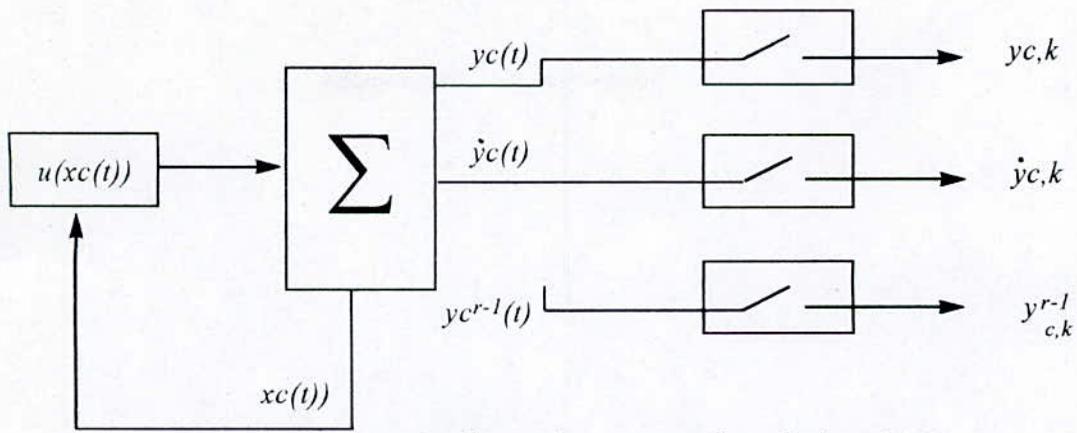


Figure 4.1:  $\Sigma_1$  système continu bouclé discrétisé

Leurs états seront en général différents aux instants d'échantillonnage ( $x_{c,k} \neq x_k$ ). On considère que les systèmes sont initialisés au même état  $x_{c,0} = x_0 = x(t=0)$ . Les équations (4.17) ont alors été déduites de la Fig. 4.2 en substituant au système  $\Sigma$  sont *discrétisé exact* (qui reproduit l'état et donc la sortie et ses dérivées, aux instants d'échantillonnage).

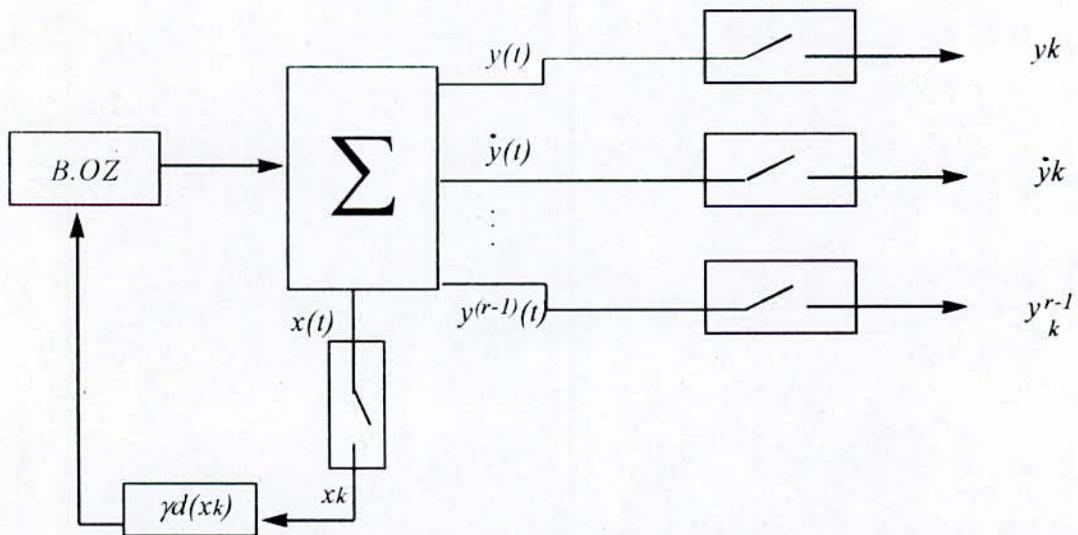


Figure 4.2:  $\Sigma_2$  système continu bouclé par commande à échelles de temps multiples

Lorsque le problème de la poursuite asymptotique d'une trajectoire de référence est considérée, le comportement, aux instants  $t = k\delta$  du système  $\Sigma_1$  est donné par:

$$\begin{pmatrix} y_{c,k+1} \\ y_{c,k+1} \\ \vdots \\ y_{c,k+1}^{(r-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{M,k} \\ y_{M,k} \\ \vdots \\ y_{M,k}^{(r-1)} \end{pmatrix} + e^{\delta A} \begin{pmatrix} y_{c,k} - y_{M,k} \\ y_{c,k} - y_{M,k} \\ \vdots \\ y_{c,k}^{(r-1)} - y_{M,k}^{(r-1)} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_r & -\alpha_{r-1} & -\alpha_{r-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad 4.20$$

L'égalisation des membres de droite des équations (4.17) et (4.18) ( $y_{ck} = y_k$ ,  $y^{(i)}_{ck} = y^{(i)}_k$ ,  $1 \leq i \leq r - 1$ ,  $\forall k \geq 1$ ), permet de déterminer les commandes qui assurent la reproduction aux instants d'échantillonnage de la sortie du système continu bouclé par commande continue ainsi que de ses dérivées (reproduction du comportement considéré comme idéal).

#### 4.2.2.5 Recherche d'une solution

L'existence d'une solution, est une conséquence du théorème des fonctions implicites. [28] En effet, l'équation :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+1}^{(r-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{M,k} \\ y_{M,k} \\ \vdots \\ y_{M,k}^{(r-1)} \end{pmatrix} = e^{\delta A} \begin{pmatrix} y_k - y_{M,k} \\ y_k - y_{M,k} \\ \vdots \\ y_k^{(r-1)} - y_{M,k}^{(r-1)} \end{pmatrix} \\ & = \psi(\delta, x_k, y_{M,k}, \dots, y_{M,k}^{(r-1)}) \\ & = \begin{pmatrix} e^{\delta(Lf+u_1(k)Lg)} \circ e^{\delta(Lf+u_2(k)Lg)} \circ \dots \circ e^{\delta(Lf+u_r(k)Lg)(h)} x_k \\ e^{\delta(Lf+u_1(k)Lg)} \circ e^{\delta(Lf+u_2(k)Lg)} \circ \dots \circ e^{\delta(Lf+u_r(k)Lg)(L/h)} x_k \\ \vdots \\ e^{\delta(Lf+u_1(k)Lg)} \circ e^{\delta(Lf+u_2(k)Lg)} \circ \dots \circ e^{\delta(Lf+u_r(k)Lg)(L^{r-1}/h)} x_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{M,k} \\ y_{M,k} \\ \vdots \\ y_{M,k}^{(r-1)} \end{pmatrix} \quad (4.21) \end{aligned}$$

admet pour  $\delta \in [0, \delta_0]$  une solution de la forme:

$$u_i(k) = u_{i0} + \sum_{j \geq 1} \delta^j u_{ij} \quad 1 \leq i \leq r \quad (4.22)$$

En substituant (4.22), dans (4.21), on obtient (pour un système de degré relatif  $r$ ) l'expression suivante :

$$\psi(\delta, x_k, y_{M,k}, \dots, y_{M,k}^{(r-1)}) = \sigma(\delta, x_k) + L_g L_f^{-1} h \Delta \delta u_0$$

$$+ \sum_{i \geq 1} \left\{ \delta^i L_g L_f^{r-1} h \Delta^\delta u_i + \rho_i(\delta, x_k, u_0, \dots, u_{i-1}) \right\} \quad (4.23)$$

avec les vecteurs suivants  $u_i$ , qui contiennent les composantes des commandes  $u_1, \dots, u_r$ , d'ordre  $i$ , multipliant  $\delta^i$  dans l'équation (4.22) :

$$u^T_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ri}), \quad i \geq 0 \quad (4.24)$$

$$\left[ \begin{array}{l} (h|_{x_k} - y_{M,k}) + r \delta L_f h|_{x_k} + r^2 \frac{\delta^2}{2!} L_f^2 h|_{x_k} + \dots + r^r \frac{\delta^r}{r!} L_f^r h|_{x_k} \\ (L_f h|_{x_k} - y_{M,k}) + r \delta L_f^2 h|_{x_k} + \dots + r^{r-1} \frac{\delta^{r-1}}{(r-1)!} L_f^{r-1} h|_{x_k} \\ (L_f^{r-1} h|_{x_k} - y_{M,k}^{(r-1)}) + r \delta L_f^r h|_{x_k} \end{array} \right] \quad 4.25$$

On explicite maintenant les termes qui apparaissent dans l'équation (438) on a :

En notant par  $\rho_{lj}$ ,  $1 \leq j \leq r$ , l'élément  $j$  du vecteur  $\rho_l$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_{lj}(\delta, x_k, u_0) &= \frac{\delta^{r+2-j}}{(r+2-j)!} \sum_{i=0}^{r-1} \left\{ (i+1)^{r+2-j} - C_{r+2-j}^0 i^{r+2-j} \right. \\ &\quad \left. - C_{r+2-1}^1 i^{r+1-j} \right\} (L_f + u_{r-1,0} L_g)^{o2} L_f^{r-1} h \\ &\quad + \frac{\delta^{r+2-j}}{r+1-j} \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{i=1}^j \left\{ i^{r+1-j} \right. \\ &\quad \left. - (i-1)^{r+1-j} \right\} (L_f + u_{r-k,0} L_g)^o (L_f + u_{r-(i-1)} L_g) L_f^{r-1} h, \quad 1 \leq j \leq r \end{aligned}$$

avec la notation  $C_m^n = \frac{m!}{m!(m-n)!}$ ,  $C_m^0 = 1$ ,  $C_m^1 = m$ ,  $C_m^m = 1$ .

Des formules analogues peuvent s'obtenir pour les termes  $\rho_i(\delta, x_k, u_0, \dots, u_{i-1})$ ,  $i \geq 2$  aussi.

La matrice  $\Delta^\delta$ , a l'expression suivante :

$$\Delta^\delta = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\delta^r}{r!} [r^r - (r-1)^r] & \frac{\delta^r}{r!} [(r-1)^r - (r-2)^r] & \dots & \frac{\delta^r}{r!} [2^r - 1] & \frac{\delta^r}{r!} \\ \frac{\delta^{r-1}}{(r-1)!} [r^{r-1} - (r-1)^{r-1}] & \frac{\delta^{r-1}}{(r-1)!} [(r-1)^{r-1} - (r-2)^{r-1}] & \dots & \frac{\delta^{r-1}}{(r-1)!} [2^{r-1} - 1] & \frac{\delta^{r-1}}{(r-1)!} \\ \frac{\delta^2}{2!} [r^2 - (r-1)^2] & \frac{\delta^2}{2!} [(r-1)^2 - (r-2)^2] & & \frac{\delta^2}{2!} [2^2 - 1] & \frac{\delta^2}{2!} \\ \delta & \delta & & \delta & \delta \end{array} \right] \quad (4.27)$$

Proposition 2 la matrice  $\Delta^\delta$  est toujours non singulière.

Proposition 3 (24) si le degré relatif associé au système continu est égal à  $r$ , on peut alors trouver une commande de la forme (4.37) qui reproduit aux instants d'échantillonnage la sortie et les  $r - 1$  premières dérivées de la sortie du système continu soumis à la loi de bouclage linéarisante continue.

En pratique, on se limite à des développements approchés jusqu'à un certain ordre en  $\delta$  dans (4.38) et l'on peut ainsi reproduire les objectifs de commande désirés jusqu'à un ordre fixé en  $\delta$ . la validité de ces modèles tronqués est sujette à la valeur de  $\delta$  utilisée.

Concernant maintenant la stabilité de la partie inobservable, il a été montrée en [24], que pour des systèmes linéaires à déphasage minimal, le discrétisé à échelles de temps multiples est aussi à déphasage minimal pour une période d'échantillonnage  $\delta$  adéquate. Les auteurs ont aussi montré, que si un système continu non linéaire est *hyperboliquement à déphasage minimal*, le système discrétisé à échelles de temps multiples est localement hyperboliquement à déphasage minimal. En [25], le maintien de la propriété de déphasage minimal sous discrétisation, pour un système non linéaire ayant un zéro à l'infini (degré relatif égal à un) a été montré.

Remarques :

1. On note, que lorsque le degré relatif associé au système (4.1) est égal à un, on n'a pas besoin d'un schéma à échelles de temps multiples. Le cas échéant, une commande discrète avec de termes correcteurs, proposée en [25] assure la reproduction aux instants d'échantillonnage de la sortie du système et le maintien de l'invariance de la distribution d'inobservabilité.

2. On note aussi qu'une commande à échelles de temps multiples d'ordre  $n$ , pourrait être utilisée afin de reproduire aux instants d'échantillonnage  $y, y', \dots, y^{(r-1)}$  ainsi que l'état inobservable du système continu. On pourrait assurer ainsi le maintien de la stabilité de cette dynamique inobservable pour des systèmes continus à déphasage minimal.

### 4.3 - LE CAS MULTIVARIABLE

Les schémas de commande discrète proposés ci-dessus, peuvent être étendus dans le cas des systèmes multivariables, de la forme :

$$= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (4.13)$$

$$y_i = h_i(x), 1 \leq i \leq m.$$

qui sont linéarisables du point de vue entrée-sortie avec une dynamique des zéros asymptotiquement stable.

En effet, supposons que dans ce cas le degré relatif associé à chaque sortie  $y_i$ , est égal à  $r_i$  et que :

$$\sum_{i=1}^m r_i = r \leq n \quad 4.29$$

Dans ce cas, un schéma de commande à échelles de temps multiples peut être utilisé en temps discret, afin de reproduire aux instants d'échantillonnage, le comportement du schéma continu bloqué. Comme dans le cas mono-entrée mono-sortie, on doit reproduire ici les sorties  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $r_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Il s'agit de reproduire aux instants  $t = k\delta$ ,  $\sum_{i=1}^m r_i = r$  variables et pour cela l'idée est d'introduire au moins  $r$  degrés de libertés sur les commandes.

Ceci peut se faire de plusieurs manières. Plus précisément, on peut bloquer chaque commande  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  pendant  $r_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  sous multiples de la période d'échantillonnage,  $r_j$  étant le degré relatif associé à une des sorties  $y_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . L'existence d'une commande à échelles de temps multiples, reproduisant aux instants d'échantillonnage les  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  et les  $y_i^{(k)}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq k \leq r_i - 1$ , est dans ce cas assurée par la définition suivante du degré relatif vectoriel d'un système multivariable.

#### Définition 6 (Degré relatif vectoriel d'un système multivariable)

- On a :

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) \equiv 0, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq r_i - 2 \quad (4.30)$$

- La matrice de dimensions  $m \times m$  suivante :

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

est non singulière.

La relation [4.30] entraîne que pour  $i$  fixe,  $1 \leq i \leq m$ , au moins un des termes

$$L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x), \quad 1 \leq j \leq m, \text{ est différent de zéro.}$$

La possibilité d'associer de différentes manières les  $r_j$  aux  $u_i$ , donne une certaine flexibilité, qui pourrait aussi être utilisée afin d'éviter dans certains cas des points de singularité.

Pour illustrer ceci, considérons l'exemple d'une sortie  $y_j$  dont la dérivée d'ordre  $r_j$  dépend de deux entrées, soient  $u_k$  et  $u_l$ ,  $k \neq l$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Supposons aussi que les termes multipliant ces commandes (i.e.  $L_{g_k} L_f^{r_j-1} h_i(x)$ , et  $L_{g_l} L_f^{r_j-1} h_i(x)$ , respectivement) ne s'annulent pas simultanément. Dans ce cas, on pourrait commuter d'une commande à échelles de temps multiples d'ordre  $r_j$  sur  $u$ , lorsque l'on est proches des points sur lesquels  $L_{g_k} L_f^{r_j-1} h_i(x) = 0$  et vice-versa. En effet, avec une commande à échelles de temps multiples sur  $u_k$  ou sur  $u_l$ , d'ordre  $r_j$ , la non nullité du terme  $L_{g_k} L_f^{r_j-1} h_i(x)$ , et  $L_{g_l} L_f^{r_j-1} h_i(x)$ , respectivement, est une condition pour définir la commande.

#### 4.4 - Commande à échelles de temps multiples d'ordre égale à la dimension du système

Considérons maintenant un système non linéaire, décrit par l'équation :

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u(t)$$

où l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  et l'entrée  $u \in \mathbb{R}$ . On désire réguler l'état  $x$  de ce système

Lorsque l'on connaît le vecteur de paramètres, la régulation peut être effectuée, pour certaines classes de systèmes, à l'aide d'un bouclage à échelles de temps multiples d'ordre  $n$  ( $n$  étant la dimension de l'espace d'état du système considéré), à savoir :

$$u(t) = u_i(k), \quad (k + \frac{i-1}{n})\delta \leq t \leq (k + \frac{i}{n})\delta, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.32)$$

A partir de l'analyse précédente, on conclut que lorsque le système (4.1) est commandé par (4.32) son état à l'instant  $t = (k+1)\delta$  est donné en fonction de son état à l'instant  $t = k\delta$  par la relation suivante :

$$x_{k+1} = e^{\delta(L_f + u_1(k)L_g)} \circ e^{\delta(L_f + u_2(k)L_g)} \circ \dots \circ e^{\delta(L_f + u_n(k)L_g)} (Id) | x(k), \quad k \geq 0 \quad (4.33)$$

où  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{n}$ . A chaque état  $x_i$  du système (4.1) on peut associer un degré relatif (de l'état  $i$ ), noté  $\rho_i$ . Il s'agit du degré relatif qu'aurait cet état si il était considéré comme sortie du système (4.32). C'est dans la dérivée d'ordre  $\rho_i$  de  $x_i$  que la commande  $u$  apparaît pour la première fois.

Cette définition est importante lorsque l'on considère la discrétisation à échelles de temps multiples (4.33) du système (4.1). En effet, elle nous indique que dans l'expression de la discrétisation de la  $i$ -ème composante de l'état, c'est le coefficient multipliant  $\delta^{\rho_i}$  qui dépend la première fois des entrées  $u_1(k), \dots, u_n(k)$ . En développant la série (4.33), on a :

$$x_{k+1} = x_k + \delta(nf(x) + (u_1(k) + \dots + u_n(k))g(x) + \dots \quad (4.34)$$

Le système (4.1) étant supposé commandable, au moins une composante de  $g(x)$ , disons  $g_j(x)$  est non nulle. Le degré relatif de l'état  $j$  est alors égal à un ( $\rho_j = 1$ ). Supposons que l'on cherche un solution de la forme.

$$u_i(k) = u_{i0}(k) + \delta u_{i1}(k) + \delta^2 u_{i2}(k) + \dots \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.35)$$

qui fixe les valeurs désirées à (4.34). Il est facilement déduit de (4.34), qu'une telle solution n'existe pas, si pour un autre état  $x_k$ ,  $k \neq j$  le degré relatif associé est égal à un ( $\rho_k = 1$ ). En effet, si l'on regroupe de façon matricielle les Termes multipliant le vecteur  $[u_o(k) = [u_{10}(k) \ u_{20}(k) \ u_{n0}(k)]^T$ , alors, deux lignes linéairement dépendantes apparaîtront. Ce raisonnement peut être poursuivi et l'on peut conclure qu'il ne faut pas avoir dans (4.1) deux état  $x_i$  et  $x_j$  de même degré relatif  $\rho_i = \rho_j$ .

#### 4.5 - Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'aspect échantillonné de la commande par retour l'état statique et dynamique.

En premier lieu un schéma par simple échantillonnage est tenu (bloqueur d'ordre zéro) de la commande continue, et en deuxième lieu par les lois de bouclage à échelles de

temps multiples sur l'état qui s'appliquent à une classe de systèmes non linéaire.

Il est présenté aussi certains concepts et notions qui sont propres à ce genre de commande tel les notions de discrétisé exact, degré relatif et dynamique des zéros, avec ce genre de commande on peut résoudre divers problèmes liés à la commande non linéaire, tel que : préservation sous échantillonnage du comportement continu, linéarisation, découplage E/S et stabilité.

Par la suite ces types de commandes seront appliquées à un moteur asynchrone qui présente un modèle non linéaire et couplé.

## Chapitre 5

### COMMANDE A ECHELLES DE TEMPS MULTIPLES D'UN MOTEUR ASYNCHRONE

#### Introduction :

Nous appliquons dans ce chapitre le schéma de commande à échelles de temps multiples dans le cas multivariable d'un moteur asynchrone suivant le schéma présente dans le chapitre précédent. En se limitant dans les développements en puissances de  $\delta$ ,

Notre objectifs de commande est de préserver sous échantillonnage le comportement continu.

#### 5.1 Modèle du moteur

Dans ce cas le modèle (2.1) s'écrit sous une forme compacte comme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1 u_1(t) + g_2 u_2(t) \\ y_1 &= h_1(x) \\ y_2 &= h_2(x) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (i_{ds}, i_q, \psi_{dr}, \omega_m)$ ,  $u^T = (u_1, u_2) = (u_{ds}, u_{qs})$ ,  $y^T = (y_1, y_2) = (\psi_{dr}, \omega_m)$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\gamma x_1 + \eta \beta x_3 + L_m \eta \frac{x_2}{x_3} + p x_2 x_4 \\ -\gamma x_2 - L_m \eta \frac{x_2 x_2}{x_3} - p \beta x_3 x_4 - p x_1 x_4 \\ L_m \eta x_1 - \eta x_3 \\ \alpha x_2 x_3 - \frac{C_r}{J} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$g_1 = \left[ \frac{1}{\delta L_s} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad g_2 = \left[ 0 \ \frac{1}{\delta L_s} \ 0 \ 0 \right]^T \quad (5.3)$$

Les degrés relatifs associés aux sorties  $y_1$  et  $y_2$  sont  $r_1 = 2$  et  $r_2 = 2$  respectivement (voir chapitre 2)

### 5.2 commande numérique à échelles de temps multiples

La discrétisation usuelle (avec période d'échantillonnage égale à  $\delta$ ) des comportements linéaires en (2-14) donne :

$$\begin{bmatrix} e_1(k+1) \\ e_1(k+1) \\ e_2(k+1) \\ e_2(k+1) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_1(k) \\ e_2(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix} = \psi(\delta, x(k), y_{\text{ref}}) \quad (5.4)$$

$$G = \begin{bmatrix} \overline{G}_1 \delta & 0 \\ e & \overline{G}_2 \delta \\ 0 & e \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\overline{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{bmatrix}; \quad \overline{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_3 & -k_4 \end{bmatrix}$$

Il s'agit de reproduire aux instants d'échantillonnage les comportements (5.4) avec une commande à échelles de temps multiples [24].

La somme de degrés relatifs étant égale à quatre (de l'état de notre système). On introduit la commande multi-échantillonnée suivante :

$$u_1(t) = \begin{cases} {}^1u_1^D & t \in [k\delta, (k+\frac{1}{2})\delta[ \\ {}^2u_1^D & t \in [(k+\frac{1}{2})\delta, (k+1)\delta[ \end{cases} \quad (5.6)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} {}^1u_2^D & t \in [k\delta, (k+\frac{1}{2})\delta[ \\ {}^2u_2^D & t \in [(k+\frac{1}{2})\delta, (k+1)\delta[ \end{cases}$$

$${}^1U_2^D = {}^1U_{20}^D + \bar{\delta} {}^1U_{21}^D + O(\delta^2) \tag{5.8}$$

$${}^2U_2^D = {}^2U_{20}^D + \bar{\delta} {}^2U_{21}^D + O(\delta^2)$$

où  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{2}$  et  $O(\delta^i)$  représente les termes du développement d'ordre supérieur ou égal à  $\delta^i$  que l'on néglige.

La relation (5.7), après regroupement de termes de même puissance en  $\delta$ , se réécrit en appliquant la commande (5.8) :

$$\psi(\delta, x(k), y_{iref}) = \sigma(\delta, x(k)) + \Delta_1(\delta, x(k)) \begin{bmatrix} {}^1U_{10}^D \\ {}^2U_{10}^D \\ {}^1U_{20}^D \\ {}^2U_{20}^D \end{bmatrix} + \rho(\delta, x(k), {}^1U_{10}^D, {}^2U_{10}^D, {}^1U_{20}^D, {}^2U_{20}^D)$$

$$+ \bar{\delta} \Delta_1(\delta, x(k)) \begin{bmatrix} {}^1U_{11}^D \\ {}^2U_{11}^D \\ {}^1U_{21}^D \\ {}^2U_{21}^D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\delta^4) \\ O(\delta^3) \\ O(\delta^4) \\ O(\delta^3) \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\rho(\delta, x(k)) = \begin{bmatrix} h_1 + 2\bar{\delta} L_f h_1 + 2\bar{\delta}^2 L_f^2 h_1 - y_{1ref} \\ L_f h_1 + 2\bar{\delta} L_f^2 h_1 \\ h_2 + 2\bar{\delta} L_f h_2 + 2\bar{\delta}^2 L_f^2 h_2 - y_{2ref} \\ L_f h_2 + 2\bar{\delta} L_f^2 h_2 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$\Delta_1(\delta, x(k)) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \delta^2 L_{g_1} L_{f_1} h_1 & \frac{1}{2} \delta^2 L_{g_1} L_{f_1} h_1 & 0 & 0 \\ \delta L_{g_1} L_{f_1} h_1 & \delta L_{g_1} L_{f_1} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \delta^2 L_{g_2} L_{f_2} h_2 & \frac{1}{2} \delta^2 L_{g_2} L_{f_2} h_2 \\ 0 & 0 & \delta L_{g_2} L_{f_2} h_2 & \delta L_{g_2} L_{f_2} h_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

et :  $\rho(\delta, x(k), {}^1U_{10}^D, {}^2U_{10}^D, {}^1U_{20}^D, {}^2U_{20}^D)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\delta^3}{3!} (8 L_{f_1}^3 h_1 + L_{g_1} L_{f_1}^2 h_1^2 U_{10}^D + 7 L_{g_1} L_{f_1}^2 h_1^1 U_{10}^D + 7 L_{g_2} L_{f_1}^2 h_1^1 U_{20}^D + L_{g_2} L_{f_1}^2 h_1^2 U_{20}^D) \\ \frac{\delta^2}{2!} (4 L_{f_1}^3 h_1 + L_{g_1} L_{f_1}^2 h_1^2 U_{10}^D + 3 L_{g_1} L_{f_1}^2 h_1^1 U_{10}^D + 3 L_{g_2} L_{f_1}^2 h_1^1 U_{20}^D + L_{g_2} L_{f_1}^2 h_1^2 U_{20}^D) \\ \frac{\delta^3}{3!} (8 L_{f_2}^3 h_2 + L_{g_1} L_{f_2}^2 h_2^2 U_{10}^D + 7 L_{g_1} L_{f_2}^2 h_2^1 U_{10}^D + 7 L_{g_2} L_{f_2}^2 h_2^1 U_{20}^D + L_{g_2} L_{f_2}^2 h_2^2 U_{20}^D) \\ \frac{\delta^2}{2!} (4 L_{f_2}^3 h_2 + L_{g_1} L_{f_2}^2 h_2^2 U_{10}^D + 3 L_{g_1} L_{f_2}^2 h_2^1 U_{10}^D + 3 L_{g_2} L_{f_2}^2 h_2^1 U_{20}^D + L_{g_2} L_{f_2}^2 h_2^2 U_{20}^D) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Le déterminant de la matrice  $\Delta_1(\delta, x(k))$  étant égale à  $\delta^6 (L_{g_1} L_{f_1} h_1)^2 (L_{g_2} L_{f_2} h_2)^2$ , cette matrice est toujours inversible puisque  $L_{g_1} L_{f_1} h_1$  et  $L_{g_2} L_{f_2} h_2$  sont des constantes différentes de zéro.

En négligeant les termes d'ordre supérieur en  $\delta$ , une solution approchée, permettant de fixer le comportement  $\psi(\delta, x(k), y_{iref})$ , est calculée de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} {}^1U_{10}^D \\ {}^2U_{10}^D \\ {}^1U_{20}^D \\ {}^2U_{20}^D \end{bmatrix} = \Delta^{-1}_1(\delta, x(k)) [\psi(\delta, x(k), y_{iref}) - \sigma(\delta, x(k))] \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} {}^1U_{11}^D \\ {}^2U_{11}^D \\ {}^1U_{21}^D \\ {}^2U_{21}^D \end{bmatrix} = -\frac{1}{\delta} \Delta^{-1} (\delta, x(k)) \rho (\delta, x(k), {}^1U_{10}^D, {}^2U_{10}^D, {}^1U_{20}^D, {}^2U_{20}^D) \quad (5.14)$$

### 5.3. Résultats de simulation et commentaires

Dans ce chapitre, on expose les résultats obtenus en utilisant les commandes échantillonnées, à savoir, la commande par bloqueur d'ordre zéro et la commande à échelles de temps multiples. On a mis en évidence l'influence du pas d'échantillonnage sur les performances de chaque commande échantillonnée considérée précédemment.

L'application de ce contrôleur dynamique dans un schéma de données échantillonnées, à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro pour la commande, conduit à la détérioration des résultats lorsque la période d'échantillonnage augmente (le courant de ligne prend des valeurs importantes au démarrage ainsi que la vitesse qui possède un déplacement considérable) (fig.5.1), fig (5.3)]. Les courbes de simulation sont à comparer avec celles obtenues avec la commande à échelles de temps multiples présentés dans la partie suivante. Car en augmentant la période d'échantillonnage, le courant de ligne  $i_a$  présente un pic au démarrage moins important que celui obtenu précédemment. (fig.[5.2], fig[5.4])

Pour remédier au problème du pic courant au démarrage, une limitation a été introduite dans la fig.(5.5).

La figure (5.6) montre que le système répond bien à un changement de consigne de vitesse inverse au régime établi.

En fin, sans oublier que toutes les réponses obtenues montrent le rejet d'une perturbation introduite au régime permanent.

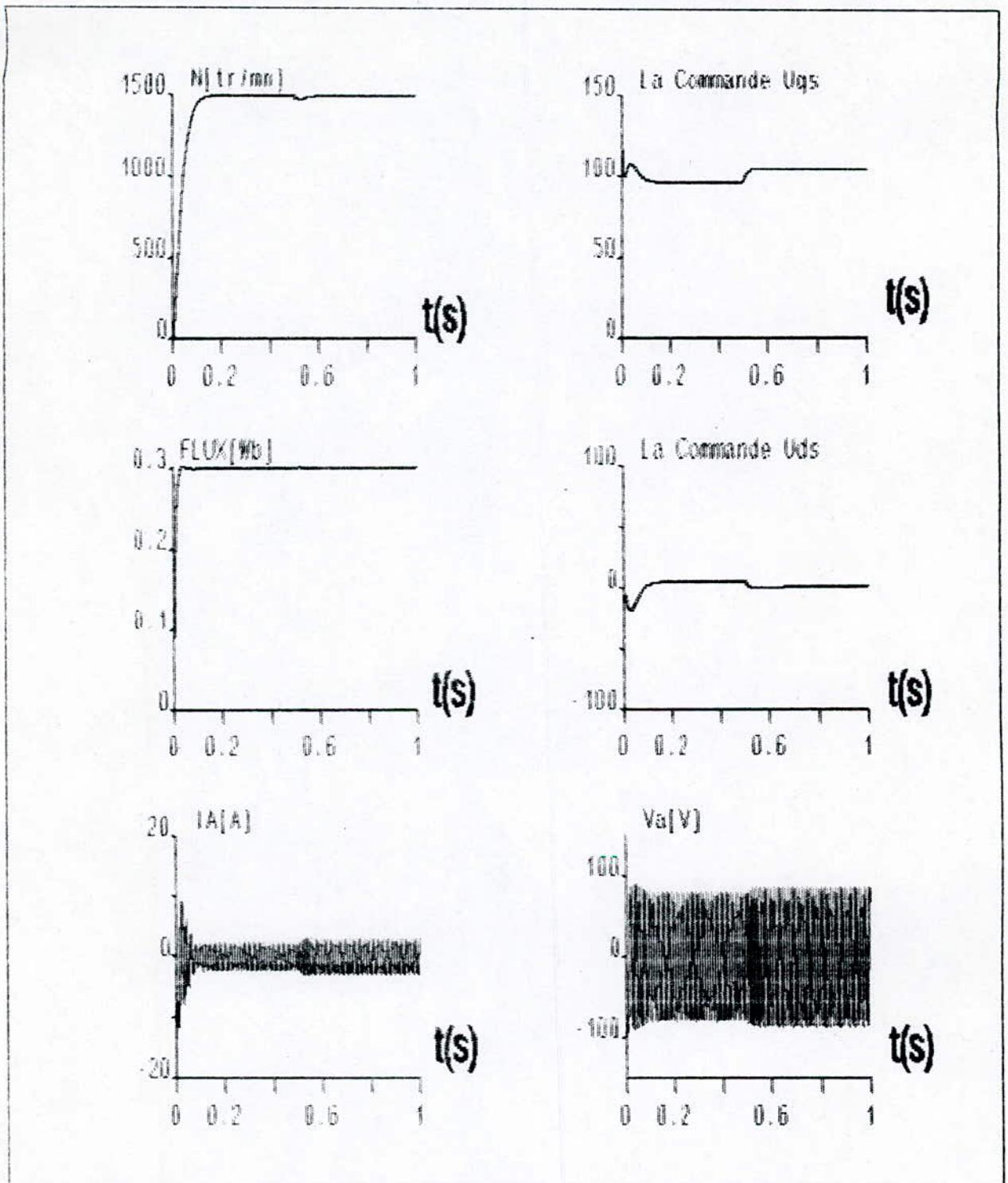


FIG.5.1: Evolution des grandeurs de la machine:  
cas d'un bloqueur d'ordre zéro ( $\delta=0.1\text{ms}$ )  
 $P_{1,2}=-20\pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2}=-100\pm j$  pour le flux.

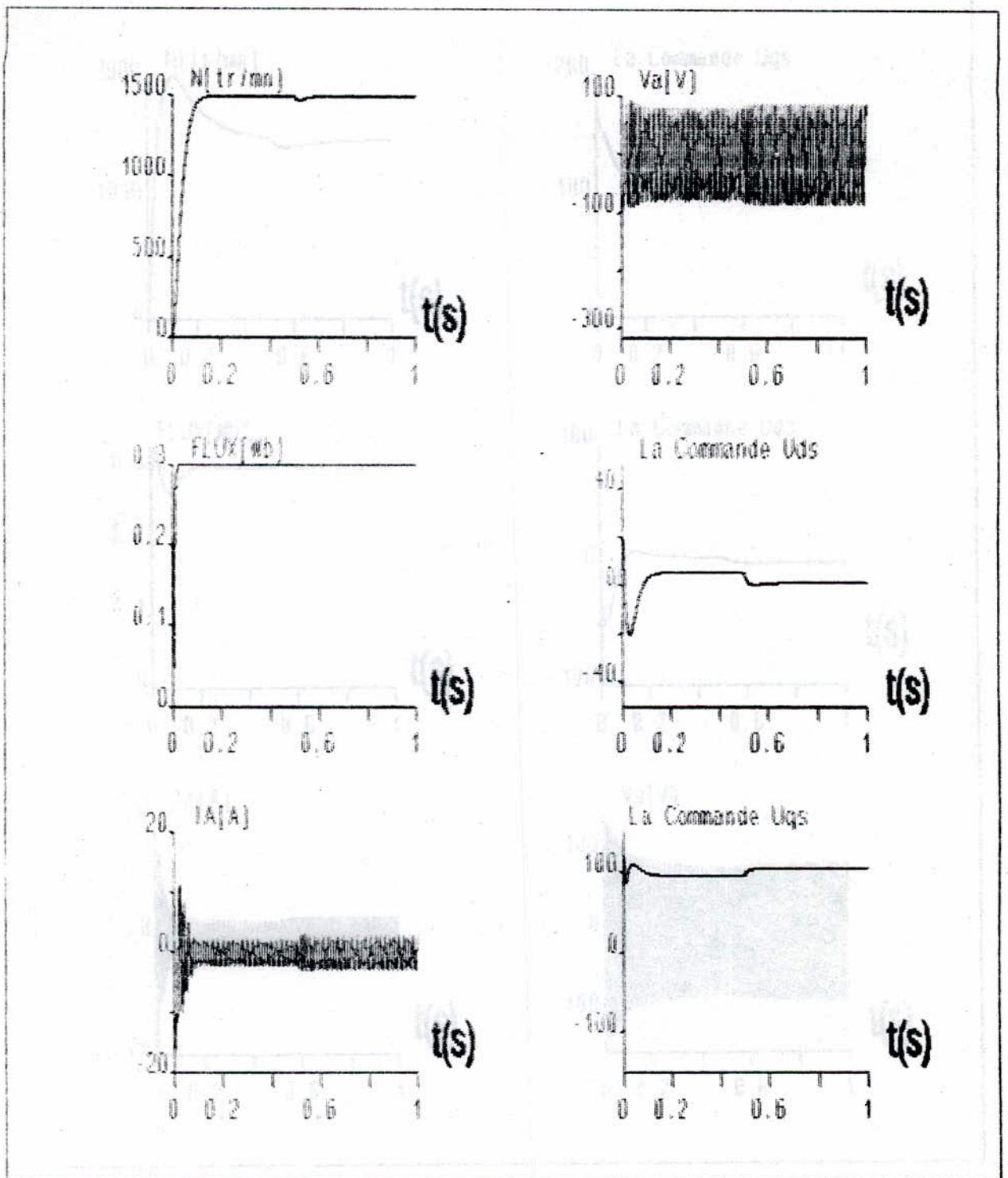


FIG.5.2: Commande à échelles de temps multiples.  
 Evolution des grandeurs de la machine ( $\delta=0.1ms$ ).  
 $P_{1,2}=-20\pm j$  pour la vitesse et  $P'_{1,2}=-100\pm j$  pour le flux.

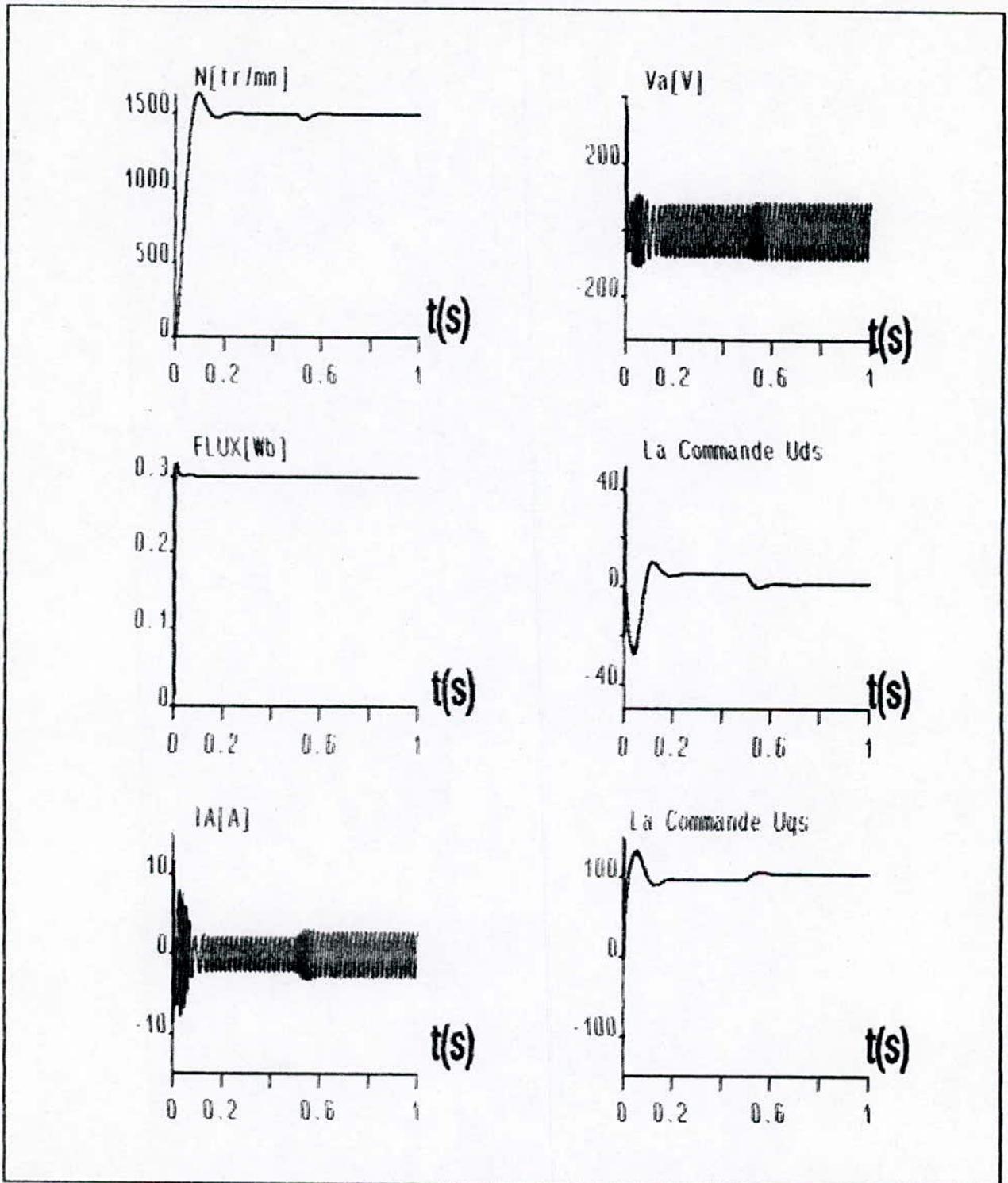


FIG.5.4: Commande à échelles de temps multiples:  
 Evolution des grandeurs de la machine ( $\delta=1ms$ ).  
 $P_{1,2}=-20\pm i$  pour la vitesse et  $P'_{1,2}=-100\pm j$  pour le flux.

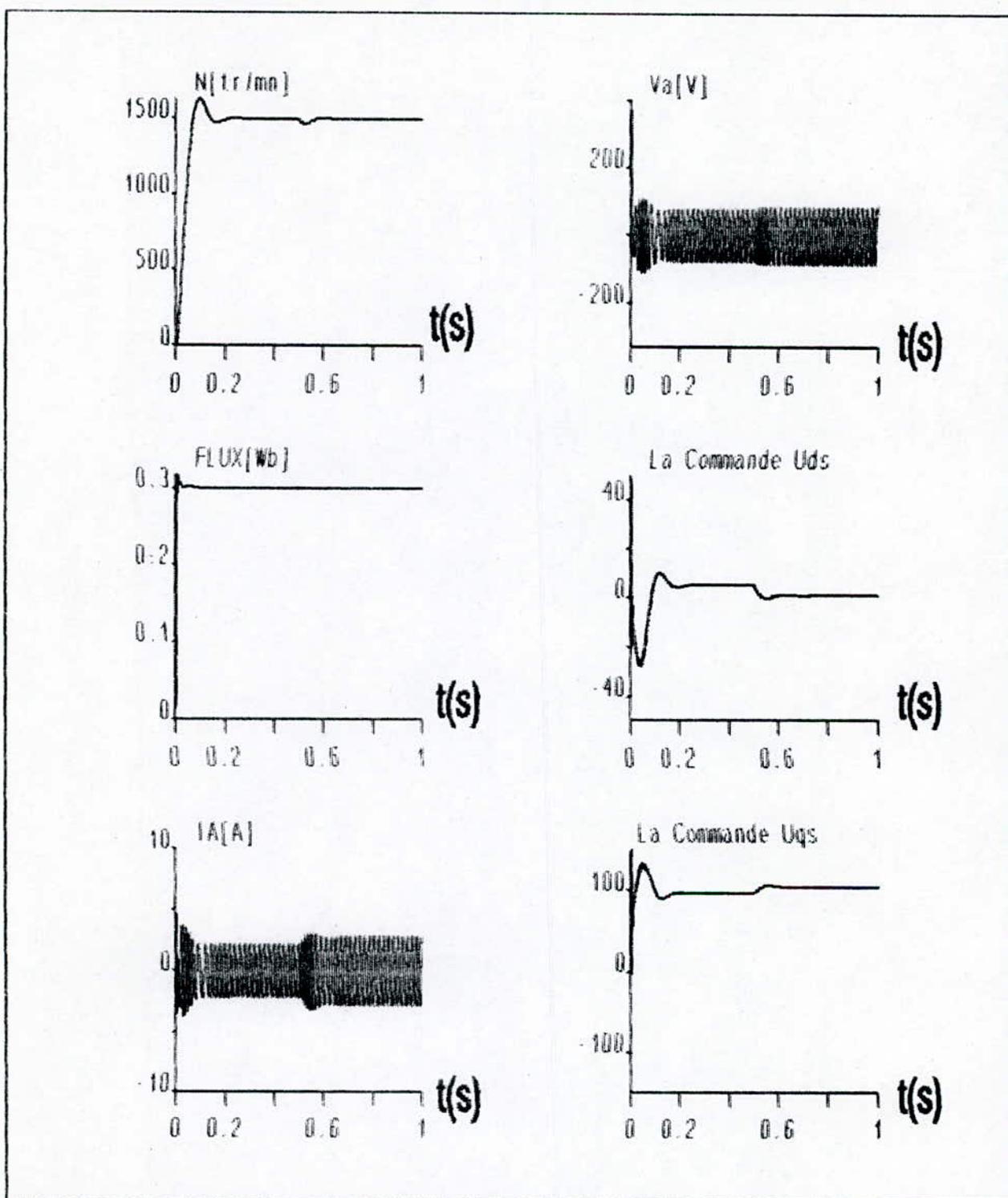


FIG.5.5: Commande à échelles de temps multiples:  
Evolution des grandeurs de la machine  
en présence d'une limitation en courant ( $\delta=1ms$ ).

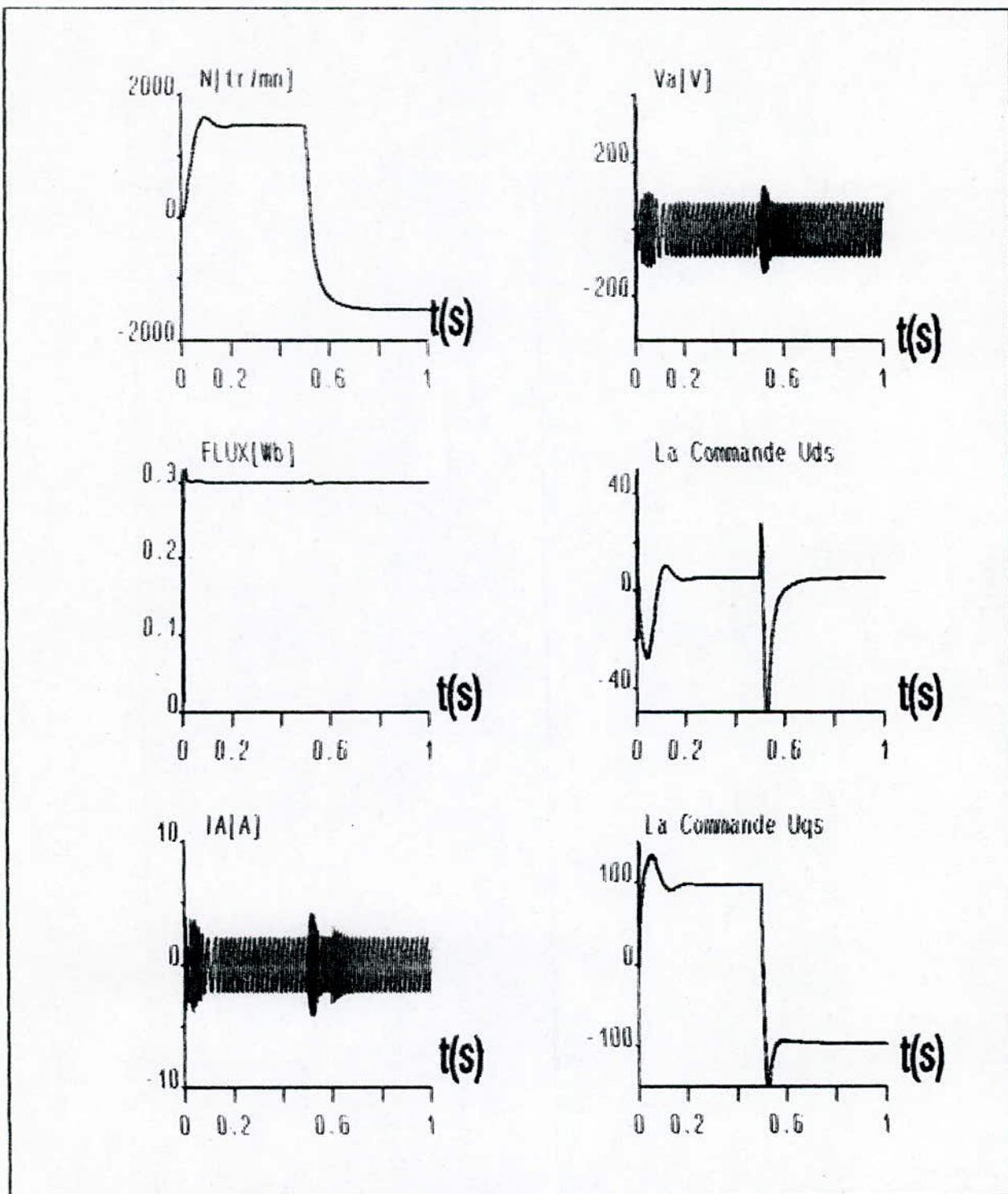


FIG.5.6: Commande à échelles de temps multiples:  
Evolution des grandeurs de la machine  
à un changement de consigne de vitesse à  $t=0.5$ s

## CONCLUSION GENERALE :

Nous avons dans ces travaux, étudié l'application de certaines techniques de commande non linéaires continue et échantionne.

Au deuxième chapitre après avoir effectué la linéarisation exacte et le découpage E/S du modèle du moteur asynchrone avec technique de commande par placement de poles au système ainsi linéarisé. Le choix des poles s'est fait par compromis sur le pic du courant maximal en quadratique que peut supporter le moteur. Malheureusement la variation de la résistance rotorique, qui induit une erreur statique sur la réponse de vitesse, nous pousse à changer les poles pour assurer une meilleure robustesse du système ceci se fait au détriment du pic du courant en quadroture qui atteint des valeurs importantes. Pour pallier à ce problème, une solution a été proposée consiste à limiter les courants en limitant les grondeurs de commande. Les resultats de simulation ont motivé l'efficacité de cette méthode dans le troisième chapitre, le modèle du moteur exprimé dans le repère synchrone n'a pu être linéorisé exactement. En effet, le modèle linéorisé présente une dynamique des zéros stable, d'ordre un. La commande par placement de poles, est alors adoptée pour le réglage du moteur. Elle donne d'exellentes performances pour les variations de consigne et de perturbation. Néanmoins la variation de la résistance rotorique engendre une erreur statique sur les réponses de vitesse et de flux. Pour remédier à ce problème, de nouveaux poles sont choisis, mais ceci agit d'une façon néfaste sur les pics de courants, qui atteignent des valeurs assez importantes du démarrage. Nous avons donc utilisé une limitation sur les commandes du système, malheureusement, la technique utilisé n'est pas très efficace surtout pour des poles aussi éloignés de l'origine. En effet des pics de courants importants, de tés courte durée sont visibles sur les réponses. Enfin, au cinquième chapitre, nous avons appliqué deux commandes numérique, en l'occurence, la commande par bloqueur d'ordre zéro et la commande à echelles de temps multiples aux 2 modèles du moteur asynchrone cité précédemment, les résultats obtenus montrent une certaine similitude avec ceux du deuxième chapitre.

**PERSPECTIVES :**

A la fin de la réalisation de ce travail nous avons constaté que ce mémoire ouvre différents axes de recherche, entre autres:

L'utilisation du flux rotorique du moteur dans la bouche de commande.

Application des commandes linéarisantes adaptatives.

L'application de la commande par mode de glissement au modèle non linéaire de la machine.

avec  $L_g L_f^{r-1} h|_{x=r_0} \neq 0$ .

**Remarque:** Le degré relatif d'un système linéaire correspond à l'excès des pôles sur les zéros de la fonction de transfert. En effet, supposons que la fonction de transfert associée à un système linéaire de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

soit donnée par

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \\ &= a_m s^{-(n-m)} + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

D'autre part, en développant la forme générale

$$H(s) = c(sI_d - A)^{-1}b \quad (1.6)$$

et en prenant en compte la définition du degré relatif  $r$ , c.a.d en posant

$$cb = cAb = cA^2b = \dots = cA^{r-1}b = 0 \quad (1.7)$$

on vérifie que le premier terme non nul est égal à  $cA^r b s^{-r}$ .

En comparant ce terme à celui de la relation (1.5), on en déduit que  $r = n - m$ .

### 1.1.2 La forme normale

On pose

$$\begin{cases} z_1 &= \phi_1(x) = h(x) \\ z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= \phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{cases} \quad (1.8)$$

En choisissant  $(n - r)$  fonctions,  $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$  telles que l'application  $\phi(x) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  soit un difféomorphisme, on peut réécrire le système  $\Sigma$  dans les nouvelles coordonnées et on obtient

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= L_f h(x) = z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h(x) = z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u(t) \\ \dot{z}_{r+1} &= L_f \phi_{r+1}(x) + L_g \phi_{r+1}(x) u(t) = q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u \end{cases}$$

Remarque: Dans le cas mono-entrée/mono-sortie, on peut toujours choisir les  $(n - r)$  fonctions  $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$  de telle manière que

$$L_g \phi_i = 0 \quad \text{pour } r + 1 \leq i \leq n \quad (1.9)$$

Dans ce cas, le système prend la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u(t) \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{cases}$$

Cette forme est appelée forme normale.

Remarque: Dans le cas où  $r = n$ , on parle de linéarisation entrée/état exacte.

### 1.1.3 La dynamique des zéros

En posant

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ z_{r+2} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

le système  $\Sigma$ , dans sa forme normale, peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \end{aligned}$$

où  $a(\xi, \eta) = L_g L_f^{r-1} h(x)|_{x=\phi^{-1}(z)}$  et  $b(\xi, \eta) = L_f^r h(x)|_{x=\phi^{-1}(z)}$ .

Soit  $u$  la commande qui porte la sortie à zéro et l'y maintient. On vérifie facilement que:

$$y(t) = 0 \quad \text{implique} \quad \xi(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \quad (1.11)$$

Donc,  $u(t)$  sera la solution unique de l'équation

$$0 = b(0, \eta) + a(0, \eta)u(t) \quad (1.12)$$

à savoir,

$$u(t) = -a^{-1}(0, \eta)b(0, \eta) \quad (1.13)$$

En ce qui concerne l'état  $\eta(t)$ , on voit que si  $\eta(0) \neq 0$  et  $\xi(0) = 0$  alors  $\eta(t)$  sera la solution de l'équation différentielle:

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad \eta(0) = \eta^0 \quad (1.14)$$

Cette dynamique, qui représente la dynamique interne du système lorsque l'entrée et les conditions initiales sont choisies de telle manière que la sortie soit égale à zéro, s'appelle dynamique des zéros.

Remarque: Dans le cas linéaire, il s'agit de la dynamique des zéros de transmission qui est linéaire.

Si la dynamique des zéros est asymptotiquement stable alors on dit que le système est à minimum de phase.

#### 1.1.4 Stabilisation par retour d'état

Supposons que la dynamique des zéros soit asymptotiquement stable.

Alors, le retour d'état

$$u(t) = a^{-1}(0, \eta) \left\{ -b(0, \eta) - k_0 h(x) - k_1 L_f h(x) - \dots - k_{r-1} L_f^{r-1} h(x) + v \right\} \quad (1.15)$$

où les coefficients  $k_0, \dots, k_{r-1}$  sont fixés de telle sorte que le polynôme

$$K(s) = s^r + k_{r-1}s^{r-1} + \dots + k_1 s + k_0 \quad (1.16)$$

soit de Hurwitz, stabilise asymptotiquement le système. En effet, la  $r$ -ième dérivée de la sortie est égale à

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + u L_g L_f^{r-1} h(x) \quad (1.17)$$

Substituant (1.15) dans (1.17), on obtient:

$$y^{(r)} + k_{r-1}y^{(r-1)} + \dots + k_1 y + k_0 = v \quad (1.18)$$

qui, d'après (1.16), exprime une dynamique asymptotiquement stable.

### 1.1.5 Linéarisation exacte avec sortie fictive

Supposons que le système ne soit pas à minimum de phase par rapport à la sortie réelle considérée. Alors, nous nous intéressons à trouver une sortie "fictive" telle que la linéarisation du comportement E/S soit exacte. Si, on note par  $h(x)$  la sortie fictive, alors elle doit satisfaire les conditions suivantes:

$$\begin{cases} L_y h = L_y L_f h = \dots = L_y L_f^{n-2} h = 0 & \text{pour tout } x \\ L_y L_f^{n-2} h|_{x=x_0} \neq 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Puisque les  $L_y L_f^i(\cdot)$ , pour  $i \geq 1$ , sont des opérateurs du second ordre, il est difficile de résoudre les équations (1.19) par rapport à  $h$ .

On note que si

$$L_y h = 0 \quad \text{alors} \quad (L_y L_f h = 0 \iff L_{ad_f g} h = 0) \quad (1.20)$$

où  $L_{ad_f g}(\cdot)$  est un opérateur du premier ordre. En utilisant cette propriété et l'identité:

$$L_{ad_f^2 g}(h) = L_{[f, ad_f g]} h = L_f L_{ad_f g} h - L_{ad_f g} L_f h \quad (1.21)$$

on obtient, que si  $L_y h = L_y L_f h = 0$  alors

$$(L_y L_f^2 h = 0 \iff L_{ad_f^2 g} h = 0) \quad (1.22)$$

e.t.c. Donc, les conditions (1.19) sont équivalentes aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} \left[ g, ad_f g(h), \dots, ad_f^{n-2} g(h) \right] = 0 \\ L_{ad_f^{n-1} g} h \neq 0 \end{cases}$$

La première équation est une équation aux dérivées partielles par rapport à  $h$  et admet une solution ssi l'ensemble

$$\left\{ g(x^0), ad_f g(x^0), \dots, ad_f^{n-2} g(x^0) \right\} \quad (1.23)$$

est involutif. Ceci est une application du *théorème de Frobenius* (voir Annexe).

### 1.1.6 Algorithme de linéarisation Entrée/Sortie-fictive

- construire les champs de vecteurs

$$\left\{ g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g \right\} \quad (1.24)$$

- vérifier que l'ensemble (1.24) en  $x = x^0$  est involutif.

- résoudre par rapport à  $h$  les équations aux dérivées partielles (1.23)
- calculer les quantités

$$\begin{aligned} a(x) &= L_g L_f^{n-1} h(x) \\ b(x) &= L_f^n h(x) \end{aligned}$$

Alors, le bouclage qui linéarise exactement le système est donné par

$$u = a(x)^{-1} \{-b(x) + v\} \quad (1.25)$$

avec

$$v = -k_{r-1}y^{(r-1)} - k_{r-2}y^{(r-2)} - \dots - k_1 y - k_0 \quad (1.26)$$

## 1.2 Le cas multivariable

Dans ce paragraphe, on applique les résultats obtenus dans le cas précédent aux systèmes carrés (ayant même nombre de sorties que d'entrées) et on introduit la notion du *découplage* entre les sorties et les nouvelles entrées du système. On considère les systèmes de la forme suivante:

$$\Sigma' \begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y_1 &= h_1(x) \\ y_2 &= h_2(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{cases} \quad (1.27)$$

### 1.2.1 Le degré relatif vectoriel

**Définition:** Le système  $\Sigma'$  a un degré relatif vectoriel  $(r_1, \dots, r_m)$  au point  $x_0$  ssi:

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad 1 \leq j \leq m \quad 1 \leq i \leq m \text{ pour tout les } k \leq r_i \quad (1.28)$$

- la matrice carré, appelé matrice de découplage:

$$\Omega(x) = (L_{g_i} L_f^{r_j} h_j(x))_{(i,j)} \quad (1.29)$$

est non singulière au point  $x = x_0$ .

**Remarque:** Si  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ , alors le système est linéarisable exactement, ce qui signifie qu'après difféomorphisme et bouclage le système bouclé ne sera composé que de  $m$  sous systèmes linéaires découplés.

### 1.2.2 La forme normale

Pour trouver la forme normale qui correspond au système  $\Sigma'$ , on définit les nouvelles variables  $z_1, \dots, z_\gamma$  avec  $\gamma = r_1 + \dots + r_m$ , comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = h_1(x) \\ z_2 = L_f h_1(x) \\ \vdots \\ z_{r_1} = L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots \\ z_{\gamma-m} = h_m \\ z_{\gamma-m+1} = L_f h_m \\ \vdots \\ z_\gamma = L_f^{r_m-1} h_m \end{array} \right.$$

On note que si  $n \geq \gamma$ , il est toujours possible de choisir  $(n - \gamma)$  fonctions  $\eta_1, \dots, \eta_{n-\gamma}$  pour compléter le difféomorphisme. Avec un tel choix la forme "normale" est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_1-1} &= z_{r_1} \\ \dot{z}_{r_1} &= b_1(z) + a_{11}(z)u_1 + a_{12}(z)u_2 + \dots + a_{1m}(z)u_m \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\gamma-r_m-1} &= z_{\gamma-r_m+1} \\ &\vdots \\ \dot{z}_\gamma &= b_m(z) + a_{m1}(z)u_1 + a_{m2}(z)u_2 + \dots + a_{mm}(z)u_m \end{aligned}$$

$$\dot{\eta} = q_m(z) + p_1(z)u_1 + p_2(z)u_2 + \dots + p_m(z)u_m \quad (1.30)$$

On peut montrer que si la distribution engendrée par  $\{g_1, \dots, g_m\}$  est involutive alors on peut toujours compléter le difféomorphisme par des fonctions  $\eta_i$  telles que  $L_g \eta_i = 0$ . Ceci implique que les  $p_i$  dans (1.30) vont être nuls.

### 1.2.3 Calcul de la commande

En prenant en compte que  $y_1 = h_1(x) = z_1$ ,  $y_2 = h_2(x) = z_{r_1+1}$  e.t.c., on trouve que:

$$y_j^{(r_j)} = L_f^{r_j} h_j(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j(x) u_i \quad (1.31)$$

En regroupant les équations (1.31), on obtient la forme compacte:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{pmatrix} + \Omega(x) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

On voit facilement que si on choisit le retour d'état:

$$u = -\Omega^{-1}(x) \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{pmatrix} + \Omega^{-1}(x) v \quad (1.33)$$

alors le système bouclé s'écrit:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Cette dynamique est composée de  $m$  dynamiques linéaires découplées, à savoir, la sortie  $y_i$  ne dépend que de la nouvelle entrée  $v_i$  correspondante. De la même manière que dans le cas de systèmes monovariables, on peut imposer à chaque sous système un comportement E/S désiré, en choisissant convenablement les nouvelles entrées  $v_i$  comme en (1.26) où les coefficients  $k_i$  sont définies comme en (1.16).

# ANNEXE 2

## NOTIONS ELEMENTAIRES SUR LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

soit le système:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Les champs de vecteurs  $f$  et  $g$  associés à ce système sont donnés par:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Avec:

$$f(x) = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T, \quad g(x) = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n]^T \quad \text{et} \quad x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$$

### Dérivée de Lie:

considérons une fonction  $T(x)$  et le champ de vecteur  $f$ , nous appellerons dérivée de Lie de  $T(x)$  suivant le champ de vecteur  $f$  l'expression suivante:

$$L_f T(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

La dérivation de cette dernière expression suivant le champ de vecteur  $g$  donne:

$$L_g L_f T(x) = \frac{\partial(L_f T(x))}{\partial x} g(x)$$

Ainsi, si  $T(x)$  est différencié  $k$  fois suivant le champ de vecteur  $f$ , par récurrence:

$$L_f^k T(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} T(x))}{\partial x} f(x)$$

Avec:  $L_f^0 T(x) = T(x)$ .

### Crochet de Lie:

Une notion qui est aussi importante, est celle du crochet de Lie ou produit de Lie. Il est définie par:

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

ou:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

La combinaison du champ de vecteurs trouvé par Crochet de Lie avec le champ de vecteurs  $f$  donne un nouveau champ de vecteurs. La répétition de cette opération plusieurs fois aboutit à d'autres champs de vecteurs:

$$[f, [f, \dots, [f, g]]](x)$$

Pour éviter les confusions nous opterons pour la notation

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x)$$

Avec:  $k \geq 1$  et  $\text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$ .

Propriétés:

Le crochet de Lie de champs de vecteurs est caractérisé par les propriétés suivantes:

- (1) soient  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  des champs de vecteurs et  $r_1$  et  $r_2$  des nombres réels, alors:

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2]$$

- (2) Commutativité

$$[f, g] = -[g, f]$$

- (3) Identité de Jacobi: soient  $f, g$  et  $p$  des champs de vecteurs, alors:

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0$$

- (4) soient  $\Gamma(x)$  et  $\lambda(x)$  des fonctions réelles,  $f$  un champ de vecteurs:

$$L_{\Gamma f} \lambda(x) = (L_f \lambda(x)) \Gamma(x)$$

- (5) soient  $f, g$  des champs de vecteurs et  $\alpha$  une fonction réelle:

$$L_{[f, g]} \alpha(x) = L_f L_g \alpha(x) - L_g L_f \alpha(x)$$

- (6) Si  $f$  est un champ de vecteurs et  $\alpha$  une fonction réelle, alors:

$$L_f d\alpha(x) = dL_f \alpha(x)$$

avec:

$$d\alpha(x) = \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} \right]$$

### Difféomorphisme:

Par analogie aux systèmes linéaires, nous pouvons transformer un système non linéaire au moyen d'un changement de coordonnées non linéaire de la forme:

$$z = \Phi(x)$$

où  $\Phi(x)$  est une fonction vectorielle donnée par:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \Phi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

qui possède les propriétés suivantes:

- $\Phi(x)$  est une application bijective.
- $\Phi(x)$  et  $\Phi^{-1}(x)$  sont des applications différentiables.

Si ces deux propriétés sont vérifiées pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  alors  $\Phi(x)$  est un difféomorphisme global sur  $\mathbb{R}^n$ . Par contre, si le Jacobien de  $\Phi(x)$ , évaluée au point  $x=x_0$  est non nul alors  $\Phi(x)$  est un difféomorphisme local.

### Distribution:

Une distribution  $\Delta$  est un espace ou un sous espace vectoriel, engendré par une base, formée par le champ de vecteurs  $f_1, \dots, f_d$ :

$$\Delta = \text{Span} \{f_1, \dots, f_d\}$$

D'autre part,  $\Delta(x)$  est la distribution associée à un point  $x \in \mathbb{R}^n$  telle que:

$$\Delta(x) = \text{Span} \{f_1, \dots, f_d\}$$

### Involutivité:

La distribution  $\Delta$  est dite involutive si et seulement si elle est stable par crochet de Lie. i.e si et seulement si pour tout champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  éléments de  $\Delta$ , alors  $[X, Y]$  est aussi un élément de  $\Delta$ .

# ANNEXE 3

## CARACTERISTIQUES DE LA MACHINE

La machine asynchrone utilisée dans cette thèse possède la plaque signalétique suivantes [7]:

$p=2$  (nombre de paires de pôles)

$V_n=110\text{v}$

$P_n=0.25\text{Kw}$

$N=1500\text{tr/mn}$

$f=50\text{Hz}$

### Paramètres électriques

$R_s=1.923\Omega$

$L_c=0.1157\text{H}$

$R_r=1.739\Omega$

$L_r=0.1154$

$M=0.1126\text{H}$

### Paramètres mécaniques

$J=4.10^{-3}\text{Kgm}^2$

$K=2,5.10^{-4}\text{Nms}$

$C_n=1.3\text{ Nm}$

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P.C.Sen, "Electric motor drives and control - past, present and future -", IEEE Trans. Ind. Electronics, Vol.37, N°6, 1990.
- [2] B.K.Bose, "Power electronics and AC drives", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- [3] H.Buhler, " Impact of modern automatic control theory on electrical drives: A survey", 10<sup>th</sup> IFAC world congress on automatic control N°12, 1987.
- [4] W. Leonhard, "Control of electrical drives", Springer Verlag, 2<sup>th</sup> edition, 1990.
- [5] J.Chatelain, "Machines électriques", Tome 1, Dunod, 1983.
- [6] Mahmoudi, "Variateurs de vitesse à moteurs asynchrones: leurs simulation et synthèse sur leurs performances", Thèse de magister, ENP, 1986.
- [7] B.Robyns, F.Labrique, H.Buyse, " Position tracking control with an induction actuator using poles placement and decoupling space state feedback", IMACS Symposium MCTS, CASABLANCA, 1991.
- [8] A.De Luca, G.Ulivi, "Design of an exact nonlinear controller for Induction motors", IEEE Trans. Automat. Control Vol AC-34, N°12, 1989.
- [9] A.De Luca, G.Ulivi, "The design of an linearizing outputs for inductions motors", Symposium of nonlinear control system design, 1989.
- [10] Z.Krzeminski, " Nonlinear control of induction motor", 10<sup>th</sup> IFAC world congress on automatic control N°12, 1987.
- [11] G.Seguirer, F.Labrique, "Les convertisseurs de l'électronique de puissance", Tome VI, Ed Tec et Doc Lavoisier, 1989.
- [12] M.O.Mahmoudi, "Analyse microscopique d'un M.AS alimenté par un onduleur M.L.I", J.T.E.A, 1991.
- [13] Y.Ait Gougam, "Etude des stratégies de modulation de largeur d'impulsions pour onduleur de tension", thèse de magister, 1992, ENP, Alger, Algerie.
- [14] R.Marino & P.Valigi, "Nonlinear control of induction motors: A simulation study", ECC 91, Grenoble, 1991.
- [15] R.R.Kadiyala, "Indirect adaptative nonlinear control of induction motors", Departement of EECS, University of California, Berkeley, CA 94720.

- [16] D.Normand-Cyrot, "Théorie et pratique des systèmes non linéaires en temps discret" PhD thesis, Thèse de docteur d'état de l'Université de Paris-Sud, 1983.
- [17] S. Monaco and D.Normand-Cyrot, "The immersion under feedback of multidimensional discrete-time nonlinear systems into a linear system", International Journal of Control, 38(1):245-261, 1983.
- [18] S.Monaco and D.Normand-Cyrot, "Invariant distribution for discrete-time nonlinear systems." Systems & control letters, 5:191-196, 1984.
- [19] S.Monaco, D.Normand-Cyrot, "On The simpling of linear analytic control system" In Proceedings of the 24<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and control, pages 1457-1462, FT.Lauderdale, FL, December, 1985.
- [20] S.Monaco and D.Normand-Cyrot, "Minimun-phase nonlinear discrete-time systems and feedback stabilization", In proceeding of the 26<sup>th</sup> IEEE Conference on decision and control, pages 979-986, Los Angeless, CA, December 1987.
- [21] S.Monaco and D.Normand-Cyrot "Zero dynamics of sampled nonlinear system", Systems & Control Letters, 11:229-234, 1988.
- [22] S.Monaco and D.Normand-Cyrot "Multirate sampling and nonlinear digital control", Report D.I.S., University of Rome 'La Sapienza', Italy, 1988.
- [23] S.Monaco, D.Normand-Cyrot and S.Stornelli, "On the linearizing feedback in nomlinear sampled data control schemes", In Proceeding of the 25<sup>th</sup> IEEE, Conference on decision and control, pages 2056-2060 Athens Greece, December 1986.
- [24] S.Monaco and D.Normand-Cyrot, "Sur la commande digitale d'un système nonlineaire à déphasage minimale", In proceeding of 8<sup>th</sup> International Conference on Analysis and Optimization of systems, Antibes, France, 1988.
- [25] S.Monaco and D.Normand-Cyrot " Quelques éléments sur la commande numérique non lineaire", In Systèmes non lineaires. 1992.Action concertée de transfert D.R.E.T.-A.F.C.E.T. Tome III.
- [26] K.J. Astrom, P.Hagander, and J.Sternby, "Zeros of sampled systems", automatica, 20(1):31-38, 1984.
- [27] P.Hsu and S.S.Sastry , "The effect of discretized feedback in a closed-loop system", In Proceeding of the 26<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, pages 1518-1523, Los Angeles, CA, December, 1987.

- [28] S.T.Glad, "Output dead- beat control for nonlinear systems with one zero at infinity", *Systems & Control Letters*, 9:249-255, 1987.
- [29] A.Isidori, "Nonlinear control system: An Introduction", 2<sup>th</sup> Edition Springer Verlag, 1989.
- [30] G.Georgiou, "Sur des méthodes de commande non linéaires adaptatives: Aspects échantillonné et applications", Doctorat es sciences, Université de Paris XI Orsay, France, 1992.