

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique  
Département d'électronique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

## Mémoire de Magister

Spécialité : Energies Renouvelables  
Option : Photo- thermique

### Thème

# Contribution à l'Analyse des Effets d'Interaction Fluide- Structure à Surfaces Ailettées. Application aux moteurs à combustion interne

Présenté par :  
**SELMI FAROUK**  
Ingénieur en Génie Mécanique

*Devant le Jury composé de Messieurs:*

*Chérif LARBES*

*Professeur, ENP*

*Président*

*Salah LARBI*

*Professeur, ENP*

*Rapporteur*

*Mayouf BELHAMEL*

*Directeur de Recherche, CDER*

*Examineur*

*Wahiba GUERRI*

*Directrice de Recherche, CDER*

*Examinatrice*

May 2012

# ***Remerciements***

*Pour commencer, je tiens à remercier Allah pour m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour mener à bien ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à mon directeur de mémoire, Monsieur LARBI Salah, Professeur à l'ENP, de m'avoir proposé ce sujet et de l'aide précieuse qu'i m'a apporté tout au long de la réalisation de ce travail.*

*J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Chérif LARBES, Professeur à l'ENP, d'avoir accepté de juger ce travail et de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.*

*Mes profonds remerciements s'adressent aussi aux membres de jury d'avoir accepté d'examiner mon travail.*

*Je remercie mes parents de m'avoir donné la vie, de m'avoir élevé, instruit, et, pour tous leurs sacrifices, ... Les mots s'épuisent sans doute, mais vous comprendrez que tout un univers de paroles ne suffit pour vous dire MERCI !!!*

## ملخص

العمل المقدم في هذه الدراسة عبارة عن تحليل انتقال الحرارة في محرك الاحتراق الداخلي.

وقد تم تطوير برنامج محاكاة ثنائي الأبعاد في الإحداثيات الديكارتية والقطبية، اعتمادا على طريقة الأحجام المتناهية باستعمال لغة البرمجة جافا. وفي الأخير قمنا بمقارنة النتائج المحصل عليها بالبرنامج وبطرق رياضية أخرى للتأكد من صحة البرنامج ثم قمنا باستعمال البرنامج لمحاكات انتقال الحرارة في محرك الاحتراق الداخلي

## كلمات مفتاحية

GUI، JAVA، التوصيل الحراري، محاكاة عددية، حجم محدود

## Résumé :

*Le travail présenté dans ce mémoire est relatif à l'analyse des transferts thermiques conductifs ayant lieu dans un moteur à combustion interne. Un logiciel de simulation de la conduction bidimensionnelle stationnaire et instationnaire en coordonnées cartésiennes et polaires, en se basant sur la méthode des volumes finis a été développé. Une interface interactive (GUI) est conçue où le logiciel de développement prévu est JAVA. Une base de données des différents matériaux fréquemment rencontrés dans la pratique est intégrée. Les exemples traités pour différentes configurations et la comparaison avec des résultats analytiques issus de la littérature confirment la validation du logiciel ainsi développé.*

**Mots clés :** Simulation numérique ; Conduction ; Volumes finis ; GUI ; JAVA.

## Abstract:

*The aim of this work is related to conductive heat transfer analysis in internal combustion engine. Numerical software, in two- dimensions of space, in steady and unsteady states and in Cartesian and polar coordinates, is then developed. It is based on the finite volume method where the graphical user interface (GUI) is developed and JAVA is used as a programming tool. Data base for different materials frequently encountered in practice has been integrated in this software. The software is validated using different configurations and by comparison with exact solutions in the literature.*

**Keywords:** Numerical simulation, conductive heat transfer, finite volume method, GUI, JAVA.

# Nomenclature

Symbole	Signification	Unité
$\lambda$	Conductivité thermique	W/m.K
$T$	Température	K
$q$	Densité de flux de chaleur	W/m <sup>2</sup>
$\rho$	Masse volumique	$\frac{kg}{m^3}$
$C$	Capacité calorifique	J/kg.K
$\dot{E}$	Puissance	W
$h$	Coefficient de transfert convectif	W/m <sup>2</sup> .K
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann	W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-4</sup>
$\epsilon$	Emissivité	-
$t$	Temps	s
$A$	Surface	m <sup>2</sup>
$Nu$	Nombre de Nusselt	-
$Re$	Nombre de Reynolds	-

# Sommaire

---

## Introduction générale

.....1

## Chapitre I Revue bibliographique

1. Introduction ..... 3

2. Méthode des volumes finis ..... 3

3. Méthodes Analytiques pour la conduction ..... 4

4. Méthodes numériques pour la conduction ..... 6

5. Conclusion.....11

## Chapitre II Méthode des volumes finis

1. Introduction.....12

2. Description mathématique des phénomènes physiques .....12

2.1. Définition d'une (EDP).....12

2.2. Conditions aux limites et valeurs initiales .....12

2.3. Problème bien posé .....13

2.4. Solutions des équations différentielles aux dérivées partielles  
.....13

2.4.1. Méthodes analytiques.....13

2.4.1. Méthodes numériques .....13

3. Conduction thermique .....14

3.1. Introduction.....14

3.2. La conductivité .....14

3.3. Loi de Fourier.....15

3.4. Equation générale de la conduction .....15

3.5. Problème de conduction bien posé .....16

3.6. Conduction nonlinéaire .....17

# Sommaire

---

3.6.1. Equation différentielle nonlinéaire .....	17
3.6.2. Conditions aux limites nonlinéaires.....	17
<b>3.7. Conclusion .....</b>	<b>18</b>
<b>4. Formulation de la méthode des volumes finis.....</b>	<b>18</b>
4.1. Conduction thermique 1D stationnaire .....	18
4.2. Conduction thermique 2D stationnaire.....	19
4.3. Conduction thermique 2D instationnaire.....	22
4.4. Conduction thermique en coordonnées axisymétriques .....	22
4.5. Choix géométrique .....	22
4.5.1. Choix du maillage .....	22
4.5.2. Choix des volumes de contrôle .....	22
4.5.3. Comparaison entre les deux choix.....	23
<b>4.6. Stabilité et convergence .....</b>	<b>23</b>
4.6.1. Les quatre règles de base .....	23
4.6.2. Critère de convergence.....	24
<b>4.7. Non-linéarité .....</b>	<b>24</b>
<b>5. Solution du système algébrique.....</b>	<b>24</b>
<b>6. Conclusion .....</b>	<b>25</b>

## **Chapitre III Introduction aux méthodes inverses en conduction**

<b>1. Introduction.....</b>	<b>26</b>
<b>2. Concept de la méthode inverse en conduction .....</b>	<b>26</b>
<b>3. Domaine d'application de la méthode .....</b>	<b>27</b>
<b>4. Classification des transfert thermique inverse.....</b>	<b>27</b>
<b>5. Aperçu des techniques de solution pour les problèmes de transfert thermique inverse .....</b>	<b>28</b>

# Sommaire

---

<b>6. Conduction inverse .....</b>	<b>28</b>
<b>6.1. Estimation de la conductivité thermique pour des domaines anisotropiques .....</b>	<b>29</b>
<b>6.2. Estimation de la condition initiale.....</b>	<b>29</b>
<b>6.3. Estimation de propriétés dépendantes de température .....</b>	<b>30</b>
<b>6.4. Estimation de coefficient d'échange pour une surface ailetée .....</b>	<b>31</b>

## **Chapitre IV Transfert thermique dans les moteurs à combustion interne**

<b>1. Introduction.....</b>	<b>32</b>
<b>2. Cycle thermodynamique d'un moteur .....</b>	<b>32</b>
<b>3. Présentation des organes du moteur.....</b>	<b>33</b>
<b>3.1. Le cylindre .....</b>	<b>33</b>
<b>3.2. Le piston.....</b>	<b>34</b>
<b>3.3. La culasse .....</b>	<b>35</b>
<b>3.4. Les soupapes .....</b>	<b>35</b>
<b>4. Echanges thermiques dans les moteurs.....</b>	<b>36</b>
<b>4.1. Echange thermique gaz-parois interne.....</b>	<b>36</b>
4.1.1. <b>Relation basée sur le nombre de Nusselt .....</b>	<b>36</b>
4.1.2. <b>Relations expérimentales.....</b>	<b>36</b>
4.1.3. <b>Corrélations par coefficient d'échange global .....</b>	<b>37</b>
4.1.4. <b>Corrélations par contribution convective et radiative... </b>	<b>37</b>
<b>4.2. Echanges entre les gaz d'admission/échappement et paroi de culasse.....</b>	<b>38</b>
<b>4.3. Transfert thermiques entre les parois et le fluide de refroidissement.....</b>	<b>38</b>
<b>4.4. Mécanisme d'échanges aux parois .....</b>	<b>39</b>

# Sommaire

---

<b>4.5. Transfert secondaire.....</b>	<b>39</b>
<b>4.6. Effets thermiques sur le fonctionnement du moteur.....</b>	<b>40</b>
<b>4.7. Facteurs favorisant une bonne transmission de chaleur .....</b>	<b>40</b>

## **Chapitre V      Présentation du code de calcul**

<b>1. Introduction.....</b>	<b>41</b>
<b>2. Structure du programme .....</b>	<b>41</b>
<b>3. Structure de l'interface .....</b>	<b>42</b>
<b>3.1. La géométrie .....</b>	<b>43</b>
<b>3.2. Les conditions aux limites .....</b>	<b>43</b>
<b>3.3. Maillage.....</b>	<b>45</b>
3.3.1. Maillage simple.....	45
3.3.2. Maillage avancé .....	46
<b>3.4. Matériaux.....</b>	<b>47</b>
<b>3.5. Solveur.....</b>	<b>48</b>
<b>3.6. résultats .....</b>	<b>49</b>
<b>4. Conclusion .....</b>	<b>49</b>

## **Chapitre VI    Résultats et Interprétations**

<b>1. Introduction.....</b>	<b>50</b>
<b>2. problème 1D stationnaire.....</b>	<b>50</b>
<b>2.1. Mur plan .....</b>	<b>50</b>
<b>2.2. Cylindre creux de longueur infinie .....</b>	<b>51</b>
<b>3. Problème 2D stationnaire .....</b>	<b>52</b>
<b>3.1. Barre de section carrée.....</b>	<b>52</b>
<b>3.2. Condition à la limite variable .....</b>	<b>53</b>



# Sommaire

---

<b>3.3. Problème de longueur semi infinie.....</b>	<b>54</b>
<b>4. Problème instationnaire .....</b>	<b>55</b>
<b>4.1 Milieu à température uniforme .....</b>	<b>55</b>
4.1.1. Longue barre de section carrée .....	55
4.1.2. Longue barre de section circulaire .....	56
4.2. Plaque plane .....	57
4.2.1. Plaque avec température imposé.....	57
4.3. Milieu semi infini avec température imposée .....	55
4.4. Milieu semi infini avec coefficient de convection imposé.....	58
<b>5. Distribution de température dans un cylindre à ailettes .....</b>	<b>60</b>
5.1. Cylindre avec 10 ailettes.....	60
5.2. Cylindre avec 6 ailettes.....	62
5.3. Cylindre avec 4 ailettes.....	63
<b>6. Estimation de coefficient d'échange .....</b>	<b>68</b>
<b>7. Conclusion .....</b>	<b>68</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>69</b>
<b>Référence bibliographique .....</b>	<b>70</b>

## Liste des figures

<i>Fig.2.1. Bilan d'énergie</i> .....	15
<i>Fig.2.2 maillage unidimensionnel</i> .....	18
<i>Fig2.3 maillage bidimensionnel</i> .....	20
<i>Fig.2.4 Choix géométriques</i> .....	22
<i>Fig.3.1 Cycle à 4 temps</i> .....	32
<i>Fig.3.2 Section du cylindre représentant le domaine à étudier</i> .....	33
<i>Fig.4.1 Organigramme</i> .....	42
<i>Fig.4.3 Interface de dessin</i> .....	44
<i>Fig.4.4 Interface de conditions aux limites</i> .....	44
<i>Fig.4.5 Interface de maillage</i> .....	45
<i>Fig.4.6.1 Maillage uniforme</i> .....	46
<i>Fig.4.6.2 Maillage Progressive</i> .....	46
<i>Fig.4.6.3 Maillage Progressive</i> .....	47
<i>Fig.4.7 Interface matériaux</i> .....	47
<i>Fig.4.8 Interface solveur</i> .....	48
<i>Fig.4.9 Interface resultats</i> .....	49
<i>Fig.5.1 Mur plan 1D</i> .....	50
<i>Fig.5.2 Distribution de température pour un mur plan</i> .....	50
<i>Fig.5.3 Cylindre creux</i> .....	51
<i>Fig.5.4 Distribution de température pour un cylindre creux</i> .....	51
<i>Fig.5.5 Barre de section carrée</i> .....	52
<i>Fig.5.6 Distribution de température pour la barre</i> .....	53
<i>Fig.5.7 Condition à la limite variable</i> .....	53
<i>Fig.5.8 Distribution de température analytique et numérique</i> .....	53
<i>Fig.5.9 Problème de longueur semi infini</i> .....	54

<i>Fig.5.10 Distribution de température analytique et numérique .....</i>	<i>54</i>
<i>Fig.5.11 Barre de section carrée.....</i>	<i>55</i>
<i>Fig.5.13 Plaque plane à température imposée.....</i>	<i>57</i>
<i>Fig.5.14 Plaque avec température imposée.....</i>	<i>57</i>
<i>Fig.5.15 Mur semi infini avec température imposée .....</i>	<i>58</i>
<i>Fig.5.17 mur semi infini.....</i>	<i>59</i>
<i>Fig.5.18 Cylindre avec 10 ailettes.....</i>	<i>60</i>
<i>Fig.5.19 La distribution de température pour 10 ailettes à <math>t = 0.4</math> s.....</i>	<i>61</i>
<i>Fig.5.20 La distribution de température pour 10 ailettes à <math>t = 1.2</math> s.....</i>	<i>61</i>
<i>Fig.5.21 La distribution de température pour 10 ailettes à <math>t = 2.4</math> s.....</i>	<i>61</i>
<i>Fig.5.22 La distribution de température pour 10 ailettes à <math>t = 4.6</math> s.....</i>	<i>61</i>
<i>Fig.5.23 La distribution de température pour 10 ailettes à <math>t = 5.4</math> s.....</i>	<i>61</i>
<i>Fig.5.24 Cylindre avec 6 ailettes.....</i>	<i>62</i>
<i>Fig.5.25 La distribution de température pour 6 ailettes à <math>t = 0.4</math> s.....</i>	<i>62</i>
<i>Fig.5.26 La distribution de température pour 6 ailettes à <math>t = 1.2</math> s.....</i>	<i>62</i>
<i>Fig.5.27 La distribution de température pour 6 ailettes à <math>t = 2.4</math> s.....</i>	<i>62</i>
<i>Fig.5.28 La distribution de température pour 6 ailettes à <math>t = 4.6</math> s.....</i>	<i>63</i>
<i>Fig.5.29 La distribution de température pour 6 ailettes à <math>t = 5.4</math> s.....</i>	<i>63</i>
<i>Fig.5.30 Cylindre avec 4 ailettes.....</i>	<i>63</i>
<i>Fig.5.31 La distribution de température pour 4 ailettes à <math>t = 0.4</math> s.....</i>	<i>63</i>
<i>Fig.5.32 La distribution de température pour 4 ailettes à <math>t = 1.2</math> s.....</i>	<i>64</i>
<i>Fig.5.33 La distribution de température pour 4 ailettes à <math>t = 2.4</math> s.....</i>	<i>64</i>
<i>Fig.5.34 La distribution de température pour 4 ailettes à <math>t = 4.6</math> .....</i>	<i>64</i>
<i>Fig.5.35 La distribution de température pour 4 ailettes à <math>t = 5.4</math> s.....</i>	<i>64</i>
<i>Fig.5.36 Variation de température en fonction de X au niveau de <math>Y = 4\text{mm}</math> à <math>t = 1</math> s.....</i>	<i>65</i>
<i>Fig.5.37 Variation de température en fonction de X au niveau de <math>Y = 4\text{mm}</math> à <math>t = 2</math> s.....</i>	<i>65</i>
<i>Fig.5.38 Variation de température en fonction de X au niveau de <math>Y = 4\text{mm}</math> à <math>t = 4</math> s.....</i>	<i>65</i>

<i>Fig.5.39 Variation de température en fonction de X au niveau de Y = 4mm à t = 7 s.....</i>	<i>66</i>
<i>Fig.5.40 Variation de température en fonction de X au niveau de Y = 4mm à t = 9 s.....</i>	<i>66</i>
<i>Fig.5.41 surface ailetée.....</i>	<i>67</i>
<i>Fig.5.42 <math>\Delta T=0,1</math> .....</i>	<i>67</i>
<i>Fig.5.43 <math>\Delta T=2</math>.....</i>	<i>67</i>
<i>Fig.5.44 <math>\Delta T=4</math>.....</i>	<i>67</i>
<i>Fig.5.45 <math>\Delta T=10</math>.....</i>	<i>67</i>

## **Liste des tableaux**

<i>Tab.3.1 Dimensions du piston par rapport à son diamètre.....</i>	<i>34</i>
<i>Tab.3.2 Dimensions des soupapes fraction du diamètre de la soupape.....</i>	<i>35</i>
<i>Tab.3.3 Coefficients <math>C_1</math> et <math>C_2</math> de la corrélation de Woschni.....</i>	<i>37</i>
<i>Tab.3.4 Echange convectif dans les conduits d'admission.....</i>	<i>38</i>
<i>Tab.3.5 Propriétés de fluide de refroidissement.....</i>	<i>39</i>
<i>Tab.5.1 Erreur sur la température pour le mur plan.....</i>	<i>51</i>
<i>Tab.5.2 Erreur sur la température pour le cylindre creux.....</i>	<i>52</i>
<i>Tab.5.3 erreur et temps de calcule pour différents types de maillage.....</i>	<i>54</i>
<i>Tab.5.4 erreur et temps de calcul pour le problème de longueur semi infini.....</i>	<i>55</i>
<i>Tab.5.5 erreur pour les problèmes à température uniforme.....</i>	<i>56</i>

# ***Introduction Générale***

---

*First, solve the problem. Then, write the code. Then test your results.*

## *Introduction Générale*

Lorsque les différentes parties d'un corps sont à des températures différentes, la chaleur se propage des parties les plus chaudes vers celles les plus froides. On distingue en général, trois modes de transferts thermiques : la conduction, la convection et le rayonnement.

La conduction thermique est un mode de transfert thermique ayant lieu, généralement dans les solides ; il peut avoir lieu dans les liquides immobiles et à un moindre degré dans les gaz. Dans ce mode de transfert, l'énergie est transférée par deux mécanismes physiques ; le premier est caractérisé par un transfert d'énergie cinétique (agitation moléculaire sous l'effet de température), le second par contre est caractérisé par un transfert d'électrons libres (cas des métaux) [1].

Les solutions exactes relatives aux problèmes de la conduction thermique sont en nombre très limitées. En pratique, la géométrie et les conditions aux limites sont souvent complexes, et les solutions analytiques font défaut, il est alors nécessaire d'avoir recours à aux méthodes numériques pour résoudre ces problèmes avec de bonne approximations. Les principales méthodes numériques sont : la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies, les méthodes spectrales, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments de frontière.

\* *Méthode des éléments finis* : Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie. Sur chacun de ces domaines, appelés éléments finis, la fonction inconnue est approchée par un polynôme. Les éléments, triangles ou quadrilatères, rectilignes ou curvilignes, doivent réaliser une partition du domaine d'étude (ils sont disjoints et leur union recouvre le domaine tout entier). Cette partition qui est généralement appelée découpage ou discrétisation du domaine doit respecter un certain nombre de règles qui permettent d'assurer un bon déroulement du calcul [2,3].

\* *Méthode des différences finies* : Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie [4,5].

\* *Méthode spectrale* : Dans cette méthode, on remplace dans les équations l'inconnue par des développements tronqués sur des bases de fonctions orthogonales (polynômes de Chebychev, Legendre, Fourier) et, en utilisant leur propriété d'orthogonalité on se ramène à des systèmes d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre [6].

\* *Méthode des volumes finis* : La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar [7]. La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation qui sont des équations aux dérivées partielles en équations algébriques. La technique des volumes de contrôle consiste en l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir des équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC). La méthode est basé sur le théorème de divergence

\* *Méthode des éléments de frontière*: La méthode des éléments de frontière consiste en une subdivision de la frontière en éléments joints les uns aux autres [8,9]. La méthode des éléments de frontière a été développée suivant deux approches l'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel d'où le nom de méthode directe [10]. L'autre approche est physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout le long du contour discrétisé en segments de droites, et delà, calculer les paramètres aux limites désirés. Cette méthode est connue sous le nom de méthode indirecte ; La méthode des contraintes fictives [11] et la méthode des discontinuités de déplacements [12] représentent deux formulations indirectes.

La méthode des différences finies et la méthode des volumes finis sont les méthodes les plus utilisées pour la résolution des problèmes du transfert thermique et de mécanique des fluides, elles sont la base des codes généralistes en CFD « *Computational fluid dynamics* » [13,14].

Dans ce travail, nous avons choisi la méthode des volumes finis pour la simulation de la conduction thermique car elle est mieux adaptée aux géométries complexes que la méthode des différences finies [15]. Le langage Java (programmation orienté objet) a été utilisé pour son implémentation. La technique suivie est très puissante que celle utilisée dans la programmation traditionnelle (procédurale), ou des tableaux primitifs sont utilisés pour stocker les données. L'utilisation des classes organise le stockage et facilite l'accès aux données [16].

Java s'annonce comme une des évolutions majeures de la programmation. Pour la première fois, un langage efficace, performant, standard et facile à apprendre et de plus gratuit est disponible. Il satisfait aux besoins de l'immense majorité des développeurs et représente une opportunité de se libérer un peu des langages actuels [17].

Nous avons conçu une interface graphique (GUI) pour que la manipulation du code de calcul soit souple et conviviale, et pour rendre Java plus efficace on utilise Net Beans comme environnement de développement « *Integrated Development Environment* » [18].

Ainsi le mémoire est structure en six chapitres principaux :

Le premier chapitre est relatif à une synthèse bibliographique et à l'état de l'art sur les travaux antérieurs effectués sur la résolution de l'équation de conduction, analytiquement et numériquement.

Le deuxième chapitre est consacré à une présentation de la méthode des volumes finis au transfert thermique conductif et à la discrétisation des équations gouvernantes.

Le deuxième chapitre est suivi d'un troisième, relatif aux méthodes inverses en conduction thermique.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse aux échanges thermiques dans les moteurs à combustion interne.

Le cinquième chapitre est axé sur la présentation de la structure du code de calcul développé dans le cadre de cette étude avec son interface graphique.

## *Introduction générale*

---

Le chapitre six est relatif à la présentation des résultats obtenus et à leur discussion, y sont traités quelques exemples pratiques de conduction thermique, simulés numériquement par le code développé avec une comparaison aux solutions analytiques numériques issus de la littérature. Une simulation numérique de transferts thermiques dans le cylindre d'un moteur à combustion interne d'un véhicule léger a été faite sur le code comme exemple d'application pratique et réel.

Enfin, nous terminons le document par une conclusion générale, faisant le bilan des résultats obtenus et des perspectives à envisager pour la continuité de ce travail.



# Chapitre I

---

## Revue Bibliographique

*Heat conduction continues to be a field of major interest to engineering and scientific researchers, as well as designers, developers, and manufacturers. In addition, a significant number of papers address topics that are at the frontiers of both fundamental research and important emerging applications, such as contact resistance; non-Fourier and nonlinear heat transport models; heat waves; heat conduction in complex geometries, composites and layered media; experimental and comparative studies; Thermal stresses and thermo-mechanical aspects; analytical, numerical methods and simulations...etc[19].*

*In this chapter we present a literature review of previous works related to the application of analytical and numerical methods to study heat conduction for a variety of applications. The numerical techniques include finite element, finite difference, boundary element techniques and the like.*

## 2.1. Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons nous intéresser à présenter une revue bibliographique des travaux antérieurs relatifs à la résolution de l'équation de conduction thermique analytiquement et numériquement. Plusieurs auteurs ont publié des travaux relatifs aux solutions analytiques et numériques de la conduction thermique. On s'intéresse à présenter quelques travaux pour montrer que le problème de conduction thermique a une grande importance dans le domaine de la recherche scientifique.

On présente dans ce qui suit l'état de l'art des travaux publiés sur les transferts thermiques conductifs, relatifs aux aspects, numérique et analytique. L'accent est mis, spécifiquement sur les travaux où la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre des problèmes de transfert thermique et de mécanique des fluides, compte tenu que c'est la méthode choisie dans notre étude.

### 2.1. Etat de l'art sur les transferts thermiques conductifs

*P. Vessakosol et J. Chareonsuk* [20] ont proposé une approche numérique basée sur la méthode des volumes finis pour l'analyse de la conduction transitoire dans les matériaux non homogènes « *functionally graded material* », une nouvelle classe de matériaux composites, avec une variation exponentielle de conductivité thermique dans une seule coordonnée.

*Murat Uygun et KadirKirkköprü* [21] ont résolu les équations d'Euler au moyen de trois schémas de volumes finis, à savoir, « *central scheme of Jameson-Schmidt-Turkel(JST)* », « *upwindschemes of Roe'sApproximate Riemann Solver* » et « *Convective Upwind Split Pressure (CUSP) Scheme* ». La technique de discrétisation cellule centrée est employée. L'algorithme du pas de temps à plusieurs étapes est utilisé pour avancer la solution dans le temps. L'attention est dirigée vers l'exactitude, convergence, et la performance computationnelle des schémas. Tous les schémas donnent une bonne convergence estimée pour une grande gamme du courant de vitesses.

*C. W. Lan et C. C. Liu* [22] ont présenté une méthode du volume finie adaptative pour résoudre les problèmes d'écoulement thermique incompressible avec une interface liquide/solide inconnu. La méthode est implémentée à travers la programmation orientée objet basé sur le raffinement de maillage adaptatif et l'utilisation des données dynamiques, le langage de programmation utilisé est FORTRAN 90.

*A.S. Da Cunha et W.R. Ferreira* [23] ont présenté la Méthode de diffusion couplée avec la méthode des volumes finis comme une approche alternative pour résoudre des équations de diffusion-convection avec des hauts nombres de Peclet. Ils ont testé aussi la méthodologie proposée pour des cas où la solution analytique est connue pour la validation. Des comparaisons avec d'autres méthodes numériques sont aussi présentées.

Ivan Lunati et Patrick Jenny [24] ont développé la méthode des volumes finis multi-échelle « multiscale finite volume method (MSFV) » et ont testé cette méthode pour les problèmes d'écoulement multi-phases avec des simplifications physiques (écoulement incompressible sans gravité et effets de la capillarité). Cette méthode est prouvée robuste, exacte et efficace.

A. V. Vuong et B. Simeon [25] ont fourni une introduction de base à la méthode des volumes finis pour l'équation de Navier-Stokes des écoulements incompressibles aux bas nombres de Reynolds. Ils ont aussi fait un rapport sur les développements récents, particulièrement sur le traitement des écoulements interfaciaux et sur les grilles adaptatives.

Mara Tonelli et Marco Petti [26] ont présenté un schéma hybride pour la solution des équations de Boussinesq étendues en 2D. La méthode des volumes finis est appliquée à la partie convective des équations, et les termes diffusifs et termes sources sont discrétisés par la technique des différences finies.

A. A. Garrouch et M. M. Al-Dousari [27] ont utilisé la technique des volumes finis pour résoudre l'équation de convection-diffusion en coordonnées radiales. Dans le modèle de diffusion présenté, le coefficient de diffusion est dépendant de  $r$ . Le code est vérifié par une étude de convergence pour montrer que les résultats numériques sont indépendants du maillage et de pas de temps.

eljko Lileka et Samir Muzaferija [28] ont présenté une méthode de volume fini pour calculer les problèmes d'écoulement en utilisant des grilles structurées. La discrétisation est de deuxième ordre dans l'espace et le temps et l'algorithme de solution est basé sur la méthode SIMPLE.

## 2.1. Aspect analytique de la conduction

Syed M. Zubair Et M. Aslam Chaudhry [29] ont étudié la solution analytique pour la distribution de température et de flux de chaleur dans le cas d'un solide semi-infini de propriétés constantes. Les solutions sont présentées pour un flux de chaleur de la surface dépendant de temps sous la forme :  $Q_1(t) = Q_0(1 + a \cos(\omega t))$  et  $Q_2(t) = Q_0(1 + b \cos(\omega t))$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Les solutions adimensionnelles de la température et du flux de chaleur sont présentées en termes de décompositions  $C_r$  et  $S_r$  de la représentation généralisée de la fonction incomplète Gamma.

Chien-Ching Ma et Shin-Wen Chang [30] ont présenté des solutions analytiques exactes des problèmes de la conduction thermique dans des domaines anisotropes multicouches. La température et le flux de chaleur dans un domaine multicouches avec des propriétés anisotropes dans chaque couche soumise à une température imposée sur les surfaces ont été analysés en détail.

A. Ebadian et P. Darania [31] ont analysé les solutions exactes de l'équation de la conduction de la chaleur nonlinéaire avec des coefficients du transfert variables à cause de fusion inertielle.

Ru-Li Lin [32] a présenté des solutions analytiques explicites des problèmes de conduction de la chaleur avec des dimensions finies. Les configurations considérées dans son étude incluent les problèmes multicouches, domaines cales et circulaires. Les conditions aux limites sont supposées adiabatiques. Les solutions analytiques de température et flux de la chaleur pour le cas multicouches soumis à une source de chaleur sont dérivées par la technique de transformée de Fourier.

Elizaveta Gordeliy et Steven L. Crouch [33] considèrent un problème de conduction de la chaleur transitoire pour un domaine infini avec deux cavités circulaires. Soudainement des conditions aux limites de type Dirichlet sont appliquées. L'approche est basée sur le principe de superposition et l'usage de la solution générale du problème d'une seule cavité. La solution est obtenue en utilisant la solution analytique dans le domaine de Laplace. La méthode peut être étendue aux problèmes avec des cavités multiples et des inhomogénéités.

H. Sadat [34] a fait une analyse sur le problème de conduction de la chaleur unidimensionnel instationnaire en utilisant la méthode de perturbation. Il a prédit la température moyenne au centre, et à la surface. Il a utilisé un bloc, un cylindre infini et une sphère pour l'analyse.

B. Chakravarthy et H.P. Cherukuri [35] a présenté les conditions de validité des modèles mis en bloc en comparant avec la solution numérique obtenu par la méthode des éléments finis.

Shang-Sheng Wu et Chin-Lin Shiu [36] a utilisé le transformé de Laplace pour la résolution de l'équation de la conduction pour des ailettes annulaires bidimensionnelles avec une base soumise à un flux de chaleur qui varie sinusoidalement en fonction du temps. La distribution de la température transitoire est obtenue en employant le transformé inverse de Laplace par l'utilisation de la technique de série de Fourier.

Kazuhiro Fukuyo [37] a proposé une nouvelle méthode analytique finie basée sur l'expansion de puissance des séries. Cette méthode a une forme plus simple comparée avec d'autres méthodes basées sur les techniques analytiques classiques est sa solution est comparable avec la solution des autres méthodes. La comparaison montre que les solutions de la nouvelle méthode sont plus exactes que ceux obtenu par la méthode explicite de Crank-Nicolson.

X. Lua et P. Tervola [38] ont développé une solution analytique pour le problème de conduction de la chaleur transitoire dans un bloc cylindrique pour un matériau composite avec une condition à la limite dépendante de temps. La méthode analytique proposée n'implique pas de complications numériques. Par une nouvelle application de la

méthode de transformé de Laplace et la méthode de séparation de variables avec des transformations de variables. Des exemples montrent que les solutions analytiques sont en bon accord avec les résultats numériques.

*S.J. Matysiak et A.A. Yevtushenko* [39] ont traité quelque problème de conduction de la chaleur instationnaire pour un espace homogène semi-infini. L'espace est à une température initiale de zéro, la condition à la limite pour le temps  $0 < t < t_0$  est de type Dirichlet et pour  $t > t_0$  de type Neumann (adiabatique). La solution exacte est obtenue en utilisant la méthode de l'intégrale de Fourier. Quelque cas spéciaux sont résolus en détails.

*M. Lewandowska et L. Malinowski* [40] ont présenté une solution analytique de l'équation de la conduction de la chaleur hyperbolique pour le cas d'un bloc mince chauffé sur les deux côtés symétriquement. Dans le modèle mathématique adopté, le chauffage est traité comme une source de la chaleur interne avec une capacité dépendante des coordonnées et de temps, et les murs du bloc sont supposés isolés. La solution est obtenue par la méthode de transformé de Laplace et la méthode de superposition de variables. La solution analytique est validée par une comparaison avec les résultats de modèle numérique.

*G.E. Cossali* [41] a donné une solution analytique en terme de transformé de Fourier pour la conduction de la chaleur stationnaire périodique, non nécessairement harmonique, dans un cylindre homogène de longueur et rayon finis. Les cas limite d'épaisseur infinie et rayon infini sont aussi considérés et résolus.

## 2.2 Méthodes numériques pour la conduction

### \* Différences finis

*Hsin-Ping Chua et Chieh-Li Chen* [42] ont employé la transformée différentielle pour discuter le comportement de problème de la conduction de la chaleur non linéaire. Ils ont proposé une méthode hybride de transformée différentielle et l'approche de différences finies pour résoudre les réponses transitoires d'un problème de la conduction de la chaleur non linéaire. Différents paramètres de l'équation et des conditions aux limites sont considérés pour vérifier la faisabilité de la méthode proposée à tels problèmes. Les résultats de la simulation sont illustrés et discutés en comparaison avec le cas linéaire.

*ELivne et A Glasner* [43] ont formulé un schéma de différences finies symétrique semi-implicite pour l'équation de la conduction de chaleur. Le schéma est facile à programmer, rapide et exact. L'avantage du schéma apparaît principalement pour des larges usages (problèmes compliqué, grilles multidimensionnelles et pour les problèmes non linéaire).

Des conditions aux limites de type Neumann (adiabatique) sont souvent rencontrées dans les applications de l'ingénieur. Les schémas de différences finis conventionnels sont exacts mais besoin d'un point à l'extérieur de la limite. Ces schémas

sont difficiles à appliquer dans les cas multidimensionnels ou pour les cas de coordonnées cylindriques et sphériques. *WeizhongDai* [44] a présenté un nouveau et exact schéma de différences finies pour les conditions aux limites de type Neumann (adiabatique) en coordonnées cartésien, cylindriques, et sphériques. Combiné avec le schéma de Crank–Nicholson et autres schémas d'ordre supérieure, ces schémas sont inconditionnellement stable et fournit des solutions numériques beaucoup plus exactes. Les résultats trouvés montrent que la nouvelle méthode est efficace.

*M. N. Bouaziz* [45] a analysé une ailette soumise à des conditions aux limites non linéaires dans le cas instationnaire. L'auteur a procédé à une étude comparative de deux schémas de différences finis. En premier, un schéma implicite de troisième niveau est développé. Le schéma proposé pour l'ailette 2D est trouvée inconditionnellement stable et peut être résolue en utilisant l'algorithme de Thomas. Un schéma exponentiel explicite est appliqué ensuite avec l'introduction de pas du temps constant pour traiter les non linéarités. Les résultats numériques fournissent des comparaisons avec les cas linéaires. L'auteur a conclu que le schéma exponentiel explicite utilisé est très fiable et exact.

### \* **Eléments finis**

*Mile R. Vujicic et Steve G.R. Brown* [46] ont étudié la conduction de la chaleur tridimensionnelle transitoire par la méthode des éléments finis en utilisant des différents solveurs itératives basée sur la méthode des gradients conjugués « *conjugate gradient* ». Les méthodes utilisées sont : « *preconditionedconjugate gradient* », « *least square conjugate gradient* », « *conjugate gradient squared* », « *preconditionedconjugatesquared* », « *biconjugate gradient* », « *preconditioned biconjugate gradient* », « *bi-conjugate gradient stabilized* » et « *preconditioned biconjugatestabilizedmethod* » aussi bien que la méthode des éliminations de Gauss avec la factorisation incomplète de Choleski pour une comparaison. La dépendance du temps est résolue en utilisant des schémas différences finies et éléments finis.

*SharanjeetDhawan et SheoKumar*[47] ont utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de la conduction thermique tridimensionnelle transitoire. La variation temporelle de la température est étudiée en utilisant des schémas d'Euler de premier ordre et de Crank-Nicholson modifié de deuxième ordre qui sont inconditionnellement stable. Une étude comparative a été faite par des combinaisons des différents types de maillage et schémas numériques.

*W. H. Gray et N. M. Schnurr* [48] ont fait une comparaison entre la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de la conduction de la chaleur linéaire à deux dimensions. La méthode des éléments finis est démontrée pour être supérieure à la méthode des différences finies pour les problèmes considérés dans leur travail.

*Tzer-Ming Chen* [49] a appliqué une méthode modifiée qui combine le transformé de Laplace et la méthode des éléments finis au problème de la conduction instationnaire

linéaire et nonlinéaire. La présente méthode consiste à enlever les dérivés du temps de l'équation différentielle par l'utilisation de transformé de Laplace et résoudre l'équation associée avec la méthode des éléments finis. Pour les problèmes de conductivité thermique dépendante de température, une méthode de perturbation approximative est donnée pour linéariser l'équation nonlinéaire. Les résultats sont comparés avec des solutions analytiques et ceux obtenu par l'utilisation de la méthode combiné transformé de Laplace et méthode des différences finies. Il est trouvé que la présente méthode est fiable et efficace.

### \*Éléments de frontière

*AlokSutradhar et Glaucio H. Paulino* [50] présentent une méthode simple des éléments de frontière pour la conduction thermique transitoire dans les matériaux non homogène, cette méthode consiste à la subdivision de la limite seulement sans la discrétisation du domaine. Pour une gamme générale de variation (Quadratique, exponentielle et trigonométrique) de la conductivité thermique et la chaleur spécifique, le problème non-homogène peut être transformé au problème de diffusion homogène standard. Ils ont présentés l'élément de frontière à trois dimensions en utilisant l'approche de transformée de Laplace et l'approximation de Galerkin. La dépendance du temps est restaurée en inversant les transformées de Laplace numériquement au moyen de l'algorithme de Stehfest. Plusieurs exemples démontrent l'efficacité de la méthode. Les résultats des exemples sont en accord excellent avec les solutions analytiques et les résultats de la simulation par éléments finis.

*AlokSutradhar et Glaucio H. Paulino* [51] présentent la mise en œuvre de la méthode « *SymmetricGalerkinBoundaryElementMethod* » pour les problèmes de la conduction de la chaleur tridimensionnelle non-homogène. Ils ont supposé que la conductivité thermique varie exponentiellement dans une seule coordonnée. La tâche principale est l'évaluation des intégrales singulières et hyper singulières. Cependant, dû à la complexité des fonctions de Green pour les matières non-homogène, les procédures doivent être modifié en incorporant des expansions de Taylor pour obtenir des expressions qui peuvent être intégrées analytiquement. Les résultats sont en accord avec les solutions exactes et la simulation par éléments finis.

Dans la formulation des éléments de frontière de conduction, la source de chaleur impose un terme intégral supplémentaire sur le système d'équations intégrales. Avec ce terme, l'avantage de la méthode des éléments de frontière comme une formulation sur la limite seulement sera perdue. *M.R. Hematiyan et G. Karami*[52] présentent une méthode exacte pour l'évaluation d'intégrales du domaine de la source de chaleur sans le besoin de discrétiser tout le domaine. La transformation du domaine intégral en intégrale de frontière correspondante est faite par l'utilisation de théorème de Green. Les régimes stationnaire et instationnaire sont considérés. Des exemples numériques ont été présentés pour démontrer l'exactitude et l'efficacité de la méthode présentée.

**\*Autres méthodes**

*W.J. Mansur et C.A.B. Vasconcellos* [53] ont présenté un nouveau algorithme de solution numérique de l'équation de la conduction thermique transitoire linéaire en utilisant l'approche explicite de Green « *Explicit Green's Approach (ExGA)* ». La méthode utilise la matrice du Green qui représente le domaine du problème à résoudre en termes de propriétés physiques et caractéristiques géométriques. L'ExGA autorise la marche du temps explicite avec le pas du temps plus large que celui exigé par la méthode des éléments finis, sans perdre de précision. Les résultats obtenus par la méthode ExGA sont validés par une comparaison avec des solutions analytiques et des solutions numériques obtenues par la méthode des éléments finis.

*J.I. Frankel et V.V. Kulish* [54] ont dérivé une nouvelle relation intégrale entre le flux de chaleur et la température dans le problème de conduction thermique unidimensionnel instationnaire semi-infini avec une condition initiale arbitraire. Un traitement mathématique unifié est proposé qui est étendu pour des géométries finies. Cette relation est développée en combinant la méthode des fonctions de Green avec un formalisme associé aux équations intégrales faiblement singulières. De ce formalisme, une nouvelle stratégie de flux de chaleur est produite basé sur la variable temporelle et pas la variable spatiale.

*Tzer-Ming Chen* [55] a proposé une méthode hybride de la fonction du Green pour étudier les problèmes de conduction de la chaleur hyperboliques. La difficulté des solutions numériques de problèmes de la conduction de la chaleur hyperboliques est l'oscillation numérique environs des discontinuités. Dans cette étude l'auteur a développé une méthode hybride qui combine le transformé de Laplace, la fonction de Green et la méthode d'accélération « *e-algorithme* » pour résoudre les problèmes dépendant de temps. Six exemples différents à une, deux et trois dimensions d'espace ont été analysés par la présente méthode. Les résultats ont été trouvés stables et en accord avec d'autres méthodes de la littérature.

*F. Ilinca et J. F. Héty* [56] ont présenté les avantages fournis par l'usage de la méthode « *Galerkin gradient least-squares (GGLS)* » pour la conduction transitoire. Ils ont discutés aussi la consistance de la méthode GGLS pour ce type de problèmes. La méthode GGLS est comparée avec la formulation standard de Galerkin pour les problèmes suivants : un solide semi-infini résolu en 1 et 3 dimensions et une plaque mince à trois dimensions.

*Xiao Hua Zhang et Jie Ouyang* [57] ont appliqué la méthode des éléments libre de Galerkin « *Element Free Galerkin Method (EFGM)* » pour résoudre les problèmes de la conduction de la chaleur bidimensionnelles instationnaire. La plupart des méthodes du Galerkin ont un plus haut coût de calcul par rapport à la méthode des éléments finies. Pour vaincre ce défaut pour les problèmes de la conduction transitoires, ils ont utilisés la procédure de blocs qui peut diminuer le coût de calcul évidemment. Les résultats obtenus



par EFGM sont comparés avec ceux obtenus par méthode des éléments finis aussi bien que des solutions analytiques qui montrent que les solutions obtenues par la présente méthode sont en bon accord avec la méthode des éléments finis et les solutions analytiques.

*SharanjeetDhawan et SheoKumar* [58] ont résolu l'équation de la chaleur unidimensionnelle en utilisant la méthode « *Galerkin B-spline* ». La solution est obtenue en réduisant le problème de la valeur initial à l'ensemble des équations différentielles ordinaires. La discrétisation spatial du domaine est fait en utilisant les fonctions cubiques « *B-spline* » comme fonctions de base. Deux exemples sont résolus par la présente méthode est sont comparés avec la solution analytique.

*J. Sladek et V. Sladek1* [59] ont proposé une méthode basée sur l'approche locale de Petrov-Galerkin pour la solution des problèmes de conduction transitoires et stationnaire dans un domaine non homogène et anisotrope. Le transformé de Laplace est utilisé pour traiter la dépendance du temps. Le domaine analysé est couvert par des petits sous domaines avec une géométrie simple. L'approximation basé sur la méthode des moindres carrés en mouvement « *Moving Least-Squares (MLS)* » est employée pour l'implémentation. Plusieurs exemples avec des conditions aux limite de type Dirichlet, convection et mixte, sont présentés pour démontrer la véracité et efficacité de l'approche numérique.

*Ming-Hung Hsu* [60] a analysé les problèmes de la conduction thermique hyperboliques en utilisant la méthode de la quadrature différentielle « *Differential Quadrature Method(DQM)* ». Les résultats numériques sont comparés avec les résultats publiés pour voir l'efficacité de cette nouvelle approche pour résoudre les problèmes de la conduction thermique hyperboliques. Les résultats correspondent bien avec ceux publiés.

*Zohar Gvirtzman et Zvi Garfunkel* [61] ont montré comment utiliser une feuille de calcul « *spreadsheet* » pour calculer les solutions numériques de l'équation de conduction unidimensionnelle transitoire. « *spreadsheet* » est un outil pratique pour les calculs numériques parce que les algorithmes peuvent être implémentés simplement et rapidement sans de programmation compliquée. Ils ont implémenté les schémas explicite et de Crank-Nicholson et ont fait une comparaison entre les deux schémas.

*Mohamed A. Antar* [62] a introduit une approche numérique simple pour résoudre les problèmes de conduction de la chaleur unidimensionnels transitoires dans une plaque et un long cylindre avec ou sans génération de chaleur interne par l'utilisation des « *spreadsheets* ». Les problèmes formulés sont utilisés pour résoudre la conduction de la chaleur multidimensionnelle transitoire dans un court cylindre par l'application de principe de séparation de variables. Cela réduit la nature de problème à deux dimensions au deux problèmes unidimensionnels qui sont résolus facilement par des « *spreadsheets* ». La distribution de température est obtenue en combinant les deux solutions.

### **3. Conclusion**

A travers cette analyse bibliographique, il ressort que la détermination des solutions analytiques et numériques pour différents problèmes de la conduction thermique (1D, 2D, 3D, linéaire et non linéaire, homogène et non homogène, multicouche, ...) a donné lieu à plusieurs travaux analytiques, et, particulièrement numériques.

Il est à noter que les méthodes numériques les plus utilisés pour la conduction sont la méthode des différences finis, la méthode des éléments finis, la méthode des éléments de frontière et les méthodes utilisent les fonctions de Green. La méthode des volumes finis et appliquée à moindre degré que les autres méthodes pour la résolution des problèmes de conduction ; elle est utilisée pour des problèmes plus compliqués tel que, l'analyse des écoulements de fluides, les problèmes de convection- diffusion, la résolution des équations de Navier-Stokes [20-28] et d'autres travaux que nous les avons pas cités ici.

Dans ce travail, nous avons choisi la méthode des volumes finis, dans une perspective de développement d'un code de calcul, avec interface graphique, pour la simulation de la conduction thermique bidimensionnelle stationnaire et instationnaire, pour des matériaux isotrope et anisotrope, et pour des géométries bidimensionnelles quelconques (simples ou compliquées). Les résultats seront comparés à ceux issus de la littérature afin de valider le code ainsi développé et tester sa souplesse et sa flexibilité d'utilisation.

# *Chapitre II*

---

## *Méthode des volumes finis*

*The limitations of the human mind are such that it cannot grasp the behavior of its complex surroundings and creations in one operation. Thus the process of subdividing all systems into their individual components or elements, whose behavior is readily understood, and then rebuilding the original system from such components to study its behavior*

*In many situations an adequate model is obtained using a finite number of well-defined components. Such problem is called discrete.*

*With the advent of digital computers, discrete problems can generally be solved readily even if the number of elements is very large. As the capacity of all computers is finite, continuous problems can only be solved exactly by mathematical manipulation. Here, the available mathematical techniques usually limit the possibilities to over simplified situations.*

## 1. Introduction

Plusieurs problèmes pratiques relevant des domaines de l'ingénieur tels la mécanique des fluides, le transfert de chaleur et de masse, la mécanique des solides et de la rupture, peuvent être représentés par des modèles mathématiques. Une fois le modèle mathématique régissant le problème physique est établi, nous devons songer à résoudre les équations gouvernantes relatives à ces problèmes [63]. En pratique, la géométrie et les conditions aux limites sont souvent assez complexes et les solutions analytiques des problèmes rencontrés en pratiques font défauts, le recours aux méthodes numériques pour résoudre ces problèmes constitue une alternative forte intéressante dans le domaine des sciences physiques pour ingénieurs.

Ce chapitre présente les outils fondamentaux pour une bonne simulation de la conduction de la chaleur au moyen de la méthode des volumes finis, il est structuré en deux parties : la première est relatif à la présentation du mode de transfert thermique conductif ainsi que le traitement des équations gouvernantes en coordonnées cartésiennes. La deuxième partie du chapitre est consacrée aux algorithmes numériques de la méthode des volumes finis. Les procédures de solution pour la conduction stationnaire et instationnaire sont discutées. La conduction thermique non linéaire exige un traitement spécial qui est aussi présenté dans la deuxième partie. À la fin de chapitre nous décrivons deux algorithmes pour la solution des systèmes d'équations algébriques qui paraît après la discrétisation

## 2. Description mathématique des phénomènes physiques

Dans la plupart des phénomènes physiques réels, des modèles mathématiques sont développés pour décrire ces phénomènes. Ces modèles donnent lieu à une équation contenant quelques dérivés d'une fonction inconnue. Une telle équation est appelée équation aux dérivés partielles (EDP) [64].

### 2.1. Définition d'une (EDP)

Une équation différentielle aux dérivées partielle est une équation qui exprime la relation entre une fonction de deux variables indépendantes ou plus et les dérivées partielles de cette fonction [65]. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre le plus élevé de la dérivée qui apparaît dans l'équation.

### 2.2. Conditions aux limites et valeurs initiales

Une équation différentielle gouverne une famille de solutions. Un membre particulier de la famille des solutions est spécifié par des conditions auxiliaires (initiales et aux limites) imposé à l'équation différentielle. Trois types de conditions aux limites peuvent être imposés [66] :

- Condition aux limites de type Dirichlet : la valeur de la fonction est spécifiée à la limite ( $f = C$ ).

- Condition aux limites de type Neumann : la valeur de la dérivée normale à la limite est spécifiée ( $\frac{\partial f}{\partial n} = C$ ).
- Condition aux limites mixte (condition de Robin) :  $\alpha \frac{\partial f}{\partial n} + \beta f = C$  (II.2.1)

Où  $f$  est la solution de l'équation différentielle,  $C$  constante réel,  $\alpha$  et  $\beta$  coefficients réels.

Les conditions initiales prescrites des conditions qui doivent être satisfaites en tout le domaine d'étude à l'instant ou les processus décrit par l'équation différentielle partielle commence. Une condition initiale typique peut prescrire une combinaison de la variable indépendante et ses dérivés du temps [66].  $f(x, y, z, t = 0) = f_i(x, y, z)$  (II.2.2)

Le nombre de conditions imposé est égal à l'ordre de l'équation différentielle [67].

### 2.3. Problème bien posé

Un problème mathématique est dit bien posé s'il satisfait les exigences suivantes [68,69] :

- L'existence : Il y a au moins une solution.
- L'unicité : Il y a une solution au plus.
- La continuité : La solution dépend des données aux limites et/ou initiales de façon continue.

### 2.4. Solutions des équations différentielles aux dérivées partielles

Pour résoudre une équation différentielle, il existe fondamentalement deux méthodes : Méthodes analytiques et méthodes numériques.

#### 2.4.1. Méthodes analytiques

Consistent à résoudre les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le phénomène analytiquement, tel que la méthode de séparation de variable [70] et la méthode de transformées de Laplace [71]. Généralement le problème doit être simplifié pour que cette approche réussie. Plus que le problème simplifié soit proche du problème réel, plus que la solution obtenue soit plus exacte.

#### 2.4.2. Méthodes numériques

Les méthodes analytiques donnent des solutions exactes des EDP, et sont applicables à des situations où la géométrie et les conditions aux limites relatives au système sont simples. En pratique les problèmes rencontrés sont généralement assez complexes, et les solutions analytiques font défaut, d'où les méthodes numériques permettent de résoudre les problèmes avec des approximations très acceptables.

### 3. Conduction thermique

#### 3.1. Introduction

Le transfert thermique est la science qui étudie le transport d'énergie entre les corps matériels dû à une différence de la température [72-74]. Les trois modes de transfert de la chaleur sont : conduction, convection et rayonnement.

La mode de transfert de chaleur par conduction se produit à cause d'un échange d'énergie d'une molécule à un autre, sans le mouvement réel des molécules, ou à cause de mouvement des électrons libres s'ils sont présents. Par conséquent, cette forme de transfert de chaleur dépend des propriétés du milieu et a lieu dans les solides, liquides et les gaz si une différence de température existe.

Les molécules présentent dans les liquides et les gaz ayant une liberté de mouvement, et en déplaçant d'une région chaude à une région froide, ils emportent d'énergie avec eux. Le transfert de chaleur d'une région à un autre dû à tel mouvement macroscopique ajouté au transfert d'énergie par conduction dans le fluide, est appelé transfert de la chaleur par convection. La convection peut être libre ou forcée. Quand le mouvement de fluide se produit à cause d'une variation de la densité causée par les différences de la température, la situation est dite : convection libre ou naturelle. Quand le mouvement de fluide est causé par une force externe, la situation est dite convection forcée.

Tous les corps émettent une radiation thermique à toutes les températures. C'est le seul mode qui n'exige pas du support matériel pour le transfert de chaleur. La nature de radiation thermique est telle qu'une propagation d'énergie portée par des ondes électromagnétiques, est émise de la surface du corps. Quand ces ondes électromagnétiques frappent des surfaces d'un autre corps, une partie est reflétée, une partie est transmise et la partie restant est absorbée.

Dans ce sous chapitre on présentera de façon détaillée le transfert d'énergie par conduction par l'établissement des équations relatives à ce mode de transfert.

#### 3.2. Conductivité thermique

Une des propriétés fondamentales des solides est leur capacité de conduire la chaleur. Cette propriété est exprimée en terme de conductivité thermique  $\lambda$  qui caractérise la dépendance entre le gradient de la température et le flux thermique [75].

La conductivité thermique  $\lambda$  est fonction de la composition chimique du milieu, de son état physique, de sa température, et de sa pression. Pour les solides la dépendance de la pression est négligeable, en fonction de la température  $\lambda$  évolue généralement de manière linéaire [76].

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta\theta) \quad (\text{II.3.1})$$

Avec :  $\theta = T - T_{ref}$  et  $\lambda_0$  est la conductivité thermique à la température de référence  $T_{ref}$

Lorsque les écarts de température sont faibles, on peut considérer que la conductivité thermique est constante pour un milieu donné.

### 3.3. Loi de Fourier (1822)

Cette loi stipule qu'en tout point d'un milieu isotrope, la densité du flux thermique instantanée est proportionnelle à la conductivité thermique du milieu et au gradient de température [77]. Elle est ainsi donnée par l'expression :

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{II.3.2})$$

### 3.4. Equation générale de la conduction

Considérons un milieu solide de volume,  $V$ , soumis à un gradient de température  $\vec{\nabla} T$ . Appliquons le principe de conservation d'énergie à un élément infinitésimal du milieu de volume  $dv$ .

Le bilan thermique donne :

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+dy} + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+dz} + \dot{E}_g = \dot{E}_{sto} \quad (\text{II.3.3})$$

Où :  $\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz$  est la puissance générée,  $\dot{E}_{sto} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$  est la variation d'énergie interne.

En faisant un développement limite d'ordre 1, on aura :

$$\begin{cases} \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} \approx -\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx \\ \dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+dy} \approx -\frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy \\ \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+dz} \approx -\frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz \end{cases} \quad (\text{II.3.4})$$

Avec :  $\dot{Q}_x = q_x dy dz$ ,  $\dot{Q}_y = q_y dx dz$ ,  $\dot{Q}_z = q_z dx dy$ ,  $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$  on obtient

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{q} + \dot{q}_g \quad (\text{II.3.5})$$

Pour un milieu homogène et isotrope, compte tenu de la loi de Fourier donnée par la relation (II.3.2), l'équation du bilan énergétique sera alors :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \dot{q}_g \quad (\text{II.3.6})$$

Pour les situations où la conductivité thermique ne dépend pas de la température l'équation (II.3.6) sera alors

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{q}_g}{\lambda} = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

Où :  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C}$  est la diffusivité thermique du milieu.

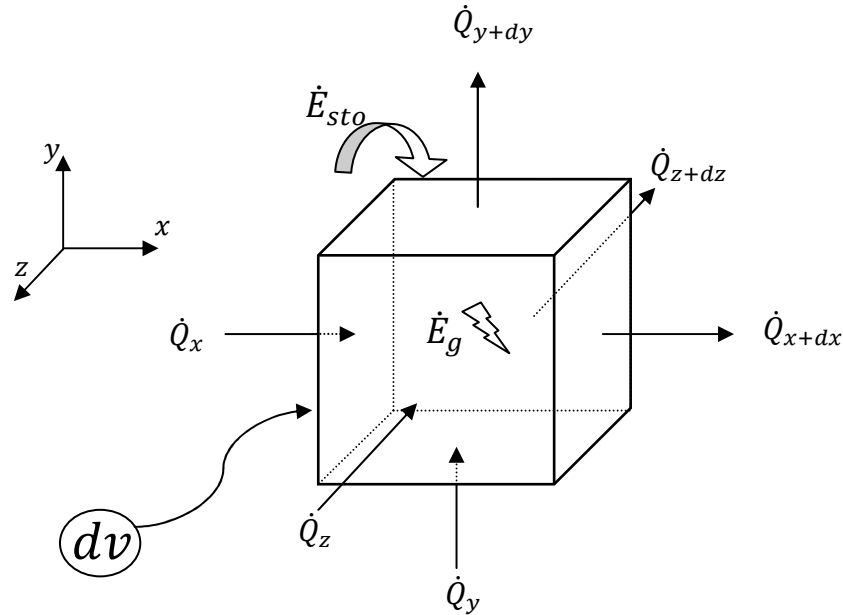


Fig.2.1. Bilan d'énergie

### 3.5. Problème de conduction bien posé

Un problème de conduction bien posé est défini généralement comme suit [78] :

- Trouver  $T(x, y, z, t)$  tel que :  $\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \dot{q}_g$
- La condition initiale est :  $T(x, y, z, 0) = T_i(x, y, z)$ 
  - Une seule condition initiale est exigée ;
  - La condition initiale n'est pas nécessaire pour le cas stationnaire.
- La condition à la limite sur la température,  $T$ , doit satisfaire aussi deux conditions aux limites pour chaque coordonnée. Les conditions aux limites les plus fréquemment rencontrés sont :
  - Condition de Dirichlet :  $T(M_P, t) = T_P(t)$  ;
  - Condition de Neumann :
    - Un flux de chaleur est imposé à la paroi  $q(M_P, t) = q_P(t)$
    - La paroi échange de chaleur avec le milieu extérieur par convection  $q(M_P, t) = h_c(T_P - T_\infty)$
    - La paroi échange de chaleur avec une enceinte par rayonnement  $q(M_P, t) = \sigma \epsilon (T_P^4 - T_{sur}^4)$
  - Cette liste des conditions aux limites n'est pas complète, mais elle inclut un grand nombre de cas importants.



### 3.6. Conduction non linéaire

La non linéarité dans les problèmes de la conduction survient quand les propriétés sont dépendantes de la température ou quand les conditions aux limites sont non linéaires. Le rayonnement thermique et la convection libre sont des exemples typiques de conditions aux limites non linéaires [79].

#### 3.6.1. Equation différentielle non linéaire

Examinons l'équation de la chaleur suivante pour la conduction unidimensionnelle instationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_g = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.3.8})$$

Si :  $\lambda = \lambda(T)$ , le premier terme devient non linéaire. Ce qui est évident si nous récrivons l'équation (II.3.8) comme :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \dot{q}_g = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.3.9})$$

Le terme  $\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2$  est clairement non linéaire. Un autre exemple d'équation différentielle non linéaire est rencontré dans le cas des ailettes. L'équation gouvernante pour une ailette qui échange de chaleur par convection et rayonnement est

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{hC}{\lambda A} (T - T_\infty) - \frac{C\sigma\epsilon}{\lambda A} (T^4 - T_{sur}^4) = 0 \quad (\text{II.3.10})$$

La non linéarité de cette équation est due au terme  $T^4$ .

#### 3.6.2. Conditions aux limites non linéaires

**La convection libre :** Une condition à la limite de type convection libre est exprimée comme suit :

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \beta (T - T_\infty)^{5/4} \quad (\text{II.3.11})$$

Avec :  $\beta$ , une constante. La puissance 5/4 associée à quelques problèmes de la convection libres fait cette condition à la limite non linéaire.

**Le rayonnement :** Une condition à la limite de type rayonnement est exprimée comme suit :

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \sigma \epsilon (T^4 - T_{sur}^4) \quad (\text{II.3.12})$$

**Interface du changement de phase :** la conservation d'énergie à l'interface du changement de phase s'écrit :

$$\lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x} - \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho_S L \frac{dx}{dt} \quad (\text{II.3.13})$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial T_S}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial T_S} \quad (\text{II.3.14})$$

En Remplaçant (II.3.14) dans (II.3.13), on aura :

$$\lambda_S \left( \frac{\partial T_S}{\partial x} \right)^2 - \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial x} \frac{\partial T_S}{\partial x} = \rho_S L \frac{dT_S}{dt} \quad (\text{II.3.15})$$

## 4. Formulation de la méthode des volumes finis

### 4.1. Conduction thermique 1D stationnaire

L'équation différentielle à discrétiser est la suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{II.4.1})$$

En intégrant l'équation (II.4.1) suivant  $x$  de  $e$  à  $w$  (fig.2.2)

$$\int_e^w \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_e^w S dx = \int_e^w 0 dx \quad (\text{II.4.2})$$

$$\left( \lambda \frac{dT}{dx} + \bar{S} x \right) \Big|_e^w = 0 \quad (\text{II.4.3})$$

$$\left[ \lambda_e \left( \frac{dT}{dx} \right)_e - \lambda_w \left( \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (\text{II.4.4})$$

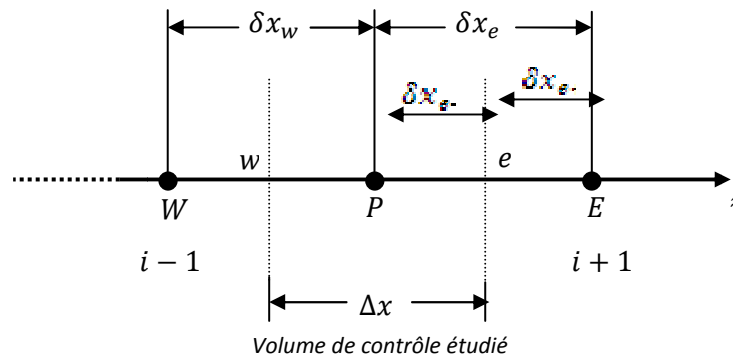


Fig.2.2 maillage unidimensionnel

L'équation (II.4.4) représente le bilan de l'énergie dans le volume de contrôle (fig.2.2). On suppose une variation linéaire du gradient de température entre deux points voisins du maillage, on peut écrire les flux aux faces du volume de contrôle

$$\text{Le flux à la face } w = \lambda_w \left. \frac{dT}{dx} \right|_w = \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}$$

$$\text{Le flux à la face } e = \lambda_e \left. \frac{dT}{dx} \right|_e = \lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}$$

En remplaçant les relations des flux ci-dessus dans l'équation (II.4.4), on obtient

$$\lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (\text{II.4.5})$$

Les distances  $\delta x_e$  et  $\delta x_w$  ne sont pas nécessairement égales. En général, la solution de l'équation discrétisée est plus exacte quand le maillage est serré, mais en fait, lorsque le gradient est faible cela n'est pas nécessaire. Les zones de gradient élevé, par contre devront prévoir un maillage plus serré. Un premier maillage permet de connaître ces régions, un second la solution [80].

Dans l'équation (II.4.5), nous avons besoin des conductivités sur les deux faces du volume de contrôle  $\lambda_e$  et  $\lambda_w$  (fig.2.2). Mais c'est aux points du maillage que nous la connaissons, pour connaître  $\lambda_e$  et  $\lambda_w$  le moyen le plus direct est de prendre un comportement linéaire [80].

$$\lambda_e = f_e \lambda_P + (1 - f_e) \lambda_E \quad (\text{II.4.6})$$

$$\text{Avec } f_e = \frac{\delta x_{e+}}{\delta x_{e-}}$$

## 4.2. Conduction thermique 2D stationnaire

La méthodologie utilisée pour la discrétisation de l'équation dans le cas unidimensionnel peut être utilisée facilement dans le cas bidimensionnel (2D). Pour illustrer cette technique on considère l'équation de la conduction thermique 2D stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (\text{II.4.7})$$

Le type de maillage utilisé dans ce cas est représenté par la figure (fig.2.3)

De plus, par rapport au maillage 1D, aux nœuds voisins, "East" (E) et "West" (W) du point P on ajoute les voisins "North" (N) et "South" (S).

L'intégration de l'équation (II.3.5), donne

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n S dx dy = 0 \quad (\text{II.4.8})$$

$$\Rightarrow \int_y \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy + \int_x \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy + \iint S dx dy = 0 \quad (\text{II.4.9})$$

$$\text{On obtient } \lambda \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w^e + \lambda \Delta x \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s^n + \bar{S} \Delta x \Delta y = 0 \quad (\text{II.4.10})$$

$$\Rightarrow \Delta y \left[ \lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \Delta x \left[ \lambda_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta x \Delta y = 0 \quad (\text{II.4.11})$$

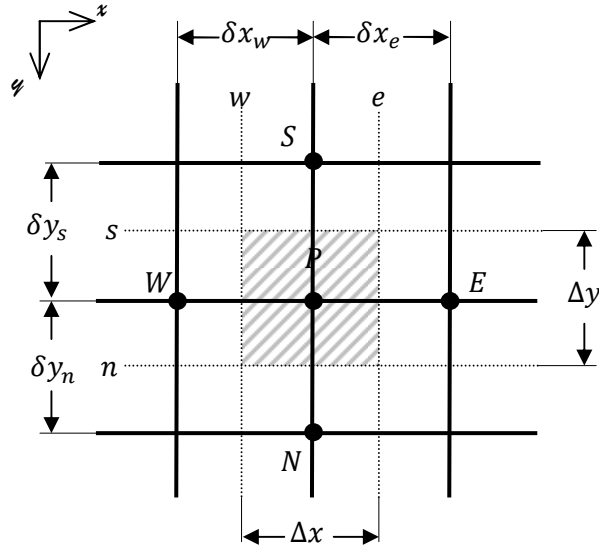


Fig2.3 maillage bidimensionnel

De même qu'à 1D, les flux aux faces ( $e, w, s, n$ ) de VC sont :

$$\text{Le flux à la face } w = \lambda_w A_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w = \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}$$

$$\text{Le flux à la face } e = \lambda_e A_e \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}$$

$$\text{Le flux à la face } s = \lambda_s A_s \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s = \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s}$$

$$\text{Le flux à la face } n = \lambda_n A_n \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_n = \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_n}$$

En remplaçant les relations des flux ci-dessus dans l'équation (II.4.11), on obtient

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (\text{II.4.12})$$

$$\text{Avec } a_E = \frac{\lambda_e \Delta y}{\delta x_e} ; a_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{\delta x_w} ; a_N = \frac{\lambda_n \Delta x}{\delta y_n} ; a_S = \frac{\lambda_s \Delta x}{\delta y_s} ; a_P = a_E + a_W + a_n + a_s ; b = \bar{S} \Delta x \Delta y$$

### 4.3. Conduction thermique 2D instationnaire

L'équation de conduction thermique instationnaire pour un problème 2D est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.4.13})$$

L'intégration de l'équation (II.4.13) donne :

$$\rho C_p \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \int_n^s \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \int_n^s \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \int_n^s \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \int_n^s S dx dy dt \quad (\text{II.4.14})$$

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x \Delta y dt \quad (\text{II.4.15})$$

Où  $T_P^0$  est la température à l'instant  $t$  et  $T_P$  la température à l'instant  $t + \Delta t$

En remplaçant les gradients de température on obtient

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \lambda_w \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_n} - \lambda_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \right) \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x \Delta y dt \quad (\text{II.4.16})$$

Pour calculer la partie droite de l'équation (II.4.16) il faut connaître la variation de  $T_P, T_W, T_E, T_S$  et  $T_N$  dans le temps. Pour cela il y a de nombreuses possibilités, on peut prendre la température à l'instant  $t, T_P^0$ , à l'instant  $t + \Delta t, T_P$  ou une combinaison linéaire des températures à l'instant  $t + \Delta t$  [80]. La forme générale d'intégration temporelle s'écrit

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = (f T_P + (1 - f) T_P^0) \Delta t \quad (\text{II.4.17})$$

Où :  $0 \leq f \leq 1$  est un facteur de pondération. En appliquant la forme générale d'intégration temporelle aux points  $T_P, T_W, T_E, T_S$  et  $T_N$  on obtient

$$a_P T_P = a_W [f T_W + (1 - f) T_W^0] + a_E [f T_E + (1 - f) T_E^0] + a_S [f T_S + (1 - f) T_S^0] + a_N [f T_N + (1 - f) T_N^0] + [a_P^0 - (1 - f) a_W - (1 - f) a_E - (1 - f) a_S - (1 - f) a_N] T_P^0 + b \quad (\text{II.4.18})$$

Où  $a_P = f(a_W + a_E + a_S + a_N) + a_P^0$  ;  $a_P^0 = \rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t}$  ;  $b = \bar{S} \Delta x \Delta y$

$$a_E = \frac{\lambda_e \Delta y}{\delta x_e} \quad ; \quad a_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{\delta x_w} \quad ; \quad a_N = \frac{\lambda_n \Delta x}{\delta y_n} \quad ; \quad a_S = \frac{\lambda_s \Delta x}{\delta y_s}$$

Le développement d'un schéma numérique peut se faire de trois manières, selon la valeur du facteur  $f$

- Si  $f = 0$  : le schéma est dit explicite.
- Si  $f = 0.5$  : le schéma est dit de Cranck- Nicholson.
- Si  $f = 1$  : le schéma est dit implicite.

#### 4.4. Conduction thermique en coordonnées axisymétriques

L'équation de conduction thermique instationnaire pour un problème axisymétrique est :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.4.19})$$

On procède de la même manière qu'en coordonnées cartésiennes l'équation discrétisée en coordonnées axisymétriques s'écrit :

$$a_P T_P = a_W [f T_W + (1 - f) T_W^0] + a_E [f T_E + (1 - f) T_E^0] + a_S [f T_S + (1 - f) T_S^0] + a_N [f T_N + (1 - f) T_N^0] + [a_P^0 - (1 - f) a_W - (1 - f) a_E - (1 - f) a_S - (1 - f) a_N] T_P^0 + b \quad (\text{II.4.20})$$

Où  $a_P = f(a_W + a_E + a_S + a_N) + a_P^0$  ;  $a_P^0 = \rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t}$  ;  $b = \bar{S} \Delta x \Delta y$

$$a_E = \frac{\lambda_e r_e \Delta z}{\delta r_e} ; a_W = \frac{\lambda_w r_w \Delta z}{\delta r_w} ; a_N = \frac{\lambda_n r_p \Delta r}{\delta z_n} ; a_s = \frac{\lambda_s r_p \Delta r}{\delta z_s}$$

## 4.5. Choix géométrique

Pour l'instant, nous n'avons pas localisé les volumes de contrôle. Nous allons montrer ici deux choix possibles et discuter leurs mérites [80].

### 4.5.1. Choix du maillage (A)

Les surfaces des volumes seront placées au milieu des deux points du maillage.

### 4.5.2. Choix des volumes de contrôle (B)

Les points du maillage seront placés au centre du volume de contrôle.

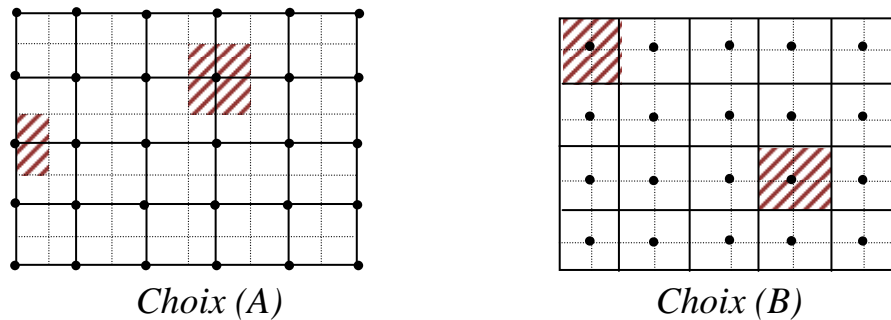


Fig.2.4. Choix géométriques

### 4.5.3. Comparaison entre les deux choix

1. Si le maillage est uniforme (ou les volumes). Les deux choix sont identiques.
2. Le choix A permet un calcul plus exact du flux à travers la surface.
3. Par contre le choix A montre que le point  $P$  n'est pas au centre du volume de contrôle et cependant la température  $T_p$  est prise pour tout le volume, de même  $e$  ne se trouve pas au milieu de la surface or pour calculer le flux, la valeur en  $e$  est prise pour toute la surface.
4. Le choix B ne présente pas les désavantages du (3) mais ne bénéficie pas de l'avantage du (2).
5. L'avantage décisif de B est de placer les volumes de contrôles en fonction des limites ou des discontinuités.
6. Pour les limites, dans le choix A, nous aurons des demis et des quarts de volumes de contrôle. Dans le choix B, les volumes de contrôle remplissent tout l'espace, puis nous plaçons les points du maillage et nous prenons des points sur les limites en les rajoutons, nous considérons que nous avons des volumes de dimension nulles et nous pouvons utiliser directement la valeur de la température en ce point ou le flux de chaleur.

## 4.6. Stabilité et convergence

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre un problème approché conduisent à un résultat qui est toujours entaché d'erreur. Cette erreur doit être suffisamment petite pour que la solution numérique converge vers la solution réelle. Dans ce cas l'algorithme (ou la méthode) est dit convergent. La stabilité garantit que les erreurs ne s'amplifient pas au cours du déroulement de l'algorithme et que la méthode reste stable [81].

### 4.6.1. Les quatre règles de base (critères de stabilité)

Les suivantes règles ont été énoncées par Patankar [7]

**Règle 1 « Consistance » :** Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.

**Règle 2 « Coefficients positifs » :** Si nous avons un accroissement en un point ( $T_E$  par exemple) il faut que le point voisin ( $T_P$ ) ait un accroissement et donc les coefficients  $a_P$  et  $a_E$  ont même signe que nous choisissons positif.

**Règle 3 « Pente négative » :** Quand nous linéarisons le terme source  $\bar{S} = S_c + S_p T_p$ , le coefficient  $a_p$  peut devenir négatif, il faut donc que  $S_p$  soit négatif pour ne pas courir ce danger.

**Règle 4 « Somme des coefficients voisins » :** Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante. Mathématiquement la règle peut être écrite ainsi

$$\begin{cases} a_p = \sum a_{nb} \text{ si } S = 0 \\ a_p > \sum a_{nb} \text{ si } S \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.4.21})$$

### 4.6.2. Critère de convergence

On dit qu'un processus itératif a atteint la convergence lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans la valeur de la variable. Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé « critère de convergence » qui dépend de la nature du problème et des objectifs du calcul [82].

Un critère approprié est celui qui porte sur les résidus de la température ( $R_T$ ) :

$$R_T = \sum_{nb} a_{nb} T_{nb} + b - a_P T_P \quad (\text{II.4.22})$$

Evidemment, quand l'équation discrétisée est satisfaite,  $R_T$  tend vers zéro. Mathématiquement, cela se traduit par l'inégalité suivante :

$$\sum_{\omega} |R_T| < \varepsilon_T \quad (\text{II.4.23})$$

Où  $\omega$  : domaine de calcul  $\varepsilon_T$  : Valeur infiniment petite.

#### 4.7. Non-linéarité

La conductivité thermique  $\lambda$  peut dépendre de la température et le terme caractérisant la génération de la chaleur  $S$ , peut être une fonction nonlinéaire de la température, Les conditions aux limites elles-mêmes peuvent être aussi nonlinéaire. Dans ces situations, les coefficients  $a_E$  ;  $a_W$  ;  $a_N$  ;  $a_S$  ;  $a_P$  ;  $b$  dans l'équation de discrétisation dépendent de la température, et par conséquent elle ne sera plus une équation linéaire. Pour résoudre les problèmes non-linéaires, on utilise un calcul itératif en suivons les étapes suivantes [80].

- a) Donnons des valeurs estimées de  $T$  en chaque point de maillage,
- b) de ces valeurs, déduisons les coefficients de l'équation discrète,
- c) résolvons les équations discrètes pour avoir  $T$ ,
- d) avec ces nouvelles valeurs reprenons l'étape b) et recommençons jusqu'à des valeurs ne variant plus.

### 5. Solution du système algébrique

Pour résoudre un problème de conduction thermique, deux étapes sont nécessaires:

La première est la discrétisation d'une équation différentielle aux dérivées partielles en une équation algébrique linéaire. Une équation est définie pour chaque volume de contrôle, donc le résultat de la discrétisation est un système d'équation de dimension égale au nombre de nœud spécifique.

La deuxième étape concerne la résolution du système ainsi construit. On distingue deux techniques de résolution : les méthodes directes où la solution est obtenue directement sans passer par des itérations, et les méthodes indirectes où une estimée initiale est définie sur la solution, puis des itérations sont exécutées jusqu'à la convergence vers la solution exacte.

### 6. Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, le mode de transfert thermique conductif a été défini avec ses équations gouvernantes. Les équations de la conduction de chaleur multidimensionnelles ont été présentées et les conditions aux limites et initiale appropriées ont été données. Une brève présentation de conduction non linéaire a été faite.

Dans la deuxième partie, la méthode des volumes finis a été présentée et appliquées à la discrétisation des équations relatives aux problèmes de la conduction thermique. La méthode ainsi présentée sera utilisée pour le développement du code de simulation de la conduction thermique.



# *Chapitre III*

---

## *Méthodes Inverses en conduction thermique*

*Inverse Heat Transfer Problems (IHTP) rely on temperature and/or heat flux measurements for the estimation of unknown quantities appearing in the analysis of physical problems in thermal engineering. As an example, inverse problems dealing with heat conduction have been generally associated with the estimation of unknown boundary conditions, by using temperature measurements taken below the boundary surface. Therefore, while in the classical direct heat conduction problem the cause (boundary conditions) are given and the effect (temperature field in the body) is determined, the inverse problem involves the estimation of boundary conditions knowing the temperature field in the body.*

## 1. Introduction

Dans les problèmes classiques de la conduction thermique directe, les propriétés thermo-physiques du milieu, les conditions aux limites et la condition initiale, sont données et la distribution de température dans le corps est à déterminer. Le problème inverse consiste à estimer un ou plusieurs de ces caractéristiques connaissant le champ de température dans le corps.

Dans ce chapitre, nous présentons une discussion générale sur les problèmes inverses de transfert de chaleur, y compris les concepts de base, les domaines d'application, la classification, et un aperçu sur des techniques de recherches de solutions à quelques problèmes de conduction thermique inverse.

## 2. Concept de transfert thermique inverse

La signification physique de problème de transfert thermique inverse est mieux envisagée en se référant au problème de conduction de chaleur unidimensionnel instationnaire dans une plaque d'épaisseur  $L$ .

La distribution de température initiale dans la plaque est  $T(t = 0, x) = F(x)$ . Pour  $t > 0$ , un flux chaleur est appliquée à la frontière  $x = 0$ , alors que la limite  $x = L$  est maintenue à une température constante  $T_L$ . La formulation mathématique de ce problème est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < L \quad t > 0 \quad (\text{III.2.1})$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = f(t) \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (\text{III.2.2})$$

$$T = T_L \quad x = L \quad t > 0 \quad (\text{III.2.3})$$

$$T = F(x) \quad 0 < x < L \quad t = 0 \quad (\text{III.2.4})$$

Pour le cas où les conditions aux limites, la condition initiale, et les propriétés thermo-physiques  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $C_p$  sont tous spécifiés, le problème donné par les équations (III.2.1) est préoccupé par la détermination de la distribution de la température  $T(x, t)$  à l'intérieur du solide, comme une fonction du temps et de position. C'est ce qu'on appelle le problème direct.

Nous considérons maintenant un problème similaire à celui donné par les équations (III.2.1), mais la fonction  $f(t)$  condition aux limites à la surface  $x = 0$  est inconnue, alors que toutes les autres quantités apparaissant dans les équations (III.2.1) sont connues. Nous avons ensuite souhaitez déterminer la condition à la limite inconnue.

Pour compenser le manque d'information sur la condition limite, les températures mesurées  $T(x_m, t_i) = Y_i$ , sont donnés à un point intérieur  $x_m$ , à différents moments  $t_i$ , sur

un intervalle de temps spécifié  $0 < t < t_f$ . Ceci est un problème inverse car il est préoccupé par l'estimation du flux de chaleur inconnu.

La formulation mathématique de ce problème inverse est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < L \quad t > 0 \quad (\text{III.2.5})$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = f(t) = ? \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (\text{III.2.6})$$

$$T = T_L \quad x = L \quad t > 0 \quad (\text{III.2.7})$$

$$T = F(x) \quad 0 < x < L \quad t = 0 \quad (\text{III.2.8})$$

Et les mesures de température à une position  $x_m$ , à l'intérieur, aux différents moments  $t_i$  sont donnés par

$$T(x_m, t_i) = Y_i \quad (\text{III.2.9})$$

L'objectif principal du problème direct est de déterminer la distribution de température  $T(x, t)$  dans le solide, quand toutes les caractéristiques de causalité (c'est à dire, les conditions aux limites et la condition initiale, les propriétés thermo-physiques du milieu) sont spécifiées. D'autre part, l'objectif du problème inverse consiste à estimer un ou plusieurs de ces caractéristiques inconnues de causalité, de la connaissance des températures mesurées. Dans les problèmes directs les causes sont données, l'effet est à déterminer, tandis que dans les problèmes inverses l'effet est donné, la cause (ou causes) est estimée.

### 3. Domaines d'application de transfert thermique inverse

- Estimation des propriétés thermo-physiques des matériaux [110] ;
- Estimation des propriétés de rayonnement et les conditions aux limites dans l'absorption, d'émission et diffusion de matériaux semi-transparents [111] ;
- Contrôle du mouvement de l'interface solide-liquide lors de la solidification [112] ;
- Estimation des conditions d'entrée et flux de chaleur par convection forcée à l'intérieur des conduits [113] ;
- Estimation de la forme des limites de corps [114].

### 4. Classification des problèmes de transfert thermique inverses

La plupart des premiers travaux sur la solution des problèmes inverses de transfert de chaleur ont été concernés par la conduction de chaleur dans des géométries unidimensionnelle. L'application des techniques d'analyse inverse à des problèmes multidimensionnels, ainsi que des problèmes impliquant la convection et le rayonnement, est plus récente. Les problèmes de transfert thermique inverse peuvent être classés en conformité avec la nature du processus de transfert de chaleur, telles que:

- Problèmes de transfert thermique inverse de conduction
- Problèmes de transfert thermique inverse de convection (forcée ou naturelle)
- Problèmes de transfert thermique inverse du rayonnement
- Problèmes de transfert thermique inverse de conduction et le rayonnement simultanés
- Problèmes de transfert thermique inverse de conduction et la convection simultanés
- Problèmes de transfert thermique inverse du changement de phase (fusion ou de solidification)

Une autre classification basée sur le type de caractéristique de à estimer. Par exemple:

- Problèmes de transfert thermique inverse des conditions aux limites
- Problèmes de transfert thermique inverse des propriétés thermo- physiques
- Problèmes de transfert thermique inverse de la condition initiale
- Problèmes de transfert thermique inverse du terme source
- Problèmes de transfert thermique inverse des caractéristiques géométriques d'un corps

## **5. Aperçu des techniques de solution pour les problèmes de transfert thermique inverse**

Nous présentons ci-dessous les différentes techniques utilisées pour la solution des problèmes de transfert thermique inverse. Ces techniques nécessitent généralement la solution du problème directe associé. Par conséquent, il est difficile de présenter les techniques de résolution de problèmes inverses sans se référer à ceux associés à la solution des problèmes directs. Ces techniques peuvent être plus ou moins classées sous les groupes suivants:

- Approche des équations intégrales [115]
- Techniques des transformées intégrales [116].
- L'approche polynomiale [117].
- Les méthodes numériques telles que la méthode des différences finies [118], méthode des éléments finis [119] et méthode des éléments de frontière [120].
- Les algorithmes génétiques [121].

## **6. Conduction inverse**

En présente dans ce qui suit quelques problèmes de conduction thermique inverse :

- Estimation de la conductivité thermique pour des domaines anisotropiques [122] ;
- Estimation de la condition initiale [123] ;
- Estimation de propriétés dépendantes de température [124] ;
- Estimation de la résistance de contact entre des surfaces contactées périodiquement [125].

### 6.1. Estimation de la conductivité thermique pour des domaines anisotropiques

Dans la nature, plusieurs matériaux ont des conductivités thermiques dépendantes de la direction, y compris, entre autres, des bois, des roches et des cristaux. C'est également le cas pour certains matériaux synthétiques, par exemple, les matériaux composites.

#### 6.1.1. Problème direct

Le problème physique considéré ici implique la conduction de la chaleur linéaire en trois dimensions dans un solide anisotrope, avec des conductivités thermiques  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  suivant les directions  $x, y, z$  respectivement. Le solide est considéré comme un parallélépipède cotés  $a \times b \times c$ , initialement à la température  $T$  uniforme. Pour des temps  $t > 0$ , des flux de chaleur uniforme  $q_1, q_2, q_3$  sont imposés aux surfaces  $x = a, y = b, z = c$ , respectivement, tandis que les trois autres limites restant sont supposés isolés. La formulation mathématique de problème physique est donnée sous forme suivante

$$\lambda_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \lambda_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \lambda_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c, t > 0 \quad (\text{III.6.1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{III.6.2})$$

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = q_1, \quad \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=b} = q_2, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=c} = q_3 \quad (\text{III.6.3})$$

$$T = 0 \quad t = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad (\text{III.6.4})$$

Dans le problème direct associé au problème physique décrit ci-dessus, les trois composantes de conductivité thermique  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ , ainsi que la géométrie de solide, les conditions initiales et aux limites, sont connus. L'objectif du problème direct est de déterminer le champ de température transitoire dans le corps.

#### 6.1.2. Problème inverse

Pour le problème inverse considéré ici, les conductivités thermiques  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  sont considérées comme des inconnus, tandis que les autres quantités apparaissant dans la formulation du problème direct décrit ci-dessus sont supposées être connues.

### 6.2. Estimation de la condition initiale

Dans cette section, nous discutons le problème inverse de l'estimation de la condition initial inconnu dans une plaque d'épaisseur finie

**6.2.1. Problème directe**

La formulation mathématique du problème physique considéré ici, est donnée par :

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (\text{III.6.5})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad t > 0 \quad (\text{III.6.6})$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (\text{III.6.7})$$

Le problème direct s'intéresse à la détermination du champ de température  $T(x, t)$ , lorsque la condition initiale  $F(X)$  est connue.

**6.2.2. Problème inverse**

Dans le problème inverse, la condition initiale  $F(X)$  est considérée comme inconnus à estimer

**6.3. Estimation de propriétés dépendantes de température**

Dans les sections précédentes de ce chapitre, nous avons présenté les problèmes inverses de conduction thermique linéaire. Dans cette section, nous illustrons la présentation du problème inverse de l'estimation de capacité thermique et la conductivité thermique dépendants de température.

**6.3.1. Problème direct**

Soit un problème de conduction thermique unidimensionnelle non linéaire, avec des propriétés dépendantes de la température :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho C(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (\text{III.6.8})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad t > 0 \quad (\text{III.6.9})$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \phi(t) \quad t > 0 \quad (\text{III.6.10})$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (\text{III.6.11})$$

Le problème direct défini ci-dessus, s'intéresse à la détermination de la distribution de température  $T(x, t)$  dans le milieu, lorsque les propriétés physiques  $\lambda(T)$ ,  $C(t)$  et les conditions aux limites et initiales sont connues.

**6.3.2. Problème inverse**

Considérons les deux problèmes inverses suivants:

$\lambda(T)$  inconnue, mais  $C(t)$  connue

$C(t)$  inconnue, mais  $\lambda(T)$  connue

Pour la solution de chacun de ces problèmes inverses, nous considérons les  $M$  températures transitoires  $T(x_m, t)$  mesurés aux positions  $x_m, m = 1, 2, \dots, M$ .

Les températures estimées sont obtenues à partir de la solution du problème direct en utilisant une estimation de la quantité inconnue.

#### 6.4. Estimation de coefficient d'échange pour une surface ailetée

Il ressort des exemples précédents, que la solution des problèmes inverses impliquant les différents modes de transfert de chaleur requiert généralement la solution de leurs problèmes associés directs en utilisant une estimation de la quantité inconnue pour la détermination de la distribution de température. Le problème inverse est résolu en utilisant la distribution de température trouvée par la résolution du problème direct.

Pour estimer le coefficient d'échange par convection sur une surface ailetée, par exemple, on considère le problème direct qu'on va le présenter dans le chapitre suivant en supposant un coefficient de convection constant le long de la surface ailetée, puis en utilise la distribution de température trouvée par la résolution du problème direct avec une certaine erreur  $\Delta T$  pour estimer l'évolution de coefficient de convection. Le problème direct est résolu par la méthode des volumes finis.

# Chapitre IV

---

## *Transferts thermiques dans les moteurs à combustion interne*

### *Electric Starters*

*Early automobile engines were started with hand cranks that connected with the crankshaft of the engine. This was a difficult and dangerous process, sometimes resulting in broken fingers and arms when the engine would fire and snap back the hand crank. The first electric starters appeared on the 1912 Cadillac automobiles, invented by C. Kettering, who was motivated when his friend was killed in the process of hand starting an automobile [85].*

### *Motorcycle Engine*

*In the early 1990s, Honda produced a racing motorcycle with a V4 engine, of which each cylinder had four intake valves and four exhaust valves. The engine was developed by modifying a V8 engine so that the motorcycle could be raced under rules restricting engines to four cylinders. A four-valve-per-cylinder V8 engine block was modified by removing the metal between each set of two cylinders [86].*

### *Automobiles Ran on Charcoal*

*In the late 1930s and early 1940s petroleum products became very scarce, especially in Europe, due to World War II. Just about all gasoline products were claimed by the German army, leaving no fuel for civilian automobile use. Enterprising people in several countries, mainly Sweden and Germany, developed a way to operate their automobiles using solid fuels like charcoal, wood, or coal [87].*

### *Automobiles Which Clean the Air*

*During the middle 1990s, Ford began testing a catalytic system that could reduce atmospheric ozone and carbon monoxide. A platinum-based catalyst would be coated on the air flow side of specially built automobile radiators and air conditioner condensers. As air passes over these surfaces, a reaction would be promoted that would convert ozone to oxygen and carbon monoxide to carbon dioxide [88, 89].*



## 1. Introduction

Le moteur à combustion interne est un moteur thermique qui converti l'énergie chimique du combustible en énergie mécanique, habituellement disponible sur un arbre tournant. L'énergie chimique du combustible est convertie en énergie thermique au moyen de la combustion ou de l'oxydation avec l'air à l'intérieur du moteur. Cette énergie thermique augmente la température et la pression des gaz dans le moteur, l'expansion des gaz est convertie par les liaisons mécaniques du moteur au vilebrequin [90].

## 2. Cycle thermodynamique d'un moteur

Les moteurs thermiques fonctionnent suivant un cycle à quatre temps ou deux temps suivant que les opérations successives d'admission, de compression, de combustion, de détente, et d'échappement se font en deux ou en un seul tour d'arbre moteur [91]. Des cycles trois et six temps ont été essayés dans le développement des nouveaux moteurs [92].

Le cycle thermodynamique d'un moteur à 4 temps est présenté par la suite [93] (Cf. figure 4.1) :

**Temps 1 « Admission »** : qui se produit lorsque le piston descend du PMH au PMB créant ainsi une dépression dans le cylindre et l'aspiration du mélange carburé.

**Temps 2 « Compression »** : quand les deux valves sont fermées et le mélange à l'intérieur du cylindre est comprimé à une petite fraction de son volume initial. Vers la fin de la compression, la combustion est commencée et la pression augmente rapidement.

**Temps 3 « Combustion »** : qui se produit lorsque le piston descend du PMH au PMB, les gaz abaissent le piston et forcent la manivelle à tourner. Comme le piston approche au PMB la valve du gaz d'échappement s'ouvre pour commencer le processus d'échappement.

**Temps 4 « Echappement »** : où les gaz de combustion s'évacuent ; en premier, parce que la pression du cylindre est plus haute que la pression du gaz d'échappement, après sous la poussée du piston qui remonte vers le PMH. Lorsque le piston approche au PMH la valve d'entrée s'ouvre. Juste après le PMH le cycle commence encore.

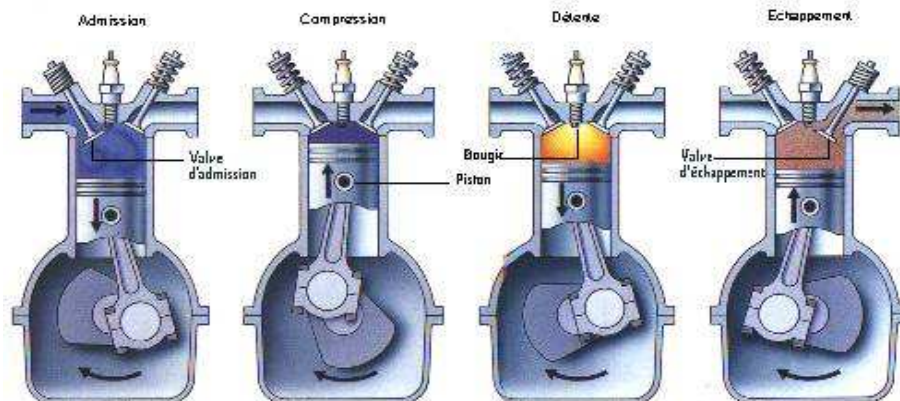


Fig.4.1 Cycle à 4 temps [94].

### 3. Présentation des organes du moteur

On présente ici les organes constituant l'enveloppe de la chambre de combustion (le cylindre, le piston, la culasse et les soupapes).

#### 3.1. Le cylindre

Le cylindre peut se présenter sous la forme d'un alésage dans le bloc moteur ou sous la forme d'un fût cylindrique. Les dimensions sont imposées par le couple et la puissance que le moteur est appelé à fournir. Si le moteur est refroidi par l'air, la surface externe de la chemise présente un cannelage. Les ailettes peuvent être annulaires ou longitudinales, et son plus longue dans la zone du PMH (Cf. figure 4.2).

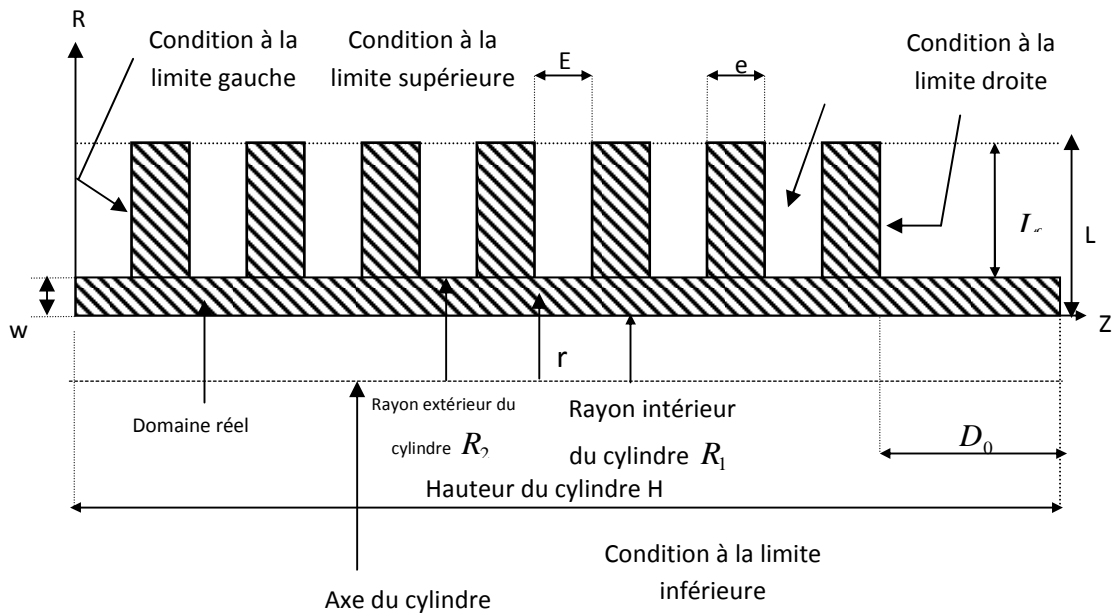


Fig.4.2 Section du cylindre représentant le domaine à étudier

#### Conditions initiales et aux limites

Pour la condition à la limite supérieure, la partie externe de la chemise est en contact avec un l'air dont la température à l'infini et le coefficient de transfert  $h_\infty$  et la température  $T_\infty$  sont constants.

La limite inférieure correspond à la frontière avec la chambre de combustion, avec une température de gaz  $T_g$  et un coefficient de transfert variable  $h_g$  donnée par corrélation de Woschni [95]

$$h_g = 0.23(1 + b) \left( \frac{P_g^{0.7}}{T_g^{0.2} D^{0.3}} \right) \tag{IV.3.1}$$

$$D = \frac{8 \cdot 10^{-2} L}{4 \cdot 10^{-2} + L} \quad T_g = 2700 \left( \frac{6 \cdot 10^6}{P_g} \right)^{-0.22} \quad P_g = 6 \cdot 10^6 \left( \frac{0.01}{L} \right)^{1.28} \quad L = 0.01 + (14.4 t)$$

$L$  : longueur du volume occupé par le gaz à un instant donné ;  $D$  : diamètre équivalent ;  $b$  : paramètre dépendant de la géométrie de la chambre ( $-0.3 < b < 0.2$ ).

Pour la condition à la limite gauche, la conduction radiale étant plus importante que la conduction longitudinale, nous avons négligé le flux de chaleur le long du cylindre.

Pour la condition à la limite droite le cylindre étant séparé de la culasse par un joint d'étanchéité isolant, la condition d'isolation est donc prévue.

Pour la condition initiale  $T_i$  on prend une température constante sur tout le cylindre et égale à la température ambiante.

### 3.2. Le piston

Le piston peut être décomposé en quatre parties principales [96]

- la tette ou fond qui reçoit les efforts dus aux gaz ;
- les portes segments qui par l'intermédiaire des segments, assure l'étanchéité aux gaz et à l'huile et dissipe une partie des calories reçues vers le fluide de refroidissement ;
- le logement de l'axe de piston ou trou d'axe ;
- la jupe, ou partie frottant, dont le rôle est de guider les portes segments et de dissiper une partie des calories.

Le piston et les segments doivent transmettre au vilebrequin, par l'intermédiaire de la bielle, il est animé d'un mouvement alternatif et rectiligne dans le cylindre [91].

Les matériaux les plus utilisés pour les pistons sont les alliages d'aluminium au silicium, souvent de l'AS 12 dans les moteurs à essence [96].

Tab.4.1 Dimensions du piston par rapport à son diamètre [97]

	$L$	$L_1$	$L_2$	$e$	$e_1$	$e_2$	$h$	$h_1$
Essence	0.65	0.5	0.15-0.2	0.1	0.02	0.08	0.035	0.03
Diesel	1.2-1.5	0.6	0.2	0.09-0.15	0.03	0.07-0.1	0.04	0.025-0.04

#### Conditions initiales et aux limites

La paroi supérieure du piston se trouve en contact avec l'huile de graissage, la température de ce dernier est  $T_U$  et son coefficient de transfert est  $h_U$  dépendent de sa viscosité et du régime de rotation du moteur, cependant nous allons les considérer constants.

La limite inférieure correspond à la frontière avec la chambre de combustion, avec une température de gaz  $T_g$  et un coefficient de transfert variable  $h_g$  calculé comme suit :

$$h_g = 0.19 \left( \frac{P_g^{0.7}}{T_g^{0.2} D^{0.3}} \right) \quad (\text{IV.3.2})$$

Pour la condition à la limite gauche, nous admettons que le flux axial est plus important que le flux radial, ce qui nous conduit à supposer que le flux radial soit négligeable. Compte tenu de la symétrie, la région correspondant à la limite droite est

considérée adiabatique. Pour la condition initiale on prend une température constante sur tout le piston et égale à la température ambiante.

### 3.3. La culasse

La culasse est le chapeau obturant les cylindres à l'opposé du piston. La culasse ménage au dessus du piston le volume défini par la chambre de combustion. Elle comprend les orifices destinés aux soupapes.

#### Conditions initiales et aux limites

A la frontière supérieure, règne une condition de convection due au milieu ambiant causé par l'air environnant ; la paroi inférieure, correspond à une condition de convection engendrée par les gaz brûlés, avec une température  $T_g$  et un coefficient de transfert variable  $h_g$ .

$$h_g = 0.19 \left( \frac{P_g^{0.7}}{T_g^{0.2} D^{0.3}} \right) \quad (\text{IV.3.3})$$

Pour la limite gauche, le flux de chaleur longitudinal est supposé négligeable devant le flux axial ; la limite droite, correspond à une condition adiabatique, comme précédemment, compte tenu de la symétrie du problème.

Pour la condition initiale on prend une température constante sur tout le piston et égale à la température ambiante.

### 3.4. Les soupapes

Les soupapes d'admission (en un seul matériau, de l'acier au chrome silicium) peuvent atteindre une température de 500 °C contre 800 °C pour celles d'échappement (en contact avec des gaz à près de 1000 °C au niveau du raccordement des conduits d'échappement dans le collecteur), qui sont en outre soumises à une forte corrosion chimique. On utilise donc deux matériaux, un acier au chrome-manganèse pour la tête et la partie inférieure de la queue, et un acier au chrome silicium pour la partie supérieure de la queue, les deux éléments étant soudés bord à bord par fiction [96].

Tab.4.2 Dimensions des soupapes fraction du diamètre de la soupape [97]

Dimension	Admission	Echappement
$h$	0.88-0.93	0.95
$h_m$	1	0.9-1
$d_c$	1.1	1.1-1.11
$e_s$	0.075-0.85	0.095-0.105
$d_t$	0.2-0.22	0.23-0.25
$d$	0.24	0.24
$d_1$	0.25	0.35
$d_2$	0.88-0.93	0.9-1
$a$	15°	
$b$	30°-40°	

## 4. Echanges thermiques dans les moteurs

Les différents processus d'échanges thermiques intervenant dans les moteurs à combustion interne sont : échange thermique avec les gaz participants à la combustion ; échange thermique avec le fluide de refroidissement ; échange thermique avec le fluide de lubrification ; échange thermique avec les éléments sous le capot (rayonnement) [82].

La solution du problème de transfert de chaleur dans les moteurs à combustion interne est très compliquée pour les raisons suivantes :

- La température des gaz dans les cylindres varie cycliquement ;
- Les pièces du moteur comme le piston ont une forme cylindrique non régulière, et sont dépendantes de différentes températures et des coefficients de transfert de chaleur du haut, du bas et des cotés latéraux ;
- L'estimation des valeurs exactes des températures et des coefficients de transfert de chaleur constitue un problème assez complexe.

### 4.1. Echange thermique gaz-parois internes

Pour un élément de surface infinitésimale  $dA$ , la quantité de chaleur transmise aux parois est donnée par :

$$dQ_g = h_g(T_g - T_p)dA \quad (\text{IV.4.1})$$

Le transfert thermique entre fluide et parois se fait en général par convection et rayonnement. Différentes expressions du coefficient d'échange  $h_g$  ont été proposées dans la littérature.

#### 4.1.1. Relation basée sur le nombre de Nusselt [98]

Formule de WOSCHNI (1967) : en 1967, WOSCHNI a proposé une corrélation qui est largement utilisée pour évaluer la valeur du coefficient de transfert convectif,  $h$ , donnée par :

$$Nu = 0.035 R_e^{0.8}$$

Formule de TAYLOR (1977) : parmi les relations les plus utilisées, la relation de TAYLOR proposée en 1977 est utilisée. Elle est donnée par :

$$Nu = 10.4 R_e^{0.75}$$

#### 4.1.2. Relations expérimentales [97]

Elles sont établies à partir de la pression, la température et la vitesse moyenne du piston.

Relation de NUSSELT (1923) : Nusselt a proposé une relation permettant la détermination du coefficient d'échange thermo-convectif, elle a pour expression :

$$h = 1.15 \left(1 + 0.24 U_{mp}\right) \sqrt[3]{P_g^2 T_g} + 0.0004206 \frac{\left(\frac{T_g}{100}\right)^4 \left(\frac{T_p}{100}\right)^4}{T_g - T_p} \quad (\text{IV.4.2})$$

Le premier terme représente le transfert de chaleur convectif le second est le transfert de chaleur par rayonnement.

Relation de JACLITCH (1929) : la relation de JACLITCH est utilisée dans les moteurs rapides. Le coefficient d'échange thermoconvectif a pour expression :

$$h = 0.2445 \left(1 + 1.24 U_{mp}\right) P_g^n T_g^{n-1} \quad (\text{IV.4.3})$$

$$\text{Avec : } n = 0.364 + 1.685 \cdot 10^{-6} T_g$$

#### 4.1.3. Corrélations par coefficient d'échange global

La corrélation la plus utilisée est celle élaborée en 1967 par Woschni [95]. Elle est basée sur l'hypothèse que l'écoulement est turbulent et que la convection est forcée aussi bien dans les moteurs Diesel que dans les moteurs à allumage commandé. En considérant que les méthodes expérimentales utilisant la température de surface ne convenaient pas, ces données expérimentales étant entachées d'une dispersion importante, l'auteur a préféré utiliser un bilan global sur le moteur pour déterminer, pour chaque phase du cycle thermodynamique, la quantité de chaleur cédée aux parois. Sa formulation du coefficient d'échange global est la suivante :

$$h_G = 0.013 D^{-0.2} P^{0.8} T^{-0.53} V^{0.8} \quad (\text{IV.4.4})$$

Avec : P et T, la pression (bar) et la température (K) dans le cylindre. V, définit une vitesse caractéristique telle que :

$$V = \left[ c_1 \bar{V}_P + c_2 \frac{V_c T_1}{P_1 V_1} (p - p_0) \right] \quad (\text{IV.4.5})$$

Où :  $V_c$  est la cylindrée unitaire ( $\text{m}^3$ ),  $p_1, T_1$  et  $V_1$  respectivement la pression (bar), la température (K) et volume ( $\text{m}^3$ ) de la chambre de combustion à un instant de référence (la fermeture de l'admission ou le début de la compression),  $\bar{V}_P$  la vitesse moyenne du piston (m/s),  $p_0$ , la pression atmosphérique (bar),  $c_1$  et  $c_2$  désignent les coefficients spécifiques à chaque phase du cycle moteur. Le tableau I.2 donne les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  utilisés.

Tab.4.3 Coefficients  $C_1$  et  $C_2$  de la corrélation de Woschni

Phase	$C_1$	$C_2$ (K-1)
Admission échappement	6.18	0
compression	2.28	0
Combustion détente	2.28	$3.24 \cdot 10^{-3}$

#### 4.1.4. Corrélations par contribution convective et radiative

Les corrélations différenciant les contributions convective et radiative sont plus récentes, et sont apparues grâce à l'amélioration des techniques expérimentales et

notamment aux techniques de mesure des flux radiatifs. En 1971, Annand [99] a proposé une corrélation comportant des termes distincts pour modéliser la part convective et la part radiative.

L'échange convectif est calculé par la relation

$$Nu = a Re^{0.7} \quad (IV.4.6)$$

Le paramètre «  $a$  » a une valeur comprise entre 0.35 et 0.8 et le nombre de Reynolds est basé sur l'alésage du cylindre et la vitesse moyenne du piston.

Le flux radiatif est donné par la relation

$$Q_{gaz \rightarrow paroi} = S_{gaz \rightarrow paroi} c (T_{gaz}^4 - T_{paroi}^4) \quad (IV.4.7)$$

Durant les phases combustion et détente, le coefficient «  $c$  » vaut  $3.3 \cdot 10^{-8}$  pour les moteurs Diesel et  $4.3 \cdot 10^{-9}$  pour les moteurs essence. En dehors de ces phases,  $c$  a une valeur nulle.

## 4.2. Echanges entre les gaz d'admission/échappement et paroi de culasse

Les échanges convectifs entre les parois de la culasse et les gaz d'admission ou les gaz d'échappement sont caractérisés par des vitesses plus importantes que dans le cylindre. Cole et Alkilas [100] estiment que 17 à 25 % de la chaleur transférée au fluide de refroidissement dans un moteur Diesel provient des gaz d'échappement. La prise en compte des transferts de chaleur entre les gaz d'échappement et la culasse est donc nécessaire à l'établissement d'un bon bilan thermique global moteur.

Caton et Heywood [101] ont proposé de décrire les échanges de chaleur en deux temps, en considérant d'une part le cas soupape ouverte et d'autre part le cas soupape fermée.

Le tableau suivant donne un aperçu des coefficients d'échange rencontrés dans les conduits d'admission et d'échappement [102].

Tab.4.4 Echange convectif dans les conduits d'admission

Régime (tr/min)	4000		2000	
Soupape	Ouverte	Fermée	Ouverte	Fermée
$h$ ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ )	343	56.5	242.6	32.5
$h_{moy}$ ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ )	128.1		85	

## 4.3. Transferts thermiques entre les parois et le fluide de refroidissement

Afin d'évacuer la puissance thermique transmise aux parois par les gaz de combustion et ainsi garantir la bonne tenue aux contraintes thermomécaniques des organes mécaniques, un fluide de refroidissement circule au sein du carter- cylindre et de la culasse.

Le fluide de refroidissement généralement utilisé est un mélange d'eau et de glycol dans des proportions en volume allant de 30 à 50 % et de plusieurs additifs inhibiteurs de corrosion. Les propriétés du fluide de refroidissement sont présentées dans le tableau en comparaison avec l'eau pure [102].

Tab.4.5 Propriétés de fluide de refroidissement

Température	$C_p$ ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )		$\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )		$\mu$ ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )	
	20 °C	90°C	20 °C	90°C	20 °C	90°C
Eau	4183	4208	998	965	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$0.31 \cdot 10^{-3}$
Eau + glycol 30 %	3762	3950	1040	995	$2.21 \cdot 10^{-3}$	$0.55 \cdot 10^{-3}$
Eau + glycol 60%	3344	3616	1080	1017	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$0.79 \cdot 10^{-3}$

Le fait même de refroidir de la même façon qu'en phase chaude un moteur durant les premières minutes de fonctionnement repousse d'autant des conditions idéales de température du point de vue thermodynamique et thermomécanique. En conséquence, le refroidissement des parois de chambre durant ces phases de montée en température est à associer à des pertes d'énergie plus importantes qui contribuent à la surconsommation et à l'augmentation de l'émission polluante constatée durant ces phases critiques [103].

#### 4.4. Mécanisme d'échanges aux parois

Les mécanismes de transfert de chaleur au niveau de la segmentation d'un moteur thermique sont très complexes. Les raisons de ces difficultés sont multiples [104] :

- Instationnarité des températures (cycle moteur) ;
- Complexité des géométries du piston et des segments ;
- Mouvement alternatif de ces derniers ;
- Frottement segments- chemises ;
- Présence du film d'huile et des gaz (frais ou brûlés) dans les interstices, ... etc.

#### 4.5. Transfert secondaire

Le flux de chaleur généré par les gaz et reçu par les pistons est transmis par conduction d'une part, aux jupes des pistons et s'ajoute à celle produite par les frottements sur les chemises pour être dissipée principalement dans le métal des cylindres et fractionnée dans l'huile et d'autre part, aux fonds des pistons d'où elle se dissipe dans l'huile (en particulier lorsque les pistons sont refroidis). Un transfert secondaire de même nature se produit au niveau des soupapes.

On note que le flux thermique évacué par la culasse est de 3 à 5 fois plus élevé que le flux traversant respectivement le haut et le bas du cylindre. Le moteur peut être assimilé à un échangeur dont la résistance thermique est constituée approximativement de 70 % par les



échanges gaz- parois internes, 10 % par la traversée des parois et 20 % par les échanges parois- liquide [105].

#### 4.6. Effets thermiques sur le fonctionnement du moteur

La chaleur produite dans un moteur provient en général de la combustion des gaz qui s'opère à haute température ainsi que les échanges thermiques qui ont eu lieu entre les gaz brûlés et les parois avec lesquelles ils sont en contact. La chaleur se transmet ainsi aux parois des cylindres, à la culasse aux pistons et aux soupapes et par suite de la conductibilité de ces organes à l'ensemble du bloc-moteur. A un degré moindre, le frottement des organes mobiles absorbe de l'énergie qui se transforme en chaleur.

Cette chaleur dégagée au sein des structures du moteur, provoque l'accroissement brusque des températures des gaz qui peuvent atteindre plus de 2000 °C, ce qui est généralement le cas dans les moteurs diesel à forte puissance. En contact avec ces gaz, les organes internes moteur, celle de la culasse et du haut des chemises notamment, s'échauffent et atteignent des températures très élevées, sans oublier également l'organe mobile le plus thermiquement chargé à savoir : la soupape d'échappement.

Ces conditions de fonctionnement, peuvent engendrer des phénomènes qui sont à l'origine de la détérioration du moteur, parmi lesquelles on peut citer [107] :

- Des dilatations exagérées qui rendraient son fonctionnement impossible, et par suite une diminution des jeux.
- Des contraintes d'origine thermiques qui provoquerait des fissures destructrices des organes du moteur.
- La modification des propriétés thermo-physiques des matériaux avec la température atteinte et la durée de l'échauffement.
- La Carbonisation et la destruction des propriétés lubrifiantes des huiles de graissages qui entraînerait le grippage du piston et du cylindre.
- Apparition du phénomène du cognement dû à l'augmentation de pression résultant de l'augmentation de température.
- La diminution du taux de remplissage des cylindres par suite de la dilatation des gaz frais.
- Des risques accrus d'auto-allumage.

#### 4.7. Facteurs favorisant une bonne transmission de chaleur

Pour obtenir une bonne transmission de chaleur au travers d'une paroi, certaines conditions doivent être satisfaites [108] :

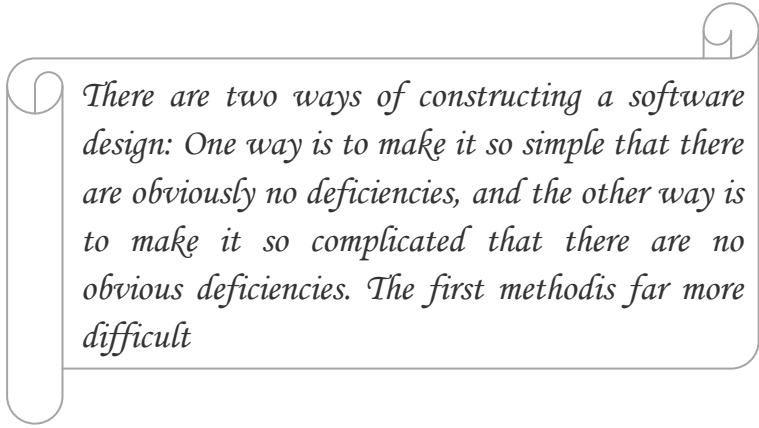
- Le métal de la paroi doit être bon conducteur.

- La paroi doit être mince et ayant une grande surface de contact avec le fluide réfrigérant.
- Le fluide réfrigérant doit avoir une chaleur spécifique élevée et circuler à grande vitesse pour évacuer la chaleur générée par les gaz de combustion.
- Le refroidissement est d'autant meilleur que la température extérieure est plus basse.

# *Chapitre V*

---

## *Présentation du code de calcul*



*There are two ways of constructing a software design: One way is to make it so simple that there are obviously no deficiencies, and the other way is to make it so complicated that there are no obvious deficiencies. The first method is far more difficult*

## 1. Introduction

Dans ce chapitre on présente le programme de simulation développé dans le cadre de cette étude. Il concerne la conduction bidimensionnelle instationnaire pour des problèmes quelconques, et est basé sur les équations discrètes de la méthode des volumes finis. La conception de l'interface graphique développé est souple et efficace, pour que la manipulation du code soit simple et non compliquée pour l'utilisateur.

## 2. Structure du programme

Le programme est structuré de 5 Parties :

La 1<sup>ère</sup> Partie du programme comporte la lecture des principales données et la discrétisation de domaine.

La 2<sup>ème</sup> Partie construit le système d'équations. On récupère les données à partir de la 1<sup>ère</sup> partie puis on calcule les coefficients de la matrice et le terme source.

La 3<sup>ème</sup> Partie est dédiée à la résolution du système d'équations obtenu en 2<sup>ème</sup> Partie pour obtenir la température en chaque nœud. Ces résultats vont être utilisés pour la détermination de température dans toute la géométrie.

La 4<sup>ème</sup> Partie est consacrée à la détermination des températures aux points spécifiés du domaine étudié.

Enfin, dans la 5<sup>ème</sup> partie présente les résultats.

Cette structure est présentée par un organigramme (fig.5.1).

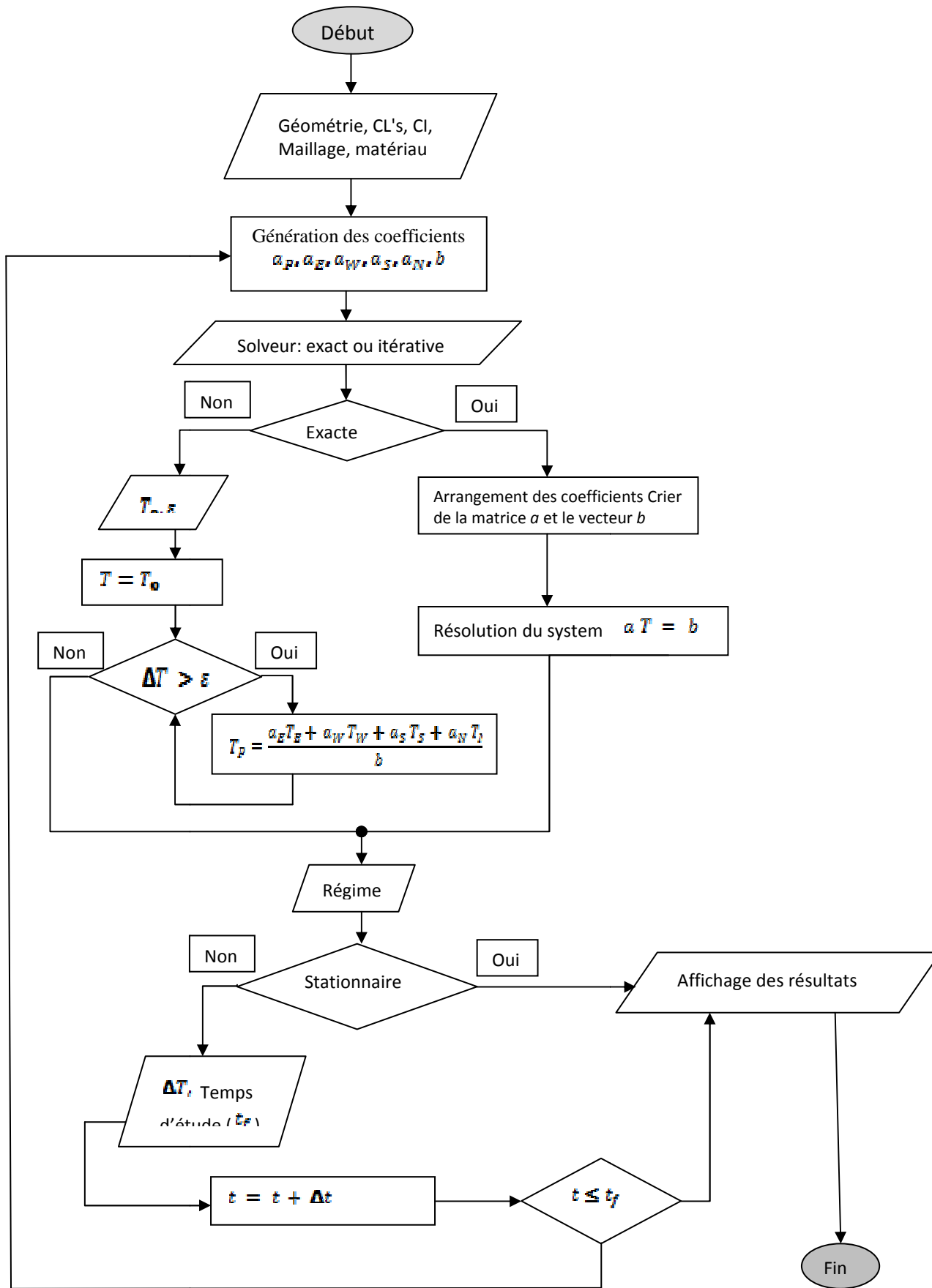


Fig.5.1 Organigramme de calcul

### 3. Structure de l'interface

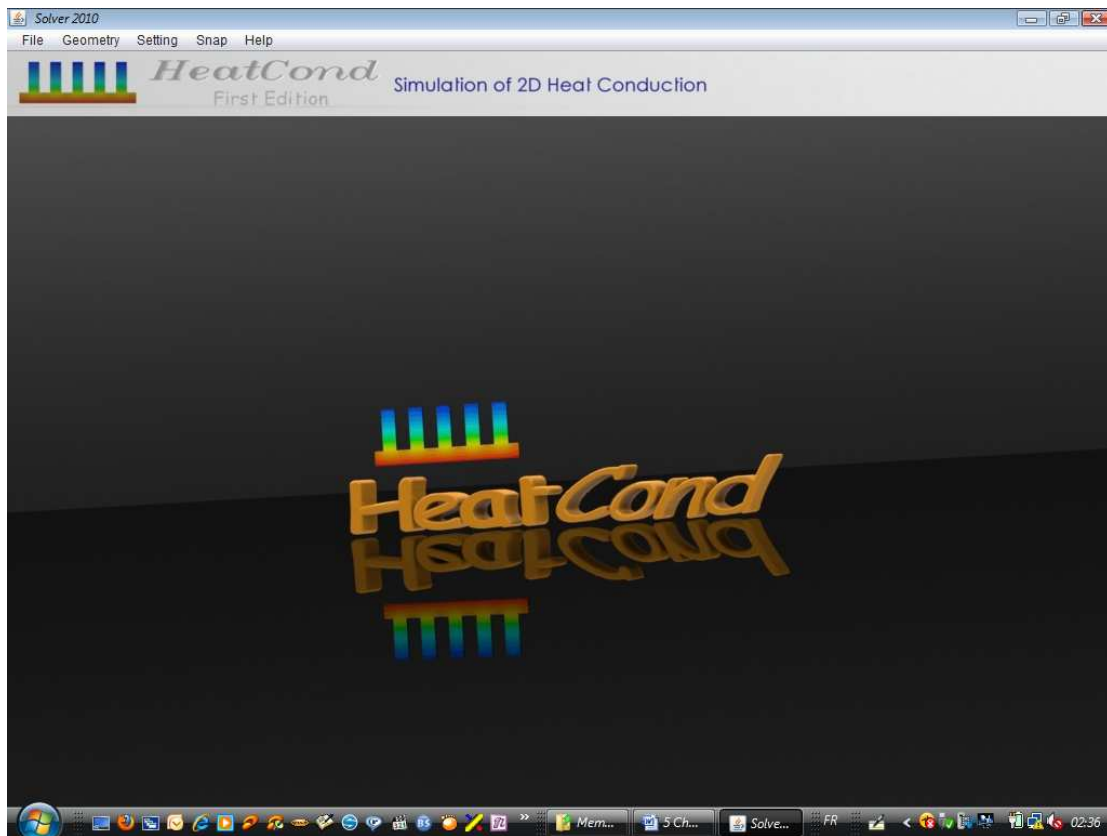


Fig.5.2 Interface

#### 3.1. La géométrie

L'interface du dessin est similaire à celle d'un logiciel CAD, équipée d'une zone graphique et une barre fournissant les différents outils de dessin, la géométrie doit être un contour fermé qui peut contenir des trous à l'intérieur (fig.5.3).

#### 3.2. Les conditions aux limites

Une description détaillée est nécessaire sur les conditions aux limites, chaque frontière doit être munie d'une CL (fig.5.4).

Les CLS de type : température imposée, flux imposé, convection ou adiabatique

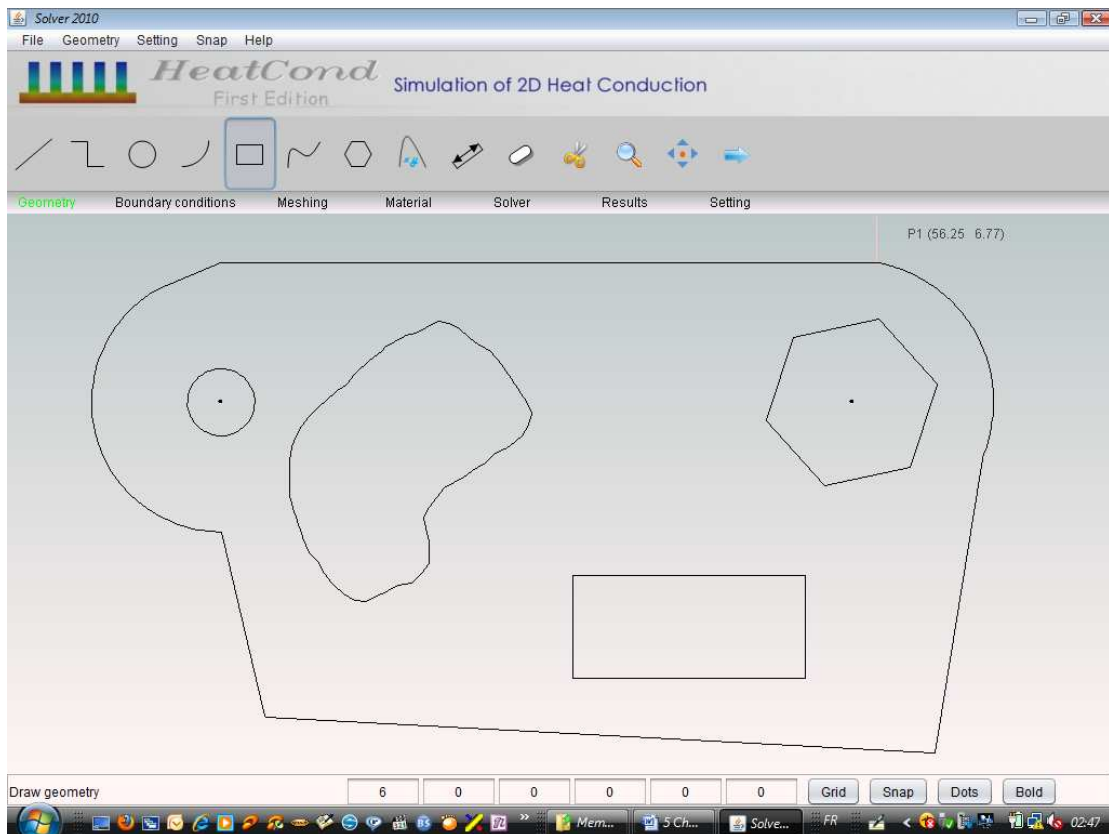


Fig.5.3 Interface de dessin

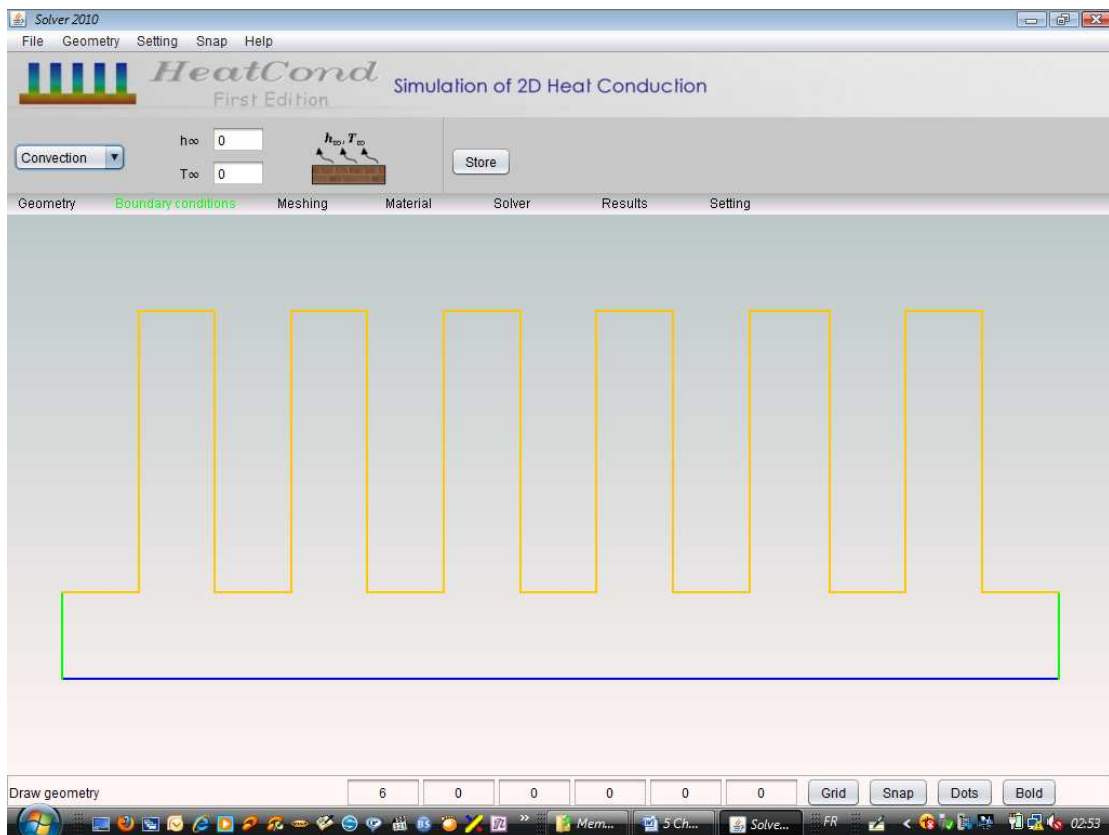


Fig.5.4 Interface de conditions aux limites

### 3.3. Maillage

Le choix du maillage doit ce fait d'une façon qu'il présente la géométrie à un degré acceptable, en le raffine dans les régions de gradient de température important, en tiendra toujours compte que le temps de calcul et lié au nombre de nœuds. Il faut donc optimiser le maillage pour qu'il donne une bonne précision, avec un temps de calcule rentable. L'interface fournit deux types de maillages ; simple, pour les simples géométries et avancé, pour les géométries complexe (fig.5.5).

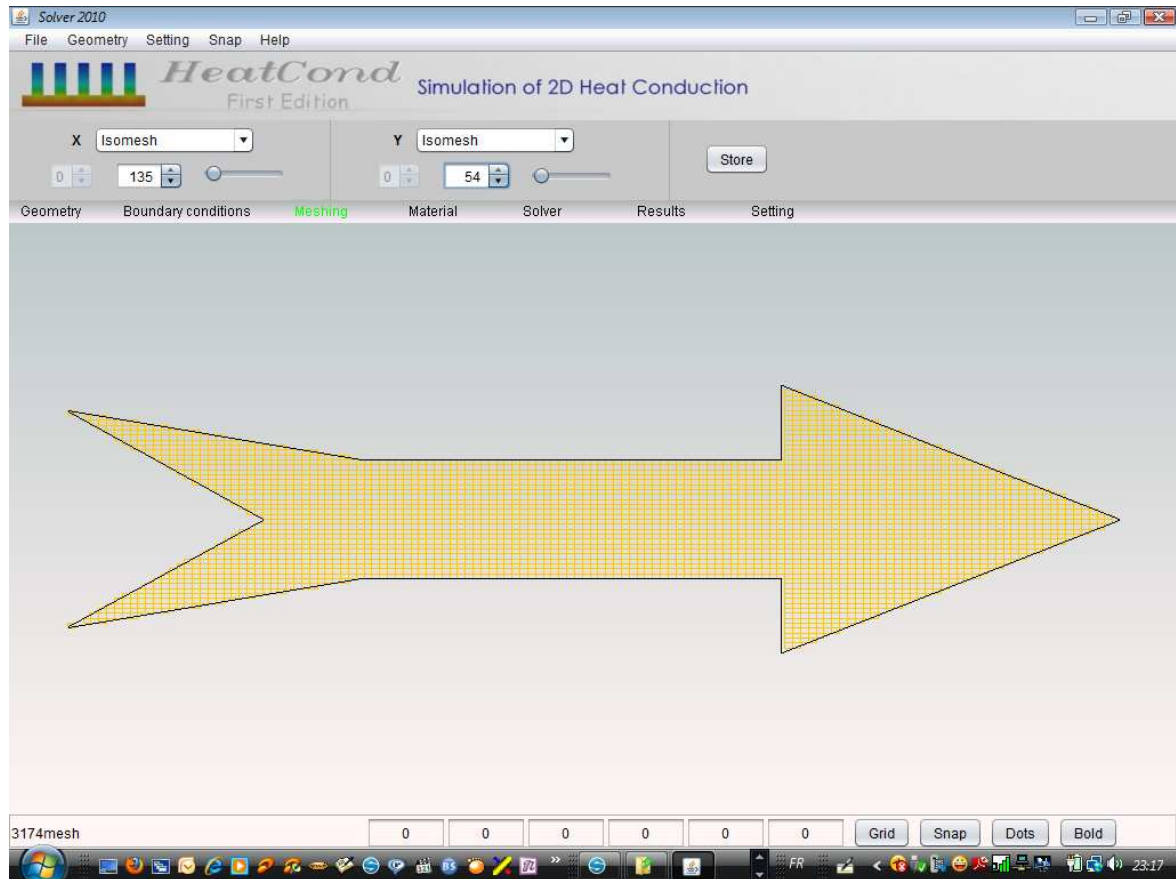


Fig.5.5 Interface de maillage

#### 3.3.1. Maillage simple

On distingue trois types de maillage simple

**Maillage uniforme :** C'est un maillage rectangulaire où toutes les mailles sont de même hauteur et de même largeur, il est défini par le nombre des mailles sur les deux directions. Ce type de maillage est conseillé pour les problèmes de faible variation de gradient de température (fig.5.6.1).

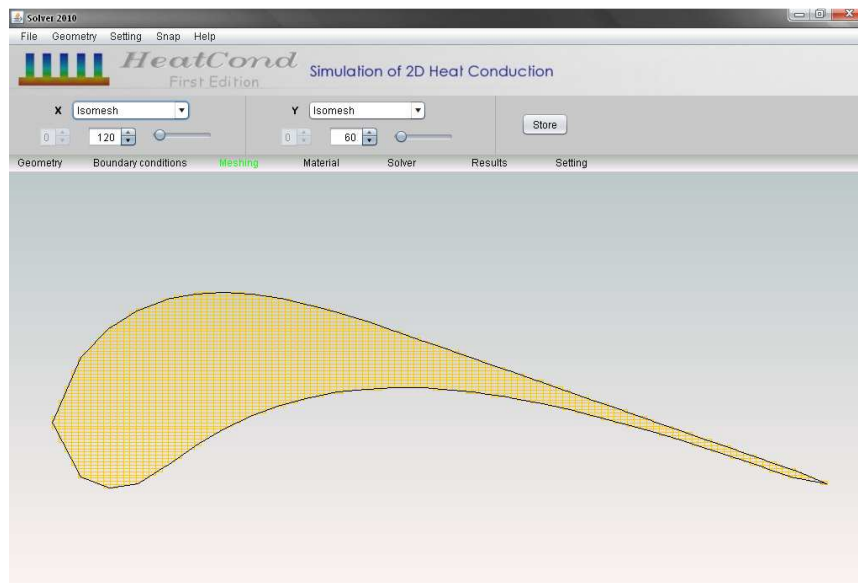
**Maillage progressif :** C'est un maillage non uniforme de progression géométrique unidirectionnelle, il est défini par le nombre des mailles et le rapport de progression, il est recommandé pour le problème où le gradient de la température est important dans une frontière et faible dans l'autre (fig.5.6.2).



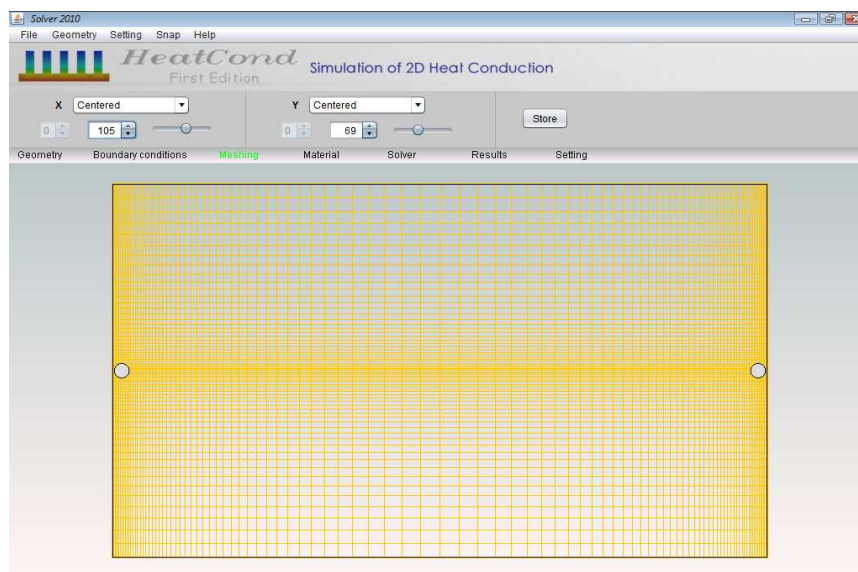
**Maillage progressif centré :** Il est similaire au précédent sauf que la progression est bidirectionnelle et symétrique par rapport au milieu de la géométrie, il est plus pratique pour les problèmes symétriques (fig.5.6.2).

### 3.3.2. Maillage avancé

C'est un maillage à progression multiple nodale dont les nœuds des progressions sont spécifiés le long de l'axe  $x$  et  $y$ , le rapport de progression et le nombre de mailles sont spécifiés indépendamment pour chaque nœud. C'est une technique puissante d'optimisation de maillage pour les géométries à frontières complexes. Les nœuds de progression sont fixés dans les régions d'intérêt (fig.5.6.3).



*Fig.5.6.1 Maillage uniforme*



*Fig.5.6.2 Maillage Progressive*

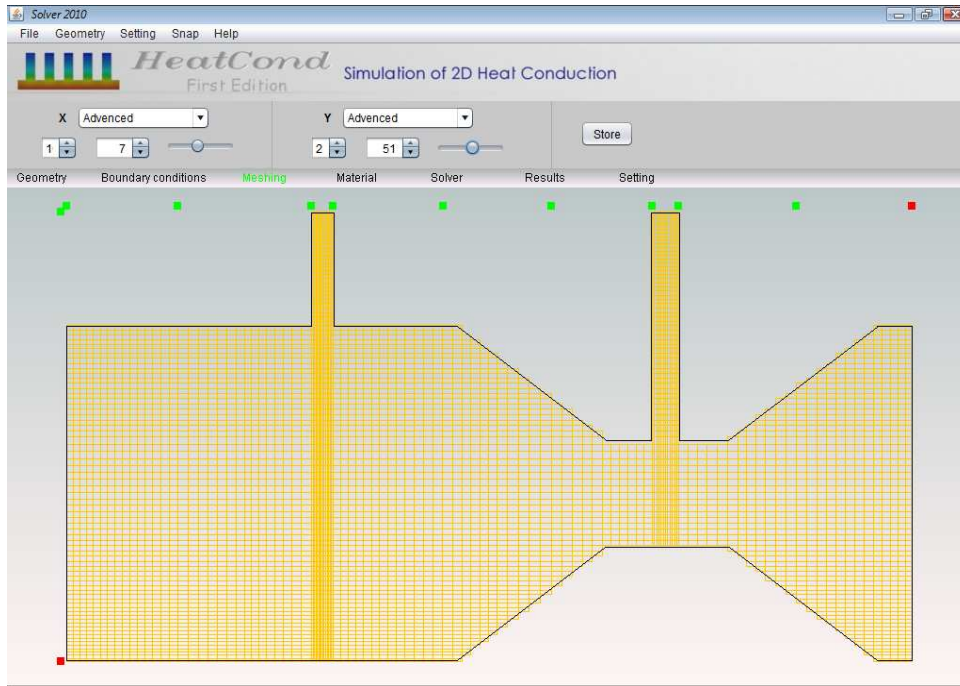


Fig.5.6.3 Maillage Progressive

### 3.4. Matériaux

L'interface est munie d'une base de données des matériaux fréquemment rencontre dans les analyses de Transferts de [109]. Il est aussi possible de définir un nouveau matériau en fournissant les données suivantes :  $(\lambda, \rho, C_p, T_f)$ .

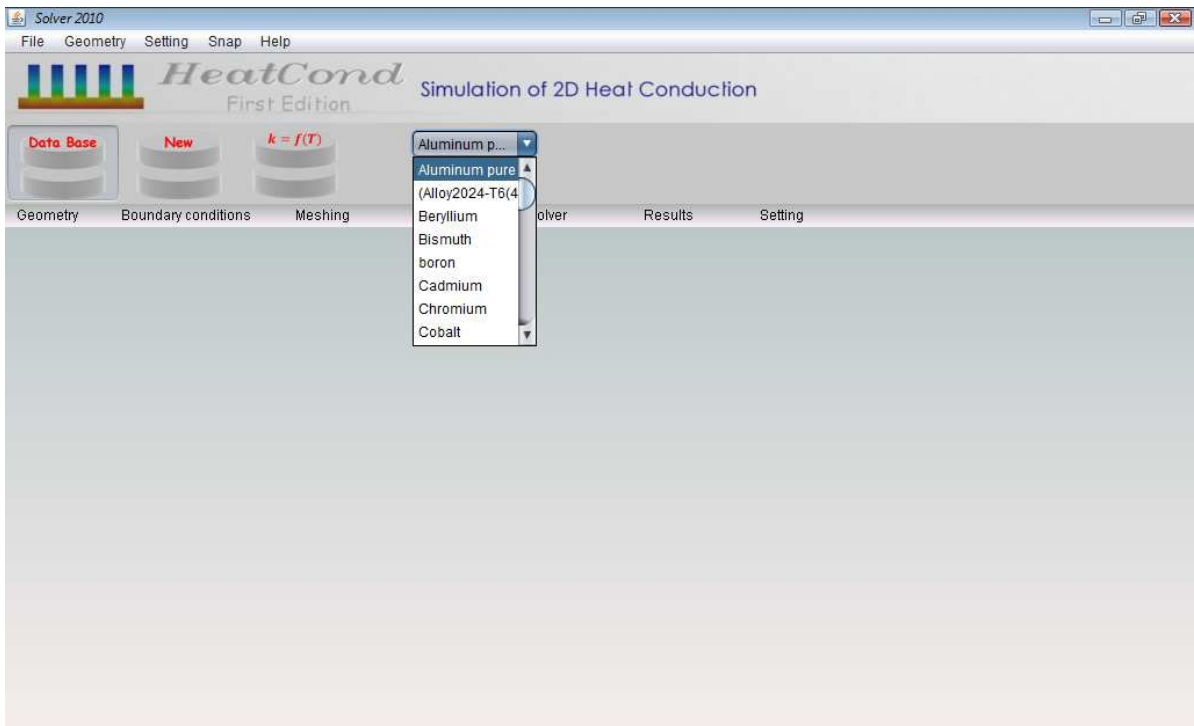


Fig.5.7 Interface matériaux

### 3.5. Solveur

Après avoir introduire tout les données du problème et la discrétisation du domaine, le programme génère un système d'équations, pour résoudre ce système on offre deux procédés de résolution : solution exacte (méthode de Gauss) [83] et solution itérative (méthode de Gauss- Seidel) [84]

La progression des calculs est affichée par une barre de progression, le temps de calcul dépend de nombre de mailles et de pas de temps.

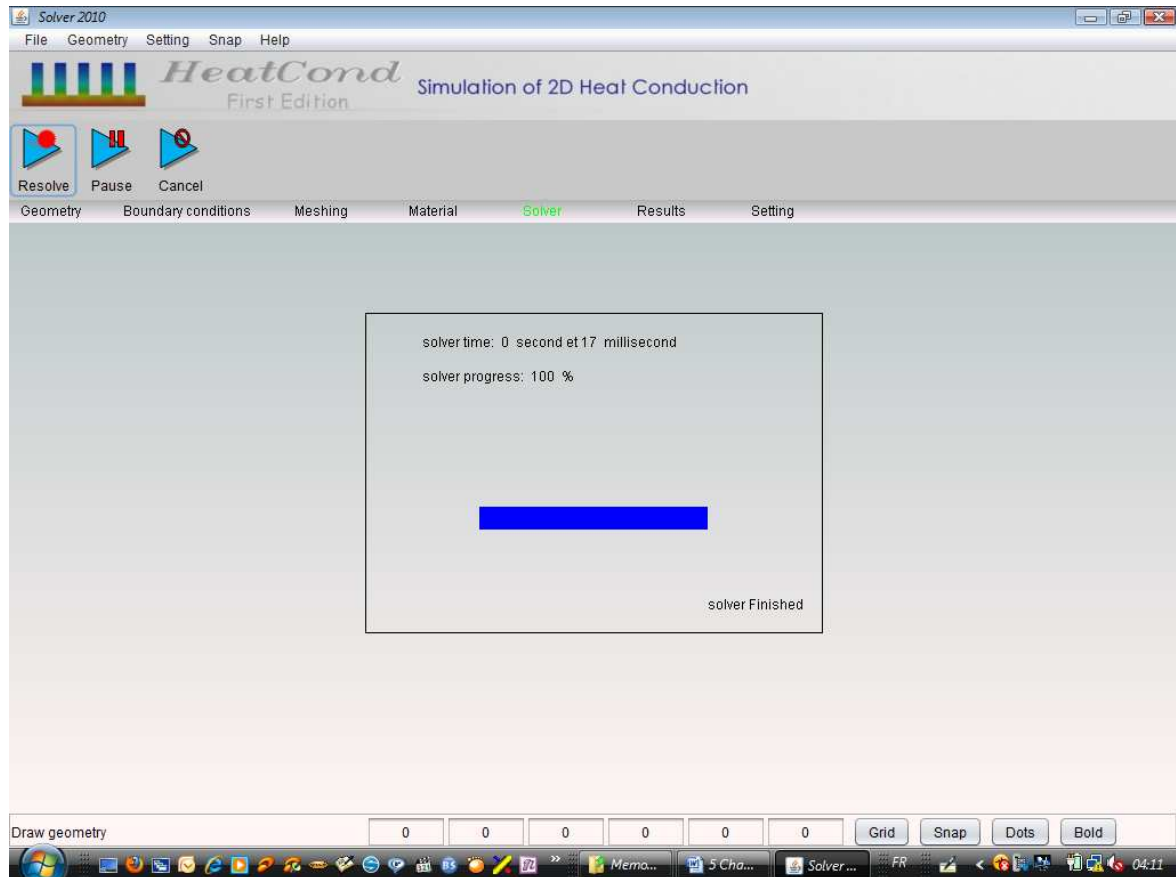


Fig.5.8 Interface solveur

### 3.6. Résultats

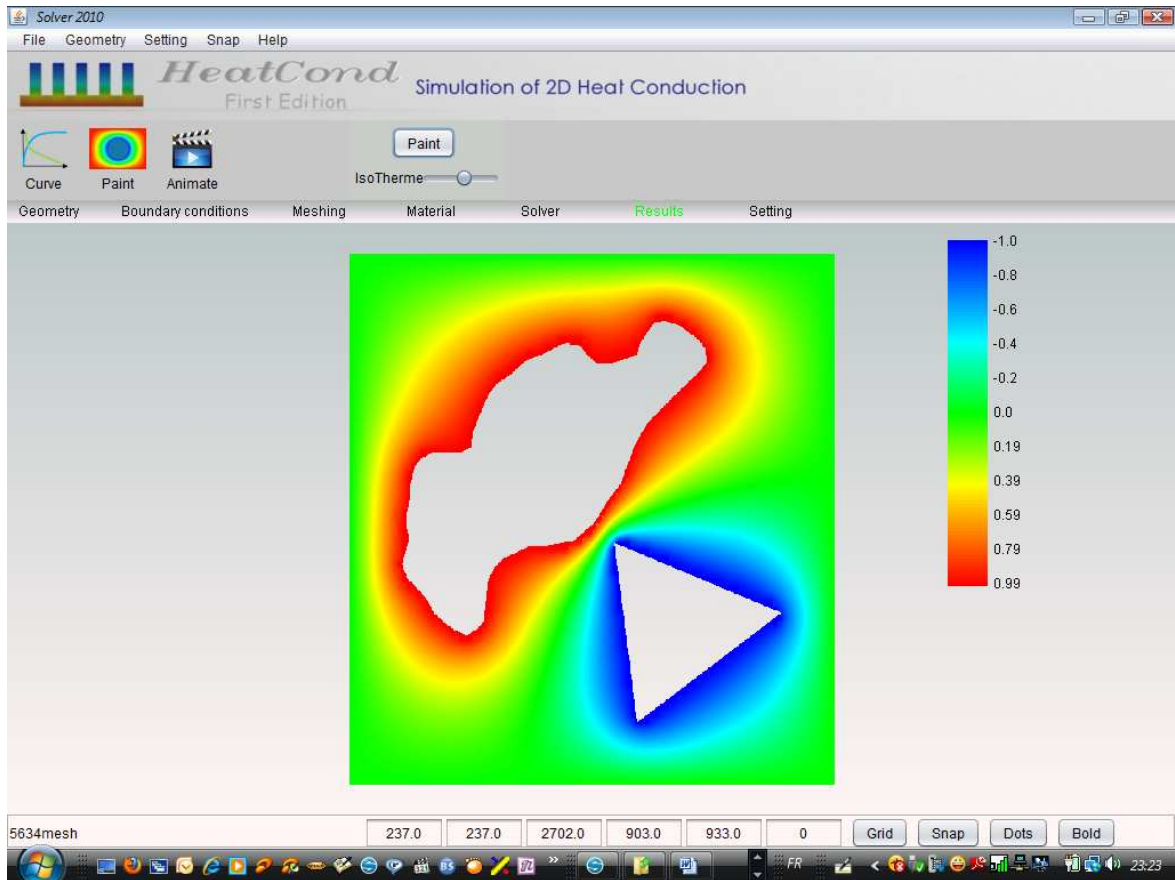


Fig.5.9. Interface résultats

## 4. Conclusion

Dans ce chapitre est présenté le logiciel de simulation avec interface graphique développé dans le cadre de cette étude pour traiter des problèmes relatifs à la conduction thermique.

Dans le chapitre qui suit, nous présenterons quelques résultats avec validation du code de calcul développé par comparaison à des résultats issus de la littérature.

# Chapitre VI

---

## Résultats et Interprétations

*Testing by itself does not improve software quality. Test results are an indicator of quality, but in and of themselves, they don't improve it. Trying to improve software quality by increasing the amount of testing is like trying to lose weight by weighing yourself more often. What you eat before you step onto the scale determines how much you will weigh, and the software development techniques you use determine how many errors testing will find. If you want to lose weight, don't buy a new scale; change your diet. If you want to improve your software, don't test more; develop better.*

## 1. Introduction

Après son développement et son implémentation, un code de calcul doit être validé pour déterminer son degré de précision et ses limites d'applications. La validation se fait en comparant les résultats obtenus par le code, avec d'autres obtenus par une des méthodes de résolution décrites au chapitre I.

Dans ce chapitre, nous traitons un nombre d'exemples pratiques en conduction thermique, qui peuvent être simulés numériquement par le code développé. Les cas 1D, 2D, stationnaires et instationnaires sont introduits et des comparaisons avec des solutions analytiques et d'autres méthodes numériques sont faites. Les coordonnées axisymétriques sont prises en compte. Puis une application au cylindre à surface ailetée d'un moteur à combustion interne d'un véhicule léger est faite.

## 2. problème 1D stationnaire

### 2.1. Mur plan

Le problème considéré (Fig. 6.1) est un mur plan d'épaisseur  $L = 0.1 \text{ m}$ , un côté du mur est exposé à l'air ambiant avec une température  $T_\infty = 15 \text{ °C}$  et un coefficient de transfert par convection  $h_\infty = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ °C}^{-1}$ ; un flux de chaleur est imposé dans l'autre côté,  $q = 10000 \text{ W m}^{-2}$ .

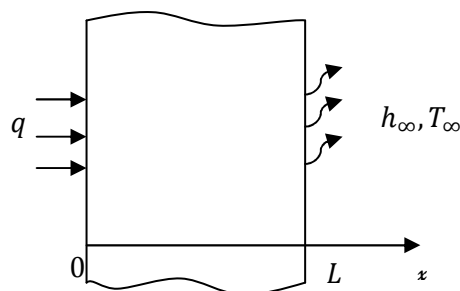


Fig.6.1 Mur plan 1D

La solution analytique du problème est donnée par

$$T(x) = \frac{q}{k}(L - x) + \frac{q}{h_\infty} + T_\infty \quad (\text{VI.2.1})$$

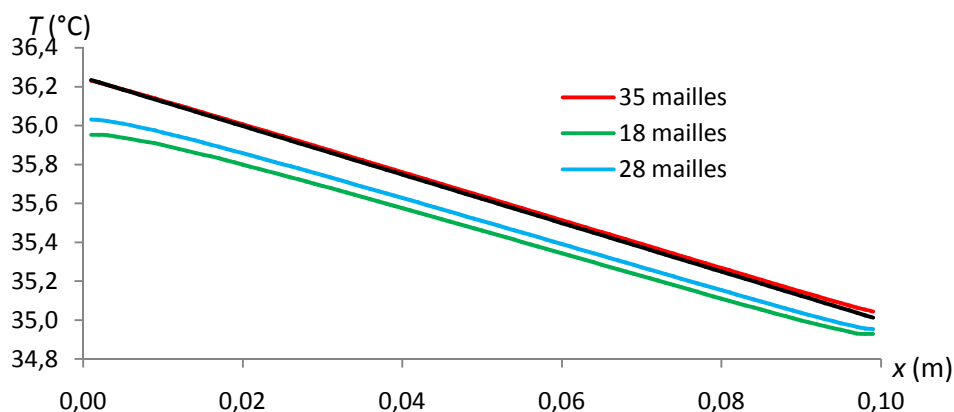


Fig.6.2 Distribution de température pour un mur plan

La figure (fig.6.2) représente la distribution de température suivant l'épaisseur du mur, obtenu analytiquement, et numériquement avec différent nombre de mailles.

Tab.6.1 Erreur sur la température pour le mur plan

	18 mailles	28 mailles	35 mailles
$\varepsilon_{r,moy}(\%)$	0.474	0.331	0.038
$\varepsilon_{r,max}(\%)$	0.777	0.563	0.088

Le tableau (tab.6.1) présente l'erreur relative maximum et moyenne commise sur la température pour différents nombres de mailles suivants l'épaisseur du mur, on remarque une amélioration considérable en raffinant le maillage.

### 2.2. Cylindre creux de longueur infinie

Le problème considéré est un cylindre creux de longueur infini, de rayons  $R_i$  et  $R_o$  respectivement intérieur et extérieur, les deux frontières sont maintenues aux deux températures  $T_i$  et  $T_o$  (fig.6.3).

La solution analytique est comme suit  $T(r) = \frac{T_2 \ln(r/R_1) + T_1 \ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}$  (VI.2.2)

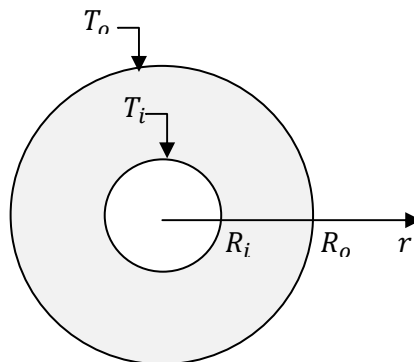


Fig.6.3 Cylindre creux

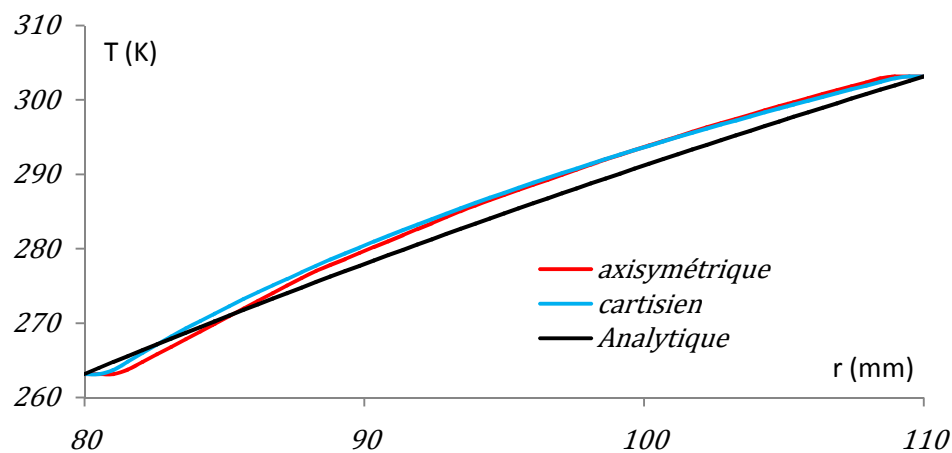


Fig.6.4 Distribution de température pour un cylindre creux

La figure (fig.6.4) représente la distribution de température suivant l'épaisseur du mur, obtenu analytiquement, et numériquement avec différent nombre de mailles.

Tab.6.2 Erreur sur la température pour le cylindre creux

	Cartésienne	Axisymétrique
$\varepsilon_{r,moy}$ (%)	0.64	0.60
$\varepsilon_{r,max}$ (%)	0.98	0.89

Le tableau (tab.6.2) présente l'erreur relative maximum et moyenne sur la température suivants le rayon de cylindre en utilisant les coordonnées cartésiennes avec 264 mailles et axisymétriques avec 110 mailles, on remarque que l'erreur se réduit relativement en utilisant les coordonnées axisymétrique.

Les deux exemples précédents sont des exemples types et ne présentent pas de difficultés. Les erreurs sont très satisfaisantes. Ces deux exemples sont présentés dans le but de montrer l'efficacité et la simplicité de simulation.

L'utilisation des coordonnées axisymétriques optimise la modélisation des problèmes à géométrie cylindrique.

### 3. Problème 2D stationnaire

#### 3.1. Barre de section carrée

Soit une longue barre de section carrée de coté  $L = 100 \text{ cm}$  ; dont trois parois sont maintenu à une température  $T_1 = 273.15 \text{ K}$ , la quatrième est maintenue à une température  $T_0 = 293.15 \text{ K}$  (fig.6.5).

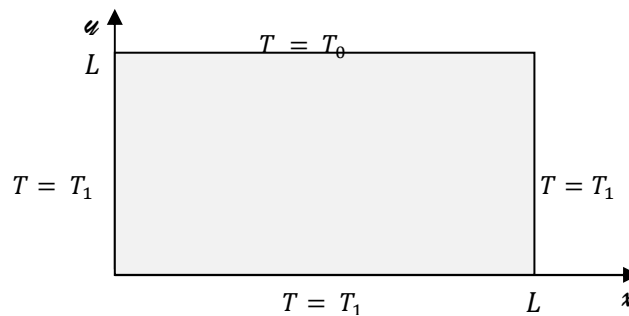


Fig.6.5 Barre de section carrée

La solution analytique est donnée par

$$T(x, y) = T_1 + (T_0 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh(n\pi)} \quad (\text{VI.3.1})$$

La figure ci-dessous montre la solution numérique obtenue avec un maillage progressive centré (400 nœuds) en comparant avec la solution exacte.



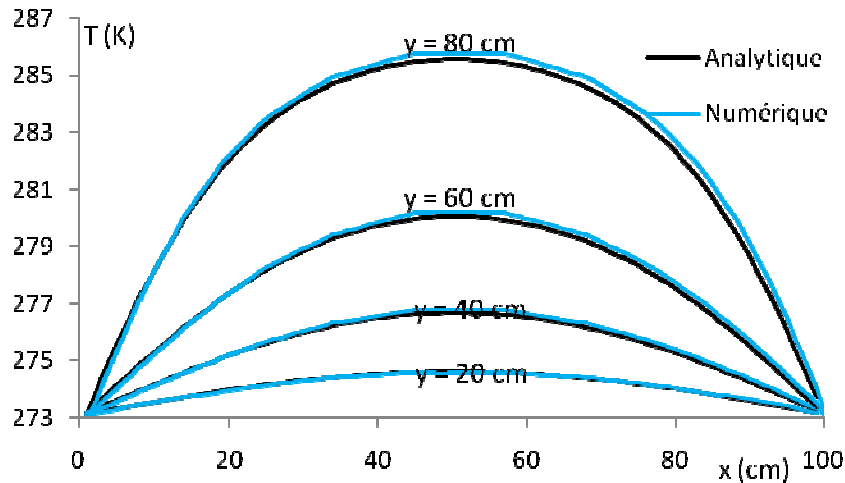


Fig.6.6 Distribution de température pour la barre

Les résultats numériques sont comparables avec la solution exacte. L'erreur maximale commise est de 0.45%.

### 3.2. Condition à la limite variable

Le problème considéré est une barre de longueur infinie et de section rectangulaire ; trois parois latérales sont maintenues à une température constante  $T = 100\text{ °C}$  et la variation de la température selon la quatrième paroi suit une loi sinusoïdale avec une valeur maximale  $T_{max} = 200\text{ °C}$  (fig.6.7). La distribution de la température dans la barre est à déterminer.

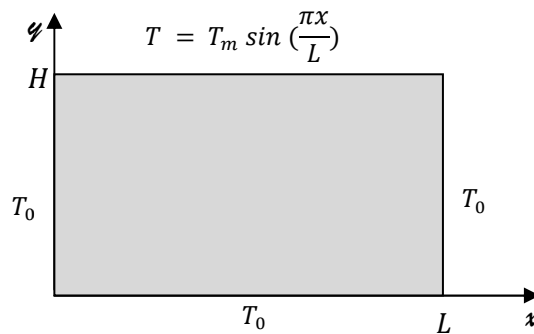


Fig.6.7 Condition à la limite variable

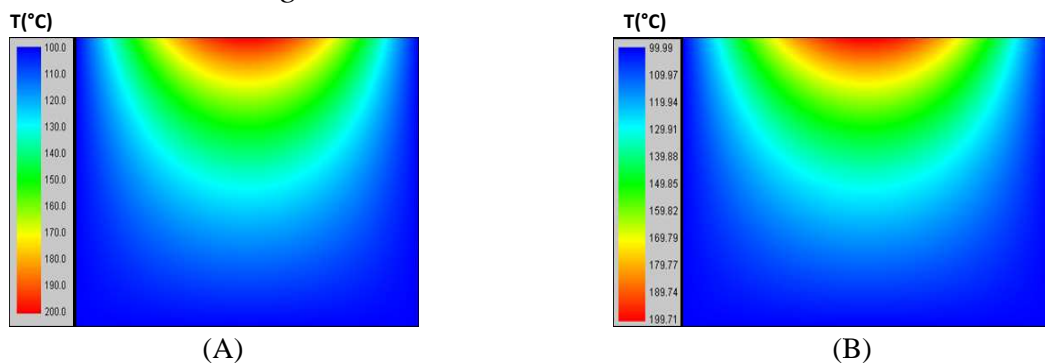


Fig.6.8 Distributions de température, analytique et numérique

La figure (fig.6.8) représente la distribution de température obtenue analytiquement et numériquement, (A) est la solution analytique, (B) numérique. (A) et (B) sont identiques se qui nous permet une première comparaison qualitative, une autre quantitative est faite par la suite en évaluant les erreurs dans le tableau suivant.

Tab.6.3. Erreur et temps de calcul pour différents types de maillage.

Type de maillage	Nombre de nœud	$\epsilon_{r,max}(\%)$	$\epsilon_{r,moy}(\%)$	Temps d'exécution
Uniforme	400	6.25 %	1.13 %	< 1s
Centré progressif	400	4.39 %	0.69 %	< 1s
Centré progressif	3000	0.48%	0.10 %	26s

Malgré un même nombre de nœud ; un maillage centré progressif a réduit l'erreur de moitié, par raison du raffinement du maillage dans les frontières, où le gradient de la température est important. L'augmentation de nombre des mailles a réduit encore l'erreur.

### 3.3. Problème de longueur semi infinie

Soit un mur d'épaisseur  $L$  est de longueur semi- infinie (fig.6.9). Avec  $T = 30^{\circ}C$ ,  $T_0 = -15^{\circ}C$

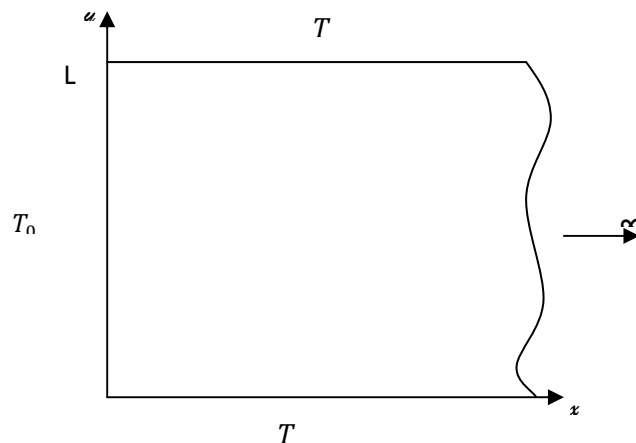


Fig.6.9 Problème de longueur semi infinie

La solution analytique est donnée par  $\frac{T(x,y)}{T_0} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\sin(\pi y/L)}{\sinh(\pi x/L)} \right)$  (VI.3.2)

Les données sont  $T = 30^{\circ}C$ ,  $T_0 = -15^{\circ}C$

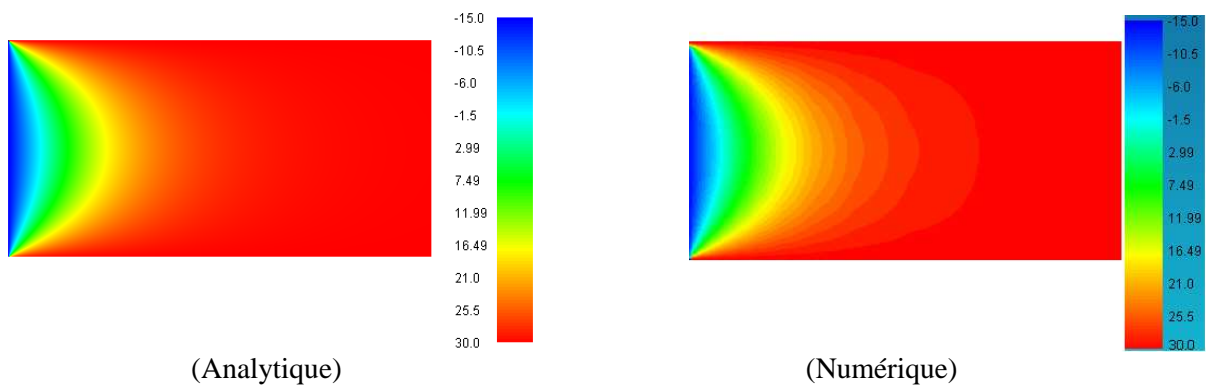


Fig.6.10 Distribution de température analytique et numérique

Tab.6.4. Erreur et temps de calcul pour le problème de longueur semi infini.

Nombre de nœud	$\varepsilon_{r,max}(\%)$	$\varepsilon_{r,moy}(\%)$	Temps d'exécution
1330	0.09 %	0.01 %	25.15s

A partir de ce tableau on constate que la méthode notre démarche de modélisation donne de bons résultats pour les problèmes de longueurs infinies.

## 4. Problème instationnaire

### 4.1 Milieu à température uniforme

#### 4.1.1. Longue barre de section carrée

Soit une longue barre de section carrée de coté  $a$ , initialement à la température  $T_0$  sitôt elle est plongée dans un bain d'eau de température  $T_\infty$  et de coefficient de convection  $h_\infty$ .

AN:  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $L_c = \frac{a}{4} = 2.5 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 116 \text{ Wm}^{-1}\text{C}^{-1}$ ,  $h_\infty = 200 \text{ Wm}^{-2}\text{C}^{-1}$

D'où  $Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = 0.0025 < 0.1$  ce qui vérifie l'uniformité de température.

La solution analytique est donnée par

$$T(t) = (T_0 - T_\infty)\exp\left(-\frac{h}{\rho c L_c} t\right) + T_\infty \quad (\text{VI.4.1})$$

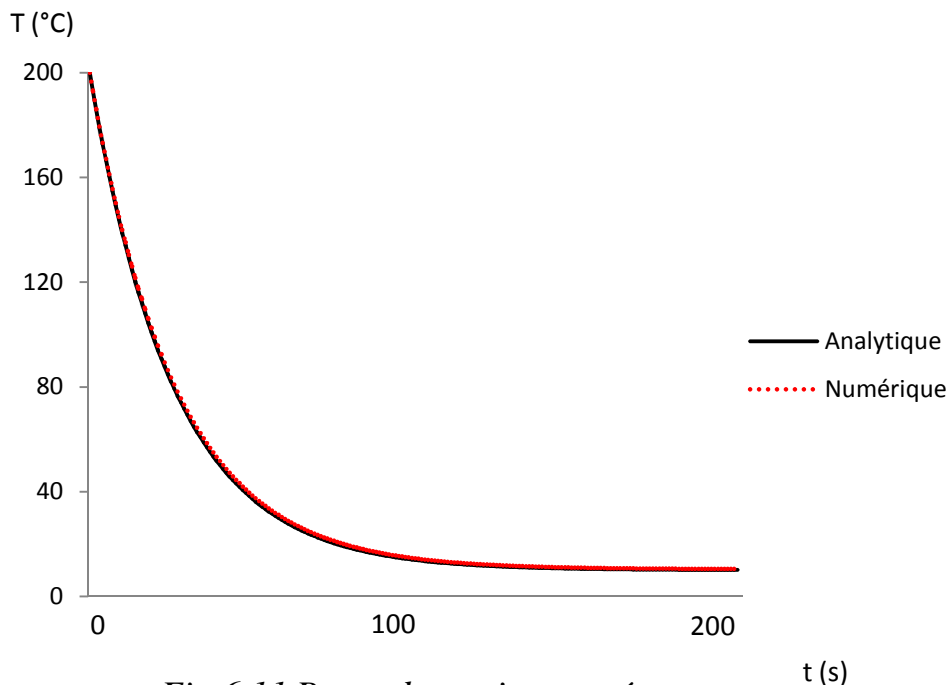


Fig.6.11 Barre de section carrée

Le résultat de la simulation est comparé avec la variation exacte dans la figure ci-dessus (Fig.6.11). La valeur de l'erreur maximale produite est 0.48 %, et sa valeur moyenne pendant la durée de simulation (200 s) est 0.24 %.

4.1.2. Longue barre de section circulaire

Soit une longue barre de section circulaire de  $r$ , initialement à la température  $T_0$ , à l'instant  $t = 0$  est plongée dans un bain d'eau de température  $T_\infty$  et de coefficient de convection  $h_\infty$ .

AN:  $r = 5 \text{ mm}$ ,  $L_c = \frac{r}{2} = 2.5 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 237 \text{ Wm}^{-1}\text{°C}^{-1}$ ,  $h_\infty = 237 \text{ Wm}^{-2}\text{°C}^{-1}$

D'où  $Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = 0.0043 < 0.1$  la condition de l'uniformité de température est vérifiée.

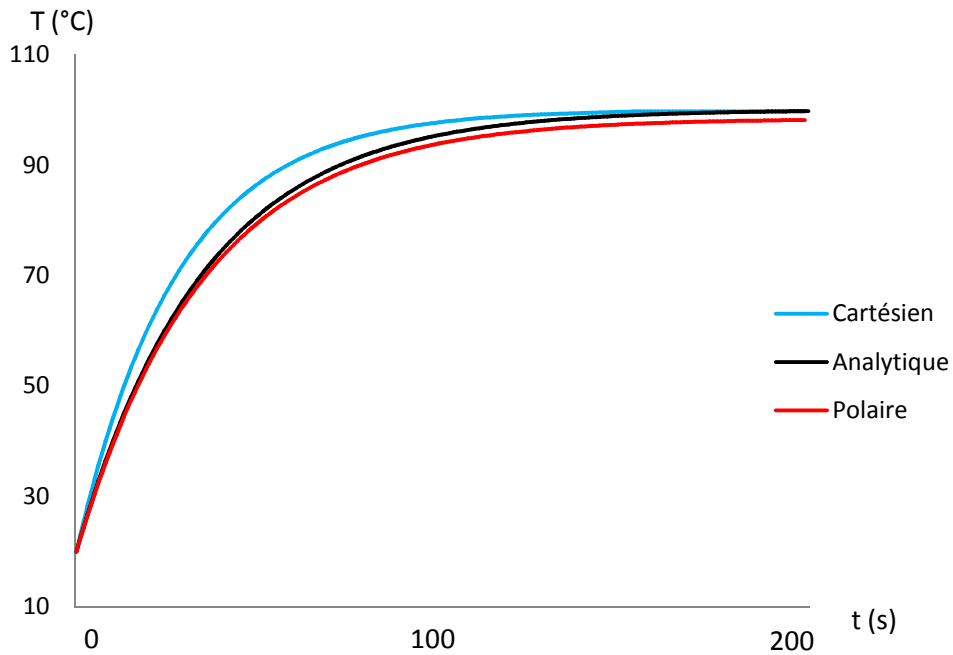


Fig.6.12 Cylindre de longueur infini

La simulation est réalisée en utilisant les coordonnées cylindriques et cartésiennes. Dans cette figure (Fig.6.12) on compare les deux résultats avec la solution exacte (analytique), il est remarquable que l'allure du résultat de la discrétisation cylindrique est plus proche de l'allure exacte que celle cartésienne (or le maillage cylindrique utilisé est moins raffiné).

Le tableau ci-dessous affiche les erreurs commises dans les dernières trois modélisations.

Tab.6.5 erreur pour les problèmes à température uniforme

	$\epsilon_{r,max}(\%)$	$\epsilon_{r,moy}(\%)$
<b>Problème 1</b>	0.48	0.24
<b>Problème 2 (cartésien)</b>	1.93	0.77
<b>Problème 2 (cylindrique)</b>	0.43	0.37

Ces résultats confirment la bonne modélisation de la variation temporelle de la température par le schéma implicite.

### 4.2. Plaque plane

Considérons une plaque d'épaisseur  $2L$  et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel.

#### 4.2.1. Plaque avec température imposé

Les conditions aux limites sont montrées dans la figure (fig.6.13)

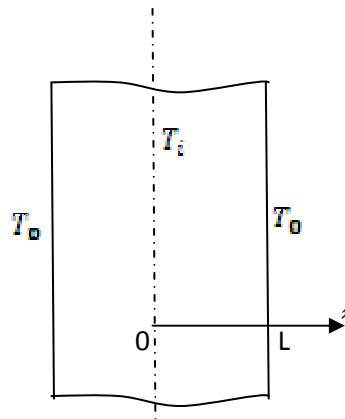


Fig.6.13. Plaque plane à température imposée

La solution analytique est obtenue par la méthode de séparation de variables

$$T(x, t) = T_0 + 4 \frac{T_i - T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \exp \left\{ -(2n+1)^2 \frac{\pi^2 at}{4 L^2} \right\} \cos \left\{ \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right\} \quad (\text{VI.4.2})$$

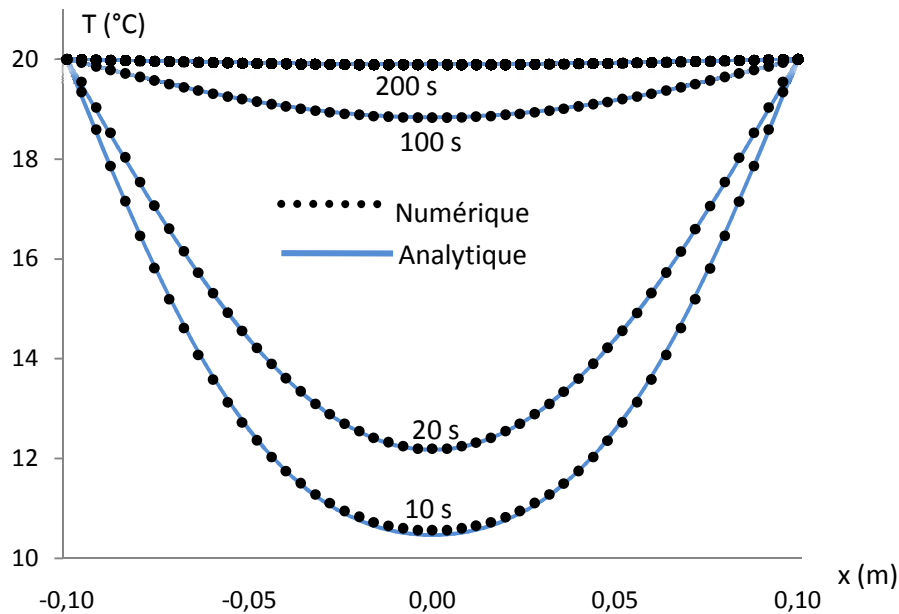


Fig.6.14. Plaque avec température imposée

### 4.3. Milieu semi infini avec température imposée

Considérant le problème d'un milieu semi infini, dont la température initiale est uniforme, à  $t > 0$  une température est imposée à la paroi ( $x = 0$ ). on compare la solution numérique avec l'analytique pour une discrétisation de 120 et 2000 mailles

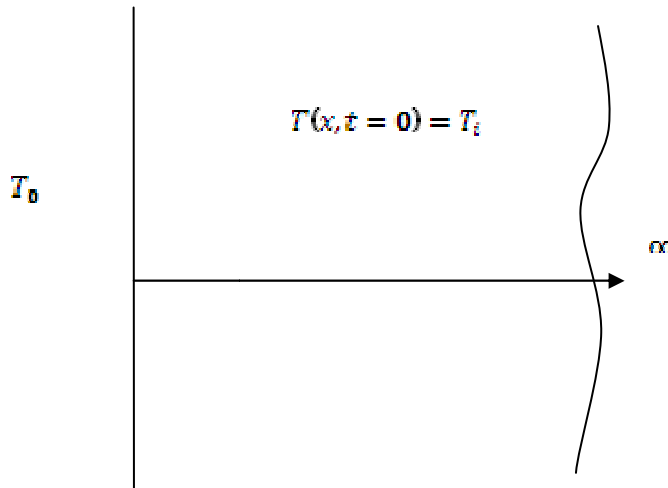


Fig.6.15 Mur semi infini avec température imposée

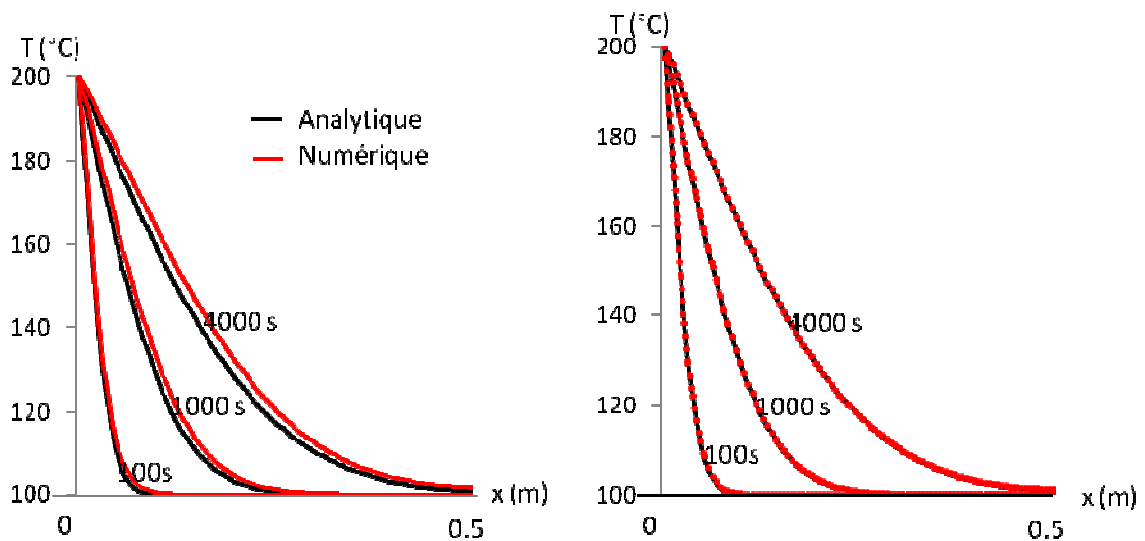


Fig.6.16 mur semi infini

### 4.4. Milieu semi infini avec coefficient de convection imposé

La géométrie est la même que le problème précédent sauf que la condition à la limite ( $x = 0$ ) est de type convection.

Dans cet exemple on compare avec la méthode des moindres carrés du gradient, GGLS (Galerkin gradient least-squares)

Les données du problème sont les suivants :  $\lambda = 0,01, h_{\infty} = 1, T_{\infty} = 0, T_i = 1, \rho = 1, C_p = 1$

En utilisant 1280 mailles, le temps de calcul est de 16,203s.

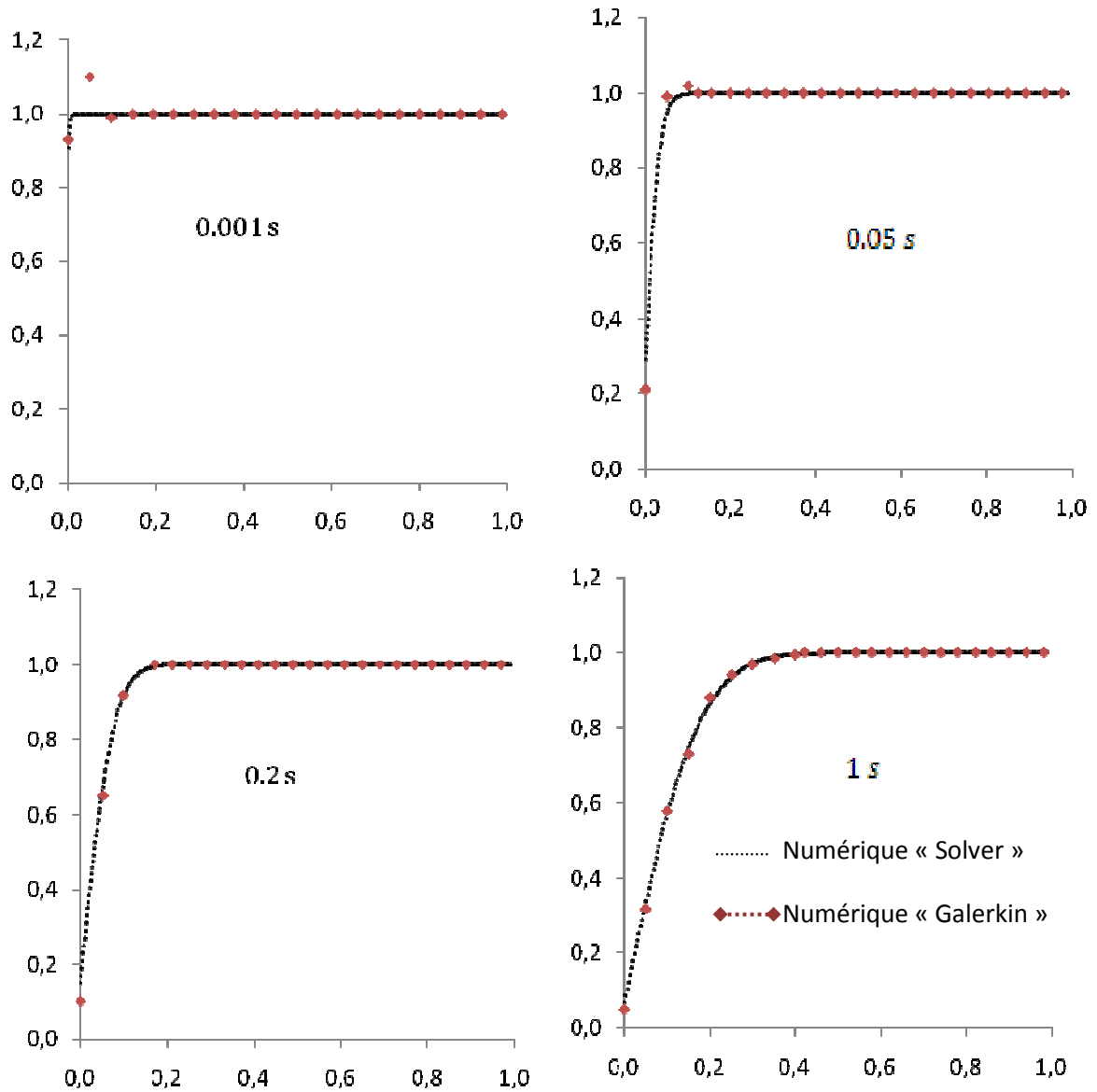


Fig.6.17 mur semi infini

On remarque que nos résultats sont très proches de celles de la méthode de Galerkin, la différence maximale entre les deux résultats est de (0.036%).

## 5. Distribution de température dans un cylindre à ailettes

On s'est intéressé dans cette partie à l'étude numérique de la conduction à travers les parois du cylindre à ailettes, nous avons tracé le contour des températures pour différentes configurations géométriques de la surface d'échange, en variant le nombre des ailettes implantées sur la surface externe du cylindre.

Pour concevoir les organes constituant l'enveloppe de la chambre de combustion, trois types de matériaux sont utilisés : la fonte à graphite sphéroïdale (G.S), l'acier allié et l'alliage d'aluminium. Le matériau utilisé dans notre étude est un alliage d'aluminium avec les caractéristiques suivantes :

- Masse volumique  $\rho = 2620 \text{ Kg/m}^3$
- La conductivité thermique  $K = 220 \text{ W/m K}$
- La chaleur spécifique  $C_p = 1000 \text{ J/Kg K}$

Le cylindre peut se présenter sous forme d'un alésage dans le bloc moteur. Les dimensions sont imposées par le couple et la puissance que le moteur est appelé à fournir. En ce qui concerne notre étude, nous avons opté pour les cylindres d'un moteur de faible puissance. Nous avons considéré la surface externe ailetée avec des ailettes annulaires.

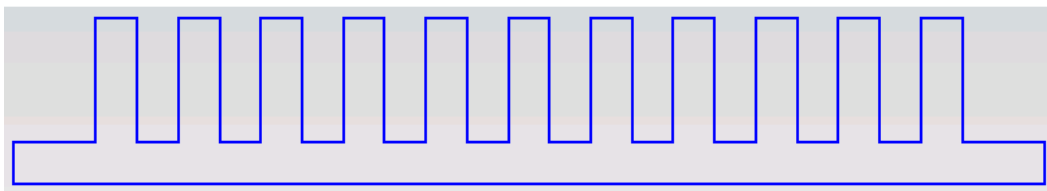
L'équation de chaleur a été discrétisée moyennant la procédure numérique des volumes finis. Le système d'équations ainsi discrétisées a été résolu par la méthode de Gausse-Seidel. Dans cette étape de notre travail, nous avons étudié l'influence du nombre des ailettes implantées autour du cylindre sur l'évacuation de chaleur à travers les parois du cylindre afin d'étudier l'efficacité et la possibilité de refroidir le moteur prédéfinie par l'air. Les conditions aux limites et initiales sont présentés au 3eme chapitre dans la partie 3.1.

AN :  $T_i = 313 \text{ K}$ ,  $T_\infty = 313$ ,  $h_\infty = 35 \text{ Wm}^{-2}\text{K}$  et en prend  $b = 0$ .

Diamètre intérieur 40 mm ; Diamètre extérieur 48 mm ; Hauteur de cylindre 100 mm ; Hauteur des ailettes 12 mm.

### 5.1. Cylindre avec 10 ailettes

Soit un cylindre avec 10 ailettes d'épaisseur 4 mm.



*Fig.6.18. Cylindre avec 10 ailettes.*

Les figures 6.19 à 6.23, donnent les distributions de température dans le cylindre à différents temps en utilisant un code de calcul développé. On remarque que la température dans les parois du cylindre est diminuée en fonction de la hauteur du cylindre.



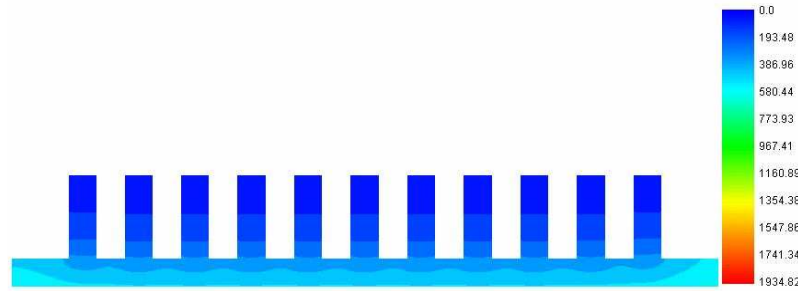


Fig.6.19 La distribution de température pour 10 ailettes à  $t = 0.4$  s

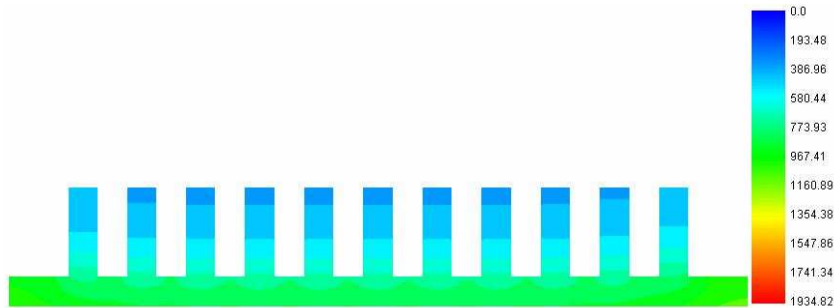


Fig.6.20 La distribution de température pour 10 ailettes à  $t = 1.2$  s

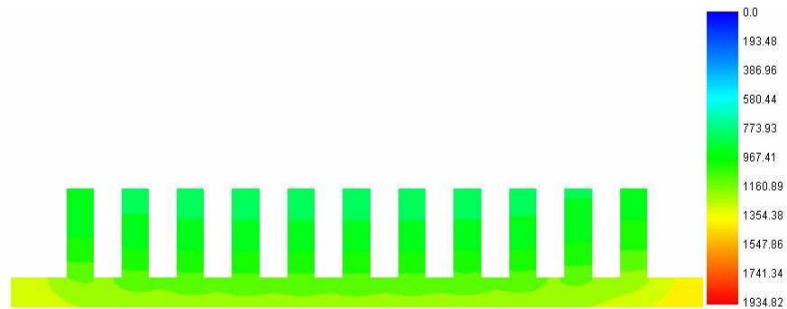


Fig.6.21 La distribution de température pour 10 ailettes à  $t = 2.4$  s

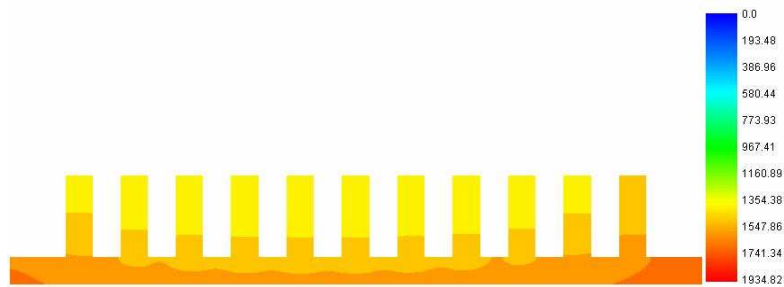


Fig.6.22 La distribution de température pour 10 ailettes à  $t = 4.6$  s

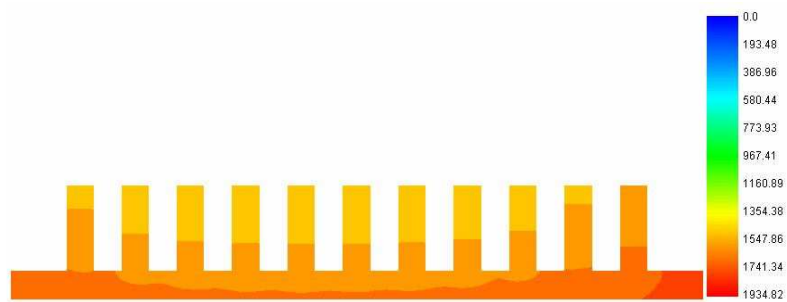


Fig.6.23 La distribution de température pour 10 ailettes à  $t = 5.4$  s

## 5.2. Cylindre avec 6 ailettes

Soit un cylindre avec 6 ailettes d'épaisseur 7 mm.

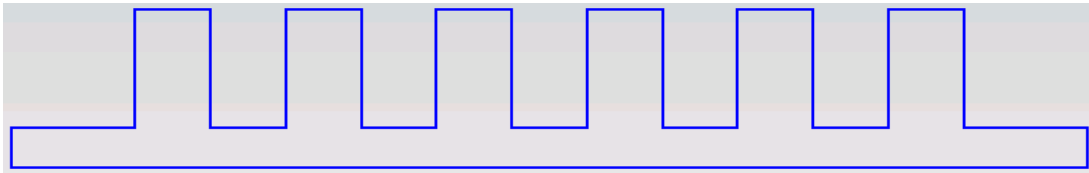


Fig.6.24. Cylindre avec 6 ailettes.

Les figures 6.25 à 6.29, donnent les distributions de température dans le cylindre à différents temps en utilisant le code de calcul développé dans le cadre de cette étude. On remarque que, pour l'ensemble des figures, la température dans les parois du cylindre diminue avec la hauteur du cylindre.

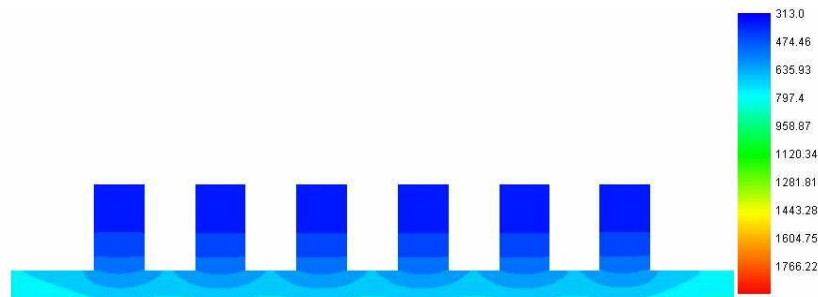


Fig.6.25 La distribution de température pour 6 ailettes à  $t = 0.4$  s

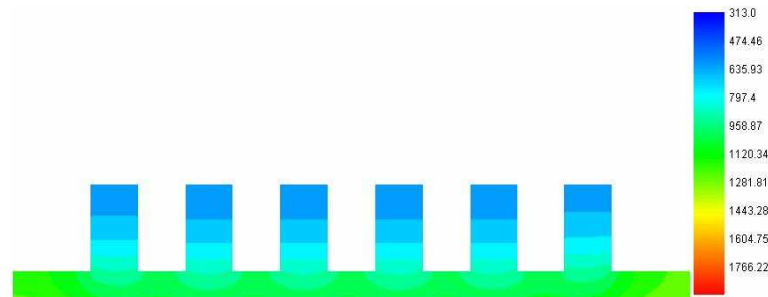


Fig.6.26 La distribution de température pour 6 ailettes à  $t = 1.2$  s

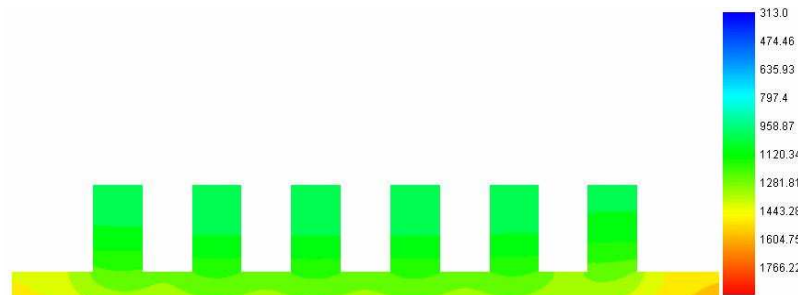


Fig.6.27 La distribution de température pour 6 ailettes à  $t = 2.4$  s

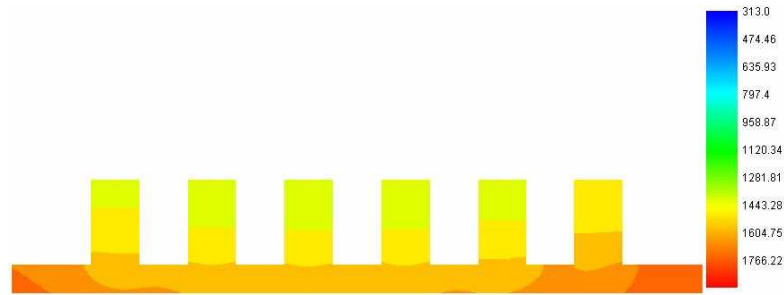


Fig.6.28 La distribution de température pour 6 ailettes à  $t = 4.6$  s

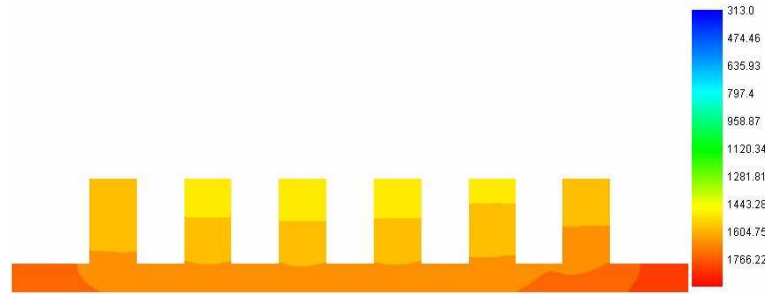


Fig.6.29 La distribution de température pour 6 ailettes à  $t = 5.4$  s

### 5.3. Cylindre avec 4 ailettes

Soit un cylindre avec 4 ailettes d'épaisseur 11 mm.

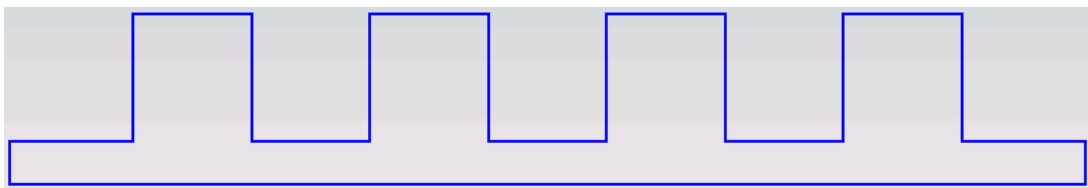


Fig.6.30 Cylindre avec 4 ailettes

Les figures 6.31 à 6.35 montrent les distributions de température dans le cylindre à différents temps en utilisant le code calcul développé. On remarque que la température dans les parois du cylindre diminue en fonction de la hauteur du cylindre.

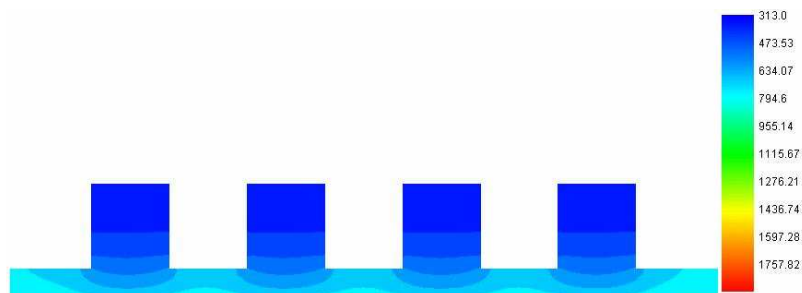


Fig.6.31 La distribution de température pour 4 ailettes à  $t = 0.4$  s

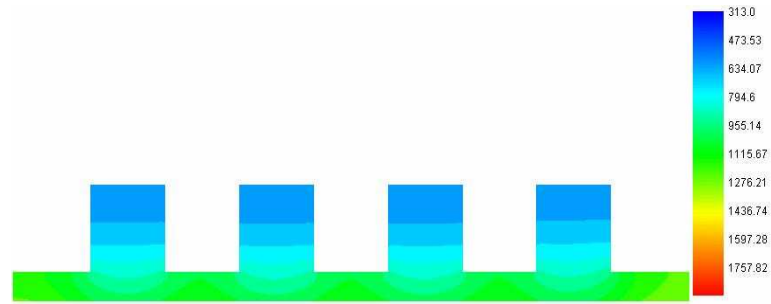


Fig.6.32 La distribution de température pour 4 ailettes à  $t = 1.2$  s

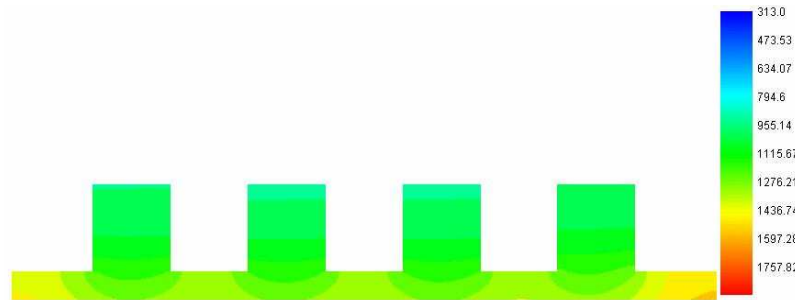


Fig.6.33 La distribution de température pour 4 ailettes à  $t = 2.4$  s

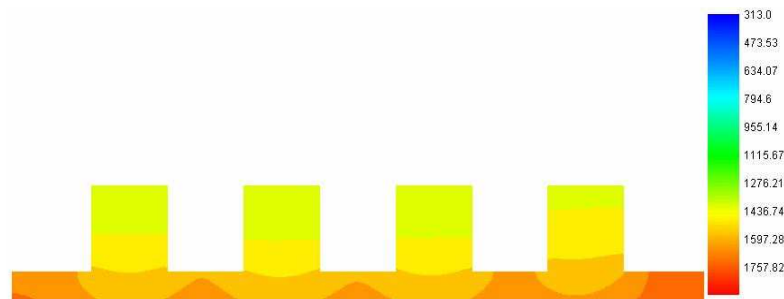


Fig.6.34 La distribution de température pour 4 ailettes à  $t = 4.6$  s

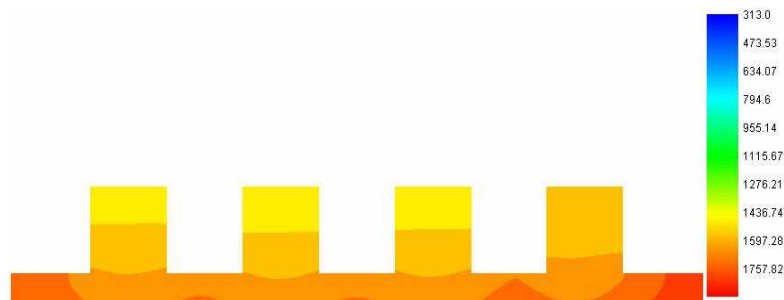


Fig.6.35 La distribution de température pour 4 ailettes à  $t = 5.4$  s

Les figures 6.36 à 6.40, donnent les profils de température au niveau de la base des ailettes ( $Y = 4mm$ ) en fonction de la hauteur du cylindre pour différent temps.

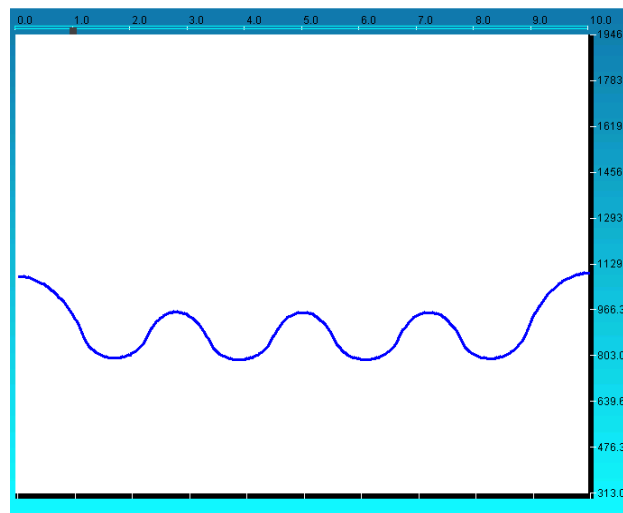


Fig.6.36 Variation de température en fonction de X au niveau de  $Y = 4\text{mm}$  à  $t = 1\text{ s}$

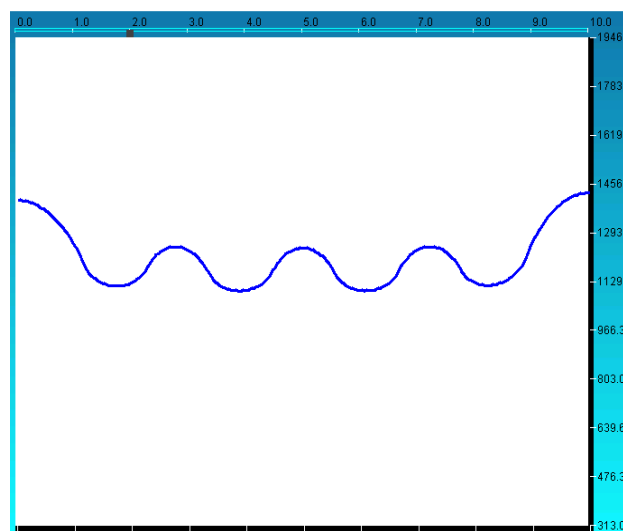


Fig.6.37 Variation de température en fonction de X au niveau de  $Y = 4\text{mm}$  à  $t = 2\text{ s}$

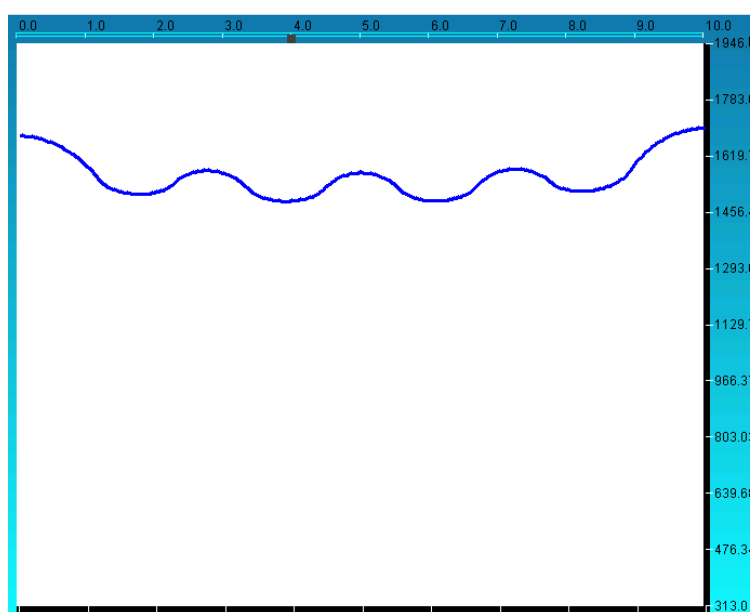


Fig.6.38 Variation de température en fonction de X au niveau de  $Y = 4\text{mm}$  à  $t = 4\text{ s}$

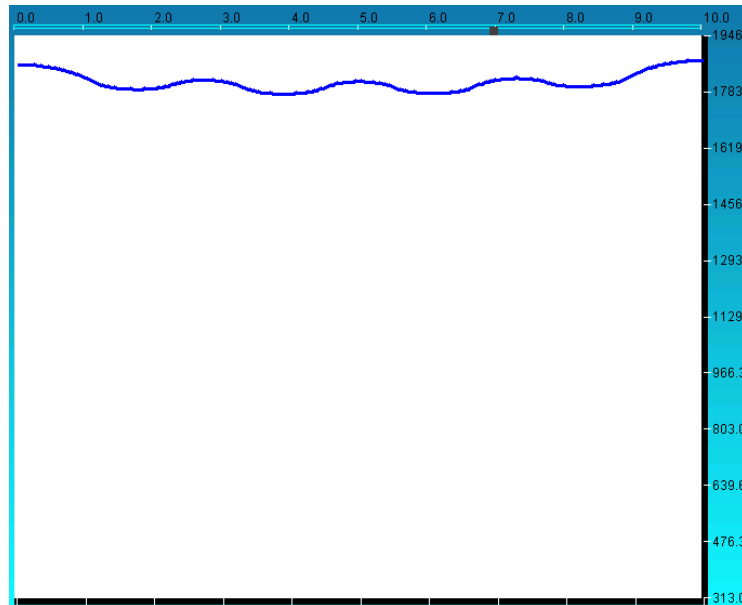


Fig.6.39 Variation de température en fonction de X au niveau de Y = 4mm à t = 7 s

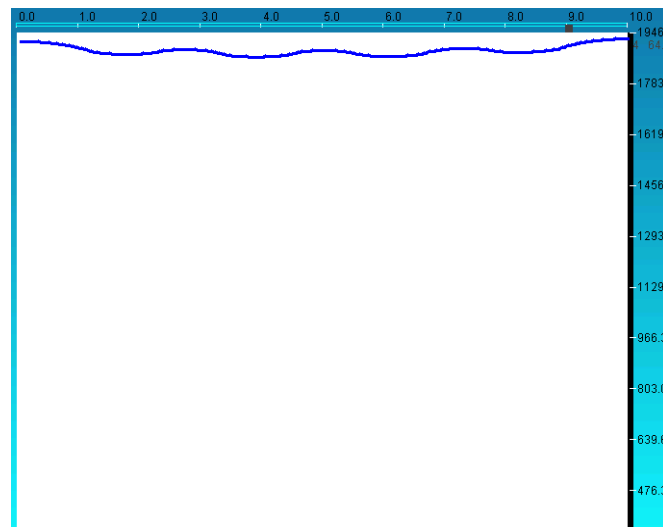


Fig.6.40 Variation de température en fonction de X au niveau de Y = 4mm à t = 9 s

## 6. Estimation de coefficient d'échange

Pour estimer le coefficient d'échange par convection pour la surface ailetée (fig.6.41), en considère le problème directe en supposant un coefficient de convection constant le long de la surface ailetée  $\left(h_a = 20 \frac{W}{m^2 K}\right)$ , puis en utilise la distribution de température trouvée par la résolution de problème directe avec une certain erreur  $\Delta T$  pour estimer l'évolution de coefficient de convection.

Les figures suivantes représentant l'évolution du coefficient d'échange convectif pour différentes valeurs de  $\Delta T$ .

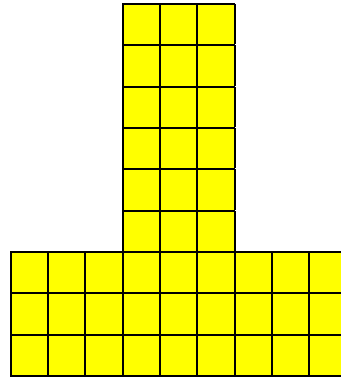


Fig.6.41. Elément de la surface ailetée.

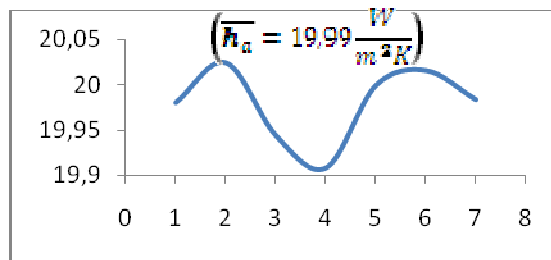


Fig.6.42. Evolution du coefficient d'échange convectif,  $h_w$ , pour :  $\Delta T = 0,1$

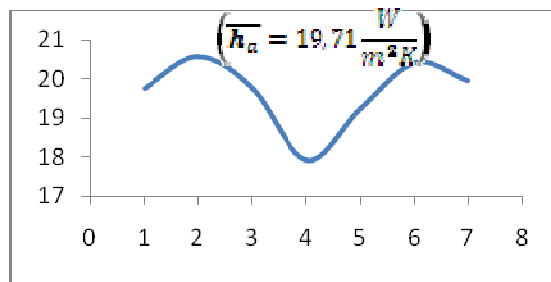


Fig.6.43. Evolution du coefficient d'échange convectif,  $h_w$ , pour :  $\Delta T = 2$

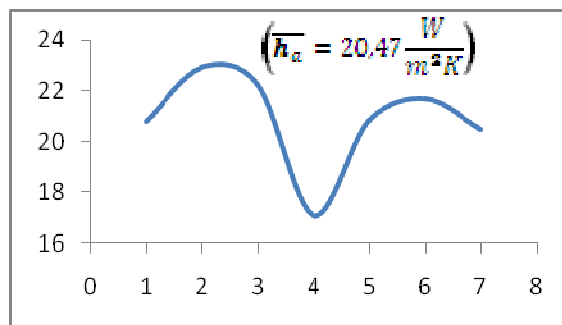


Fig.6.44. Evolution du coefficient d'échange convectif,  $h_w$ , pour :  $\Delta T = 4$

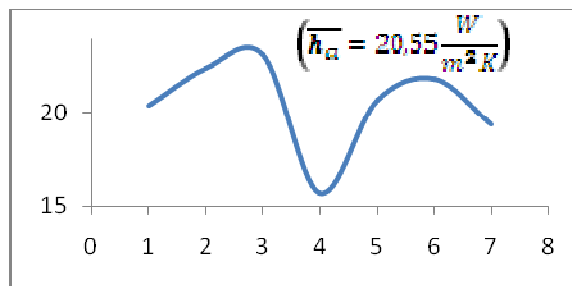


Fig.6.45  $\Delta T = 10$

## **6. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons testé la méthode des volumes finis implémentée pour différents exemples. L'efficacité et la souplesse de la méthode ont été testées en confrontant nos résultats à ceux de la littérature.

Le code de calcul ainsi développé et validé par des résultats issus de la littérature a été utilisé pour simuler les transferts thermiques conductifs ayant lieu dans le cylindre à surface ailetée d'un moteur à combustion interne d'un véhicule léger pour des conditions aux limites assez complexes, proches de la réalité. On a remarqué que le transfert de chaleur est meilleur en augmentant le nombre d'ailettes. Néanmoins, il y a un compromis entre le nombre d'ailettes et leur hauteur et que la distribution de température suivant  $x$  pour un  $y$  fixé diminue au niveau de ailettes ce qui est confirmé par le logiciel Fluent et mis en défaut par le code de calcul Conduct [110].



# *Conclusion Générale*

---

*You never finish a program; you just stop working on it*

## ***Conclusion Générale***

Le développement de logiciels est d'une importance capitale dans le domaine de la recherche scientifique et du développement technologique, permettant ainsi une économie de temps et une maîtrise des phénomènes physiques ayant lieu dans différents process industriels.

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des volumes finis pour le développement d'un logiciel de modélisation des problèmes de conduction thermique, en s'intéressant particulièrement aux cas unidimensionnels, bidimensionnels, cylindriques, stationnaires et instationnaires.

Le logiciel conçu, avec interface graphique et validé par des résultats issus de la littérature a permis de traiter plusieurs configurations et les résultats obtenus ont montré l'efficacité de la méthode.

L'implémentation d'une méthode itérative pour la résolution du système d'équations, obtenu par la discrétisation de l'équation de la chaleur, a permis une optimisation considérable concernant le temps de calcul. Pour les problèmes axisymétriques, l'utilisation des coordonnées cylindriques a amélioré la précision de la modélisation.

L'efficacité et la souplesse de la méthode ont été testées en confrontant nos résultats aux ceux de la littérature à savoir des solutions analytiques et d'autres méthodes numériques tel que GGSL et MFM. En faisant le bilan entre la souplesse de la méthode et le temps investi pour traiter les problèmes, on peut conclure que le logiciel est très efficace.

Nous avons utilisé le code développé pour étudier le transfert thermique conductif dans un cylindre à surface ailetée d'un moteur à combustion interne. Cette étude est en général assez complexe compte tenu de la nature polyphasique des écoulements qui se produisent dans la chambre de combustion et des temps d'équilibres des régimes d'écoulements qui sont relativement réduits.

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés aux transferts purement conductifs en utilisant des coefficients de transfert et une configuration géométrique des moteurs issus de la littérature.

Ce travail est le premier pas de développement, et cette première version du logiciel nécessite un perfectionnement, parmi les points importants à notre sens est de le compléter en traitant la conduction thermique tridimensionnelle et en intégrant l'aspect dynamique des fluides dans le modèle.

## *Références Bibliographiques*

---

## Références Bibliographiques

- [1] **Kaviany M.**, *Heat Transfer Physics*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] **Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Zhu J.Z**, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* , Butterworth-Heinemann, 2005.
- [3] **Roland W. L., Perumal N., Kankanhalli N. S.**, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, John Wiley & Sons, 2004.
- [4] **Forsythe G.E., Wasow W.R.**, *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1960.
- [5] **David R. C., Lilley D. G.**, *Heat Transfer Calculation Using Finite Deference Equations*, Applied science publishers LTD, 1977.
- [6] **Guo B. Yu**, *Spectral Methods and Their Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd , 1942.
- [7] **Patankar S. V.**, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Taylor & Francis, 1980.
- [8] **Schanz M., Steinbach O.**, *Boundary element analysis*, Springer-Verlag, 2007.
- [9] **Martti H.**, *Some Boundary Element Methods for Heat Conduction Problems*, Oulu University Library, 2000.
- [10] **Brebbia C.A., Dominguez J.**, *Boundary elements: an introductory course*, McGraw-Hill, 1989.
- [11] **Bobet A., Mutlu O.**, *Stress and displacement discontinuity element method for undrained analysis*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 72, pp. 1411–1437, 2005.
- [12] **Crouch S.L, Starfied A.M**, *Boundary Element Method in Solid Mechanics with Application in Rock Mechanics and Geological Mechanics*, Allen and Unwin, 1983.
- [13] **John D. Anderson, J.R.**, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, Mc Graw-Hill, 1955.
- [14] **Wesseling P.**, *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 2001.
- [15] **Ioan C., Popa M.**, *Modélisation numérique du transfert thermique*, Universitaria Craiova, 2002.
- [16] **Mak R.**, *The Java Programmer's Guide to Numerical Computing*, Prentice Hall, 2002.
- [17] **Mirecourt A.**, *Le développeur Java 2*, Eyrolles, 1999.
- [18] **Boudreau T., Glick J., Greene S., Vaughn S., Woehr J.**, *NetBeans: The Definitive Guide*, O'Reilly, 2002.

- [19] **Goldstein R.J., Eckert E.R.G., Ibele W.E., Patankar S.V., Simon T.W.**, *Heat transfer—a review of 2002 literature*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 48, pp. 819–927, 2005.
- [20] **Vessakosol P., Chareonsuk J., Teschareon T.**, *Finite volume method for an analysis of transient heat*, ICCES, Vol.10, pp.5-20, 2009.
- [21] **Uygun M., Kirkköprü K.**, *Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods: central versus upwind schemes*, Journal of Aeronautics and Space Technologies, Vol. 35, pp. 55- 65, 2005.
- [22] **Lan C. W., Liu C.C., Hsu C. M.**, *An Adaptive Finite Volume Method for Incompressible Heat Flow Problems in Solidification*, Journal of Computational Physics, Vol.178, pp. 464–497, 2002.
- [23] **Da Cunha, A. S., Ferreira W. R.**, *Two-Dimensional Transient Finite Volume Diffusional Approach to Transport Equations*, Tendencias em Matematica Aplicada e Computacional, Vol.3, pp. 91-100, 2002.
- [24] **Lunati I., Jenny P.**, *Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media*, Journal of Computational Physics, Vol. 216, pp. 616–636, 2006.
- [25] **Vuong A.V., Simeon B., Boschert S.**, *Adaptive Finite Volume Methods for Interfacial Flows*, European Journal of Applied Mathematics, Vol. 26, pp. 33- 42, 2008.
- [26] **Tonelli M., Petti M.**, *A Finite Volume – Finite Difference Scheme for the Solution of 2D Extended Boussinesq Equations*, International Offshore and Polar Engineering Conference, 2008.
- [27] **Garrouch A.A., Al-Dousari, M. M.**, *Applying the Finite-Volume Method for Solving the Convection-Dispersion Equation in Radial Coordinates*, International Journal of Petroleum Science and Technology, Vol. 12, pp. 75–97, 2007.
- [28] **Eljko Lilek/ Samir Muzaferija/ Milovan Peri / Volker Seidl** «An Implicit Finite-Volume Method Using Nonmatching Blocks of Structured Grid » Numerical Heat Transfer, Volume 32, 385 – 401 (1997).
- [29] **Zubair S. M., Chaudhry M. A.**, *Heat conduction in a semi-infinite solid subject to steady and non-steady periodic-type surface heat fluxes*, International Journal of Heat Mass Transfer, Vol. 38, pp. 3393-3399, 1995.
- [30] **Ching C. M., Shin W. C.**, *Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media*, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 47, pp. 1643-1655, 2004.
- [31] **Ebadian A., Darania P.**, *Study of exact solutions of nonlinear heat equations*, Comp. Appl. Math., Vol. 27, pp. 56- 64, 2008.
- [32] **Lin R. L.**, *Explicit full field analytic solutions for two-dimensional heat conduction problems with finite dimensions*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 53, pp. 1882–1892, 2010.

- [33] **Gordeliy E., Crouch S. L., Mogilevskaya S. G.**, *Transient heat conduction in a medium with two circular cavities: Semi-analytical solution*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 51, pp. 3556–3570, 2008.
- [34] **Sadat H.**, *A general lumped model for transient heat conduction in one dimensional geometries*, Applied Thermal Engineering, Vol. 25, pp. 567–576, 2005.
- [35] **Chakravarthy B., Cherukuri H.P., Wilhelm R.G.**, *Prediction of soak out time using analytical models*, Journal of the International Societies for Precision Engineering and Nanotechnology, Vol. 26, pp. 15–23, 2002.
- [36] **Sheng S. W., Shiu S. L.**, *Analysis on transient heat transfer in an annular fins or various shapes with their bases subjected to a heat flux varying as a sinusoidal time function*, Computers and Structures, Vol. 61, pp. 725-734, 1996.
- [37] **Fukuyo K.**, *Finite analytic method based on power series expansion for unsteady heat conduction problems*, Numerical Heat Transfer, Vol. 45, pp. 369 – 384, 2004.
- [38] **Lu X., Tervola P., Viljanen M.**, *Transient analytical solution to heat conduction in multi-dimensional composite cylinder slab*, International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 49, pp. 1107-1114, 2006.
- [39] **Matysiak S.J., Yevtushenko A.A.**, *On a mixed nonstationary problem of heat conduction for a half-space*, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 33, pp. 959–965, 2006.
- [40] **Lewandowska M., Malinowski L.**, *An analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for the case of a finite medium symmetrically heated on both sides*, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol.33, pp. 61– 69, 2006.
- [41] **Cossali G.E.**, *Periodic heat conduction in a solid homogeneous finite cylinder*, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 48, pp. 722–732, 2009.
- [42] **Chu H.P., Chen C.L.**, *A Hybrid differential transform and finite difference method to solve the nonlinear heat conduction problem*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 13, pp. 1605-1614, 2008.
- [43] **Livne E., Glasner A.**, *A finite difference scheme for the heat conduction equation*, Journal of Computational Physics, Vol. 1, pp. 59-66, 1985.
- [44] **Dai W.**, *A new accurate finite difference scheme for Neumann (insulated) boundary condition of heat conduction*, International Journal of Thermal Sciences, Vol.49, pp 571-579, 2010.
- [45] **Bouaziz M. N.**, *Application of Exp/imp Finite Difference for Nonlinear Heat Transfer Fin Effect of Nonlinearities of Fin Efficiency*, Adv. Theor. Appl. Mech, Vol 2, pp.19 – 32, 2009.
- [46] **Vujicic M.R., Brown S.G.R.**, *Iterative Solvers in the Finite Element Solution of Transient Heat Conduction*, FME Transactions, Vol. 32, pp. 61-68, 2004.

- [47] **Dhawan S., Kumar S.,** *A Comparative Study of Numerical Techniques For 2D Transient Heat Conduction Equation Using Finite Element Method*, International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, Vol. 1, pp. 554- 565, 2009.
- [48] **Gray W.H., Schnurr N.M.,** *A comparison of the finite element and finite difference methods for the analysis of steady two dimensional heat conduction problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 6, pp. 243-245, 1975.
- [49] **Chen T.M.,** *A modified hybrid Laplace transform/finite element method for transient heat conduction problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 98, pp. 261-272, 1992.
- [50] **Sutradhar A., Paulino G.H.,** *The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 193, pp. 4511–4539, 2004.
- [51] **Sutradhar A., Paulino G.H.,** *Symmetric Galerkin Boundary Element Method for Heat Conduction in Functionally Graded Materials*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, pp. 67- 79, 2003.
- [52] **Hematiyan M.R., Karami G.,** *A Meshless Boundary Element Method Formulation for Transient Heat Conduction Problems with Heat Sources*, Scientia Iranica, Vol. 15, pp 348-359, 2008.
- [53] **Mansur W.J., Vasconcellos C.A.B, Zambrozuski N.J.M., Filho R.,** *Numerical solution for the linear transient heat conduction equation using an Explicit Green's Approach* »International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 52, pp 694–701, 2009.
- [54] **Frankela J.I., Kulish V.V,** *A new flux integral relationship for half-space transient heat conduction with arbitrary initial condition*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 32, pp. 162–167, 2008.
- [55] **Chen T.M.,** *A hybrid Green's function method for the hyperbolic heat conduction problems*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 52, pp. 4273–4278, 2009.
- [56] **Ilinca F., Héту J.F,** *Galerkin gradient least-squares formulations for transient conduction heat transfer*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 191, pp. 3073–3097, 2002.
- [57] **Zhang F.H., Ouyang J., Zhang L.,** *Matrix free meshless method for transient heat conduction problems*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 52, pp. 2161–2165, 2009.
- [58] **Dhawan S., Kumar S.,** *A Numerical Solution Of One Dimensional Heat Equation Using Cubic B-Spline Basis Functions*, International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, Vol. 1, pp. 675- 688, 2009.
- [59] **Sladek J., Sladek M., Tan C.L., Atluri S. N.,** *Analysis of Transient Heat Conduction in 3D Anisotropic Functionally Graded Solids, by the MLPG Method*, CMES, Vol. 32, pp. 161-174, 2008.

- [60] **Hsu M.H.**, *Differential Quadrature Method for Solving Hyperbolic Heat Conduction Problems*, Tamkang Journal of Science and Engineering, Vol. 12, pp. 331-338, 2009.
- [61] **Gvirtsman Z., Garfunkel A.**, *Numerical solutions for the one-dimensional heat conduction equation using a spreadsheet*, Computers and Geosciences, Vol. 22, pp 1147-1158, 1996.
- [62] **Antar M.A.**, *A simplified numerical solution of unsteady heat conduction problems with an application to a short cylinder*, International Journal of Mechanical Engineering Education, Vol .28, pp. 87- 102, 1999.
- [63] **King A.C., Billingham J., Otto S.R.**, *Differential Equations: Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*, Cambridge University Press, 2003.
- [64] **Nagle R.K., Saff E.B., Snider R.D.**, *Fundamentals of Differential Equations*, Addison Wesley Longman, 2000.
- [65] **Pinchover Y., Rubinstein J.**, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2005.
- [66] **Selvadurai A.P.S.**, *Partial Differential Equations in Mechanics 1*, Springer Verlag, 2000.
- [67] **Powers D.L.**, *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*, Elsevier Academic Press, 2006.
- [68] **Myint T.U., Debnath L.**, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, 2007.
- [69] **Hoffman J.D.**, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Marcel Dekker, 2001.
- [70] **Cain G.L., Gunter H. M.**, *Separation of variables for partial differential Equations*, Chapman & Hall, 2006.
- [71] **Spiegel M.R.**, *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- [72] **Kreith F., Boehm R.F.**, *Heat and Mass Transfer*, Mechanical Engineering Handbook, Frank Kreith Boca Raton, CRC Press LLC, 1999.
- [73] **Incropera F., Dewitt M.**, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, 1981.
- [74] **Çengel Y.A.**, *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences Part 3: Heat transfer*, McGraw-Hill, 2004.
- [75] **Subhash L.S., Goela J.S.**, *High Thermal Conductivity Materials*, Springer Science and Business Media, Inc., 2006.
- [76] **Pitts D.R., Leighton E.S.**, *Theory and Problems of Heat Transfer*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1998.
- [77] **Fourier J.**, *Théorie de la Chaleur*, Jacques Gabay, 1988.
- [78] **Lienhard J.N., Lienhard J.H.**, *A Heat Transfer Textbook*, Phlogiston Press Cambridge, 2003.



- [79] **Jiji L.M.**, *Heat Conduction*, Springer-Verlag, 2009.
- [80] **Jedrzejewski F.**, *Introduction aux méthodes numériques*, Springer-Verlag, 2005.
- [81] **Attouchi M. T.**, *Etude Numérique des Transferts Thermiques Conductifs à Travers les Parois d'un Moteur à Combustion Interne*», Mémoire de Magister, Ecole Nationale Polytechnique, 2005.
- [82] **Isaacson E., Bishop K.H.**, *Analysis of Numerical Methods* », John Wiley & Sons, 1966.
- [83] **Meurant G.**, *Computer Solution of Large Linear Systems*, Elsevier Ltd, 1999.
- [84] **Givens, L.**, *A Technical History of the Automobile*, Automotive Engineering, Vol. 98, SAE International Inc., 1999.
- [85] **Yamaguchi M.**, *Honda's Oval-Piston Mega-Bike*, Automotive Engineering, Vol. 100, pp. 46-47, 1992.
- [86] **Seri,U.**, *Generator Gas*, EG-77-C-01-4042, 1979.
- [87] **Demmler, A.**, *Smog-Treating Catalyst*, Automotive Engineering, Vol. 103, pp. 32- 40, SAE International, 1995.
- [88] **Valenti M.**, *Pollution-Reducing Cars*, ASME, Vol. 117, pp. 65- 77, 1995.
- [89] **Pulkrabek W.**, *Engineering Fundamentals of the Internal Combustion Engine*, Prentice Hall, 2007.
- [90] **Chagette J.**, *Technique d'automobile*, Dunod, 1977.
- [91] **Cummins C.L.**, *Internal Fire*, SAE International Inc., 1989.
- [92] **Heywood J.B.**, *Internal Combustion Engine Fundamentals*, McGraw-Hill, Inc., 1988.
- [93] **Trapy J.**, *Moteur à allumage commandé*, Technique de l'ingénieur, doc. BM 2540.
- [94] **Woschni G.**, *A universally applicable equation for the instantaneous heat transfer coefficient in the internal combustion engine*, SAE Paper No 670931, 1967.
- [95] **Clos C.**, *Technologie des moteurs alternatifs*, Ellipse, 1999.
- [96] **Arques P.**, *Conception et construction des moteurs alternatifs*, Ellipses, 1999.
- [97] **Ferguson C.L.**, *Internal combustion engines*, Wiley & Sons, 1986.
- [98] **Annand W.J.D.**, *Instantaneous heat transfer rates to the cylinder heat surface of a small compression ignition engine*, Proc. Inst. Mech. Eng., Vol, 185, pp. 56- 64, 1971.
- [99] **Alkilas A.C., Cole R.M.**, *Transient heat flux measurements in a divided chamber Diesel engine*, Journal of heat transfer, Vol. 107, pp. 439-444, 1985.
- [100] **Caton J.A., Heywood J.R.**, *An experimental and analytical study of heat transfer in an engine exhaust port*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 24, pp 581-595, 1981.

- [101] **Alexandre A., Tomaselli L.,** *Analyse des transferts énergétiques dans les moteurs automobiles*, Technique de l'ingénieur, BM 2900.
- [102] **Chen J.C.,** *Correlation for boiling heat transfer to structured fluids in convective flows*, Process design and development, Vol 5, 1966.
- [103] **Laraqui N., Habchi F.,** *Transfert de chaleur aux interfaces piston- segments- chemise d'un moteur thermique. Influence du frottement lubrifié*, Entropie, Vol.162, pp 49-53, 1991.
- [104] **Moranne J.P.,** *Refroidissement des moteurs à combustion interne*, Technique de l'ingénieur, B2830-20, 1986.
- [105] **Schuck S., Zidat S., Gentile D.,** *Refroidissement et lubrification des moteurs. Influence sur la consommation et la pollution*, Entropie, Vol. 162, pp. 41-47, 1991.
- [106] **Désbois M., Touache F., Tourancheau J., Torri R.,** *L'automobile. Technologie professionnelle générale. Les moteurs à quatre temps et à deux Temps*, Faucher, 1979.
- [107] **Larbi S., Attouchi M.T., Benkoussas B.,** *Modélisation des échanges thermiques dans les moteurs à combustion interne*, Congrès de la Société Française de Thermique, pp. 759-764, 2004.
- [108] **Stephen R., Turns D., Kraige R.,** *Property Tables for Thermal Fluids Engineering*, Cambridge, 2007.
- [109] **Artyukhin E.A.,** *Iterative Algorithms for Estimating Temperature- Dependent Thermophysical Characteristics*, International Conference on Inverse Problems in Engineering, Palm Coast, 1993.
- [110] **Ho C.H., Ozisik M. N,** *Inverse Radiation Problem in Inhomogeneous Media*, Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Vol. 40, pp. 553-560, 1988.
- [111] **Zabaras N., Ngugen T. H.,** *Control of the Freezing Interface Morphology in Solidification Processes in the Presence of Natural Convection*, International Journal of Numerical Methodes in Engineering, Vol. 38, pp. 1555- 1578, 1995.
- [112] **Bokar J.C., Ozisik M.N.,** *An Inverse Analysis for Estimating Varying Inlet Temperature in Laminar Flow Inside a Parallel Plate Duct*, International Journal of Heat Mass Transfer, Vol. 38, pp. 39-45, 1995.
- [113] **Huang C.H., Chiang C.C,** *Shape Identification Problem in Estimating Geometry of Multiple Cavities*, AIAA Journal Therm. and Heat Transfer, Vol. 12, pp. 270-277, 1998.
- [114] **Ternkin A.G.,** *Integral Solutions of Inverse Heat Conduction Problems*, Heat Transfer Sov. Res., Vol. 10, pp. 20-32, 1978.
- [115] **Deverall L. I., Channapragda R.S.,** *A New Integral Equation for Heat Flux in Inverse Heat Conduction*, Journal of Heat Transfer, Vol. 88, pp. 327-328, 1966.
- [116] **Frank I.,** *An Application of Least Squares Method to the Solution of the Inverse Problem of Heat Conduction*, Journal of Heat Transfer, Vol. 8, pp. 378-379, 1963.

- [117] **Randall J.D.**, *Finite Difference Solution of the Inverse Heat Conduction Problem and Ablation*, Technical Report, Johns Hopkins University, MD, 1976.
- [118] **Hore P.S., Krutz G.W., Schoenhals R.J.**, *Application of the Finite Element Method to the Inverse Heat Conduction Problem*, ASME Paper NO. 77- WA/TM-4, 1977.
- [119] **Lesnic D., Elliot L., Ingharn D. B.**, *Application of the Boundary Element Method to Inverse Heat Conduction Problems*, International Journal Heat Mass Transfer, Vol. 39, pp. 1503- 1517, 1996.
- [120] **Goldberg D.E.**, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Wesley, Reading, MA, 1989.
- [121] **Sawaf B., Ozisik M.N.**, *Determining the Constant Thermal Conductivities of Orthotropic Materials by Inverse Analysis*, International Communication on Heat and Mass Transfer, Vol. 22, pp. 12-22, 1995.
- [122] **Silva N., Ozisik M.N.**, *An Inverse Heat Conduction Problem of Unknown Initial Condition*, *10<sup>th</sup>* Int. Heat Transfer Conference, Brighton, UK, August 14-18, 1994.
- [123] **Dantas L.B., Orlande H.R.B.**, *A Function Estimation Approach for Determining Temperature-Dependent Thermo-physical Properties*, Inverse Problems in Engineering, Vol. 3, pp. 261 -279, 1996.
- [124] **Orlande, H.R.B., Ozisik M.N.**, *Inverse Problem of Estimating Interface Conductance Between Periodically Contacting Surfaces*, AIAA Journal Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 7, pp. 319-325, 1993.