

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE - CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

LOGICIEL D'ETUDE DE BATIMENTS EN VOILES

Proposé par :

M A. CHARIF

Etudié par :

ADJAL. YUCEF

NESNAS KAMEL

Dirigé par :

M A. CHARIF

PROMOTION :

JUIN 89

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE - CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

LOGICIEL D'ETUDE DE BATIMENTS EN VOILES

Proposé par :

M A. CHARIF

Etudié par :

ADJAL. YUCEF
NESNAS KAMEL

Dirigé par :

M A. CHARIF

PROMOTION :

JUIN 89

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي

عِلْمًا

كَتَبَهُ وَاللَّهُ الْعَظِيمُ

Matériau : GENIE CIVIL
Auteur : A. CHARIF
Ingénieur : ADJAL YUCEF
MESNAS KAMEL

مطبعة : الهندسة المدنية
موجه : عبد الحميد شريف
تلميذ مهندس : عجال يوسف
نسناس كمال

الموضوع : برنامج آلي للدراسة الأتوماتيكية للبنى ذات الجدران العملاقة
الملاحظ : الهدف الرئيسي من دراستنا هو إنجاز برنامج آلي للدراسة الأتوماتيكية لمشروع البنى ذات جدران حاملة. بعد إدخال المعطيات والتحقق صحتها، يقوم البرنامج بدراسة شبه ديناميكية لحساب القوى الثابتة إذ عن القوى الديناميكية أو الزلزالية ثم يستنتج القوى الداخلية للجدران تحت تأثير القوى العمودية والأفقية.

Objet : ELABORATION D'UN LOGICIEL D'ETUDE DE BATIMENT EN VOILES

Résumé : Le but de notre étude est l'élaboration d'un logiciel d'étude automatique des bâtiments en voiles. Après introduction des données et vérification, le programme fait une étude pseudo-dynamique en vue de la détermination des forces statiques dues aux forces dynamiques ou sismiques, puis il déduit les efforts internes dans les voiles sous les charges verticales et horizontales.

Objet : ELABORATION OF SOFTWARE OF WALLS BUILDING ANALYSIS

Abstract : The aim is the design of a computer software for an automatic study of walls structures. After have introduced the data and controlled, the programme does a pseudo-dynamic analysis of the structure, to calculate the seismic forces and the programme deduces the internal loads in the walls of the structure.

-* REMERCIEMENTS *

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur le professeur A.CHARIF pour ses précieux conseils, pour son esprit critique et au dynamisme scientifique dont il nous a fait preuve.

Nous tenons à remercier également tous les membres du jury qui nous font l'honneur de juger notre travail et qu'ils reçoivent nos remerciements les plus anticipés, ainsi que tous ceux qui ont contribué à notre formation.

Nos remerciement vont aussi à l'ensemble du personnel du centre de calcul, ainsi que tous ceux qui nous ont aidé, en particulier M.ABDESSEMED **KHALED**.

KAMEL et YUCEF.

-*(DEDICACES)*-

Je dédie ce modeste travail :

- A mon père et ma mère pour leurs sacrifices et leur soutien ainsi que leur encouragement durant tous mes années d'études.
- A mon frère et mes soeurs qui m'ont toujours souhaité le succès.
- A ma grande soeur et ses enfants IBRAHIM, BILAL et SOULIMAN.
- A tous mes amis.
- A "ATFAL EL HIDJARA" en leurs souhaitant la liberté et la paix.
- A tous ceux qui témoignent qu'il n'existe dieu qu'ALLAH et que MOHAMMED est le messagé d'ALLAH.

Yucef. 

CHAP I : INTRODUCTION.

I-1) - INTRODUCTION.

I-2) - GENERALITES SUR L'ORDINATEUR.

I-3) - METHODOLOGIE DE LA PROGRAMMATION.

I-4) - LANGUAGES UTILISEES POUR LA PROGRAMMATION.

I-5) - METHODOLOGIE DE L'ELABORATION DU LOGICIEL.

CHAP II : INTRODUCTION DES DONNEES.

II-1) - INTRODUCTION.

II-2) - DONNEES PRELIMINAIRES.

II-3) - CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS DE BATIMENT.

II-3-1) - CARACTERISTIQUES DES VOILES.

II-3-2) - CARACTERISTIQUES DES PLANCHERS.

II-4) - CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX.

II-5) - DONNEES RELATIVES A L'ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE.

II-6) - CONTRÔLE DES DONNEES.

II-7) - VISUALISATION GRAPHIQUE.

CHAP III : CALCUL DES CENTRES DE MASSES ET DE TORSION.

III-1) - CENTRE DE MASSE.

III-2) - CENTRE DE TORSION.

III-3) - CALCUL DE L'EXCENTRICITE.

CHAP IV : DESCENTE DE CHARGES.

CHAP V : ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE.

V-1) - INTRODUCTION.

V-2) - MODELISATION DE LA STRUCTURE.

V-3) - ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DE MOUVEMENT.

V-3-1-1) - MATRICE DE RIGIDITE.

V-3-1-1) - CALCUL DE LA RIGIDITE INERTIALE EN.

V-3-2) - MATRICE DES MASSES.

V-3-2-1) - CALCUL DE LA MASSE M_j.

V-3-3) - MATRICE D'AMORTISSEMENT.

- V-4)- EQUATION DU MOUVEMENT.
- V-5)- CALCUL DES CARACTERISTIQUES PROPRES DE VIBRATION.
 - V-5-1)- CHOIX DE LA METHODE DE CALCUL.
 - V-5-2)- EXPOSE DE LA METHODE DE JACOBI.
- V-6)- CALCUL DES FORCES SISMIQUES.
 - V-6-1)- FORCES SISMIQUES DANS CHAQUE MODE DE VIBRATION DE LA STRUCTURE.
 - V-6-2)- RESULTANTE DES FORCES SISMIQUES MODALES.

CHAP VI : REPARTITION DES FORCES SISMIQUES ENTRE LES DIFFERENTS ELEMENTS DE CONTREVENTEMENT.

CHAP VII : CALCUL DES EFFORTS INTERNES DANS LES VOILES.

- VII-1)- INTRODUCTION.
- VII-2)- MODELISATION DES VOILES.
- VII-3)- RAPPELS DES METHODES ENERGERIQUES.
 - VII-3-1)- TRAVAIL MECANIQUE DES FORCES EXTERIEURS.
 - VII-3-2)- TRAVAIL MECANIQUE DES EFFORTS (FORCES INTERIEURS) OU ENERGIE DE DEFORMATION.
 - VII-3-3)- THEOREME DE CASTIGLIANO.
- VII-4)- MATRICE DE RIGIDITE.
 - VII-4-1)- DEFINITION.
 - VII-4-2)- MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE SIMPLE BI-ENCASTREE.
 - VII-4-3)- MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE AVEC DES PARTIES INFINIMENT RIGIDES AUX EXTREMITES.
- VII-5)- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI DUES AUX CHARGEMENTS EXTERIEURS.
 - VII-5-1)- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI D'UNE BARRE BI-ENCASTREE.
 - VII-5-1-1)- CHARGEMENT UNIFORME PERPENDICULAIRE A LA BARRE.
 - VII-5-1-2)- CHARGEMENT UNIFORME NORMALE A LA BARRE.

CHAP IX : CONCLUSION.

CHAP VIII : APPLICATION A T. INFORMATIQUES.

- VII-6-1) -- PRINCIPE DE LA METHODE.
- VII-6-2) -- MATRICE DE ROTATION.
- VII-6-3) -- EQUATION D'EQUILIBRE.
- VII-6-4) -- FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE LA STRUCTURE.
- VII-6-5) -- INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NOEUDS.
- VII-6-6) -- PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE.
- VII-6-7) -- METHODES DE STOCKAGE DE LA MATRICE.
- VII-6-8) -- VECTEUR FORCE DE LA STRUCTURE.
- VII-6-9) -- CONDITIONS AUX LIMTES.
- VII-6-10) -- RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION LINEAIRES.
- VII-6-11) -- CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES.
- VII-6-12) -- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI.
- VII-5-2) -- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI D'UNE BARRE A EXTREMITES RIGIDES.
- VII-5-2-1) -- CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTI SUR LA PARTIE SOUPLE.
- VII-5-2-2) -- CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTI SUR TOUTE LA POULE.
- VII-6) -- METHODE DES DEPLACEMENTS.

المركز الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAP I — INTRODUCTION

I.1)- INTRODUCTION :

Le projeteur d'hier outre sa règle à calcul, disposait de formulaires dont il connaissait parfaitement l'emploi, ainsi que des méthodes manuelles qui lui permettaient d'obtenir des ordres de grandeur raisonnables. Lorsqu'il avait affaire à des structures ou à des systèmes de charges complexes, il lui fallait souvent schématiser à l'extrême afin de pouvoir appliquer ses outils de calcul.

Aujourd'hui, la micro-informatique met la puissance du calcul électronique à la disposition de chaque projeteur. Pour employer efficacement ce nouvel outil, il reste à bien en connaître les hypothèses, le mode de fonctionnement ainsi que les précautions d'emploi.

I.2)- GENERALITES SUR L'ORDINATEUR :

L'ordinateur est une machine assurant une exécution et une mémorisation précise et rigoureuse de processus complexes, parfois appelés algorithmes, propres au calcul scientifique et aux problèmes de gestion au sens large. Cette machine en permet la répétition avec des données différentes, à très grande vitesse et sans erreur.

Pour ce faire, l'utilisateur est astreint à une analyse et à une description standardisée de ces processus. Cette description standardisée constitue le programme, c'est à dire la succession des opérations à effectuer. L'ordinateur est conçu pour comprendre et effectuer une grande variété de programmes, assemblages ordonnés d'opérations élémentaires en nombre limité appelées instructions.

Le programme est l'élément déterminant et essentiel à la compréhension du fonctionnement de l'ordinateur. Il s'agit de l'agencement d'une suite plus ou moins longue d'opérations élémentaires arithmétiques ou logiques, dont les codes sont dans une première phase enregistrés dans l'ordinateur et sont ensuite interprétés pour être exécutés par lui dans une succession rigoureuse pour produire le travail prévu.

Dans les ordinateurs, l'ensemble des moyens matériels mis en oeuvre pour enregistrer, interpreter et exécuter des programmes codifiés est repris sous la dénomination générale de Hardware, les moyens intellectuels matérialisés dans les programmes sont eux repris sous la dénomination de Software.

I.3)- METHODOLOGIE DE LA PROGRAMMATION :

Pour écrire un programme, il faut faire un certain nombre d'opérations qui doivent s'enchaînées avec ordre :

a) La première étape consiste à effectuer l'analyse détaillées du problème, à choisir la méthode et à rechercher les cas dégénérés.

b) La seconde étape consiste à établir l'organigramme qui consiste à définir d'une manière précise l'organisation logique du problème et à le présenter sous une forme graphique normalisée aisément compréhensible sans ambiguïté.

c) La troisième étape consiste en la rédaction d'exemples calculés manuellement pour tester le programme, pour les problèmes complexes, ce travail est exclu.

d) Division du problème en parties distinctes qui donneront lieu à une serie de sous-programmes reliés par un programme principal.

e) Ecriture du programme.

f) Introduction des données pour avoir les résultats.

I.4)- LANGUAGES UTILISEES POUR LA PROGRAMMATION :

Afin de rendre plus aisée l'utilisation d'un ordinateur, les différents constructeurs ont mis au point des langages de programmation qui permettent une formulation plus simple des problèmes. Le programme écrit en un tel langage est appelé le programme source.

Parmi ces langages nous citons :

- Le BASIC.
- Le FORTRAN.
- Le PASCAL.
- Le COBOL.

Le langage utilisé pour l'élaboration de notre logiciel est le BASIC, sur micro-ordinateur HP Vectra de capacité mémoire 640Ko.

Le BASIC est le langage de programmation le plus répandu à l'heure actuelle pour les micro-ordinateurs il doit son succès à sa grande simplicité et au vaste domaine de son utilisation. Il est possible d'écrire la majorité des programmes avec sept instructions différentes seulement.

Citons quelques avantages du BASIC :

- 1- C'est un langage facile à apprendre.
- 2- Simple, il permet de modifier des programmes existants avec un minimum d'efforts.
- 3- C'est le langage le plus répandu à l'heure actuelle.
- 4- C'est un langage relativement portable d'une machine à une autre.

I.5)- METHODOLOGIE DE L'ELABORATION DU LOGICIEL :

Lors de l'élaboration de notre logiciel, notre grand souci était de le rendre le plus accessible aux utilisateurs et le plus simple possible.

La première difficulté rencontrée est le grand nombre de données à introduire. Dans le souci de rendre cette étape simple nous avons opté pour une entrée de données sous forme de tableaux accompagnés de commentaires, et une introduction de données par blocs d'étages, et par le choix entre différentes options.

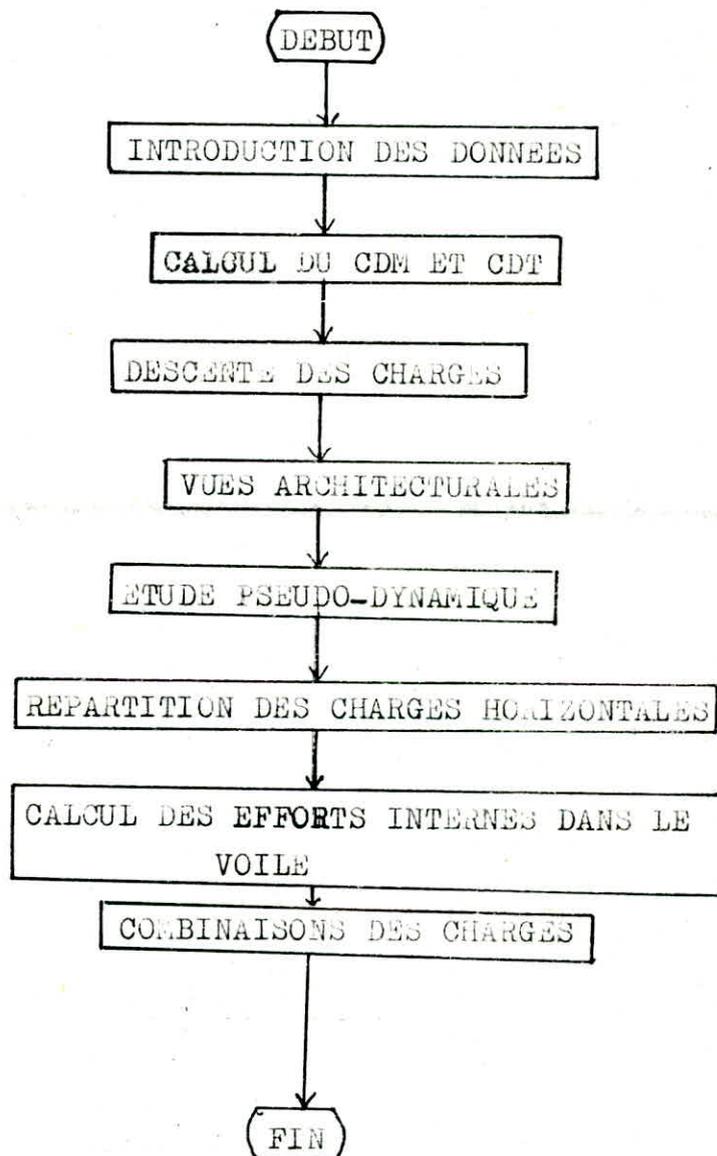
Un contrôle est prévu pour chaque étape d'introduction des données afin de pouvoir modifier, éventuellement, les données erronées, ce contrôle est fait à l'aide d'un affichage des données introduites, et en générant les différentes vues architecturales du bâtiment pour pouvoir détecter l'erreur.

Pour ne pas avoir à des conversions d'unités pendant le calcul toutes les données sont introduites dans le système MKS et elles y sont affichées aussi, sauf s'il y a une contre indication.

Le grand nombre d'opérations effectuées par l'ordinateur conduit parfois à une extinction momentanée de l'écran, c'est pourquoi, chaque fois qu'une opération est effectuée il apparaît sur l'écran un message indiquant la nature de cette opération.

Un autre problème est lié à la capacité mémoire de la machine, ce qui nous a obligé à gérer la mémoire, et cela en éliminant les variables inutiles pour libérer leur place mémoire, et en utilisant des fichiers de données créés sur disquette.

ORGANIGRAMME GENERAL DU LOGICIEL
LEBEV



CHAP II- INTRODUCTION DES DONNEES

II.1)- INTRODUCTION :

Dans le soucis de ne pas nuire à l'initiative de l'utilisateur l'entrée des données se fait par le mode conversationnel. Cette technique fait ces preuves pendant le choix des différentes options et pendant la validation.

L'entrée des données se fait par l'intermédiaire de tableaux pour donner une certaine souplesse à la saisie et en minimiser les erreurs dûes à l'utilisateur.

Le problème d'économie de la place en mémoire ainsi que la souplesse cherchées en introduisant les données se pose pour les structures importantes, il faut par conséquent penser à réduire le nombre de données introduites pour les cas identiques (mêmes charges et surcharges, même épaisseur des voiles, même hauteur des étages ...) et cela :

- Par le choix d'option dont le programme précise la forme numérique ou alphanumérique ainsi que le contenu des réponses.

- Par une saisie de données par blocs et cela pour les étages identiques, donc il suffit d'introduire une seule fois les données relatives à ces étages.

- En utilisant la mémoire périphérique (disquettes) pour créer des fichiers de données.

II.2)- DONNEES PRELIMINAIRES /

La structure est représentée dans un référentiel OXYZ ortho-normé, l'origine du repère est situé au bas gauche du plan, le plan OXY est confondu avec la base du bâtiment.

En premier lieu on introduit tout d'abord les paramètres définissant automatiquement la taille des tableaux pendant l'exécution du programme, ces paramètres sont :

- Nombre d'étages du bâtiment y compris le rez de chaussée qui sera pris comme étage numéro 1, cette variable est désignée par NE.

- Nombre de voiles parallèles à OX (les voiles sont numérotés de 1 à NVX).

- Nombre de voiles parrallèles à OY (les voiles sont numérotés de 1 à NVY).

En second lieu on donne les dimensions maximales du batiment :

- Dimension maximale en plan, DM.
- Hauteur du batiment, HB.

Ces deux paramètres sont important pour fixer l'échelle des vues architecturales.

II.3)- CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS DU BATIMENT :

II.3.1)- CARACTERISTIQUES DES VOILES :

Les voiles représentent les éléments porteurs de la structure. Ils sont considérés comme des consoles encastées à leurs bases. Un voile est caractérisé par :

- Position du centre de gravité du voile supposé plein $XGX(I)$, $YGX(I)$ ou $XGY(I)$, $YGY(I)$.
- Longueur du voile $LVA(I)$ ou $LVY(I)$.
- Hauteur du voile $HVA(I)$ ou $HVY(I)$.
- Nombre de files d'ouvertures $NFOX(I)$ ou $NFOY(I)$.
- Nombre d'ouvertures en élévation $NOEX(I)$ ou $NOEY(I)$.
- Epaisseur du voile $EVX(I)$ ou $EVY(I)$.

Dans chaque voile I et dans chaque file J on caractérise l'ouverture par la côte de son centre de gravité $ZGOX(I,J)$ ou $ZGOY(I,J)$ et sa hauteur $HGX(I,J)$ ou $HOY(I,J)$.

Pour permettre une introduction des épaisseurs des voiles, aussi simple que possible, on a prévu les options suivantes :

- 1)- EPAISSEUR DES VOILES CONSTANTE.
- 2)- EPAISSEUR DES VOILES CONSTANTE PAR SENS.
- 3)- EPAISSEUR VARIABLE D'UN VOILE A UN AUTRE.

II.3.2 CARACTERISTIQUES DES PLANCHERS :

Un plancher est une aire plane limitant les étages et supportant les revêtement du sol. Deux fonctions principales lui sont attribuées :

- Fonction de résistance : Supporte les charges et les surcharges.
- Fonction d'isolation : Isolation thermique et acoustique.

Dans cette étape l'introduction des données se fait par bloc . Un bloc est un ensemble d'étage ayant les mêmes caractéristiques architecturales et mécaniques.

Chaque bloc est caractérisé par son numéro I, le numéro de son étage initial IB(I) et le numéro de son étage final FB(I). Pour chaque bloc on introduit :

- Le type de plancher, TYPE(I) par choix 1 ou 2 :
 1. PLANCHER A CORPS CREUX.
 2. PLANCHER DALLE.
- La dimension maximale d'un étage de ce bloc, DM(I).
- Le nombre de panneaux constituant le plancher, ND(I).
- La hauteur de l'étage, HE(I).
- La charge permanente, G(I).
- La charge d'exploitation, Q(I).

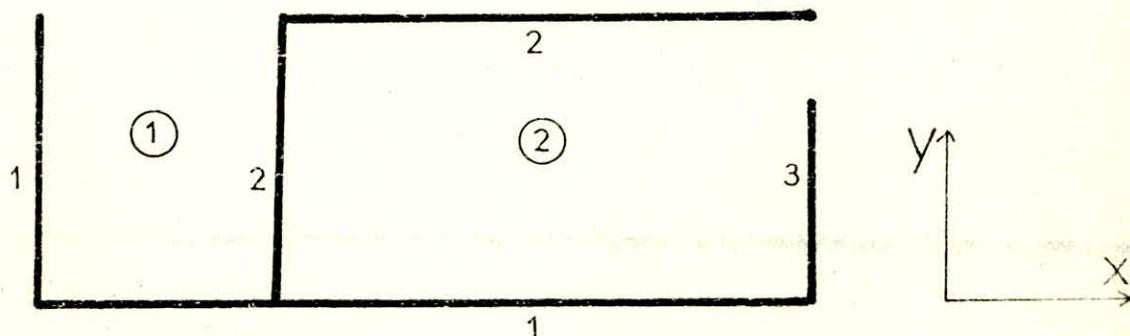
Dans chaque bloc I et pour chaque panneau J du plancher on introduit :

- Longueur du panneau parallèlement à la direction OX, LX(I,J).
- Longueur du panneau parallèlement à la direction OY, LY(I,J).
- Numéros des voiles qui supportent le panneau :
 - .Voile début // OX : DX(I,J).
 - .Voile final // OX : FX(I,J).
 - .Voile début // OY : DY(I,J).
 - .Voile final // OY : FY(I,J).

Si le bord du panneau est libre, ce numéro est introduit comme étant égal à zéro.

EXEMPLE :

Soit la vue en plan d'un étage du bloc I :



| | | | |
|--------------------|---------------|---|---------------|
| <u>Dalle n°1</u> : | $DX(I,1) = 1$ | , | $FX(I,1) = 0$ |
| | $DY(I,1) = 1$ | , | $FY(I,1) = 2$ |
| <u>Dalle n°2</u> : | $DX(I,2) = 1$ | , | $FX(I,2) = 2$ |
| | $DY(I,2) = 2$ | , | $FY(I,2) = 3$ |

II.4)- CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX :

Le matériau de construction est le béton armé, ces caractéristiques sont :

- Masse volumique MV en Kg/m^3
- La contrainte de rupture par compression à 28 jours, SP28 en Kg/m^2
- Coefficient de poisson NU.
- Le module de YOUNG est donné par les formules suivantes :

Dans le cas de contraintes de longue durée d'application :

$$EYOUN = 2,1 \times 10^8 \sqrt{1,2 \cdot SP28} \quad (Kg/m^2)$$

Dans le cas de contraintes de courte durée d'application :

$$EYOUN = 0,7 \times 10^8 \sqrt{1,2 \cdot SP28} \quad (Kg/m^2)$$

II.5)- DONNEES RELATIVES A L'ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE :

Les structures présentant une dissymétrie dans leurs plans et des irrégularités dans leurs élévations, dépassant les tolérances fixées par le règlement parasismique Algérien, nécessitent une analyse pseudo-dynamique. Cette analyse a pour but la détermination des forces sismiques horizontales qui dépendent des coefficients suivants :

1. Coefficient d'accélération des zones -A- :

Il dépend du groupe d'usage de la structure et de la zone sismique où l'implantation sera faite. Les valeurs de ce coefficient sont données dans le règlement parasismique Algérien (Art.3-3-1-1).

2. Facteur de comportement de la structure -B-

Il dépend du type de structure et de ces contreventements. Les valeurs de B sont données par le règlement parasismique Algérien (Art.3-3-1-3). Pour les bâtiments en voiles le facteur B prend la valeur 1/3.

3. Facteur de qualité -Q- :

Il est fonction de l'hyperstaticité et de la surabondance du système, de sa symétrie en plan, de sa régularité en élévation et de la qualité du contrôle pendant la construction.

$$Q = 1 + \sum_{q=1}^6 P_q$$

P_q : Pénalité qui dépend de l'observation ou non du critère de qualité q .

$P_q = 0$ si le critère est observé.

$P_q = 0,1$ si le critère est non observé.

Les critères ainsi que les valeurs correspondantes sont données dans le tableau du règlement parasismique Algérien (Art.3-3-1-4), ce tableau sera affiché sur écran et l'utilisateur introduira le nombre de critères non observés, NC. L'expression du facteur de qualité Q est modifiée en conséquence.

$$Q = 1 + 0,1 \times NC$$

4. Facteur d'amplification dynamique -D- :

Il est fonction de la période et de la nature du sol.

Deux cas peuvent se présenter :

- Sol meuble : $D = 2\sqrt{0,5/T}$

- Sol ferme : $D = 2\sqrt{0,3/T}$

Pour ce facteur on introduit la nature du sol par choix : 1 ou 2

1. SOL MEUBLE.

2. SOL FERME.

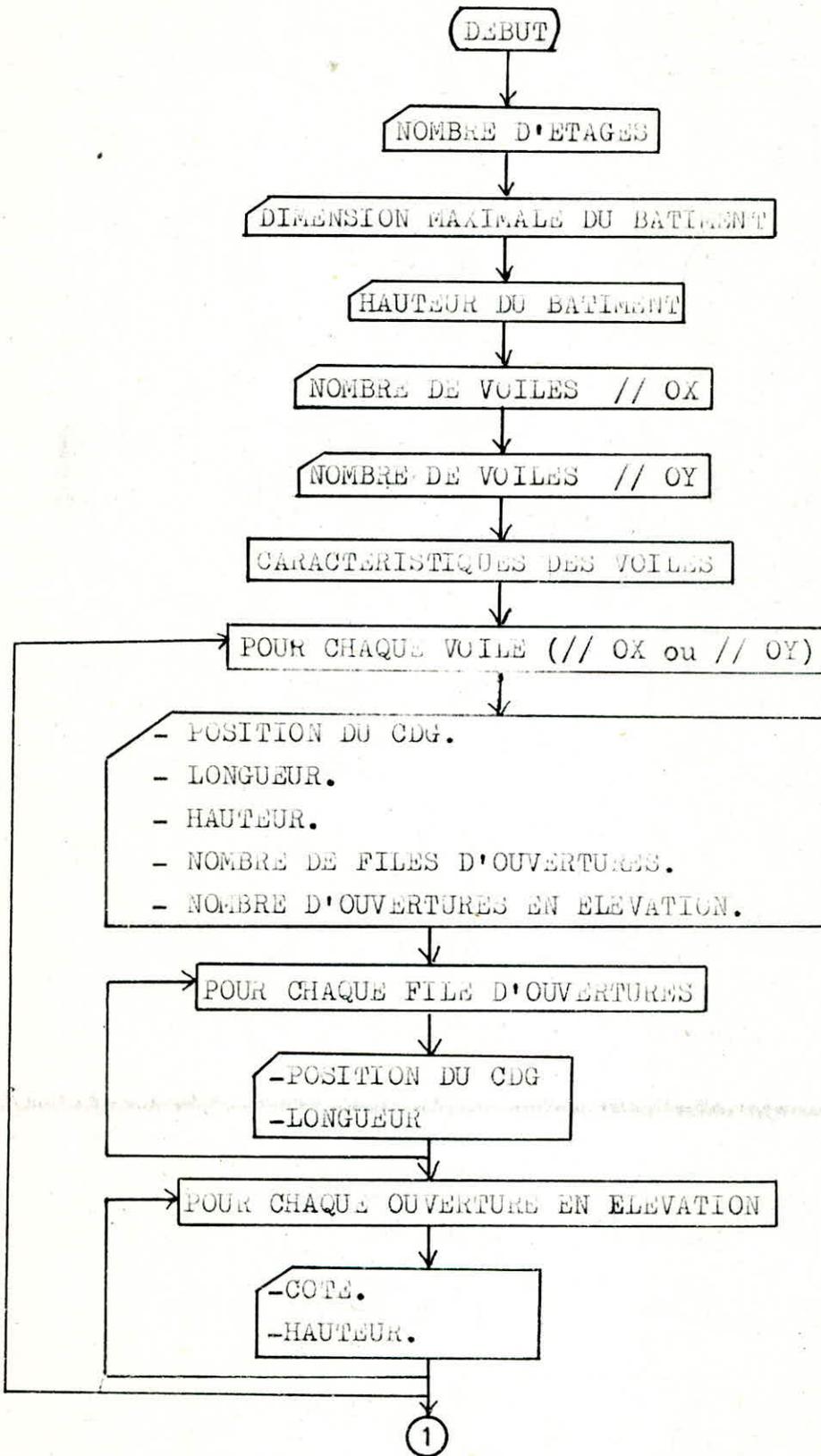
II.6)- CONTROLE DES DONNEES :

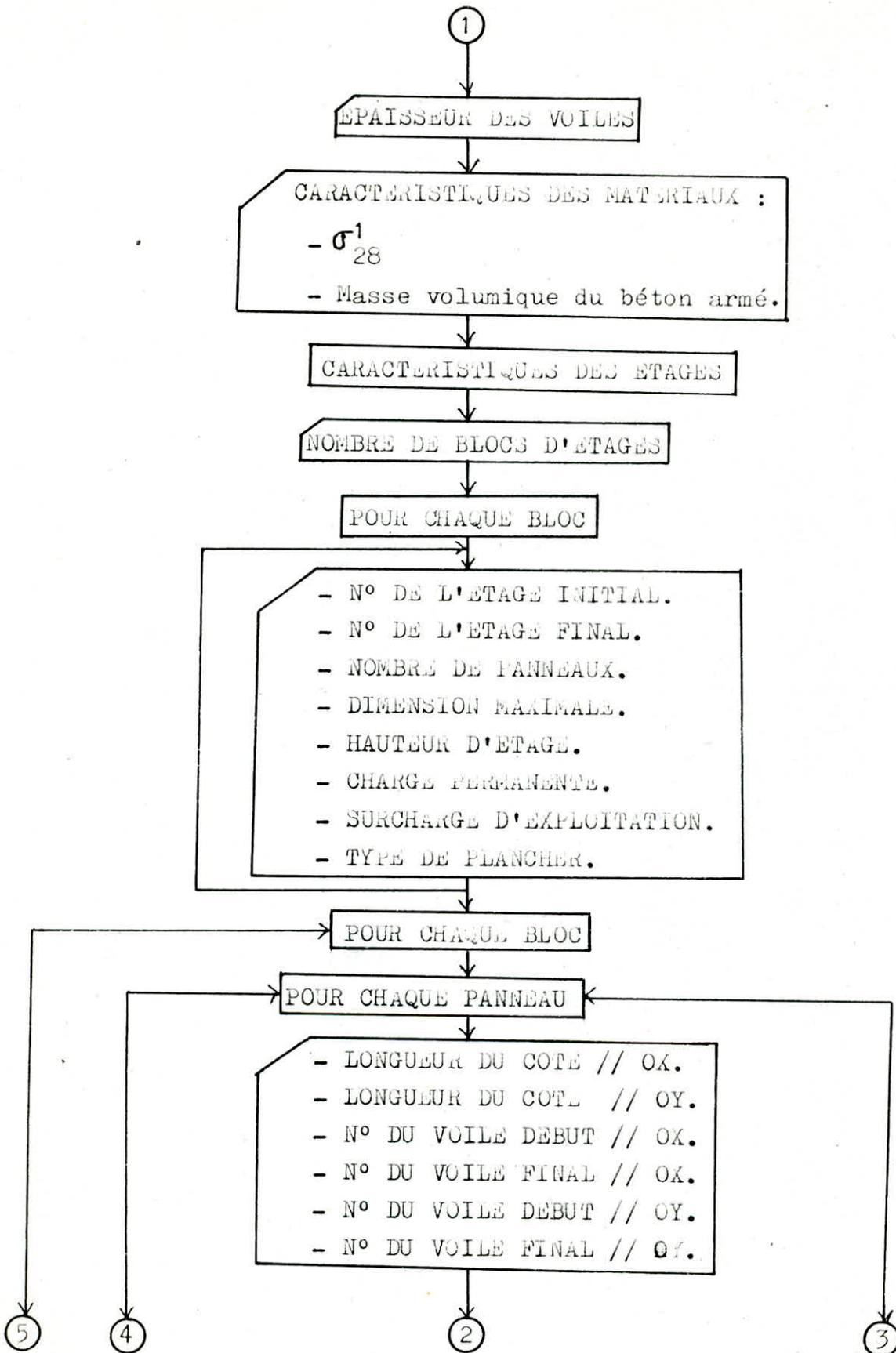
Le contrôle des données relatives au calcul des structures est important du point de vue vérification et correction des erreurs éventuelles. Pour ce faire on procède automatiquement par deux méthodes complémentaires.

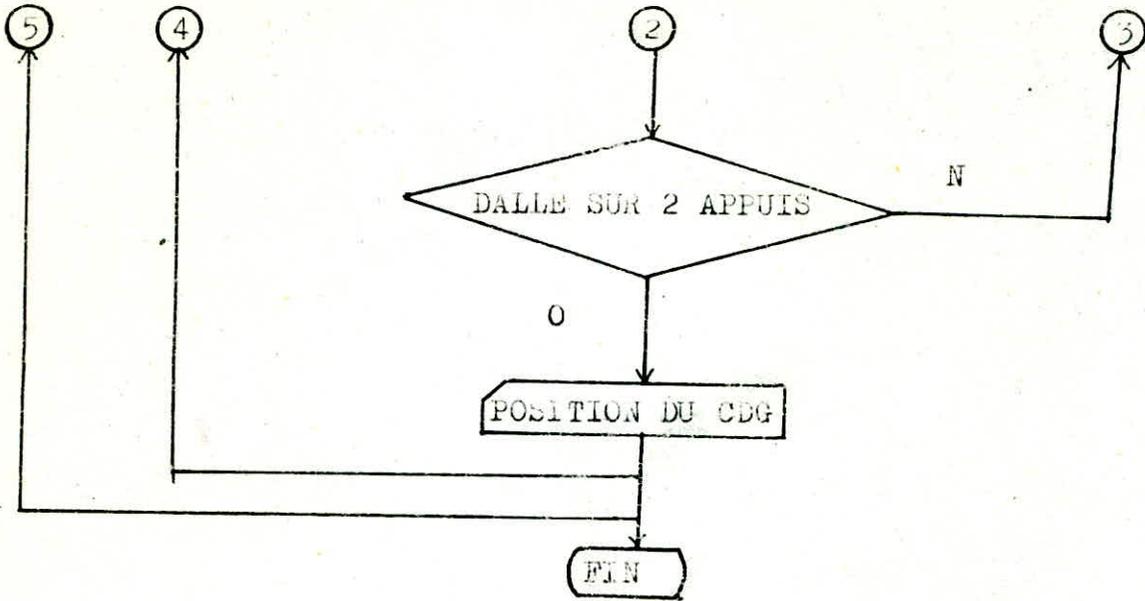
La première consiste en la réécriture en claire des données avec des commentaires, c'est l'impression des données.

La seconde qui est la plus efficace, s'effectue à l'aide de dessins tracés par le programme comportant les différentes vues en plan et en élévation du bâtiment, ainsi une erreur sur la position d'un élément constituant la vue est aisément décelable.

ORGANIGRAMME D'INTRODUCTION DES DONNEES







II-7)- VISUALISATION GRAPHIQUE :

Pour bien s'assurer que les données introduites sont exactes, le programme effectue des dessins des différentes vues architecturales du bâtiment (Vues en plan et vue en élévation). Ainsi une erreur sur la position d'un élément est facilement détectée.

Ce graphisme peut servir pour des reproductions éventuelles sur table traçante.

Pour avoir ces vues l'utilisateur choisit une des trois options suivantes :

- 1- VUE EN PLAN DES ETAGES.
- 2- VUE EN ELEVATION DES VOILES // OX.
- 3- VUE EN ELEVATION DES VOILES // OY.

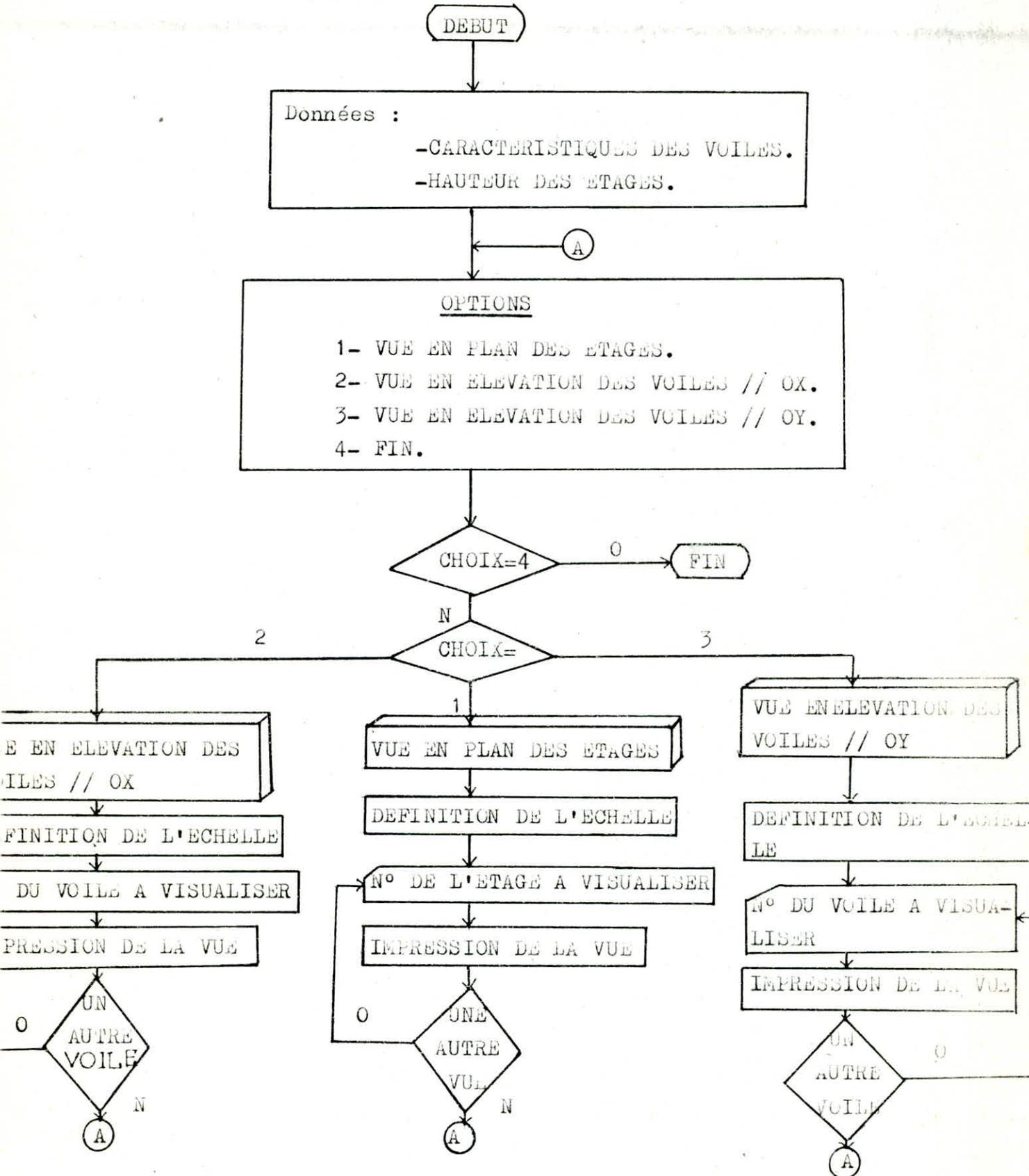
Après le choix de l'option l'utilisateur introduit le numéro de l'étage ou du voile à visualiser et celui-ci est affiché sur écran.

A côté de chaque vue en plan, un tableau définissant les caractéristiques de l'étage est affiché, ce tableau comporte :

- LA POSITION DU CENTRE DE MASSE.
- LA POSITION DU CENTRE DE TORSION.
- L'EXCENTRICITE DANS LES DEUX SENS.

Ces caractéristiques géométriques sont reperées par rapport au repère défini précédemment.

ORGANIGRAMME DE LA VISUALISATION GRAPHIQUE



**CHAP III - CALCUL DU CENTRE DE MASSE
ET DU CENTRE DE TORSION**

III.1)- CENTRE DE MASSE :

Le centre de masse d'un plancher est la position du centre de gravité des masses des panneaux constituant celui-ci.

Soit $XGE(i)$ et $YGE(i)$ les coordonnées du centre de masse du plancher d'un étage i elles sont définies par :

$$XGE(i) = \frac{m(j) * XGD(j)}{m(j)}$$

$$YGE(i) = \frac{m(j) * YGD(j)}{m(j)}$$

où :

- $m(j)$: masse de la dalle j appartenant au plancher de l'étage i .
- $XGD(j)$: L'abscisse du centre de gravité de la dalle j .
- $YGD(j)$: L'ordonnée du centre de gravité de la dalle j .

Nous supposons que dans un étage i donné :

- Les charges et surcharges sont constantes.
- Un seul type de dalles par étage.

La masse du plancher est ainsi proportionnelle à sa surface et les coordonnées du centre de masse s'écrivent :

$$XGE(i) = \frac{XGD(j) * S(j)}{S(j)}$$

$$YGE(i) = \frac{YGD(j) * S(j)}{S(j)}$$

où :

$S(j)$: Surface de la dalle j appartenant au plancher de l'étage i .

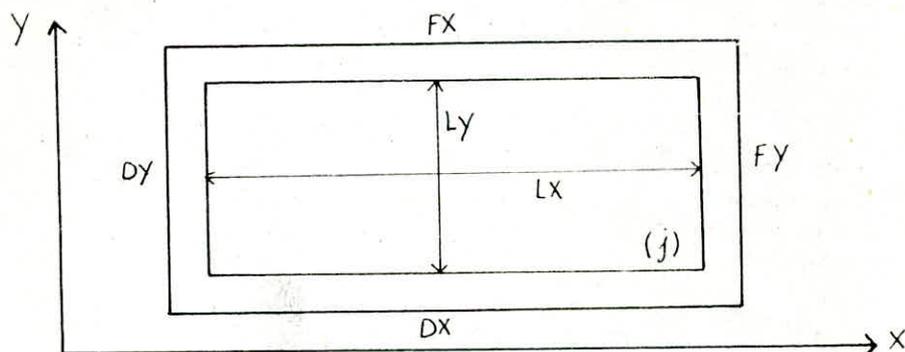
$$S(j) = LX(j) * LY(j)$$

Le problème réside maintenant dans la détermination du centre de gravité des différents panneaux de dalles.

Comme il a été dit dans le chapitre n°2, chaque panneau de dalle est définie par :

- Sa longueur par allèment au sens XX : LX .
- Sa largeur parallèlement au sens YY : LY .

- Le voile début qui le supporte dans le sens XX : DX.
- Le voile final qui le supporte dans le sens XX : FX.
- Le voile début qui le supporte dans le sens YY : DY.
- Le voile final qui le supporte dans le sens YY : FY.



Le centre de gravité du panneau dalle est donné par :

$$XGD(j) = XGY(FY) - EVY(FY) / 2 - LX(j)/2$$

$$\text{ou } XGD(j) = XGY(DY) + EVY(DY)/2 + LX(j)/2$$

et,

$$YGD(j) = YGX(FX) - EVX(FX)/2 - LY(j)/2$$

$$\text{ou } YGD(j) = YGX(DX) + EVX(DX)/2 + LY(j)/2$$

Dans le cas où un bord de la dalle est libre le centre de gravité est calculé relativement au bord non libre.

Dans le cas où deux bords parallèles sont libres (cas d'une dalle appuyée sur deux côtés) le centre de gravité est introduit par l'utilisateur.

III.2)- CENTRE DE TORSION :

Le centre de torsion d'un niveau i est défini comme étant le centre de gravité des rigidités des éléments de contreventement (c'est à dire des voiles).

Les propriétés du centre de torsion sont :

- Une force dont la ligne d'action passe par le centre de torsion engendre uniquement une translation des voiles dans la direction de cette force.

- Un moment dont l'axe vertical passe par le centre de torsion engendre uniquement une rotation des voiles dans le sens du moment.

La rigidité à la flexion R d'un voile est la force de rappel par laquelle le voile réagit quand une force extérieure F produit une translation unitaire.

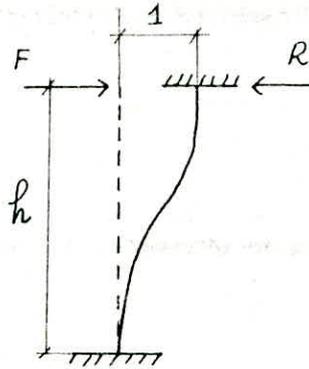
$$R = 12EI/h_i^3$$

où :

E : module de YOUNG.

I : Moment d'inertie du voile.

h_i : Hauteur de l'étage i .



Le centre de torsion du plancher de l'étage i est donné par :

$$X_T(i) = \frac{RX(j) \cdot Y(j)}{RX(j)}$$

$$Y_T(i) = \frac{RY(j) \cdot X(j)}{RY(j)}$$

où :

$X(j)$: Abscisse du CDG du voile j parallèle à OY .

$Y(j)$: Abscisse du CDG du voile j parallèle à OX .

$RX(j)$: Rigidité du voile j parallèle à OX .

$RY(j)$: Rigidité du voile j parallèle à OY .

Dans l'hypothèse où la hauteur de l'étage est constante :

$$X_T(i) = \frac{IX(j) \cdot Y(j)}{IX(j)}$$

$$Y_T(i) = \frac{IY(j) \cdot X(j)}{IY(j)}$$

où :

$IX(j)$: Inertie du voile j parallèle à OX .

$IY(j)$: Inertie du voile j parallèle à OY .

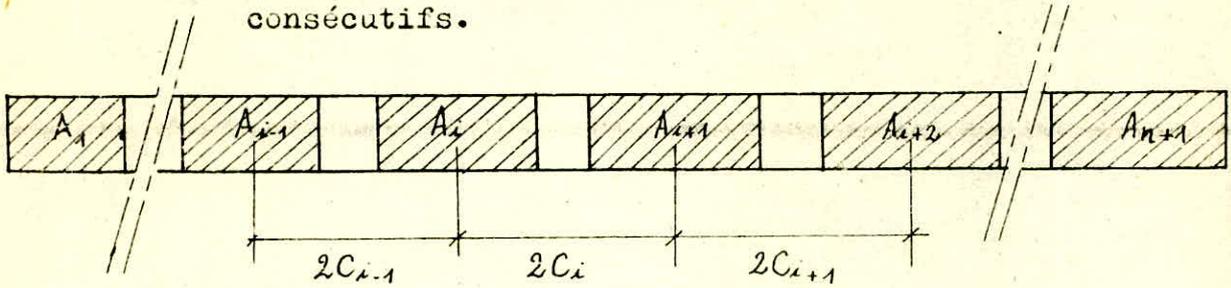
L'inertie du voile est calculée comme suit :

Soit un voile à n files d'ouvertures, on définit les variables suivantes :

A_i : Section du trumeau.

J_i : Inertie du trumeau.

$2C_i$: Distance entre les centres de gravité de deux trumeaux consécutifs.



Position du centre de gravité du voile :

$$D = \frac{1}{A_0} \sum_{i=2}^{n+1} A_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} 2C_j \right)$$

$$A_0 = \sum_{i=1}^{n+1} A_i$$

Moment statique du trumeau n°1 :

$$M_1 = DA_1$$

Moment statique d'un trumeau i :

$$M_i = A_i \left(D - \sum_{j=1}^{i-1} 2C_j \right)$$

Moment d'inertie du voile :

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^{n+1} M_i \left(D - \sum_{j=1}^{i-1} 2C_j \right)$$

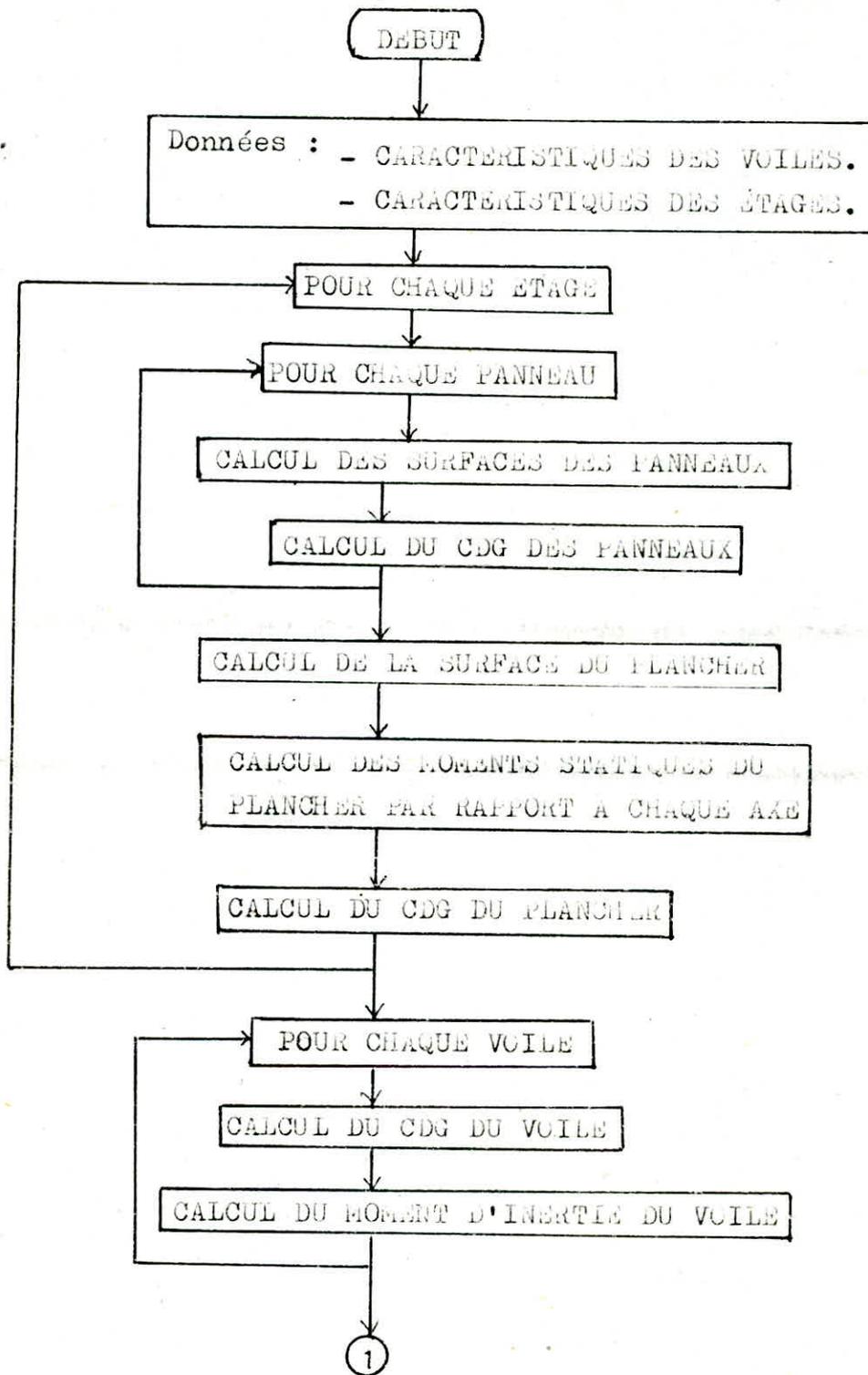
$$I_0 = \sum_{i=1}^{n+1} J_i$$

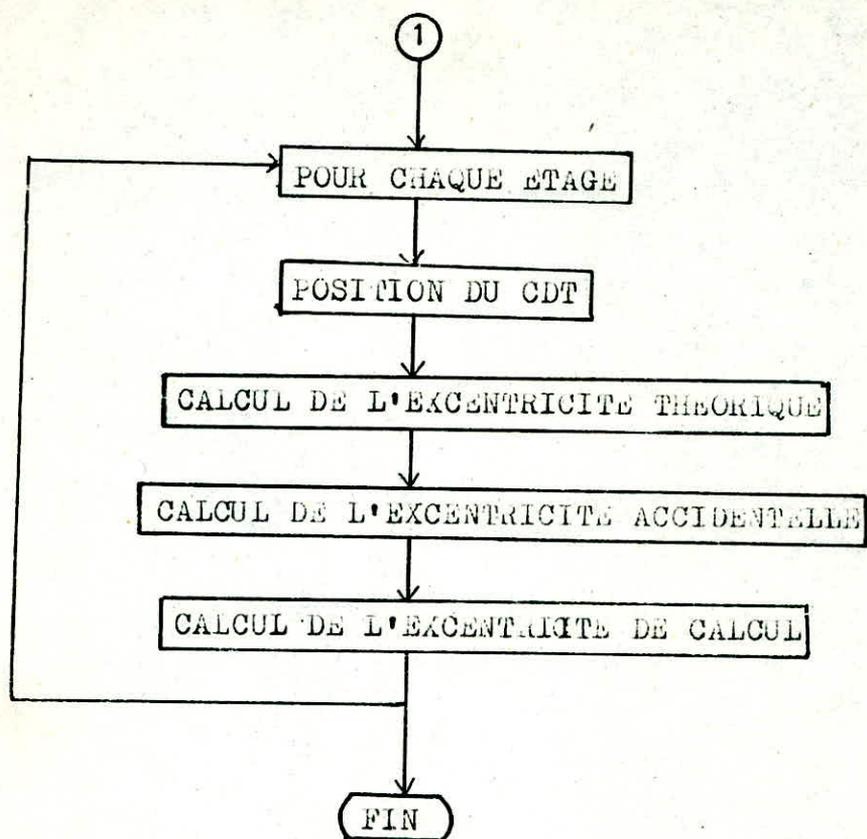
III.3)- CALCUL DE L'EXCENTRICITE :

Les forces horizontales agissantes au centre de masse d'un plancher provoquent une translation. Cependant si le centre de masse du plancher ne coïncide pas avec le centre de torsion, cette translation est accompagnée d'une rotation ; des efforts de torsion sont alors induits dans la structure et dépendant de la distance entre le centre de masse et le centre de torsion.

Ainsi le règlement parasismique Algérien prévoit : pour toutes les structures comportant des planchers ou des diaphragmes horizontaux rigides dans leur plan, on supposera à chaque niveau et dans chaque direction la résultante des forces horizontales a une excentricité par rapport au centre de torsion égale à la plus grande des deux valeurs :

- excentricité théorique.
- 5 % L (L : étant la plus grande dimension en plan du niveau considéré).

ORGANIGRAMME DE CALCUL DU CDM ET CDT



CHAP IV- DESCENTE DE CHARGES

On appelle "Descente des charges" l'opération qui consiste à calculer pour tous les éléments porteurs de la construction (voiles, poteaux, poutres) les charges qu'ils supportent au niveau de chaque étage jusqu'aux fondations. Il faut d'abord considérer la nature et l'importance des forces agissantes sur le bâtiment. On distingue :

- Les charges permanentes : cette charge est notée Q , son calcul résulte d'un métré et de la connaissance des poids volumiques des matériaux et des éléments de construction. Ainsi les charges permanentes qui peuvent revenir aux voiles sont :

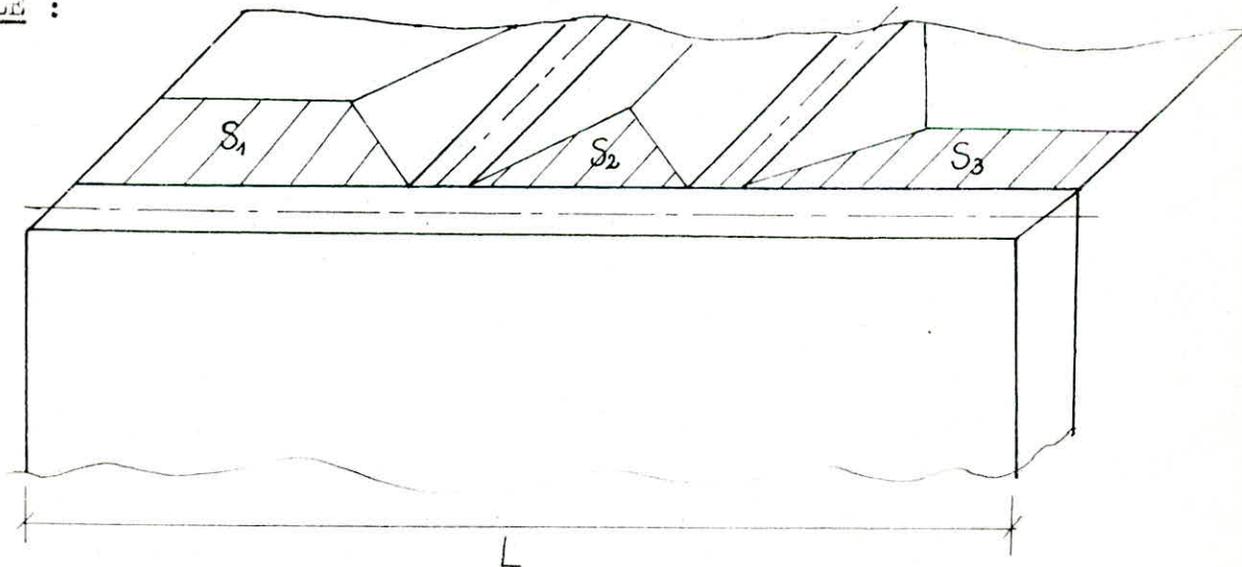
- * Poids de l'acrotère pour les voiles de rive du dernier étage.
- * Poids propre du voile.
- * Poids du plancher.
- * Poids des façades si les voiles sont de rive.

- Les charges d'exploitations : cette charge est notée Q , elle est donnée en fonction du type d'utilisation du bâtiment.

Dans le cas des bâtiments en voiles, la charge que peut reprendre un voile est calculée comme suit :

On calcule la somme des surfaces des panneaux reprises par le voile, cette surface est multipliée par la charge répartie sur la surface du plancher, on obtient ainsi la charge totale reprise par le voile dans l'étage considéré, cette charge est divisée par la longueur du voile pour avoir la charge linéaire répartie uniformément.

EXEMPLE :



Soit un voile supportant dans un certain étage 3 panneaux de dalles, chaque panneau de dalle affecte à ce voile une part de sa surface (surface hachurée sur la figure).

Soit S_T la surface totale reprise par le voile dans cet étage, on a :

$$S_T = S_1 + S_2 + S_3$$

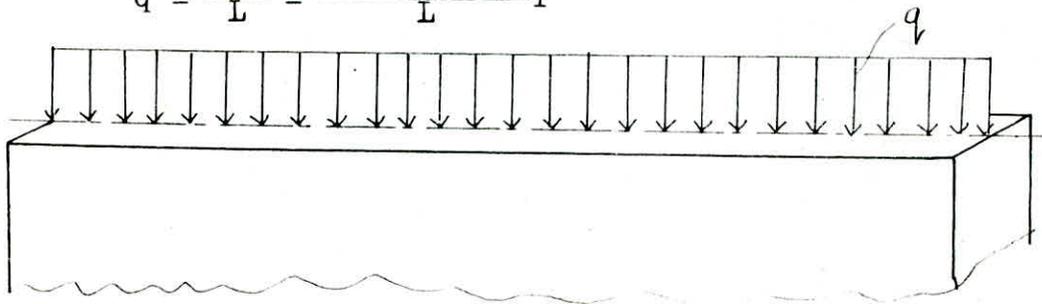
Soit $(G + 0,5Q)$ la charge répartie par mètre carré sur le plancher de l'étage.

La charge totale reprise par le voile est :

$$P = (G + 0,5Q)S_T$$

La charge répartie uniformément sur le voile est :

$$q = \frac{P}{L} = \frac{(G + 0,5Q)S_T}{L}$$

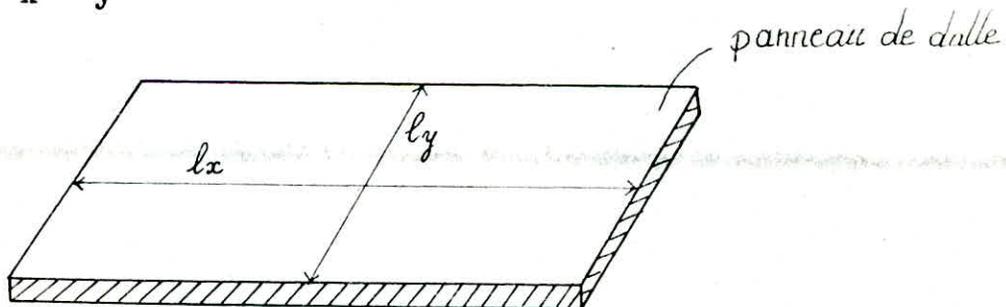


Le problème réside maintenant dans la détermination des surfaces élémentaires reprises par le voile.

Pour ce faire, suivant le type de plancher on a :

1)- PLANCHER DALLE :

On suppose $l_x > l_y$



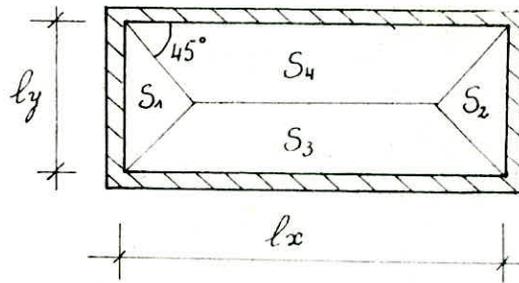
Selon le nombre de voiles qui supportent le panneau de dalle, on distingue les cas suivants :

1^{er} Cas : Dalle appuyée sur ces quatre côtés :

$$* \frac{l_y}{l_x} \geq 0,4$$

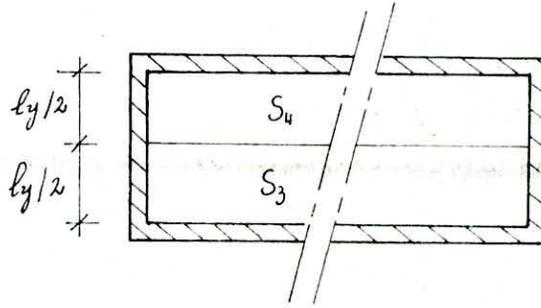
$$S_1 = S_2 = (l_y/2)^2$$

$$S_4 = S_3 = l_y(2l_x - l_y)/4$$



$$* \frac{l_y}{l_x} < 0,4$$

$$S_3 = S_4 = l_x \cdot l_y / 2$$

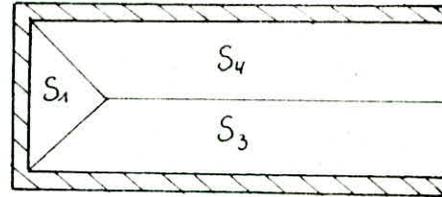


2^{ème} Cas : Dalle appuyée sur trois côtés :

$$* \frac{l_y}{l_x} \geq 0,4$$

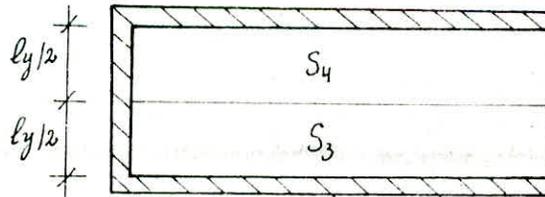
$$S_1 = (l_y/2)^2$$

$$S_3 = S_4 = l_y(l_x - l_y/4)/2$$



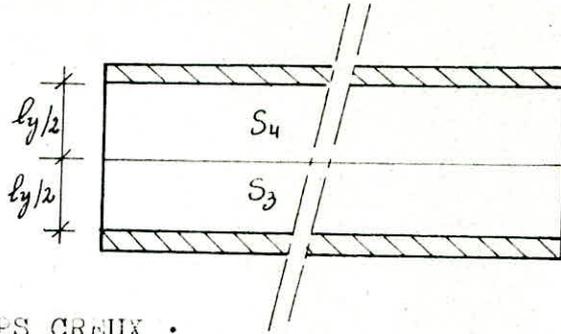
$$* \frac{l_y}{l_x} < 0,4$$

$$S_3 = S_4 = l_x \cdot l_y / 2$$



3^{ème} Cas : Dalle appuyée sur deux côtés :

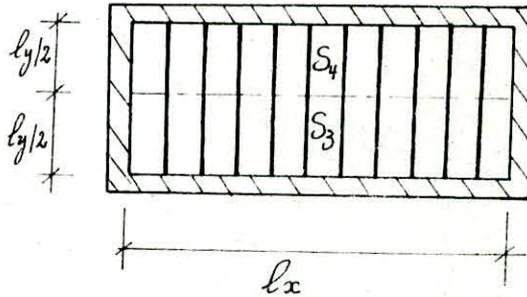
$$S_3 = S_4 = l_x \cdot l_y / 2$$

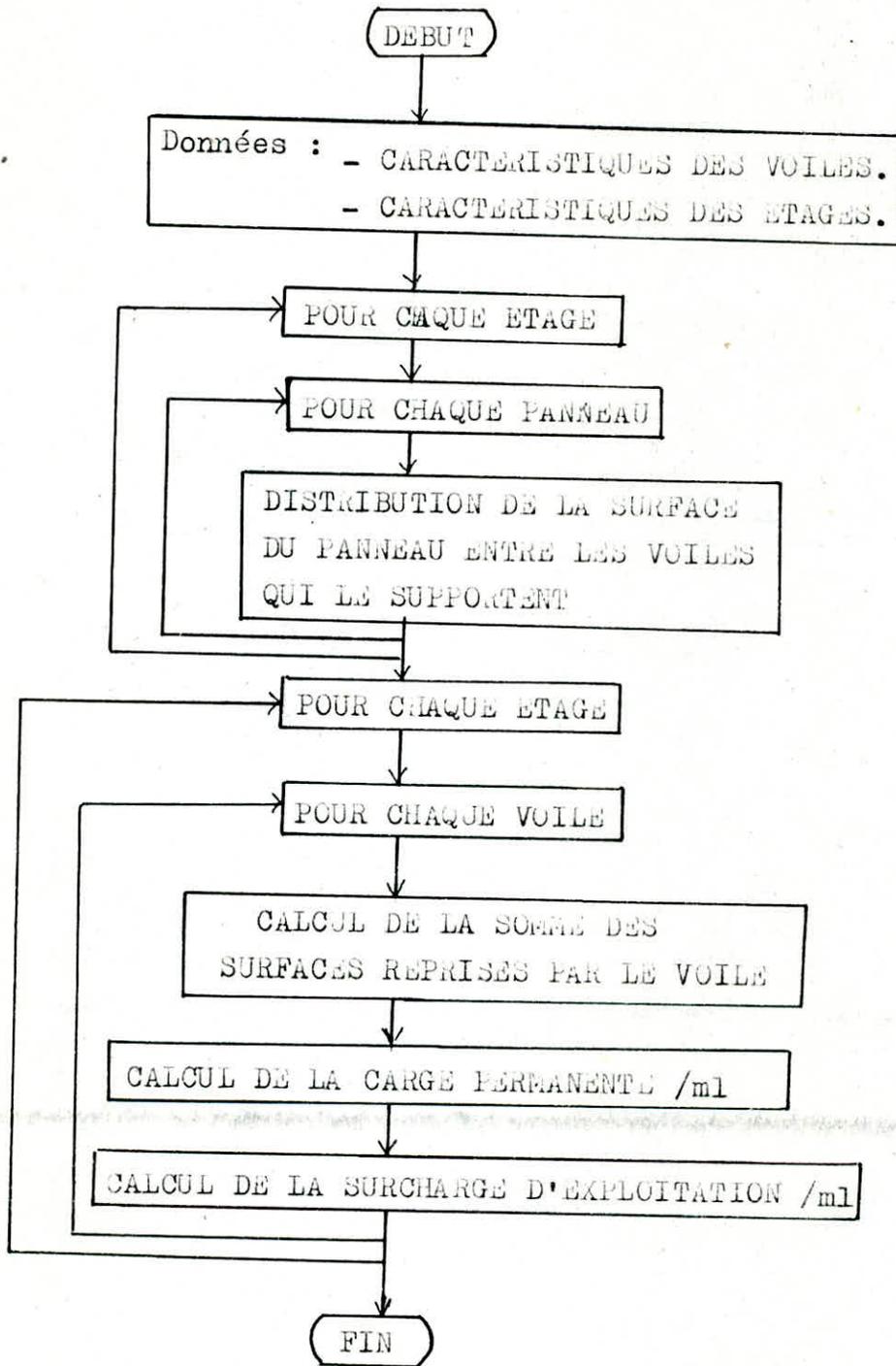


2)-PLANCHER A CORPS CREUX :

Le sens porteur correspond à la grande direction du panneau dans notre cas l_x , le panneau à corps creux attribue au voile porteur la moitié de sa surface, le voile non porteur ne supporte rien.

$$S_3 = S_4 = l_x \cdot l_y / 2$$



ORGANIGRAMME DE LA DESCENTE DE CHARGES

CHAP V- ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE

V.1)- INTRODUCTION :

Le seisme correspond à une vibration du sol provoquée par une libération soudaine de l'énergie de déformation accumulée dans la croûte terrestre ou dans la couche sous-jacente appelée manteau. La vibration du sol est caractérisée par son accélération qui engendre des déformations et des efforts dans les constructions, dépendant des caractéristiques (masse, rigidité, amortissement) de celles-ci.

Un seisme d'intensité moyenne induit généralement des déformations post-élastiques. Un calcul exact doit donc être basé sur des méthodes non linéaires incrémentables pas à pas. Cependant pour simplifier, la plus part des codes parasismiques tolèrent un calcul élastique linéaire en exigeant en plus un comportement ductile.

Pour les structures à comportement élastique linéaire, deux méthodes de calcul sont utilisables, elles sont basées sur le principe de la décomposition modale :

La première méthode consiste en l'étude des efforts dans la structure en fonction du temps ; elle nécessite la donnée d'un accélérogramme et impose, en pratique, l'usage de l'ordinateur.

La deuxième méthode consiste en la recherche du maximum de réponse sur chacun des modes propres dont on déduit la valeur maximum probable des efforts. Cette méthode nécessite la connaissance du spectre de réponse de la secousse sismique. Cette méthode est à la base des règlements parasismiques.

Dans le cadre de notre projet, les forces sismiques sont déterminées en utilisant une méthode pseudo-dynamique basée sur la décomposition modale. A cet effet nous avons utilisé le spectre élastiques règlementaire du RPA81 donné par le coefficient A_{XD} . Ce spectre est déduit des spectres de calcul et modifié pour tenir compte forfaitairement de l'intervention des modes supérieurs ou du comportement non élastique des structure.

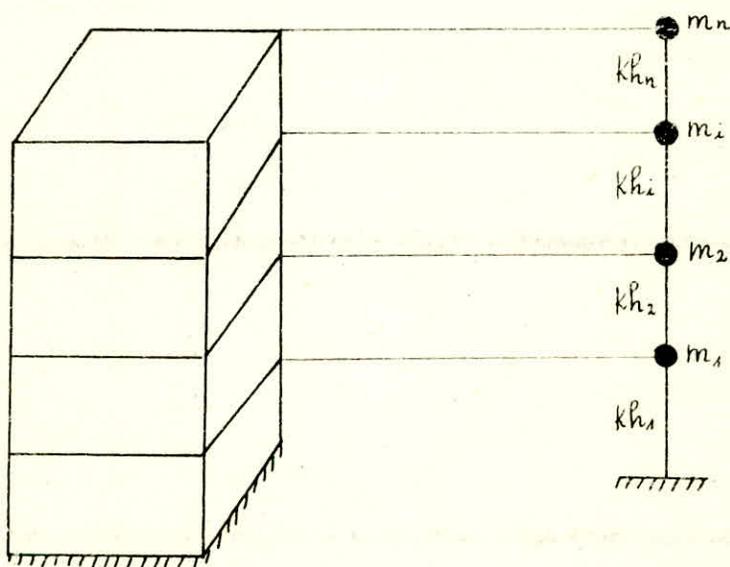
V.2)- MODELISATION DE LA STRUCTURE :

L'une des étapes essentielles en vue du calcul et de la sécurité antisismique d'une structure est le choix du modèle mathématiques ou schéma de calcul de la structure.

La schématisation de la structure par un modèle mathématique nous permet d'établir les relations mathématiques décrivant le mouvement du système. Ce modèle doit être capable de représenter les modes de vibration propres de la structure susceptibles d'engendrer la charge sismique la plus défavorable.

Les structures courantes ne présentant pas de dissymétries excessives peuvent être modélisées par une console à masses concentrées reliées par des colonnes de masses négligeables et de rigidité latérale " kh_i ", l'indice i représente la colonne i ; le choix de ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

- Planchers infiniment rigides ou indéformables, ce qui correspond à une même translation horizontale des éléments de contreventement d'un même niveau et à un même angle de torsion.
- La masse de la structure est concentrée au niveau des planchers.
- Seul le degré de liberté de translation horizontale est pris en considération.



Batiment

Modèle mathématique

V.3)- ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DU MOUVEMENT :

On considère un oscillateur multiple pouvant se déformer par rapport à sa base qui reste fixe. Les caractéristiques de l'oscillateur sont définies par un certain nombre de coefficients que l'on met sous forme de matrices.

V.3.1)- MATRICE DE RIGIDITE :

On suppose que l'oscillateur comporte n degrés de liberté correspondant à des translations horizontales. On appelle :

- F_j la force extérieure appliquée à la structure dans le sens du degré de liberté j .

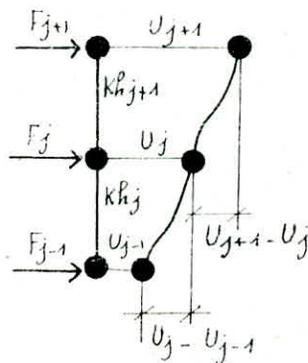
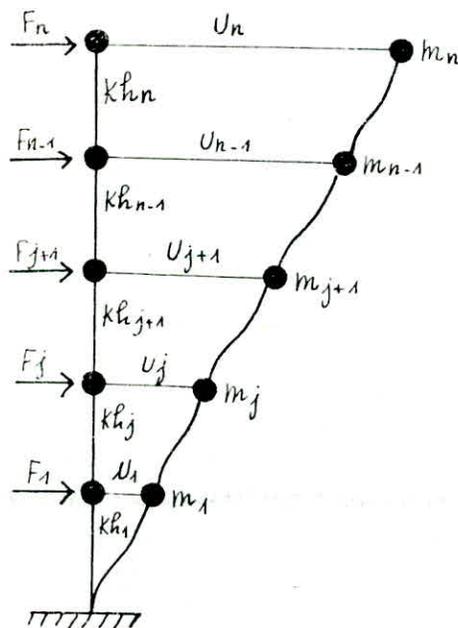
- U_j le déplacement selon le degré de liberté j .

La force F_j est positive si elle provoque un déplacement U_j positif. L'ensemble des forces extérieures constitue le vecteur force F à n composantes.

$$[F] = [F_1, F_2, \dots, F_j, F_n]^T$$

On considère de même le vecteur des déplacements :

$$[U] = [U_1, U_2, \dots, U_j, U_n]^T$$



La structure est supposée élastique, il existe donc des relations linéaires entre les forces extérieures et les déplacements :

$$F_j = Kh_j(U_j - U_{j-1}) - Kh_{j+1}(U_{j+1} - U_j)$$

d'où :

$$F_j = -Kh_j \times U_{j-1} + (Kh_j + Kh_{j+1}) \times U_j - Kh_{j+1} \times U_{j+1}$$

Pour l'ensemble de la structure, l'équation ci-dessus s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Kh_1 + Kh_2 & -Kh_2 & & & & \\ -Kh_2 & Kh_2 + Kh_3 & -Kh_3 & & & \\ & & & \circ & & \\ & & & & & \\ & & -Kh_j & Kh_j + Kh_{j+1} & -Kh_{j+1} & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & \circ & & & \\ & & & -Kh_n & & Kh_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

L'équation d'équilibre de la structure sous l'action des forces élastiques est de la forme :

$$[F] = [Kh] [U]$$

où Kh est la matrice de rigidité latérale du modèle, elle est bande et symétrique.

V.3.1.1)- CALCUL DE LA RIGIDITE LATÉRALE Kh_j :

Elle est égale à la rigidité de la colonne j correspondante au niveau j parallèlement à la direction de l'effort sismique.

Le voile étant supposé comme une console verticale encastrée au niveau du plancher sa rigidité est égale à :

$$\frac{12EI}{3h_j^3}$$

Avec :

I = Inertie du voile.

h_j = Hauteur du niveau j.

E = Module de YOUNG.

En raison de l'hypothèse sur l'indéformabilité des planchers, la rigidité latérale Kh_j peut être considérée comme la somme des rigidités des voiles du niveau j.

$$Kh_j = \sum_{k=1}^m 12EI_k/h_j^3$$

Avec :

m = Nombre de voiles au niveau j parallèlement à la direction de l'effort sismique.

V.3.2)- MATRICE DES MASSES :

Pour un modèle plan à masses concentrées, la matrice des masses est une matrice diagonale.

On note :

m_j : La masse relative au degrés de liberté j.

\ddot{U}_j : L'accélération dans la direction du degrés de liberté j.

Lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inerties ont pour valeurs :

$$F_1 = m_1 \ddot{U}_1$$

$$F_2 = m_2 \ddot{U}_2$$

.

.

.

$$F_j = m_j \ddot{U}_j$$

.

.

.

$$F_n = m_n \ddot{U}_n$$

Le système d'équation ci-dessus se réduit à la forme :

$$[F] = [M][\ddot{U}]$$

$[\ddot{U}]$ représente le vecteur des accélérations.

$$[\ddot{U}] = [\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \dots, \ddot{u}_j, \dots, \ddot{u}_n]^T$$

$[M]$ est la matrice des masses :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \bigcirc & & & \\ & & & m_j & & \\ & & \bigcirc & & & \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

V.3.2.1)- CALCUL DE LA MASSE m_j :

Conformément aux règles parasismique Algériennes la masse m_j au niveau j est prise égale à la somme :

- Charges permanentes : poids du plancher, sa charge et la moitié du poids des voiles, des murs de façades et des autres éléments constitutifs des niveaux contigus "j" et "j+1".
- 50 % de la valeur des surcharges d'exploitation relatives au niveau j .

Remarque :

Pour simplifier, la masse du voile avec ouvertures au niveau j est prise égale à la masse de celui-ci supposé plein multiplié par un coefficient μ qui est définie comme suit :

$$\mu = \frac{\text{Masse du voile supposé plein} - \text{Masse des ouvertures}}{\text{Masse du voile supposé plein}}$$

V.3.3)- MATRICE D'AMORTISSEMENT :

Pour un oscillateur simple, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse relative \dot{U} :

$$f = -C \cdot \dot{U}$$

Pour un oscillateur multiple, cette relation est généralisée sous la forme :

$$[F] = -[C][\dot{U}]$$

où $[F]$ représente le vecteur force d'amortissement, $[\dot{U}]$ le vecteur des vitesses relatives : $[\dot{U}] = [\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_j, \dots, \dot{U}_n]^T$ et $[C]$ la matrice d'amortissement de dimension $n \times n$.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & \dots & \dots & C_{1n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & C_{ij} & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ C_{n1} & \dots & \dots & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

V.4) EQUATION DU MOUVEMENT :

Le modèle en console est mis en mouvement par suite du déplacement de sa base selon une loi sinusoïdale.

Le mouvement V de la masse m_k concentrée au niveau k est la somme du mouvement d'entraînement de la base V_s et du mouvement relatif U de la masse m_k dû aux déformations élastiques de la structure. Le mouvement du système peut-être traité comme les vibrations forcées d'un système à n degrés de liberté.

Les forces excitatrices $f(t) = m_k V_s$ appliquées à chacune des masses m_k représentent les forces d'inertie engendrées par le mouvement d'entraînement de la base.

Pour une déformation relative $[U]$ donnée, les masses sont soumises aux forces suivantes :

- Les forces élastiques de rappel :

$$[F_R] = -[K][U]$$

- Les forces d'amortissement :

$$[F_A] = -[C][\dot{U}]$$

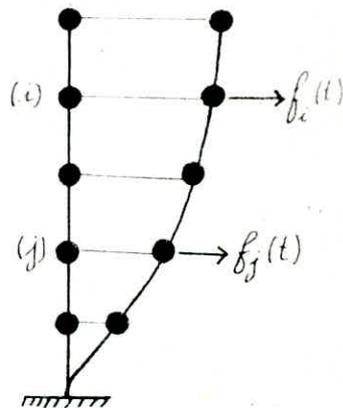
- Les forces extérieures : $[F(t)]$

Ainsi l'équation du mouvement de la structure s'écrit :

$$[F_R] + [F_A] + [F(t)] = [M][U]$$

Soit :

$$[M][U] + [C][\dot{U}] + [K][U] = [f(t)] \quad (I)$$



Pratiquement pour les valeurs usuelles du coefficient d'amortissement, la pseudo-période d'un oscillateur simple amorti diffère très peu de la période du même oscillateur supposé non amorti.

De même, l'étude des oscillations libres de l'oscillateur multiple supposé non amorti, donne une bonne approximation du mouvement réel et fournit les éléments nécessaires pour le calcul des oscillations forcées.

L'équation du mouvement en l'absence d'amortissement et de forces extérieures s'écrit :

$$[M][\dot{U}] + [K][U] = 0 \quad (\text{II})$$

La solution particulière est donnée par l'expression de $[U]$ qui s'écrit sous la forme :

$$[U] = a [\Phi] \sin(\omega t + \theta) \quad (\text{III})$$

où a et θ sont des constantes et $[\Phi]$ le vecteur des déplacements ϕ_j des masses concentrées.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_j \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}$$

En remplaçant l'expression (III) dans l'équation (II) on aura l'équation suivante :

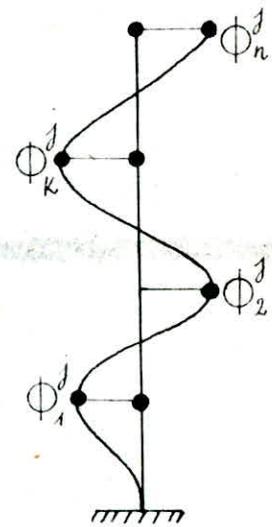
$$([K] - [M]\omega^2)[\Phi] = 0 \quad (\text{IV})$$

Cette expression représente un système de n équations à n inconnues qui sont les composantes du vecteur $[\Phi]$. Une solution différente de zéro n'est possible que si le déterminant de la matrice $([K] - [M]\omega^2)$ est nul :

$$\det([K] - [M]\omega^2) = 0$$

Si on développe ce déterminant, on obtient une équation de degré n en ω^2 . La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots, \omega_n$ relatives aux n modes de vibration possibles.

Le vecteur de déformation $[\phi_j] = \begin{bmatrix} \phi_1^j \\ \phi_2^j \\ \vdots \\ \phi_k^j \\ \vdots \\ \phi_n^j \end{bmatrix}$



qui correspond aux modes de vibration j de pulsation ω_j est donné par la relation :

$$([K] - [M]\omega_j^2)[\phi_j] = 0$$

Ainsi la résolution de l'équation (IV) se ramène à un problème de calcul des valeurs propres et vecteurs propres.

V.5)- CALCUL DES CARACTERISTIQUES PROPRES DE VIBRATION :

Le calcul direct des caractéristiques propres de vibration d'une structure par les méthodes mathématiques traditionnelles est très laborieux, c'est ainsi que des méthodes approchées ont été élaborées. Parmi ces méthodes on cite :

1)- METHODE DE RAYLEIGH :

Cette méthode ramène l'étude de la structure réelle à une structure ne possédant qu'un seul degré de liberté. Elle est essentiellement utilisée à trouver la première fréquence propre. Cette méthode repose sur le principe de la conservation de l'énergie : l'énergie totale d'un système non amorti et libre de ce mouvoir est constante.

2)- METHODE DE STODOLA-VIANELLO :

La méthode STODOLA consiste à faire une hypothèse initiale sur

l'allure du mode ; cette hypothèse est ensuite améliorée par itérations successives jusqu'à ce qu'une approximation satisfaisante du mode soit obtenue. Cette méthode est fondée sur l'équation suivante :

$$\frac{1}{\omega^2} \{V\} = [S] [m] \{V\}$$

$\{V\}$: la déformée.

$[S]$: est la matrice de souplesse.

$[m]$: est la matrice masse.

ω : est la pulsation.

3)- METHODE DE HOLZER :

Cette méthode fait une hypothèse sur la fréquence de vibration, cette fréquence sera ajustée de manière itérative jusqu'à satisfaction des conditions aux limites ; la forme du mode se trouve déterminée lors du processus de satisfaction de ces conditions aux limites. Cette méthode est fondée sur l'équation récurrente suivante :

$$X(k-1) = X(k) \cdot \frac{\omega^2}{R(k)} \sum m(k) \cdot X(k)$$

$X(k)$: déplacement relatif du niveau k.

$m(k)$: masse concentrée au niveau k.

$R(k)$: rigidité du niveau k.

4)- METHODE DE JACOBI :

La méthode de JACOBI permet de calculer les n valeurs et vecteurs propres d'un système de dimensions limitées ($n < 100$) dont les matrices sont symétriques et définies positives.

Elle consiste à transformer les matrices $[M]$ et $[K]$ en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives.

5)- METHODE DE RITZ :

La méthode de RITZ permet de transformer un problème de grande dimension en un problème de dimension plus réduite. On aura ainsi un système réduit qui sera calculé par la méthode de JACOBI. Soit le problème de valeur propre suivant, de dimension n :

$$([K] - [M]) \{X\} = 0 \quad (1)$$

Pour réduire ce problème à une dimension $p < n$, on contraint chacun de ses vecteurs propres à s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de p vecteurs indépendants q_i .

$$\{X\} = \left[\{q_1\}, \{q_2\}, \dots, \{q_p\} \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix}$$

$$\{X\} = [Q][a]$$

$(n \times 1) \quad (n \times p) \quad (p \times 1)$

Le vecteur a est déterminé par l'expression suivante, définissant un problème de vecteur propre de dimension p :

$$([K] - R[M]) \{a\} = 0$$

$$[K] = [Q]^T [K] [Q] \quad , \quad [M] = [Q]^T [M] [Q]$$

V.5.1)- CHOIX DE LA METHODE DE CALCUL :

Le choix de la méthode est fait en fonction de la technique dont on dispose, de l'importance et du type de la structure analysée, de la précision désirée et du nombre de modes propres qui doivent être déterminées ; ainsi dans le cadre de notre projet on choisit celle de JACOBI.

V.5.2)- EXPOSE DE LA METHODE DE JACOBI :

Comme il a été dit ci-dessus, la méthode de JACOBI consiste à transformer les matrices $[K]$ et $[M]$ en des matrices diagonales, et cela en utilisant des transformations successives :

$$\begin{aligned} [K^1] &= [K] & [M^1] &= [M] \\ [K^2] &= [Q^1]^T [K^1] [Q^1] & [M^2] &= [Q^1]^T [M^1] [Q^1] \\ &\vdots & &\vdots \\ [K^{k+1}] &= [Q^k]^T [K^k] [Q^k] & [M^{k+1}] &= [Q^k]^T [M^k] [Q^k] \end{aligned}$$

Les matrices $[K^{k+1}]$ et $[M^{k+1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$ lorsque k tend vers l'infini.

Les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$[\omega^2] = [K^d] [M^d]^{-1} \quad \text{où } \omega_i^2 = K_{ii}^d / M_{ii}^d$$

$$[\Phi] = [Q^1] [Q^2] \dots [Q^k] [Q^{k+1}] \left[\begin{array}{ccc} & & \bigcirc \\ & & \frac{1}{(M_{ii}^d)^{\frac{1}{2}}} \\ \bigcirc & & \end{array} \right]$$

Matrice de transformation :

Chaque matrice $[Q^k]$ est choisie de manière à ce qu'un terme (i,j) non diagonal et non nul de $[K^k]$ et $[M^k]$ soit nul après la transformation numéro (k) . La matrice $[Q]$ a la structure suivante :

$$[Q^k] = \left[\begin{array}{ccc} \diagup 1 & & \bigcirc \\ & \vdots & \\ & 1 & a \\ & & \vdots \\ \bigcirc & b & 1 \\ & & \vdots \\ & & \diagdown 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ligne } i \\ \text{ligne } j \end{array}$$

colonne i colonne j

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que $K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$, soit en supprimant par simplicité l'indice $k+1$ sur les termes de chaque matrice :

$$a \cdot K_{ii} + (1 + a \cdot b) \cdot K_{ij} + b \cdot K_{jj} = 0$$

$$a \cdot M_{ii} + (1 + a \cdot b) \cdot M_{ij} + b \cdot M_{jj} = 0$$

Dans le cas particulier où :

$$(K_{ii}/M_{ii}) = (K_{jj}/M_{jj}) = (K_{ij}/M_{ij})$$

les valeurs de a et b sont : $a = 0$, $b = -K_{ij}/K_{jj}$

Dans le cas général notons :

$$C_1 = K_{ii} \cdot M_{ij} - M_{ii} \cdot K_{ij}$$

$$C_2 = K_{jj} \cdot M_{ij} - M_{jj} \cdot K_{ij}$$

$$C_3 = K_{ii} \cdot M_{jj} - M_{ii} \cdot K_{jj}$$

$$d = C_3/2 + \text{Signe}(C_3) \sqrt{(C_3/2)^2 + C_1 \cdot C_2}$$

Alors :

$$a = C_2/d \quad , \quad b = -C_1/d.$$

lorsque $[M]$ est définie positive, le coefficient $(C_3/2)^2 + C_1 \cdot C_2$ est positif.

ALGORITHME DE LA METHODE DE JACOBI

Définir la précision de convergence requise ϵ .

Pour chaque cycle s

Définir la tolérance dynamique $\epsilon_s = 10^{-25}$

Pour chaque ligne $i=1,2,\dots,n$

Pour chaque colonne $j=i+1,\dots,n$

Calculer les facteurs de couplage :

$$f_k = \frac{|K_{ij}|}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}} \quad f_M = \frac{|M_{ij}|}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}}$$

Si f_k ou $f_M > \epsilon_s$

- Calculer a et b par

- Transformer les matrices [K] et [M]

colonne i = colonne j + b.colonne j

colonne j = a.colonne i + colonne j

Puis :

ligne i = ligne i + b.ligne j

ligne j = a.ligne i + ligne j

- Modifier les vecteurs propres [λ]

colonne i = colonne i + b.colonne j

colonne j = a.colonne i + colonne j

Calculer les valeurs propres

$$\lambda_i = \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad \text{et} \quad F_\lambda = \max_i \frac{|\lambda_i^s - \lambda_i^{s-1}|}{|\lambda_i^{s-1}|}$$

Calculer les facteurs de couplage

$$F_K = \max_{i,j} \frac{|K_{ij}|}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}}, \quad F_M = \max_{i,j} \frac{|M_{ij}|}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}}$$

Test de convergence : $F_K < \epsilon$ et $F_M < \epsilon$ et $F_\lambda < \epsilon$

V.6)- CALCUL DES FORCES SISMIQUES :

Le calcul des batiments à l'égard de leur sécurité antisismique repose avant tout sur l'évaluation de la charge sismique susceptible d'être engendrée lors d'un seisme éventuel.

Les forces sismiques de calcul représentent une charge statiquement appliquée provoquant dans la structure des efforts qui pourraient être engendrés par une sollicitation sismique future. Ces forces sont appliquées aux niveaux des planchers où l'on suppose que les poids des masses des étages contigus sont concentrés.

On détermine la charge sismique de calcul séparément pour la direction longitudinale et pour la direction transversale, c'est à dire suivant les axes référentiels de la construction.

V.6.1)- FORCES SISMIQUES DANS CHAQUE MODE DE VIBRATION DE LA STRUCTURE :

Conformément au règlement RPA81, les forces sismiques de calcul seront déterminées d'après la formule :

$$F_{ik} = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot \phi_{ik} \cdot W_i$$

où :

F_{ik} : est la force sismique au niveau i de la structure dans le mode k .

A, B, Q : coefficients qui sont déjà définis.

D_k : facteur d'amplification dynamique moyen de la structure dans le mode k .

ϕ_{ik} : composante du vecteur $\{\phi_k\}$ du mode k au niveau i .

W_i : poids de la masse m_i ($W_i = m_i \cdot g$).

γ_k : facteur de contribution du mode k :

$$\gamma_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \phi_{ik}}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \phi_{ik}^2}$$

L'effort tranchant dû au seisme à la base du bâtiment s'écrit :

$$F = \sum_{i=1}^n F_{ik} = \sum_{i=1}^n A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot \phi_{ik} \cdot W_i = \sum_{i=1}^n A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot \phi_{ik} \cdot m_i \cdot g$$

$$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot g \sum_{i=1}^n \phi_{ik} \cdot m_i$$

$$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot g \frac{\sum m_i \phi_{ik}}{\sum m_i \phi_{ik}^2} \sum m_i \phi_{ik}$$

$$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot g \frac{(\sum m_i \phi_{ik})^2}{\sum m_i \phi_{ik}}$$

On pose :

$$m_k = \frac{(\sum m_i \phi_{ik})^2}{\sum m_i \phi_{ik}}$$

$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot m_k \cdot g$, m_k étant la masse modale.

Ainsi chaque mode fait vibré une certaine masse.

La notion de masse modale est importante pour la troncature des modes. En pratique on ne détermine pas tous les modes on arrête dès que les masses modales accumulées atteignent 90 à 95 % de la masse totale :

$$\sum_{k=1}^m m_k > 0,9 \sum_{i=1}^n m_i \quad (*) \quad \text{avec } m < n$$

On pose :

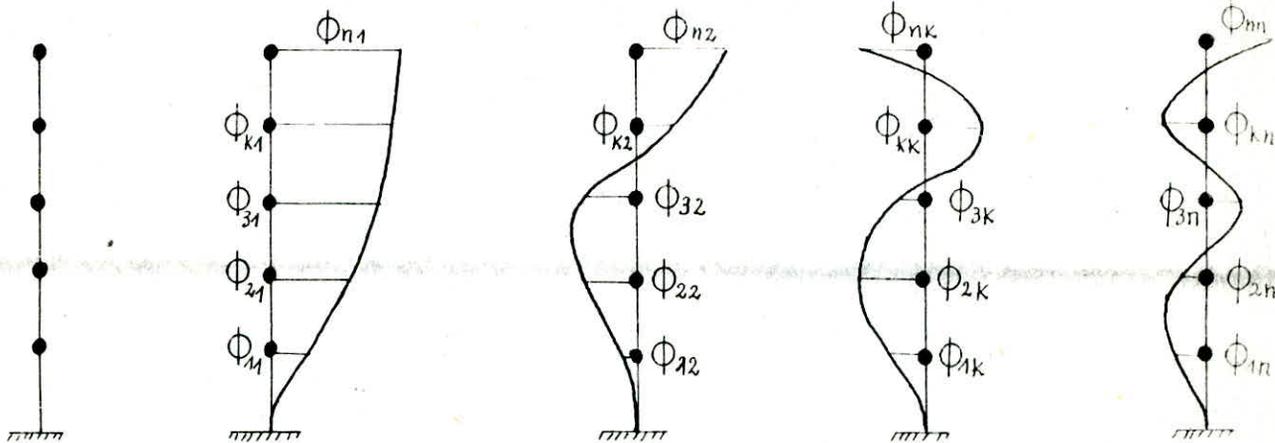
$$\xi_k = \frac{m_k}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

où ξ_k : représente le coefficient d'équivalence du mode k.

(*) devient :

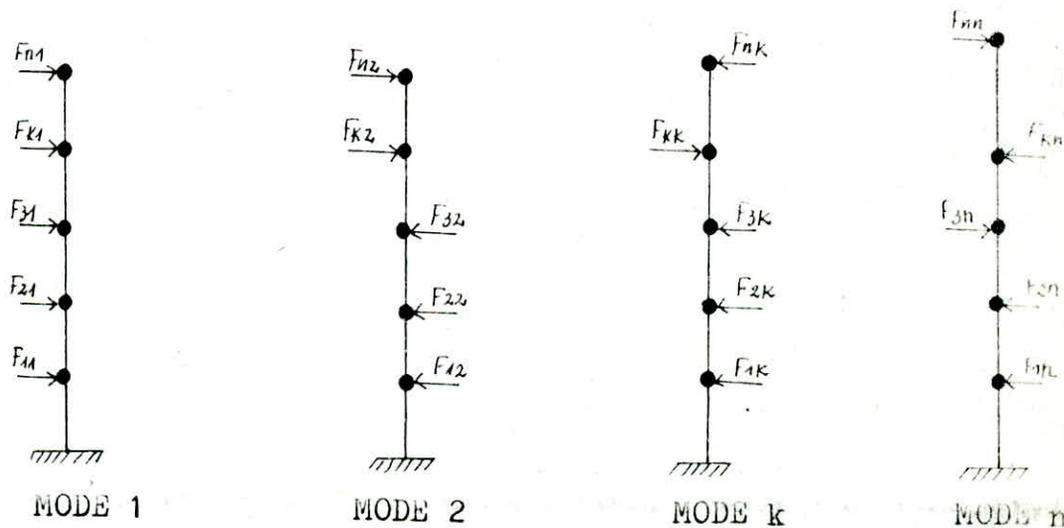
$$\sum_{k=1}^m \xi_k > 0,9$$

MODE PROPRES DE VIBRATION



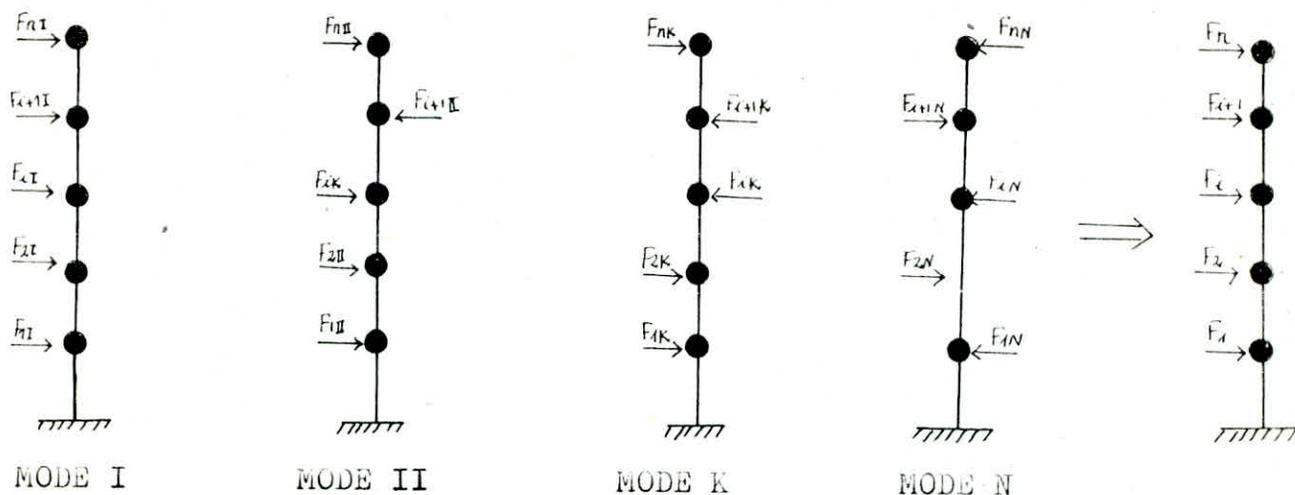
| | MODE 1 | | MODE 2 | | MODE k | | MODE n |
|----------------------------|------------|---|------------|---|------------|---|------------|
| <u>FREQUENCE</u> | ω_1 | < | ω_2 | < | ω_k | < | ω_n |
| <u>Période</u> | T_1 | > | T_2 | > | T_k | > | T_n |
| <u>Vecteur déplacement</u> | $[\phi_1]$ | | $[\phi_2]$ | | $[\phi_k]$ | | $[\phi_n]$ |

FORCES SISMIQUES DANS CHAQUE MODE



| | | | | | | | |
|----------------------|---------|--|---------|--|---------|--|---------|
| <u>Vecteur force</u> | $[F_1]$ | | $[F_2]$ | | $[F_k]$ | | $[F_n]$ |
|----------------------|---------|--|---------|--|---------|--|---------|

V.5.2)- RESULTANTE DES FORCES SISMQUES MODALES :



Comme les réponses maximales des différents modes propres se manifestent, en général, à différents moments ($t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n$) et qu'il n'existe pas de théorie exacte pour associer ces valeurs maximales tirées des spectres, la réponse maximale totale de la structure ne peut-être calculée que par des méthodes approximatives.

Les deux méthodes les plus connues sont les suivantes :

Une première possibilité consiste à calculer la somme des valeurs absolues des forces sismiques correspondant aux différents modes propres :

$$F_i = \sum_{k=1}^n |F_{ik}| = |F_{i1}| + |F_{i2}| + |F_{i3}| + \dots + |F_{in}|$$

Il est clair que cette combinaison conduit toujours à une estimation par excès de la force réelle F_i au niveau i de la structure parce que les réponses maximales des différents modes ne se manifestent pas en même temps et avec le même signe.

Néanmoins, d'un point de vue dimensionnement de la structure, cette méthode a l'avantage de ce placer toujours en sécurité.

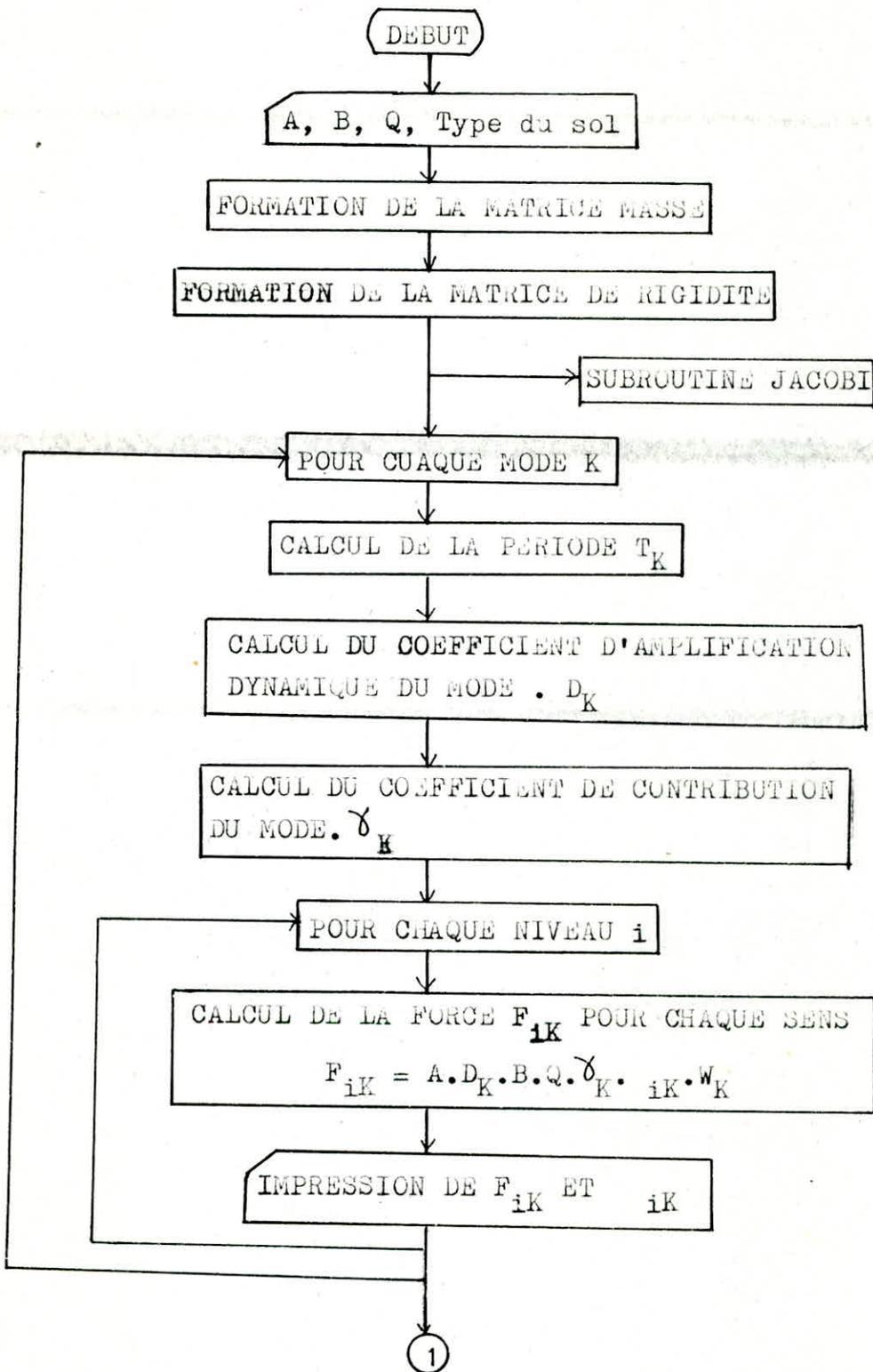
Une deuxième approche possible, basée sur un concept probabiliste, consiste à calculer la moyenne quadratique des carrés des forces des différents modes propres :

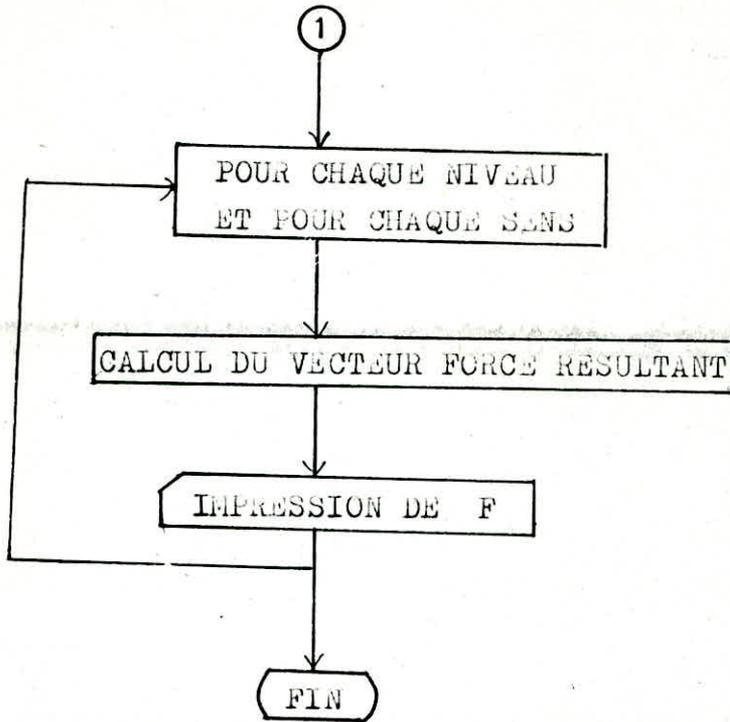
$$F_i = \sqrt{\sum_{k=1}^n F_{ik}^2} = \sqrt{F_{i1}^2 + F_{i2}^2 + \dots + F_{ik}^2 + \dots + F_{in}^2}$$

Cette estimation est plus proche de la réalité physique et est recommandée par plusieurs codes parasismique.

On choisit la 2^{eme} approche pour le calcul de la résultante des forces sismiques modals.

ORGANIGRAMME DE CALCUL DES FORCES DYNAMIQUES





**CHAP VI-REPARTITION DES FORCES SISMIQUES
ENTRE LES DIFFERENTS ELEMENTS
DE CONTREUEMENT**

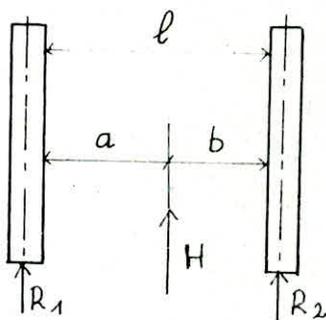
La stabilité d'une structure en voile aux forces horizontales est en général assurée par plusieurs éléments de contreventement. S'il en existe deux ou trois plans de contreventement la décomposition des efforts horizontaux s'effectue à chaque plancher de façon isostatique. Si par contre il existe un plus grand nombre d'éléments, le problème devient hyperstatique.

A)- SYSTEMES ISOSTATIQUES :

1°)- Cas de deux voiles parallèles : En supposant le plancher infiniment rigide, les efforts dans les voiles sont ceux d'un système isostatique. Quelle que soit l'inertie des deux refends on a :

$$R_1 = \frac{Hb}{l}$$

$$R_2 = \frac{Ha}{l}$$

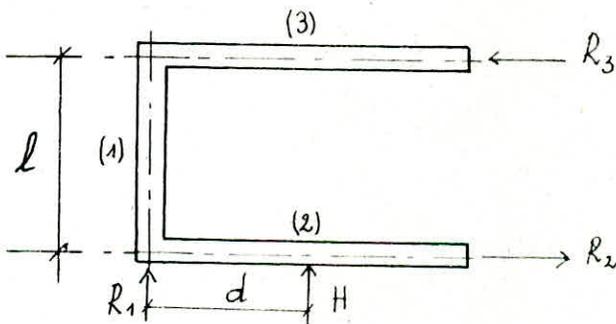


2°)- Cas de trois voiles formant un ensemble en U : Le système peut être ramené à une force R_1 , agissant au droit du voile 1 à condition d'introduire un moment Hd , d'où :

$$R_1 = H$$

et

$$R_2 = -R_3 = \frac{Hd}{l}$$



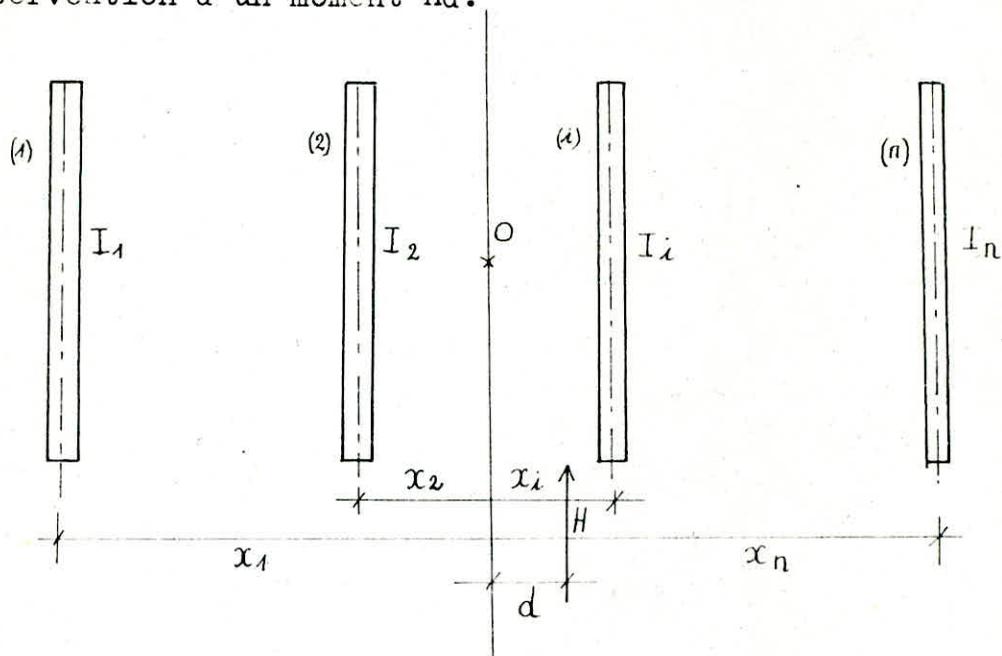
B)- SYSTEME HYPERSTATIQUE :

On fait les hypothèses suivantes :

- Les planchers sont indéformables horizontalement.
- Les voiles sont parfaitement encastrés à leur base.
- L'inertie des voiles est constante sur toute la hauteur, ou bien

la variation d'inertie suit la même loi pour tous les voiles.

Dans le cas général où la résultante des efforts extérieurs ne correspond pas au centre de gravité des inerties (centre de torsion) il y a l'intervention d'un moment Hd .



Soit :

O : Origine des abscisses choisit au cdg des inerties des voiles.

I_i : Inertie du voile de rang i .

x_i : Abscisses de ce voile.

R_i : effort dans le voile.

d : Abscisse de la résultante H de l'action des forces horizontales.

Ce problème peut-être résolu en ramenant la résultante H au centre de gravité des inerties, ce qui nous permet de décomposer cette résultante proportionnellement aux inerties des voiles.

$$R'_i = H \cdot I_i / \sum I_i$$

Puis en corrigeant les efforts obtenues en tenant compte du moment de flexion $M=H \cdot d$, appliqué à une section dont les caractéristiques peuvent-être définies comme suit :

$$S = \sum I_i$$

$$I = \sum I_i \cdot x_i^2$$

$$V = x_i$$

La formule classique nous donne :

$$\sigma = \frac{MV}{I}$$

ou $R_i''/I_i = H \cdot d \cdot x_i / I_i \cdot x_i^2$

soit $R_i'' = H \cdot d \cdot x_i \cdot I_i / \sum I_i \cdot x_i^2$

L'effort sur chaque voile est, par suite, la somme des deux efforts obtenus :

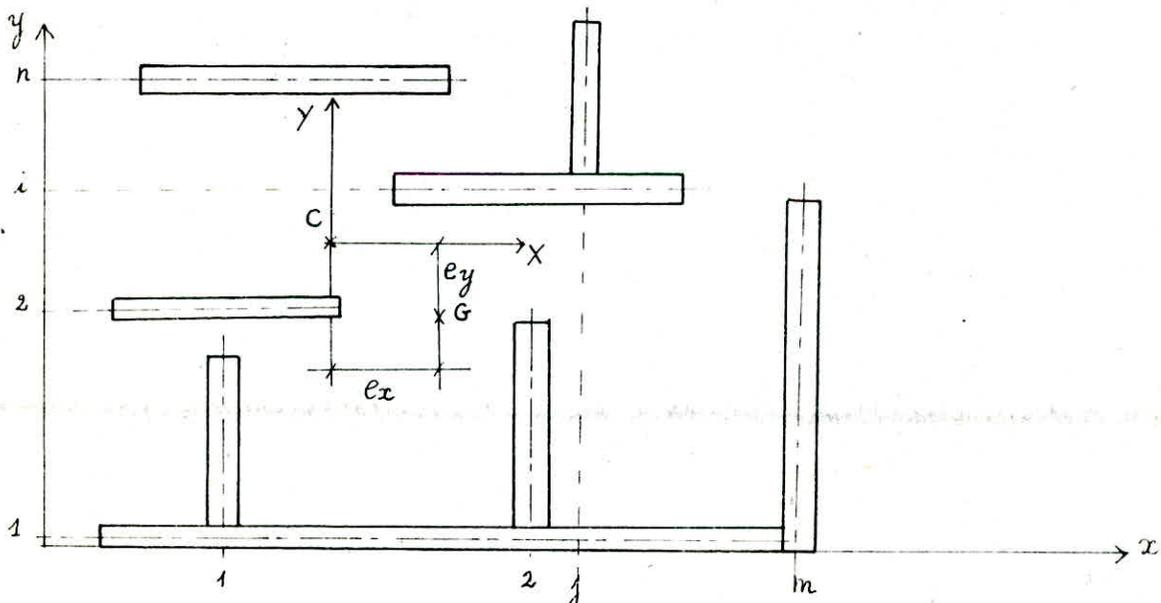
a)- Par la translation de la section $\sum I_i$.

b)- Par la rotation de cette même section ce qui s'écrit :

$$R_i = R_i' + R_i''$$

ou $R_i = H \cdot I_i \cdot (1 / \sum I_i + d \cdot x_i / \sum I_i \cdot x_i^2)$

Généralisation pour n voiles longitudinaux et m voiles transversaux :



Soit :

- C : Position du centre de torsion de l'étage.
 G : Position du centre de gravité de l'étage.
 (x,y) : Coordonnées d'un voile par rapport à G.
 (X,Y) : Coordonnées d'un voile par rapport à C.
 e_x : Exentricité de calcul dans le sens Ox.
 e_y : Exentricité de calcul dans le sens Oy.
 H_x et H_y : Efforts horizontaux agissants respectivement dans le sens Ox et Oy.
 J_θ : Rigidité à la torsion du niveau étudié.

$$J_{\theta} = \sum_{i=1}^n I_{xi} \cdot Y_i^2 + \sum_{j=1}^m I_{yj} \cdot X_j^2$$

La répartition de H_x et H_y se fait comme suit :

- Pour les voiles longitudinaux (// Ox) :

$$F_{\text{tran}} = H_x \cdot I_{xi} / \sum I_{xi} \quad (\text{force de translation})$$

$$F_{\text{rot}} = H_x \cdot e_y \cdot I_{xi} \cdot Y_i / J_{\theta} \quad (\text{force due à la torsion})$$

L'effort horizontal attribué au voile i :

$$H_{xi} = H_x (I_{xi} / \sum I_{xi} + e_y \cdot I_{xi} \cdot Y_i / J_{\theta})$$

- Pour les voiles transversaux (// Oy) :

$$F_{\text{tran}} = H_y \cdot I_{yj} / \sum I_{yj} \quad (\text{force de translation})$$

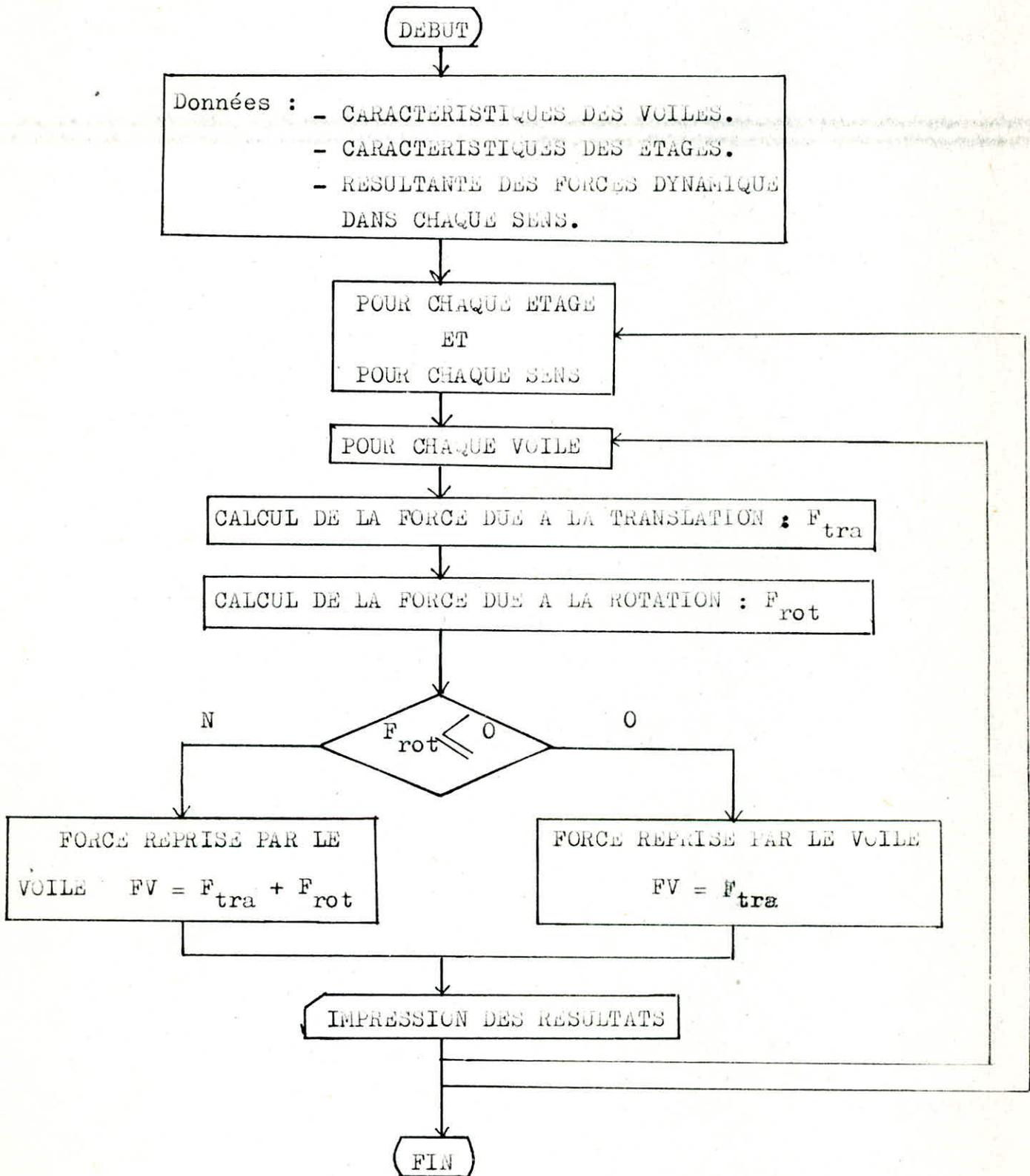
$$F_{\text{rot}} = H_y \cdot e_x \cdot I_{yj} \cdot X_j / J_{\theta} \quad (\text{force due à la torsion})$$

L'effort horizontal attribué au voile j :

$$H_{yj} = H_y \left(\frac{I_{yj}}{\sum I_{yj}} + e_x \cdot I_{yj} \cdot \lambda_j / J_0 \right)$$

Le règlement parasismique Algérien exige que le terme dû à la torsion soit supérieur à zéro c'est à dire si la force F_{rot} est négative on la prend égale à zéro.

ORGANIGRAMME DE REPARTITION DES FORCES DYNAMIQUES
ENTRE LES ELEMENTS DE CONTREVENTEMENT



**CHAP VII - CALCUL DES EFFORTS INTERNES
DANS LES VOILES**

VII.1)- INTRODUCTION :

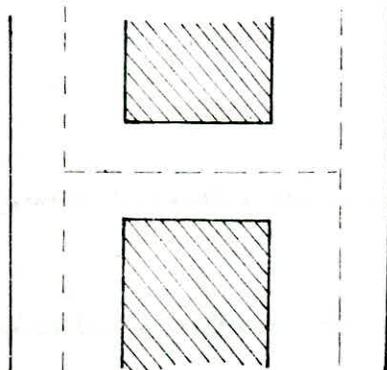
Dans la pratique du génie civil on est amené souvent à calculer des bâtiments dont le contreventement est assuré par des voiles longitudinaux et transversaux.

La méthode de calcul des efforts la plus couramment utilisée pour le calcul des voiles est celle établie par monsieur Albiges. Cette méthode n'a pas pour but de permettre une évaluation exacte des efforts mais simplement de résumer et de préciser les opérations qui peuvent être utilisées pour s'assurer que le bâtiment à voiles présente une sécurité suffisante sous l'action des forces horizontales.

Néanmoins il existe une méthode qui permet de retrouver le fonctionnement réel du voile et qui donne des résultats assez proches de la réalité. Cette méthode consiste à modéliser le voile en portique qui est un assemblage de poutres et poteaux, puis lui appliquer la méthode des déplacements qui est la méthode des matrices de rigidité et ainsi déterminer les efforts internes du voile avec ouvertures.

VII.2 MODELISATION DES VOILES :

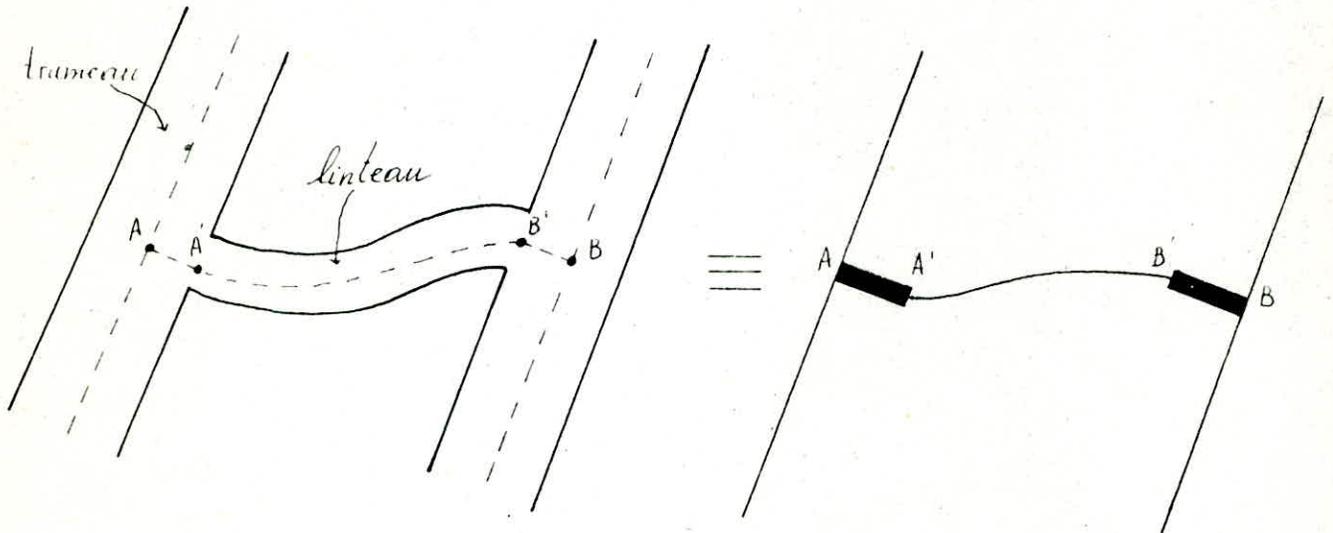
Comme il a été dit ci-dessus, le voile avec ouvertures est assimilé à un portique (poteaux et poutres) dont les barres sont supposées être concentrées dans les lignes moyennes des trumeaux et linteaux.



En pointillé :

Modélisation en portique

La poutre (linteau) possède deux extrémités infiniment rigides :



Les parties AA' et BB' sont considérées comme infiniment rigides car elles sont encastrées dans les trumeaux dont les rigidités sont très grandes par rapport à celles des linteaux.

Avant d'aborder le calcul des matrices de rigidité des éléments, nous jugeons nécessaire un bref rappel de quelques théorèmes énergétiques de la résistance des matériaux.

VII.3)- RAPPELS DES METHODES ENERGETIQUES :

Sous l'action des charges toute structure subit des déformations qui sont la conséquence de la déformabilité des matériaux utilisés à leur réalisation.

La structure passe ainsi de sa position initiale, non déformée, à une autre, d'équilibre, toute proche de la première, qu'on appelle position déformée.

Pour exprimer la condition d'équilibre dans la position déformée on peut procéder de deux manières :

-Appliquer le principe de la conservation de l'énergie : méthode

énergétique.

- Appliquer le principe des déplacements virtuel : méthode cinématique.

Les deux procédés conduisent aux mêmes résultats, aux mêmes relations pour exprimer la condition d'équilibre.

VII.3.1)- TRAVAIL MECANIQUE DES FORCES EXTERIEURS :

Soit un corps élastique soumis à une force F et subissant un déplacement ds proportionnel à F on a :

$$ds = k.dF \longrightarrow S = k.F$$

le travail élémentaire de cette force :

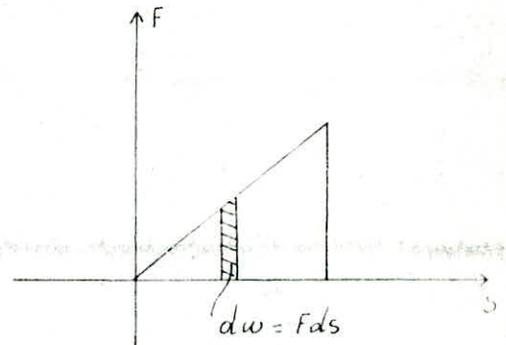
$$dW = F.ds$$

le travail mécanique total est :

$$W = \int F.k.dF = \frac{1}{2}.kF^2 = \frac{1}{2}.FS$$

le travail produit par un système de forces :

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i \Delta_i$$



VII.3.2)- TRAVAIL MECANIQUE DES EFFORTS (FORCES INTERIEURES) OU ENERGIE DE DEFORMATION :

L'action des forces extérieures (appelées très souvent charges) produit dans les sections de la structure une sollicitation caractérisée par l'apparition des efforts et des déformations dans les points du matériau.

A chaque moment, il existe un équilibre entre le travail mécanique extérieur et le travail mécanique intérieur (dans le domaine des déformations élastique).

L'évaluation du travail mécanique intérieur se fait en

partant des contraintes et déformation unitaires de chaque sollicitation.

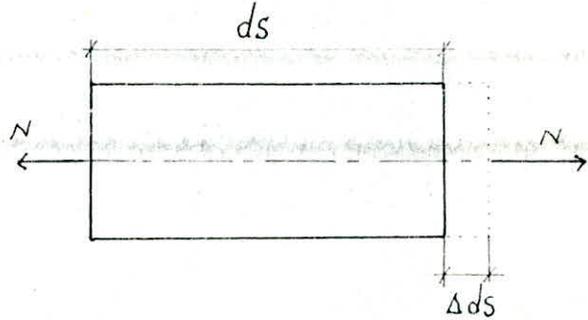
1)- Travail mécanique produit par l'effort normal :

$$dW(N) = N \cdot ds/2$$

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EA}$$

$$dW(N) = N^2 \cdot ds / 2EA$$

$$W(N) = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} ds$$



2)- Travail mécanique produit par l'effort tranchant :

$$dW(T) = T \delta ds / 2$$

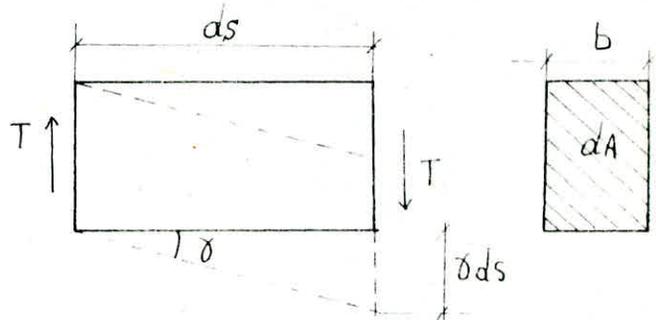
$$T = \tau dA, \quad \delta = \tau / G$$

$$\tau = T \cdot S_t / I \cdot b$$

S_t : Moment statique.

I : Moment d'inertie.

$$dW(T) = \frac{\tau^2 \cdot dA \cdot ds}{2G} = \frac{T^2 \cdot S_t^2}{2GI^2 b^2} dA \cdot ds$$



$$W(T) = \int_0^l \frac{T^2 \cdot S_t^2}{2GI^2 b^2} dA \cdot ds = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GI^2} ds \iint_S \frac{S_t^2}{I^2 b^2} dA$$

$$W(T) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{G \frac{I^2}{\iint_S \frac{S_t^2}{I^2 b^2} dA}} ds$$

On définit une section réduite : $A_r = \frac{I^2}{\iint_S \frac{S_t^2}{I^2 b^2} dA}$

$$W(T) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GA_r} ds$$

3)- Travail mécanique produit par le moment fléchissant :

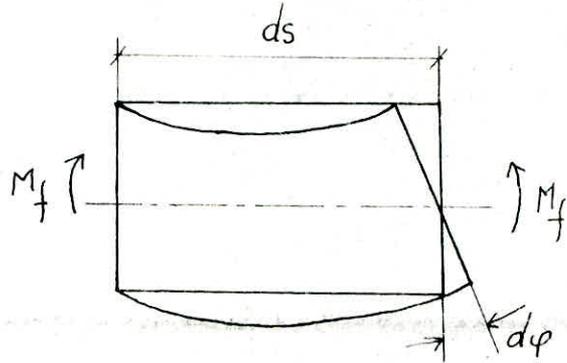
$$dW(M_f) = \frac{1}{2} M_f \cdot d\varphi$$

$$d\varphi = \theta ds$$

$$\theta = \frac{\sigma}{E_y} = \frac{M_f}{EI_z}$$

$$dW(M_f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2}{EI_z} ds$$

$$W_{M_f} = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EI_z} ds$$



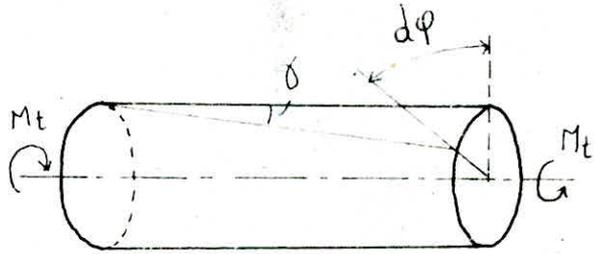
4)- Travail mécanique produit par le moment de torsion :

$$dW(M_t) = \frac{1}{2} M_t \cdot d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{M_t \cdot ds}{GI_p}$$

$$dW(M_t) = \frac{M_t^2}{2GI_p} ds$$

$$W(M_t) = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_p} ds$$

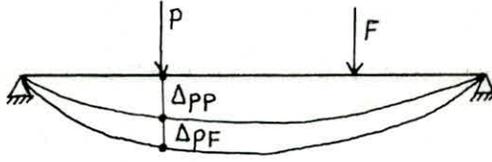


Dans le cas général d'une sollicitation, l'énergie de déformation d'une barre de longueur 'l' est :

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \frac{N^2}{EA} ds + \int_0^l \frac{T^2}{GA_r} ds + \int_0^l \frac{M_f^2}{EI} ds + \int_0^l \frac{M_t^2}{GI_p} ds \right)$$

VII.3.3)- THEOREME DE CASTIGLIANO :

« Le déplacement du point d'application d'une force généralisée dans le sens d'action de cette dernière **équivaut** à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force. »



$$U = \frac{1}{2} P \Delta_{pP} + P \Delta_{pF} = \frac{1}{2} P^2 \cdot \delta_{pP} + P \cdot \Delta_{pF}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P \cdot \delta_{pP} + \Delta_{pF} = \Delta_{pP} + \Delta_{pF} = \Delta_p$$

d'où :

$$\Delta_p = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Dans le calcul de l'énergie de déformation, et des éléments des matrices de souplesse et de rigidité, on **néglige** souvent l'effet de l'effort tranchant. Cet effet est négligeable pour les éléments d'élançement $\lambda \geq 5$ (poutres et poteaux courants).

Pour les éléments d'élançements réduits tels que les poteaux courts et les voiles, l'influence de l'effort tranchant devient très importante et ne peut-être négligée.

VII.4)- MATRICE DE RIGIDITE :

VII.4.1)- DEFINITION

On appelle matrice de rigidité d'un élément simple, la matrice qui exprime les forces en fonction des déplacements en un certain nombre de points.

Elle est donc définie par :

$$[F] = [K][U]$$

où :

$[F]$ est le vecteur forces.

$[K]$ est la matrice de rigidité.

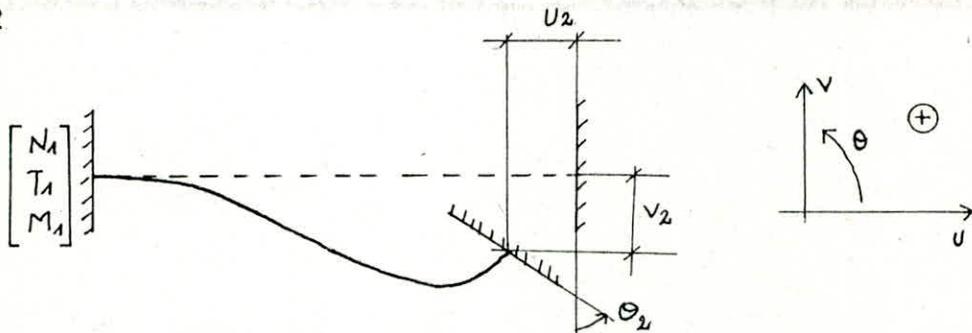
$[U]$ est le vecteur déplacements.

VII.4.2)- MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE SIMPLE

BI-ENCASTREE :

Soit une barre encastrée à ses deux extrémités. Cette barre est soumise à des déplacements imposés à l'une de ses extrémités :

u_2, v_2, θ_2



C'est un système hyperstatique de degré 3. Ces inconnues hyperstatique sont : N_2, T_2, M_2

Les équations d'équilibre donnent :

$$N_1 + N_2 = 0$$

$$T_1 + T_2 = 0$$

$$M_1 + M_2 + T_2 \cdot L = 0$$

Les efforts dans la barre sont les suivants :

$$N = N_2$$

$$M = T_2(L - S) + M_2$$

$$T = T_2$$

L'énergie de déformation de la barre s'écrit :

$$U = \int_0^L \left(\frac{N^2}{2EA} ds + \frac{M^2}{2EI} ds + \frac{T^2}{2GA_r} ds \right)$$

$$U = \int_0^L \frac{N_2^2}{2EA} ds + \int_0^L \frac{T_2^2}{2GA_r} ds + \int_0^L \frac{(T_2(L-s) + M_2)^2}{2EI} ds$$

D'après le théorème de Castigliano on a :

$$u_2 = \frac{\partial U}{\partial N_2} = \frac{N_2}{E} \int_0^L \frac{ds}{A}$$

$$v_2 = \frac{\partial U}{\partial T_2} = \frac{1}{E} \left(\int_0^L \frac{(L-s)^2}{I} ds + M_2 \int_0^L \frac{(L-s)}{I} ds + T_2 \int_0^L \frac{ds}{GA_r} \right)$$

$$\theta_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} = \frac{1}{E} \left(T_2 \int_0^L \frac{L-s}{I} ds + M_2 \int_0^L \frac{ds}{I} \right)$$

Si l'inertie I et la section A sont constantes :

$$u_2 = \frac{N_2 \cdot L}{EA}$$

$$v_2 = T_2 \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GA_r} \right) + \frac{M_2 \cdot L^2}{2EI}$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 \cdot L^2}{2EI} + \frac{M_2 \cdot L}{EI}$$

En posant

$$\alpha = \frac{12EI}{L^2 \cdot G \cdot A_r}$$

On a :

$$u_2 = N_2 \cdot L / E \cdot A$$

$$v_2 = T_2 \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right) \frac{L^3}{3EI} + M_2 \cdot L^2 / 2 \cdot EI$$

$$\theta_2 = T_2 \cdot L^2 / 2EI + M_2 \cdot L^2 / 2EI$$

Et réciproquement :

$$N_2 = \frac{EA}{L} u_2$$

$$T_2 = \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{12EI}{L^3} v_2 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2 \right)$$

$$M_2 = \frac{1}{1+\alpha} \left(-\frac{6EI}{L^2} v_2 + (4+\alpha) \frac{EI}{L} \theta_2 \right)$$

En notation matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{12EI}{L^3} & -\frac{1}{1+\alpha} \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{1}{1+\alpha} \frac{6EI}{L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

On sait que :

$$N_1 = -N_2$$

$$T_1 = -T_2$$

$$M_1 = -T_2 L - M_2$$

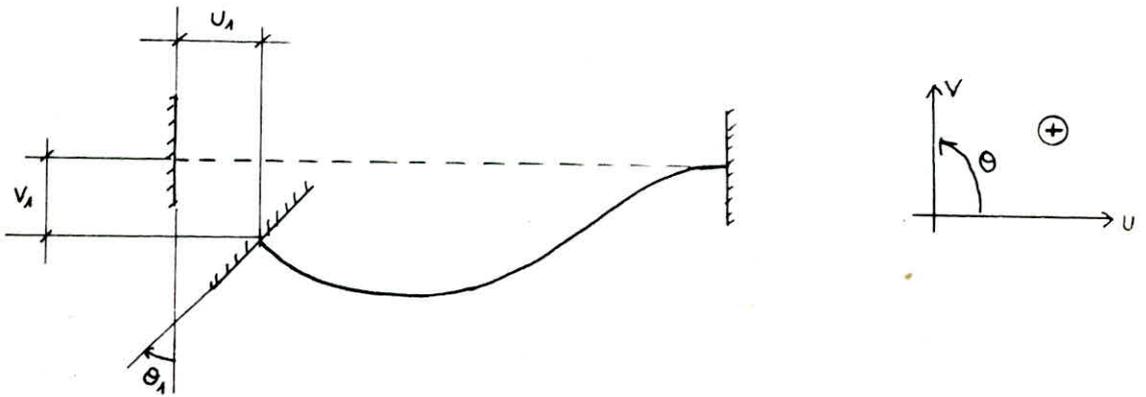
En notation matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

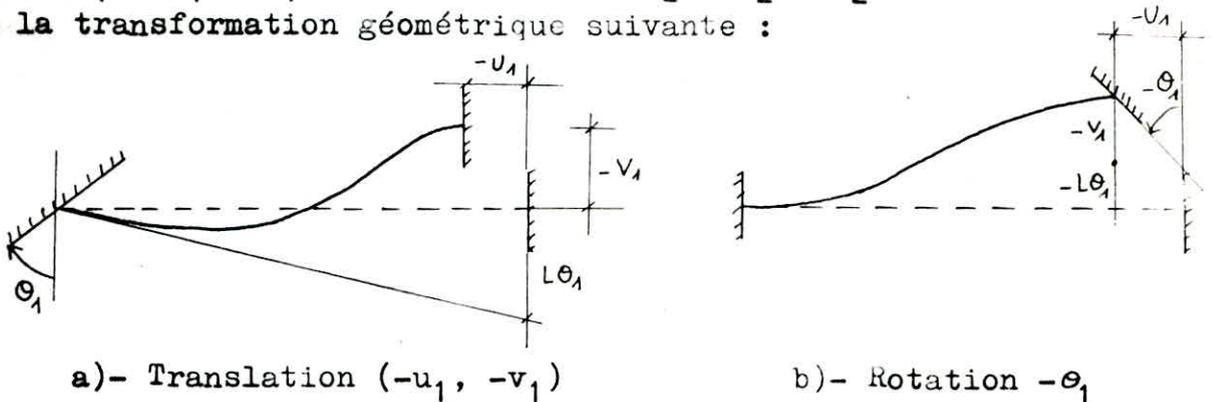
d'où :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\alpha} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & -\frac{1}{1+\alpha} \frac{6EI}{L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

De même on calcule les efforts provoqués par les déplacements (u_1, v_1, θ_1) .



Exprimons (u_1, v_1, θ_1) en fonction de (u_2, v_2, θ_2) , pour cela on fait la transformation géométrique suivante :



$$u_2 = -u_1$$

$$u_1 = -u_2$$

$$v_2 = -v_1 - L\theta_1$$

$$v_1 = -v_2 + L\theta_2$$

$$\theta_2 = -\theta_1$$

$$\theta_1 = -\theta_2$$

En écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

et de même :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

d'où :

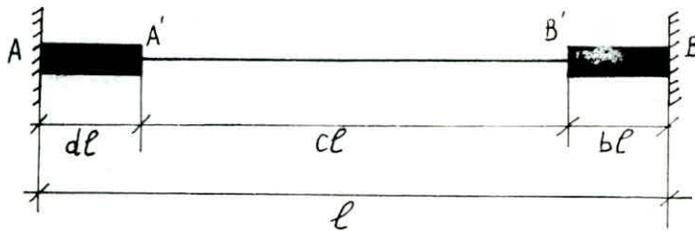
$$\begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de la barre bi-encastree s'écrit :

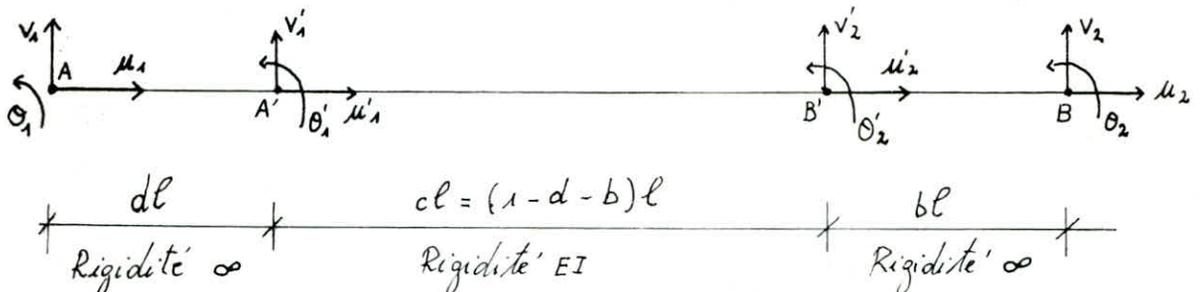
$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & \frac{-6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

On remarque que la matrice de rigidité est symétrique.

VII.4.3)- MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE AVEC DES PARTIES INFINIMENT RIGIDES AUX EXTREMITES :



Les déplacements $[H]$ aux points A et B sont liés aux déplacements $[U']$ en A' et B' par relation géométrique comme suit :



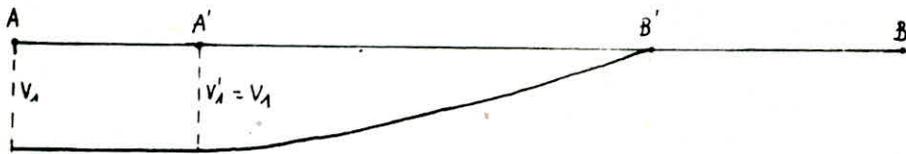
$$[U] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[U'] = \begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ \theta_1' \\ u_2' \\ v_2' \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u_1 \neq 0}$$

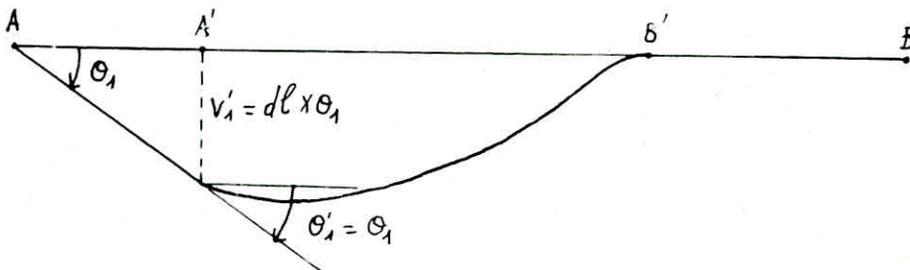
$$u_1' = u_1 \quad \text{et} \quad v_1' = \theta_1' = v_2' = u_2' = \theta_2' = 0$$

$$\underline{v_1 \neq 0}$$



$$v_2' = v_1 \quad \text{et} \quad u_1' = \theta_1' = u_2' = v_2' = \theta_2' = 0$$

$$\underline{\theta_1 \neq 0}$$



$$v_1' = dl \times \theta_1$$

$$\theta_1' = \theta_1 \quad \text{et} \quad u_1' = u_2' = v_2' = \theta_2' = 0$$

Les autres relations sont obtenues d'une manière similaire.

Ainsi :

$$[U'] = [H] [U]$$

$[H]$: Transformation géométrique qui s'écrit comme suit :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & dl & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -bl \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de la poutre A'B' de rigidité EI et de vecteur déplacement U' s'obtient en remplaçant dans la matrice de rigidité dans le paragraphe précédent L par Cl.

D'où :

$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{Cl} & 0 & 0 & -\frac{EA}{Cl} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)C^3l^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} & 0 & \frac{-12EI}{(1+\alpha)C^3l^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)Cl} & 0 & \frac{-6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)Cl} \\ -\frac{EA}{Cl} & 0 & 0 & \frac{EA}{Cl} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{(1+\alpha)C^3l^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)C^3l^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)Cl} & 0 & \frac{-6EI}{(1+\alpha)C^2l^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)Cl} \end{bmatrix}$$

Avec : $\alpha = \frac{12EI}{C^2l^2GA_r}$

$C = 1 - d - b$, d et b rapports des parties rigides du linteau à sa longueur totale.

D'autre part le théorème de Betti (élasticité linéaire) permet d'écrire :

$$\sum F_i \cdot U_{iF} = \sum F'_i \cdot U'_{iF}$$

C'est à dire que le travail des forces F_i soumises aux déplacements U_{iF} dûs à un système de force F'_i est égal au travail des forces F'_i soumises aux déplacements U'_{iF} dûs au système de force F_i . Les forces $[F]$ en A et B et $[F']$ en A' et B' engendrent des déplacements semblables car les parties AA' et BB' sont infiniment rigides. on peut donc écrire :

$$\sum F_i \cdot U_i = \sum F'_i \cdot U'_i$$

ou bien sous forme matricielle :

$$[F]^T [U] = [F']^T [U']$$

$$\text{Or, } [U'] = [H][U]$$

$$\text{d'où : } [F]^T [U] = [F']^T [H][U]$$

$$\text{En transposant : } [U]^T [F] = [U]^T [H]^T [F']$$

$$\text{Ce qui donne : } [F] = [H]^T [F'] \quad (1)$$

$$[F] = [K][U]$$

$$[F] = [K][U] = [H]^T [F'] = [H]^T [K'] [U']$$

$$[F] = [H]^T [K'] [H][U]$$

d'où :

$$[K] = [H]^T [K'] [H]$$

En connaissant $[K']$ et $[H]$ on peut déduire $[K]$

$[K]$ est la matrice de rigidité correspondant aux degrés de liberté (déplacements) $[U]$ en A et B d'une barre prismatique de longueur l , avec les parties bl et dl extrémités infiniment rigides.

Le coefficient $\alpha = 12EI/C^2 l^2 GA_r$ tient compte de l'effet de l'effort tranchant.

$$[K] = \frac{EI}{1+\alpha}$$

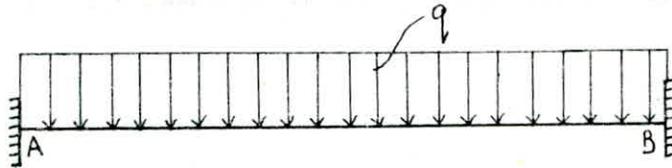
$$\begin{bmatrix} \frac{A(1+\alpha)}{IC_1} & 0 & \frac{12}{C_1^3} & \frac{-A(1+\alpha)}{IC_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{C_1^3} & \frac{6}{C_1^2} + \frac{12d}{C_1^2} & 0 & \frac{-12}{C_1^3} & \frac{6}{C_1^2} + \frac{12d}{C_1^2} \\ 0 & \frac{6}{C_1^2} + \frac{12d}{C_1^2} & \frac{4+\alpha}{C_1} + \frac{12d}{C_1^2} + \frac{12d^2}{C_1^3} & 0 & \frac{-6}{C_1^2} - \frac{12d}{C_1^2} & \frac{2-\alpha}{C_1} + \frac{6(b+d)}{C_1^2} + \frac{12bd}{C_1^3} \\ \frac{-A(1+\alpha)}{IC_1} & 0 & 0 & \frac{A(1+\alpha)}{IC_1} & 0 & \frac{12}{C_1^3} \\ 0 & -\frac{12}{C_1^3} & -\frac{6}{C_1^2} - \frac{12d}{C_1^2} & 0 & \frac{12}{C_1^3} & -\frac{6}{C_1^2} - \frac{12b}{C_1^2} \\ 0 & \frac{6}{C_1^2} + \frac{12d}{C_1^2} & \frac{2-\alpha}{C_1} + \frac{6(b+d)}{C_1^2} + \frac{12bd}{C_1^3} & 0 & \frac{-6}{C_1^2} - \frac{12b}{C_1^2} & \frac{4+\alpha}{C_1} + \frac{12b}{C_1^2} + \frac{12b^2}{C_1^3} \end{bmatrix}$$

En conclusion, un voile uniforme (sans ouvertures) peut être modélisé comme une barre dont la matrice de rigidité est celle de la barre bi-encastree. Un voile avec ouvertures peut-être modélisé comme un portique (en tenant compte de l'effet de T) ; la matrice de rigidité du poteau est celle de la barre bi-encastree et la matrice de rigidité de la partie (linteau) est celle de la barre à extrémités rigides.

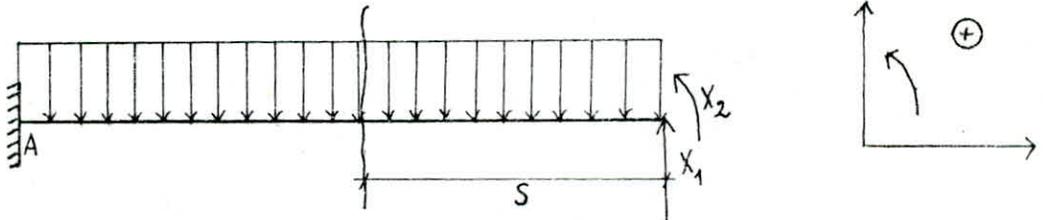
VII.5)- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI DUES AUX CHARGEMENTS EXTERIEURS :

VII.5.1)- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI D'UNE BARRE BI-ENCASTREE :

VII.5.1.1)- CHARGEMENT UNIFORME PERPENDICULAIRE A LA BARRE :



Si on supprime l'encastrement B le système hyperstatique ci-dessus devient :



L'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{T^2}{GA_r} + \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

Les expressions de T et M sont :

$$T = -X_1 + qs$$

$$M = -X_2 - X_1 + qs^2/2$$

d'où :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{(X_1 - qs)^2}{GA_r} + \frac{(X_2 + X_1 - qs^2/2)^2}{EI} \right] ds$$

D'après le théorème de Castigliano on a :

$$u_1 = \frac{\partial W}{\partial X_1} \quad , \quad u_2 = \frac{\partial W}{\partial X_2}$$

En réalité $u_1 = u_2 = 0$ car l'extrémité B est un encastrement.

D'où :

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \frac{-2(-X_1 + qs)}{GA_r} ds + \int_0^l \frac{2s(X_2 + X_1 s - qs^2/2)}{EI} ds \right] = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = X_1 \left(\frac{1}{GA_r} + \frac{l^2}{3EI} \right) + X_2 \frac{1}{2EI} - q \left(\frac{1}{2GA_r} + \frac{ql^3}{8EI} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_2} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{2(X_2 + X_1 s - qs^2/2)}{EI} ds$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_2} = \frac{X_2 l}{EI} + \frac{X_1 l^2}{2EI} - \frac{ql^3}{6EI} = 0 \quad (2)$$

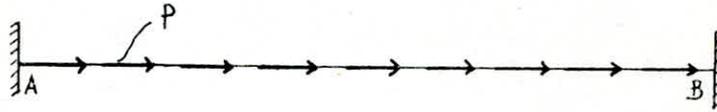
Les équations (1) et (2) donnent : $X_1 = ql/2$, $X_2 = -ql^2/12$

De la même manière on peut calculer les réactions à l'appuis A.

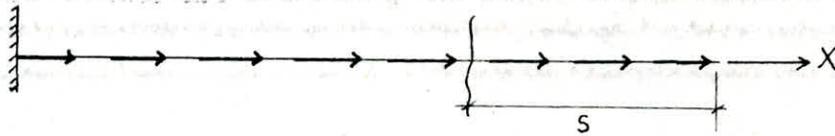
Le vecteur des réactions de la barre est :

$$[F] = \begin{bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{bmatrix}$$

VII.5.1.2)- CHARGEMENT UNIFORME NORMAL A LA BARRE :



Si on supprime l'encastrement B le système hyperstatique ci-dessus devient :



L'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds$$

L'expression de l'effort N :

$$N = X + ps.$$

d'où :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(X + ps)^2}{EA} ds$$

D'après le théorème de Castigliano on a :

$$u = \frac{\partial W}{\partial X}$$

X est une réaction, alors $u = 0$

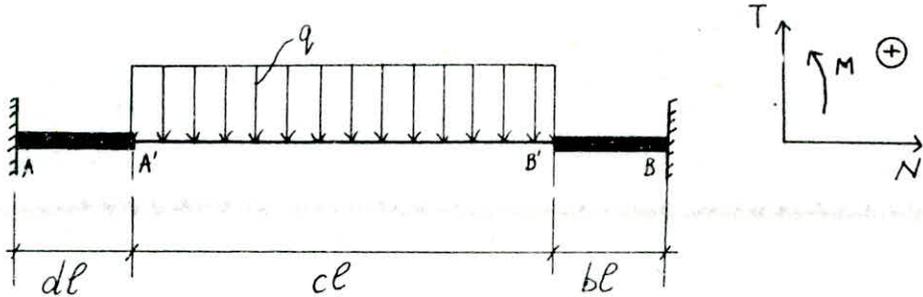
$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{2(X + ps)}{EA} ds = \frac{1}{EA} (XL + pL^2/2) = 0$$

d'où :

$$X = - pL/2$$

VII.5.2)- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI D'UNE BARRE A EXTREMITES RIGIDES :

VII.5.2.1)- CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTIE SUR LA POUTRE SOUPLE :



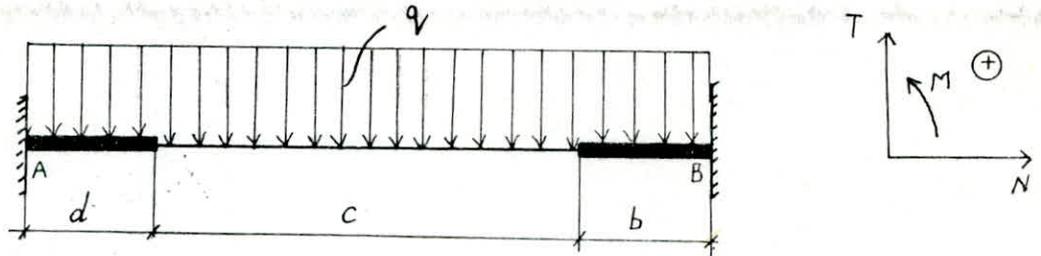
Nous avons :

$$[F'] = \begin{bmatrix} T'_A \\ M'_A \\ T'_B \\ M'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qC\ell/2 \\ qC^2\ell^2/12 \\ qC\ell/2 \\ -qC^2\ell^2/12 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} T_A \\ M_A \\ T_B \\ M_B \end{bmatrix} = [H]^T [F'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qC\ell/2 \\ qC^2\ell^2/12 \\ qC\ell/2 \\ -qC^2\ell^2/12 \end{bmatrix}$$

$$|F| = \begin{bmatrix} qC\ell/2 \\ qC\ell/2 + qC^2\ell^2/12 \\ qC\ell/2 \\ -qC\ell/2 - qC^2\ell^2/12 \end{bmatrix}$$

VII.5.2.2)- CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTIE SUR TOUTE LA POUTRE :



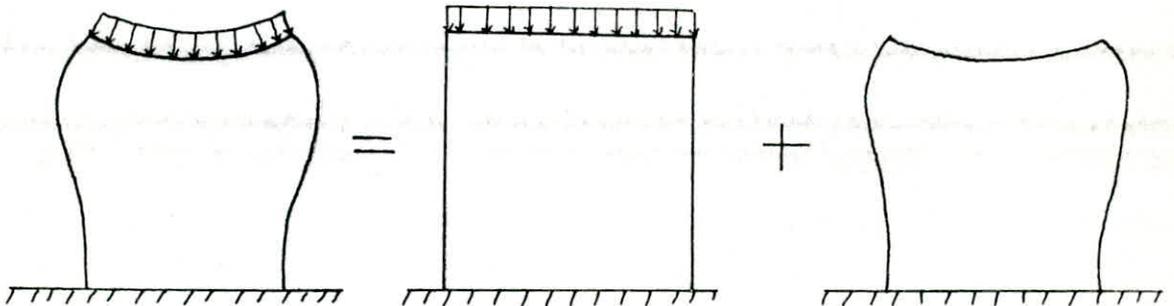
$$[F] = \begin{bmatrix} T_A \\ M_A \\ T_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qC/2 + qd \\ qCd/2 + qC^2/12 + qd^2/2 \\ qC/2 + qb \\ -qCb/2 - qC^2/12 - qb^2/2 \end{bmatrix}$$

VII.6)- METHODE DES DEPLACEMENTS :

VII.6.1)- PRINCIPE DE LA METHODE :

La méthode des déplacements se base sur le principe simple de la superposition des états d'équilibre qui sont les suivants :

Chargement sans déformation + Déformation sans chargement.



Ainsi pour chaque barre de la structure nous pourrons décomposer les efforts réels en la somme de :

- Efforts dûs aux chargements en considérant la barre bi-encastée et chargée.
- Efforts dûs aux déplacements imposés réels sur cette barre.

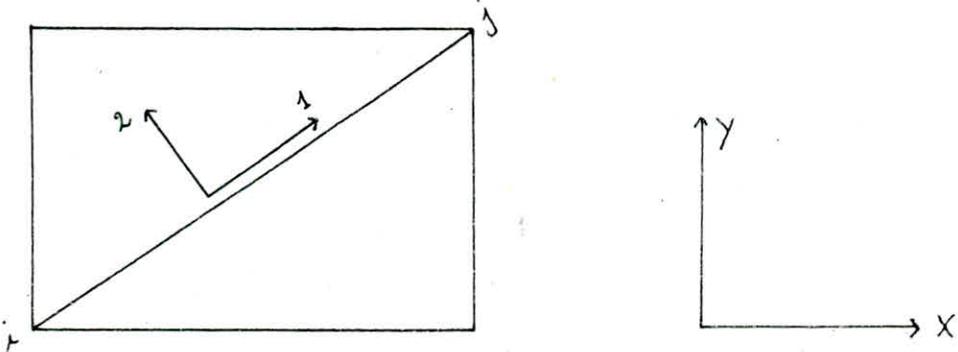


Les efforts $(N_1'' \ T_1'' \ M_1'' \ , \ N_2'' \ T_2'' \ M_2'')$ peuvent être facilement calculés par une méthode énergétique simple telle que celle de Castigliano.

Les efforts $(N_1' \ T_1' \ M_1' \ , \ N_2' \ T_2' \ M_2')$ correspondent eux à des efforts dus à des déplacements imposés aux extrémités de la poutre. Compte tenu des relations explicités ci-dessus, il faut et il suffit donc de connaître les déplacements pour pouvoir calculer les efforts correspondants.

Le but de la méthodes des déplacements sera donc de calculer les déplacements des noeuds, et en appliquant le principe de superposition des états d'équilibre évoqué plus haut, nous en déduirons alors les efforts dans les barres et les réactions d'appuis.

VII.6.2)- MATRICE DE ROTATION :



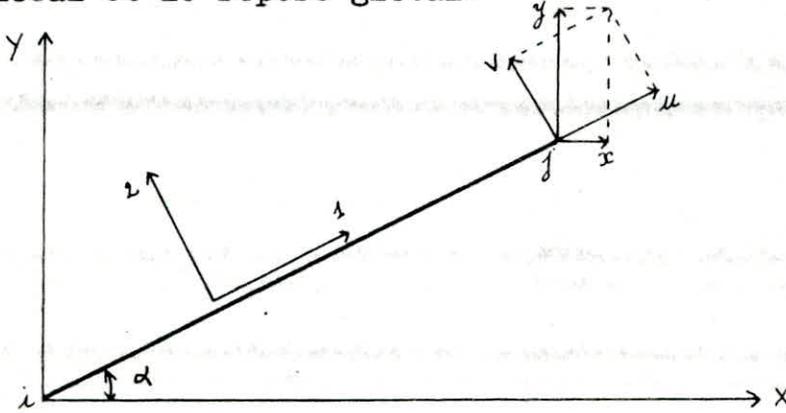
Repère local : C'est le repère lié à la barre, ce repère est défini de la façon suivante :

- Axe 1 parallèle à la barre, et orienté du début (origine) de la barre à la fin (extrémité) de la barre.

- Axe 2 directement perpendiculaire à l'axe 1.

Repère global : C'est le repère lié à la structure, il est désigné par X, Y . Il sert à définir les coordonnées des noeuds. C'est dans ce repère que les réactions d'appuis et les déplacements des noeuds seront donnés.

• Cherchons maintenant la relation liant les déplacements dans le repère local et le repère global.



Cette relation consiste à exprimer une rotation d'angle α d'où on obtient en notant (u, v, φ) les déplacements dans le repère local et (x, y, θ) ceux dans le repère global.

$$\begin{cases} u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\ v = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \\ \varphi = \theta \end{cases}$$

ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

De même les efforts (N, T, M) exprimés dans le repère local se déduiront de la même façon que des efforts (H, V, C) liés au repère global.

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 \\ -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix}$$

Soit :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 \\ -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[R]$ est appelée matrice de rotation de la barre. Les termes de cette matrice sont les cosinus directeurs des axes Oxy dans les axes OXY. En vertu des propriétés des cosinus directeurs, on peut montrer que :

$$[R][R]^T = I \quad \text{donc} \quad [R]^{-1} = [R]^T$$

(Orthogonalité de la matrice $[R]$).

Donc les expressions précédentes peuvent être écrites sous une forme plus simple.

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} = [R]^T \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$$

REMARQUE :

Les matrices de rigidité locale déjà établies au paragraphe VII. peuvent être divisées en quatre sous-matrices :

$$[K] = \begin{bmatrix} k^0 & l^1 \\ l^0 & k^1 \end{bmatrix}$$

où :

k^0, k^1, l^0, l^1 : sont des sous-matrices de dimension 3×3 . Pour déterminer cette matrice complètement il suffit de connaître une des quatre sous-matrices précédentes, les trois autres s'obtiennent ensuite à l'aide de transformations matricielles simples.

D'après la démarche faite au paragraphe VII.4 on remarque que la matrice de base est k^1 . Pour obtenir les autres nous utiliserons deux matrices de transformation que nous noterons : $[T_d]$ et $[T_g]$

avec :

$$[T_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T_g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} [l^1] &= [T_g] [k^1] \\ [k^0] &= [k^1] [T_d] \\ [k^0] &= [l^1] [T_d] \end{aligned}$$

Pour trouver ces matrices dans le repère global on fait la transformation suivante :

$$[k^1] = [R]^T [k^1] [R]$$

VII.6.3)- EQUATIONS D'EQUILIBRE :

En notant $[U_a^i]$ et $[U_a^j]$ les vecteurs déplacements des extrémités d'une barre "a" et $[f_a^i]$ et $[f_a^j]$ les efforts aux extrémités, c'est à dire :

$$[f_a^i] = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{bmatrix} \quad [U_a^i] = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}$$

nous obtenons donc les relations matricielles :

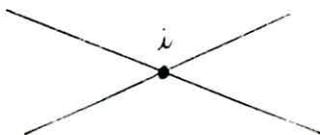
$$\begin{bmatrix} f_a^i \\ f_a^j \end{bmatrix} = [k_a] \begin{bmatrix} U_a^i \\ U_a^j \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} [f_a^i] &= [k_a^i] [U_a^i] + [l_a^i] [U_a^j] \\ [f_a^j] &= [l_a^i] [U_a^i] + [k_a^j] [U_a^j] \end{aligned}$$

Soit un noeud i , auquel arrive un certain nombre de barres.

$$\text{soit } \begin{bmatrix} F_o^i \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_o^i \\ V_o^i \\ C_o^i \\ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{les forces extérieures appliquées sur ce noeud et } [F_a^i] \\ \text{les forces provenant des barres.} \end{array}$$



L'équilibre de ce noeud s'écrit :

$$\begin{cases} H_o^i = \sum_a H_a^i \\ V_o^i = \sum_a V_a^i \\ C_o^i = \sum_a C_a^i \end{cases} \Rightarrow [F_o^i] = \sum_a [F_a^i]$$

$$\text{Or } [F_a^i] = [R_a^i]^T [f_a^i]$$

Et en tenant compte du principe de la superposition des états d'équilibre $[f_a^i]$ peut être décomposé en un terme $[f_a^i]$ dû aux déplacements seuls et un terme $[f_a^i]$ dû aux charges seules, nous obtenons alors :

$$[f_a^i] = [f_a^i] + [f_a^i]$$

$$\text{Or } [f_a^i] = [k_a^i] [U_a^i] + [l_a^j] [U_a^j]$$

et en exprimant les déplacements en fonction du repère global nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} u_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a^i \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} f_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_a^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a^j \end{bmatrix}$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} F_o^i \end{bmatrix} = \sum_a \left(\begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_a^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_a^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a^{i} \end{bmatrix} \right)$$

Les vecteur $\begin{bmatrix} U_a^i \end{bmatrix}$ est le vecteur déplacement du noeud i donc il est identique pour toutes les barres, donc on peut le noter $\begin{bmatrix} U^i \end{bmatrix}$

L'équation précédente devient :

$$\begin{bmatrix} F_o^i \end{bmatrix} = \sum_a \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a^{i} \end{bmatrix} + \left\{ \sum_a \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_a^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U^i \end{bmatrix} + \left\{ \sum_a \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_a^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U^j \end{bmatrix}$$

$$\text{Si on note : } \begin{bmatrix} F^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_o^i \end{bmatrix} - \sum_a \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a^{i} \end{bmatrix}$$

On peut écrire :

$$\left\{ \sum_a \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_a^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U^i \end{bmatrix} + \left\{ \sum_a \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_a^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^i \end{bmatrix}$$

C'est à dire une relation du type :

$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

où : $\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$ est le vecteur force.

$\begin{bmatrix} U \end{bmatrix}$ est le vecteur déplacement des noeuds.

$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}$ étant la matrice de rigidité globale de la structure.

VII.6.4)- FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE LA STRUCTURE :

D'après les relations déjà établies nous avons :

$$\begin{bmatrix} F^i \end{bmatrix} = \left\{ \sum_a \begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_a^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U^i \end{bmatrix} + \sum_a \left(\begin{bmatrix} R_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_a^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^j \end{bmatrix} \right)$$

Une barre "a", ayant le noeud i à une de ses extrémités, fournira en ce noeud deux termes qui sont :

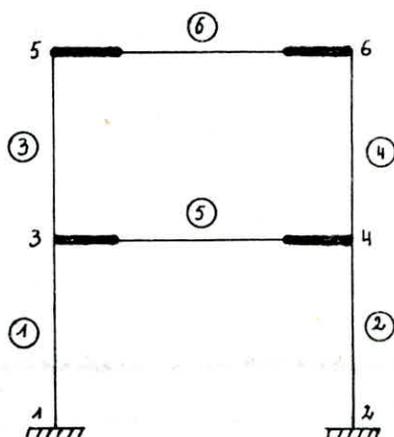
$$\begin{aligned} & [R_a]^T [k_a^i] [R_a] [U^i] \quad \text{qui sera noté } [K_a^i] [U^i] \\ \text{et} & [R_a]^T [l_a^j] [R_a] [U^j] \quad \text{qui sera noté } [L_a^j] [U^j] \end{aligned}$$

Donc pour construire et assembler la matrice rigidité complète de la structure il faudra avant tout calculer pour chacune des barres les sous-matrices $[K_a^i]$, $[K_a^j]$, $[L_a^i]$, $[L_a^j]$ ensuite :

- Additionner les termes $[K_a^i]$ et $[K_a^j]$ à ceux déjà existants.
- Placer les termes $[L_a^i]$ et $[L_a^j]$ à leur position respective.

EXEMPLE :

Soit le portique ci-dessous constitué de 6 noeuds et 6 barres



Ecrivons l'équilibre de chacun des noeuds :

$$(1) [F^1] = [K_1^1] [U^1] + [L_1^3] [U^3]$$

$$(2) [F^2] = [K_2^2] [U^2] + [L_2^4] [U^4]$$

$$(3) [F^3] = \left\{ [K_1^3] + [K_3^3] + [K_5^3] \right\} [U^3] + [L_1^1] [U^1] + [L_3^5] [U^5] + [L_5^4] [U^4]$$

$$(4) [F^4] = \{ [K_2^4] + [K_4^4] + [K_5^4] \} [U^4] + [L_2^2] [U^2] + [L_4^6] [U^6] + [L_5^3] [U^3]$$

$$(5) [F^5] = \{ [K_3^5] + [K_6^5] \} [U^5] + [L_3^3] [U^3] + [L_6^6] [U^6]$$

$$(6) [F^6] = \{ [K_4^6] + [K_6^6] \} [U^6] + [L_4^4] [U^4] + [L_6^5] [U^5]$$

d'où la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^4 \\ F^5 \\ F^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^1 & 0 & L_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2^2 & 0 & L_2^4 & 0 & 0 \\ L_1^1 & 0 & K_1^3 + K_3^3 + K_5^3 & L_5^4 & L_3^5 & 0 \\ 0 & L_2^2 & L_5^3 & K_2^4 + K_4^4 + K_5^4 & 0 & L_4^6 \\ 0 & 0 & L_3^3 & 0 & K_3^5 + K_6^5 & L_6^6 \\ 0 & 0 & 0 & L_4^4 & L_6^5 & K_4^6 + K_6^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

REMARQUES : on constate que :

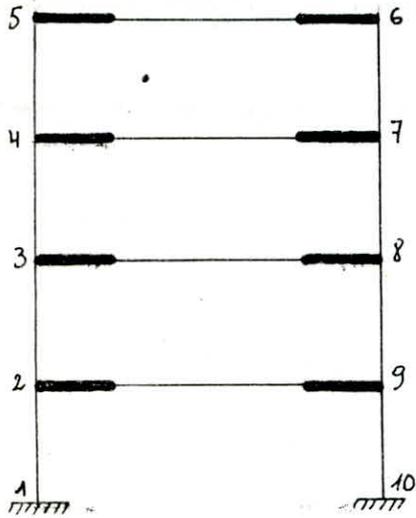
- Au noeud i, les termes en $[K_a^i]$ s'ajoutent.
- La présence d'un facteur non nul pour le terme $[U^j]$ indique la présence d'une barre ij et réciproquement.

VII.6.5)- INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NOEUDS :

Il apparait de ce qui précède que la numérotation des noeuds est arbitraire pour la formation de la matrice de rigidité. Toutefois, cette numérotation conditionne la forme de cette matrice. La matrice globale peut donc être une matrice bande et les gains en capacité du programme et en temps de résolution peuvent être considérables.

Cette notion de numérotation des noeuds peut-être illustrée par l'exemple suivant :

EXEMPLE : Soit le portique suivant :

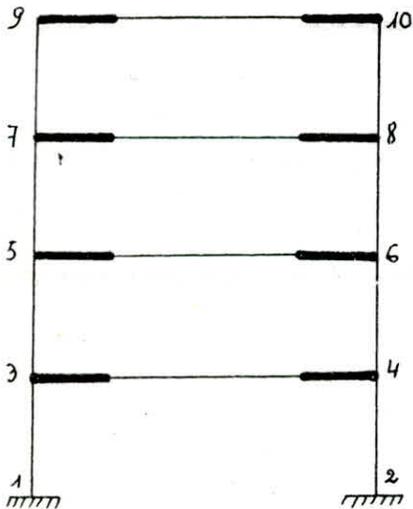


| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | x | x | | | | | | | | |
| 2 | x | x | x | | | | | | x | |
| 3 | | x | x | x | | | | x | | |
| 4 | | | x | x | x | | x | | | |
| 5 | | | | x | x | x | | | | |
| 6 | | | | | x | x | x | | | |
| 7 | | | | x | | x | x | x | | |
| 8 | | | x | | | | x | x | x | |
| 9 | | x | | | | | | x | x | x |
| 10 | | | | | | | | | x | x |

= Matrice 3x3 nulle.

= Matrice 3x3 non nulle.

Cette numérotation est mauvaise : les liaisons horizontales donnent des termes hors-diagonale. Après réarrangement en fonction des appuis, on aura à résoudre un système linéaire complet. La numérotation ci-dessous est meilleur (c'est d'ailleurs la meilleure possible).



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | x | | x | | | | | | | |
| 2 | | x | | x | | | | | | |
| 3 | x | | x | x | x | | | | | |
| 4 | | x | x | x | | x | | | | |
| 5 | | | x | | x | x | x | | | |
| 6 | | | | x | x | x | | x | | |
| 7 | | | | | x | | x | x | x | |
| 8 | | | | | | x | x | x | | x |
| 9 | | | | | | | x | | x | x |
| 10 | | | | | | | | x | x | x |

VII.6.6)- PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

La matrice de rigidité présente quelques particularités, dont certaines sont très intéressantes, surtout du point de vue économie de mémoire:

a)- [K] est une matrice symétrique :

Soit une structure soumise à deux cas de chargements, sous le premier chargement nous avons :

$$[F1] = [K] [U1]$$

Sous le second chargement nous avons :

$$[F2] = [K] [U2]$$

Le théorème de Maxwell-Betti peut s'écrire :

$$[F1]^T [U2] = [F2]^T [U1] \quad (\text{Conservation du travail})$$

soit :

$$[F1]^T [U2] = [U1]^T [F2]$$

$$[F1]^T [U2] = [U1]^T [K]^T [U2]$$

$$[U1]^T [F2] = [U1]^T [K] [U2]$$

Nous aurons :

$$[U1]^T [K] [U2] = [U1]^T [K]^T [U2]$$

Soit :

$$[K] = [K]^T$$

La matrice de rigidité globale est donc symétrique.

b)- [K] est une matrice bande :

La structure de bande de la matrice $[K]$ est une caractéristique importante de la méthode des déplacements. Elle permet des économies tout au niveau du stockage de la matrice que de la résolution du système d'équation final. La largeur de bande LB dépend de la bonne ou mauvaise numérotation des noeuds. Elle est donnée par :

$$LB = 3 \times (\text{Max} |j - i| + 1)$$

j et i étant les deux noeuds d'une barre "a".

c)- K est définie positive :

L'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} [U]^T [K] [U] \quad \text{avec} \quad [U]^T [K] [U] > 0$$

Soient : **VAL** : Les valeurs propres associées à [K]
VEC : Les vecteurs propres associés.

On a : $[VEC]^T [K] [VEC] > 0$ ou $[VEC]^T [VAL] [VEC] > 0$
 donc : $[VAL] > 0$

Tous les déterminants réduits sont positifs, par conséquent la matrice est définie positive.

Cette propriété nous laisse un large choix des méthodes de résolutions : méthodes itératives (GAUSS-SEIDEL), méthode de CHOLESKY ...

VII.6.7)- METHODES DE STOCKAGE DE LA MATRICE [K] :

Il existe différentes méthodes de stockage de la matrice de rigidité, la plus part de ces méthodes se basent sur les propriétés de cette matrice (symétrie, bande).

a)- Matrice pleine non symétrique :

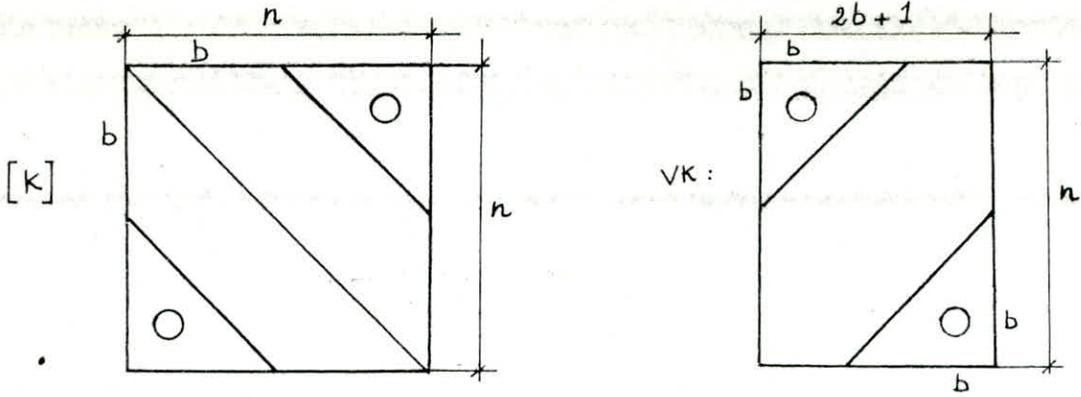
Dans ce cas la matrice est stockée entièrement **sans** tenir compte de ses propriétés (symétrie, bande), elle occupera alors -si elle est de dimension $n \times n$ - n^2 nombres (ou mots) réels en mémoire d'ordinateur.

b)- Matrice pleine symétrique :

Il suffit de stocker le triangle supérieur de la matrice, dans ce cas il faut stocker $n(n + 1)/2$ mots réels.

c)- Matrice bande non symétrique :

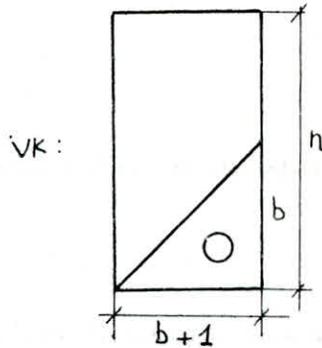
Nous stockons la matrice "redressée" dans une table rectangulaire VK de dimension $n(2b + 1)$:



Il faut stocker $n(2b + 1)$ mots réels, incluant $b(b + 1)$ valeurs nulles inutiles.

d)- Matrice bande symétrique :

Dans ce cas :



Il faut stocker $n(b + 1)$ mots réels, incluant $b(b + 1)/2$ valeurs nulles inutiles.

e)- Matrice à ligne de ciel nansymétrique :

La méthode de stockage la plus efficace pour les matrices globales est la méthode de la "ligne de ciel". Elle consiste à stocker les termes de K par lignes et colonnes de longueurs variables.

La ligne de ciel est l'enveloppe des sommets des colonnes de hauteurs variables.

EXEMPLE :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

f)- Matrice à ligne de ciel symétrique :

Le stockage est identique à celui d'une matrice **non** symétrique pour la diagonale et le **triangle** supérieur.

VII.6.8)- VECTEUR FORCE DE LA STRUCTURE :

Nous avons donc vu que nous pouvions calculer la matrice $[K]$ du système d'équation $[F] = [K][U]$. Il nous reste donc à calculer le vecteur $[F]$ qui représente l'ensemble des forces.

Lors de l'écriture de l'équation d'équilibre des noeuds, nous avons vu que le terme $[F^i]$ se décomposait sous la forme :

$$[F^i] = [F_o^i] - \sum_a [F_a''^i]$$

- Le terme $[F_o^i]$ représente les forces extérieures appliquées au noeud, ces forces sont soit des actions ponctuelles connues exercées sur des noeuds non appuis, soit les réactions d'appuis. Ainsi le terme $[F_o^i]$ est connu pour les noeuds non appuis et **inconnu** pour les noeuds appuis.

- Le terme $[F_a''^i] = [R_a]^T [f_a''^i]$ représente les forces résultant des charges appliquées sur les barres en les considérant sans déplacements. Ce terme est calculé en considérant la barre isolée de la structure et encastrée à ses deux extrémités et cela à l'aide d'une méthode de résistance des matériaux.

Donc le vecteur $[F^i]$ est parfaitement déterminé pour tous les noeuds non appuis (dont on cherche les déplacements). Les réactions d'appuis seront calculées à partir de déplacements des autres noeuds.

VII.6.9)- CONDITIONS AUX LIMITES :

La matrice de rigidité de la structure est l'assemblage des matrices de rigidité des barres, or nous avons vu que le vecteur force était **complètement** déterminé pour tous les noeuds non appuis et que par contre il était encore **inconnu** pour les noeuds appui, au contraire les déplacements des noeuds appuis sont connus, pour la résolution du sys-

tème, une modification de la matrice de rigidité $[K]$ et du vecteur $[F]$ sont indispensables.

Il existe différentes méthodes de mener à bien cette modification.

a)- Méthode du terme diagonal dominant :

Elle consiste à ajouter aux termes diagonaux de la matrice $[K]$ correspondants aux noeuds fixés un nombre très grand par rapport à tous les termes K_{ij} , ce qui revient à remplacer :

- K_{ii} par $K_{ii} + \alpha$
- F_i par $\alpha \cdot U_i$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} + \alpha & \dots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \alpha \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

l'équation i s'écrit :

$$\alpha U_i + \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j \right) = \alpha \bar{U}_i$$

Elle admet la solution approchée :

$$U_i \approx \bar{U}_i \quad \text{si} \quad \alpha \bar{U}_i \gg \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j$$

Le terme α est choisit selon la précision de l'ordinateur, ceci conduit à une erreur sur U_i qui est du même ordre que la précision de l'ordinateur.

b)- Méthode du terme unité sur la diagonal :

Elle consiste à remplacer les lignes et les colonnes correspondants aux noeuds appuis par des zéro "0", en mettant toutefois la valeur de un "1" pour le terme diagonal (afin d'éviter que la matrice ne soit singulière), ce qui revient à modifier, par chaque relation

$U_i = \bar{U}_i$ le vecteur $[F]$ puis la matrice $[K]$.

$$F_j = F_j - K_{ji} \cdot \bar{U}_i \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i$$

$$F_i = \bar{U}_i$$

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i$$

$$K_{ii} = 1$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} \cdot \dots \cdot K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} \cdot \dots \cdot K_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{i-1,1} & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & K_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ K_{i+1,1} \cdot \dots \cdot K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} \cdot \dots \cdot K_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} \cdot \dots \cdot K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} \cdot \dots \cdot K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{1i} \cdot \bar{U}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{i-1} - K_{i-1i} \cdot \bar{U}_i \\ \bar{U}_i \\ F_{i+1} - K_{i+1i} \cdot \bar{U}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n - K_{ni} \cdot \bar{U}_i \end{bmatrix}$$

Cette méthode ne pose pas les problèmes numériques de la précédente, par contre elle est plus complexe à programmer.

c)- Méthode de suppression des équations :

Elle consiste à restructurer la matrice $[K]$ de manière à supprimer les équations correspondants aux degrés de liberté imposés U_i .

Elle a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système.

Cela revient à résoudre les deux systèmes suivants :

$$[K_r] [U] = [F]$$

$$[KR][U] = [FR]$$

Avec :

$[K_r]$: Matrice de rigidité de la structure réduite en supprimant de $[K]$ les colonnes relatives aux déplacements imposés nuls.

$[KR]$: Matrice formée des colonnes extraites de $[K]$.

$[FR]$: Vecteur groupant les réactions d'appuis.

d)- Méthode de réarrangement du système :

Elle consiste à réarranger $[K]$ afin de diviser le système d'équations en deux sous-systèmes : l'un correspondant aux noeuds non appuyés et l'autre aux noeuds appuyés, ce qui se traduit, au niveau de la matrice, par une permutation de lignes et de colonnes :

Nous avons alors :

$$\begin{bmatrix} K1 & K12 \\ K21 & K2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$[U1]$: Vecteur déplacement de tous les noeuds non appuyés (inconnu).

$[U2]$: Vecteur déplacement des noeuds appuyés (connu, $[U2] = [0]$).

$[F1]$: Vecteur force des noeuds non appuyés parfaitement déterminé.

$[F2]$: Vecteur force des noeuds appuyés (partiellement connu).

La résolution se fait donc en deux étapes :

- Détermination de $[U1]$ à partir de $[K1][U1] = [F1]$
- Détermination de $[F2]$ à partir de $[K2][U1] = [F2]$

VII. 6.10)- RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES :

L'équation d'équilibre de la structure s'écrit : $[K][U] = [F]$ en tenant compte des conditions d'appuis ce système s'écrit $[K_1][U_1] = [F_1]$ où $[K_1]$ et $[F_1]$ sont parfaitement connus et $[U_1]$ est totalement inconnu.

Pour trouver le vecteur $[U_1]$ on doit résoudre le système d'équations linéaires $[K_1][U_1] = [F_1]$ de dimension $n \times n$. Il existe plusieurs méthodes de résolution qui sont classées en trois groupes.

- Inversion de la matrice.
- Méthodes directes.
- Méthodes indirectes (itératives).

1)- INVERSION DE LA MATRICE :

Le vecteur $[U_1]$ est donné par : $[U_1] = [K_1]^{-1}[F]$.

La méthode d'inversion nécessite un grand nombre d'opérations, qui pour un petit système ($n=10$), le nombre d'opération est à peu près égal à 3.10^9 . Ainsi cette méthode est impraticable au sens du temps de calcul ; de plus, l'erreur cumulée d'arrondi croissant avec le nombre d'opérations, la précision des résultats resterait extrêmement douteuse pour les systèmes moyens et grands.

2)- METHODES DIRECTES :

Parmi ces méthodes on cite :

- La méthode de GAUSS :

Cette méthode consiste à exprimer successivement chacune des inconnues en fonction des autres puis remplacer dans les autres équations cette inconnue par l'expression obtenue.

On commence par la 1^{ère} équation et on élimine chaque fois une inconnue jusqu'à la dernière équation qui nous donne x_n . Il s'agit d'une suite d'opérations qui transforment le système $[K_1][U_1] = [F_1]$ en un système équivalent $[K'_1][U_1] = [F'_1]$ ou $[K'_1]$ est une matrice triangulaire supérieure.

L'algorithme de GAUSS :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - (a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = k, \dots, n+1 \end{cases}$$

- La méthode de CHOLEVSKI :

Cette méthode s'applique parfaitement aux matrices symétriques définies positives. La matrice $[K_1]$ est décomposée en un produit d'une matrice triangulaire inférieure $[L]$, une matrice diagonale $[D]$ et une matrice supérieure $[L]^T$:

$$[K_1] = [L][D][L]^T$$

L'algorithme de CHOLEVSKI :

$$\begin{aligned}
 l_{ii} &= 1 \\
 d_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_{kk} & i = 1, n \\
 l_{ji} &= \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot l_{jk} \right) & j = i+1, n
 \end{aligned}$$

La résolution du système $[K_1] [U_1] = [F_1]$ passe par trois étapes :

$$[K_1] = [L] [D] [L]^T, \quad [L] [D] [L]^T [U_1] = [F_1]$$

On pose $[K] [L]^T [X] = [Y]$ et $[Z] = [L]^T [X]$

$[L] [Y] = [B]$, résolution d'un système triangulaire inférieur.

$[D] [Z] = [Y]$, résolution d'un système diagonal.

$[L]^T [X] = [Z]$, résolution d'un système triangulaire supérieur.

Entre les deux méthodes citées on préfère celle de CHOLEVSKI pour résoudre le système $[K_1] [U_1] = [F_1]$ car elle tient compte de la propriété de symétrie de la matrice $[K_1]$, ce qui implique des résultats plus précis que ceux donnés par la méthode de GAUSS. A la différence de la méthode de GAUSS la méthode de CHOLEVSKI ne touche pas le second membre du système linéaire ainsi on peut résoudre celui-ci pour plusieurs cas de chargements.

3)- METHODES ITERATIVES :

Parmis ces méthodes on citera la méthode de GAUSS-SEIDEL.

Principe :

La matrice $[K_1]$ étant décomposée en :

$$K_1 = (D - L) - R = M - N$$

D : Matrice diagonale.

L : Matrice triangulaire inférieure.

R : Matrice triangulaire supérieure.

$$[K_1] [U_1] = [F_1] \rightarrow K_1 U_1 = F_1$$

$$((D - L) - R) U_1 = F_1 \quad (D - L) U_1^{(k+1)} = R U_1^{(k)} + F_1$$

$$D U_1^{(k+1)} = L U_1^{(k+1)} + R U_1^{(k)} + F_1$$

$$U_1^{(k+1)} = D^{-1} L U_1^{(k+1)} + D^{-1} R U_1^{(k)} + D^{-1} F_1$$

Développons cette récurrence vectorielle :

$$\begin{aligned}
 U_1^{(k+1)} &= \left[f_1 - K_{12}U_2^{(k)} - K_{13}U_3^{(k)} - \dots - K_{1n}U_n^{(k)} \right] / K_{11} \\
 U_2^{(k+1)} &= \left[f_2 - K_{21}U_1^{(k+1)} - K_{23}U_3^{(k)} \dots - K_{2n}U_n^{(k)} \right] / K_{22} \\
 &\vdots \\
 U_n^{(k+1)} &= \left[f_n - K_{n1}U_1^{(k+1)} - K_{n2}U_2^{(k+1)} \dots - K_{n,n-1}U_{n-1}^{(k+1)} \right] / K_{nn}
 \end{aligned}$$

Algorithme :

Résumons l'algorithme de GAUSS-SEIDEL :

1. $U_i^{(k+1)} = \left[f_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}U_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij}U_j^{(k)} \right] / K_{ii} \quad i=1, n$
2. Arrêter si $\left| U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)} \right| < \varepsilon_1$
 ou $\left| U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)} \right| / \left| U_i^{(k+1)} \right| < \varepsilon_2$
 $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$

Les méthodes itératives sont employées pour la résolution des grands systèmes ($n > 100$) car la matrice ($[K_1]$) n'étant pas transformée au cours des calculs, le problème de l'accumulation des erreurs devient moins crucial. S'il y a convergence, la solution ne pourrait donc être atteinte qu'après un nombre infini d'itérations ce qui signifie que l'approximation de la solution se fera avec la précision voulue. Au contraire, les méthodes directes sont employées pour la résolution des petit ($n < 20$) et moyens systèmes ($n < 100$). Avec les méthodes directes, l'erreur sur le résultat croît avec le nombre d'opérations. Ainsi une méthode directe conduisant à une solution en un nombre fini d'étapes, sans les erreurs d'arrondi, cette solution serait celle du système.

Dans le cadre de notre projet on préfère la méthode itérative par rapport à la méthode directe car la dimension de la matrice $[K_1]$ peut dépasser la centaine.

VII.6.11)- CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES :

Pour calculer les efforts dans les barres il suffit de reprendre le principe de superposition des états d'équilibre :

- Charges sur la barre sans déplacements des extrémités.
- Déplacements des extrémités sans charge sur la barre.

Ce principe peut être exprimé par l'égalité :

$$[f_a] = [f'_a] + [f''_a]$$

et ceci pour les deux extrémités i et j de la barre, avec :

$[f''_a]$: Les charges sur la barre **sans** déplacement des extrémités, ce terme est calculé sans difficultés.

Les déplacements des noeuds i et j (connus à ce stade) peuvent être exprimés dans le repère local par :

$$[U_a^i] = [R_a] [U^i]$$

$$[U_a^j] = [R_a] [U^j]$$

d'où le terme $[f'_a]$ qui est donné par :

$$[f'_a{}^i] = [k_a^i] [R_a] [U^i] + [l_a^j] [R_a] [U^j]$$

et
$$[f'_a{}^j] = [k_a^j] [R_a] [U^j] + [l_a^i] [R_a] [U^i]$$

Ainsi les efforts dans les **barres** sont complètement déterminés :

$$[f_a^i] = [k_a^i] [R_a] [U^i] + [l_a^j] [R_a] [U^j] + [f_a''^i]$$

et
$$[f_a^j] = [k_a^j] [R_a] [U^j] + [l_a^i] [R_a] [U^i] + [f_a''^j]$$

VII.6.12)- CALCUL DES REACTIONS D'APPUI :

Une fois les efforts dans toutes les barres sont complètement déterminés, les réactions d'appuis s'obtiennent par application du prin-

cipe de l'action et de la réaction. L'équilibre du noeud donne donc :

$$\begin{bmatrix} F \\ O \end{bmatrix}^i = \sum_a [R_a]^T [f_a]^i$$

Avec :

$\begin{bmatrix} F \\ O \end{bmatrix}^i$: Vecteur réaction du noeud i.

$[R_a]$: Matrice de rotation pour la barre i.

Cette méthode nous permet de calculer les réaction pour les noeuds appuis, et sert de vérification pour les noeuds non appuis, c'est à dire que pour les noeuds non appuis nous trouvons les forces qui leurs étaient directement appliquées.

CHAP VIII-APPLICATION A L'INFORMATIQUE

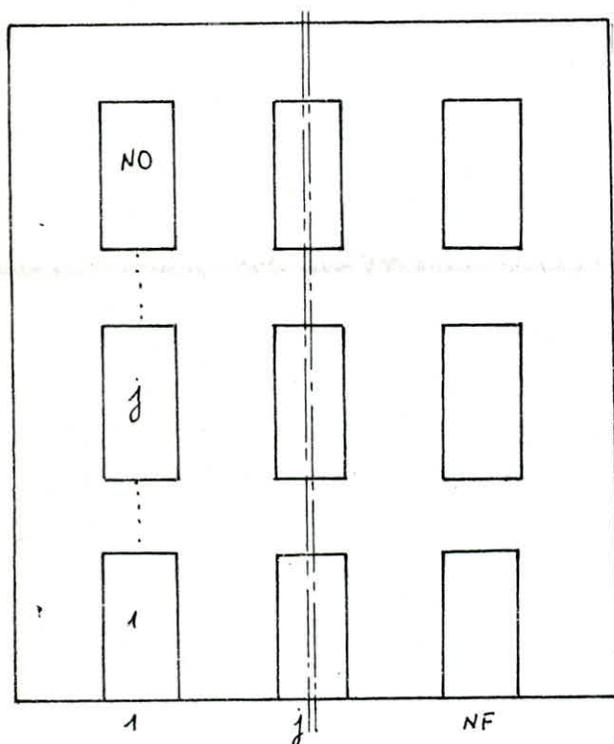
VIII.1)- INTRODUCTION :

Le but de ce chapitre est d'expliquer les différentes phases de la mise en oeuvre de la méthode des déplacements au niveau de la programmation, ainsi que de son application pour le calcul des voiles.

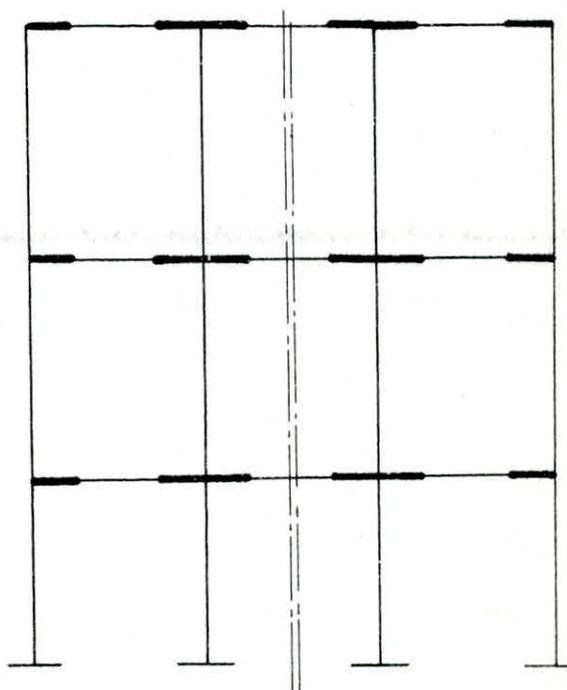
VIII.2)- DEFINITION DES DIFFERENTES VARIABLES :

D'après le chapitre VII on sais que le voile est modelisé en portique, c'est à dire en un assemblage de poutres et poteaux supposés être concentrés dans les lignes moyennes des trumeaux et des linteaux.

Pour définir les différentes variables utilisées dans les différents programmes, considérons un voile ayant NF files d'ouvertures et NO ouvertures en élévation.



Voile



Modélisation du voile

VIII.2.1)- VARIABLES RELATIVES AUX NOEUDS :

Les noeuds sont numérotés automatiquement de gauche à droite et de bas en haut.

a)- Nombre de noeuds NN : Par une relation de récurrence nous avons établie la formule donnant NN en fonction de NF et NO.

$$NN = (NF + 1) \times (NO + 1)$$

b)- Coordonnées des noeuds : Chaque noeud est repéré par son abscisse x et son ordonnée y qui sont calculées automatiquement en fonction des caractéristiques géométriques du voile.

c)- Code appui des noeuds : On définit un tableau APP(i) qui nous permet de savoir si le noeud est un appui ou non.

APP(i) = 0 si le noeud est appui.

APP(i) = 1 si le noeud n'est pas appui.

On peut remarquer d'après la numérotation des noeuds, que les noeuds allant de 1 à NF + 1 sont des appuis et les autres non.

VIII.2.2)- VARIABLES RELATIVES AUX BARRES :

Les barres sont numérotés automatiquement et cela en commençant par les poteaux puis les poutres. Le sens de numérotation est de gauche à droite et de bas en haut.

a)- Nombre de barres NB : Il est donné par :

$$NB = N_{\text{poteaux}} + N_{\text{poutres}}$$

Avec :

$$N_{\text{poutres}} = NF \times NO$$

$$N_{\text{poteaux}} = (NF + 1) \times NO$$

b)- Caractéristiques des barres : Chaque barre i est caractérisée par le numéro de son noeud début DEB(i), et le numéro de son noeud final FIN(i).

En ce qui concerne les caractéristiques géométriques des barres on prend comme section et inertie des poteaux celles des trumeaux, et comme section et inertie des poutres celles des linteaux, d'où les variables SECT(i) et INE(i).

La longueur des poutres est calculée en faisant la différence entre l'abscisse du noeud final et l'abscisse du noeud début, pour la longueur des poteaux, elle est calculée en faisant la différence entre l'ordonnée du noeud final et l'ordonnée du noeud début, d'où la variable $LON(i)$.

VII.2.3)- VARIABLES RELATIVES AUX CHARGES :

Les charges qui seront définies dans ce paragraphe sont soit appliquées directement aux noeuds soit appliquées sur les barres.

On définit :

NC : Nombre de charges élémentaires; la charge est reperée par un indice i .

ELE(i) : Numéro de l'élément soumis à la charge i .

CHA(i) : Valeur de la charge i .

CAS(i) : Cas de chargement, il prend les valeurs :

1 : Charge permanente du plancher.

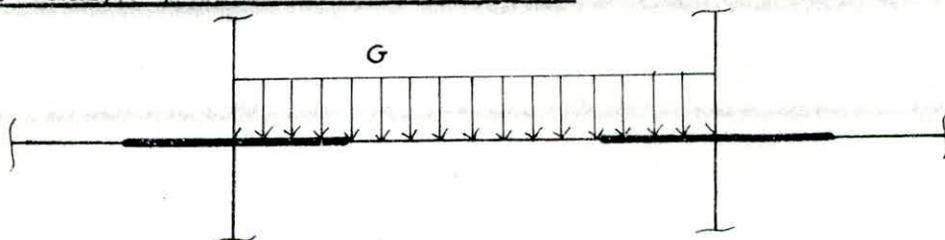
2 : Poids propre du linteau.

3 : Poids propre du poteaux.

4 : Surcharge du plancher.

5 : Charge sismique.

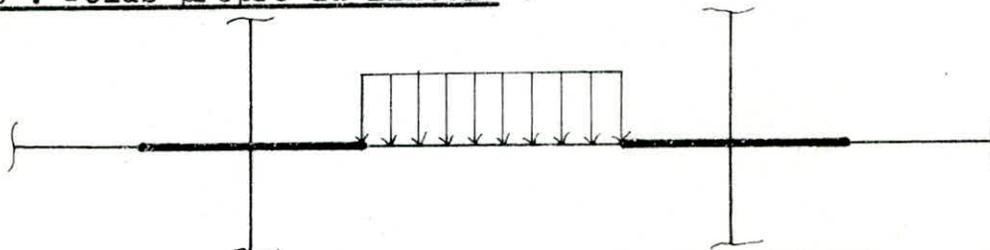
1^{er} Cas : Charge permanente du plancher :



Cette charge est uniformément répartie sur les poutres. Sa valeur est :

$$CHA(i) = G$$

2^{eme} Cas : Poids propre du linteau :



Cette charge est uniformément répartie sur la partie flexible de la

poutre (linteau).

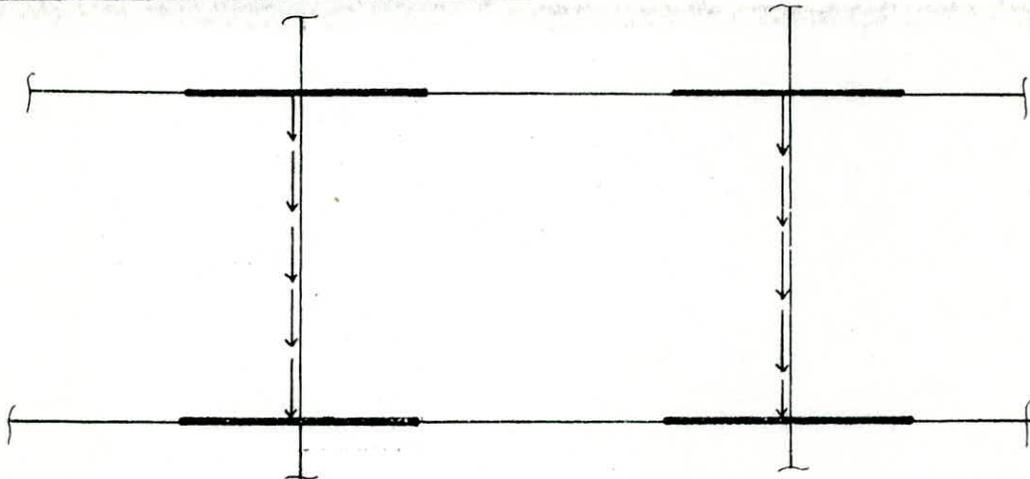
$$CHA(i) = SECT \times MV$$

Avec :

SECT : Section du linteau.

MV : Masse volumique du béton armé.

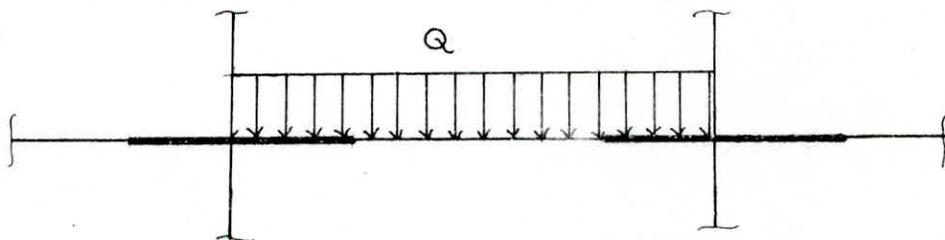
3^{eme} Cas : Poids propre du poteau :



Cette charge est uniformément répartie normalement au poteau (trumeau)

$$CHA(i) = SECT \times MV.$$

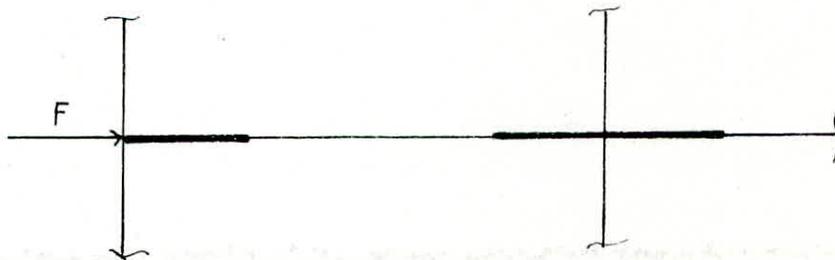
4^{eme} Cas : Surcharge du plancher :



Cette charge est uniformément répartie sur les poutres.

$$CHA(i) = Q.$$

5^{eme} Cas : Charge sismique :



C'est une charge appliquée au niveau des noeuds de rive donc c'est une charge nodale.

$$CHA(i) = F$$

VIII.2.4)- MATRICES DE RIGIDITE :

C'est dans cette phase que le calcul proprement dit est entamé.

La formation de la matrice de rigidité de la structure passe par les étapes suivantes :

1- Calcul de la matrice de rotation.

On distingue :

- Matrice de rotation des poteaux, avec $\alpha = 90^\circ$.
- Matrice de rotation des poutres, avec $\alpha = 0^\circ$.

Les éléments de cette matrice sont rangés dans le tableau ROT(9,i) avec i, le numéro de la barre.

2- Calcul de la matrice de rigidité **inférieure** droite.

On distingue :

- Matrice de rigidité des poteaux.
- Matrice de rigidité des poutres avec extrémités infiniment rigide.

Les éléments de cette matrice sont rangés dans un tableau RIG(9,i) avec i le numéro de la barre.

3- Assemblage de la matrice de rigidité de la structure.

Dans cette étape on assemble les différentes matrices de rigidité des barres de façon à construire la matrice de rigidité complète de la structure. La matrice de rigidité de la barre s'écrit :

$$[K] = \begin{bmatrix} [k^0] & [1^1] \\ [1^0] & [k^1] \end{bmatrix}$$

Pour obtenir les sous-matrices $[1^0]$, $[1^1]$, $[k^0]$ à partir de la sous-matrice $[k^1]$ on utilise les matrices transfert que nous notons $[T_d]$ et $[T_g]$ et qui ont été définie ultérieurement.

d'où :

$$[1^1] = [T_g] [k^1]$$

$$[l^0] = [k^1] [Td]$$

$$[k^0] = [l^1] [Td]$$

Ensuite ces différentes matrices seront calculées dans le repère global par la transformation suivante :

$$[K^1] = [R]^T [k^1] [R]$$

$$[L^1] = [R]^T [l^1] [R]$$

$$[L^0] = [R]^T [l^0] [R]$$

$$[K^0] = [R]^T [k^0] [R]$$

Enfin ces sous matrices seront ajoutées dans la matrice de rigidité de la structure.

Chaque barre est repérée par les numéros DEB et FIN de ses extrémités, la matrice de rigidité de la barre est :

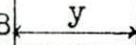
| | DEB | FIN |
|-----|-------|-------|
| DEB | K^0 | L^1 |
| FIN | L^0 | K^1 |

Les sous-matrices K^0 et K^1 caractérisent les efforts produit par des déplacements unités en un noeud de la barre.

Les sous-matrices L^0 et L^1 caractérisent les efforts produit en un noeud de la barre par des déplacements unités dans l'autre noeud.

L'emplacement des sous-matrices de la barre dans la matrice globale est définis à l'aide des numéro DEB et FIN. L'exemple ci-dessous illustre l'injection de la matrice K^0 dans la matrice globale.

La sous-matrice K^0 est de dimension 3×3 .

| | DEB | FIN |
|-----|--|-------|
| |  | |
| DEB |  K^0 | L^1 |
| | | |
| FIN | L^0 | K^1 |
| | | |

$$x = 3 \times (\text{DEB} - 1)$$

$$y = 3 \times (\text{DEB} - 1)$$

$$I = 1 \text{ à } 3$$

$$J = 1 \text{ à } 3$$

$$I1 = x + I$$

$$J1 = y + J$$

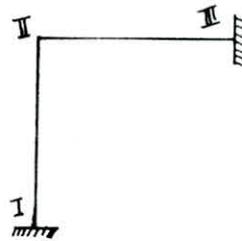
$$KA(I1, J1) = KA(I1, J1) + K_0(I, J)$$

J Suivant

I suivant

Compte tenu que la matrice globale est bande et symétrique l'injection des sous-matrices de l'ensemble des barres constituant la structure se fera dans la matrice demi-bande de dimension (N, LB) , N étant le nombre de degrés de liberté de la structure, LB la largeur de bande.

Considérons l'exemple suivant :



| | I | | | II | | | III | | |
|---------|---|---|---|----|---|---|-----|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| I { 1 | • | | | | | | | | |
| 2 | | • | | | | | | | |
| 3 | | | • | | | | | | |
| II { 4 | | | | • | | | | | |
| 5 | | | | | • | | | | |
| 6 | | | | | | • | | | |
| III { 7 | | | | | | | • | | |
| 8 | | | | | | | | • | |
| 9 | | | | | | | | | • |

Matrice A

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|
| • | | | | | |
| • | • | | | | |
| • | • | • | | | |
| • | • | • | • | | |
| • | • | • | • | • | |
| • | • | • | • | • | |
| • | • | • | • | • | |
| • | • | • | • | • | |
| • | • | • | • | • | |
| • | • | • | • | • | |

$N = 9$

$LB = 6$

Matrice B

Le terme (i,j) de la matrice B correspond au terme (I,J) de la matrice A si :

$$\begin{cases} i = I \\ i = J - I + 1 \\ J \geq I \end{cases}$$

Pour injecter par exemple une sous-matrice K^0 dans la demi-matrice bande, on considère cette correspondance

$$x = 3 \times (\text{DEB} - 1)$$

$$y = 3 \times (\text{DEB} - 1)$$

$$I1 = 1 \text{ à } 3$$

$$J1 = 1 \text{ à } 3$$

$$I = x + I1$$

$$J = y + J1$$

$$\text{Si } J \geq I \text{ et } J \leq \text{LB} - 1 + I \text{ alors } KA(I, J-I+1) = KA(I, J-I+1) + K^0(I1, J1)$$

J1 Suivant

I1 Suivant.

VIII.2.5)- CALCUL DU VECTEUR FORCES :

Ce vecteur se compose de deux termes : un terme dû aux forces appliquées directement aux noeuds et un terme dû aux forces appliquées sur les barres.

$$[F] = [FN] + [FB]$$

Avec :

$[FN]$: Vecteur des forces appliquées directement aux noeuds.

$[FB]$: Vecteur des forces appliquées aux barres.

Les forces appliquées sur les barres seront transformées en forces nodales.

Nous avons vu dans le paragraphe 3 qu'il y avait cinq cas de chargement, pour les quatre premiers, nous avons calculés dans le chapitre VII.5 les réactions nodales. Pour transformer ces réactions nodales en forces nodales il faut multiplier les vecteurs réaction par le scalaire (-1)

Les forces nodales sont calculées dans le repère local et ajoutées au terme $[FB]$, puis après rotation elles sont introduites dans le terme $[FN]$.

Les forces appliquées aux noeuds sont en général exprimées dans le repère global c'est pourquoi elles seront, directement, ajoutées au vecteur $[FN]$.

VIII.2.6)- CONDITIONS AUX LIMITES :

Dans le chapitre VII.6.9 nous avons exposé quatre méthodes de prise en compte des conditions aux limites, nous avons choisis la méthode du terme unité sur la diagonale.

Pour tenir compte des conditions aux limites, la démarche suivie est :

- Faire un test si le noeud est appui.

Si oui

- Mise à zéro des éléments lignes et colonnes.
- Mise de 1 sur la diagonale.
- Mise de zéro sur l'élément de $[F]$.

Considérons l'exemple pris précédemment :

| | | I | | | II | | | III | | |
|-----|---|---|---|---|----|---|---|-----|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| I | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | 4 | 0 | 0 | 0 | X | X | X | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | X | X | X | 0 | 0 | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | X | X | X | 0 | 0 | 0 |
| III | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Matrice A

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| 4 | | | | 0 | 0 | 0 |
| 5 | | | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | | 0 | 0 | 0 | | |
| 7 | 1 | 0 | 0 | | | |
| 8 | 1 | 0 | | | | |
| 9 | 1 | | | | | |

Matrice B

Algorithme de prise en compte des conditions d'appuis.

Si le noeuds est appuis

| | |
|-----------------------------|---|
| I1 = 1 à 3 | |
| Si $x + I1 < LB$ | |
| J1 = 1 à LB | |
| KA(x + I1, J1) = 0 | Mise à zéro de la ligne $x + I1$ |
| Si $x + I1 > LB$ | |
| J1 = 1 à LB | |
| KA(x + I1, I1) = 0 | Mise à zéro de la ligne $x + I1$ |
| KA(x + I1 + 1 - J1, J1) = 0 | Mise à zéro de la colonne $x + I1 + J1$ |
| J1 suivant | |
| KA(x + I1, 1) = 1 | Mise à un des termes diagonaux. |
| I1 suivant | |

VIII.2.7)- RESOLUTION DU SYSTEME :

Soit le système d'équations linéaires, à matrice symétrique.

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|-------|-------|
| K_{11} | K_{12} | K_{13} | K_{14} | U_1 | F_1 |
| K_{21} | K_{22} | K_{23} | K_{24} | U_2 | F_2 |
| K_{31} | K_{32} | K_{33} | K_{34} | U_3 | F_3 |
| K_{41} | K_{42} | K_{43} | K_{44} | U_4 | F_4 |

On applique à ce système la méthode de GAUSS-SEIDEL.

$$U_1^1 = (F_1 - K_{12}U_2^0 - K_{13}U_3^0 - K_{14}U_4^0)/a_{11}.$$

$$U_2^1 = (F_2 - K_{21}U_1^1 - K_{23}U_3^0 - K_{24}U_4^0)/a_{22}.$$

$$U_3^1 = (F_3 - K_{31}U_1^1 - K_{32}U_2^1 - K_{34}U_4^0)/a_{33}.$$

$$U_4^1 = (F_4 - K_{41}U_1^1 - K_{42}U_2^1 - K_{43}U_3^1)/a_{44}.$$

La première approximation d'une solution U_i est donnée par :

$$U_i^1 = (F_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} U_j^1 - \sum_{j=i+1}^4 K_{ij} U_j^0) / a_{ii}$$

Injectons la matrice triangulaire supérieure dans une matrice de dimension (LB,4), LB étant la largeur de bande de la matrice symétrique (LB=4).

$$\begin{aligned} U_1^1 &= (F_1 - K_{12} U_2^0 - K_{13} U_3^0 - K_{14} U_4^0) / K_{11} & \begin{matrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ & K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \end{matrix} \\ U_2^1 &= (F_2 - K_{12} U_1^1 - K_{22} U_3^0 - K_{23} U_4^0) / K_{21} & \begin{matrix} 2,1 & 2,2 & 2,3 & \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \end{matrix} \\ U_3^1 &= (F_3 - K_{13} U_1^1 - K_{23} U_2^1 - K_{32} U_4^0) / K_{31} & \begin{matrix} 3,1 & 3,2 & \\ & K_{33} & K_{34} \end{matrix} \\ U_4^1 &= (F_4 - K_{14} U_1^1 - K_{23} U_2^1 - K_{32} U_3^1) / K_{41} & \begin{matrix} 4,1 & \\ & K_{44} \end{matrix} \end{aligned}$$

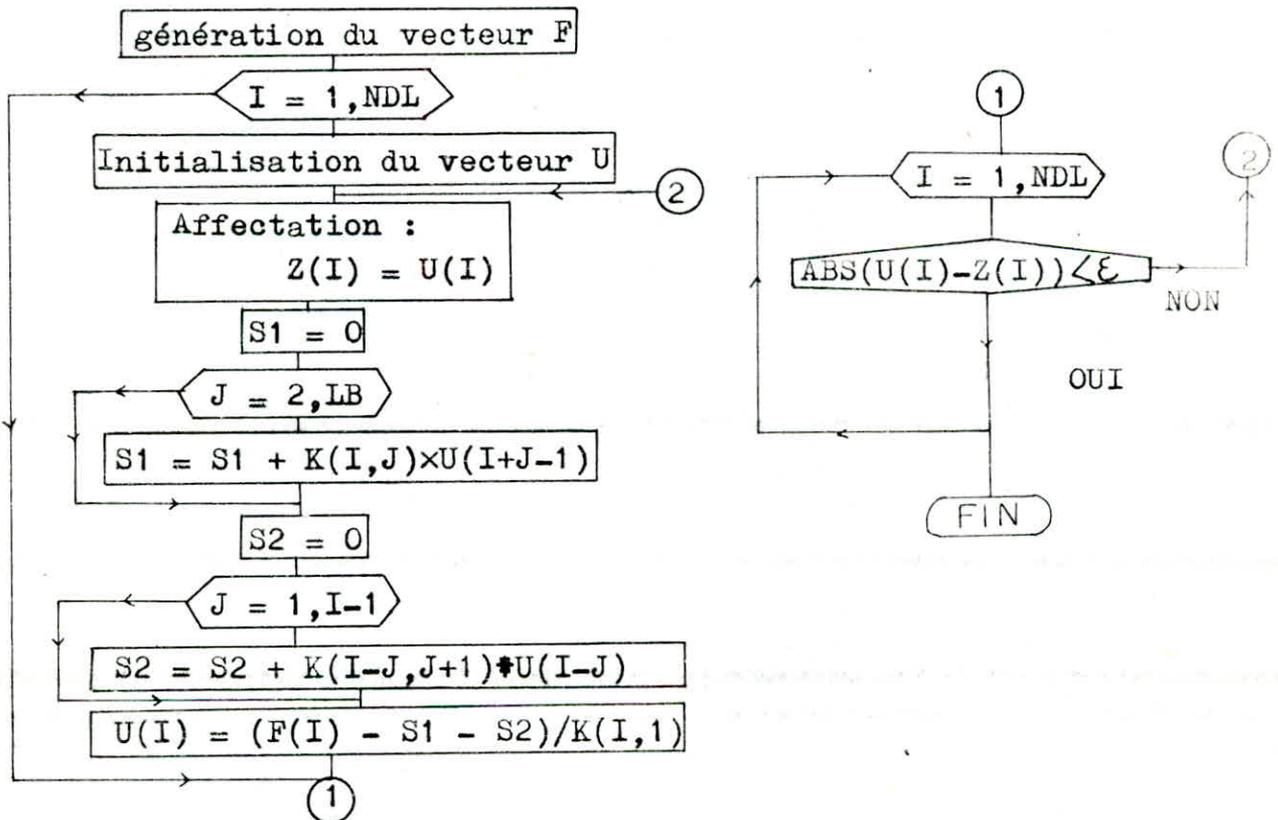
La première approximation d'une solution U_i s'écrit :

$$U_i^1 = (F_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j,j+1} U_{i-j}^1 - \sum_{j=2}^4 K_{ij} U_{i+j-1}^0) / K_{i1}$$

Dans le cas général la solution U_i s'écrit :

$$U_i^{(k+1)} = (F_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j,j+1} U_{i-j}^{(k+1)} - \sum_{j=2}^{LB} K_{ij} U_{i+j-1}^{(k)}) / K_{i1}$$

Organigramme de la méthode de résolution :



VIII.2.8)- CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES ET DES REACTIONS D'APPUI :

Ainsi les déplacements des noeuds sont connus il nous faut donc calculer les efforts dans les barres.

Les efforts dans les barres seront calculées d'après la formulation développée dans le chapitre VII. C'est à dire :

$$\begin{bmatrix} f_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_a^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_a^{''i} \end{bmatrix}$$

Pour les réactions d'appuis, nous reprendrons les forces provenant des différentes barres arrivant à ce noeud et, après les avoir exprimées dans le repère global nous en ferons la somme. C'est à dire :

$$\begin{bmatrix} F_o^i \end{bmatrix} = \sum_a \begin{bmatrix} R_a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_a^i \end{bmatrix}$$

VIII.2.9)- IMPRESSION DES RESULTATS ET COMBINAISONS DES CHARGES :

Après avoir calculé les déplacements des noeuds, les efforts dans les barres et les réactions d'appuis sous les charges permanentes (G), les surcharges d'exploitation et les charges sismiques (E), les résultats sont affichés dans des tableaux.

Il est demandé à l'utilisateur d'introduire le coefficient de pondération des efforts sous charges permanentes (C1), sous charges d'exploitation (C2) et sous charges sismiques (C3). L'effort combiné est donné par :

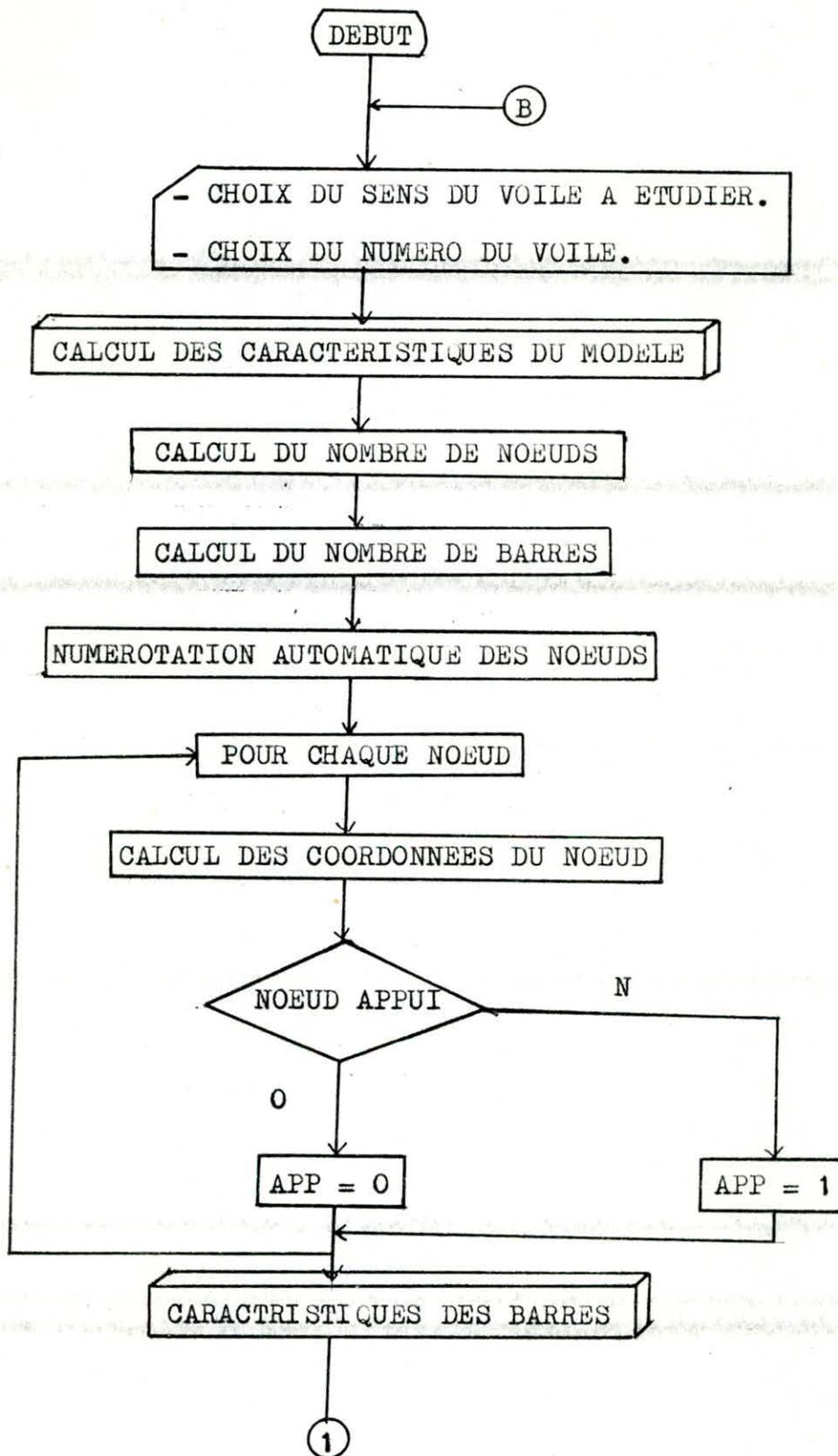
$$C1 \times EFF(G) + C2 \times EFF(Q) + C3 \times EFF(E)$$

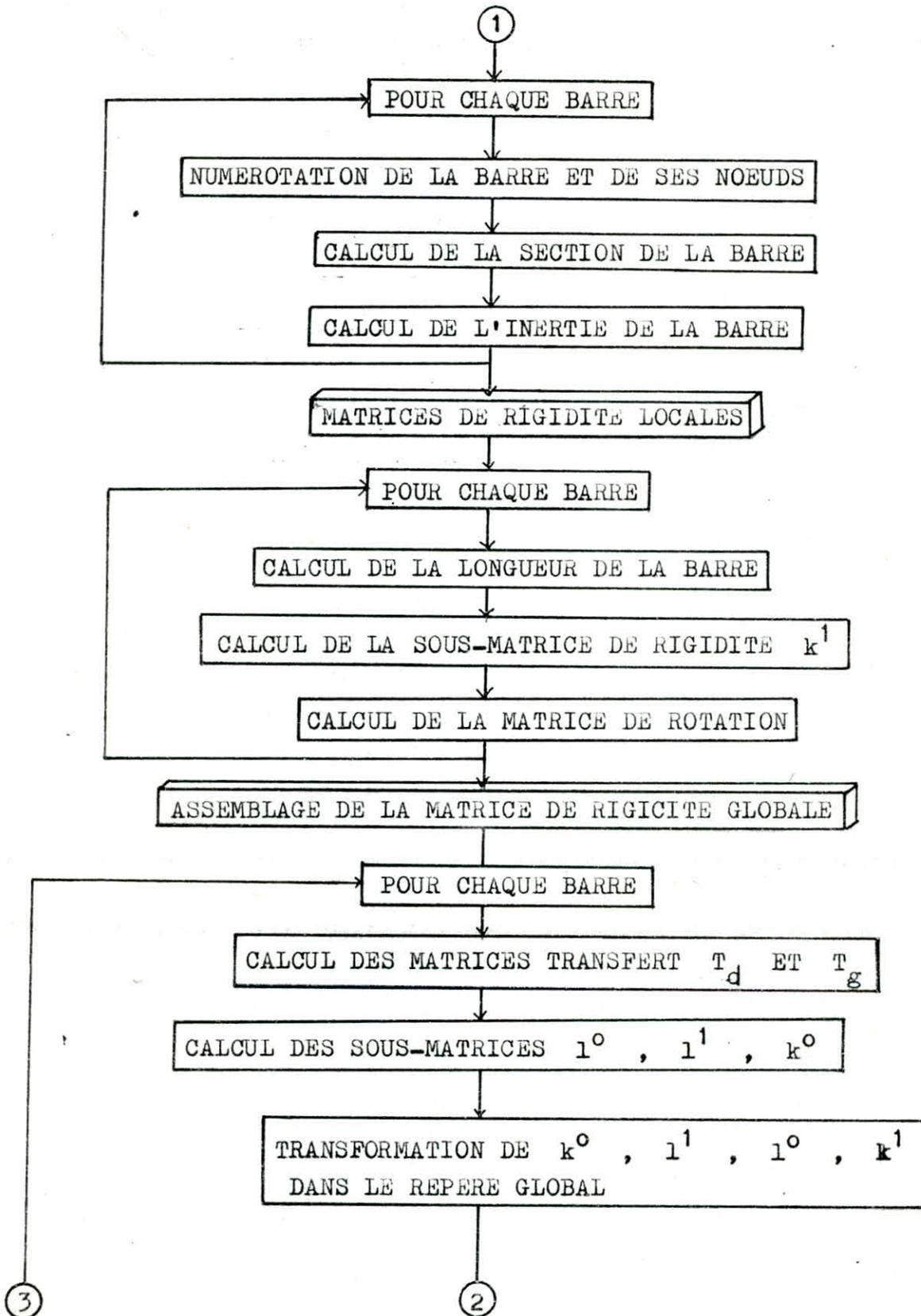
Avec :

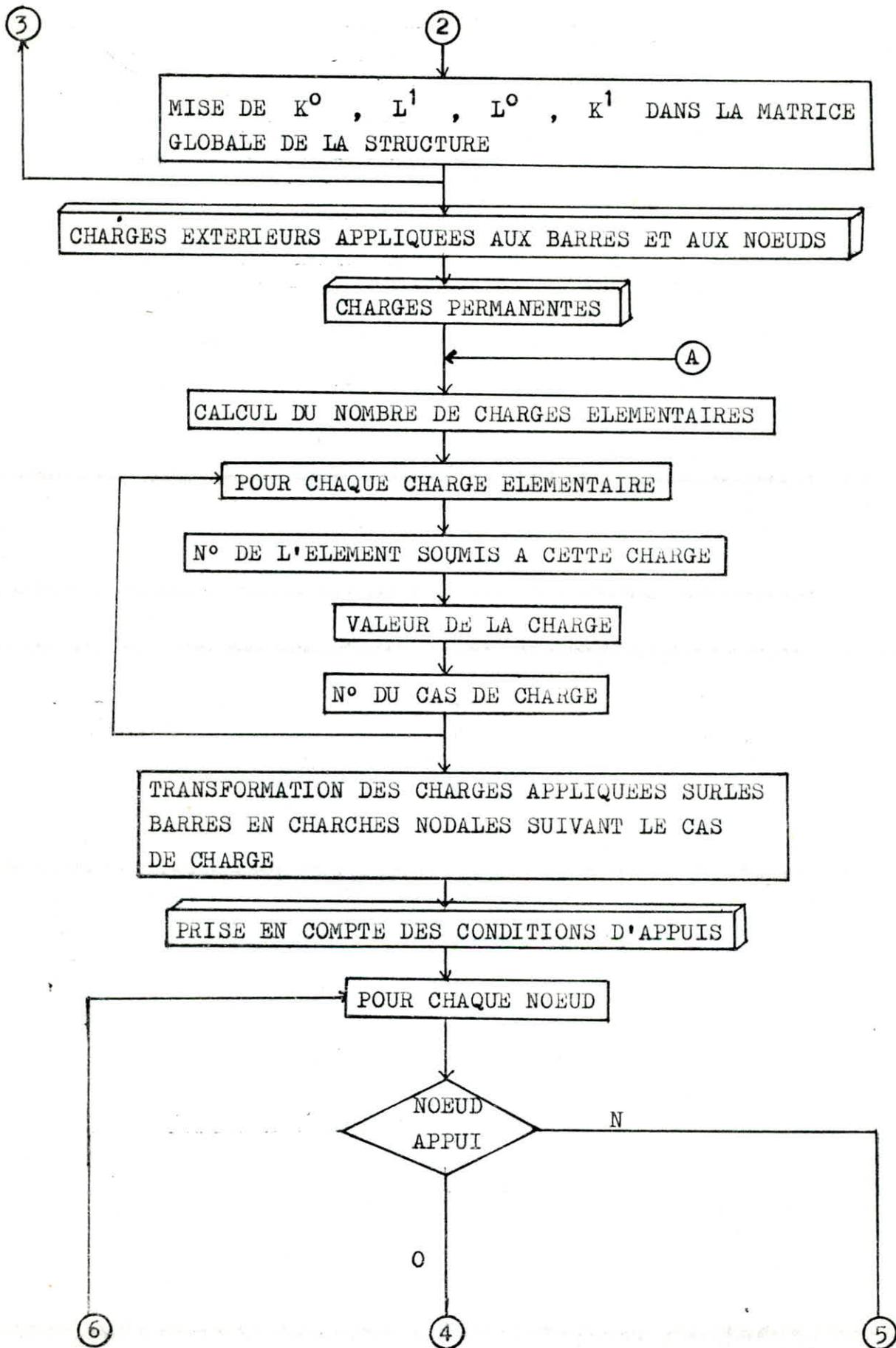
EFF(G) : Effort dans la barre sous G.

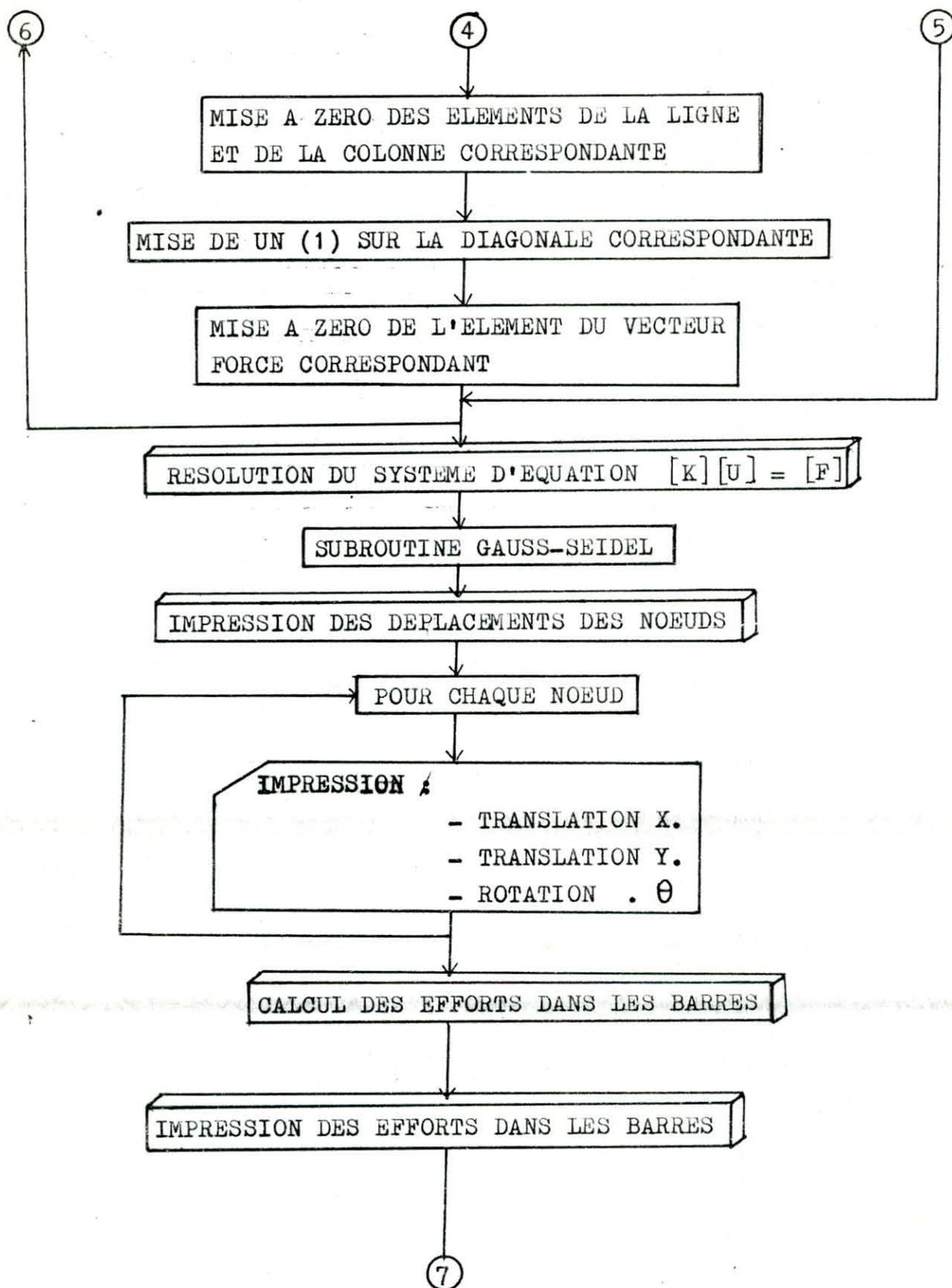
EFF(Q) : Effort dans la barre sous Q.

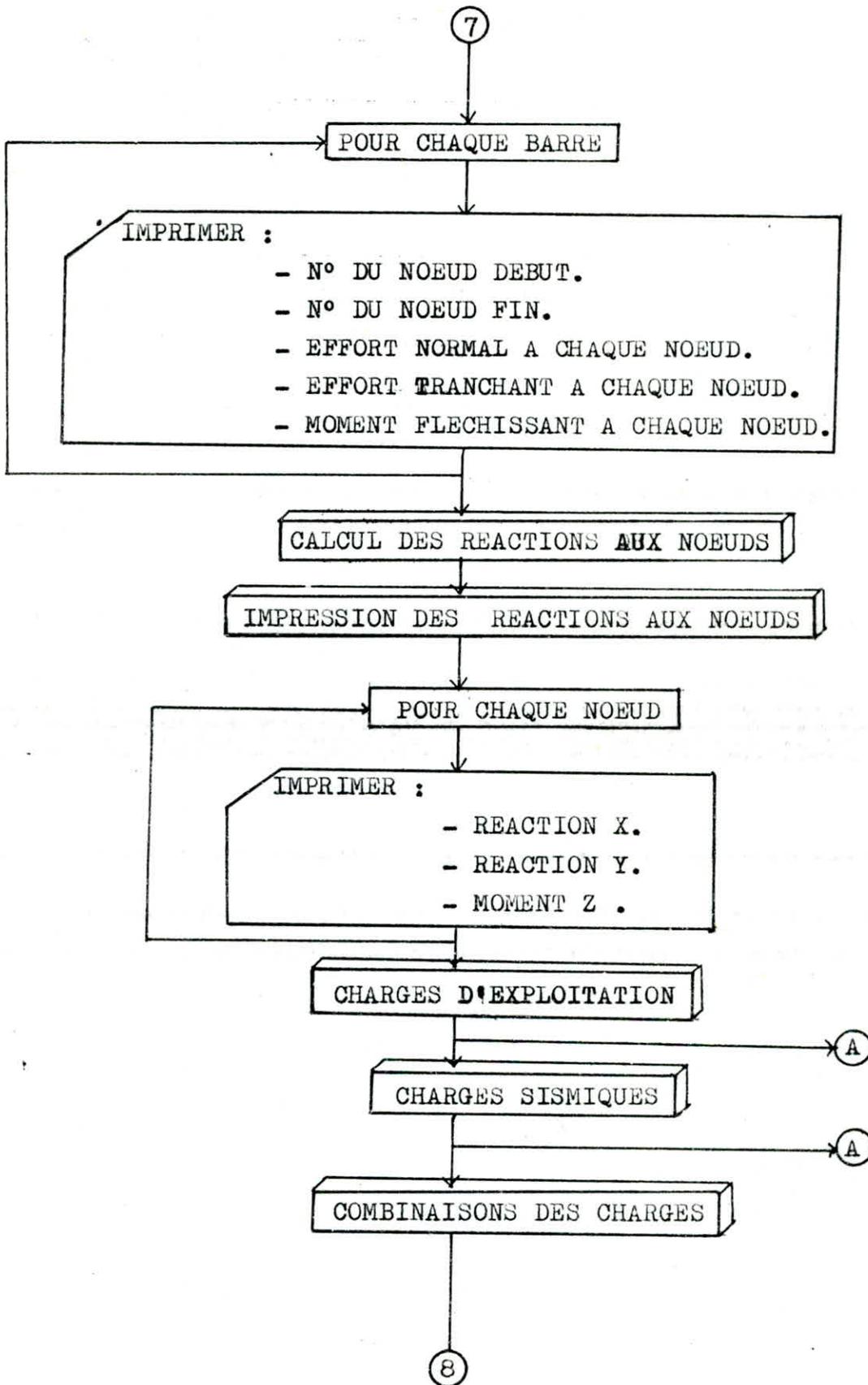
EFF(E) : Effort dans la barre sous E.

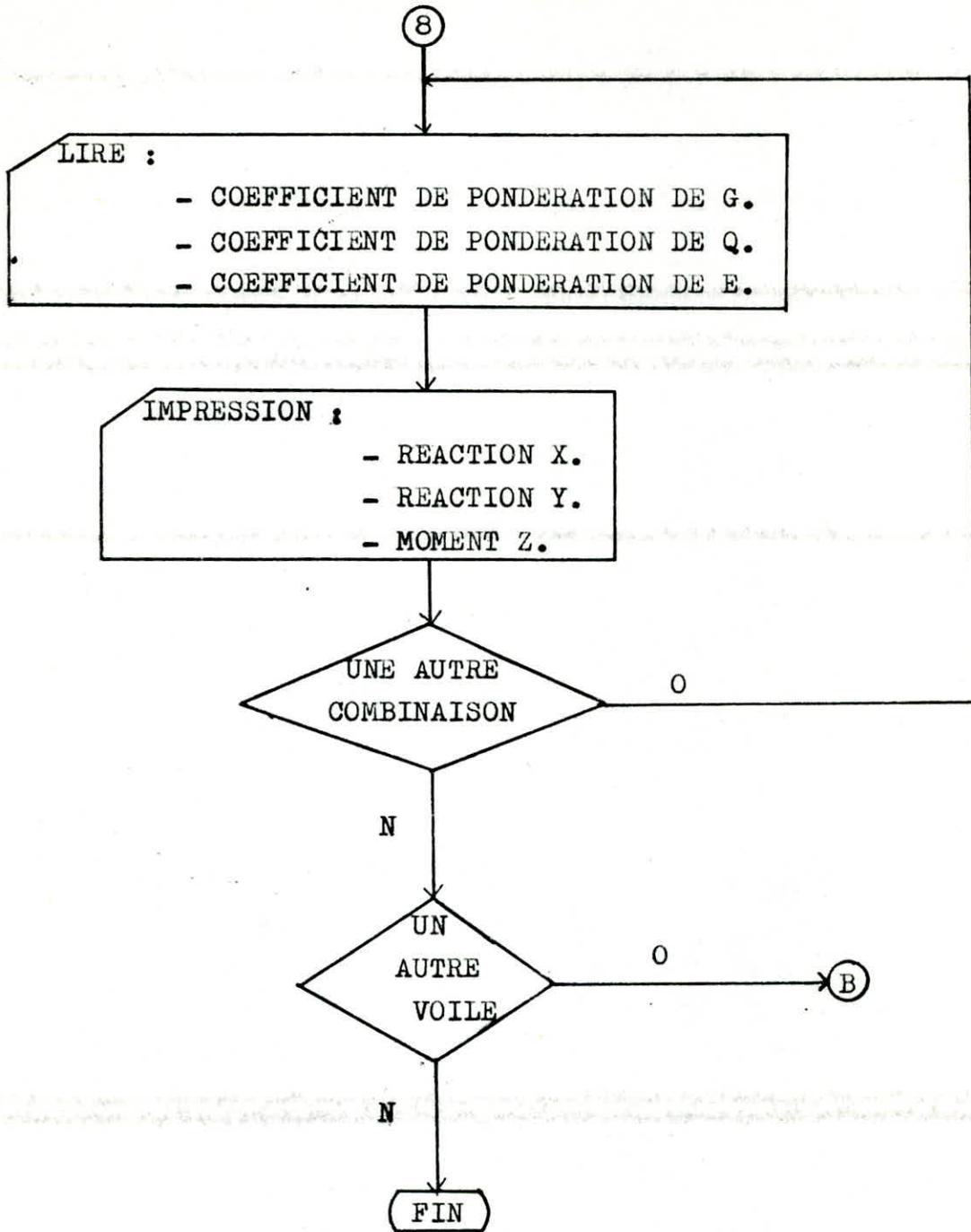
ORGANIGRAMME DE CALCUL DES EFFORTS DANS LES BARRES











CHAP IX-CONCLUSION

C O N C L U S I O N :

Le logiciel LEBEV a pour objectif l'étude et le calcul des éléments porteurs d'une structure en voiles en vue de la détermination de leurs portance vis à vis des efforts latéraux (sismiques en particulier), et des efforts verticaux (charges permanentes et surcharges d'exploitation).

Ce logiciel a été élaboré pour être utilisé sur micro-ordinateur disposant d'un langage basic microsoft. Il présente des avantages pratiques parmi lesquels nous citons :

- L'introduction des données se fait en mode conversationnel facilité par l'utilisation de tableaux.

- Seules les données définissant les caractéristiques mécaniques et architecturales du bâtiment sont introduites, les autres données sont déduites à partir de celles-ci.

- Possibilité de correction des données en cas d'une erreur d'introduction.

- Contrôle des données par affichage dans des tableaux et par visualisation des différentes vues en élévation et en plan du bâtiment.

- L'éventail d'erreurs est réduit au maximum par l'utilisation de méthodes exactes tel que :

 - Jacobi pour la détermination des modes de vibration du bâtiment.

 - Méthode des déplacements pour le calcul des efforts internes dans les voiles en modélisant celui-ci en éléments finis de barres.

- Le voile peut-être calculé et ferrailé sous n'importe quelle combinaison de charges.

- Toutes les charges sollicitant le voile sont prises en considération y compris son poids propre.

- Pour faciliter l'exploitation des résultats, ceux-ci sont affichés dans des tableaux avec des commentaires.

En plus des avantages cités ci-dessus il ne faut pas oublier le plus gros d'entre eux, la vitesse d'exécution, qui on peut dire est le but de l'élaboration de tout logiciel. Ainsi grâce au logiciel LEBEV le calcul des éléments porteurs d'un bâtiment en voile se fait en quelques minutes alors qu'avant son élaboration il aurait fallu plusieurs jours. La vitesse d'exécution du logiciel est d'autant plus rapide que la mémoire de l'ordinateur est déchargée et cela en divisant le software du logiciel en sous-programmes.

L'élaboration de ce logiciel nous a permis de nous initier dans le domaine du calcul automatique des structures et de l'analyse de leurs comportement dynamique, ainsi que le domaine de l'informatique qui est un outil très indispensable pour l'ingénieur.

-*(BIBLIOGRAPHIE)*-

- (1) Calcul pratique des ossatures de batiments en béton armé.
A.FUENTES.
Ed Eyrolles 1975.
- (2) Calcul pratique des tours en béton armé. M.DIVERS
Dunod 1972.
- (3) Dynamique des structures en zone sismique. A.CAPRA et
V.DAVIDOVICHI.
Ed Eyrolles 1984.
- (4) Dynamique des structures. P.W.CLOUGH , J.PENZIEN.
Ed Mc-GRAW-HILL 1975.
- (5) Conception et calcul des structures soumises aux seismes.
M.DAOUDI , M.RILI , A.SALHI.
- (6) Une presentation de la méthode des éléments finis. G.DHATT ,
G.TOUZOT
Collection de l'université de COMPIEGNE.
- (7) Numerical methods in finite element analysis. BATH , WILSON.
- (8) Modelisation des structures pour calcul sur ordinateur.
A.CAPRA , M.HAUTCOEUR.
Ed Eyrolles 1983.
- (9) Calcul des structures et informatique. J.F.AUBOIN.
Ed Eyrolles 1983.
- (10) Calcul des structures sur ordinateur. CH.MASSONNET , G.DEPREZ.
- (11) Règles parasismiques algériennes 1981 (RPA 81).
Version 1983 C.T.C ENAL
- (12) Des thèses de fin d'études.
- (13) Cours d'ouvrages et structures, M^{me} BAUCHE.
Cours de l'ENP 1988/1989
- (14) Cours de calcul automatique des structures, M.CHARIF
Cours de l'ENP 1988/1989

