

M0027/92A

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

THESE

Présentée en vue de l'obtention
du diplôme de Magister

THEME

ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES DISCRETES
PAR DES MODELES CONTINUS

Présentée par A. AMMICHE

Devant le Jury	Mr A. CAHMUSSE	Pr. E.N.P	Président
	Mr S. RECHAK	Pr. E.N.P	Rapporteur
	Mr M. BOUAZIZ	C.C. E.N.P	Examineur
	Mr B. NECIB	M.C. U.S.T.C	Examineur

92/93



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

THESE

Présentée en vue de l'obtention
du diplôme de Magister

THEME

ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES DISCRETES
PAR DES MODELES CONTINUS

Présentée par A. AMMICHE

Devant le Jury	M: A. GAHMUSSE	Pr. E.N.P.	Président
	M: S. RECHAK	Pr. E.N.P.	Rapporteur
	M: M. BOUAZIZ	C.C. E.N.P.	Examineur
	M: B. NECIB	M.C. U.S.T.C.	Examineur

92/93



MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES DISCRETES
PAR DES MODELES CONTINUS

par
AMMICHE ALI

Mémoire Présenté en Vue de l'Obtention
du Grade de Magister



REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon promoteur, le Pr S. RECHAK de toute l'aide qu'il n'a cessé de m'accorder au long de ce travail.

Je voudrais, aussi remercier Monsieur A. GAHMOUSSE, professeur au département de génie mécanique (E.N.P), Monsieur M. BOUAZIZ, chargé de cours au département de génie mécanique (E.N.P) et B. NECIB, maître de conférence au département de génie mécanique de U.S.T.C. qui ont bien voulu accepter d'examiner ce travail et de participer au jury.

Je ne dois aussi de remercier le directeur du laboratoire de génie logiciel du Centre de Développement des Technologies avancées (H.C.R) et toute son équipe de m'avoir accueilli dans leur laboratoire pour la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également à :

Mes parents,
Mon frère,
Mes soeurs.

Et que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude

Table des Matières

SOMMAIRE

CHAPITRE 1	INTRODUCTION	1
Chapitre 2	MODELE DE POUTRE DE TIMOSHENKO	4
2.1	Théorie de la poutre de TIMOSHENKO	4
2.2	Elément fini de la poutre de TIMOSHENKO	11
2.2.1	Fonctions de déplacement	11
2.2.2	Equations du mouvement	14
2.2.3	Assemblage et conditions aux limites	19
2.3	Structures tridimensionnelle	19
Chapitre 3	PROPRIETES EQUIVALENTES	24
3.1	Présentation de la méthode	24
3.2	Applications	26
3.3.1	Structures planes	26
3.3.1.1	Structure symétrique	26
3.3.1.2	Structure asymétrique	33
3.3.2	Structure tridimensionnelle	40
Chapitre 4	ANALYSE DYNAMIQUE	47
4.1	Vibrations libres	47
4.2	Réponse dynamique	49
4.2.1	Méthode de superposition des nodes	49
4.2.2	Méthode d'intégration directe	51
4.3	Formulation de la force axiale	52

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre 5 CALCUL ET DISCUSSION

58

5.1	Structure synétrique	60
5.2	Structure asynétrique No.1	68
5.3	Structure asynétrique No.2	79
5.4	Influence des coefficients de couplage	85

Chapitre 6 CONCLUSION 95

BIBLIOGRAPHIE 97

SOMMAIRE



Ce mémoire présente une méthode d'analyse dynamique des structures discrètes par des modèles continus.

La structure est modélisée par une poutre de Timoshenko pour laquelle les déformations axiales, transversales et flexionnelles sont couplées. Une méthode pour la détermination des propriétés équivalentes basée sur l'analyse de l'élément répétitif de la structure discrète est développée.

Trois types de structures planes discrètes sont étudiées pour les vibrations libres et forcées par la méthode des éléments finis utilisant l'élément fini d'ordre supérieur dont la formulation est basée sur la théorie de poutre de Timoshenko.

Les forces axiales dans chaque barre des structures discrètes obtenues par ce modèle continu sont comparées avec celles obtenues par la solution directe basée sur la structure discrète.

Les résultats obtenus nous permettent de conclure qu'il y a un bon accord entre la solution obtenue par le modèle continu et celle obtenue par la solution directe.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les structures discrètes (treillis, portiques et plate-formes) trouvent leurs plus grande importance dans les applications spatiales. Ainsi durant ces deux dernières décennies, plusieurs travaux de recherches ont été réalisés et ont pu montrer la possibilité de construire dans l'espace de grandes réalisations à l'aide de ces structures et ce à des fins scientifiques et commerciales [1-3]. Cependant, ces structures sont susceptibles de subir durant leur durée de vie des chargements dynamiques qui peuvent produire des forces internes importantes dans chacune des barres constituant ces structures . Par conséquent, pour des raisons de contrôle et de sécurité, on doit étudier le comportement dynamique de ces structures.

Cette analyse peut être menée à bien en utilisant la méthode des éléments finis. Par conséquent, si la structure exige un très grand nombre d'éléments (ce qui est toujours le cas), l'étude devient très coûteuse et nécessite des temps d'exécution excessifs. Pour simplifier le problème, plusieurs méthodes ont été proposées [4-12]. Parmi ces méthodes, on peut mentionner celles qui consistent à modéliser ces structures de nature discrètes, par des modèles continus. Ces dernières méthodes nécessitent la détermination des propriétés équivalentes qui sont déterminées en analysant un élément répétitif de la structure discrète. Cette analyse est basée sur l'une des méthodes suivantes :

Première méthode : Cette méthode est basée sur le fait que les énergies totales de l'élément répétitif et du modèle ont même valeur. Dans ce cas, la transition des structures discrètes au modèle continu est assurée par le développement du champ de déplacement (ou de déformation) de chaque noeud de l'élément répétitif en série de Taylor. Ainsi par identification des deux expressions donnant les énergies exprimées en fonction de ce champ de déplacement (ou de déformation), on obtiendra les propriétés équivalentes. [7,10,11]

Deuxième méthode : Cette méthode suppose que l'élément répétitif et le modèle continu se déforment identiquement. Dans ce cas, la transition au modèle continu est effectuée en exprimant approximativement les déformations du modèle en fonction des déplacements nodaux de l'élément répétitif. Ainsi, pour obtenir les propriétés équivalentes, on fait des tests numériques pour les modes de déformation axial, transversal et flexionnel [13].

Troisième méthode : Elle est basée sur l'équivalence des efforts résultants à savoir l'effort normal (N) et tranchant (Q) et le moment de flexion (M). La transition est effectuée, dans ce cas, en exprimant la force axiale totale de chaque élément de l'élément répétitif en fonction des déformations du modèle continu. Ainsi, les propriétés équivalentes sont exprimées en fonction des propriétés géométriques et mécaniques de l'élément répétitif [14].

Une fois les propriétés équivalentes déterminées, les théories de poutres sont utilisées pour l'analyse dynamique. Selon D.J.DAWE [16], la poutre de BERNOULLI-EULER ne peut pas représenter ces structures discrètes d'une manière précise car dans cette théorie, les effets des déformations de cisaillement

transversal ainsi que des termes d'inertie de rotation sont négligés. Pour cela, on utilisera le modèle de poutre de TIMOSHENKO qui tient compte de ces deux effets [15].

Dans le présent travail, trois types de structures planes seront étudiés pour des vibrations libres et forcées par la méthode des éléments finis en utilisant l'élément fini d'ordre supérieur développé par B. NECIB et C.T SUN [14]. Les propriétés équivalentes de ces structures et celles d'une structure tridimensionnelle sont déterminées en utilisant la troisième méthode mentionnée ci-dessus. Les résultats obtenus par le modèle de poutre de TIMOSHENKO seront comparés avec ceux obtenus par la solution directe.

Après l'introduction, on décrit dans le chapitre 2 la théorie de poutre de TIMOSHENKO, ainsi que la formulation de l'élément fini d'ordre supérieur.

Le chapitre 3 présente la méthode de détermination des propriétés équivalentes.

La formulation du problème aux valeurs propres et en réponse dynamique sont faites dans le chapitre 4.

L'algorithme de calcul ainsi que les différents tests qui ont été effectués pour vérifier la validité de ce modèle sont exposés au chapitre 5.

Finalement, les conclusions de cette étude ainsi que les recommandations suggérées seront données au chapitre 6.

CHAPITRE 2

MODELE DE POUTRE DE TIMOSHENKO

Pour l'analyse dynamique, plusieurs structures discrètes peuvent être modélisées par des poutres. Il existe trois théories de poutres à savoir : la théorie de poutre en cisaillement, la théorie de poutre de BERNOULLI-EULER et la théorie de poutre de TIMOSHENKO. Ces théories sont largement utilisées pour modéliser des structures discrètes, cependant c'est la poutre de TIMOSHENKO qui convient le mieux, du fait qu'elle tient compte des effets de déformation de cisaillement transversal ainsi que des termes d'inertie de rotation. Pour une structure asymétrique, les différents types de déformation (axiale, transversale et flexionnelle) seront couplés [14].

2-1 Théorie de la poutre de TIMOSHENKO

Les forces exercées sur une section transversale d'une poutre sont représentées sur la figure 2.1. Dans notre cas, l'étude se fait à l'aide des hypothèses suivantes :

-la poutre est plane.

-la section transversale plane initialement normale à l'axe neutre reste plane après déformation. Ce pendant et à cause de l'influence des déformations dues au cisaillement transversal, cette section perd sa normalité par rapport à l'axe neutre.

-la section (A) est symétrique par rapport à l'axe (Z).

-la contrainte normale σ_z agissant suivant l'axe (Z) est négligeable.

Ce modèle de poutre constitue ce qu'on appelle le modèle de poutre de TIMOSHENKO. Le champ de déplacement d'un point quelconque de la poutre est donné par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} U(x,t) &= u(x,t) + z \psi(x,t) \\ W(x,t) &= w(x,t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où U et W sont respectivement les déplacements axial et transversal d'un point quelconque de la section transversale de la poutre. u et w sont respectivement les déplacements axial, transversal à $z = 0$. ψ est la rotation de la section transversale (Figure 2.2).

A partir des équations ci-dessus, on obtient les composantes du vecteur déformation qui s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + z\psi_{,x} \\ \psi + w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

où ε_x et γ_{xz} sont respectivement les déformations de membrane et de cisaillement transversal. $\psi_{,x}$ et $w_{,x}$ sont la courbure et la rotation de la surface de référence ($z=0$). La virgule indique la dérivée partielle par rapport à la variable x .

Pour un matériau anisotrope et élastique, les relations qui relient les contraintes aux déformations s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

où C_{ij} sont les constantes d'élasticité du matériau.

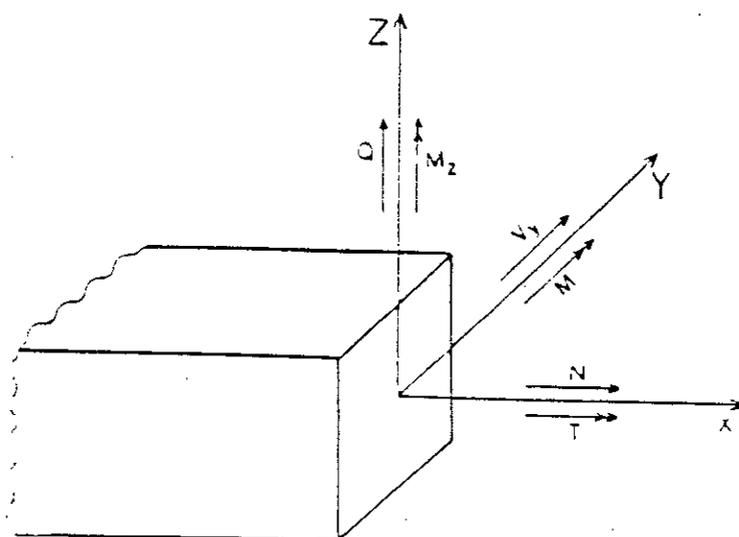


Figure 2.1 : Sollicitations sur une section transversale d'une poutre

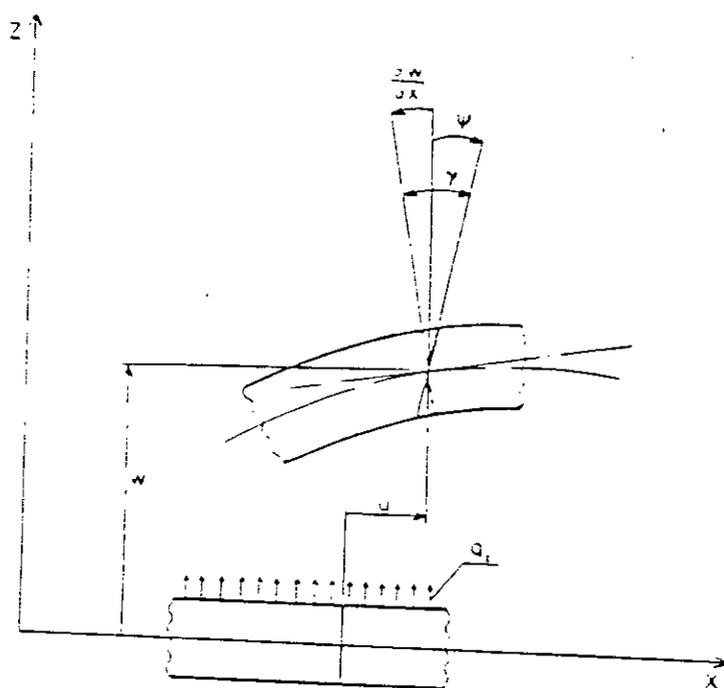


Figure 2.2 : Rotation d'une section transversale de la poutre de TIMOSHENKO

Les efforts résultants : effort normal (N), effort tranchant (Q) et moment de flexion (M) sont respectivement définis comme suit :

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA \\ Q &= \int_A \tau_{xz} dA \\ M &= \int_A \sigma_x z dA \end{aligned} \quad (2.4)$$

où A est la section transversale de la poutre.

En substituant les équations (2.3) dans (2.4), on obtient ainsi les relations qui relient les efforts résultants aux déformations correspondantes :

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{12} & GA & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \psi + w_{,x} \\ \psi_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

où EA, GA et EI sont respectivement les rigidités de membrane, de cisaillement transversal et de flexion. η_{ij} sont les coefficients de couplage. Ces derniers sont fonction des constantes d'élasticité du matériau.

Les équations du mouvement sont :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.6)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xz,z} + f_x &= \rho \ddot{u} \\ \tau_{xz,x} + f_z &= \rho \ddot{w} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par intégration, Les équations ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned} N_{,x} + q_x &= m\ddot{u} + R\ddot{\psi} \\ Q_{,x} + q_z &= m\ddot{w} \\ M_{,x} - Q &= R\ddot{u} + \rho I\ddot{w} \end{aligned} \quad (2.8)$$

où q_x et q_z sont respectivement les charges réparties suivant les directions axiale et transversale. m , R et ρI sont les termes d'inertie par unité de longueur définis comme suit :

$$m = \int_A \rho \, dA \quad (2.9)$$

$$R = \int_A \rho z \, dA \quad (2.10)$$

$$\rho I = \int_A \rho z^2 \, dA \quad (2.11)$$

En substituant les équations (2.5) dans (2.8), on obtient les équations du mouvement en fonction des déplacements comme suit :

$$\begin{bmatrix} \partial_x(EA \partial_x) & \partial_x(\eta_{12} \partial_x) & \partial_x(\eta_{12} + \eta_{13} \partial_x) \\ \partial_x(\eta_{12} \partial_x) & \partial_x(GA \partial_x) & \partial_x(GA + \eta_{23} \partial_x) \\ -\eta_{12} \partial_x + \partial_x(\eta_{13} \partial_x) & -GA \partial_x + \partial_x(\eta_{23} \partial_x) & -GA + \partial_x(EI \partial_x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 & R \\ 0 & n & 0 \\ R & 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

où ∂_x est l'opérateur différentiel par rapport à la variable x .

Pour un matériau isotrope, les équations (2.5) se réduisent à la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \psi + w_{,x} \\ \psi_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

et les équations (2.12) deviennent :

$$EAu_{,xx} = nu - q_x \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x(EA \partial_x) & GA \partial_x \\ -GA \partial_x & -GA + \partial_x(EI \partial_x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \psi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_z \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Ce cas correspond à une structure dont le plan moyen coïncide avec son plan de symétrie. Les équations (2.15) sont

ceux de la poutre de TIMOSHENKO. Si les effets dues aux déformations de cisaillement transversal et aux termes d'inertie de rotation sont négligés, on obtiendra les équations de la poutre de BERNOULLI-EULER qui se mettent sous la forme :

$$EIw_{,xxx} + mw = q_z \quad (2.16)$$

avec

$$M = EIw_{,xx} \quad (2.17)$$

$$Q = -M_{,x} = -EIw_{,xxx} \quad (2.18)$$

Et si on ne tient compte que de l'effet de cisaillement transversal, on obtient l'équation de la poutre en cisaillement comme suit :

$$\partial_x(GAw_{,x}) = mw \quad (2.19)$$

$$\text{où } Q = GA w_{,x} \quad (2.20)$$

2-2 Elément fini de la poutre de TIMOSHENKO

Pour L'analyse dynamique, la solution du modèle continu peut être obtenue soit sous forme analytique en résolvant le système d'équations (2.12) soit en utilisant la méthode des éléments finis.

On remarquera ,ce pendant, qu'il est plus important d'utiliser la méthode des élément finis pour résoudre ce problème. Dans cette étude, on utilisera l'élément fini d'ordre supérieur développé par B. NECIB et C.T. SUN [14].

2-2.1 Fonctions de déplacement

L'élément répétitif est modélisé par un élément poutre caractérisé par :

- une section transversale uniforme (A).

- un axe longitudinal (X).
- une longueur (L).
- un moment d'inertie (I).
- un module d'élasticité (E).

L'élément poutre possède deux noeuds et six degrés de liberté par noeud. Les déplacements nodaux sont : u_i déplacement axial, u'_i déformation axiale, w_i déplacement transversal, w'_i rotation de la surface de référence, ψ_i rotation de la section transversale et ψ'_i la courbure ($i=1,2$) (Figure 2.3).

Puisque l'élément poutre possède douze degrés de liberté définis ci-dessus, douze coefficients inconnus doivent apparaître dans les fonctions représentant le modèle de déplacement. Ainsi les fonctions de déplacement sont représentées par des polynômes de troisième degré en x qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\
 w(x,t) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\
 \psi(x,t) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

Les équations ci-dessus peuvent être exprimées en fonction des déplacements nodaux en appliquant les conditions aux limites appropriées. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= N_1 u_1 + N_2 u'_1 + N_3 u_2 + N_4 u'_2 \\
 w(x,t) &= N_1 w_1 - N_2 w'_1 + N_3 w_2 - N_4 w'_2 \\
 \psi(x,t) &= N_1 \psi_1 + N_2 \psi'_1 + N_3 \psi_2 + N_4 \psi'_2
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

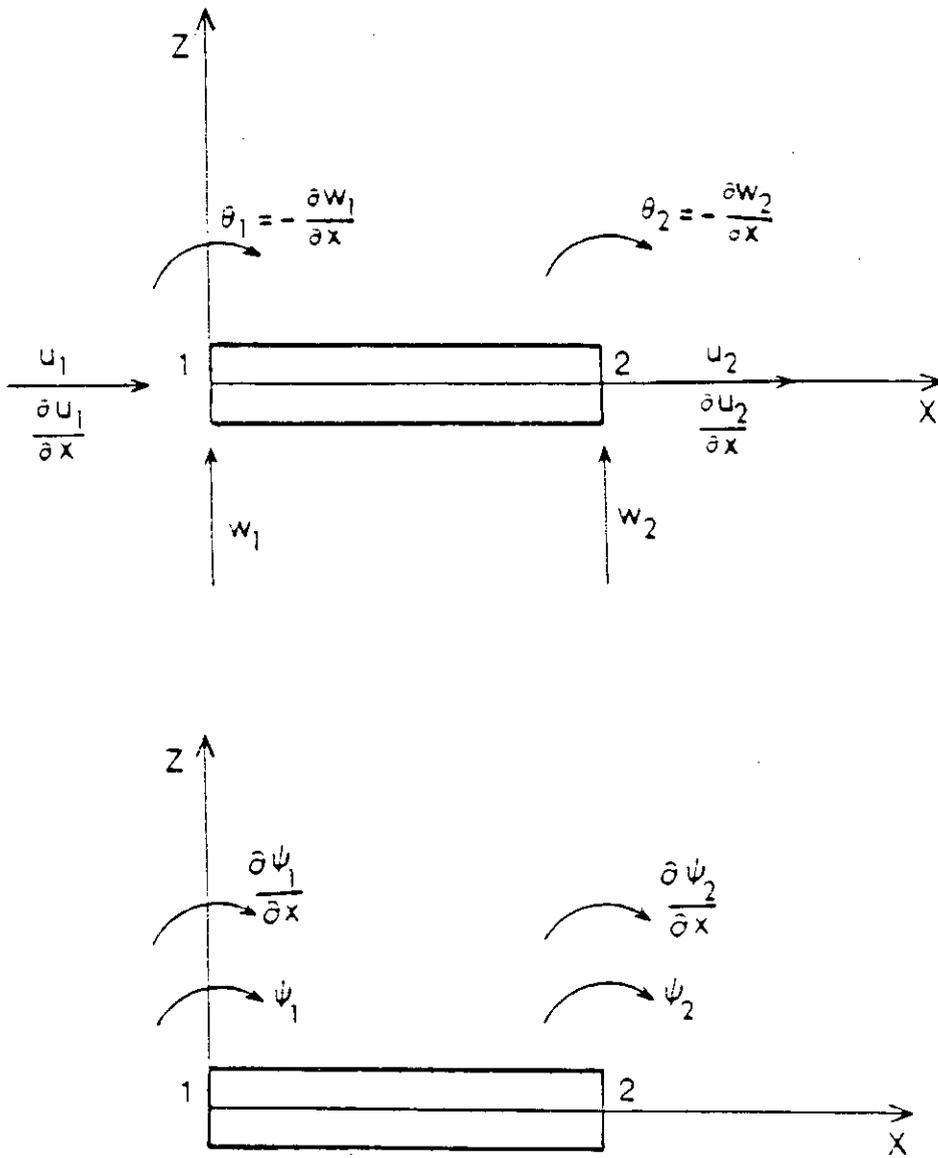


Figure 2.3 : Degrés de liberté de l'élément poutre

où N_i sont les fonctions de forme définies comme suit :

$$N_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N_2 = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \quad ; \quad N_4 = - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$
(2.24)

2-2.2 Equations du mouvement

L'énergie de déformation (U) et l'énergie cinétique (T) de l'élément poutre sont définies respectivement comme suit :

$$U = \int_V \left\{ \sigma \right\}^t \left\{ \varepsilon \right\} dv$$
(2.25)

$$T = \frac{1}{2} \int_m \left\{ \dot{D} \right\}^2 dm$$
(2.26)

où - dv est l'élément de volume tel que $dv = dA dx$.

- dm est l'élément de masse tel que $dm = \rho dA dx$.

- $\left\{ \sigma \right\}^t$ et $\left\{ \varepsilon \right\}$ sont respectivement le transposé du vecteur de contrainte et le vecteur de déformation.

- $\left\{ \dot{D} \right\}$ est le vecteur de vitesse défini comme suit :

$$\left\{ \dot{D} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{u} + z\dot{\psi} \\ \dot{w} \end{array} \right\}$$
(2.27)

En substituant les équations (2.2) et (2.3) dans (2.25) ainsi que les équations (2.27) dans (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[AEu_{,x}^2 + EIw_{,x}^2 + GA(w_{,x} + \psi)^2 \right] dx \\
 &+ \int_0^L \left[\eta_{13}u_{,x}\psi_{,x} + \eta_{12}u_{,x}(w_{,x} + \psi) + \eta_{23}\psi_{,x}(w_{,x} + \psi) \right] dx
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho Au^2 + \rho Aw^2 + \rho I\dot{\psi}^2 + 2R\dot{u}\dot{\psi} \right] dx \tag{2.29}$$

Les équations de Lagrange sont donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \tag{2.30}$$

où j est le nombre de degrés de liberté. q_j , \dot{q}_j et Q_j sont respectivement le déplacement généralisé, la vitesse généralisée et la force généralisée.

En substituant les équations (2.28) et (2.29) dans (2.30), on obtient le système d'équations suivant :

$$\{ f \} = [m] \{ \dot{\Delta} \} + [k] \{ \Delta \} \tag{2.31}$$

où $[m]$ et $[k]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité élémentaires. $\{ f \}$ est le vecteur des forces associés au vecteur des déplacements nodaux $\{ \Delta \}$. Ces deux vecteurs sont définis comme suit :

$$\{ \Delta \} = \left\{ u_1 \ u_1' \ w_1 \ w_1' \ \psi_1 \ \psi_1' \ u_2 \ u_2' \ w_2 \ w_2' \ \psi_2 \ \psi_2' \right\} \tag{2.32}$$

$$\{ f \} = \left\{ N_1 \ \kappa_1 \ Q_1 \ \zeta_1 \ M_1 \ \mu_1 \ N_2 \ \kappa_2 \ Q_2 \ \zeta_2 \ M_2 \ \mu_2 \right\}$$

Dans les équations ci-dessus, les indices 1 et 2 indiquent les noeuds 1 et 2, et prime (') indique la dérivée par rapport à x.

La matrice de rigidité ainsi obtenue s'écrit comme suit :

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_1] & [k_2] \\ [k_2]^t & [k_3] \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

où

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 36a_1 & 3La_1 & 504b_1 & -42Lb_1 & 36a_1 - 210Lb_1 & 3La_2 - 42L^2b_1 \\ 4L^2a_1 & 42Lb_1 & -56L^2b_1 & 3La_2 + 42L^2b_1 & & 4L^2a_2 \\ & 504b & -42Lb & 504b_2 - 210Lb & 421b_2 - 42L^2b & \\ & & 56L^2b & -42L^2b - 42Lb_2 & -56L^2b_2 & \\ \text{Syn.} & & & 36a + 156L^2b - b_3 & 3La + 22L^3b & \\ & & & & 4L^2a + 4L^4b & \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$[k_2] = [k_2' | k_2''] \quad (2.35)$$

où

$$[k_2] = \begin{bmatrix} -36a_1 & 3La_1 & 504b_1 \\ -3La_1 & -L^2a_1 & -42Lb_1 \\ -504b_1 & 42Lb_1 & -504b \\ 42Lb_1 & 14L^2b & 42Lb \\ -36a_2 + 210Lb_1 & 3La_2 - 42L^2b_1 & 210Lb - 504b_2 \\ -3La_2 + 42L^2b_1 & -7L^3b_1 - L^2a_2 & 42L^2b - 42Lb_2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$[k_2''] = \begin{bmatrix} -42Lb_1 & -36a_2 - 210Lb_1 & 3La_2 + 42L^2b_1 \\ 14L^2b_1 & -3La_2 - 42L^2b_1 & -L^2a_2 + 7L^3b_1 \\ -42Lb & -210Lb - 504b_2 & 42L^2b + 42Lb_2 \\ -14L^2b & 42L^2b + 42Lb_2 & -7L^3b + 14L^2b_2 \\ 42L^2b - 42Lb_2 & -36a + 54L^2b & 3La - 13L^3b \\ 7L^3b + 14L^2b_2 & -3La + 13L^3b & -L^2a - 3L^4b \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[k_3] = \begin{bmatrix} 36a_1 & -3La_1 & 504b_1 & -42Lb_1 & 36a_2 - 210Lb_1 & -3La_2 - 42L^2b_1 \\ 4L^2a_1 & -42Lb_1 & -56L^2b_1 & -3La_2 + 42L^2b_1 & 4L^2a_2 \\ 504b & 42Lb & 504b_2 - 210Lb & -42Lb_2 - 42L^2b \\ 56L^2b & -42L^2b + 42Lb_2 & -56L^2b_2 \\ \text{Sym.} & 36a + 156L^2b - b_3 & -3La - 22L^3b \\ & & 4L^2a + 4L^4b \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\text{où } a = \frac{EI}{30L} \quad ; \quad b = \frac{GA}{420L}$$

$$a_1 = \frac{EA}{30L} \quad ; \quad b_1 = \frac{\eta_{12}}{420L}$$

$$a_2 = \frac{\eta_{13}}{30L} \quad ; \quad b_2 = \frac{\eta_{23}}{420L}$$

$$b_3 = 420Lb_2$$

La matrice de masse est exprimée comme suit :

$$[\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{n}_1] & [\mathbf{n}_2] \\ [\mathbf{n}_2]^t & [\mathbf{n}_3] \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

où

$$[\mathbf{n}_1] = \begin{bmatrix} 156c & 22Lc & 0.0 & 0.0 & 156c_1 & 22Lc_1 \\ & 4L^2c & 0.0 & 0.0 & 22Lc_1 & 4L^2c_1 \\ & & 156c & -22Lc & 0.0 & 0.0 \\ & & & 4L^2c & 0.0 & 0.0 \\ \text{Syn.} & & & & 156e & 22Le \\ & & & & & 4L^2e \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$[\mathbf{n}_2] = \begin{bmatrix} 54c & -13Lc & 0.0 & 0.0 & 54c_1 & -13Lc_1 \\ 13Lc & -3L^2c & 0.0 & 0.0 & 13Lc_1 & -3L^2c_1 \\ 0.0 & 0.0 & 54c & 13Lc & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -13Lc & -3L^2c & 0.0 & 0.0 \\ 54c_1 & -13Lc_1 & 0.0 & 0.0 & 54e & -13Le \\ 13Lc_1 & -3L^2c_1 & 0.0 & 0.0 & 13Le & -3L^2e \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$[\mathbf{n}_3] = \begin{bmatrix} 156c & -22Lc & 0.0 & 0.0 & 156c_1 & -22Lc_1 \\ & 4L^2c & 0.0 & 0.0 & -22Lc_1 & 4L^2c_1 \\ & & 156c & 22Lc & 0.0 & 0.0 \\ & & & 4L^2c & 0.0 & 0.0 \\ \text{Syn.} & & & & 156e & -22Le \\ & & & & & 4L^2e \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

où $c = (\rho A) \frac{L}{420}$; $c_1 = \frac{R L}{420}$; $e = (\rho I) \frac{L}{420}$

2-2.3 Assemblage et condition aux limites

Les matrices de rigidité et de masse de l'élément fini étant obtenues, les matrices globales pour la structure entière sont formées suivant la technique d'assemblage usuelle de la méthode des éléments finis. L'assemblage se fait par superposition tel qu'indiquée à la figure (2.4), donc on obtient :

$$\{ F \}^* = [M]^* \{ \dot{\Delta} \}^* + [K]^* \{ \Delta \}^* \quad (2.42)$$

Si N est le nombre d'éléments, $[M]^*$ et $[K]^*$ sont deux matrices symétriques et bandes d'ordre $6(N+1)$ de densité largeur égale à 12.

L'introduction des conditions aux limites de la structure réduisent les matrices $[M]^*$ et $[K]^*$ aux matrices carrées d'ordre $6(N+1)-J$ et deviennent, par conséquent symétriques et définies positives, on obtient le système suivant :

$$\{ F \} = [M] \{ \dot{\Delta} \}_T + [K] \{ \Delta \}_T \quad (2.43)$$

où $[M]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices globales réduites de masse et de rigidité. $\{ \Delta \}_T$ et J sont respectivement le vecteur global des déplacements nodaux et le nombre de conditions aux limites.

2.3 Structures tridimensionnelles.

Les structures tridimensionnelles (Figure 2.5) sont modélisées par des poutres ayant le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} U &= u - y \phi_z + z \phi_y \\ V &= v - z \phi_x \\ W &= w + y \phi_x \end{aligned} \quad (2.44)$$

où u , v et w sont les déplacements à $y = z = 0$; ϕ_x , ϕ_y et ϕ_z sont les rotations de la section transversale autour des trois axes.

D'où le vecteur déformation :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} - y \phi_{z,x} + z \phi_{y,x} \\ v_{,x} - \phi_z - z \phi_{x,x} \\ w_{,x} + \phi_y + y \phi_{x,x} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

où ε_x , γ_{xz} et γ_{xy} sont respectivement les déformations de membrane et de cisaillement transversal. On pose :

$$\varepsilon = u_{,x} \quad \text{déformation de membrane}$$

$$\gamma_1 = v_{,x} - \phi_z \quad \text{déformation de cisaillement transversal.}$$

$$\gamma_2 = w_{,x} + \phi_y$$

$$\vartheta_{x,x} \quad \text{déformation de torsion.}$$

$$\vartheta_{y,x} \text{ et } \vartheta_{z,x} \quad \text{sont les courbures.}$$

Les relations contraintes-déformations sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

où C_{ij} sont les constantes d'élasticité.

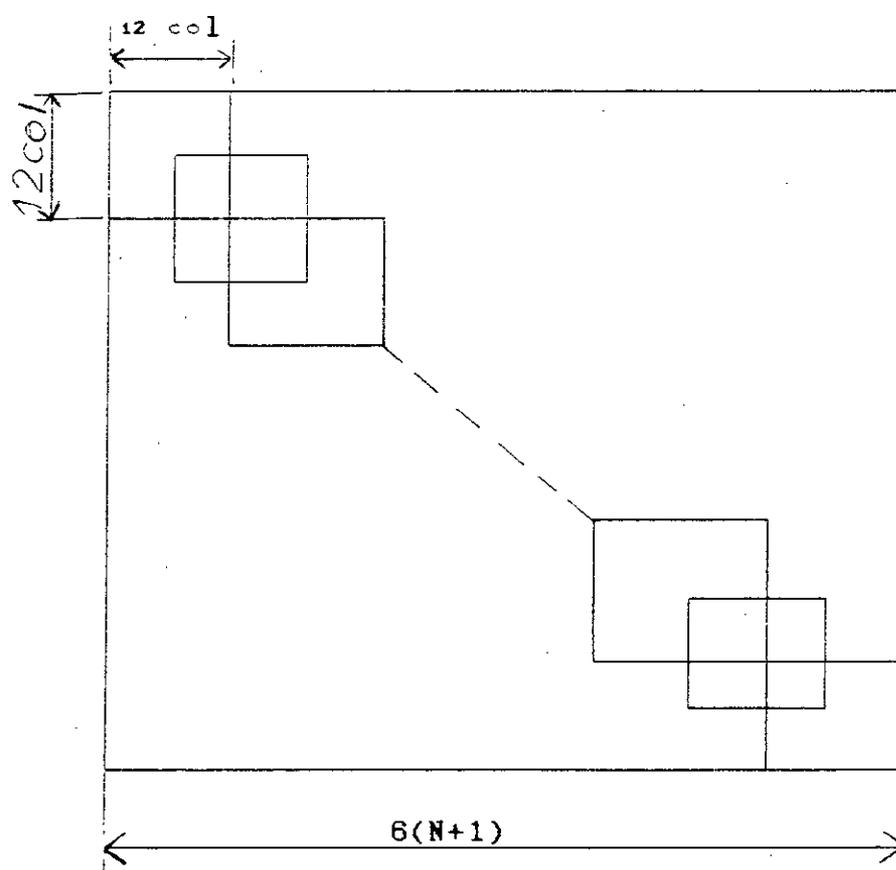


Figure 2.4 : Diagramme d'assemblage des matrices de masse et de rigidité

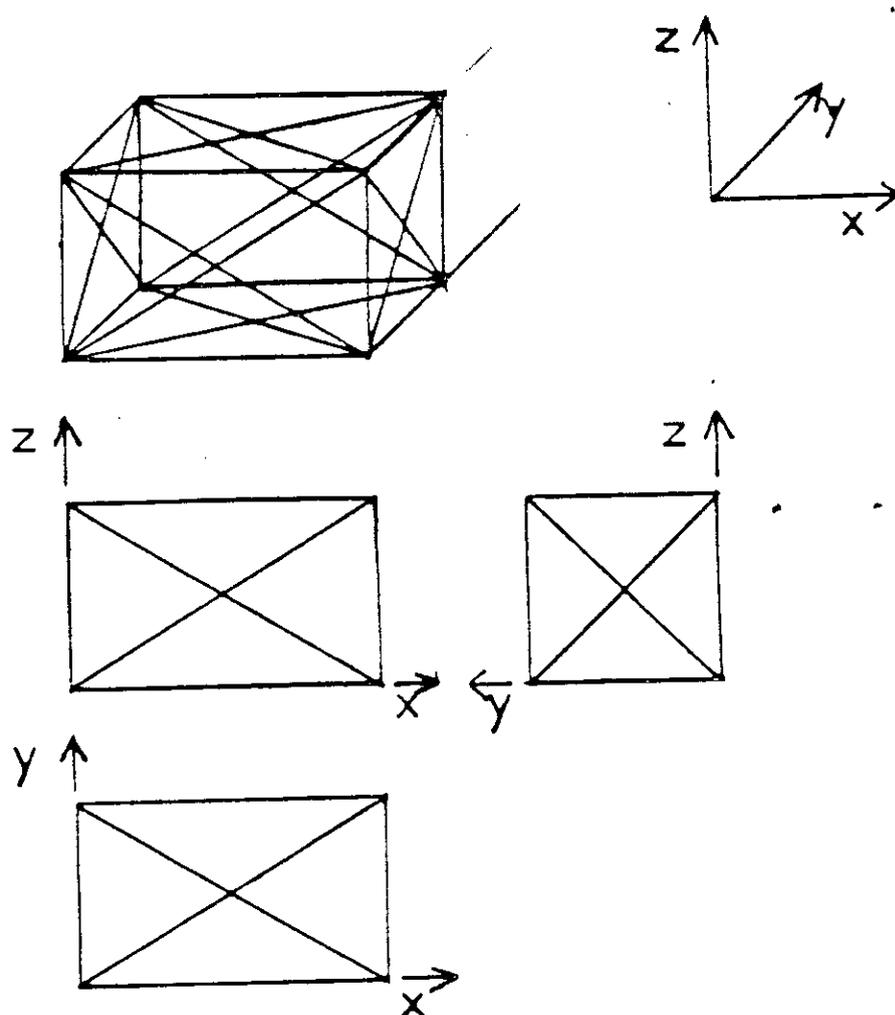


Figure 2.5 Structure tridimensionnelle

Les efforts résultants sont définis comme suit :

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad \text{effort normal.}$$

$$Q_{x\alpha} = \int_A \tau_{x\alpha} dA \quad \text{effort tranchant } (\alpha = y, z).$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad \text{moment de flexion autour de l'axe y.}$$

(2.47)

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \quad \text{moment de flexion autour de l'axe z.}$$

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad \text{moment de torsion.}$$

En substituant les équations (2.46) dans (2.47), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q_{xy} \\ Q_{xz} \\ M_t \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & \\ & C_2 & & & & \\ & & C_3 & & & \\ & & & C_4 & & \\ & & & & C_5 & \\ & & & & & C_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \theta_{x,x} \\ \theta_{y,x} \\ \theta_{z,x} \end{Bmatrix}$$

(2.48)

Les équations du mouvement sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_{,x} + q_x &= (\rho A) \ddot{u} \\
 Q_{xy,x} + q_y &= (\rho A) \ddot{v} \\
 Q_{xz,x} + q_z &= (\rho A) \ddot{w} \\
 M_{,x} &= (\rho I_p) \ddot{\phi}_x \\
 M_{y,x} - Q_{xz} &= (\rho I_y) \ddot{\phi}_y \\
 M_{z,x} - Q_{xy} &= (\rho I_z) \ddot{\phi}_z
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

avec

$$(\rho I_y, \rho I_z) = \int_A \rho (z^2, y^2) dA
 \tag{2.50}$$

$$(\rho I_p) = (\rho I_y) + (\rho I_z)
 \tag{2.51}$$

En introduisant les équations (2.45) et (2.46) dans (2.25), on obtient l'expression de l'énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (C_1 \varepsilon^2 + C_2 \gamma_1^2 + C_3 \gamma_2^2 + C_4 \theta_{x,x}^2 + C_5 \theta_{y,x}^2 + C_6 \theta_{z,x}^2) dx
 \tag{2.52}$$

En utilisant l'équation (2.26), l'énergie cinétique est obtenue comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L ((\rho A)V^2 + (\rho I_y)\dot{\phi}_y^2 + (\rho I_z)\dot{\phi}_z^2 + (\rho I_p)\dot{\phi}_x^2) dx \quad (2.53)$$

Pour la formulation de l'élément fini tridimensionnel basé sur cette théorie, il suffit de choisir des fonctions d'interpolation pour chaque degrés de liberté et utiliser les équations (2.52) et (2.53) pour obtenir les matrices élémentaires de masse et de rigidité. Cette dernière partie sort du cadre de cette étude.

CHAPITRE 3.

PROPRIETES EQUIVALENTES

Pour analyser les structures discrètes comme modèles continus, les propriétés équivalentes de rigidité et d'inertie doivent être déterminées en premier lieu. Ces propriétés s'obtiennent par l'une des méthodes mentionnées dans l'introduction. Afin d'éviter les opérations purement mathématiques et pour des raisons pratiques, on utilisera dans le présent travail la méthode développée par B. NECIB et C.T. SUN [14].

3.1 Présentation de la méthode

Cette méthode consiste à isoler un élément répétitif de la structure appelé cellule (Figure 3.3) puis exprimer approximativement la déformation totale de chacun de ses éléments, en fonction des déformations du modèle :

$$\varepsilon_i = a_i u_{,x} + b_i (\psi + w_{,x}) + c_i \psi_{,x} \quad (3.1)$$

où a_i , b_i et c_i sont des coefficients dépendant des propriétés mécaniques et géométriques de la barre (i) de la cellule.

En utilisant le principe de superposition, l'équation (3.1) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^t &= a_i u_{,x} \\ \varepsilon_i^S &= b_i (\psi + w_{,x}) \\ \varepsilon_i^b &= c_i \psi_{,x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où ϵ_t^t , ϵ_t^s et ϵ_t^b représentent les déformations axiales dues respectivement à la tension, au cisaillement transversal et à la flexion.

Ces déformations peuvent être aussi exprimées sous la forme suivante :

$$\epsilon^{t,s,b} = \frac{1}{L_t} \left[(u_n - u_k) \cos \theta_t + (w_n - w_k) \sin \theta_t \right] \quad (3.3)$$

où u et w sont respectivement les déplacements axial et transversal des noeuds de la barre (\cup). L_t est sa longueur. θ_t est l'angle mesuré entre l'axe des X et la barre (\cup) en suivant le sens contraire des aiguilles d'une montre (Figure 3.1).

Les déformations du modèle peuvent être exprimées approximativement en fonction des déplacements des noeuds de la cellule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_{,x} &= \frac{u_R - u_L}{L_C} \\ w_{,x} + \psi &= \frac{w_R - w_L}{L_C} + \frac{1}{2}(\psi_R + \psi_L) \\ \psi_{,x} &= \frac{\psi_R - \psi_L}{L_C} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } u_R &= \frac{1}{2}(u_n + u_m) ; & u_L &= \frac{1}{2}(u_p + u_k) \\ w_R &= \frac{1}{2}(w_n + w_m) ; & w_L &= \frac{1}{2}(w_p + w_k) \\ \psi_R &= \frac{1}{L_g}(u_n - u_m) ; & \psi_L &= \frac{1}{L_g}(u_p - u_k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

les indices R et L désignent respectivement la partie droite (Right) et la partie gauche (Left) de la cellule.

En utilisant les équations (3.4) avec les conditions aux limites appropriées pour chaque mode de déformation, on pourra ainsi exprimer la déformation de la barre (i) en fonction des déformations du modèle. Après identification des équations (3.2) et (3.3), les coefficients a_i , b_i et c_i peuvent être ainsi déterminés. Par conséquent, la force axiale S_i de la barre (i) (Figure 3.2) est donnée par la relation :

$$S_i = E_i A_i (\varepsilon_i^t + \varepsilon_i^s + \varepsilon_i^b) \quad (3.6)$$

où E_i et A_i sont respectivement le module d'élasticité et la section transversale de la barre (i).

Les constantes d'élasticité et les coefficients de couplage sont obtenus après avoir déterminé, à partir des équations (3.6), l'effort normal (N), l'effort tranchant (Q) et le moment de flexion (M) puis comparer ces derniers avec les équations (2.5).

3.3 Applications

On utilisera la méthode décrite ci-dessus pour trois types de structures, les deux premières sont planes, l'une étant symétrique, l'autre asymétrique; et la troisième est tridimensionnelle.

3.3.1 Structures planes

a. Structure symétrique

La cellule de la structure symétrique est représentée sur la figure (3.3).

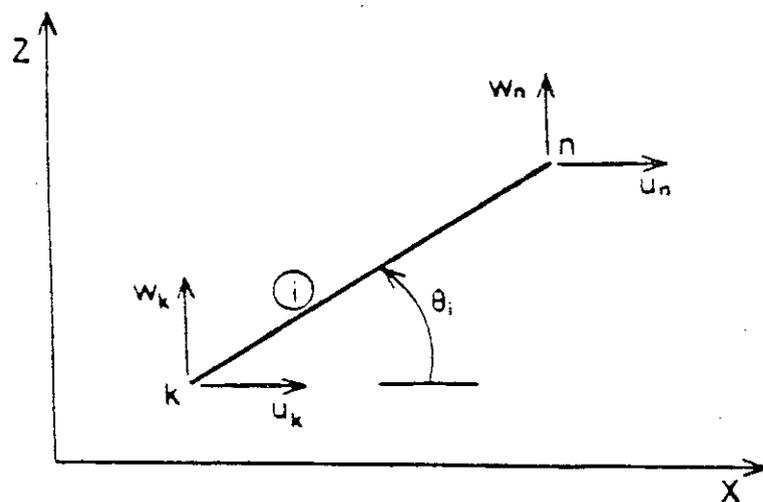


Figure 3.1 : Déplacements nodaux de la barre (i)

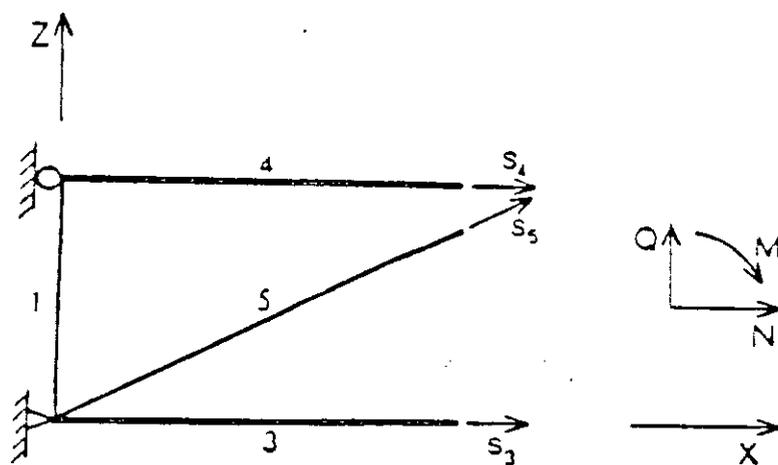
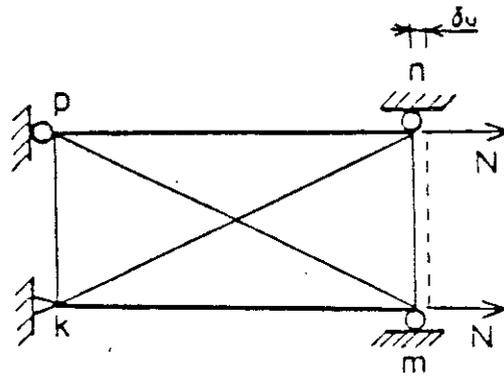
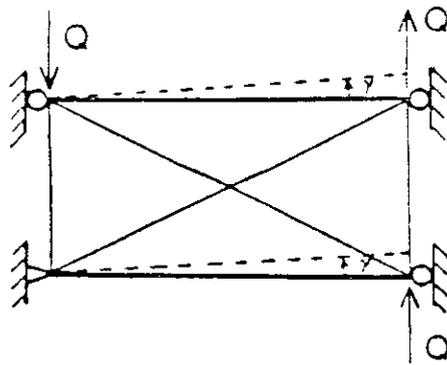


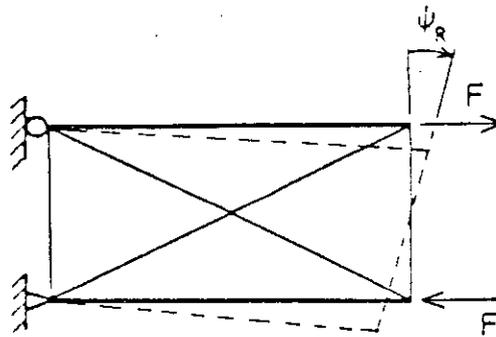
Figure 3.2 : Forces axiales des barres d'une cellule



(a) Traction pure



(b) Cisaillement pur



(c) Flexion pure

Figure 3.3 : Différentes sollicitations appliquées à une cellule symétrique

1^{er} mode : traction pure (Figure 3.3a)

Dans ce cas, on a :

$$\gamma = \psi_{,x} = 0. \quad (3.7)$$

en utilisant les équations (3.4) et (3.5) avec les conditions aux limites appropriées, les déplacements aux noeuds, sont :

$$u_k = w_k = u_p = w_p = w_n = w_m = 0. \quad (3.8)$$

$$u_n = u_m = L_c u_{,x}$$

En substituant les équations (3.8) dans (3.3) et en identifiant avec (3.2), on obtient les coefficients a_i comme suit :

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 0 \\ a_3 &= a_4 = 1 \\ a_5 &= a_6 = \frac{L_c^2}{L_d^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où l'indice de a_i ($i=1, \dots, 6$) désigne le numéro de la barre dans la cellule.

Par conséquent, les déformations et les forces axiales dues à la traction dans chaque barre s'écrivent :

$$\{ \varepsilon \}^t = \left\{ 0, 0, 1, 1, \frac{L_c^2}{L_d^2}, \frac{L_c^2}{L_d^2} \right\}^T \quad (3.10)$$

$$\{ S \}^t = \left\{ 0, 0, E_3 A_3, E_4 A_4, \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5, \frac{L_c^2}{L_d^2} E_6 A_6 \right\}^T \quad (3.11)$$

2^{ieme} mode : cisaillement pure (Figure 3.3b)

Dans ce cas, nous avons :

$$u_{,x} = \psi_{,x} = 0 \quad (3.12)$$

et les déplacements aux noeuds sont :

$$\begin{aligned} u_k = w_k = u_p = w_p = u_n = u_m = 0 \\ w_n = w_m = L_c \gamma \end{aligned} \quad (3.13)$$

De la même manière que précédemment, les coefficient b_i sont donnés :

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0 \\ b_5 = -b_6 = \frac{L_c L_g}{L_d^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le vecteur des forces axiales s'écrit :

$$\{ S \}^S = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{L_c L_g}{L_d^2} E_5 A_5, -\frac{L_c L_g}{L_d^2} E_6 A_6 \right\}^T \quad (3.15)$$

3^{ieme} mode : flexion pure (Figure 3.3c)

Dans ce cas, nous avons :

$$u_{,x} = \gamma = 0 \quad (3.16)$$

et les déplacements nodaux sont :

$$\begin{aligned}
 u_p &= u_k = w_p = w_k = 0 \\
 u_n &= -u_m = \frac{L_c L_g}{2} \psi_{,x} \\
 w_n &= w_m = -\frac{1}{2} L_c^2 \psi_{,x}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

ainsi les coefficients c_i deviennent :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= c_2 = c_5 = c_6 = 0 \\
 c_3 &= -c_4 = -\frac{L_g}{2}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

et le vecteur des forces axiales peut s'écrire comme suit :

$$\{S\}^0 = \left\{ 0, 0, -\frac{L_g}{2} E_3 A_3, \frac{L_g}{2} E_4 A_4, 0, 0 \right\}^T \tag{3.19}$$

En utilisant les équations (3.11), (3.15) et (3.19), le vecteur des forces axiales totales résultant de la combinaison des trois modes de sollicitation considérés s'écrit sous la forme :

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 A_3 \\ E_4 A_4 \\ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 \\ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 \end{Bmatrix} u_{,x} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L_c L_g}{L_d^2} E_5 A_5 \\ -\frac{L_c L_g}{L_d^2} E_6 A_6 \end{Bmatrix} \gamma + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L_g}{2} E_3 A_3 \\ \frac{L_g}{2} E_4 A_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_{,x} \tag{3.20}$$

A partir de ces forces axiales, on peut prédire l'effort normal (N), l'effort tranchant (Q) et le moment de flexion (M), ces derniers sont donnés par les relations suivantes :

$$N = (E_3 A_3 + E_4 A_4 + 2E_5 A_5 \frac{L_c^3}{L_d^3}) u_{,x} + \frac{L_g}{2} (E_4 A_4 - E_3 A_3) \psi_{,x}$$

$$Q = 2 E_5 A_5 \frac{L_c L_g^2}{L_d^3} \gamma \quad (3.21)$$

$$M = \frac{L_g}{2} (E_4 A_4 - E_3 A_3) u_{,x} + \frac{L_g^2}{4} (E_4 A_4 + E_3 A_3) \psi_{,x}$$

En comparant les équations ci-dessus avec les équations (2.5), on obtient les coefficients d'élasticité et de couplage

$$EA = E_3 A_3 + E_4 A_4 + 2 E_5 A_5 \frac{L_c^3}{L_d^3}$$

$$GA = 2 E_5 A_5 \frac{L_c L_g^2}{L_d^3}$$

$$EI = \frac{L_c^2}{4} (E_4 A_4 + E_3 A_3) \quad (3.22)$$

$$\eta_{13} = \frac{L_g}{2} (E_4 A_4 - E_3 A_3)$$

$$\eta_{12} = \eta_{23} = 0$$

On peut remarquer, à partir des équations ci-dessus, que le couplage entre les modes de sollicitation de tension et de

flexion existe si les deux barres horizontales sont différentes.

b. Structure asymétrique

La méthode précédente est aussi appliquée à la structure asymétrique. Pour les modes de déformations axiales et flexionnelles, les vecteurs des forces axiales sont identiques à ceux de la structure symétrique sauf que l'un des éléments diagonaux est éliminé. D'autre part, il est nécessaire de noter que le déplacement transversal du noeud p (Figure 3.4b) est dans ce cas important et ne peut être négligé lorsque le mode de cisaillement est considéré. Par conséquent, les déplacements nodaux sont donnés approximativement (figure 3.4b) par :

$$\begin{aligned} W_p &= -L_1 \gamma \\ W_m &= L_c \gamma \\ W_n &= L_2 \gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\text{où } L_c = L_1 + L_2 \quad (3.24)$$

L_1 et L_2 sont obtenus par la méthode de rigidité directe comme suit :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{L_c L_g^3}{D} E_5 A_5 \\ L_2 &= 2 \frac{L_c L_d^3}{D} E_2 A_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{avec } D = L_g^3 E_5 A_5 + 2 L_d^3 E_2 A_2 \quad (3.26)$$

En combinant les équations (3.2b), (3.21) et (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned}
 b_1 = -b_2 &= -\frac{L_c L_g^2}{D} E_5 A_5 \\
 b_3 = b_4 &= 0 \\
 b_5 &= 2 \frac{L_c L_g L_d}{D} E_2 A_2
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

ainsi le vecteur des forces axiales dues au mode de cisaillement s'écrit :

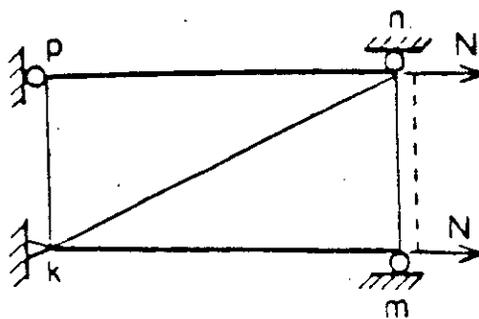
$$\left\{ S \right\}^s = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{L_c L_g^3}{D} E_5 A_5 E_1 A_1 \\ \frac{L_c L_g^3}{D} E_5 A_5 E_2 A_2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \frac{L_c L_d L_g}{D} E_5 A_5 E_2 A_2 \end{array} \right\} \gamma \tag{3.26}$$

En utilisant les équations (3.11), (3.19) et (3.26), le vecteur des forces axiales résultant de la combinaison des trois modes de sollicitation s'écrit comme suit :

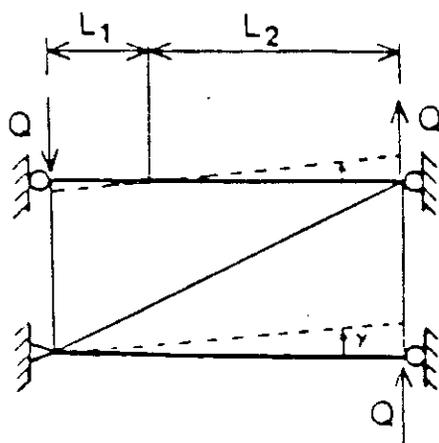
$$\{S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 A_3 \\ E_4 A_4 \\ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 \\ \frac{L_c^2}{L_d^2} E_5 A_5 \end{Bmatrix} u_{,x} + \begin{Bmatrix} -\frac{L_c L_g^3}{D} E_5 A_5 E_1 A_1 \\ \frac{L_c L_g^3}{D} E_5 A_5 E_2 A_2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \frac{L_c L_d L_g}{D} E_5 A_5 E_2 A_2 \end{Bmatrix} \gamma + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L_g}{2} E_3 A_3 \\ \frac{L_g}{2} E_4 A_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_{,x} \quad (3.27)$$

De la même manière que précédemment, les constantes d'élasticité et les coefficients de couplage sont obtenus et donnés par :

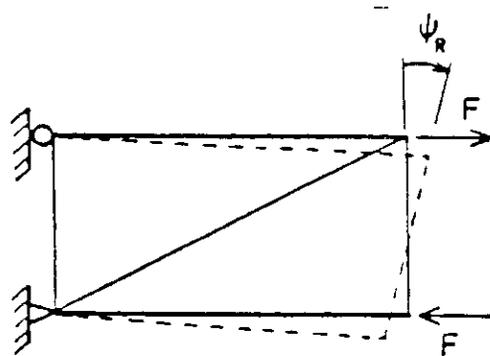
$$\begin{aligned} EA &= E_3 A_3 + E_4 A_4 + \frac{L_c^3}{L_d^3} E_5 A_5 \\ GA &= 2 \frac{L_c L_g^2}{D} E_2 A_2 E_5 A_5 \\ EI &= \frac{L_g^2}{4} (E_3 A_3 + E_4 A_4) \\ \eta_{12} &= 2 \frac{L_c^2 L_g}{D} E_2 A_2 E_5 A_5 \\ \eta_{13} &= \frac{L_g}{2} (E_4 A_4 - E_3 A_3) \\ \eta_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$



(a) Traction pure



(b) Cisaillement pur



(c) Flexion pure

Figure 3.4 : Différentes sollicitations appliquées à une cellule asymétrique

Les tableaux (3.1), (3.2) et (3.3) regroupent les valeurs numériques des coefficients de couplage et des constantes d'élasticité calculés par la méthode des tests numériques (2^{ème} méthode) et par celle développée dans cette étude (3^{ème} méthode). On remarque que les résultats obtenus sont sensiblement identiques.

3.4 Termes équivalents d'inertie

Les termes équivalents d'inertie sont aussi obtenus à partir des caractéristiques d'inertie et de géométrie de la cellule. La masse par unité de longueur de la poutre (ρA) est égale à la masse totale de la cellule divisée par sa longueur, l'inertie de rotation (ρI) et le moment d'inertie d'ordre un (R) sont égaux respectivement à la somme des moments d'inertie et à la somme des moments d'inertie d'ordre un de chaque barre de la cellule. On a donc :

$$\begin{aligned} \rho A &= \frac{1}{L_c} \sum_{i=1}^{i=n} (\rho A)_i L_i \\ \rho I &= \frac{1}{L_c} \sum_{i=1}^{i=n} (\rho I)_i L_i \\ R &= \frac{1}{L_c} \sum_{i=1}^{i=n} (\rho A)_i L_i d_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec i et n représentant respectivement le numéro et le nombre d'élément de la cellule; d_i étant la distance depuis la ligne moyenne de la cellule jusqu'à l'élément i .

Propriétés équivalentes	2ième méthode	3ième méthode	Erreur %
EA [N]	1.458817 10 ⁷	1.4776 10 ⁷	1.22
GA [N]	1.4685 10 ⁶	1.4685 10 ⁶	0.
EI [N-m ²]	7.17 10 ⁷	7.17 10 ⁷	0.
$\eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{23}$	0.	0.	0.

Tableau 3.1: Structure symétrique

Propriétés équivalentes	2ième méthode	3ième méthode	Erreur %
EA [N]	1.293476 10 ⁷	1.31241 10 ⁷	1.46
GA [N]	6.592413 10 ⁵	6.59217 10 ⁵	0.
EI [N-m ²]	7.17 10 ⁷	7.17 10 ⁷	0.
η_{12} [N]	9.888665 10 ⁵	9.8888 10 ⁵	0.
η_{13} [N-m]	0.	0.	0.
η_{23} [N-m]	0.	0.	0.

Tableau 3.2 : Structure asymétrique No.1

Propriétés équivalentes	2ième méthode	3ième méthode	Erreur %
EA [N]	2.012138 10 ⁷	2.0294 10 ⁷	0.86
GA [N]	6.574927 10 ⁵	6.59217 10 ⁵	0.26
EI [N-m ²]	1.165127 10 ⁸	1.165125 10 ⁸	0.
η_{12} [N]	9.8623 10 ⁵	9.8888 10 ⁵	0.27
η_{13} [N-m]	1.792479 10 ⁷	1.7925 10 ⁷	0.
η_{23} [N-m]	-9.18692	0.	-

Tableau 3.3 : Structure asymétrique No.2

3.3.2 Structures tridimensionnelles

La cellule d'une structure tridimensionnelle est représentée sur la figure (3.5). Dans ce cas, les relations (3.1), (3.3) et (3.4) deviennent respectivement :

$$\varepsilon_i = a_i \varepsilon + b_i \gamma_1 + c_i \gamma_2 + d_i \vartheta_{y,x} + e_i \vartheta_{z,x} + f_i \vartheta_{x,x} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{L_i} \left\{ \begin{matrix} 1 & m & n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \end{matrix} \right\}^T \quad (3.31)$$

où l , m et n sont les cosinus directeurs.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{u_R - u_L}{L_C} \\ \gamma_1 &= \frac{v_R - v_L}{L_C} - \frac{1}{2} (\vartheta_{zR} + \vartheta_{zL}) \\ \gamma_2 &= \frac{w_R - w_L}{L_C} - \frac{1}{2} (\vartheta_{yR} + \vartheta_{yL}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\vartheta_{x,x} = \frac{\vartheta_{xR} - \vartheta_{xL}}{L_C}$$

$$\vartheta_{y,x} = \frac{\vartheta_{yR} - \vartheta_{yL}}{L_C}$$

$$\vartheta_{z,x} = \frac{\vartheta_{zR} - \vartheta_{zL}}{L_C}$$

1^{er} mode : traction pure (Figure 3.5a)

Dans ce cas, toutes les déformations autre que la déformation de membrane sont nulles. Donc on a :

$$u_2 = u_3 = u_6 = u_7 = L_c \varepsilon \quad (3.33)$$

d'où les coefficients a_i :

$$a_i = 1 \quad (i = 5, 6, 9, 10) \quad (3.34)$$

$$a_i = \frac{L_c^2}{L_d^2} \quad (i = 13, 14, 17, 18, 21, 22, 23, 24) \quad (3.35)$$

les autres coefficients sont nuls.

2^{ième} mode : cisaillement pure (Figure 3.5b)

Dans ce cas, seules les déformations de cisaillement sont non nulles. Donc on a :

-suivant la direction de l'axe des Y :

$$v_2 = v_3 = v_6 = v_7 = L_c \gamma_1 \quad (3.36)$$

d'où les coefficients b_i :

$$b_i = \frac{L_c L_g}{L_d^2} \quad (i = 13, 18) \quad (3.37)$$

$$b_i = -\frac{L_c L_g}{L_d^2} \quad (i = 14, 17) \quad (3.38)$$

les autres sont nuls.

-suivant la direction de l'axe des z :

$$w_2 = w_3 = w_6 = w_7 = L_c \gamma_z \quad (3.39)$$

d'où les coefficients b_i :

$$c_i = \frac{L_c L_g}{L_d^2} \quad (i = 22, 24) \quad (3.40)$$

$$c_i = -\frac{L_c L_g}{L_d^2} \quad (i = 21, 23) \quad (3.41)$$

les autres sont nuls.

3^{ème} mode : flexion pure (Figure 3.6a)

Dans ce cas, les déformations autre que les déformations dues à la flexion sont nulles. On a donc :

-moment autour de l'axe des Y :

$$u_3 = u_7 = -u_2 = -u_6 = -\frac{L_g L_c}{2} \vartheta_{y,x} \quad (3.42)$$

$$w_2 = w_3 = w_6 = w_7 = \frac{L_c^2}{2} \vartheta_{y,x} \quad (3.43)$$

d'où les coefficients d_i :

$$d_i = -d_j = \frac{L_g}{2} \quad (i = 5, 6, j = 9, 10) \quad (3.44)$$

$$d_i = -d_j = \frac{L_g^2 L_c}{2L_c^2} \quad (i = 13, 14; j = 17, 18) \quad (3.45)$$

les autres coefficients sont nuls.

-moment autour de l'axe des Z :

$$u_2 = u_3 = -u_6 = -u_7 = \frac{L_g L_c}{2} \vartheta_{z,x} \quad (3.46)$$

$$v_2 = v_3 = v_6 = v_7 = \frac{L_c^2}{2} \vartheta_{z,x} \quad (3.47)$$

d'où les coefficients e_i :

$$e_i = -e_j = \frac{L_g}{2} \quad (i = 5, 6, j = 9, 10) \quad (3.48)$$

$$e_i = -e_j = \frac{L_g^2 L_c}{2L_c^2} \quad (i = 13, 14; j = 17, 18) \quad (3.49)$$

les autres coefficients sont nuls.

4^{ème} mode : torsion pure (Figure 3.6b).

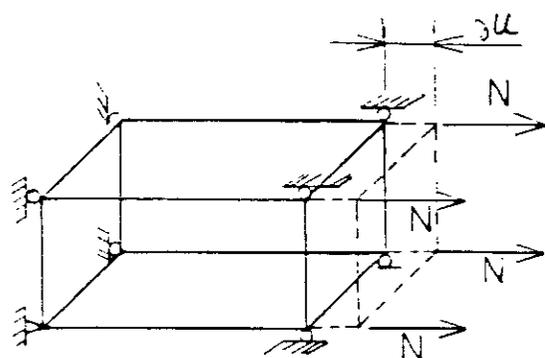
Dans ce cas, les déformations torsionnelles sont non nulles. On a les déplacements nodaux suivants :

$$v_2 = v_3 = -v_6 = -v_7 = w_2 = w_6 = -w_3 = -w_7 = \frac{L_c L_g}{2} \vartheta_{x,x} \quad (3.50)$$

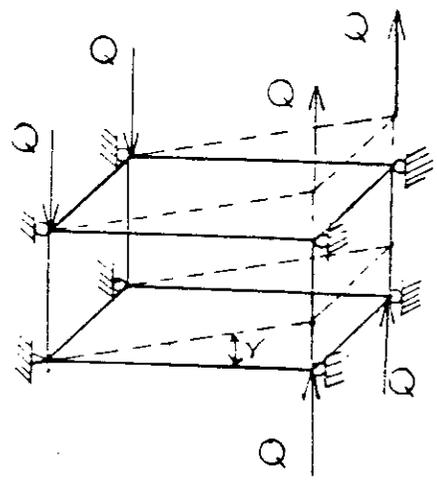
les coefficients f_i sont :

$$f_i = -f_j = -\frac{L_c L_g^2}{2L_d^2} \quad (i = 13, 18, 21, 24 ; j = 14, 17, 22, 23) \quad (3.51)$$

les autres sont nuls.

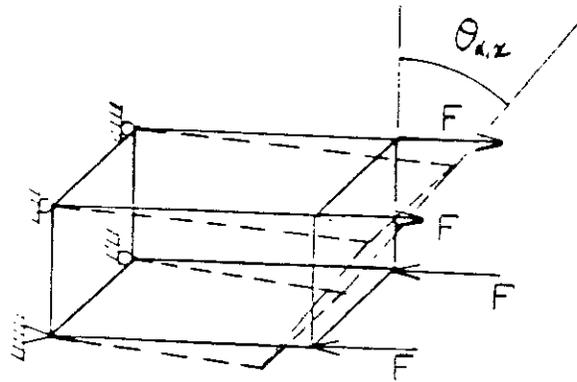


(a) Traction pure

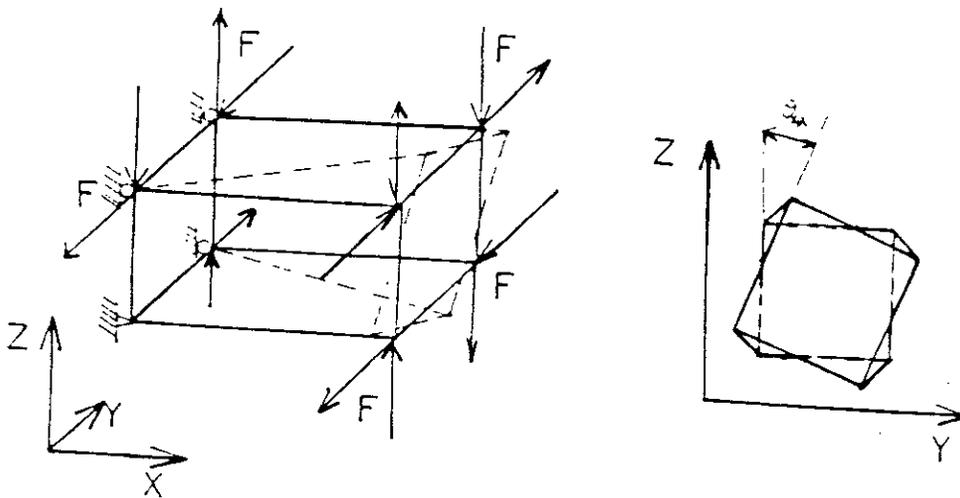


(b) Cisaillement pur

Figure 3.5 : Différents modes de sollicitation appliqués à une structure tridimensionnelle



(a) Flexion pure



(b) Torsion pure

Figure 3.5 : Différents modes de sollicitation appliqués à une structure tridimensionnelle

Pour chaque mode de déformation, les forces axiales correspondant aux coefficients nuls sont nulles.

Les constantes d'élasticité sont obtenus de la même manière que le cas d'une structure plane. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 4E_5 A_5 + 8 \frac{L_c^2 L_g}{L_d^3} E_{13} A_{13} \\
 C_2 &= C_3 = 4 \frac{L_c L_g^2}{L_d^3} E_{13} A_{13} \\
 C_4 &= 2 \frac{L_c L_g^4}{L_d^3} E_{13} A_{13} \\
 C_5 &= C_6 = L_g^2 \left(E_5 A_5 + \frac{L_c^3}{L_d^3} E_{13} A_{13} \right)
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Les termes équivalents d'inertie de cette structure sont aussi donnés par les équations (3.29).

Il est évidemment observé que les valeurs numériques des propriétés équivalentes ci-dessus obtenues par la méthode développée dans cette étude sont sensiblement identiques à celles obtenues par la méthode énergétique (1^{ère} méthode). Ceci, une fois de plus, confirme la méthode développée.

Propriétés équivalentes	1 ^{ière} méthode	3 ^{ième} méthode	Erreur %
C_1 [N]	$3.47748 \cdot 10^7$	$3.6160543 \cdot 10^7$	3.98
$C_2 = C_3$ [N]	$1.77045 \cdot 10^8$	$1.847017 \cdot 10^8$	4.32
C_4 [N-m ²]	$3.67126 \cdot 10^7$	$3.6712619 \cdot 10^7$	0.
$C_5 = C_6$ [N-m ²]	$2.93701 \cdot 10^6$	$2.9370095 \cdot 10^6$	0.

Tableau 3.4 : Constantes d'élasticité
d'une structure tridimensionnelle

CHAPITRE 4

ANALYSE DYNAMIQUE

Les problèmes de la dynamique des structures peuvent être subdivisés en deux grandes catégories. La première catégorie, qui représente les vibrations libres, consiste à déterminer les fréquences circulaires et les modes propres. Généralement, on veut comparer ces fréquences à celles de l'excitation. Dans le domaine de la construction, il est souhaitable que ces fréquences soient bien séparées. Dans la seconde, on doit déterminer l'évolution des déplacements dans le temps : c'est la réponse dynamique ou "l'histoire des déplacements". Par suite, les autres caractéristiques de la réponse dynamique (contraintes, déformations, forces internes) font généralement l'objet d'une seconde phase s'appuyant sur les déplacements précédemment déterminés.

4.1 Vibrations libres

Dans le cas des vibrations libres, aucune force extérieure n'est appliquée, les équations du mouvement (2.43) deviennent :

$$[M] \{ \ddot{\Delta} \} + [K] \{ \Delta \} = 0 \quad (4.1)$$

où $[M]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices globales réduites de masse et de rigidité définies dans le chapitre 2 et $\{ \Delta \}$ étant le vecteur global des déplacements.

La vibration étant harmonique, on a donc :

$$\{ \Delta \} = \{ \bar{\Delta} \} \sin \omega t \quad (4.2)$$

$$\{ \ddot{\Delta} \} = -\omega^2 \{ \bar{\Delta} \} \sin \omega t \quad (4.3)$$

où $\{ \bar{\Delta} \}$ et ω sont respectivement l'amplitude du vecteur des déplacements et la fréquence circulaire en radian/seconde.

En introduisant les équations (4.2) et (4.3) dans (4.1), on obtient :

$$([K] - \lambda [M]) = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \omega^2 \quad (4.4)$$

Ceci n'est vérifié que pour certaines valeurs de ω , valeurs pour lesquelles le déterminant de la matrice entre parenthèses est nul. Ces valeurs définissent les fréquences circulaires de la structure et on reconnaît là un problème typique de valeurs et vecteurs propres :

$$\det([K] - \lambda [M]) = 0 \quad (4.5)$$

A chaque fréquence circulaire pour laquelle l'équation (4.5) est vérifiée, correspond un vecteur $\{ \bar{\Delta} \}$ dont les composantes sont définies à un facteur multiplicatif arbitraire près. De tels vecteurs sont appelés modes propres du système.

Les p premières petites valeurs de ω sont appelées les fréquences fondamentales de vibration. Dans le cas de la structure discrète, on utilisera le code du programme SAP80 et un programme a été développé utilisant la méthode d'itération sur sous-espace pour le modèle continu. Cette méthode est basée sur les principes suivants :

- générer n vecteurs charge de départ en nombre supérieur à celui des modes cherché ($p < n$). Ces vecteurs forment ce

qu'on appelle **matrice modèle de la charge** [$n \times n$] où n étant le nombre de degrés de liberté total.

- extraire les p premières valeurs de fréquences circulaires et mode propres associés par la méthode de réduction de RAYLEIGH-RITZ.

- si la précision désirée n'est pas atteinte, on améliore la matrice charge [P] qui sera de nouveau utilisée pour extraire les (p) premières valeurs et mode propres. Dans le cas contraire, l'algorithme s'arrête (Table 4.1).

4.2 Réponse dynamique

En analyse dynamique, il existe deux méthodes fondamentales de résolution : la méthode de superposition des modes et la méthode d'intégration directe ou pas à pas. Le choix entre ces méthodes dépend de la nature du problème à résoudre (linéaire ou non linéaire) et du contenu fréquentiel de l'excitation.

4.2.1 Méthode de superposition des modes

Cette méthode consiste à transformer les équations du mouvement, qui constituent un système de n équations différentielles, couplées par les termes non diagonaux des matrices de masse et de rigidité, en un système de n équations découplées. La réponse dynamique peut donc être obtenue en calculant séparément les réponses de chaque mode et en les assemblant à l'équation suivante :

$$\{ D \} \approx \sum_{i=1}^p \{ \bar{D} \}_i Z_i \quad (4.6)$$

où $\{ \bar{D} \}_i$ est le i -ième mode propre, Z_i est la réponse du i -ième mode, calculée à partir des équations découplées et p étant le nombre de modes pris en considération pour calculer la réponse dynamique.

I. Initialisation

1. Former $[M]$ et $[K]$.
2. Factorisation de $[K] = [U]^T [D] [U]$.
3. Spécifier la matrice modèle de charge de départ $[P]$.

II. Itération

1. Résoudre le système suivant :

$$([U]^T [D] [U]) [R] = [P]$$

2. Réduire les matrices :

$$[K]^* = [R]^T [K] [R] = [R]^T [P]$$

$$[M]^* = [R]^T [M] [R]$$

3. Résoudre le problème réduit de valeurs propres :

$$([K]^* - \lambda^* [M]^*) \{\phi\}_k^* = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

4. Calculer les modes propres du problème non réduit :

$$[R] [\{\phi\}_1^*, \{\phi\}_2^*, \dots, \{\phi\}_m^*]$$

5. Vérifier la convergence. S'arrêter lorsque la condition de convergence des valeurs propres est vérifiée.

6. Améliorer la matrice modèle de la charge :

$$[P] = [M] [R] [\{\phi\}_1^*, \{\phi\}_2^*, \dots, \{\phi\}_m^*]$$

7. Aller à l'étape II.1

Table 4.1 : Algorithme de la méthode d'itération sur sous-espace

La précision de cette méthode dépend du nombre p de nodes pris en compte. Ainsi, si tous les nodes propres de la structure sont pris en considération, alors la solution de la réponse dynamique est exacte ?!. Cette méthode sera utilisée pour calculer la réponse dynamique des structures discrètes.

4.2.2 Méthode d'intégration directe

L'idée principale de la méthode d'intégration directe est d'approximer en fonction des déplacements et à chaque instant, les accélérations et les vitesses par des différences finies. Il existe plusieurs méthodes basées sur cette idée parmi lesquelles on peut citer les différences centrées, NEWMARK et θ -WILSON. Pour déterminer la réponse dynamique du modèle dans notre cas, on utilisera la méthode θ -WILSON avec $\theta = 1$.

Cette méthode suppose que l'accélération varie linéairement dans l'intervalle $[t, t + dt]$ (Figure 4.1), on peut donc écrire :

$$\left\{ \ddot{\Delta} \right\}_{t+dt} = \left\{ \ddot{\Delta} \right\}_t + \frac{dt}{dt} \left[\left\{ \dot{\ddot{\Delta}} \right\}_{t+dt} - \left\{ \dot{\ddot{\Delta}} \right\}_t \right] \quad (4.7)$$

En intégrant l'équation (4.7), la vitesse et le déplacement peuvent être exprimés comme suit :

$$\left\{ \dot{\Delta} \right\}_{t+dt} = \left\{ \dot{\Delta} \right\}_t + \frac{dt}{2} \left[\left\{ \ddot{\Delta} \right\}_t + \left\{ \ddot{\Delta} \right\}_{t+dt} \right] \quad (4.8)$$

$$\left\{ \Delta \right\}_{t+dt} = \left\{ \Delta \right\}_t + dt \left\{ \dot{\Delta} \right\}_t + \frac{dt^2}{3} \left\{ \ddot{\Delta} \right\}_t + \frac{dt^2}{6} \left\{ \ddot{\ddot{\Delta}} \right\}_{t+dt} \quad (4.9)$$

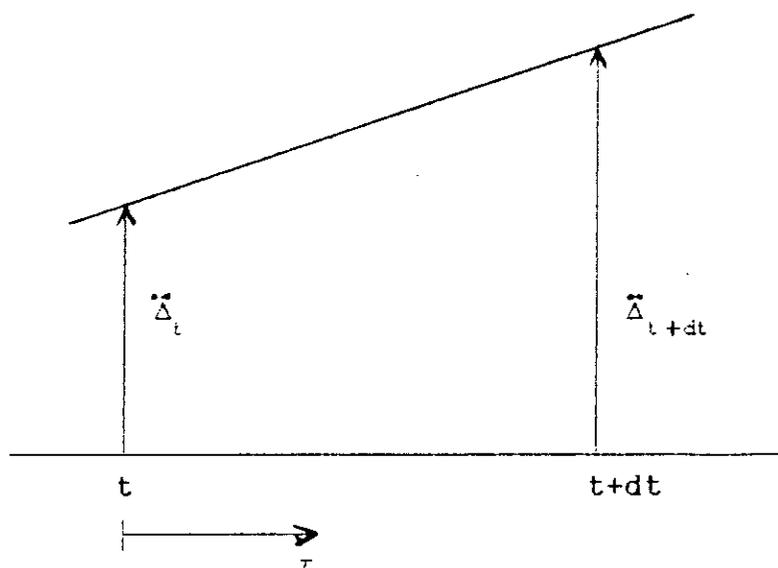


Figure 4.1 : Hypothèse sur la variation de l'accélération

En substituant les relations (4.8) et (4.9) dans les équations (2.43), on obtient :

$$[H] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\Delta} \\ \Delta \end{array} \right\}_{t+dt} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{F} \\ F \end{array} \right\}_{t+dt} \quad (4.10)$$

où $[H] = [M] + \frac{dt^2}{6} [K]$ (4.11)

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{F} \\ F \end{array} \right\}_{t+dt} = \left\{ \begin{array}{c} F \\ F \end{array} \right\}_{t+dt} - [K] \left[\left\{ \begin{array}{c} \Delta \\ \dot{\Delta} \end{array} \right\}_t + dt \left\{ \begin{array}{c} \dot{\Delta} \\ \ddot{\Delta} \end{array} \right\}_t + \frac{dt^2}{3} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\Delta} \\ \ddot{\Delta} \end{array} \right\}_t \right] \quad (4.12)$$

L'algorithme de calcul est donné à la table 4.2.

Cependant il est nécessaire de noter que cette méthode est conditionnellement stable, et exige par conséquent un incrément de temps dt qui doit vérifier la condition suivante [19] :

$$dt < dt_{crit} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (4.13)$$

où ω_{max} est la fréquence circulaire maximale de l'élément fini libre composant la structure.

4.3 Formulation de la force axiale

Pour une plus grande sécurité dans les constructions, la force axiale interne de l'élément barre de la cellule doit être déterminée. Cette force peut être obtenue à partir du modèle continu de TIMOSHENKO. Pour illustrer cette procédure, on considère une cellule comme le montre la figure 4.3. Si la force axiale de l'élément entre les noeuds k et n est à considérer alors les déplacements de ces noeuds sont déterminés à partir du champs de déplacement du modèle :

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_i - (Lg/2)\psi_i & w_k^* &= w_i \\ u_n^* &= u_j + (Lg/2)\psi_j & w_k^* &= w_j \end{aligned} \quad (32)$$

La force axiale dans un élément barre quelconque est donnée par :

$$S_{kn} = \frac{AE}{L} \left[(u_n^* - u_k^*) \cos \theta_{kn} + (w_n^* - w_k^*) \sin \theta_{kn} \right] \quad (33)$$

où E , A et L sont respectivement le module d'élasticité, la section transversale et la longueur de l'élément barre. θ_{kn} est l'angle entre l'élément barre et l'axe (X) mesuré en suivant le sens contraire des aiguilles d'une montre (figure 4.4).

I. Initialisation

1. Former $[K]$ et $[M]$
2. Initialisation de $\{\Delta\}_0$, $\{\dot{\Delta}\}_0$ et $\{\ddot{\Delta}\}_0$
3. Choisir l'incrément de temps dt et calculer les constantes suivantes :

$$a_1 = \frac{dt}{2} \quad , \quad a_2 = \frac{dt^2}{6} \quad , \quad a_3 = \frac{dt^2}{3}$$

4. Former la matrice de masse effective :

$$[H] = [M] + a_2[K]$$

5. Factorisation $[H] = [U]^T[D][U]$

II. Pour chaque pas de temps

1. Calculer la force effective à $t + dt$

$$\{\tilde{F}\}_{t+dt} = \{F\}_{t+dt} - [K] \left(\{\Delta\}_t + dt\{\dot{\Delta}\}_t + \frac{dt^2}{3}\{\ddot{\Delta}\}_t \right)$$

2. Calculer l'accélération $t+dt$ en résolvant :

$$[U]^T[D][U] \{\ddot{\Delta}\}_{t+dt} = \{\tilde{F}\}_{t+dt}$$

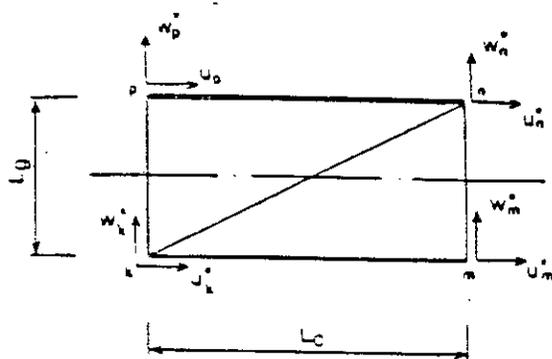
3. Calculer la vitesse et le déplacement à $t + dt$

$$\{\dot{\Delta}\}_{t+dt} = \{\dot{\Delta}\}_t + a_1 (\{\ddot{\Delta}\}_t + \{\ddot{\Delta}\}_{t+dt})$$

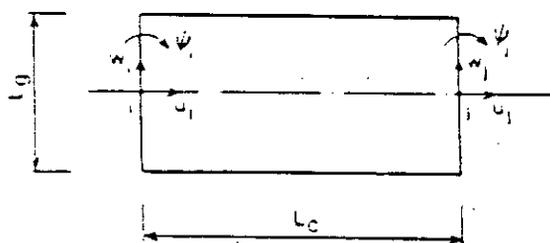
$$\{\Delta\}_{t+dt} = \{\Delta\}_t + dt\{\dot{\Delta}\}_t + a_2 (\{\ddot{\Delta}\}_t + \{\ddot{\Delta}\}_{t+dt})$$

4. Aller à II.1

Table 4.2 : Algorithme de calcul de la méthode de θ -WILSON avec $\theta = 1$



(a)



(b)

Figure 4.3 : Transition de l'élément discret (a)
au modèle continu (b).

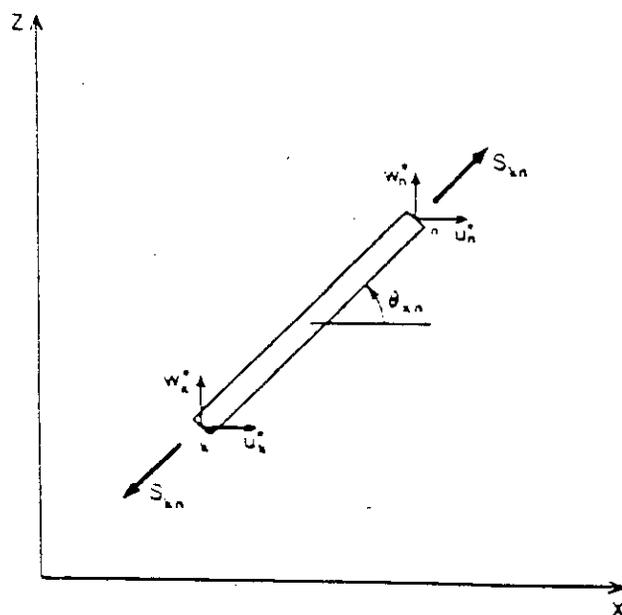


Figure 4.4 : Force axiale d'une barre plane (kn)

CHAPITRE 5

CALCUL ET DISCUSSION

Pour vérifier l'exactitude de l'élément fini dont la formulation est basée sur la théorie de la poutre de TIMOSHENKO. On considérera dans ce chapitre trois types de structures planes discrètes cantilevers, la première étant symétrique et les autres asymétriques dont les sections des barres horizontales supérieures sont différentes. Pour chacun de ces trois types de structures, on étudiera les vibrations libres et forcées. Par suite, les forces axiales dans chacune des barres constituant la structure seront déterminées.

Les fréquences circulaires des structures discrètes peuvent être obtenues en utilisant le code SAP80. Ainsi la réponse dynamique est obtenue par la méthode de superposition des nodes.

Pour le modèle continu, un programme informatique a été élaboré dans le but d'appliquer la formulation analytique décrite dans le chapitre 2, et son organigramme est donné par la figure 5.1.

Pour la réponse dynamique, la structure est excitée par une force impulsive donnée par :

$$F = \begin{cases} F_0 \sin\left(\frac{\pi}{t_1} t\right) & \text{pour } 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{pour } t > t_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

où F_0 est la force maximale prise égale à 200 N pour les trois types de structures. t_1 est la durée de l'excitation de force, choisie en fonction de la fréquence fondamentale de la structure T_0 tel que $t_1 = k T_0$ (5.2).

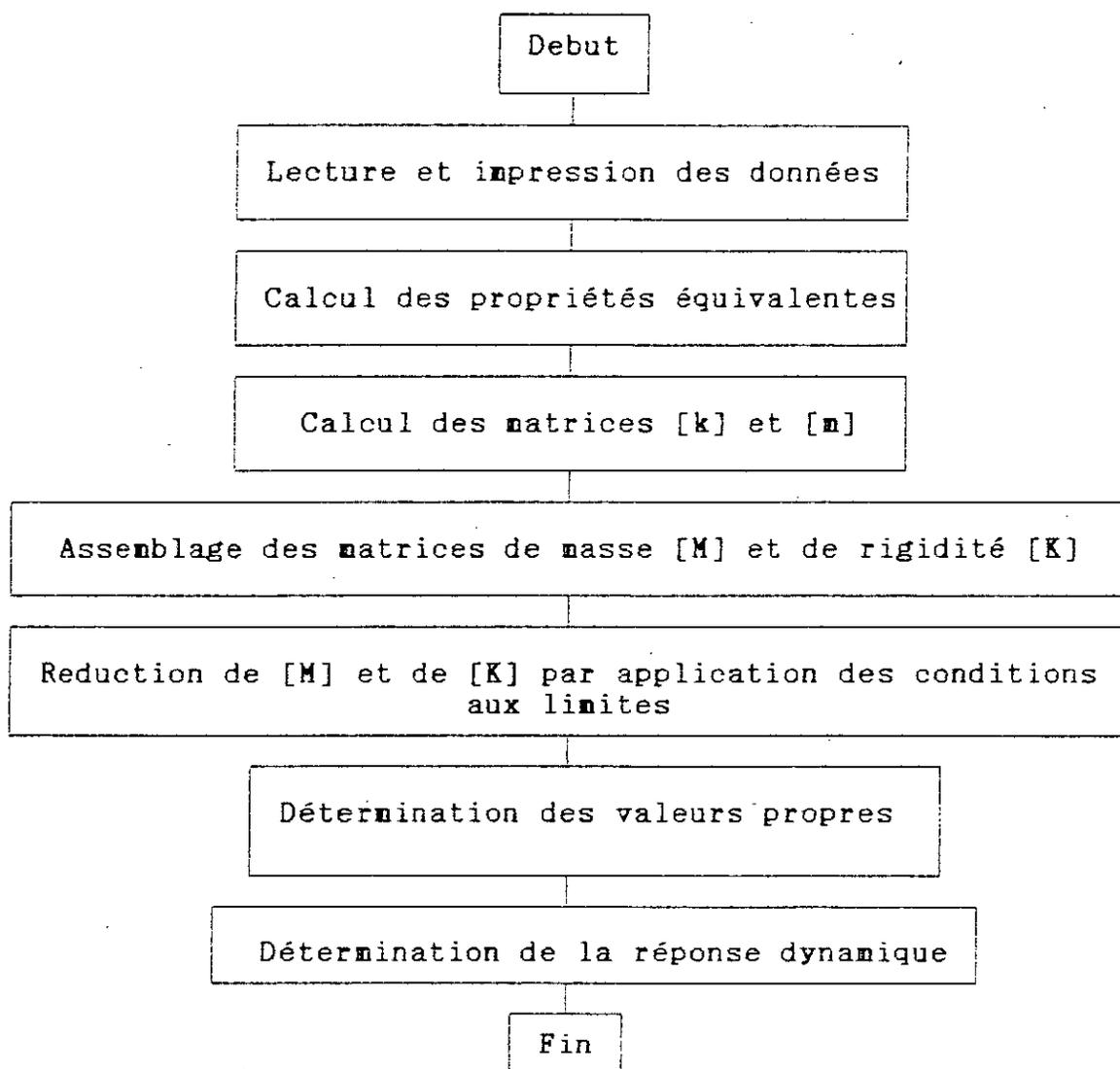


Figure 5.1 Organigramme condensé du programme informatique

5.1 Structure symétrique

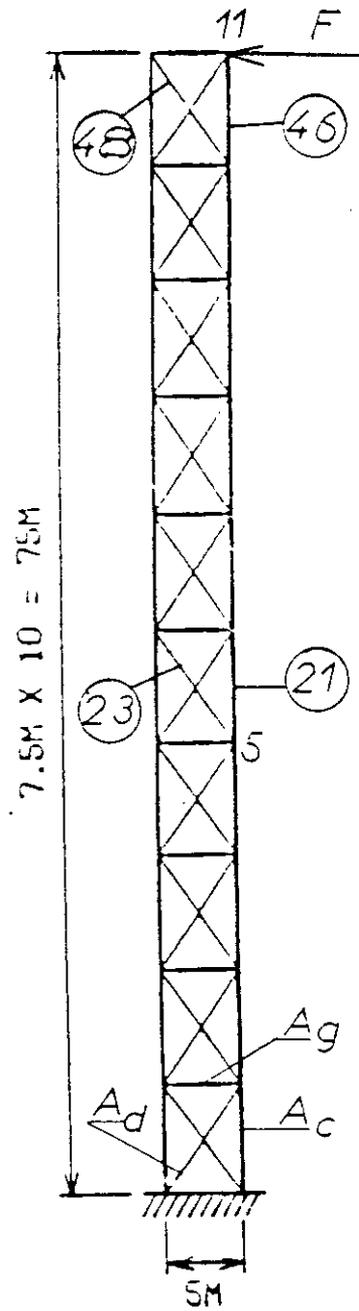
Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure symétrique cantilever sont donnée à la figure 5.2.

Pour les vibrations libres, les cinq premières fréquences circulaires ont été obtenues à l'aide de la méthode du modèle continu (Annexe 3) et sont comparées avec celles obtenues par la solution directe (SAP80). De très bonnes concordances entre les deux résultats ont été obtenues (Tableau 5.1).

Pour la réponse dynamique, la durée d'excitation de la force est égale à la moitié de la période fondamentale. Les déplacements axial et transversal de certains noeuds ainsi que les forces axiales dans certaines barres de ces structures sont représentés sur les figures (5.3-5.8). Les résultats obtenus par le modèle continu (Annexe 3) sont en bon accord avec la solution directe obtenue à l'aide du SAP80. On peut donc conclure qu'on dispose d'un modèle adéquat pour prédire les caractéristiques dynamiques des structures discrètes.

On remarque que la force axiale devient très importante au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'extrémité libre de la structure (Figure 5.8) et qu'on s'approche par conséquent de l'encastrement (Figure 5.6). Ce phénomène est dû à l'effet de la flexion.

En se référant aux figures (5.6,5.7), on remarque qu'il a fallu superposer un nombre très grand de réponses nodales (20 nodes) pour pouvoir mettre en évidence l'accord entre la solution du modèle et la solution directe. Par contre, cet accord est obtenu seulement avec cinq nodes pour une barre éloignée du point d'excitation (Figure 5.5). Ce phénomène peut être interprété par l'excitation d'un grand nombre de nodes propres.



$$E = 71.7 \times 10^9 \text{ [N/m}^2\text{]} \quad , \quad \rho = 2768 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$A_c = 30 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]} \quad , \quad A_g = 60 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_d = 40 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}$$

Figure 5.2 : Structure synétrique.

Mode	SAP80	BRNOULLI-EULER	Poutre de TIMOSHENKO	
		ω	ω	erreur %
1	5.629	5.845	5.722	1.65
2	31.465	36.63	32.057	1.88
3	76.796	102.7	78.467	2.18
4	86.539	-	88.920	2.75
5	128.867	201.0	132.987	3.20

Tableau 5.1 : Fréquences circulaires
de la structure symétrique

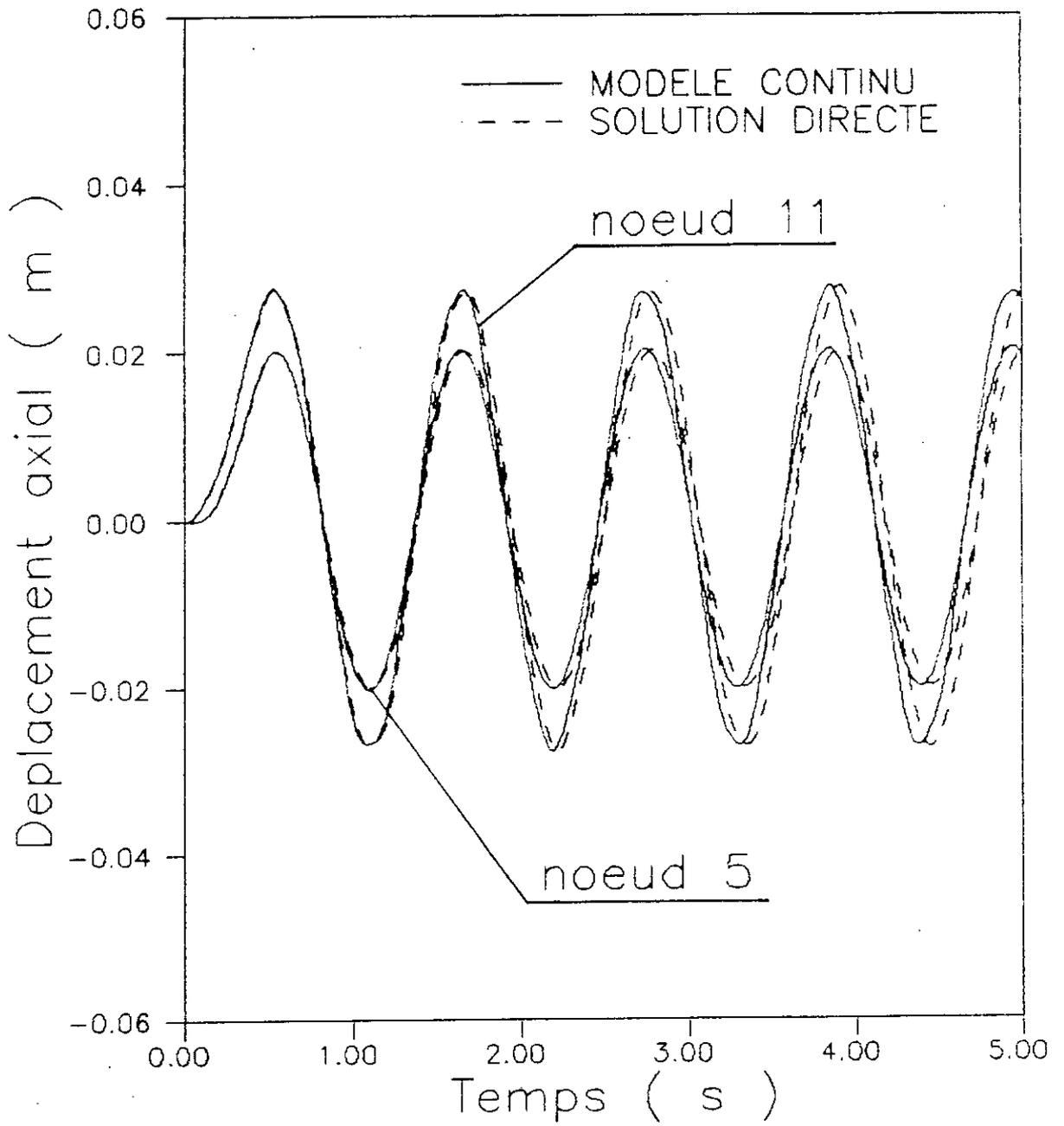


Figure 5.3 : Déplacements axiaux des nœuds
de la structure symétrique
($t_1 = 0.55$ s)

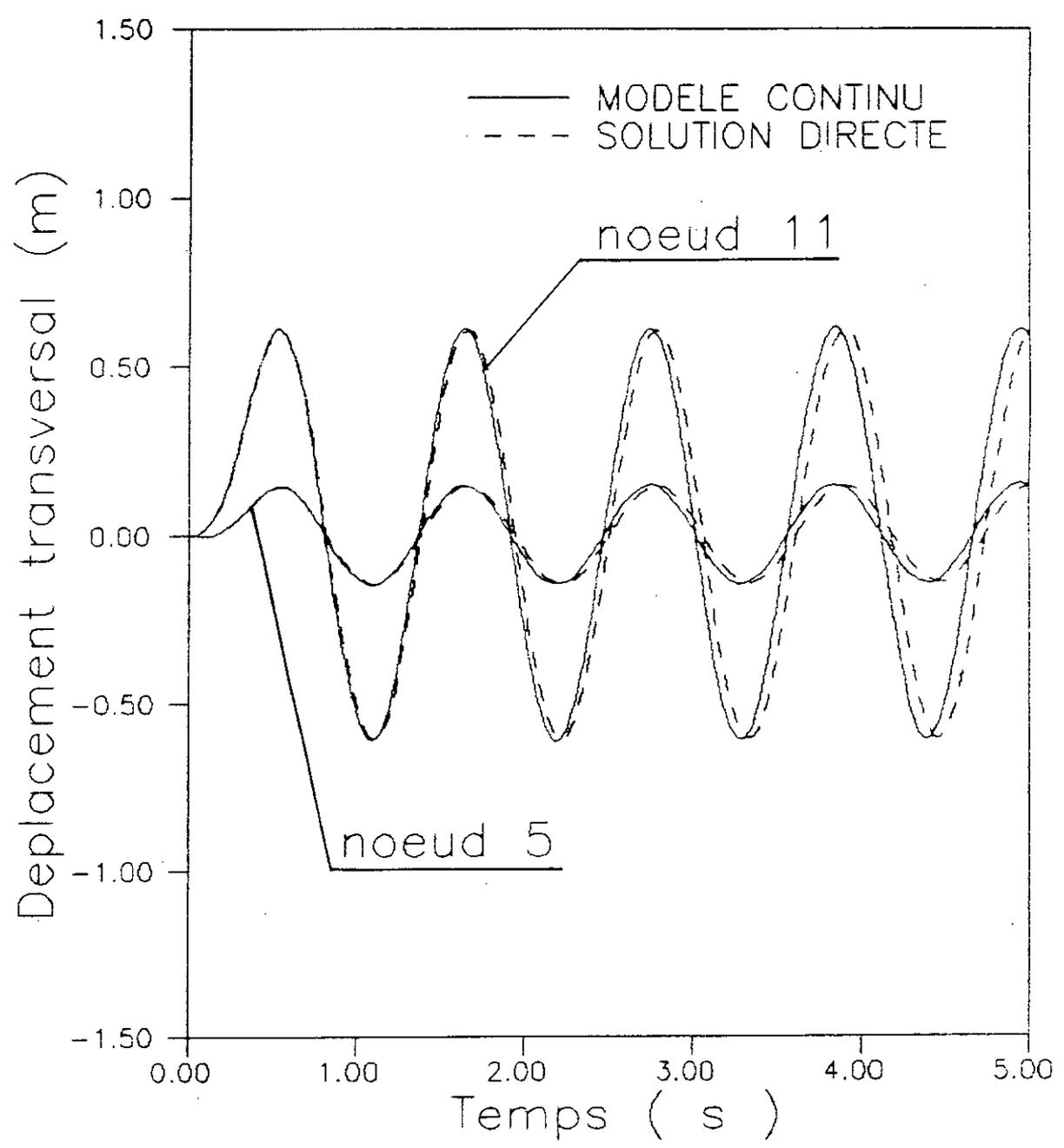


Figure 5.4 : Déplacements transversaux des nœuds de la structure symétrique (t₁ = 0.55 s)

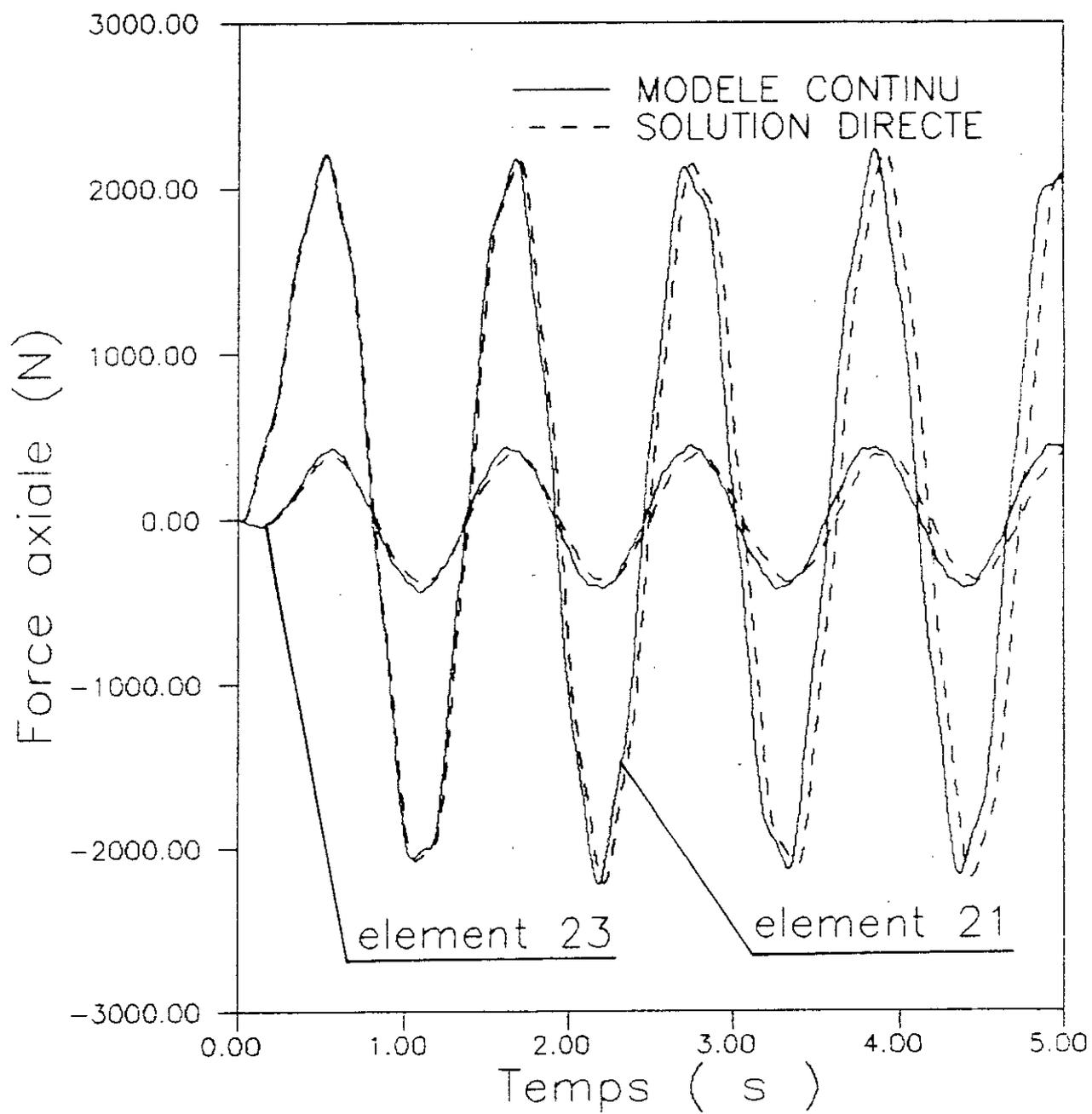


Figure 5.5 : Forces axiales dans des barres de la structure symétrique ($t_1 = 0.55$ s)

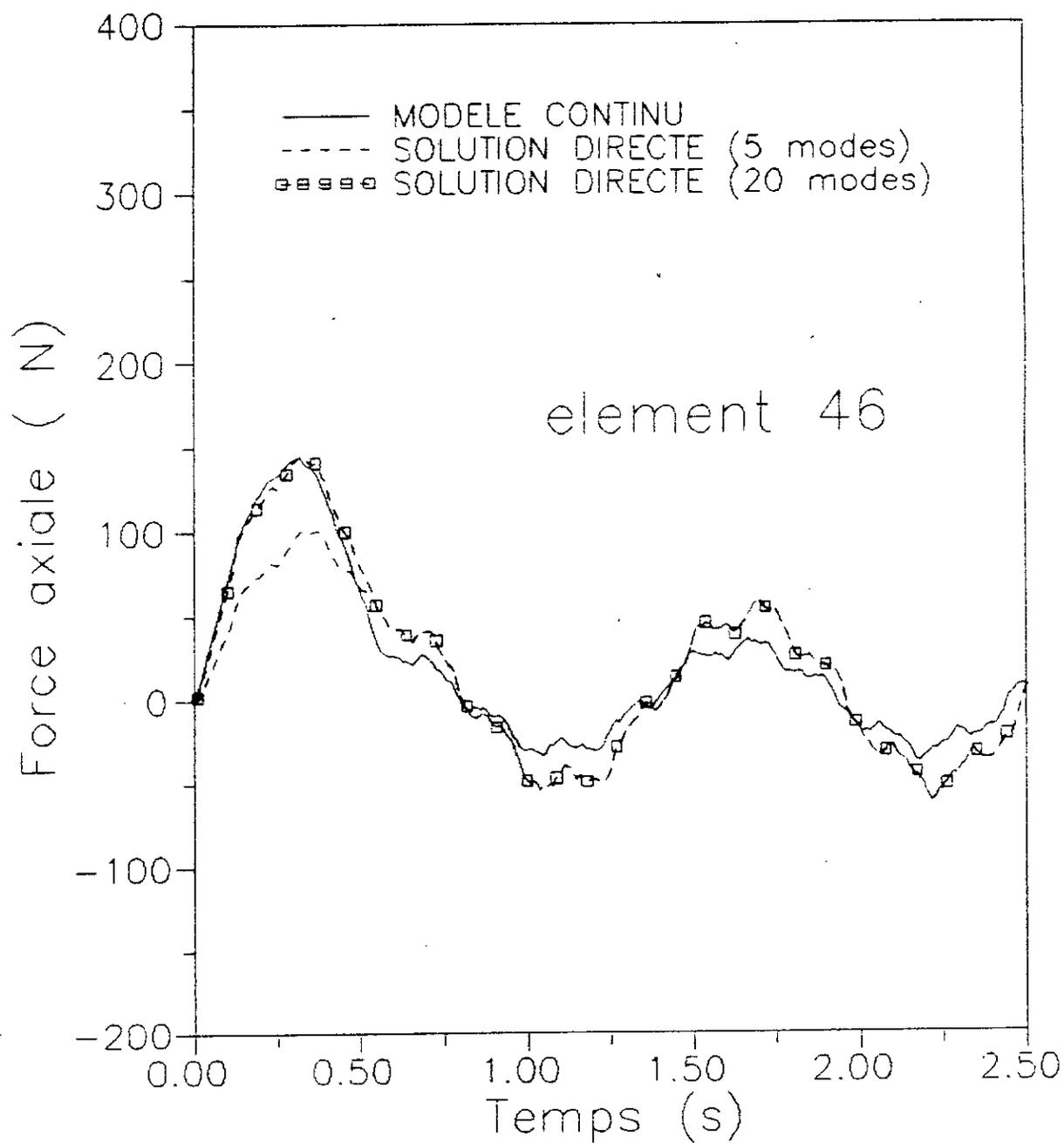


Figure 5.6 : Forces axiales dans des barres de la structure symétrique ($t_1 = 0.55$ s)

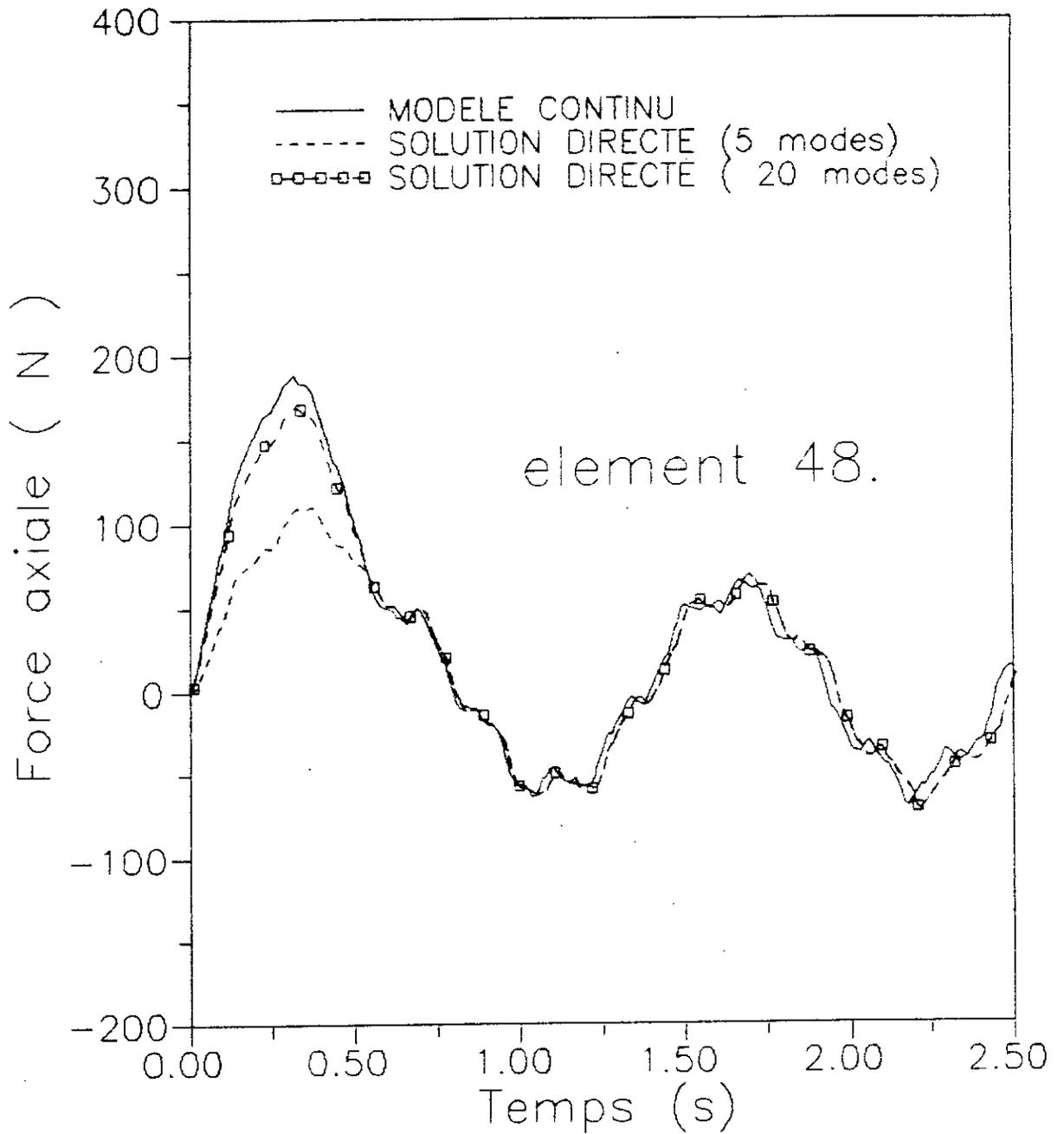


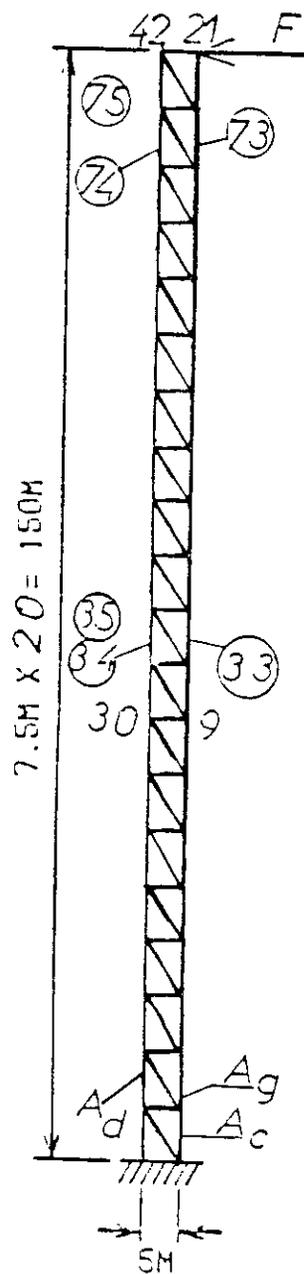
Figure 5.7 : Forces axiales dans des barres de la structure symétrique ($t_1 = 0.55$ s)

5.3 Structure asymétrique No. 1

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de cette structure sont données à la figure (5.9).

Les dix premières fréquences circulaires de cette structure ont été obtenues par le modèle continu et comparées avec celles obtenues par la solution directe, une bonne concordance des résultats a été aussi obtenue (Tableau 5.2).

Pour la réponse dynamique, on a pris la durée d'excitation t_1 égale à un dixième de la période fondamentale ($t_1 = 0.1T_0 = 0.4$ s). Les déplacements de certains noeuds, ainsi que les forces axiales dans certains éléments de la structure sont représentés sur les figures (5.11-5.14). Comme on peut le voir, ces figures montrent un bon accord entre les résultats obtenus par le modèle continu avec ceux obtenus par la solution directe.



$$\begin{aligned}
 E &= 71.7 \times 10^9 \text{ [N/m}^2\text{]} & , & \quad \rho = 2768 \text{ [kg/m}^3\text{]} \\
 A_c &= 60 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]} & , & \quad A_g = 60 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]} \\
 A_d &= 40 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

Figure 5.8 : Structure asymétrique No. 1.

Mode	SAP80	Poutre de TIMOSHENKO	
		$\omega_{\eta_{ij} \neq 0}$	erreur %
1	1.563	1.576	0.83
2	9.117	9.195	0.86
3	23.220	23.395	0.75
4	40.287	40.607	0.79
5	43.357	43.841	1.12
6	59.976	60.527	0.92
7	79.846	80.936	1.37
8	99.538	101.572	2.04
9	118.908	122.478	3.00
10	128.451	130.331	1.46

Tableau 5.2 : Fréquences circulaires de la structure asymétrique No.1

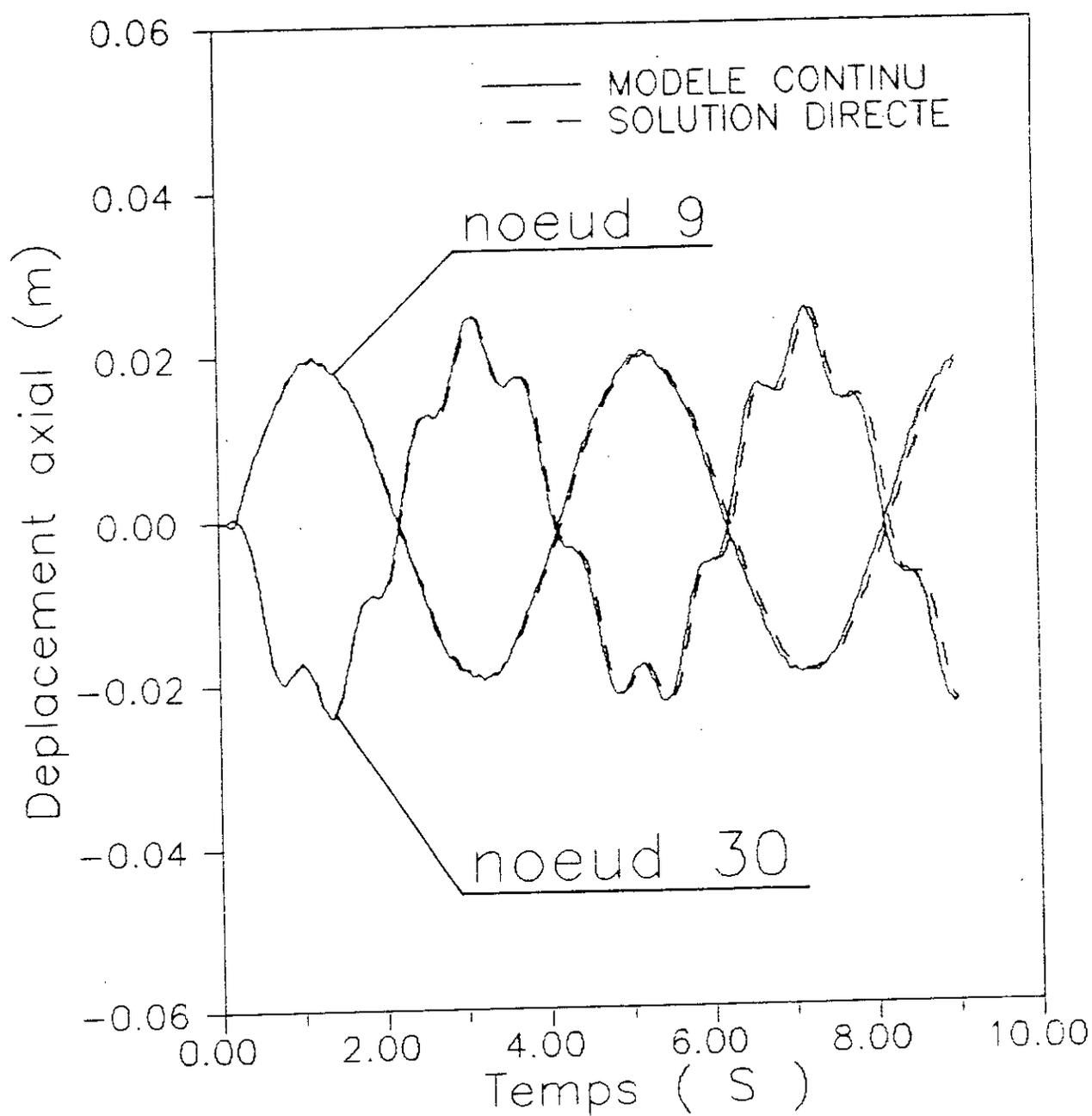


Figure 5.9 : Déplacements axiaux des noeuds de la structure asymétrique No. 1 ($t_1=0.4$ s)

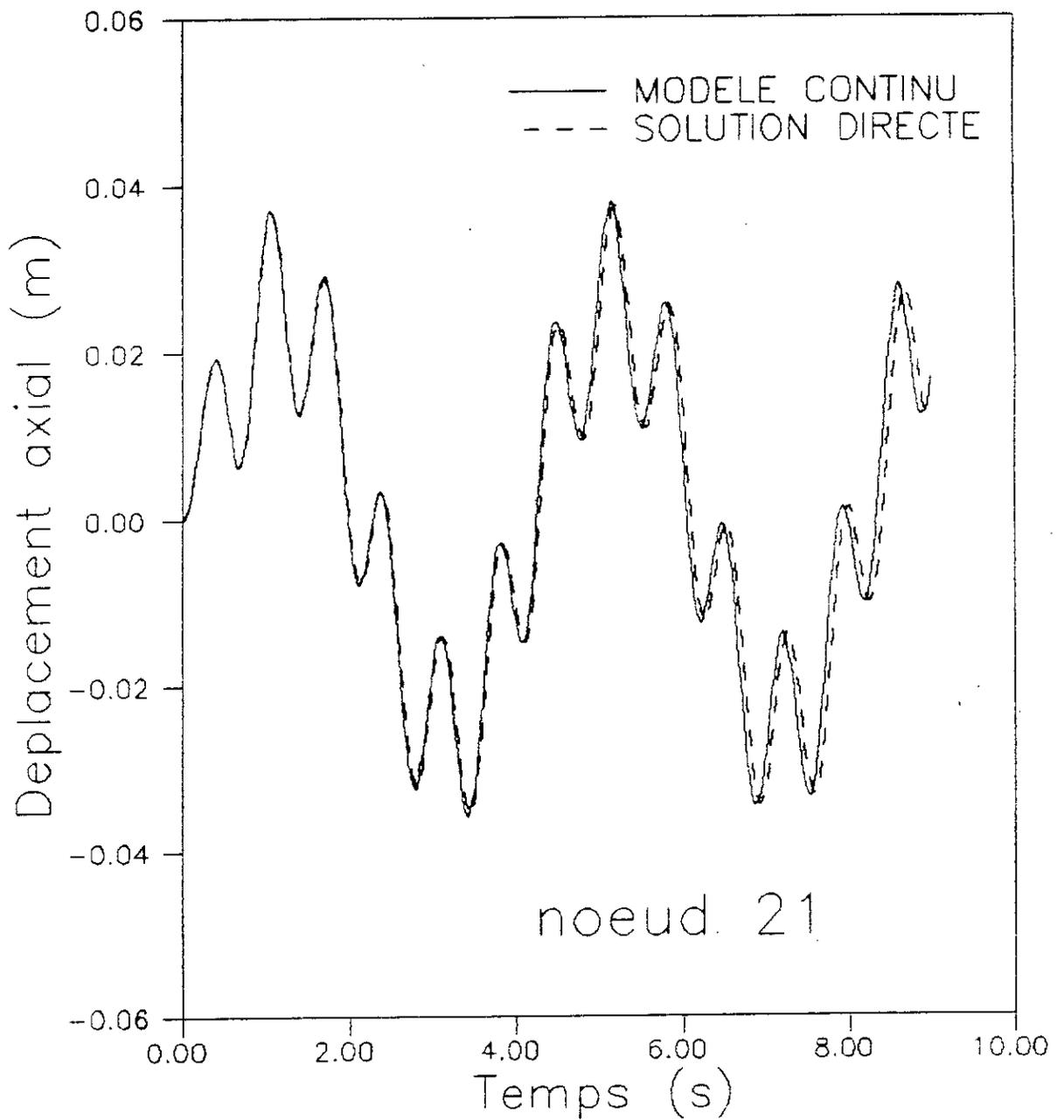


Figure 5.10 : Déplacements axiaux des noeuds de la structure asymétrique No. 1 ($t_1=0.4$ s)

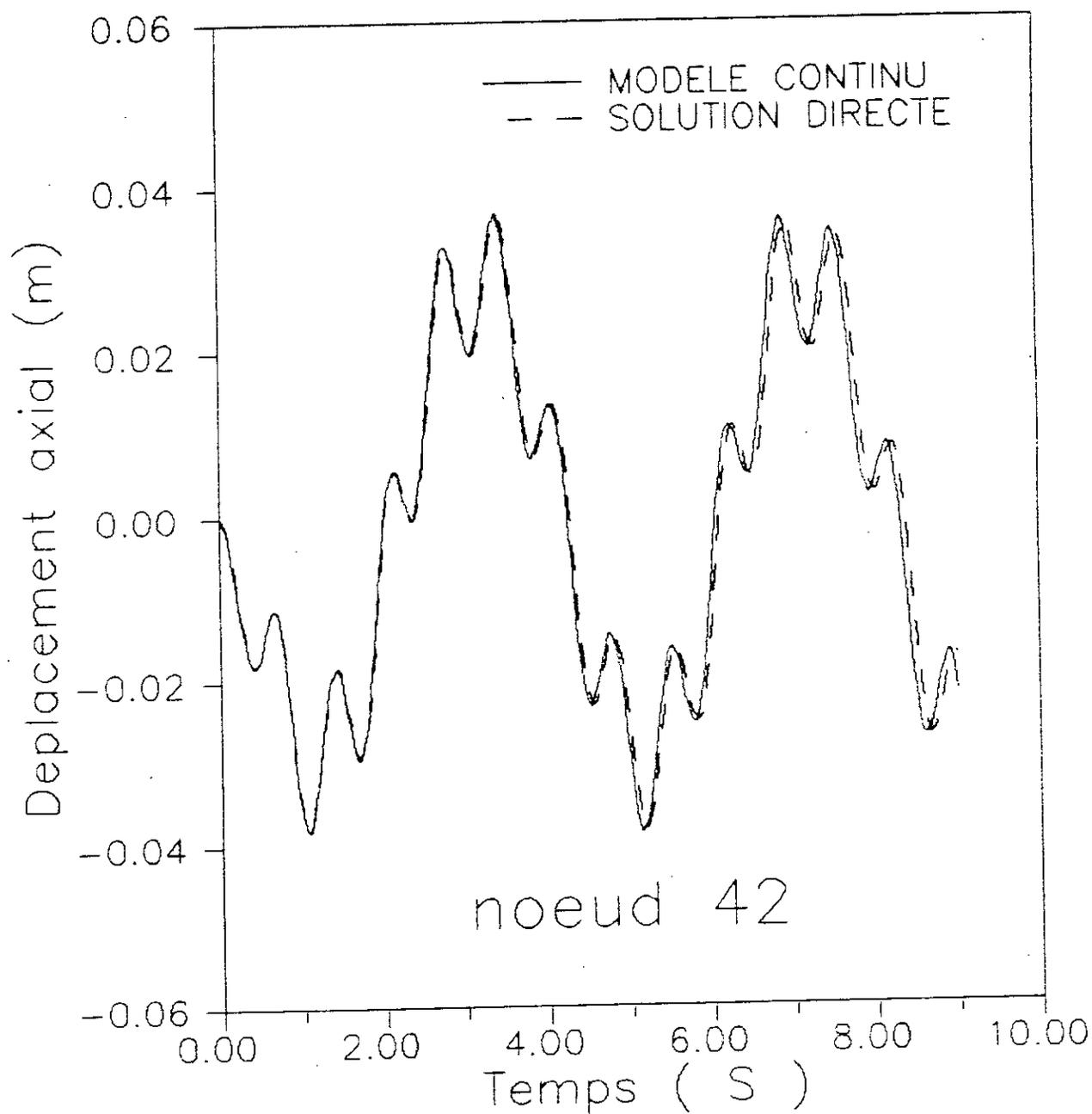


Figure 5.11 : Déplacements axiaux des noeuds
de la structure asymétrique No. 1
($t_1=0.4$ s)

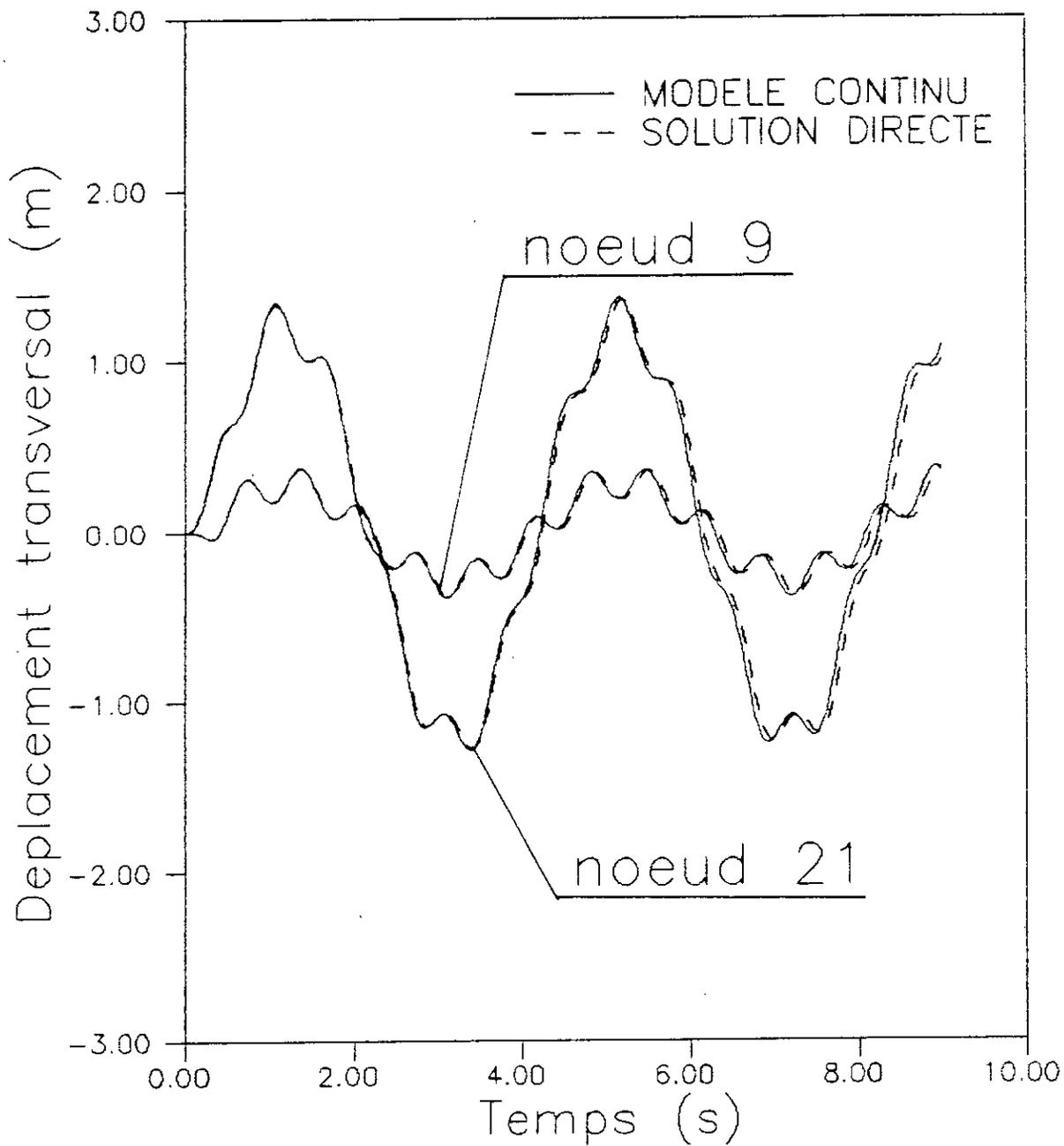


Figure 5.12 : Déplacements transversaux des noeuds de la structure asymétrique No. 1
($t_1=0.4$ s)

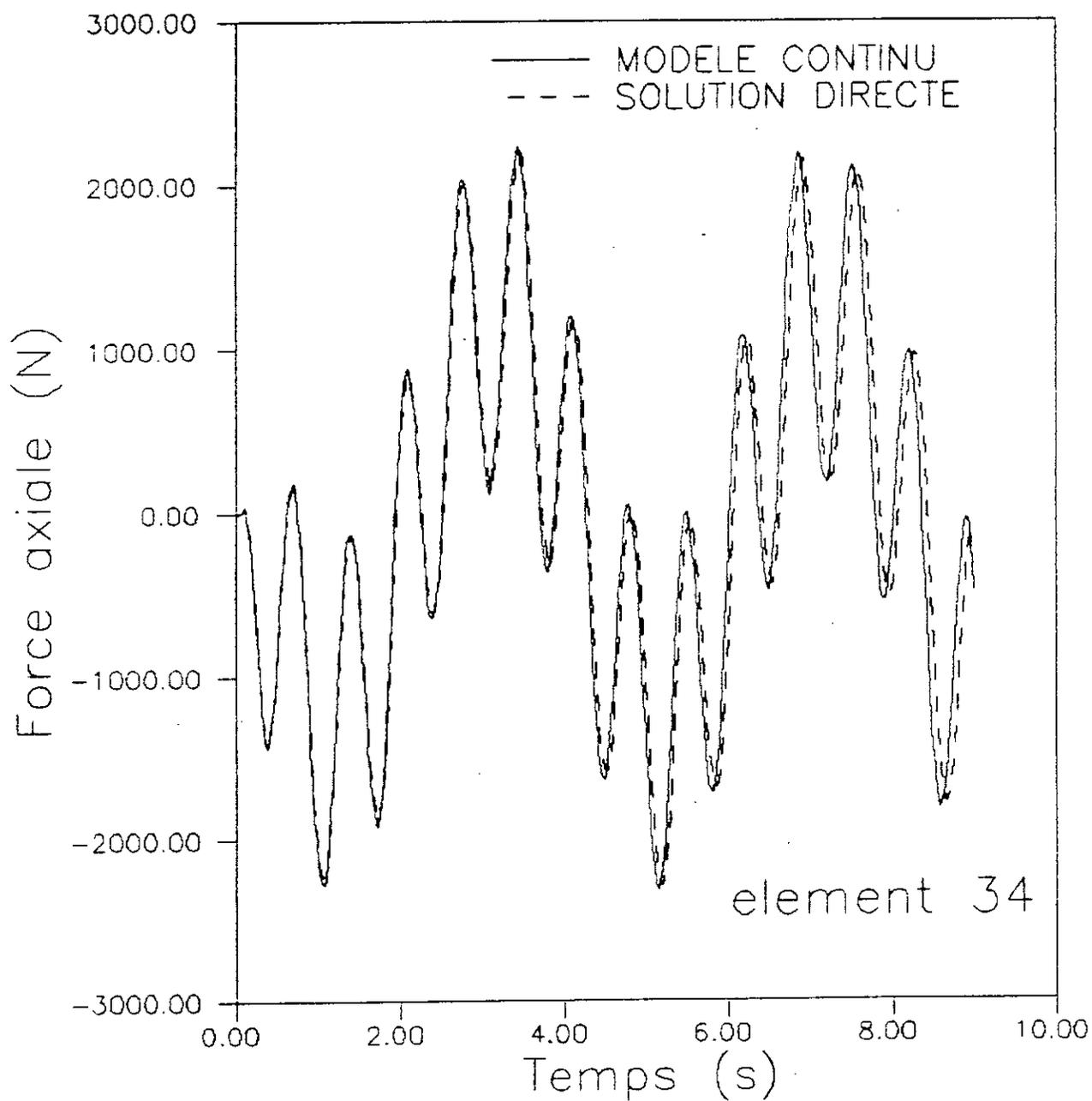


Figure 5.13 : Forces axiales dans des barres de la structure asymétrique No. 1 ($t_1=0.4$ s)

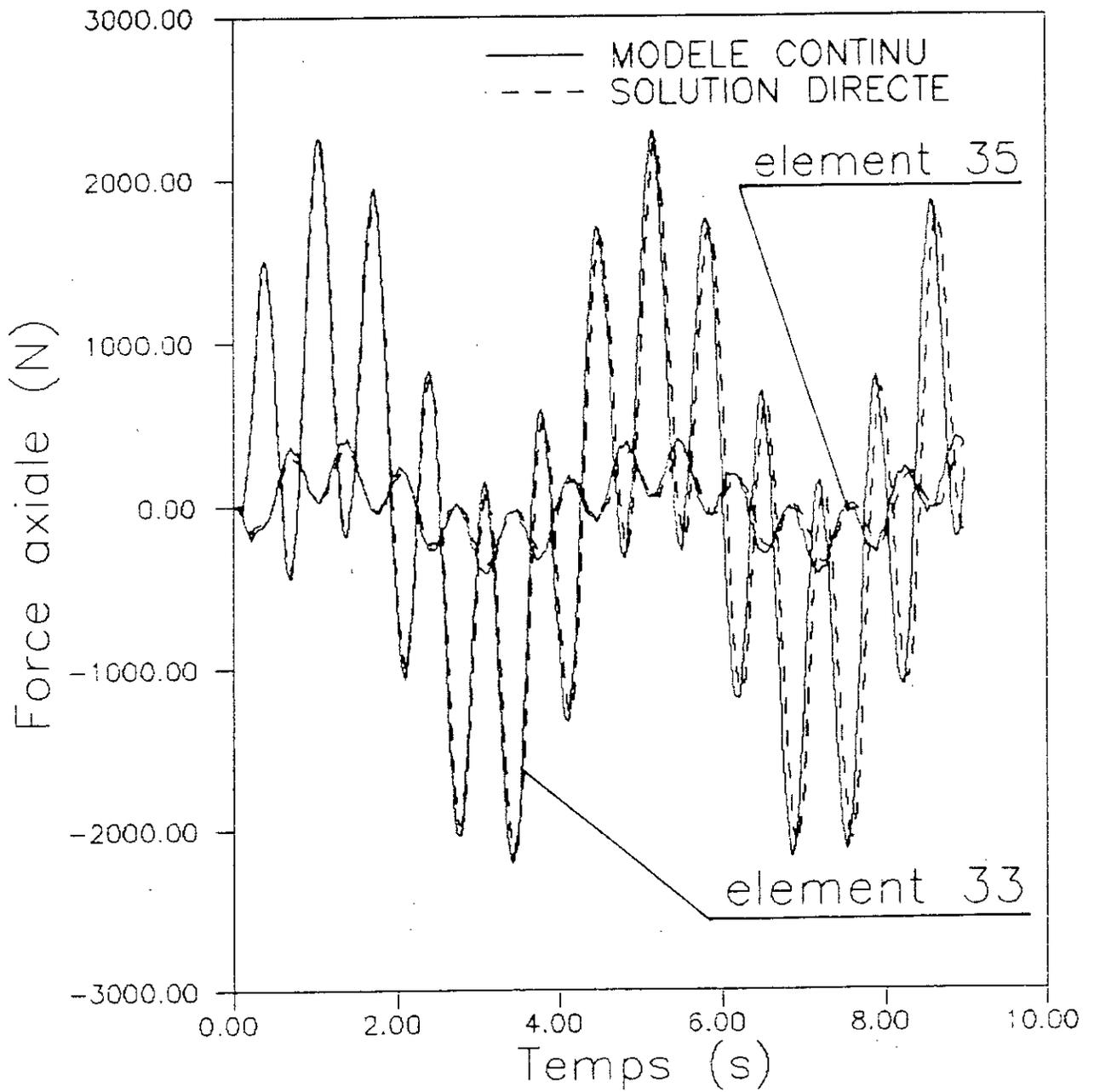


Figure 5.14 : Forces axiales dans des barres de la structure asymétrique No. 1 ($t_1=0.4$ s)

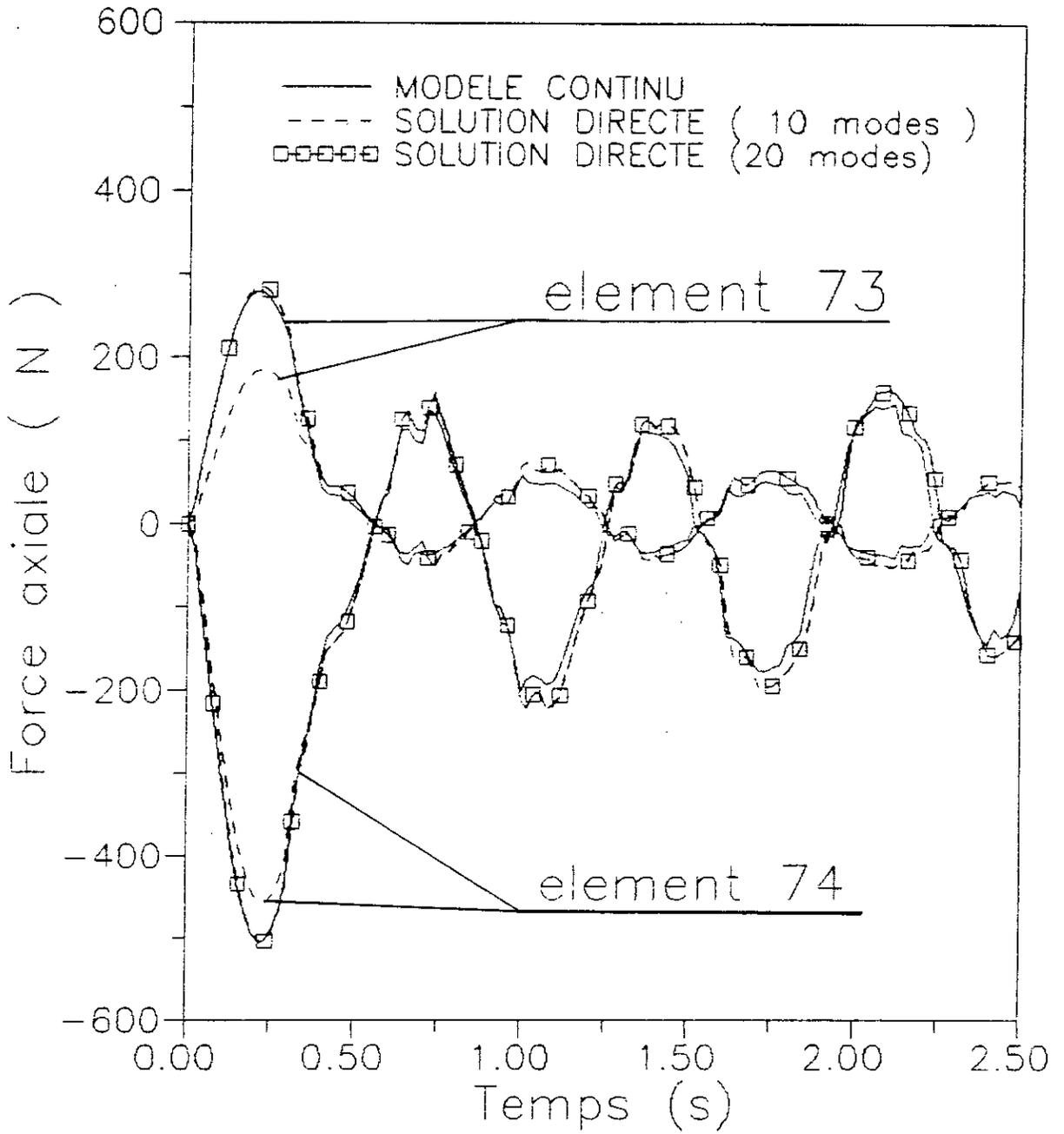


Figure 5.15 : Forces axiales dans des barres de la structure asymétrique No. 1 ($t_1=0.4$ s)

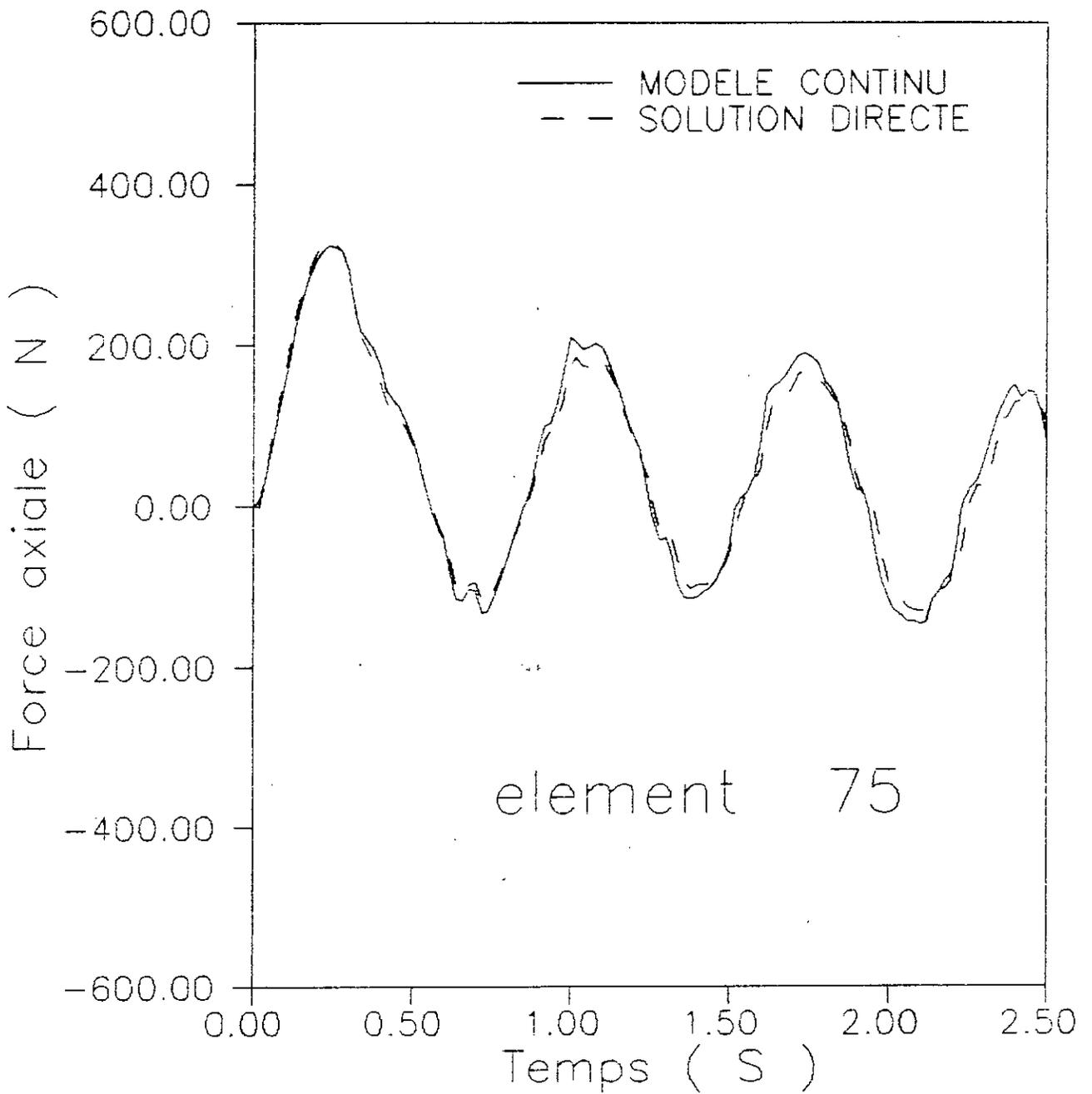
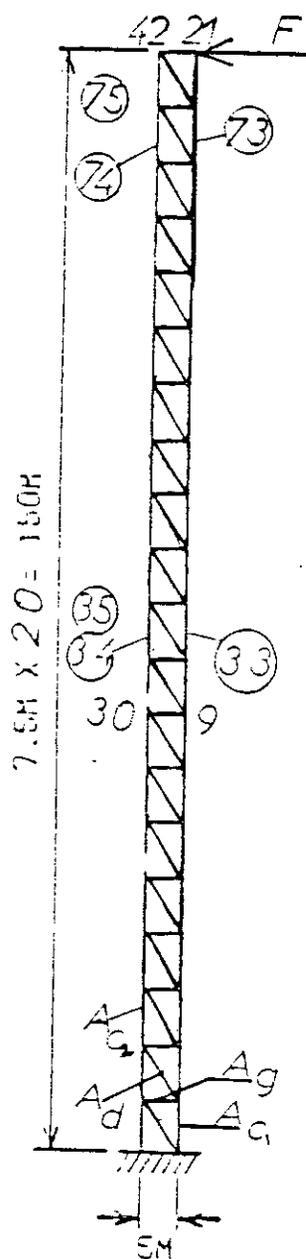


Figure 5.16 : Forces axiales dans des barres de la structure asymétrique No. 1 ($t_1=0.4$ s)

5.3 Structure asymétrique No. 2

Dans ce paragraphe, la structure discrète considérée ici est en tout point identique à celle du paragraphe précédent excepté que les sections de ses barres horizontales supérieures sont différentes de celle de la structure précédente (Figure 5.15). Les coefficients de couplage sont alors plus prononcés.

Les dix premières fréquences circulaires sont représentées sur le tableau (5.3). Pour la réponse dynamique, t_1 est égal à T_0 ($t_1 = T_0 = 4$ s). La réponse dynamique est représentée sur les figures (5.16-19). Ces figures montrent un bon accord entre les résultats obtenus. Pour les éléments au voisinage du point d'excitation, on a considéré 20 nodes pour représenter les forces axiales.



$$\begin{aligned}
 E &= 71.7 \times 10^9 \text{ [N/m}^2\text{]} & \rho &= 2768 \text{ [kg/m}^3\text{]} \\
 A_{c1} &= 80 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]} & A_{c2} &= 130 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]} \\
 A_g &= 60 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]} & A_d &= 40 \times 10^{-6} \text{ [m}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

Figure 5.17 : Structure asymétrique No. 2

Mode	SAP80	Poutre de TIMOSHENKO	
		ω	erreur %
1	1.579	1.590	0.7
2	8.995	9.050	0.61
3	22.322	22.429	0.48
4	38.063	38.257	0.51
5	46.192	46.547	0.77
6	55.180	55.603	0.77
7	72.385	73.342	1.32
8	89.210	91.115	2.14
9	105.594	108.975	3.20
10	121.063	126.514	4.50

Tableau 5.3 : Fréquences circulaires de la structure asymétrique No.2

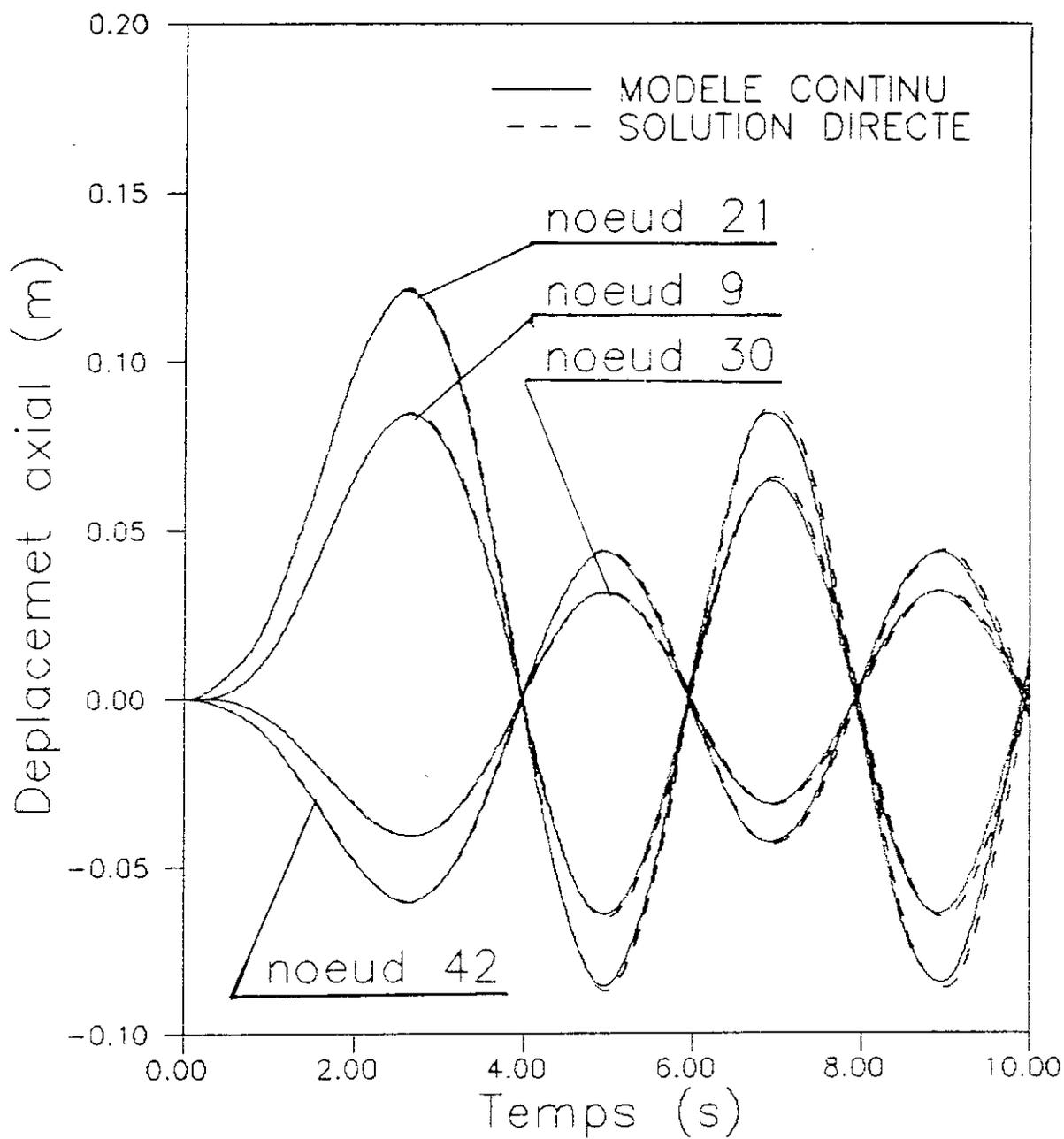


Figure 5.18 : Déplacements axiaux des noeuds de la structure asymétrique No. 2 ($t_1=4$ s)

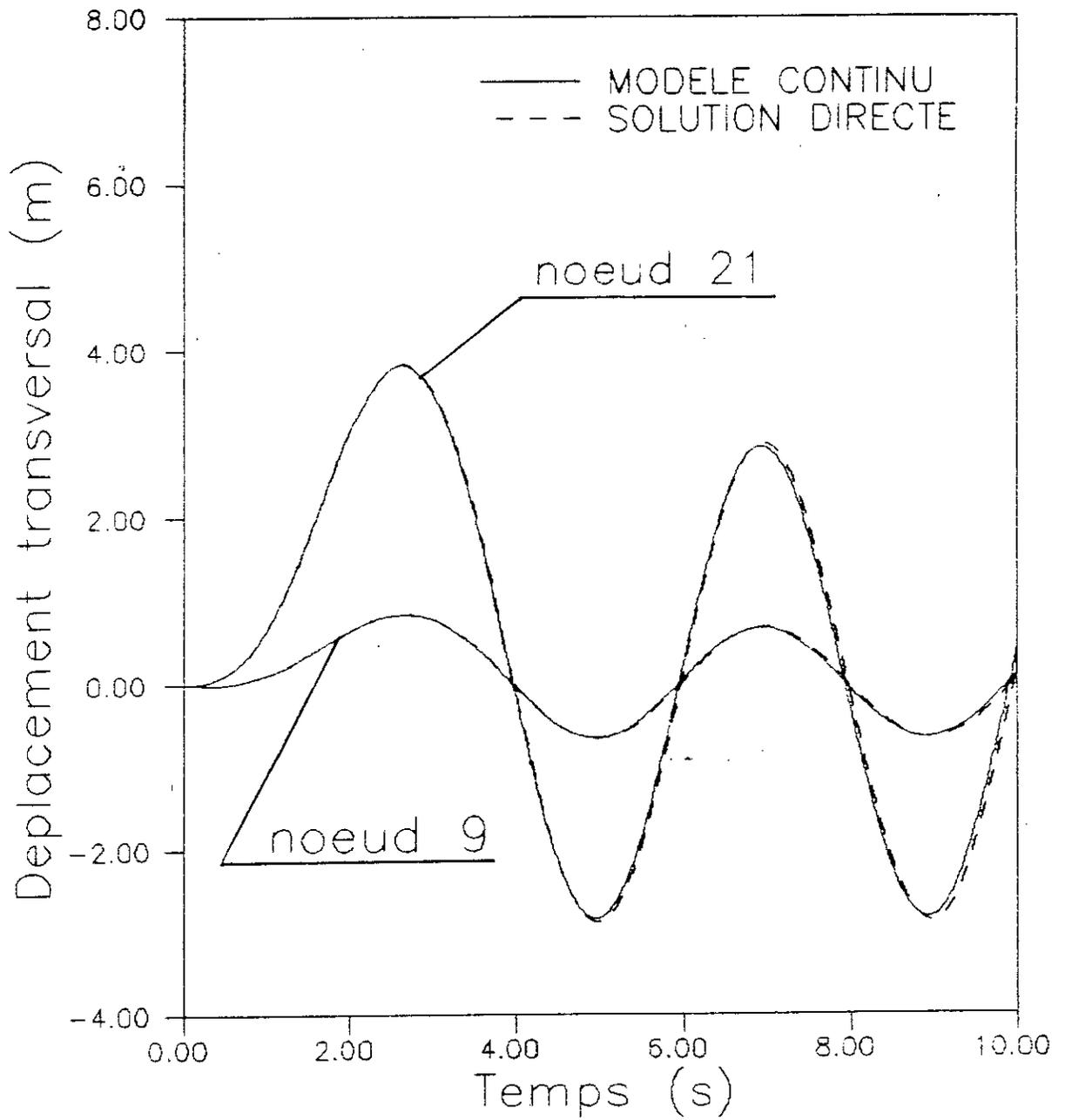


Figure 5.19 : Déplacements transversaux des noeuds de la structure asymétrique No. 2 ($t_1=4$ s)

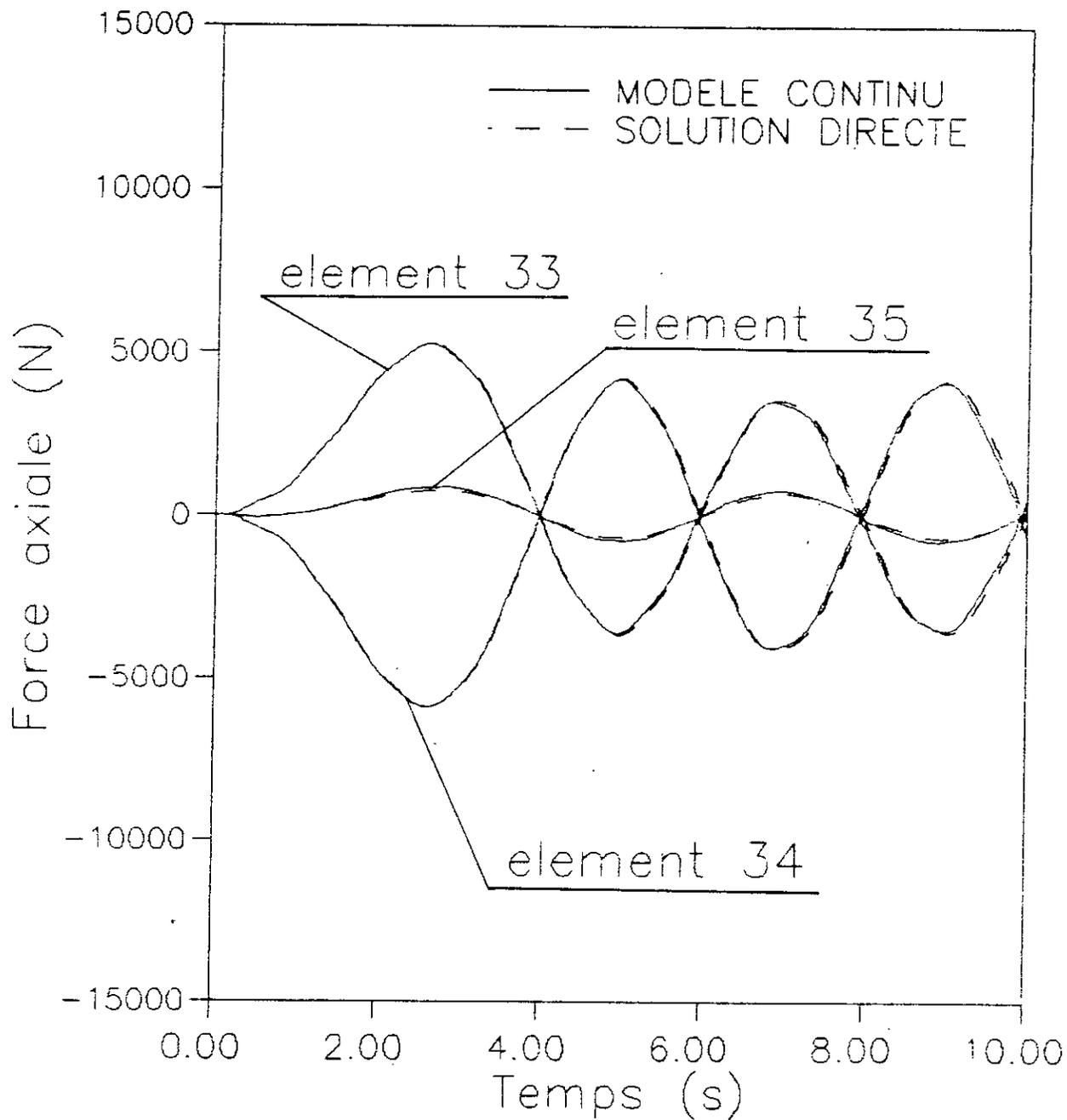


Figure 5.20 : Forces axiales dans des barres de la structure asymétrique No. 2 ($t_1=4$ s)

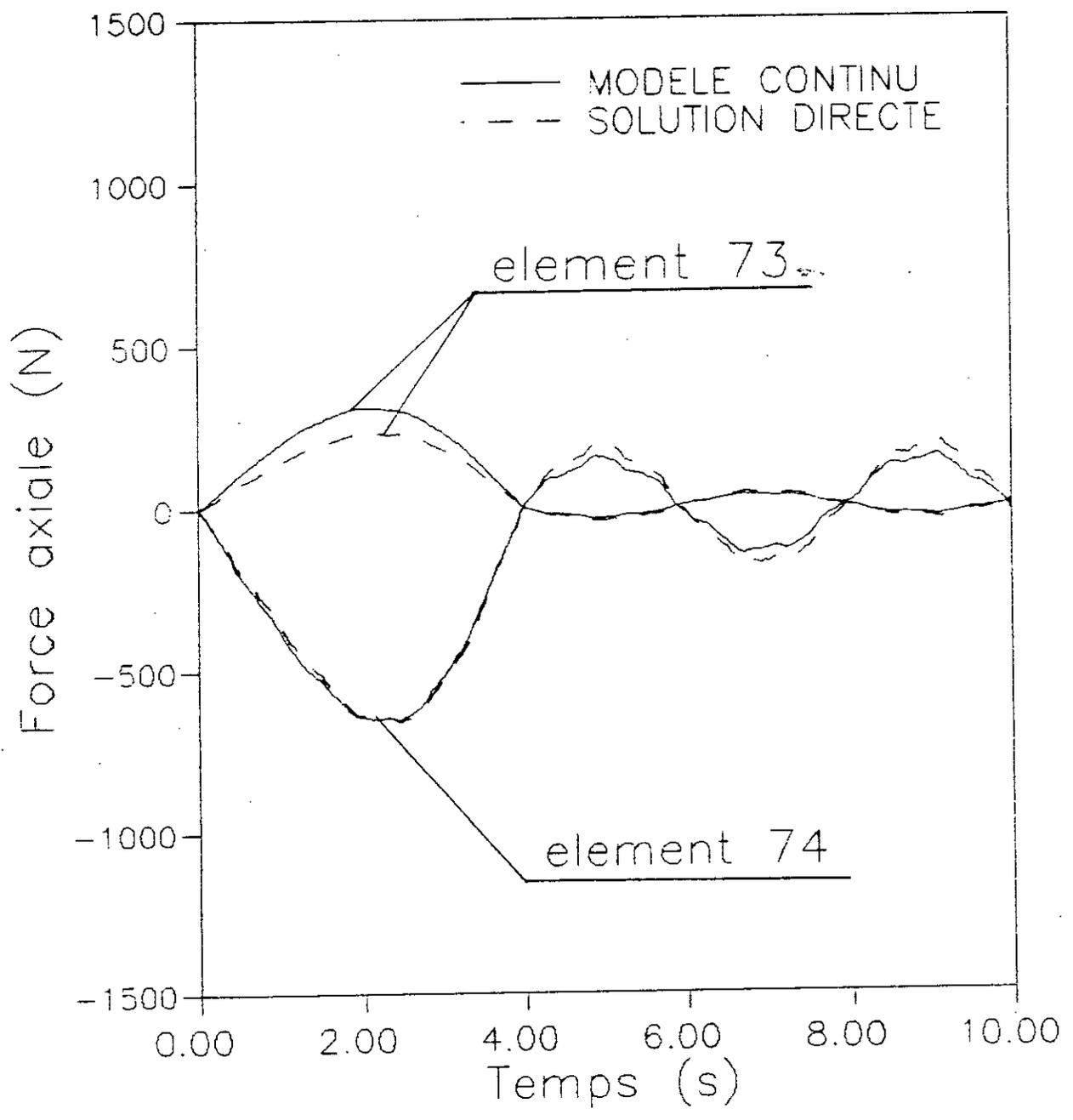


Figure 5.20 : Forces axiales dans des barres de la structure asymétrique No. 2 ($t_1=4$ s)

5.4 Influence des coefficients de couplage

L'analyse des résultats des tableaux (5.4,5.5) et des figures (5.21-5.27) montre que l'influence des coefficients de couplage sur les fréquences circulaires ainsi que sur la réponse dynamique est très importante.

Pour la structure asymétrique No.1, l'erreur maximale est de 16.97 %, cette erreur représente la différence entre la fréquence circulaire calculée par le modèle continu avec les coefficients de couplage η_{ij} nuls et celle obtenue par la solution directe (SAP80); tandis que cette erreur est de 3 % lorsque η_{ij} ne sont pas négligés (5.4). Les figures (5.21-5.24) montrent que les résultats du modèle continu ne sont pas en accord avec ceux de la solution directe.

Pour la structure asymétrique No.2, les résultats sont donnés dans le tableau (5.5). L'erreur maximale est de 10.06 % comparée avec la solution directe, tandis que celle-ci est de 3.2 % quand les coefficients η_{ij} ne sont pas négligés.

Pour la réponse dynamique, l'effet des coefficients de couplage est plus prononcé dans le cas de la structure asymétrique No.2 (Figure 5.25-5.27).

Mode	SAP80	Poutre de TIMOSHENKO			
		ω $\eta_{vj} \neq 0$	erreur %	ω $\eta_{vj} = 0$	erreur %
1	1.563	1.576	0.83	1.578	0.96
2	9.117	9.195	0.86	9.276	1.74
3	23.220	23.395	0.75	23.803	2.51
4	40.287	40.607	0.79	42.041	4.35
5	43.357	43.841	1.12	45.781	5.59
6	59.976	60.527	0.92	62.433	4.10
7	79.846	80.936	1.37	83.924	5.11
8	99.538	101.572	2.04	105.920	6.41
9	118.908	122.478	3.00	128.086	7.72
10	128.451	130.331	1.46	150.249	16.97

Tableau 5.4 : Fréquences circulaires
de la Structure asymétrique No.1
($\eta_{vj}=0$)

Mode	SAP80	Poutre de TIMOSHENKO			
		ω $\eta_{ij} \neq 0$	erreur %	ω $\eta_{ij} = 0$	erreur %
1	1.579	1.590	0.7	1.687	6.84
2	8.995	9.050	0.61	9.583	6.54
3	22.322	22.429	0.48	23.730	6.31
4	38.063	38.257	0.51	40.562	6.57
5	46.192	46.547	0.77	48.038	4.00
6	55.180	55.603	0.77	58.734	6.44
7	72.385	73.342	1.32	77.368	6.88
8	89.210	91.115	2.14	96.095	7.72
9	105.594	108.975	3.20	114.760	8.68
10	121.063	126.514	4.50	133.241	10.06

Tableau 5.5 : Fréquences circulaires
de la structure asymétrique No.2
($\eta_{ij} = 0$)

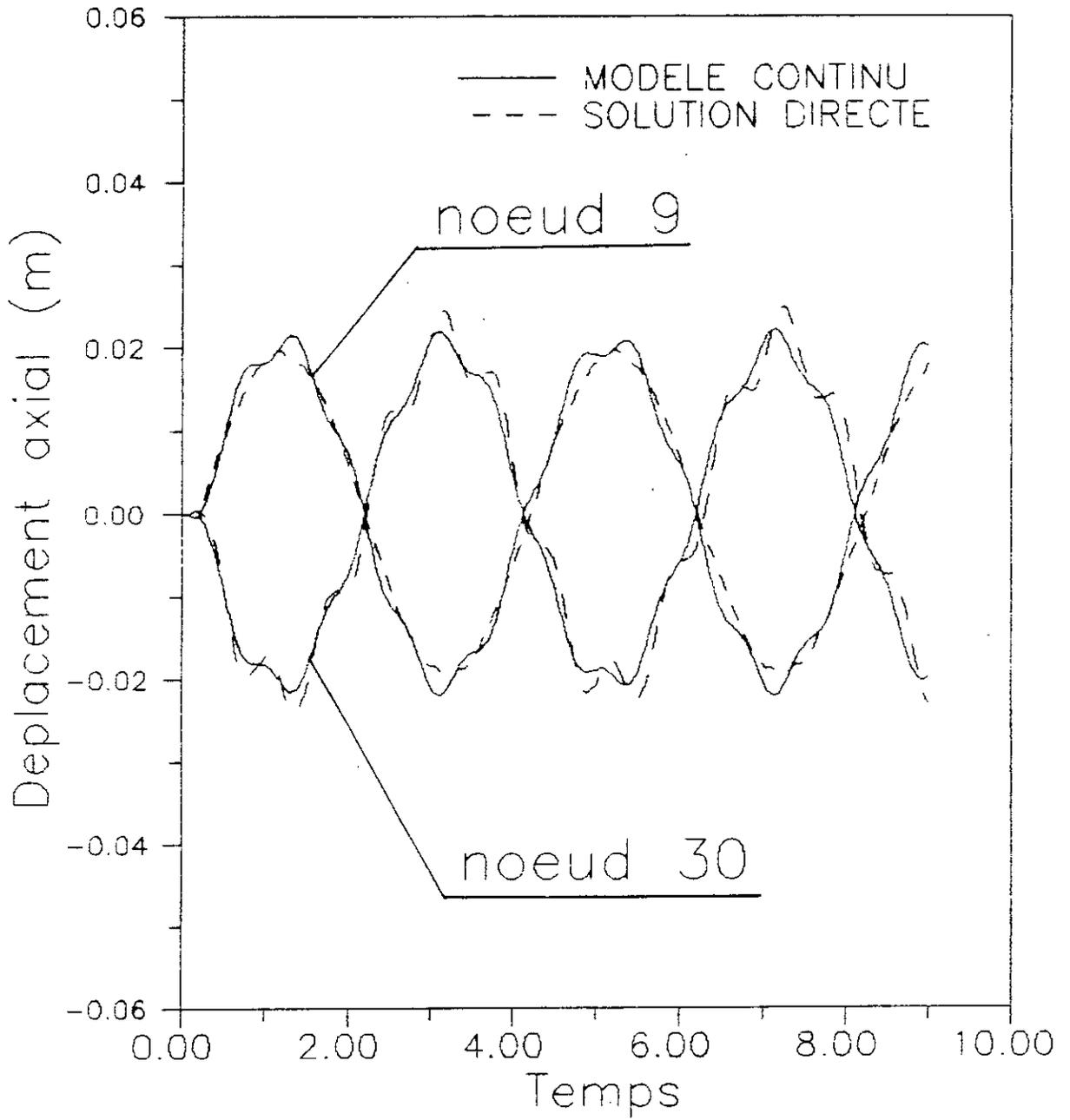


Figure 5.21 : Déplacements axiaux des noeuds de la structure asymétrique No. 1 avec $n_{v_j} = 0$ ($t_1 = 0.4$ s)

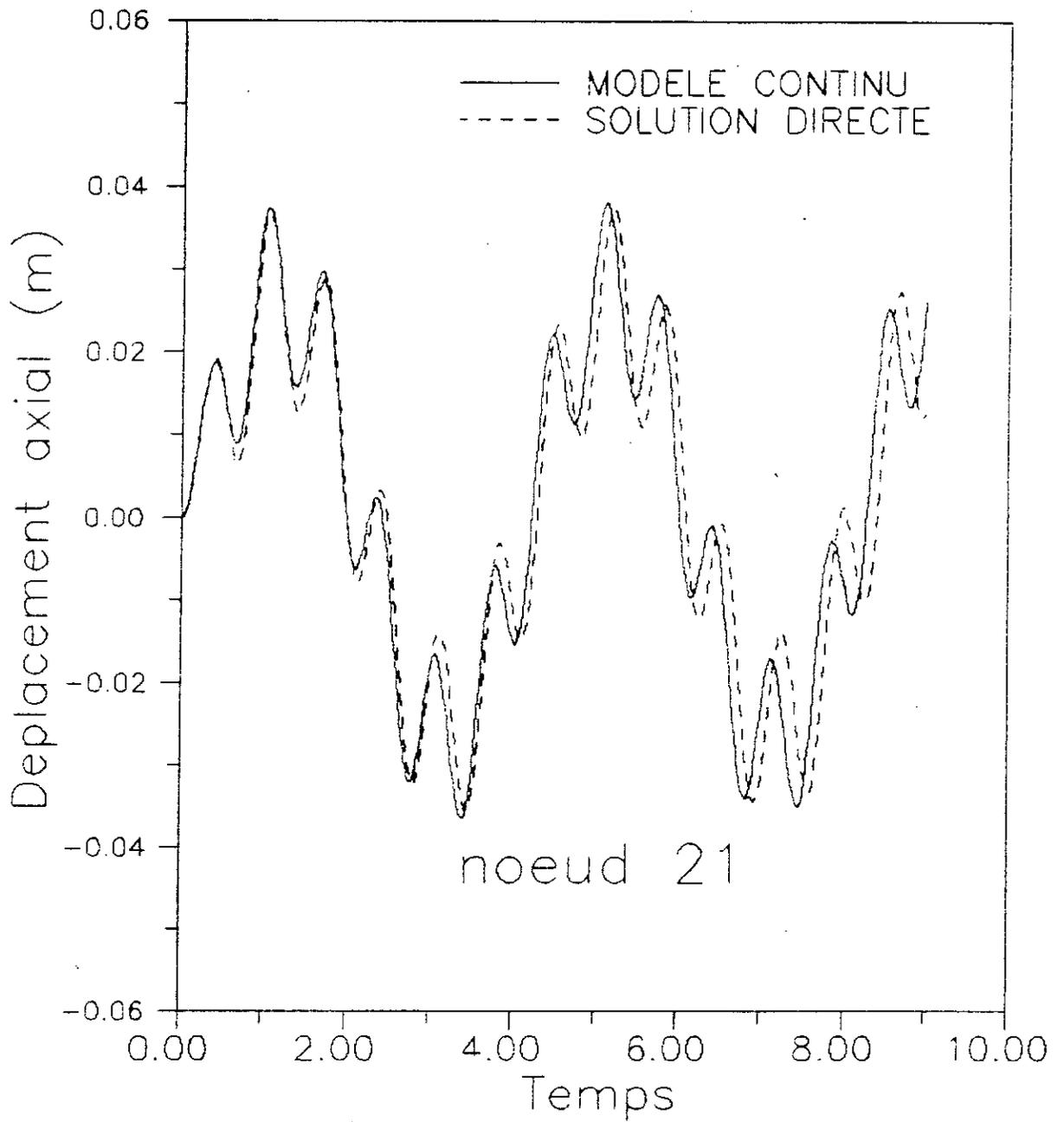


Figure 5.22 : Déplacements axiaux des noeuds de la structure asymétrique No.1 avec $\eta_{c,j} = 0$ ($t_1 = 0.4$ s)

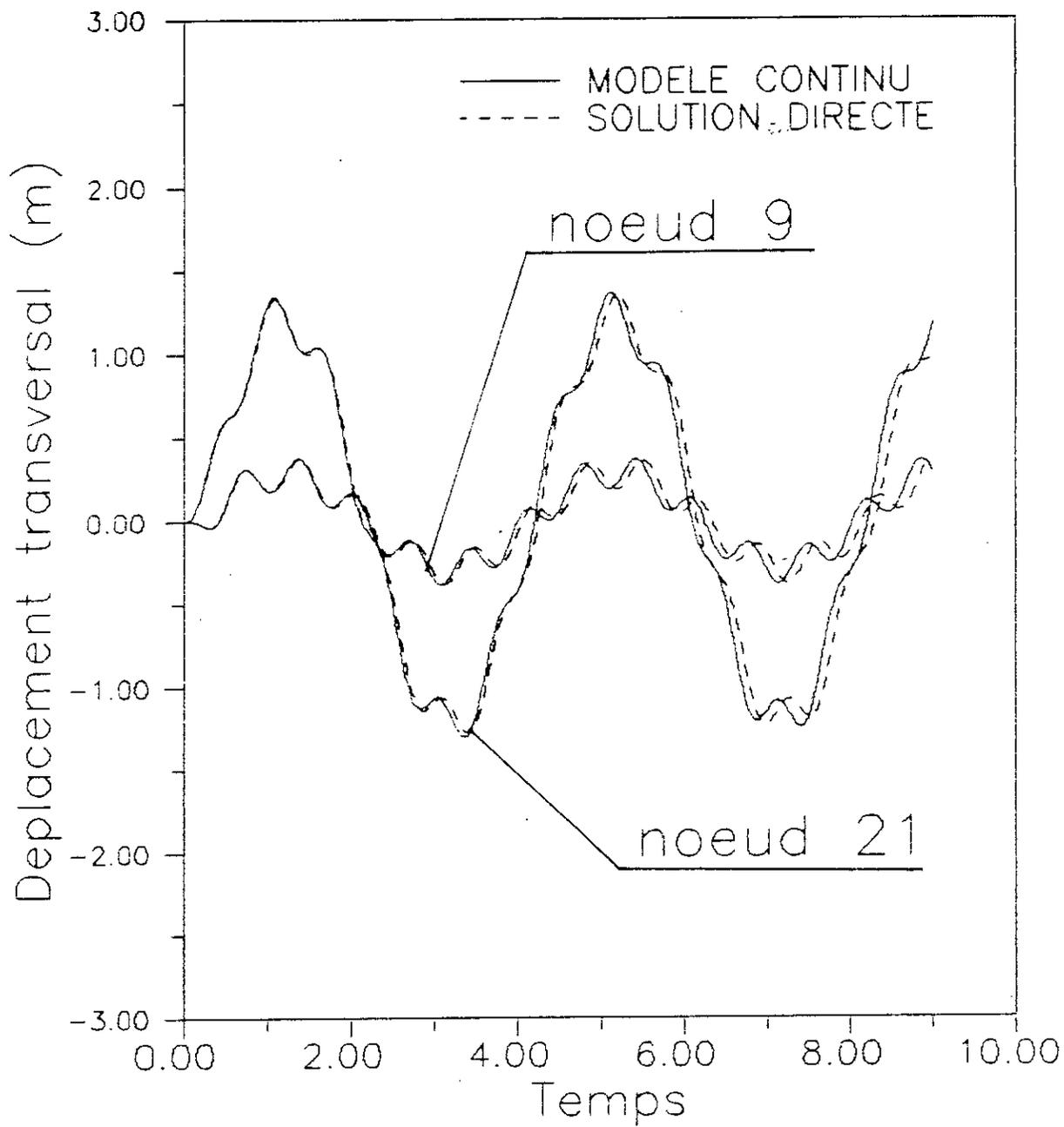


Figure 5.23 : Déplacements transversaux des noeuds
de la structure asymétrique No.1
avec $\eta_{v,j} = 0$ ($t_i = 4$ s)

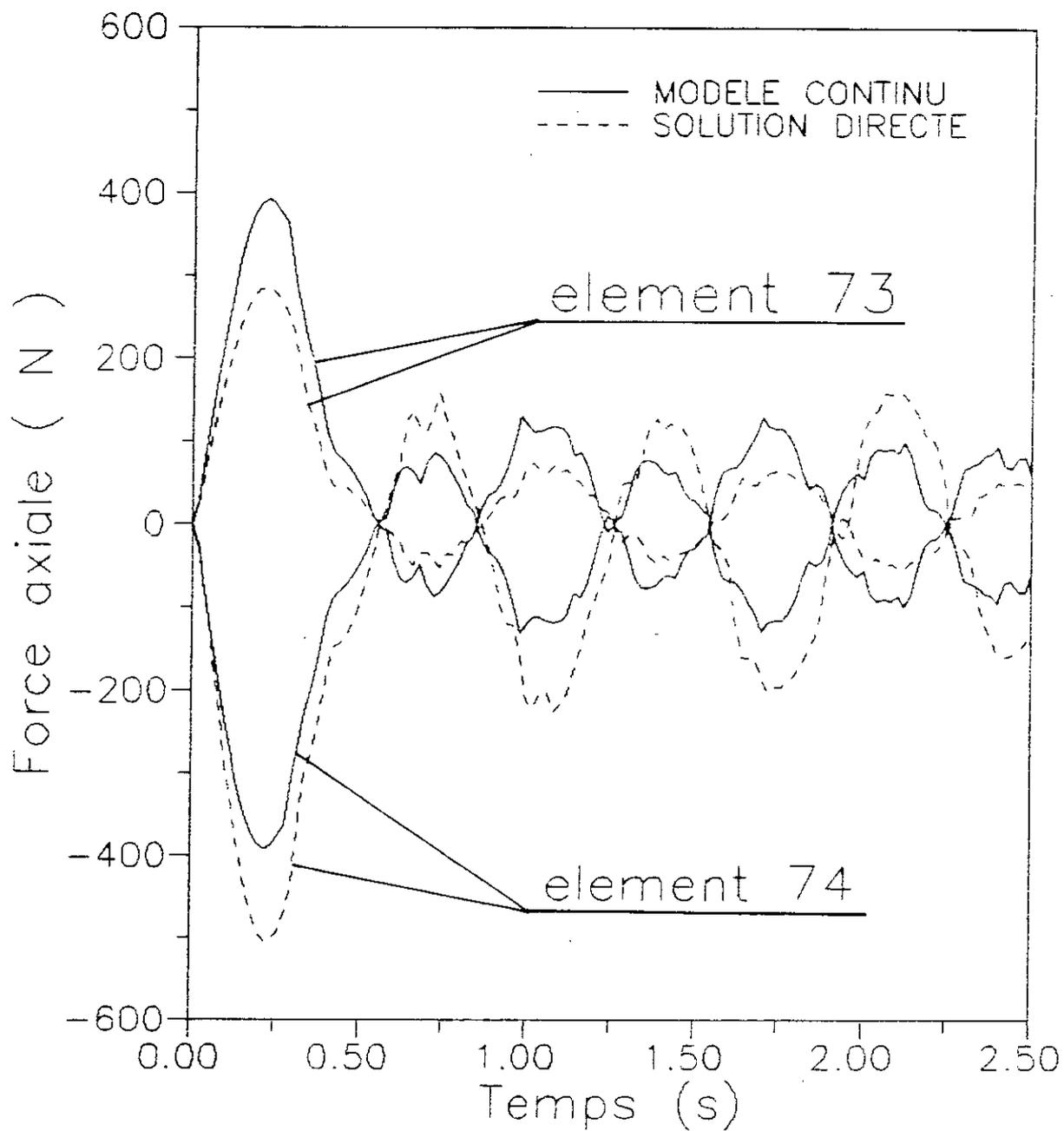


Figure 5.24 : Forces axiales dans des barres
de la structure asymétrique No.1
avec $\eta_{v_j} = 0$ ($t_1 = 0.4$ s)

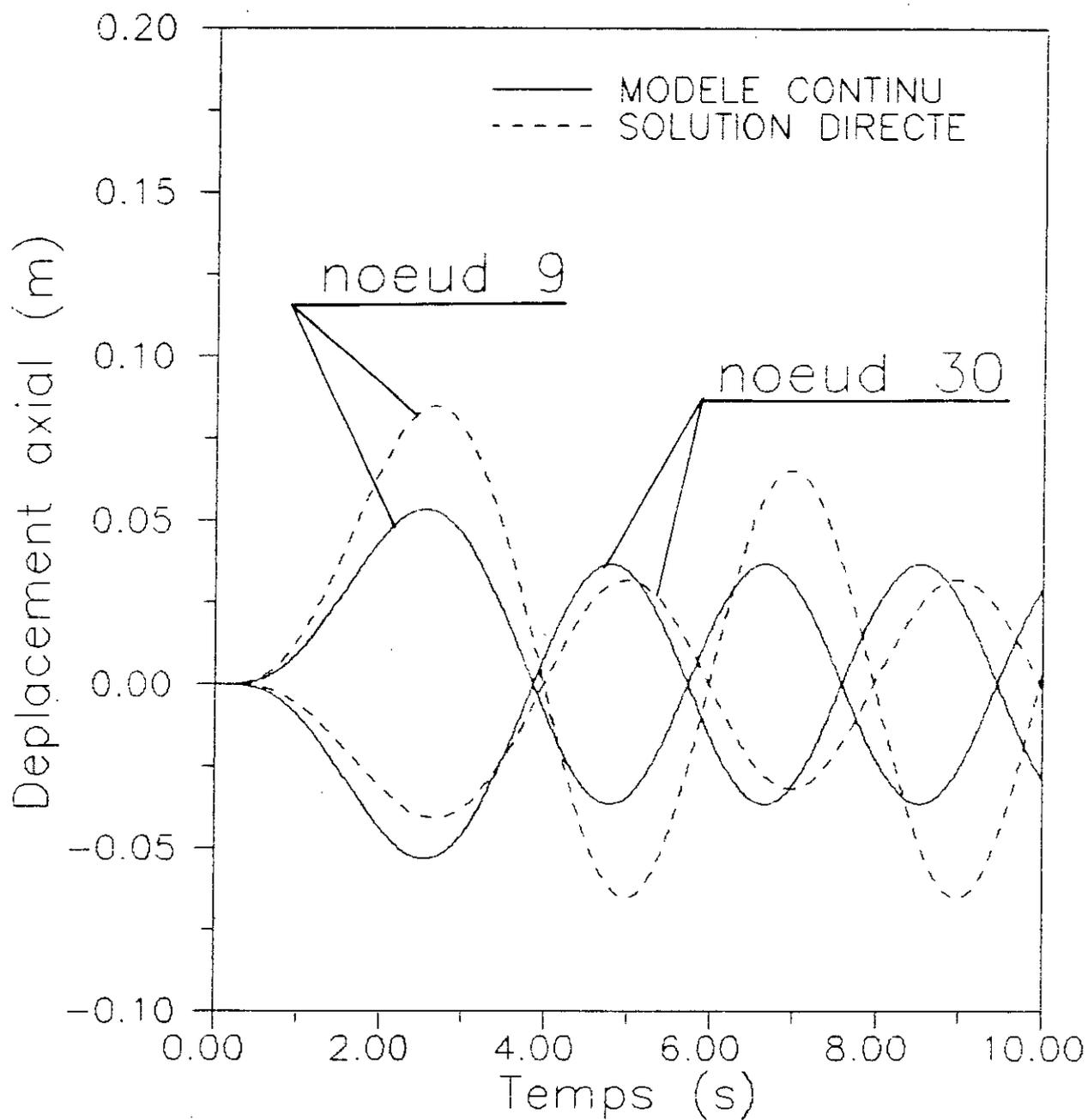


Figure 5.25 : Déplacements axiaux des noeuds
de la structure asymétrique No.2
avec $n_{t_j} = 0$ ($t_1 = 4$ s)

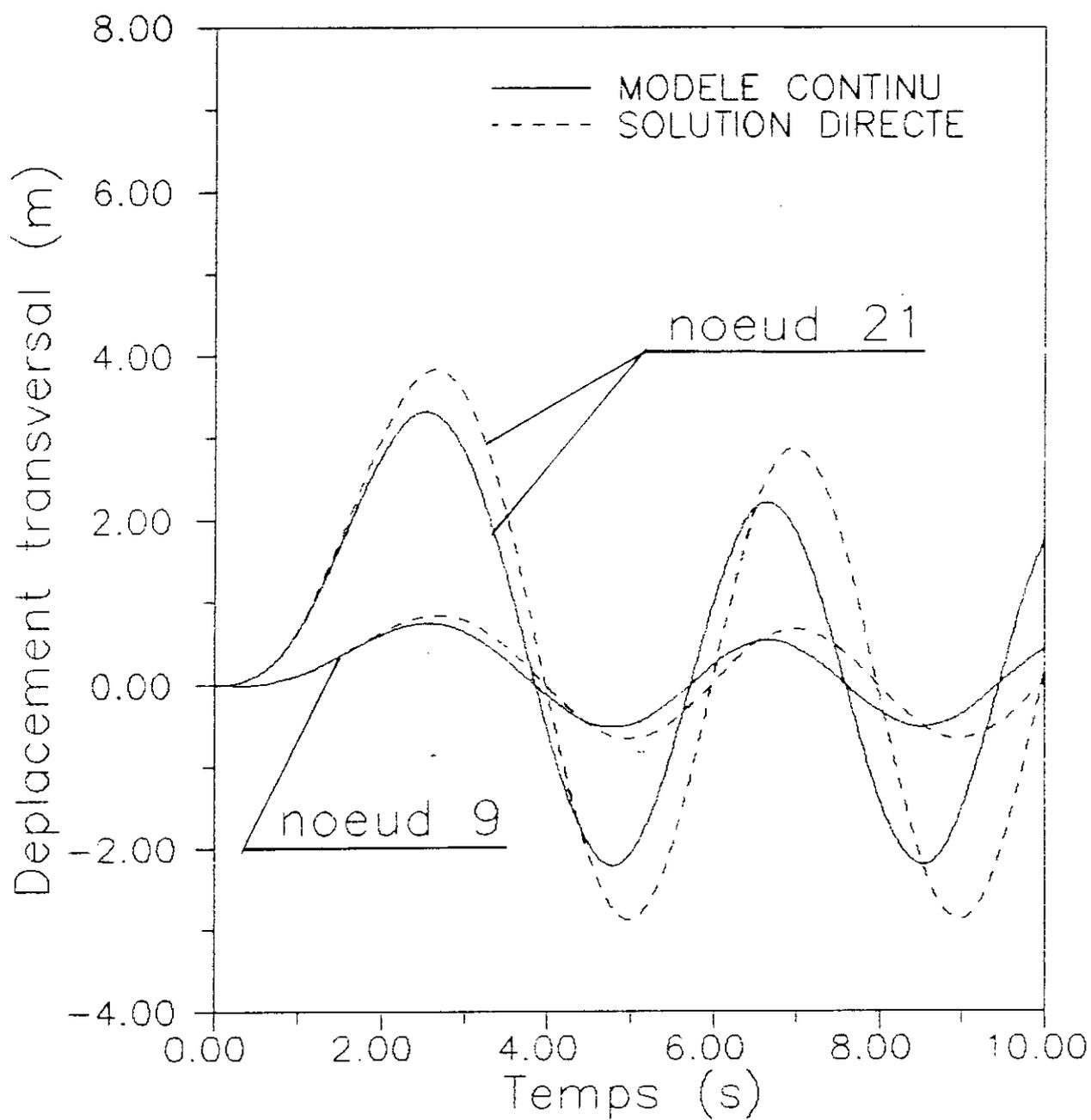


Figure 5.26 : Déplacements transversaux des noeuds de la structure asymétrique No.2 avec $\eta_{t,j}=0$ ($t_1=4$ s)

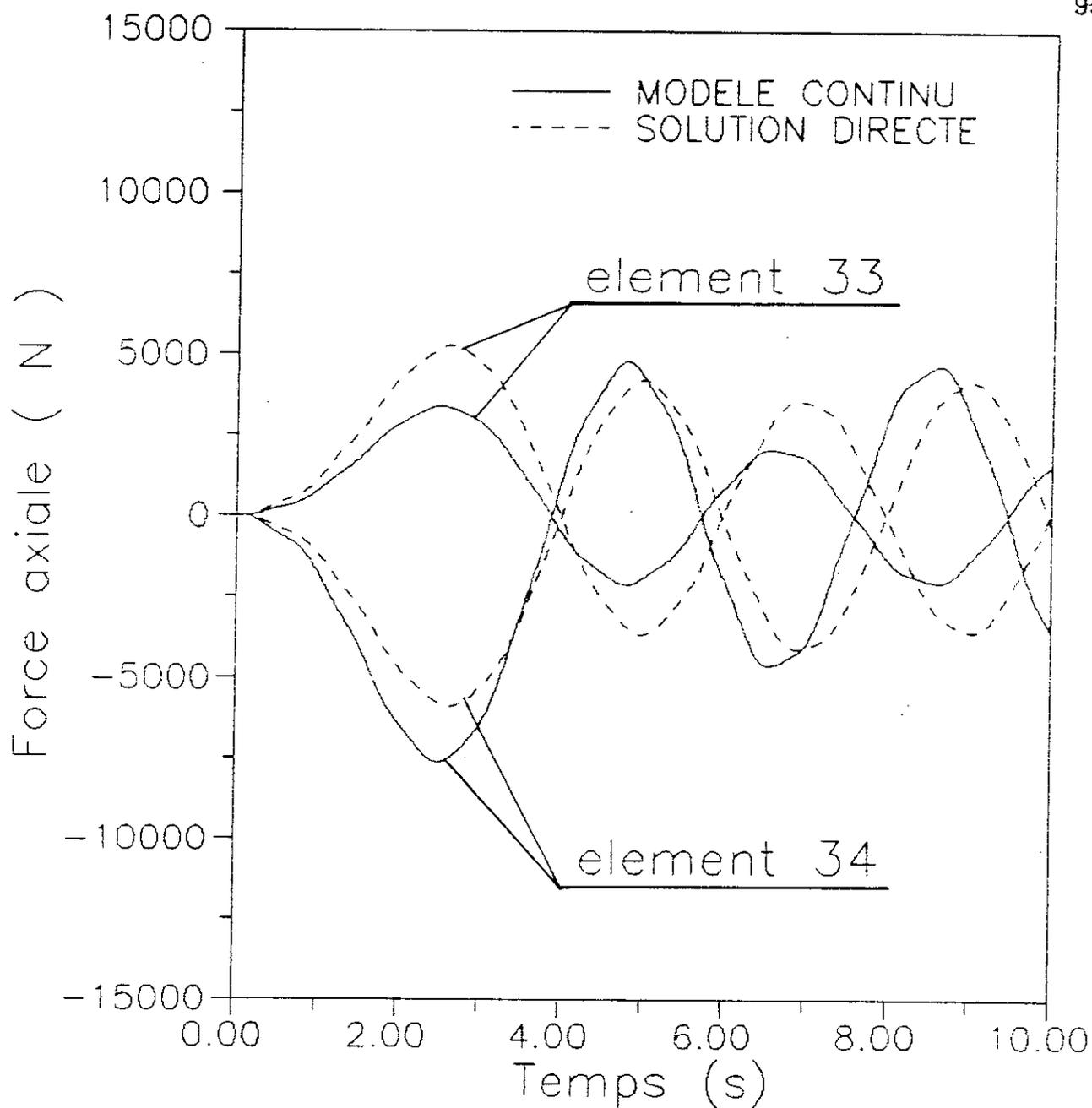


Figure 5.27 : Forces axiales dans des barres de la structure asymétrique No.2 avec $q_{0,j} = 0$ ($t_1 = 4$ s)

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Une méthode par laquelle les structures discrètes sont modélisées par des modèles continus a été présentée.

Ces modèles continus sont dérivés de la théorie de la poutre de Timoshenko qui tient compte des déformations axiales, transversales et flexionnelles ainsi que des effets de couplage. Une méthode pour la détermination des propriétés équivalentes qui nous permettent de passer du modèle discret au modèle continu a été développée. Ensuite cette méthode a été élargie aux structures tridimensionnelles. La validité de cette méthode est vérifiée par la comparaison des valeurs numériques obtenues par celle-ci avec celles obtenues par les deux autres méthodes mentionnées dans le chapitre 1.

L'exactitude de ces modèles est vérifiée par l'analyse dynamique (vibrations libres et forcées) de trois types de structures planes par la méthode des éléments finis. Ces structures sont modélisées par un élément fini d'ordre supérieur dérivé de ces modèles. Pour cette fin, un programme informatique a été élaboré (Annexe 1).

Les forces axiales dans chaque barre de la structure obtenues par ce modèle sont aussi étudiées pour vérifier la validité de ce modèle.

Les résultats obtenus par ce modèle sont comparés à ceux obtenus par la solution directe basée sur la structure discrète (SAP 80), un bon accord a été obtenu .

Ce résultat nous permet de conclure que cette méthode est adéquate pour prédire les caractéristiques dynamiques des structures. L'influence des coefficients de couplage dans cette analyse est mise en évidence.

Le développement logique de cette étude serait l'analyse dynamique en tenant compte de la matrice d'amortissement, ainsi que le flambage et l'effet de la température qui ont aussi une grande importance pour de telles structures. Enfin il est souhaitable de traiter les structures tridimensionnelles qui ne peuvent être modélisées que par des plaques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Hagler, "Building Large Structures in Space", *Astronautics and Aeronautics*, Vol. 14, May 1976, pp. 56-61.
- [2] C.J. Daros, R. Freitag and Kline, "Toward Large Space System", *Astronautics and Aeronautics*, Vol. 15, May 1977, pp. 22-30.
- [3] G.R. Woodcock, "Solar Satellites, Space Key to our Power Future", *Astronautics and Aeronautics*, Vol. 15, July/Aug. 1977, pp. 30-40.
- [4] W.A. Benfield and R.F. Hudra, "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution", *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 7, 1971, pp. 1255-1261.
- [5] R.J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, 1965, pp. 380.
- [6] A.H. Nayfeh and M.S. Haffzy, "Continuum Modeling of the Mechanical and Thermal Behavior of Discrete Large Structures", *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 80, 1981, pp. 766-773.
- [7] A.K. Noor, M.S. Anderson and H. Green, "Continuum Models for Beam and Plate Lattice Structures", *AiAA Journal*, Vol. 16, 1978, pp. 1219-1228.
- [8] C.T. Sun and T.Y. Yang, "A Continuum Approach Toward Dynamics of Gridworks", *Journal of Applied Mechanics*, March 1973, pp. 186-192.
- [9] A.H. NAyfeh and M.S. Hafzy, "Continuum Modeling of Threedimensional Truss-Space Structures", *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 8, August 1978, pp. 779-787.

- [10] A.K. Noor and M.S. Anderson, "Analysis of Beam-Like Lattice Trusses", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 20, 1979, pp. 53-70.
- [12] A.K. Noor and M.P. Nenth, "Micropolar Beam Models for Lattice Grids with Rigid Joints", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 21, 1980, pp. 249-263.
- [13] Kim, Bong Jun, "Approximation Methodes for Dynamic Analysis of Large Structure", Thèse de Ph.D. Université de Perdue, Mai 1982
- [14] B. Necib "Continuum Modeling and Dynamic Analysis of Large Truss Structures", Thèse de Ph.D. Université de Perdue, Mai 87
- [15] D.L. Thomas, J.M. Wilson and R.R. Wilson, "Timoshenko Beam Finite Element", Journal of Sound and Vibration, 1973, pp. 315-330.
- [16] D.J. Dawe, "Finite Element for the Vibration Analysis of Timoshenko Beam", Journal of Sound and Vibration, 1978, Vol. 60(1), pp. 11-20.
- [17] C.T. Sun and S.N. Huang, "Transverse Impact Problems by Higher Order Beam Finite Element", Computers and Structures, Vol. 5, 1975, pp. 297-303.
- [18] K.J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", 1982 Prentice-Hall Inc.
- [19] O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc-Graw Hill, New York (1971).
- [20] W.T. Thomas, "Theory of Vibration with Application", 1981, Prentice-Hall Inc.

- [21] J.S. Przemieniecki, "The Theory of Matrix Structural Analysis", 1968, Mc.Graw-Hill Book Company.
- [22] T.Y. Yang, "Finite Element Structural Analysis", 1986, Prentice-Hill inc.
- [23] L. Meirvitch, "Analytical Methods in Vibrations", The MacMillan Company, 1967.
- [24] T.J.R. Hughes, "The Finite Element Method : Linear and Dynamic Element Analysis", Prentice-hall, NJ, 1987.
- [25] R.D. Cook, D.S. Malkus and M.E. Plesha, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, 1989.
- [26] S.P. Timoshenko, "Resistance des Matériaux", T 1, Dunod, Paris, 1986.

ANNEXE 1

PROGRAMME BEAM

PROGRAM BEAM

```

*****
*   Ce programme est elabore pour calculer les frequences circulaires *
*   ainsi que la reponse dynamique des structures discrettes par le modele *
*   continu de poutre de TIMOSHENKO. *
*   Ce programme est elabore par AMMICHE ALI a l'E.N.P. *
*
*                                     JUIN 92 *
*****

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
CHARACTER*80 FICH
DIMENSION GK(200,200), KM(200,200)
COMMON/BLOCK1/ H(200,200),H1(200,200)
DIMENSION A(2000),B(2000),EIGV(300)
INTEGER MAXA(300),MAXA1(300)
COMMON/PGM/ EEA(6),E(6),Ro(6)
COMMON/BLOC2/ EK(12,12)
COMMON/BLOC3/ EM(12,12)
COMMON/LONGUEUR/ ALC,ALG
COMMON/INERTIE/ RoA,RI,RoI
COMMON/RIGID/ EA,GA,EI,ETA12,ETA13,ETA23
COMMON/BLOCK/ TMAX,DT
COMMON/BLOCKX1/ U(200),U1(200),U2(200)
COMMON/BLOC4/ NEQ,VKG(200,200),VEG(200)
COMMON/BLOCKX/ T,F(200),NUNODE,FO,TE,T1,N1
CALL ALI
PRINT 12
12  FORMAT(5X, 'DONNER LE NOM DE FICHER DE DONNEES : ',8)
    READ(*,13) FICH
13  FORMAT(A)
    OPEN(3,FILE=FICH,STATUS='OLD')
    CALL ALI
    PRINT 14
14  FORMAT(5X, 'DONNER LE NOM DE FICHER DE RESULTATS : ',8)
    READ(*,13) FICH
    OPEN(5,FILE=FICH,STATUS='NEW')
!
!-----LECTURE ET IMPRESSION DU TITRE

```

```

READ(3,13) FICH
WRITE(5,13) FICH

```

```

!-----LECTURE ET IMPRESSION DES DONNEES
!

```

```

READ(3,*) NELE, NDOF, NSYM, NMCD, NO
READ(3,*) ALC, ALG
READ(3,*) (EEA(I), Ro(I), E(I), I=1, NSYM)
write(5,1000) NELE, NDOF/2, NSYM, NMCD
1000 FORMAT(/5X, 'Nombre d'element poutre', T51, ':', I5//5X, 'Nombre
Ide degre de liberte par noeud', T51, ':', I5//5X, 'Type d'element
2repetitif', T51, ':', I5//5X, 'Nombre de frequence circulaire a
3calculer', T51, ':', I5)
IF(NO .NE. 0) THEN
WRITE(5,1001)
ELSE
WRITE(5,1002)
ENDIF
1001 FORMAT(7x, 'sans ccoefficients de couplage')
1002 FORMAT(7X, 'avec ccoefficients de couplage')
write(5,1003) ALC, ALG
1003 FORMAT(/5X, 'Longueur', T51, ':', F7.3//5X, 'Hauteur', T51, ':', F7.3)
write(5,1004) (I, EEA(I), Ro(I), E(I), I=1, NSYM)
1004 FORMAT(//5X, 'Caracteristiques geometrique et mecanique de chaque
1barre', //7X, 'Element', 5X, 'Section en m*m', 3X, 'Densite en kg/m3',
53X, 'Module de Young en N/m*m', // (9X, I3, 7X, E11.3, 7X, F11.3, 9X,
6E11.3//))
3 FORMAT(3E13.4)
READ(3,*) RTOL, NITEM, IFSS, IFPR, NSTIF, IOUT
READ(3,*) TMAX, DT, TE, NUNODE, N1, FO, T1
WRITE(5,1110) DT, TMAX, TE, NUNODE, N1
1110 FORMAT(3X, 'Donnees pour la reponse dynamique'//7x, 'Le pas d'integr
1ation [s]', T39, ':', E9.3/7X, 'L'intervalles d'integration [s]',
2T39, ':', '[0.,', F7.3,']'//7X, 'La duree d'excitation [s]', T39, ':',
3F7.3/, 7x, 'Le noeud ou la force est appliquee', T39, ':', I7/,
4'La frequence pour l'impression', T39, ':', I7//)
CALL CALCUL

```

```
NEQ=NDOF*(NELE+1)/2
```

```
CALL EQUIVALENT(NSYM,NO)
```

```
write(5,1010) EA,GA,EI,ETA12,ETA13,ETA23,RoA,R,RoI
```

```
1010 FORMAT(5X,'Les proprietes equivalentes '//7x,'EA [N] ',T31,' ',
1E13.5/7X,'GA [N] ',T31,' ',E13.5/7X,'EI [Nm*m] ',T31,' ',E13.5/
27X,'ETA12 [N] ',T31,' ',E13.5/7X,'ETA13 [Nm] ',T31,' ',E13.5/7X,
3'ETA23 [Nm] ',T31,' ',E13.5/7X,'RoA [kg*m] ',T31,' ',E9.5/7X,'R
4 [kg] ',T31,' ',E9.5/7X,'RoI [kgm] ',T31,' ',E9.5/
```

```
!-----FORMATION DE LA MATRICE MASSE ELEMENTAIRE [EM]
```

```
CALL MASSE
```

```
!-----FORMATION DE LA MATRICE RIGIDITE ELEMENTAIRE [EK]
```

```
CALL RIGIDITE
```

```
!-----FORMATION DE LA MATRICE MASSE GLOBALE [GM]
```

```
CALL ASSEMBLAGE(NELE,NDOF,NEQ,EM,GM)
```

```
!-----FORMATION DE LA MATRICE RIGIDITE GLOBALE [GK]
```

```
CALL ASSEMBLAGE(NELE,NDOF,NEQ,EK,GK)
```

```
!-----REDUCTION DES MATRICES MASSE ET RIGIDITE GLOBALES
```

```
CALL BOUNDARY(GM,NDOF,NEQ)
```

```
CALL BOUNDARY(GK,NDOF,NEQ)
```

```
!-----REARRANGEMENT DES MATRICES MASSE ET RIGIDITE GLOBALES
```

```
NN1=NDOF/4
```

```
NN=NEQ-NN1
```

```
DO II=1,NN
```

```
DO JJ=1,NN
```

```
    H(II,JJ)=GM(II-NN1,JJ+NN1)
```

```
    H1(II,JJ)=GK(II+NN1,JJ+NN1)
```

```
ENDDO
```

```

ENDDO
CALL STOCK(H,B,MAXA1,NN,NWM,1)
CALL STOCK(H1,A,MAXA,NN,NWK,1)
NNM=NN+1
NC=MINO(2*NMCD,NMOD+8)
NMC=NC*(NC+1)/2
!
!-----CALCUL DES FREQUENCES CIRCULAIRES
!
CALL SSPACE(A,B,MAXA,EIGV,NN,NNM,NWK,NWM,NMOD,RTOL,NC,
&NNC,NITEM,IFSS,IFPR,NSTIF,ICUT,MAXA1)
CALL IMPRESSION
WRITE(5,11) (I,DSGRT(EIGV(I)),I=1,NMCD)
11 FORMAT(//5X,' MODE ',5X,' FREQUENCE (rd/s) '//(7X,13,7X,F9.3))
NEQ1=NEQ
NEQ=NN
!
!-----CALCUL DE LA REPONSE DYNAMIQUE
!
CALL REPONS
END

```

ANNEXE 2

Fichier des données : input file

Structure symetrique No : 1 (10 ELEMENTS)

10 12 6 10 0

7.5 5.

60.E-6 2768. 71.7E9

60.E-6 2768. 71.7E9

30.E-6 2768. 71.7E9

30.E-6 2768. 71.7E9

40.E-6 2768. 71.7E9

40.E-6 2768. 71.7E9

1.E-17 17 0 0 1 9

5. 0.00001 0.55 11 1000 200. 0.

ANNEXE 3

FICHER DES RESULTATS

OUTPUT FILE

Fichier des résultats : output file

Structure symetrique No : 1 (10 ELEMENTS)

Nombre d'element poutre : 10
 Nombre de degre de liberte par noeud : 6
 Type d'element repetitif : 6
 Nombre de frequence circulaire a calculer : 10
 avec coefficients de couplage
 Longueur : 7.500
 Hauteur : 5.000

Caracteristiques geometrique et mecanique de chaque barre

Element	Section en m*m	Densite en kg/m3	Module de Young en N/m*m
1	0.600E-04	2768.000	0.717E+11
2	0.600E-04	2768.000	0.717E+11
3	0.300E-04	2768.000	0.717E+11
4	0.800E-04	2768.000	0.717E+11
5	0.400E-04	2768.000	0.717E+11
6	0.400E-04	2768.000	0.717E+11

Donnees pour la reponse dynamique

Le pas d'integration [s] : 0.100E-04
 L'intervalles d'integration [s] : [0., 5.000]
 La duree d'excitation [s] : 0.550
 Le noeud ou la force est appliq: 11
 La frequence pour l'impression : 1000

Les proprietes equivalentes

EA [N] : 0.14778E+08
 GA [N] : 0.14685E+07
 EI [Nm*m] : 0.71700E+08
 ETA12 [N] : 0.00000E+00
 ETA13 [Nm] : 0.00000E+00
 ETA23 [Nm] : 0.00000E+00
 RoA [kg/m] : 0.81974
 R [kg] : 0.00000
 RoI [kgm] : 3.55312

MODE FREQUENCE (rd/s)

1	5.722
2	32.057
3	78.467
4	88.920
5	132.987
6	191.469
7	251.382
8	311.652
9	371.745
10	431.507

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique plane (Fig 5.2)

Temps [s]	DEPLACEMENT [m]				FORCE AXIALE [N]	
	noeud 5		noeud 11		élément	
	axial	transversal	axial	transversal	21	23
.020	-.257E-07	-.472E-06	.707E-04	.385E-03	-.030	-.219
.040	-.125E-04	-.631E-04	.290E-03	.207E-02	8.858	-10.461
.060	-.447E-05	-.458E-03	.654E-03	.558E-02	54.195	-20.768
.080	.841E-04	-.103E-02	.116E-02	.113E-01	120.380	-24.362
.100	.230E-03	-.143E-02	.179E-02	.194E-01	216.736	-28.516
.120	.444E-03	-.971E-03	.258E-02	.303E-01	309.687	-36.882
.140	.762E-03	.647E-03	.340E-02	.435E-01	394.343	-43.335
.160	.123E-02	.355E-02	.417E-02	.587E-01	467.181	-52.877
.180	.183E-02	.734E-02	.498E-02	.765E-01	518.192	-17.912
.200	.252E-02	.136E-01	.588E-02	.975E-01	572.771	-8.403
.220	.334E-02	.202E-01	.696E-02	.122E+00	630.215	6.994
.240	.429E-02	.271E-01	.817E-02	.150E+00	722.151	28.414
.260	.534E-02	.343E-01	.961E-02	.182E+00	842.707	54.577
.280	.644E-02	.418E-01	.113E-01	.217E+00	989.655	70.312
.300	.762E-02	.498E-01	.131E-01	.255E+00	1156.727	87.297
.320	.891E-02	.583E-01	.149E-01	.294E+00	1317.167	118.154
.340	.102E-01	.677E-01	.167E-01	.334E+00	1466.438	148.782
.360	.116E-01	.780E-01	.183E-01	.374E+00	1577.300	179.040
.380	.129E-01	.888E-01	.199E-01	.412E+00	1668.009	209.971
.400	.143E-01	.996E-01	.212E-01	.449E+00	1741.779	249.657
.420	.156E-01	.110E+00	.225E-01	.484E+00	1812.020	290.881
.440	.167E-01	.119E+00	.238E-01	.517E+00	1891.930	316.813
.460	.178E-01	.127E+00	.250E-01	.547E+00	1974.213	341.036
.480	.187E-01	.133E+00	.261E-01	.572E+00	2071.880	367.758
.500	.194E-01	.138E+00	.269E-01	.593E+00	2148.752	389.341
.520	.199E-01	.142E+00	.275E-01	.607E+00	2198.644	401.347
.540	.201E-01	.144E+00	.276E-01	.613E+00	2199.994	408.222
.560	.202E-01	.145E+00	.273E-01	.611E+00	2147.109	422.424
.580	.199E-01	.145E+00	.286E-01	.600E+00	2053.130	430.799
.600	.194E-01	.142E+00	.257E-01	.583E+00	1939.872	412.674
.620	.166E-01	.137E+00	.246E-01	.559E+00	1844.191	393.668
.640	.176E-01	.129E+00	.233E-01	.528E+00	1760.358	380.998
.660	.163E-01	.118E+00	.218E-01	.492E+00	1689.436	351.034
.680	.148E-01	.106E+00	.202E-01	.450E+00	1597.511	306.228
.700	.131E-01	.932E-01	.182E-01	.401E+00	1472.710	259.082
.720	.113E-01	.795E-01	.157E-01	.346E+00	1297.733	229.199
.740	.934E-02	.657E-01	.129E-01	.285E+00	1059.087	196.745
.760	.722E-02	.520E-01	.983E-02	.220E+00	777.256	146.324
.780	.505E-02	.377E-01	.661E-02	.151E+00	475.094	105.191
.800	.283E-02	.222E-01	.328E-02	.808E-01	196.616	70.475
.820	.546E-03	.574E-02	.113E-03	.108E-01	-53.803	26.805
.840	-.181E-02	-.116E-01	-.278E-02	-.577E-01	-265.114	-33.146
.860	-.415E-02	-.295E-01	-.556E-02	-.125E+00	-444.677	-94.138
.880	-.637E-02	-.473E-01	-.831E-02	-.191E+00	-613.260	-135.476
.900	-.853E-02	-.639E-01	-.110E-01	-.254E+00	-788.908	-181.229
.920	-.106E-01	-.786E-01	-.137E-01	-.315E+00	-1004.781	-236.132
.940	-.125E-01	-.914E-01	-.164E-01	-.374E+00	-1238.475	-274.656
.960	-.142E-01	-.103E+00	-.191E-01	-.429E+00	-1484.374	-296.423
.980	-.157E-01	-.112E+00	-.215E-01	-.478E+00	-1711.517	-316.461
1.000	-.170E-01	-.121E+00	-.234E-01	-.519E+00	-1891.707	-350.422
1.020	-.182E-01	-.129E+00	-.249E-01	-.553E+00	-2014.839	-380.952
1.040	-.190E-01	-.137E+00	-.260E-01	-.579E+00	-2059.528	-391.267

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique plane (Fig 5.2)

Temps [s]	DEPLACEMENT [m]				FORCE AXIALE [N]	
	noeud 5		noeud 11		élément	
	axial	transversal	axial	transversal	21	23
1.060	-.197E-01	-.143E+00	-.266E-01	-.596E+00	-2065.278	-407.532
1.080	-.201E-01	-.147E+00	-.267E-01	-.605E+00	-2042.666	-431.721
1.100	-.203E-01	-.148E+00	-.267E-01	-.607E+00	-2017.424	-441.605
1.120	-.201E-01	-.147E+00	-.266E-01	-.603E+00	-2005.502	-430.584
1.140	-.197E-01	-.143E+00	-.262E-01	-.592E+00	-2000.439	-410.599
1.160	-.190E-01	-.137E+00	-.256E-01	-.574E+00	-2004.094	-399.637
1.180	-.180E-01	-.129E+00	-.246E-01	-.549E+00	-1967.717	-379.695
1.200	-.168E-01	-.120E+00	-.232E-01	-.514E+00	-1877.973	-340.538
1.220	-.155E-01	-.110E+00	-.214E-01	-.473E+00	-1722.987	-310.182
1.240	-.139E-01	-.997E-01	-.190E-01	-.423E+00	-1511.668	-290.414
1.260	-.122E-01	-.884E-01	-.163E-01	-.368E+00	-1265.572	-264.145
1.280	-.103E-01	-.760E-01	-.135E-01	-.308E+00	-998.597	-221.674
1.300	-.824E-02	-.619E-01	-.106E-01	-.245E+00	-754.724	-174.305
1.320	-.611E-02	-.459E-01	-.771E-02	-.180E+00	-540.094	-140.294
1.340	-.386E-02	-.284E-01	-.488E-02	-.114E+00	-357.994	-91.905
1.360	-.150E-02	-.105E-01	-.217E-02	-.467E-01	-183.012	-25.837
1.380	.856E-03	.751E-02	.645E-03	.212E-01	4.041	31.727
1.400	.314E-02	.249E-01	.370E-02	.903E-01	215.516	75.284
1.420	.537E-02	.409E-01	.684E-02	.159E+00	472.851	113.166
1.440	.757E-02	.554E-01	.997E-02	.227E+00	754.040	165.107
1.460	.965E-02	.689E-01	.131E-01	.292E+00	1044.356	208.102
1.480	.116E-01	.819E-01	.160E-01	.353E+00	1300.995	232.370
1.500	.133E-01	.946E-01	.186E-01	.409E+00	1511.743	265.111
1.520	.150E-01	.107E+00	.206E-01	.458E+00	1668.313	309.068
1.540	.165E-01	.118E+00	.223E-01	.499E+00	1761.373	351.430
1.560	.177E-01	.129E+00	.237E-01	.535E+00	1823.458	374.980
1.580	.187E-01	.137E+00	.248E-01	.563E+00	1868.772	395.162
1.600	.195E-01	.143E+00	.257E-01	.585E+00	1936.608	423.401
1.620	.200E-01	.146E+00	.264E-01	.601E+00	2015.381	434.766
1.640	.202E-01	.147E+00	.271E-01	.610E+00	2092.738	424.238
1.660	.201E-01	.145E+00	.274E-01	.611E+00	2158.295	412.788
1.680	.198E-01	.141E+00	.271E-01	.603E+00	2174.480	410.524
1.700	.193E-01	.137E+00	.264E-01	.587E+00	2136.290	403.178
1.720	.185E-01	.132E+00	.253E-01	.562E+00	2017.226	379.104
1.740	.174E-01	.126E+00	.236E-01	.528E+00	1846.773	356.696
1.760	.162E-01	.118E+00	.215E-01	.487E+00	1649.392	348.364
1.780	.148E-01	.108E+00	.193E-01	.441E+00	1443.570	326.223
1.800	.131E-01	.965E-01	.170E-01	.390E+00	1261.222	282.349
1.820	.112E-01	.824E-01	.147E-01	.335E+00	1095.367	235.309
1.840	.917E-02	.664E-01	.123E-01	.276E+00	952.996	194.329
1.860	.704E-02	.495E-01	.969E-02	.214E+00	795.883	151.895
1.880	.478E-02	.327E-01	.697E-02	.149E+00	604.174	88.938
1.900	.248E-02	.162E-01	.396E-02	.808E-01	371.496	35.738
1.920	.232E-03	.282E-03	.643E-03	.977E-02	93.453	1.613
1.940	-.203E-02	-.150E-01	-.280E-02	-.622E-01	-207.699	-37.798
1.960	-.431E-02	-.299E-01	-.610E-02	-.133E+00	-518.331	-85.057
1.980	-.654E-02	-.450E-01	-.925E-02	-.201E+00	-791.762	-135.291
2.000	-.864E-02	-.606E-01	-.122E-01	-.266E+00	-1014.325	-170.516
2.020	-.107E-01	-.762E-01	-.148E-01	-.326E+00	-1183.991	-210.773
2.040	-.126E-01	-.912E-01	-.170E-01	-.381E+00	-1318.704	-269.252
2.060	-.144E-01	-.105E+00	-.189E-01	-.431E+00	-1441.012	-314.202

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique plane (Fig 5.2)

Temps [s]	DEPLACEMENT [m]				FORCE AXIALE [N]	
	noeud 5		noeud 11		élément	
	axial	transversal	axial	transversal	21	23
2.080	-.159E-01	-.117E+00	-.209E-01	-.476E+00	-1558.958	-341.660
2.100	-.172E-01	-.127E+00	-.227E-01	-.517E+00	-1704.304	-364.354
2.120	-.183E-01	-.134E+00	-.243E-01	-.551E+00	-1861.748	-391.330
2.140	-.192E-01	-.138E+00	-.258E-01	-.579E+00	-2021.374	-410.495
2.160	-.197E-01	-.141E+00	-.269E-01	-.600E+00	-2146.265	-405.454
2.180	-.200E-01	-.143E+00	-.276E-01	-.612E+00	-2212.009	-403.787
2.200	-.202E-01	-.144E+00	-.276E-01	-.614E+00	-2219.594	-417.882
2.220	-.200E-01	-.144E+00	-.271E-01	-.607E+00	-2149.723	-422.857
2.240	-.196E-01	-.142E+00	-.263E-01	-.592E+00	-2038.900	-412.615
2.260	-.189E-01	-.139E+00	-.251E-01	-.569E+00	-1904.123	-397.638
2.280	-.180E-01	-.132E+00	-.237E-01	-.540E+00	-1778.141	-389.283
2.300	-.169E-01	-.123E+00	-.221E-01	-.504E+00	-1671.880	-371.324
2.320	-.154E-01	-.112E+00	-.205E-01	-.464E+00	-1567.206	-325.575
2.340	-.138E-01	-.993E-01	-.187E-01	-.418E+00	-1470.241	-280.437
2.360	-.120E-01	-.850E-01	-.165E-01	-.366E+00	-1341.806	-246.501
2.380	-.101E-01	-.703E-01	-.140E-01	-.308E+00	-1167.658	-207.176
2.400	-.797E-02	-.559E-01	-.112E-01	-.245E+00	-931.130	-158.673
2.420	-.580E-02	-.415E-01	-.808E-02	-.178E+00	-645.830	-111.502
2.440	-.362E-02	-.267E-01	-.469E-02	-.108E+00	-349.015	-80.974
2.460	-.137E-02	-.113E-01	-.133E-02	-.366E-01	-51.840	-44.656
2.480	.964E-03	.480E-02	.184E-02	.338E-01	210.991	13.511
2.500	.329E-02	.218E-01	.479E-02	.102E+00	435.237	67.155
2.520	.554E-02	.395E-01	.764E-02	.169E+00	613.973	111.507
2.540	.774E-02	.569E-01	.103E-01	.233E+00	772.982	158.637
2.560	.987E-02	.731E-01	.128E-01	.294E+00	942.101	216.198
2.580	.119E-01	.875E-01	.153E-01	.352E+00	1127.847	267.550
2.600	.136E-01	.100E+00	.179E-01	.408E+00	1343.490	290.682
2.620	.152E-01	.111E+00	.204E-01	.459E+00	1567.229	313.843
2.640	.166E-01	.119E+00	.226E-01	.504E+00	1788.442	346.567
2.660	.178E-01	.127E+00	.244E-01	.541E+00	1964.279	371.538
2.680	.187E-01	.133E+00	.258E-01	.571E+00	2075.244	383.848
2.700	.195E-01	.139E+00	.267E-01	.593E+00	2123.957	393.420
2.720	.200E-01	.144E+00	.270E-01	.605E+00	2113.163	419.799
2.740	.202E-01	.147E+00	.269E-01	.609E+00	2074.187	437.073
2.760	.202E-01	.148E+00	.267E-01	.606E+00	2014.037	430.565
2.780	.199E-01	.146E+00	.262E-01	.596E+00	1972.086	420.909
2.800	.193E-01	.141E+00	.256E-01	.580E+00	1947.786	412.470
2.820	.184E-01	.133E+00	.247E-01	.556E+00	1922.650	395.147
2.840	.173E-01	.124E+00	.236E-01	.526E+00	1877.602	356.856
2.860	.160E-01	.114E+00	.221E-01	.488E+00	1777.496	318.598
2.880	.145E-01	.103E+00	.200E-01	.443E+00	1630.415	297.462
2.900	.128E-01	.912E-01	.175E-01	.390E+00	1415.010	270.491
2.920	.110E-01	.793E-01	.148E-01	.332E+00	1154.689	227.602
2.940	.897E-02	.663E-01	.118E-01	.269E+00	879.763	187.106
2.960	.690E-02	.518E-01	.874E-02	.204E+00	613.451	154.902
2.980	.470E-02	.357E-01	.571E-02	.136E+00	387.259	115.681
3.000	.238E-02	.184E-01	.290E-02	.691E-01	182.378	54.520
3.020	.110E-04	.319E-03	.113E-03	.154E-02	7.107	-9.018
3.040	-.229E-02	-.180E-01	-.275E-02	-.665E-01	-169.827	-52.138
3.060	-.457E-02	-.353E-01	-.569E-02	-.134E+00	-372.882	-99.553
3.080	-.682E-02	-.512E-01	-.865E-02	-.201E+00	-609.932	-153.857

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique plane (Fig 5.2)

Temps [s]	DEPLACEMENT [m]				FORCE AXIALE [N]	
	noeud 5		noeud 11		élément	
	axial	transversal	axial	transversal	21	23
3.100	-.895E-02	-.655E-01	-.117E-01	-.267E+00	-881.826	-199.553
3.120	-.109E-01	-.787E-01	-.147E-01	-.330E+00	-1151.824	-229.112
3.140	-.127E-01	-.908E-01	-.176E-01	-.389E+00	-1411.013	-252.263
3.160	-.144E-01	-.102E+00	-.200E-01	-.441E+00	-1624.849	-296.267
3.180	-.160E-01	-.113E+00	-.219E-01	-.486E+00	-1777.862	-334.000
3.200	-.173E-01	-.124E+00	-.235E-01	-.525E+00	-1865.288	-356.151
3.220	-.184E-01	-.133E+00	-.247E-01	-.555E+00	-1907.479	-382.692
3.240	-.193E-01	-.141E+00	-.255E-01	-.579E+00	-1941.086	-412.203
3.260	-.199E-01	-.146E+00	-.261E-01	-.595E+00	-1972.612	-435.616
3.280	-.202E-01	-.148E+00	-.267E-01	-.606E+00	-2021.272	-431.235
3.300	-.202E-01	-.147E+00	-.270E-01	-.610E+00	-2072.823	-420.198
3.320	-.200E-01	-.144E+00	-.270E-01	-.605E+00	-2121.813	-421.126
3.340	-.195E-01	-.139E+00	-.266E-01	-.593E+00	-2134.134	-409.713
3.360	-.188E-01	-.134E+00	-.258E-01	-.572E+00	-2079.377	-383.388
3.380	-.178E-01	-.127E+00	-.245E-01	-.543E+00	-1964.825	-358.774
3.400	-.167E-01	-.120E+00	-.226E-01	-.505E+00	-1783.436	-346.747
3.420	-.153E-01	-.111E+00	-.203E-01	-.460E+00	-1572.061	-332.495
3.440	-.137E-01	-.101E+00	-.180E-01	-.410E+00	-1343.664	-294.211
3.460	-.119E-01	-.882E-01	-.155E-01	-.355E+00	-1132.144	-251.336
3.480	-.994E-02	-.735E-01	-.129E-01	-.296E+00	-955.926	-218.731
3.500	-.786E-02	-.571E-01	-.103E-01	-.235E+00	-789.238	-174.155
3.520	-.562E-02	-.399E-01	-.776E-02	-.172E+00	-629.524	-114.069
3.540	-.332E-02	-.225E-01	-.501E-02	-.105E+00	-440.872	-54.654
3.560	-.104E-02	-.540E-02	-.194E-02	-.362E-01	-221.886	-11.764
3.580	.124E-02	.108E-01	.132E-02	.346E-01	42.618	25.629
3.600	.353E-02	.260E-01	.462E-02	.106E+00	347.257	78.641
3.620	.577E-02	.406E-01	.792E-02	.175E+00	649.158	124.139
3.640	.789E-02	.553E-01	.111E-01	.243E+00	928.550	155.370
3.660	.994E-02	.700E-01	.140E-01	.306E+00	1152.744	193.313
3.680	.119E-01	.846E-01	.164E-01	.364E+00	1330.731	244.034
3.700	.138E-01	.988E-01	.185E-01	.415E+00	1460.242	295.640
3.720	.154E-01	.112E+00	.204E-01	.462E+00	1559.049	326.034
3.740	.168E-01	.123E+00	.221E-01	.503E+00	1659.680	352.933
3.760	.180E-01	.132E+00	.236E-01	.539E+00	1773.511	390.186
3.780	.189E-01	.138E+00	.250E-01	.568E+00	1910.643	411.575
3.800	.196E-01	.142E+00	.263E-01	.591E+00	2041.595	412.352
3.820	.200E-01	.144E+00	.272E-01	.607E+00	2155.006	407.544
3.840	.202E-01	.144E+00	.276E-01	.614E+00	2220.268	414.732
3.860	.201E-01	.143E+00	.275E-01	.611E+00	2215.621	421.936
3.880	.197E-01	.141E+00	.269E-01	.600E+00	2142.669	407.537
3.900	.192E-01	.139E+00	.259E-01	.580E+00	2011.414	395.843
3.920	.184E-01	.134E+00	.244E-01	.552E+00	1864.560	392.794
3.940	.173E-01	.127E+00	.227E-01	.518E+00	1708.254	379.539
3.960	.160E-01	.117E+00	.210E-01	.478E+00	1567.945	345.654
3.980	.144E-01	.106E+00	.191E-01	.433E+00	1446.189	300.623
4.000	.127E-01	.918E-01	.171E-01	.383E+00	1331.522	267.851
4.020	.108E-01	.764E-01	.148E-01	.328E+00	1204.836	228.134
4.040	.872E-02	.611E-01	.123E-01	.268E+00	1022.065	171.947
4.060	.656E-02	.458E-01	.943E-02	.204E+00	795.211	123.130
4.080	.439E-02	.306E-01	.619E-02	.135E+00	517.546	88.380
4.100	.217E-02	.156E-01	.278E-02	.640E-01	215.111	54.315

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique plane (Fig 5.2)

Temps [s]	DEPLACEMENT [m]				FORCE AXIALE [N]	
	noeud 5		noeud 11		élément	
	axial	transversal	axial	transversal	21	23
4.120	-.143E-03	.396E-03	-.555E-03	-.747E-02	-87.656	3.323
4.140	-.245E-02	-.154E-01	-.377E-02	-.780E-01	-369.361	-50.107
4.160	-.471E-02	-.322E-01	-.685E-02	-.147E+00	-592.535	-88.060
4.180	-.691E-02	-.493E-01	-.965E-02	-.212E+00	-780.894	-132.596
4.200	-.910E-02	-.661E-01	-.122E-01	-.274E+00	-936.012	-193.832
4.220	-.112E-01	-.819E-01	-.145E-01	-.333E+00	-1087.131	-247.685
4.240	-.130E-01	-.960E-01	-.169E-01	-.388E+00	-1252.430	-283.132
4.260	-.147E-01	-.108E+00	-.193E-01	-.440E+00	-1437.585	-308.734
4.280	-.162E-01	-.118E+00	-.215E-01	-.486E+00	-1651.751	-342.953
4.300	-.174E-01	-.125E+00	-.235E-01	-.527E+00	-1851.334	-372.576
4.320	-.184E-01	-.132E+00	-.252E-01	-.561E+00	-2018.817	-377.422
4.340	-.192E-01	-.137E+00	-.265E-01	-.587E+00	-2127.161	-387.688
4.360	-.198E-01	-.141E+00	-.271E-01	-.603E+00	-2171.933	-408.357
4.380	-.202E-01	-.145E+00	-.272E-01	-.610E+00	-2155.448	-425.938
4.400	-.202E-01	-.147E+00	-.271E-01	-.610E+00	-2086.490	-428.270
4.420	-.200E-01	-.146E+00	-.265E-01	-.601E+00	-2007.837	-418.948
4.440	-.195E-01	-.143E+00	-.257E-01	-.586E+00	-1934.873	-422.405
4.460	-.188E-01	-.137E+00	-.248E-01	-.564E+00	-1884.092	-410.280
4.480	-.178E-01	-.129E+00	-.238E-01	-.536E+00	-1832.373	-373.980
4.500	-.165E-01	-.119E+00	-.225E-01	-.501E+00	-1769.747	-337.322
4.520	-.151E-01	-.107E+00	-.207E-01	-.459E+00	-1675.335	-308.067
4.540	-.135E-01	-.949E-01	-.186E-01	-.410E+00	-1519.668	-281.128
4.560	-.116E-01	-.825E-01	-.161E-01	-.355E+00	-1308.113	-236.292
4.580	-.967E-02	-.697E-01	-.132E-01	-.294E+00	-1038.656	-192.339
4.600	-.764E-02	-.561E-01	-.101E-01	-.229E+00	-757.609	-165.993
4.620	-.550E-02	-.413E-01	-.684E-02	-.161E+00	-478.237	-131.385
4.640	-.323E-02	-.254E-01	-.379E-02	-.927E-01	-224.297	-77.067
4.660	-.385E-03	-.819E-02	-.872E-03	-.243E-01	-15.357	-18.341
4.680	.143E-02	.998E-02	.201E-02	.440E-01	169.599	29.051
4.700	.373E-02	.282E-01	.484E-02	.111E+00	337.206	75.207
4.720	.602E-02	.454E-01	.760E-02	.178E+00	532.190	135.560
4.740	.822E-02	.612E-01	.104E-01	.243E+00	751.717	190.278
4.760	.102E-01	.754E-01	.134E-01	.306E+00	995.811	220.154
4.780	.121E-01	.880E-01	.163E-01	.366E+00	1260.412	249.177
4.800	.139E-01	.992E-01	.189E-01	.422E+00	1510.138	286.415
4.820	.155E-01	.109E+00	.212E-01	.471E+00	1727.419	321.941
4.840	.168E-01	.119E+00	.232E-01	.513E+00	1871.517	343.844
4.860	.180E-01	.129E+00	.246E-01	.547E+00	1954.868	362.813
4.880	.190E-01	.137E+00	.255E-01	.573E+00	1991.176	399.674
4.900	.197E-01	.143E+00	.261E-01	.591E+00	1998.209	426.295
4.920	.201E-01	.147E+00	.265E-01	.603E+00	2003.853	430.130
4.940	.202E-01	.149E+00	.268E-01	.608E+00	2014.930	427.789
4.960	.201E-01	.147E+00	.268E-01	.606E+00	2048.763	428.077
4.980	.198E-01	.143E+00	.265E-01	.596E+00	2074.128	423.656
5.000	.191E-01	.137E+00	.260E-01	.580E+00	2071.090	394.259

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique.

Temps [s]	FORCES AXIALES [N]	
	élément 46	48
.020	12.027	13.472
.040	26.962	31.904
.060	41.970	50.673
.080	56.793	69.432
.100	70.476	86.641
.120	86.601	108.601
.140	99.716	125.956
.160	108.720	137.120
.180	116.251	146.081
.200	122.744	153.758
.220	130.070	163.809
.240	131.953	165.761
.260	135.390	170.921
.280	140.073	179.068
.300	143.073	184.956
.320	144.615	188.865
.340	139.724	183.709
.360	137.208	182.398
.380	130.516	175.177
.400	119.993	162.097
.420	110.458	150.366
.440	98.910	137.247
.460	90.633	129.017
.480	78.247	114.764
.500	66.416	101.489
.520	56.107	90.405
.540	42.180	74.197
.560	30.834	58.413
.580	26.624	51.206
.600	25.935	49.517
.620	25.193	47.588
.640	23.380	44.184
.660	20.804	40.307
.680	25.666	47.837
.700	26.264	48.427
.720	21.737	40.265
.740	17.604	32.093
.760	11.073	21.576
.780	7.578	14.060
.800	-1.418	-1.527
.820	-6.127	-10.119
.840	-4.342	-8.679
.860	-6.214	-11.256
.880	-7.298	-14.365
.900	-10.269	-19.644
.920	-9.816	-20.128
.940	-13.119	-26.376
.960	-22.709	-42.402
.980	-29.028	-53.670

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique.

Temps [s]	FORCES AXIALES [N]	
	élément	
	46	48
1.000	-30.400	-56.637
1.020	-30.266	-57.215
1.040	-32.514	-60.676
1.060	-31.640	-59.417
1.080	-27.773	-52.382
1.100	-23.660	-46.055
1.120	-26.329	-50.273
1.140	-28.910	-54.737
1.160	-28.262	-53.974
1.180	-30.560	-56.675
1.200	-30.709	-57.391
1.220	-30.323	-56.084
1.240	-22.620	-42.881
1.260	-15.675	-30.336
1.280	-13.929	-26.089
1.300	-8.410	-16.660
1.320	-4.474	-9.410
1.340	-1.444	-3.644
1.360	-4.414	-7.476
1.380	-5.761	-9.301
1.400	.617	1.993
1.420	5.132	10.137
1.440	9.694	18.457
1.460	13.874	26.611
1.480	21.544	40.064
1.500	27.656	51.038
1.520	26.131	48.803
1.540	25.169	47.525
1.560	25.289	48.110
1.580	25.126	48.418
1.600	23.681	46.117
1.620	24.365	47.449
1.640	30.027	57.157
1.660	34.106	64.070
1.680	33.222	63.069
1.700	32.348	60.805
1.720	32.688	61.142
1.740	28.924	54.213
1.760	21.363	41.277
1.780	14.897	30.249
1.800	14.886	28.798
1.820	16.082	30.466
1.840	12.208	23.583
1.860	11.584	22.125
1.880	11.832	22.059
1.900	10.063	18.210
1.920	4.112	7.097
1.940	-5.848	-9.956

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique.

Temps [s]	FORCES AXIALES [N]	
	élément 46	48
1.960	-8.464	-15.849
1.980	-13.862	-25.364
2.000	-19.343	-34.907
2.020	-19.812	-37.358
2.040	-19.248	-36.223
2.060	-15.919	-31.704
2.080	-20.448	-39.026
2.100	-23.222	-44.437
2.120	-23.372	-45.845
2.140	-27.982	-53.250
2.160	-33.679	-63.130
2.180	-38.193	-70.499
2.200	-34.661	-65.234
2.220	-30.290	-57.752
2.240	-29.079	-55.248
2.260	-27.020	-51.218
2.280	-21.780	-42.292
2.300	-19.112	-37.511
2.320	-21.353	-40.856
2.340	-22.915	-43.668
2.360	-22.252	-41.439
2.380	-18.119	-34.323
2.400	-17.309	-31.822
2.420	-12.078	-22.284
2.440	-2.411	-5.898
2.460	3.096	5.287
2.480	6.885	12.029
2.500	6.523	12.545
2.520	11.171	20.414
2.540	12.380	23.182
2.560	9.193	18.993
2.580	11.317	22.759
2.600	16.319	31.806
2.620	25.059	46.223
2.640	27.061	51.104
2.660	29.336	55.124
2.680	34.434	64.038
2.700	34.791	64.744
2.720	31.696	59.530
2.740	26.543	51.149
2.760	26.252	50.329
2.780	26.831	51.490
2.800	25.025	48.407
2.820	26.061	49.875
2.840	29.953	55.683
2.860	30.927	57.409
2.880	26.460	49.332
2.900	21.103	39.713

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique.

Temps [s]	FORCES AXIALES [N]	
	élément	
	46	48
2.920	17.845	32.761
2.940	13.463	24.810
2.960	4.744	10.256
2.980	-.021	.991
3.000	1.790	3.278
3.020	2.309	3.294
3.040	.519	-.024
3.060	-4.296	-3.097
3.080	-5.441	-11.263
3.100	-8.083	-16.533
3.120	-17.842	-33.444
3.140	-23.379	-43.911
3.160	-27.118	-50.492
3.180	-27.527	-51.534
3.200	-28.241	-53.356
3.220	-29.380	-55.384
3.240	-23.609	-46.345
3.260	-23.443	-45.927
3.280	-26.984	-51.219
3.300	-29.796	-56.866
3.320	-31.423	-59.295
3.340	-30.547	-58.187
3.360	-34.862	-64.359
3.380	-34.037	-62.309
3.400	-26.504	-50.210
3.420	-19.698	-37.889
3.440	-16.298	-31.804
3.460	-15.293	-28.721
3.480	-11.051	-21.444
3.500	-8.667	-17.089
3.520	-10.036	-19.070
3.540	-11.503	-20.458
3.560	-6.209	-11.290
3.580	-.888	-1.227
3.600	3.398	7.307
3.620	9.677	17.988
3.640	16.341	30.374
3.660	22.955	41.647
3.680	20.145	38.628
3.700	19.557	37.767
3.720	21.782	41.206
3.740	22.180	42.394
3.760	22.345	43.317
3.780	21.607	42.920
3.800	30.024	56.192
3.820	35.378	65.567
3.840	34.923	65.294
3.860	34.007	63.915

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique.

Temps [s]	FORCES AXIALES [N]	
	élément	
	46	48
3.880	32.099	60.747
3.900	31.687	59.080
3.920	24.361	47.154
3.940	19.302	37.852
3.960	19.507	37.900
3.980	19.598	37.949
4.000	19.003	36.433
4.020	17.447	33.406
4.040	18.886	34.308
4.060	16.468	30.172
4.080	8.425	16.003
4.100	.298	1.527
4.120	-3.027	-5.652
4.140	-6.936	-12.670
4.160	-12.635	-22.697
4.180	-15.442	-27.666
4.200	-13.583	-25.450
4.220	-10.209	-21.096
4.240	-15.251	-28.922
4.260	-20.119	-38.069
4.280	-22.522	-42.367
4.300	-26.689	-50.322
4.320	-31.086	-58.532
4.340	-36.781	-67.967
4.360	-34.502	-64.550
4.380	-30.400	-57.778
4.400	-30.569	-57.479
4.420	-26.933	-51.740
4.440	-24.263	-47.291
4.460	-22.382	-43.693
4.480	-25.694	-48.872
4.500	-29.995	-55.103
4.520	-25.863	-48.980
4.540	-23.645	-44.638
4.560	-22.069	-40.622
4.580	-18.133	-33.383
4.600	-9.872	-18.737
4.620	-.747	-3.622
4.640	.393	-.363
4.660	.148	.515
4.680	2.976	5.188
4.700	5.194	9.632
4.720	4.578	9.144
4.740	5.966	12.359
4.760	11.996	23.059
4.780	19.460	36.624
4.800	23.635	44.536
4.820	25.947	49.179

Les résultats ci-dessous sont obtenus par le programme BEAM pour une structure symétrique.

Temps [s]	FORCES AXIALES [N]	
	élément	
	46	48
4.840	31.870	58.929
4.860	32.111	59.614
4.880	28.296	54.425
4.900	24.951	48.383
4.920	25.213	48.801
4.940	29.225	54.808
4.960	26.417	51.081
4.980	28.270	54.084
5.000	32.401	60.523