

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère des Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Civil

Laboratoire Structures et Interaction Sol-Structures

THESE DE MAGISTER

Présentée par: *Mohamed Sayah GOUAL*

Ingénieur d'Etat Diplômé de l'E.N.P.

**ANALYSE MATRICIELLE DES STRUCTURES ET DE LEUR
STABILITE ELASTIQUE COMPTE TENU DE L'INTERACTION
SOL-STRUCTURE**

Soutenu en Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM. A. CHARIF	Professeur	Président
M. BERRAH	Maitre de conférences	Examineur
M. DEMIDEM	Chargé de cours	Examineur
R. BOUTEMEUR	Chargé de cours	Examineur
B. TILIOUINE	Professeur	Rapporteur

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère des Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Civil

Laboratoire Structures et Interaction Sol-Structures

THESE DE MAGISTER

Présentée par: Mohamed Sayah GOUAL

Ingénieur d'Etat Diplômé de l'E.N.P.

**ANALYSE MATRICIELLE DES STRUCTURES ET DE LEUR
STABILITE ELASTIQUE COMPTE TENU DE L'INTERACTION
SOL-STRUCTURE**

Soutenu en Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM. A. CHARIF	Professeur	Président
M. BERRAH	Maître de conférences	Examineur
M. DEMIDEM	Chargé de cours	Examineur
R. BOUTEMEUR	Chargé de cours	Examineur
B. TILIOUINE	Professeur	Rapporteur

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

الْإِهْدَاء

إِلَى التّی حملتني وهنّاً علی وهن
إِلَى والدي الكريم الذي ما فتئ يشجعني و يفضني
بالعناية

إِلَى إخواني وأخواتي
إِلَى كل عائلتي
إِلَى كل أصدقائي وأساتذتي
إِلَى كل الذين آمنوا بالحق و صبروا في سبيله

إِلَى كل هؤلاء .. أهدى ثمرة جهدي

محمد السائح قوال

AVANT PROPOS

Il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma profonde gratitude à mon Directeur de thèse B.TILIOUINE, Professeur et Directeur de l'E.N.P, pour sa sollicitude, ses conseils efficaces et les encouragements qu'il m'a prodigués durant le déroulement de ce travail de recherche.

J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieur A.CHARIF, Professeur à l'E.N.P, d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur M.BERRAH, Maître de conférence, et Monsieur M.DEMIDEM, Chargé de cours à l'E.N.P, dont les suggestions ont permis de parfaire ce document, et je remercie Monsieur R.BOUTEMEUR, Chargé de cours à l'E.N.P, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à mes collègues Post-Graduants au sein du département de Génie Civil pour leurs aides.

S O M M A I R E

INTRODUCTION GENERALE	1
Chapitre 1: Aperçu général sur les méthodes d'analyse automatiques des structures.	7
1.1 - La méthode des forces	7
1.2 - La méthode des déformations	9
1.2.1 - La matrice de rigidité d'un élément de poutre libre	10
- Exemple de calcul d'une poutre hyperstatique libre	13
1.2.2 - La matrice de rigidité d'une barre oblique	22
1.3 - Comparaison des deux méthodes	23
Chapitre 2 : Notions générales sur les méthodes prenant en compte l'interaction sol-structure	25
2.1 - Les méthodes globales	25
2.2 - Les méthodes de sous structures	26
2.2.1 - Les méthodes de frontière	27
2.2.2 - Les méthodes de volume	28
2.3 - La méthode hybride	28
2.4 - Comparaison des différentes méthodes	29
Chapitre 3 : Modèles de comportement du sol	31
3.1 - Modèle du semi espace élastique infini	32
3.2 - Modèle de déformation locale du sol	33
* Détermination du module de fondation K	34
* Mesure expérimentale	34
3.3 - Modèles combinés du sol élastique	35
CONCLUSION	36

Chapitre 4 : Formulation mathématique du problème	37
4.1 - L'équation différentielle de la ligne déformée d'une poutre colonne reposant sur une fondation élastique	38
4.1.1 - Solution de l'équation différentielle	39
4.1.2 - Influence de l'effort normal de compression	40
* 1 ^{er} cas : $N < 2\sqrt{K.EI}$	40
* 2 ^{ème} cas: $N = 2\sqrt{K.EI}$	41
* 3 ^{ème} cas: $N > 2\sqrt{K.EI}$	41
CONCLUSION	44
 Chapitre 5 : Matrice de rigidité d'un élément de poutre colonne sur fondation élastique	 45
5.1 - Convention de signes	45
5.2 - Détermination des rigidités S_{ij}	48
5.3 - Détermination des actions aux extrémités des éléments dues aux charges	50
5.3.1 - Cas d'une charge uniformément répartie q	51
5.3.2 - Cas d'une charge concentrée P	53
5.4 - Résultats	55
5.5 - Résultats des cas particuliers	57
* Premier cas : $N = 0$ et $K \neq 0$	57
* Deuxième cas: $N = 0$ et $K = 0$	58
* Troisième cas: $N \neq 0$ et $K = 0$	58
 Chapitre 6 : Analyse d'une poutre continue sur fondation élastique	 60
6.1 - Présentation	60
6.2 - Système d'indexation	61
6.3 - Méthode de calcul	63
6.3.1 - Généralisation de la matrice de rigidité	63
* Exemple	67
6.3.2 - Réarrangement de la matrice de rigidité $[S_j]$	69
6.3.3 - Détermination des vecteurs charges	70
6.3.3.1 - Formation du vecteur charges nodales $\{A\}$	70

6.3.3.2 - Formation de la matrice $[AML]$ des actions aux extrémités des éléments dues aux charges	71
6.3.3.3 - Formation du vecteur charges nodales équivalentes $\{AE\}$	73
6.3.3.4 - Formation du vecteur charges nodales combinées $\{Ac\}$	74
6.3.4 - Résultats finaux	75
6.3.4.1 - Calcul des déplacements	75
6.3.4.2 - Calcul des réactions d'appuis	76
6.3.4.3 - Calcul des actions aux extrémités des éléments	76
6.3.5 - La technique de prise en compte des appuis élastiques	78

Chapitre 7 : Analyse d'une structure en portique plan

sur fondation élastique	79
7.1 - Présentation	79
7.2 - Etablissement de la matrice de rigidité $[Sm]_1$ d'un élément de portique plan reposant sur une fondation élastique	79
7.2.1 - Transformation de la matrice $[Sm]_1$ du repère local au repère global	81
7.3 - Système d'indexation	83
7.4 - Ordre de calcul	85
7.4.1 - Formation de la matrice de rigidité globale $[S_j]$	85
7.4.2 - Formation des vecteurs charges	89
7.4.2.1 - Formation du vecteur charges nodales $\{A\}$	89
7.4.2.2 - Les vecteurs des actions aux extrémités bloquées des éléments dues aux charges.	89
7.4.2.3 - Formation du vecteur charges nodales équivalentes $\{AE\}$	91
7.4.2.4 - Formation du vecteur charges nodales combinées $\{Ac\}$	92
7.4.3 - Calcul des déplacements et des réaction d'appuis	92
7.4.4 - Calcul des actions aux extrémités des éléments	93
7.4.5 - La technique de prise en compte des appuis élastiques	95

7.5 - Etude de la stabilité élastique	96
7.5.1 - Présentation	96
7.5.2 - Calcul par approximation successives	97
CONCLUSION	97
ALGORITHME :	99
* Formation de la matrice de rigidité de la structure	99
* Exemple de poutre continue	99
* Application	101
* Cas d'un portique	103
CONCLUSION	104
PRÉSENTATION DU PROGRAMME "POUTRE" ET "PORTIQUE":	105
* Structure du programme principal	107
* Etude de la stabilité élastique	109
APPLICATIONS :	
I- Exemples "Poutres"	110
II- Exemples "Portiques plans"	117
III- Exemples "Stabilité élastique"	130
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS :	138
A- Problématique	138
B- Principaux résultats	139
C- Recommandations	142
BIBLIOGRAPHIÉ :	143

NOTATIONS UTILISEES

- $A(i)$: La section transversale d'un élément i
- $A_{i(i=1,8)}$: Les coefficients d'influences sur la matrice de rigidité dus au sol et l'effort normal.
- (C_{x_i}, C_{y_i}) : Les cosinus directeurs de l'élément i .
- $D(N)$: Le déplacement correspondant à un effort de compression N .
- $D(0)=D_0$: Le déplacement dû à un effort de compression nul.
- E : Le module d'Young .
- γ : L'inclinaison d'un élément par rapport à l'axe \vec{ox} .
- $I(i)$: Le moment d'inertie de la section transversale de l'élément (i)
- $L(i)$: Longueur de l'élément i .
- k : Le coefficient de compression uniforme du sol [N/m^3].
- K : Le module de fondation du sol [N/m^2].
- m : Le nombre d'éléments.
- n : Le nombre de degrés de liberté.
- n_j : Le nombre des noeuds.
- n_r : Le nombre de directions bloquées.
- $N(i)$: L'effort normal dans l'élément i .
- N_C : L'effort de compression critique.
- N_E : L'effort normal critique d'Euler.
- $Q(x)$: L'effort tranchant à l'abscisse x .
- $M(x)$: Le moment fléchissant à l'abscisse x .
- $q(x)$: La densité de la charge répartie.
- x_j : Translation horizontale du noeud j .
- y_j : Translation verticale du noeud j .
- θ_j : Rotation du noeud j par rapport à l'axe \vec{oz} .
- ν : Le coefficient de poisson.
- $\{A\}$: Le vecteur charges nodales.
- $\{Ac\}$: Le vecteur charges nodales combinées.
- $\{Ad\}$: Le vecteur force dans la structure réelle correspondant aux déplacements inconnus.
- $\{AE\}$: Le vecteur charges nodales équivalentes.

- $\{AM\}_i$: Les actions aux extrémités de l'élément i .
- $\{AML\}_i$: Les actions aux extrémités de l'élément i dues aux charges.
- $\{ARL\}$: Le vecteur réactions des appuis dues aux charges.
- $\{D\}$: Le vecteur déplacements inconnus.
- $\{D_j\}$: Le vecteur déplacements possibles (totales).
- $\{DM\}_i$: Le vecteur déplacements des extrémités de l'élément i .
- $\{S\}$: La matrice de rigidité correspondante aux ddl (dim $n \times n$).
- $\{S_j\}$: La matrice de rigidité globale.
- $\{SRD\}$: Sous matrice de $\{S_j\}$ représentant les actions dans la structure bloquée dues aux valeurs unitaires des ddl (dim $n \times n$).
- $\{SDR\} = \{SRD\}^T$: Sous matrice de $\{S\}$ représentant les actions dans la structure dues à des déplacements unitaires des directions bloquées.
- $\{SRR\}$: Sous matrice de $\{S_j\}$ représentant les actions dans les noeuds de la structure causées par des déplacements unitaires des des directions bloquées.

INTRODUCTION
GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'hypothèse couramment utilisée dans le calcul des structures, selon laquelle les supports des structures hyperstatiques peuvent s'adapter avec une facilité infinie aux déformations du sol, conduit à des conclusions qui s'écartent de la réalité, car la continuité entre ces différents membres donne à une structure réelle une rigidité considérable et en conséquence les tassements différentiels et les efforts dans la structure deviennent plus faibles que ceux calculés selon l'hypothèse mentionnée ci-dessus [7].

L'autre hypothèse utilisée par les bureaux d'études dans le calcul des structures hyperstatiques et selon laquelle les supports de celles-ci sont considérés comme parfaitement encastres dans le sol conduit également à des résultats tout à fait différents à ce que la structure sera en réalité.

La négligence de l'effet de l'interaction sol-structure dans le calcul d'une structure hyperstatique mènent à des conclusions qui s'éloignent de la réalité, et elle peut même atteindre un état d'insécurité si cette structure ne présente pas des conditions favorables à la redistribution des contraintes.

Cependant, le choix d'un modèle de calcul adéquat qui tient compte des conditions d'appuis et de l'interaction sol-structure devient l'une des étapes essentielles en vue de calculer avec toute sécurité une construction donnée, ce modèle ou schéma de calcul ne présentera par la suite qu'une approche aussi précise que possible de la réalité du fait qu'on ne prend en considération que les facteurs les plus essentiels, seule la concordance des résultats obtenus sur

la base du schéma de calcul avec les données de l'expérience peut fournir une garantie suffisante de la justesse du modèle choisit.

Lorsqu'une structure rigide repose sur un sol, ce dernier tend à se déformer de façon non uniforme et la fondation ne peut pas s'adapter entièrement, une redistribution des réactions des supports a eu lieu et cette redistribution donne la valeur de l'interaction sol-structure[7].

Essayons de faire une courte analyse de quelques cas qu'on peut rencontrer dans la pratique:

* Un exemple qui n'existe pas en réalité, et fourni par une structure infiniment rigide. Une telle structure ne présente aucun tassement différentiel; elle se tasse uniformément comme un ensemble.

A cause de la tendance du sol à se déformer plus au centre qu'à la périphérie, la distribution de la pression de contact P_c change pendant le tassement en décroissant vers le centre et en augmentant vers la périphérie (fig.1-a). La distribution de la pression de contact ressemble à celle du cas très connu d'une plaque infiniment rigide appuyée sur un milieu élastique.

Des bâtiments très élevés avec plusieurs murs massifs peuvent être assimilés à ce cas et leurs tassements différentiels peuvent être négligés dans les calculs.

* Le cas opposé à celui de rigidité infinie est le cas de rigidité nulle, une telle structure s'adapte avec une facilité infinie à la déformation du sol et présente les tassements différentiels les plus grands possibles, la distribution de pression de contact P_c ne se modifie pas pendant la progression des tassements (fig.1-d).

Des structures isostatiques et des structures peu élevées et très longues peuvent être assimilées à ce cas.

Tous les cas réels se trouvent entre ces deux cas extrêmes de rigidité infinie et nulle (fig.1) [7].

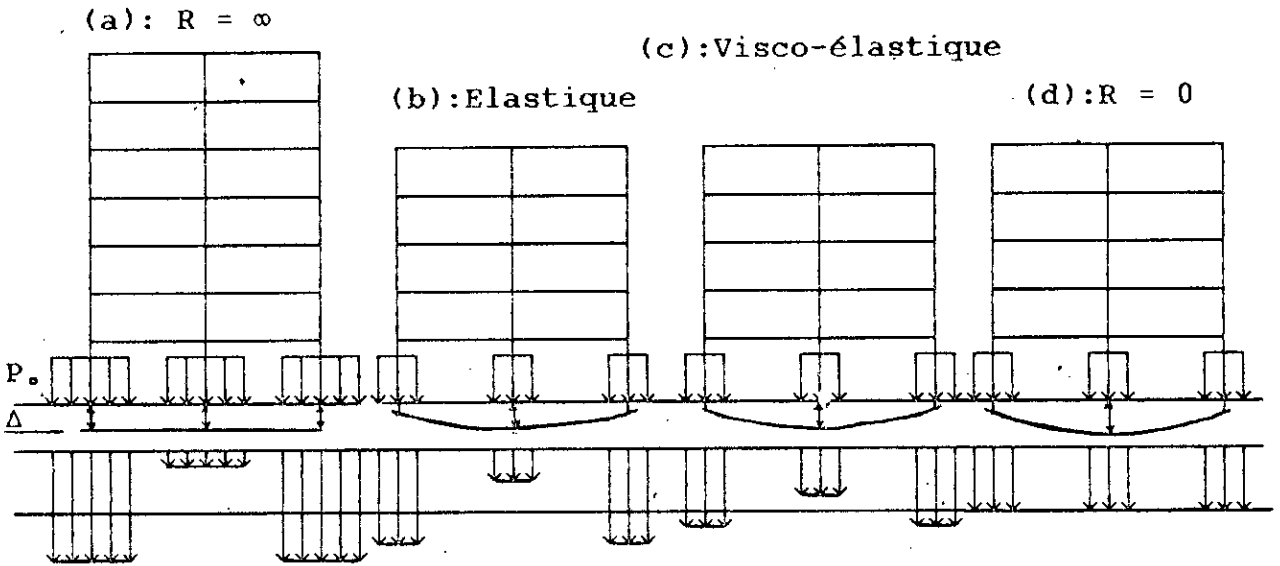
* Une structure parfaitement élastique offrira une rigidité qui ne dépendra pas de la vitesse de progression des tassements différentiels, ces tassements peuvent se produire lentement ou très rapidement; le résultat quelque soit la vitesse sera le même.

Les tassements différentiels seront plus petits que ceux de rigidité nulle et la distribution de la pression de contact P_c changera beaucoup moins pendant le processus de tassement mais toujours dans le même sens que celui de rigidité infinie (fig.1-b).

Des structures en aciers soudés qui travaillent en régime élastique peuvent être assimilées à ce cas.

* Une structure visco-élastique comme celle en béton armé offrira une rigidité qui dépendra de la vitesse de progression des tassements différentiels, si ces tassements se produisent tout d'un coup, la structure visco-élastique se comportera élastiquement et on se trouvera dans le cas précédent de la (fig.1-b).

Si par contre la vitesse de progression des tassements différentiels est très faible et tend vers zéro, la structure visco-élastique se comportera comme un liquide visqueux et tendra vers le cas de la (fig.1-d), on peut placer ce cas à côté de celui de rigidité nulle (fig.1-c).



(fig.1): L'influence de la rigidité de la structure sur la déformation du sol

Pour une structure visco-élastique il y a une différence dans l'effet du fluage sur les contraintes exercées par la charge et sur les contraintes exercées par les tassements .

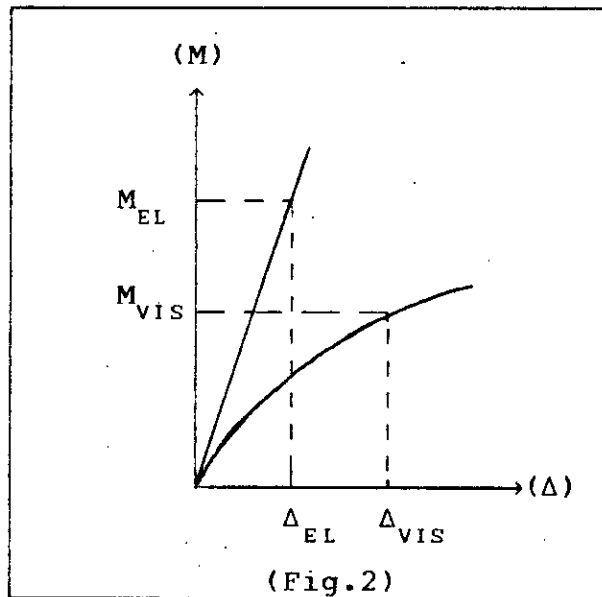
Dans les structures hyperstatiques constituées de matériaux visco-élastiques, la distribution des contraintes occasionnées par la charge est pratiquement indépendante de la déformation lente il n'y a pas de redistribution considérable des contraintes par suite de déformation permanente et le résultat du calcul élastique et donc valable en dépit du comportement non élastique de ces structures.

Les contraintes provoquées par les tassements différentiels par contre vont décroître progressivement à cause de l'effet de relaxation .

Pour le même sol et la même structure, celle construite avec un matériau visco-élastique présentera des tassements différentiels plus importants que ceux de la structure élastique, mais les contraintes dans la structure seront beaucoup plus faibles, cela

est expliqué dans la (fig.2) où l'on montre le rapport entre le tassement différentiel (Δ) et le moment fléchissant (M) (élastique et visco-élastique)[7].

donc en tenant compte du comportement visco-élastique du béton armé et la vitesse de progression des tassements différentiels, on obtiendra non seulement les valeurs réelles des tassements, mais aussi les effets réels dans la structure. Les tassements différentiels seront plus importants que ceux obtenus en consi-



derant la structure élastique (mais plus faible que ceux obtenus en considérant la structure de rigidité nulle), mais les moments fléchissants qui en résulteront à la fin d'un temps (t) seront beaucoup plus faibles que ceux de la structure élastique

L'étude de l'interaction sol-structure est bien entendu plus ou moins importante suivant la nature du sol, les caractéristiques de l'ouvrage, et son mode de fondation. Pour certains ouvrages fondés superficiellement, elle peut être pratiquement négligeable, par contre la nécessité d'étudier le comportement ou la réponse d'un ouvrage en ne le considérant pas isolément mais comme partie intégrante d'un ensemble comprenant le sol et les structures avoisinantes rend les analyses d'interaction sol-structure impérieuses pour une part grandissante d'ouvrages importants [Barrages - Centrales nucléaires - Bâtiments importants - Réservoirs de gaz naturel liquéfié (GNL) ...] [48].

L'abondance de la littérature concernant l'interaction sol-structure traduit à la fois la complexité du phénomène et l'intérêt qu'y ont porté nombre de chercheurs .

Trois synthèses générales ont entrepris une classification des méthodes d'étude de l'interaction sol-structure [LYSMER⁽⁴⁰⁾ 1981 -IDRISS-KENNEDY⁽²⁷⁾ 1980 -M.I.GORBUNOV-PASSADOV, 1986] .

Ces publications mettent en évidence le fait que l'étude des phénomènes d'interaction est essentiellement limitée au cas des problèmes linéaires, l'approche du problème purement non linéaire reste l'exception.

A l'état actuel il existe peu de méthodes de calcul des structures qui tiennent compte de l'effet de l'interaction sol-structure.

En effet, le but principal de ce mémoire est l'élaboration d'une méthode de calcul des structures Par la formulation d'une matrice de rigidité exacte, élaboré pour un modèle qui met en évidence le phénomène de l'interaction statique sol-structure, ainsi que de l'influence de l'effort normal sur la rigidité des éléments de la structure, qui sera pris en compte dans l'étude de la stabilité élastique de celle-ci.

CHAPITRE I

**APERCU GENERAL SUR LES
METHODES D'ANALYSE
AUTOMATIQUES DES
STRUCTURES**

Aperçu général sur les méthodes
d'analyse automatiques des structures

Les cadres ou portiques sont d'un emploi très répandu dans les bureaux d'études, et sont presque toujours des constructions hyperstatiques présentant un grand nombre d'inconnues.

Cependant, le calcul des structures par les méthodes classiques devient très épuisant et consommant beaucoup de temps pour l'ingénieur d'étude et peut même aboutir à des résultats incorrects à la fin de son calcul.

La nécessité d'introduire l'ordinateur dans les calculs des structures hyperstatiques devient à notre époque inévitable on peut même dire obligatoire vu les avantages qui peut fournir aux ingénieurs d'études à savoir l'économie du temps et la précision des résultats de calcul.

Les deux méthodes principales utilisées dans le calcul automatique des structures hyperstatiques sont :

1.1 - La méthode des forces :

Dans cette méthode on retient comme inconnues les efforts qui remplacent l'action des liaisons rejetées surabondantes. Ces liaisons sont superflues du point de vue de l'assurance de la fixité de la barre comme d'un tout rigide.

Dans le plan, la fixité d'une barre peut être assurée par trois liaisons imposées de la façon correspondante, les liaisons de cette sorte sont dites nécessaires, les liaisons imposées au corps en plus de celles qui sont nécessaires sont dites complémentaires ou superflues (surabondantes).

Dans l'espace, la fixité d'une barre est assurée par six liaisons .

Voici l'ordre de calcul des systèmes hyperstatiques d'après la méthode des forces :

- a\ - Déterminer le degré d'hyperstaticité en calculant le nombre de liaisons surabondantes .
- b\ - Choisir le système principal de base en fonction du système donné, les liaisons éliminées sont remplacées par les efforts inconnus superflus .
- c\ - Composer les équations des déformations (ou des déplacements) qui expriment les conditions de compatibilité des déplacements du système principal avec le système hyperstatique donné, si dans le système principal les déplacements dans la direction des liaisons rejetées sont nuls les équations expriment l'annulation de ces déplacements .
- d\ - Résoudre le système d'équations obtenu .
- e\ - Après l'établissement des inconnues surabondantes trouver les efforts intérieurs dans les éléments de la structure (moments fléchissants - efforts tranchants ...), ceci se fait sans difficulté sur la base de la méthode des sections Si le système hyperstatique donné possède n inconnues surabondantes, le système de n équations canoniques qui assure leurs calcul s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix}$$

ou encore: $\{D\} = [F].\{A\}$

Avec :

$\{D\}$ = Le vecteur déplacement d'ordre $(n * 1)$.

$\{A\}$ = Le vecteur charge d'ordre $(n * 1)$.

$[F]$ = La matrice de flexibilité d'ordre $(n*n)$.

1.2 - La méthode des déformations :

Par différence avec la méthode des efforts qui est une méthode générale, applicable à toutes les structures hyperstatiques, la méthode des déformations a un domaine d'application limité, cette méthode a été conçue pour le calcul des structures hyperstatiques formées de barres généralement droites encastées dans les noeuds et qu'on désigne habituellement du nom de cadres ou portiques .

Pour un cadre, la position déformée est définie si on connaît les déplacements (rotations et translations) de chaque noeud et l'interdépendance qui existe entre les efforts et les déformations pour les structures hyperstatiques nous permet de trouver les efforts inconnus dans chaque barre et donc tracer les diagrammes des efforts.

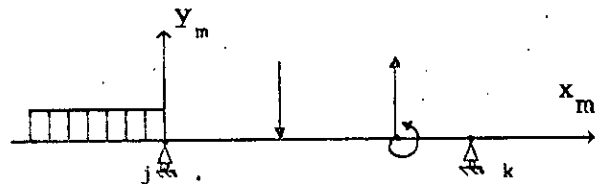
La méthode des déformations prend comme inconnus ces déplacements et se propose de trouver les moyens de les déterminer.

Pour arriver à ce but la méthode des déformations (ou des rigidités) part du principe de remplacer la structure initiale par une autre structure appelée "système statique de base" provenant de la première, qui a la caractéristique de permettre le calcul des efforts engendrés dans ces barres pour n'importe quel déplacement (translation ou rotation) donné à un noeud quelconque. A la fin sous l'action des forces extérieures données et sous l'action des efforts engendrés par les déplacements inconnus (en valeurs) des noeuds, l'ensemble et chaque partie de la structure doivent être en équilibre.

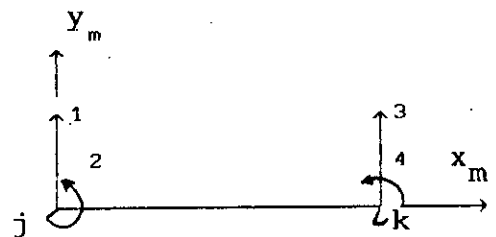
1.2.1\ La matrice de rigidité d'un élément poutre:

Pour illustrer le concept de la méthode des déformations dans sa forme la plus simple, considérant un élément d'une poutre continue limité par les appuis "j" et "k" comme le montre la figure (fig.1-1).

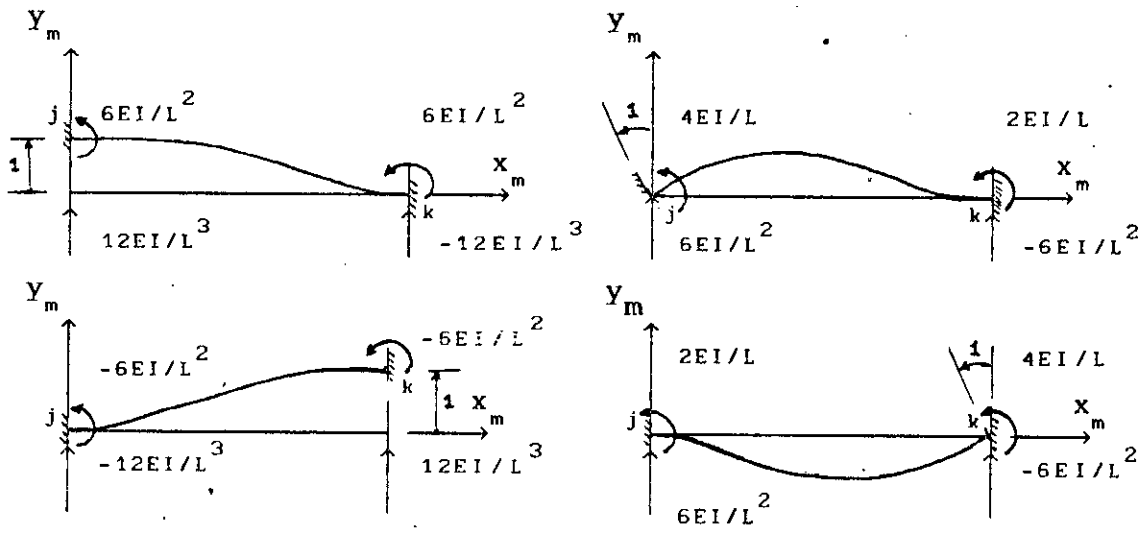
Pour cet élément, il existe quatre types de déplacements significatifs qu'on peut rencontrer à ces extrémités ces déplacements sont représentés sur la (fig.1-2) par les vecteurs numérotés de (1 à 4), la matrice de rigidité correspondante de cet élément et de l'ordre (4*4), et dont les éléments sont obtenus en déterminant les actions aux extrémités "j" et "k" produites par des déplacements et rotations unitaires en ces extrémités (fig.1-3).



(fig.1-1)



(fig.1-2)



(fig.1-3)

La matrice de rigidité élémentaire utilisée dans l'analyse d'une poutre continue sans tenir compte d'aucune interaction s'écrit donc comme suit :

$$\left[S_m \right] = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{matrix} y_j \\ \theta_j \\ y_k \\ \theta_k \end{matrix} \quad (\text{mat.1-1})$$

L'ordre de calcul des systèmes hyperstatiques par la méthode des déformations consiste à :

- a\ - Etablir la matrice de rigidité élémentaire $[S_m]_i$ pour chaque élément de la structure
- b\ - Assembler les matrices trouvées $[S_m]_i$ pour l'obtention de la matrice de rigidité globale $[S]_j$ de tous les noeuds de la structure.

c\ - Introduction des conditions d'appuis

d\ - Réarrangement de la matrice de rigidité globale $[S]_j$, tenant compte des conditions 3°, de manière à ce que les éléments correspondant aux degrés de liberté inconnus seront placés dans les premières colonnes et ceux correspondant aux (ddl) connus dans les colonnes qui suivent, (mat.1-2).

$$[S_J] = \left[\begin{array}{c|c} [S] & [S_{DR}] \\ \hline [S_{RD}] & [S_{RR}] \end{array} \right] \quad (\text{mat.1-2})$$

e\ - Calcul des déplacements, des réactions et des efforts aux extrémités des éléments :

La sous matrice $[S]$ est une matrice carrée symétrique servant au calcul des déplacements inconnus moyennant le système d'équations suivant:

$$[S].\{D\} = \{A_D - A_{DL}\} \quad (1.1)$$

d'ou :

$$\{D\} = [S]^{-1} . \{A_D - A_{DL}\} \quad (1.2)$$

La sous matrice $[S_{RD}]$ est une matrice rectangulaire, contenant les actions correspondant aux appuis produites par les déplacements unitaires des degrés de liberté inconnus. Cette matrice est utilisée pour le calcul des réactions d'appuis en effectuant l'opération donnée par l'équation ci-dessous.

$$\{A_R\} = \{A_{RL}\} + [S_{RD}].\{D\} \quad (1.3)$$

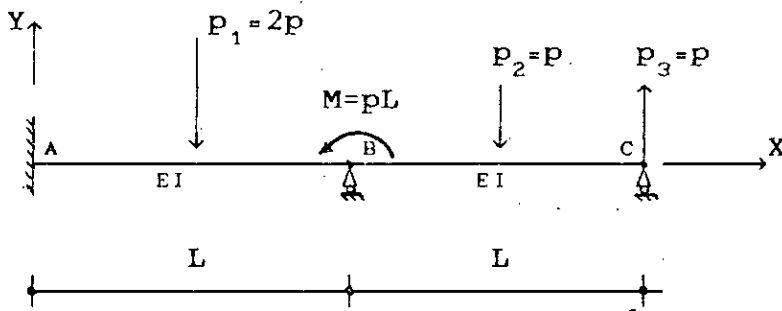
La sous matrice $[S_{DR}]$ définie les actions aux noeuds appuis produites par des déplacements unitaires de ceux-ci selon leurs sens bloqués, on peut remarquer que cette matrice est la transposée de la matrice $[S_{RD}]$.

La sous matrice $[S_{RR}]$ est une matrice carrée symétrique, dont les termes représentent les actions aux noeuds appuis dues à des déplacements unitaires de ces noeuds suivant leurs sens bloqués.

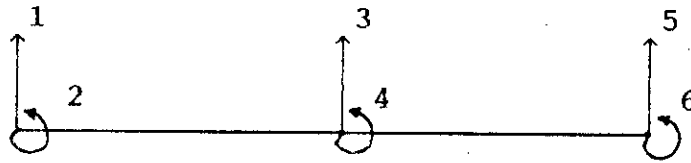
Les deux matrices $[S_{DR}]$ et $[S_{RR}]$ peuvent être utilisées dans le calcul des réactions d'appuis lorsque ces derniers présentent des déplacements connus non nuls ou des tassements différentiels connus.

Nous allons illustrer ces étapes de calcul par l'exemple suivant:

Pour simplifier le raisonnement, considérons une poutre droite à deux éléments avec seulement deux degrés de liberté par noeud (une translation verticale et une rotation) avec le cas de charge schématisé sur la (fig.1-4).



(fig.1-4)



(fig.1-5): Numérotation des degrés de liberté

1° - constitution de la matrice de rigidité $[S_j]$:

Le système de base cinématiquement déterminé, est constitué par deux poutres encastrées aux deux extrémités, (AB) et (BC) (fig.1-5).



(fig.1-5)

La matrice de rigidité de l'élément (AB) est donnée par :

$$[S_m]_{AB} = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{matrix} Y_A \\ \theta_A \\ Y_B \\ \theta_B \end{matrix}$$

On obtiendra une matrice analogue (identique dans l'exemple présent) pour l'élément (BC).

2°\ - Assemblage :

On assemble les deux matrices obtenues ,en écrivant que les efforts en B proviennent de l'élément (AB) et de l'élément (BC),on obtient ainsi la matrice de rigidité globale $[S_j]$ de toute la poutre.

$$[S_j] = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & 0 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & 0 \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 24EI/L & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & 8EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ 0 & 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{matrix} y_A \\ \theta_A \\ y_B \\ \theta_B \\ y_C \\ \theta_C \end{matrix}$$

3°\ - Réarrangement de la matrice de rigidité $[S_j]$:

Ensuite on doit réarranger la matrice $[S_j]$ selon la forme donnée par (mat.1-2). Pour se faire nous allons introduire les conditions aux appuis, qui sont Pour l'exemple étudié:

Au noeud A : $y_A = 0$ et $\theta_A = 0$
 Au noeud B : $y_B = 0$
 Au noeud C : $y_C = 0$

Les inconnues du problème sont les rotations θ_B et θ_C qui correspondent au 4^{ème} et 6^{ème} ligne de la matrice $[S_j]$.

Si on effectue une permutation des lignes de sorte que la 4^{ème} et la 6^{ème} lignes viennent en 1^{ère} et 2^{ème} lignes .Ensuite on permute la 4^{ème} et la 6^{ème} colonnes avec la 1^{ère} et la 2^{ème} colonnes respectivement, on obtient ainsi la matrice $[S_j]$ partitionnée selon la forme donnée par (mat.1-2).

Cette matrice peut être réécrite selon ce partitionnement comme suit :

$$\left[S_{ij} \right] = \begin{array}{cc}
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{cc}
 8EI/L & 2EI/L \\
 2EI/L & 4EI/L
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 6EI/L^2 & 2EI/L \\
 0 & 0
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 6EI/L^2 & 0 \\
 2EI/L & 0 \\
 0 & 6EI/L^2 \\
 -6EI/L^2 & -6EI/L^2
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\
 6EI/L^2 & 4EI/L \\
 -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\
 0 & 0
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 0 & 0 \\
 -12EI/L^3 & 24EI/L^3 \\
 -6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\
 -12EI/L^3 & 12EI/L^3
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 -6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\
 -12EI/L^3 & 0 \\
 24EI/L^3 & -12EI/L^3 \\
 -12EI/L^3 & 12EI/L^3
 \end{array}
 \end{array} \begin{array}{l}
 \theta_B \\
 \theta_C \\
 \hline
 Y_A \\
 \theta_A \\
 Y_B \\
 Y_C
 \end{array}
 \end{array}$$

DEPLACEMENTS
LIBRES

DEPLACEMENTS
BLOQUES

La matrice de rigidité [S] est donc bien définie (bloc supérieur à gauche), ainsi que la matrice [S_{RD}] (bloc inférieur à gauche) qui servent aux calculs des déplacements et des réactions d'appuis.

4° - Etude des cas de charges :

Il sera convenable de séparer l'étude des charges appliquées sur l'élément de celles appliquées directement sur les noeuds.

A) - Les charges concentrées :

Les charges appliquées directement sur les noeuds de la structure seront listées dans un vecteur noté {A}.

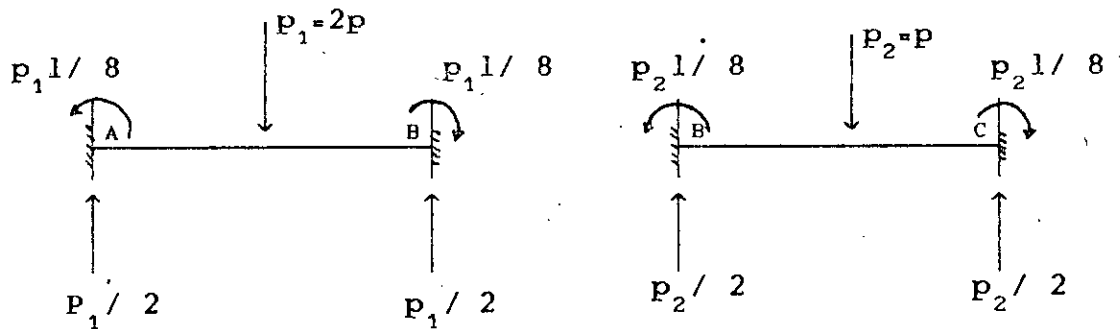
Pour l'exemple de la poutre étudiée ce vecteur est donné selon la numérotation choisie (fig.1-5) comme suit :

$$\{A\} = \{0, 0, 0, PL, P, 0\} \quad (1.4)$$

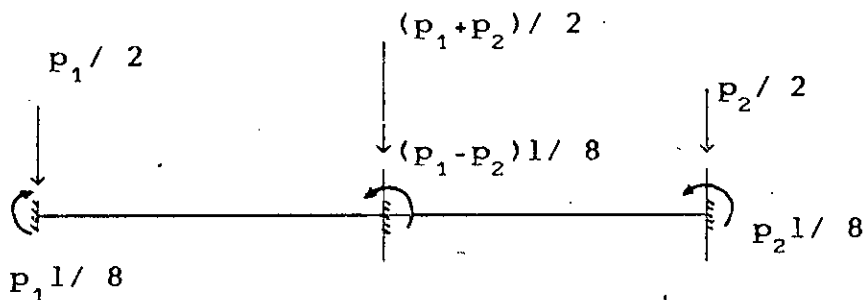
B\ - Les charges nodales équivalentes:

Les charges appliquées sur l'élément seront transférées aux noeuds de la structure en calculant en premier les réactions dans chaque élément en le considérant comme encastéré à ces extrémités (fig.1-5) puis on assemble les réactions trouvées pour obtenir en fin les réactions globales dans les noeuds.

Ces réactions seront ensuite renversées en sens pour donner les charges nodales équivalentes (fig.1-6).



(fig.1-5)



(fig.1-6)

Les actions aux encastrements des éléments dues aux charges directement appliquées sur ceux-ci, pourront être classées dans une matrice [d'ordre (m*4) pour une poutre ,(m*6) pour un portique plan] notée $[A_{ML}]$. Les éléments de cette matrice

seront utilisés par la suite pour le calcul des actions aux extrémités des éléments. Pour notre exemple cette matrice est donnée par :

$$[A_{ML}] = \begin{bmatrix} p_1/2 & p_1 l/8 & p_1/2 & -p_1 l/8 \\ p_2/2 & p_2 l/8 & p_2/2 & -p_2 l/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{A_{ML}\}_1 \\ \{A_{ML}\}_2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Soit:

$$[A_{ML}] = \begin{bmatrix} p & pl/4 & p & -pl/4 \\ p/2 & pl/8 & p/2 & -pl/8 \end{bmatrix}$$

Lorsque ces actions seront renversées en sens elles constituent les charges nodales équivalentes. Ces charges seront classées dans un vecteur noté par $\{A_E\}$ ayant la même forme que le vecteur $\{A\}$.

Pour notre exemple le vecteur $\{A_E\}$ s'écrit :

$$\{A_E\} = \{-p, -pl/4, -3p/2, pl/8, -p/2, pl/8\} \quad (1.6)$$

C\ - Les charges nodales combinées :

En additionnant le vecteur charges nodales $\{A\}$ et le vecteur charges nodales équivalentes $\{A_E\}$ on obtient le vecteur charges nodales combinées noté $\{A_C\}$.

Soit : $\{A_C\} = \{A\} + \{A_E\} \quad (1.7)$

Pour notre exemple :

$$\{A_c\} = \{-p, -pl/4, -3p/2, 9pl/8, p/2, pl/8\} \quad (1.8)$$

Ce vecteur sera ensuite divisé en deux blocs, le premier contient les valeurs des charges correspondantes aux déplacements inconnus [listées dans un vecteur noté $\{A_D\}$], le second bloc représente les charges combinées correspondantes aux sens bloqués des noeuds appuis; le signe inverse des éléments de cette partie constituent le vecteur réaction de la structure due aux charges exterieures ce vecteur est noté $\{-A_{RL}\}$.

Soit :

$$\{A_c\} = \begin{Bmatrix} \{A_D\} \\ \dots\dots \\ \{-A_{RL}\} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

La formation des vecteurs $\{A_D\}$ et $\{A_{RL}\}$ servent aux calculs des déplacements et des réactions d'appuis respectivement.

Pour l'exemple étudié on obtient :

$$\{A_D\} = \{ 9PL/8, 1/8 \} \quad (1.10)$$

$$\{A_{RL}\} = \{ p, pl/4, 3p/2, -p/2 \} \quad (1.11)$$

* Calcul des déplacements :

En utilisant l'équation (1.2) on obtient:

$$\{D\} = [S]^{-1} \cdot \{A_D\}$$

Avec :

$$[S] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [S]^{-1} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

{A_D} est donné par le vecteur (1.10), d'où :

$$[D] = \frac{PL^2}{112EI} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix}$$

* Calcul des réactions d'appuis:

En utilisant l'équation (1.3) et les résultats donnés par l'équation (1.11) on obtient:

$$\{A_R\} = \begin{bmatrix} P \\ PL/4 \\ 3P/2 \\ -P/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6EI/L^2 & 0 \\ 2EI/L & 0 \\ 0 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 107 \\ 31L \\ 69 \\ -64 \end{bmatrix}$$

* Calcul des actions aux extrémités des éléments :

Ces actions sont calculées en utilisant la méthode de superposition des deux états d'équilibres (la structure chargée non déformée et la structure déformée non chargée), traduits par l'équation suivante :

$$\{AM\}_i = \{A_{ML}\}_i + [Sm]_i \cdot \{D_M\}_i \quad (1.12)$$

Pour l'exemple étudié on a :

$$\{A_{ML}\}_1 = \{ P , PL/4 , P , -PL/4 \}$$

$$\{A_{ML}\}_2 = \{ P/2 , PL/8 , P/2 , -PL/8 \}$$

$$\{D_M\}_1 = \left\{ 0 , 0 , 0 , \frac{17 PL^2}{112EI} \right\}$$

$$\{D_M\}_2 = \left\{ 0 , \frac{17 PL^2}{112EI} , 0 , -\frac{5PL}{112EI} \right\}$$

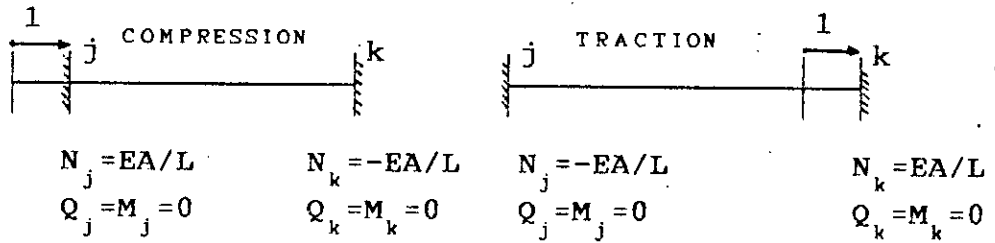
Les deux matrices [Sm] sont identiques à celle donnée par la matrice (mat.1-1).
ce qui donne :

$$\{AM\}_1 = \begin{bmatrix} P \\ PL/4 \\ P \\ -PL/4 \end{bmatrix} + [Sm]_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 107 \\ 31L \\ 5 \\ 20L \end{bmatrix}$$

$$\{AM\}_2 = \begin{bmatrix} P/2 \\ PL/8 \\ P/2 \\ -PL/8 \end{bmatrix} + [Sm]_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 64 \\ 36L \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2.2\ - Matrice de rigidité d'une barre oblique:

En examinant l'effet de variation unitaire de longueur (fig.1-7).



(fig.1-7)

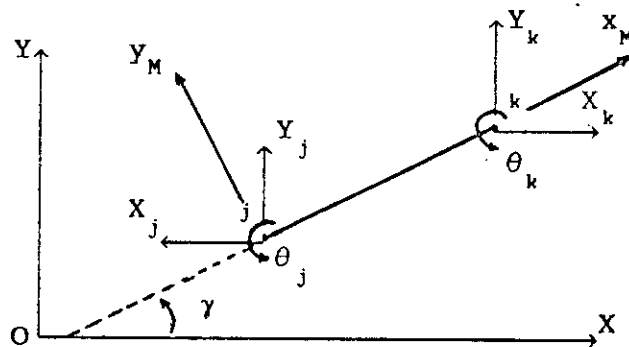
Cette matrice peut s'écrire comme suit :

$$[Sm] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{matrix} X_j \\ Y_j \\ \theta_j \\ X_k \\ Y_k \\ \theta_k \end{matrix} \quad (\text{mat.1-3})$$

La matrice (mat.1-3) étant rapportée au repère local (x_M y_M) de l'élément tandis que les déplacements sont rapportés au repère global de la structure (XOY) (Fig.1-8).

Pour homogénéiser le système on doit effectuer une transformation de la matrice du repère local au repère global, cette transformation étant effectuée moyennant l'opération suivante:

$$[Sm]_G = [R_T]^T \cdot [Sm]_L \cdot [R_T] \quad (1.13)$$



(fig.1-8)

où $[R_T]$ est la matrice de transformation donnée par :

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [R] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{mat.1-4})$$

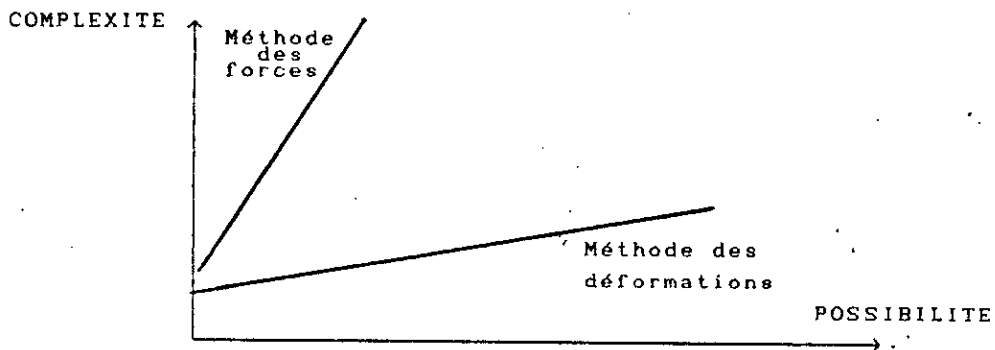
et $[R_T]^T$ est la matrice transpose de $[R_T]$

1.3\ - Comparaison des deux méthodes :

La méthode, des déformations se prête si bien au calcul automatique que la méthode des forces, car la constitution du système linéaire est simple, la structure cinématiquement déterminée est unique, la matrice de rigidité est constituée en additionnant les rigidités des diverses barres; l'analyse logique étant simple, on arrive à des programmes généraux pouvant englober tous les cas se présentant dans la pratique. Par contre dans la méthode des forces, il faut choisir un système de coupure tel que le travail numérique soit minimum. On conçoit dès lors que cette méthode se prête plus aux cas particuliers qu'aux cas généraux.

D'une manière qualitative ceci peut être illustré par le diagramme ci-dessous (fig.1-9) [35].

D'autre part pour les grandes structures, on voit que la méthode des déformations conduit toujours à des matrices bandes ce qui permet avec la mise en oeuvre de méthodes de résolution appropriées d'économiser de la place et par conséquent de traiter des structures plus importantes .



(fig.1-9)

CHAPITRE II

**NOTIONS GENERALES SUR LES
METHODES PRENANT EN
COMPTE L'INTERACTION
SOL-STRUCTURE**

Notions générales sur les méthodes prenant en compte l'interaction sol-structure

une analyse complète d'interaction doit prendre en compte :

- La variation des caractéristiques du sol avec la profondeur.
- Le comportement non linéaire du sol .
- Le caractère tridimensionnel du problème .
- L'interaction avec les structures avoisinantes .

En l'état actuel des connaissances, des simplifications doivent être effectuées pour permettre le traitement du problème, elles concernent la schématisation du sol de fondation .

Parmi les méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure, on peut distinguer les méthodes globales, les méthodes de sous-structures et les méthodes hybrides. Chacune d'elles correspond à une schématisation du modèle sol-structure.

2.1\ - Les méthodes globales :

Les méthodes globales sont celles qui conduisent à une détermination simultanée du mouvement dans le sol et dans la structure .

En théorie les méthodes globales peuvent être étendues aux cas tridimensionnels et sont susceptibles d'appréhender les comportements non linéaires dûs à la loi de comportement d'un des matériaux (sol le plus souvent) ou aux interfaces

sol-structure (décollement ou glissement d'ouvrages sur leurs fondations).

En pratique, le coût de résolution des problèmes tridimensionnels est nettement prohibitif et on doit se restreindre aux problèmes bidimensionnels. Il faut cependant garder à l'esprit que si les méthodes globales sont généralement coûteuses du point de vu ordinateur, elles requièrent souvent moins de temps humain que d'autres méthodes approchées exigeant une grande réflexion, ce temps de réflexion représente également un coût non négligeable [WIGHT⁽⁵⁹⁾ 1977].

Un des avantages principaux des méthodes globales est leur capacité à prendre en compte les hétérogénéités résultant soit des variations des faciès, soit des variations des caractéristiques de sol provenant de non linéarité plus prononcées pour certaines zones (angle des radiers ..). Par ailleurs, l'expérience montre qu'elles sont généralement mieux adaptées et plus faciles à la mise en oeuvre pour l'étude d'ouvrages enterrés [48].

2.2\ - Les méthodes de sous structures :

Cette catégorie de méthode fait l'appel au principe de superposition. L'idée de base est d'analyser le problème d'interaction sol-structure en plusieurs étapes successives, chacune de ces étapes est réputée plus facile à résoudre du point de vu de la modélisation ou du traitement que le problème global .

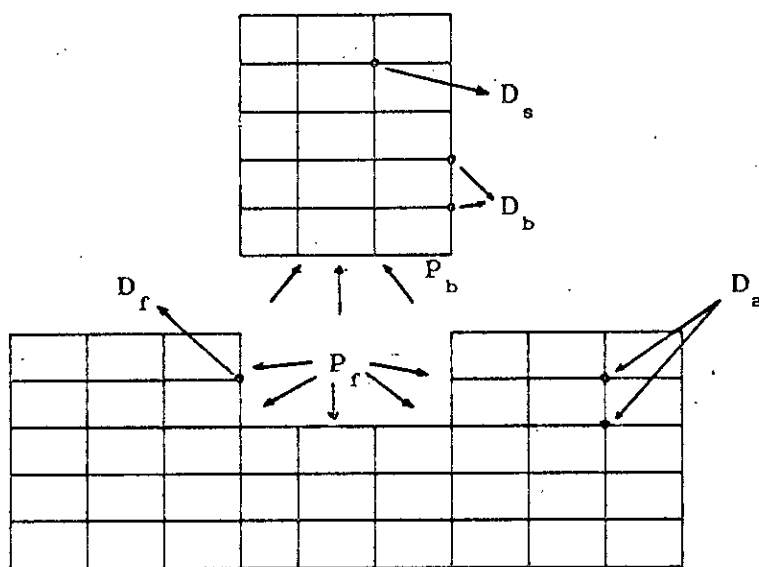
Cette méthode est particulièrement puissante quand une partie du système (la fondation par exemple) a une géométrie simple alors que la structure requiert une analyse tridimensionnelle. Elle peut également présenter des avantages

pour identifier la part relative de chaque composant (interaction cinématique ou inertielle) contribuant au phénomène global d'interaction .

Les différentes méthodes de sous structure se différentient par la décomposition en sous modèle global, on distingue les méthodes dites de frontière et les méthodes de volume .

2.2.1\ - Les méthodes de frontière :

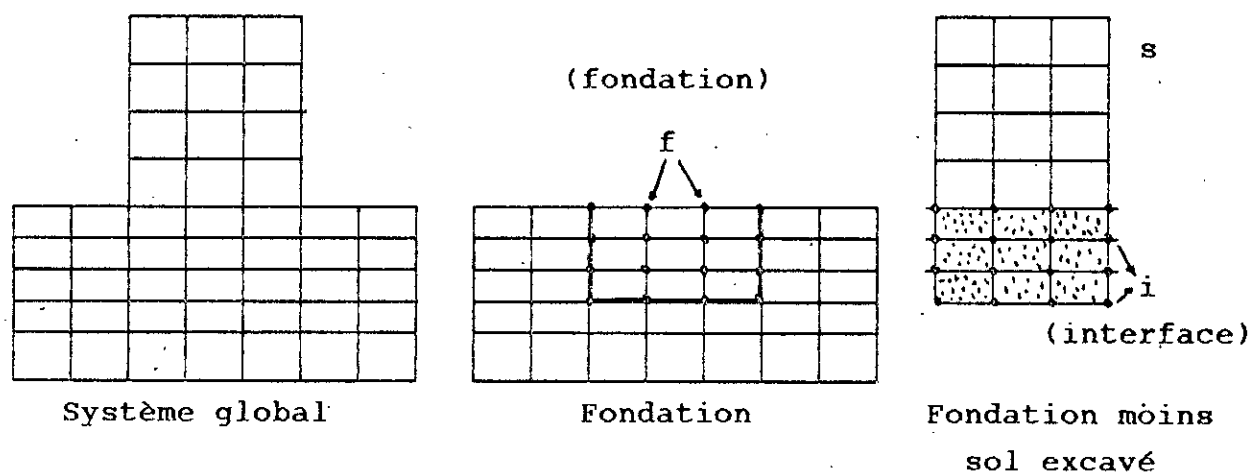
Ces méthodes ont été développées par : [CHOPRA-GUTIERREZ⁽¹¹⁾ 1973 .GUTIERREZ⁽²⁴⁾ 1976.KAUSEL et Al⁽³⁰⁾ 1978 -SIMVOULIDI, 1981, 1983, 1988] le modèle global sol-structure est divisé en deux sous modèles représentant la structure et le sol (fig.2-1). la compatibilité des efforts et déplacements est écrite le long de la frontière séparant les deux sous structures [48].



(fig.2-1): méthode de frontière

2.2.2\ - Les méthodes de volume :

La méthode de volume permet d'éviter la résolution du problème de diffraction, l'interaction entre le sol et la structure est prise en compte non seulement à l'interface sol-structure, mais à tous les noeuds de la structure sous la surface du sol [LYSMER et al⁽⁴⁰⁾ 1981], comme cela apparaît par la division en sous structures définies sur la (fig.2-2) [48].



(fig.2-2): méthode de volume

2.3\ - La méthode hybride :

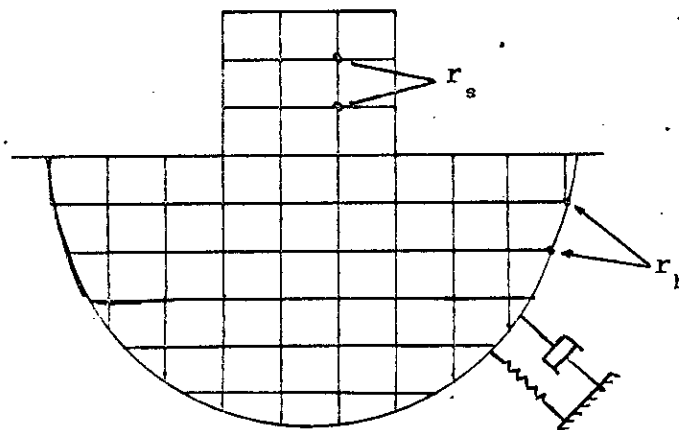
GUPTA et al⁽²³⁾ [1980] ont développé une méthode "hybride", dont le principe consiste à séparer le sol en un champs libre et un champs lointain (fig.2-3) le champs lointain est modélisé à l'aide d'une matrice d'impédance, en d'autre termes, le concept de sous structure est étendu de façon à inclure le champs proche dans le modèle de structure. Le problème consiste alors à définir les coefficients de la matrice d'impédance du champs lointain.

GUPTA et Al⁽²³⁾ ont résolu ce problème à l'aide d'une méthode d'identification permettant de s'assurer que le modèle hybride redonne les impédances connues d'un disque circulaire en surface d'un semi espace .

La difficulté de la méthode réside dans l'obtention le long de la frontière séparant le champs proche du champs lointain la solution du problème de diffraction du champs incident.

GUPTA et Al⁽²³⁾ ont négligé cet aspect en admettant un mouvement uniforme égal à celui du champs libre en surface, tout le long de la frontière .

De toute évidence, cette hypothèse constitue une approximation très grossière qui limite considérablement l'intérêt de la méthode [48].



(fig.2-3): Méthode hybride

2.4\ - Comparaison des différentes méthodes:

Un des arguments majeurs avancés pour l'utilisation des méthodes de sous structures, de préférence aux méthodes globales est leurs facilités d'emploi allié à un coût moindre. Cela est certainement vrai pour les ouvrages fondés en

surface, les méthodes de sous structures présentent aussi l'avantage de permettre certaines modifications sans qu'il soit nécessaire de reprendre toute l'analyse; une modification des caractéristiques de la structure ne requiert qu'une nouvelle analyse de celle-ci.

Dés que l'ouvrage à étudier est partiellement ou totalement enterré la résolution du problème de diffraction devient complexe, la solution rigoureuse est aussi délicate à obtenir que la solution globale du problème. Des méthodes simplifiées pour prendre en compte cette interaction cinématique ont cependant été proposées dans le cas de fondations rigides [KAUSEL et Al⁽³⁰⁾ 1978 - HALL J.R et KISSENFENNIG J.R⁽²⁵⁾ 1975]. Il n'en reste pas moins vrai que dans le cas le plus général les méthodes de sous structures deviennent moins compétitives que les méthodes globales, ces dernières permettent en outre de traiter les problèmes non linéaires; elles restent cependant limitées aux géométries bidimensionnelles.

Bien que le problème de l'interaction sol-structure s'intéresse généralement à l'étude du comportement d'une structure soumise à une sollicitation dynamique, on peut aussi parler du même problème dans une étude statique lorsque le sol et la structure sont supposés avoir les mêmes déplacements et forment un seul système par le choix d'une modélisation bien appropriée.

Dans ce dernier cas, la méthode globale devient plus compétitive pour résoudre le problème d'interaction sol-structure.

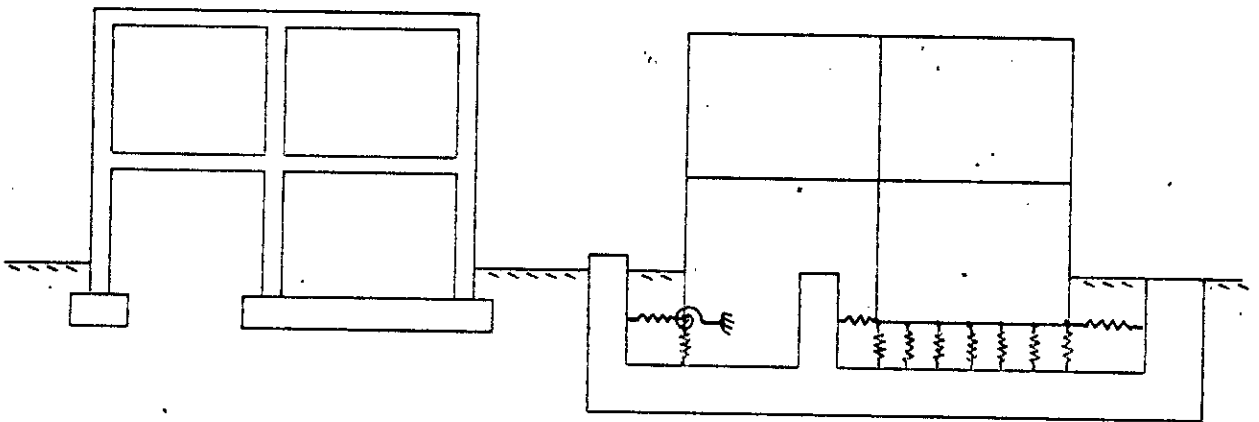
CHAPITRE III

**MODELES DE COMPORTEMENT
DU SOL**

Modèles de comportement du sol

La manière la plus simple de prendre le sol en compte est de le représenter par des ressorts reliant un ou plusieurs noeuds à une base rigide [6].

Dans le cas d'un modèle plan, une semelle sous point d'appui isolé est représentée par deux ressorts agissant à la translation et un ressort à la rotation, sous un radier ou une semelle continue le sol est modélisé par un ressort horizontal et un ressort vertical en chaque noeud (fig.3-1)



(fig.3-1): Modélisation par des ressorts

La raideur de ces ressorts est calculée d'après la valeur du coefficient de Ballast qu'il convient de déterminer par une étude du terrain de fondation.

Les propriétés dynamiques des sols étant en général mal connues, on pourra employer des hypothèses simplificatrices pour évaluer les coefficients de Ballast à partir des données expérimentales [6].

3.1\ -Modèle du semi espace élastique infini:

On peut ainsi assimiler le sol à un milieu élastique infini caractérisé par un module d'élasticité E et un coefficient de poisson ν , et la construction à un disque rigide de rayon R , on peut alors calculer la raideur du sol en translation ou en rotation, puis les coefficients de Ballast pour la direction horizontale et verticale, en divisant la raideur correspondante par la surface du disque. Le tableau (tab.3-1) suivant donne les formules donnant les raideurs est les coefficients de Ballast correspondant en translation [48].

(tab.3-1): Les raideurs des ressorts et les coefficients de Ballast correspondant en translation

Direction	Raideur statique	Coefficient de Ballast
Verticale	$\frac{2}{(1 - \nu^2)} E .R$	$0.64 \frac{E}{R (1 - \nu^2)}$
Horizontale	$\frac{16.(1-\nu)}{(7-8\nu)(1+\nu)} E.R$	$5.1 \frac{E}{R (7-8\nu)(1+\nu)}$
Rotation	$\frac{4}{3} \frac{E.R^3}{(1 - \nu^2)}$	

Des valeurs approximatives de E pour différents types de sols ont été établies par plusieurs chercheurs [37]. Elles constituent des indications utiles, mais peuvent être inexactes dans certains cas. Ceci est spécialement vrai pour les sables, pour lesquels E varie avec la pression de confinement. E ainsi déterminé sera une valeur moyenne à la profondeur d'action du ressort. Il dépendra de l'importance de la fondation et de la valeur de la charge.

Le tableau (tab.3-2) donne des valeurs moyennes approximatives [37]. Le coefficient de Poisson varie de 0,3 à 0,35 pour des sables et de 0,4 à 0.5 pour des argiles. Les valeurs de G varient avec E, approximativement suivant la loi théorique:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

(tab.3-2): Valeurs moyennes du module d'élasticité longitudinale (E) pour quelques groupes de sols

Groupe de sol	E (bar)	ν
Granite sain	300 000 à 600 000..	0.15 à 0.24
Granite partiellement décomposé	70 000 à 150 000	
Calcaire	200 000 à 500 000..	0.16 à 0.23
Grés	150 000 à 300 000..	0.17
Sable dense et gravier.	1 000 à 2 000	
Sable dense	500 à 800..	0.30 à 0.36
Sable lâche	100 à 200	
Argile semi-solide.....	70 à 140	
Argile plastique raide.	40 à 80..	0.40 à 0.45
Argile plastique molle.	14 à 40	
Vase	5 à 35	

3.2\ - Modèle de déformation local du sol :

Ce modèle est basé sur l'hypothèse de proportionnalité entre la déformation locale (au point d'application de la charge) de la fondation avec la réaction du sol, ce modèle est connu sous le nom de WINKLER [58].

Le modèle de Winkler consiste à représenter le sol par une infinité de ressorts verticaux étroitement espacés et non connectés, caractérisés par le coefficient de proportionnalité (réaction-déformation) appelé "module de fondation" noté K.

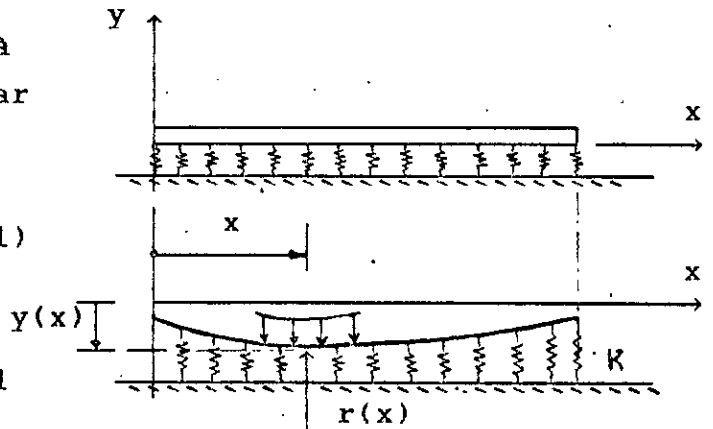
La réaction du sol à l'abscisse x est donnée par l'équation (3.1):

$$r(x) = - K \cdot y(x) \quad (3.1)$$

Avec :

$r(x)$: la réaction du sol à l'abscisse x .

$y(x)$: la déformation de la fondation à l'abscisse (x) (déplacement vertical).



*** Détermination du module de fondation K:**

Le module de fondation K est défini comme étant la réaction du sol par unité de longueur par unité de tassement (ou déplacement vertical) c'est donc une raideur par unité de longueur.

son unité est le $[N/m^2]$ dans le système MKSA .

*** Mesure expérimentale:**

En traçant la droite $P=f(y)$ pour le sol de fondation à étudier (correspondant au domaine élastique), on en déduit ainsi la pente de cette droite qu'on la note (k). soit b la largeur de la poutre de l'expérience.

le module de fondation K est donné par :

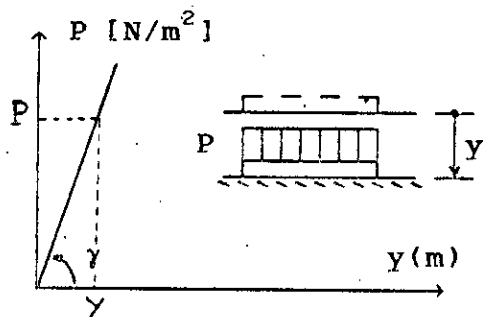
$$K = k \cdot b \quad (3.2)$$

Avec : $k = \text{tg } \gamma \quad [N/m^3]$

pour une largeur de la poutre de

(1 m) on aura :

$$K = k \quad [N/m^2]$$



Le tableau (tab.3-3) donne les valeurs du coefficient de proportionnalité (k) pour quelques groupes de sols [52]

(tab.3-3): Les valeurs du coefficient de proportionnalité (k) pour quelques groupes de sols.

Catégorie de sol	Groupe de sol	Charge statique admissible N/cm^2	k N/cm^3
I	Sol mou:Argile-argile silteuse contenant du sable-les sols des catégories II et III avec mélange du silt organique et de tourbe	moins de 15	moins de 30
II	sol moyen:Argile et Argile silteuse à base du sable à sa limite plastique - sable	15 à 35	30 à 50
III	sol dur: Argile et Argile silteuse contenant du sable à forte consistance - graviers- sable grenu	35 à 50	50 à 100
IV	sol rocheux	> 50	> 100

3.3\ - Modèles combinés du sol élastique :

On peut citer à titre bibliographique les travaux des auteurs suivant :

* P.L PASTERNAK :Il tient compte dans son travail de l'influence de la résistance du sol au glissement (déformation horizontale) ainsi qu'à sa résistance au tassement (déformation verticale).

* M.M FILONENKO-BORODICH: Utilise le modèle combiné issu de la combinaison du modèle de Winkler avec le modèle de membrane .

* I.I-CHERKASOV et G.K.KLEIN : Ont proposé un modèle considérant le sol comme une couche compressible de capacité finie reposant sur une surface d'un semi espace élastique. Toutes ces méthodes demandent des calculs long et complexes qui sont peu pratique en engineering.

Conclusion :

Pour le travail rapporté dans cette thèse on a opté au modèle de Winkler [58], vu la simplicité qu'il porte du point de vu applications, et les résultats qu'il donne pour l'étude de l'interaction sol-structure dans le cas statique qui sont très satisfaisantes.

Les déformations statiques dans le sol sont généralement limitées à des valeurs très petites, dans ce cas le module de fondation K aura une variation presque linéaire pendant le processus de déformation, et le sol peut être supposé avoir un comportement élastique linéaire. Cette supposition restera valable pour une étude statique, l'étude dynamique reste à l'exception.

CHAPITRE IV

**FORMULATION
MATHÉMATIQUE
DU PROBLÈME**

Formulation mathématique du problème

Dans les années récentes, nombreux auteurs ont proposé des solutions pour le problème de poutre continue sur fondation élastique en utilisant la méthode des éléments finis [Y.G.CHEUNG et D.K.NAG⁽²⁾ 1968 - F.MIYAHARA et J.G.ERGATOUDIS⁽²²⁾ 1976 - G.A.MOHR⁽⁴²⁾ 1979 - BING Y.T⁽⁴⁾ 1982], et dont la plupart utilisent le modèle de Winkler avec un système de ressorts discrets attachés aux noeuds.

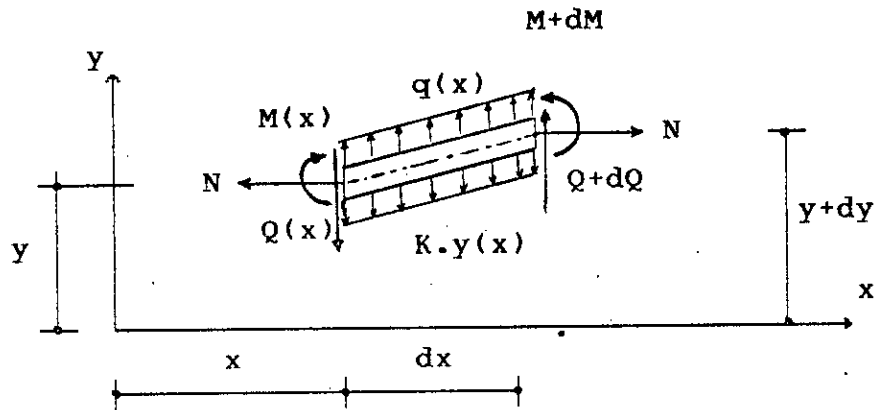
Les fonctions de formes utilisées dans ce cas sont celles d'une poutre libre, la précision des résultats est fonction du nombre des éléments pris en compte dans l'étude; ces résultats restent toujours approximatifs.

Actuellement une matrice de rigidité exacte d'un élément poutre reposant sur une fondation élastique à été établie en utilisant le modèle de Winkler continue [M.EISENBERGER et D.Z.YANKELEVSKY⁽⁴⁶⁾ 1985], et qui mène à des solutions exactes en prenant un nombre minimum d'éléments [on prend comme exemple d'éléments les tronçons à charges différentes ou à inerties différentes].

Dans ce chapitre on essaye d'établir les équations différentielles de la déformée d'une poutre colonne sur une fondation élastique et leurs solutions pour différents cas. Ces équations serviront par la suite dans l'établissement de la matrice de rigidité de la poutre considérée.

4.1\ - L'équation différentielle de la ligne déformée d'une poutre colonne de longueur finie reposant sur une fondation élastique:

La convention de signe adoptée pour l'établissement des équations est celle de la figure (fig.4-1).



(fig.4-1)

En écrivant l'équilibre des forces et des moments on obtient :

$$\frac{dQ}{dx} = K y(x) - q(x) \quad (4.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = N \frac{dy}{dx} - Q(x) \quad (4.2)$$

L'équation différentielle de la déformée donnée par la théorie de poutre dans le système d'axe choisit est:

$$M(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4.3)$$

Ces équations nous donne:

$$Q(x) = N \frac{dy}{dx} - EI \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (4.4)$$

Après substitution de l'équation (4.1) dans l'équation (4.4) on obtient l'équation différentielle de la ligne déformée:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N \frac{d^2 y}{dx^2} + K y = q(x) \quad (4.5)$$

4.1.1\ - Solution de l'équation différentielle (4.5):

En posant: $\lambda = \sqrt{\frac{K}{4 EI}}$ et $\delta = \frac{N}{4 EI}$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta} \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \delta}$$

La solution de l'équation différentielle (4.5) sans second membre est donnée par:

$$y_h(x) = C_1 \cos \beta x \cdot \cosh \alpha x + C_2 \cos \beta x \cdot \sinh \alpha x + C_3 \sin \beta x \cdot \cosh \alpha x + C_4 \sin \beta x \cdot \sinh \alpha x \quad (4.6)$$

Cette solution est valable pour $N < 2 \sqrt{K \cdot EI}$.

cette restriction n'a toujours pas d'importance dans les cas pratiques car, presque tous ces cas remplissent cette condition d'après l'étude menée par [M.HETENYI⁽²⁶⁾ 1964].

La solution particulière $y_p(x)$ de l'équation (4.5) peut être obtenue connaissant la fonction de charge $q(x)$.

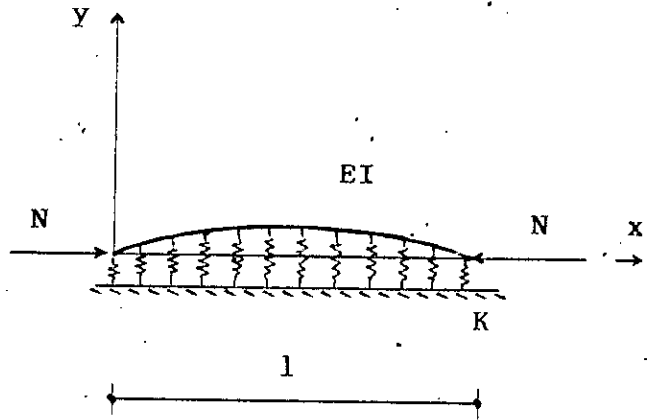
La somme des deux solutions $y_h(x)$ et $y_p(x)$ donne la solution générale de l'équation (4.5), soit:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (4.7)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sont les constantes d'intégration qui seront obtenues par l'introduction des conditions aux limites.

4.1.2) - Influence de l'effort normal de compression:

Considérons une poutre de portée l reposant sur une fondation élastique et soumise à l'action d'une paire de forces axiales agissant au (cdg) de sa section transversale (fig.4-2).



(fig.4-2)

l'équation différentielle de la déformée de cette poutre est la suivante:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + N \frac{d^2 y}{dx^2} + K \cdot y = 0 \quad (4.8)$$

trois cas peuvent se présenter dans la solution de l'équation(4.8):

* premier cas : $N < 2 \sqrt{K \cdot EI}$

La solution de l'équation (4.8) est la suivante:

$$y(x) = C_1 \cos \alpha x \cdot \cosh \beta x + C_2 \cos \alpha x \cdot \sinh \beta x + C_3 \sin \alpha x \cdot \cosh \beta x + C_4 \sin \alpha x \cdot \sinh \beta x \quad (4.9)$$

Avec les mêmes paramètres α et β donnés précédemment. En introduisant les conditions aux limites qui sont:

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } x = 0 \dots\dots y(0) = \frac{d^2 y}{dx^2}(0) = 0 \\ \text{pour } x = 1 \dots\dots y(1) = \frac{d^2 y}{dx^2}(1) = 0 \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

On constate que toutes les constantes C_i ($i=1,2,3$) sont nulles, donc la déformée dans ce cas ne peut exister, et le flambement est impossible.

* Deuxième cas : $N = 2 \sqrt{K.EI}$

La solution de l'équation (4.8) est de la forme :

$$y(x) = (Ax + B) \cos \omega x + (Cx + D) \sin \omega x \quad (4.11)$$

Avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{2EI}}$$

En introduisant les conditions aux limites données par (4.10), on montre que ($B = C = 0$), et que les constantes A et D ne peuvent être nulles simultanément, ce qui correspond à certains cas particuliers de déformation

* troisième cas : $N > 2 \sqrt{K.EI}$

La solution de l'équation (4.8) est de la forme :

$$y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x + C \cos \omega^* x + D \sin \omega^* x \quad (4.12)$$

En introduisant les conditions aux limites données par (4.10) on obtient, $A = C = 0$ et :

$$\begin{array}{lll}
 D = 0 \text{ et } B \neq 0 & \text{si} & \omega l = n\pi \\
 D \neq 0 \text{ et } B = 0 & \text{si} & \omega l = n\pi \\
 D \neq 0 \text{ et } B \neq 0 & \text{si} & \omega l = \omega^* l = n\pi
 \end{array}$$

Supposons que $\omega l = n\pi$, étant donné que $i\omega$ est solution de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (4.8) on aura cependant :

$$EI \left[\frac{n\pi}{l} \right]^4 - N \left[\frac{n\pi}{l} \right]^2 + K = 0 \quad (4.13)$$

On en déduit dans ce cas la force critique de flambement

$$N_c = \left[\frac{\pi}{l} \right]^2 EI \left[n^2 + \frac{K l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right] \quad (4.14)$$

La force critique minimale est obtenue pour le minimum de l'expression en (n) donnée par (4.14) ce qui conduit à la valeur :

$$n_c = \left[\frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{EI}} \right] \quad (4.15)$$

(on prend une valeur entière pour n_c)

Les deux valeurs extrêmes de la force N_c sont les suivantes [34]:

* Pour K petit (sol très mou) on trouve:

$$n = 1 \text{ et } N_c \approx \left[\frac{\pi}{l} \right]^2 EI \dots \text{ (force critique d'EULER)}$$

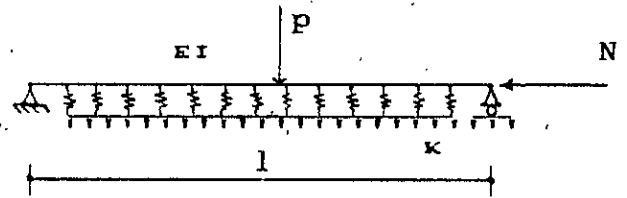
* Pour K grand (sol dur) on trouve :

$$N_c \approx 2 \sqrt{K \cdot EI} \dots\dots \text{(qui est la limite déjà mentionnée)}$$

• Nous pouvons illustrer l'influence de l'effort normal de compression sur l'exemple simple suivant :

Considérons une poutre simplement appuyée et soumise à l'action simultanée d'un effort normal N et d'une force concentrée P agissant au milieu de la poutre (fig4-3)

La déflexion de la poutre dans ce cas est donnée par l'expression très connue [46]:



(fig.4-3)

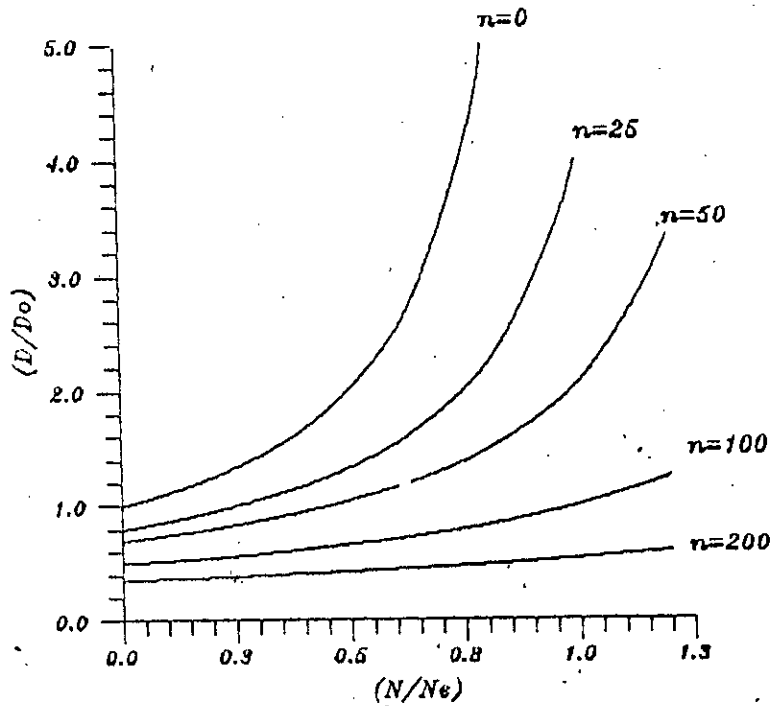
$$D(N) = \frac{D(0)}{1 - N/N_E} \quad (4.16)$$

Avec N_E est la charge critique d'EULER de la poutre.

La courbe représentative de l'équation (4.16) est donnée par la figure (fig.4-4) (pour $\eta=0$).

Lorsque cette poutre repose sur une fondation élastique, la courbe représentative dépend du paramètre non dimensionnel (η) [46] donné par:

$$\eta = \frac{K l^4}{E I}$$



(Fig.4-4 : L'influence de la rigidite du sol sur le flambement)

On remarque d'Après la courbe donnée sur la figure (fig.4-4) que l'effet de l'effort normal N devient très limité lorsque le paramètre η devient grand.

Conclusion:

La stabilité vis à vis du flambement d'une poutre sur fondation élastique est assurée dès que l'effort axial N est inférieur à la valeur limite ($N_l = 2\sqrt{\kappa \cdot EI}$), dépassant cette valeur le risque de flambement de cette poutre est préjudiciable.

La plupart des constructions vérifient cette condition de non flambement d'Après l'étude entreprise par [M.HETENYI⁽²⁶⁾ 1964]. Notre étude se limitera donc aux structures vérifiant la condition précédente, l'étude de la stabilité élastique sera entamée ultérieurement.

CHAPITRE V

**MATRICE DE RIGIDITE D'UN
ELEMENT DE POUTRE
COLONNE SUR FONDATION
ELASTIQUE**

Etalblissement de la matrice de rigidité
d'un élément de poutre colonne reposant
sur une fondation élastique

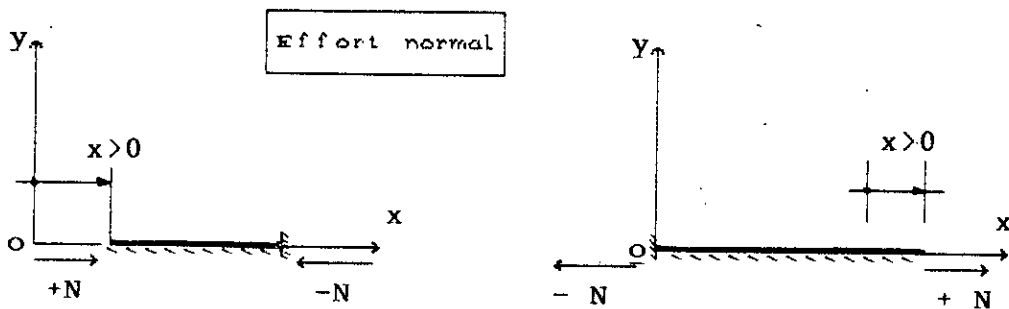
5.1\ - Convention de signes:

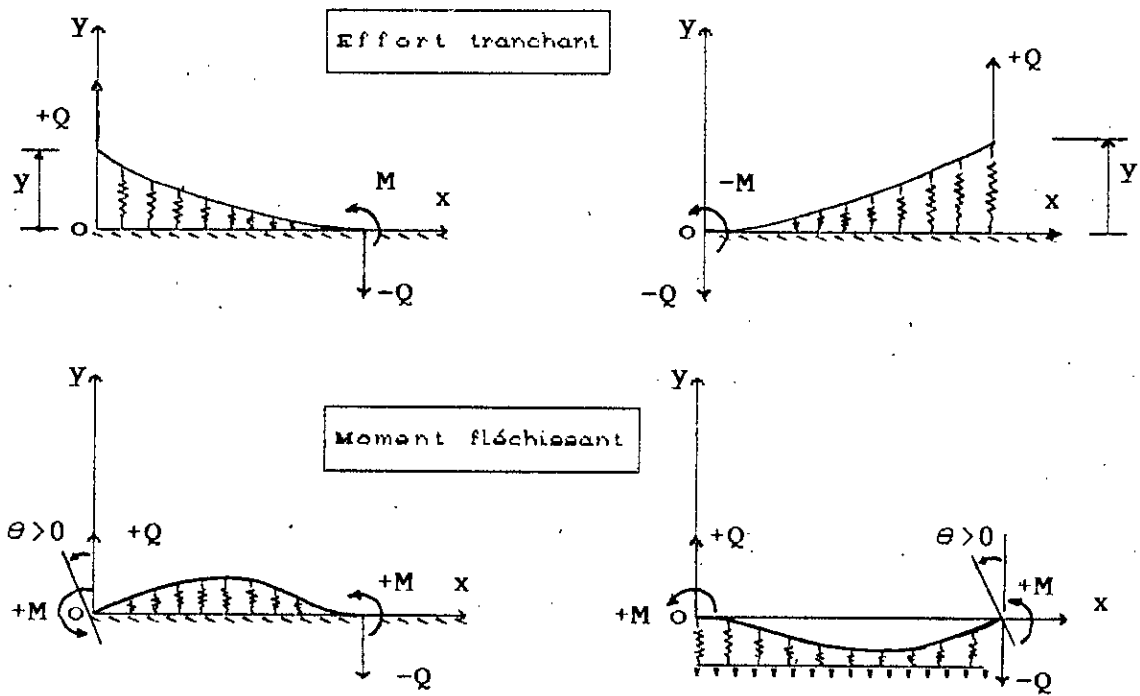
Nous allons adopter une convention de signe plus pratique pour le calcul automatique. Cette convention est la suivante:

* La structure étant rapportée à un système d'axes rectangulaires direct, les charges et les déformations sont comptées positivement suivant ces axes.

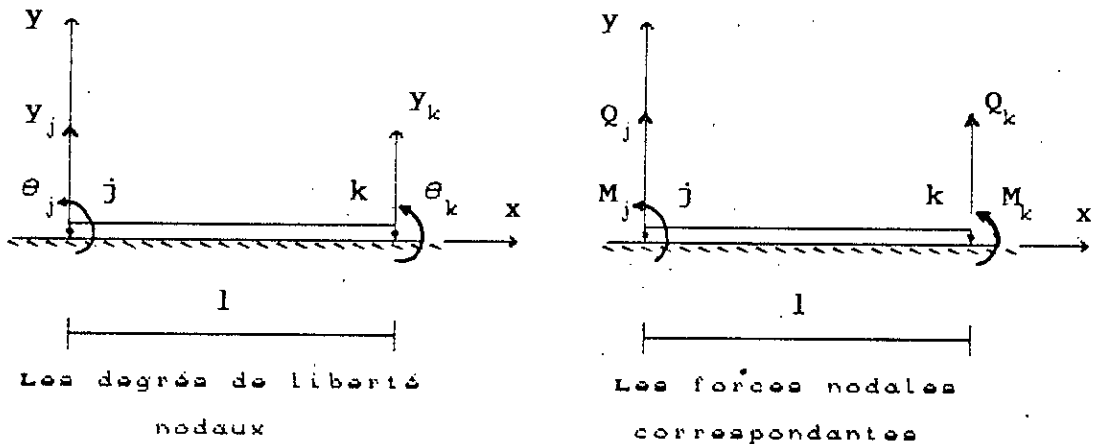
D'autre part un élément est rapporté à un système d'axes propre xoy tel que (\vec{ox}) soit dirigé suivant l'axe orienté de l'origine vers l'extrémité, l'axe (\vec{oy}) s'en déduit par une rotation de $(+\frac{\pi}{2})$.

* L'effort normal; l'effort tranchant; et le moment fléchissant sont définis dans le système (xoy) conformément aux figures suivantes:





Les directions positives des degrés de liberté et les forces nodales correspondantes sont montrées sur la figure(fig.5-1).



(fig.5-1)

Le vecteur forces nodales {A} est lié au vecteur déplacement {D} par la matrice de rigidité [S], tel que:

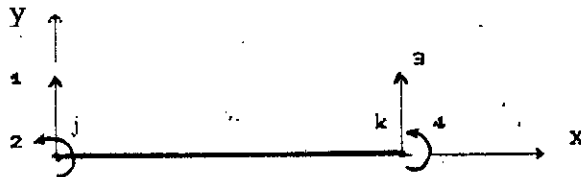
$$[S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad (5.1)$$

Avec:

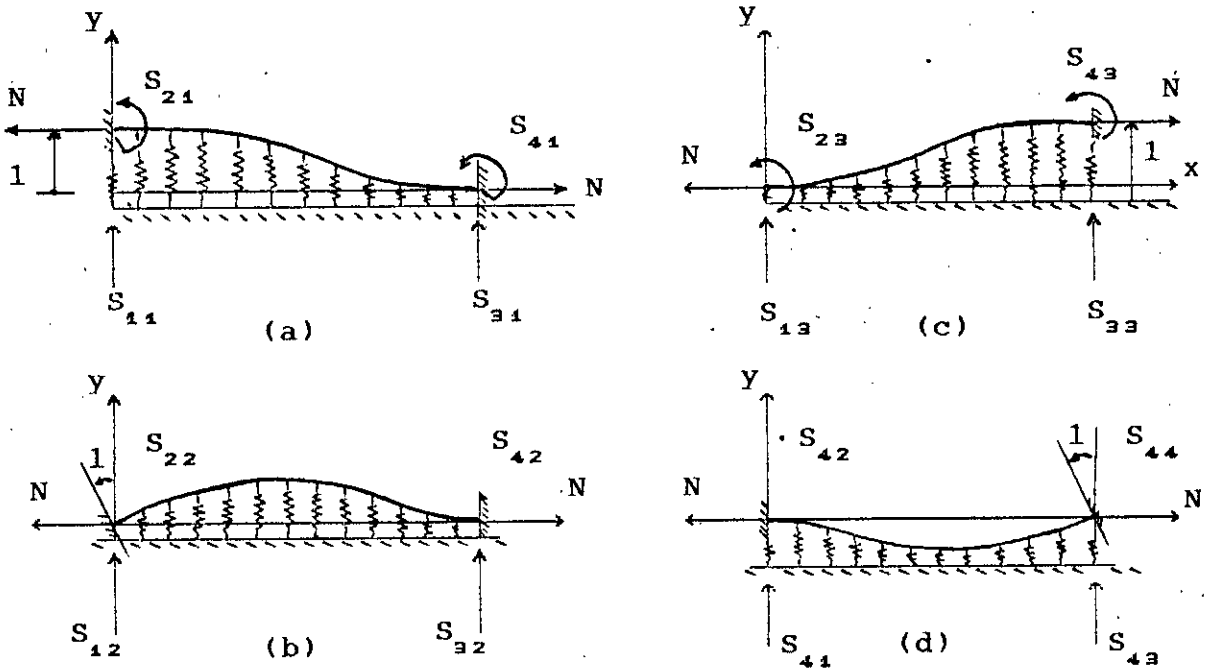
$$\{D\} = \{ y_j ; \theta_j ; y_k ; \theta_k \}$$

$$\{A\} = \{ Q_j ; M_j ; Q_k ; M_k \}$$

[S] est la matrice de rigidité à calculer, elle est de dimension (4*4), symétrique, et dont les termes expriment les actions aux extrémités de l'élément produites par des déplacements unitaires des degrés de liberté (fig.5-2).



Numérotation des degrés de liberté



(fig.5-2)

5.2\ - Détermination des rigidités (S_{ij}) :

les termes S_{ij} peuvent être déterminés en introduisant les conditions aux limites déduites des cas, (a), (b), (c), (d) de la figure (fig.5-2) dans les équations (4.3), (4.4) et (4.6).

Prenant le cas (c) de la (fig.5-2) comme exemple:

Les conditions aux limites pour ce cas sont les suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } x = 0 \dots\dots\dots y(0) = 0 \text{ et } \frac{dy}{dx}(0) = 0 \\ \text{pour } x = 1 \dots\dots\dots y(1) = 1 \text{ et } \frac{dy}{dx}(1) = 0 \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

En utilisant l'équation (4.6) et sa dérivée première, avec l'introduction des équations données par (5.2). On obtient comme constantes d'intégrations les expressions suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = \beta \frac{\alpha \cdot \sin\beta l \cdot \cosh\alpha l + \beta \cdot \cos\beta l \cdot \sinh\alpha l}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \\ C_3 = -\alpha \frac{\alpha \cdot \sin\beta l \cdot \cosh\alpha l + \beta \cdot \cos\beta l \cdot \sinh\alpha l}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \\ C_4 = (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\sin\beta l \cdot \sinh\alpha l}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

Connaissant les constantes $C_{i(i=1,4)}$ l'équation de la ligne élastique de la poutre de la (fig.5-2c) est donc bien définie. Les rigidités correspondantes pour ce cas de figure seront déterminées en utilisant les équations (4.3) et (4.4) donnant l'effort tranchant et le moment fléchissant, en effet:

$$S_{2a} = -M(0) = -EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} (0) \quad (5.4)$$

d'où :

$$S_{2a} = -4 \alpha \beta \cdot \lambda^2 \cdot EI \frac{\sin \beta l \cdot \sinh \alpha l}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l}$$

$$S_{1b} = -Q(0) = EI \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} (0) \quad (5.5)$$

d'où :

$$S_{1b} = -4 \alpha \beta \cdot \lambda^2 \cdot EI \frac{\alpha \cdot \sin \beta l \cdot \cosh \alpha l + \beta \cdot \cos \beta l \cdot \sinh \alpha l}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l}$$

$$S_{4c} = M(1) = EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} (1) \quad (5.6)$$

d'où :

$$S_{4c} = -2 \lambda^2 \cdot EI \frac{\alpha^2 \sin^2 \beta l + \beta^2 \sinh^2 \alpha l}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l}$$

$$S_{3d} = Q(1) = -EI \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} (1) \quad (5.7)$$

$$S_{3d} = 4 \alpha \beta \cdot \lambda^2 \cdot EI \frac{\beta \cdot \sinh \alpha l \cdot \cosh \alpha l + \alpha \cdot \sin \beta l \cdot \cos \beta l}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l}$$

De la même manière on peut déterminer les autres termes en utilisant les cas (a), (b) et (d) de la (fig.5-2), on peut en déduire les résultats suivants:

$$\left. \begin{aligned}
 S_{11} &= S_{33} \\
 S_{12} &= -S_{43} = S_{21} = -S_{34} \\
 S_{13} &= S_{31} \\
 S_{14} &= -S_{23} = S_{41} = -S_{32}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Le cas (d) de la (fig.5-2) nous permet de déterminer les rigidités S_{24} et S_{44} . on trouve ainsi:

$$S_{24} = -2 \alpha \beta . EI \frac{\beta . \sinh \alpha l . \cos \beta l - \alpha . \cosh \alpha l . \sin \beta l}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \quad (5.9)$$

$$S_{44} = 2 \alpha \beta . EI \frac{\beta . \sinh \alpha l . \cosh \alpha l - \alpha . \sin \beta l . \cos \beta l}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \quad (5.10)$$

On en déduit : $S_{22} = S_{44}$ et $S_{42} = S_{24}$ (5.11)

5.3\ - Détermination des actions aux extrémité de l'élément dues aux charges:

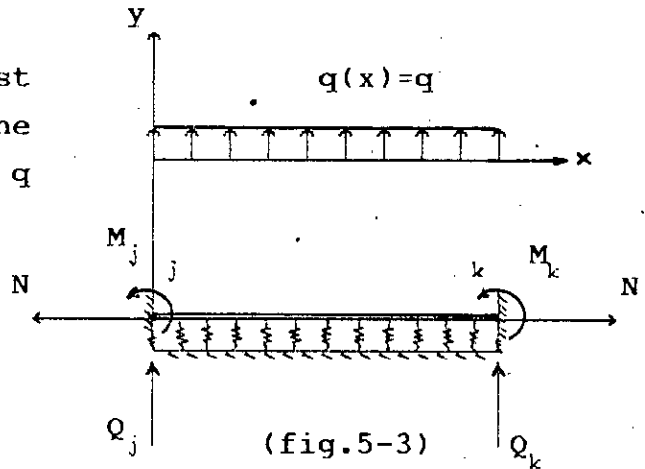
Connaissant la fonction de charge $q(x)$, on peut déterminer la solution particulière $y_p(x)$ de l'équation différentielle donnée par (4.5).

L'équation générale de la ligne déformée dans ce cas sera donnée par l'équation (4.7) [$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$].

Les actions aux extrémités de l'élément peuvent être calculées comme précédemment en utilisant les équations (4.3), (4.4) et (4.6)

5.3.1\ - Cas d'une charge uniformément répartie:

Supposons que la poutre est soumise à l'action d'une charge uniformément répartie q (fig.5-3).



Dans ce cas la fonction de charge est donnée par l'équation suivante :

$$q(x) = q = C^{10} \quad (5.12)$$

L'équation différentielle de la ligne déformée s'écrit:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - N \frac{d^2 y}{dx^2} + K y = q \quad (5.13)$$

La solution particulière de l'équation (5.13) est la suivante:

$$y_p(x) = \frac{q}{K} \quad (5.14)$$

La solution générale de l'équation (5.13) est la somme des équations (4.6) et (5.14), soit:

$$y(x) = C_1 \cos \beta x \cdot \cosh \alpha x + C_2 \cos \beta x \cdot \sinh \alpha x + C_3 \sin \beta x \cdot \cosh \alpha x + C_4 \sin \beta x \cdot \sinh \alpha x + q/K \quad (5.15)$$

Les constantes d'intégrations $C_{i(i=1,4)}$ seront déterminées en introduisant les conditions aux limites, qui sont pour le cas d'une poutre encastree (fig.5-3):

$$\left. \begin{aligned} \text{Pour } x = 0 \dots\dots y(0) &= \frac{dy}{dx}(0) = 0 \\ \text{Pour } x = 1 \dots\dots y(1) &= \frac{dy}{dx}(1) = 0 \end{aligned} \right\} (5.16)$$

Ces quatres conditions nous donne:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{q}{K} \\ C_2 &= \frac{q}{K} \frac{(\cosh\alpha l - \cos\beta l)(\beta^2 \sinh\alpha l - \alpha\beta \cdot \sin\beta l)}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \\ C_3 &= -\frac{\alpha q}{\beta K} \frac{(\cosh\alpha l - \cos\beta l)(\beta^2 \sinh\alpha l - \alpha\beta \cdot \sin\beta l)}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \\ C_4 &= \frac{q}{k} \frac{[\alpha\beta(\cosh^2\alpha l - \cos^2\beta l) - (\alpha^2 + \beta^2)(\sin\beta l \cdot \sinh\alpha l)]}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \end{aligned} \right\} (5.17)$$

L'équation de la ligne déformée $y(x)$ est donc bien définie. Les actions aux extrémité de l'élément seront déterminées en utilisant les équations (4.3) et (4.4):

$$\left. \begin{aligned} M_j &= -M(0) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}(0) \\ Q_j &= -Q(0) = EI \frac{d^3 y}{dx^3}(0) \end{aligned} \right\} (5.18)$$

Ce qui nous donne:

$$\left. \begin{aligned} M_j &= -(\alpha^2 + \beta^2) \frac{q \cdot EI}{K} \frac{(\beta \cdot \sinh\alpha l - \alpha \cdot \sin\beta l)^2}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \\ Q_j &= -2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \frac{q \cdot EI}{K} \frac{(\cosh\alpha l - \cos\beta l)(\beta^2 \sinh\alpha l - \alpha\beta \cdot \sin\beta l)}{\beta^2 \sinh^2\alpha l - \alpha^2 \sin^2\beta l} \end{aligned} \right\} (5.19)$$

on en déduit :

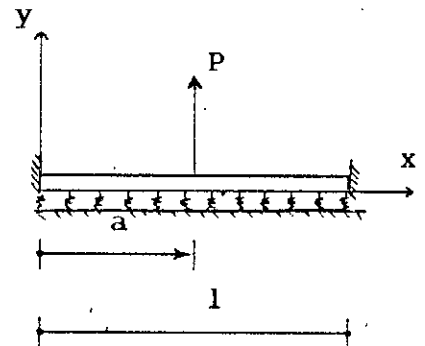
$$Q_k = Q_j \quad \text{et} \quad M_k = -M_j$$

Les actions Q_j, M_j, Q_k, M_k , représentent les éléments du vecteur action $\{A_{ML}\}$.

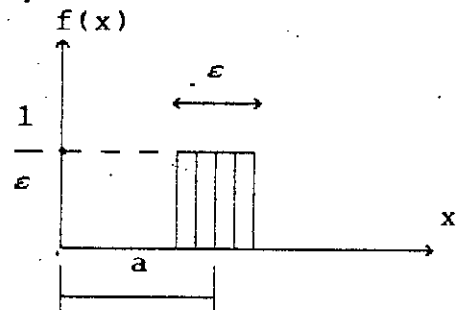
5.3.2\ - Cas d'une charge concentrée P :

Dans le cas d'une poutre soumise à l'action d'une charge concentrée P (fig.5-4), nous pouvons utiliser l'opérateur de DIRAC, pour la résolution de l'équation différentielle de la ligne déformée. Nous savons qu'il n'existe pas en réalité une charge concentrée rigoureusement ponctuelle.

Nous assimilons dans ce cas P à une charge répartie sur un tronçon infiniment petit, ayant par exemple une densité égale à (P/ϵ) . Définissons une fonction $f(x)$ telle que représentée ci-contre



(fig.5-4)



$$f(x) = \left[\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x < a - \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{si} & a - \frac{\epsilon}{2} \leq x \leq a + \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{si} & x > a + \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right] \quad (5.20)$$

On appelle fonction de DIRAC au point (x=a) la limite de la fonction f(x) lorsque ($\varepsilon \longrightarrow 0$). On note:

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \infty & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} \quad (5.21)$$

$\delta(x-a)$: est appelée fonction de DIRAC au point d'application de la charge P. et f(x) la densité de charge correspondante à P. A la limite nous pouvons écrire:

$$q(x) = P \cdot \delta(x-a) \quad (5.22)$$

Avec: $\forall x_1 < a ; x_2 > a$ et $\forall \Phi(x)$ on a :

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) \cdot \delta(x-a) \cdot dx = \Phi(a) \quad (5.23)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-a) \cdot dx = 1 \quad (5.24)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} P \cdot \delta(x) \cdot dx = P \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta(x-0) \cdot dx = P \quad (5.25)$$

REMARQUE: Afin d'éviter tous ces calculs mathématiques pour le cas d'une charge concentrée, nous considérons le point d'application de cette charge comme un noeud lors des calculs. et la charge concentrée sera prise comme charge nodale.

5.4\ - Résultats :

Les résultats obtenus peuvent être exprimés en fonction de ceux obtenus pour le cas d'une poutre libre (chap:1). Ces résultats sont résumés dans le tableau (tab.5-1) suivant:

(Tab.5-1): Les actions aux extrémités de l'élément dues aux charges et aux déformations unitaires.

Efforts Schéma de charge	Q_j	M_j	Q_k	M_k	
	$-A_1 \frac{q \cdot l}{2}$	$-A_2 \frac{q \cdot l^2}{12}$	$-A_4 \frac{q \cdot l}{2}$	$A_2 \frac{q \cdot l^2}{12}$	
	$A_3 \frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$A_4 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$-A_5 \frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$A_6 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	y_j
	$A_4 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$A_7 \frac{4 \cdot EI}{l}$	$-A_6 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$A_8 \frac{2 \cdot EI}{l}$	θ_j
	$-A_5 \frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$-A_6 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$A_3 \frac{12 \cdot EI}{l^3}$	$-A_4 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	y_k
	$A_6 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$A_8 \frac{2 \cdot EI}{l}$	$-A_4 \frac{6 \cdot EI}{l^2}$	$A_7 \frac{4 \cdot EI}{l}$	θ_k

$A_1, A_2, \dots, A_8 =$ Coefficients d'influences du sol et de l'effort axial N donnés comme suit:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2\alpha}{\lambda^2 \cdot l} \frac{(\cosh \alpha l - \cos \beta l)(\beta^2 \sinh \alpha l - \alpha \beta \cdot \sin \beta l)}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \\
 A_2 &= \frac{6}{\lambda^2 \cdot l^2} \frac{(\beta \cdot \sinh \alpha l - \alpha \cdot \sin \beta l)^2}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \\
 A_3 &= \frac{\alpha \beta \cdot \lambda^2 \cdot l^3}{3} \frac{(\beta \cdot \sinh \alpha l \cdot \cosh \alpha l + \alpha \cdot \sin \beta l \cdot \cos \beta l)}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \\
 A_4 &= \frac{\lambda^2 \cdot l^2}{3} \frac{(\alpha^2 \cdot \sin^2 \beta l + \beta^2 \cdot \sinh^2 \alpha l)}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \\
 A_5 &= \frac{\alpha \beta \cdot \lambda^2 \cdot l^3}{3} \frac{(\alpha \cdot \sin \beta l \cdot \cosh \alpha l + \beta \cdot \cos \beta l \cdot \sinh \alpha l)}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \\
 A_6 &= \frac{2 \cdot \alpha \beta \cdot \lambda^2 \cdot l^2}{3} \frac{\sin \beta l \cdot \sinh \alpha l}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \\
 A_7 &= \frac{\alpha \beta \cdot l}{2} \frac{(\beta \cdot \sinh \alpha l \cdot \cosh \alpha l - \alpha \cdot \sin \beta l \cdot \cos \beta l)}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l} \\
 A_8 &= \alpha \beta \cdot l \frac{(\alpha \cdot \sin \beta l \cdot \cosh \alpha l - \beta \cdot \cos \beta l \cdot \sinh \alpha l)}{\beta^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \beta l}
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Avec: $\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4 EI}}$; $\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \delta}$; $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \delta}$

$$\delta = \frac{N}{4 EI}$$

La matrice de rigidité élémentaire d'une poutre colonne reposant sur une fondation élastique s'écrit donc:

$$\left[S_m \right] = \begin{bmatrix}
 A_3 \frac{12EI}{L^3} & A_4 \frac{6EI}{L^2} & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & A_6 \frac{6EI}{L^2} \\
 A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L} & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} \\
 -A_5 \frac{12EI}{L^3} & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_3 \frac{12EI}{L^3} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} \\
 A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L}
 \end{bmatrix} \quad (\text{mat.5-1})$$

REMARQUE:

Dans le cas où l'effort normal est une compression, on obtient les mêmes résultats en permutant simplement les paramètres α et β (ou de remplacer (N) par (-N)).

5.5\ - Résultats des cas particuliers :

Premier cas : $N = 0$ et $K \neq 0$

Dans ce cas on obtient: $\alpha = \beta = \lambda$

Si on pose:

$$\phi = \lambda l = l \cdot \sqrt{\frac{K}{4 \cdot EI}}$$

Les coefficients de la matrice (mat.5-1) peuvent se mettre sous les formes suivantes:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{\phi^3}{3} \frac{\sinh\phi \cdot \cosh\phi + \sin\phi \cdot \cos\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\
 A_4 &= \frac{\phi^2}{3} \frac{\sinh^2\phi + \sin^2\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\
 A_5 &= \frac{\phi^3}{3} \frac{\sin\phi \cdot \cosh\phi + \cos\phi \cdot \sinh\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\
 A_6 &= \frac{2 \cdot \phi^2}{3} \frac{\sin\phi \cdot \sinh\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\
 A_7 &= \frac{\phi}{2} \frac{\sinh\phi \cdot \cosh\phi - \sin\phi \cdot \cos\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi} \\
 A_8 &= \phi \frac{\sin\phi \cdot \cosh\phi - \cos\phi \cdot \sinh\phi}{\sinh^2\phi - \sin^2\phi}
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

Deuxième cas: $N = 0$ et $K \neq 0$

Dans ce cas $\phi=0$ et on montre, en utilisant les développements limités au voisinage de zéro des fonctions $(\sin\phi, \cos\phi, \sinh\phi, \cosh\phi)$, que tous les coefficients A_i sont égaux à l'unité et la matrice (mat.5-1) tend vers la matrice (mat.1-1) caractérisant la matrice de rigidité d'une poutre libre.

Troisième cas: $N \neq 0$ et $K = 0$

a) - N est une traction ($N > 0$):

Les coefficients A_i dans ce cas sont donnés comme suit:

$$\begin{aligned}
 A_3 = A_5 &= \frac{(\omega_1 l)^3 \cdot \sinh \omega_1 l}{12 \cdot p_t} \\
 A_4 = A_6 &= \frac{(\omega_1 l)^2 \cdot (\cosh \omega_1 l - 1)}{6 \cdot p_t} \\
 A_7 &= \frac{(\omega_1 l) \cdot (\omega_1 l \cdot \cosh \omega_1 l - \sinh \omega_1 l)}{4 \cdot p_t} \\
 A_8 &= \frac{(\omega_1 l) \cdot (\sinh \omega_1 l - \omega_1 l)}{2 \cdot p_t}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Avec: $\omega_1 = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ et, $p_t = 2 - 2 \cdot \cosh \omega_1 l + \omega_1 l \cdot \sinh \omega_1 l$

b) - N est une compression (N < 0):

On obtient comme coefficients d'influences les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
 A_3 = A_5 &= \frac{(\omega_2 l)^3 \cdot \sin \omega_2 l}{12 \cdot p_c} \\
 A_4 = A_6 &= \frac{(\omega_2 l)^2 \cdot (1 - \cos \omega_2 l)}{6 \cdot p_c} \\
 A_7 &= \frac{(\omega_2 l) \cdot (\sin \omega_2 l - \omega_2 l \cdot \cos \omega_2 l)}{4 \cdot p_c} \\
 A_8 &= \frac{(\omega_2 l) \cdot (\omega_2 l - \sin \omega_2 l)}{2 \cdot p_c}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Avec: $\omega_2 = \sqrt{\frac{-N}{EI}}$ et, $p_c = 2 - 2 \cdot \cos \omega_2 l - \omega_2 l \cdot \sin \omega_2 l$

CHAPITRE VI

**ANALYSE D'UNE POUTRE
CONTINUE SUR FONDATION
ELASTIQUE**

Analyse d'une poutre continue
sur fondation élastique

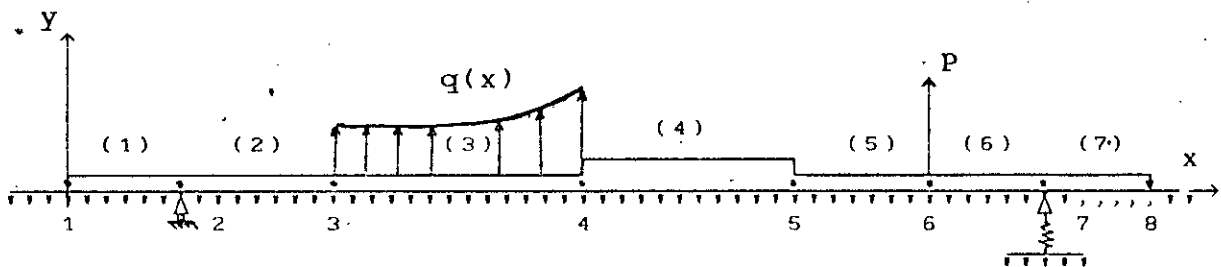
6.1\ - Présentation:

La poutre objet de notre étude est supposée constituer par des éléments prismatiques rigidement liés reposant sur un sol ayant un comportement élastique linéaire. Cette poutre peut reposée librement sur le sol, comme elle peut être fixée à celui-ci par des appuis rigides ou élastiques.

La matrice de rigidité qu'on vient d'établir au chapitre précédent pour un élément de poutre, est une matrice exacte, dans ce cas un nombre minimum d'éléments peut nous fournir un résultat exacte.

En effet, les noeuds seront choisis aux points d'appuis; aux points de variation de chargement; aux points d'applications des charges concentrées; aux points de variations des sections transversales; ainsi qu'aux extrémités libres de la poutre.

La figure (fig.6-1) représente une poutre continue sur une fondation élastique, avec un choix approprié des noeuds.



(fig.6-1)

- * Les chiffres de dessus représentent les numéros des éléments
- * Les chiffres de dessous représentent les numéros des noeuds

6.2\ - Système d'indexation:

Considérant une poutre continue à (m) éléments et (n_j) noeuds (fig.6-2.a), et soit $x-y$ le plan de flexion de cette poutre. On peut remarquer pour cette poutre que le nombre total des noeuds (n_j) et généralement augmenté de 1 par rapport au nombre d'éléments (m) , soit:

$$n_j = m + 1 \quad (6.1)$$

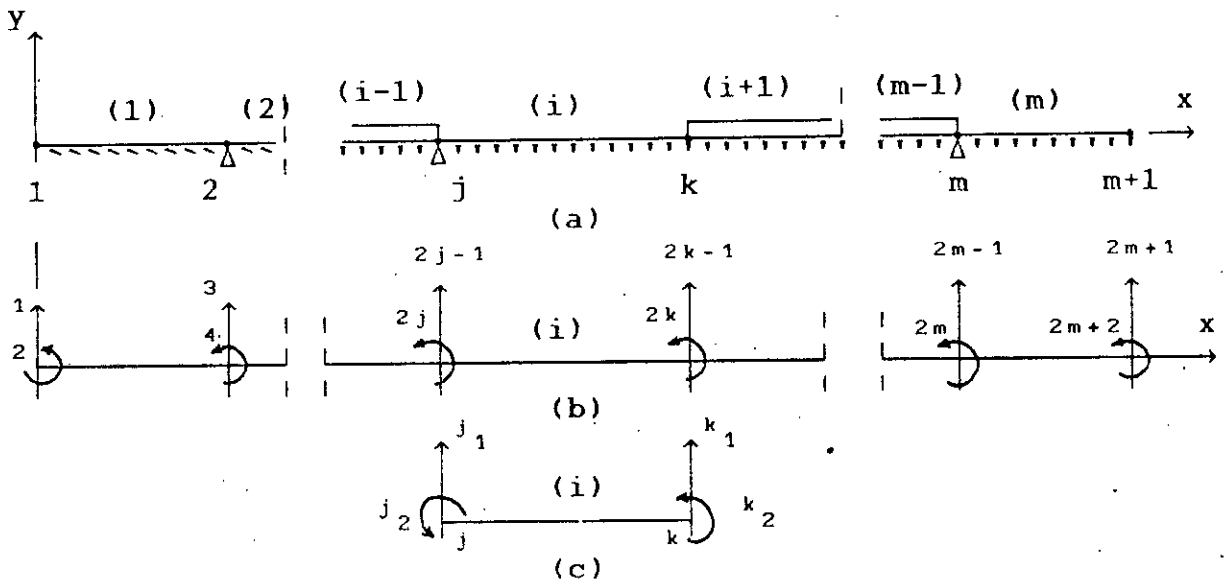
Les déplacements sont dûs principalement à la flexion, ce sont donc une translation selon la direction (y) et une rotation par rapport à la direction (z) .

Le système de numérotation des déplacements possibles des noeuds est'indiqué sur la figure (fig.6-2.b), en allant de la gauche vers la droite.

Le numéro représentant une translation pour un noeud est égal à deux fois le numéro de ce noeud diminué de 1, et le numéro représentant la rotation est égal à deux fois le numéro du noeud.

Soit pour un noeud (j) :

- * Le numéro de translation = $2j - 1$
- * Le numéro de rotation = $2j$



(fig 6-2)

On peut remarquer que le nombre de déplacements possibles des noeuds est deux fois le nombre total de ces noeuds (n_j), soit $(2n_j)$. Cependant, si le nombre de déplacements bloqués est (n_r) , alors le nombre de degrés de liberté est:

$$n = 2n_j - n_r = 2m + 2 - n_r \quad (6.2)$$

L'analyse de la poutre considérée consiste à déterminer ces déplacements (translations et rotations), ainsi que les réactions et les efforts aux extrémités des éléments constituant cette poutre.

La méthode utilisée est la méthode des déformations dont on a déjà fait l'exposé au (chapitre :1). La matrice de rigidité utilisée est celle établie au (chapitre:5) et donnée par (mat.5-1).

6.3\ -Méthode de calcul:

La méthode consiste à établir la matrice de rigidité globale $[S_j]$ de toute la poutre, de la partitionnée selon la forme donnée par (mat.1-2) ensuite former et résoudre les systèmes linéaires suivants (donnés au chap:1):

$$\{A_D\} = \{A_{DL}\} + [S].\{D\} \quad (1.1)$$

$$\{A_R\} = \{A_{RL}\} + [S_{RD}].\{D\} \quad (1.3)$$

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [Sm]_i .\{D_M\}_i \quad (1.12)$$

6.3.1\ - Généralisation de la matrice de rigidité:

L'étape la plus importante dans l'analyse, c'est la formation de la matrice de rigidité globale de tous les noeuds de la structure $[S_j]$, tenant compte de la contribution des matrices de rigidité élémentaires $[Sm]_i$ établies au chapitre précédent.

La matrice de rigidité $[Sm]_i$ d'un élément (i) de longueur (l) et de rigidité en flexion (EI) reposant sur une fondation élastique est donnée par (mat.5-1)

Pour généraliser la matrice de rigidité pour tous les éléments, considérant un élément type (i) délimité par les noeuds j et k aux extrémités gauche et droite respectivement (fig.6-2.c) les quatres déplacements des extrémités de l'élément (i) sont notés j_1, j_2 , pour l'extrémité gauche; k_1, k_2 , pour l'extrémité droite. Ces quatres déplacements d'extrémités sont liés aux déplacements des noeuds correspondant par les expressions suivantes [comparer les figures (fig.6-2.b) et (fig.6-2.c)]:

$$\left[\begin{array}{ll} j_1 = 2j - 1 & j_2 = 2j \\ k_1 = 2k - 1 & k_2 = 2k \end{array} \right]. \quad (6.3)$$

et comme les numéros des noeuds j et k sont égaux à (i) et $(i+1)$ respectivement on obtient également:

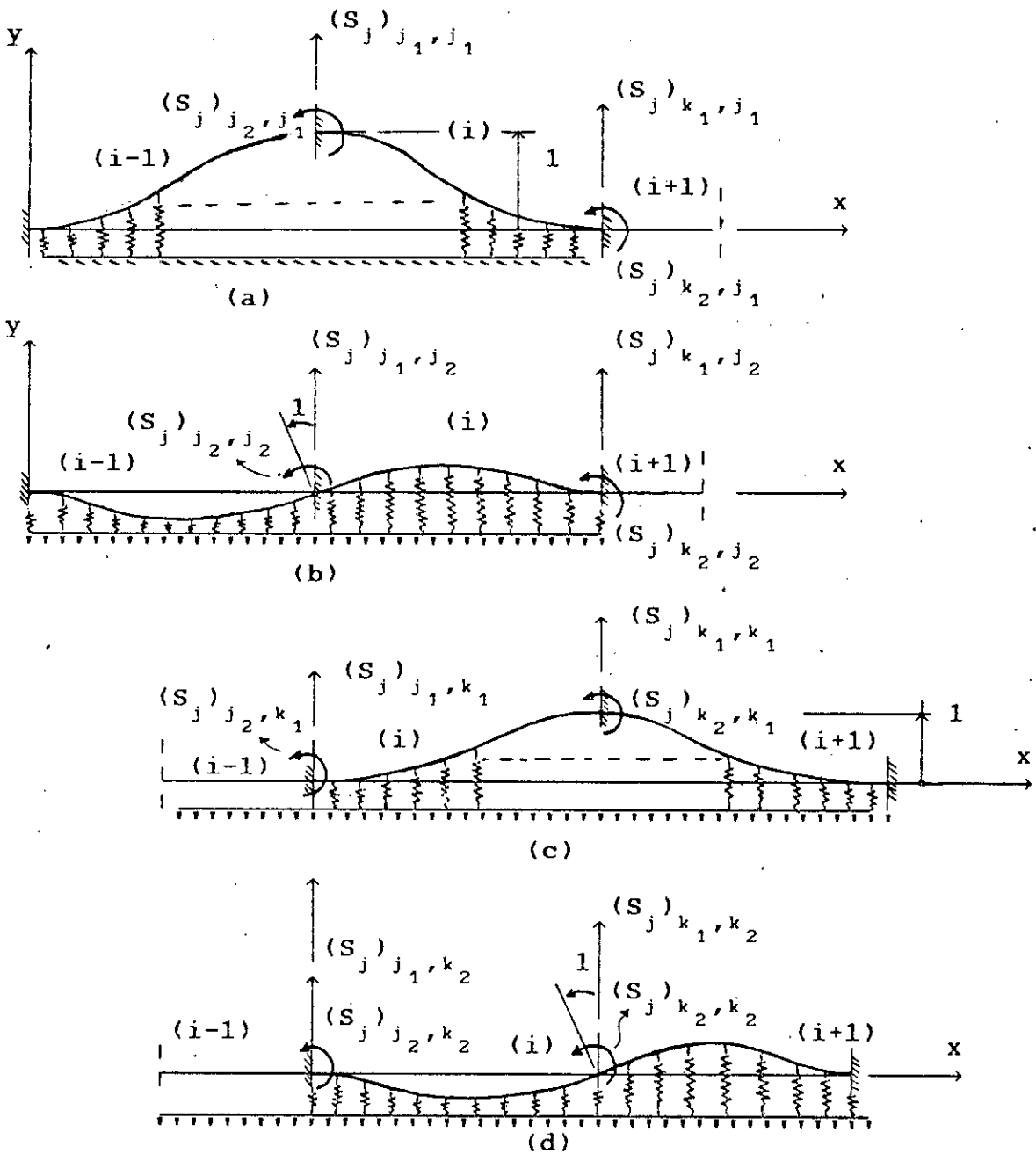
$$\left[\begin{array}{ll} j_1 = 2i - 1 & j_2 = 2i \\ k_1 = 2i + 1 & k_2 = 2i + 2 \end{array} \right] \quad (6.4)$$

Les équations (6.3) et (6.4) serviront aux notations indicielles des déplacements possibles des noeuds de gauche et de droite d'un élément (i) .

Comme il vient d'être mentionné, la matrice de rigidité globale de tous les noeuds sera obtenue en considérant les contributions individuelles des éléments des matrices $[S_m]$.

Cependant, il sera convenable d'étudier le processus de contribution pour un élément type (i) , et répéter ensuite le même processus pour tous les éléments de (1) jusqu'à (m) .

La figure (fig.6-3) représente un élément type (i) et les éléments adjacents $(i-1)$ et $(i+1)$, ainsi que les actions aux extrémités de l'élément (i) produites par les déplacements unitaires de ces extrémités.



(fig.6-3) Les rigidités des noeuds d'une poutre continue

L'étape suivante consiste à exprimer les rigidités mentionnées sur la figure (fig.6-3), en fonction des différentes rigidités des éléments contribuant avec les noeuds de l'élément (i) .

Par exemple pour obtenir la rigidité $(S_j)_{j_1, j_1}$ on constate que l'élément (i-1) contribue avec sa rigidité $(Sm)_{33}$ et l'élément (i) contribue avec sa rigidité $(Sm)_{11}$ ces deux rigidités seront notées $(Sm)_{33}^{i-1}$ et $(Sm)_{11}^i$ respectivement. En utilisant les données de la figure (fig.6-3) on montre que

$$\left. \begin{aligned} (S_j)_{j_1, j_1} &= (Sm)_{33}^{i-1} + (Sm)_{11}^i \\ (S_j)_{j_2, j_1} &= (Sm)_{43}^{i-1} + (Sm)_{21}^i \\ (S_j)_{k_1, j_1} &= (Sm)_{31}^i \\ (S_j)_{k_2, j_1} &= (Sm)_{41}^i \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Ces équations représentent le transfert des éléments de la 1^{ère} colonne de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément (i) dans les cases correspondantes de la matrice globale $[S_j]$.

Les autres termes seront obtenus comme suit:

* Le transfert de la 2^{ème} colonne de la matrice élémentaire $[Sm]_i$ s'effectue en considérant le déplacement (rotation) unitaire du degré de liberté j_2 (fig.6-3.b), on obtient dans ce cas:

$$\left. \begin{aligned} (S_j)_{j_1, j_2} &= (Sm)_{34}^{i-1} + (Sm)_{12}^i \\ (S_j)_{j_2, j_2} &= (Sm)_{44}^{i-1} + (Sm)_{22}^i \\ (S_j)_{k_1, j_2} &= (Sm)_{32}^i \\ (S_j)_{k_2, j_2} &= (Sm)_{42}^i \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

* Le transfert de la 3^{ème} colonne de la matrice $[Sm]_i$, s'effectue en considérant un déplacement unitaire suivant la direction y du noeud k (soit k_1) (fig.6-2.c).

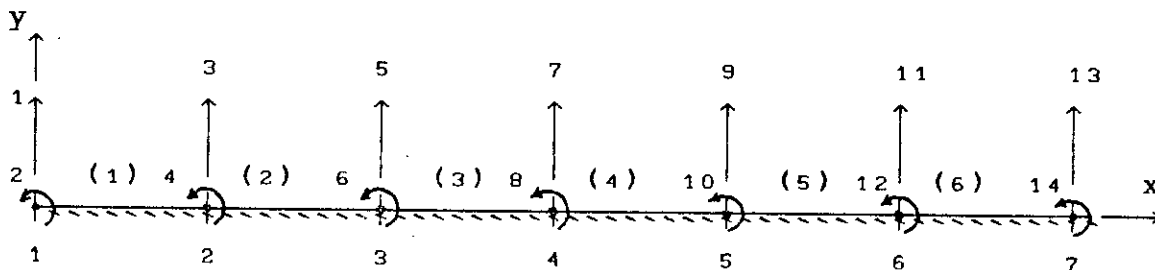
$$\left. \begin{aligned} (S_j)_{j_1, k_1} &= (Sm_{13})_i \\ (S_j)_{j_2, k_1} &= (Sm_{23})_i \\ (S_j)_{k_1, k_1} &= (Sm_{33})_i + (Sm_{11})_{i+1} \\ (S_j)_{k_2, k_1} &= (Sm_{43})_i + (Sm_{21})_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

* Finalement le transfert de la 4^{ème} et dernière colonne de la matrice $[Sm]_i$, dans la matrice globale $[S_j]$ s'effectue en considérant un déplacement(rotation) unitaire du degré de liberté (k_2).

$$\left. \begin{aligned} (S_j)_{j_1, k_2} &= (Sm_{14})_i \\ (S_j)_{j_2, k_2} &= (Sm_{24})_i \\ (S_j)_{k_1, k_2} &= (Sm_{34})_i + (Sm_{12})_{i+1} \\ (S_j)_{k_2, k_2} &= (Sm_{44})_i + (Sm_{22})_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

EXEMPLE:

Pour bien illustrer le processus d'assemblage, considérant la poutre de la figure (fig.6-4).



(fig.6-4)

Le nombre de noeuds pour cette poutre est de (7), le nombre de déplacements possibles est de (14), donc la matrice de rigidité globale est de l'ordre, (14*14).

Selon le système de numérotation choisit, cette matrice aura la forme donnée par le tableau (tab.6-1)

$[S_j] =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	*	*	*	1*										
2	*	*	*	*										
3	*	*	*	*	*	2*								
4	*	*	*	*	*	*								
5			*	*	*	*	*	3*						
6			*	*	*	*	*	*						
7					*	*	*	*	*	4*				
8					*	*	*	*	*	*				
9							*	*	*	*	*	5*		
10							*	*	*	*	*	*		
11									*	*	*	*	*	6*
12									*	*	*	*	*	*
13											*	*	*	*
14											*	*	*	*

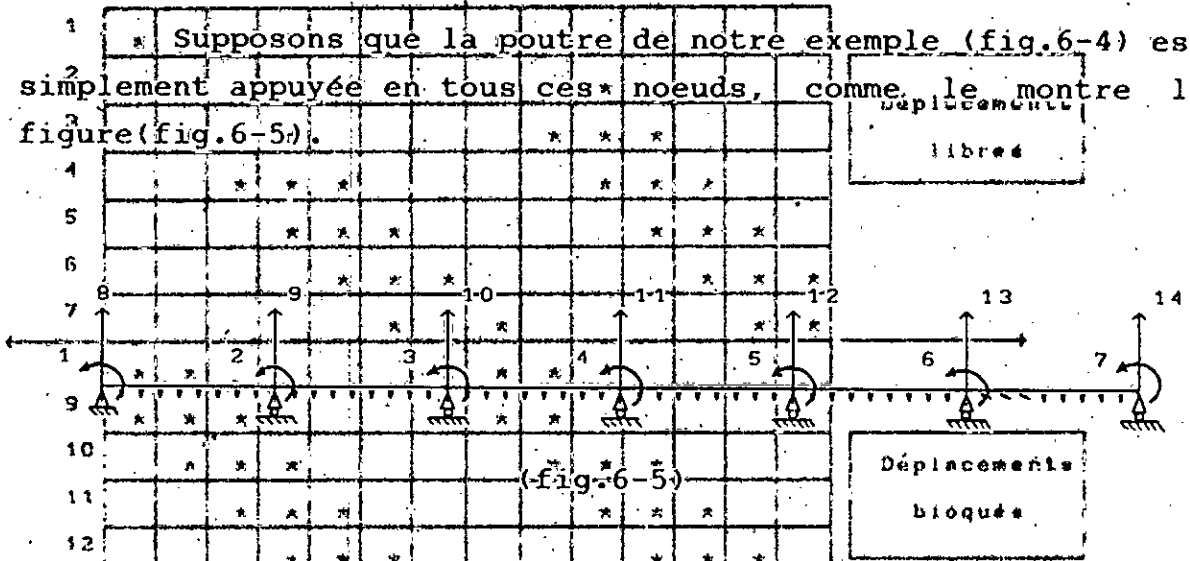
(tab.6-1)

Les blocs hachurés sont de l'ordre (2 * 2), et représentent les éléments de la matrice globale $[S_j]$ recevant la contribution des éléments adjacents; les blocs numérotés de (1 à 6) représentent les contributions individuelles des termes des matrices élémentaires des éléments de la poutre.

6.3.2) Réarrangement de la matrice de rigidité $[S]$:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

1 * Supposons que la poutre de notre exemple (fig.6-4) est
 2 simplement appuyée en tous ces * noeuds, comme le montre la
 3 figure (fig.6-5).



13 Pour le partitionnement de la matrice de rigidité $[S]$ selon
 la forme donnée par (mat.1-2), nous allons permuter les lignes
 et les colonnes de la matrice de rigidité $[S]$ de telle sorte
 que les degrés de liberté soient en tête du vecteur suivies par
 les lignes et les colonnes des déplacements bloqués.

(Tab.6-2)

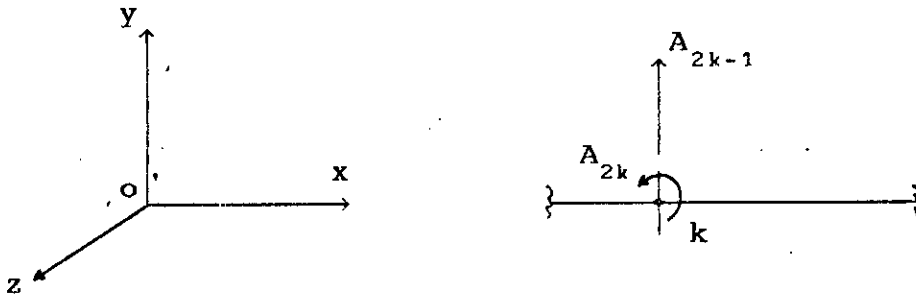
Pour notre exemple, et selon la numérotation choisie dans la
 figure (fig.6-5), les rigidités correspondantes aux degrés de
 liberté $[S_{11}]$ et $[S_{12}]$, qui serviront au calcul des déplacements et des
 efforts, seront placées dans les lignes et les colonnes
 numérotées de (1 à 7) suivie par les rigidités correspondantes
 aux déplacements bloqués (tab.6-2).

6.3.3) Détermination des vecteurs charges:

6.3.3.1) Formation du vecteur charges nodales $\{A\}$:

Ce vecteur contient $2n$ éléments correspondant
 chacun à une des déplacements possibles (fig.6-2.b). Chaque
 noeud peut subir l'action de deux charges distinctes (une
 force suivant la direction de l'axe \vec{Oy} et un moment suivant la
 direction \vec{Oz}).

Pour un noeud numéroté k , les charges nodales seront notées
 (A_{2k-1}) et (A_{2k}) , comme le montre la figure (fig.6-6).



(fig.6-6)

Les indices utilisés pour identifier ces actions seront les mêmes que ceux utilisés pour la numérotation des déplacements possibles des noeuds (fig.6-2.b).

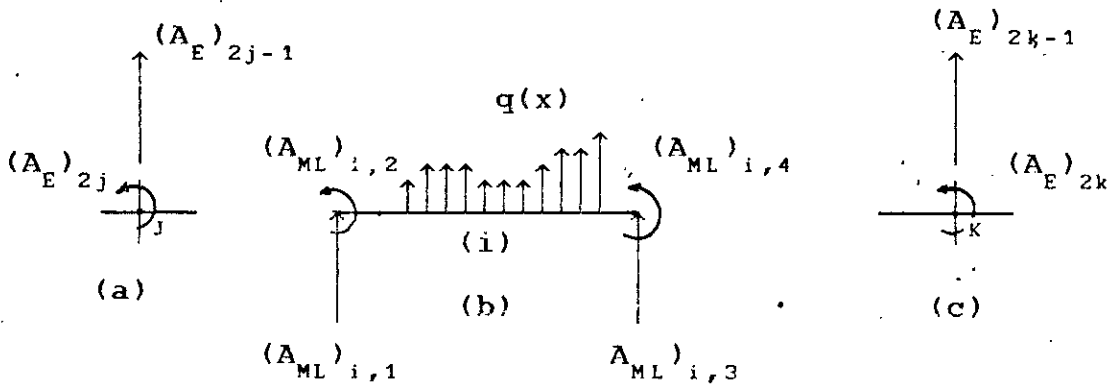
Cependant, le vecteur charges nodales $\{A\}$ aura la forme suivante:

$$\{A\} = \{A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}, A_{2k}, \dots, A_{2m+1}, A_{2m+2}\} \quad (6.9)$$

Les éléments de ce vecteur seront connues immédiatement à partir des charges concentrées données sur la poutre.

6.3.3.2\ - Formation de la matrice $[A_{ML}]$ des actions aux extrémités des éléments dues aux charges appliquées directement sur ces éléments:

Considérant un élément type (i) de la poutre continue chargé latéralement sur toute sa longueur comme le montre la figure (fig.6-7.b).



(fig.6-7)

Les actions aux extrémités bloquées de l'élément (i) sont notées comme suit:

- $(A_{ML})_{i,1}$ = la force suivant \vec{oy} à l'extrémité gauche.
- $(A_{ML})_{i,2}$ = le moment suivant \vec{oz} à l'extrémité gauche.
- $(A_{ML})_{i,3}$ = la force suivant \vec{oy} à l'extrémité droite.
- $(A_{ML})_{i,4}$ = le moment suivant \vec{oz} à l'extrémité droite.

En général, le premier indice indique le numéro de l'élément, le second indice indique le numéro de l'action correspondante comme le montre la figure (fig.6-7.b).

Pour l'ensemble des éléments on peut regrouper ces actions dans une matrice notée $[A_{ML}]$ d'ordre $(m*4)$ où (m) est le nombre d'éléments.

$$[A_{ML}] = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} & (A_{ML})_{1,2} & (A_{ML})_{1,3} & (A_{ML})_{1,4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{i,1} & (A_{ML})_{i,2} & (A_{ML})_{i,3} & (A_{ML})_{i,4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{m,1} & (A_{ML})_{m,2} & (A_{ML})_{m,3} & (A_{ML})_{m,4} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Pour le cas d'un élément (i) d'une poutre sur fondation élastique uniformément chargé par une force de densité (q), ces actions sont déjà établies au (chapitre:5), et sont données par les équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} (A_{ML})_{i,1} = (A_{ML})_{i,2} &= -A_1 \cdot \frac{q \cdot l}{.2} \\ (A_{ML})_{i,3} = -(A_{ML})_{i,4} &= -A_2 \cdot \frac{q \cdot l^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Les coefficients d'influences A_1 et A_2 sont donnés par les équations données en (5.20).

* 6.3.3.3 - Formation du vecteur charges nodales équivalentes

$\{A_E\}$:

Le vecteur charges nodales équivalentes peut être construit à partir des éléments de la matrice $[A_{ML}]$. Le processus peut être expliqué en ce referant à la figure(fig.6-7), l'élément choisit dans la partie (b) de la figure contribue avec ces charges équivalentes par l'intermédiaire de ces noeuds extrémités j et k.

Les charges équivalentes en ces noeuds sont représentées sur les figures (fig.6-7.a) et (fig.6-7.c) munies des mêmes indices utilisés pour la numérotation des déplacements possibles (fig.6-2.b).

Cependant la forme générale du vecteur $\{A_E\}$ est la suivante:

$$\{A_E\} = \{(A_E)_{1}, (A_E)_{2}, \dots, (A_E)_{2j-1}, (A_E)_{2j}, \dots, (A_E)_{2m+2}\} \quad (6.12)$$

Les éléments individuels du vecteur $\{A_E\}$ consistent en la contribution de deux éléments adjacents, ces actions ne sont que la somme des valeurs négatives des actions (A_{ML}) concourants au même noeud.

Pour les noeuds (j) et (k), nous pouvons exprimer les charges nodales équivalentes en considérant les trois éléments adjacents (i-1); (i) et (i+1) :

$$\left. \begin{aligned}
 (A_E)_{2j-1} &= (A_E)_{2i-1} = -(A_{ML})_{i-1,3} - (A_{ML})_{i,1} \\
 (A_E)_{2j} &= (A_E)_{2i} = -(A_{ML})_{i-1,4} - (A_{ML})_{i,2} \\
 (A_E)_{2k-1} &= (A_E)_{2i+1} = -(A_{ML})_{i,3} - (A_{ML})_{i+1,1} \\
 (A_E)_{2k} &= (A_E)_{2i+2} = -(A_{ML})_{i,4} - (A_{ML})_{i+1,2}
 \end{aligned} \right\} (6.13)$$

Les éléments $(A_{ML})_{p,q}$, sont déduits de la matrice $[A_{ML}]$.

6.3.3.4 - Formation du vecteur charges nodales combinées $\{A_C\}$:

En additionnant le vecteur charges nodales $\{A\}$ avec le vecteur charges nodales équivalentes $\{A_E\}$, nous obtenons le vecteur des charges nodales combinées noté $\{A_C\}$, donné par l'équation (1.7).

$$\{A_C\} = \{A\} + \{A_E\} \quad (1.7)$$

Ce vecteur peut être réarrangé en respectant le partitionnement effectué pour la matrice de rigidité globale $[S_j]$, de telle sorte que les éléments de la première partie du vecteur $\{A_C\}$ constituent le vecteur charges nodales combinées relatives aux déplacements libres, et la seconde partie du

vecteur $\{A_C\}$ constitue le vecteur $\{-A_{RL}\}$ qui correspond aux charges nodales combinées relatives aux déplacements bloqués, équation (1.9).

$$\{A_C\} = \left[\begin{array}{c} \{A_D\} \\ \dots\dots\dots \\ \{-A_{RL}\} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \{A_D\} \\ \dots\dots\dots \\ \{-A_{RL}\} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \boxed{\text{Déplacements libres}} \\ \dots\dots\dots \\ \boxed{\text{Déplacements bloqués}} \end{array} \quad (1.9)$$

6.3.4\ - Résultats finaux:

6.3.4.1\ - Calcul des déplacements:

Après avoir constitué la matrice de rigidité globale $[S_j]$ et le vecteur charges nodales $\{A_C\}$, nous pouvons déterminer les déplacements des noeuds par une simple résolution du système linéaire donné en (1.1) en utilisant une méthode numérique appropriée (la méthode de GAUSS par exemple).

$$\{A_D\} = [S].\{D\} \quad (1.1)$$

d'où :

$$\{D\} = [S]^{-1}.\{A_D\} \quad (1.2)$$

Les déplacements ainsi calculés peuvent être classés dans le vecteur $\{D_j\}$ correspondant aux déplacements de tous les noeuds de la structure.

Le vecteur $\{D_j\}$ est de dimension $(2n_j * 1)$, et contient les éléments du vecteur $\{D\}$ correspondant aux déplacements libres (inconnus), et les autres éléments du vecteur $\{D_j\}$ correspondent aux déplacements bloqués (connus) de valeurs nulles.

Selon la numérotation choisit (fig.6-2.b) le vecteur $\{D_j\}$ aura la forme suivante:

$$\{D_j\} = \{ (D_j)_1, (D_j)_2, \dots, (D_j)_{2j-1}, (D_j)_{2j}, \dots, (D_j)_{2m+2} \} \quad (6.14)$$

6.3.4.2\ - Calcul des réactions d'appuis:

Les réactions d'appuis seront déterminées en appliquant la méthode de superposition des deux états d'équilibres (structure chargée non déformée et structure déformée non chargée), dans ce cas le vecteur réactions sera obtenu en effectuant l'opération suivante donnée en (1.3):

$$\{A_R\} = \{A_{RL}\} + [S_{RD}].\{D\} \quad (1.3)$$

6.3.4.3\ - Calcul des actions aux extrémités des éléments:

Ces actions seront déterminées en appliquant aussi la méthode de superposition, en répétant autant de fois qu'il'y a d'éléments dans la structure, l'opération donnée en (1.12):

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [Sm]_i.\{D_M\}_i \quad (1.12)$$

Cette opération sera appliquée pour chaque élément de la structure, soit:

$$\begin{Bmatrix} (A_M)_{i,1} \\ (A_M)_{i,2} \\ (A_M)_{i,3} \\ (A_M)_{i,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Sm_{11} & Sm_{12} & Sm_{13} & Sm_{14} \\ Sm_{21} & Sm_{22} & Sm_{23} & Sm_{24} \\ Sm_{31} & Sm_{32} & Sm_{33} & Sm_{34} \\ Sm_{41} & Sm_{42} & Sm_{43} & Sm_{44} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} (D_M)_1 \\ (D_M)_2 \\ (D_M)_3 \\ (D_M)_4 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Le vecteur $\{A_{ML}\}_i$ est obtenu à partir de la ($i^{ème}$) ligne de la matrice $[A_{ML}]$ donnée en (6.10), la matrice $[Sm]_i$ est la matrice de rigidité élémentaire donnée par (mat.5-1), et le vecteur $\{D_M\}_i$ se déduit du vecteur déplacements nodaux $\{D_j\}$ exprimé par (6.14). En général les déplacements $(D_M)_1, (D_M)_2, (D_M)_3, (D_M)_4$ de l'équation (6.15) correspondent aux déplacements $(D_j)_{j1}, (D_j)_{j2}, (D_j)_{k1}, (D_j)_{k2}$ (relatifs à l'élément (i) du vecteur $\{D_j\}$).

On obtient Après substitution les expressions suivantes:

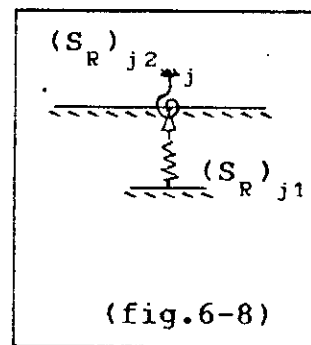
$$\begin{aligned}
 (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{12.EI}{L^3} \left[A_3 \cdot (D_j)_{j1} - A_5 \cdot (D_j)_{k1} \right] + \\
 &+ \frac{6.EI}{L^2} \left[A_4 \cdot (D_j)_{j2} + A_6 \cdot (D_j)_{k2} \right] \\
 (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2} + \frac{6.EI}{L^2} \left[A_4 \cdot (D_j)_{j1} - A_6 \cdot (D_j)_{k1} \right] + \\
 &+ \frac{4.EI}{L} \left[A_7 \cdot (D_j)_{j2} + (A_8/2) \cdot (D_j)_{k2} \right] \\
 (A_M)_{i,3} &= (A_{ML})_{i,3} - \frac{12.EI}{L^3} \left[A_5 \cdot (D_j)_{j1} - A_3 \cdot (D_j)_{k1} \right] - \\
 &- \frac{6.EI}{L^2} \left[A_6 \cdot (D_j)_{j2} + A_4 \cdot (D_j)_{k2} \right] \\
 (A_M)_{i,4} &= (A_{ML})_{i,4} + \frac{6.EI}{L^2} \left[A_6 \cdot (D_j)_{j1} - A_4 \cdot (D_j)_{k1} \right] + \\
 &+ \frac{4.EI}{L} \left[(A_8/2) \cdot (D_j)_{j2} + A_7 \cdot (D_j)_{k2} \right]
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

6.3.5\ - La technique de prise en compte des appuis élastiques:

Il est nécessaire pour prendre en compte l'influence des appuis élastiques, d'ajouter aux termes diagonaux de la matrice de rigidité de la structure la valeur (S_R) correspondante à la raideur de l'appui.

Soit pour le noeud (j) représenté par la figure (fig.6-8)

$$\left. \begin{aligned} (S_j)_{j1,j1} &= (S_j)_{j1,j1} + (S_R)_{j1} \\ (S_j)_{j2,j2} &= (S_j)_{j2,j2} + (S_R)_{j2} \end{aligned} \right\} (6.17)$$



On remarque également que lors de la prise en compte des conditions aux limites, il ne faudra pas supprimer les degrés de liberté liés à l'appui élastique mais bien en calculer les déplacements.

Les réactions aux appuis élastiques seront égales aux actions dans les ressorts élastiques, et peuvent être calculées comme le produit négatif de la constante du ressort, par le déplacement correspondante, soit:

$$A_R = - S_R \cdot D_j \quad (6.18)$$

CHAPITRE VII

ANALYSE D'UNE STRUCTURE EN PORTIQUE PLAN SUR FONDATION ELASTIQUE

**Analyse d'une structure en portique plan
sur fondation élastique**

7.1\ - Introduction:

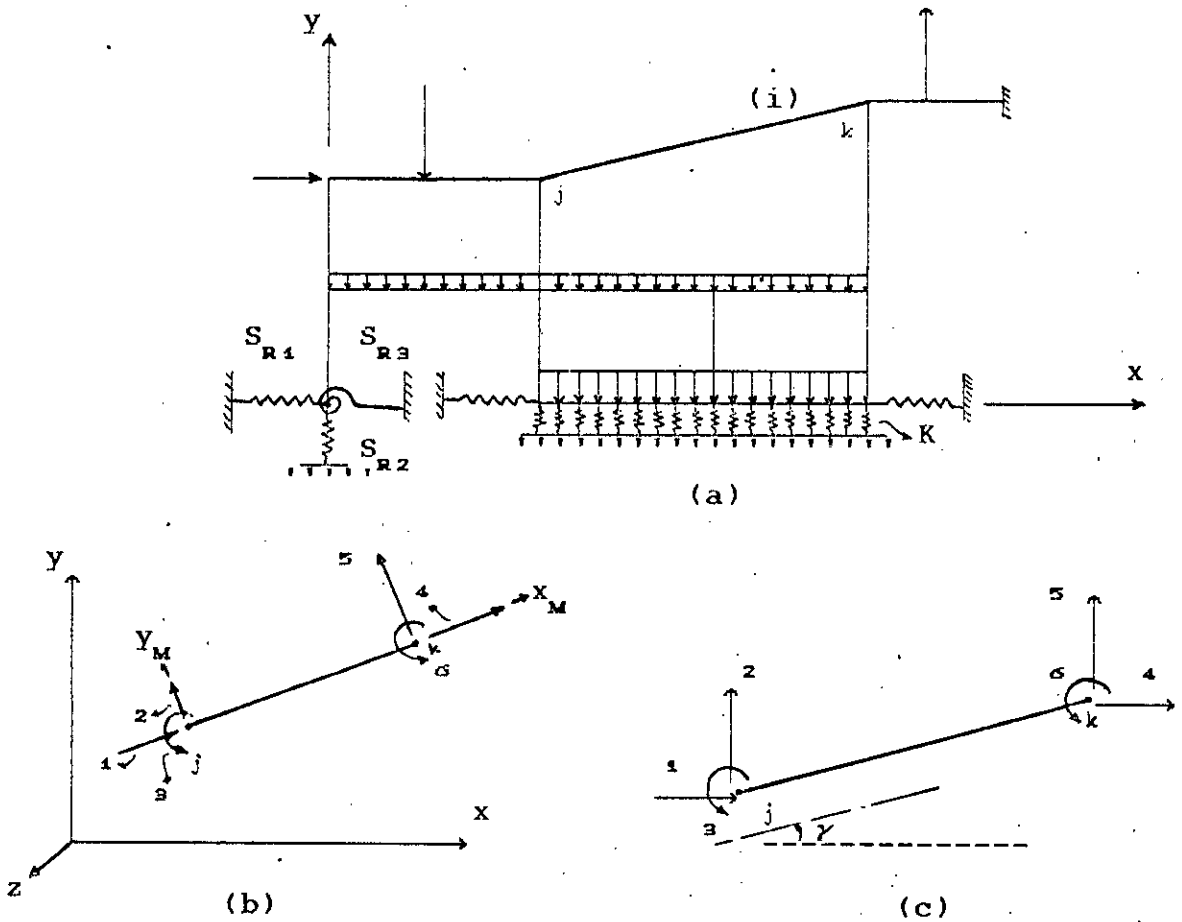
Le but de ce chapitre est d'exposer une méthode pratique, permettant par des calculs simples, de déterminer d'une manière rigoureuse les efforts et les déplacements dans une structure en portique engendrés par des forces verticales et horizontales, tenant compte de l'influence de l'interaction sol-structure.

De tels systèmes sont rencontrés d'une manière courante dans les ossatures d'immeubles, de bâtiments industriels ou de ponts. Les éléments constituant ces systèmes peuvent être des poutres droites ou courbes, de sections constantes ou variables, et les charges auxquelles ils sont soumis peuvent être fixes ou mobiles.

Pour simplifier les raisonnements, on considère que les éléments constituant la structure sont formés de poutres droites encastées les unes sur les autres, de rigidité constantes, et les charges auxquelles ils sont soumis sont fixes.

7.2\ - Etablissement de la matrice de rigidité d'un élément de portique plan, reposant sur une fondation élastique:

On représente sur le schéma de la figure (fig.7-1) un exemple de portique qui fait l'objet de notre étude, et le modèle de supports choisis pour prendre en compte l'influence de l'interaction sol-structure.



(fig.7-1)

Les noeuds extrémités de l'élément type (i) sont notés j et k comme pour le cas d'une poutre continue (fig.7-1.a), les axes de référence sont les axes orthonormés \vec{ox} , \vec{oy} , \vec{oz} , le portique est lié au plan (xoy) supposé comme plan principal de flexion de tous les éléments du portique, les déplacements significatifs des noeuds sont deux translations suivant les axes \vec{ox} et \vec{oy} et une rotation autour de l'axe \vec{oz} .

Les déplacements possibles des noeuds extrêmes j et k d'un élément type (i) par rapport au repère local $\vec{ox}_M, \vec{oy}_M, \vec{oz}_M$ lié à l'élément sont indiqués sur la figure (fig.7-1.b) par les numéros (1,2,...,6).

Ces axes sont tournés d'un angle (γ) par rapport au système d'axes global.

Les six déplacements des extrémités j et k sont supposés orientés positivement, il s'agit des deux translations selon les directions \vec{ox}_M , \vec{oy}_M , et une rotation autour de l'axe \vec{oz}_M (ou \vec{oz})

Les actions aux extrémités j, k de l'élément (i) engendrées par des déplacements unitaires, par rapport au système local, constituent la matrice de rigidité élémentaire $[Sm]_l$, cette matrice est de l'ordre (6 * 6), donnée comme suit:

$$[Sm]_l = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & A_3 \frac{12EI}{L^3} & A_4 \frac{6EI}{L^2} & 0 & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & A_6 \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L} & 0 & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & 0 & A_3 \frac{12EI}{L^3} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & 0 & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_j \\ y_j \\ \theta_j \\ x_k \\ y_k \\ \theta_k \end{matrix} \quad (\text{mat.7-1})$$

Les coefficients d'influences (A_i) sont données par les équations(5.20).

7.2.1\ - transformation de la matrice $[Sm]_l$ du repère local au repère global:

La figure (fig.7-1.c) représente les six déplacements possibles aux extrémités de l'élément (i) dans les directions du système d'axes global (\vec{ox} , \vec{oy} , \vec{oz}).

La transformation de la matrice de rigidité $[Sm]_l$ du repère local au repère global s'effectue moyennant l'opération de transformation suivante:

$$[Sm] = [R_T]^T \cdot [Sm]_l \cdot [R_T] \quad (7.1)$$

où $[R_T]$ est la matrice de transformation donnée par (mat.1-4).

En effectuant cette opération, on obtient comme éléments de la matrice $[Sm]$, les expressions suivantes:

$$[Sm] = \begin{bmatrix} Sm_{11} & Sm_{12} & Sm_{13} & Sm_{14} & Sm_{15} & Sm_{16} \\ Sm_{21} & Sm_{22} & Sm_{23} & Sm_{24} & Sm_{25} & Sm_{26} \\ Sm_{31} & Sm_{32} & Sm_{33} & Sm_{34} & Sm_{35} & Sm_{36} \\ Sm_{41} & Sm_{42} & Sm_{43} & Sm_{44} & Sm_{45} & Sm_{46} \\ Sm_{51} & Sm_{52} & Sm_{53} & Sm_{54} & Sm_{55} & Sm_{56} \\ Sm_{61} & Sm_{62} & Sm_{63} & Sm_{64} & Sm_{65} & Sm_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{mat.7-2})$$

Avec:

$$Sm_{11} = Sm_{44} = \left(\frac{EA}{L} C_x^2 + A_3 \frac{12EI}{L^3} \cdot C_y^2 \right)$$

$$Sm_{12} = Sm_{21} = \left(\frac{EA}{L} - A_3 \frac{12EI}{L^3} \right) \cdot C_x C_y$$

$$Sm_{13} = Sm_{31} = -\left(A_4 \cdot \frac{6EI}{L^2} \cdot C_y \right)$$

$$Sm_{14} = Sm_{41} = -\left(\frac{EA}{L} C_x^2 + A_5 \frac{12EI}{L^3} C_y^2 \right)$$

$$Sm_{15} = Sm_{51} = \left(-\frac{EA}{L} + A_5 \frac{12EI}{L^3} \right) C_x C_y$$

$$Sm_{16} = Sm_{61} = -\left(A_6 \frac{6EI}{L^2} C_y \right)$$

$$Sm_{22} = Sm_{55} = \left(\frac{EA}{L} C_y^2 + A_3 \frac{12EI}{L^3} C_x^2 \right)$$

$$S_{m_{23}} = S_{m_{32}} = \left(A_4 \frac{6EI}{L^2} C_x \right)$$

$$S_{m_{24}} = S_{m_{42}} = \left(-\frac{EA}{L} + A_5 \frac{12EI}{L^3} \right) C_x C_y$$

$$S_{m_{25}} = S_{m_{52}} = -\left(\frac{EA}{L} C_y^2 + A_5 \frac{12EI}{L^3} C_x^2 \right)$$

$$S_{m_{26}} = S_{m_{62}} = \left(A_6 \frac{6EI}{L^2} C_x \right)$$

$$S_{m_{33}} = S_{m_{66}} = \left(A_7 \frac{4EI}{L} \right)$$

$$S_{m_{34}} = S_{m_{43}} = - S_{m_{16}}$$

$$S_{m_{35}} = S_{m_{53}} = - S_{m_{26}}$$

$$S_{m_{36}} = S_{m_{63}} = \left(A_8 \frac{2EI}{L} \right)$$

$$S_{m_{45}} = S_{m_{54}} = S_{m_{12}}$$

$$S_{m_{46}} = S_{m_{64}} = \left(A_4 \frac{6EI}{L^2} C_y \right)$$

$$S_{m_{56}} = S_{m_{65}} = - S_{m_{23}}$$

7.3\ - Système d'indexation:

Dans cette partie, on présente une procédure permettant une analyse complète d'un portique, comme celui de la figure (fig.7-1.a).

Les actions appliquées sur une telle structure sont supposées être des forces dans le plan (xoy), ou des moments dont les vecteurs sont normaux au plan (xoy).

La première tâche à effectuer dans l'Analyse, est la numérotation des éléments et des noeuds choisis dans la structure.

Les noeuds seront numérotés successivement de (1 à n_j), et les éléments seront numérotés de (1 à m). Cette numérotation étant arbitraire à condition que chaque noeud et chaque élément soit numéroté.

Les déformations dues à la flexion et celles dues à l'effort axial seront prises en compte dans l'analyse d'un portique plan. Cependant, trois possibilités de déplacements sont à considérer en chaque noeud de la structure:

- Une translation suivant l'axe ox
- Une translation suivant l'axe oy
- Une rotation autour de l'axe oz

Pour un noeud (j) ces déplacements seront affectés successivement des numéros suivants:

($3j - 2$) : Indice de translation selon la direction ox .

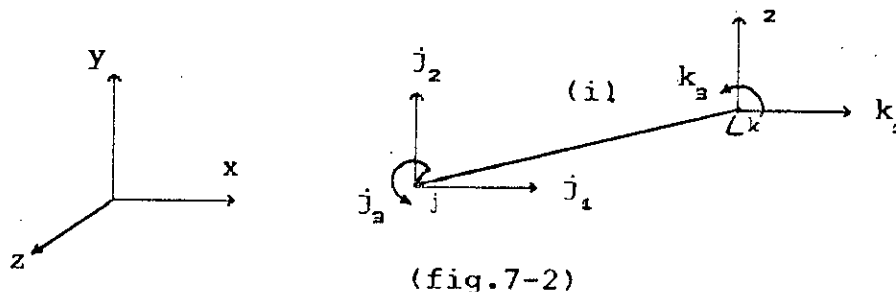
($3j - 1$) : Indice de translation selon la direction oy .

($3j$) : Indice de la rotation par rapport à la direction oz

Le nombre de degrés de libertés (n) dans un portique plan est calculé à partir du nombre des noeuds (n_j) et le nombre de déplacements bloqués (n_r), soit:

$$n = 3n_j - n_r \quad (7.2)$$

Les noeuds extrêmes d'un élément type (i) dans un portique plan sont numérotés (de gauche à droite) par (j) et (k), (fig.7-2)



Les indices des déplacements relatifs aux noeuds j et k sont donnés par les expressions suivantes:

$$\begin{array}{l}
 \text{Noeud: } j \qquad \qquad \qquad \text{Noeud: } k \\
 j_1 = 3j - 2 \qquad ; \qquad k_1 = 3k - 2 \\
 j_2 = 3j - 1 \qquad ; \qquad k_2 = 3k - 1 \\
 j_3 = 3j \qquad \qquad ; \qquad k_3 = 3k
 \end{array} \quad (7.3)$$

7.4\ - **Ordre de calcul:**

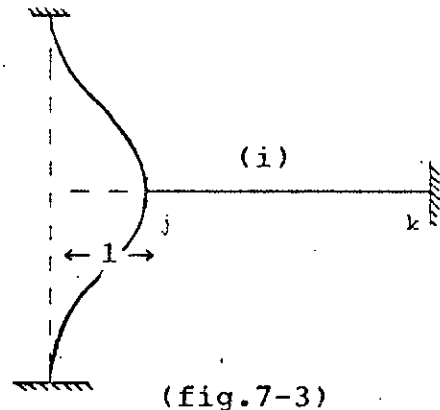
7.4.1\ - **Formation de la matrice de rigidité globale [S_j]:**

La matrice de rigidité élémentaire [S_m] donnée par (mat.7-2) étant établie pour chaque élément (i) de longueur L, de section transversale A, et de rigidité en flexion EI, cet élément contribue aux rigidités des noeuds j et k par les actions à ces extrémités gauche et droite.

Cependant, les termes de la matrice de rigidité [S_m] relatifs à l'élément (i), peuvent être transférés dans la matrice de rigidité globale moyennant un système d'indice approprié.

Par exemple, la première colonne de la matrice [S_m] représentant les actions aux extrémités j et k engendrées par une translation unitaire suivant l'axe (ox) du noeud j (fig.7-3) (indice j₁), peut être transférée dans la matrice [S_j] comme suit:

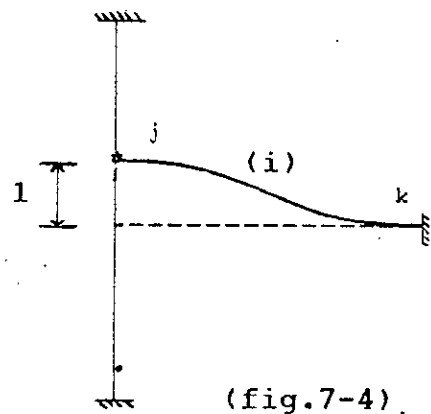
$$\left. \begin{aligned}
 (S_j)_{j_1, j_1} &= \Sigma S_m + (S_{m_{11}})_i \\
 (S_j)_{j_2, j_1} &= \Sigma S_m + (S_{m_{21}})_i \\
 (S_j)_{j_3, j_1} &= \Sigma S_m + (S_{m_{31}})_i \\
 (S_j)_{k_1, j_1} &= (S_{m_{41}})_i \\
 (S_j)_{k_2, j_1} &= (S_{m_{51}})_i \\
 (S_j)_{k_3, j_1} &= (S_{m_{61}})_i
 \end{aligned} \right\} (7.4)$$



Dans les équations (7.4), les trois premiers coefficients de rigidité consistent en la somme des contributions de tous les éléments concourants au noeud (j), avec inclusion de la contribution de l'élément (i), les autres coefficients représentent les contributions de l'élément (i) seulement.

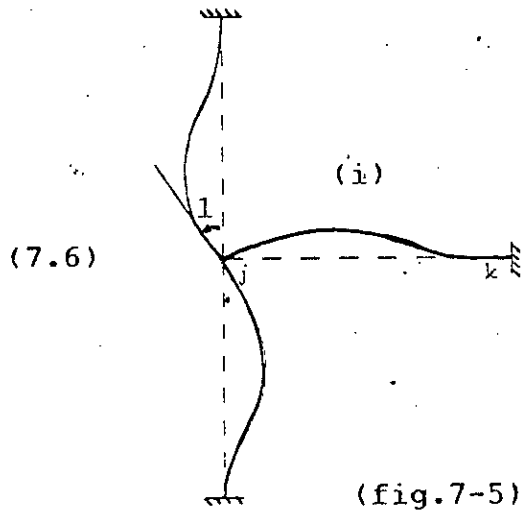
Des expressions similaires peuvent être obtenues pour une translation unitaire suivant l'axe (oy) du noeud (j) (fig.7-4) (indice j_2):

$$\left. \begin{aligned}
 (S_j)_{j_1, j_2} &= \Sigma S_m + (S_{m_{12}})_i \\
 (S_j)_{j_2, j_2} &= \Sigma S_m + (S_{m_{22}})_i \\
 (S_j)_{j_3, j_2} &= \Sigma S_m + (S_{m_{32}})_i \\
 (S_j)_{k_1, j_2} &= (S_{m_{42}})_i \\
 (S_j)_{k_2, j_2} &= (S_{m_{52}})_i \\
 (S_j)_{k_3, j_2} &= (S_{m_{62}})_i
 \end{aligned} \right\} (7.5)$$



De même pour une rotation unitaire par rapport à l'axe (oz) du noeud (j) (fig.7-5) (indice j_3):

$$\left. \begin{aligned}
 (S_j)_{j_1, j_3} &= \Sigma Sm + (Sm_{13})_i \\
 (S_j)_{j_2, j_3} &= \Sigma Sm + (Sm_{23})_i \\
 (S_j)_{j_3, j_3} &= \Sigma Sm + (Sm_{33})_i \\
 (S_j)_{k_1, j_3} &= (Sm_{43})_i \\
 (S_j)_{k_2, j_3} &= (Sm_{53})_i \\
 (S_j)_{k_3, j_3} &= (Sm_{63})_i
 \end{aligned} \right\} (7.6)$$



Les expressions utilisées pour le transfert de la 4^{ème} colonne de la matrice [Sm], dans la matrice [S_j] sont similaires aux équations ci-dessus à l'exception que les trois premiers coefficients consistent en la contribution de l'élément (i) seulement, tandis que les trois derniers représentent les sommes des contributions de tous les éléments concourant au noeud(k).

Alors, pour un déplacement unitaire du noeud (k) suivant la direction (ox), (indice k₁) on obtient:

$$\left. \begin{aligned}
 (S_j)_{j_1, k_1} &= (Sm_{14})_i \\
 (S_j)_{j_2, k_1} &= (Sm_{24})_i \\
 (S_j)_{j_3, k_1} &= (Sm_{34})_i \\
 (S_j)_{k_1, k_1} &= \Sigma Sm + (Sm_{44})_i \\
 (S_j)_{k_2, k_1} &= \Sigma Sm + (Sm_{54})_i \\
 (S_j)_{k_3, k_1} &= \Sigma Sm + (Sm_{64})_i
 \end{aligned} \right\} (7.7)$$

Pour une translation du noeud (k) suivant la direction (oy) (indice k₂), on obtient:

$$\left. \begin{aligned}
 (S_j)_{j_1, k_2} &= (Sm_{15})_i \\
 (S_j)_{j_2, k_2} &= (Sm_{25})_i \\
 (S_j)_{j_3, k_2} &= (Sm_{35})_i \\
 (S_j)_{k_1, k_2} &= \sum Sm + (Sm_{45})_i \\
 (S_j)_{k_2, k_2} &= \sum Sm + (Sm_{55})_i \\
 (S_j)_{k_3, k_2} &= \sum Sm + (Sm_{65})_i
 \end{aligned} \right\} (7.8)$$

La dernière colonne de la matrice [Sm] sera transférée dans la matrice [S_j] en considérant une rotation unitaire du noeud (k) par rapport à l'axe (oz), (indice k₃):

$$\left. \begin{aligned}
 (S_j)_{j_1, k_3} &= (Sm_{16})_i \\
 (S_j)_{j_2, k_3} &= (Sm_{26})_i \\
 (S_j)_{j_3, k_3} &= (Sm_{36})_i \\
 (S_j)_{k_1, k_3} &= \sum Sm + (Sm_{46})_i \\
 (S_j)_{k_2, k_3} &= \sum Sm + (Sm_{56})_i \\
 (S_j)_{k_3, k_3} &= \sum Sm + (Sm_{66})_i
 \end{aligned} \right\} (7.9)$$

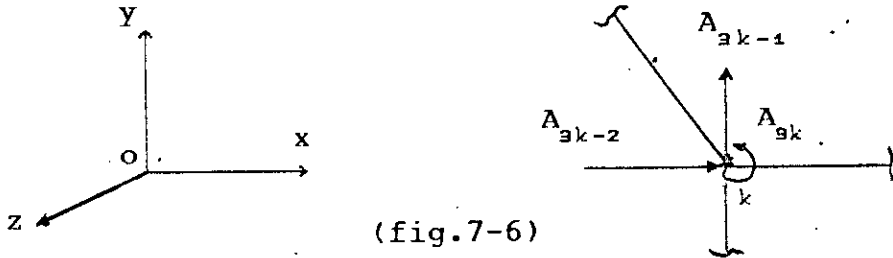
La formation complète de la matrice de rigidité globale [S_j], consiste à transférer les termes des matrices de rigidités élémentaires [Sm]_i pour tous les éléments de la structure (i: varie de 1 à m).

La matrice de rigidité globale sera ensuite réarrangée selon la forme donnée par (mat.1-2), en effectuant un changement approprié de indices. (voir l'algorithme donné à la fin du chapitre).

7.4.2\ - Formation des vecteurs charges:

7.4.2.1\ - Formation du vecteur charges nodales {A}:

Les actions extérieures appliquées directement sur les noeuds, seront affectées des indices utilisés pour la numérotation des déplacements possibles pour un noeud, et classées dans un vecteur noté {A}, soit pour un noeud k. (fig.7-6)



(fig.7-6)

Le vecteur {A}, peut se mettre sous la forme suivante:

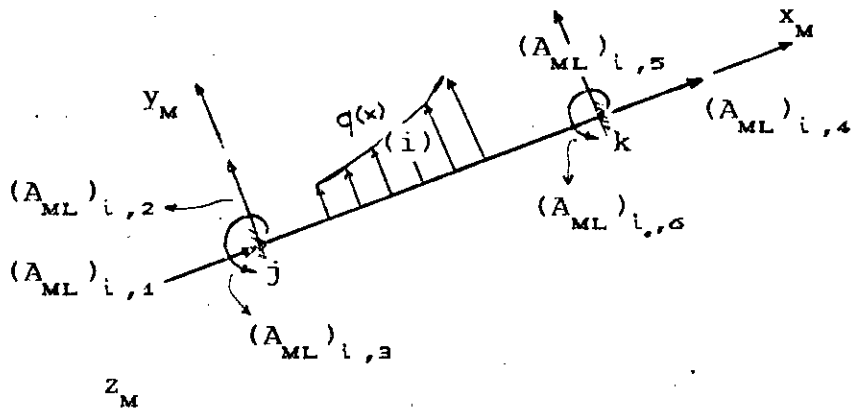
$$\{A\} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{3k-2}, A_{3k-1}, A_{3k}, \dots, A_{3n_j-2}, A_{3n_j-1}, A_{3n_j}\} \quad (7.10)$$

7.4.2.2\ - Les vecteurs des actions aux extrémités bloquées des éléments dues aux charges:

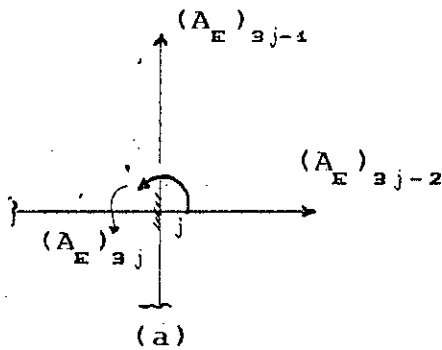
Les actions aux extrémités bloquées d'un élément (i) dues aux charges appliquées le long de cet élément, peuvent être obtenues aisément connaissant la fonction de charge $q(x)$, en appliquant les équations, de la ligne déformée $y(x)$, du moment fléchissant $M(x)$ et de l'effort tranchant $Q(x)$, données au chapitre (5).

Ces actions sont calculées par rapport au système d'axes local (x_M, y_M, z_M) (fig.7-7.b) et sont notées:

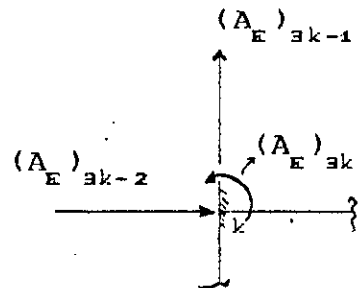
- $(A_{ML})_{i,1}$ = Action (force) suivant l'axe (ox'_M) à l'extrémité (j)
- $(A_{ML})_{i,2}$ = Action (force) suivant l'axe (oy_M) à l'extrémité (j)
- $(A_{ML})_{i,3}$ = Action (moment) suivant l'axe (oz_M) à l'extrémité (j)
- $(A_{ML})_{i,4}$ = Action (force) suivant l'axe (ox_M) à l'extrémité (k)
- $(A_{ML})_{i,5}$ = Action (force) suivant l'axe (oy_M) à l'extrémité (k)
- $(A_{ML})_{i,6}$ = Action (moment) suivant l'axe (oz_M) à l'extrémité (k)



(b)



(a)



(c)

(fig.7-7)

Nous pouvons rassembler les vecteurs actions $\{A_{ML}\}_i$ des éléments constituant la structure, dans une matrice d'ordre $(m * 6)$ notée $[A_{ML}]$, dont les lignes représentent les éléments du vecteur $\{A_{ML}\}_i$ (avec $i=1, \dots, m$), soit:

$$[A_{ML}] = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} & (A_{ML})_{1,2} & (A_{ML})_{1,3} & (A_{ML})_{1,4} & (A_{ML})_{1,5} & (A_{ML})_{1,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{i,1} & (A_{ML})_{i,2} & (A_{ML})_{i,3} & (A_{ML})_{i,4} & (A_{ML})_{i,5} & (A_{ML})_{i,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{m,1} & (A_{ML})_{m,2} & (A_{ML})_{m,3} & (A_{ML})_{m,4} & (A_{ML})_{m,5} & (A_{ML})_{m,6} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

7.4.2.3 - Formation du vecteur charges nodales équivalentes, $\{A_E\}$:

Le vecteur charges nodales équivalentes doit être exprimé dans le système d'axes global (x,y,z). Cependant, les vecteurs des actions aux extrémités bloquées des éléments $\{A_{ML}\}_i$ seront transformés des repères locaux au repère global, en utilisant la matrice de transformation $[R_T]_i$ relative à chaque élément. L'opération réalisant cette transformation est comme suit:

$$[R_T]_i^T \cdot \{A_{ML}\}_i = \begin{bmatrix} C_{xi} & -C_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{yi} & C_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{xi} & -C_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{yi} & C_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \\ (A_{ML})_{i,5} \\ (A_{ML})_{i,6} \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

Les figures (fig.7-7.a) et (fig.7-7.c) représentent les charges équivalentes aux extrémités (j) et (k) résultantes de la contribution de l'élément (i), et dont les valeurs sont obtenues par l'opération (7.12).

Le signe inverse des résultats obtenus par (7.12), représentent les incréments des charges nodales, résultants de la contribution de l'élément (i), soit:

$$\left. \begin{aligned}
 (A_E)_{3j-2} &= \Sigma (A_{ML}) - (A_{ML})_{i,1} * C_{xi} + (A_{ML})_{i,2} * C_{yi} \\
 (A_E)_{3j-1} &= \Sigma (A_{ML}) - (A_{ML})_{i,1} * C_{yi} - (A_{ML})_{i,2} * C_{xi} \\
 (A_E)_{3j} &= \Sigma (A_{ML}) - (A_{ML})_{i,3} \\
 (A_E)_{3k-2} &= \Sigma (A_{ML}) - (A_{ML})_{i,4} * C_{xi} + (A_{ML})_{i,5} * C_{yi} \\
 (A_E)_{3k-1} &= \Sigma (A_{ML}) - (A_{ML})_{i,4} * C_{yi} - (A_{ML})_{i,5} * C_{xi} \\
 (A_E)_{3k} &= \Sigma (A_{ML}) - (A_{ML})_{i,6}
 \end{aligned} \right\} (7.13)$$

7.4.2.4 - Formation du vecteur charges nodales combinées $\{A_C\}$:

En additionnant le vecteur charges nodales $\{A\}$, donné par (7.10), et le vecteur charges nodales équivalentes $\{A_E\}$ résultants de (7.13), on obtient le vecteur des charges nodales résultantes ou combinées, noté $\{A_C\}$, soit:

$$\{A_C\} = \{A\} + \{A_E\} \quad (7.14)$$

Le vecteur résultant $\{A_C\}$, sera réarrangé par la suite conformément au partitionnement de la matrice de rigidité globale $[S_j]$, soit:

$$\{A_C\} = \left\{ \begin{array}{c} \{A_D\} \\ \dots\dots\dots \\ -\{A_{RL}\} \end{array} \right\} \quad (7.15)$$

7.4.3 - Calcul des déplacements et des réactions d'appuis:

Après avoir établis et partitionner la matrice de rigidité globale $[S_j]$, et le vecteur charges nodales combinées $\{A_C\}$, conformément aux formes données par (mat.1-2), et (7.15), on aura à résoudre le système suivant:

$$[S_j] \cdot \{D\} = \{A_C\} + \{A_R\} \quad (7.16.a)$$

Soit:

$$\begin{bmatrix} [S] & [S_{DR}] \\ [S_{RD}] & [S_{RR}] \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \{D\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{A_D\} \\ -\{A_{RL}\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{A_R\} \end{Bmatrix} \quad (7.16.b)$$

Les déplacements seront calculés en résolvant le système:

$$[S].\{D\} = \{A_D\} \longrightarrow \{D\} = ? \quad (7.17)$$

Les réactions d'appuis seront calculées, en utilisant la méthode de superposition des états d'équilibres (structure chargée non déformée, et structure déformée non chargée), soit:

$$\{A_R\} = \{A_{RL}\} + [S_{RD}].\{D\} \quad (7.18)$$

7.4.4 - Calcul des actions aux extrémités des éléments:

Les actions aux extrémités des éléments peuvent être calculées en utilisant aussi la méthode de superposition, cette fois appliquée pour chaque élément indépendamment des autres, ce qui peut se traduire par l'équation suivante:

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [Sm]_i.\{D_M\}_i \quad (7.19)$$

Le vecteur déplacement $\{D_M\}_i$ dans l'équation (7.19) est exprimé dans le système d'axes local lié à l'élément étudié, il peut être déduit à partir du vecteur déplacement $\{D_j\}$ de tous les noeuds de la structure, qui est exprimé dans le système d'axes global.

En utilisant la transformation des axes on obtient:

$$\{D_M\}_i = [R_T]_i . \{D_j\}_i \quad (7.20)$$

d'où:

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [Sm]_i . [R_T]_i . \{D_j\}_i \quad (7.21)$$

Avec:

$[R_T]_i$ est la matrice de rotation relative à l'élément (i).

$\{A_{ML}\}_i$ se lit à partir de la ligne (i) de la matrice donnée en (7.11).

$\{D_j\}_i$ sont les éléments successifs du vecteur $\{D_j\}$ relatifs aux déplacements des noeuds extrêmes de l'élément (i).

$\{Sm\}_i$ est la matrice de rigidité local relative à l'élément (i), donné par (mat.7-1).

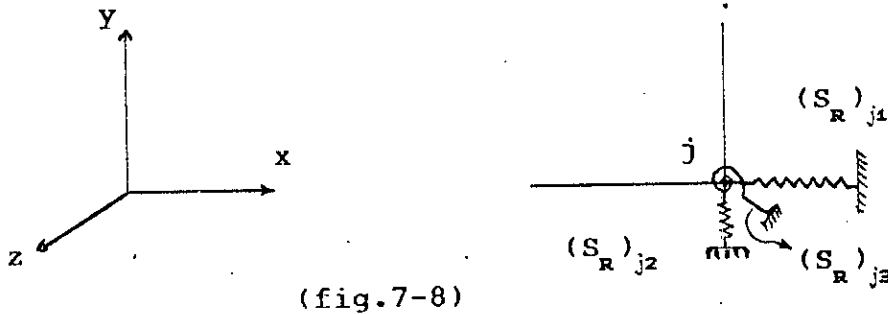
Après substitution des vecteurs actions et déplacements ainsi que la matrice de rigidité, relatifs à l'élément (i), on obtient les expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned}
 (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{EA}{L} \left\{ \left[D(j_1) - D(k_1) \right] \cdot C_{xi} + \left[D(j_2) - D(k_2) \right] \cdot C_{yi} \right\} \\
 (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2} + \frac{12EI}{L^3} \left\{ \left[-A_3 D(j_1) + A_5 D(k_1) \right] \cdot C_{yi} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[A_3 D(j_2) - A_5 D(k_2) \right] \cdot C_{xi} \right\} + \frac{6EI}{L^2} \left[A_4 D(j_3) + A_6 D(k_3) \right] \\
 (A_M)_{i,3} &= (A_{ML})_{i,3} + \frac{6EI}{L^2} \left\{ \left[-A_4 D(j_1) + A_6 D(k_1) \right] \cdot C_{yi} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[A_4 D(j_2) - A_6 D(k_2) \right] \cdot C_{xi} \right\} + \frac{4EI}{L} \left[A_7 D(j_3) + \frac{A_8}{2} D(k_3) \right] \\
 (A_M)_{i,4} &= (A_{ML})_{i,4} + \frac{EA}{L} \left\{ \left[-D(j_1) + D(k_1) \right] \cdot C_{xi} + \left[-D(j_2) + D(k_2) \right] \cdot C_{yi} \right\} \\
 (A_M)_{i,5} &= (A_{ML})_{i,5} + \frac{12EI}{L^3} \left\{ \left[A_5 D(j_1) - A_3 D(k_1) \right] \cdot C_{yi} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-A_5 D(j_2) + A_3 D(k_2) \right] \cdot C_{xi} \right\} - \frac{6EI}{L^2} \left[A_6 D(j_3) + A_4 D(k_3) \right] \\
 (A_M)_{i,6} &= (A_{ML})_{i,6} + \frac{6EI}{L^2} \left\{ \left[-A_6 D(j_1) + A_4 D(k_1) \right] \cdot C_{yi} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[A_6 D(j_2) - A_4 D(k_2) \right] \cdot C_{xi} \right\} + \frac{4EI}{L} \left[\frac{A_8}{2} D(j_3) + A_7 D(k_3) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Les indices $j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3$, sont les indices des déplacements relatifs aux noeuds (j) et (k) de l'élément (i).

7.4.5 - La technique de prise en compte des appuis élastiques:

Supposons qu'un noeud (j) du portique à étudier, est élastiquement encastré dans le sol. Cet encastrement peut être modélisé par un système de trois ressorts élastiques, dont les raideurs par rapport aux trois directions (x, y, z) sont respectivement $(S_R)_{j1}$, $(S_R)_{j2}$, $(S_R)_{j3}$, conformément à la figure (fig.7-8).



La matrice de rigidité globale $[S_j]$, sera dans ce cas modifiée à cause de la présence des supports élastiques. Seulement les termes diagonaux de la matrice $[S_j]$ subissent cette modification, en leurs ajoutants les raideurs des supports élastiques correspondants aux degrés de liberté, soit pour le noeud (j) de la figure (fig.7-8), on affecté aux termes diagonaux correspondant aux degrés de liberté du noeud (j), les rigidités suivantes:

$$\left. \begin{aligned} S_j(j_1, j_1) &= S_j(j_1, j_1) + (S_R)_{j1} \\ S_j(j_2, j_2) &= S_j(j_2, j_2) + (S_R)_{j2} \\ S_j(j_3, j_3) &= S_j(j_3, j_3) + (S_R)_{j3} \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Les déplacements et les réactions d'appuis se calculent en utilisant la même méthode que précédemment à l'exception de remplacer la matrice de rigidité $[S_j]$ par la matrice de rigidité à termes diagonaux modifiés.

Les réactions dans les supports élastiques se calculent en multipliant la raideur du ressort par le déplacement lui correspondant affecté d'un signe négatif, soit:

$$\left. \begin{aligned} A_{Rj}(j_1) &= - (S_R)_{j_1} \cdot D(j_1) \\ A_{Rj}(j_2) &= - (S_R)_{j_2} \cdot D(j_2) \\ A_{Rj}(j_3) &= - (S_R)_{j_3} \cdot D(j_3) \end{aligned} \right\} (7.24)$$

7.5\ - Etude de la stabilité élastique:

7.5.1\ - Présentation:

Lorsque, les efforts normaux de compression dans certaines poutres de la structure sont importants, il peut être nécessaire de vérifier si la structure est élastiquement stable.

Proposons nous d'étudier la stabilité élastique d'une structure à plan moyen, composée de poutres droites de section constante, sollicitée par un système de forces appliquées aux solides liés aux noeuds de la structure. Pour cela nous devons tenir compte de l'influence de l'effort normal sur la rigidité à la flexion d'une poutre:

- * Un effort de compression diminue la rigidité à la flexion.
- * Un effort de traction augmente la rigidité à la flexion.

La matrice de rigidité d'un élément de poutre libre ou reposant sur une fondation élastique tenant compte de l'influence de l'effort normal, est déjà établie (chap.5) en fonction des coefficients d'influences ($A_i; i = 3, \dots, 8$).

7.5.2\ - Calcul par approximation successives:

Supposons l'état de sollicitation de la structure défini par une matrice colonne $[A]$.

Pour calculer les matrices de rigidité des poutres de la structure il faut connaître les efforts normaux dans ces poutres. Il faut donc procéder par approximations successives.

Dans un premier calcul, on néglige l'influence des efforts normaux sur les matrices de rigidité des poutres; on détermine ainsi l'état de déplacement $\{D\}^1$ de la structure et les efforts normaux $\{N\}^1$ dans les poutres. Ces efforts normaux $\{N\}^1$ permettent de recalculer les matrices de rigidité des poutres; un second calcul donne l'état de déplacement $\{D\}^2$ et les efforts normaux $\{N\}^2$.

Un troisième calcul, prenant en compte les efforts normaux $\{N\}^2$ pour évaluer les matrices de rigidité des poutres, donne l'état de déplacement $\{D\}^3$ et les efforts normaux $\{N\}^3$, et ainsi de suite.

Si la suite des états de déplacement $\{D\}^1, \{D\}^2, \{D\}^3..$ tend vers un état de déplacement limite fini, la structure est élastiquement stable, s'il n'en est pas ainsi, la structure s'effondrera brusquement par instabilité élastique.

CONCLUSION :

* La méthode de calcul qu'on vient d'établir est une méthode générale pour l'analyse et l'étude de la stabilité élastique des structures qui peut s'appliquer:

1°\ - A l'analyse des structures ordinaires.

($K = 0$ et $N = 0$).

2°\ - A l'analyse des structures reposant sur des fondations élastiques (interaction statique sol-structure).

($K \neq 0$ et $N = 0$).

3°\ - A l'étude de la stabilité élastique des structures ordinaires.

($K = 0$ et $N \neq 0$).

4°\ - A l'étude de la stabilité élastique des structures reposants sur des fondations élastiques (interaction statique sol-structure).

($K \neq 0$ et $N \neq 0$).

* Le programme de calcul que nous avons élaboré, met en évidence les quatre cas mentionnés ci-dessus. On a exclu de ce programme la possibilité d'avoir des tassements différentiels (déplacements relatifs d'appuis) ce qui nous évitera de générer une partie de la matrice de rigidité.

ALGORITHME

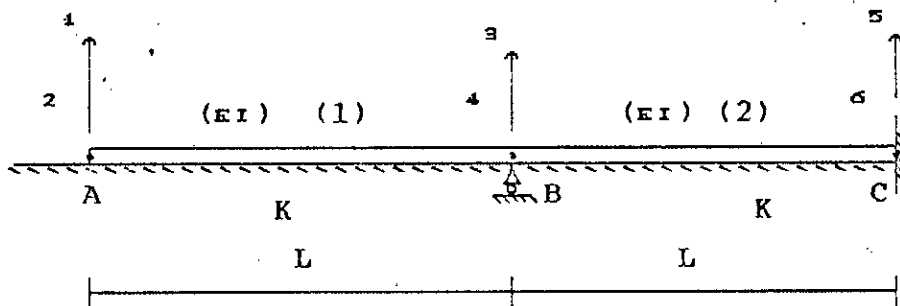
ALGORITHME

Formation de la matrice de rigidité de la structure

1°\ - La matrice de rigidité de la structure est composée des matrices de rigidité de chaque élément. La méthode de déformation conduisant à calculer les déplacements de chaque noeud, il importe, dans la matrice de rigidité, de séparer les termes relatifs aux appuis.

Nous allons exposer un algorithme permettant d'assembler directement la matrice de rigidité en fonction des degrés de liberté de la structure.

* Considérons l'exemple de la poutre suivante:



(fig.1)

Nous allons décrire les degrés de liberté de la structure à l'aide d'un tableau noté $\{RL\}$, soit:

$\{RL\} =$	0	.Noeud A libre en déplacement vertical (suivant oy).
	0	.Noeud A libre en rotation (suivant oz).
	1	.Noeud B bloqué en déplacement vertical (suivant oy).
	0	.Noeud B libre en rotation (suivant oz).
	1	.Noeud C bloqué en déplacement vertical (suivant oy).
	1	.Noeud C bloqué en rotation (suivant oz).

Considérant le tableau {CRL} déduit du tableau {RL} par cumul des composants:

{CRL} =	0	Soit n le nombre de degrés de liberté de la
	0	structure, ici: $n = 2n_j - n_r = 6 - 3 = 3$.
	1	
	1	Ce tableau {CRL} va nous servir à modifier la
	2	la numérotation des degrés de liberté.
	3	

Les degrés de liberté sont initialement numérotés dans l'ordre naturel indiqué sur la figure (fig.1) , soit:

$$\{J\} = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\}.$$

Nous allons modifier ce tableau de la façon suivante:

Pour $i = 1$, pas de 1 jusqu'à 6, faire:
 si $RL(i) = 0$, alors $J(i) = J(i) - CRL(i)$
 si non $J(i) = n + CRL(i)$

Cette instruction examine les éléments du tableau {J} les uns après les autres, et les modifie de façon telle que les numéros correspondants aux appuis soient placés à la fin du tableau, et dans l'ordre où ils apparaissent.

En fait, cette modification ne sera pas effectuée globalement, mais pas à pas, au fur et à mesure de l'examen de chaque élément.

Soit (j) et (k) les numéros qui définissent l'élément (i).

* Dans le cas d'une poutre continue, les nombres définissant les degrés de liberté sont reliés au numéro de l'élément (i) par:

$$\begin{aligned} \text{Noeud (j)} & \begin{cases} (j_1) = 2i-1 \dots \text{Déplacement vertical du noeud (j)}. \\ (j_2) = 2i \dots \text{Rotation du noeud (j)}. \end{cases} \\ \text{Noeud (k)} & \begin{cases} (k_1) = 2i+1 \dots \text{Déplacement vertical du noeud (k)}. \\ (k_2) = 2i+2 \dots \text{rotation du noeud (k)}. \end{cases} \end{aligned}$$

2°\ - APPLICATION:

Pour l'exemple de la poutre de la figure (fig.1) nous avons:

$$\{RL\} = \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1\}$$

$$\{CRL\} = \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$$

Le nombre des degrés de liberté ($n = 3$).

1^{er} élément:

Avant modification	Après modification
$(j_1) = 1$	$(j_1) = 1$
$(j_2) = 2$	$(j_2) = 2$
$(k_1) = 3$	$(k_1) = 4$
$(k_2) = 4$	$(k_2) = 3$

2^{ème} élément:

Avant modification	Après modification
$(j_1) = 3$	$(j_1) = 4$
$(j_2) = 4$	$(j_2) = 3$
$(k_1) = 5$	$(k_1) = 5$
$(k_2) = 6$	$(k_2) = 6$

La matrice de rigidité de la poutre avant réarrangement est de la forme suivante:

$$[S_j] = \begin{bmatrix} A_3 \frac{12EI}{L^3} & A_4 \frac{6EI}{L^2} & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & A_6 \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 1 \\ A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L} & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 2 \\ -A_5 \frac{12EI}{L^3} & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_3 \frac{24EI}{L^3} & 0 & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & A_6 \frac{6EI}{L^2} & 3 \\ A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & 0 & A_7 \frac{8EI}{L} & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & 4 \\ 0 & 0 & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & -A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_3 \frac{12EI}{L^3} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & 5 \\ 0 & 0 & A_6 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L} & 6 \end{bmatrix}$$

Après modification des numéros des degrés de liberté cette matrice se met sous la forme suivante:

$$[S_j] = \begin{bmatrix} A_3 \frac{12EI}{L^3} & A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_5 \frac{6EI}{L^2} & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 1 \\ A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L} & A_8 \frac{2EI}{L} & -A_5 \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 2 \\ A_5 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & A_7 \frac{8EI}{L} & 0 & -A_5 \frac{6EI}{L^2} & A_8 \frac{2EI}{L} & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_5 \frac{12EI}{L^3} & -A_5 \frac{6EI}{L^2} & 0 & A_7 \frac{24EI}{L^3} & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & A_5 \frac{6EI}{L^2} & 3 \\ 0 & 0 & -A_5 \frac{6EI}{L^2} & -A_5 \frac{12EI}{L^3} & A_3 \frac{12EI}{L^3} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & 5 \\ 0 & 0 & A_8 \frac{2EI}{L} & A_5 \frac{6EI}{L^2} & -A_4 \frac{6EI}{L^2} & A_7 \frac{4EI}{L} & 6 \end{bmatrix}$$

En fait, seule les colonnes de (1 à n) de la matrice $[S_j]$ modifiée sont utilisées dans les calculs.

3° - Cas d'un portique:

Pour former La matrice de rigidité d'un portique, nous procéderons de manière identique avec toutefois les deux modifications suivantes:

- * Introduction d'un degré de liberté supplémentaire par noeud.
- * Introduction de deux tableaux donnant le numéro du noeud origine et le numéro du noeud extrémité de chaque élément. Les nombres (j) , (k) , (j_1) , (j_2) , ..., deviennent des variables indicées, soit:

$j = jj(i)$: Indice de l'extrémité gauche de l'élément (i)
 $k = jk(i)$: Indice de l'extrémité droite de l'élément (i)

$(j_1) = 3jj(i) - 2$...Déplacement suivant (ox) du noeud (j)

$(j_2) = 3jj(i) - 1$...Déplacement suivant (oy) du noeud (j)

$(j_3) = 3jj(i)$ Rotation par rapport à (oz) du noeud(j)

$(k_1) = 3jk(i) - 2$...Déplacement suivant (ox) du noeud (k)

$(k_2) = 3jk(i) - 1$...Déplacement suivant (oy) du noeud (k)

$(k_3) = 3jk(i)$...Rotation par rapport à (oz) du noeud(k)

Conclusion:

La matrice de rigidité d'une structure est de l'ordre $(2n_j \times 2n_j)$ pour une poutre, et $(3n_j \times 3n_j)$ pour un portique plan, où n_j est le nombre de noeuds de la structure. On conçoit que la numérotation des noeuds conditionne la forme de cette matrice.

Il est particulièrement intéressant d'avoir une matrice bande aussi étroite que possible, pour ne pas avoir à stocker en mémoire un grand nombre de zéros. On aura donc intérêt à rechercher une numérotation telle que le maximum, pour l'ensemble des éléments de la structure, de la différence en valeur absolue entre l'indice du noeud origine et l'indice du noeud extrémité, soit le plus petit possible. Comme ça la résolution du système linéaire (en pratique, on n'inverse jamais une matrice) doit être rapide et précise, (la méthode de CHOLESKY est souvent utilisée).

PRESENTATION DU
PROGRAMME

PRÉSENTATION DES PROGRAMMES "POUTRE" ET "PORTIQUE"

Le problème général d'analyse des structures tenant compte de l'interaction de celles-ci avec le sol, constitue une tâche numérique relativement lourde, notamment lorsque la configuration de la construction et la structure du sol sont complexes.

Les suppositions simplificatrices que nous avons optées lors de notre étude à savoir le comportement linéaire du sol de fondation, et l'absence des tassements différentiels, rendent l'architecture des deux programmes simples et souples aux extensions possibles.

Les deux programmes sont transcrits en langage FORTRAN 77 et développés sur micro Olivetti M290, l'architecture des deux programmes est organisée en (10) modules distincts, à savoir le programme principal et (9) sous-programmes qui sont:

* Subroutine "DATSTR": Ce module permet de lire et écrire les données nécessaires relatives à la structure et au sol.

* Subroutine "CODAPP": Ce module permet de lire et écrire les codes des appuis et la création des tableaux RL et CRL (RL cumulé).

RL() = 0 ...si la direction est libre au déplacement.

RL() = 1 ...si la direction est bloquée.

* Subroutine "ASSMAT": Ce module permet le calcul des éléments de la matrice élémentaire relative à chaque membre de la structure, ensuite le transfert de ces éléments dans la matrice globale [S_j] (Voir Algorithme).

* Subroutine "DATLOA": Il permet la lecture des charges nodales et l'évaluation des actions aux extrémités des éléments, dues aux charges appliquées sur les éléments, et création du vecteur charge {A} et la matrice charge [AML].

* Subroutine "EQJOLO": Il permet la création du vecteur charges nodales équivalentes {AE} à partir des éléments de la matrice charge [AML].

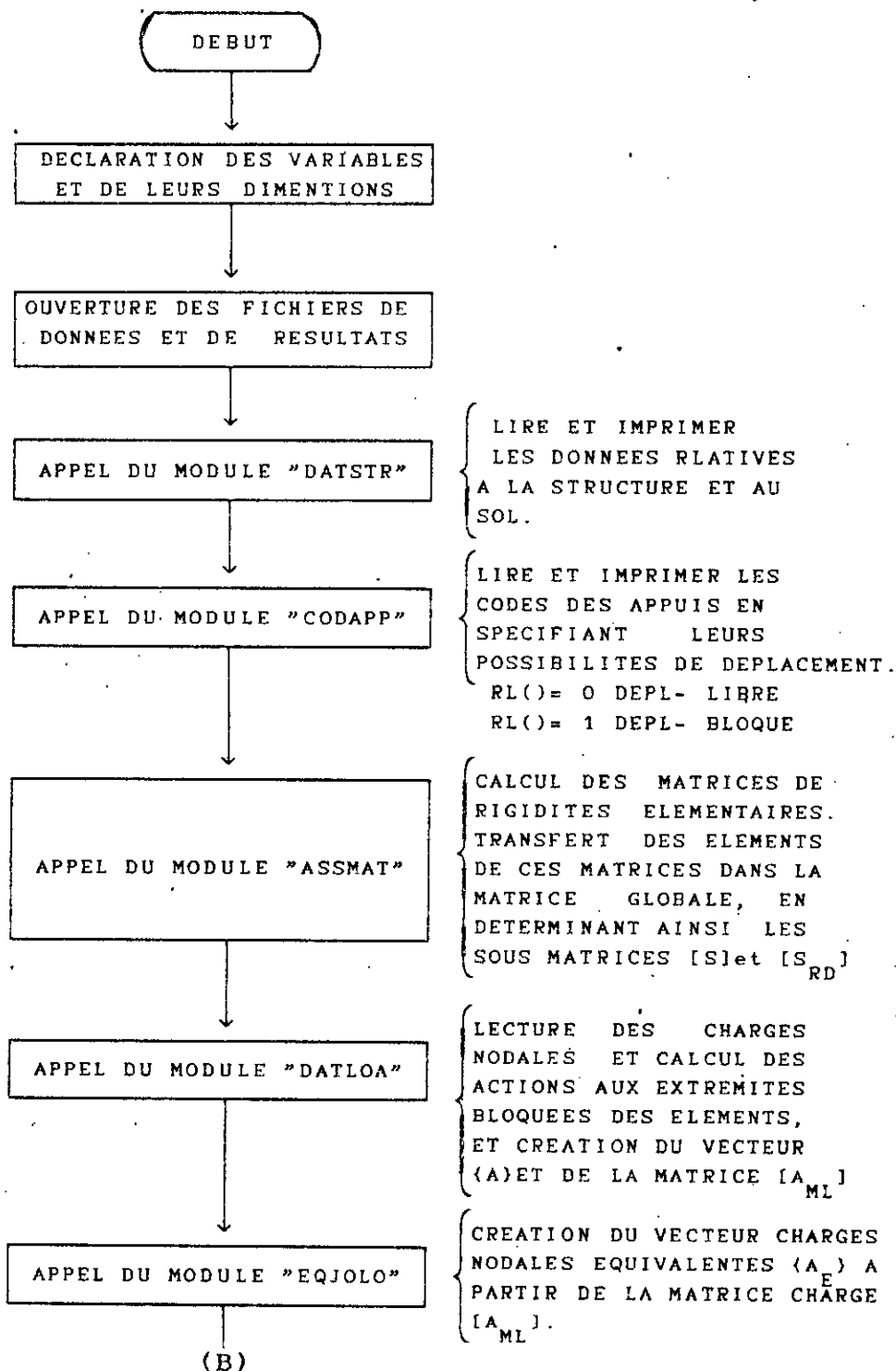
* Subroutine "COJOLO": Ce module permet l'évaluation des éléments du vecteur charges nodales combinées {Ac} à partir des vecteurs {A} et {AE}.

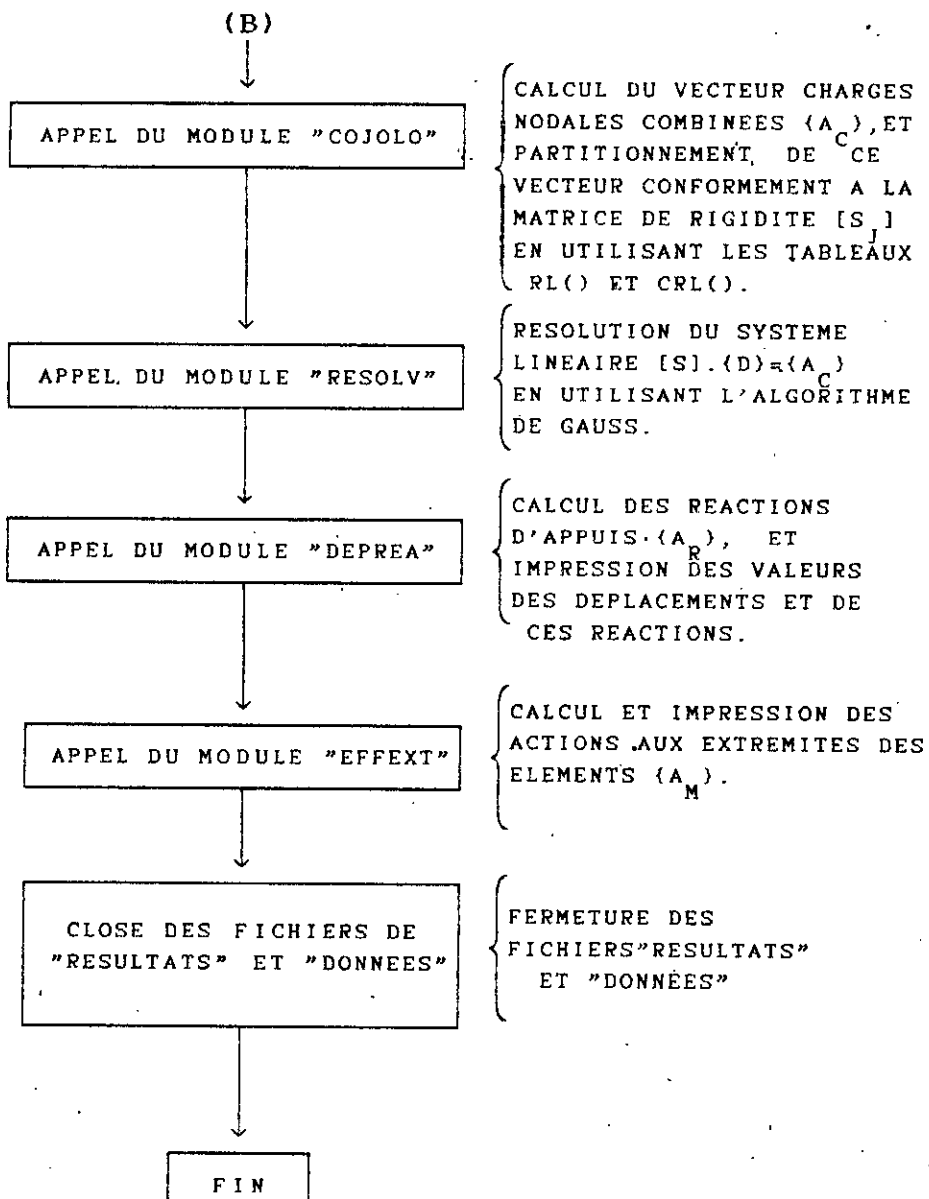
* Subroutine "RESOLV": Ce module permet la résolution du système linéaire $[S]*\{D\}=\{Ac\}$ en utilisant une méthode numérique appropriée (L'algorithme de Gauss est utilisé dans notre programme).

* Subroutine "DEPREA": Ce module permet le calcul des réactions d'appuis et l'impression des valeurs des déplacements et de ces réactions.

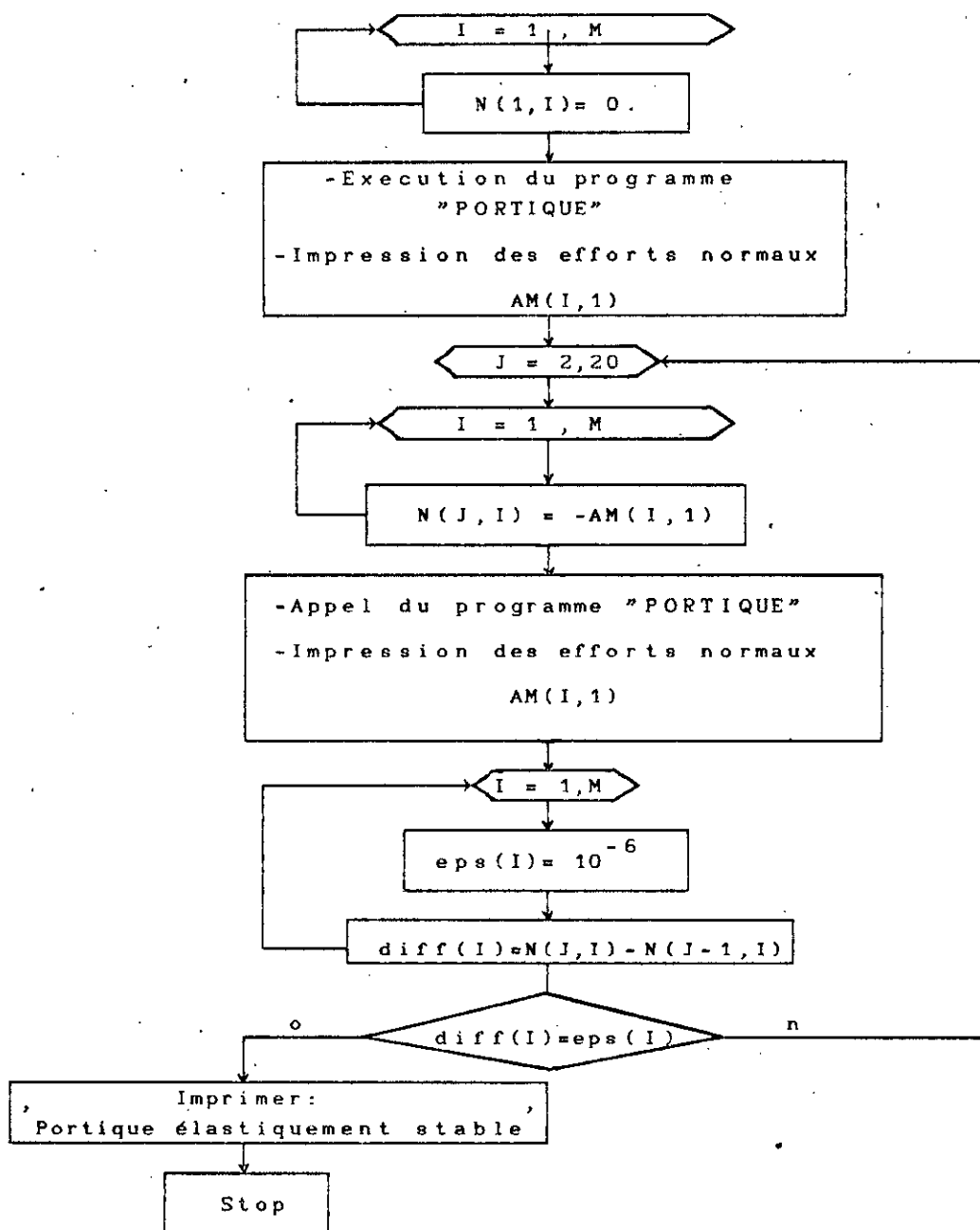
* Subroutine "EFFEXT": IL permet le calcul et l'impression des valeurs des actions aux extrémités des éléments.

STRUCTURE DU PROGRAMME POUTRE ET PORTIQUE





ETUDE DE LA STABILITE ELASTIQUE



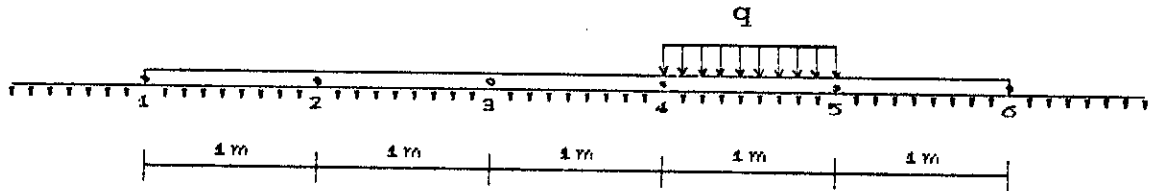
APPLICATIONS

EXEMPLES

I- EXEMPLES "POUTRES"

Exemple.I.1 : une poutre partiellement chargée

Données : $EI = 45000. \text{ KN.m}^2$ $L = 5. \text{ m}$
 $K = 10^6 \text{ KN / m}^2$ $q = 1. \text{ KN / ml}$



Résultats:

1- Déplacements nodaux :

Noeud	Y.deplac (m)	Z.deplac (rad)
1	-0.6690E-08	0.3014E-07
2	0.2403E-07	0.2672E-07
3	-0.2571E-07	-0.2067E-06
4	-0.5051E-06	-0.6168E-06
5	-0.5175E-06	0.6260E-06
6	0.1580E-06	0.6508E-06

2- Les actions aux extrémités des éléments :

Elément	AM1 (KN)	AM2 (KN.m)	AM3 (KN)	AM4 (KN.m)
1	0.0000	0.0000	0.0087	-0.0018
2	-0.0087	0.0018	0.0266	-0.0229
3	-0.0266	0.0229	-0.1981	0.0219
4	0.1981	-0.0219	0.1764	0.0315
5	-0.1764	-0.0315	0.0000	0.0000

Pour une poutre partiellement chargée. Une solution sous forme d'une série trigonométrique infinie a été proposée par Hetenyi [26] tel que :

$$y(x) = \frac{2qL^4}{\pi^5 \cdot EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \frac{n\pi C_1}{L} - \cos \frac{n\pi C_2}{L}) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}}{n \cdot (n^4 + \frac{K L^4}{\pi^4 \cdot EI})}$$

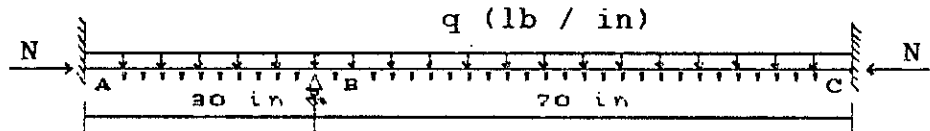
En prenant les (20) premiers termes de la série Hetenyi[26] a trouvé les résultats suivants pour les abscisses (x = 3.m et x = 4.m) correspondant aux noeuds (4) et (5) pour notre étude:

$$y(x = 3) = 0.4978E-06$$

$$y(x = 4) = 0.5187E-06$$

Exemple.I.2: Poutre uniformément chargée parfaitement encastree à ces extrémités avec un appui intermédiaire simple

Données : $EI = 7.5E08 \text{ lb.in}^2$ $N = 1000. \text{ lb}$
 $K = 750. \text{ psi}$ $L = 100. \text{ in}$



La poutre est divisée en (10) éléments égaux de (10 in) de longueur Les résultats trouvés en utilisant notre méthode sont représentés sur les diagrammes ci-dessous:

La réaction de l'appui B est égale à :

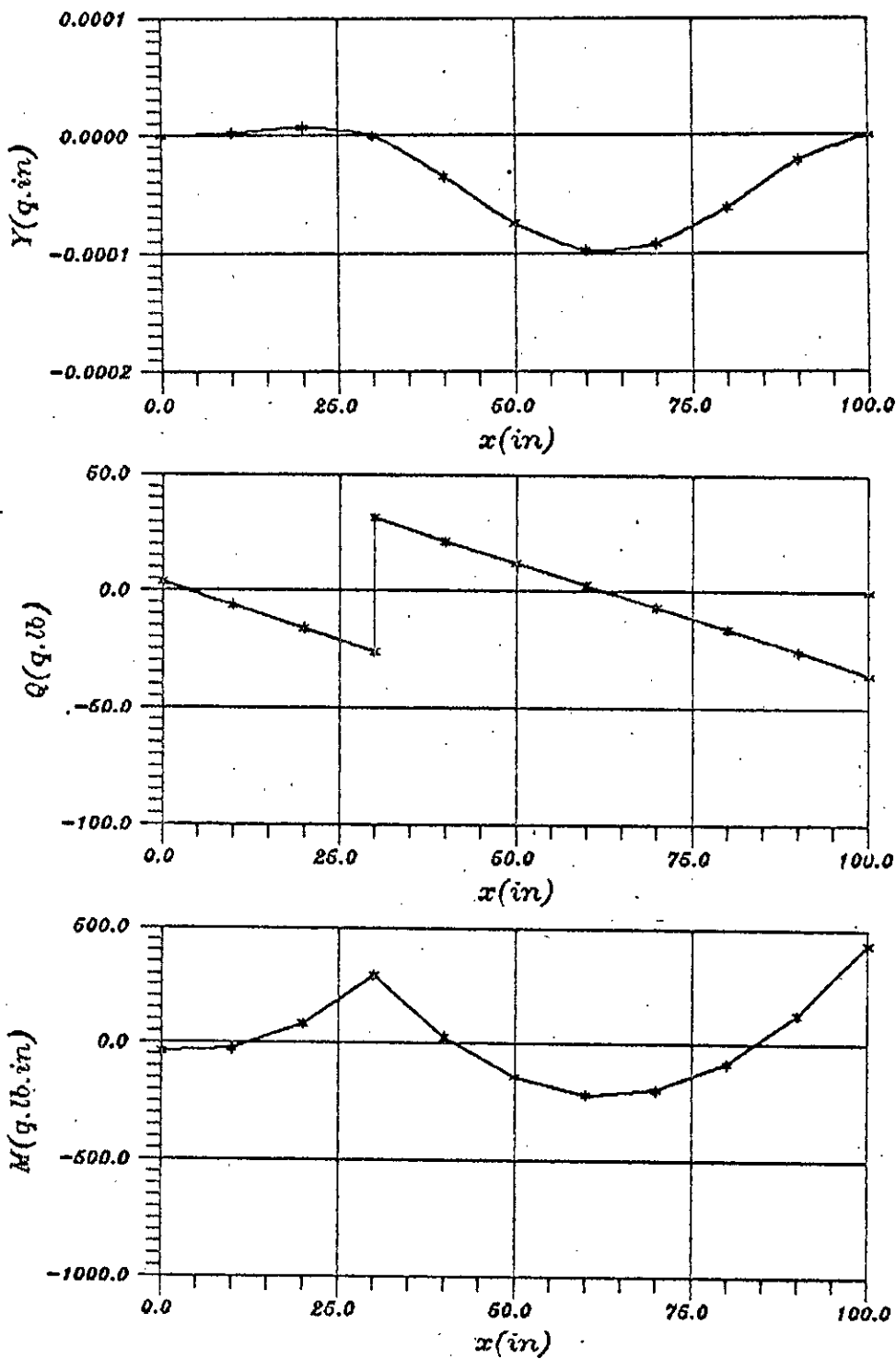
$$R_B = 57.4334 q$$

K.T Sundara Raja and S.Anantharamu [54] ont trouvé, $R_B = 59.3048 q$ les diagrammes des moments fléchissants et de la déformée présentent une meilleure approximation avec ceux trouvés par les deux auteurs.

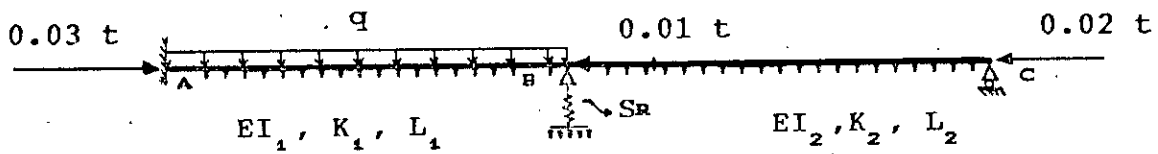
$M_A = -33.7323 q$	$Q_A = 4.1350 q$	
$M_B = -293.1800 q$	$Q_B^g = -25.9537 q$	$Q_B^d = 31.4797 q$
$M_C = -434.5549 q$	$Q_C = -35.6518 q$	

Les diagrammes ci-dessous résument les résultats dans les différents points de la poutre.

(Fig. 1-2) Diagramme de la ligne déformée, de l'effort tranchant, du moment flechissant



Exemple I.3 : Une poutre avec appui élastique intermédiaire.



Données:

$$EI_1 = 200 \text{ t.cm}^2$$

$$EI_2 = 100 \text{ t.cm}^2$$

$$K_1 = 0.0002 \text{ t / cm}^2$$

$$K_2 = 0.0003 \text{ t / cm}^2$$

$$L_1 = 100 \text{ cm}$$

$$L_2 = 100 \text{ cm}$$

$$S_r = 0.003 \text{ t / cm}$$

$$q = 0.0002 \text{ t / cm}$$

La poutre est divisée en (10) éléments égaux de longueur (20 cm) chacun. Les valeurs des déplacements et des efforts dans les noeud sont données par les diagrammes ci-dessous.

Les valeurs particulières sont:

$$y_B = -0.4016 \text{ cm}$$

$$y_C = 0.0000$$

$$\theta_B = -9.4832E-03 \text{ rd}$$

$$\theta_C = -1.1747E-03 \text{ rd}$$

$$M_A = -0.1984 \text{ t.cm}$$

$$M_B = 0.0758 \text{ t.cm}$$

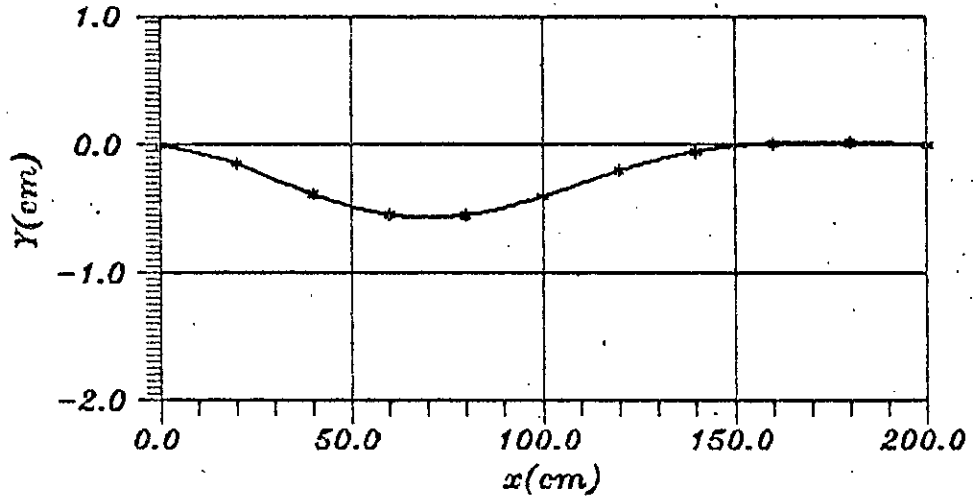
$$M_C = 0.0000$$

$$Q_A = 0.0094 \text{ t}$$

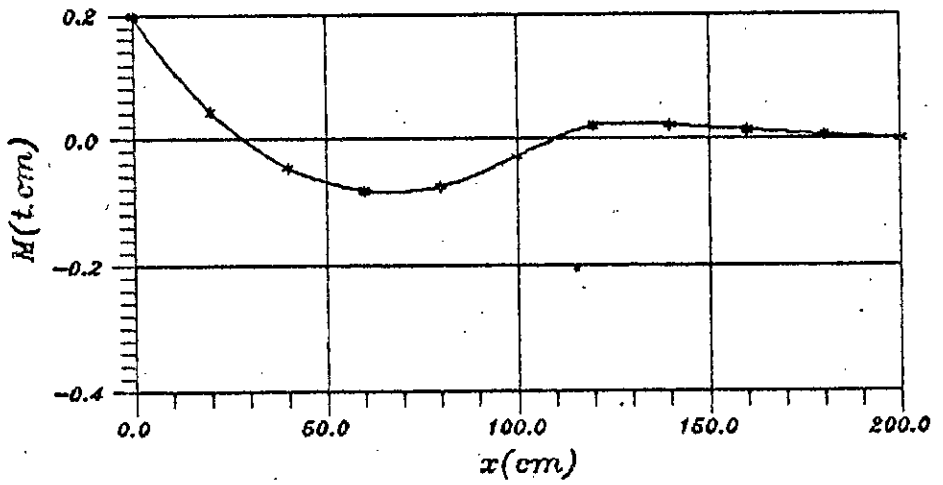
$$Q_B = -0.0033 \text{ t}$$

$$Q_C = -0.0003$$

Les valeurs des déplacements obtenus par Lee S.L et Wang T.M [36] au noeud B sont: $y_B = -0.3975 \text{ cm}$ et $\theta_B = -0.00925 \text{ rd}$
 au noeud C : $\theta_C = -0.00171 \text{ rd}$.



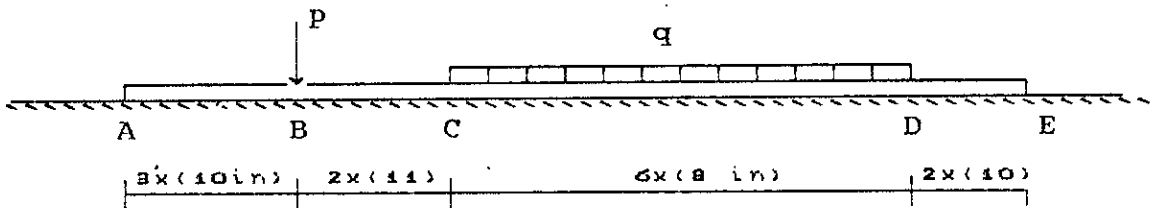
(Ex.1-3) Diagramme de la ligne déformée



(Ex.1-3) Diagramme du moment flechissant

Exemple I.4: Une poutre reposant directement sur le sol:

Données: $EI = 7.50E08 \text{ lb.in}^2$ $P = 5000 \text{ lbs}$
 $K = 750 \text{ psi}$ $q = 100 \text{ lb / in}^2$

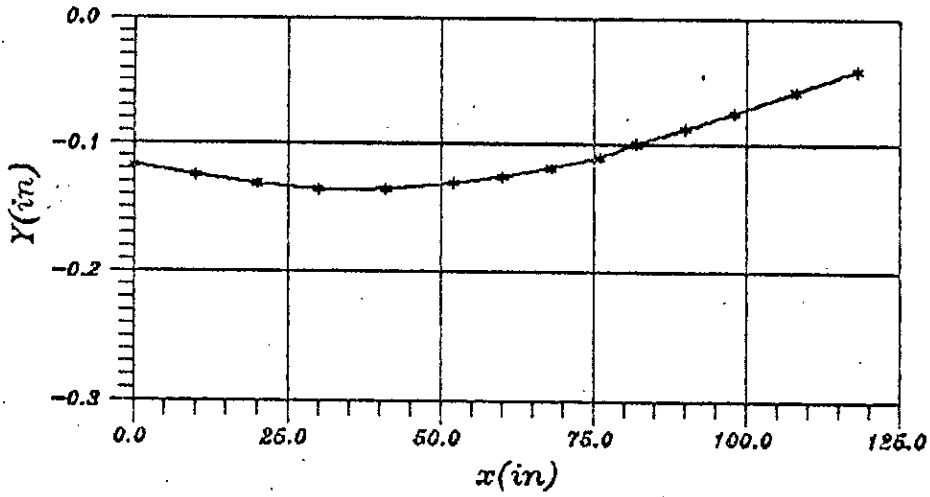


La poutre est divisée en (13) éléments distincts comme il est indiqué sur la figure.

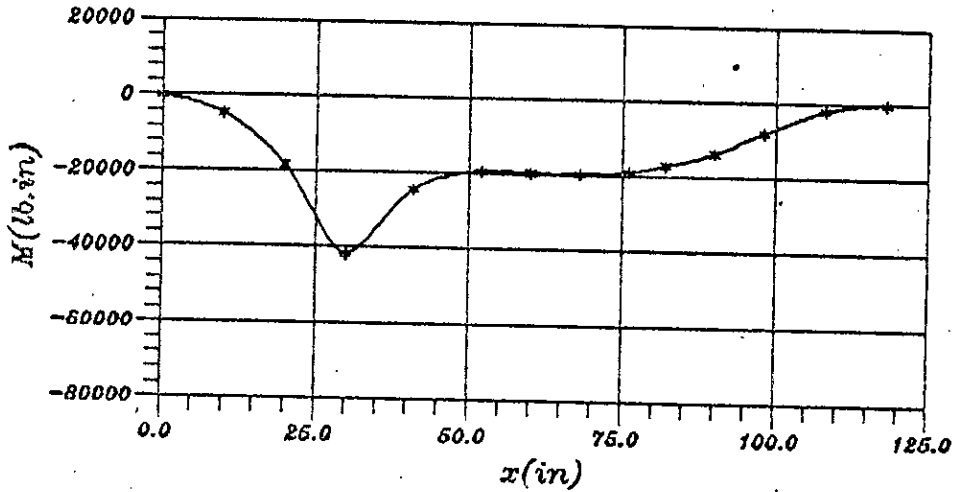
Les résultats particuliers donnés par le programme "Poutre" sont les suivants:

Noeud	Y.Deplac (in)	Z.Deplac (rd)	M (lb.in)	Q (lb)
A	-0.1162	-0.7672E-03	0.0000	0.0000
B	-0.1352	-0.2187E-03	41735.7809	2856.5193
C	-0.1303	0.5539E-03	19077.5786	-2143.4807
D	-7.4980E-02	0.1648E-02	13537.4844	-69.4885
E	-4.1010E-02	0.1714E-02	0.0000	-871.3874
				0.0000

Les valeurs des efforts et des déplacements dans les autres noeuds de la poutre sont représentés sur les diagrammes ci-dessous.



(Ex.1-4) Diagramme de la ligne déformée

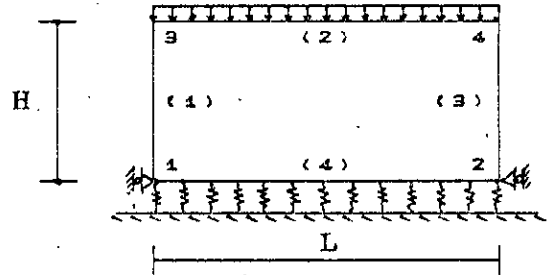


(Ex.1-4) Diagramme du moment flechissant

II- EXEMPLES "PORTIQUES PLAN"

Exemple II.1 : Portique en forme de cadre reposant sur une fondation élastique.

Données: $E = 2.9E10 \text{ N / m}^2$
 $b = 1. \text{ m}$ $h = 0.30 \text{ m}$
 $H = 4. \text{ m}$ $L = 4.5 \text{ m}$
 $q = 2.5E04 \text{ N / m}^2$



1^{er} cas : Sol mou $K = 4.E06 \text{ N / m}^2$

1- Les déplacements des noeuds :

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.Deplac (rd)
1	0.0000	-0.6963E-02	0.6715E-03
2	0.0000	-0.6963E-02	-0.6715E-03
3	0.5403E-07	-0.6989E-02	-0.6800E-03
4	-0.5403E-07	-0.6989E-02	0.6800E-03

2- Les réactions d'appuis :

$$R_{1x} = 208.9349 \text{ N}$$

$$R_{2x} = -208.9349 \text{ N}$$

3- Les actions aux extrémités des éléments :

Elément	AM1	AM2	AM3
	AM4 (N)	AM5 (N)	AM6 (N.m)
1	56250.0000 -56250.0000	-208.9349 208.9349	21629.7084 -22465.4478
2	208.9349 -208.9349	56250.0000 56250.0000	22465.4478 -22465.4478
3	56250.0000 -56250.0000	208.9349 -208.9349	22465.4478 -21629.7084
4	0.0000 0.0000	-56250.0000 -56250.0000	-21629.7084 -21629.7084

2^{ème} cas : Sol moyen K = 32.E06 N / m²

1- Les déplacements des noeuds :

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.deplac (rd)
1	0.00000E00	-0.13920E-02	0.59644E-03
2	0.00000E00	-0.13920E-02	-0.59644E-03
3	0.36417E-06	-0.14178E-02	-0.65417E-03
4	-0.36417E-06	-0.14178E-02	0.65417E-03

2- Les réactions d'appuis :

$$R_{1x} = 1408.1348 \text{ N}$$

$$R_{2x} = -1408.1348 \text{ N}$$

3- Les actions aux extrémités des éléments:

Elément	AM1 AM4 (N)	AM2 AM5 (N)	AM3 AM6 (N.m)
1	56250.0000 -56250.0000	-1408.1348 1408.1348	17584.1574 -23216.6966
2	1408.1348 -1408.1348	56250.0000 56250.0000	23216.6966 -23216.6966
3	56250.0000 -56250.0000	1408.1348 -1408.1348	23216.6966 -17584.1574
4	0.0000 0.0000	-56250.0000 -56250.0000	-17584.1574 17584.1574

3^{ème} cas : Sol dur $K = 80.E06 \text{ N} / \text{m}^2$

1- Les déplacements des noeuds :

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.deplac (rd)
1	0.00000E00	-0.80635E-03	0.51089E-03
2	0.00000E00	-0.80635E-03	-0.51089E-03
3	0.71761E-06	-0.83221E-03	-0.62464E-03
4	-0.71761E-06	-0.83221E-03	0.62464E-03

2- Les réactions d'appuis :

$$R_{1x} = 2774.7482 \text{ N}$$

$$R_{2x} = -2774.7482 \text{ N}$$

3- Les actions aux extrémités des éléments :

Elément	A_{M1} A_{M4} (N)	A_{M2} A_{M5} (N)	A_{M3} A_{M6} (N.m)
1	56250.0000 -56250.0000	-2774.7482 2774.7482	12973.8302 -24072.8230
2	2774.7482 -2774.7482	56250.0000 56250.0000	24072.8230 -24072.8230
3	56250.0000 -56250.0000	2774.7482 -2774.7482	24072.8230 -12973.8302
4	0.0000 0.0000	-56250.0000 -56250.0000	-12973.8302 12973.8302

Les résultats des moments aux extrémités des éléments obtenus par SIMVOULIDI [53] en considérant le sol comme un semi-espace infini, pour le même exemple avec un sol moyen ($K = 32.E06 \text{ N / m}^2$), sont les suivants :

Elément	A_{M3} (N.m)	A_{M6} (N.m)
1	13440	-23544
2	23544	-23544
3	23544	-13440
4	-13440	13440

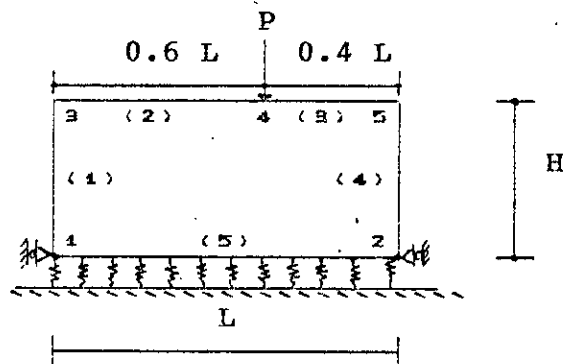
Exemple II.2 : Le même portique précédent avec une charge concentrée.

Données :

Les mêmes données que l'exemple II.1 avec :

$$H = L = 4.5 \text{ m}$$

$$P = 12.E04 \text{ N}$$



1^{er} cas : Sol mou K = 4.E06 N / m

1- Les déplacements des noeuds :

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.deplac (rd)
1	0.00000E00	-0.34951E-02	-0.98165E-03
2	0.00000E00	-0.11551E-01	-0.26705E-02
3	0.78677E-02	-0.35194E-02	-0.26968E-02
4	0.78666E-02	-0.10269E-01	-0.14275E-02
5	0.78659E-02	-0.11589E-01	-0.64373E-03

2- Les réactions d'appuis :

$$R_{1x} = 3512.0977 \text{ N}$$

$$R_{2x} = -3512.0977 \text{ N}$$

3- Les actions aux extrémités des éléments :

Elément	Am1 Am4 (N)	Am2 Am5 (N)	Am3 Am6 (N.m)
	1	46995.5627 -46995.5627	-3512.0977 3512.0977
2	3512.0997 -3512.0997	46995.5627 -46995.5627	32771.1626 94116.8566
3	3512.0977 -3512.0977	-73004.4373 73004.4373	-94116.8566 -37291.1305
4	73004.4373 -73004.4373	3512.0977 -3512.0977	37291.1305 -21486.6907
5	0.0000 0.0000	-46995.5627 -73004.4373	-16966.7227 21486.6907

2^{ème} cas : Sol moyen $K = 32.E06 \text{ N} / \text{m}^2$

1- Les déplacements des noeuds :

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.deplac (rd)
1	0.00000E00	-0.10368E-02	0.48089E-03
2	0.00000E00	-0.20907E-02	-0.10183E-02
3	0.86235E-03	-0.10611E-02	-0.11090E-02
4	0.86089E-03	-0.35750E-02	0.12212E-03
5	0.85991E-03	-0.21285E-02	0.88096E-03

2- Les réactions d'appuis :

$$R_{1x} = 4733.1995 \text{ N} \qquad R_{2x} = -4733.1995 \text{ N}$$

3- Les actions aux extrémités des éléments :

Elément	A_{M1}	A_{M2}	A_{M3}
	A_{M4} (N)	A_{M5} (N)	A_{M6} (N.m)
1	47002.9817 -47002.9817	-4733.1995 4733.1995	12403.2663 -33702.6641
2	4733.1995 -4733.1995	47002.9817 -47002.9817	33702.6641 93205.3865
3	4733.1995 -4733.1995	-72997.0183 72997.0183	-93205.3865 -38189.2465
4	72997.0183 -72997.0183	4733.1995 -4733.1995	38189.2465 -16889.8486
5	0.0000 0.0000	-47002.9817 -72997.0183	-12403.2663 16889.8486

3^{ème} cas : Sol dur $K = 80.E06 \text{ N} / \text{m}^2$

1- Les déplacements des noeuds :

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.deplac (rd)
1	0.00000E00	-0.69694E-03	0.51000E-03
2	0.00000E00	-0.11475E-02	-0.77515E-03
3	0.25406E-03	-0.72126E-03	-0.93901E-03
4	0.25217E-03	-0.28347E-02	0.24894E-03
5	0.25090E-03	-0.11853E-02	0.97973E-03

2- Les réactions d'appuis :

$$R_{1x} = 6111.1081 \text{ N}$$

$$R_{2x} = -6111.1081 \text{ N}$$

3- Les actions aux extrémités des éléments :

Elément	Am1 Am4 (N)	Am2 Am5 (N)	Am3 Am6 (N.m)
1	47014.3776 -47014.3776	-6111.1081 6111.1081	7260.6015 -34760.5880
2	6111.1081 -6111.1081	47014.3776 -47014.3776	34760.5880 92178.2314
3	6111.1081 -6111.1081	-72985.6224 72985.6224	-92178.2314 -39195.8890
4	72985.6224 -72985.6224	6111.1081 -6111.1081	39195.8890 -11695.9024
5	0.0000 0.0000	-47014.3776 -72985.6224	-7260.6015 11695.9024

Les résultats des moments aux extrémités des éléments obtenus par SIMVOULIDI [53] pour le même exemple et pour le cas d'un sol moyen ($K = 32.E06 \text{ N / m}^2$) sont représentés dans le tableau suivant :

Elément	M_{α} (N.m)	M_{σ} (N.m)
1	6888.53	-36908.89
2	36908.89	93306.45
3	-93306.45	-36666.70
4	36666.38	-6646.97
5	-6888.53	6644.42

Exemple II.3 : Un portique sur semelles isolées

Données :

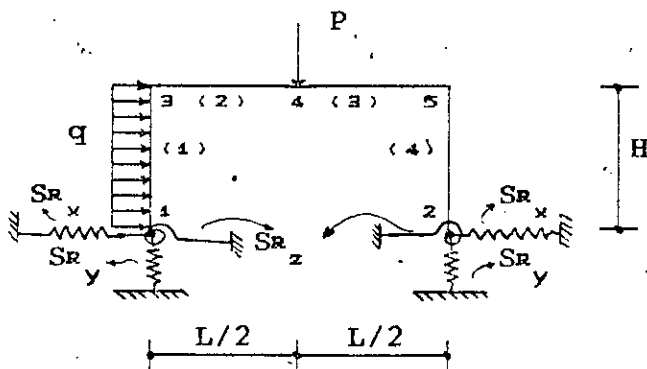
dimensions des semelles:

$A = B = 1.m \longrightarrow S = 1.m^2$

donc le rayon équivalent

des semelles est:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 0.32 \text{ m}$$



Groupe de sol : sable dense $E_s = 80.E06 \text{ N / m}^2$
 $\nu = 0.32$

Les raideurs des ressorts équivalents au sol de fondation considéré comme élastique sont :

$$S_{R_x} = \frac{16.(1 - \nu)}{(7 - 8\nu)(1 + \nu)} E_s . R = 47.5E06 \text{ N / m}$$

$$S_{R_y} = \frac{2}{(1 - \nu^2)} E_s . R = 57.04E06 \text{ N / m}$$

$$S_{R_z} = \frac{4}{3} \frac{E_s \cdot R^3}{(1 - \nu^2)} = 03.9E06 \text{ N / m}$$

Données relatives à la structure :

$E = 3.1 \text{ E}10 \text{ N / m}^2$ $b = 1.\text{m}$ $h = 0.3.\text{m}$ $H = L = 4.\text{m}$
 $P = 8.\text{E}04 \text{ N}$ $q = 1.5 \text{ E}04 \text{ N / m}$

1- Les déplacements des noeuds:

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.deplac (rd)
1	0.78438E-03	-0.25920E-03	-0.24120E-02
2	0.47878E-03	-0.11433E-02	-0.24952E-02
3	0.81076E-02	-0.26556E-03	-0.97209E-03
4	0.81027E-02	-0.13644E-02	0.14552E-04
5	0.80978E-02	-0.11714E-02	0.44485E-03

2- Les réactions des ressorts:

$R_{1x} = -37257.9137 \text{ N}$ $R_{2x} = -22742.0863 \text{ N}$
 $R_{1y} = 14784.5459 \text{ N}$ $R_{2y} = 65215.4541 \text{ N}$
 $R_{1z} = 9406.9213 \text{ N.m}$ $R_{2z} = 9731.2624 \text{ N}$

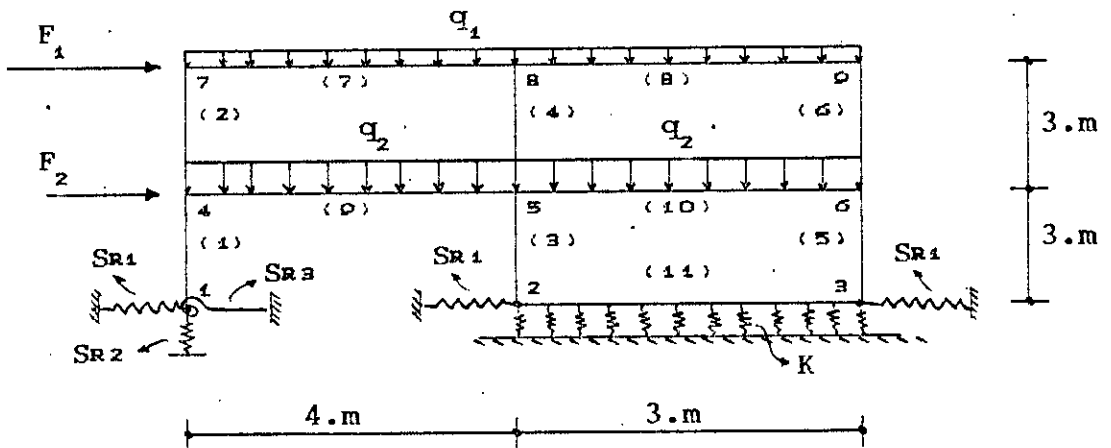
3- Les actions aux extrémités des éléments:

Elément	AM1 (N) AM4	AM2 (N) AM5	AM3 (N.m) AM6
1	14784.5459 -14784.5459	37257.9137 22742.0863	9406.9213 19624.7334
2	22742.0863 -22742.0863	14784.5459 -14784.5459	-19624.7334 49193.8252
3	22742.0863 -22742.0863	-65215.4541 65215.4541	-49193.8252 -81237.0829
4	65215.4541 -65215.4541	22742.0863 -22742.0863	81237.0829 9731.2624

Les résultats obtenus par la méthode de CROSS qui considère le portique comme parfaitement encastré à la base sont les suivants:

Elément	M_{A3} (N.m)	M_{A6} (N.m)
1	42035.85	-12615.66
2	12635.28	49142.13
3	-49142.13	-46244.34
4	46244.34	42065.28

Exemple II.4 : Analyse d'un portique à fondation mixte (semelle isolée et semelle filante) reposant sur une fondation élastique.



Données :

$$F_1 = 8000.N \quad F_2 = 4000.N$$

$$q_1 = 10^4.N / m \quad q_2 = 3.10^4 N / m$$

Groupe de sol : - Argile plastique.

- Module de fondation : $K = 4.E06 N / m^2$

- Raideurs des appuis élastiques :

$$SR_1 = 2.3E06 N / m$$

$$SR_2 = 3.1E06 N / m$$

$$SR_3 = 0.2E06 N / m$$

EXEMPLES

Dimensions des colonnes : (30 x 30) cm²

Dimensions des poutres : (30 x 40) cm²

Module d'Young pour la structure : $E = 3.1E10 \text{ N / m}^2$

Les résultats donnés par le programme "Portique" sont listés dans les tableaux qui suivent :

1- Les valeurs des déplacements des noeuds :

Noeud	X.Deplac (m)	Y.Deplac (m)	Z.Deplac (rd)
1	-0.78542E-03	-0.27890E-01	0.16668E-02
2	0.15018E-02	-0.20577E-01	0.32913E-02
3	0.14996E-02	-0.12569E-01	0.19248E-02
4	-0.54725E-02	-0.27983E-01	0.13285E-02
5	-0.54623E-02	-0.20697E-01	0.23354E-02
6	-0.54489E-02	-0.12657E-01	0.27133E-02
7	-0.11653E-01	-0.28011E-01	0.17274E-02
8	-0.11678E-01	-0.20715E-01	0.23118E-02
9	-0.11692E-01	-0.12687E-01	0.25832E-02

2- Les réactions des ressorts :

$$R_{1x} = 1806.4596 \text{ N} \qquad R_{2x} = -3454.1400 \text{ N}$$

$$R_{1y} = 86460.2374 \text{ N} \qquad R_{3x} = -3449.0800 \text{ N}$$

$$R_{1z} = -350.0207 \text{ N.m}$$

3- Les actions aux extrémités des éléments :

Elément	AM4 AM4 (N)	AM2 AM5 (N)	AM9 AM6 (N.m)
1	86460.2374 -86460.2374	-1806.4596 1806.4596	-350.0207 -5069.3581
2	26132.5983 -26132.5983	-14845.0766 14845.0766	-25050.3513 -19483.8786
3	112101.7246 -112101.7246	13727.1865 -13727.1865	27257.8440 13923.7156
4	16120.4001 -16120.4001	7018.2656 -7018.2656	10692.6071 10362.1896
5	81438.0380 -81438.0380	79.2731 -79.2731	5618.8071 -5380.9878
6	27747.0017 -27747.0017	15826.8111 -15826.8111	22833.3010 24647.1322
7	22845.0766 -22845.0766	26132.5983 13867.4017	19484.8786 5045.5144
8	15826.8111 -15826.8111	2252.9983 27747.0017	-15407.7040 -22833.3010
9	-9038.6170 9038.6170	60327.6319 59672.3609	30119.7094 -28809.1530
10	-15747.5380 15747.5380	36308.9637 53691.0363	4192.8303 -30265.9393
11	6818.8975 -6818.8975	-112101.7246 -81438.0380	-27257.8440 5380.9878

Vérifications :

-Equilibre du noeud (5) : $\Sigma M = 0$. soit:

$AM_6 (3) + AM_9 (4) + AM_6 (9) + AM_9 (10) = 0$. en effet,

$13923.7156 + 10692.6071 - 28809.1530 + 4192.8303 = 0$. (ok)

-Equilibre du noeud (6) :

$$A_{Ms} (5) + A_{Ms} (6) + A_{Ms} (10) = 0. \quad \text{en effet,}$$

$$5618.8071 + 24647.1322 - 30265.9393 = 0. \quad (\text{ok})$$

-Equilibre du noeud (2) :

$$A_{Ms} (3) + A_{Ms} (11) = 0. \quad \text{en effet,}$$

$$27257.8440 - 27257.8440 = 0. \quad (\text{ok})$$

-L'équilibre des forces horizontales :

Pour la première étage : $Q(2) + Q(4) + Q(6) = \Sigma$ forces horizontales au-dessus du premier étage soit :

$$A_{Mz} (2) + A_{Mz} (4) + A_{Ms} (6) = F_1 = 8000. \text{ N en effet,}$$

$$-14845.0766 + 7018.2656 + 15826.8111 = 8000. \quad (\text{ok})$$

-L'équilibre des forces verticales :

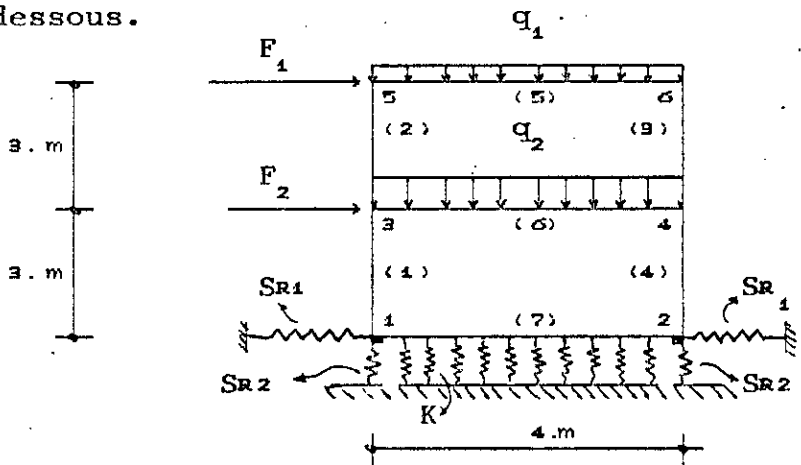
On peut vérifier pour le même étage que $\Sigma N = \Sigma$ forces verticales agissant au-dessus du premier étage, soit:

$$A_{M1} (2) + A_{M1} (4) + A_{M1} (6) = q_1 \cdot L = 70000. \text{ N en effet,}$$

$$26132.5983 + 16120.4001 + 27747.0017 = 70000.0001 \approx 70000. \text{ N} \quad (\text{ok})$$

III- EXEMPLES "STABILITÉ ÉLASTIQUE "

Exemple III.1 : Soit à étudier la stabilité élastique du portique ci-dessous.



Données :

$$F_1 = 10. t \quad F_2 = 8. t$$

$$q_1 = 1 t/m \quad q_2 = 2. t/m$$

Dimensions des poteaux : (40 x 40) cm²

dimensions des poutres : (40 x 50) cm²

Module d'Young de la structure : E = 2.1E10 N/m²

Données relatives au sol de fondation :

- SR1 = 2.E07 N/m
- SR2 = 8.E07 N/m
- Module de fondation K = 3.E07 N/m²

Résultats : Calcul par approximation successive

Le premier calcul se fait sans tenir compte de l'effet de l'effort normal c-à-d tous les efforts normaux dans les éléments sont nuls.

Les résultats du premier calcul sont les suivants:

*-Résultats du première itération : $N^{(1)}(i) = 0.$ ($i = 1,m$) où (m) est le nombre des éléments.

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(1)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	0.	1	0.2249E-02	0.9173E-03	-0.1604E-02
2	0.	2	0.2251E-02	-0.1516E-02	-0.1834E-02
3	0.	3	0.1257E-01	0.9882E-03	-0.2310E-02
4	0.	4	0.1253E-01	-0.1694E-02	-0.1958E-02
5	0.	5	0.2033E-01	0.1009E-02	-0.1433E-02
6	0.	6	0.2026E-01	-0.1750E-02	-0.1268E-02
7	0.				

*- Résultats du deuxième itération : $N^{(2)}(i) = -Am^{(1)}(i,1)$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(2)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	79404.1235	1	0.2249E-02	0.9199E-03	-0.1609E-02
2	23344.2419	2	0.2251E-02	-0.1518E-02	-0.1837E-02
3	-63344.2419	3	0.1260E-01	0.9911E-03	-0.2315E-02
4	-199404.1256	4	0.1256E-01	-0.1697E-02	-0.1963E-02
5	-57420.5090	5	0.2037E-01	0.1012E-02	-0.1435E-02
6	-33988.5456	6	0.2030E-01	-0.1753E-02	-0.1270E-02
7	1376.2860				

*- Résultats du troisième itération : $N^{(3)}(i) = -Am^{(2)}(i,1)$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(3)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	79692.8480	1	0.2249E-02	0.9199E-03	-0.1609E-02
2	23435.1327	2	0.2251E-02	-0.1518E-02	-0.1837E-02
3	-63435.1327	3	0.1260E-01	0.9911E-03	-0.2315E-02
4	-199692.8480	4	0.1256E-01	-0.1697E-02	-0.1963E-02
5	-57309.6921	5	0.2037E-01	0.1012E-02	-0.1435E-02
6	-33605.8824	6	0.2030E-01	-0.1753E-02	-0.1270E-02
7	894.2824				

*- Résultats du quatrième itération : $N^{(4)}(i) = -Am^{(3)}(i,1)$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(4)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	79692.5237	1	0.2249E-02	0.9199E-03	-0.1609E-02
2	23435.0487	2	0.2251E-02	-0.1518E-02	-0.1837E-02
3	-63435.0487	3	0.1260E-01	0.9911E-03	-0.2315E-02
4	-199692.5237	4	0.1256E-01	-0.1697E-02	-0.1963E-02
5	-57309.4489	5	0.2037E-01	0.1012E-02	-0.1435E-02
6	-33605.0874	6	0.2030E-01	-0.1753E-02	-0.1270E-02
7	893.2624				

Conclusion :

D'après les résultats des quatres premières itérations, nous pouvons constater la convergence des vecteurs déplacements et forces vers des valeurs constantes ce qui nous permet de conclure que le portique est élastiquement stable.

Les résultats finaux à l'état stable sont les suivants :

1- Valeurs des déplacements nodaux:

Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	0.22495E-02	0.91998E-03	-0.16086E-02
2	0.22505E-02	-0.15184E-02	-0.18370E-02
3	0.12600E-01	0.99113E-03	-0.23146E-02
4	0.12560E-01	-0.16967E-02	-0.19625E-02
5	0.20369E-01	0.10121E-02	-0.14352E-02
6	0.20301E-01	-0.17533E-02	-0.12703E-02

2- Les réactions des ressorts:

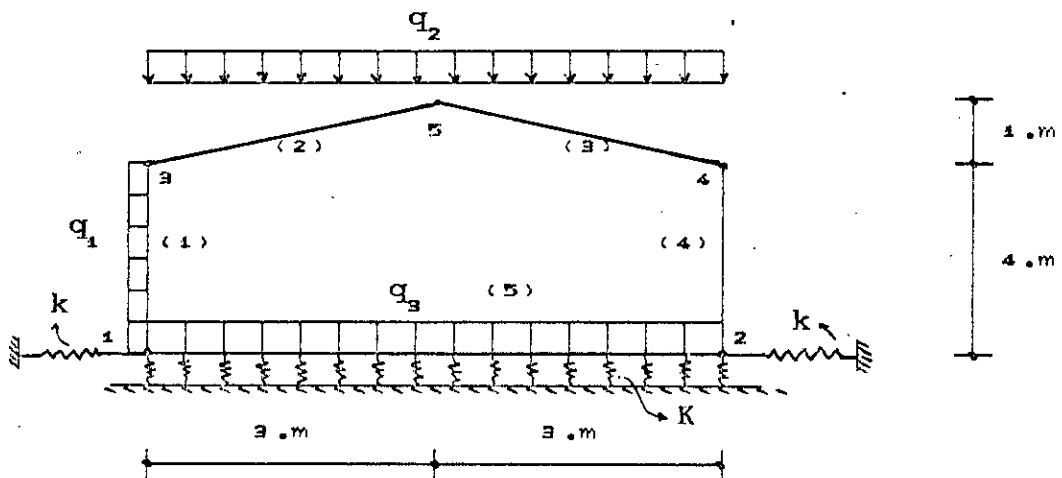
Noeud (1)	Noeud (2)
$R_{1x} = -44990. N$	$R_{2x} = -45010. N$
$R_{1y} = -73598.4 N$	$R_{2y} = 121472. N$

3- Les actions aux extrémités des éléments

Elément	A_{M1} A_{M4} (N)	A_{M2} A_{M5} (N)	A_{M3} A_{M6} (N.m)
1	-79692.5231 79692.5231	89085.4625 -89085.4625	143756.0234 122675.4659
2	-23435.0486 23435.0486	42690.5508 -42690.5508	50827.3042 77062.2839
3	63435.0486 -63435.0486	57309.4492 -57309.4492	96519.4294 75899.9481
4	199692.5231 -199692.5231	90914.5375 -90914.5375	135536.8563 139256.5745
5	57309.4492 -57309.4492	-23435.0486 63435.0486	-77062.2839 -96519.4294

6	33605.0883 -33605.0883	-56257.4745 136257.4745	-173502.7702 +211436.8044
7	-893.2692 893.2692	-67504.3575 43245.3245	-143756.0234 -139265.5745

Exemple III.2 : Etude de la stabilité élastique d'un portique à toiture oblique.



Données :

* Les densités de charges:

$$q_1 = 10^4 \text{ N / ml}$$

$$q_2 = 3 \cdot 10^4 \text{ N / ml}$$

$$q_3 = 4 \cdot 10^4 \text{ N / ml}$$

* Les caractéristiques géométriques de la structure:

- Le moment d'inertie des poteaux: $I = 0.00213 \text{ m}^4$
- La section des poteaux: $A_x = 0.16 \text{ m}^2$
- Le moment d'inertie des traverses: $I = 0.00426 \text{ m}^4$
- La section des traverses : $A_x = 0.19 \text{ m}^2$
- Le moment d'inertie de la poutre de fondation: $I = 0.00426 \text{ m}^4$
- La section de la poutre de fondation: $A_x = 0.19 \text{ m}^2$

EXEMPLES

* Les caractéristiques mécaniques du sol de fondation:

-Le module de fondation: $K = 80.E06 \text{ N} / \text{m}^2$

-La raideur horizontale du sol de fondation : $k = 40.E06 \text{ N} / \text{m}$

*-Première itération: $N^{(1)}(i) = 0.$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(1)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	0.	1	0.2513E-03	-0.1476E-02	0.4284E-03
2	0.	2	0.2487E-03	-0.2207E-02	-0.1319E-02
3	0.	3	0.2192E-02	-0.1572E-02	-0.1286E-02
4	0.	4	0.3675E-02	-0.2315E-02	0.6858E-03
5	0.	5	0.3059E-02	-0.4279E-02	-0.3583E-04

* Deuxième itération : $N^{(2)}(i) = -Am^{(1)}(i,1)$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(2)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	-80394.2733	1	0.2513E-03	-0.1475E-02	0.4271E-03
2	-42605.7689	2	0.2487E-03	-0.2210E-02	-0.1323E-02
3	-45759.0194	3	0.2207E-02	-0.1571E-02	-0.1290E-02
4	-90365.7267	4	0.3693E-02	-0.2318E-02	0.6855E-03
5	-1780.5656	5	0.3076E-02	-0.4284E-02	-0.3583E-04

* Troisième itération : $N^{(3)}(i) = -Am^{(2)}(i,1)$

Effort normal (N)		Valeurs des déplacements			
Elem	$N^{(3)}$	Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	-80352.1207	1	0.2513E-03	-0.1475E-02	0.4271E-03
2	-42591.7946	2	0.2487E-03	-0.2210E-02	-0.1323E-02
3	-45771.7047	3	0.2207E-02	-0.1571E-02	-0.1290E-02
4	-90407.8793	4	0.3693E-02	-0.2318E-02	0.6855E-03
5	-1781.2065	5	0.3076E-02	-0.4284E-02	-0.3583E-04

Conclusion:

Les vecteurs forces et déplacements convergent vers un état stable, ce qui explique la stabilité élastique du portique.

Les résultats finaux des déplacements et des efforts à l'état stable dans le portique, sont listés dans les tableaux suivants:

1- Valeurs des déplacements nodaux:

Noeud	X.depl (m)	Y.depl (m)	Z.depl (rd)
1	0.25134E-03	-0.14751E-02	0.42711E-03
2	0.24866E-03	-0.22103E-02	-0.13226E-02
3	0.22071E-02	-0.15708E-02	-0.12900E-02
4	0.36930E-02	-0.23179E-02	0.68545E-03
5	0.30759E-02	-0.42840E-02	-0.35831E-04

2- Les réactions des ressorts:

Noeud (1)	Noeud (2)
$R_{1x} = -10053.60 \text{ N}$	$R_{2x} = -9946.40$

3- Les actions aux extrémités des éléments:

Elément	AM ₁ AM ₄ (N)	AM ₂ AM ₅ (N)	AM ₃ AM ₆ (N.m)
1	80352.1334 -80352.1334	21888.3737 18111.6263	36344.2615 -28633.6192
2	42591.7730 -42591.7730	70501.3278 19497.0945	28633.6192 52132.4873
3	45771.6751 -45771.6751	9957.3882 80041.0340	-52132.4873 -58773.7910
4	90407.8666 -90407.8666	18111.6263 -18111.6263	58773.7910 13984.1111
5	1781.2319 -1781.2319	-80352.1334 -90407.8666	-36344.2615 -13984.1111

CONCLUSION
ET
RECOMMANDATIONS

Conclusion et Recommandations

A \- Problématique:

Les hypothèses couramment utilisées dans l'analyse des structures hyperstatiques, qui ne prennent pas en considération l'effet de l'interaction sol-structure, conduisent généralement à des conclusions qui s'écartent de la réalité. En effet, la négligence de ce phénomène, risque d'avoir de graves conséquences sur la sécurité de l'ouvrage à étudier et sur l'économie (sous ou sur-dimensionnement de l'ouvrage).

Le calcul d'un ouvrage et l'analyse de sa stabilité tenant compte de l'influence de l'interaction sol-structure nécessite le choix d'un modèle adéquat qui représente d'une manière aussi proche que possible le comportement de la structure et du sol vis à vis de l'action des charges extérieures.

Un bon modèle doit prendre en compte:

- Le comportement non linéaire du sol de fondation.
- Les conditions des liaisons à l'interface sol-structure.
- Le comportement de la structure (rigide, élastique, ou visco-élastique), sous l'action des charges extérieures.

Tenant compte de ces conditions, le problème est difficile à résoudre par les méthodes classiques, il faut faire appel aux méthodes d'analyse moderne telles que la méthode des éléments finis ou de différences finis.

Pour l'étude du problème d'interaction statique sol-structure, la manière la plus simple de prendre le sol en compte, est de le représenter par des ressorts reliant un ou plusieurs noeuds à une base rigide (comme celui utilisé dans cette thèse),

ce modèle rend l'analyse du phénomène simple, pratique, et souple pour un calcul moderne, et permet de résoudre le problème d'interaction sol-structure d'une manière globale, sans faire recours aux méthodes de sous structures. Le seul problème dans ce modèle, réside dans l'évaluation des propriétés physiques du sol de fondation qui sont généralement mal connues. Cependant, des hypothèses simplificatrices ont été employé pour évaluer les coefficients de Ballast à partir des données expérimentales afin de déterminer les raideurs des ressorts représentant le sol.

B \- Principaux résultats:

* L'effet de l'interaction statique sol structure pour le modèle choisi, étant évalué à partir des coefficients d'influences établis $A_{i(i=1,8)}$.

* La matrice de rigidité que nous avons élaborée est une matrice exacte et complète, donc le choix d'un nombre minimum d'éléments est suffisant pour avoir une meilleure précision.

* L'établissement des coefficients d'influences A_i nous à permis d'élaborer un programme de calcul général qu'on pourra l'utiliser dans:

1°-L'analyse des structures ordinaires,
($K = 0$ et $N = 0$).

2°-L'analyse et l'étude de la stabilité élastique des structures ordinaires, ($K = 0$ et $N \neq 0$).

3°-L'analyse des structures où l'on tient compte de l'influence de l'interaction sol-structure,
($K \neq 0$ et $N = 0$).

4°-L'analyse et l'étude de la stabilité élastique des structures tenant compte de l'interaction sol-structure ($K \neq 0$ et $N \neq 0$).

* Les différents calculs effectués par les programmes (Poutre et Portique) dans le cadre de cette étude ont donné des résultats qui reflètent mieux le comportement de la structure considérée.

Pour les exemples des poutres continues traités dans cette étude on a obtenu des résultats qui sont comparables à ceux trouvés par d'autres auteurs en utilisant des méthodes de calcul classiques [26],[54],[36].

Pour les exemples de portiques (exemple : bâtiments courants) les méthodes de H.Cross et de Simvoulidi donnent des résultats comparables à ceux obtenus par la méthode que nous avons exposée dans le cas des sols durs c-à-d pour ($K \geq 80.10^6 \text{ N/m}^2$).

par contre dans le cas des sols moyens et des sols mous $K < 80.10^6 \text{ N/m}^2$ il sera préférable d'utiliser la méthode que nous avons établi ou celle de Simvoulidi, mais pour les systèmes à plusieurs étages, la méthode de ce dernier devient longue et peu pratique. Dans ce cas il sera plus intéressant d'utiliser la méthode que nous avons exposée.

Sur la base des résultats obtenus on a pu tirer les constatations suivantes:

a)- Les efforts dans l'infra-structure (éléments de l'interface sol-structure) sont beaucoup plus importants pour le cas d'un sol mou que pour un sol dur, tandis que les efforts dans la super-structure sont beaucoup plus importants pour le cas d'un sol dur que pour un sol mou, donc un calcul sûr et économique doit prendre en considération le comportement du sol de fondation, en effet, la méthode qu'on a

exposée peu fournir des résultats très satisfaisants par rapport aux méthodes classiques utilisées.

b)- En effet, les hypothèses simplificatrices employées par les bureaux d'études, et selon lesquelles, les supports des structures hyperstatiques sont parfaitement encastres à la base, peuvent être acceptables pour le calcul des éléments de la super-structure (cas défavorable), tandis qu'elles sous-estiment les efforts dans les éléments de l'infra-structure, ce qui sous-dimensionne ces éléments. Donc pour le calcul de ces derniers, la prise en compte de l'interaction du sol est nécessaire pour la sécurité de la structure.

c)- L'effort normal dans les éléments de l'infra-structure est pour tous les cas étudiés, est inférieur à la limite ($N_L = 2\sqrt{k \cdot EI}$), même si les charges extérieures qu'on a supposé appliquées sur la structure, ont des valeurs qui dépassent les normes. Cependant, le flambement de ces éléments est impossible, et l'étude des effets du second ordre est inutile.

* La méthode de calcul que nous avons exposée qui par rapport aux méthodes connues, offre les avantages suivants:

1°- La prise en compte de l'influence de l'interaction sol-structure, des déformations des semelles, de la rigidité des noeuds.

2°- Elle permet le calcul des structures sur fondation de types semelles continues ou semelles isolées ainsi que les structures à fondations mixtes (semelles continues et isolées).

3°- Elle permet d'analyser la stabilité élastique d'une structure tenant compte de l'influence de l'interaction sol-structure.

* Sur la base des résultats obtenus on est amené à penser que la méthode d'évaluation de l'interaction sol-structure conduit à des prédictions tout à fait valables et donc d'une grande utilité pratique pour les ingénieurs.

D'autres exemples analogues seraient cependant nécessaires pour confirmer cette affirmation. Il ne faut, par ailleurs, pas perdre de vue que les méthodes d'interaction sol-structure ne valent que par la rigueur et le soin apportés à leur mise en oeuvre et encore plus par la valeur et la représentativité des caractéristiques introduites dans le modèle.

C\ - Recommandations :

Pour les recherches futures on recommande :

* L'utilisation d'un autre modèle du sol qui reflète mieux son comportement réel. Nous pouvons suggérer à titre d'exemple les modèles suivants:

1° - En modélisant la résistance horizontale du sol par des ressorts horizontaux qui travaillent en parallèle avec les ressorts verticaux utilisés dans notre modèle.

2° - Un modèle qui tient compte du comportement non-linéaire du sol en utilisant une méthode d'analyse pas à pas.

3° - Un modèle permettant l'analyse des structures reposant sur un sol multi-couches.

* L'extension de la méthode :

1° - A un problème tridimensionnel.

2° - A un problème non-linéaire en utilisant une procédure itérative pas à pas.

3° - A un calcul dynamique.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- ALBIGES.M, COIN.A : "Résistance des matériaux appliquées", tome 1 pp 531-566, Eyrolles, Paris 1982.
- [2]- ALEXANDER.D : "Influence functions for beams on elastic foundations", Journal of str-div, ASCE, vol.90, No.ST4, pp 63-101, August 1964.
- [3]- AUBOIN.J.F : "Calcul des structures et informatique", Eyrolles Paris 1983.
- [4]- BING-YUANG TING : "Finite beams on elastic foundation with réstraints", Journal of str-div, Proc ASCE, pp 611-621, March 1982.
- [5]- CAPRA.A, HAUTCOEUR.M : "Modélisation des structures pour calcul sur ordinateur", Eyrolles, Paris 1983.
- [6]- CAPRA.A, DAVIDOVICI.V : "Calcul dynamique des structures en zones sismiques", pp 89-90, Collection UTI, Eyrolles, Paris 1982.
- [7]- CHAMECKI.S : "Calcul des tassements progressifs des fondations en tenant compte de l'interaction des structures et du sol", Annales de l'ITBTP, série:(sol et fondations 73), sept 1969.
- [8]- CHARON.P : "La méthode de Cross et le calcul pratique des constructions hyperstatiques", Eyrolles, Paris 1982.
- [9]- CHEUNG, Y.K and NAG.D.K : "Plates and beams on elastic foundations-linear and non-linear behaviour", Géotechnique 18 pp 250-260, 1968.
- [10]- CHEUNG, Y.K and ZIENKIEWCZ O.C : " Plates and tanks on elastic foundations- application of the finite élément method", Int.J.solids struct.1, 451-461.(1965).
- [11]- CHOPRA A.K and GUTIERREZ J.A : "Earthquake analysis of multistory buildings including foundation interaction", Earthquake engng research center report 73-13, university of California, Berkeley, 1973.

- [12]-CLOUGH R.W, KING I.P and WILSON E.L : "Structural analysis of multistory buildings", Journal of str-div, ASCE, vol 90, No ST3 proc paper 3925, pp 16-34, June 1964.
- [13]-CONSTANCIO.M and KESHAVAN.N : "finite beams on élastic foundation", Journal of str-div, ASCE, paper 4778, pp 131-141 April 1966.
- [14]-COURBON.J : "Calcul des structures", pp 97-100, Dunod, Paris 1972.
- [15]-DE SILVA N.S : "Calcul d'interaction sol-structures par la méthode des équations intégrales", Ecole centrale de paris 84
- [16]-DREYFUSS.E : "Leçons sur la résistance des matériaux", tome 2, pp 325-327 Eyrolles, Paris 1965.
- [17]-EISEMANN.K, WOO.L, and NAMYET.S : "Space frame analysis by matrices and computer", Journal of str-div, ASCE, vol 88, No ST6 proc-paper 3365, pp 245-278, December 1962.
- [18]-FLETCHER D.Q, HERMANN L.R and LEONARD.R : " Elastic foundations representation of continuum", J. Engng mech, div ASCE 97, pp 95-107, (1971).
- [19]-FRED.W.BEAUFAIT : "Numerical analysis of beams on élastic foundations", Journal of str-div, ASCE, vol 203, No EM1, 205-209, February 1977.
- [20]-FRED W.BEAUFAIT : "Analysis of élastic beams on non-linear foundations", Computers and structures, vol 12, pp 669-676, March 1980.
- [21]-FRED W.BEAUFAIT and GEORGE W.R : " Midpoint difference method for analyzing beam structures", Comput.Str 8, pp 745-751 (1977).
- [22]-FUKASHI.M, JOHN J.E : "Matrix analysis of structure-foundation interaction ", Journal of str-div, ASCE, pp 251-265, January 1976.
- [23]-GUPTA S, LIN T.W, PENZIEN J, YEN C.S : "Hybrid modelling of soils structure interaction", Earthquake eng research center, report 80-9, University of California, Berkely, 1976.

- [24]-GUTIERREZ J.A : "A substructure method for analysis of structure-soil interaction", Earthquake engng research center report 75-9, University of California 1976.
- [25]-HALL J.R Jr and KISSENPFENNIG J.R : "Special topics on soil-structure interaction", International seminar on extreme load conditions and limit analysis procedures for structural safeguards and containment structures paper U₂/2, Berlin, 1975.
- [26]-HETENYI.M : "Beams on élastic foundation", University of Michigan press, Ann Arbor, Michigan 1964.
- [27]-IDRISS I.M, KENNEDY R.P : "Analysis for soil-structure interaction effects for nuclear power plants", report by the add hoc group on soil structure interaction of committee on nuclear structures and materials of the Str-div, ASCE, 1980.
- [28]-JAMES.M.G, WILIAM W.J : "Analysis of framed structures", published by Van Nostrand Reinhold Company, New york, 1965.
- [29]-KANI.G : "Calcul des portiques à étages multiples", traduit de l'allemand par Sadovsky.W, Dunod, Paris 1958.
- [30]-KAUSEL.E, WHITMAN.A, MURRAY.J, ELSABEE.F : "The spring method for embedded foundations", Nuclear engineering and design, vol N°48, 1978.
- [31]-KERR A.D : " Elastic and visco-elastic foundation models", J.Appl mech 31, pp 491-498 (1964).
- [32]-KONDER R.L : " Hyperbolic stress-strain response:cohesive soils", J. Soil Mechanics and foundations div, ASCE 89, pp115-143 (1963)
- [33]-L'HERMITE.R : "RDM, théorique et expérimentale", tome 1 (théorie de l'élasticité et des structures élastiques),Dunod, Paris 1954.
- [34]-L'HERMITE.R : "Flambage et stabilité, (Le flambage élastique des pièces droites)", collection UTI, Eyrolles, Paris 1974.
- [35]-LAREDO.M : "RDM, Calcul des structures par le potentiel et les ordinateurs", Dunod, Paris 1970.

- [36]-LEE S.L, WANG T.M, and KAO J.S : "Continious beam-columns on élastic foundations", Journal of the engineering mechanics division, ASCE, vol 87, No EM2, proc paper 2801, pp 55-70, April 1961.
- [37]-LEONARDS G.A : "Les fondations", traduit et adapté par un groupé d'ingénieurs des laboratoires des ponts et chaussées, pp 810-811, Ed Dunod, Paris 1968.
- [38]-LYSMER J, UDAKA T, TSAI C, SEED H.B, FLUSH : "A computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problem", Earthquake engng research center, report 75-30, University of California, Berkeley 1974.
- [39]-LYSMER.J, KUHLEMEYER R.L : "Finite dynamic môdel for infinite media", Journal of engng mecanics, div ASCE, vol 95, N°EML, 1972.
- [40]-LYSMER.J, RAISSI.M, TAJIRIAN.F, VAHDANI.S: "A system for analysis of soil structure interaction", Geotechnical report N1/2 81-02, University of .California, Berkeley 1981.
- [41]-MASSONNET.C.H, DEPRez G, MAQUOI R, MULLER R, FONDER G : "Calcul des structures sur ordinateur", Eyrolles, Paris 1972
- [42]-MOHR G.A : "A contact stiffness matrix for finite élément problems involving external élastic restraints", Computers and structures, vol 12, pp 189-191, October 1979.
- [43]-MOHR G.A and POWER A.S : " Elastic boundary conditions for finite elements of infinite and semi infinite media", Proc Instn, civ. Engrs, part 2, 65, pp 675-684, (1978).
- [44]-MOMANU G, SARDA P : "Calcul des structures hyperstatiques", OFU Alger 1982.
- [45]-MOSHE E, DAVID Z.Y : "Exact stiffness matrix for beams on élastic foundation", Computers and structures, vol 21, N°6 pp 1355-1359, 1985..
- [46]-MOSHE E, DAVID Z.Y : "Analysis of beam column on élastic foundation", Computers and structures, vol 23, N°3, pp 351-356, 1986.

- [47]-PAVLOVIC M.N and TSIKKOS.S : " Beams on quasi-Winkler foundations", Engng str 4, pp 113-118 (1982).
- [48]-PECKER A : "Dynamique des sols", pp 225-239, press de l'ENPC, Paris 1984.
- [49]-PRZEMIENIECKI J.S : "Theory of matrix structural analysis", Mc-Graw hill, New york, 1968.
- [50]-RAZAQPUR A.G : "Stiffness of beam columns on élastic foundation with éxact shape functions", Computers and structures, vol 24, No 5, pp 613-819, 1986.
- [51]-SEMIH S.T : "Computer analysis of plane and space structures", Journal of str-div, ASCE, paper 4780, April 1966.
- [52]-SHAMSHER P : "Soil dynamics", Mc-Graw Hill book company 1981.
- [53]-SIMVOULIDI I.A : "Calcul des ossatures en tenant compte de l'interaction du sol élastique", 1973.
- [54]-SUNDRÁ R.L and ANANTHARAMU.S : "Finite beam columns on élastic foundation", Journal of Mech-div, ASCE, vol 89, pp.139-160 (1963).
- [55]-TIMOSHENKO S, GERE J : "Theory of élastic stability", Mc-Graw Hill book Company, New york 1961.
- [56]-TING B.Y : " Finite beams on elastic foundation with restraints", J. str div, ASCE 108, pp 611-621 (1982).
- [57]-WILSON E.L : " A method of analysis for the evaluation of foundation structure interaction", Proc fourth world conference on earthquake engineering, A6, Santiago, Chile, pp 87-99, (1969).
- [58]-WINKLER E : "Die lehre von elastizitatund festigkeit", p 182, Prague 1867.
- [59]-WHITE W. VALLIAPAN S and LEE I.K: " Aunified boundary for finite dynamic models", J.Engng Mech. div, ASCE 103, pp 100-109, (1977)
- [60]-ZHAOHUA F and COOK R.D : " Beam elements on two parameter elastic foundations" J. Engng mech, div ASCE 109, pp 1390-1402, (1983).