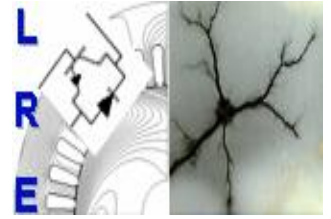




République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique
Département d'Electrotechnique
Laboratoire de Recherche en Electrotechnique
<http://lre.enp.edu.dz>



THESE

Présentée à

l'Ecole Nationale Polytechnique

En vue de l'obtention du grade de

Doctorat

en Electrotechnique Option : Machines Electriques

par :

Mlle BALI Habiba

Ingénieur-Magister en Electrotechnique de l'Université de Jijel

Thème

Etude des Alternateurs à Double Excitation

Soutenance publique prévue pour le 26 Juin 2011 devant le Jury d'examen composé de :

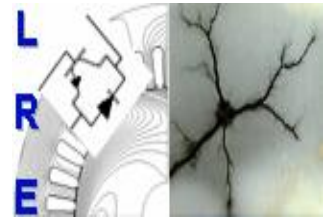
Président	Pr. Omar TOUHAMI	LRE ENP Alger, Algérie
Rapporteurs	Dr. Yacine AMARA	GREAH Université du Havre, France
	Pr. Rachid IBTIOUEN	LRE ENP Alger, Algérie
Examineurs	Pr. Georges BARAKAT	GREAH Université du Havre, France
	Pr. Salah HADDAD	Université de Tizi Ouzou, Algérie
	Dr. Larbi HADJOUT	USTHB, Algérie

ENP, 2011

10, Avenue Hassen Badi, BP 182, 16200 ,El-Harrach, Alger, Algérie



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique
Département d'Electrotechnique
Laboratoire de Recherche en Electrotechnique
<http://lre.enp.edu.dz>



THESE

Présentée à

l'Ecole Nationale Polytechnique

En vue de l'obtention du grade de

Doctorat

en Electrotechnique Option : Machines Electriques

par :

Mlle BALI Habiba

Ingénieur-Magister en Electrotechnique de l'Université de Jijel

Thème

Etude des Alternateurs à Double Excitation

Soutenance publique prévue pour le 26 Juin 2011 devant le Jury d'examen composé de :

Président	Pr. Omar TOUHAMI	LRE ENP Alger, Algérie
Rapporteurs	Dr. Yacine AMARA	GREAH Université du Havre, France
	Pr. Rachid IBTIOUEN	LRE ENP Alger, Algérie
Examineurs	Pr. Georges BARAKAT	GREAH Université du Havre, France
	Pr. Salah HADDAD	Université de Tizi Ouzou, Algérie
	Dr. Larbi HADJOUT	USTHB, Algérie

ENP, 2011

10, Avenue Hassen Badi, BP 182, 16200 ,El-Harrach, Alger, Algérie

À la mémoire de mon frère

Bilal

ملخص- إن دمج الأجهزة الكهربائية في المركبات النظيفة و زوات انخفاض مستويات الانبعاث يستدعي استخدام هياكل كهربائية مبتكرة. يندرج عملنا ضمن هذا المنظور، والذي يهدف إلى وضع منهجية لتصميم ماكينة المغناطيس الدائم ذو الإثارة المزدوجة. من خلال هذه المنهجية القائمة على أساس حل معادلات ماكسويل باستخدام أسلوب الفصل بين المتغيرات، وصلنا إلى رسم مضبوط لتوزيع الحث المغناطيسي في حالة الفراغ و الدعم لآلة المغناطيس الموضوع على السطح الدوار و لآلة التدفق التبادلي، وبالمقارنة مع النتائج المحصل عليها من خلال تطبيق طريقة العناصر المتناهية تحققنا من صحة النموذج المقترح.

الكلمات الرئيسية : الماكينة المتزامنة ذات المغناطيس الدائم ذو الإثارة المزدوجة، طريقة العناصر المتناهية، معادلات ماكسويل، آلة التدفق التبادلي، التحجيم.

Résumé – L'intégration de dispositifs électriques à bord des véhicules propres ou à faible niveau d'émissions polluantes fait appel à des structures électrotechniques innovantes. Notre travail rentre dans cette optique et vise à développer une méthodologie de dimensionnement des machines synchrones à double excitation. Avec cette méthodologie, basée sur la résolution des équations de Maxwell en utilisant la méthode de séparation des variables, on arrive à prédire exactement la distribution de l'induction à vide et en charge pour une machine synchrone à aimants montés sur la surface du rotor ainsi que pour une machine à commutation du flux. Une comparaison avec les résultats issus de calculs par éléments finis valide le modèle de dimensionnement proposé.

Mots clés : Machines synchrones à double excitation, méthode des éléments finis, équations de Maxwell, machine à commutation de flux, dimensionnement.

Abstract – The integration of electrical devices inside clean vehicles or with low pollution emission levels uses innovative electrical structures. Our work deals within this perspective and aims to develop a methodology to design a permanent magnet synchronous machine with double excitation. With this methodology, based on solving Maxwell's equations using the method of separation of variables, we arrive to predict exactly the field distribution for Surface Permanent Magnet synchronous machine and for a Flux-Switching Permanent Magnet Machine. A comparison with finite element results valid the proposed design model.

Keywords: Double excitation permanent magnets synchronous machines, finite elements method, Maxwell equations, Flux-Switching permanent magnet machine, design.

Remerciements

Le présent travail a été effectué sous la direction de Mr. Rachid IBTIOUEN, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique et Directeur du Laboratoire LRE, et Mr. Yacine AMARA, Maître de conférences à l'Université du Havre.

Je voudrais remercier particulièrement le Pr. Rachid IBTIOUEN pour l'honneur qu'il m'a fait en encadrant cette thèse. Son soutien et sa gentillesse m'ont beaucoup aidé à réaliser ce travail. Je tiens à remercier du fond du cœur Dr. Yacine AMARA pour l'aide constante et généreuse qu'il m'a apporté tant au niveau scientifique qu'amical.

Je remercie vivement Mr. Omar TOUHAMI, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour avoir accepté la présidence de ce Jury de thèse.

Ma profonde gratitude s'adresse spécialement à Mr. Georges BARAKAT, Professeur des Universités à l'Université du Havre, qui m'a accueilli au sein de son équipe « Electrotechnique et Actionneurs » du GREAH, et qui m'a offert l'opportunité de réaliser ce travail dans les meilleures conditions

Je suis également reconnaissante envers Mr. Salah HADDAD, Professeur à l'Université de Tizi-Ouzou, et Mr. Larbi HADJOUT, Maître de conférences à l'USTHB, pour leur participation à l'évaluation scientifique de ce travail, en qualité de membres du Jury.

Je tiens de plus à associer à ces remerciements tout le personnel du GREAH permanents et thésards et à tout mes amis(es) de l'Université de Jijel.

Je tiens à remercier mes frères, mes sœurs et mes parents pour leur soutien tout au long de ces années. Je remercie particulièrement ma mère qui m'a supporté et beaucoup soutenu. Elle a fait preuve de beaucoup de patience, de dévouement et de compréhension pour me permettre de finaliser et de réussir mon travail.

Enfin, j'adresse ma sincère gratitude à toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à l'aboutissement de ce travail, particulièrement les familles Rouikha, Chabou, Boulassel et Ben Chaben.

Table des matières

Introduction générale.....	.1
Chapitre I : Position du problème	5
I.1 Introduction.....	7
I.2 Transport et pollution atmosphérique	8
I.3 Les énergies renouvelables	10
I.3.1 L'énergie hydraulique	11
I.3.2 L'énergie éolienne.....	11
I.3.3 L'énergie solaire photovoltaïque.....	11
I.3.4 L'énergie de la biomasse.....	11
I.3.5 L'énergie géothermique	11
I.4 Technologies innovantes dans le secteur de l'automobile	11
I.5 Cahier des charges	13
I.6 La Désexcitation	13
I.7 Les Machines Synchrones à Aimants Permanents « MSAP »	14
I.8 Machines Synchrones à Double Excitation Série	17
I.9 Machines Synchrones à Double Excitation Parallèle.....	18
I.10 Méthodes de modélisation et de dimensionnement	20
I.11 Étude de la machine à aimants montés en surface SPM	20
I.11.1 Définition et avantages de l'enroulement concentrique	21
I.11.2 Réalisation de l'enroulement concentrique	22
I.11.3 Dimensionnement par optimisation du rapport D/D_e	23
I.11.4 Élément de dimensionnement	25
a. Relations géométrique.....	25
b. Équation du couple	26
c. Pertes joule.....	27
I.11.5 Optimisation du rapport D/D_e pour un enroulement concentrique	29
I.12 Étude de la Machine à Commutation de Flux « MCF »	30
I.12.1 Présentation de la MCF à double excitation.....	31
I.12.2 Présentation de la MCF	32
I.12.3 Étude numérique de la MCF	34
I.12.4 Étude de la réaction magnétique d'induit.....	37
I.13 conclusion	41
Chapitre II : Modélisation Analytique de la Machine Synchrone à double excitation série	43
II.1 Introduction	45
II.2 Modélisation analytique de la machine synchrone à double excitation série	45

II.2.1 Formulation magnétostatique du problème et hypothèses de calcul.....	46
II.2.2 Solution dans les différentes régions de la machine à vide	48
a. Solution dans la région I (encoches).....	48
b. Solution dans la région II (entrefer).....	50
c. Solution dans la région III (aimants permanents)	50
d. Solution dans la région IV (encoches pour bobinage d'excitation)	54
II.3 Exploitation des conditions de passage entre les différentes régions	55
II.3.1 Conditions de passage entre les régions I et II.....	55
II.3.2 Conditions de passage entre les régions II et III.....	56
II.3.3 Conditions de passage entre les régions III et IV	57
II.4 Système d'équation dérivant de l'exploitation des conditions de passage	59
II.5 Exploitation et validation des résultats.....	60
II.6 Modélisation analytique du champ créé par l'excitation bobinée	62
II.6.1 Solution dans les différentes régions de la machine	62
a. Solution dans la région I (encoches).....	62
b. Solution dans la région II (entrefer).....	63
c. Solution dans la région III (aimants permanents)	63
d. Solution dans la région IV (encoches pour bobinage d'excitation)	64
II.7 Système d'équation dérivant de l'exploitation des conditions de passage	64
II.8 Exploitation et validation des résultats.....	65
II.9 Calcul des grandeurs globales de la machine	66
II.9.1 Calcul des forces et du couple de détente.....	66
II.9.2 Calcul du flux et de la force électromotrice.....	67
II.9.3 Calcul des inductances propres.....	68
II.9.4 Minimisation du couple de détente.....	70
II.10 Prise en compte des équations du circuit.....	71
II.10.1 Calcul des grandeurs global à partir des grandeurs locales	72
II.10.2 Fonction de distribution d'une phase statorique	72
II.10.3 Calcul de la FEM.....	73
II.10.4 Calcul de l'inductance magnétisante et mutuelle	74
II.10.4 Calcul du couple	74
II.11 Équations du circuit.....	75
II.11.1 Exploitation du modèle développé.....	77
II.12 conclusion	78
Chapitre III : Modélisation Analytique de la Machine à commutation de Flux.....	81
III.1 Introduction	83
III.2 Présentation de la machine étudiée	83
III.2.1 Définition des différentes régions de la machine	83
III.2.2 Solution générale de la formulation magnétostatique en potentiel vecteur à vide	84
III.3 Définition des différentes régions de la machine (en présence des aimants seulement)	86
III.3.1 Solution générale de la formulation magnétostatique en potentiel vecteur à vide	87

a. Solution dans la région 1 (entrefer).....	88
b. Solution dans la région 2 (aimants permanents)	88
c. Solution dans la région 3 (air extérieur).....	89
III.4 Exploitation des relations de passage entre les régions 1 et 2	90
III.5 Exploitation des relations de passage entre les régions 2 et 3	91
III.6 Détermination de la constante $D_0^{(2,l)}$	93
III.7 Mise en équation sous la forme d'un système d'algèbre linéaire	95
III.8 Résultats obtenus.....	95
III.8.1 Calcul des coefficients dans la région des aimants.....	96
III.9 Définition des différentes régions dans la machine (sans encoches statoriques)	99
III.9.1 Solution générale de la formulation magnétostatique en potentiel vecteur à vide	100
a. Solution dans la région 1 (évidements rotoriques).....	100
III.10 Résumé des expressions	101
III.11 Exploitation des relations de passage entre les régions 1 et 2	102
III.12 Exploitation des relations de passage entre les régions 2 et 3	103
III.13 Exploitation des relations de passage entre les régions 3 et 4	105
III.14 Détermination de la constante $D_0^{(2,l)}$	106
III.15 Synthèse des équations obtenues.....	106
III.16 Résultats obtenus.....	107
III.17 Calcul des coefficients dans la région 1 et la région 3	108
III.18 Conclusion	112
Conclusion générale.....	115
Bibliographie.....	119
Annexe A.....	131
Annexe B.....	137
Annexe C.....	163

Introduction Générale

Actuellement, le transport est l'un des contributeurs les plus importants d'émission de gaz à effet de serre. Compte tenu de cela et des nouvelles législations au niveau international visant à réduire les émissions polluantes, les constructeurs automobiles ont pris des initiatives pour promouvoir l'utilisation de véhicules propres ou à faible niveau d'émissions polluantes. Ainsi, on assiste à l'intégration de plus en plus de dispositifs électriques à bord des véhicules. Pour satisfaire cette augmentation des besoins en énergie électrique, l'alternateur doit répondre à un cahier des charges intégrant des contraintes de diverses natures (thermique, mécanique, contrôle du flux, coût, encombrement, couple massique, vitesse maximale, etc.) [1], [2], [3].

Les machines à aimants permanents de par leurs bonnes performances (bon rendement, puissance massique élevée, ...etc.) semblent de bonnes candidates pour répondre à un tel cahier des charges. Cependant, le fait que le flux des aimants permanents ne soit pas facilement contrôlable rend les machines à aimants permanents moins aptes pour le fonctionnement à haute vitesse.

Les machines synchrones à aimants permanents double excitation, grâce au degré de liberté supplémentaire dont elle dispose (la double excitation), répond à ce cahier des charges en alliant les avantages des machines à aimants permanents (bon rendement, puissance massique élevée) avec ceux des machines à excitation bobinée (souplesse de fonctionnement à vitesse élevée). Le défluxage de ces machines (réduction du flux dans l'entrefer) est plus aisé que celui des machines à aimants permanents. De plus, il est également possible de faire coïncider les zones de bon rendement avec les zones de fonctionnement les plus fréquemment sollicitées du véhicule afin d'optimiser la gestion de l'énergie embarquée et de minimiser les rejets d'émissions polluantes [4], [5].

Dans cette optique, des structures électrotechniques innovantes sont étudiées. Dans notre travail, on s'intéresse plus particulièrement à la modélisation analytique de structures à double excitation.

Notre manuscrit de Thèse comporte essentiellement trois parties.

La première est consacrée à la définition du contexte général de notre étude. Un aperçu sur l'utilisation, dans le domaine de la traction électrique, des structures innovantes à aimants permanents permettant de réduire la consommation de carburant et d'émissions de CO₂ est présenté. Cette partie inclut également une présentation des principes de fonctionnement des

machines à double excitation ainsi qu'un état de l'art sur la modélisation pour le dimensionnement des machines électriques.

La seconde partie de la thèse est consacrée à la présentation du modèle analytique d'une machine à double excitation série. Ce modèle est basé sur la résolution des équations de Maxwell en utilisant la méthode de séparation des variables dans les parties à faible perméabilité de la machine étudiée (encoches, entrefer et région des aimants permanents). Ce modèle permet de calculer la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer à vide et en charge et d'établir par la suite les expressions locales des performances et des grandeurs caractéristiques de la machine en fonction de ses paramètres géométriques et physiques. Le modèle construit permet, en plus, un couplage fort des équations du circuit et des équations du champ. Ce couplage peut être utilisé ultérieurement dans un processus d'optimisation.

La validation des résultats est réalisée par comparaison avec des calculs éléments finis.

La troisième partie du manuscrit présente l'étude de modélisation analytique de la machine à commutation de flux, résultant également de la résolution des équations de Maxwell.

Enfin, la conclusion nous permettra de revenir sur les acquis de ce travail et de donner quelques perspectives.

Chapitre I – Position Du Problème

I.1 Introduction

Tous les jours, les activités humaines, qu'elles soient industrielles, agricoles ou résidentielles, ont pour conséquence le rejet dans l'atmosphère de grandes quantités de produits chimiques naturels et synthétiques. À l'époque contemporaine, un nouveau type de pollution s'est ajouté à la pollution industrielle : la pollution automobile où les moyens de transports actuels sont responsables du rejet de 87% de monoxyde de carbone, à cause des combustions incomplètes et du rejet de 70% d'oxydes d'azotes [W1].

Afin de réduire ces émissions polluantes, les industrielles d'automobiles proposent des solutions innovantes qui font usage de la machine électrique. Plusieurs études montrent que les **Machines Synchrones à Aimants Permanents (MSAP)** sont souvent utilisées dans le domaine de la traction électrique (routière ou ferroviaire). Ces machines offrent la possibilité de fonctionner à vitesse variable (alternateurs d'automobiles, avions, éoliennes...) [6], [7]. Cependant, l'inconvénient principal que présente les MSAP réside dans la difficulté de contrôler le flux inducteur créé par les aimants, on parle dans ce cas de défluxage (réduction du flux dans l'entrefer) [4], [6], [8].

Les machines synchrones à double excitation, grâce au degré de liberté supplémentaire dont elle dispose (la double excitation), allient les avantages des machines à aimants permanent (bon rendement, puissance massique élevée) avec ceux des machines à excitation bobinée (souplesse de fonctionnement à vitesse élevée). Le défluxage de ces machines (réduction du flux dans l'entrefer) est plus aisé que celui des machines à aimants permanents. De plus, il est également possible de faire coïncider les zones de bon rendement avec les zones de fonctionnement les plus fréquemment sollicitées du véhicule afin d'optimiser la gestion de l'énergie embarquée et de minimiser les rejets d'émissions polluantes [5], [9].

Ce premier chapitre est consacré à la définition du contexte général de notre étude. Un aperçu sur l'utilisation, dans le domaine de la traction électrique, des structures innovantes à aimants permanents permettant de réduire la consommation de carburant et d'émissions de CO₂ est présenté. Ce chapitre inclut également une présentation des principes de fonctionnement des machines à double excitation ainsi qu'un état de l'art sur la modélisation pour le dimensionnement des machines électriques qui nous intéresse à savoir la machine synchrone à double excitation série et la machine à commutation du flux.

I.2 Transport et pollution atmosphérique

La pollution atmosphérique (ou pollution de l'air) est un type de pollution défini par une altération de la pureté de l'air, par une ou plusieurs substances ou particules présentes à des concentrations et durant des temps suffisants pour créer un effet toxique ou écotoxique [W1]. On peut diviser les causes conduisant à cette pollution atmosphérique en deux grandes parties : tout d'abord, celles provenant directement de la nature, puis celles qui sont anthropiques (dues à une action dévastatrice de l'homme) [W1], [W2].

Les origines naturelles de la pollution sont notamment les activités géologiques de la terre, comme le volcanisme (émission du soufre dans l'air), c'est le cas du volcan en Irlande qui s'est mis en éruption en Avril 2010 (figure I.1), on trouve aussi, par exemple, les événements météorologiques tels que les orages qui font apparaître du dioxyde d'azote. L'autre grande cause naturelle de la pollution atmosphérique est la combustion qui provoque un dégagement important de CO₂ (figure I.2).



Fig.I.1 : Nuage de cendres craché par le volcan Eyjafjöll (Avril 2010)



Fig.I.2 : Les feux de forêt en Australie(2003). 190 millions de tonnes de CO₂ étaient émis

Ce n'est pas la présence de ces polluants, qui sont d'origine naturelle, dans l'atmosphère qui pollue mais leur trop forte concentration qui l'est. Cependant, la pollution a considérablement augmenté depuis la révolution industrielle, principalement à cause des combustions. Celles-ci se font à tous les niveaux, depuis les moteurs de voitures et les installations de chauffage aux centrales électriques [W1], [W2].

En effet, de plus en plus nombreux, les véhicules à moteur rejettent des gaz polluants: gaz carbonique, monoxyde de carbone, oxydes d'azote jusque dans la haute atmosphère avec les avions et fusées. La plupart des moteurs font appel aux énergies fossiles (pétrole, houille, gaz naturel), à l'origine d'une pollution chronique depuis le début du XX^e siècle.

Il existe trois types de polluants qui contribuent à l'échauffement planétaire (l'effet de serre) : le dioxyde de carbone (CO_2) à 63,4 %, le méthane (CH_4) à 20,3 % et l'oxyde nitreux (N_2O) et les CFC (chlorofluorocarbures) à 10 %. Théoriquement, le gaz carbonique est la cause directe de l'effet de serre, les statistiques indiquent que près de 25 % des gaz à effet de serre sortent des pots d'échappement.

On peut citer d'autres gaz qui contribuent à la pollution atmosphérique par exemple le monoxyde de carbone (CO), les hydrocarbures imbrûlés (HC), des particules en suspension (hydrocarbures partiellement brûlés), le dioxyde de soufre (SO_2).

Les effets de la pollution sont multiples et même l'être humain en subit les conséquences. Des taux très élevés de quelques maladies augmentent rapidement voir des troubles cardiovasculaires et respiratoires, ainsi que des maladies pulmonaires comme les bronchites, l'asthme, le cancer...etc. L'homme est d'emblée atteint de ses maladies, surtout si son environnement est fortement pollué comme à Mexico où cette métropole, l'une des plus grandes au monde, subit une pollution catastrophique. Dans ce type de milieu pollué, plus de la moitié de la population souffre de maladies respiratoires. L'accident le plus grave et tragique se produit à Londres pendant l'hiver 1952, où le smog (brouillard en fumé constitué d'ozone) provoqua 4000 morts (figures I.3, I.4 et I.5). [W1], [W2], [W3], [5].



**Fig.I.3 : La colonne Nelson
durant le grand smog de
Londres de 1952. [W3]**



**Fig.I.4 : La colonne Nelson
par beau temps. [W3]**



**Fig.I.5 : le smog à New
York (1988). [W1]**

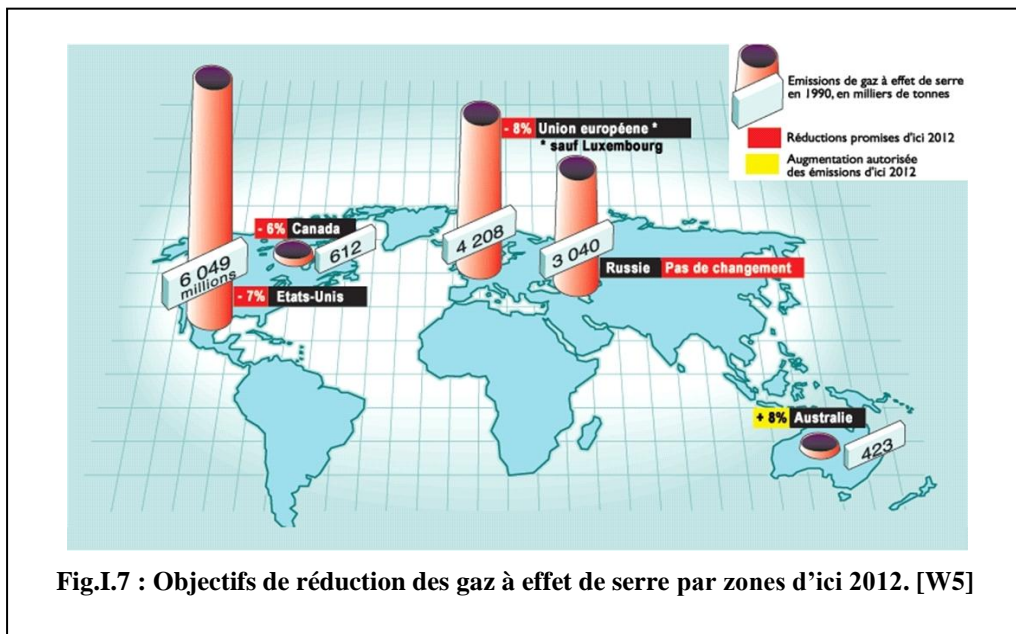
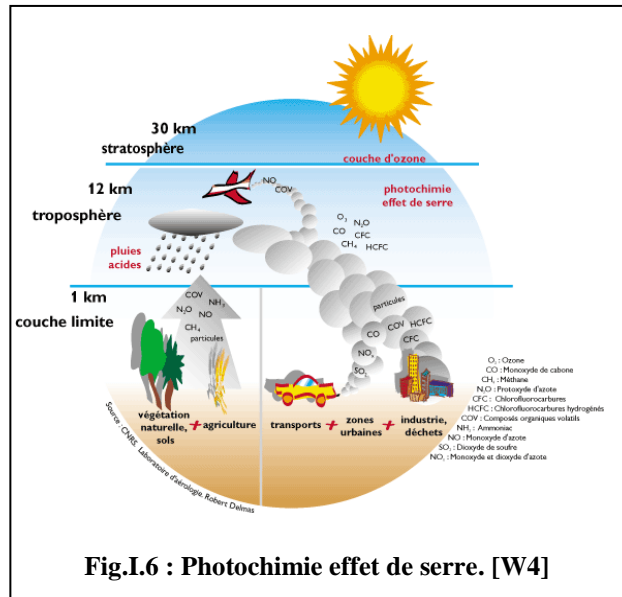
Plusieurs conférences internationales qui portent sur le thème de la pollution atmosphérique se sont tenues, on peut citer le protocole de Kyoto ainsi que les accords de Rio 1992 « convention sur les changements climatiques », qui rentre dans le cadre de la convention des Nations Unies sur les changements climatiques. Ce protocole est entré en vigueur le 16 Février 2005 et qui a été ratifié à ce jour par 183 pays, à l'exception notable des États-Unis [5], [W3].

Depuis 2006 notamment, la Chine est devenue le premier pays émetteur de CO₂ devant les États-Unis en totalisant presque 20% des émissions globales [W1].

L'objectif du protocole de Kyoto est de limiter et réduire le gaz à effet de serre qui provoque l'échauffement planétaire (figures I.6 et I.7).

Malgré que les rejets de polluants industriels régressent, ceux des gaz d'échappement augmentent sans cesse. Le secteur des transports, en particulier les transports routiers, pèse fortement dans le bilan global des émissions des substances impliquées dans la pollution atmosphérique.

Pour faire face à ce problème alarmant et afin de diminuer les rejets polluants, les industriels se sont retournés vers des énergies moins polluantes.



I.3 Les énergies renouvelables

Une énergie renouvelable est une énergie dont les réserves ne s'épuisent pas. En d'autres termes, sa vitesse de formation doit être plus grande que sa vitesse d'utilisation. Les énergies renouvelables ne sont pas forcément plus respectueuses de l'environnement que les autres car le fait qu'une énergie se reconstitue n'implique pas que les déchets d'exploitation de cette énergie disparaissent [W6]. On peut lister les principales sources d'énergies renouvelables de la manière suivante :

I.3.1 L'énergie hydraulique

De nombreuses civilisations se sont servies de la force de l'eau, qui représentait une des sources d'énergie les plus importantes avant l'ère de l'électricité. Un exemple connu est celui des moulins à eau. De nos jours l'énergie hydraulique est utilisée au niveau des barrages et sert principalement à la production d'électricité.

I.3.2 L'énergie éolienne

L'énergie éolienne est utilisée depuis très long temps. Les voiliers, les moulins à vents sont utilisés depuis l'antiquité. L'énergie éolienne est aussi convertie en électricité par un générateur. Aujourd'hui, on récupère l'énergie du courant dans les océans, on parle de courantolienne (figure I.8) [W7].



Fig.I.8 : Vue d'une courantolienne.

[W7]

I.3.3 L'énergie solaire photovoltaïque

L'énergie solaire photovoltaïque est une énergie électrique coûteuse produite à partir du rayonnement solaire. L'installation solaire est privilégiée dans une région qui bénéficie d'un fort ensoleillement comme dans l'Afrique subsaharienne [W8].

I.3.4 L'énergie de la biomasse

Le terme de biomasse regroupe l'ensemble des matières organiques pouvant devenir des sources d'énergie. Ces matières organiques qui proviennent des plantes sont une forme de stockage de l'énergie solaire, captée et utilisée par les plantes grâce à la chlorophylle [W9].

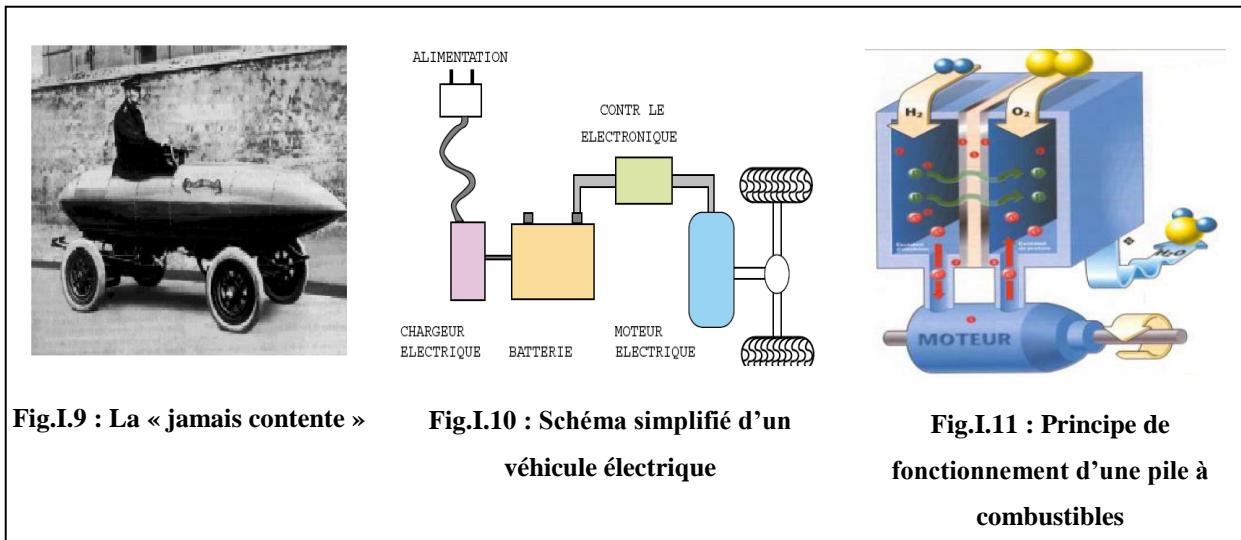
I.3.5 L'énergie géothermique

L'énergie géothermique provient du noyau terrestre en fusion. Le principe consiste à extraire l'énergie géothermique contenue dans le sol pour l'utiliser sous forme de chauffage ou pour la transformer en électricité [5], [W6].

I.4 Technologies innovantes dans le secteur de l'automobile

Dans le but de développer des moyens de transports moins polluants, les industrielles d'automobile doivent faire face à plusieurs défis. En effet, ils doivent explorer de nouvelles solutions technologiques et de mettre en œuvre des alternatives au véhicule thermique conventionnel. Plusieurs solutions ont été proposées, on cite les voitures électriques (la jamais

contente 1889 (figures I.9, I.10), hybrides, ou au gaz et voir même la voiture à alimentation par pile à combustible (figure I.11). Toutefois le choix de la solution est fonction de l'usage.



De nos jours, l'utilisation du moteur électrique (machine électrique) est très répandue dans le domaine de l'industrie automobile. Les machines électriques sont nombreuses et variées, le choix est large avec la machine à courant continu, la machine asynchrone, la machine synchrone à rotor bobiné, à aimants permanents ou à reluctance variable. La machine électrique sélectionnée doit répondre à un cahier des charges déterminé intégrant des contraintes de diverses natures (thermique, mécanique, contrôle du flux, coût, encombrement, couple massique, vitesse maximale, etc.) [10], [11], [12].

Dans le domaine de la traction électrique, les **Machines Synchrones à Aimants Permanents (MSAP)** occupent une place de premier ordre [11], [12], [13], [14]. Elles offrent des caractéristiques de fonctionnement intéressantes et concurrentielles [5], [6], [11].

Les aimants sont utilisés dans ce type de machines comme inducteurs, ainsi selon la façon dont on monte ces aimants, on obtient différentes structures parmi les quelles on peut citer : les structures dont les aimants sont placés directement sur la surface du rotor **SPM (Surface Permanent Magnet Machine)**, structures où les aimants sont insérés dans le rotor mais qui débouchent à la surface (**Insert Permanent Magnet**), et structures où les aimants sont enterrés **IPM (Interior/Inside Permanent Magnet machines)** [4], [5], [6].

Les MSAP fonctionnent à flux d'excitation fixe ce qui constitue un inconvénient majeur. En effet, la machine doit fonctionner à puissance constante sur une large gamme de vitesse ce qui nécessite le contrôle du flux d'excitation créée par les aimants (défluxage). Le contrôle du flux dans l'entrefer peut être effectué soit par introduction d'une deuxième source d'excitation bobinée (Double Excitation), soit grâce à l'utilisation d'un convertisseur commandable [5], [6].

Le but de cette partie est d'expliquer globalement les différents points qu'on vient de citer précédemment.

I.5 Cahier des charges

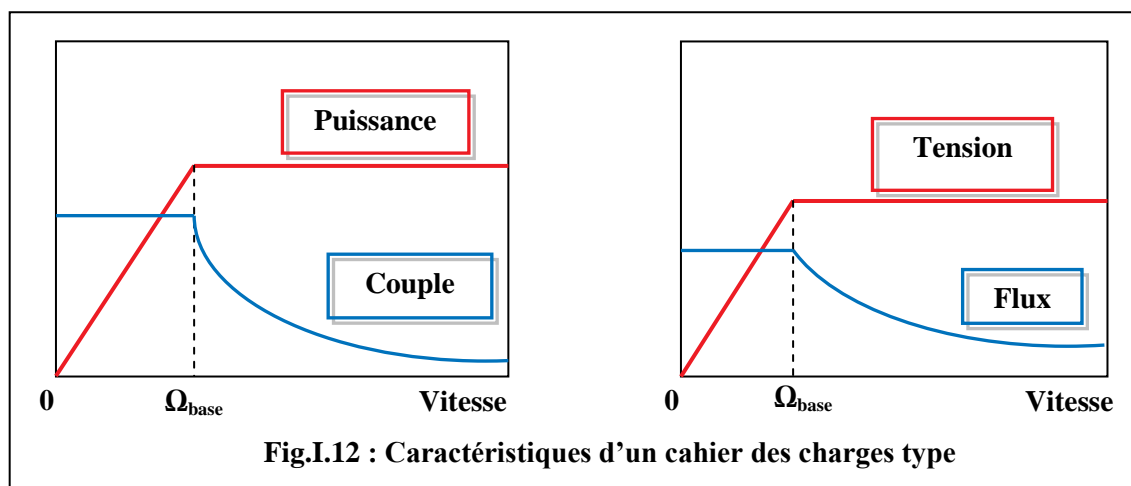
Le cahier des charges donne une palette d'informations en matière de puissance, couple, coût, vitesse, dimensions...etc. De manière générale, on peut résumer les différentes contraintes d'un cahier des charges comme suit [5], [6], [10], [14] :

- Construction assez simple (encombrement) avec une masse volumique la plus faible possible ;
- Coût non prohibitif (maintenance réduite, matériaux) avec un bon rendement global ;
- Possibilité de récupération d'énergie au freinage ;
- Fiabilité avec une durée de vie appréciable ;
- Système non polluant (bruit+CEM).

Ces contraintes peuvent donner lieu à des compromis.

I.6 La Désexcitation

La figure I.12 représente les allures des caractéristiques couple, tension, flux et puissance en fonction de la vitesse auxquelles doit répondre le système de traction [15], [16]. La machine électrique à choisir doit fonctionner dans n'importe quel point de l'espace couple/vitesse [5], [10], [14].



Si on analyse ces caractéristiques, on distingue deux zones de fonctionnement :

- Une première zone à couple constant. La plage de variation de vitesse va de zéro jusqu'à une vitesse dite vitesse de base ;
- Pour la deuxième zone de fonctionnement, au-delà de la vitesse de base, la puissance est constante.

À partir de l'expression classique de la puissance pour un système triphasé, on peut écrire que :

$$P_{em} = C_{em} \cdot \Omega = 3 \cdot EI \cos \psi, \text{ avec : } E = p \cdot \Omega \cdot \phi \Rightarrow P_{em} = 3 \cdot p \cdot \Omega \cdot \phi \cdot I \cos \psi \text{ et } \psi = (\vec{I}, \vec{E})$$

On peut écrire l'expression du couple moyen $C_{em} = 3 \cdot p \cdot \phi \cdot I \cos \psi$.

À la vitesse de base la tension est maximale (ainsi que la puissance), au-delà de cette vitesse il faut réduire le flux (défluxer = flux weakening). Pour y parvenir on a trois possibilités [5], [6] :

- Par maîtrise du flux inducteur, on fait varier le flux ϕ en $1/\Omega$;
- Par la commande électronique, on fait varier le flux $I \cos \psi$ en $1/\Omega$;
- Par la combinaison de la maîtrise du flux inducteur et de la commande électronique.

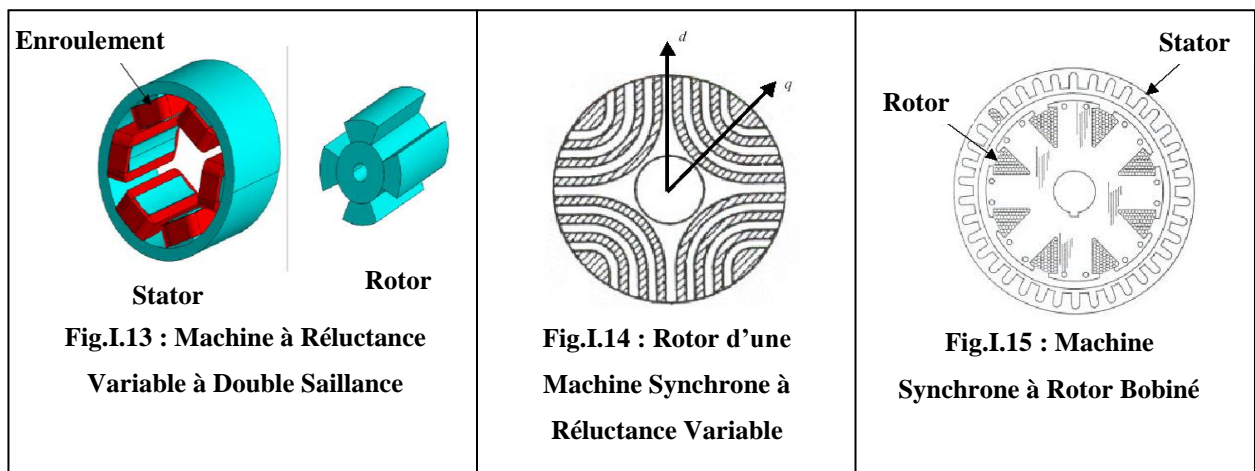
Selon la machine électrique à utiliser, le défluxage va introduire d'autres contraintes ce qui peut conduire à des solutions différentes. Aussi, il faut noter que selon l'équipe de conception la solution va varier énormément [5], [14].

I.7 Les Machines Synchrones à Aimants Permanents « MSAP »

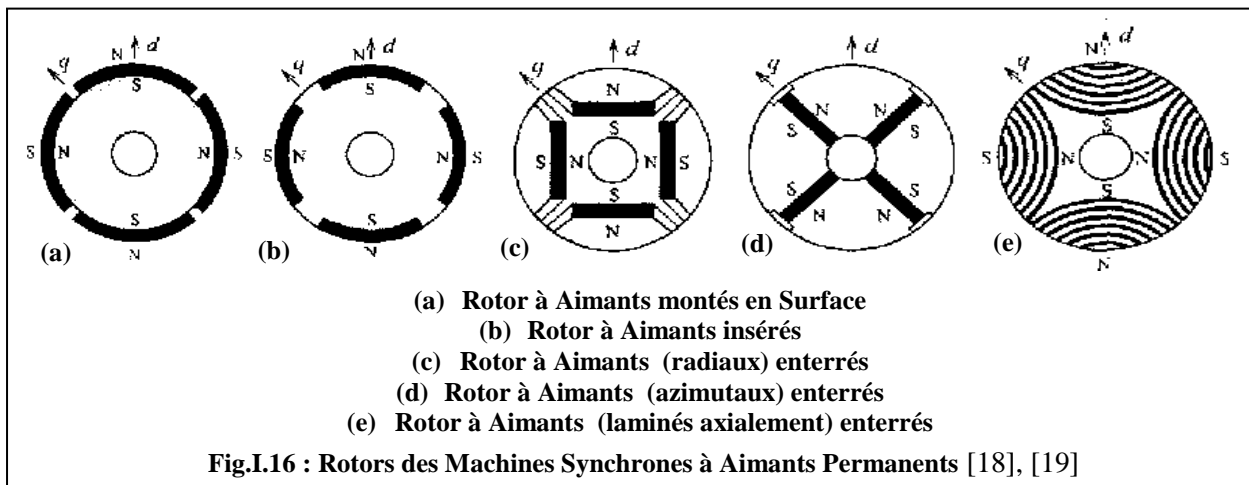
Les MASP par leurs performances intéressantes en couple massique ainsi que par leur bon rendement, constituent des solutions avantageuses par rapport aux autres machines. Le tableau comparatif (Tableau-2), résume les avantages et les inconvénients des différents types de machines électriques [5], [10].

Type de machine	Avantages	Inconvénients
Machine à Courant Continu (MCC)	<ul style="list-style-type: none"> • Electronique de commande simple ; • Défluxage + montée en vitesses élevées facile à réaliser pour les MCC à inducteur bobiné. 	<ul style="list-style-type: none"> • Coût d'entretien élevé (usure du système ballais-collecteur) ; • Fort encombrement suite à la présence des enroulements de compensation ; • Puissance massique faible ; • Refroidissement difficile à réaliser à cause du mouvement de l'induit.
Machine Asynchrone à cage d'écureuil ou à rotor massif (MAS)	<ul style="list-style-type: none"> • Fabrication assez simple ; • Machine robuste. 	<ul style="list-style-type: none"> • Mauvais facteur de puissance ; • Pertes Joule importantes au rotor (refroidissement difficile) ; • Rendement relativement faible.
Machine à Réductance Variable à Double Saillance (MRVDS) (figure 13)	<ul style="list-style-type: none"> • Fabrication simple ; • Fonctionnement sur une large plage de vitesse ; • Bon rapport couple/masse. 	<ul style="list-style-type: none"> • Electronique de commande assez compliquée ; • Bruit et vibrations ; • Mauvais facteur de puissance ; • Surdimensionnement de l'alimentation.
Machine Synchrones à Réductance Variable (MSRV) (figure 14)	<ul style="list-style-type: none"> • Montée en survitesse facile (rotor passif) ; • Rendement meilleur que les MAS. 	<ul style="list-style-type: none"> • Facteur de puissance assez faible ; • Electronique de commande compliquée ; • Nécessité d'un rapport de saillance élevé.
Machine Synchrones à Rotor Bobiné (MSRB) (figure 15)	<ul style="list-style-type: none"> • Bon rendement ; • Défluxage aisé par action sur le courant d'excitation. 	<ul style="list-style-type: none"> • Contacts glissants limitant les vitesses de rotation ; • Rapport couple/masse plus faible que pour les machines synchrones à aimants ; • Rendement plus faible suite à la présence des pertes Joule dans le rotor ; • Electronique de commande assez compliquée.
Machine Synchrones à Aimants Permanents (MSAP) (figure 16)	<ul style="list-style-type: none"> • Puissance massique élevée ; • Pas d'échauffement au rotor (utilisation des aimants) ; • Refroidissement aisé ; • Bon rendement. 	<ul style="list-style-type: none"> • Coût lié à celui des aimants ; • Technologie coûteuse (structure).

Tableau.2 : Comparaison des différents types de machine électrique



En général, le stator de la MSAP est analogue à celui des machines synchrones ou asynchrones classique, la différence réside au rotor où les aimants peuvent être montés en surface, insérés ou enfuis dans le fer rotorique (figure I.16) [17].



On classe la MSAP selon plusieurs critères car il existe, entre autre, des machines [14] :

- Tournantes ou linéaires ;
- A aimants statorique ou rotorique ;
- A rotor extérieur ou intérieur ;
- Monophasés ou polyphasés ;
- A pôles lisses, à simple saillance, à double saillance ;
- A entrefer axial ou radial...etc.

Selon le type de la machine à aimants permanents de nouveaux avantages et inconvénients vont apparaître et qu'on peut résumer comme suit :

1. Pour les machines dont les aimants sont montés directement sur la surface rotorique (figure I.16.a) dites **SPM** (**S**urface **P**ermanent **M**agnets **M**achine), il est nécessaire de fretter afin de maintenir les aimants et aussi d'éviter le court-circuit. Cependant, cette frette constitue un entrefer additionnel qui s'ajoute à l'entrefer mécanique [5], [6], [14], [17]. En outre, pour ce type de machine, on utilise des aimants terres rares pour avoir de bonnes performances, mais l'utilisation de ces aimants conduit à un coût prohibitif (contrainte coût violée) [19], [20]. Le risque de démagnétisation irréversible des aimants à cause de la réaction d'induit vient s'ajouter aux difficultés liées à ce genre de construction. Par conséquent, le défluxage se présente comme une tâche très délicate [5], [21], [22].

2. Pour les machines dont les aimants sont insérés dans le rotor (figure I.16.b) mais débouchent à leur surface, on retrouve globalement les mêmes problèmes que précédemment. Ces structures sont dites **Insert Permanent Magnet machines** [5], [17].

3. Les machines dont les rotors sont représentés sur les figures (figures I.16.c, I.16.d et I.16.e) sont dites **IPM (Interior/Inside Permanent Magnet machines)**. Ces machines dont le rotor est plus complexe que celui d'une SPM, offrent la possibilité de fonctionner à des grandes vitesses de rotation. De plus, les IPM peuvent donner lieu à la concentration de flux ce qui permet d'utiliser des aimants de type ferrites (contrainte coût respectée), aussi l'entrefer est minimum car on n'utilise pas de frettes afin de fixer les aimants [4], [5], [6], [10], [17]. En terme de défluxage, la construction du rotor de ces structures, permet de contrôler le flux créé par les aimants sans les exposer à la démagnétisation comme pour le cas des SPM [5], [17], [23].

L'utilisation des aimants permanents, augmente significativement le rendement et le rapport couple/masse. Cependant, la présence des aimants engendre un problème lié à la nature du flux d'excitation. Pour des machines associées à des convertisseurs commutables, on peut contrôler le flux total en agissant sur le courant d'induit où la réaction d'induit doit être égale au flux d'excitation créé par les aimants. Si maintenant, le convertisseur est non commutable, le problème reste entier [5], [21].

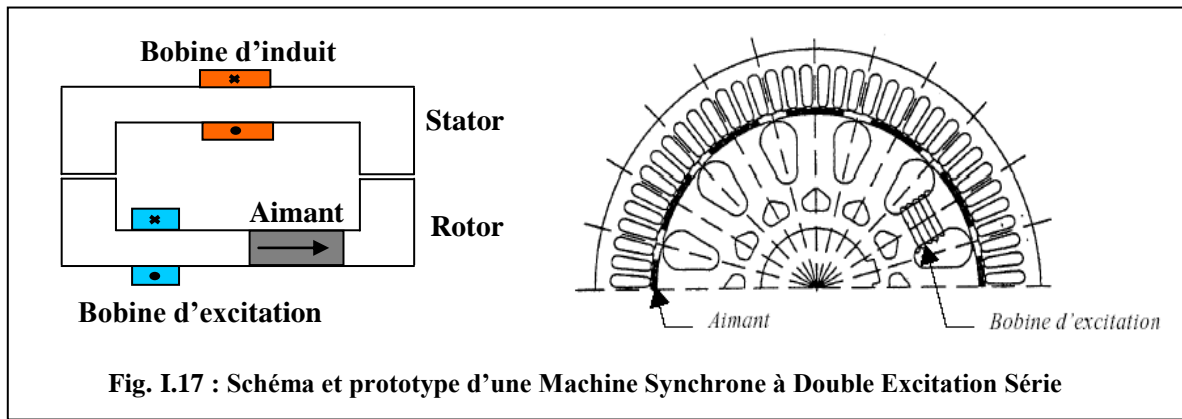
Afin de contrôler le flux dans l'entrefer des MSAP, plusieurs équipes de recherche proposent d'utiliser des structures à plusieurs systèmes d'excitation (Poly-excitation) [15]. Généralement, on utilise deux différentes sources d'excitation [4], [5], [8], [24], [25], le flux est ainsi créé par des aimants et par un enroulement d'excitation (bobine d'excitation). La deuxième source sert essentiellement à contrôler le flux créé par les aimants [5], [21].

Selon l'agencement des circuits d'excitation, on peut classer ces machines comme suit :

- Machine Synchrones à Double Excitation Série ;
- Machine Synchrones à Double Excitation Parallèle

I. 8 Machines Synchrones à Double Excitation Série

Dans ce type de machine, l'excitation bobinée est magnétiquement mise en série avec celle relative aux aimants, la (figure I.17) schématise ce principe de fonctionnement [5], [8], [15], [24].



L'inconvénient majeur pour ce type de configuration, réside dans le fait que le flux d'excitation bobiné traverse les aimants, ce qui engendre en premier lieu un risque de démagnétisation. En second lieu, il faut prendre en considération que la perméabilité des aimants est proche de celle de l'air, ainsi les bobines d'excitation voient une réluctance magnétique élevée ce qui réduit considérablement l'efficacité du défluxage [5], [15]. D'autre part, un défluxage total conduit à des pertes Joule dans l'inducteur très importantes [5], [15].

I.9 Machines Synchrones à Double Excitation Parallèle

A l'inverse de la double excitation série, et dans le cas de la double excitation parallèle, les flux des aimants et de l'excitation bobinée n'ont pas toujours le même chemin (figure I.18). Ainsi les deux circuits d'excitation sont partiellement découplés, il existe également des topologies où ces deux circuits d'excitation sont complètement découplés [5], [15]. Dans ce cas on peut éviter le risque de démagnétisation. Le défluxage est fonction de l'agencement des circuits d'excitation [5], [25], [26], [27].

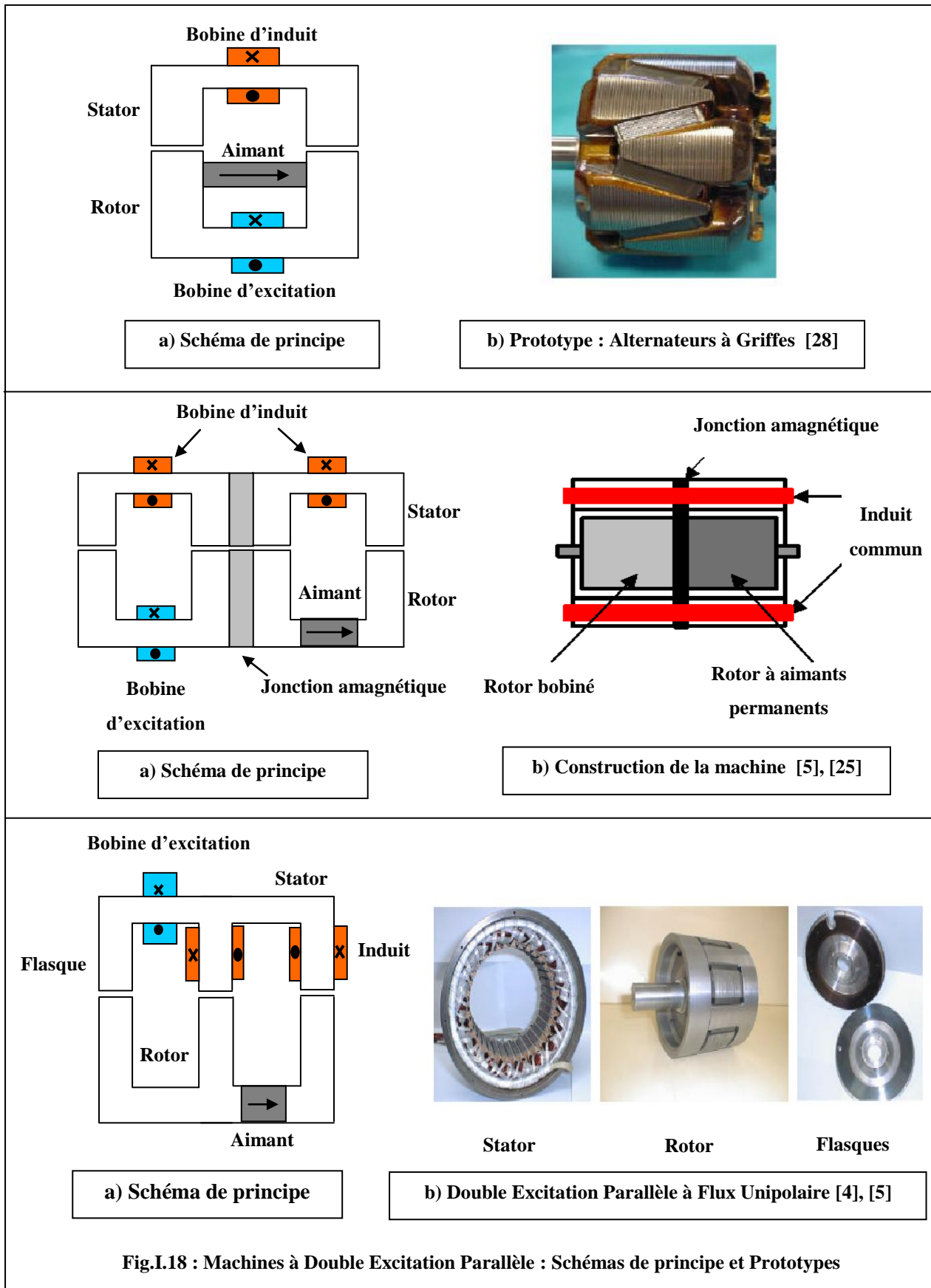


Fig.I.18 : Machines à Double Excitation Parallèle : Schémas de principe et Prototypes

La modélisation analytique ou numérique des machines à double excitation, permet essentiellement de dégager les performances et les limites de chaque structure. Dans notre travail, on s'intéresse en premier lieu à un cas particulier de la machine à double excitation série, c'est la SPM et en second lieu à une structure innovante dite Machine à Commutation de Flux MCF dont le principe est basé sur la concentration de flux. Cette machine présente l'avantage d'utiliser le défluxage électronique qui permet de fonctionner à puissance maximale constante sur une large plage de vitesse [18].

I. 10 Méthodes de modélisation et dimensionnement

D'une manière générale, l'analyse d'un dispositif nécessite sa subdivision en éléments plus simples. De ce point de vue, les méthodes de modélisation actuellement disponibles se répartissent en deux groupes [30], [31].

En premier lieu, on trouve *les méthodes numériques* (basées sur une discrétisation spatiale et/ou temporelle fine du problème) qui sont d'une mise en œuvre rapide, à condition de pouvoir se procurer un logiciel performant, grâce aux facilités d'entrée des données et de l'exploitation des résultats [29], [30]. La méthode des éléments finis (MEF), qui est une méthode numérique, se présente aujourd'hui comme une des méthodes les plus robustes [1], [31].

En second lieu, il existe *des méthodes dites analytiques*. Elles consistent en l'exploitation des modèles décrivant de manière analytique le comportement dimensionnel de la structure. Certes moins fines et précises, ces représentations, à caractère global, sont bien adaptées à la prise en compte de phénomènes physiques de diverses natures [2], [3]. Ces méthodes continuent à se développer en tenant compte de l'évolution de la technique et de la plus grande disponibilité des moyens de calcul (techniques de calcul symbolique, techniques de programmation automatique) [29], [30].

I.11 Étude de la machine à aimants montés en surface SPM

Une SPM équipée d'un enroulement triphasé équilibré, présente l'avantage d'avoir une configuration très simple par contre elle a l'inconvénient majeur d'avoir une inductance statorique (L_d inductance selon l'axe direct) de faible valeur car l'entrefer est important, par conséquent le contrôle de flux (défluxage) devient une tâche très délicate [20], [21].

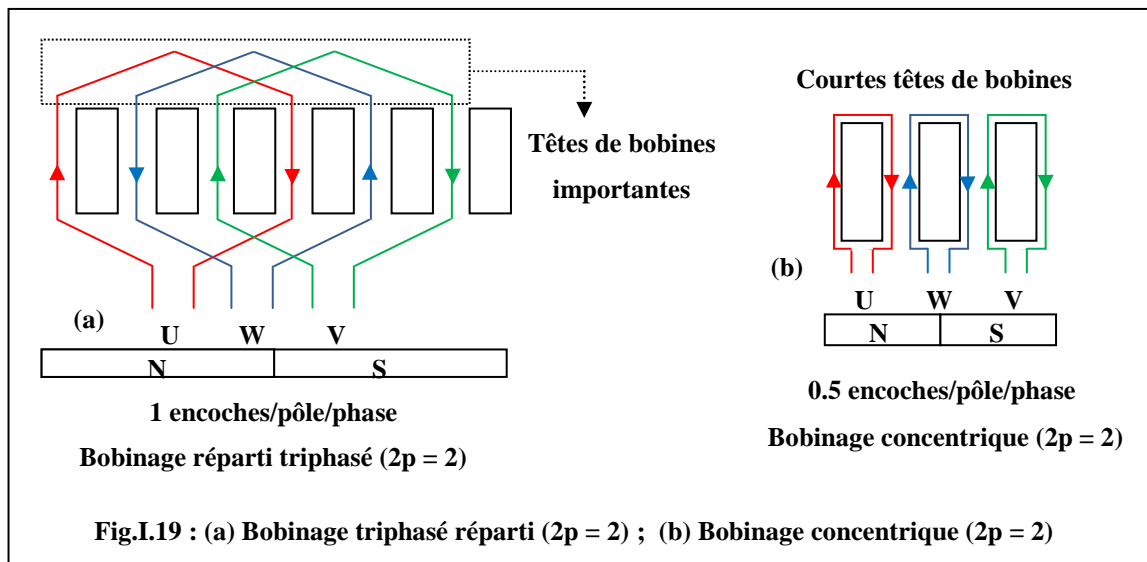
Pour faire face à ce problème, plusieurs travaux ont montré que l'utilisation des enroulements concentrés ou modulaires (non-overlapping and modular winding) permet de

contrôler le flux d'excitation de façon optimale [21], [22], [32]. En effet, suite à l'emploi de ce type d'enroulement l'inductance aura une valeur plus importante.

En outre, les auteurs indiquent [4], [8] et [14] que le rapport du rayon interne du stator au rayon externe du stator (Optimum Split Ratio) est un paramètre de conception très important car il influe significativement lors du calcul du couple, de celui du rendement et sur le coût de la machine. Une expression analytique simple a été développée afin d'obtenir la valeur optimale de ce rapport [19], [20].

I.11.1 Définition et avantages de l'enroulement concentrique

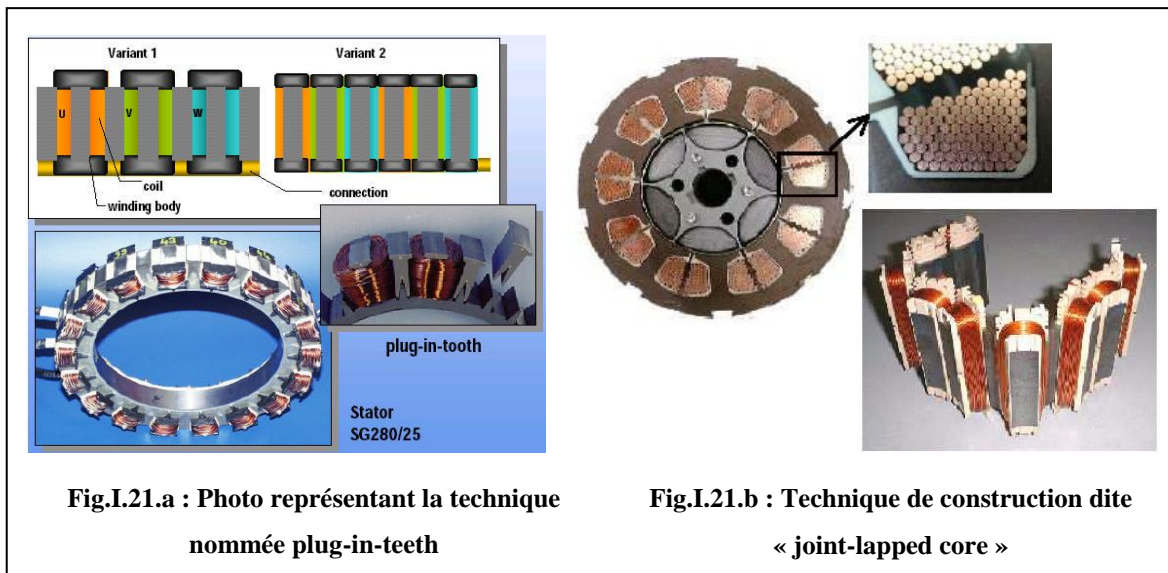
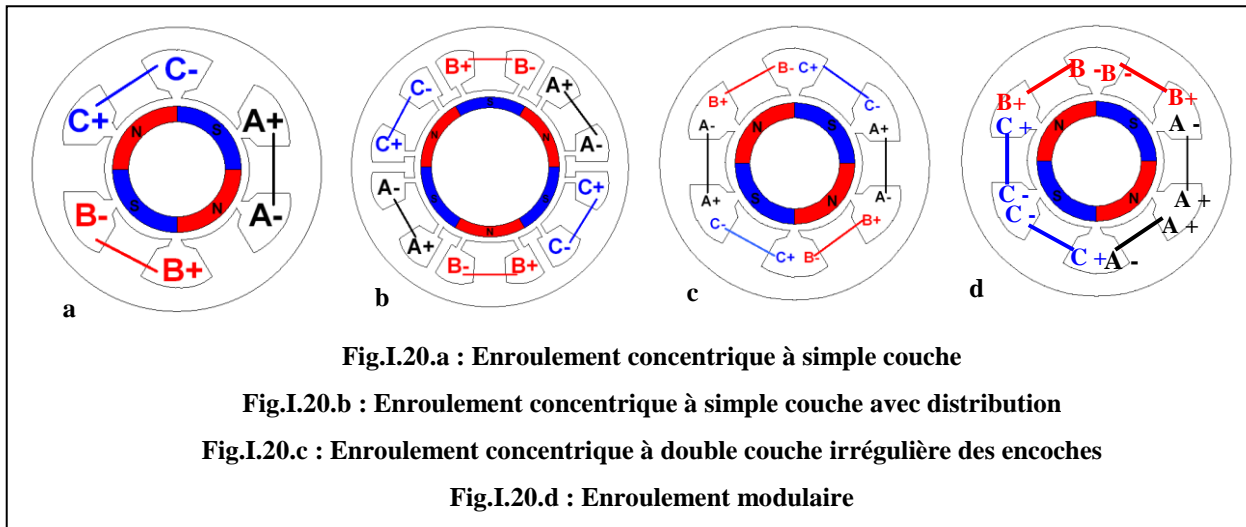
La définition la plus courante de l'enroulement concentrique étant un enroulement qui se concentre autour d'une dent (figure I.19). Ainsi, deux configurations possibles sont souvent employées [21], [33].



La première configuration est dite enroulement concentrique à simple couche (single-layer concentrated windings) (figure I.20.a et I.20.b). Celle-ci présente l'avantage de passer à un nombre réduit d'enroulements, égal à la moitié du nombre d'encoches [21]. La deuxième configuration est appelée enroulement concentrique à double couche (double-layer concentrated windings) où on trouve deux différentes manières de disposer les enroulements. La figure I.20.c présente le premier cas de l'enroulement concentrique à double couche où deux enroulements de deux phases différentes occupent la même encoche. Dans le deuxième cas, dit enroulement modulaire (Modular windings), les enroulements de la même phase logent dans des encoches consécutives (figure I.20.d) [21], [34].

Pratiquement, avec les enroulements concentriques le volume de cuivre utilisé est réduit [21], ce qui permet de minimiser les pertes Joule et d'améliorer considérablement le rendement.

En outre, un excellent facteur de remplissage peut être réalisé avec la technique « laminated plug-in-tooth » jusqu'à 78 % (figure I.20.a) et jusqu'à 75% avec la technique de « Joint-lapped core » (figure I.21.b)[21], [33], [35].



I.11.2 Réalisation de l'enroulement concentrique

La réalisation d'un enroulement triphasé équilibré est conditionnée par [21], [33], [36] :

$$\frac{S}{[PGCD(S, 2p)]} = 3 \cdot C \tag{I.1}$$

Avec : S le nombre d'encoches, p le nombre de paires de pôles, C un entier positif (1, 2 ...) et $PGCD$ le plus grand commun diviseur.

On définit le nombre d'encoches par pôle et par phase comme suit:

$$S_{pp} = \frac{S}{2p \cdot m} \tag{I.2}$$

Avec m présente le nombre de phase.

Les machines triphasées équipées d'enroulements concentriques présentent un bon rendement lorsque le S_{pp} est inférieur ou égal à 1/2. Le tableau.1 résume toutes les combinaisons possibles (nombre d'encoches, nombre de paires de pôles) ainsi que le S_{pp} et le facteur de bobinage k_w , qui y va avec [21], [33]. Dans le cas où la machine possède une seule encoche par pôle et par phase, le facteur de bobinage est égal à un ($k_w = 1$) si les encoches ne sont pas inclinées, dans le cas inverse ce facteur aura une valeur réduite de 0.955 [21].

Des valeurs du facteur de bobinage dans le tableau sont entourées par des parenthèses lorsqu'il est possible d'augmenter le pas d'enroulements. Pour les structures qui peuvent être équipées d'enroulement concentrique à une simple couche le S_{pp} est souligné. Dans ce cas, le nombre réduit d'encoches ($S/2$) simplifie la fabrication et les assemblages [21], [33], [37].

2p S	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	1/2 0.866	1/4 0.866		1/8 (0.866)	1/10 (0.866)		1/14 (0.866)	1/16 (0.866)		1/20 (0.866)	1/22 (0.866)	
6	1 0.5	1/2 0.866		1/4 (0.866)	1/5 (0.5)		1/7 (0.5)	1/8 (0.866)		1/10 (0.866)	1/11 (0.5)	
9		3/4 0.617	1/2 0.866	3/8 0.945	3/10 0.945	1/4 (0.866)	3/14 (0.617)	3/16 (0.328)		3/20 (0.328)	3/22 (0.617)	1/8 (0.866)
12	<u>2</u> 0.259	1 0.5		1/2 0.866	<u>2/5</u> 0.966		<u>2/7</u> (0.966)	1/4 (0.966)		<u>1/5</u> (0.5)	<u>2/11</u> (0.259)	
15				5/8 0.711	1/2 0.866		5/14 0.951	5/16 0.951		1/4 (0.866)	5/22 (0.711)	
18			1 0.5	3/4 0.617	<u>3/5</u> 0.735	1/2 0.866	3/7 0.902	3/8 0.945		3/10 0.945	<u>3/11</u> (0.902)	1/4 (0.866)
21				7/8 0.538	7/10 0.650		1/2 0.866	7/16 0.870		7/20 0.953	7/22 0.953	
24		<u>2</u> 0.259		1 0.5	<u>4/5</u> 0.588		<u>4/7</u> 0.760	1/2 0.866		<u>2/5</u> 0.966	<u>4/11</u> 0.958	

Tableau.1: Résumé des combinaisons possible entre le nombre d'encoches (S) et le nombre de paires de pôles (2p) pour la réalisation d'un enroulement concentrique équilibré

I.11.3 Dimensionnement par optimisation du rapport D/D_e

Le rapport du diamètre intérieur du stator noté D sur le diamètre extérieur du stator noté D_e , est l'un des paramètres de conception les plus importants pour les MSAP car il influe considérablement sur la densité de puissance et le rendement à la fois [19], [20], [37], [38], [39].

La figure I.21 illustre une coupe transversale d'une SPM. Au cours de notre analyse deux types d'enroulement sont considérés (figure I.22), à savoir un enroulement réparti triphasé et un enroulement concentrique à double couche

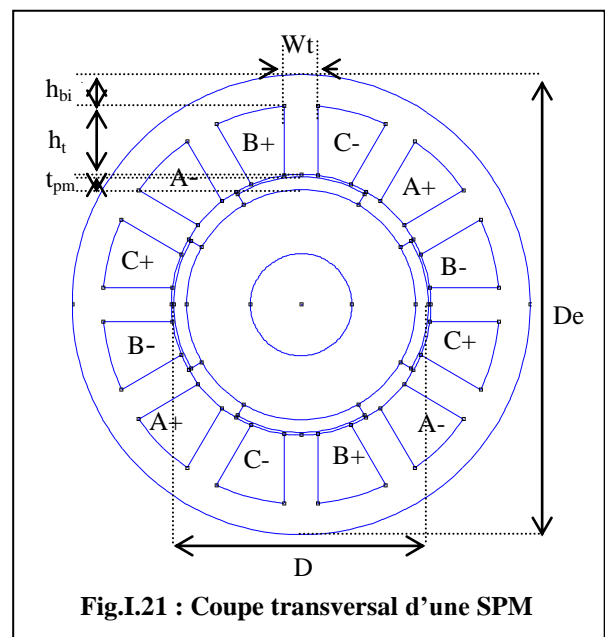


Fig.I.21 : Coupe transversal d'une SPM

[39]. Une première approche en utilisant la méthode des éléments finis (FEMM®-ver.4.2) va permettre de visualiser les grandeurs globales de la machine dans les deux cas.

Pour le modèle analytique, initialement, on s'intéresse à une SPM équipée d'un enroulement triphasé équilibré réparti. On va chercher à optimiser le rapport du diamètre intérieur au diamètre extérieur du stator ($R/R_e = D/D_e$). On suppose que les parois des dents sont parallèles et on néglige l'effet des têtes de bobines [20], [22], [39].

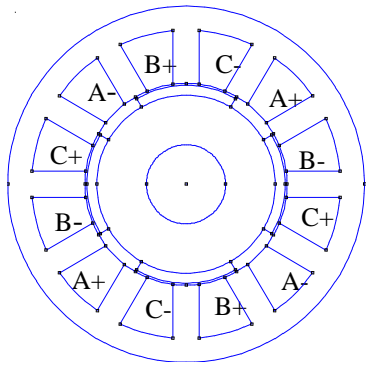


Fig.I.22.a : Enroulement réparti (12 encoches)

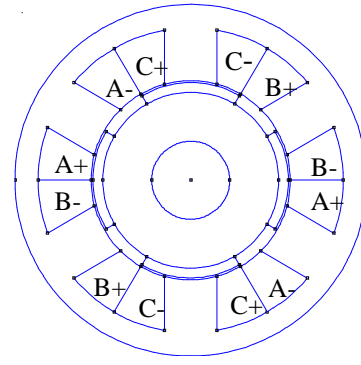


Fig.I.22.d : Enroulement concentrique (6 encoches)

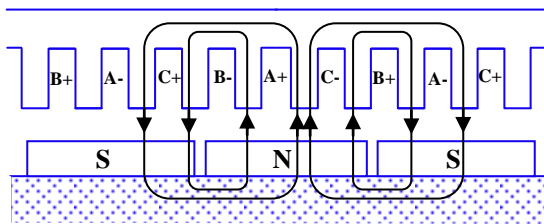
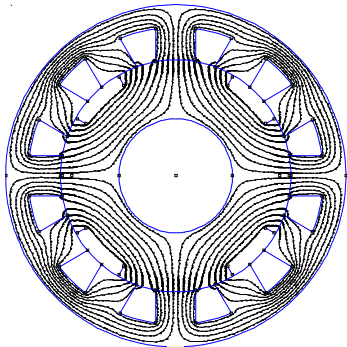


Fig.I.22.b : Lignes de flux à vide

nombre d'encoches / nombre de paire de pôle = 6 / 2

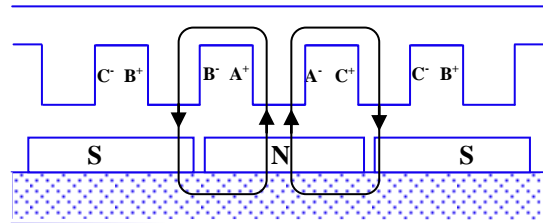
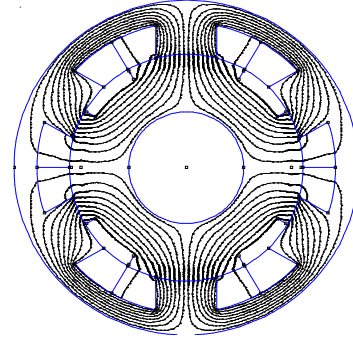


Fig.I.22.e : Lignes de flux à vide

nombre d'encoches / nombre de paire de pôle = 3 / 2

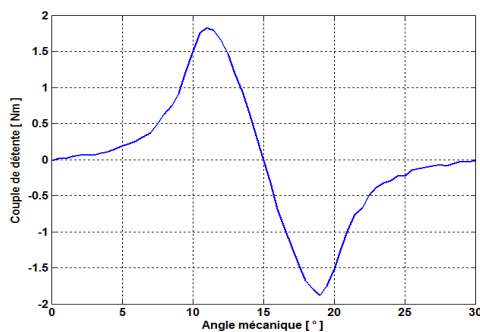


Fig.I.22.c : Couple de détente en fonction de la position angulaire (enroulement réparti)

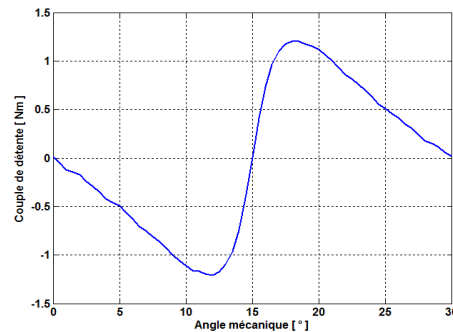


Fig.I.22.f : Couple de détente en fonction de la position angulaire (enroulement concentrique)

L'expression de l'induction dans l'entrefer B_g en fonction de l'induction rémanente de l'aimant B_r , de la perméabilité relative μ_{rm} et des autres grandeurs de la machine peut être donnée par la relation suivante [20], [40], [41], [42], [43]:

$$B_g = \frac{(t_{pm}/\mu_{rm})}{k_c \cdot g + (t_{pm}/\mu_{rm})} \cdot B_r \quad (\text{I.3})$$

$$\text{Or } B_g = \frac{B_r}{1 + \mu_{rm} \cdot (l_g/t_{pm})} \text{ et } l_g = k_c \cdot g$$

$$k_c = \frac{\tau_s}{\tau_s - \frac{4}{\pi} \cdot \left[\frac{b_0}{2 \cdot g} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{b_0}{2 \cdot g} \right) - \log \sqrt{1 + \left(\frac{b_0}{g} \right)^2} \right]} \approx \frac{\tau_s}{\tau_s - \frac{b_0^2}{5 \cdot g + b_0}} \quad \text{et } \tau_s = \frac{\pi \cdot D}{S}$$

Avec: t_{pm} la hauteur de l'aimant dans la direction de magnétisation, g entrefer mécanique, b_0 largeur de l'ouverture de l'encoche, τ_s pas d'encoches, D diamètre intérieur et k_c coefficient de Carter.

I.11.4 Élément de dimensionnement

a. Relations géométrique

Les relations géométriques sont exprimées en fonction de l'induction dans l'entrefer B_g , de l'induction dans les dents B_t et dans la culasse statorique B_{bi} :

$$h_{bi} = \frac{B_g \cdot \pi \cdot D}{2 \cdot B_{bi} \cdot 2p} \quad (\text{I.4})$$

$$h_t = \frac{D_e - D}{2} - h_{bi} \quad (\text{I.5})$$

$$w_t = \frac{B_g \cdot \pi \cdot D}{B_t \cdot S} \quad (\text{I.6})$$

Avec: h_{bi} hauteur de la culasse statorique, h_t hauteur de la dent, w_t largeur de la dent et D_e diamètre extérieur du stator.

À partir de la figure (figure I.22.a), et en négligeant les extrémités des dents (les parois des dents sont parallèles), la surface de l'encoche peut être écrite comme suit:

$$A_S = \frac{\pi}{4 \cdot S} \left[(D_e - 2 \cdot h_{bi})^2 - D^2 \right] - w_t \cdot h_t \quad (\text{I.7})$$

En utilisant les équations (I.4), (I.5), (I.6) et après réarrangement, la surface de l'encoche peut être réécrite de la manière suivante [19], [21], [37], [39]:

$$A_s = \frac{\pi \cdot D_e^2}{4 \cdot S} \left\{ \left(\frac{D}{D_e} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2p} \right) \left(2 + \frac{\pi}{2p} \right) \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right) - 1 \right] - 2 \cdot \left(\frac{D}{D_e} \right) \left(1 + \frac{\pi}{2p} \right) \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right) + 1 \right\} \quad (\text{I.8})$$

B_{\max} représente la valeur maximale de l'induction dans les dents et la culasse statorique.

Compte tenu de l'équation (I.3), on obtient:

$$A_s = \frac{\pi \cdot D_e^2}{4 \cdot S} f \left(\frac{D}{D_e}, \frac{l_g}{t_{pm}}, \frac{B_r}{B_{\max}}, \mu_r, 2p \right) \quad (\text{I.9})$$

b. Équation du couple

Le couple d'une SPM peut s'exprimer [37]:

$$T = K_s \cdot B_g \cdot D^2 \cdot L \cdot \sin(p\alpha_{pm}) \quad (\text{I.10})$$

Avec: $2\alpha_{pm}$ ouverture angulaire de l'aimant, K_s densité de courant linéique qui est définie par [37]:

$$K_s = \frac{\sqrt{2} \cdot k_w \cdot S \cdot I_{enc}}{\pi \cdot D} = \frac{\sqrt{2} \cdot k_w \cdot S \cdot A_{cu} \cdot J}{\pi \cdot D} \quad (\text{I.11})$$

Où k_w représente le facteur de bobinage, A_{cu} surface du cuivre dans une encoche et I_{enc} le courant.

La surface du cuivre peut être exprimée en fonction de la section de l'encoche A_{enc} comme suit:

$$A_{cu} = \frac{A_{enc} \cdot k_w}{n_{cond}} \quad (\text{I.12})$$

Avec: k_w facteur de remplissage et n_{cond} le nombre de conducteur par encoche, égal au nombre de tours par bobine [21], et qui est défini par [44]:

$$n_{cond} = \frac{\alpha_p \cdot \alpha_w \cdot N_I}{p \cdot S_{pp}} \quad (\text{I.13})$$

N_I représente le nombre de tours en série par phase, α_p nombre de voies parallèle et α_w nombre de fils en parallèle [44], [45].

En utilisant l'équation (I.2), la surface du cuivre peut se mettre sous la forme suivante [38]:

$$A_{cu} = \frac{A_s \cdot k_b}{m \cdot \frac{N_l}{S}}; (\alpha_p = 1 \text{ et } \alpha_w = 1) \quad (\text{I.14})$$

c. Pertes joule

Les pertes dues à l'effet Joule sont données par l'expression suivante :

$$P_{cu} = m \cdot R \cdot I_{enc}^2 \quad (\text{I.15})$$

La résistance R est définie par:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A_{cu}} \quad (\text{I.16})$$

En combinant les équations (I.15) et (I.16) l'expression de la densité de courant peut être exprimé par:

$$I_{enc} = J \cdot A_{cu} \Rightarrow J = \sqrt{\frac{P_{cu}}{m \cdot \rho \cdot A_{cu} \cdot L}} \quad (\text{I.17})$$

Si on fixe les pertes joule et en utilisant les équations (I.10), (I.16) et (I.17), le couple électromagnétique par unité de volume peut se mettre sous la forme [5] :

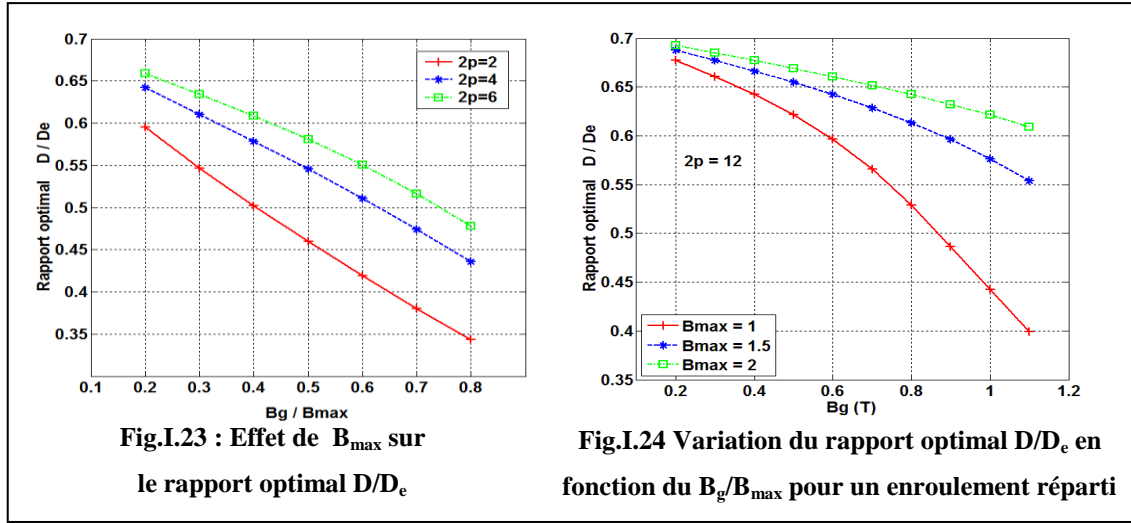
$$\frac{T}{V} \propto \sqrt{\left(\frac{D}{D_e}\right)^2} \cdot A_s \quad (\text{I.18})$$

En substituant l'équation (I.8), la dernière relation va permettre de relier $(T/V, D/D_e)$ et d'obtenir par différenciation par rapport à D/D_e , la valeur maximale du couple par unité de volume. La formule obtenue après différenciation est une équation quadratique dont la solution est exprimée par [19], [20], [38], [39]:

$$\frac{D}{D_e} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ Avec: } \begin{cases} a = 2 \left[\left(\frac{\pi}{2p}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2p} + 2\right) \cdot \left(\frac{B_g}{B_{\max}}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{B_g}{B_{\max}}\right) - 1 \right] \\ b = -3 \left[\left(\frac{\pi}{2p} + 1\right) \cdot \left(\frac{B_g}{B_{\max}}\right) \right] \\ c = 1 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

On remarque clairement que pour une valeur fixe des pertes joule et pour une valeur maximale du couple par unité de volume, la valeur optimale du rapport D/D_e est en fonction du rapport B_g/B_{\max} et du nombre de paire de pôle [19], [38]. On représente sur les figures I.23 et

I.24 l'effet de B_{\max} et l'effet de la variation du rapport B_g/B_{\max} sur l'évolution de la valeur optimale du rapport D/D_e .



On peut aussi étudier la variation du couple électromagnétique en fonction de la valeur optimale du rapport D/D_e [19], [38]. On peut écrire dans ce cas :

$$T = \frac{k_w \cdot S \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot D} \cdot A_{cu} \cdot \sqrt{\frac{P_{cu}}{m \cdot \rho \cdot A_{cu} \cdot L}} \cdot B_g \cdot D^2 \cdot L \cdot \sin(p \cdot \alpha) \quad (\text{I.20-1})$$

$$\Rightarrow T = \frac{k_w \cdot S}{\pi \cdot D} \cdot B_g \cdot D^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P_{cu} \cdot L^2 \cdot A_{cu}^2}{m \cdot \rho \cdot A_{cu} \cdot L}} \cdot \sin(p \cdot \alpha) \quad (\text{I.20-2})$$

En substituant l'équation (I.14) dans la dernière relation, l'expression du couple peut être écrite ainsi :

$$T = \frac{k_w \cdot S}{\pi \cdot m} \cdot B_g \cdot D \cdot \sqrt{\frac{P_{cu} \cdot L \cdot A_S \cdot k_b \cdot S}{\rho \cdot N_1}} \cdot \sin(p \cdot \alpha) \quad (\text{I.20-3})$$

La surface d'encoche peut se mettre sous la forme suivante:

$$A_S = \frac{\pi \cdot D_e^2}{4 \cdot S} \cdot \Theta \quad (\text{I.20.4})$$

$$\text{Avec: } \Theta = \left\{ \left(\frac{D}{D_e} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2p} \right) \left(2 + \frac{\pi}{2p} \right) \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right) - 1 \right] - 2 \cdot \left(\frac{D}{D_e} \right) \left[1 + \frac{\pi}{2p} \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right) + 1 \right] \right\}$$

Finalement, l'équation (I.20-3) devient:

$$T = \frac{k_w \cdot S}{2 \cdot \pi \cdot m} \cdot B_g \cdot D_e \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot P_{cu} \cdot \Theta \cdot L \cdot k_b \cdot (D/D_e)^2}{\rho \cdot N_1}} \cdot \sin(p \cdot \alpha) \quad (\text{I.21})$$

Cette relation va nous permettre d'étudier la variation du couple en fonction du rapport D/D_e .

On remarque clairement à partir de la figure I.25 qu'une valeur optimale du rapport D/D_e existe, tandis qu'à partir de la figure I.26 on constate que cette valeur varie de 0.45 à 0.6 pour un nombre de paire de pôle qui va de 2 à 8 [19], [38].

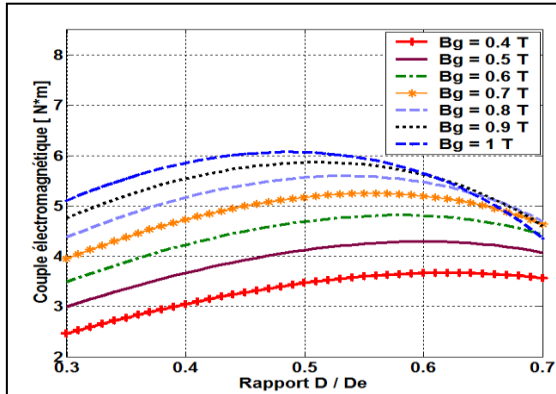


Fig.I.25 : Variation du couple en fonction du rapport D/D_e pour différentes valeurs de B_g .
 $2p = 4$; $S = 6$; $B_{\max} = 1.5$ T; $D_e = 90$ mm;
 $L = 50$ mm; $P_{cu} = 50$ W

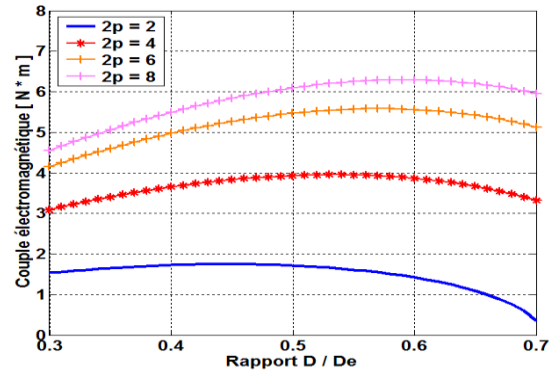


Fig.I.26 : Variation du couple en fonction du rapport D/D_e pour différents valeurs de p .
 $B_g = 0.8$; $S = 6$; $B_{\max} = 1.5$ T; $D_e = 90$ mm;
 $L = 50$ mm; $P_{cu} = 50$ W

On rappelle qu'on a utilisé un enroulement réparti. Lorsqu'on emploie un enroulement concentrique c'est l'expression de la surface de l'encoche qui change.

I.11.5 Optimisation du rapport D/D_e pour un enroulement concentrique

Pour les machines présentant un rapport nombre d'encoches au nombre de paire de pôle $3/2$ et en procédant de la même manière que précédemment, la surface de l'encoche peut être donnée par :

$$A_s = \frac{\pi \cdot D_e^2}{4 \cdot S} \left\{ \left(\frac{D}{D_e} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\pi}{k \cdot p} \right) \left(2 + \frac{\pi}{k \cdot p} \right) \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right) - 1 \right] - 2 \cdot \left(\frac{D}{D_e} \right) \left(1 + \frac{\pi}{k \cdot p} \right) \left(\frac{B_g}{B_{\max}} \right) + 1 \right\}$$

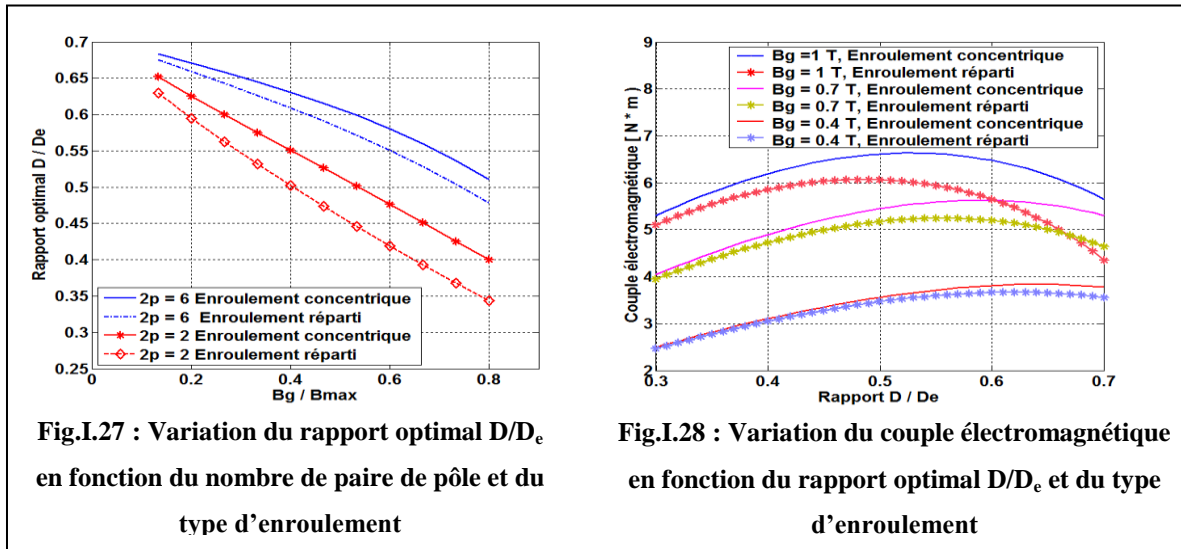
(I.22)

Avec: $k = \frac{1}{2}$ lorsque l'enroulement utilisé est un enroulement triphasé équilibré réparti (équation (I.8))

$$k = \frac{1}{3} \text{ lorsque l'enroulement est concentrique [38]}$$

La figure I.27 représente la variation du rapport optimal D/D_e pour un enroulement réparti et un autre concentrique. On constate que le rapport optimal est plus important lorsque l'enroulement utilisé est concentrique. Tandis qu'à partir de la figure I.28 on remarque nettement

que le couple électromagnétique est plus important lorsque la machine est équipée d'un enroulement concentrique.

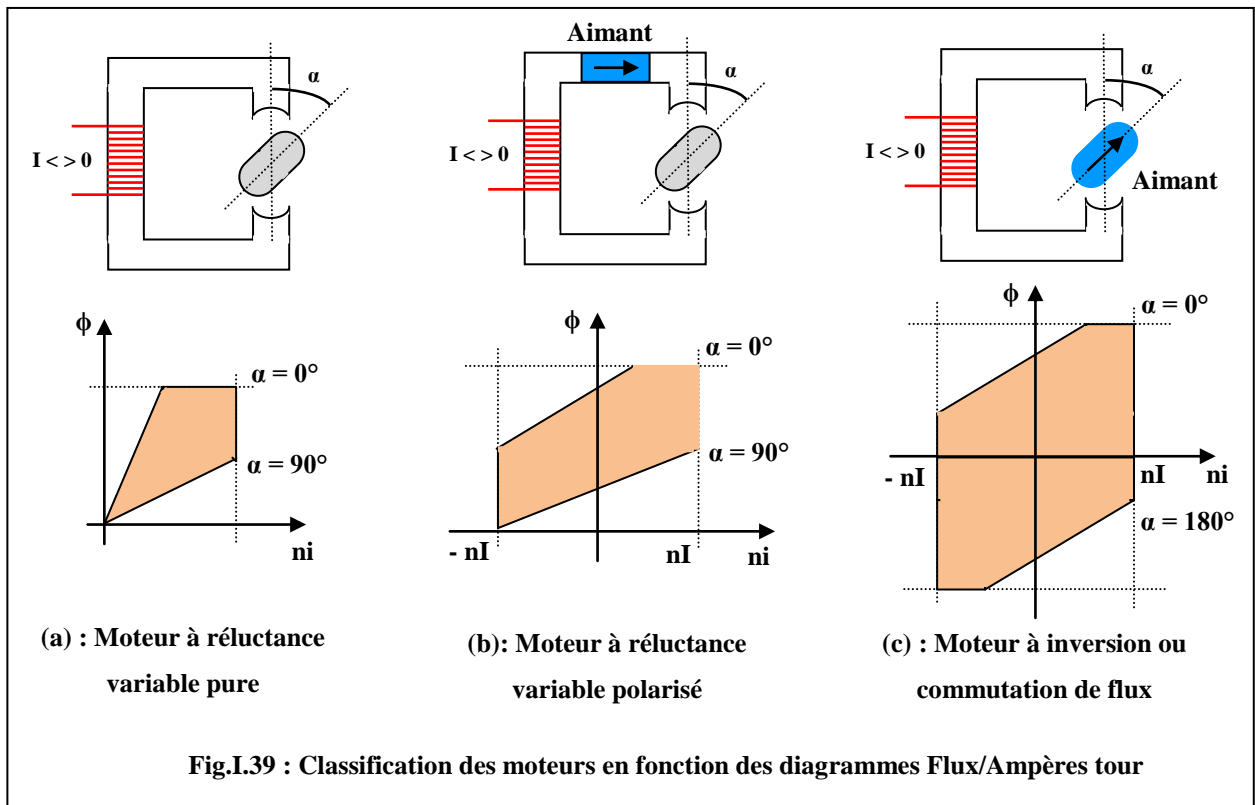


Cette première étude nous a permis de visualiser un ensemble des grandeurs globales de la SPM. Pour l'étude de la MCF, on se limite à une étude numérique par éléments finis.

I.12 Étude de la Machine à Commutation de Flux « MCF »

Certaines machines polarisées/hybrides (l'excitation dans ces machines est obtenue par aimants permanents) sont dites à inversion du flux lorsque le déplacement de l'aimant inverse le flux magnétique dans un bobinage, et dites à commutation de flux lorsque l'élément mobile passif permet lors de son déplacement de diriger (commuter) le flux de l'aimant inducteur alternativement dans un sens puis dans l'autre sens à travers un bobinage [46]. La figure I.39 représente la classification en fonction des diagrammes Flux/Ampère-tour pour un moteur à réluctance variable pure, un moteur à réluctance variable polarisé et pour un moteur à inversion/commutation de flux.

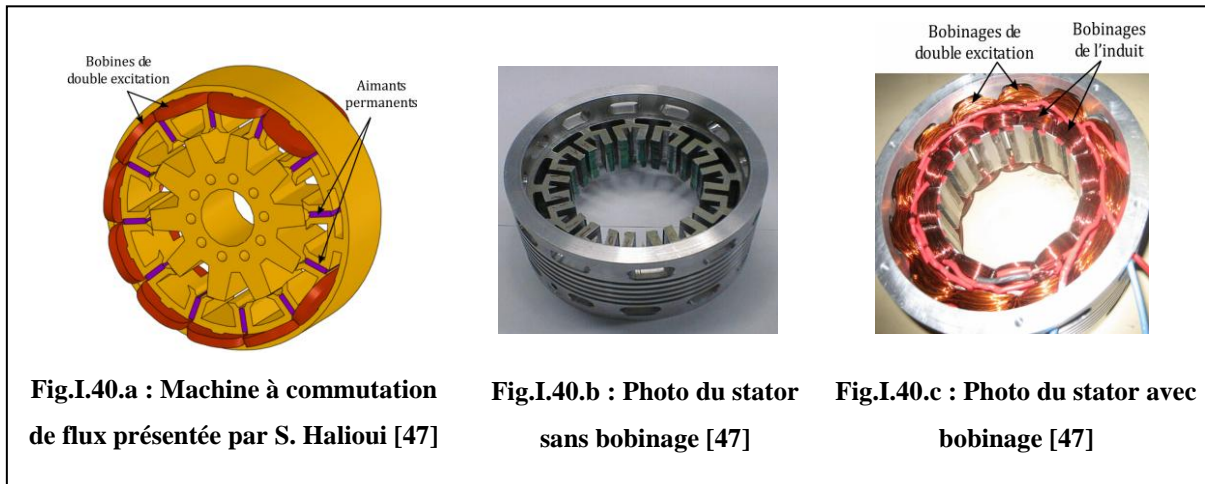
La présence d'aimants permet d'utiliser un courant unidirectionnel ou bidirectionnel, cependant on doit faire face à une limitation en courant à cause du phénomène de désaimantation des aimants [46].



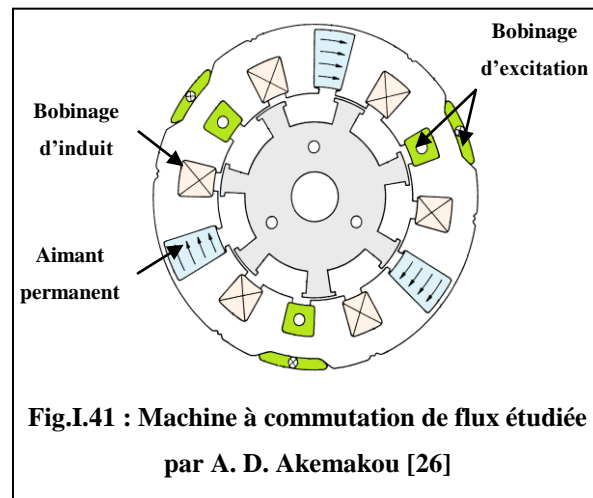
I.12.1 Présentation de la MCF à double excitation

Le stator de cette structure comporte toutes les sources de flux à savoir les aimants permanents, le bobinage de double excitation et le bobinage d'induit (figures I.40 et I.41), tandis que le rotor est totalement passif. Le bobinage de double excitation est alimenté par un courant bidirectionnel et apte à établir localement un flux magnétique réglable dans une direction circumférentielle inverse de celle du flux crée par les aimants [26], [47], [48].

La machine comprend un même nombre d'aimants permanents, de bobinages d'excitation et de bobinages d'induit, régulièrement répartis sur la circonférence du stator. Par contre les dents de commutation au rotor sont à répartition angulaire différente de celle du bobinage d'induit, de manière à opérer avec des courants polyphasés dans les différents bobinages d'induits [26].

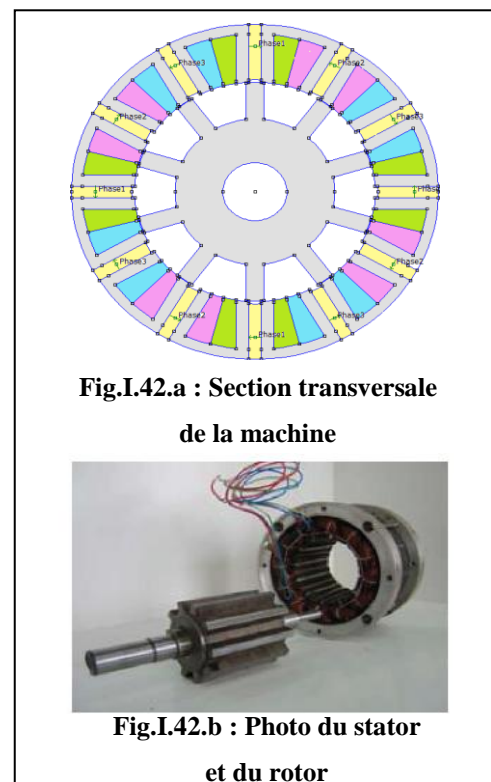


Le contrôle du flux dans la MCF peut s’effectuer aussi sans avoir recours à un bobinage d’excitation, c’est l’une des propriétés les plus intéressantes de cette machine. Le contrôle du flux est réalisé en adoptant une technique de défluxage électronique [49], on s’intéresse particulièrement à cette structure cellulaire qui permet de produire un couple statique comparable à celui des meilleures machines synchrones à aimants (ex : à concentration de flux).

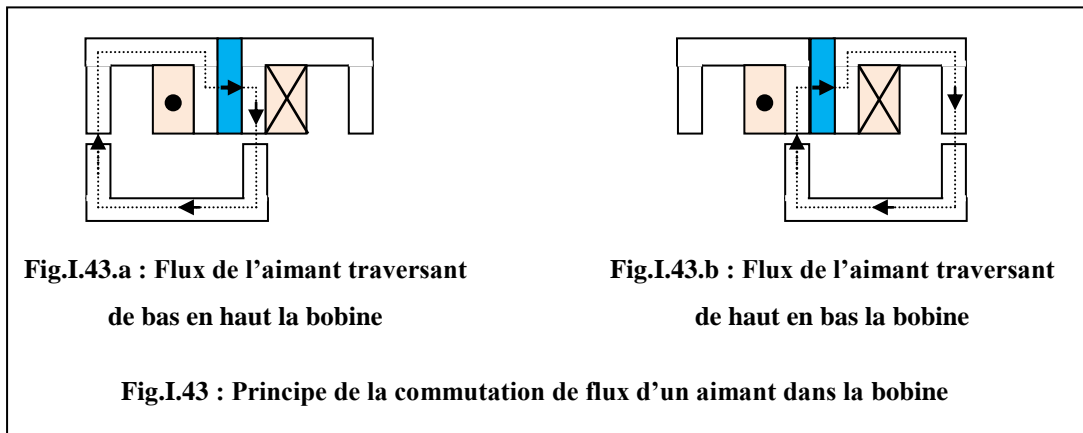


I.12.2 Présentation de la MCF

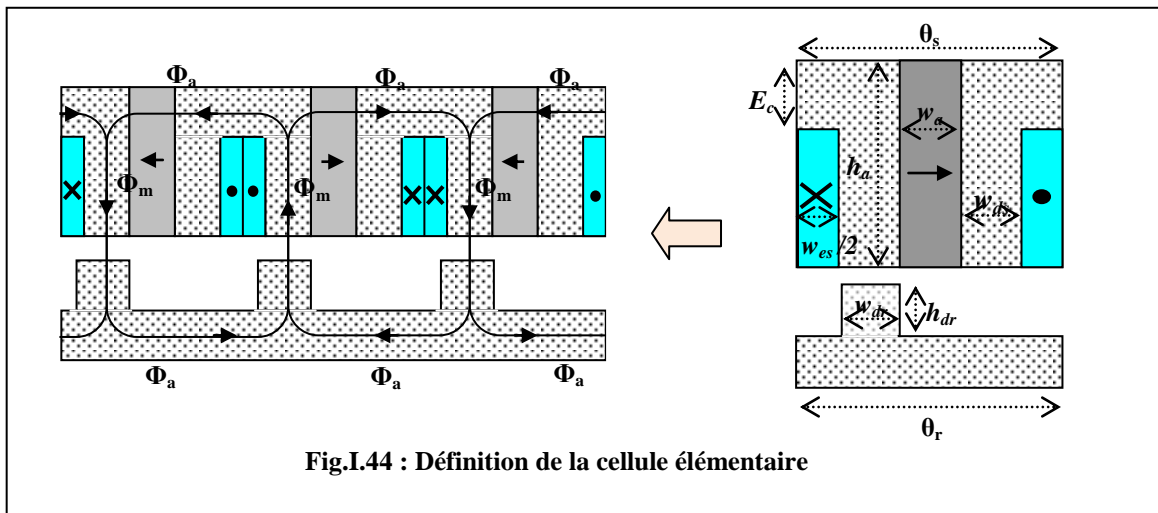
La machine à commutation de flux triphasée à étudier (figure I.42) est constituée d’une partie fixe le stator qui comprend les bobinages de l’induit et les aimants permanents réalisant la fonction de l’inducteur [49], [50], [51], [52]. On dispose de 12 aimants au stator, donc chaque phase est constituée de 4 aimants et 4 bobinages [51]. La deuxième partie mobile est le rotor, complément passif, constitué d’un empilement de tôles ferromagnétiques. On note que les vitesses de rotation sont élevées.



Le déplacement de la partie passive (rotor) permet de commuter le flux alternativement dans un sens et dans l'autre à travers le bobinage d'induit (stator) d'où l'appellation Machine à commutation de Flux (figure I.43) [28], [46].



On définit la cellule élémentaire (figure I.44), et qui va nous permettre de réaliser le prototype de la (figure I.42.a), de la manière suivante:



Avec :

q : Nombre de phase ;

N_c : Nombre de cellule par phase ;

N_s : Nombre de dents au stator ;

N_r : Nombre de dents au rotor ;

E_c : Epaisseur de la culasse statorique ;

Φ_a : Flux crée par l'aimant ;

$$\theta_s = \frac{2\pi}{N_s} = \frac{2\pi}{q N_c} : \text{Largeur angulaire de la cellule au stator ;}$$

$\theta_r = \frac{2\pi}{N_r}$: Largeur angulaire de la cellule au rotor ;

w_a : Largeur angulaire de l'aimant statorique ;

w_{ds} : Largeur angulaire d'une dent statorique ;

w_{es} : Largeur angulaire de l'encoche statorique ;

w_{er} : Largeur angulaire d'une dent rotorique.

Afin de se familiariser avec cette structure et ses caractéristiques intéressantes, une étude numérique basée sur la méthode des éléments finis a été entamée. Au début on a exploité le logiciel FEMM[®]-ver.4.2, qu'on peut facilement piloter par MATLAB, afin de visualiser les grandeurs globales de la machine, puis et au cours de notre séjour scientifique au sein du Laboratoire GREAH (Groupe de Recherche en Electrotechnique et Automatique au Havre) on a pu perfectionner cette étude numérique grâce à l'emploi du logiciel performant (Flux2D[®]).

I.12.3 Étude numérique de la MCF

On représente sur la (figure I.45) la machine qu'on a étudiée. Cette machine triphasée contient 12 aimants au stator. En ce qui concerne l'induit, on va considérer deux types de bobinages, le premier concentrique à double couche et le deuxième à simple couple. Le rotor comporte 10 dents. On donne en annexe. A (§ A.3), les paramètres de cette machine.

Au cours de cette étude on a pu visualiser les lignes de flux à vide (figures I.46 et I.48), on a pu tracer aussi le flux par phase (figure I.48) ainsi que la force électromotrice (FEM) par phase (figure I.49). Nos résultats sont en bonnes concordances avec ceux cités dans la littérature scientifique [49], [50], [51] et [52].

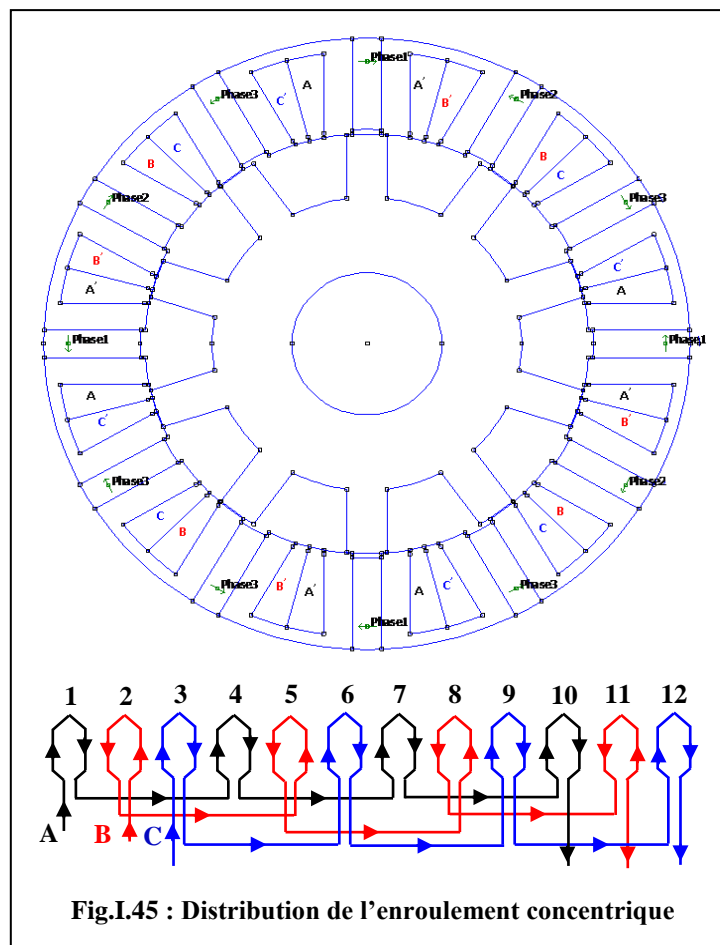


Fig.I.45 : Distribution de l'enroulement concentrique

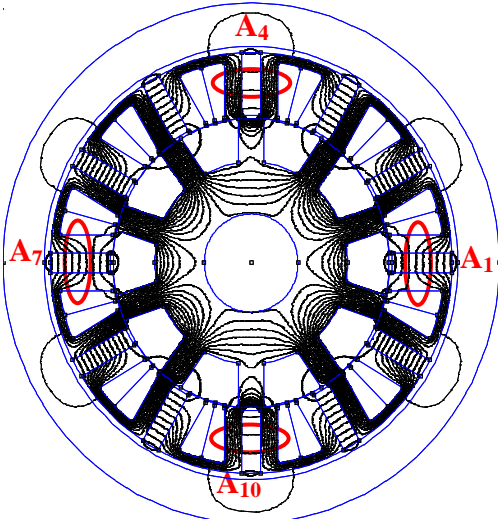


Fig.I.46 : Lignes de flux à vide, le flux de la phase A = 0

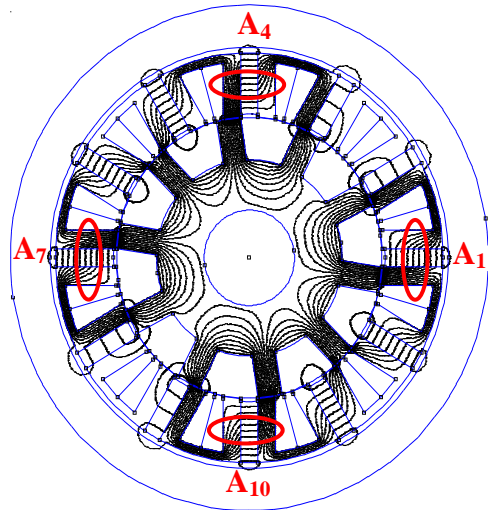


Fig.I.47 : Lignes de flux à vide, le flux de la phase A est = max

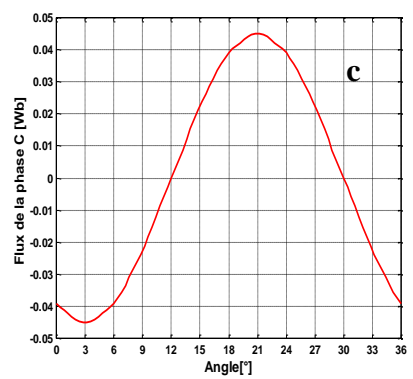
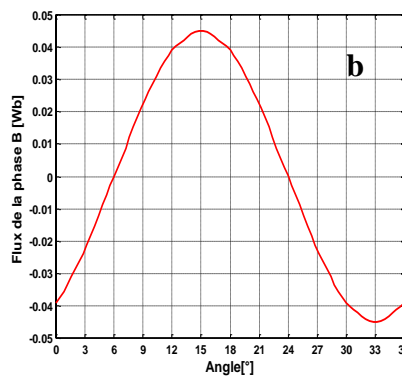
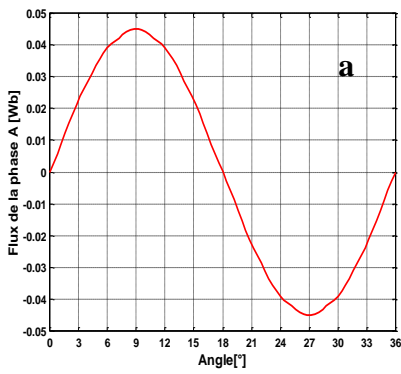


Fig.II.48 : Variation du flux dans les 3 bobines A, B et C en fonction de la position du rotor

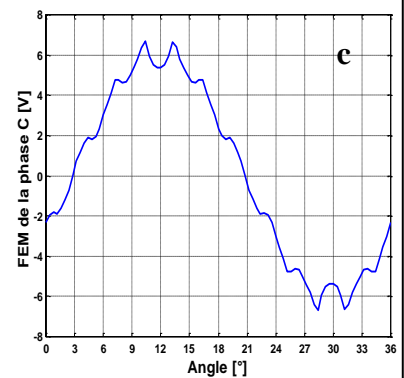
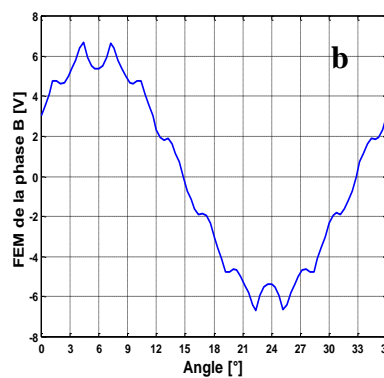
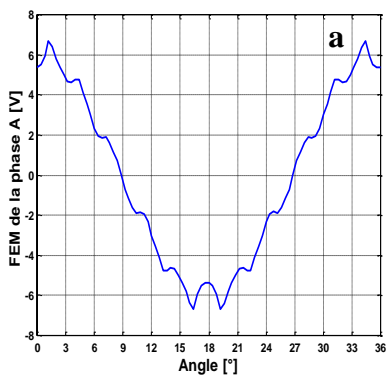
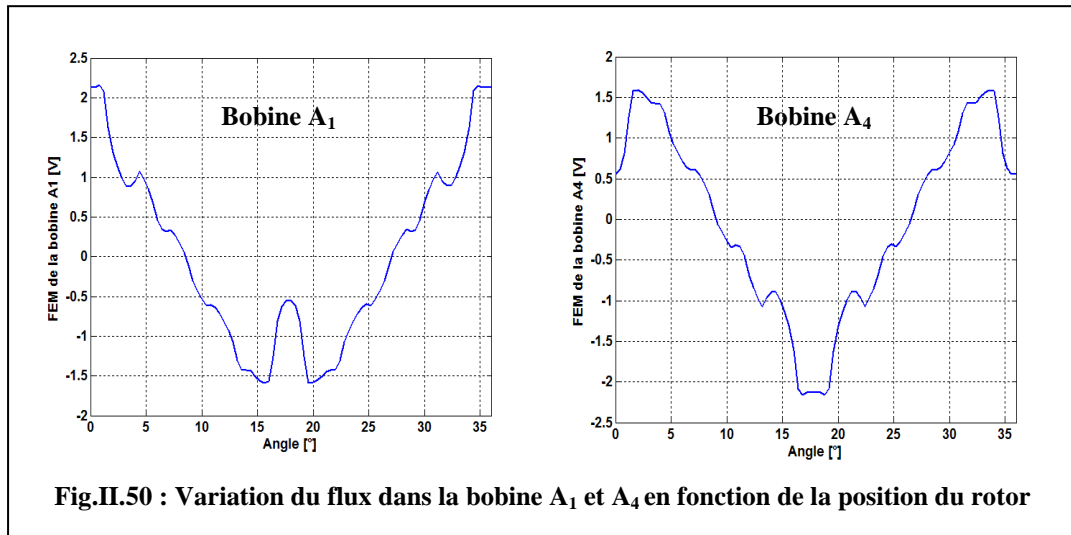


Fig.II.49 : Variation de la FEM pour les 3 bobines A, B et C

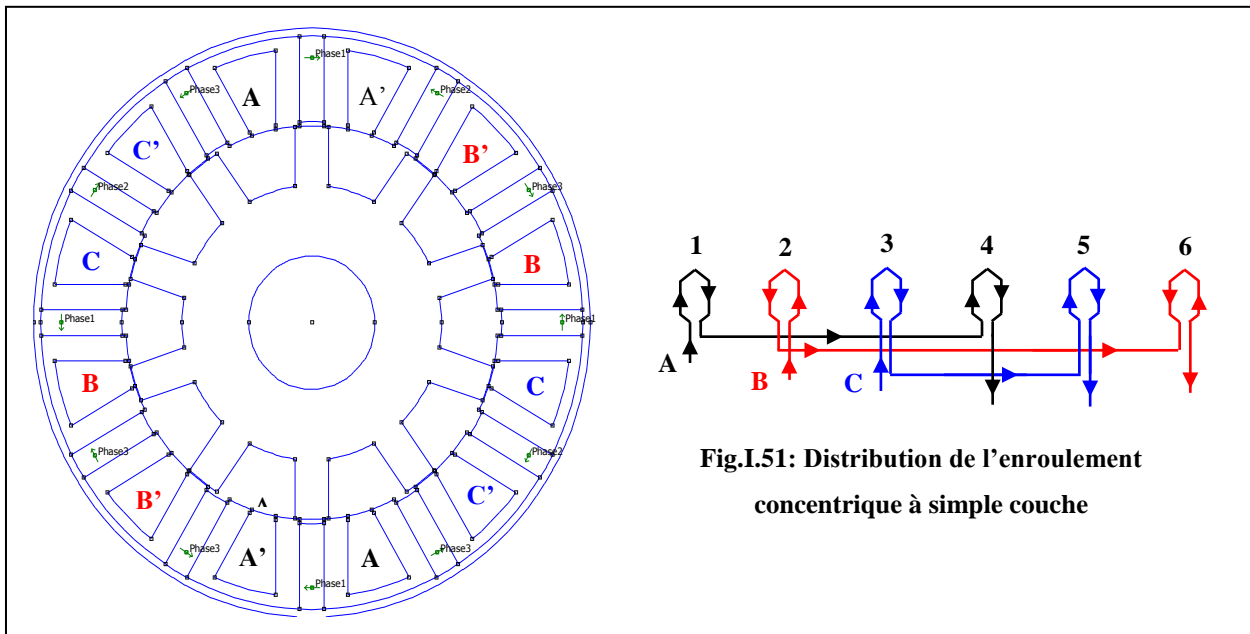
On remarque que la forme des courbes du flux et des FEM correspondantes, sont essentiellement sinusoïdales. Si on analyse les lignes de flux à vide (figures I.46 et I.47) on constate que le flux des bobines (A_1, A_7) et (A_4, A_{10}) sont considérablement différents et ceci est dû essentiellement à la position des dents statoriques par rapport à celles rotorique [52],

d'ailleurs après une rotation de 9° de l'axe de la dent au dessous de la bobine A_4 , le flux passe à sa valeur maximum (voir figure I.48).

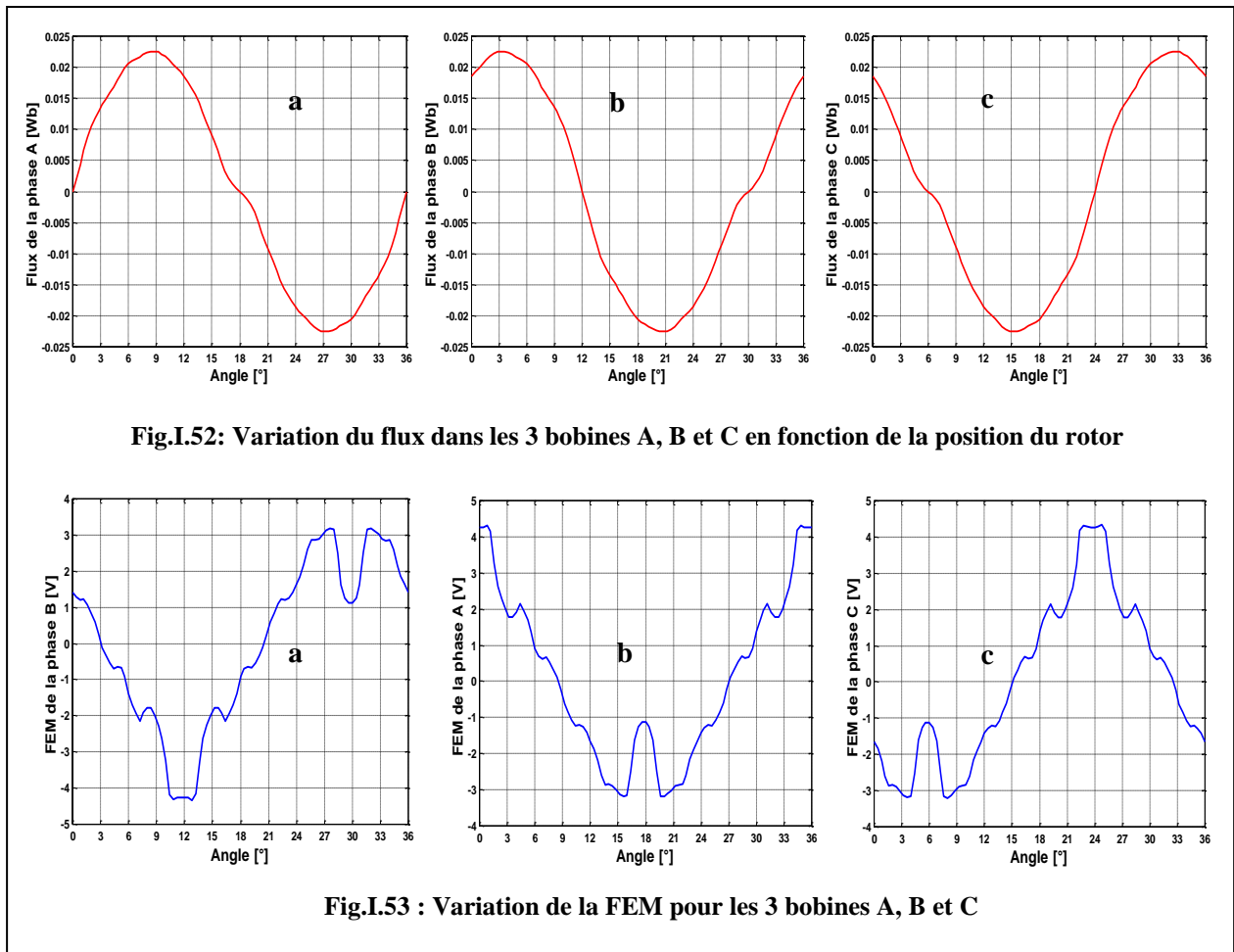
Pour mieux voir la différence, on a tracé la variation du flux au niveau de la bobine A_1 et A_4 (figure I.50), on note que la forme obtenue des courbes n'est pas sinusoïdale [52], mais c'est la contribution de toutes les bobines qui donne une forme du flux sinusoïdale.



Maintenant, on reprend la même structure mais on va changer le type d'enroulement (figure I.51), puis on trace la variation du flux (figure I.52) et la FEM (figure I.53) pour les trois bobines A, B et C en fonction de la position angulaire du rotor.



Il est clair que l'utilisation d'un enroulement à double couche offre plus d'avantages qu'un enroulement à simple couche, mais il faut savoir déterminer la distribution optimale des enroulements dans ce cas.



I.12.4 Étude de la réaction magnétique d'induit

On se propose maintenant d'étudier la réaction magnétique d'induit suite à l'injection de courant statorique. Au début, on ne va alimenter que la première bobine puis on va reprendre le même exemple et on rajoute la non linéarité. Les aimants sont remplacés par de l'air, une fois le programme exécuté on trace le flux, la FEM et la variation de l'inductance en fonction de la position du rotor (figure I.54).

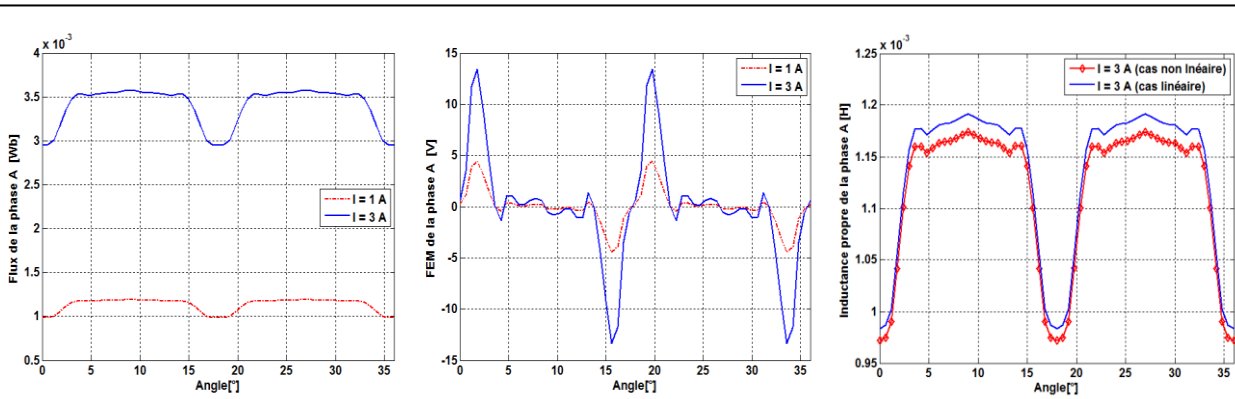


Fig. I. 54.a : Variation du flux (phase A)

Fig. I. 54.b : Variation de la FEM (phase A)

Fig. I. 54.c : Variation de l'inductance (phase A)

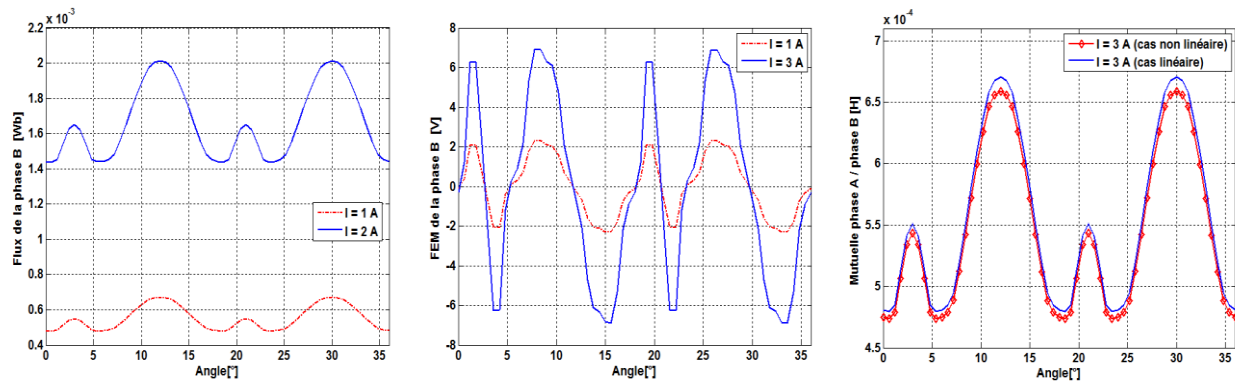


Fig. I. 54.d : Variation du flux (phase B)

Fig. I. 54.e : Variation de la FEM (phase B)

Fig. I. 54.f : Variation de la mutuelle (phase B)

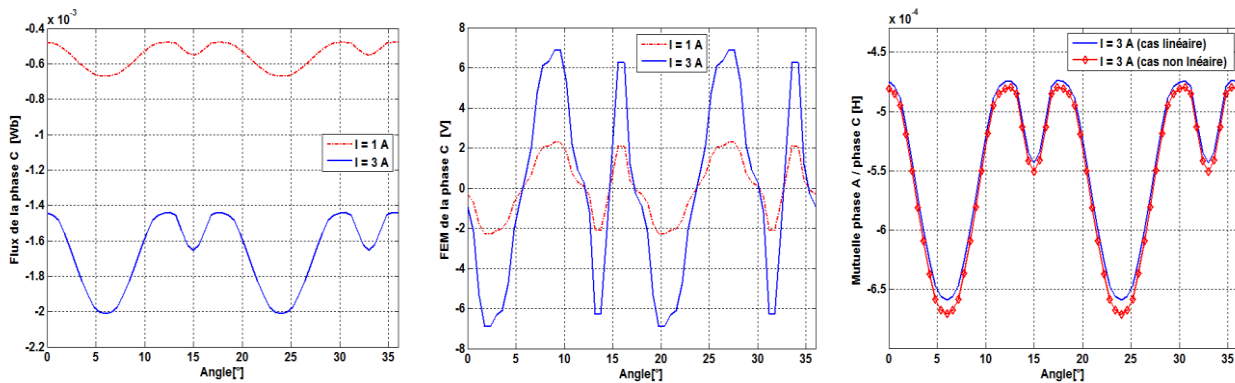


Fig. I. 54.g : Variation du flux (phase C)

Fig. I. 54.h : Variation de la FEM (phase C)

Fig. I. 54.i : Variation de la mutuelle (phase C)

Pour compléter cette étude, on s'est proposé d'évaluer les grandeurs globales de la machine à commutation de flux en utilisant le logiciel Flux2D[®]. Uniquement la moitié de la machine a été modélisé (figure I.55), on a défini dans ce cas des conditions de périodicité et des couplages de nœuds au niveau des extrémités. On représente sur la (figure II.56) un agrandissement de la zone d'entrefer tandis que la (figure I.57) représente le circuit électrique utilisé à vide.

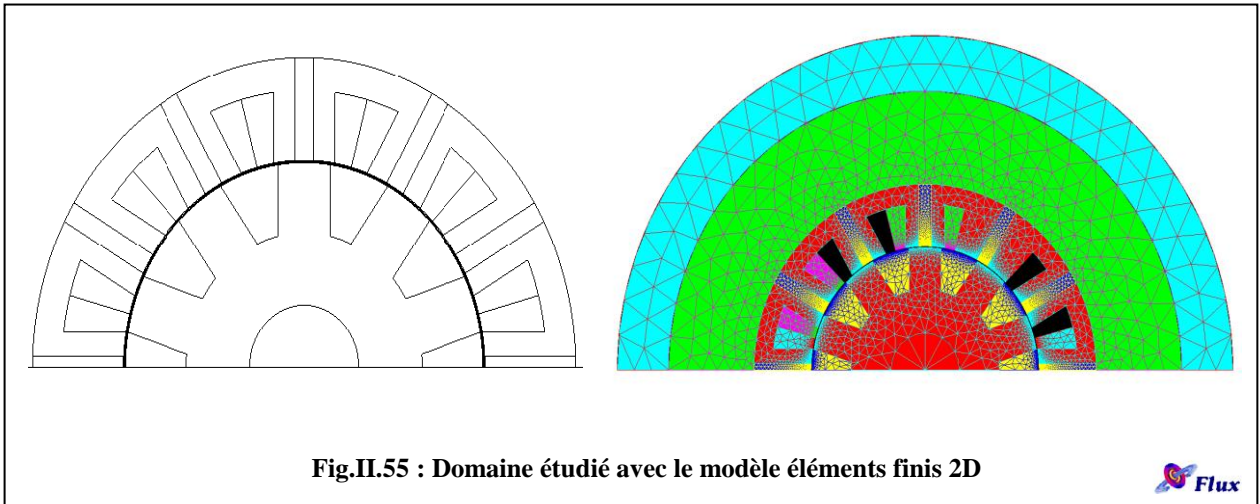


Fig.II.55 : Domaine étudié avec le modèle éléments finis 2D

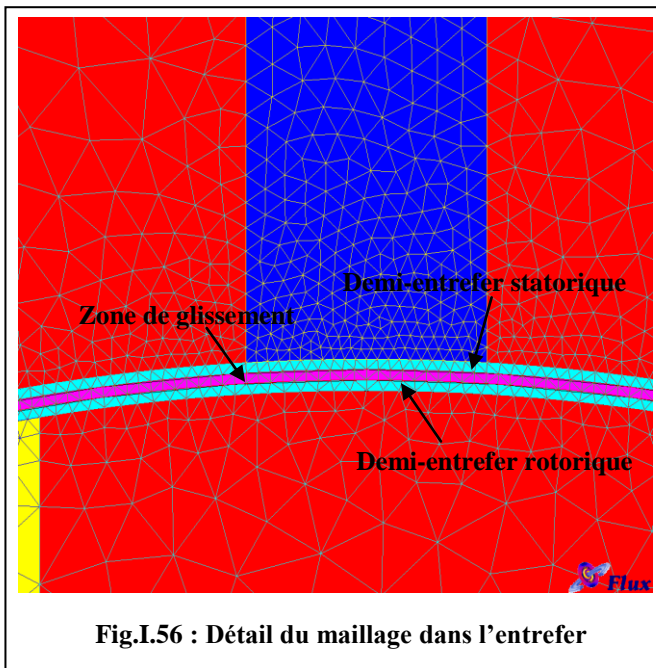


Fig.I.56 : Détail du maillage dans l'entrefer

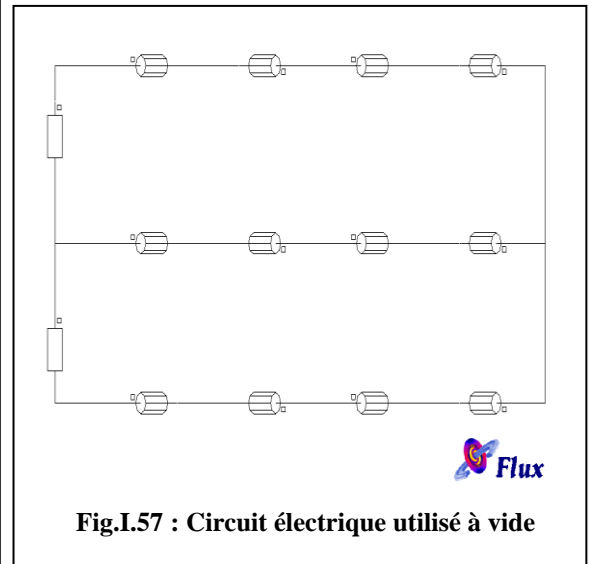


Fig.I.57 : Circuit électrique utilisé à vide

Grâce à cette étude on a pu estimer la répartition de l'induction dans l'entrefer (figure I.58), on a même tracé le couple de détente (figure I.59) et les lignes de flux à vide (figure I.60). On s'est particulièrement intéressé à la FEM (figure I.61) vu qu'avec FLUX 2D on dispose d'un outil de construction de circuits électriques (Electriflux), ce qui n'est pas le cas avec le logiciel FEMM où le calcul du flux, de la FEM et de l'inductance est obtenu après programmation et récupération de l'induction au niveau des encoches.

On donne dans l'annexe. A (§A.4) les caractéristiques de la machine étudiée.

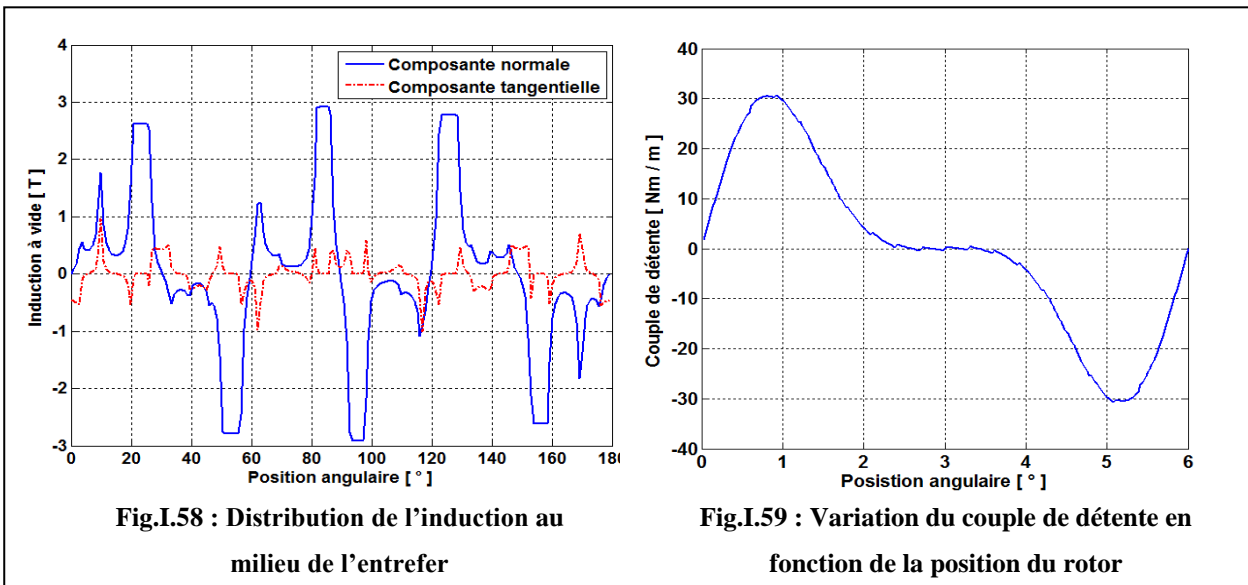


Fig.I.58 : Distribution de l'induction au milieu de l'entrefer

Fig.I.59 : Variation du couple de détente en fonction de la position du rotor

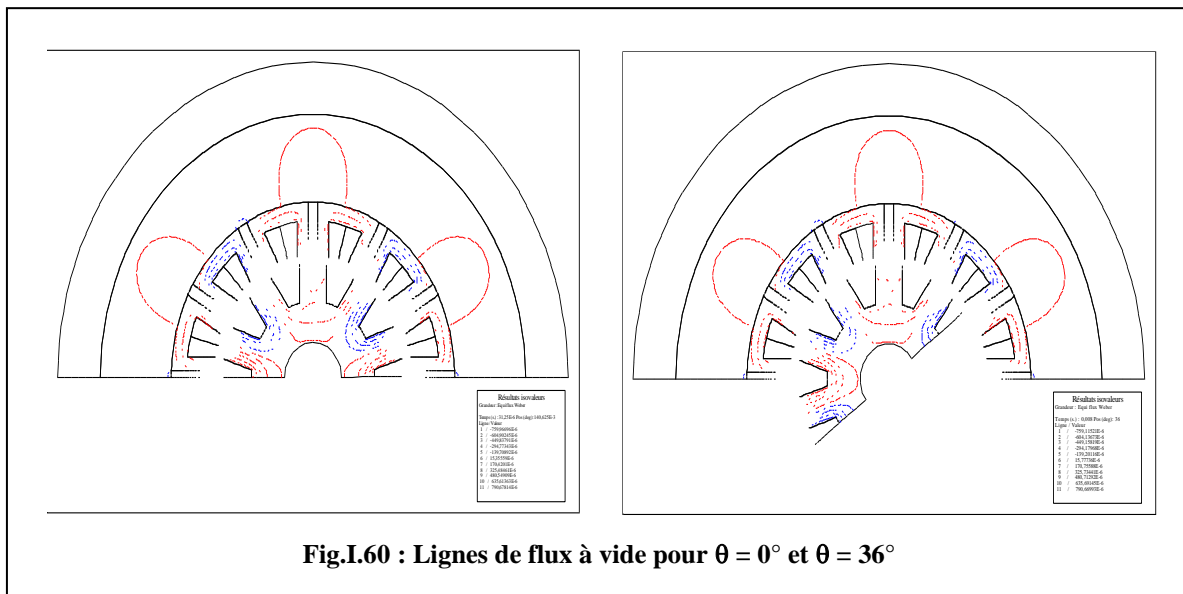


Fig.I.60 : Lignes de flux à vide pour $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 36^\circ$

À partir de la (figure I.58) on remarque clairement que la valeur maximale de l'induction dépasse 2 T suite à la concentration de flux au niveau des extrémités des dents statorique et rotorique, aussi il est nettement visible que la répartition de l'induction n'est pas sinusoïdale à cause de la topologie de la machine qui est une topologie à double saillance ce qui rappelle bien le comportement de la machine à réluctance variable [52].

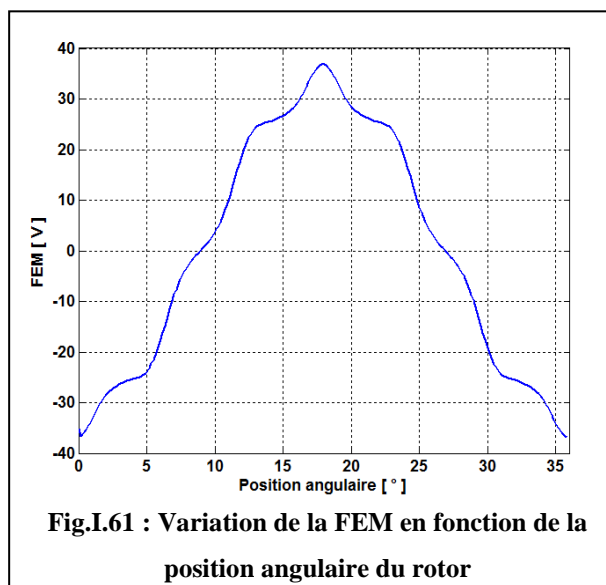


Fig.I.61 : Variation de la FEM en fonction de la position angulaire du rotor

I.13 Conclusion

Dans le domaine de la traction électrique, nous avons vu que la Machine Synchrones à Aimants Permanents MSAP, mis à part le problème du contrôle du flux, est celle qui répond le mieux au cahier des charges imposé. Le défluxage peut être effectué soit par introduction d'une source d'excitation bobinée, soit grâce à un convertisseur commandable.

Au cours de ce chapitre nous avons présenté les différentes réalisations existantes ainsi que les principes de fonctionnement des machines synchrones à double excitation. Ceci nous a conduit à citer les différentes méthodes et modèles élaborés pour modéliser les deux machines qui nous intéressent. Nous avons traité au début un cas particulier de la machine à double excitation série qui est la machine à aimants permanents montés en surface (SPM). Puis nous avons étudié une autre machine innovante dite à Commutation de Flux (MCF)

L'étude de la SPM, a montré que malgré la configuration très simple de cette machine la valeur de son inductance suivant l'axe direct est faible car l'entrefer est important, ce qui rend le contrôle de flux dans l'entrefer assez délicat. Pour remédier à ce problème, nous avons opté pour l'utilisation des enroulements concentriques. Une étude analytique, basée sur l'optimisation du rapport du diamètre intérieur sur le diamètre extérieur du stator a été faite où nous avons pu voir clairement l'apport de l'enroulement concentrique.

Pour la MCF une étude numérique afin de connaître et de se familiariser avec cette structure innovante a été effectuée. La MCF étant une machine cellulaire à concentration de flux, permet d'avoir une valeur maximum de l'induction dans l'entrefer dépassant 2 T. Grâce à cette étude nous avons pu dégager un ensemble important des propriétés de cette machine.

**Chapitre II – Modélisation Analytique De La Machine Synchron
À Double Excitation Série**

II.1 Introduction

Après avoir dressé une synthèse des principes de fonctionnement des machines à double excitation, nous présentons dans ce chapitre le travail que nous avons effectué au cours de notre séjour scientifique en France, au sein du Groupe de Recherche en Electrotechnique et Automatique du Havre (GREAH), en collaboration avec l'équipe «Électrotechnique et Actionneurs» dirigée par le professeur Georges Barakat, sur la modélisation analytique des machines synchrones à double excitation.

L'équipe «Électrotechnique et Actionneurs» du GREAH, fort de son expérience de plus d'une décennie dans le domaine de la conception des machines électriques tournantes, se propose de contribuer à l'amélioration des performances des machines synchrones à double excitation pour la production d'énergie électrique à bord des véhicules, ce qui rentre dans le cadre de notre travail.

Il s'agit de développer un outil de conception pour la machine synchrone à double excitation série, s'appuyant sur la résolution analytique des équations de Maxwell, en utilisant la méthode de séparation des variables, dans les régions à faible perméabilité. La validation des résultats a été faite grâce à l'emploi du logiciel performant Flux2D[®] basé sur la méthode des éléments finis.

II.2 Modélisation analytique de la machine synchrone à double excitation série

La machine synchrone à aimants montés en surface sert fréquemment de moteur de référence dans l'optique d'une comparaison avec des moteurs innovants (Figure II.1) [53]. On rappelle que l'inconvénient majeur de cette machine est l'emplacement des aimants ce qui rend les applications à haute vitesse difficiles. C'est pourquoi, pour diminuer le risque de décollement des aimants, le rotor de la machine peut être placé à l'extérieur du stator (Figure II.2).

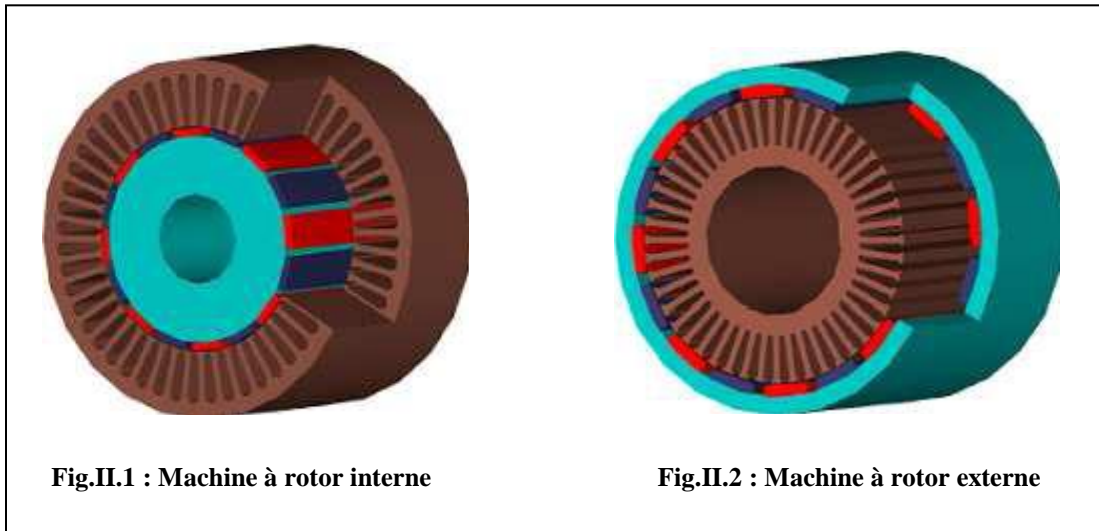


Fig.II.1 : Machine à rotor interne

Fig.II.2 : Machine à rotor externe

II.2.1 Formulation magnétostatique du problème et hypothèses de calcul

Le but est d'établir un modèle de base, rigoureux, permettant d'avoir une approche des grandeurs globales et des grandeurs locales de la machine. Pour se faire, on admet l'ensemble des hypothèses simplificatrices suivantes :

- Perméabilité infinie des parties en fer ;
- Le champ dans la machine ne possède pas de composante selon z ;
- La longueur selon z est infinie ;
- On néglige les pertes par courants de Foucault ;
- Puisque les fréquences de fonctionnement sont relativement basses en électrotechnique, il est donc possible de négliger le terme lié à la densité de courant de déplacement

$$\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \right)$$

On représente sur la figure II.3 une coupe axiale de la machine. La modélisation proposée repose sur la résolution des équations de Maxwell en magnétostatique, dans les parties à faible perméabilité

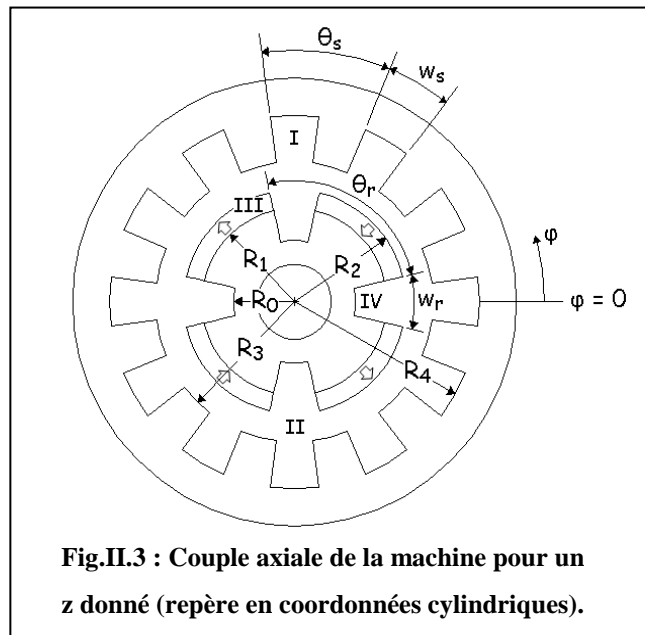


Fig.II.3 : Coupe axiale de la machine pour un z donné (repère en coordonnées cylindriques).

(aimants permanents, entrefer, encoches), où les équations sont résolues pour un φ donné. Dans

cette modélisation les dents et les encoches gardent la même proportion angulaire quelque soit le rayon considéré.

Le potentiel vecteur magnétique ne possède qu'une seule composante qui est delon l'axe z ou cette composante ne dépend que de r et φ .

Les équations de Maxwell en magnétostatique se mettent sous la forme suivante :

$$r\vec{\partial}t \vec{H} = \vec{J} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{B} = r\vec{\partial}t \vec{A} \quad (\text{II.1})$$

Les relations du milieu pour les régions concernées dans la structure étudiée (air et aimants) sont :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_R \quad \text{Avec :} \quad B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}; \quad B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (\text{II.2})$$

La combinaison des équations de Maxwell et des relations du milieu auxquelles on rajoute la jauge de Coulomb ($\text{div} \vec{A} = 0$) pour garantir l'unicité de la solution, conduit à la formulation magnétostatique vectorielle qui s'écrit de la façon suivante :

$$\Delta \vec{A} + \mu \cdot \vec{J} + \mu_0 r\vec{\partial}t \vec{M} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Compte tenu des hypothèses précédentes, le Laplacien du potentiel vecteur, exprimé en coordonnées cylindriques, est donné par :

$$\Delta \vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_z \quad (\text{II.4})$$

L'équation précédente est à redéfinir dans chaque région du problème :

▪ Région I (encoches)

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \begin{cases} 0 & (\text{à vide}) \\ -\mu \cdot J & (\text{en charge}) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

▪ Région II (entrefer)

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.6})$$

▪ Région III (nappe aimantée)

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0}{r} \left(\frac{\partial M_r}{\partial \varphi} - M_\varphi \right) \quad (\text{II.7})$$

Où l'expression de l'aimantation peut être donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} M_r = \sum_{n=1}^{+\infty} (M_{r1n} \cos(m_n \varphi) + M_{r2n} \sin(m_n \varphi)) \\ M_\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} (M_{\varphi1n} \cos(m_n \varphi) + M_{\varphi2n} \sin(m_n \varphi)) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

▪ Région IV (évidements rotorique)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} 0 & \text{à vide} \\ -\mu_0 J_f & \text{en charge} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

On résout ces différentes équations dans les deux cas suivants :

1. à vide (pas de courant dans les encoches) ;
2. en présence des courants dans les encoches, mais sans les aimants.

Le premier cas correspond au fonctionnement à vide, le fonctionnement en charge correspondra à la superposition des solutions des deux cas. La solution en potentiel vecteur magnétique satisfaisant les équations aux dérivées partielles peut être obtenue analytiquement par la méthode de séparation de variable et se met sous la forme générale suivante [54], [55] :

$$A_z(r, \varphi) = a_0 + A_{ps}(r, \varphi) + \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_{1n} r^{m_n} + a_{2n} r^{-m_n}) \cos(m_n \varphi) + (a_{3n} r^{m_n} + a_{4n} r^{-m_n}) \sin(m_n \varphi)] \quad (\text{II.10})$$

Pour aboutir à cette équation, on suppose que A_z est une fonction sinusoïdale en $(m_n \cdot \varphi)$, avec :

$$m_n = n \cdot \lambda; \quad \text{et} \quad \lambda = \text{PGCD}(N_s, p) \quad (\text{II.11})$$

Où, $\text{PGCD}(N_s, p)$ est le plus grand commun diviseur entre N_s (le nombre d'encoches) et p (le nombre de paires de pôles). α_s est le pas d'encoche et α_p est le pas polaire. Il est à noter que :

$$N_s \cdot \alpha_s = 2 \cdot p \cdot \alpha_p = 2 \cdot \pi \quad (\text{II.12})$$

A_{ps} représente la solution particulière dans la région des aimants et dont l'expression est écrite sous la forme suivante :

$$A_{ps}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} [G_n(r) \cos(m_n \varphi) + H_n(r) \sin(m_n \varphi)] \quad (\text{II.13})$$

II.2.2 Solution dans les différentes régions de la machine à vide

a. Solution dans la région I (encoches)

L'équation à résoudre dans la région des encoches est la suivante :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.14})$$

En supposant que le potentiel vecteur est de la forme $A_z = f(r) \cdot g(\varphi)$, la méthode de séparation des variables permet d'écrire l'expression du potentiel vecteur dans chaque encoche i comme suit:

$$A_{zi}^{(I)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(A_{1ni} \cdot r^{m_n} + A_{2ni} \cdot r^{-m_n}) \cdot (A_{3ni} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + A_{4ni} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \right] \quad (\text{II.15})$$

Avec $i = 1, 2, 3, \dots, N_s$.

A.1. Conditions aux limites

Pour une encoches i , les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} H_r(r, \varphi_i) \equiv 0 \\ H_r(r, \varphi_i + w) \equiv 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad ; \quad \text{avec} \quad \varphi_i = \alpha_s - \frac{w}{2} + (i-1) \cdot \alpha_s = i \cdot \alpha_s - \frac{w}{2} \quad (\text{II.16})$$

$$H_\varphi(R_4, \varphi) \equiv 0$$

L'exploitation de ces conditions aux limites, et après redéfinition des coefficients, on aboutit aux écritures suivantes :

$$\begin{cases} A_{zi}^{(I)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[F_{mi} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos \left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] \\ B_{\varphi i}^{(I)}(\varphi, r) = -\frac{\partial A_{zi}(\varphi, r)}{\partial r} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{-F_{mi}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos \left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] \\ B_{Ri}^{(I)}(\varphi, r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_{zi}(\varphi, r)}{\partial \varphi} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{-F_{mi}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

$$\text{Avec : } F_{mi} = \frac{A_{3ni} \cdot A_{1ni} \cdot R_4^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)}}{\cos \left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot \varphi_i \right)}$$

On pose :

$$H(r) = \frac{-1}{r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \text{ et } G(r) = \frac{-1}{r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right)$$

b. Solution dans la région II (entrefer)

L'équation aux dérivées partielles dans la région de l'entrefer est la suivante :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.18})$$

En supposant que le potentiel vecteur est de la forme $A_z = f(r) \cdot g(\varphi)$, la méthode de séparation des variables permet d'écrire :

$$A_z^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(B_{1n} \cdot r^{m_n} + B_{2n} \cdot r^{-m_n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + \left(B_{3n} \cdot r^{m_n} + B_{4n} \cdot r^{-m_n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \right] \quad (\text{II.19})$$

B.1. Conditions aux limites

En face d'une dent i , les conditions aux limites sont les suivantes :

$$H_\varphi(R_3, \varphi) \equiv 0 \text{ pour } \varphi \in [\varphi_i - \alpha_s + w, \varphi_i] \text{ avec } \varphi_i = i \cdot \alpha_s - \frac{w}{2} \quad (\text{II.20})$$

La solution peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} B_r^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[- \left(B_{1n} r^{m_n} + B_{2n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) + \left(B_{3n} r^{m_n} + B_{4n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) \right] \\ B_\varphi^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[- \left(B_{1n} r^{m_n} - B_{2n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) - \left(B_{3n} r^{m_n} - B_{4n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) \right] \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

c. Solution dans la région III (aimants permanents)

L'équation à résoudre dans la région de la nappe aimantée est la suivante :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial B_{Rr}}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r B_{R\varphi})}{\partial r} \right) \quad (\text{II.22})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial B_{Rr}}{\partial \varphi} - B_{R\varphi} \right)$$

En appliquant la méthode de séparation des variables, le potentiel vecteur dans cette région s'écrira comme suit :

$$A_z^{(III)} = \sum_{\substack{n=1 \\ m_n \neq 1}}^{+\infty} \left[\begin{aligned} & \left(C_{1n} \cdot r^{m_n} + C_{2n} \cdot r^{-m_n} + C_{3n} \cdot r \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ & + \\ & \left(C_{4n} \cdot r^{m_n} + C_{5n} \cdot r^{-m_n} + C_{6n} \cdot r \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{aligned} \right] + \left[\begin{aligned} & \left(C_{10} \cdot r + C_{20} \cdot r^{-1} + C_{30} \cdot r \cdot \ln(r) \right) \cdot \cos(\varphi) \\ & + \\ & \left(C_{40} \cdot r + C_{50} \cdot r^{-1} + C_{60} \cdot r \cdot \ln(r) \right) \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right] \quad (\text{II.23})$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme [56] :

$$A_z^{(III)} = A_{ps} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(C_{1n} \cdot r^{m_n} + C_{2n} \cdot r^{-m_n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + \left(C_{4n} \cdot r^{m_n} + C_{5n} \cdot r^{-m_n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \right] \quad (\text{II.24})$$

On en déduit que

$$\begin{cases} B_r^{(III)} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_{ps}}{\partial \varphi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[\left(C_{1n}^{(III)} r^{m_n} + C_{2n}^{(III)} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) - \left(C_{4n}^{(III)} r^{m_n} + C_{5n}^{(III)} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) \right] \right) \\ B_\varphi^{(III)} = \left(-\frac{\partial A_{ps}}{\partial r} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[\left(C_{1n}^{(III)} r^{m_n} - C_{2n}^{(III)} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) + \left(C_{4n}^{(III)} r^{m_n} - C_{5n}^{(III)} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) \right] \right) \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Avec :

$$A_{ps} = r \sum_{n=2}^{+\infty} \left[C_{3n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + C_{6n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \right] + \left[\begin{aligned} & \left(C_{10} \cdot r + C_{20} \cdot r^{-1} + C_{30} \cdot r \cdot \ln(r) \right) \cdot \cos(\varphi) \\ & + \\ & \left(C_{40} \cdot r + C_{50} \cdot r^{-1} + C_{60} \cdot r \cdot \ln(r) \right) \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right] \quad (\text{II.26})$$

A_{ps} représente la solution particulière lorsque $\lambda=1$. Pour les machines ayant $\lambda>1$, la solution particulière est donnée par :

$$A_{ps} = r \sum_{n=2}^{+\infty} \left[C_{3n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + C_{6n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \right] \quad (\text{II.27})$$

On a aussi l'expression de l'induction rémanente :

$$\begin{cases} B_{R\varphi}(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_{1nr} \cdot \cos(m_n \cdot (\varphi - \varphi_d)) + C_{2nr} \cdot \sin(m_n \cdot (\varphi - \varphi_d)) \right) \\ B_{Rr}(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_{3nr} \cdot \cos(m_n \cdot (\varphi - \varphi_d)) + C_{4nr} \cdot \sin(m_n \cdot (\varphi - \varphi_d)) \right) \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Où φ_d représente le déplacement de l'armature mobile par rapport au repère fixe du stator.

En passant par un changement de variables, on peut écrire que :

$$\begin{cases} B_{R\varphi}(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{1nr0} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + C_{2nr0} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \\ B_{Rr}(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{3nr0} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + C_{4nr0} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Avec :

$$\begin{cases} C_{1nr0} = C_{1nr} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) - C_{2nr} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \\ C_{2nr0} = C_{2nr} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) + C_{1nr} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \end{cases} \quad \text{et} \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{cases} C_{3nr0} = C_{3nr} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) - C_{4nr} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \\ C_{4nr0} = C_{4nr} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) + C_{3nr} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \end{cases}$$

On rappelle que l'équation aux dérivées partielles à résoudre est donnée par :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial B_{Rr}}{\partial \varphi} - B_{R\varphi} \right)$$

D'une part, on a :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial B_{Rr}}{\partial \varphi} - B_{R\varphi} \right) = r^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} ((m_n \cdot C_{4nr0} - C_{1nr0}) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) - (m_n \cdot C_{3nr0} + C_{2nr0}) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \quad (\text{a})$$

Et d'autre part, on peut écrire que :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = r^{-1} \cdot \begin{cases} \sum_{\substack{n=1 \\ m_n \neq 1}}^{+\infty} (1 - m_n^2) \cdot (C_{3n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + C_{6n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \\ + \\ 2 \cdot (C_{30} \cdot \cos(\varphi) + C_{60} \cdot \sin(\varphi)) \end{cases} \quad (\text{b})$$

Avec :

$$A_z = \sum_{\substack{n=1 \\ m_n \neq 1}}^{+\infty} \left[\begin{aligned} & (C_{1n} \cdot r^{m_n} + C_{2n} \cdot r^{-m_n} + C_{3n} \cdot r) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ & + \\ & (C_{4n} \cdot r^{m_n} + C_{5n} \cdot r^{-m_n} + C_{6n} \cdot r) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{aligned} \right] + \begin{aligned} & \left[(C_{10} \cdot r + C_{20} \cdot r^{-1} + C_{30} \cdot r \cdot \text{Ln}(r)) \cdot \cos(\varphi) \right] \\ & + \\ & \left[(C_{40} \cdot r + C_{50} \cdot r^{-1} + C_{60} \cdot r \cdot \text{Ln}(r)) \cdot \sin(\varphi) \right] \end{aligned}$$

À partir de ces deux dernières relations (a) et (b) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{n=1 \\ m_n \neq 1}}^{+\infty} (1-m_n^2) \cdot (C_{3n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + C_{6n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \\ + \\ 2 \cdot (C_{30} \cdot \cos(\varphi) + C_{60} \cdot \sin(\varphi)) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\begin{array}{l} (m_n \cdot C_{4nr0} - C_{1nr0}) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ -(m_n \cdot C_{3nr0} + C_{2nr0}) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{array} \right)$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-m_n^2) \cdot C_{3n} = (m_n \cdot C_{4nr0} - C_{1nr0}) \\ (1-m_n^2) \cdot C_{6n} = -(m_n \cdot C_{3nr0} + C_{2nr0}) \end{array} \right. \quad \text{pour } m_n \neq 1$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot C_{30} = (C_{4nr0} - C_{1nr0}) \\ 2 \cdot C_{60} = -(C_{3nr0} + C_{2nr0}) \end{array} \right. \quad \text{pour } m_n = 1$$

(c)

La prise en compte de la condition du milieu et des équations (II.8) et (II.28) conduit à l'écriture suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{3n} = \frac{\mu_0(m_n \cdot M_{\varphi 2n} - M_{r1n})}{(1-m_n^2)} \\ C_{6n} = -\frac{\mu_0(m_n \cdot M_{\varphi 1n} + M_{r2n})}{(1-m_n^2)} \end{array} \right. \quad \text{pour } m_n \neq 1$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{30} = \frac{\mu_0(M_{\varphi 21} - M_{r11})}{2} \\ C_{60} = -\frac{\mu_0(M_{\varphi 11} + M_{r21})}{2} \end{array} \right. \quad \text{pour } m_n = 1$$

(II.31)

$$\text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} C_{1nr0} = \mu_0 \cdot M_{r1n} \\ C_{2nr0} = \mu_0 \cdot M_{r2n} \\ C_{3nr0} = \mu_0 \cdot M_{\varphi 1n} \\ C_{4nr0} = \mu_0 \cdot M_{\varphi 2n} \end{array} \right.$$

C.1. Conditions aux limites

Il n'y a qu'une seule condition aux limites donnée par :

$$H_{\varphi}^{(III)}(R_1, \varphi) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial A_z}{\partial r}(R_1, \varphi) - B_{R\varphi} = 0 \quad \text{(II.32)}$$

L'exploitation de cette équation va permettre d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{n=1 \\ m_n \neq 1}}^{+\infty} m_n \cdot \left[\begin{array}{l} \left(C_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{3n}}{m_n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ \left(C_{4n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{5n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{6n}}{m_n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \left(C_{10} - C_{20} \cdot R_1^{-2} \right. \\ \left. + C_{30} \cdot \ln(R_1) + C_{30} \right) \cdot \cos(\varphi) \\ \left(C_{40} - C_{50} \cdot R_1^{-2} \right. \\ \left. + C_{60} \cdot \ln(R_1) + C_{60} \right) \cdot \sin(\varphi) \end{array} \right] \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{1nr0} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + C_{2nr0} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \end{array} \right\} = 0$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_n \cdot \left(C_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{3n}}{m_n} \right) = -\mu_0 \cdot M_{r1n} \\ m_n \cdot \left(C_{4n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{5n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{6n}}{m_n} \right) = -\mu_0 \cdot M_{r2n} \end{array} \right. \quad \text{pour } m_n \neq 1$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{10} - C_{20} \cdot R_1^{-2} + C_{30} \cdot \ln(R_1) + C_{30} = -\mu_0 \cdot M_{r1n} \\ C_{40} - C_{50} \cdot R_1^{-2} + C_{60} \cdot \ln(R_1) + C_{60} = -\mu_0 \cdot M_{r2n} \end{array} \right. \quad \text{pour } m_n = 1$$

(II.33)

d. Solution dans la région IV (encoches pour bobinage d'excitation)

Cette région est similaire à celle des encoches statoriques (figure II.4). Ainsi on va suivre la même démarche que précédemment.

D.1. Conditions aux limites

Les conditions aux limites qu'il faut prendre en considération sont données par :

Pour une encoche j , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_r(r, \varphi_d + \varphi_{rj}) \equiv 0 \\ H_r(r, \varphi_d + \varphi_{rj} + w_r) \equiv 0 \end{array} \right.$$

et

$$H_\varphi(R_0, \varphi) \equiv 0$$

$$\text{avec } \varphi_{rj} = j\alpha_p - \frac{w_r}{2} \quad (\text{II.34})$$

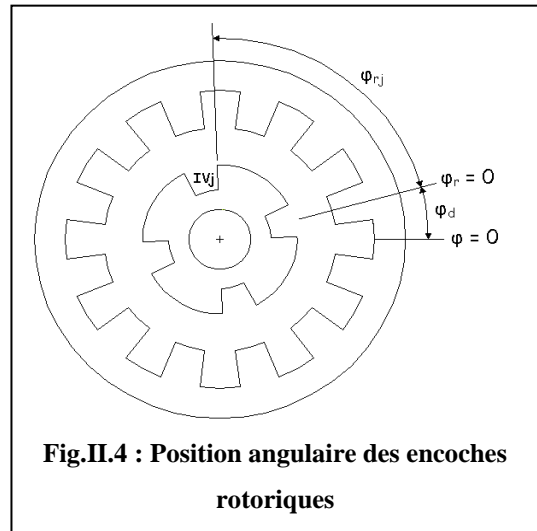


Fig.II.4 : Position angulaire des encoches rotoriques

En exploitant les conditions aux limites et en calculant les composantes d'induction on obtient, après redéfinition des coefficients, les écritures suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{r_j}^{(IV)}(\varphi, r) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{-F_{m1j}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} + \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot (\varphi_r - \varphi_{rj}) \right) \right] \\ B_{\varphi_j}^{(IV)}(\varphi, r) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{-F_{m1j}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right) \cdot \cos \left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot (\varphi_r - \varphi_{rj}) \right) \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.35})$$

$$\text{On pose : } \varphi_r = \varphi - \varphi_d \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} H_1(r) = \frac{-1}{r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right) \\ G_1(r) = \frac{-1}{r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right) \end{array} \right.$$

II.3 Exploitation des conditions de passage entre les différentes régions

II.3.1 Conditions de passage entre les régions I et II

Les relations de passage à la frontière de la région I (encoches) et la région II (entrefer) se déclinent de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\varphi}^{(I)}(\varphi, R_3) = H_{\varphi}^{(II)}(\varphi, R_3) \\ B_r^{(I)}(\varphi, R_3) = B_r^{(II)}(\varphi, R_3) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_{\varphi}^{(I)}(\varphi, R_3) = B_{\varphi}^{(II)}(\varphi, R_3) \\ B_r^{(I)}(\varphi, R_3) = B_r^{(II)}(\varphi, R_3) \end{array} \right. \quad (\text{II.36})$$

$$\text{pour } \varphi \in [\varphi_i, \varphi_i + w] \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i = \alpha_s - \frac{w}{2} + (i-1) \cdot \alpha_s = i \cdot \alpha_s - \frac{w}{2} \\ \text{et } i = 1, 2, 3, \dots, N_s \end{array} \right.$$

Les composantes de l'induction dans la région II, à $r = R_3$, sont des fonctions périodiques en φ de période $\frac{N_s \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}$. Ces composantes sont donc développables en séries de Fourier [55],

[56], [59].

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{\varphi}^{(II)}(\varphi, R_3) = \sum_{n=1}^{+\infty} (B_{5n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + B_{6n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \\ B_r^{(II)}(\varphi, R_3) = \sum_{n=1}^{+\infty} (B_{7n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) + B_{8n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)) \end{array} \right. \quad (\text{II.37})$$

Avec :

$$\begin{cases} B_{5n} = -\frac{m_n}{R_3} (B_{1n} \cdot R_3^{m_n} - B_{2n} \cdot R_3^{-m_n}) \\ B_{6n} = -\frac{m_n}{R_3} (B_{3n} \cdot R_3^{m_n} - B_{4n} \cdot R_3^{-m_n}) \\ B_{7n} = \frac{m_n}{R_3} (B_{3n} \cdot R_3^{m_n} + B_{4n} \cdot R_3^{-m_n}) \\ B_{8n} = -\frac{m_n}{R_3} (B_{1n} \cdot R_3^{m_n} + B_{2n} \cdot R_3^{-m_n}) \end{cases} \quad (\text{II.37.1})$$

Après calcul, on obtient les expressions suivantes (Annexe § B.1) :

$$B_{5n} = \frac{1}{N_{sp} \cdot \alpha_s} \cdot \sum_{i=1}^{N_{sp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mi} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot H(R_3) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n \right)} \right) \cdot \left((-1)^m \cdot \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s + \frac{w}{2} \right) \right) - \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s - \frac{w}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{II.38})$$

$$B_{6n} = \frac{1}{N_{sp} \cdot \alpha_s} \cdot \sum_{i=1}^{N_{sp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mi} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot H(R_3) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n \right)} \right) \cdot \left(\cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s - \frac{w}{2} \right) \right) - (-1)^m \cdot \cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s + \frac{w}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{II.39})$$

$$B_{6n} = \sum_{k=1}^{+\infty} g(n, k) \cdot B_{7k} + \sum_{k=1}^{+\infty} f(n, k) \cdot B_{7k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (g(n, k) + f(n, k)) \cdot B_{7k} \quad (\text{II.40})$$

$$B_{5n} = \sum_{k=1}^{+\infty} f(n, k) \cdot B_{8k} - \sum_{k=1}^{+\infty} g(n, k) \cdot B_{8k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (f(n, k) - g(n, k)) \cdot B_{8k} \quad (\text{II.41})$$

II.3.2 Conditions de passage entre les régions II et III

De même que précédemment, on commence par écrire les conditions de passage entre les régions II et III comme suit :

$$\begin{cases} H_{\varphi}^{(II)}(\varphi, R_2) = H_{\varphi}^{(III)}(\varphi, R_2) \\ B_r^{(II)}(\varphi, R_2) = B_r^{(III)}(\varphi, R_2) \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Les équations du milieu pour les aimants permanents sont données par :

$$\begin{aligned} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{B}_R &\Rightarrow \begin{cases} B_\varphi^{(III)} = \mu_0 \cdot H_\varphi^{(III)} + B_{R\varphi} \\ B_r^{(III)} = \mu_0 \cdot H_r^{(III)} + B_{Rr} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} B_\varphi^{(II)}(\varphi, R_2) = B_\varphi^{(III)}(\varphi, R_2) - B_{R\varphi} \\ B_r^{(II)}(\varphi, R_2) = B_r^{(III)}(\varphi, R_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

En regroupant les termes en cosinus et les termes en sinus les écritures précédentes conduisent aux expressions qu'on peut écrire après simplification sous la forme (Annexe § B.2) :

➤ Cas $m_n \neq 1$

$$\begin{cases} B_{1n} = C_{1n} + \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) \cdot R_2^{-m_n+1} + \frac{\mu_0 \cdot M_{r1n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{-m_n+1} \\ B_{2n} = C_{2n} + \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \cdot R_2^{m_n+1} - \frac{\mu_0 \cdot M_{r1n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{m_n+1} \\ B_{3n} = C_{4n} + \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) \cdot R_2^{-m_n+1} + \frac{\mu_0 \cdot M_{r2n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{-m_n+1} \\ B_{4n} = C_{5n} + \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \cdot R_2^{m_n+1} - \frac{\mu_0 \cdot M_{r2n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{m_n+1} \end{cases} \quad \text{pour } m_n \neq 1 \quad (\text{II.44.1})$$

➤ Cas $m_n = 1$

$$\begin{cases} B_{11} = C_{10} + \frac{C_{30}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \ln(R_2)) + \frac{\mu_0 \cdot M_{r11}}{2} \\ B_{21} = C_{20} - \frac{C_{30}}{2} \cdot R_2^2 - \frac{\mu_0 \cdot M_{r11}}{2} \cdot R_2^2 \\ B_{31} = C_{40} + \frac{C_{60}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \ln(R_2)) + \frac{\mu_0 \cdot M_{r21}}{2} \\ B_{41} = C_{50} - \frac{C_{60}}{2} \cdot R_2^2 - \frac{\mu_0 \cdot M_{r21}}{2} \cdot R_2^2 \end{cases} \quad (\text{II.44.2})$$

II.3.3 Conditions de passage entre les régions III et IV

À la surface de séparation entre la région 'nappe aimantée' III et la région 'encoches rotorique' IV, les conditions de passage sur la composante normale de l'induction et la composante tangentielle du champ d'excitation s'écrivent :

$$\begin{cases} B_r^{(III)}(R_1, \varphi) = B_r^{(IV)}(R_1, \varphi_1) \\ H_\varphi^{(III)}(R_1, \varphi) = H_\varphi^{(IV)}(R_1, \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_r^{(III)}(R_1, \varphi) = B_r^{(IV)}(R_1, \varphi_1) \\ B_\varphi^{(III)}(R_1, \varphi) - \frac{M_\varphi}{\mu_0} = B_\varphi^{(IV)}(R_1, \varphi) \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

pour $\varphi \in [\varphi_d + \varphi_{rj}, \varphi_d + \varphi_{rj} + w_r]$

Les composantes de l'induction dans la région III, à $r = R_1$, sont des fonctions périodiques en φ de période $\frac{p \cdot \alpha_s}{PGCD(Ns, p)}$. Ces composantes sont donc développables en séries de Fourier

(Annexe § B.3) [55], [56], [59].

$$\begin{cases} B_\varphi^{(III)}(\varphi, R_1) - \frac{M_\varphi}{\mu_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{9n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_r) + C_{10n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_r)) \\ B_r^{(III)}(\varphi, R_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{11n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_r) + C_{12n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_r)) \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Les différents coefficients C_{9n} , C_{10n} , C_{11n} et C_{12n} (pour $m_n \neq 0$ et $m_n = 0$) sont obtenus en regroupant les termes en cosinus et en sinus issues après développement de la relation (II.46) et (II.25). On obtient :

$$\begin{cases} C_{9n} = -m_n \cdot \left[\begin{aligned} &\left(C_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{3n}}{m_n} + \frac{C_{1nr0}}{m_n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) \\ &+ \left(C_{4n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{5n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{6n}}{m_n} + \frac{C_{2nr0}}{m_n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \end{aligned} \right] \\ C_{10n} = m_n \cdot \left[\begin{aligned} &\left(C_{4n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{5n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{6n}}{m_n} + \frac{C_{2nr0}}{m_n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) \\ &+ \left(C_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} - C_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} + \frac{C_{3n}}{m_n} + \frac{C_{1nr0}}{m_n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \end{aligned} \right] \\ C_{11n} = m_n \cdot \left[\begin{aligned} &\left(C_{4n} \cdot R_1^{m_n-1} + C_{5n} \cdot R_1^{-m_n-1} + C_{6n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) \\ &- \left(C_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} + C_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} + C_{3n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \end{aligned} \right] \\ C_{12n} = m_n \cdot \left[\begin{aligned} &\left(C_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} + C_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} + C_{3n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) \\ &- \left(C_{4n} \cdot R_1^{m_n-1} + C_{5n} \cdot R_1^{-m_n-1} + C_{6n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \end{aligned} \right] \end{cases} \quad (\text{II.47.1})$$

$$\begin{cases}
 C_{91} = - \begin{bmatrix} (C_{10} + C_{30} - C_{20} \cdot R_1^{-2} + C_{30} \cdot \ln(R_1) + C_{11r0}) \cdot \cos(\varphi_d) \\ + (C_{40} + C_{60} - C_{50} \cdot R_1^{-2} + C_{60} \cdot \ln(R_1) + C_{21r0}) \cdot \sin(\varphi_d) \end{bmatrix} \\
 C_{101} = - \begin{bmatrix} (C_{40} + C_{60} - C_{50} \cdot R_1^{-2} + C_{60} \cdot \ln(R_1) + C_{21r0}) \cdot \cos(\varphi_d) \\ + (C_{10} + C_{30} - C_{20} \cdot R_1^{-2} + C_{30} \cdot \ln(R_1) + C_{11r0}) \cdot \sin(\varphi_d) \end{bmatrix} \\
 C_{111} = \begin{bmatrix} (C_{40} + C_{50} \cdot R_1^{-2} + C_{60} \cdot \ln(R_1)) \cdot \cos(\varphi_d) \\ - (C_{10} + C_{20} \cdot R_1^{-2} + C_{30} \cdot \ln(R_1)) \cdot \sin(\varphi_d) \end{bmatrix} \\
 C_{121} = - \begin{bmatrix} (C_{10} + C_{20} \cdot R_1^{-2} + C_{30} \cdot \ln(R_1)) \cdot \cos(\varphi_d) \\ + (C_{40} + C_{50} \cdot R_1^{-2} + C_{60} \cdot \ln(R_1)) \cdot \sin(\varphi_d) \end{bmatrix}
 \end{cases} \quad (\text{II.47.2})$$

On trouve après calcul :

$$C_{9n} = \frac{1}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mli} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot H_1(R_1) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \cdot \left((-1)^m \cdot \sin\left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p + \frac{w_r}{2} \right) \right) - \sin\left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p - \frac{w_r}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{II.48})$$

$$C_{10n} = \frac{1}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mli} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot H_1(R_1) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \cdot \left(\cos\left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p - \frac{w_r}{2} \right) \right) - (-1)^m \cdot \cos\left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p + \frac{w_r}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{II.49})$$

$$C_{10n} = \sum_{k=1}^{+\infty} (g_1(n, k) + f_1(n, k)) \cdot C_{11k} \quad (\text{II.50})$$

$$C_{9n} = \sum_{k=1}^{+\infty} (f_1(n, k) - g_1(n, k)) \cdot C_{12k} \quad (\text{II.51})$$

II.4 Système d'équation dérivant de l'exploitation des conditions de passage

L'exploitation des équations établies plus haut ((II.37.1), (II.40), (II.41), (II.44.1), (II.44.2), (II.47.1), (II.47.2), (II.50) et (II.51)) va nous permettre de construire un système d'algèbre linéaire dont les inconnus sont les coefficients de l'induction dans la région des aimants (le

calcul est donné dans l'annexe § B.4). Le mouvement est pris en considération où les matrices $[M_5]$ et $[M_{12}]$ sont en fonction de φ_d la position relative du rotor. La résolution du système matricielle donné ci-dessous est effectuée par emploi de la méthode d'élimination de Gauss.

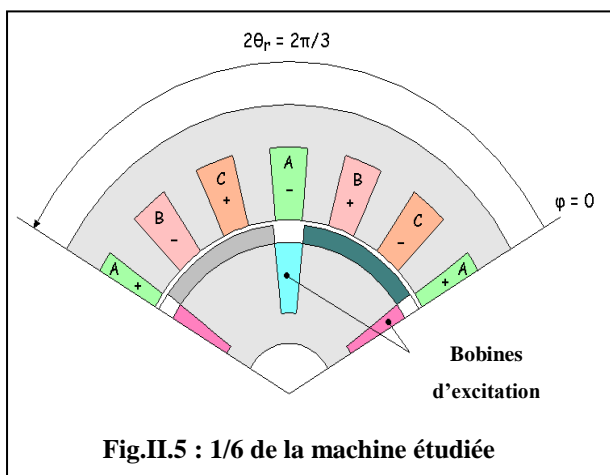
$$\begin{cases} [M_1] \cdot \{C_5\} + [M_2] \cdot \{C_4\} = [V_1] \\ [M_3] \cdot \{C_2\} + [M_4] \cdot \{C_1\} = [V_2] \\ [M_5] \cdot \{C_1\} + [M_6] \cdot \{C_2\} + [M_7] \cdot \{C_4\} + [M_8] \cdot \{C_5\} = [V_3] \\ [M_9] \cdot \{C_1\} + [M_{10}] \cdot \{C_2\} + [M_{11}] \cdot \{C_4\} + [M_{12}] \cdot \{C_5\} = [V_4] \end{cases} \quad (II.52)$$

Une fois que les coefficients dans la région des aimants sont calculés, les coefficients de l'induction dans les autres régions sont déterminés directement grâce à la propriété d'orthogonalité des termes deux à deux.

II.5 Exploitation et validation des résultats

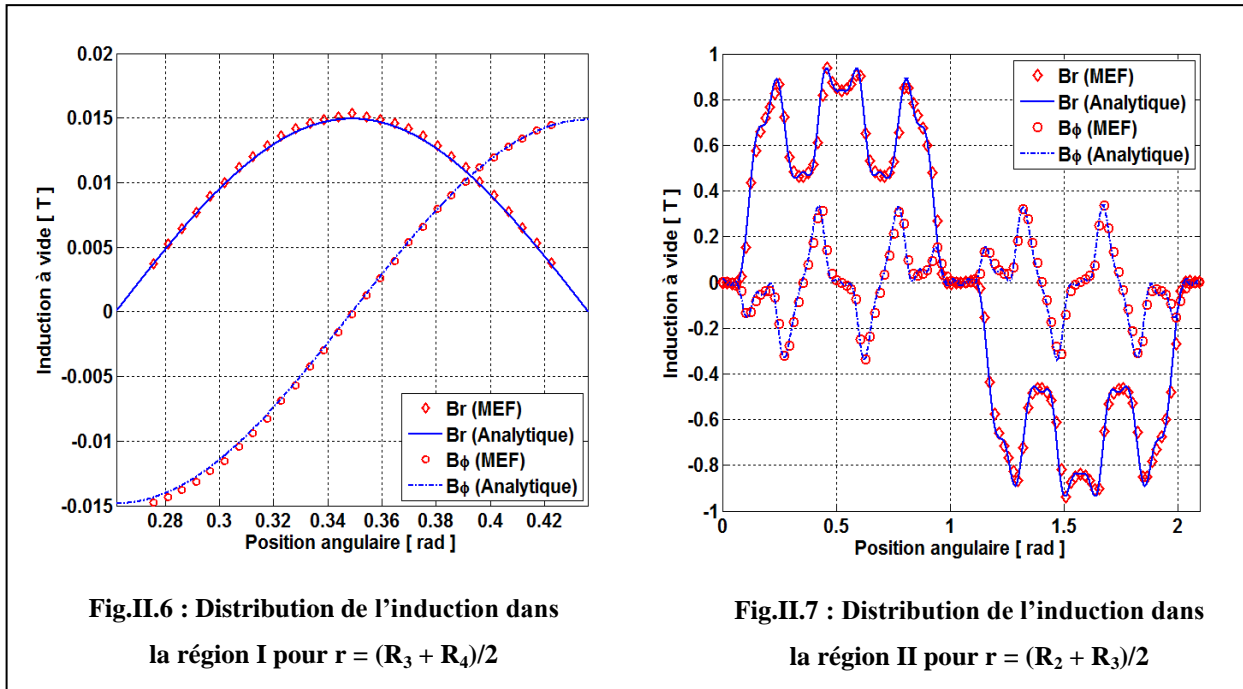
La validation du modèle analytique, basé sur la résolution des équations de Maxwell, qu'on vient de proposer nécessite l'emploi d'un modèle numérique précis. Au fait, le logiciel de calcul numérique basé sur les éléments finis (FLUX 2D, Ansys) a été utilisé. La modélisation de la structure étudiée sera limitée au sixième de la machine (figure II.5) où on a défini des conditions de périodicité (pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi/3$) et des conditions de Dirichlet au niveau du rayon externe et interne de la structure.

Les grandeurs caractéristiques de la machine sont données dans le tableau.1.

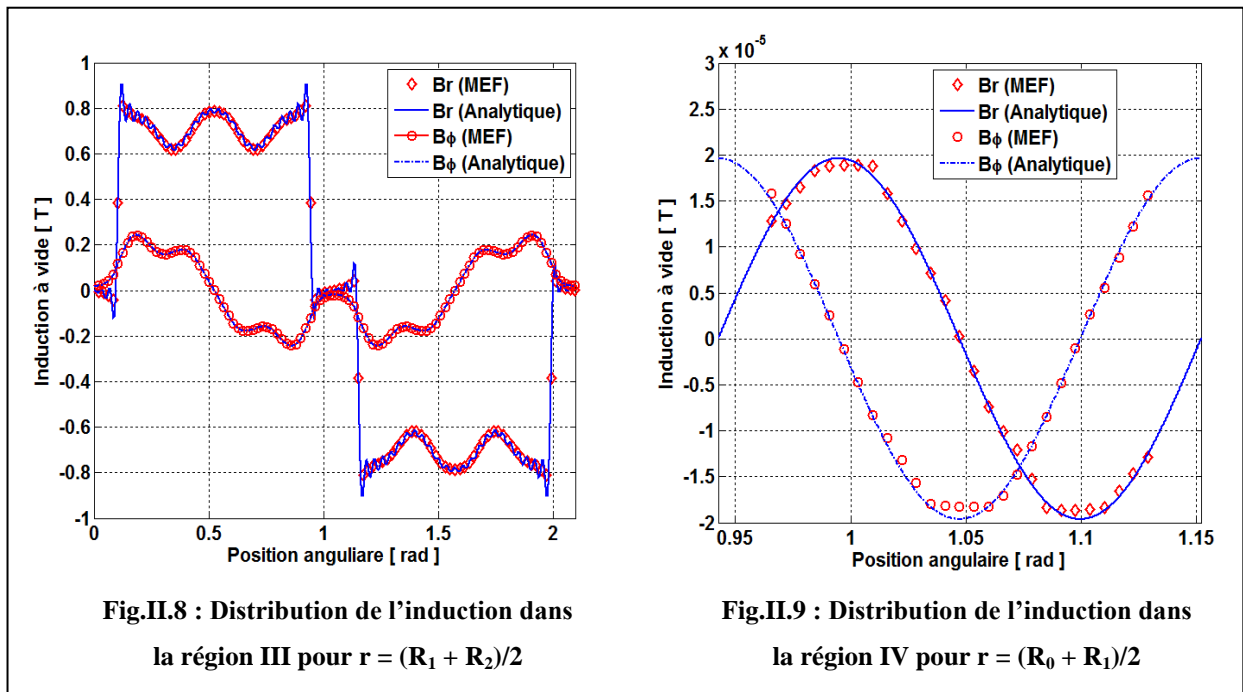


Nombres de paires de pôles	6
Nombres d'encoches	18
Distribution des aimants	Parallèle
R_0, R_1, R_2, R_3 and R_4 (mm)	26.67, 50, 56, 57.5 et 81.5
w_s (rad)	$\pi / 18$
w_r (rad)	$\pi / 15$
Vitesse de rotation	1000 tr/min

Tableau.1 : Listes des principales grandeurs caractéristiques de la machine



Les figures II.6, II.7, II.8 et II.9 illustrent la distribution de l'induction magnétique, pour les différentes régions de la machine, calculée à l'aide du modèle analytique et comparée avec celle obtenue à l'aide d'une simulation par éléments finis.



L'analyse de ces résultats confirme la fiabilité du modèle analytique proposé dans un processus de dimensionnement. De même, la solution analytique exacte dans la région des

aimants permet de contrôler la valeur du champ d'excitation magnétique et de prévenir donc la désaimantation.

II.6 Modélisation analytique du champ créé par l'excitation bobinée

Dans cette partie, on se propose de calculer la répartition de l'induction due seulement à la présence de courants d'excitation, on ne considère qu'une seule phase par encoche et on remplace les aimants par de l'air [55], [58], [60].

L'équation qui régit le potentiel vecteur magnétique s'écrit dans ce cas de la manière suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} 0 & \text{régions I, II et III} \\ -\mu_0 J_f & \text{region IV} \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

La solution générale de cette équation est identique à celle donné en (II.10) sauf que la solution particulière dans la région IV change, pour chaque encoche rotorique (j) on écrit :

$$A_{ps} = -\frac{\mu_0}{2} J_f^{(j)} \left(R_0^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right) \quad (\text{II.54})$$

II.6.1 Solution dans les différentes régions de la machine

a. Solution dans la région I (encoches)

En gardant la même forme de la solution générale (II.15) avec les mêmes conditions aux limites (II.16) pour cette région, la solution est donnée par la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{ri}^{(I)}(\varphi, r) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{-E_{mi}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] \\ B_{\varphi i}^{(I)}(\varphi, r) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{-E_{mi}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos \left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.55})$$

$$\text{Avec : } E_{mi} = \frac{A_{3ni} \cdot A_{1ni} \cdot R_4^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)}}{\cos \left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot \varphi_i \right)}$$

À l'interface entre la région I et la région II, les conditions de passage restent inchangées (II.36), par conséquent l'exploitation de ces conditions est identique à celle développer dans annexe (§ B.1).

b. Solution dans la région II (entrefer)

La solution dans cette région garde la même forme (II.19) par contre les conditions de passage changent, dans ce cas on écrit :

$$\begin{cases} B_r^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[-\left(b_{1n} r^{m_n} + b_{2n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) + \left(b_{3n} r^{m_n} + b_{4n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) \right] \\ B_\varphi^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[-\left(b_{1n} r^{m_n} - b_{2n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) - \left(b_{3n} r^{m_n} - b_{4n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) \right] \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

À l'interface pour $r = R_2$, les conditions de passage entre la région II et la région III sont données par :

$$\begin{cases} B_\varphi^{(II)}(R_2, \varphi) = B_\varphi^{(III)}(R_2, \varphi) \\ B_r^{(II)}(R_2, \varphi) = B_r^{(III)}(R_2, \varphi) \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

c. Solution dans la région III (aimants permanents)

Puisque les aimants sont sans aimantation ils présentent les mêmes caractéristiques que l'air [55], [59], [60]. Dans ce cas, la solution générale aura la même forme que celle donnée pour la région II, on obtient :

$$\begin{cases} B_r^{(III)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[-\left(a_{1n} r^{m_n} + a_{2n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) + \left(a_{3n} r^{m_n} + a_{4n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) \right] \\ B_\varphi^{(III)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[-\left(a_{1n} r^{m_n} - a_{2n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) - \left(a_{3n} r^{m_n} - a_{4n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) \right] \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

La seule condition aux limites et les conditions de passage à l'interface des régions III et IV sont données successivement par :

$$B_\varphi^{(III)}(R_1, \varphi) \equiv 0 \quad (\text{II.59})$$

$$\begin{cases} B_\varphi^{(III)}(R_1, \varphi) = B_\varphi^{(IV)}(R_1, \varphi) \\ B_r^{(III)}(R_1, \varphi) = B_r^{(IV)}(R_1, \varphi) \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

L'exploitation de ces conditions est donnée dans l'annexe B (§ B.5.2). Il suffit de noter que puisque les aimants sont remplacés par de l'air c'est les vecteurs $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$ et $[V_4]$ (vecteurs des sources d'excitations) qui changent.

d. Solution dans la région IV (encoches pour bobinage d'excitation)

Les conditions aux limites pour cette régions restent aussi inchangées (II.34), par contre la forme de la solution change suite à la présence de courants d'excitation dont la forme est donnée par (II.52).

Pour chaque encoche j les différentes composantes de l'induction s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{rj}^{(IV)}(\varphi, r) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{-E_{m1j}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} + \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot (\varphi_r - \varphi_j) \right) \\ B_{\varphi j}^{(IV)}(\varphi, r) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{-E_{m1j}}{r} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right) \cdot \cos \left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot (\varphi_r - \varphi_j) \right) + \frac{\mu_0}{2} J_f^{(j)} \left(\frac{R_0^2}{r} - r \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.61})$$

II.7 Système d'équation dérivant de l'exploitation des conditions de passage

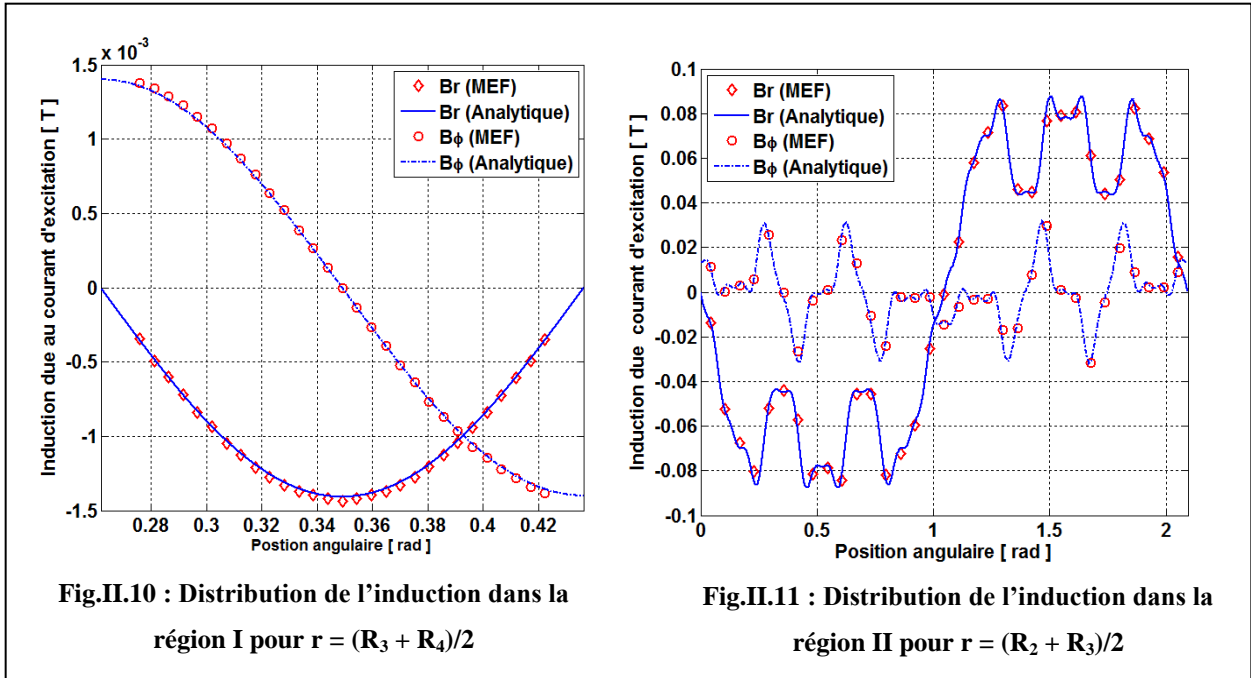
De la même façon que dans le paragraphe (§ II.4) on aboutit à un système d'équation linéaire dont la résolution, par la méthode d'élimination de Gauss, va nous donner directement la solution dans la région d'entrefer (Annexe § B.6). Ceci va nous permettre de déterminer la répartition de l'induction dans les autres régions. Le système à résoudre est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_1] \cdot \{B_{4n1}\} + [M_2] \cdot \{C_{3n1}\} = [0] \\ [M_3] \cdot \{B_{2n1}\} + [M_4] \cdot \{B_{1n1}\} = [0] \\ [M_5] \cdot \{B_{1n1}\} + [M_6] \cdot \{B_{2n1}\} + [M_7] \cdot \{C_{3n1}\} + [M_8] \cdot \{B_{4n1}\} = [V_5] \\ [M_9] \cdot \{B_{1n1}\} + [M_{10}] \cdot \{B_{2n1}\} + [M_{11}] \cdot \{C_{3n1}\} + [M_{12}] \cdot \{B_{4n1}\} = [V_6] \end{array} \right. \quad (\text{II.62})$$

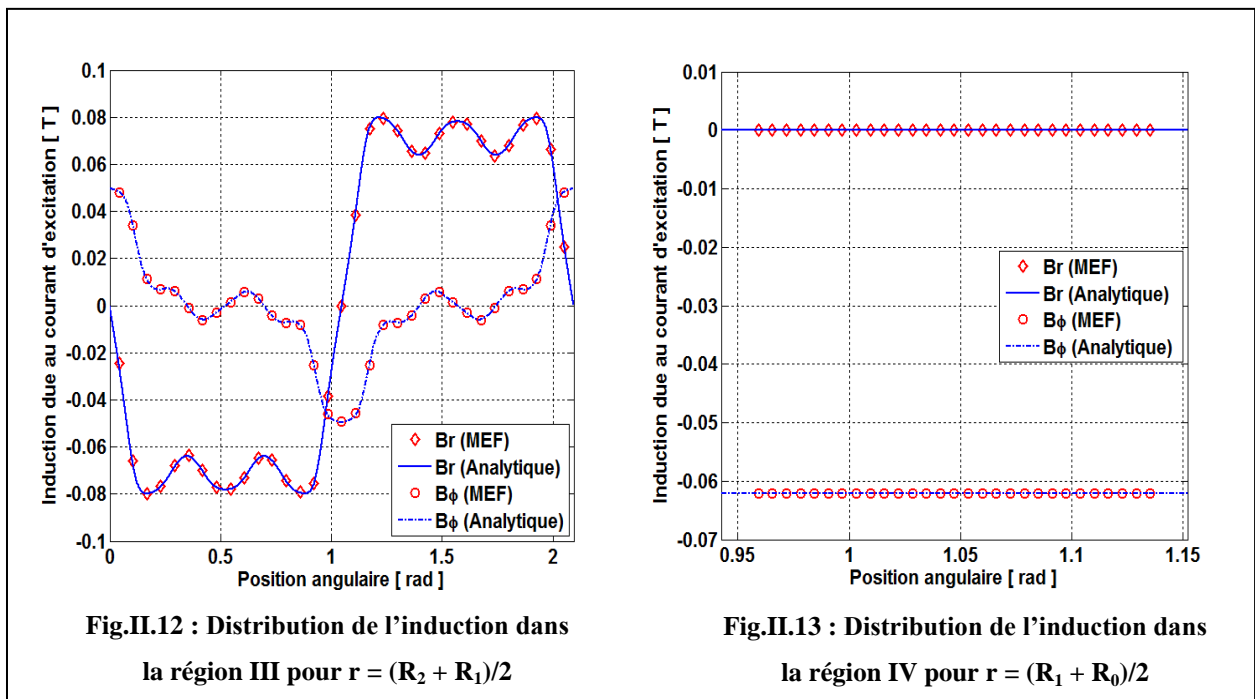
Pour obtenir la distribution de l'induction, il suffit de calculer la somme de la solution à vide et de la solution en présence de courant d'excitation

II.8 Exploitation et validation des résultats

Afin d'étudier la validité des formulations proposées ci-dessus, on a comparé les résultats de la méthode de référence (simulation Ansys) avec les résultats analytiques. Sur les figures II.10, II.11, II.12 et II.13, on présente la forme d'onde de l'induction dans toutes les régions de la structure étudiée. La même machine prise comme exemple précédemment, pour valider les résultats du modèle à vide, est considérée ici.



On constate clairement une très bonne adéquation entre les résultats analytiques obtenus du modèle développé et du modèle numérique implémenté.



II.9 Calcul des grandeurs globales de la machine

Le calcul des grandeurs globales à savoir le flux, la FEM, le couple de détente et l'inductance de phase, permet de mieux appréhender les performances de la machine [55], [58], [60]. En outre, le calcul de ces grandeurs va permettre de réaliser le couplage champ-circuit qu'on va introduire à la fin du chapitre [57].

II.9.1 Calcul des forces et du couple de détente

Le calcul de la force exercée passe par l'introduction du tenseur de Maxwell. En fait, à l'aide des équations de Maxwell en régime quasi-statique, on peut parvenir à l'expression du tenseur de Maxwell à partir de l'équation de la force de Laplace $\vec{J} \wedge \vec{B} = \mu_0 r \text{ot} \vec{H} \wedge \vec{H}$. Sachant que seulement la contrainte normale contribue à la production de la force car à la surface du stator et du rotor il n'existe que la composante normale, la force aura pour expression :

$$F_n = \frac{B_n^2}{2\mu_0} \quad (\text{II.63})$$

Ainsi, en partant de la forme locale de l'équation de Laplace et les équations de Maxwell, on peut écrire l'expression de la force totale exercée sur un volume sous la forme suivante [55]:

$$\vec{F} = \oiint_s \left(\mu_0 (\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{H^2}{2} \vec{n} \right) ds \quad (\text{II.64})$$

Sachant qu'en tout point de la surface renfermant le volume de l'entrefer, on a:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_n + d\vec{F}_t ; \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \vec{n}_r \quad \text{et} \quad \vec{H} = H_r \cdot \vec{e}_r + H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad (\text{II.65})$$

Donc la force totale appliquée à la surface des aimants s'exprime comme suit :

$$d\vec{F} = \mu_0 \left[(\vec{H} \cdot \vec{e}_r) \vec{H} - \frac{H^2}{2} \vec{e}_r \right] ds = \frac{\mu_0}{2} \left[(H_r^2 - H_\varphi^2) \vec{e}_r \right] ds + \mu_0 \left[(H_r H_\varphi) \vec{e}_\varphi \right] ds \quad (\text{II.66})$$

$$d\vec{F} = \underbrace{\vec{\sigma}_n}_{\text{contrainte normale}} ds + \underbrace{\vec{\sigma}_t}_{\text{contrainte tangentielle}} ds$$

Seule la contrainte normale contribue à la production du couple de détente. En remplaçant $\vec{\sigma}_n$ par son expression, le couple développé par la machine est donné par (Annexe § B.7) :

$$\Gamma_{détente} = \frac{L_a R_2^2}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_r^{(\text{II})}(\varphi, R_2) B_\varphi^{(\text{II})}(\varphi, R_2) d\varphi = \frac{L_a 2\pi}{\mu_0} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} m_n^2 \cdot [D_{2n} \cdot D_{3n} - D_{1n} \cdot D_{4n}] \quad (\text{II.67})$$

On note seulement que la période du couple de détente est différente de la période électrique ce qui engendre un pas angulaire différent donné par la relation suivante $\theta_{détente} = \frac{360_{méca}}{ppcm(p, N_s)}$

II.9.2 Calcul du flux et de la force électromotrice

Il existe deux méthodes pour calculer la FEM, une première est basée sur la théorie de fonction de bobinage qu'on va introduire par la suite dans notre travail, la deuxième méthode consiste en l'exploitation du théorème de Stokes et qu'on va exposer maintenant.

Si on attribue tout d'abord le flux ϕ_l^c à la bobine « c » de la phase « l », localisée dans les encoches d'indices « i_1 » et « i_2 », par le moyen du potentiel vecteur magnétique comme suit:

$$\phi_l^c = \frac{N_t}{S_c} \left[\iiint A_z^{(l, i_1)} dv - \iiint A_z^{(l, i_2)} dv \right] \quad (II.68)$$

Où L_a , S_c et N_t sont la longueur axiale active de la machine, la section de la bobine et le nombre de tours en série par bobine respectivement.

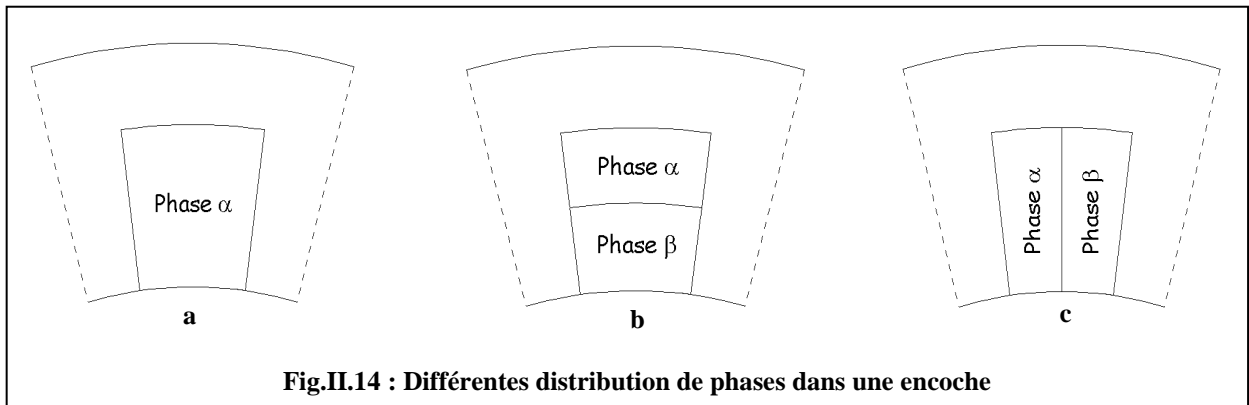


Fig.II.14 : Différentes distribution de phases dans une encoche

La figure II.14 illustre les différentes dispositions de phases dans une encoche. La figure II.14.a correspond au cas où l'encoche ne contient qu'une seule phase, c'est le cas des bobinages répartis classique à pas polaire. Les figures II.14.b et II.14.c correspondent aux cas où l'encoche contient deux phases réparties selon la hauteur (figure II.14.b) (cas des bobinages réparties à pas raccourci) ou selon l'épaisseur (largeur) (figure II.14.c) (cas des bobinages concentriques). La solution particulière doit s'adapter à chaque cas [59], [60].

Ainsi à partir de l'équation (II.68) et après calcul et simplification, on obtient (Annexe B (§ B.8)) :

$$\phi_l^c = N_t L_a \left(c_0^{(l, i_1)} - c_0^{(l, i_2)} \right) \quad (II.69)$$

Avec :

$$c_0^{(I,i)} = \frac{1}{w} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{m_n} \sin\left(m_n \frac{w}{2}\right) \times \left[\begin{aligned} & \left(c_{1n}^{(II)} R_3^{m_n} + c_{2n}^{(II)} R_3^{-m_n} \right) \cos\left(m_n \left(\varphi_i + \frac{w}{2} \right)\right) \\ & + \left(c_{3n}^{(II)} R_3^{m_n} + c_{4n}^{(II)} R_3^{-m_n} \right) \sin\left(m_n \left(\varphi_i + \frac{w}{2} \right)\right) \end{aligned} \right] \right] \quad (\text{II.70})$$

La FEM est calculée, en appliquant la loi de Faraday, comme suit :

$$E = -\frac{d\phi}{dt} = -\Omega \frac{d\phi}{d\varphi_d} \quad (\text{II.71})$$

II.9.3 Calcul des inductances propres

Pour le calcul de l'inductance propre on va utiliser l'expression du potentiel vecteur magnétique dans la région des encoches rotoriques dont l'expression est donnée par :

$$A_{zj} = a_1^j + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[E_{mlj} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} + \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot (\varphi_r - \varphi_{rj}) \right) \right] + \frac{\mu_0}{2} \cdot J_f^{(j)} \cdot \left(R_0^2 \cdot Ln(r) - \frac{r^2}{2} \right) \quad (\text{II.72})$$

En se basant sur le calcul du flux, pour déterminer l'expression de l'inductance propre, on adapte la même démarche que précédemment (§ II.9.1), on aboutit à la relation suivante :

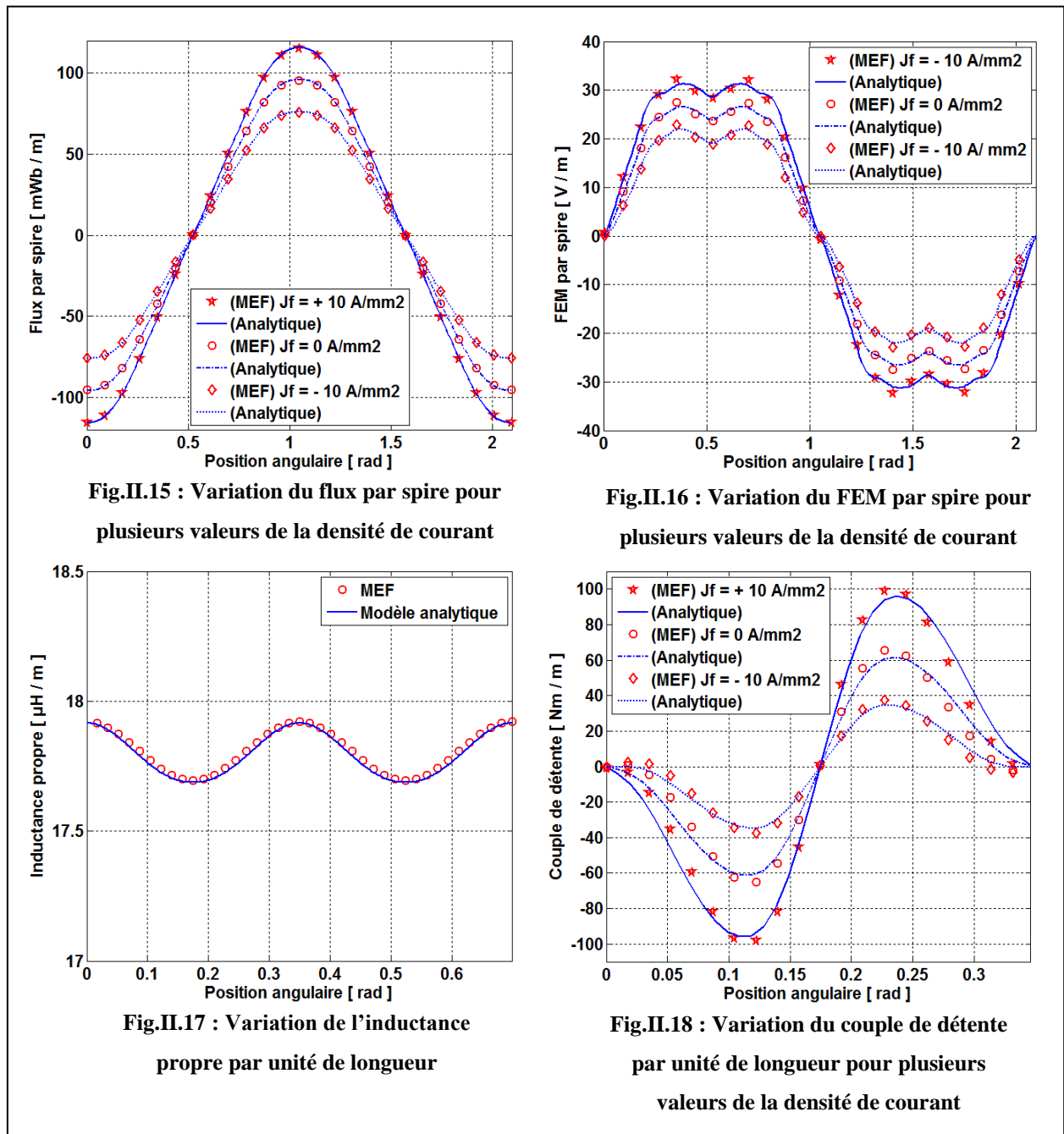
$$\phi_{exc}^c = N_{te} \cdot L_a \left[b_0^{(IV,j_1)} - b_0^{(IV,j_2)} - \mu_0 J_f^{(j_1)} U \right] \quad (\text{II.73})$$

Où N_{te} représente le nombre de spires en série, les expressions de $b_0^{(IV,j)}$ et U sont données par :

$$b_0^{(IV,j)} = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{m_n w_r} \sin\left(m_n \frac{w_r}{2}\right) \times \left[\begin{aligned} & \left(b_{1n}^{(II)} R_1^{m_n} + b_{2n}^{(II)} R_1^{-m_n} \right) \cos\left(m_n \left(\varphi_{dj} + \frac{w}{2} \right)\right) \\ & + \left(b_{3n}^{(II)} R_1^{m_n} + b_{4n}^{(II)} R_1^{-m_n} \right) \sin\left(m_n \left(\varphi_{dj} + \frac{w}{2} \right)\right) \end{aligned} \right] \right] \\ & + \frac{\mu_0}{2} J_f^{(j)} \left(R_0^2 Ln(R_1) - \frac{R_1^2}{2} \right) \end{aligned} \right.$$

$$U = \frac{R_0^2}{(R_1^2 - R_0^2)} \left[R_1^2 \left(Ln(R_1) - \frac{1}{2} \right) - R_0^2 \left(Ln(R_0) - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{(R_1^2 + R_0^2)}{4}$$

Les figures suivantes sont les résultats de simulation où on a tracé la variation du flux, la FEM, le couple de détente et de l'inductance propre en fonction de la position angulaire pour plusieurs valeurs de la densité de courant.

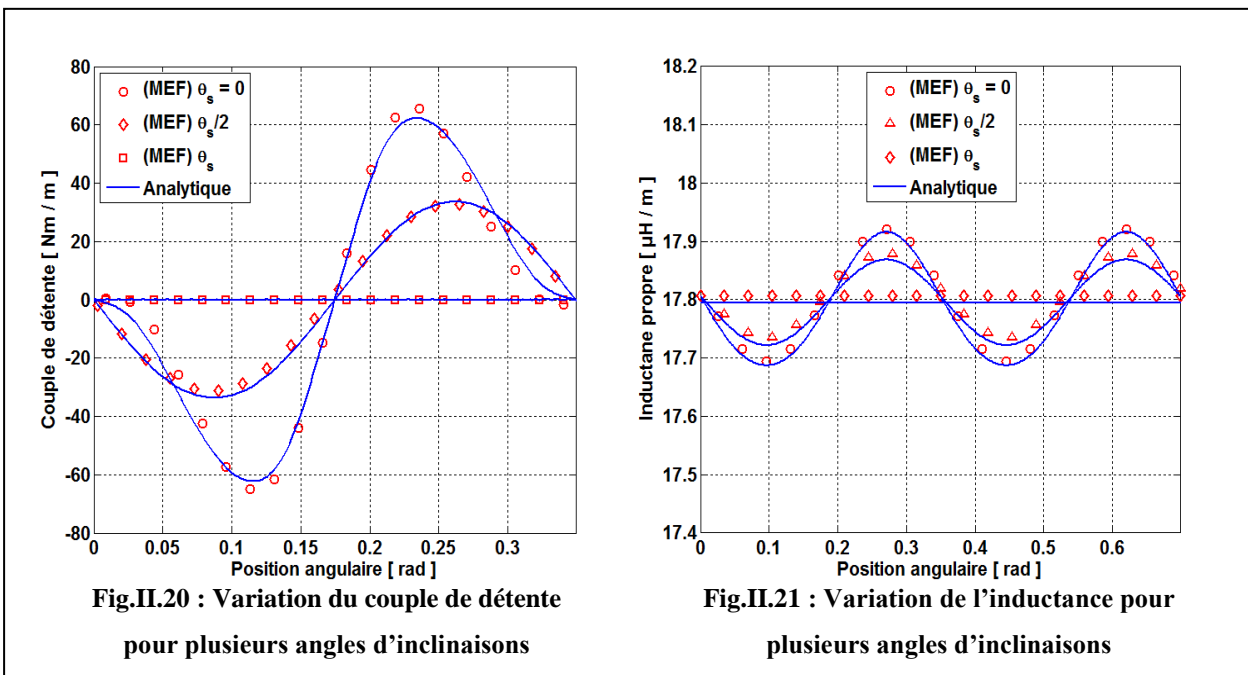
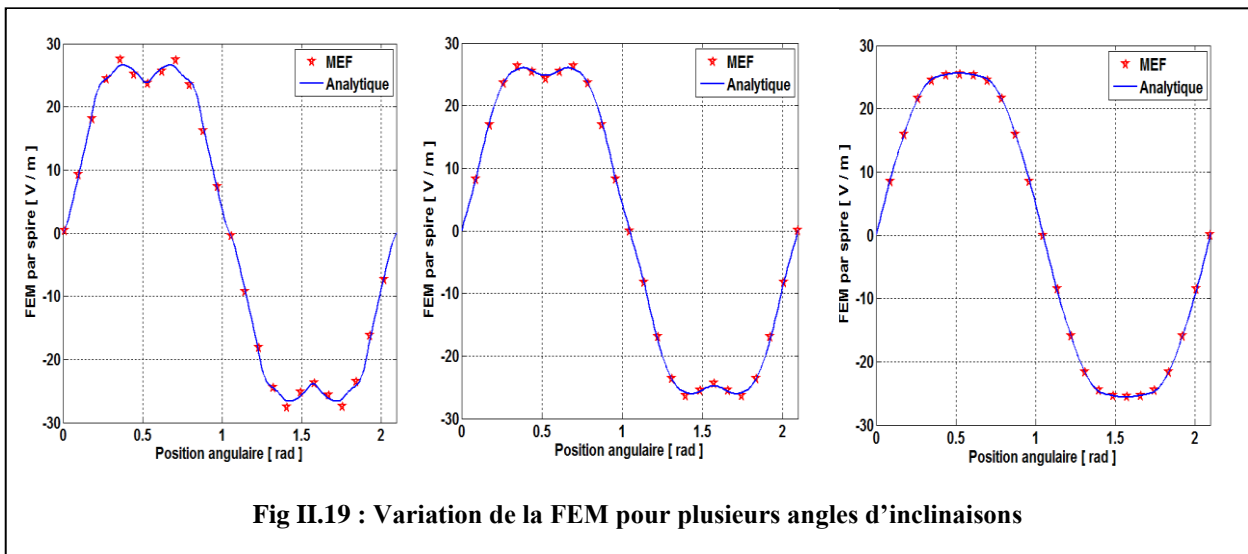


On remarque une très bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques. On peut voir aussi l'effet d'encoche prononcé au niveau de l'entrefer (figures II.7 et II.11) tandis qu'il est moins prononcé dans la région des aimants (figures II.8 et II.12). Cet effet d'encoche on le retrouve sur la (figure II.17) [59].

II.9.4 Minimisation du couple de détente

Le couple de détente peut avoir un impact sur les ondulations du couple en fonctionnement nominal et peut entraîner un bruit gênant pour certaines applications, donc on cherche à le minimiser [61]. Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été proposées on peut citer : l'inclinaison des encoches, l'utilisation des dents d'ouverture différentes, l'introduction de pôles auxiliaires et la modification de la forme d'onde des courants statoriques. Pour le rotor, on peut citer : l'inclinaison des aimants et la distribution asymétrique des aimants [55],...etc.

Dans notre cas, on va adopter la technique d'inclinaison au stator avec un angle θ_s égale au pas d'encoche statorique. On trace ainsi la FEM, le couple de détente et l'inductance propre [59].



Pour les courbes qui représentent la variation de la FEM (figure II.19) et du couple de détente (figure II.20), pour un courant d'excitation nul, on remarque que l'inclinaison des encoches permet de réduire les harmoniques de la FEM et permet de réduire le couple de détente au point de l'éliminer pour un angle d'inclinaison égale au pas d'encoche θ_s [59]. On a remarqué que pour des valeurs de l'angle d'inclinaison inférieures à celle du pas d'encoche, la valeur maximale des grandeurs étudiées diminue par contre si l'angle d'inclinaison est supérieur à cet angle les valeurs maximales ne changent pas. Les mêmes remarques restent valables lorsqu'un courant d'excitation est injecté dans les bobines. Aussi, on voit clairement que l'inclinaison des encoches permet de réduire aussi l'effet d'encoche (figure II.21) et que la variation de la reluctance du circuit magnétique suite à la rotation du rotor, devient constante pour un angle égal au pas d'encoche θ_s [59].

II.10 Prise en compte des équations du circuit

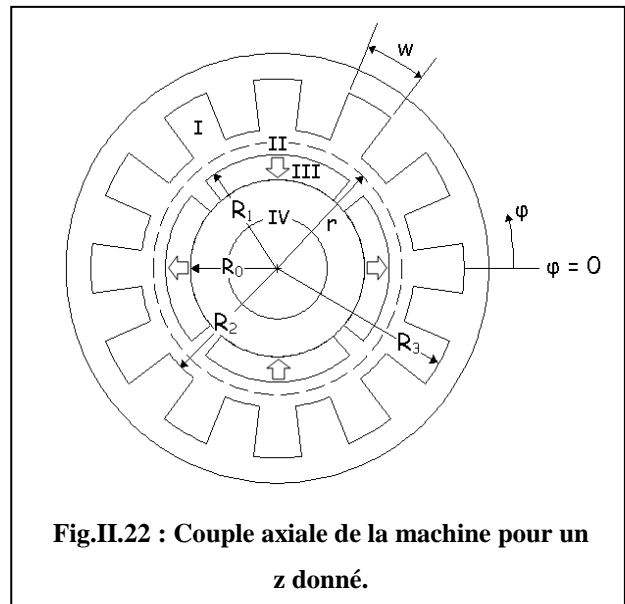
Lorsque des dispositifs électromagnétiques sont associés à des circuits d'alimentation, il est nécessaire de considérer le couplage entre les équations du circuit et les équations du champ de la structure [57], [62], [63].

La structure étudiée est représentée sur la figure II.22 où on retrouve 4 différentes régions, comme précédemment, sauf que la quatrième région ne représente plus la région des encoches du bobinage d'excitation, mais c'est une culasse de retour du flux qui n'est considérée que lorsqu'elle est prise comme un support amagnétique des aimants.

Les équations aux dérivées partielles gouvernant le champ magnétique, en terme de jauge de Coulomb ($div\vec{A}=0$) et en se basant sur ce qui a été fait précédemment, sont données comme suit :

- À vide :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} 0 & \text{pour les régions I, II et IV} \\ \frac{\mu_0}{r} \left(\frac{\partial M_r}{\partial \varphi} - M_\varphi \right) & \text{pour la région III} \end{cases} \quad (\text{II.74})$$



• Réaction magnétique d'induit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} 0 & \text{pour les régions II, III et IV} \\ -\mu_0 J_s & \text{pour la région I} \end{cases} \quad (\text{II.75})$$

La solution générale de l'équation (II.74), (II.75) est obtenue grâce à la méthode de séparation des variables et elle est donnée par la relation (II.10). La combinaison de cette solution, dans chaque région, avec les conditions aux limites ainsi que les conditions de passage (§ II.3 et § II.4) permet d'établir un système linéaire ($N_H \times N_H$) (où N_H est le nombre d'harmoniques considérés), où les inconnues sont les coefficients du potentiel vecteur dans la région III [56], [64].

Remarque :

Le modèle développé peut s'adapter aussi bien à une structure à rotor interne qu'externe (figure II.23) [54].

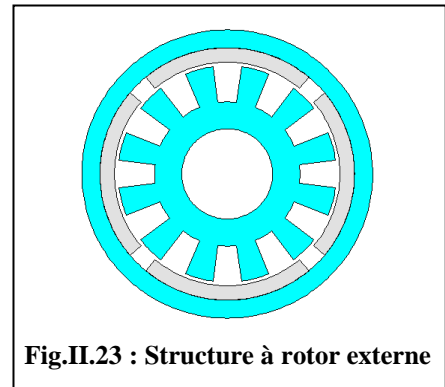


Fig.II.23 : Structure à rotor externe

II.10.1 Calcul des grandeurs global à partir des grandeurs locales

Comme on l'a mentionné plus haut (§ II.9), le calcul des grandeurs globales (la FEM, inductances propres et mutuelles, flux et couple de détente) va nous permettre d'introduire les équations de circuit, mais pour cela on va faire appel à une autre technique. Au fait, le calcul des grandeurs globales dans cette partie revient au calcul du flux embrassé par une phase statorique en utilisant la fonction de bobinage.

II.10.2 Fonction de distribution d'une phase statorique

Soit une bobine ayant N_t spires en série placée dans un stator ayant N_s encoches. La figure II.24 illustre un exemple de la fonction de distribution sur une paire de pôle (machine ayant une périodicité correspondant à une paire de pôles) d'une bobine ayant un angle d'ouverture θ_c . [54], [55], [57].

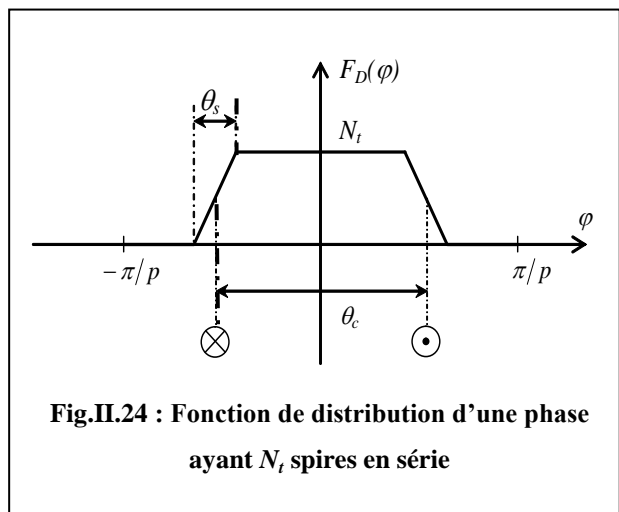


Fig.II.24 : Fonction de distribution d'une phase ayant N_t spires en série

Remarque : Au fait, la fonction de distribution dépend aussi du type du bobinage utilisé (bobinage à pôles consécutifs, pas raccourci, deux couches, ...etc.) (figure II.14) [54].

La fonction de distribution d'une bobine s'écrit en prenant l'axe d'une bobine comme axe de référence [57] de la manière suivante :

$$F_d(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \varphi \in \left[-\pi ; -\frac{(\theta_c + \theta_s)}{2} \right] \cup \left[\frac{(\theta_c + \theta_s)}{2} ; \pi \right] \\ \frac{N_t}{\theta_s} \left(\varphi + \frac{\theta_c + \theta_s}{2} \right) & \text{pour } \varphi \in \left[-\frac{(\theta_c + \theta_s)}{2} ; -\frac{(\theta_c - \theta_s)}{2} \right] \\ N_t & \text{pour } \varphi \in \left[-\frac{(\theta_c - \theta_s)}{2} ; \frac{(\theta_c - \theta_s)}{2} \right] \\ -\frac{N_t}{\theta_s} \left(\varphi - \frac{\theta_c - \theta_s}{2} \right) & \text{pour } \varphi \in \left[\frac{(\theta_c - \theta_s)}{2} ; \frac{(\theta_c + \theta_s)}{2} \right] \end{cases} \quad (\text{II.76})$$

La fonction de distribution d'une phase statorique est la somme des fonctions de distribution de toutes les bobines constituant la phase. Elle définit la forme de distribution des conducteurs d'une phase le long de l'alésage statorique. Dans le cas d'un bobinage distribué à une seule couche, à pas diamétral et à p paires de pôles, le développement en série de Fourier de la fonction de distribution de la phase « i » se met sous la forme :

$$F_{D_i}(\varphi) = \frac{\theta_c}{2\pi} N_t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\theta_c}{\pi} N_t \Gamma_n(\theta_c) \Gamma_n(\theta_s) \cos(np\theta_c) \quad (\text{II.77})$$

$$\text{Où } \Gamma_n(\varphi) = \frac{\sin(n\varphi/2)}{n\varphi/2}$$

D'une manière générale, la fonction de distribution d'une phase donnée « i » peut être exprimée sous la forme d'une série de Fourier, comme suit :

$$F_{D_i}(\varphi) = e_{d0}^{(i)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[e_{dn}^{(i)} \cos(m_n \varphi) + f_{dn}^{(i)} \sin(m_n \varphi) \right] \quad (\text{II.78})$$

II.10.3 Calcul de la FEM

Considérons une phase « i » de la machine, décrite par une fonction de distribution $F_{D_i}(\varphi)$. La FEM pour cette phase est calculée en dérivant le flux total la traversant, à vide, par rapport au temps (loi de Faraday). Si Φ_{SRi} représente le flux embrassé par cette phase, dont la surface est égale à S_{ph} , il peut être exprimé sous la forme :

$$\Phi_{SRi} = \iint_{S_{ph}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N_t L_a R_2 \int_0^{2\pi} F_{Di}(\varphi) B_r^{II}(R_2, \varphi) d\varphi \quad (\text{II.79})$$

Où B_r^{II} représente la composante radiale de l'induction à vide dans la région II.

Une fois le flux Φ_{SRi} est déterminé, on passe à une interpolation spline du troisième ordre le long de l'intervalle de calcul $[0, 2\pi]$. En multipliant le résultat par la vitesse de rotation on obtient directement la FEM.

Cette façon de travailler simplifie le calcul de la dérivée par rapport au temps et permet un couplage direct avec les équations du circuit.

$$e_i(\varphi) = -\frac{d\Phi_{SRi}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\Phi_{SRi}}{d\varphi} = -\Omega \cdot \frac{d\Phi_{SRi}}{d\varphi} \quad (\text{II.80})$$

Avec : Ω vitesse de rotation de la machine.

II.10.4 Calcul de l'inductance magnétisante et mutuelle

En utilisant la théorie des fonctions de distribution, l'inductance mutuelle se calcule à partir du flux envoyé par un enroulement « k » parcouru par un courant $i(t)$ à travers l'enroulement « i ». Son expression est donnée par :

$$M_{ik} = N_t L_{ax} R_2 \int_0^{2\pi} F_{Di}(\varphi) B_{rk}^{II}(R_2, \varphi) d\varphi \quad (\text{II.81})$$

L'inductance magnétisante d'une phase statorique « k » se calcule de la même manière que l'inductance mutuelle, sauf qu'il faut lui rajouter l'inductance de fuite dont l'expression dépend du type de bobinage utilisé [55], [56].

B_{rk}^{II} est la composante radiale de l'induction dans l'entrefer créée suite au passage du courant unitaire dans la bobine « k ».

L'expression de l'inductance de fuite dans notre cas, pour un courant unitaire, est donnée par :

$$l_{\sigma j} = N_t L_{ax} \int_{R_2}^{R_3} B_{\varphi}^{Ij}(r, \varphi_j) dr \quad (\text{II.82})$$

Où B_{φ}^{Ij} représente la composante tangentielle de l'induction dans l'encoche « j » et φ_j la position angulaire au milieu de l'encoche « j ».

II.10.5 Calcul du couple

Le couple électromagnétique peut être calculé, en appliquant le tenseur de Maxwell (§ II.9.1), grâce à la relation suivante :

$$\Gamma_{elm} = \frac{L_a R_1^2}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_r^{II}(R_1, \varphi) B_\varphi^{II}(R_1, \varphi) d\varphi \quad (\text{II.83})$$

Avec B_r^{II} et B_φ^{II} sont les composantes radiales et tangentielles de l'induction dans l'entrefer en charge. À vide, l'équation (II.83) donne le couple de détente [56].

II.11 Équations du circuit

Grâce à la démarche adoptée, on peut rajouter au calcul analytique en charge, à partir des grandeurs électromagnétiques locales, un calcul des grandeurs électriques globales du circuit électrique associé. Dans notre cas, le circuit retenu est représenté sur la (figure II.25) [28], [55], [56].

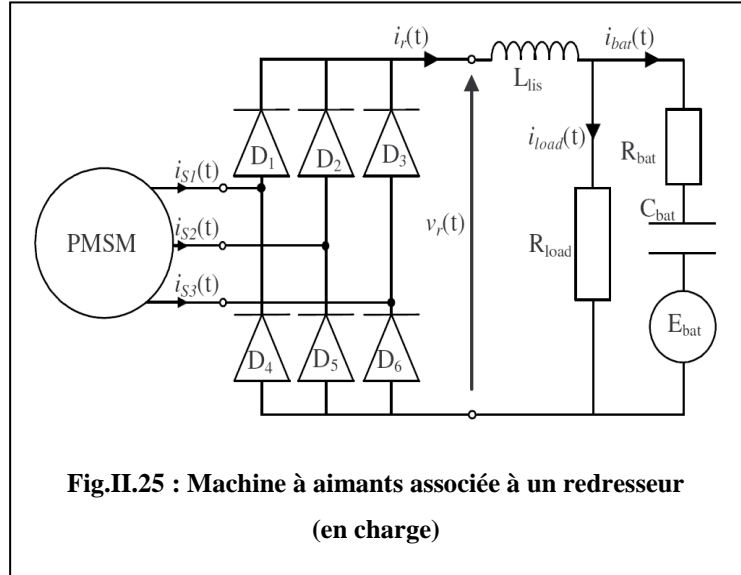
La résistance R_{bat} supposée constante, modélise la résistance

interne de la batterie tandis que la source idéale de tension E_{bat} en série avec la capacité C_{bat} modélise la partie linéaire sur les courbes de charge et de décharge. R_{load} représente une charge de consommation tandis que L_{lis} est une inductance de lissage. L'influence de la température est négligeable pour ce modèle [55].

On considère deux modes de fonctionnements du redresseur i.e. conduction à deux ou trois diodes. On aboutit aux deux équations, notées sous forme matricielle, reliant les grandeurs électriques alternatives aux grandeurs électriques redressées comme suit :

$$\left. \begin{aligned} [i_S] &= [C_V] i_r \\ [i_D] &= [C_D] i_r \\ v_r &= [C_V]^T [v_S] - [C_D]^T [ONE] (V_{DF} + R_{Don} i_r) \end{aligned} \right\} \text{Conduction à deux diodes}$$

$$\left. \begin{aligned} [i_S] &= \frac{1}{2} [C_{Vrm}] [i_{rm}] \\ [i_D] &= \frac{1}{2} [C_{Drm}] [i_{rm}] \\ [v_{rm}] &= -[C_{Drm}]^T \left(\frac{1}{2} [C_{Drm}] R_{Don} [i_{rm}] \right) + [C_{Vrm}]^T [v_S] \end{aligned} \right\} \text{Conduction à trois diodes} \quad (\text{II.84})$$



Où :

- i_r et v_r représente le courant et la tension du redresseur ;
- $[C_V]$ est le vecteur de commutation de dimension (3x1) dont les éléments sont -1, 0 et 1 qui dépendent de l'état de conduction des diodes ;
- $[i_D]$ est le vecteur des courants traversant les diodes de dimension (6x1), les éléments de ce vecteur sont soit 1 lorsque la diode conduit sinon 0 dans le cas contraire ;
- R_{Don} la résistance interne de la diode ;
- V_{DF} tension de seuil ;
- i_m courant de maille ;
- $[i_{rm}]$ et $[C_{Vrm}]$ sont définies comme suit : $[i_{rm}]^T = [i_r \ i_m]$ et $[C_{Vrm}] = [2v_r \ 0]$;
- $[C_{Drm}]$ et $[C_{Vrm}]$ matrices de commutation dépendant du type de commutation dont les dimensions sont (3x2) et (6x2) respectivement ;
- $[i_S]$ est le vecteur des courants des phases statoriques ;
- $[V_S]$ est le vecteur des tensions des phases statoriques ;

L'application des lois de Kirchhoff va nous permettre d'écrire l'équation d'une phase statorique « i » de résistance R_{si} soumise à la tension v_{si} et parcourue par le courant i_{si} de la manière suivante :

$$v_{si} = -R_{si} \cdot i_{si} - \frac{d\phi_{SSi}}{dt} + \frac{d\phi_{SRi}}{dt} \quad \text{(II.85)}$$

Avec : ϕ_{SSi} le flux provenant des phases statoriques y compris la phase « i » elle même et ϕ_{SRi} le flux crée par les aimants permanents.

En généralisant l'équation (II.85) à toutes les phases statoriques, l'équation du stator sous forme matricielle peut être formulée comme suit :

$$[V_S] = \Omega \frac{d[\Phi_{SR}]}{d\theta} - \left([R_S] + \Omega \frac{d[L_{SS}]}{d\theta} \right) [i_S] - [L_{SS}] \frac{d[i_S]}{dt} \quad \text{(II.86)}$$

Où $[\Phi_{SR}]$, $[R_S]$ et $[L_{SS}]$ représentent respectivement le vecteur des flux à vide, la matrice diagonale regroupant les résistances des phases statoriques et la matrice symétrique contenant les différentes inductances, à savoir l'inductance propre, de fuite et mutuelle [55], [56], [65].

En combinant les relations (II.84) et (II.86), on arrive aux équations suivantes :

- Conductions à deux diodes

$$\frac{di_r}{dt} = - \left([C_V]^T [L_{SS}] [C_V] + L_L \right)^{-1} \left\{ \begin{aligned} & \left([C_V]^T \left([R_S] + \Omega \frac{d[L_{SS}]}{d\theta} \right) [C_V] + [C_D]^T [ONE] R_{Don} \right) i_r \\ & + \Omega [C_V]^T \frac{d[\Phi_{SR}]}{d\theta} - [C_D]^T [ONE] V_{DF} - v_r \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.87})$$

 - Conduction à trios diodes

$$\frac{d[i_{rm}]}{dt} = \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} [C_{Vrm}]^T [L_{SS}] [C_{Vrm}] \right)^{-1} \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \left([C_{Vrm}]^T \left([R_S] + \Omega \frac{d[L_{SS}]}{d\theta} \right) [C_{Vrm}] + [C_{Drm}]^T [C_{Drm}] R_{Don} \right) [i_{rm}] \\ & + \Omega [C_{Vrm}]^T \frac{d[\Phi_{SR}]}{d\theta} - [C_{Drm}]^T [C_D] V_{DF} - [v_{rm}] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (\text{II.88})$$

II.11.1 Exploitation du modèle développé

Les paramètres de la génératrice de 10 kW à aimants permanents sont donnés dans le tableau.2.

On commence par visualiser la variation de l'induction magnétique dans les différentes régions de la machine. En comparant les résultats analytiques avec ceux obtenus numériquement, on constate une très bonne concordance et donc la fiabilité du modèle développé (figures II.26, II.27, II.28, II.29, II.30 et II.31).

Nombre de pôles	28
Nombre d'encoches	84
Induction rémanente	1.25 T
w	$\pi/84$
Rapport de l'arc polaire de l'aimant par rapport au pas polaire	85%
R ₀	328.9 mm
R ₁	334 mm
R ₂	335.3 mm
R ₃	341.4 mm
Longueur axiale active	50 mm

Tableau.2: Paramètres de la machine étudiée

Cette partie a été ajoutée pour illustrer la maniabilité du modèle développé qui peut être utilisé, par la suite, lors d'une étude de conception optimale.

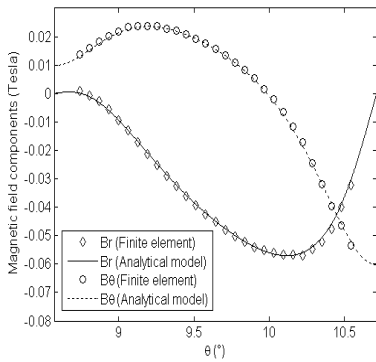


Fig.II.26 : Distribution de l'induction dans la région I pour $r = (R_2+R_3) / 2$

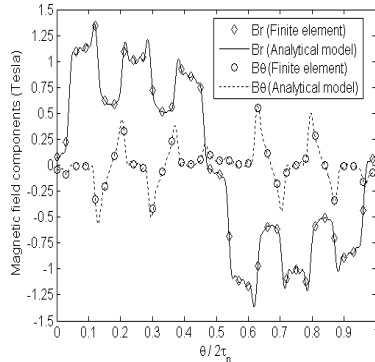


Fig.II.27 : Distribution de l'induction dans la région II pour $r = (R_1+R_1) / 2$

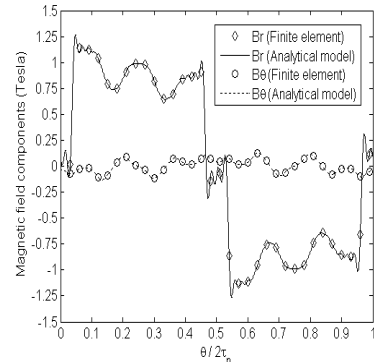


Fig.II.28 : Distribution de l'induction dans la région III pour $r = (R_0+R_1) / 2$

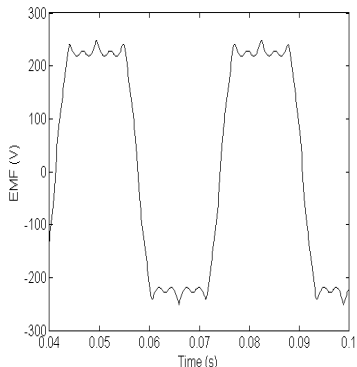


Fig.II.29 : Variation de la FEM

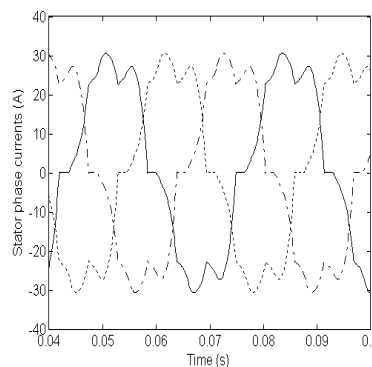


Fig.II.30 : Variation des courants des phases statoriques

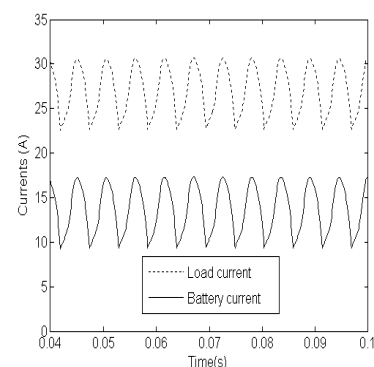


Fig.II.31 : Variation du courant de charge et courant de la batterie

II.12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la modélisation et le dimensionnement d'une machine synchrone à double excitation série en utilisant des outils analytiques puis des outils de calculs numériques afin de valider.

Au cours de la première partie, nous avons développé un formalisme mathématique basé sur un modèle analytique issu de la résolution des équations de Maxwell par la méthode de séparation des variables dans les différentes régions de la machine étudiée. Ce modèle permet de calculer la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer à vide et en charge avec une bonne précision et un temps de calcul raisonnable, et d'établir par la suite les expressions locales des performances et des grandeurs caractéristiques de la machine (FEM, couple, différentes

inductances) en utilisant la théorie des fonctions de bobinage dans un premier temps. Puis, et dans un deuxième temps, nous avons montré que le modèle construit permet d'établir un couplage fort des équations du circuit et des équations du champ. Ce couplage peut être utilisé ultérieurement dans un processus d'optimisation.

Afin de mettre en évidence l'apport du modèle analytique développé, et dans le but de minimiser le couple de détente nous avons adopté la technique d'inclinaison des encoches avec un angle égale au pas d'encoche statorique. Les performances locales ont été ensuite évaluées et comparées avec celles issues du calcul numérique. Nous constatons que les résultats concordent.

Comme deuxième partie, un calcul par la méthode des éléments finis nous a permis de mettre en évidence la puissance et la précision de l'outil d'analyse développé.

**Chapitre III – Modélisation Analytique De La Machine
À Commutation De Flux**

III.1 Introduction

Après avoir acquis une bonne connaissance du modèle analytique issue du formalisme de Maxwell d'une machine synchrone à double excitation série, on présente au cours de ce chapitre des modèles analytiques dans le but de modéliser la machine à commutation de flux « MCF ».

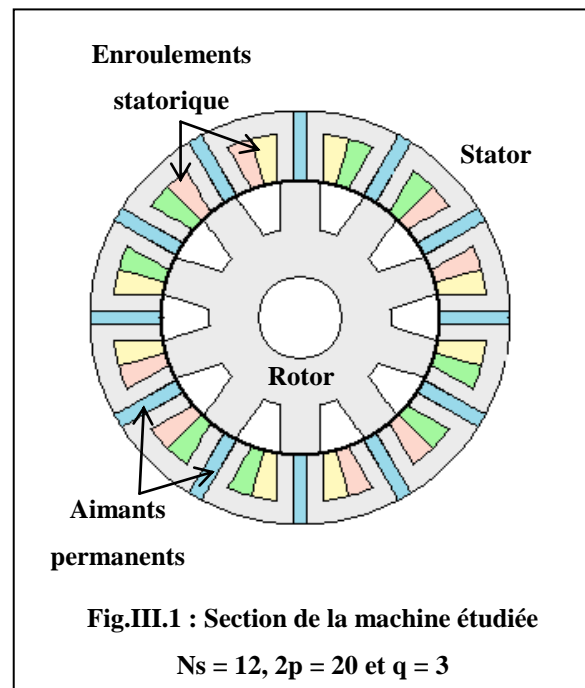
Malgré que la MCF soit une structure cellulaire présentant des symétries magnétiques, elle se prête difficilement à la modélisation analytique. Pour cette raison on va subdiviser le problème afin de se familiariser et de prendre en main les équations correspondantes.

Les résultats analytiques sont ensuite comparés à ceux obtenus par calcul numérique basé sur la méthode des éléments finis (FEMM[®]-ver.4.2).

III.2 Présentation de la machine étudiée

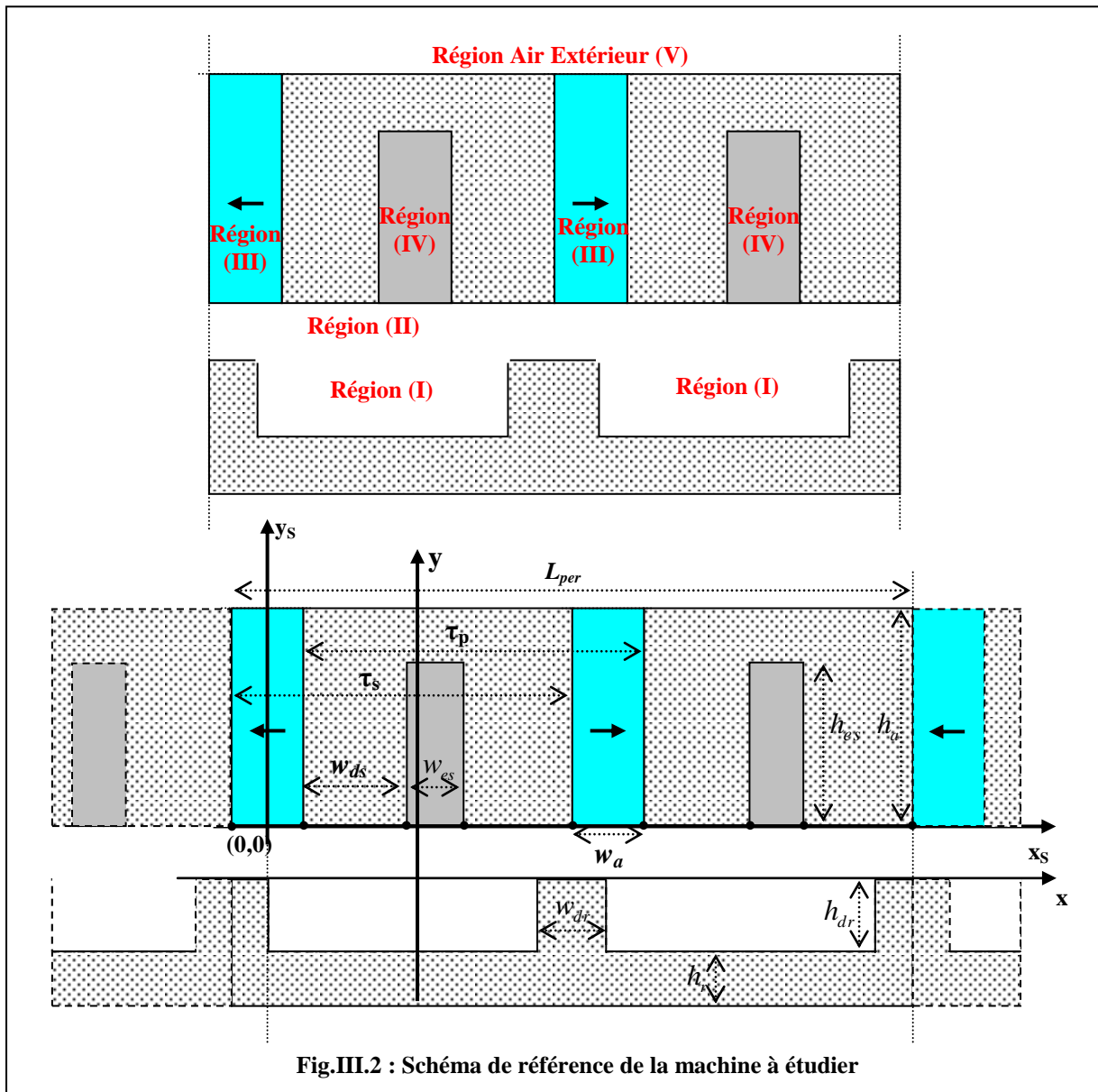
La machine qu'on va étudier est la même qu'on a vu au cours du premier chapitre. On rappelle qu'elle est constituée d'une partie fixe, le stator, qui comprend les bobinages de l'induit et les aimants permanents réalisant la fonction de l'inducteur [49], [50], [51], [52] et [66].

On dispose de 12 aimants au stator (figure III.1). La deuxième partie mobile est le rotor, complètement passif, constitué d'un empilement de tôles ferromagnétiques.



III.2.1 Définition des différentes régions de la machine

La figure III.2 représente les différentes régions de la machine où l'équation de diffusion électromagnétique doit être résolue :



III.2.2 Solution générale de la formulation magnétostatique en potentiel vecteur à vide

Afin de modéliser la structure de la (figure III.2) les hypothèses simplificatrices suivantes sont adoptées :

- la perméabilité relative du fer est infinie,
- la conductivité du fer est nulle,
- la caractéristique $B(H)$ des aimants permanents est linéaire,
- la perméabilité relative des aimants permanents est égale à celle de l'air,
- la conductivité des aimants permanents est nulle.

Le motif de la (figure III.2) est supposé invariant selon l'axe $z'Oz$ et le potentiel vecteur magnétique A n'a donc qu'une seule composante selon l'axe $z'Oz$:

$$\vec{A} = A_z \cdot \vec{e}_z \quad (\text{III.1})$$

L'induction magnétique est donc bidimensionnelle et a pour composantes dans le système cartésien de la (figure III.2):

$$\vec{B}_x = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \vec{e}_y$$

Les équations de Maxwell dans le cas de la magnétostatique se mettent sous la forme suivante :

$$r\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{B} = r\vec{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{III.2})$$

Les relations du milieu pour les régions concernées dans la structure étudiée (air & aimants) sont :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_R \quad (\text{III.3})$$

L'exploitation des équations de Maxwell (III.2) et des relations du milieu (III.3) auxquelles on rajoute la jauge de Coulomb, conduit à la formulation magnétostatique vectorielle qui s'écrit, en linéaire, de la façon suivante :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} + \mu_0 r\vec{\text{rot}} \vec{M} = 0 \quad (\text{III.4})$$

La formulation magnétostatique précédente se décline, en coordonnées cartésiennes, dans les différentes régions de la machine et *à vide* comme suit :

- région des évidements rotoriques : région (I)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.5})$$

- région de l'entrefer : région (II)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.6})$$

- région des aimants permanents : région (III)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} - \frac{\partial B_{ry}}{\partial x} \quad (\text{III.7})$$

- région des encoches : région (IV)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.8})$$

- région air extérieur : Région (V)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(III.9)}$$

La solution en potentiel vecteur satisfaisant les équations aux dérivées partielles précédentes peut être obtenue analytiquement par la méthode de séparation des variables et se met donc sous la forme suivante :

$$A(x, y) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (C_n \cosh(k_n y) + D_n \sinh(k_n y)) \cdot (E_n \cos(k_n x) + F_n \sin(k_n x)) \quad \text{(III.10)}$$

La structure étudiée est périodique de période L_{per} . Si on désigne par N_s le nombre d'encoches statoriques et par p le nombre de paires de pôles, la période peut donc être écrite de la façon suivante :

$$\Theta_{per} = \frac{2\pi}{PGCD(p, N_s)} \quad \text{(III.11)}$$

Si on désigne par R_{moy} le rayon moyen de l'entrefer, la longueur d'une période est donc :

$$L_{per} = R_{moy} \Theta_{per} \quad \text{(III.12)}$$

Ainsi, le nombre d'encoches statoriques d'un motif élémentaire est égal au nombre d'aimants du même motif N_m et s'écrit donc :

$$N_m = \frac{N_s}{PGCD(p, N_s)} \quad \text{(III.13)}$$

Au début de notre travail, on a essayé de résoudre le problème en entier mais on a trouvé trop de difficultés pour aboutir à un système d'équations linéaires. Afin de prendre en main ces équations, on a décidé de décomposer. Dans un premier temps, on ne va considérer que les aimants et on va calculer la répartition du champ dans toute la machine. Puis, et en un deuxième temps, on rajoute les évidements rotoriques. La présence de ces derniers va influencer considérablement la répartition du champ.

III.3 Définition des différentes régions de la machine (en présence des aimants seulement)

La figure III.4 représente les différentes régions de la machine à étudier

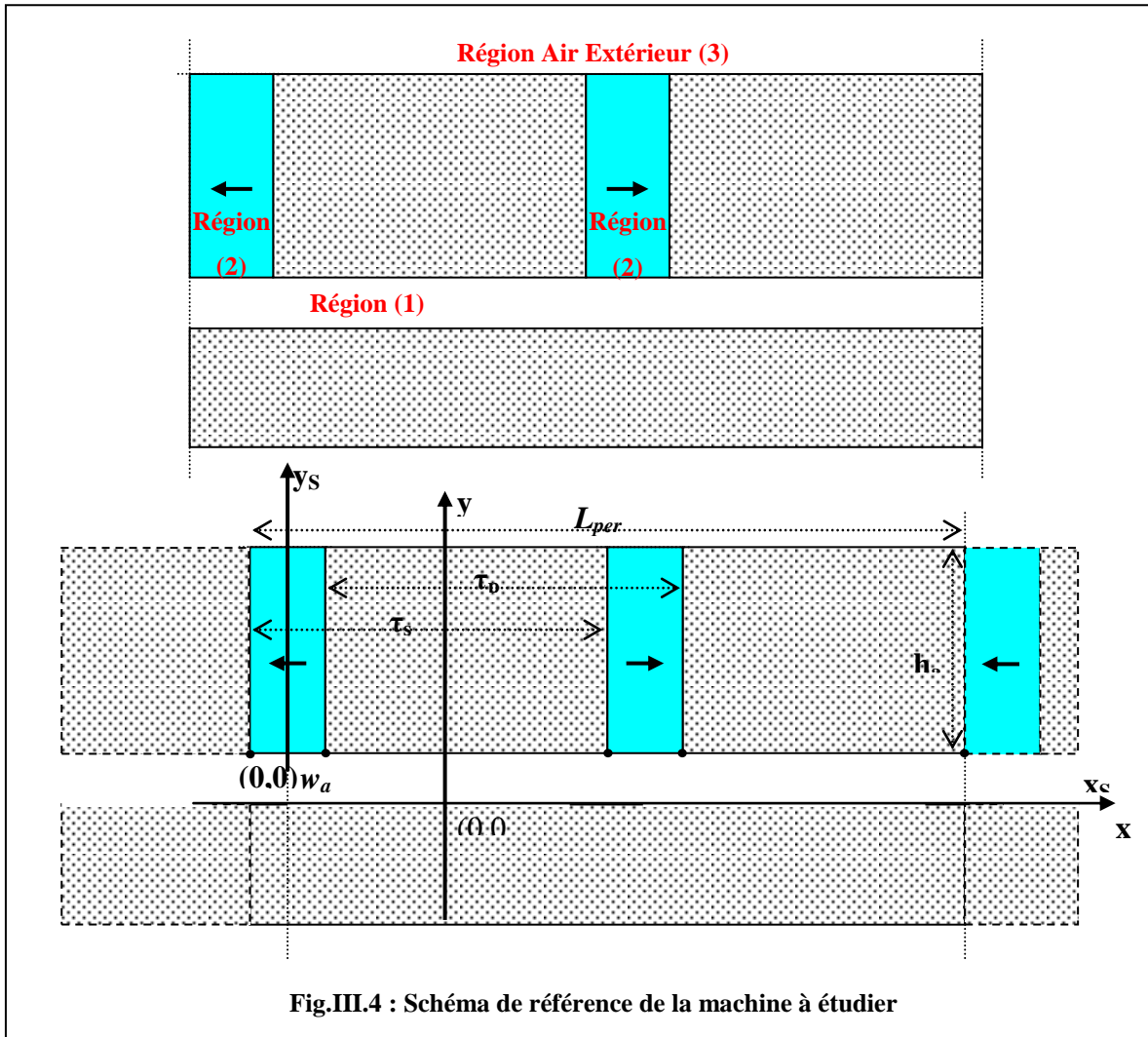


Fig.III.4 : Schéma de référence de la machine à étudier

IV.3.1 Solution générale de la formulation magnétostatique en potentiel vecteur à vide

Les hypothèses simplificatrices déjà mentionnées sont adoptées. La formulation magnétostatique, en coordonnées cartésiennes, dans les différentes régions de la machine *à vide*, se décline comme précédemment où les équations (III.6), (III.7) et (III.9) sont retenues.

La forme générale de la solution en potentiel vecteur satisfaisant les équations aux dérivées partielles est aussi obtenue analytiquement par la méthode de séparation des variables et donnée par la relation (III.10).

La structure étudiée est périodique de période Θ_{per} . Si p désigne le nombre de paires de pôles, la période peut donc être écrite de la façon suivante :

$$\Theta_{per} = \frac{2\pi}{p} \quad (\text{III.14})$$

Si on désigne par R_{moy} le rayon moyen de l'entrefer, la longueur d'une période est donnée par :

$$L_{per} = R_{moy} \Theta_{per} \quad (\text{III.15})$$

a. Solution dans la région 1 (entrefer)

La solution dans cette région en terme du potentiel vecteur tenant compte de la périodicité L_{per} du motif étudié, peut être écrite sous la forme suivante :

$$A^{(1)}(x, y) = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_{per}}{2n\pi} \left[\left(C_n^{(1)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + D_n^{(1)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) \right) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right. \\ \left. + \left(E_n^{(1)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + F_n^{(1)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) \right) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] \quad (\text{III.16})$$

En tenant compte de la seule condition au limite, qui consiste en la nullité de la composante tangentielle à la surface du fer rotorique, l'expression de l'induction après calcul peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[D_n^{(1)} \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(1)} \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] \times \left(\cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + \frac{\sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} \text{entrefer}\right)} \right) \\ B_y^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[D_n^{(1)} \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) - F_n^{(1)} \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] \times \left(\sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + \frac{\cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} \text{entrefer}\right)} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

b. Solution dans la région 2 (aimants permanents)

Dans cette région l'équation aux dérivées partielles est donnée par :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} - \frac{\partial B_{ry}}{\partial x}$$

Sur un motif périodique, les aimants sont au nombre de N_m avec une induction rémanente alternée et parallèle à l'axe $x'Ox$. En se référant au repère cartésien de la (figure III.4) où l'axe $y'Oy$ est solidaire de l'axe de l'aimant correspondant à $l=0$, les parois de gauche des régions aimantées ont les abscisses suivantes :

$$x_{al} = -\frac{w_a}{2} + l \tau_p \quad \text{avec} \quad l = 0, 1 \quad \text{et} \quad \tau_p = \frac{L_{per}}{N_m}$$

Les conditions de passage à la surface des parois séparant un aimant du fer statorique, se traduisent, en absence de densité superficielle de courant, par les relations suivantes :

$$H_y^{(2,l)}(x_{al}, y) = 0 \quad \text{et} \quad H_y^{(2,l)}(x_{al} + w_a, y) = 0$$

Ces mêmes conditions de passage s'écrivent en fonction des composantes de l'induction en tenant compte des relations du milieu, de la façon suivante :

$$B_y^{(2,l)}(x_{al}, y) = 0 \quad \text{et} \quad B_y^{(2,l)}(x_{al} + w_a, y) = 0$$

L'exploitation de ces conditions conduit aux formes suivantes pour le potentiel vecteur et les composantes de l'induction :

$$\begin{cases} A^{(2,l)}(x, y) = a_0^{(2,l)} + D_0^{(2,l)} y + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \frac{w_a}{m \pi} \left(C_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m \pi}{w_a} y\right) + D_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m \pi}{w_a} y\right) \right) \cos\left(\frac{m \pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \\ B_x^{(2,l)}(x, y) = D_0^{(2,l)} + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m \pi}{w_a} y\right) + D_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m \pi}{w_a} y\right) \right) \cos\left(\frac{m \pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \\ B_y^{(2,l)}(x, y) = \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m \pi}{w_a} y\right) + D_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m \pi}{w_a} y\right) \right) \sin\left(\frac{m \pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \end{cases} \quad \text{(III.18)}$$

c. Solution dans la région 3 (air extérieur)

L'expression du potentiel vecteur solution de l'équation (III.9) tenant compte de la périodicité du motif étudié, peut être écrite sous la forme suivante :

$$A^{(3)}(x, y) = a_0^{(3)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_n^{(3)} \cosh\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) + D_n^{(3)} \sinh\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right)$$

La condition aux limites dans cette région s'exprime par la nullité des composantes de l'induction pour $y \rightarrow +\infty$ et se traduit donc par :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[C_n^{(3)} \cosh\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) + D_n^{(3)} \sinh\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \right] = \\ \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[(C_n^{(3)} + D_n^{(3)}) \exp\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) + (C_n^{(3)} - D_n^{(3)}) \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \right] = 0 \\ \Rightarrow C_n^{(3)} = -D_n^{(3)} \end{aligned}$$

Les expressions du potentiel vecteur et des composantes de l'induction s'écrivent ainsi pour cette région par :

$$\begin{cases}
 A^{(3)}(x, y) = a_0^{(3)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_{per}}{2n\pi} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) \\
 B_x^{(3)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) \\
 B_y^{(3)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \cdot \left(-E_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right)
 \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

III.4 Exploitation des relations de passage entre les régions 1 et 2

Les relations de passage à la frontière de la région entrefer 1 et de la région des aimants permanents 2, en tenant compte des relations du milieu, se déclinent de la manière suivante :

$$\begin{cases}
 B_x^{(1)}(x_S, 0) = B_x^{(2,l)}(x_S, 0) + (-1)^l B_R \\
 B_y^{(1)}(x_S, 0) = B_y^{(2,l)}(x_S, 0)
 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases}
 x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\
 l = 0..N_m - 1
 \end{cases}$$

$$\text{et :} \quad B_x^{(1)}(x_S, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{a+1}$$

En développant les équations précédentes, on obtient les relations suivantes (Annexe § C.1) :

$$\begin{aligned}
 D_k^{(1)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Pi_{mk} \\
 + \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$$\begin{aligned}
 F_k^{(1)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Lambda_{mk} \\
 - \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{mk} = & -N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
 & \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\
 & + N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
 & \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{mk} = & -N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
 & \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\
 & - N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
 & \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

III.5 Exploitation des relations de passage entre les régions 2 et 3

Les relations de passage à la frontière de la région des aimants 2 d'un côté, et de la région de l'air extérieur 3 de l'autre, avec prise en compte des relations du milieu, se traduisent de la manière suivante (Annexe § C.2) :

$$\begin{cases} B_x^{(3)}(x_S, h_a) = B_x^{(2,l)}(x_S, h_a) + (-1)^l B_R \\ B_y^{(3)}(x_S, h_a) = B_y^{(2,l)}(x_S, h_a) \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases}$$

et :

$$B_x^{(3)}(x_S, h_a) = 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1}$$

L'exploitation des relations précédentes peut se faire par le calcul des intégrales de la série de Fourier appliqué aux coefficients de la région 3. Tout calcul fait, on aboutit aux relations suivantes entre les coefficients de la région « air extérieur » et de la région « des aimants » :

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(3)} &= \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \\ &+ \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(-\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) \Gamma_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) \Pi_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(3)} &= \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \\ &- \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) \Delta_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) \Lambda_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) - \Pi_{mk} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) \\ &= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ &\quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \\ &- N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ &\quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + \Lambda_m \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \\
 &= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\
 & \quad + N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \tag{III.27}
 \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant le calcul de $D_0^{(2,l)}$ et ceci en exploitant les conditions de passage en fonction du potentiel vecteur magnétique.

III.6 Détermination de la constante $D_0^{(2,l)}$:

La détermination des constantes arbitraires des expressions des potentiels vecteurs dans la région 2, se base sur l'hypothèse de la nullité de la constante des régions 1 et 3 successivement.

La continuité du potentiel vecteur magnétique entre la région 1 et la région 2 conduit aux écritures suivantes pour $y = 0$:

$$A^{(1)}(x,0) = A^{(2,l)}(x,0) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases} \tag{III.28}$$

On encore :

$$\begin{aligned}
 a_0^{(2,l)} + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \frac{w_a}{m\pi} C_m^{(2,l)} \cos\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) = \\
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_{per}}{n2\pi} \left[D_n^{(1)} \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(1)} \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] \times \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \tag{III.29}
 \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation (III.29) sur w_a permet d'écrire :

$$a_0^{(2,l)} = \frac{1}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_{per}}{n2\pi} \left[D_n^{(1)} \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(1)} \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] \times \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} dx$$

On trouve après développement et simplification :

$$a_0^{(2,l)} = \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(D_n^{(1)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(1)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)$$

(III.30)

De même, la continuité du potentiel vecteur à la frontière entre la région 2 et la région 3, pour $y = h_a$, permet d'écrire :

$$A^{(3)}(x, h_a) = A^{(2,l)}(x, h_a) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases} \quad \text{(III.31)}$$

En remplaçant $A^{(2,l)}(x, h_a)$ et $A^{(3)}(x, h_a)$ par leurs expressions, on aura :

$$a_0^{(2,l)} + D_0^{(2,l)} h_a + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \frac{w_a}{m\pi} \left(C_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + D_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) =$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_{per}}{2n\pi} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right)$$

(III.32)

L'intégration de cette équation comme précédemment permet d'écrire :

$$a_0^{(2,l)} + D_0^{(2,l)} h_a = -\frac{1}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L_{per}}{2n\pi} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) dx$$

Après simplification on obtient :

$$a_0^{(2,l)} + D_0^{(2,l)} h_a = -\frac{L_{per}^2}{2\pi^2 w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \left(E_n^{(3)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(3)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)$$

(III.33)

En substituant $a_0^{(2,l)}$ par son expression (équation (III.30)), on aboutit à l'expression déterminant les constantes du potentiel vecteur dans les aimants :

$$D_0^{(2,l)} = -\frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \left\{ \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \left(E_n^{(3)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(3)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) + \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(D_n^{(1)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(1)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \right\}$$

(III.34)

III.7 Mise en équation sous la forme d'un système d'algèbre linéaire

À partir des équations (III.20), (III.21), (III.22), (III.23), (III.24), (III.25), (III.26), (III.27) et (III.34) on aboutit à un système d'algèbre linéaire qu'on peut résoudre par la méthode directe de Gauss (Annexe § C.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_{1D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{1F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{1E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{1F3}] \{F^{(3)}\} = [Ext1] \quad (a) \\ [M_{2D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{2F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{2E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{2F3}] \{F^{(3)}\} = [Ext2] \quad (b) \\ [M_{3D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{3F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{3E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{3F3}] \{F^{(3)}\} = [Ext1] \quad (c) \\ [M_{4D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{4F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{4E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{4F3}] \{F^{(3)}\} = [Ext2] \quad (d) \end{array} \right.$$

III.8 Résultats obtenus

Les résultats analytiques obtenus sont comparés à ceux obtenus par application de la méthode des éléments finis (logiciel FEMM[®]-ver.4.2). On trace pour commencer la variation de l'induction dans l'entrefer de la machine (figure III.5) et dans l'air extérieur (figure III.6). L'analyse de ces résultats confirme la fiabilité du modèle analytique proposé dans un processus de dimensionnement.

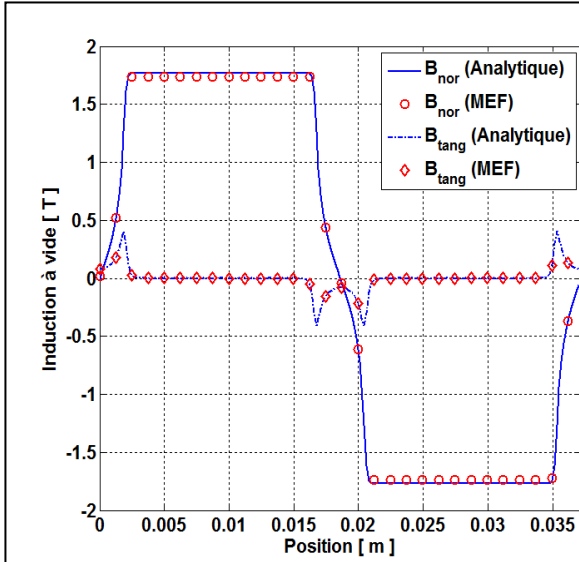


Fig.III.5 : Distribution de l'induction au milieu de l'entrefer

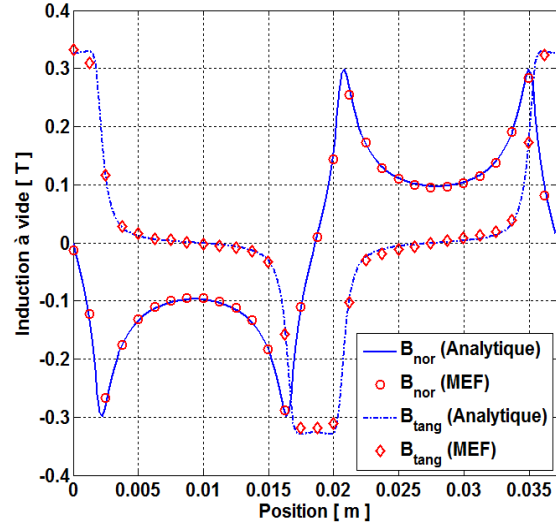


Fig.III.6 : Distribution de l'induction dans la région III pour une hauteur $y = h_a + 0.005$

III.8.1 Calcul des coefficients dans la région des aimants

On reprend la condition de passage entre la région 1 et la région 2 comme première étape, on peut écrire que :

$$(-1)^l B_R + D_0^{(2,l)} + \sum_{m \neq 0} D_m^{(2,l)} \cos\left(\frac{m\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n^{(1)} \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(1)} \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)$$

pour $x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a$

Grâce à la propriété d'orthogonalité des termes deux à deux, on peut écrire directement que :

$$D_k^{(2,l)} = \frac{2}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} B_x^{(1)}(x_S, 0) \cos\left(\frac{k\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) dx$$

$$\Rightarrow D_k^{(2,l)} = \begin{cases} \frac{2}{w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n^{(1)} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \cos\left(\frac{k\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\ + \\ \frac{2}{w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n^{(1)} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \cos\left(\frac{k\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \end{cases}$$

Après développement et intégration, on trouve que :

$$D_k^{(2,l)} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n^{(1)} \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \sin \left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin \left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \\ + \\ \sum_{n=1}^{+\infty} F_n^{(1)} \left(\frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \cos \left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \cos \left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \end{array} \right\} \quad (\text{III.35})$$

Pour calculer la dernière constante, on va utiliser la condition de passage entre la région 2 et la région 3 et ceci en utilisant la propriété d'orthogonalité des termes deux à deux, où on peut écrire que :

$$D_0^{(2,l)} + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(2,l)} \sinh \left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) + D_m^{(2,l)} \cosh \left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) \right) \cos \left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) + F_n^{(3)} \sin \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) \right) \quad \text{pour } x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a$$

Ce qui nous permet d'écrire directement que :

$$\begin{aligned} C_k^{(2,l)} \sinh \left(\frac{k\pi}{w_a} h_a \right) + D_k^{(2,l)} \cosh \left(\frac{k\pi}{w_a} h_a \right) &= \frac{2}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} B_x^{(3)}(x_S, h_a) \cos \left(\frac{k\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) dx \\ &= \frac{2}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) + F_n^{(3)} \sin \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) \right) \right) \cos \left(\frac{k\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot E_n^{(3)} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \cos \left(\frac{k\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) \cos \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx \\ + \\ \frac{2}{w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot F_n^{(3)} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \cos \left(\frac{k\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) \sin \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx \end{array} \right. \end{aligned}$$

Après intégration et développement, on aboutit à la relation suivante :

$$C_k^{(2,l)} \sinh\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right) + D_k^{(2,l)} \cosh\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right) =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \sin\left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ & + \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \left(\frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \cos\left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \end{aligned} \right\}$$

Ainsi $C_k^{(2,l)}$ peut être calculé en utilisant l'expression suivante :

$$C_k^{(2,l)} = -D_k^{(2,l)} \coth\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right) +$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right)} \cdot E_n^{(3)} \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \sin\left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ & + \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right)} \cdot F_n^{(3)} \left(\frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \cos\left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \end{aligned} \right\}$$

(III.36)

Une fois $C_m^{(2,l)}$ et $D_m^{(2,l)}$ sont calculés, on peut tracer la variation de l'induction dans la région 2.

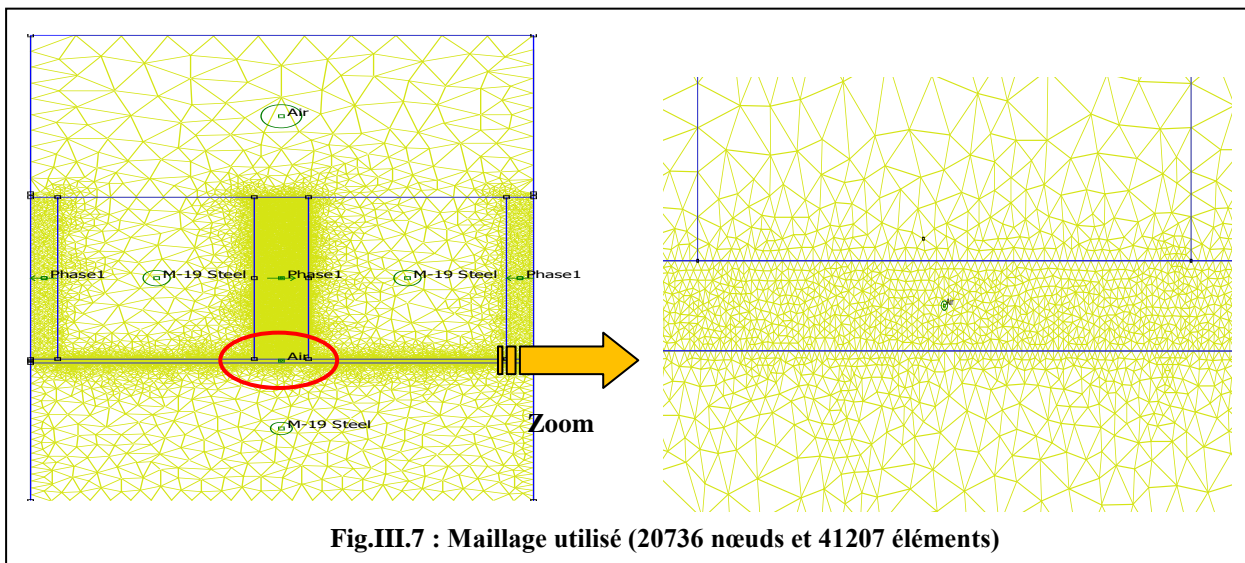


Fig.III.7 : Maillage utilisé (20736 nœuds et 41207 éléments)

La (figure III.7) représente le maillage élaboré avec le logiciel FEMM tandis que la (figure III.8) représente les résultats analytiques et numériques obtenus. Ces résultats confirment la fiabilité du modèle développé.

Après cette première étude, on rajoute les évidements rotoriques pour voir la distribution du champ. Pour cela, on commence par identifier les différentes régions de la machine.

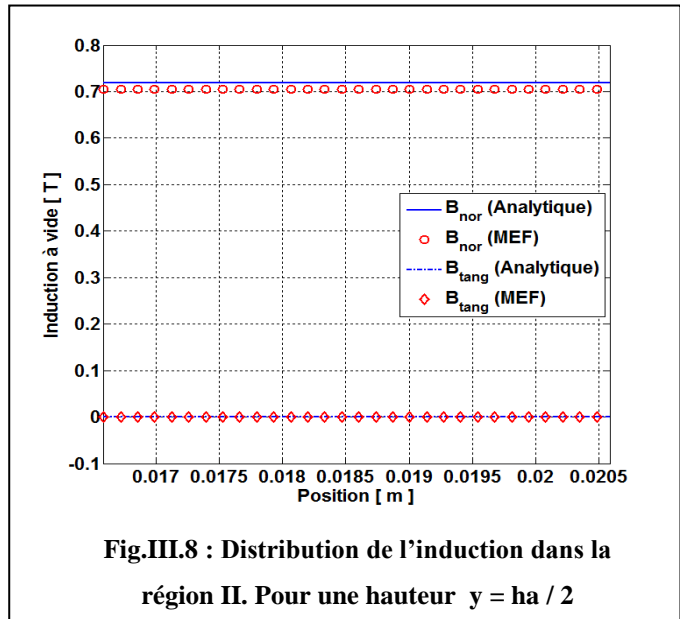


Fig.III.8 : Distribution de l'induction dans la région II. Pour une hauteur $y = h_a / 2$

III.9 Définition des différentes régions de la machine à étudier (sans encoches statoriques)

La figure suivante (figure III.9) représente les différentes régions de la machine où l'équation de diffusion électromagnétique va être résolue.

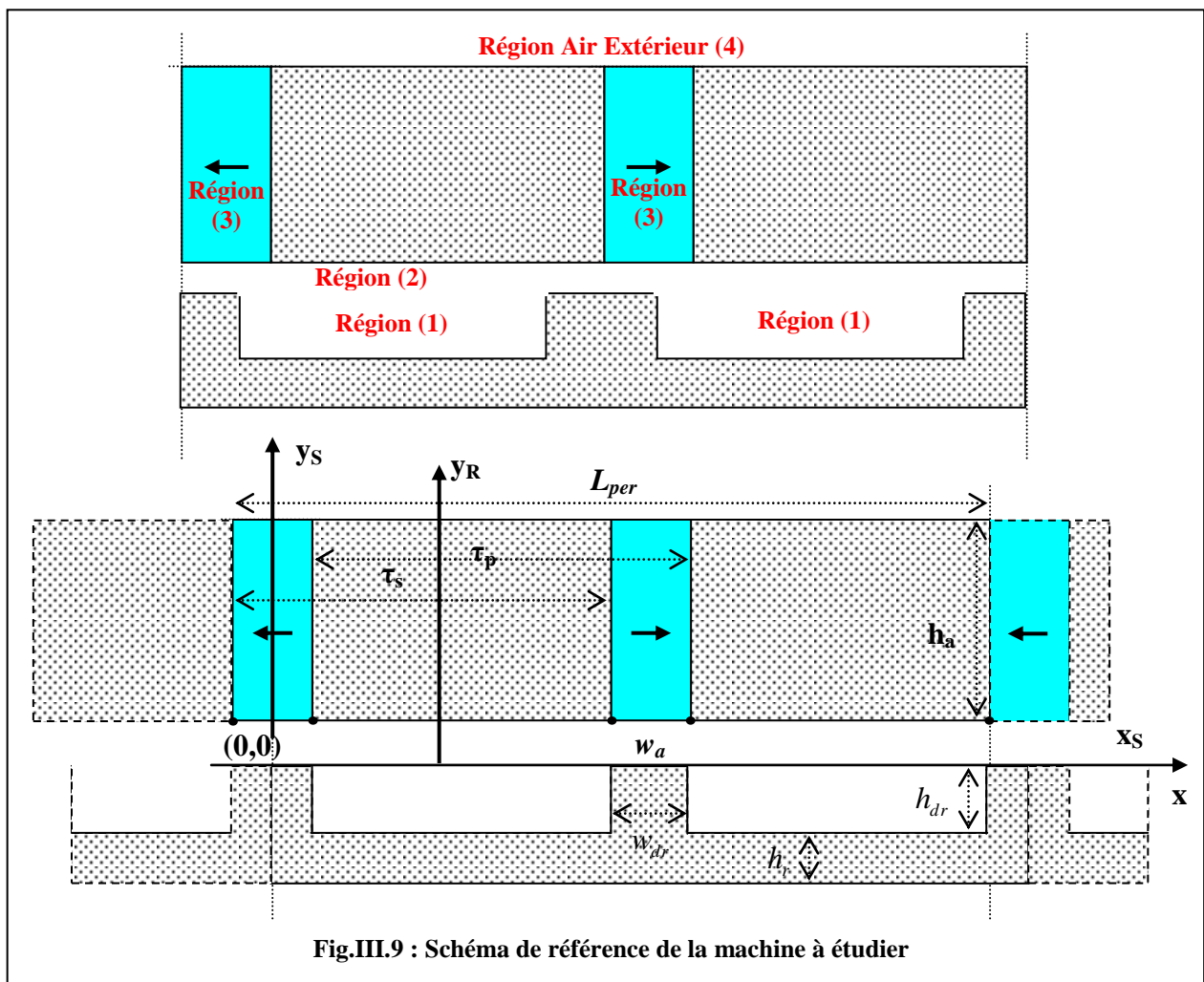


Fig.III.9 : Schéma de référence de la machine à étudier

III.9.1 Solution générale de la formulation magnétostatique en potentiel vecteur à vide

Au cours de cette partie on a rajouté une nouvelle région. Les équations (III.5), (III.6), (III.7) et (III.8) sont retenues et la solution en potentiel vecteur magnétique est toujours donnée par (III.10).

La structure étudiée est périodique de période L_{per} . Si on désigne par N_s le nombre d'évidements où logent les aimants et par p le nombre de paires de pôles, la période peut donc être écrite de la façon suivante :

$$\Theta_{per} = \frac{2\pi}{PGCD(p, N_s)} \quad (III.37)$$

Si on désigne par R_{moy} le rayon moyen de l'entrefer, la longueur d'une période est donc :

$$L_{per} = R_{moy} \Theta_{per} \quad (III.38)$$

Ainsi, le nombre d'évidements où logent les aimants d'un motif élémentaire est noté N_m et s'écrit donc :

$$N_m = \frac{N_s}{PGCD(p, N_s)} \quad (III.39)$$

a. Solution dans la région 1 (évidements rotoriques)

Cette région est similaire à celle des encoches statoriques dans le cas du fonctionnement à vide ce qui permet de donner directement les expressions du potentiel vecteur et des composantes de l'induction après adaptation des paramètres (ce développement a déjà été entrepris à plusieurs reprises dans d'autres travaux au GREAH [55], [57] et [58]). Ainsi, on considère un référentiel rotorique de coordonnées (x_R, y_R) défini de la façon suivante par rapport au référentiel statorique :

$$y_R = y_S + e \quad \text{et} \quad x_R = x_S - \delta$$

Où δ est la position du rotor par rapport au stator.

On considère $N_d = \frac{N_{dR}}{PGCD(p, N_s)}$ évidements rotoriques numérotés de 0 à N_d-1 pour un motif

élémentaire où N_{dR} représente le nombre de dents au rotor. Ainsi, le référentiel rotorique est tel que l'axe des ordonnées est confondu avec l'axe de l'évidement rotorique correspondant à $l=0$.

Par conséquent, les abscisses des parois de l'évidement ' l ' se mettent sous la forme suivante :

$$x_{dl} = -\frac{w_{er}}{2} + l \frac{L_{per}}{N_d} \quad \text{avec} \quad l=0..N_d-1$$

Dans ces conditions, la forme de la solution pour le potentiel vecteur et les composantes de l'induction, est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{(1,l)}(x_R, y_R) = a_0^{(1,l)} + \sum_{m \neq 0} \frac{w_{er}}{m \pi} K_m^{(1,l)} \frac{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(y_R + h_{dr})\right)}{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}} h_{dr}\right)} \cos\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(x_R - x_{dl})\right) \\ B_x^{(1,l)}(x_R, y_R) = \sum_{m \neq 0} K_m^{(1,l)} \frac{\sinh\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(y_R + h_{dr})\right)}{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}} h_{dr}\right)} \cos\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(x_R - x_{dl})\right) \\ B_y^{(1,l)}(x_R, y_R) = \sum_{m \neq 0} K_m^{(1,l)} \frac{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(y_R + h_{dr})\right)}{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}} h_{dr}\right)} \sin\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(x_R - x_{dl})\right) \end{array} \right. \quad (\text{III.40})$$

Pour les autres régions, on garde la même forme des solutions déjà utilisées lors de la première approximation.

III.10 Résumé des expressions

Région 1 : évidements rotoriques

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^{(1,l)}(x_R, y_R) = \sum_{m \neq 0} K_m^{(1,l)} \frac{\sinh\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(y_R + h_{dr})\right)}{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}} h_{dr}\right)} \cos\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(x_R - x_{dl})\right) \\ B_y^{(1,l)}(x_R, y_R) = \sum_{m \neq 0} K_m^{(1,l)} \frac{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(y_R + h_{dr})\right)}{\cosh\left(\frac{m \pi}{w_{er}} h_{dr}\right)} \sin\left(\frac{m \pi}{w_{er}}(x_R - x_{dl})\right) \end{array} \right.$$

Région 2 : entrefer

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(C_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + D_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) \right) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right. \\ \left. + \left(E_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + F_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) \right) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] \\ B_y^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(C_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + D_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) \right) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right. \\ \left. - \left(E_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) + F_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} y\right) \right) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] \end{array} \right.$$

Région 3 : aimants permanents

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^{(3,l)}(x, y) = D_0^{(3,l)} + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(3,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} y\right) + D_m^{(3,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} y\right) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{dl})\right) \\ B_y^{(3,l)}(x, y) = \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(3,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} y\right) + D_m^{(3,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} y\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{dl})\right) \end{array} \right.$$

Région 4 : air extérieur

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^{(4)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \cdot \left(E_n^{(4)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(4)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) \\ B_y^{(4)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} y\right) \cdot \left(-E_n^{(4)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(4)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) \end{array} \right.$$

III.11 Exploitation des relations de passage entre les régions 1 et 2

Les relations de passage à la frontière de la région des évidements rotoriques 1 et la région de l'entrefer 2, en tenant compte des conditions du milieu, se déclinent de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^{(2)}(x_S, -e) = B_x^{(1,l)}(x_S - \delta, 0) \\ B_y^{(2)}(x_S, -e) = B_y^{(1,l)}(x_S - \delta, 0) \end{array} \right. \quad \text{pour} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{dl} \leq x_S - \delta \leq x_{dl} + w_{er} \\ l = 0..N_d - 1 \end{array} \right.$$

$$\text{et : } B_x^{(2)}(x_S, -e) = 0 \quad \text{pour} \quad x_{dl} + w_{er} \leq x_S - \delta \leq x_{dl+1}$$

$$\text{On rappelle que : } x_{dl} = -\frac{w_{er}}{2} + l \frac{L_{per}}{N_d} \quad \text{avec} \quad l = 0..N_d - 1$$

L'exploitation de ces conditions nous permet d'aboutir aux écritures suivantes (Annexe § C.4.1)

$$\begin{aligned}
 & -C_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + D_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) = \\
 & - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \left(E_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - F_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\chi_{nk}(n+k) + \varphi_{nk}(n-k)) \quad \text{(III.41)} \\
 & + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \left(C_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - D_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\theta_{nk}(n+k) - \omega_{nk}(n-k))
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & -E_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + F_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) = \\
 & \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \left(E_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - F_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\lambda_{nk}(n+k) + \rho_{nk}(n-k)) \quad \text{(III.42)} \\
 & + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k=qN_d}} \left(C_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - D_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\sigma_{nk}(n+k) - \tau_{nk}(n-k))
 \end{aligned}$$

III.12 Exploitation des relations de passage entre les régions 2 et 3

Les relations de passage à la frontière de la région entrefer 2 et de la région des aimants permanents 3, se déclinent de la manière suivante :

$$\begin{cases} H_x^{(2)}(x_S, 0) = H_x^{(3,l)}(x_S, 0) \\ B_y^{(2)}(x_S, 0) = B_y^{(3,l)}(x_S, 0) \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases}$$

et :

$$H_x^{(2)}(x_S, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1}$$

On rappelle les expressions des abscisses des parois des logements des aimants et des encoches :

$$x_{al} = -\frac{w_a}{2} + l\tau_s \quad \text{avec} \quad \tau_s = \frac{L_{per}}{N_m}$$

En tenant compte des relations du milieu caractérisant les différentes régions, les relations de passage précédentes deviennent :

$$\begin{cases} B_x^{(2)}(x_S, 0) = B_x^{(3,l)}(x_S, 0) + (-1)^l B_R \\ B_y^{(2)}(x_S, 0) = B_y^{(3,l)}(x_S, 0) \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases}$$

$$\text{et :} \quad B_x^{(2)}(x_S, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1}$$

De l'exploitation de ces conditions et en se basant sur des calculs déjà établis, on trouve (Annexe § C.4.2) :

$$D_k^{(2)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Pi_{mk} \quad (\text{III.43})$$

$$+ \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\sin \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right]$$

$$F_k^{(2)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Lambda_{mk}$$

$$- \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\cos \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \cos \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right] \quad (\text{III.44})$$

$$-\Delta_{mk} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} E_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \\ + \\ N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} E_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.45})$$

$$-\Gamma_{mk} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} C_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \\ - \\ N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} C_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.46})$$

III.13 Exploitation des relations de passage entre les régions 3 et 4

Les relations de passage à la frontière de la région des aimants 3 d'un côté, et de la région de l'air extérieur 4 de l'autre, restent inchangées (annexe § C.4.3) :

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(4)} &= \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ &+ \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(-\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Gamma_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Pi_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(4)} &= -\frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ &+ \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Delta_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Lambda_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) - \Pi_{mk} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \\ &= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ &\quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \\ &- N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ &\quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

et

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + \Lambda_{mk} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \\
 &= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\
 & \quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\
 &+ N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\
 & \quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \tag{III.50}
 \end{aligned}$$

III.14 Détermination de la constante $D_0^{(2,l)}$

La détermination du coefficient $D_0^{(2,l)}$ revient en l'exploitation de la continuité du potentiel vecteur magnétique entre la région 2 et la région 3, puis entre la région 3 et 4 et ceci en se basant sur l'hypothèse de la nullité de la constante de la région 1, 2 et 4 successivement. On trouve ainsi après calcul que :

$$\begin{aligned}
 D_0^{(3,l)} = & -\frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \left\{ \begin{aligned} & \left(C_n^{(2)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + E_n^{(2)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \\ & \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \left(E_n^{(4)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(4)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \end{aligned} \right\} \\
 & \tag{III.51}
 \end{aligned}$$

III.15 Synthèse des équations obtenues

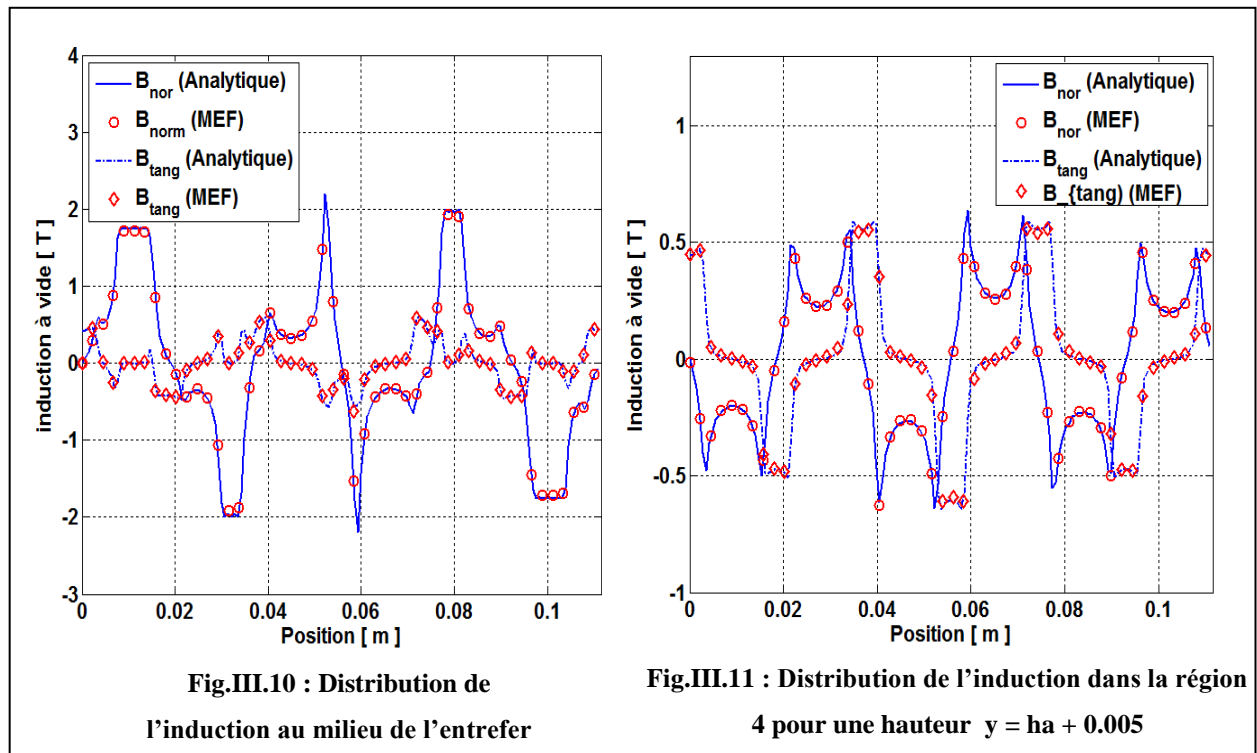
En substituant $D_0^{(2,l)}$ par son expression et après des manipulations mathématiques analogues à ceux faites précédemment (Annexe § C. 3), et à partir des relations (III.41), (III.42), (III.43), (III.44), (III.45), (III.46), (III.47), (III.48), (III.49) et (III.50), on obtient le système d'algèbre linéaire qu'on peut mettre sous la forme matricielle simplifiée suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} [M_{1C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{1D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{1E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{1F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{1E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{1F4}] \{F^{(4)}\} &= [0] & (a) \\ [M_{2C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{2D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{2E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{2F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{2E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{2F4}] \{F^{(4)}\} &= [0] & (b) \\ [M_{3C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{3D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{3E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{3F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{3E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{3F4}] \{F^{(4)}\} &= [Ext2] & (c) \\ [M_{4C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{4D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{4E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{4F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{4E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{4F4}] \{F^{(4)}\} &= [Ext1] & (d) \\ [M_{5C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{5D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{5E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{5F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{5E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{5F4}] \{F^{(4)}\} &= [Ext1] & (e) \\ [M_{6C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{6D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{6E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{6F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{6E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{6F4}] \{F^{(4)}\} &= [Ext2] & (f) \end{aligned} \right.$$

La résolution de ce système matriciel est effectuée grâce à la méthode d'élimination de Gauss. On obtient directement les coefficients de la région 2 et 4. Pour ce qui est du déplacement, il est pris en considération suite à la présence du terme (δ) (§ III.9.2) dans différentes matrices.

III.16 Résultats obtenus

Afin d'étudier la validité des formulations proposées ci-dessus, on a comparé les résultats de la méthode de référence (simulation MEF (FEMM[®]-ver.4.2)) avec les résultats obtenus avec notre modèle analytique. Les figures III.10 et III.11 représentent la variation de l'induction dans la 2^{ème} région (entrefer) et dans la 4^{ème} région (air extérieur)



On remarque clairement, que malgré l'absence des encoches statoriques, la configuration de la machine favorise la concentration du flux, où la forme de l'induction dans l'entrefer est non sinusoïdale et dépasse 2 T. On note bien une très bonne concordance entre les résultats et donc la crédibilité de notre modèle.

III.17 Calcul des coefficients dans la région 1 et la région 3

De la même façon lors de la première approximation, les coefficients $K_k^{(1,l)}$, $C_m^{(3,l)}$ et $D_m^{(3,l)}$ peuvent être calculés en utilisant la propriété d'orthogonalité des termes deux à deux. Par conséquent, le calcul des coefficients de Fourier de l'expression de $B_x^{(1,l)}(x_S - \delta, 0)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq 0}^{+\infty} K_m^{(1,l)} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_{er}}(x_S - \delta - x_{dl})\right) = \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(-C_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + D_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S\right) \right. \\ \left. + \left(-E_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + F_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S\right) \right] \end{aligned}$$

On peut directement écrire que :

$$\begin{aligned} K_k^{(1,l)} \tanh\left(\frac{k\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) &= \frac{2}{w_{er}} \int_{x_{dl}}^{x_{dl}+w_{er}} B_x^{(2)}(x_S, 0) \cos\left(\frac{k\pi}{w_{er}}(x_S - \delta - x_{dl})\right) dx \\ \Rightarrow K_k^{(1,l)} \tanh\left(\frac{k\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) &= \\ &\left[\frac{2}{w_{er}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_d-1} \int_{x_{dl}}^{x_{dl}+w_{er}} \left(-C_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + D_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S\right) \cos\left(\frac{k\pi}{w_{er}}(x_S - \delta - x_{dl})\right) dx \right. \\ &+ \\ &\left. \frac{2}{w_{er}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_d-1} \int_{x_{dl}}^{x_{dl}+w_{er}} \left(-E_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + F_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S\right) \cos\left(\frac{k\pi}{w_{er}}(x_S - \delta - x_{dl})\right) dx \right] \end{aligned}$$

Après développement et intégration, on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 K_k^{(1,l)} \tanh\left(\frac{k\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) = & \\
 & \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_d-1} \left(-C_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + D_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times \right. \\
 & \left. \left(\cos\left(\frac{k\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} \right) \left((-1)^k \sin\left(n \left(\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - \sin\left(n \left(-\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right) \right) \right. \\
 & + \\
 & \left. \left(\sin\left(\frac{k\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left(n \left(-\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - (-1)^k \cos\left(n \left(\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right) \right) \right) \right. \\
 & + \\
 & \left. \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_d-1} \left(-E_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + F_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times \right. \\
 & \left. \left(\cos\left(\frac{k\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left(n \left(-\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - (-1)^k \cos\left(n \left(\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right) \right) \right. \\
 & + \\
 & \left. \left(\sin\left(\frac{k\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\sin\left(n \left(-\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - (-1)^k \sin\left(n \left(\frac{\pi w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right) \right) \right) \right. \\
 & \left. \right) \tag{III.52}
 \end{aligned}$$

La résolution de cette équation va nous permettre de calculer le coefficient $K_k^{(1,l)}$ et de tracer la variation de l'induction dans les évidements rotoriques en utilisant la relation

$$\left\{ \begin{aligned}
 B_x^{(1,l)}(x_R, y_R) &= \sum_{m \neq 0}^{+\infty} K_m^{(1,l)} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} (y_R + h_{dr})\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right)} \cos\left(\frac{m\pi}{w_{er}} (x_R - x_{dl})\right) \\
 B_y^{(1,l)}(x_R, y_R) &= \sum_{m \neq 0}^{+\infty} K_m^{(1,l)} \frac{\cosh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} (y_R + h_{dr})\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right)} \sin\left(\frac{m\pi}{w_{er}} (x_R - x_{dl})\right)
 \end{aligned} \right.$$

La figure suivante représente la variation de l'induction pour $y = -h_{dr}/2$. La solution analytique est comparée à celle obtenue numériquement (figure III.12). On remarque encore une fois la bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques. La légère différence est due essentiellement à des soucis lors du maillage.

On passe maintenant au calcul des coefficients $C_m^{(3,l)}$ et $D_m^{(3,l)}$. On rappelle qu'on a obtenu l'expression suivante lors de l'exploitation de la condition de passage entre la région 2 et la région 3 :

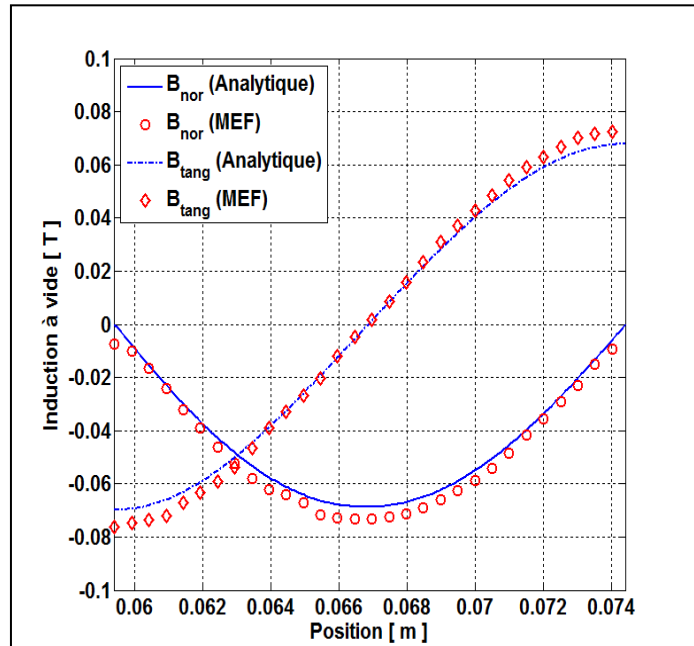


Fig.III.12 : Distribution de l'induction dans la région 1 pour une hauteur $y = -h_{dr}/2$

$$(-1)^l B_R + D_0^{(3,l)} + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} D_m^{(3,l)} \cos\left(\frac{m\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n^{(2)} \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(2)} \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)$$

Grâce à la propriété d'orthogonalité des termes deux à deux, on peut écrire directement que :

$$D_k^{(3,l)} = \frac{2}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} B_x^{(2)}(x_S, 0) \cos\left(\frac{k\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) dx$$

$$\Rightarrow D_k^{(3,l)} = \begin{cases} \frac{2}{w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n^{(2)} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \cos\left(\frac{k\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\ + \\ \frac{2}{w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} F_n^{(2)} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \cos\left(\frac{k\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \end{cases}$$

Après calcul, on trouve :

$$D_k^{(3,l)} = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} D_n^{(2)} \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \sin \left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin \left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \\ & + \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} F_n^{(2)} \left(\frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \cos \left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \cos \left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \end{aligned} \right\}$$

(III.53)

On passe maintenant à l'exploitation de la condition de passage entre la région 3 et la région 4 afin de déterminer la dernière constante $C_k^{(3,l)}$ comme suit :

$$D_0^{(3,l)} + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(3,l)} \sinh \left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) + D_m^{(3,l)} \cosh \left(\frac{m\pi}{w_a} h_a \right) \right) \cos \left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot \left(E_n^{(4)} \cos \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) + F_n^{(4)} \sin \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) \right)$$

Encore une fois et grâce à la propriété d'orthogonalité, on peut écrire directement que :

$$\begin{aligned} C_k^{(3,l)} \sinh \left(\frac{k\pi}{w_a} h_a \right) + D_k^{(3,l)} \cosh \left(\frac{k\pi}{w_a} h_a \right) &= \frac{2}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} B_x^{(4)}(x_S, h_a) \cos \left(\frac{k\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) dx \\ &= \frac{2}{w_a} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot \left(E_n^{(4)} \cos \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) + F_n^{(4)} \sin \left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x \right) \right) \right) \cos \left(\frac{k\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) dx \end{aligned}$$

Après développement et intégration, on trouve la relation suivante :

$$C_k^{(3,l)} \sinh \left(\frac{k\pi}{w_a} h_a \right) + D_k^{(3,l)} \cosh \left(\frac{k\pi}{w_a} h_a \right) = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot E_n^{(4)} \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \sin \left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin \left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \\ & + \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a \right) \cdot F_n^{(4)} \left(\frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \cos \left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \cos \left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right) \end{aligned} \right\}$$

Ainsi $C_k^{(3,l)}$ peut être calculé en utilisant l'expression suivante :

$$C_k^{(3,l)} = -D_k^{(3,l)} \coth\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right) + \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right)} \cdot E_n^{(4)} \left(\frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \sin\left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \right\} + \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{w_a} h_a\right)} \cdot F_n^{(4)} \left(\frac{1}{k\pi - n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{k\pi + n \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \sum_{l=0}^{N_m-1} \left((-1)^k \cos\left(n \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(n \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \right\} \quad (\text{III.54})$$

Au cours de l'analyse des résultats, on a remarqué qu'il y a une différence entre les résultats analytique et numérique et ceci est dû au maillage. Malgré cela on a pu confirmer la justesse du modèle développé (figure III.13).

La composante normale est nulle car l'aimantation n'a qu'une seule composante selon l'axe Ox.

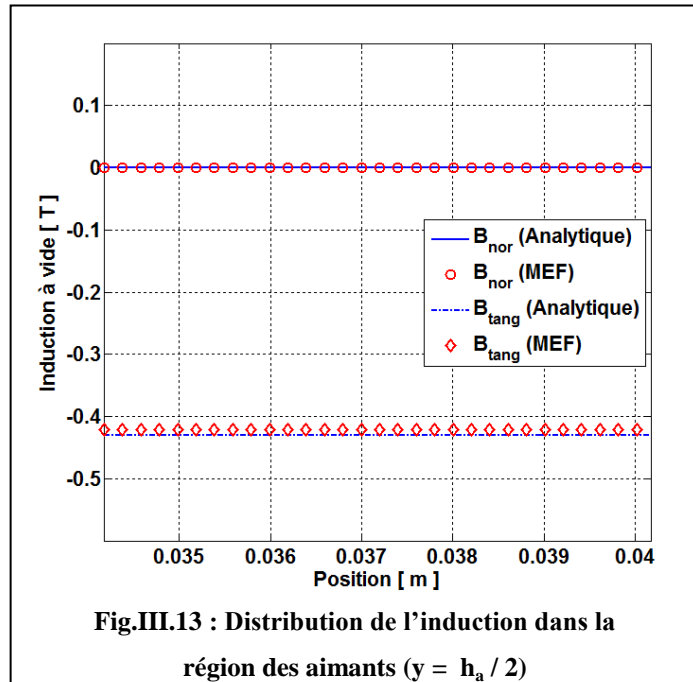


Fig.III.13 : Distribution de l'induction dans la région des aimants ($y = h_a / 2$)

IV.18 Conclusion

Le but de ce chapitre était de mettre en place un modèle analytique permettant d'étudier la machine à commutation de flux. Malheureusement, et vu la complexité des équations et afin de se familiariser avec, nous avons décidé de découpler le problème.

En effet, nous avons développé, dans ce chapitre, deux modèles mathématiques, basés sur la résolution analytique des équations de Maxwell par la méthode de séparation des variables afin

d'étudier la répartition du champ. Nous avons remarqué que malgré l'absence des encoches statoriques, la variation de l'induction dans l'entrefer est non sinusoïdale ce qui est le cas de la MCF (voir chapitre.2). Une autre difficulté dont il a fallu faire face était le maillage. L'exploitation du modèle complet, avec prise en compte des encoches statoriques, n'a pas été achevée et rentre dans le cadre des perspectives de ce travail.

Conclusion Générale

Dans notre travail nous avons abordé la problématique posée par la conception des machines synchrones à aimants permanents à double excitation. L'étude développée dans ce mémoire de thèse présente une méthodologie qui permet d'évaluer la répartition du champ analytiquement, avec un temps de calcul réduit et une excellente précision, à partir du formalisme de Maxwell.

Au début nous avons passées par des notions principales afin de présenter les différentes réalisations existantes et les principes de fonctionnement des machines synchrones à double excitation. Ceci nous a conduit à citer les différentes méthodes et modèles élaborés pour modéliser les deux machines qui nous intéressent : la machine à double excitation série où un cas particulier de cette machine a été traité, c'est la machine à aimants permanents montés en surface (SPM), puis nous avons étudié la machine à Commutation de Flux (MCF).

Au second chapitre, nous avons développé un outil d'analyse analytique, issue de la résolution des équations de Maxwell par la méthode de séparation des variables, d'une machine synchrone à double excitation série. Grâce à ce modèle nous avons pu évaluer la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer à vide et en charge dans les différentes régions de la machine à faibles perméabilité (encoche, entrefer et région des aimants permanents). Les expressions des grandeurs globales (FEM, couple, différentes inductances) sont écrites dans un premier temps en appliquant le théorème de Stokes, puis en utilisant la théorie des fonctions de bobinage ce qui nous a permis de réaliser un couplage fort entre les équations du champ et les équations du circuit. Le couple de détente a été calculé en appliquant le tenseur de Maxwell à la surface des aimants permanents et dans le but de le minimiser, nous avons adopté la technique d'inclinaison des encoches avec un angle égale au pas d'encoche statorique. Une comparaison des résultats analytiques à ceux issues d'une simulation par la méthode des éléments finis, nous a permis de mettre en évidence la puissance et la précision de l'outil d'analyse développé.

Finalement, au niveau du troisième chapitre nous avons voulu modéliser la MCF par la même voie mais cette machine se prête difficilement à la modélisation analytique malgré qu'elle soit une structure cellulaire présentant des symétries magnétiques. Pour cette raison nous avons subdivisé le problème afin de prendre en main les équations correspondantes. Les résultats analytiques obtenus sont ensuite comparés à ceux obtenus par calcul numérique basé sur la

méthode des éléments finis (FEMM[®]-ver.4.2) où nous avons confirmé la fiabilité du modèle élaboré.

Un important travail a été effectué et plusieurs perspectives se dégagent. Nous pouvons commencer par améliorer la précision du modèle en considérant, en premier lieu, plusieurs phénomènes que nous avons ignorés, à savoir l'effet de saturation, effet de la température, encoches semi-fermées...etc. En second lieu, l'extension de la méthodologie vers un processus d'optimisation multi-objectif de la structure étudiée peut être envisagée. Aussi l'élaboration du modèle complet de la machine à commutation de flux rentre dans le cadre des perspectives de ce travail.

Bibliographie

- [1] : M. CALDORA COSTA. « Optimisation de dispositifs Electrotechniques dans un contexte d'analyse par la méthode des éléments finis ». Thèse de Doctorat, INPG 2001.
- [2] : A.D. KONE, B. NOGAREDE, M. LAJOIE MAZENC. «Le dimensionnement des actionneurs électriques : un problème de programmation non linéaire ». J. Phys.III Farnce 3, Février 1993, pp.285-301.
- [3] : A.D. KONE. «Contribution à la conception des actionneurs électriques par formulation en termes d'optimisation ». Thèse de Doctorat, ENSEEIHT, INPT1993.
- [4]: Y. AMARA, E. HOANG, M. GABSI, M. LECRIVAIN, A. H. BEN AHMED, S. DEROU. « Measured Performances of a New Hybrid Synchronous Machine ». EPE journal 2001, vol 12, N° 4, September/November 2002, pp. 42-50.
- [5] : Y. AMARA. «Contribution à la Conception et à la Commande des Machines Synchrones à Double Excitation. Application au Véhicule Hybride ». Thèse de Doctorat. Université de Paris XI, 2001.
- [6] : J. DELOR. «Dimensionnement Electromagnétique des Machines Synchrones à Double Excitation. Application a la Traction de Véhicules Electriques ». Mémoire d'Ingénieur CNAM, Octobre 1998.
- [7] : B. MULTON, J. LUCIDARME, L. PREVOND. «Analyse des Possibilités de fonctionnement en Régime de Désexcitation des Moteurs à Aimants Permanents ». J. Phys.III Farnce 5, Mai 1995, pp.623-640.
- [8] : Y. AMARA, J. LUCIDARME, M. GABSI, M. LECRIVAIN, A. H. BEN AHMED. «A New Topology of Hybrid Synchronous Machine ». IEEE transaction on industry applications. Vol.37. N°5, September/October 2001, pp.1273-1280.
- [9] : L. VIDO. «Étude d'actionneurs électriques à double excitation destinés au transport. Dimensionnement de structures synchrones». Thèse de Doctorat. Université de Paris XI, 2001.

- [10] :C. PERTUSA. «Contribution à la définition de moteurs à aimants permanents pour véhicule électrique hybride routier ». Thèse de Doctorat, ENSEEIHT, INPT1996.
- [11] :K. HATEFI. «La Conception Assistée Par Ordinateur de Moteurs et entraînements Electriques à Aimants Permanents ». Thèse de Doctorat. Lausanne, EPFL 1994.
- [12] :L. PREVOND, A. BEN AHMED, B. MULTON, J. LUCIDARME. «Méthode de Prédétermination des Caractéristiques Electromagnétiques des Machines à bobinage Global à Commutation de Flux. Application à un Actionneur Linéaire ». Journal de Physique III France, pp.1307-1330, June 1997.
- [13] :T. J. E. MILLER. «Brushless Peranent-Mgnet and Reluctance Motor Drives». Claredon Press, Oxford 1989.
- [14] :J. SOULARD. «Etude Paramétrique des ensembles Convertisseur-Machine à Aimants. Application à Une Structure Electromagnétique Monophasée Hybride à Aimants Permanents et à Alimentation Electronique ». Thèse de Doctorat. Université de Paris 6, 1998.
- [15] :Y. AMARA, H. BEN AHMED, M. GABSI, M. LECRIVAIN. «Machines Synchrones à Double Excitation : Analyse et Optimisation du Fonctionnement Pour la Traction Electrique ». Revue Internationale de Génie Electrique.
- [16] : J.R. HADJI-MINAGLOU, G. HENNEBERGER. «Comparison of Different Motor Types for Electric Vehicle Application ». EPE Journal. Vol. 8, N° 3-4, pp. 46-55, September 1999.
- [17] :R. IBTIOUEN. «Contribution Au Dimensionnement Electromagnétique d'Une Machine Synchrone Autopilotée à Aimants Insérés ». Thèse de Doctorat, INPL 1993.
- [18] :B. MULTON. «Application des aimants aux machines électriques». Médiathèque, e-EEC.
<http://www.clubeea.org>

- [19] : F.B. CHAABAN. «Determination of the Optimum Rotor/Stator Diameter Ratio of Permanent Magnet Machine». *Electric Machines and Power Systems*, 22 : pp.521-531, 1994.
- [20] : F.B. CHAABAN, A. EL-HAJJ. «A Cost-Effective Design Approach for Permanent Magnet Brushless Machines». *Electric Machines and Power Systems*, 28 : pp.893-900, 2000.
- [21] : A. M. EL-REFAIE. « High Speed Operation of Permanent Magnet Machines ». Thèse de Doctorat, University of Wisconsin-Madison, 2005.
- [22]: A. M. EL-REFAIE, T. M. JAHNS. «Optimal Flux Weakening in Surface PM Machines Using Fractional-Slot Concentrated Windings». *IEEE Transaction on Industry Applications*. Vol.41. N°3, May/June 2005, pp.790-800.
- [23]: A. M. EL-REFAIE, T. M. JAHNS. «Comparison of Synchronous PM Machine Types for Wide Constant-Power Speed Range Operation». *IAS 2005*, pp.1015-1022, 0-7803-9208-6/05/05 © 2005 IEEE.
- [24] : G. HENNEBERGER , J.R. HADJI-MINAGLOU, R.C. CIORBA. « Design and Test of Permanent Magnet Synchronous Motor with Auxiliary Excitation Winding for Electric Vehicle Application ». *European Power Electronics Chapter Symposium*. Lausanne, October, 1994, pp. 645-649.
- [25] : C. D. SYVERSON. « Hybrid Alternator ». Mar. 14, 1995, US Patent 5.397.975.
- [26] : A. D. AKEMAKOU, S. K. PHOUNSOMBAT. «Electrical Machine with Double Excitation, Especially a Motor Vehicle Alternator». Nov. 14, 2000, US Patent 6.147.429.
- [27] : T. MIZUNO. « Hybrid Excitation Type Permanent Magnet Synchronous Motor ». Oct. 28, 1997, US Patent 5.682.073.
- [28] : L. ALBERT. « Modélisation et Optimisation des Alternateurs à Griffes. Application au Domaine Automobile ». Thèse de Doctorat, INPG 2004.

- [29] : F. WURTZ. « Une nouvelle approche pour la conception sous contraintes de machines électriques ». Thèse de Doctorat, INPG 1996.
- [30] : E. MATAGNE. « Contribution à la modélisation de dispositifs Electrotechniques en vue de leur Optimisation ». Thèse de Doctorat, Université Catholique de LOUVAIN 1991.
- [31] : J. L. COULOMB. « Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthodes des éléments finis ». Thèse de Doctorat, INPG 1981.
- [32] : A. M. El-Refaie, T. M. Jahns, Donald W. Novotny. “Analysis of Surface Permanent Magnet Machines With Fractional-Slot Concentrated Windings”. IEEE Transactions on Energy Conversion. Vol. 21, N°1, March, pp. 34-43, 2006
- [33] : J. CROS, P. VIAROUGE. « Synthesis of High Performance PM Motors with Concentrated Windings ». IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 17, N°2, June, pp. 248-253, 2002.
- [34] : J. WANG, Z. P. XIA, D. HOWE, S. A. LONG. « Comparative study of 3-phase Permanent Magnet Brushless Machines with Concentrated, Distributed and Modular Windings ». The 3rd IET International Conference on [Power Electronics, Machines and Drives](#), Print ISBN: 0-86341-609-8, pp.116-121, [2006](#).
- [35] : L. VIDO, Y. AMARA, E. HOANG, M. GABSI, F. CHABOT. LECRIVAIN. « Design and Comparison of Concentrated Windings and Distributed Windings Interior PM Machines for a Hybrid Vehicle Application ». IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-2, N°1, March, pp. 116-121, 1987.
- [36] : A. IVANOV-SMOLENSKI. « Machines Electriques ». Moscow, Russia. Mir, 1983.
- [37] : N. BIANCHI, S. BOLOGNANI, P. FRARE. « Design Criteria for High-Efficiency SPM Synchronous Motors ». IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 21, N°2, JUNE, pp. 396-404, 2006.

- [38] :Y. PANG, Z. Q. ZHU, D. HOWE. « Analytical Determination of Optimal Split Ratio for Permanent Magnet Brushless Motors». *IEEE Proc-Electro. Power Appl.*, Vol. 153, N°1, January, pp. 7-13, 2006.
- [39] :J. D. EDE, Z. Q. ZHU, D. HOWE. « Optimal Split Ratio or High-Speed Permanent Magnet Brushless DC Motors». *Proc. Int. Con. On Electrical Machines and Systems*, Shenyang, China, 2001, pp. 909-912.
- [40] :G. R. SLEMON, S. XIAN LIU. « Modelling and Design Optimization of Permanent Magnet Motors ». *Electric Machines and Power Systems*,20: 71-92, 1992. Copyright © 1992 by Hemisphere Publishing Corporation.
- [41] :T.A. LIPO. « Introduction to AC Machine Design ». *Library of Congress Cataloging in Publication Data*. ISBN 0-9745470-1-8I. University of Wisconsin 2004.
- [42] :L. GASC. «Conception d'un actionneur à aimants permanents à faibles ondulations de couple pour assistance de direction automobile Approches par la structure et par la commande ». Thèse de Doctorat, ENSEEIHT, INPT 2004.
- [43] :F. B. CHAABAN, T. S. BRICH, D. HOWE, P. H. MELLOR. «Topologies for Permanent Magnet Generators/Speed Sensor for the ABS on Railway Freight Vehicles».
- [44] :JACEK. F. GIERAS, RONG-JIE WANG, MAARTEN J. KAMPER. «Axial Flux Permanent Magnet Brushless Machines». Kluwer Academic Publishers. eBook ISBN: 1-4020-2720-6. Print ISBN: 1-4020-2661-7. © 2005 Springer Science +Business Media, Inc.
- [45] :S. ZIRE HAKIM. « Conception et Optimisation des Moteurs à Aimants Destinés à l'Entraînement direct », Thèse de Doctorat. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, UTBM 2005.
- [46] :A. D. AKEMAKOU. «Étude, Réalisation et Expérimentation de Moteurs Hybrides Spéciaux». Thèse de Doctorat. L.E.Si.R, CNRS, 1996.

- [47] :S. HLIOUI. «Étude d'une Machine Synchrone à Double Excitation. Contribution à la mise en place d'une plate-forme de logiciels en vue d'un dimensionnement optimal». Thèse de Doctorat. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard et Université de Besançon, 02 Décembre 2008.
- [48] :R.L. OWEN, Z.Q. Zhu, G.W. JEWELL. «Hybrid excited flux-switching permanent magnet machines». 13th European Conference on Power Electronics and Applications, 2009. EPE '09. IEEE Xplore. Print ISBN: 978-1-4244-4432-8.
- [49] :E. HOANG, Y. AMARA, M. LECRIVAIN, M. GABSI. « Machine synchrone à aimants permanents structure à commutation et à concentration de flux. Principes et résultats expérimentaux ». Actes du colloque Electrotechnique du Futur EF'2001, Nancy, Novembre 2001.
- [50] :Y. AMARA, E. HOANG, M. GABSI, M. LECRIVAIN, S. ALLANO. «Design and Comparison of Different Flux-Switch Synchronous Machines for an Aircraft Oil Breather Application». European Transactions on Electrical Power. *Euro. Trans. Electr. Power* 2005; **15**:497-511.
- [51] :Y. AMARA, E. HOANG, M. GABSI, M. LECRIVAIN, S. ALLANO. «Design and Comparison of Different Flux-Switch Synchronous Machines for an Aircraft Oil Breather Application». European Transactions on Electrical Power, vol. 15, n° 6, November / December 2005, pp. 497-511
- [52] :Z. Q. ZHU, Y. PANG, D. HOWE, S. IWASAKI, R. DEODHAR, A. PRIDE. «Analysis of Electromagnetic Performance of Flux-Switching Permanent-Magnet Machines by Nonlinear Adaptive Lumped Parameter Magnetic Circuit Model». IEEE Transaction on Magnetics. Vol.41. N°11, November 2005, pp.4277-4287.
- [53] :E. BOMMÉS. «Modélisation et Optimisation des Machines Electriques Discoïdes à double Entrefer». Thèse de Doctorat. Institut Polytechnique de Grenoble (G2ELab), 11 Décembre 2009.

- [54] : A. Bellara, Y. Amara, G. Barakat and B. Dakyo. «2D exact solution of armature reaction field in slotted surface mounted PM radial flux synchronous machines», IEEE Transaction on Magnetics. Vol.45. N°10, October 2009, pp. 4534–4538.
- [55] : N. Abdel Karim. «Optimisation multicritère et multi-physique d'aérogénérateurs à aimants permanents à flux axial», thèse de doctorat. GREAH-Université du Havre, Juin 2008.
- [56] : H. BALI, A. BELLARA, G. BARAKAT, Y. AMARA and R. IBTIOUEN. «On load 2D exact analytical solution of magnetic field in slotted surface mounted PM radial flux synchronous machines: coupling with electric circuit equations». ISEF 2009 - XIV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering Arras, France, September 10-12, 2009
- [57] : J. Azzouzi. «Contribution à la modélisation et à l'optimisation des machines synchrones à aimants permanents à flux axial. Application au cas de l'aérogénérateur », Thèse de Doctorat, GREAH-Université du Havre 2007.
- [58] : J. Azzouzi. «Calcul de la répartition du champ électromagnétique dans une machine biphasée à aimants permanent à flux axial», Rapport de DEA, GREAH-Université du Havre. Février-Juin 2001.
- [59] : H. BALI, Y. AMARA, G. BARAKAT, R. IBTIOUEN and M. GABSI. «Analytical Modeling of Open Circuit Magnetic Field in Wound Field and Series Double Excitation Synchronous Machines». ». IEEE Transaction on Magnetics. Vol.46. N°10, October 2010.
- [60] : A. BELLARA, Y. AMARA, G. BARAKAT. «Modélisation Analytique des Machines Linéaires à Entrefer Plans à Aimants Permanents Montés en Surface». Conférence EF 2009. UTC, Compiègne, 24-25 Septembre 2009.
- [61] : G. LACOMBE. «Définition et réalisation d'une nouvelle génération de logiciel pour la conception des moteurs du futur», Thèse de Doctorat, Laboratoire de Génie Électrique de Grenoble, INP Grenoble 2007.

- [62] : J.F.CHARPENTIER. «Modélisation des ensembles convertisseurs statiques-machines électriques par couplage des équations du champ électromagnétique et du circuit électrique». Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 1996.
- [63] : H. BALI. «Étude Analytico-Numérique du couplage magnétique-électrique. Application au moteur linéaire», Mémoire de Magister, LAMEL, Université de Jijel 2002.
- [64] : J. AZZOUZI, G. BARAKAT, B. DAKYO. «Quasi-3-D analytical modeling of the magnetic field of an axial flux permanent-magnet synchronous machine», *IEEE Transaction on Energy Conversion*. Vol.20, N°4, December 2005, pp. 746–752.
- [65] : J. AZZOUZI, G. BARAKAT, B. DAKYO. «Analytical modelling of an axial flux permanent magnet synchronous generator for wind energy application», *IEEE International Conference on Electrical Machines and Drives 2005*. 1255–1260, Print ISBN 0-7803-8987-5.
- [66] : C. SYLVESTRE.
«Modélisation d'une machine triphasé à aimants permanents et à commutation de flux et étude comparative avec des machines synchrones à aimants permanents classiques». Stage de DEA soutenu en juin 1999.
- [67] : F. DUBAS, C. ESPANET. «Analytical solution of the magnetic field in permanent-magnet motors taking into account slotting effect: No-load vector potential and flux density calculation», *IEEE Transaction on Magnetics*. Vol.45. N°5, May 2009, pp.2097-2109.
- [W1] : Site Web : http://fr.wikipedia.org/wiki/Pollution_de_l'air
- [W2] : Site Web : <http://membres.multimania.fr/OZONE2/pollutionat.html>
- [W3] : Site Web : http://fr.wikipedia.org/wiki/Grand_smog_de_Londres
- [W4] : Site Web : <http://www.cite-sciences.fr/actu/2001/06/pollution/html/page2.html>
- [W5] : Site Web : <http://opti-en.com/reglements.html>

[W6] : Site Web : http://fr.wikipedia.org/wiki/Énergie_renouvelable

[W7] : Site Web : <http://www.oceankw.org/5.html>

[W8] : Site Web : http://fr.wikipedia.org/wiki/Énergie_solaire_photovoltaique

[W9] : Site Web : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Biomasse_\(énergie\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Biomasse_(énergie))

ANNEXE A

Réalisation de l'enroulement concentrique

A.1 Réalisation de l'enroulement concentrique

On considère une machine à commutation de flux constituée de 12 encoches ($S = 12$) et 10 dents. La réalisation du bobinage concentrique/modulaire passe par les étapes suivantes [21], [33] :

1. On calcule S_{pp} (nombre d'encoche/pôle/phase) comme suit :

$$S_{pp} = \frac{S}{2p \cdot m}; \text{ Avec } m \text{ nombre de phases. Dans notre cas, on obtient :}$$

$$S_{pp} = \frac{12}{20 \cdot 3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \frac{a}{b}$$

2. La séquence initiale peut être obtenue grâce à la notation suivante : $\overbrace{000\dots\dots 01\dots\dots 1}^b$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{b-a} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_a$

Donc, dans notre cas la séquence initiale est : 00001

3. La séquence optimale est la suivante : 10000

4. La séquence optimale est répétée 3 fois selon la distribution classique des enroulements $AC'BA'CB'$ comme suit :

1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0

A C' B A' C B' A C' B A' C B' A C' B

5. On reprend seulement les phases correspondant à 1 : on obtient A B' C

6. Pour avoir un enroulement à double couche, on note :

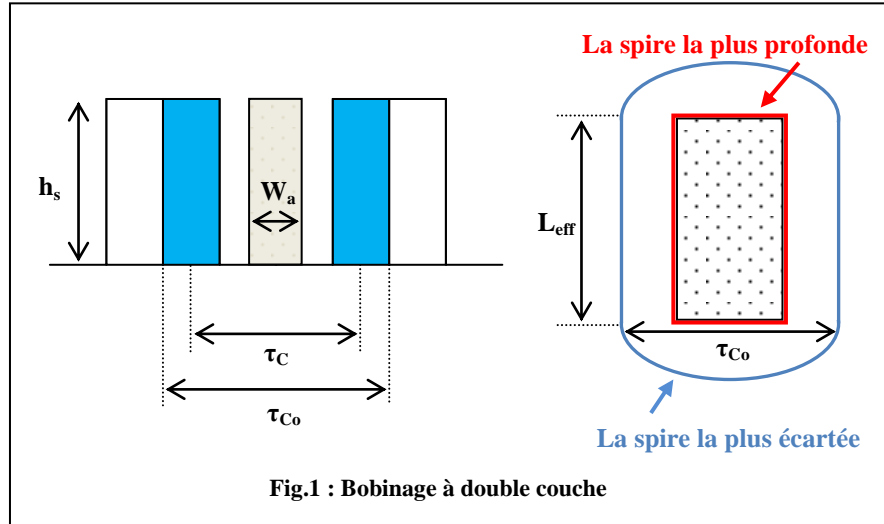
A B' C

A' B C'

On obtient la distribution suivante:

A.2 Calcul de la résistance (12 slots / 10 dents enroulement concentrique à double couches)

Pour expliquer la façon dont le calcul de la résistance se fait, on considère un bobinage à double couche (figure.1).



On définit:

τ_{co} : La largeur de la spire la plus écartée;

R_s : Rayon intérieur du stator;

N_s : Nombre d'encoches;

$L_{end,min} \approx w_t$; Longueur de la spire la plus profonde;

Avec : $w_t = 2w_{ds} + w_a$;

$L_{end,max} \approx \frac{\pi \tau_{co}}{2}$; Longueur de la spire la plus écartée; avec $\tau_{co} = \tau_s$

τ_s : Pas d'encoches où $\tau_s = \frac{2\pi}{N_s} R_s = w_{es} + w_t$;

Sachant que $L_{end,avg}$ représente la longueur moyenne des têtes de bobines:

$$L_{end,avg} = \frac{L_{end,min} + L_{end,max}}{2}$$

Alors, la longueur moyenne d'une spire est donnée par:

$$L_{turn,avg} = 2 * L_{eff} + 2 * L_{end,avg}$$

Puisque le bobinage utilisé est à double couche, la section transversale d'une spire est formulée par

$$A_{turn} = \frac{A_{slot}}{2} \cdot \frac{k_f}{n_{cond}}$$

A_{slot} : Section transversale de l'encoche;

k_f : Facteur de remplissage;

n_{cond} : Nombre de conducteurs/encoches;

La résistance de la bobine est donnée par:

$$R_{coil} = \rho_{cu} \frac{L_{turn,avg} * n_{cond}}{A_{turn}} \text{ Où } \rho_{cu} \text{ la résistivité du cuivre.}$$

Puisque les enroulements sont connectés en série, la résistance de phase est calculée comme suit:

$$R_{phase} = R_{coil} * N_c$$

Où N_c représente le nombre de spires/ phase

A.3 Première analyse par éléments finis

La première modélisation numérique est faite en utilisant le logiciel FEMM[®]-ver.4.2. On donne, dans le tableau. 1, les caractéristiques de la machine étudiée

entrefer	$e = 0.2 \text{ mm}$
épaisseur de la culasse	5 mm
Nombre de dents au stator	$N_s = 12$
Diamètre extérieur du stator	$D = 150 \text{ mm}$
Diamètre intérieur du stator	$D_e = 100 \text{ mm}$
Longueur axiale active	$L_a = 60 \text{ mm}$
Induction rémanente	$B_r = 1.25 \text{ T}$
Vitesse de rotation	$N = 7450 \text{ tr/min}$
Nombre de phase	$q = 3$
Nombre de dents au rotor	$N_r = 10$
Nombre de spires en série	$n_t = 20$
Nombre de cellules par phase	$N_c = 4$
Largeur angulaire d'une dent statorique	$w_s = 2\pi / (4qN_c)$

Tableau.1 : Caractéristiques de la machine à commutation de flux étudiée

A.4 Seconde analyse par éléments finis

La modélisation numérique est effectuée en second lieu grâce au logiciel performant (Flux2D[®]). Le Tableau.2 regroupe les données de la machine à commutation de flux.

entrefer	$e = 0.6 \text{ mm}$
épaisseur de la culasse	8 mm
Nombre de dents au stator	$N_s = 12$
Diamètre extérieur du stator	$D = 150 \text{ mm}$
Diamètre intérieur du stator	$D_e = 100 \text{ mm}$
Longueur axiale active	$L_a = 60 \text{ mm}$
Induction rémanente	$B_r = 1.25 \text{ T}$
Vitesse de rotation	$N = 750 \text{ tr/min}$
Nombre de phase	$q = 3$
Nombre de dents au rotor	$N_r = 10$
Nombre de spires en série de la phase	$n_t = 10$
Nombre de cellules par phase	$N_c = 4$
Largeur angulaire d'une dent statorique	$w_s = 2\pi / (4qN_c)$

Tableau.2 : Caractéristiques de la machine à commutation de flux étudiée

ANNEXE B

Compléments sur l'exploitation des conditions aux limites et calculs des coefficients

Machine synchrone à double excitation série

B.1 Exploitation des relations de passage entre les régions I et II

B.1.1. Calcul des coefficients B_{5n} , B_{6n} , B_{7n} et B_{8n}

Le calcul intégral des coefficients de Fourier dans la région II se traduit par :

$$B_{5n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{N_s \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + \frac{N_s \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_{\varphi}^{(II)}(\varphi, R_3) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \cdot d\varphi \quad (\text{B.1})$$

$$B_{6n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{N_s \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + \frac{N_s \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_{\varphi}^{(II)}(x, R_3) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \cdot d\varphi \quad (\text{B.2})$$

$$B_{7n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{N_s \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + \frac{N_s \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_r^{(II)}(z, R_3) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \cdot d\varphi \quad (\text{B.3})$$

$$B_{8n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{N_s \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + \frac{N_s \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_r^{(II)}(\varphi, R_3) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \cdot d\varphi \quad (\text{B.4})$$

On pose : $N_{sp} = \frac{N_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}$ et en sachant que

$$\sum_{i=0}^{x-1} \exp\left(j \cdot n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{x}\right) = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est multiple de } x \ (n = m \cdot x, \text{ avec } m \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Après calculs et simplifications on trouve que :

- Calcul de B_{5n}

$$B_{5n} = \frac{1}{N_{sp} \cdot \alpha_s} \cdot \sum_{i=1}^{N_{sp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mi} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot H(R_3) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n \right)} \right) \cdot \left((-1)^m \cdot \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s + \frac{w}{2} \right) \right) - \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s - \frac{w}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{B.5})$$

▪ Calcul de B_{6n}

$$B_{6n} = \frac{1}{N_{sp} \cdot \alpha_s} \cdot \sum_{i=1}^{N_{sp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mi} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w} \cdot H(R_3) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n \right)} \right) \cdot \left(\cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s - \frac{w}{2} \right) \right) - (-1)^m \cdot \cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_s + \frac{w}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{B.6})$$

▪ Calcul de B_{7n}

$$B_{6n} = \sum_{k=1}^{+\infty} g(n,k) \cdot B_{7k} + \sum_{k=1}^{+\infty} f(n,k) \cdot B_{7k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (g(n,k) + f(n,k)) \cdot B_{7k} \quad (\text{B.7})$$

▪ Calcul de B_{8n}

$$B_{5n} = \sum_{k=1}^{+\infty} f(n,k) \cdot B_{8k} - \sum_{k=1}^{+\infty} g(n,k) \cdot B_{8k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (f(n,k) - g(n,k)) \cdot B_{8k} \quad (\text{B.8})$$

Avec :

$$f(n,k) = \begin{cases} \frac{1}{w \cdot \alpha_s} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(\frac{H(R_3)}{G(R_3)} \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n \right)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} + m_k \right)} + \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_k \right)} \right) \right) \\ \cdot \left(\cos \left((k+n) \cdot \frac{2\pi}{N_{sp} \cdot \alpha_s} \cdot \frac{w}{2} \right) - (-1)^m \cdot \cos \left((k-n) \cdot \frac{2\pi}{N_{sp} \cdot \alpha_s} \cdot \frac{w}{2} \right) \right) \\ \text{si } (k+n) = \alpha \cdot N_{sp} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Et

$$g(n,k) = \begin{cases} \frac{1}{w \cdot \alpha_s} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(\frac{H(R_3)}{G(R_3)} \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n\right)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} + m_k\right)} + \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_k\right)} \right) \right) \\ \cdot \left(\cos\left((k-n) \cdot \frac{2\pi}{N_{sp}} \cdot \frac{w}{2}\right) - (-1)^m \cdot \cos\left((k+n) \cdot \frac{2\pi}{N_{sp}} \cdot \frac{w}{2}\right) \right) \\ si (k-n) = \alpha \cdot N_{sp} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

B.2 Conditions de passage entre les régions II et III

Les conditions de passage entre les régions II et III sont données par la relation (II.42) comme suit :

$$\begin{cases} H_{\varphi}^{(II)}(\varphi, R_2) = H_{\varphi}^{(III)}(\varphi, R_2) \\ B_r^{(II)}(\varphi, R_2) = B_r^{(III)}(\varphi, R_2) \end{cases} ;$$

En considérant les équations du milieu pour les aimants permanents, on trouve :

Dans la région II :

$$\begin{cases} B_{\varphi}^{(II)}(\varphi, R_2) = -\frac{\partial A_z}{\partial r}(\varphi, R_2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \begin{bmatrix} \left(B_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} - B_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1}\right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ + \\ \left(B_{3n} \cdot R_2^{m_n-1} - B_{4n} \cdot R_2^{-m_n-1}\right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{bmatrix} \\ B_r^{(II)}(\varphi, R_2) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}(\varphi, R_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \begin{bmatrix} \left(B_{3n} \cdot R_2^{m_n-1} + B_{4n} \cdot R_2^{-m_n-1}\right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ - \\ \left(B_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} + B_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1}\right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Dans la région III :

➤ Cas $m_n \neq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l}
B_{\varphi}^{(III)}(\varphi, R_2) = -\frac{\partial A_z}{\partial r}(\varphi, R_2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \left[\begin{array}{l}
\left(C_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} - C_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1} + \frac{C_{3n}}{m_n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\
+ \\
\left(C_{4n} \cdot R_2^{m_n-1} - C_{5n} \cdot R_2^{-m_n-1} + \frac{C_{6n}}{m_n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)
\end{array} \right] \\
B_r^{(III)}(\varphi, R_2) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}(\varphi, R_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \left[\begin{array}{l}
\left(C_{4n} \cdot R_2^{m_n-1} + C_{5n} \cdot R_2^{-m_n-1} + C_{6n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\
- \\
\left(C_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} + C_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1} + C_{3n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi)
\end{array} \right]
\end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

En regroupant les termes en cosinus et les termes en sinus les écritures précédentes conduisent aux expressions qu'on peut écrire, après simplification, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
B_{1n} = C_{1n} + \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n} \right) \cdot R_2^{-m_n+1} + \frac{\mu_0 \cdot M_{r1n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{-m_n+1} \\
B_{2n} = C_{2n} + \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n} \right) \cdot R_2^{m_n+1} - \frac{\mu_0 \cdot M_{r1n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{m_n+1} \\
B_{3n} = C_{4n} + \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n} \right) \cdot R_2^{-m_n+1} + \frac{\mu_0 \cdot M_{r2n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{-m_n+1} \\
B_{4n} = C_{5n} + \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n} \right) \cdot R_2^{m_n+1} - \frac{\mu_0 \cdot M_{r2n}}{2 \cdot m_n} \cdot R_2^{m_n+1}
\end{array} \right. \quad \text{pour } m_n \neq 1 \quad (\text{B.13})$$

➤ Cas $m_n = 1$

On procède de la même manière que dans le paragraphe précédent, on peut écrire dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l}
B_{\varphi III}(\varphi, R_2) = -\frac{\partial A_z}{\partial r}(\varphi, R_2) = \left[\begin{array}{l}
-\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \left[\left(C_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} - C_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1} + \frac{C_{3n}}{m_n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \right] \\
+ \\
\left[\left(C_{4n} \cdot R_2^{m_n-1} - C_{5n} \cdot R_2^{-m_n-1} + \frac{C_{6n}}{m_n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \right] \\
\left[\left(C_{10} + C_{30} - C_{20} \cdot R_2^{-2} + C_{30} \cdot \text{Ln}(R_2) \right) \cdot \cos(\varphi) \right] \\
+ \\
\left[\left(C_{40} + C_{60} - C_{50} \cdot R_2^{-2} + C_{60} \cdot \text{Ln}(R_2) \right) \cdot \sin(\varphi) \right]
\end{array} \right] \\
B_{r III}(\varphi, R_2) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}(\varphi, R_2) = \left[\begin{array}{l}
\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \left[\left(C_{4n} \cdot R_2^{m_n-1} + C_{5n} \cdot R_2^{-m_n-1} + C_{6n} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \right] \\
- \\
\left[\left(C_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} + C_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1} + C_{3n} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \right] \\
- \left[\left(C_{10} + C_{20} \cdot R_2^{-2} + C_{30} \cdot \text{Ln}(R_2) \right) \cdot \sin(\varphi) \right] \\
+ \\
\left[\left(C_{40} + C_{50} \cdot R_2^{-2} + C_{60} \cdot \text{Ln}(R_2) \right) \cdot \cos(\varphi) \right]
\end{array} \right]
\end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

En regroupant les termes en cosinus et les termes en sinus des équations (B.11) et (B.14), on trouve après simplification que :

$$\left\{ \begin{array}{l}
B_{11} = C_{10} + \frac{C_{30}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{\mu_0 \cdot M_{r11}}{2} \\
B_{21} = C_{20} - \frac{C_{30}}{2} \cdot R_2^2 - \frac{\mu_0 \cdot M_{r11}}{2} \cdot R_2^2 \\
B_{31} = C_{40} + \frac{C_{60}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{\mu_0 \cdot M_{r21}}{2} \\
B_{41} = C_{50} - \frac{C_{60}}{2} \cdot R_2^2 - \frac{\mu_0 \cdot M_{r21}}{2} \cdot R_2^2
\end{array} \right. \quad (\text{B.15})$$

B.3 Conditions de passage entre les régions III et IV

On adopte la même démarche que précédemment (§ B.1), on peut écrire dans ce cas :

$$B_{9n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{p \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_d + \varphi_{rj}}^{\varphi_d + \varphi_{rj} + \frac{p \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_{\varphi}^{(III)}(\varphi, R_1) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_r) \cdot d\varphi \quad (\text{B.16})$$

$$B_{10n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{p \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_d + \varphi_{rj}}^{\varphi_d + \varphi_{rj} + \frac{p \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_{\varphi}^{(III)}(\varphi, R_1) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_r) \cdot d\varphi \quad (\text{B.17})$$

$$B_{11n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{p \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_d + \varphi_{rj}}^{\varphi_d + \varphi_{rj} + \frac{p \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_r^{(III)}(\varphi, R_1) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_r) \cdot d\varphi \quad (\text{B.18})$$

$$B_{12n} = \frac{2 \cdot \text{PGCD}(N_s, p)}{p \cdot \alpha_s} \cdot \int_{\varphi_d + \varphi_{rj}}^{\varphi_d + \varphi_{rj} + \frac{p \cdot \alpha_s}{\text{PGCD}(N_s, p)}} B_r^{(II)}(\varphi, R_1) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_r) \cdot d\varphi \quad (\text{B.19})$$

▪ Calcul de B_{9n}

$$C_{9n} = \frac{1}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mli} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot H_1(R_1) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \cdot \left((-1)^m \cdot \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p + \frac{w_r}{2} \right) \right) - \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p - \frac{w_r}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{B.20})$$

▪ Calcul de B_{10n}

$$C_{10n} = \frac{1}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[F_{mli} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot H_1(R_1) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \cdot \left(\cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p - \frac{w_r}{2} \right) \right) - (-1)^m \cdot \cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p + \frac{w_r}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (\text{B.21})$$

▪ Calcul de B_{11n}

$$C_{10n} = \sum_{k=1}^{+\infty} (g_1(n, k) + f_1(n, k)) \cdot C_{11k} \quad (\text{B.22})$$

▪ Calcul de B_{12n}

$$C_{9n} = \sum_{k=1}^{+\infty} (f_1(n, k) - g_1(n, k)) \cdot C_{12k} \quad (\text{B.23})$$

Avec :

$$N_{rp} = \frac{2p}{\text{PGCD}(Ns, p)}$$

$$f_1(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{w_r \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(\frac{H_1(R_1)}{G_1(R_1)} \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} + m_k \right)} + \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_k \right)} \right) \right) \\ \cdot \left(\cos \left((k+n) \cdot \frac{2\pi}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \frac{w_r}{2} \right) - (-1)^m \cdot \cos \left((k-n) \cdot \frac{2\pi}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \frac{w_r}{2} \right) \right) \\ \text{si } (k+n) = \alpha \cdot N_{rp} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

Et

$$g_1(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{w_r \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(\frac{H_1(R_1)}{G_2(R_1)} \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} + m_k \right)} + \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_k \right)} \right) \right) \\ \cdot \left(\cos \left((k-n) \cdot \frac{2\pi}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \frac{w_r}{2} \right) - (-1)^m \cdot \cos \left((k+n) \cdot \frac{2\pi}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \frac{w_r}{2} \right) \right) \\ \text{si } (k-n) = \alpha \cdot N_{rp} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

B.4 Détermination de la distribution de l'aimantation

Pour une aimantation parallèle, et selon les travaux de [67], l'expression générale de cette aimantation est donnée par :

$$\begin{cases} M_r = \frac{B_R}{\mu_0} \cdot \alpha_p \cdot [K_m(n \cdot p + 1) + K(n \cdot p - 1)] \\ M_\varphi = \frac{B_R}{\mu_0} \cdot \alpha_p \cdot [K_m(n \cdot p + 1) - K(n \cdot p - 1)] \end{cases} \quad (\text{B.26.1})$$

Avec : n nombre d'harmoniques et bien sûr p le nombre de paires de pôles. On note oa comme étant l'espace entre aimants.

$\alpha_p = \frac{\Theta_m}{\tau_p}$ représente le rapport d'arc polaire de l'aimant et du pas polaire.

$$K_m(\bullet) = \sin\left(\bullet \cdot \alpha_p \cdot \frac{\tau_p}{2}\right) \bigg/ \left(\bullet \cdot \alpha_p \cdot \frac{\tau_p}{2}\right)$$

L'exploitation des relations (B.26), (II.8), (II.28) et (II.29), nous permet d'aboutir aux équations suivantes :

$$\begin{cases} C_{1nr} = -B_r \cdot \frac{2p}{\pi} \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left[\frac{\sin(n \cdot p + 1) \cdot \frac{(\tau_p - oa)}{2}}{(n \cdot p + 1)} - \frac{\sin(n \cdot p - 1) \cdot \frac{(\tau_p - oa)}{2}}{(n \cdot p - 1)} \right] \\ C_{2nr} = 0 \\ C_{3nr} = 0 \\ C_{4nr} = B_r \cdot \frac{2p}{\pi} \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left[\frac{\sin(n \cdot p + 1) \cdot \frac{(\tau_p - oa)}{2}}{(n \cdot p + 1)} + \frac{\sin(n \cdot p - 1) \cdot \frac{(\tau_p - oa)}{2}}{(n \cdot p - 1)} \right] \end{cases} \quad (\text{B.26.2})$$

B.4 Système d'équation dérivant de l'exploitation des conditions de passage

Afin d'aboutir à un système linéaire, on pose :

$$\begin{cases} B_{1n1} = B_{1n} \cdot R_3^{m_n - 1} \\ B_{2n1} = B_{2n} \cdot R_3^{-m_n - 1} \\ B_{3n1} = B_{3n} \cdot R_3^{m_n - 1} \\ B_{4n1} = B_{4n} \cdot R_3^{-m_n - 1} \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{cases} C_{1n1} = C_{1n} \cdot R_3^{m_n - 1} \\ C_{2n1} = C_{2n} \cdot R_3^{-m_n - 1} \\ C_{4n1} = C_{4n} \cdot R_3^{m_n - 1} \\ C_{5n1} = C_{5n} \cdot R_3^{-m_n - 1} \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

En combinant les équations (II.37.1), (II.40), (II.41) et (B.27) on obtient une relation liant B_{1n1} , B_{2n1} , B_{3n1} et B_{4n1} comme suit :

$$\begin{cases} m_n \cdot B_{4n1} - \sum_{k=1}^{+\infty} (g(n,k) + f(n,k)) \cdot m_k \cdot B_{4k1} = m_n \cdot B_{3n1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (g(n,k) + f(n,k)) \cdot m_k \cdot B_{3k1} \\ m_n \cdot B_{2n1} - \sum_{k=1}^{+\infty} (g(n,k) - f(n,k)) \cdot m_k \cdot B_{2k1} = m_n \cdot B_{1n1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (g(n,k) - f(n,k)) \cdot m_k \cdot B_{1k1} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

En utilisant la relation (B.29), les équations (B.13), (B.15), (II.50) et (II.51) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} B_{111} = C_{101} + \frac{C_{30}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{11r0}}{2} \\ B_{211} = C_{201} - \frac{C_{30}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 - \frac{C_{11r0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 \\ B_{311} = C_{401} + \frac{C_{60}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{21r0}}{2} \\ B_{411} = C_{501} - \frac{C_{60}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 - \frac{C_{21r0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{cases} B_{1n1} = C_{1n1} + \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} + \frac{C_{1nr0}}{2 \cdot m_n} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} \\ B_{2n1} = C_{2n1} + \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} - \frac{C_{1nr0}}{2 \cdot m_n} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} \\ B_{3n1} = C_{4n1} + \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} + \frac{C_{2nr0}}{2 \cdot m_n} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} \\ B_{4n1} = C_{5n1} + \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} - \frac{C_{2nr0}}{2 \cdot m_n} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{cases} C_{10n} = (g_1(n,1) + f_1(n,1)) \cdot C_{111} + \sum_{k=2}^{+\infty} (g_1(n,k) + f_1(n,k)) \cdot C_{11k} \\ C_{9n} = (f_1(n,1) - g_1(n,1)) \cdot C_{121} + \sum_{k=2}^{+\infty} (f_1(n,k) - g_1(n,k)) \cdot C_{12k} \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

La relation (B.29) peut être formulée d'une autre manière et ceci en intégrant les dernières relations développées. En effet sous forme matricielle elle peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} [M_1] \cdot \{C_5\} + [M_2] \cdot \{C_4\} = [V_1] \\ [M_3] \cdot \{C_2\} + [M_4] \cdot \{C_1\} = [V_2] \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

Avec :

- Matrice M1

$$M_1(i, j) = \begin{cases} -(g(i, j) + f(i, j)) \cdot m_j & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot [1 - (g(i, j) + f(i, j))] & \text{si } j = i \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

- Matrice M2

$$M_2(i, j) = \begin{cases} -(g(i, j) + f(i, j)) \cdot m_j & \text{si } j \neq i \\ -m_i \cdot [1 + (g(i, j) + f(i, j))] & \text{si } j = i \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

- Matrice M3

$$M_3(i, j) = \begin{cases} -(g(i, j) - f(i, j)) \cdot m_j & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot [1 - (g(i, j) - f(i, j))] & \text{si } j = i \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

- Matrice M4

$$M_4(i, j) = \begin{cases} -(g(i, j) - f(i, j)) \cdot m_j & \text{si } j \neq i \\ -m_i \cdot [1 + (g(i, j) - f(i, j))] & \text{si } j = i \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

- Vecteur V1 Pour $m_n = 1$

$$V_1(1) = \begin{bmatrix} \frac{C_{60}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{21r0}}{2} + \frac{C_{60}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 + \frac{C_{21r0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 \\ + (g(1,1) + f(1,1)) \cdot \left(\frac{C_{60}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{21r0}}{2}\right) \\ - (g(1,1) + f(1,1)) \cdot \left(\frac{C_{60}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 + \frac{C_{2kr0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(1, k) + f(1, k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{6k}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1} + \frac{C_{2kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1}\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(1, k) + f(1, k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{6k}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1} - \frac{C_{2kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1}\right) \end{bmatrix}$$

Pour $m_n \neq 1$

$$V_1(n) = \left[\begin{array}{l} m_n \cdot \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} + \frac{C_{2nr0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} \\ -m_n \cdot \frac{C_{6n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} + \frac{C_{2nr0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} \\ + (g(n,1) + f(n,1)) \cdot \left(\frac{C_{60}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{2lr0}}{2}\right) \\ - (g(n,1) + f(n,1)) \cdot \left(\frac{C_{60}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 + \frac{C_{2kr0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(n,k) + f(n,k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{6k}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1} + \frac{C_{2kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1}\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(n,k) + f(n,k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{6k}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1} - \frac{C_{2kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1}\right) \end{array} \right]$$

$n = 2, 3, 4, \dots, N_b$

- Vecteur V2 Pour $m_n = 1$

$$V_2(1) = \left[\begin{array}{l} \frac{C_{30}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{11r0}}{2} + \frac{C_{30}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 + \frac{C_{11r0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 \\ + (g(1,1) - f(1,1)) \cdot \left(\frac{C_{3k}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{11r0}}{2}\right) \\ - (g(1,1) - f(1,1)) \cdot \left(\frac{C_{30}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 + \frac{C_{11r0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(1,k) - f(1,k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{3k}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1} + \frac{C_{1kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1}\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(1,k) - f(1,k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{3k}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1} - \frac{C_{1kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1}\right) \end{array} \right]$$

Pour $m_n \neq 1$

$$V_2(n) = \left[\begin{array}{l} m_n \cdot \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} + \frac{C_{1nr0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_n+1} \\ -m_n \cdot \frac{C_{3n}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} + \frac{C_{1nr0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_n+1} \\ + (g(n,1) - f(n,1)) \cdot \left(\frac{C_{30}}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{Ln}(R_2)) + \frac{C_{11r0}}{2}\right) \\ - (g(n,1) - f(n,1)) \cdot \left(\frac{C_{30}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 + \frac{C_{11r0}}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(n,k) - f(n,k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{3k}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1} + \frac{C_{1kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{-m_k+1}\right) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g(n,k) - f(n,k)) \cdot m_k \cdot \left(\frac{C_{3k}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1} - \frac{C_{1kr0}}{2 \cdot m_k} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{m_k+1}\right) \end{array} \right]$$

$$n = 2, 3, 4, \dots, N_b$$

En suivant la même démarche par rapport à l'équation (B.32), avec prise en compte des équations (II.47.1) et (II.47.2), et après calculs et simplifications, on obtient les relations matricielles suivantes :

$$\begin{cases} [M_5] \cdot \{C_1\} + [M_6] \cdot \{C_2\} + [M_7] \cdot \{C_4\} + [M_8] \cdot \{C_5\} = [V_3] \\ [M_9] \cdot \{C_1\} + [M_{10}] \cdot \{C_2\} + [M_{11}] \cdot \{C_4\} + [M_{12}] \cdot \{C_5\} = [V_4] \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Avec :

- Matrice M5

$$M_5(i, j) = \begin{cases} m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_{ji}-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) \cdot \sin(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 + (g_1(i, i) + f_1(i, i))] \cdot \sin(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

On peut aussi écrire que :

$$[M_5] = [M_5^1] \cdot [MS]$$

$$M_5^1(i, j) = \begin{cases} m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_{ji}-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 + (g_1(i, i) + f_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

$$MS(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ \sin(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Matrice M6

$$M_6(i, j) = \begin{cases} m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) \cdot \sin(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [-1 + (g_1(i, i) + f_1(i, i))] \cdot \sin(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

Ou bien :

$$[M_6] = [M_6^1] \cdot [MS]$$

$$M_6^1(i, j) = \begin{cases} m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [-1 + (g_1(i, i) + f_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Matrice M7

$$M_7(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_j-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) \cdot \cos(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ -m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 + (g_1(i, i) + f_1(i, i))] \cdot \cos(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

On peut réécrire $[M_7]$ sous la forme suivante :

$$[M_7] = [M_7^1] \cdot [MC]$$

$$M_7^1(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_j-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ -m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 + (g_1(i, i) + f_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

$$MC(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ \cos(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Matrice M8

$$M_8(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) \cdot \cos(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [1 - (g_1(i, i) + f_1(i, i))] \cdot \cos(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

Ou bien :

$$[M_8] = [M_8^1] \cdot [MC]$$

$$M_8^1(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (g_1(i, j) + f_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [1 - (g_1(i, i) + f_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

• Matrice M9

$$M_9(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) \cdot \cos(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] \cdot \cos(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

Ou bien :

$$[M_9] = [M_9^1] \cdot [MC]$$

$$M_9^1(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

• Matrice M10

$$M_{10}(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) \cdot \cos(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [-1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] \cdot \cos(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

Ou bien :

$$[M_{10}] = [M_{10}^1] \cdot [MC]$$

$$M_{10}^1(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [-1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Matrice M11

$$M_{11}(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) \cdot \cos(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] \cdot \cos(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

Ou bien :

$$[M_{11}] = [M_{11}^1] \cdot [MS]$$

$$M_{11}^1(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{m_i-1} \cdot [1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Matrice M12

$$M_{12}(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) \cdot \sin(m_j \cdot \varphi_d) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [-1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] \cdot \sin(m_i \cdot \varphi_d) & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N_b \\ j = 1, 2, \dots, N_b \end{cases}$$

Ou bien :

$$[M_{12}] = [M_{12}^1] \cdot [MS]$$

$$M_{12}^1(i, j) = \begin{cases} -m_j \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_j-1} \cdot (f_1(i, j) - g_1(i, j)) & \text{si } j \neq i \\ m_i \cdot \left(\frac{R_1}{R_3}\right)^{-m_i-1} \cdot [-1 - (f_1(i, i) - g_1(i, i))] & \text{si } j = i \end{cases}$$

- Vecteur V3

$$V_3(1) = \left[\begin{array}{l} (g_1(1,1) + f_1(1,1)) \cdot [C_{60} \cdot Ln(R_1) \cdot \cos(\varphi_d) - C_{30} \cdot Ln(R_1) \cdot \sin(\varphi_d)] \\ + (C_{60} + C_{60} \cdot Ln(R_1) + C_{21r0}) \cdot \cos(\varphi_d) - (C_{30} + C_{30} \cdot Ln(R_1) + C_{11r0}) \cdot \sin(\varphi_d) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g_1(1,k) + f_1(1,k)) \cdot m_k \cdot [C_{6n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) - C_{3n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d)] \end{array} \right];$$

Cas $m_n = 1$

$$V_3(n) = \left(\begin{array}{l} (g_1(n,1) + f_1(n,1)) \cdot [C_{60} \cdot Ln(R_1) \cdot \cos(\varphi_d) - C_{30} \cdot Ln(R_1) \cdot \sin(\varphi_d)] \\ + (C_{6n} + C_{2nr0}) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) - (C_{3n} + C_{1nr0}) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (g_1(n,k) + f_1(n,k)) \cdot m_k \cdot [C_{6k} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) - C_{3k} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d)] \end{array} \right); \text{ Cas } m_n \neq 1$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N_b$

- Vecteur V4

$$V_4(1) = \left[\begin{array}{l} -(C_{30} + C_{30} \cdot Ln(R_1) + C_{11r0}) \cdot \cos(\varphi_d) - (C_{60} + C_{60} \cdot Ln(R_1) + C_{21r0}) \cdot \sin(\varphi_d) \\ + (f_1(1,1) - g_1(1,1)) \cdot [C_{30} \cdot Ln(R_1) \cdot \cos(\varphi_d) + C_{60} \cdot Ln(R_1) \cdot \sin(\varphi_d)] \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (f_1(1,k) - g_1(1,k)) \cdot m_n \cdot [C_{3n} \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) + C_{6n} \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d)] \end{array} \right];$$

Cas $m_n = 1$

$$V_4(n) = \left(\begin{array}{l} (f_1(n,1) - g_1(n,1)) \cdot [C_{30} \cdot Ln(R_1) \cdot \cos(\varphi_d) + C_{60} \cdot Ln(R_1) \cdot \sin(\varphi_d)] \\ - (C_{3n} + C_{1nr0}) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi_d) - (C_{6n} + C_{2nr0}) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi_d) \\ + \sum_{k=2}^{+\infty} (f_1(n,k) - g_1(n,k)) \cdot m_n \cdot [C_{3k} \cdot \cos(m_k \cdot \varphi_d) + C_{6k} \cdot \sin(m_k \cdot \varphi_d)] \end{array} \right); \text{ Cas } m_n \neq 1$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N_b$

B.5 Détermination des coefficients des autres régions

En reprenant les conditions de passage entre les différentes régions, et grâce à la propriété de l'orthogonalité des termes deux à deux, on peut calculer les coefficients de toutes les régions. On ne donne que les résultats sans passer par les calculs.

- Coefficient de la région I

$$F_{mi} = \left(\frac{-2 \cdot R_3}{w \cdot \left(\left(\frac{R_3}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} + \left(\frac{R_3}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right)} \right) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\begin{array}{l} B_{7n} \cdot \frac{\cos(m_n \cdot \varphi_i) - (-1)^m \cdot \cos(m_n \cdot (\varphi_i + w))}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n \right) \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{w} + m_n \right)} \\ B_{8n} \cdot \frac{\sin(m_n \cdot \varphi_i) - (-1)^k \cdot \sin(m_n \cdot (\varphi_i + w))}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} - m_n \right) \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{w} + m_n \right)} \end{array} \right]$$

- Coefficient de la région IV

$$F_{mlj} = \left(\frac{-2 \cdot R_1}{w \cdot \left(\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} + \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} \right)} \right) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\begin{array}{l} B_{7n} \cdot \frac{\cos(m_n \cdot \varphi_j) - (-1)^m \cdot \cos(m_n \cdot (\varphi_j + w_r))}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right) \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} + m_n \right)} \\ B_{8n} \cdot \frac{\sin(m_n \cdot \varphi_j) - (-1)^k \cdot \sin(m_n \cdot (\varphi_j + w_r))}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right) \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} + m_n \right)} \end{array} \right]$$

B.5 Modélisation analytique du champ créé par l'excitation bobinée

B.5.1 Exploitation des relations de passage entre les régions I et II

Puisque les conditions de passage sont inchangées, l'exploitation nous conduit aux mêmes résultats que précédemment.

B.5.2 Exploitation des relations de passage entre les régions III et IV

On va suivre la même démarche mentionnée dans le paragraphe (§ B.1) sauf que le terme de la densité de courant apparaît, on trouve après calcul :

▪ Calcul de B_{9n}

$$C_{9n} = \frac{1}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[E_{mli} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot H_1(R_1) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \right. \\ \left. \cdot \left((-1)^m \cdot \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p + \frac{w_r}{2} \right) \right) - \sin \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p - \frac{w_r}{2} \right) \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu_0}{n \cdot \pi} \cdot \left(\frac{R_0^2}{R_1} - R_1 \right) \cdot \sin \left(m_n \cdot \frac{w_r}{2} \right) \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} [J_{fi} \cdot \cos(m_n \cdot i \cdot \alpha_p)] \right] \quad (\text{B.34})$$

▪ Calcul de B_{10n}

$$C_{10n} = \frac{1}{N_{rp} \cdot \alpha_p} \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} \cdot \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left[E_{mli} \cdot \frac{m \cdot \pi}{w_r} \cdot H_1(R_1) \cdot \left(\frac{1}{\left(m_n + \frac{m \cdot \pi}{w_r} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{m \cdot \pi}{w_r} - m_n \right)} \right) \right. \\ \left. \cdot \left(\cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p - \frac{w_r}{2} \right) \right) - (-1)^m \cdot \cos \left(m_n \cdot \left(i \cdot \alpha_p + \frac{w_r}{2} \right) \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu_0}{n \cdot \pi} \cdot \left(\frac{R_0^2}{R_1} - R_1 \right) \cdot \sin \left(m_n \cdot \frac{w_r}{2} \right) \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} [J_{fi} \cdot \sin(m_n \cdot i \cdot \alpha_p)] \right] \quad (\text{B.35})$$

▪ Calcul de B_{11n}

$$C_{10n} = \sum_{k=1}^{+\infty} (g_1(n, k) + f_1(n, k)) \cdot C_{11k} + \frac{\mu_0}{n \cdot \pi} \cdot \left(\frac{R_0^2}{R_1} - R_1 \right) \cdot \sin \left(m_n \cdot \frac{w_r}{2} \right) \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} [J_{fi} \cdot \sin(m_n \cdot i \cdot \alpha_p)] \quad (\text{B.36})$$

▪ Calcul de B_{12n}

$$C_{9n} = \sum_{k=1}^{+\infty} (f_1(n, k) - g_1(n, k)) \cdot C_{12k} + \frac{\mu_0}{n \cdot \pi} \cdot \left(\frac{R_0^2}{R_1} - R_1 \right) \cdot \sin \left(m_n \cdot \frac{w_r}{2} \right) \cdot \sum_{i=1}^{N_{rp}} [J_{fi} \cdot \cos(m_n \cdot i \cdot \alpha_p)] \quad (\text{B.37})$$

B.6 Système d'équation dérivant de l'exploitation des conditions de passage

De la manière similaire que dans le paragraphe précédent (§ B.4), on arrive au système matricielle suivant où les matrices $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$, $[M_4]$, $[M_5]$, $[M_6]$, $[M_7]$, $[M_8]$, $[M_9]$, $[M_{10}]$, $[M_{11}]$, et $[M_{12}]$ sont définies récemment :

$$\begin{cases} [M_1] \cdot \{B_{4n1}\} + [M_2] \cdot \{C_{3n1}\} = [0] \\ [M_3] \cdot \{B_{2n1}\} + [M_4] \cdot \{B_{1n1}\} = [0] \\ [M_5] \cdot \{B_{1n1}\} + [M_6] \cdot \{B_{2n1}\} + [M_7] \cdot \{C_{3n1}\} + [M_8] \cdot \{B_{4n1}\} = [V_5] \\ [M_9] \cdot \{B_{1n1}\} + [M_{10}] \cdot \{B_{2n1}\} + [M_{11}] \cdot \{C_{3n1}\} + [M_{12}] \cdot \{B_{4n1}\} = [V_6] \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

On rappelle que :

$$\begin{cases} B_{1n1} = b_{1n} \cdot R_3^{m_n - 1} \\ B_{2n1} = b_{2n} \cdot R_3^{-m_n - 1} \\ B_{3n1} = b_{3n} \cdot R_3^{m_n - 1} \\ B_{4n1} = b_{4n} \cdot R_3^{-m_n - 1} \end{cases}$$

Avec :

$$[V_5] = \frac{\mu_0}{n \cdot \pi} \cdot \left(\frac{R_0^2}{R_1} - R_1 \right) \cdot \sin\left(m_n \cdot \frac{w_r}{2}\right) \cdot \sum_{i=1}^{Nrp} [J_{fi} \cdot \sin(m_n \cdot i \cdot \alpha_p)] \quad (\text{B.39})$$

$$[V_6] = \frac{\mu_0}{n \cdot \pi} \cdot \left(\frac{R_0^2}{R_1} - R_1 \right) \cdot \sin\left(m_n \cdot \frac{w_r}{2}\right) \cdot \sum_{i=1}^{Nrp} [J_{fi} \cdot \cos(m_n \cdot i \cdot \alpha_p)]$$

B.7 Calcul du couple de détente

Le couple de détente est donné par la relation suivante :

$$\Gamma_{cogging} = \frac{L_a R_2^2}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_r^{(\Pi)}(\varphi, R_2) B_\varphi^{(\Pi)}(\varphi, R_2) d\varphi \quad (\text{B.40})$$

On rappelle que la solution totale revient à sommer l'expression de la solution à vide (avec aimants) et la solution avec courant d'excitation (sans aimants), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[- \left((B_{1n} + b_{1n}) r^{m_n} + (B_{2n} + b_{2n}) r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) + \right. \\ \left. \left((B_{3n} + b_{3n}) r^{m_n} + (B_{4n} + b_{4n}) r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) \right] \\ B_\varphi^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[- \left((B_{1n} + b_{1n}) r^{m_n} - (B_{2n} + b_{2n}) r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) - \right. \\ \left. \left((B_{3n} + b_{3n}) r^{m_n} - (B_{4n} + b_{4n}) r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) \right] \end{array} \right. \quad (\text{B.41})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_r^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[- \left(D_{1n} r^{m_n} + D_{2n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) + \left(D_{3n} r^{m_n} + D_{4n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) \right] \\ B_\varphi^{(II)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{r} \left[- \left(D_{1n} r^{m_n} - D_{2n} r^{-m_n} \right) \cos(m_n \varphi) - \left(D_{3n} r^{m_n} - D_{4n} r^{-m_n} \right) \sin(m_n \varphi) \right] \end{array} \right.$$

$$\text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} D_{1n} = (B_{1n} + b_{1n}) \\ D_{2n} = (B_{2n} + b_{2n}) \\ D_{3n} = (B_{3n} + b_{3n}) \\ D_{4n} = (B_{4n} + b_{4n}) \end{array} \right.$$

On obtient dans ce cas :

$$B_r^{(II)}(\varphi, R_2) \cdot B_\varphi^{(II)}(\varphi, R_2) = \left(\begin{array}{l} - \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \left[\begin{array}{l} \left(D_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} - D_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ \left(D_{3n} \cdot R_2^{m_n-1} - D_{4n} \cdot R_2^{-m_n-1} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{array} \right] \\ \times \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \cdot \left[\begin{array}{l} \left(D_{3n} \cdot R_2^{m_n-1} + D_{4n} \cdot R_2^{-m_n-1} \right) \cdot \cos(m_n \cdot \varphi) \\ \left(D_{1n} \cdot R_2^{m_n-1} + D_{2n} \cdot R_2^{-m_n-1} \right) \cdot \sin(m_n \cdot \varphi) \end{array} \right] \end{array} \right)$$

En revenant à l'équation (B.40), on peut écrire que :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} B_r^{(II)}(\varphi, R_2) B_\varphi^{(II)}(\varphi, R_2) d\varphi \\ &= -\pi \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} m_n^2 \cdot \left[\begin{array}{l} \left(D_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} - D_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} \right) \cdot \left(D_{3n} \cdot R_1^{m_n-1} + D_{4n} \cdot R_1^{-m_n-1} \right) \\ \left(D_{3n} \cdot R_1^{m_n-1} - D_{4n} \cdot R_1^{-m_n-1} \right) \cdot \left(D_{1n} \cdot R_1^{m_n-1} + D_{2n} \cdot R_1^{-m_n-1} \right) \end{array} \right] \\ &= -2 \cdot \pi \cdot R_2^{-2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} m_n^2 \cdot [D_{1n} \cdot D_{4n} - D_{2n} \cdot D_{3n}] \end{aligned}$$

Donc :

$$\Gamma_{détente} = \frac{L_a 2\pi}{\mu_0} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} m_n^2 \cdot [D_{2n} \cdot D_{3n} - D_{1n} \cdot D_{4n}] \quad (\text{B.42})$$

B.8 Calcul du flux

La continuité du potentiel vecteur magnétique entre la région (I) et la région (II) conduit aux écritures suivantes pour $r = R_3$.

$$A_{z_i}^{(I)}(R_3, \varphi) = A_z^{(II)}(R_3, \varphi) \quad \text{pour} \quad \varphi_r \leq \varphi \leq \varphi_r + w_s \quad (\text{B.43})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{z_i}^{(I)}(\varphi, r) = c_0^{(I,i)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[E_{mi} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] \\ A_z^{(II)} = a_0^{(II)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(D_{1n} r^{m_n} - D_{2n} r^{-m_n}) \cos(m_n \varphi) + (D_{3n} r^{m_n} - D_{4n} r^{-m_n}) \sin(m_n \varphi) \right] \end{array} \right.$$

La détermination des constantes arbitraires $c_0^{(I,i)}$ de l'expression du potentiel vecteur dans la région I, se base sur l'hypothèse de la nullité de la constante de la région II ($a_0^{(II)} = 0$).

On peut écrire que :

$$c_0^{(I,i)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[E_{mi} \cdot \left(\left(\frac{R_3}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \left(\frac{R_3}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(D_{1n} R_3^{m_n} - D_{2n} R_3^{-m_n}) \cos(m_n \varphi) + (D_{3n} R_3^{m_n} - D_{4n} R_3^{-m_n}) \sin(m_n \varphi) \right] \quad (\text{B.44})$$

L'intégration de l'équation (B.44) sur w_s permet d'écrire :

$$c_0^{(I,i)} = \frac{1}{w_s} \int_{\varphi_r}^{\varphi_r + w} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(D_{1n} R_3^{m_n} - D_{2n} R_3^{-m_n}) \cos(m_n \varphi) + (D_{3n} R_3^{m_n} - D_{4n} R_3^{-m_n}) \sin(m_n \varphi) \right] d\varphi$$

Après développement, on aboutit à l'expression donnant les constantes du potentiel vecteur dans les encoches :

$$c_0^{(I,i)} = \frac{1}{w_s} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{m_n} \sin\left(m_n \frac{w}{2}\right) \times \left[\begin{aligned} & \left(D_{1n}^{(II)} R_3^{m_n} + D_{2n}^{(II)} R_3^{-m_n} \right) \cos\left(m_n \left(\varphi_i + \frac{w}{2}\right)\right) \\ & + \left(D_{3n}^{(II)} R_3^{m_n} + D_{4n}^{(II)} R_3^{-m_n} \right) \sin\left(m_n \left(\varphi_i + \frac{w}{2}\right)\right) \end{aligned} \right] \right] \quad (\text{B.45})$$

On revient maintenant au calcul de la relation (II.68) où on doit déterminer l'intégrale suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{w \cdot (R_4^2 - R_3^2)} \cdot \int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} A_{zi} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \\ &= \frac{2}{w \cdot (R_4^2 - R_3^2)} \cdot \left(\int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[E_{mi} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} - \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right] r \cdot d\varphi \cdot dr \right. \\ & \quad \left. + \int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} c_0^{(I,i)} r \cdot d\varphi \cdot dr \right) \end{aligned}$$

- On commence par évaluer la première intégrale :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{+\infty} \left[E_{mi} \cdot \int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w_s} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \right] \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left[E_{mi} \cdot \left(\int_{R_3}^{R_4} \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right) + 1} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right) + 1} \right) \cdot dr \right) \cdot \left(\int_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \cdot d\varphi \right) \right] \end{aligned}$$

On a à calculer l'expression suivante :

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \cdot d\varphi = \frac{w}{m \cdot \pi} \cdot \left[\sin\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \right]_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} = \frac{w}{m \cdot \pi} \cdot [\sin(m \cdot \pi) - \sin(0)] = 0$$

Donc :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[E_{mi} \cdot \int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + w} \left(\left(\frac{r}{R_4} \right)^{\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} + \left(\frac{r}{R_4} \right)^{-\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \right)} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{w} \cdot (\varphi - \varphi_i) \right) \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \right] = 0 \quad (\text{B.45.a})$$

- On évalue la deuxième intégrale :

$$\int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i+w} c_0^{(I,i)} r \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{w}{2} \cdot c_0^{(I,i)} \cdot r^2 \Big|_{R_3}^{R_4}$$

(B.45.b)

$$\Rightarrow \int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i+w} c_0^{(I,i)} r \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{w}{2} \cdot c_0^{(I,i)} \cdot (R_4^2 - R_3^2)$$

À partir de (B.45.a) et (B.45.b) on obtient :

$$\frac{2}{w \cdot (R_4^2 - R_3^2)} \cdot \int_{R_3}^{R_4} \int_{\varphi_i}^{\varphi_i+w} A_{zi} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = c_0^{(I,i)}$$

Donc, l'expression finale du flux est donnée par :

$$\phi_l^c = N_l L_a \left(c_0^{(I,i_1)} - c_0^{(I,i_2)} \right)$$

(B.46)

ANNEXE C

Compléments sur l'exploitation des conditions aux limites et calculs des coefficients

Machine à commutation de flux

C.1 Exploitation des relations de passage entre les régions 1 et 2

Les relations de passage à la frontière de la région entrefer 1 et de la région des aimants permanents 2, sont données par :

$$\begin{cases} B_x^{(1)}(x_S, 0) = B_x^{(2,l)}(x_S, 0) + (-1)^l B_R \\ B_y^{(1)}(x_S, 0) = B_y^{(2,l)}(x_S, 0) \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases}$$

$$\text{et :} \quad B_x^{(1)}(x_S, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1}$$

On reprend les expressions des composantes de l'induction dans les régions 1 et 2, et on exploite les conditions de passage.

C.1.1 Exploitation de la condition de passage sur la composante tangentielle de l'induction

La condition de passage sur la composante tangentielle de l'induction se traduit par la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[D_n^{(1)} \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(1)} \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right] = \begin{cases} D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} D_m^{(2,l)} \cos\left(\frac{m\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \\ \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases} \\ 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1} \end{cases}$$

Le calcul intégral des coefficients de Fourier appliqué aux coefficients de la région 1 est donné par :

$$D_k^{(1)} = \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al} + L_{per}} B_x^{(1)}(x, 0) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx$$

$$D_k^{(1)} = \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \int_{x_{al}}^{x_{al} + w_a} \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + D_m^{(2,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al} + w_a} \cos\left(\frac{m\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \right]$$

Et

$$F_k^{(1)} = \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_x^{(1)}(x,0) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx$$

$$F_k^{(1)} = \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + D_m^{(2,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \cos\left(\frac{m\pi}{w_a}(x-x_{al})\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \right]$$

Tout calcul fait, on aboutit aux relations suivantes :

$$D_k^{(1)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Pi_{mk}$$

$$+ \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right]$$

(C.1)

$$F_k^{(1)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Lambda_{mk}$$

$$- \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right]$$

(C.2)

Avec :

$$\Pi_{mk} = \sum_{l=0}^{N_m-1} D_m^{(2,l)} \left[(-1)^m \sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right]$$

$$\Lambda_{mk} = \sum_{l=0}^{N_m-1} D_m^{(2,l)} \left[-(-1)^m \cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) + \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right]$$

C.1.2 Exploitation de la condition de passage sur la composante normale de l'induction

La condition de passage imposée sur la composante normale de l'induction se traduit par les relations suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[D_n^{(1)} \cdot \frac{\sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - F_n^{(1)} \cdot \frac{\cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \right] =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m \neq 0}^{+\infty} C_m^{(2,l)} \sin\left(\frac{m\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \text{ pour } \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[D_n^{(1)} \cdot \frac{\sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - F_n^{(1)} \cdot \frac{\cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \right] \\ \text{pour } x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1} \end{array} \right.$$

De même que précédemment, l'exploitation de cette condition de passage par le calcul des coefficients de Fourier de l'induction dans la région 2, se traduit par :

$$\frac{D_k^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} = \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_x^{(1)}(x,0) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx$$

$$\frac{D_k^{(1)}}{\tanh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} = \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[C_m^{(2,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \sin\left(\frac{m\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + \int_{x_{al}+w_a}^{x_{al+1}} \left(D_n^{(1)} \cdot \frac{\sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - F_n^{(1)} \cdot \frac{\cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \right) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \right]$$

Et

$$\frac{-F_k^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} = \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_x^{(1)}(x,0) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx$$

$$\frac{-F_k^{(1)}}{\tanh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} = \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[C_m^{(2,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \sin\left(\frac{m\pi}{w_a}(x - x_{al})\right) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + \int_{x_{al}+w_a}^{x_{al+1}} \left(D_n^{(1)} \cdot \frac{\sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - F_n^{(1)} \cdot \frac{\cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \right) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \right]$$

Après calcul on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{D_k^{(1)}}{\tanh\left(n\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} &= \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m} C_m^{(3,l)} \left(\frac{1}{m\pi + 2k\frac{\pi w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - 2k\frac{\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
&\times \left(-(-1)^m \sin\left(k\left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l\frac{2\pi}{N_m}\right)\right) + \sin\left(k\left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l\frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) + \frac{D_k^{(1)}}{\tanh\left(n\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} \left(1 - \frac{N_m w_{es}}{L_{per}} + \frac{N_m}{\pi} \frac{\sin\left(2k\frac{\pi w_{es}}{L_{per}}\right)}{2k} \right)_{2k=qN_m} \\
&+ \frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} \left(\frac{\sin\left((n+k)\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n+k} \right) - \frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} \left(\frac{\sin\left((n-k)\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n-k} \right)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{-F_k^{(1)}}{\tanh\left(k\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} &= \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m} C_m^{(3,l)} \left(\frac{1}{m\pi + k\frac{2\pi w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k\frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
&\times \left(-(-1)^m \cos\left(k\left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l\frac{2\pi}{N_m}\right)\right) + \cos\left(k\left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l\frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) + \frac{F_k^{(1)}}{\tanh\left(k\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} \left(-1 + \frac{N_m w_a}{L_{per}} + \frac{N_m}{\pi} \frac{\sin\left(2k\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{2k} \right)_{2k=qN_m} \\
&+ \frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} \left(\frac{\sin\left((n+k)\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n+k} \right) + \frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n\frac{2\pi}{L_{per}}e\right)} \left(\frac{\sin\left((n-k)\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n-k} \right)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Sachant que :

$$\lim_{n \rightarrow k} \frac{\sin\left[(n+k)\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right]}{(n+k)} = \frac{\sin\left(2k\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{2k} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow k} \frac{\sin\left[(n-k)\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right]}{(n-k)} = \frac{\pi w_a}{L_{per}}$$

Les équations (C.3) et (C.4) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + 2k \frac{\pi w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - 2k \frac{\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Gamma_{mk} &= -\frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{\sin\left((n+k) \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n+k} \right) \\
&+ \frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{\sin\left((n-k) \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n-k} \right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Delta_{mk} &= -\frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{\sin\left((n+k) \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n+k} \right) \\
&- \frac{N_m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{\sin\left((n-k) \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n-k} \right)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{mk} &= \sum_{l=0}^{N_m} C_m^{(2,l)} \left(-(-1)^m \sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) + \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\
\Delta_{mk} &= \sum_{l=0}^{N_m} C_m^{(2,l)} \left(-(-1)^m \cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) + \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)
\end{aligned}$$

À ce niveau, on exploite la mise sous forme de sommation des sinus cardinaux, établie dans des travaux précédents, afin de transformer les termes en sinus en une somme pour pouvoir faire des simplifications pour le reste du calcul [55], [57], [58]:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\left[(n+k) \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right]}{n+k} &= \frac{\pi w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
&\left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\sin\left[(n-k)\frac{\pi w_a}{L_{per}}\right]}{n-k} = \frac{\pi w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)$$

L'introduction des expressions des sinus cardinaux dans les écritures (C.5) et (C.6) conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} \Gamma_{mk} = & -N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ & \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\ & + N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \frac{D_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ & \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned} \quad (C.7)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_{mk} = & -N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ & \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\ & - N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{F_n^{(1)}}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ & \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned} \quad (C.8)$$

C.2 Exploitation des relations de passage entre les régions 2 et 3

Les conditions de passage entre la région « des aimants » et la région « air extérieur » conduisent à écrire:

$$\begin{cases} B_x^{(3)}(x_S, h_a) = B_x^{(2,l)}(x_S, h_a) + (-1)^l B_R \\ B_y^{(3)}(x_S, h_a) = B_y^{(2,l)}(x_S, h_a) \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases}$$

et :

$$B_x^{(3)}(x_S, h_a) = 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1}$$

De façon analogue (§ C.1), on reprend les expressions des composantes de l'induction dans les régions 2 et 3, et on exploite les conditions de passage.

C.2.1 Exploitation de la condition de passage sur la composante tangentielle de l'induction

La condition de passage sur la composante tangentielle de l'induction est donnée par :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \left(E_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) = \\ \left\{ \begin{array}{l} D_0^{(2,l)} + \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + D_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases} \\ 0 \quad \text{pour} \quad x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1} \end{array} \right. \end{cases}$$

Le calcul des coefficients de la série de Fourier de l'expression de $B_x^{(3)}(x_S, h_a)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(3)} &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al} + L_{per}} B_x^{(3)}(x, 0) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al} + L_{per}} \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + \\ \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al} + w_a} \left(C_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + D_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(3)} &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_x^{(3)}(x, h_a) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\ &= \begin{cases} \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + \\ \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \left(C_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + D_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \end{cases} \end{aligned}$$

Après développement et intégration, on trouve les deux relations suivantes:

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(3)} &= \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ &\quad + \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(-\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Gamma_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Pi_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(3)} &= \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(2,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ &\quad - \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Delta_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Lambda_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

C.2.2 Exploitation de la condition de passage sur la composante normale de l'induction

De même que pour la composante tangentielle, les conditions de passage sur la composante normale en $y = h_a$ s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \left(-E_k^{(3)} \sin\left(\frac{2k\pi}{L_{per}} x\right) + F_k^{(3)} \cos\left(\frac{2k\pi}{L_{per}} x\right) \right) &= \\ = \begin{cases} \sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + D_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) & \text{pour } x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \left(-E_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) & \text{pour } x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Le calcul intégral des coefficients de Fourier $E_k^{(3)}$ et $F_k^{(3)}$ de l'expression de l'induction normale dans la région 3 se traduit par :

$$\begin{aligned}
-\exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(3)} &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_x^{(3)}(x,0) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&= \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \left[\sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + D_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \right] \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&\quad + \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}+w_a}^{x_{al}+1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \left(-E_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) \right] \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(3)} &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_x^{(3)}(x,0) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&= \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \left[\sum_{m \neq 0}^{+\infty} \left(C_m^{(2,l)} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + D_m^{(2,l)} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al})\right) \right] \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&\quad + \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_m-1} \int_{x_{al}+w_a}^{x_{al}+1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \left(-E_n^{(3)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) + F_n^{(3)} \cos\left(\frac{2n\pi}{L_{per}} x\right) \right) \right] \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx
\end{aligned}$$

En tenant compte de la mise sous forme de sommation des sinus cardinaux et des relations trigonométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{l=0}^{q-1} \sin\left[(n \pm k) \left(\frac{2\pi(l+1)}{q} + \beta \right) \right] &= q \sin[(n \pm k)\beta] \\ \sum_{l=0}^{q-1} \cos\left[(n \pm k) \left(\frac{2\pi(l+1)}{q} + \beta \right) \right] &= q \cos[(n \pm k)\beta] \end{aligned} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow k} \frac{\sin\left[(n+k) \frac{\pi w_a}{L_{per}} \right]}{(n+k)} = \frac{\sin\left(2k \frac{\pi w_a}{L_{per}} \right)}{2k} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow k} \frac{\sin\left[(n-k) \frac{\pi w_a}{L_{per}} \right]}{(n-k)} = \frac{\pi w_a}{L_{per}}$$

le développement des intégrales précédentes dans les expressions de $E_k^{(3)}$ et $F_k^{(3)}$ conduit aux nouvelles expressions suivantes pour ces deux coefficients :

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) - \Pi_{mk} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \\
&= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
&\quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\
&\quad - N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
&\quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)
\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + \Lambda_m \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \\
&= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
&\quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\
&\quad + N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\
&\quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

C.3 Mise en équation sous la forme d'un système d'algèbre linéaire

Pour aboutir à un système d'algèbre linéaire qu'on peut résoudre par la méthode directe de Gauss, on suit les étapes suivantes. On commence par tirer les expressions de Π_{mk} et Λ_m à partir des équations (C.11) et (C.12) et en injectant adéquatement les équations obtenues dans (C.9) et (C.10), on obtient après réarrangement les relations suivantes :

:

$$\begin{aligned}
\exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(3)} &= \frac{1}{k\pi} ext1 + \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \\
&+ \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \left(\coth^2\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) - 1 \right) \Gamma_{mk} \\
&- \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \alpha_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \beta_{nk}(n-k)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
\exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(3)} &= \frac{1}{k\pi} ext2 - \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \\
&+ \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \left(\coth^2\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) - 1 \right) \Delta_{mk} \\
&- \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \alpha_{nk}(n+k) - \frac{N_m w_a}{L_{per}} \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \beta_{nk}(n-k)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
ext1 &= \sum_{l=0}^{N_m-1} (-1)^l B_R \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \\
ext2 &= - \sum_{l=0}^{N_m-1} (-1)^l B_R \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \\
\alpha_{nk}(n+k) &= \frac{N_m w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \coth\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)
\end{aligned}$$

$$\beta_{nk}(n-k) = \frac{N_m w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \coth\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \\ \times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[\left(n-k\right)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[\left(n+k\right)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right)$$

Maintenant, en remplaçant Γ_{mk} et Δ_{mk} par leurs expressions (équations (C.7) et (C.8)), les équations qu'on a obtenu récemment ((C.13) et (C.14)) se mettent sous la forme suivante :

$$\exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(3)} = \frac{1}{k\pi} \text{ext}1 + \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \alpha_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \beta_{nk}(n-k) \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\gamma_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\eta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \quad (\text{C.15})$$

$$\exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(3)} = \frac{1}{k\pi} \text{ext}2 - \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \alpha_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \beta_{nk}(n-k) \\ - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\gamma_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\eta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \quad (\text{C.16})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \gamma_{nk}(n+k) &= \frac{N_m w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right)} \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\ \eta_{nk}(n-k) &= \frac{N_m w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right)} \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned}$$

On va refaire le même travail par rapport aux équations (C.1) et (C.2), on trouve que :

$$\begin{aligned} D_k^{(1)} &= \frac{1}{k\pi} ext1 + \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \left[\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right] \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\alpha_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\beta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \\ &- \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \times \gamma_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \eta_{nk}(n-k) \end{aligned} \quad (C.17)$$

et

$$\begin{aligned} F_k^{(1)} &= \frac{1}{k\pi} ext2 - \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} D_0^{(2,l)} \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right] \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\alpha_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\beta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \gamma_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \eta_{nk}(n-k) \end{aligned} \quad (C.18)$$

En remplaçant $D_0^{(2,l)}$ par son expression (III.34), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(3)} = \frac{1}{k\pi} \text{ext1} - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\gamma_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\eta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \alpha_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \beta_{nk}(n-k) \\
& - \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \times \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \left(E_n^{(3)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(3)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \\ & + \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(D_n^{(1)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(1)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \end{aligned} \right. \quad \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(3)} = \frac{1}{k\pi} \text{ext2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\gamma_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\eta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \\
& - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \alpha_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \beta_{nk}(n-k) \\
& + \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \times \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \left(E_n^{(3)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(3)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \\ & + \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(D_n^{(1)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(1)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \end{aligned} \right. \quad \text{(C.20)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_k^{(1)} = & \frac{1}{k\pi} \text{ext1} - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\alpha_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} D_n^{(1)} \frac{\beta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \\
- & \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \times \delta_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(3)} \lambda_{nk}(n-k) \\
- & \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right] \times \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \left(E_n^{(3)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(3)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \\ & + \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(D_n^{(1)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(1)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.21})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_k^{(1)} = & \frac{1}{k\pi} \text{ext2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\alpha_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} F_n^{(1)} \frac{\beta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \\
+ & \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \delta_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(3)} \lambda_{nk}(n-k) \\
+ & \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right] \times \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \left(E_n^{(3)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(3)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \\ & + \frac{1}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} \left(D_n^{(1)} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) + F_n^{(1)} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.22})
\end{aligned}$$

Ces quatre dernières équations, peuvent se mettre sous la forme matricielle simplifiée suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} [M_{1D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{1F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{1E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{1F3}] \{F^{(3)}\} &= [Ext1] \quad (a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} [M_{2D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{2F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{2E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{2F3}] \{F^{(3)}\} &= [Ext2] \quad (b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} [M_{3D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{3F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{3E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{3F3}] \{F^{(3)}\} &= [Ext1] \quad (c) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} [M_{4D1}] \{D^{(1)}\} + [M_{4F1}] \{F^{(1)}\} + [M_{4E3}] \{E^{(3)}\} + [M_{4F3}] \{F^{(3)}\} &= [Ext2] \quad (d) \end{aligned} \right.$$

Avec :

$$[M_{1D1}] = \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\gamma_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\eta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \frac{\cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{1F1}] = \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \frac{\sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{1E3}] = \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \alpha_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \beta_{nk}(n-k) \\ + \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

$$[M_{1F3}] = \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

$$[Ext1] = \frac{1}{k\pi} ext1$$

$$[M_{2D1}] = -\frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \frac{\cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{2F1}] = \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\gamma_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\eta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \frac{\sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{2E3}] = -\frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

$$[M_{2F3}] = \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \alpha_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \beta_{nk}(n-k) \\ - \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

$$[Ext2] = \frac{1}{k\pi} ext2$$

$$[M_{3D1}] = diagonal(k, k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\alpha_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\beta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$+ \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right] \frac{\cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{3F1}] = \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2}$$

$$\times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right] \frac{\sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{3E3}] = - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \delta_{nk}(n+k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \lambda_{nk}(n-k)$$

$$+ \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2}$$

$$\times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right] \times \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

$$[M_{4D1}] = - \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2}$$

$$\times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right] \times \frac{\cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{4F1}] = \text{diagonal}(k, k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\alpha_{nk}(n+k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)} - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \frac{\beta_{nk}(n-k)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$\frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right] \times \frac{\sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)}{\tanh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right)}$$

$$[M_{4E1}] = -\frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2}$$

$$\times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right] \times \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

$$[M_{4F3}] = -\sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \delta_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot \lambda_{nk}(n-k)$$

$$-\frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2}$$

$$\times \sum_{l=0}^{N_m-1} \left[\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right] \times \exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

C.4 Étude du 2^{ème} modèle (prise en compte des évidements rotoriques)

C.4.1 Exploitation des relations de passage entre les régions 1 et 2

En reprenant les expressions des composantes de l'induction dans les régions 1 et 2, les conditions de passage se mettent sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(-C_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + D_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S\right) \right. \\ \left. + \left(-E_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + F_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S\right) \right] \\ = \sum_{m \neq 0}^{+\infty} K_m^{(1,l)} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_{er}} (x_S - \delta - x_{dl})\right) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(C_n^{(2)} \cosh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) - D_n^{(2)} \sinh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) \right) \cdot \sin \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S \right) \right. \\ & \left. - \left(E_n^{(2)} \cosh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) - F_n^{(2)} \sinh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) \right) \cdot \cos \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S \right) \right] \\ & = \sum_{m \neq 0}^{+\infty} K_m^{(1,l)} \sin \left(\frac{m\pi}{w_{er}} (x_S - \delta - x_{dl}) \right) \end{aligned} \right\}$$

pour $x_{dl} \leq x_S - \delta \leq x_{dl} + w_{er}$, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(-C_n^{(2)} \sinh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) + D_n^{(2)} \cosh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) \right) \cdot \cos \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S \right) \right. \\ \left. + \left(-E_n^{(2)} \sinh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) + F_n^{(2)} \cosh \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) \right) \cdot \sin \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x_S \right) \right] = 0$$

pour $x_{dl} + w_{er} \leq x_S - \delta \leq x_{dl+1}$.

C.4.1.1 Exploitation de la condition de passage sur la composante tangentielle de l'induction

Le calcul intégral des coefficients de Fourier de l'expression de l'induction tangentielle dans la région 2 se traduit par :

$$\begin{aligned} -C_k^{(2)} \sinh \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) + D_k^{(2)} \cosh \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{dl}}^{x_{dl} + L_{per}} B_x^{(2)}(x, -e) \cos \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx \\ &= \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_d-1} \left\{ \int_{x_{dl}}^{x_{dl} + w_{er}} B_x^{(2)}(x, -e) \cos \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx + \int_{x_{dl} + w_{er}}^{x_{dl+1}} B_x^{(2)}(x, -e) \cos \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx \right\} \\ -E_k^{(2)} \sinh \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) + F_k^{(2)} \cosh \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e \right) &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{dl}}^{x_{dl} + L_{per}} B_x^{(2)}(x, -e) \sin \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx \\ &= \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_d-1} \left\{ \int_{x_{dl}}^{x_{dl} + w_{er}} B_x^{(2)}(x, -e) \sin \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx + \int_{x_{dl} + w_{er}}^{x_{dl+1}} B_x^{(2)}(x, -e) \sin \left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) dx \right\} \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions de passage et après tout calcul fait, on aboutit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
& -C_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + D_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) = \\
& \frac{w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_d-1} K_m^{(1,l)} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \left\{ \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \right. \\
& \quad \times \left[(-1)^m \sin\left(k \left(\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right] \\
& - \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \\
& \quad \times \left[(-1)^m \cos\left(k \left(\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right] \left. \right\} \tag{C.23}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -E_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + F_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) = \\
& \frac{w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_d-1} K_m^{(1,l)} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \left\{ \left(\frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \cos\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \right. \\
& \quad \times \left[(-1)^m \cos\left(k \left(\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right] \\
& - \left(\frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \\
& \quad \times \left[(-1)^m \sin\left(k \left(\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\pi \frac{w_{er}}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_d} \right)\right) \right] \left. \right\} \tag{C.24}
\end{aligned}$$

C.4.1.2 Exploitation de la condition de passage sur la composante normale de l'induction

L'exploitation de la condition de passage par le calcul des coefficients de Fourier de l'induction dans la région 2, se traduit par :

$$\begin{aligned}
E_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - F_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) &= -\frac{2}{L_{per}} \int_{x_{dl}}^{x_{dl}+L_{per}} B_y^{(2)}(x, -e) \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&= -\frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_d-1} \left\{ \int_{x_{dl}}^{x_{dl}+w_{er}} B_y^{(2)}(x, -e) \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + \int_{x_{dl}+w_{er}}^{x_{dl+1}} B_y^{(2)}(x, -e) \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \right\} \\
C_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - D_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{dl}}^{x_{dl}+L_{per}} B_y^{(2)}(x, -e) \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&= \frac{2}{L_{per}} \sum_{l=0}^{N_d-1} \left\{ \int_{x_{dl}}^{x_{dl}+w_{er}} B_y^{(2)}(x, -e) \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx + \int_{x_{dl}+w_{er}}^{x_{dl+1}} B_y^{(2)}(x, -e) \cdot \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \right\}
\end{aligned}$$

En adoptant une démarche analogue à celle utiliser précédemment (§ C.2.2), et après tout calcul fait, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&-C_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + D_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) = \\
&\quad - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \left(E_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - F_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\chi_{nk}(n+k) + \varphi_{nk}(n-k)) \\
&\quad + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \left(C_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - D_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\theta_{nk}(n+k) - \omega_{nk}(n-k))
\end{aligned} \tag{C.25}$$

et

$$\begin{aligned}
&-E_k^{(2)} \sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + F_k^{(2)} \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) = \\
&\quad \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \left(E_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - F_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\lambda_{nk}(n+k) + \rho_{nk}(n-k)) \\
&\quad + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k=qN_d}} \left(C_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - D_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \right) \times (\sigma_{nk}(n+k) - \tau_{nk}(n-k))
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Où les fonctions χ_{nk} , φ_{nk} , θ_{nk} et ω_{nk} sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \chi_{nk}(n+k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \times \\ &\times \left(\left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) + \frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\ &\times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{nk}(n-k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \times \\ &\times \left(\left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) + \frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\ &\times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{nk}(n+k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \times \\ &\times \left(\left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) - \frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan^2\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\ &\times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(n+k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \times \\ &\times \left(\left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) - \frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan^2\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\ &\times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{nk}(n+k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \times \\ &\times \left(\left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) + \frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan^2\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\ &\times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{nk}(n-k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \times \\ &\times \left(\left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) + \frac{2kw_{er}}{mL_{per}} \tan^2\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \left(\frac{1}{m\pi + k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\ &\times \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{nk}(n+k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2k w_{er}}{m L_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \times \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \times \\
&\times \left(\frac{2k w_{er}}{m L_{per}} \left(\frac{1}{m\pi + k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) - \left(\frac{1}{m\pi + k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\
&\times \left(\frac{1}{m\pi - n 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right) \\
\tau_{nk}(n-k) &= \frac{N_d w_{er}}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \tanh\left(\frac{m\pi}{w_{er}} h_{dr}\right) \times \left(1 + \left(\frac{2k w_{er}}{m L_{per}} \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right)\right)^2\right)^{-1} \times \tan\left(\frac{m\pi}{w_{er}} \delta\right) \times \\
&\times \left(\frac{2k w_{er}}{m L_{per}} \left(\frac{1}{m\pi + k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) - \left(\frac{1}{m\pi + k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \right) \\
&\times \left(\frac{1}{m\pi - n 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n 2\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}} \right) \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_{er}}{L_{per}}\right] \right)
\end{aligned}$$

Les relations (C.25) et (C.26) peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} [M_{C1}] \{C^{(2)}\} + [M_{D1}] \{D^{(2)}\} = [M_{E1}] \{E^{(2)}\} + [M_{F1}] \{F^{(2)}\} \\ [M_{C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{D2}] \{D^{(2)}\} = [M_{E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{F2}] \{F^{(2)}\} \end{cases}$$

C.4.2 Exploitation des relations de passage entre les régions 2 et 3

C.4.2.1 Exploitation de la condition de passage sur la composante tangentielle de l'induction

En reprenant les expressions des composantes de l'induction dans les régions 2 et 3, l'exploitation de la condition de passage sur la composante tangentielle de l'induction nous permet d'aboutir à la même expression mentionnée lors de la première approximation. Donc la relation (C.1) et (C.2) sont retenus :

$$D_k^{(2)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Pi_{mk} \quad (\text{C.27})$$

$$+ \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\sin \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right]$$

$$F_k^{(2)} = \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \Lambda_{mk}$$

$$- \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left[\cos \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \cos \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right] \quad (\text{C.28})$$

Avec :

$$\Pi_{mk} = \sum_{l=0}^{N_m-1} D_m^{(3,l)} \left[(-1)^m \sin \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) - \sin \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right]$$

$$\Lambda_{mk} = \sum_{l=0}^{N_m-1} D_m^{(3,l)} \left[-(-1)^m \cos \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) + \cos \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right]$$

C.4.2.2 Exploitation de la condition de passage sur la composante normale de l'induction

En reprenant les expressions des composantes de l'induction dans les régions 2 et 3, la condition de passage imposée sur la composante normale de l'induction se traduit par les relations suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -E_n^{(2)} \cos \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) + C_n^{(2)} \sin \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x \right)$$

$$= \begin{cases} \sum_{m \neq 0}^{+\infty} C_m^{(3,l)} \sin \left(\frac{m\pi}{w_a} (x - x_{al}) \right) \text{ pour } \begin{cases} x_{al} \leq x_S \leq x_{al} + w_a \\ l = 0..N_m - 1 \end{cases} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} -E_n^{(2)} \cos \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) + C_n^{(2)} \sin \left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x \right) \text{ pour } x_{al} + w_a \leq x_S \leq x_{al+1} \end{cases}$$

Le calcul intégral des coefficients de Fourier de l'expression de l'induction normale dans la région 2 se traduit par :

$$\begin{aligned}
-E_k^{(2)} &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_y^{(2)}(x,0) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&= \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m} C_m^{(3,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \sin\left(\frac{m\pi}{w_a}(x-x_{al})\right) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&\quad + \frac{2}{L_{per}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m} \int_{x_{al}+w_a}^{x_{al}+1} \left(-E_n^{(2)} \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + C_n^{(2)} \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right) \cos\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_k^{(2)} &= \frac{2}{L_{per}} \int_{x_{al}}^{x_{al}+L_{per}} B_y^{(2)}(x,0) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&= \frac{2}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m} C_m^{(3,l)} \int_{x_{al}}^{x_{al}+w_a} \sin\left(\frac{m\pi}{w_a}(x-x_{al})\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx \\
&\quad + \frac{2}{L_{per}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N_m} \int_{x_{al}+w_a}^{x_{al}+1} \left(-E_n^{(2)} \cos\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) + C_n^{(2)} \sin\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) \right) \sin\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} x\right) dx
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{q-1} \sin\left[(n \pm k) \left(\frac{2\pi(l+1)}{q} + \beta\right)\right] = q \sin[(n \pm k)\beta] \\ \sum_{l=0}^{q-1} \cos\left[(n \pm k) \left(\frac{2\pi(l+1)}{q} + \beta\right)\right] = q \cos[(n \pm k)\beta] \end{cases}$$

De façon similaire que dans le paragraphe (§ C.2.2), le développement des intégrales précédentes dans les expressions de $E_k^{(2)}$ et $C_k^{(2)}$ conduit aux nouvelles expressions suivantes pour ces deux coefficients :

$$\begin{aligned}
-\Delta_{mk} = & \left\{ \begin{aligned} & N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} E_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ & \quad \times \left(\cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \\ & + \\ & N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} E_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ & \quad \times \left(\cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{C.29})
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{mk} = & \left\{ \begin{aligned} & N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} C_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ & \quad \times \left(\cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \\ & - \\ & N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} C_n^{(2)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ & \quad \times \left(\cos \left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos \left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{C.30})
\end{aligned}$$

Avec :

$$\Delta_{mk} = \sum_{l=0}^{N_m-1} C_m^{(3,l)} \left(-(-1)^m \cos \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) + \cos \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right)$$

$$\Gamma_{mk} = \sum_{l=0}^{N_m-1} C_m^{(3,l)} \left(-(-1)^m \sin \left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) + \sin \left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right) \right) \right)$$

C.4.3 Exploitation des relations de passage entre les régions 3 et 4

De façon analogue que dans le paragraphe (§ C.2), on aura :

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) E_k^{(4)} &= \frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ &+ \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} - \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(-\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Gamma_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Pi_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

$$\begin{aligned} \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(4)} &= -\frac{1}{k\pi} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(D_0^{(3,l)} + (-1)^l B_R \right) \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right) \\ &+ \frac{w_a}{L_{per}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m\pi + k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi - k \frac{2\pi w_a}{L_{per}}} \right) \times \left(\sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Delta_{mk} + \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \Lambda_{mk} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) - \Pi_{mk} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \\ &= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ &\quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \\ &- N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot E_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\ &\quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}}\right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

et

$$\begin{aligned}
& \Delta_{mk} \cosh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) + \Lambda_{mk} \sinh\left(\frac{m\pi}{w_a} h_a\right) \\
&= N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\
&\quad \times \left(\cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \\
&+ N_m \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \cdot F_n^{(4)} \left(\frac{1}{m\pi - n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} + \frac{1}{m\pi + n2\pi \frac{w_a}{L_{per}}} \right) \\
&\quad \times \left(\cos\left[(n-k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] - (-1)^m \cos\left[(n+k)\pi \frac{w_a}{L_{per}} \right] \right) \tag{C.34}
\end{aligned}$$

C.5 Synthèse des équations obtenues :

En substituant $D_0^{(2,l)}$ par son expression et après des manipulations mathématiques, et à partir des relations (III.41), (III.42), (III.43), (III.44), (III.45), (III.46), (III.47), (III.48), (III.49) et (III.50), on obtient le système d'algèbre linéaire qu'on peut mettre sous la forme matricielle simplifiée suivante :

$$\begin{cases}
[M_{1C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{1D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{1E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{1F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{1E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{1F4}] \{F^{(4)}\} = [0] & (a) \\
[M_{2C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{2D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{2E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{2F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{2E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{2F4}] \{F^{(4)}\} = [0] & (b) \\
[M_{3C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{3D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{3E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{3F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{3E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{3F4}] \{F^{(4)}\} = [Ext2] & (c) \\
[M_{4C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{4D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{4E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{4F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{4E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{4F4}] \{F^{(4)}\} = [Ext1] & (d) \\
[M_{5C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{5D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{5E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{5F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{5E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{5F4}] \{F^{(4)}\} = [Ext1] & (e) \\
[M_{6C2}] \{C^{(2)}\} + [M_{6D2}] \{D^{(2)}\} + [M_{6E2}] \{E^{(2)}\} + [M_{6F2}] \{F^{(2)}\} + [M_{6E4}] \{E^{(4)}\} + [M_{6F4}] \{F^{(4)}\} = [Ext2] & (f)
\end{cases}$$

Avec :

$$[M_{1C2}] = -\sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} C_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\theta_{nk}(n+k) - \omega_{nk}(n-k))$$

$$[M_{1D2}] = \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} D_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\theta_{nk}(n+k) - \omega_{nk}(n-k))$$

$$[M_{1E2}] = \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} E_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\chi_{nk}(n+k) + \varphi_{nk}(n-k))$$

$$[M_{1F2}] = - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} F_n^{(2)} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\chi_{nk}(n+k) + \varphi_{nk}(n-k))$$

$$[M_{1E4}] = 0$$

$$[M_{1F4}] = 0$$

$$[M_{2C2}] = - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k=qN_d}} C_n^{(2)} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\sigma_{nk}(n+k) - \tau_{nk}(n-k))$$

$$[M_{2D2}] = \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k=qN_d}} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\sigma_{nk}(n+k) - \tau_{nk}(n-k))$$

$$[M_{2E2}] = -\sinh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \cosh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\lambda_{nk}(n+k) + \rho_{nk}(n-k))$$

$$[M_{2F2}] = \cosh\left(k \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \pm k = qN_d}} \sinh\left(n \frac{2\pi}{L_{per}} e\right) \times (\lambda_{nk}(n+k) + \rho_{nk}(n-k))$$

$$[M_{2E4}] = 0$$

$$[M_{2F4}] = 0$$

$$[M_{3C2}] = \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \gamma_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \eta_{nk}(n-k)$$

$$+ \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{3D2}] = 0$$

$$[M_{3E2}] = \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{3F2}] = 0$$

$$[M_{3E4}] = \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \alpha_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \beta_{nk}(n-k) \\ + \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \times \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{3F4}] = \frac{L_{per}^2}{2k\pi^3 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \times \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{4C2}] = -\frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{4D2}] = 0$$

$$[M_{4E2}] = - \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \gamma_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \eta_{nk}(n-k) + \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{4F2}] = 0$$

$$[M_{4E4}] = - \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \times \\ \times \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{4F4}] = \exp\left(-k \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) F_k^{(4)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \alpha_{nk}(n+k) \\ + \frac{N_m w_a}{L_{per}} \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \beta_{nk}(n-k) - \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \\ \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \times \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{5C2}] = \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \alpha_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \beta_{nk}(n-k) \\ + \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m} \right)\right) \right)$$

$$[M_{5D2}] = \text{diagonal}(k, k)$$

$$[M_{5E2}] = \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right)$$

$$[M_{5F2}] = 0$$

$$[M_{5E4}] = \sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \gamma_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \eta_{nk}(n-k) \\ + \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right)$$

$$[M_{5F4}] = \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \times \sum_{l=0}^{N_m-1} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \times \left(\sin\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \sin\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right)$$

$$[M_{6C2}] = -\frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \cdot C_n^{(2)}$$

$$[M_{6D2}] = 0$$

$$[M_{6E2}] = -\sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \alpha_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \beta_{nk}(n-k) \\ - \frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right) \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right)$$

$$[M_{6F2}] = \text{diagonal}(k, k)$$

$$[M_{6E4}] = -\frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \cos\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \times$$

$$\times \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right)$$

$$[M_{6F4}] = -\sum_{\substack{n=1 \\ n+k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \gamma_{nk}(n+k) - \sum_{\substack{n=1 \\ n-k=qN_m}}^{+\infty} \exp\left(-n \frac{2\pi}{L_{per}} h_a\right) \eta_{nk}(n-k)$$

$$-\frac{L_{per}^2}{2\pi^2 h_a w_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{2n\pi}{L_{per}} h_a\right) \sin\left(n \frac{\pi w_a}{L_{per}}\right)}{n^2} \sum_{l=0}^{N_m-1} \sin\left(nl \frac{2\pi}{N_m}\right) \times$$

$$\times \left(\cos\left(k \left(\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) - \cos\left(k \left(-\frac{\pi w_a}{L_{per}} + l \frac{2\pi}{N_m}\right)\right) \right)$$