

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

*Département : Génie Electrique et Informatique*

*Projet de fin d'étude*

Présenté pour l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en électrotechnique

Thème :

**CONTRIBUTION A L'ETUDE  
DE LA CARACTERISATION  
DES MATERIAUX  
COMPOSITES**

PROPOSÉ ET DIRIGÉ PAR :

PRÉSENTÉ PAR :

M<sup>r</sup>. A. Mekhaldi *Maître de conférence à l'E.N.P* M<sup>r</sup>.  
M<sup>me</sup>. D. Namane *Maitre assistante à l'E.N.P*

M<sup>r</sup> Bouteraa Rezkellah

**Promotion 2000**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

*Département : Génie Electrique et Informatique*

*Projet de fin d'étude*

Présenté pour l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en électrotechnique

Thème :

**CONTRIBUTION A L'ETUDE  
DE LA CARACTERISATION  
DES MATERIAUX  
COMPOSITES**

PROPOSÉ ET DIRIGÉ PAR :

M<sup>r</sup>. A. Mekhaldi *Maître de conférence à l'E.N.P* M<sup>r</sup>.  
M<sup>me</sup>. D. Namane *Maître assistante à l'E.N.P*

PRÉSENTÉ PAR :

M<sup>r</sup> Bouteraa Rezkellah

**Promotion 2000**

ملخص:

هذا العمل يتضمن تحديد هلسماحية الوهمية المركبة للمواد غير المتجانسة و المحتوية على ثغرات ذات شكل اسطواني وذلك باستعمال طريقة الفروق المنتهية .  
لوحظ ان هذه السماحية تتغير وفق الكسر الحجمي وتتأثر ايضا بتغير سماحية الثغرات.  
الكلمات المفتاحية: معدن غير متجانس، سماحية وهمية، كسر حجمي، ثغرات، الفروق المنتهية.

### Résumé :

Ce travail porte sur la détermination, par la méthode des différences finies, de la permittivité complexe effective des matériaux hétérogènes comportant des inclusions cylindriques.

Il est montré que la permittivité effective varie suivant la variation de la fraction volumique ainsi que la variation de la permittivité complexe des inclusions.

*Mots clés* : matériau composite, permittivité effective, fraction volumique , inclusion , différences finies.

### Summary :

The aim of this work is to determine the complex effective permittivity of heterogeneous materials constituted by cylindrical inclusions , using the finits differences method.

It is shown that the complex effective permittivity change with the variation of the volumic fraction, and so the permittivity of the inclusions

*Keywords* : composite material, effective permittivity, volumic fraction, inclusion, finits differences.

# Dédicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

- Mes chers parents
  - *Mon frère*
  - *Mes sœurs*
  - *Toute la famille*
  - *Tous mes amis*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## REMERCIEMENT

*Ma sincere gratitude et ma profonde reconnaissances à mes deux promoteurs,  
M Mekhaldi et M<sup>mc</sup> Namane , pour m'avoir estimé capable de traiter ce sujet et pour  
oute l'aide et le soutien dont ils ont fait preuve durant ces longs mois du travail.*

*j'adresse mes remerciements effectivement à M Tegggar pour ses precieux  
conseils.*

*Aussi je tient à remecier les membres de jury d'avoir accepter à examiner et  
évaluer mon travail.*

*Mes remerciments vont aussi à ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin.*

# TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE .....	1
-----------------------------	---

---

## CHAPITRE I

---

I.1 INTRODUCTION .....	2
I.2 PHENOMENES DE POLARISATION .....	2
I.2.1 Molécules polaires et non polaires.....	3
I.2.2 Vecteur de déplacement électrique.....	4
I.2.2.1 Milieu isotrope.....	4
I.2.2.2 Milieu anisotrope.....	4
I.3 ASPECT MICROSCOPIQUE DE LA POLARISATION .....	5
I.3.1 Milieu peu dense.....	5
I.3.2 Milieu dense.....	6
I.4 TYPES DE POLARISATION.....	7
I.4.1 Polarisation électronique et Polarisation ionique.....	7
I.4.2 Polarisation par orientation.....	10
I.4.2.1 Modèle de Pellat-Debye.....	10
I.4.3 Polarisation interfaciale.....	13
I.4.3.1 Modèle de Maxwell-Wagner.....	13
I.4.4 Polarisation totale.....	15
I.5 CONSEQUENCES DES DIFFERENTS PHENOMENES.....	16
I.6 CONCLUSION .....	17

---

## CHAPITRE II

---

II.1 INTRODUCTION .....	18
II.2 PRESENTATION GENERALE.....	18
II.2.1 Constitution.....	18
II.2.2 Propriétés du composite.....	19
II.3 SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE.....	19
II.3.1 Composite sous pollution.....	19
II.3.1.1 Travail de I.Yu.Gutman ,V.R.Kinevsky,V.Z.Trifonov,L.L.Vladimirsky.....	19
II.3.2 Etude analytique des matériaux composites.....	20
II.3.2.1 Description géométrique des matériaux .....	21
II.3.2.1.1 Matériaux à inclusions sphériques.....	21
II.3.2.1.2 Matériau à inclusions ellipsoïdales.....	22
II.3.2.1.3 Matériaux à inclusions cylindriques.....	24
II.4 PRESENTATION DES TRAVAUX NUMERIQUES.....	25
II.5 CONCLUSION .....	40

---

## CHAPITRE III

---

III.1 INTRODUCTION .....	41
III.2 PRESENTATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES .....	41
III.2.2 Cas d'une approximation à plusieurs variables.....	42
III.2.3 Décritisation de l'équation de Laplace.....	42
III.3 MODELISATION DU MATERIAU COMPOSITE.....	43
III.4 CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE .....	46

III.5 ORGANIGRAMME	47
III.6 RESULTATS ET INTERPRETATIONS	49
III.7 VALIDATION	51
III.8 CONCLUSION	53
<hr/> <hr/>	
CONCLUSION GENERALE	54

المدسة الوطنفة المعمدة التعمفات  
BIBLIOTHEQUE — المكنفة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction générale

## **INTRODUCTION GÉNÉRALE :**

L'étude des matériaux hétérogènes a commencé avant 1900 et depuis elle ne cesse de progresser. Elle a pris un tel essor et une telle proportion que ces matériaux sont actuellement utilisés dans de nombreuses technologies. Leur résistance à la corrosion en a fait un matériau de choix dans le domaine de génie chimique ainsi que dans l'industrie navale. Leur légèreté a permis de les intégrer dans les domaines de l'aérospatiale et de l'aéronautique. Ils présentent également une bonne aptitude à la mise en forme.

Dans le domaine de génie électrique, ces matériaux sont de plus en plus présents notamment dans des applications comme la fabrication des condensateurs de puissance ou même les chaînes d'isolateurs [1].

En raison de leur complexité géométrique, ces matériaux sont généralement caractérisés par des fractions volumiques (système tridimensionnel) ou surfacique (système bidimensionnel). Les propriétés électriques effectives de ces matériaux comme par exemple la permittivité effective, dépendent de plusieurs paramètres tels que la forme, la taille et de la disposition des différents constituants.

Le présent travail porte sur l'étude de la permittivité diélectrique effective des matériaux diélectriques hétérogènes en utilisant la méthode des différences finies.

Nous avons divisé notre travail en trois chapitres que nous présentons comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux différents phénomènes de polarisation (électronique, ionique, orientation et interfaciale) dans le but d'établir la permittivité complexe en régime variable.

Le deuxième chapitre concerne une synthèse bibliographique comportant des différents modèles adoptés par les chercheurs et illustrant le matériau composite.

Le troisième chapitre concerne une approche numérique basée sur la méthode des différences finies, suivie par une comparaison avec d'autres travaux.

# CHAPITRE 1

## Propriétés des diélectriques et phénomène de polarisation

*Qui ne risque rien, n'a rien*

## I.1. INTRODUCTION :

Vu la demande croissante de l'énergie électrique, l'industrie électrique devient une grande consommatrice des diélectriques (solides, liquides et gazeux). Ces derniers sont utilisés essentiellement dans la fabrication du matériel électrique, comme par exemple les transformateurs, les condensateurs, les isolateurs, etc....., comme produits isolants. Le choix de ceux-ci dépend du genre de l'appareil, de la tension à laquelle l'isolation est soumise, des conditions de température, pression et d'humidité, et de nombreux autres facteurs.

Le mot «diélectrique» s'emploie en général comme adjectif, pour qualifier une substance qui peut emmagasiner de l'énergie électrostatique, c'est-à-dire une substance à laquelle on peut appliquer un champ électrique élevé et sur laquelle on peut maintenir ce champ sans apport d'énergie extérieure. Par voie de conséquence, un matériau diélectrique doit être isolant [2].

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique (statique ou variable), de nombreux phénomènes apparaissent. C'est ainsi que la polarisation peut prendre différents aspects suivant la nature du matériau utilisé ainsi que des contraintes imposées.

Nous nous proposons dans ce chapitre, de décrire les principaux mécanismes de polarisation et nous établirons qu'en régime variable, plusieurs caractéristiques du diélectrique vont devenir complexes, comme par exemple la permittivité, la susceptibilité, etc... Ceci nous conduira à expliquer certains phénomènes, comme par exemple les pertes diélectriques ou encore les phénomènes de résonance électronique liés aux fréquences très élevées.

## I.2. PHÉNOMÈNES DE POLARISATION :

Lorsqu'un diélectrique quelconque est placé dans un champ électrique, ce dernier s'en trouve modifié. Dans les prochains paragraphes, nous nous proposons d'étudier comment le champ électrique se modifie en présence du diélectrique et quelles sont les causes d'une telle modification. Dans un diélectrique polarisé, chaque molécule se transforme en un dipôle électrique et possède donc un moment électrique égal à :  $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$

On peut donc dire qu'il existe un champ électrique local  $E_{loc}$  qui induit un moment dipolaire  $\vec{p}$  au niveau de chaque molécule. Ce moment est défini par :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{loc} \dots\dots\dots(I.1)$$

Avec  $\alpha$  constante représentant la polarisabilité de la molécule, elle mesure la facilité avec laquelle les charges peuvent s'orienter pour induire un moment dipolaire,  $\epsilon_0$  la permittivité absolue du vide  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m [2].

La polarisation  $\vec{P}$  est liée au nombre de molécules  $N$  par unité de volume par la relation :

$$\vec{P} = N\alpha\epsilon_0\vec{E} \dots \dots \dots (I.2)$$

Cette relation n'est pas toujours valable, parce que pour d'autres diélectriques que les linéaires, la relation entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  est plus compliquée car :

- $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  peuvent ne pas avoir la même direction.
- $\vec{P}$  peut être retardé par rapport à  $\vec{E}$  lorsque celui-ci varie.
- $\vec{P}$  peut ne pas être proportionnel à  $\vec{E}$ .

### I.2.1. Molécules polaires et non polaires :

On peut diviser les diélectriques en deux groupes selon qu'ils sont constitués de molécules polaires ou non.

- Si les molécules possèdent un centre de symétrie, les barycentres des charges positives et négatives sont confondus en absence de champ extérieur. Ces molécules sont dites non polaires. On peut citer quelques exemples significatifs :

de gaz : He, Ar, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>

de composés chimiques : CH<sub>4</sub>, CCl<sub>4</sub>

de macromolécules : [CH<sub>2</sub>-CH<sub>2</sub>]<sub>n</sub> polyéthylène.

- En revanche, d'autres molécules dépourvues de centre de symétrie, présentent un moment de dipôle électrique permanent, elles sont dites polaires ; on peut citer :

des composés chimiques : HF, HCl, HBr, HI, CClH<sub>3</sub> ;

une macromolécule : [CH<sub>2</sub>-CHCl]<sub>n</sub> (polychlorure de vinyle).

Compte tenu de cette division des diélectriques en deux groupes, on conçoit que, sous l'action d'un champ électrique, les molécules vont se polariser selon des mécanismes différents. Très schématiquement on peut envisager des déformations du nuage électronique (polarisation électronique) des atomes constituant les molécules, des déplacements relatifs de charges positives et négatives dans un solide ionique (polarisation ionique), des orientations des molécules polaires ( polarisation par orientation ) [3].

## I.2.2. Vecteur de déplacement électrique :

### I.2.2.1. Milieu isotrope :

La plupart des diélectriques ou isolants utilisés en électrotechnique sont homogènes, linéaires et isotropes. Le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  dans le diélectrique satisfait à la

$$\text{relation : } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \dots\dots\dots(I.3)$$

où  $\vec{E}$  est le champ électrique extérieur appliqué. Dans ce cas, il existe une relation simple entre la polarisation  $\vec{P}$  et le champ électrique appliqué  $\vec{E}$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \dots\dots\dots(I.4)$$

La constante  $\chi$  est appelée susceptibilité électrique

On en déduit, en tenant compte de la relation (I.3) :

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \dots\dots\dots(I.5)$$

Et en posant  $1 + \chi = \epsilon_r$  avec  $\epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon$  la relation (I.5) devient :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \dots\dots\dots(I.6)$$

$\epsilon_r$  et  $\epsilon$  sont respectivement les permittivités relative et absolue du diélectrique.

$\vec{P}$  s'écrit aussi :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \dots\dots\dots(I.7)$$

### I.2.2.2. Milieu anisotrope :

Lorsque la polarisation se produit dans une direction différente de celle du champ électrique, le matériau est anisotrope ; la composante de déplacement dans une direction donnée ne dépend pas seulement de la composante du champ dans cette direction mais aussi de la composante du champ dans les autres directions. La relation (I.6) décomposée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \dots\dots\dots (I.8) \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned}$$

Lorsqu'il s'agit de matériaux cristallins à réseaux orthogonaux, les axes de coordonnées sont en général, disposés dans les directions des axes principaux du cristal. Dans ce cas, seuls les termes diagonaux sont différents de zéro et la relation (I.8) se réduit à :

$$D_x = \epsilon_{xx}E_x \quad D_y = \epsilon_{yy}E_y \quad D_z = \epsilon_{zz}E_z$$

Le tableau suivant donne les valeurs numériques pour quelques matériaux [3] :

Matériau	$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{zz}$
Quartz	4.5	4.5	4.6
Gypse	9.9	5.1	5.0

Tableau I.1

### I.3. ASPECT MICROSCOPIQUE DE LA POLARISATION :

#### I.3.1. Milieu peu dense :

Dans les gaz raréfiés polaires ou non, la polarisation est nulle en l'absence de champ externe. Sous l'action d'un champ électrique, l'interaction entre molécules se décrit aisément. Le moment dipolaire est dirigé dans le sens du champ et est défini par  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$  où  $\alpha$  s'appelle la polarisabilité .

D'après Langevin [3], la relation entre la polarisation d'un gaz polaire et le champ électrique n'est pas linéaire. En tenant compte de la condition  $pE \ll kT$  ( $k$  représente la constante de Boltzmann  $k=1.380 \cdot 10^{-23}$  Joules/K,  $T$  la température en Kelvin) avec une approximation de la fonction de Langevin , la polarisation s'exprime sous la forme linéaire suivante :  $\vec{P} = \frac{N \cdot p^2}{3 \cdot \epsilon_0 kT} \vec{E}$ .

Par identification avec la relation (I.7) on trouve la permittivité relative

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + \frac{N \cdot p^2}{3 \cdot \epsilon_0 kT} \dots\dots\dots(I.9)$$

D'autre part, il faut tenir compte de ce que les molécules polaires qui possèdent un moment permanent et s'orientent sous l'effet du champ, subissent de plus, le même phénomène que les molécules non-polaires (apparition d'un moment induit sous l'action du champ). Cet effet s'additionne au précédent pour trouver finalement l'expression complète de la permittivité d'un gaz polaire, appelée loi de Langevin-Debye :

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + N \left( \alpha + \frac{p^2}{3 \epsilon_0 kT} \right) = 1 + N \alpha_T \dots\dots\dots(I.10)$$

avec  $\alpha_T$  la polarisabilité totale de la molécule.

**I.3.2. Milieu dense :**

Si la densité moléculaire est plus élevée comme le cas des gaz denses, liquides et solides, le champ agissant sur une molécule n'est pas seulement le champ externe, il faut tenir compte de l'interaction entre molécules [3]. Le champ interne dû aux interactions vaut :  $\vec{E}_{in} = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$ .

Le champ local agissant sur les molécules est égal à la somme des deux champs externe  $\vec{E}$  imposé par la tension appliquée et le champ interne, si bien que l'on arrive à :

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \dots\dots\dots(I.11)$$

Remplaçons  $\vec{E}$  par  $\vec{E}_{loc}$  dans la relation (I.2) , on arrive à la relation suivante :

$$\frac{P}{\epsilon_0 E_{loc}} = N \left( \alpha + \frac{p^2}{3\epsilon_0 KT} \right) \dots\dots\dots(I.12)$$

en tenant compte de la relation (I.7), on aboutit à une expression qui relie la grandeur microscopique  $\alpha$  et la grandeur macroscopique  $\epsilon_r$ , attribuée à Clausius-Mossotti [6] :

$$\frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} = N \left( \alpha + \frac{p^2}{3\epsilon_0 KT} \right) \dots\dots\dots(I.13)$$

ce qui conduit à :

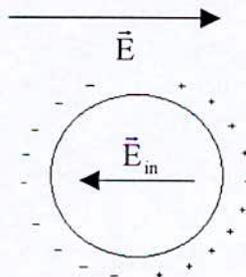
$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha_T}{1 - \frac{N\alpha_T}{3}} \dots\dots\dots(I.14)$$

Si  $N\alpha_T \ll 1$ , on retrouve alors l'équation (I.10) relative aux gaz peu denses.

Remarque :

On montre que, si on place une sphère matérielle dans un champ électrique, la charge de surface apparaissant à la frontière du matériau due à la polarisation de celui-ci fait apparaître un champ externe opposé à la polarisation (figure (I.1)). Il est appelé champ de dépolarisation, sa valeur est liée à la polarisation par le facteur de dépolarisation L, avec  $L = \frac{\epsilon_0 E_{in}}{P}$  (L=1/3 pour

une sphère).



**Fig.I.1.sphère polarisée**

Ceci conduit à une permittivité effective absolue  $\epsilon_{\text{eff}}$  du milieu donnée par [4] :

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon + \frac{N\alpha E}{\epsilon - LN\alpha} \dots\dots\dots(I.15)$$

$\epsilon$  : permittivité du milieu externe à l'inclusion.

$\alpha$  : polarisabilité de l'inclusion.

La valeur de ce facteur dépend de la forme du matériau

Le tableau ci-dessous (tableau I.2) présente des valeurs typiques correspondant à des formes et direction données du matériau :

forme	Direction	L
sphère	Quelconque	1/3
Plaque mince	Normale	1
	Dans le plan	0
Long cylindre	Longitudinale	0
	Transverse	1/2

**Tableau I.2**

#### **I.4. TYPES DE POLARISATION :**

En appliquant un champ électrique, nous obtenons quatre mécanismes de polarisation.

##### **I.4.1. Polarisation électronique et Polarisation ionique :**

La polarisation **électronique** est due à un déplacement relatif du noyau de l'atome par rapport à l'ensemble des électrons qui l'entourent. Tous les atomes présentent, à des degrés divers, ce type de polarisation qui s'établit en un temps très court et reste sensible jusqu'à des fréquences dépassant celles de la lumière visible ( $10^{15}$ Hz) ; c'est pourquoi la polarisation électronique est appelée souvent polarisation optique.

La polarisation **ionique** ne se rencontre que dans les cristaux ioniques. Elle résulte du déplacement en sens contraire des ions de signes opposés. Cette polarisation s'établit plus lentement que la précédente, elle se manifeste jusqu'à des fréquences comprises entre les hyperfréquences et l'infrarouge [5].

##### Remarque :

Ces deux types de polarisation (électronique et ionique) par déformation (électronique et ionique) ne sont pratiquement pas affectés par la température ; dans le domaine des fréquences industrielles, on peut considérer qu'ils ne donnent pas lieu à des pertes diélectriques appréciables [6].

Si on applique un champ électrique sinusoïdal au matériau, en supposant que les électrons de ce matériau obéissent à un mouvement du deuxième degré (une force de rappel tend à les ramener à leur position d'équilibre et cette force est proportionnelle à leur déplacement) et que le mouvement soit amorti, l'équation caractérisant le mouvement est alors, en admettant que les charges électroniques se déplacent seules par suite de leur faible masse [3] :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = -qE_x \exp(j\omega t) \dots\dots\dots(I.16)$$

Où  $m$  désigne la masse en mouvement,  $\gamma$  le terme d'amortissement,  $k$  le terme de rappel et  $-q$  la charge en mouvement. La solution de cette équation différentielle combinée à l'équation (1.12) nous conduira à trouver les deux parties réelle et imaginaire de la permittivité en fonction de la fréquence [3].

$$\begin{aligned} \epsilon'_r &= 1 + \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0'^2 - \omega^2}{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \epsilon''_r &= \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \dots\dots\dots(I.17)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{q^2 N}{3 \epsilon_0 m}$$

La figure (I.2) représente la variation correspondante à les parties réelle et imaginaire de la permittivité relative en fonction de la fréquence.

Lorsque le terme d'amortissement  $\gamma$  est nul (et notamment aux fréquences auxquelles ce terme est négligeable), la permittivité relative est réelle et vaut :

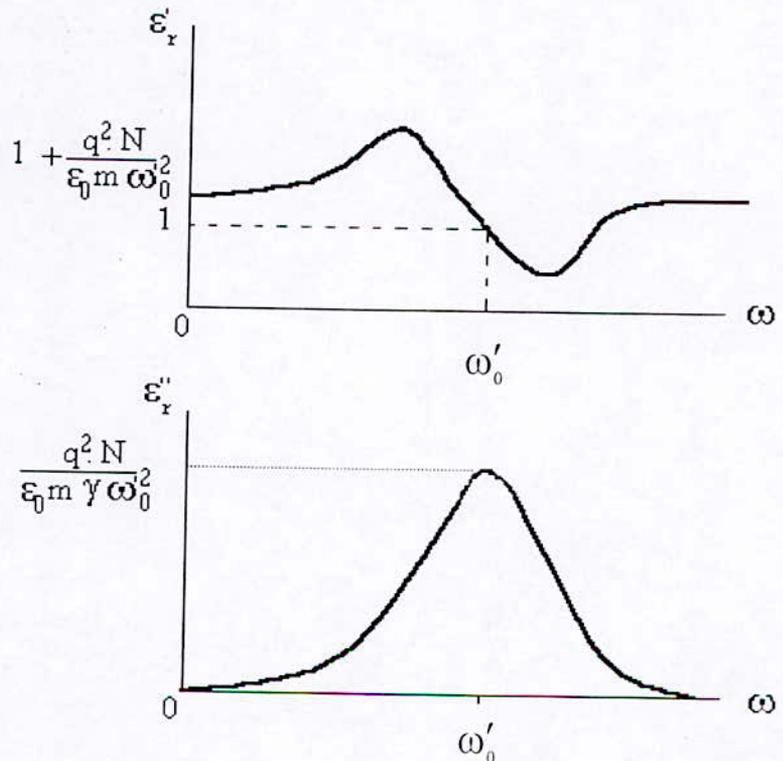


Fig.1.2 permittivité relative

$$\epsilon'_r = 1 + \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0'^2 - \omega^2} \dots\dots\dots(I.18)$$

En fait, les fréquences d'oscillation  $\omega_0'$  ne sont pas identiques pour tous les électrons dans un volume donné. il sera donc plus correct d'écrire :

$$\epsilon_r = 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}'^2 - \omega^2} \dots\dots\dots(I.19)$$

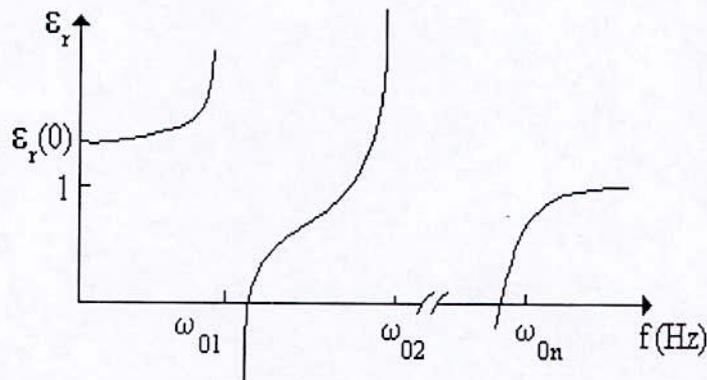


Fig.I.3. constante diélectrique à amortissement nul

Le circuit équivalent correspond à ce type de polarisation, dans le cas des fréquences où l'amortissement est négligé  $\epsilon''_r = 0$ , se déduit comme suit :

La capacité complexe s'écrit :  $\bar{C} = \frac{\bar{\epsilon} C_0}{\epsilon_0} = (\epsilon'_r - j\epsilon''_r) C_0$

avec  $C_0$ ,  $\epsilon'_r$  et  $\epsilon''_r$  sont respectivement, la capacité d'un condensateur sous vide, la permittivité relative réelle et la permittivité relative imaginaire.

En remplaçant  $\epsilon'$  par son expression on trouve :  $\bar{C} = C_0 (1 + \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0'^2 - \omega^2}) = C_0 + \bar{C}_s$

Avec  $\bar{C}_s = \frac{b.C_0}{\omega_0'^2 - \omega^2}$  et  $b = \frac{q^2 N}{\epsilon_0 m}$ .

On aboutit donc à deux capacités en parallèle, dont une ( $\bar{C}_s$ ) est complexe.

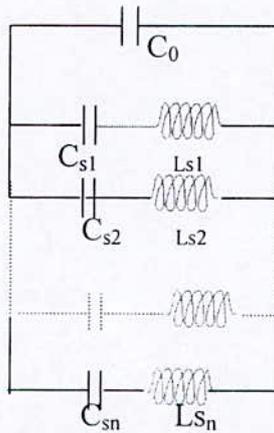
on a alors  $\bar{z}_s = \frac{1}{j\bar{C}_s \omega} = (\frac{\omega'^2_0}{j b C_0 \omega} + j \frac{\omega}{b C_0}) = \frac{1}{j c_s \omega} + j L_s \omega$

$L_s = \frac{1}{b C_0}$  et  $C_s = \frac{b C_0}{\omega_0'^2}$

Remarque :

$L_s$  et  $C_s$  ainsi établis ne dépendent pas de la fréquence.

Finalement le circuit équivalent se présente comme une capacité  $C_s$  en série avec une self  $L_s$ , en parallèle avec une capacité  $C_0$ . Comme chaque groupe d'électrons a sa propre fréquence d'oscillation le circuit équivalent global est représenté sur la figure (I.4)



**Fig.1.4** circuit équivalent du diélectrique aux fréquences élevées ( $f > 10^{10}$  Hz).

**I.4.2. Polarisation par orientation :**

Etudiée par Debye, elle concerne l'orientation de molécules polaires sous l'action du champ électrique ; elle dépend de la température et apparaît dans les gaz, les liquides ainsi que dans les corps amorphes très visqueux. Dans certains corps, par exemple la cellulose, bien que la molécule soit fixe, certains groupements moléculaires peuvent s'orienter [6].

Ce type de polarisation provoque une dissipation d'énergie pendant la relaxation des dipôles ; par exemple, sous l'influence d'un champ alternatif, il apparaît des pertes diélectriques.

**I.4.2.1. Modèle de Pellat-Debye :**

Ce modèle [6] s'applique particulièrement bien au cas des diélectriques liquides dont chaque molécule peut être assimilée à un dipôle.

Polarisation sous un champ statique :

- Sous un champ statique, les dipôles s'orientent dans la même direction ; tous les phénomènes de polarisation sont concernés : la permittivité relative est représentée par  $\epsilon_s$  le temps de relaxation  $\tau$  d'un dipôle tournant dans un liquide de viscosité dynamique  $\eta$  a été calculé par Debye :

$$\tau = 4\pi \frac{\eta r^2}{kT} = \frac{3\eta v}{kT} \dots\dots\dots(I.20)$$

avec :  $v$  volume de la molécule

$k$  constante de Boltzmann

$r$  rayon de la molécule

$T$  température thermodynamique

La polarisation, calculée par Langevin et Debye,  $\vec{P}_d = N \alpha_d \epsilon_0 \vec{E}_1$  avec  $\alpha_d = \frac{p^2}{3 \cdot \epsilon_0 k T}$ .

$\vec{p}$  étant le moment dipolaire de la molécule.

La polarisation statique est égale à la somme des deux principaux phénomènes à savoir :

- ◆ Polarisation par orientation . On caractérise alors ce type de polarisation par  $\vec{P}_0$  .
- ◆ Polarisation par déformation (électronique et ionique) caractérisée par  $\vec{P}_\infty$

On a alors :  $\vec{P}_s = \vec{P}_0 + \vec{P}_\infty$  ., ce qui conduit à :

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_s - \vec{P}_\infty = \epsilon_0 [(\epsilon_s - 1) - (\epsilon_\infty - 1)] \vec{E}_0 \dots\dots\dots(I.21)$$

Pellat a montré que  $P_0(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [P_{0F} - P_0(t)] \dots\dots\dots(I.22)$$

$P_{0F}$  étant la polarisation finale de  $P_0$

La solution de cette équation est donnée par :

$$P_0(t) = P_0 [1 - \exp(-kt)] \dots\dots\dots(I.23)$$

$\tau$  étant le temps de relaxation.

Polarisation sous un champ alternatif :

- En appliquant un champ alternatif au diélectrique,

$$e(t) = E_0 \exp(j\omega t) \dots\dots\dots(I.24)$$

En tenant compte des relations (I.21), (I.22) et (I.23) on obtient :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} [\epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) e(t) - P_0(t)] \dots\dots\dots(I.25)$$

Cette équation a pour solution :

$$P_0(t) = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) e(t)}{1 + j\omega\tau_0} \dots\dots\dots(I.26)$$

et la polarisation totale s'exprime par :  $P(t) = P_0(t) + P_\infty(t)$ .

A partir de la relation (I.3) :  $d(t) = \epsilon_0 e(t) + P(t)$

on peut écrire : 
$$d(t) = \epsilon_0 \left( \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \right) e(t) \dots\dots\dots(I.27)$$

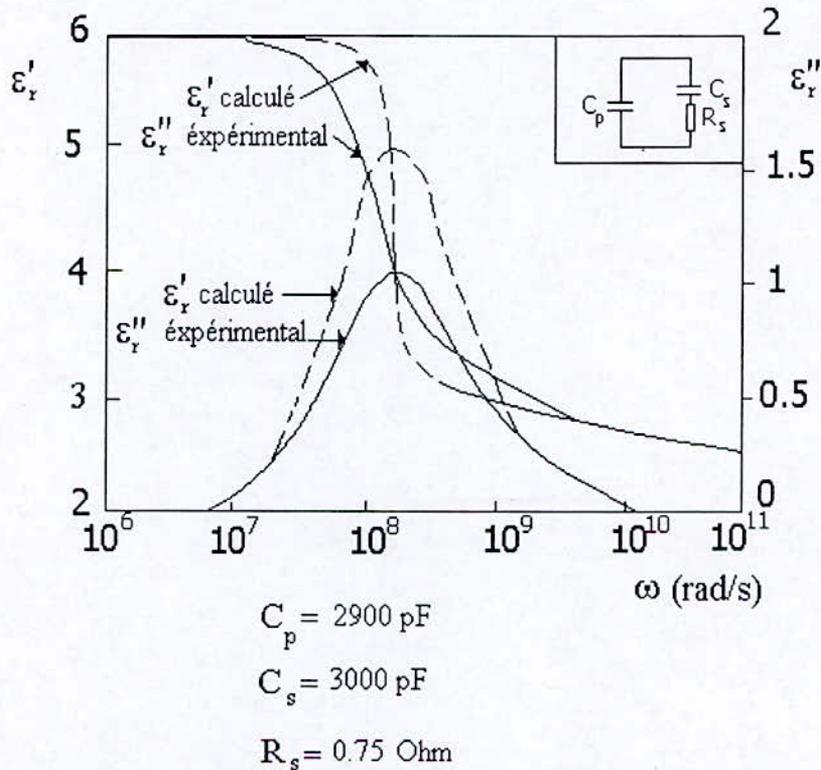
L'expression entre parenthèses représente la permittivité relative  $\epsilon_r$ , d'où:

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} = \epsilon'_r - j\epsilon''_r \dots\dots\dots(I.28)$$

avec

$$\epsilon'_r = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} \dots\dots\dots(I.29)$$

$$\epsilon''_r = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \dots\dots\dots(I.30)$$



**Fig. I.5 :** Représentation du phénomène de relaxation dipolaire  $10^7 < f < 10^{12}$

Pour trouver le schéma équivalent illustrant les deux formules de  $\epsilon'_r$  et  $\epsilon''_r$ .

Posons  $\epsilon_s - \epsilon_\infty = u$ .

La capacité complexe s'écrit donc : 
$$\bar{C} = \frac{\bar{\epsilon}C_0}{\epsilon_0} = (\epsilon'_r - j\epsilon''_r)C_0$$

$C_0$  capacité du condensateur sous vide.

En remplaçant  $\epsilon'_r$  et  $\epsilon''_r$  par leurs expressions on trouve :

$$\bar{C} = C_0\epsilon_\infty + \frac{C_0 \cdot u}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{u \cdot \omega\tau C_0}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Nous remarquons qu'il y a deux capacités en parallèles

$$C_p = C_0 \varepsilon_\infty$$

$$\bar{C}_s = \frac{u.C_0}{1 + \omega^2 \tau^2} - j \frac{u.\omega\tau C_0}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

L'impédance correspondant à cette capacité est :  $\bar{Z}_s = \frac{1}{j\bar{C}_s\omega} = \frac{1}{jC_0 u.\omega} + \frac{\tau}{u.C_0}$ .

Cette impédance est constituée donc d'une résistance  $R_s = \frac{\tau}{u.C_0}$  en série avec une capacité  $C_s = u.C_0$ .

La figure (I.5) représente aussi l'évolution des parties réelle et imaginaire de la permittivité relative due à un phénomène de relaxation en fonction de la fréquence.

Ce modèle ne tient pas compte de phénomène de conduction. Il a été très utilisé pour représenter les phénomènes de relaxation dans les liquides.

Les valeurs expérimentales et calculées de  $\varepsilon'_r$  et  $\varepsilon''_r$  [6] sont représentées dans la figure I.5. Dans Cette figure, un diélectrique liquide à base de chlorobiphnyles a été considéré. Les valeurs de  $C_p$ ,  $C_s$  et  $R_s$  sont indiquées sur la figure. On est convaincu actuellement que ce modèle constitue un cas limite idéal. En effet, tous les liquides présentent une large gamme de temps de relaxation.

### I.4.3. Polarisation interfaciale :

Ce type de polarisation apparaît dans les matériaux hétérogènes ou dans les diélectriques qui présentent des défauts tels que les impuretés, les lacunes, les joints de grains, etc...

Il provient de l'accumulation de charges au niveau des interfaces de différente phase constituant les matériaux lorsque ces différentes phases ont des permittivités et des conductivités différentes. Ce type de polarisation est encore appelé effet Maxwell-Wagner et se manifeste aux basses fréquences ( $10^{-1}$  à  $10^2$  Hz) suivant la conductivité de la charge. Cette polarisation est caractérisée par le temps d'établissement le plus long de tous : il peut atteindre plusieurs minutes et même davantage [5][6].

#### I.4.3.1. Modèle de Maxwell-Wagner :

Maxwell-Wagner [6] ont considéré l'association de deux isolants solides, de même épaisseur  $l$  ; placés entre les armatures d'un condensateur plan, ils sont soumis à la différence de potentiel  $V = V_0 \exp(j\omega t)$ .

L'application d'une différence de potentiel à cette association d'isolants revient à faire transiter des charges électriques à travers les deux matériaux et à les concentrer à leur séparation. En admettant le formalisme fondé sur le concept macroscopique d'admittance, on peut écrire les relations décrivant le régime d'équilibre ; cela signifie que les courants traversant les deux matériaux sont égaux ; on a :  $J = Y_1 e_1(t) = Y_2 e_2(t)$ .

Le potentiel total étant  $V = [e_1(t) + e_2(t)].l$ , on obtient facilement :  $J = \frac{V}{l} \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$

Appelons  $Y$  l'admittance d'un isolant homogène équivalent présentant les mêmes caractéristiques que ce système constitué par deux isolants :  $Y = \sigma + j\omega\epsilon_0\epsilon_r$

Avec  $\sigma$  conductivité de l'isolant.

il vient également :  $Y = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{(\sigma_1 + j\omega\epsilon_0\epsilon_{r1})(\sigma_2 + j\omega\epsilon_0\epsilon_{r1})}{\sigma_1 + \sigma_2 + j\omega\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}$

On remarque que :

pour  $\omega = 0$  (cas statique)  $Y_0 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \sigma_c$

et pour  $\omega \rightarrow \infty$   $Y_\infty = j\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} = j\omega\epsilon_0\epsilon_\infty$

en définissant  $\epsilon_\infty$ , correspondant à la polarisation  $P_\infty$  en phase avec le champ appliqué, soit :

$$\epsilon_\infty = \frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$$

On peut écrire :  $Y = \sigma_c + j\omega\epsilon_0\epsilon_\infty + Y_a$

$Y_a$  représente la contribution du phénomène de polarisation interfaciale, soit :  $Y_a = Y - \sigma_c - Y_\infty$

Si l'on pose :  $\tau = \epsilon_0 \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{\sigma_1 + \sigma_2}$  On a :  $Y_a = \frac{j\omega\epsilon_0(\epsilon_{r1}\sigma_2 - \epsilon_{r2}\sigma_1)^2}{(1 + j\omega\tau)(\sigma_1 + \sigma_2)^2(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}$

$Y_a = j\omega\epsilon_0\epsilon_\infty \frac{h}{1 + j\omega\tau}$  L'admittance devient  $Y_a = \frac{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega^2 h\tau}{1 + \omega^2\tau^2} + j\frac{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega h}{1 + \omega^2\tau^2}$

$h = \frac{(\epsilon_{r1}\sigma_1 - \epsilon_{r2}\sigma_2)^2}{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}(\sigma_1 + \sigma_2)^2}$  : constante d'absorption .

l'admittance  $Y$  s'écrit alors :  $Y = \sigma_c + \frac{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega^2 h\tau}{1 + \omega^2\tau^2} + j\epsilon_0\epsilon_\infty\omega \left(1 + \frac{h}{1 + \omega^2\tau^2}\right)$

on peut poser :

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty \left(1 + \frac{h}{1 + \omega^2\tau^2}\right)$$

$$\epsilon_r'' = \frac{1}{\epsilon_0\omega} \left(\sigma_c + \frac{\epsilon_0\epsilon_\infty\omega^2 h\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\right)$$

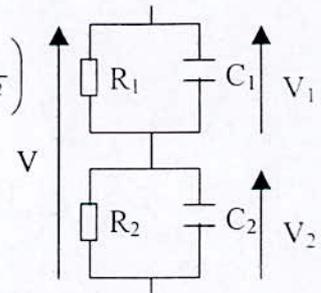


Fig.I.4: Schéma permettant le calcul du courant dû au phénomène de polarisation interfaciale

A une fréquence  $\omega$ , on peut écrire que :  $\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \Delta\epsilon_a$ .

Avec la contribution de permittivité due à l'absorption,

$$\Delta\epsilon_a = \frac{\epsilon_\infty h}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (\text{en négligeant } \sigma_c)$$

on trouve que la permittivité relative statique est :  $\epsilon_s = \epsilon_\infty(1 + h)$

il en résulte que :

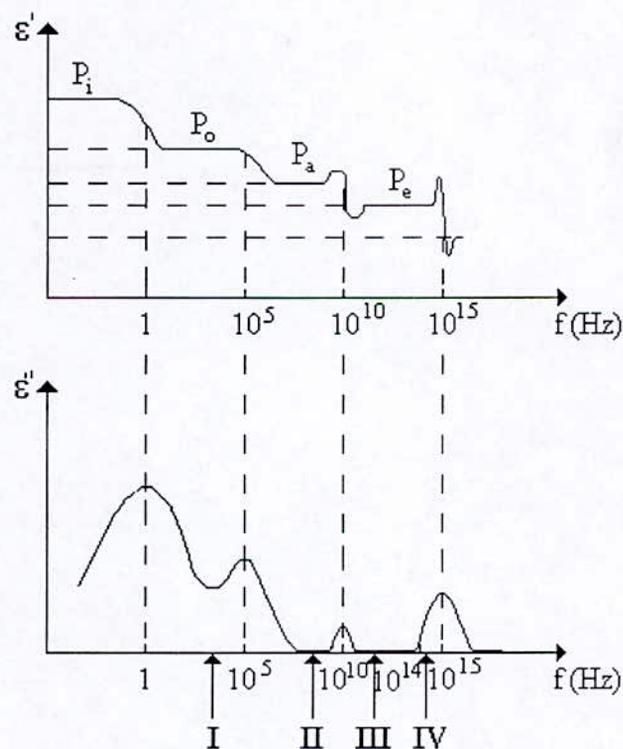
$$\epsilon'_r = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\epsilon''_r = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0 \omega} + \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Notons que ce modèle tient compte du phénomène de conduction ; si  $\sigma_c = 0$ , on retrouve les équations de Pellat-Debye. Il est alors impossible de distinguer ces deux phénomènes d'absorption.

#### 4.4 Polarisation totale :

Les matériaux diélectriques présentent certain nombre de phénomènes de relaxation donnés par (I.28) ainsi qu'un certain nombre de phénomènes de résonances donnés par (I.17) avec la polarisation interfaciale dans le cas des matériaux hétérogènes. Tous ces termes contribuent à la polarisabilité totale. Une courbe typique est représentée à la figure(I.5) [7] ; la relaxation se produit aux hyperfréquences,



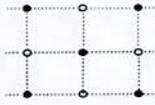
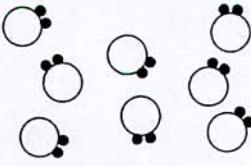
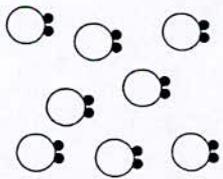
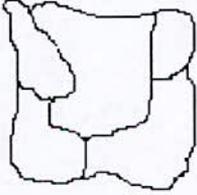
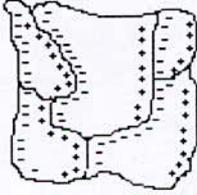
	f(Hz) fréquence
$P_a$	polarisation atomique
$P_e$	polarisation électronique
$P_i$	polarisation interfaciale
$P_o$	polarisation d'orientation

Fig.I.5 : influence des différents type de polarisation

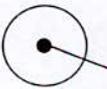
les résonances ionique et électronique se produisent respectivement dans l'infrarouge et dans le visible. La partie imaginaire de la permittivité n'existe que lorsque la partie réelle varie.

La polarisabilité totale est la somme de toutes les polarisabilités partielles :  $\alpha_t = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_o$ .

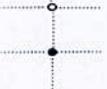
Le tableau suivant [5] représente les différents types de polarisation

Type de polarisation	E=0	E≠0
Polarisation ionique		
Polarisation électronique		
Polarisation par orientation		
Polarisation interfaciale		

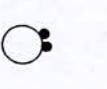
  



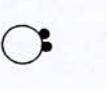
Atome  
Noyau



Anion



Cation



Molécule  
Polaire



Grain

**Tableau(I-3)** : représente les différents types de polarisation sous l'action d'un champ électrique

### I.5. CONSÉQUENCES DES DIFFÉRENTS PHÉNOMÈNES :

#### Pertes actives dans un matériau diélectrique :

Les paragraphes précédents nous ont montré que sous l'action d'un champ variable, à partir d'une certaine fréquence, nous observons un déphasage entre ce champ et l'établissement des dipôles. Ce déphasage provoque une dissipation responsable de pertes diélectriques.

À des fréquences élevées (1 à 2 MHz), ces pertes sont exploitées pour des utilisations industrielles telles que le four à micro-ondes, séchage du bois et textiles...

D'autre part, la conductivité  $\sigma$  peut ne pas être négligée. En effet, aux faibles champs électriques ( $\cong 10\text{kV/cm}$ ), la conduction présente généralement un caractère ohmique. Ses effets sont négligeables. Aux champs élevés, la conduction des isolants perd son caractère ohmique et donc augmente. Plusieurs théories rendent compte des courants élevés selon que les matériaux sont contaminés ou non par des impuretés.

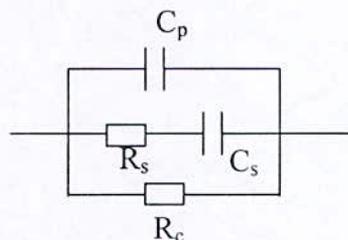
Pour mieux caractériser un diélectrique du point de vue pertes, il est alors, intéressant d'utiliser la tangente de l'angle de pertes  $\delta$ . Celui-ci est une fonction croissante de la température et dépend de la tension appliquée. Les valeurs usuelles de l'angle sont de l'ordre  $10^{-3}$ . En pratique, il n'est pas possible de s'affranchir des pertes par conduction, dans ce cas :

$$\text{tg } \delta = (\epsilon''(\omega) + (\sigma_c / \omega \epsilon_0)) / \epsilon'(\omega) \quad [1].$$

Compte tenu de l'existence d'une conductivité  $\sigma$ , on peut compléter le schéma équivalent du diélectrique en insérant par exemple une résistance supplémentaire au schéma de Pellat-Debay.

$R_c$  représente les pertes actives par conduction

Résistance d'isolement .



**Fig.I.6.** circuit complet équivalent d'un diélectrique.

## I.6. CONCLUSION :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressées au comportement d'un matériau diélectrique soumis à diverses contraintes.

Nous avons constaté que des pertes peuvent apparaître aux fréquences élevées et que des phénomènes électriques de résonance peuvent également avoir lieu aux très hautes fréquences, ce qui peut provoquer même un comportement selfique du diélectrique. Dans le prochain chapitre, nous présenterons des diélectriques composés appelés matériaux composites et nous tenterons de déterminer les permittivités effectives de ces matériaux.

# CHAPITRE II

## Caractérisation des matériaux composites

*Le monde appartient à ceux qui se lèvent tôt*

## II.1. INTRODUCTION :

Les produits isolants d'origine naturelle n'étant pas, dans tous les cas, d'emploi facile ou possible, ou encore n'ayant pas les performances souhaitées, l'industrie chimique a mis à la disposition des électrotechniciens des produits de synthèse qui possèdent de remarquables caractéristiques à tous les égards.

Parmi ces produits on trouve les matériaux composites. Dans ce chapitre, nous tenterons d'en donner une description générale, en représentant leurs principaux constituants (fibre ou inclusion et matrice). Enfin nous effectuerons une synthèse sur les principaux travaux effectués pour caractériser ce nouveau produit.

## II.2. PRÉSENTATION GÉNÉRALE :

### II.2.1. Constitution :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Ainsi, le matériau composite est constitué de deux éléments qui sont :

#### Le renfort :

Le renfort est un ensemble de fibres qui peuvent comporter plusieurs milliers de filaments. Celui-ci apporte toujours le teneur mécanique de la structure composite (la matrice apportant la forme et la teneur chimique). Dans une structure composite, le renfort peut représenter un taux massique de 20 à 80%, ce qui influe directement sur la tenue mécanique. La fibre de verre constitue le renfort essentiel du composite et fait l'objet d'une consommation très importante.

#### La matrice :

La matrice lie les fibres renforts, répartie les efforts, donne la forme voulue et apporte la tenue chimique de la structure (dont le squelette est le renfort). Les matrices les plus utilisées sont les thermodurcissables, mais aussi de plus en plus les polymères thermoplastiques.

Il y a d'autres constituants additifs tels que :

- ◆ L'interface, qui assure la compatibilité renfort-matrice, en transmettant les contraintes de l'un sur l'autre, sans déplacement relatif (bonne adhérence en couche fine : de l'ordre du micron).
- ◆ Des additifs spécifiques : catalyseur, ...

### II.2.2. Propriétés du composite :

La plus grande part du marché des composites repose sur des activités comme les transports, l'électricité et l'électronique, le matériel industriel et agricole, le bâtiment et les travaux publics, les sports et les loisirs. Dans le domaine de l'électricité, nous utilisons ce genre de matériaux dans les fonctions d'isolation électrique et anticorrosion qui sont ici exploitées dans les isolant classique et haut voltage (en montagne ou en zone polluée ), support de disjoncteur, noyaux de transformateurs, perche de sécurité, échelles isolantes.

#### Avantages des isolateurs composites :

La nature des matériaux utilisés, en plus du profil réduit, font que les isolateurs composites sont 5 à 8 fois plus légers qu'une chaîne ou un support équivalent en verre ou en porcelaine. Le noyau en fibres de verre est flexible et dont la solidité mécanique et la souplesse du matériau protecteur permettent de supporter sans dégradation des chocs importants pendant le transport, le montage et l'exploitation des isolateurs.

### II.3. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE :

Nous présentons dans ce paragraphe les principaux travaux se rapportant au matériau composite du point de vue expérimental (matériau soumis à la pollution) et théorique.

Les travaux théoriques concernent une approche analytique ou le plus souvent numérique du matériau composite.

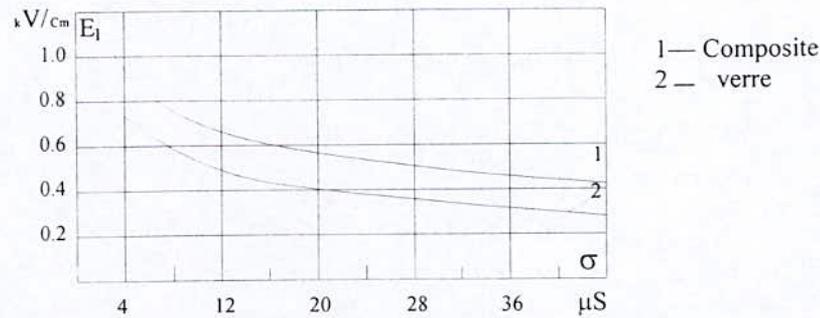
Les travaux ont rarement pas être validés par une expérimentation à l'exception du travail de M<sup>f</sup>.Boudida [1] qui comporte d'importants résultats expérimentaux et que ne présenterons à la fin de ce chapitre.

#### II.3.1. Composite sous pollution :

##### II.3.1.1. Travail de i.yu.gutman, V.R.Kinevsky, V.Z.Trifonov et L.L.Vladimirsky :

Ce travail [8] concerne des essais sur des chaînes d'isolateurs en verre ainsi que d'isolateurs composites à revêtement silicone sous tension continue et sous tension alternative à fréquence industrielle.

Les données sur la tension de countournement ont été obtenues pour une large gamme de niveau de pollution couvrant pratiquement l'ensemble des conditions probables en service. Il a été constaté que la sensibilité à la pollution des isolateurs composites en condition naturelle était plus faible que celle des isolateurs en verre. Les auteurs ont conclu que l'utilisation de la ligne de fuite est meilleure avec les isolateurs composites dont la valeur de tension countournement est 20 à 30% meilleure que celle des isolateurs de verre (figure II.1).



**Fig.II.1 :** la tension de countournement par unité de ligne de fuite des isolateurs en verre et composites en fonction de la conductivité de surface

D'autre part, des isolateurs en verre et composites ont été exposés pendant deux ans et demi dans une zone faiblement polluée dans des stations hors tension (classe 110 kV et 220 kV) et sous tension alternative et continue (330 kV). Le tableau II.1 donne les valeurs de la conductivité de surface  $\sigma$  des isolateurs en verre et composites. Les auteurs constatent que cette conductivité est 3 à 4 fois inférieure à celle des isolateurs en verre que ce soit sous tension ou hors tension.

Isolateurs	$\sigma \mu S$		
	Hors tension	Sous tension CA	Sous tension CC
Composites	0.2	0.3	0.4
verre	0.9	0.9	1.5

**Tableau II.1** Comparaison de  $\sigma$  pour les isolateurs verre et composite

D'autres essais ont été effectués sur deux jeux d'isolateurs composites qui avaient été installés sur une ligne 110 KV. Pendant 1 et 2 ans, les essais ont démontré que : la tension de countournement sous pollution naturelle est semblable à celle en condition sèche ; les caractéristiques mécaniques étaient semblables à celles d'isolateurs neufs. Donc deux ans en service n'affectent ni la tenue mécanique ni les caractéristiques isolantes des isolateurs composites.

### II.3.2. Etude analytique des matériaux composites :

Avant d'entamer la description et la caractérisation du matériau composite, il faut d'abord passer par des définitions du milieu effectif, milieu isotrope et anisotrope ainsi que la notion de la percolation.

Milieu effectif :

Une grandeur effective statique telle que la permittivité, la perméabilité ou la conductivité est une quantité attribuable aux milieux hétérogènes lorsque à l'échelle des longueurs, ils peuvent être considérés comme homogènes : on peut alors exprimer, par exemple, une permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  en fonction des différentes permittivités caractérisant le mélange, ou le matériau composite.

Milieu isotrope :

Si les inclusions sont orientées arbitrairement et dispersés aléatoirement, le milieu est alors isotrope. La permittivité effective, la dépolariation et la polarisabilité sont des constantes scalaires respectivement  $\epsilon_{\text{eff}}$ ,  $L$  et  $\alpha$ .

Milieu anisotrope :

Si les inclusions sont dissymétriques et orientées dans une même direction, le milieu est anisotrope. La permittivité effective, la dépolariation et la polarisabilité sont des tenseurs diagonaux respectivement  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$ ,  $\bar{L}$  et  $\bar{\alpha}$ .

Le concept de la percolation :

La percolation est la transition de connectivité entre des objets qui peuvent se toucher, son nom est dérivé du passage de l'eau à travers le café moulu de percolateur.

Elle est appliquée chaque fois que le problème implique des connexions dans des systèmes hétérogènes et désordonnés [1]. En effet, considérons un paramètre  $f$  définissant le degré moyen de connexion entre plusieurs sous unité d'un système quelconque. Lorsque  $f=0$ , toutes les sous unités sont totalement isolées les une des autres. Par contre, lorsque  $f=1$ , toutes les sous unités sont connectées à leurs voisines ; il y a donc connexion du système d'un bout à l'autre.

**II.3.2.1. Description géométrique des matériaux (les types d'inclusions) :**

La géométrie des inclusions est caractérisée par leurs formes, leurs tailles, la fraction volumique, leurs dispositions etc. Si l'ensemble de ces paramètres concourent à déterminer les propriétés du composite, les modélisations descriptives ne tiendront compte que de certains paramètres en jeu. Par exemple, la forme des inclusions est approchée soit par des sphères, par des cylindres ou par des ellipsoïdes.

Le calcul des permittivités effectives est donc généralement réalisé pour trois types d'inclusions : sphériques, cylindriques et ellipsoïdales.

**II.3.2.1.1. Matériaux à inclusions sphériques :**

Le composite est constitué d'inclusions sphériques de rayon  $r$ , de permittivité  $\epsilon_1$  et disposées

périodiquement dans une matrice hôte (cubique) de permittivité  $\epsilon_2$ . Le composite étant périodique, on peut ramener l'étude de ce matériau hétérogène à celle d'une cellule élémentaire constituée d'une inclusion sphérique de rayon  $r$  et centrée dans un cube formant la matrice hôte d'arête  $l$  (figure II.4).

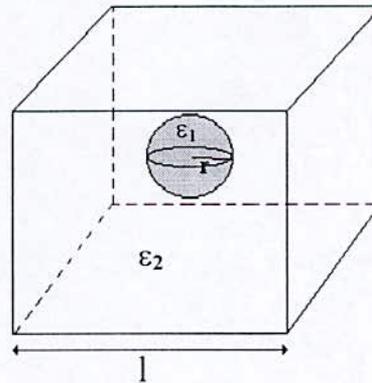


Fig.II.2: cellule unité pour une inclusion sphérique

La fraction volumique  $f_v$  pour une inclusion de rayon inférieure à  $l/2$ , c'est à dire pour des sphères isolées, vaut pour  $r \leq l/2$

$$f_v = \frac{4 \pi r^3}{3 l^3} \dots\dots\dots (II.1)$$

Les inclusions sphériques se touchent à  $r = l/2$ .

La fraction volumique vaut alors :  $f_v = \frac{\pi}{6} \cong 0.523$

Cette valeur de  $f_v$  est appelée transition de connexion. Au-delà de ce seuil, c'est à dire à  $r > l/2$ , les sphères s'interceptent et fusionnent en dehors de chaque cellule élémentaire, la fraction volumique est calculée à partir de la fraction de la cellule élémentaire tout en excluant les six calottes de volume  $v_x$  (pour une arête de  $l = 1\text{mm}$ )

$$v_x = \frac{\pi}{3}(r-1)^2(2r+1) \dots\dots\dots (II.2)$$

D'où 
$$f_v = \frac{\frac{4}{3}\pi.r^3 - 6v_x}{l^3} = \frac{4}{3}\pi.r^3 - 2\pi(r-1)^2(2r+1) \dots\dots\dots (II.3)$$

La permittivité effective du mélange de matériau avec inclusions sphérique peut être donnée analytiquement par la formule de Rayleigh [9] pour de faibles fractions volumiques

$$f_v \leq 0.2 :$$

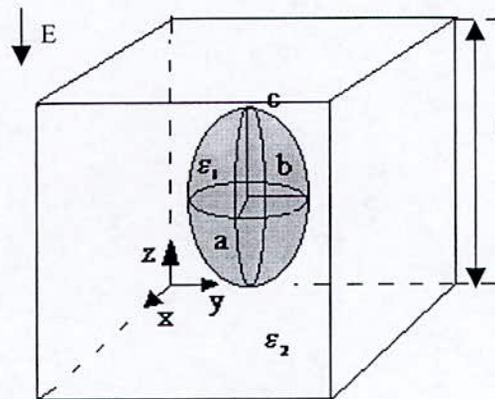
$$\frac{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_2}{\epsilon_{\text{eff}} + 2\epsilon_2} = f_v \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \dots\dots\dots(\text{II.4})$$

Pour des concentrations de particules plus importantes, la permittivité du mélange est donnée par la formule de Böttcher :

$$\frac{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_2}{3\epsilon_{\text{eff}}} = f_v \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \dots\dots\dots(\text{II.5})$$

**II.3.2.1.2. Matériau à inclusions ellipsoïdales :**

La cellule élémentaire est cette fois constituée d'une matrice hôte cubique au centre de laquelle se trouve une inclusion ellipsoïdale (figure II.6). Ce type de matériau étant anisotrope, sa permittivité effective est différente suivant les directions ox, oy et oz :  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$



**Fig.II.3.** cellule unité pour une inclusion ellipsoïdale

La fraction volumique des inclusions sera donc :

$$f_v = \frac{4 \pi abc}{3 l^3} \dots\dots\dots(\text{II.6})$$

Les permittivités effectives suivant les 3 directions x, y et z sont donc données par l'équation analytique suivante :

$$\epsilon_i = \epsilon_2 + \frac{N \alpha_i \epsilon_i}{\epsilon_2 - N \alpha_i L_i} \dots\dots\dots(\text{II.7})$$

i = x, y, z

N,  $\alpha_i$  et  $L_i$  étant respectivement le nombre d'inclusions, la polarisabilité et le coefficient de dépolarisation de l'ellipsoïde. Ce dernier coefficient est égal à :

$$L_x = \frac{abc}{2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+a^2)\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}} \dots\dots\dots(\text{II.8})$$

$L_y$  et  $L_z$  s'obtiennent par permutation circulaire sur  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Cette intégrale n'admet pas de solution analytique (pour le cas des ellipsoïdes ( $a > b > c$ )), et doit être résolue numériquement. Les coefficients de dépolarisation doivent satisfaire de relation :  $L_x + L_y + L_z = 1$

Pour le cas d'un ellipsoïde de révolution allongé ( $a > b = c$ ) :

$$L_x = \frac{ab^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+a^2)(s+b^2)\sqrt{s+a^2}} \dots\dots\dots(\text{II.9})$$

Le calcul analytique de  $L_x$  pour le cas d'un ellipsoïde de révolution allongé donne :

$$L_x = \frac{1-e^2}{2e^2} \left[ \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) - 2e \right] \dots\dots\dots(\text{II.10.a})$$

avec  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

Si par contre, on considère le cas d'un ellipsoïde de révolution aplati ( $a = b > c$ ),  $L_z$  sera égale à :

$$L_z = \frac{1+e^2}{e^3} (e - \arctan(e)) \dots\dots\dots(\text{II.10.b})$$

avec  $e = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}$

La polarisabilité des inclusions est déterminée par :

$$\alpha_i = v_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)L_i} \dots\dots\dots(\text{II.11})$$

$i = x, y, z$  où  $v_0 = \frac{4}{3} \pi abc$  est le volume de l'ellipsoïde.

En remplaçant (II.7) dans (II.11), on obtient la relation suivante (attribuée à Sillars) [10] :

$$\epsilon_i = \left[ 1 + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)f_v}{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)(1 - f_v)L_i} \right] \dots\dots\dots(\text{II.12})$$

avec  $i = x, y, z$

**II.3.2.1.3. Matériaux à inclusions cylindriques :**

La cellule élémentaire est constituée par une inclusion cylindrique disposée verticalement au centre d'une matrice cubique; comme le cas précédent, ce matériau est aussi anisotrope (figure II.4).

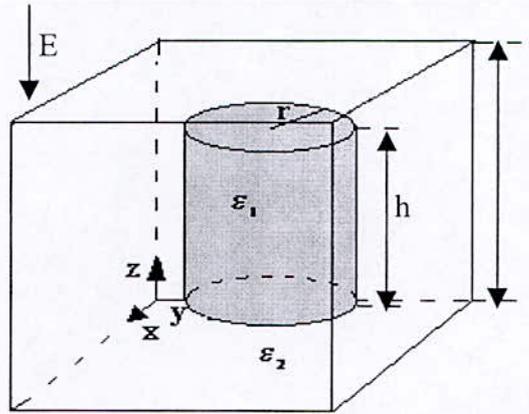


Fig.II.4 : Cellule unité pour une inclusion

La fraction volumique de l'inclusion est égale à :  $f_v = \frac{\pi.r^2.h}{l^3}$

On distingue deux types d'inclusion qu'on peut assimiler à des disques ( $r \gg h$ ) ou à des barreaux ( $r \ll h$ ). Dans ces deux cas, la permittivité effective complexe suivant la direction du champ électrique appliqué, c'est-à-dire l'axe (oz), est différente de celles suivant l'axe (ox) et (oy).

a- Cas des inclusions sous forme de barreaux :

La permittivité effective suivant la direction perpendiculaire au champ électrique est donnée par la formule de Rayleigh en deux dimension pour un cylindre infiniment long :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_2 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + f_v(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - f_v(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \dots\dots\dots(\text{II.13})$$

Quant à la permittivité effective suivant la direction électrique appliquée, c'est-à-dire parallèle à l'axe du cylindre, elle est donnée par la formule de Van Beek[10] :

$$\epsilon_z = \epsilon_2 + \frac{1}{3} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(5\epsilon_a + \epsilon_1)}{\epsilon_a + \epsilon_2} f_v \dots\dots\dots(\text{II.14})$$

$\epsilon_a$  représente la permittivité apparente du milieu ; sa valeur est comprise dans l'intervalle :

$$\epsilon_2 \leq \epsilon_a \leq \epsilon_{\text{eff}} ;$$

$$\text{avec } L_x = L_y = (0.5 - L_z/2)$$

Sachant que  $L_z/2 \ll 1$ .

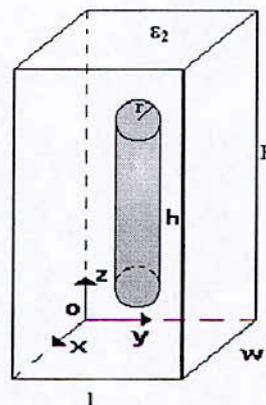


Fig. II.5 : cellule unité pour une inclusion sous forme de barreaux

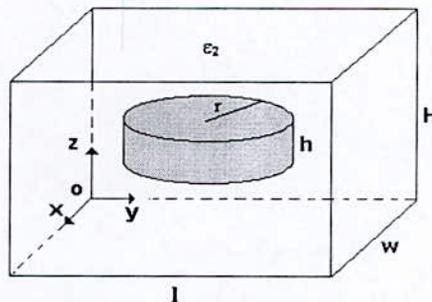
*b- Cas des inclusions sous forme de disques :*

Les permittivités effectives sont calculées à partir des formules de Weiner [5]. Le champ est appliqué suivant la direction perpendiculaire aux disques. En supposant que les différents constituants sont groupés en série, la permittivité est donnée par la relation :

$$\frac{1}{\epsilon_z} = \frac{f_v}{\epsilon_1} + \frac{1-f_v}{\epsilon_2} \dots\dots\dots(\text{II.15})$$

Si par contre, le champ électrique est parallèle aux lamelles (inclusions sous forme de disques ), la permittivité sera donnée par la relation (en supposant que les constituants sont groupés en parallèles) :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = f_v \cdot \epsilon_1 + (1 - f_v) \epsilon_2 \dots\dots\dots(\text{II.16})$$



**Fig. II.6 :** cellule unité pour une inclusion sous forme de disque

**II.3.2.2. Etude numérique du matériau composite :**

Parmi les méthodes numériques appliquées pour traiter les problèmes des matériaux hétérogènes, on peut citer celle basées sur les différences finies (DF), les éléments finis (EF), ou encore les équations intégrales de frontières (EIF). Plusieurs auteurs ont utilisé ces méthodes numériques afin de déterminer les propriétés effectives de ces systèmes [1, 4, 11,12].

Travail de Philippe clauzon :

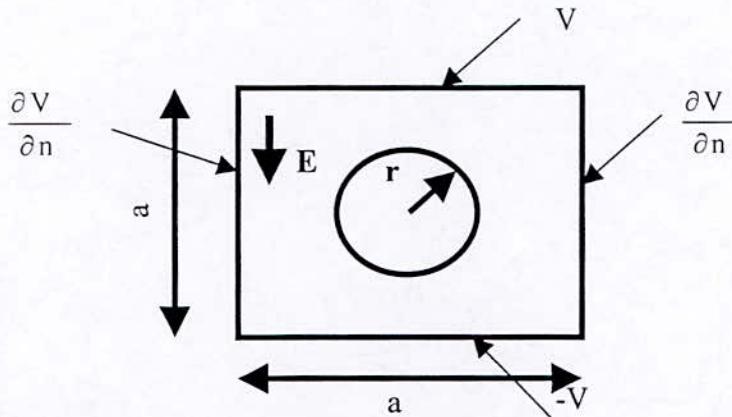
Un travail a été effectué par Philippe Clauzon [11] sur des matériaux diélectriques composites à inclusions présentant des pertes.

L’auteur a considéré que ce matériau se présente sous la forme d’une matrice diélectrique sans pertes dont les caractéristiques sont celle de l’air, matrice dans laquelle sont noyées de façon périodique, des inclusions cylindriques débouchant de chaque côté du matériau. Lorsque le matériau est au-dessous du seuil de percolation, les limites de la matrice forment un carré et l’inclusion est un cercle positionné au centre de la matrice. Quand le matériau se trouve au-dessus de seuil de percolation, l’inclusion est un cercle au quel ont été retirées les quatre parties du cercle qui dépassent les limites de la matrice.

$$f_v = \frac{\pi R^2 - \left[ R^2 \arccos \left( \frac{a}{2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2} \left( \frac{a}{2} \right) \right]}{a^2} \quad \text{Au-dessus du seuil de percolation}$$

$$f_v = \frac{\pi R^2}{a^2} \quad \text{Au-dessous du seuil de percolation}$$

Les paramètres variables dans cette étude sont la fréquence, la fraction volumique des inclusions et leurs permittivités. Les simulations ont été réalisées à partir d'une cellule élémentaire (**fig.II.7**) représentative de l'ensemble du matériau.



**Fig.II.7 :** Géométrie et conditions aux limites des simulations (pour une cellule élémentaire)

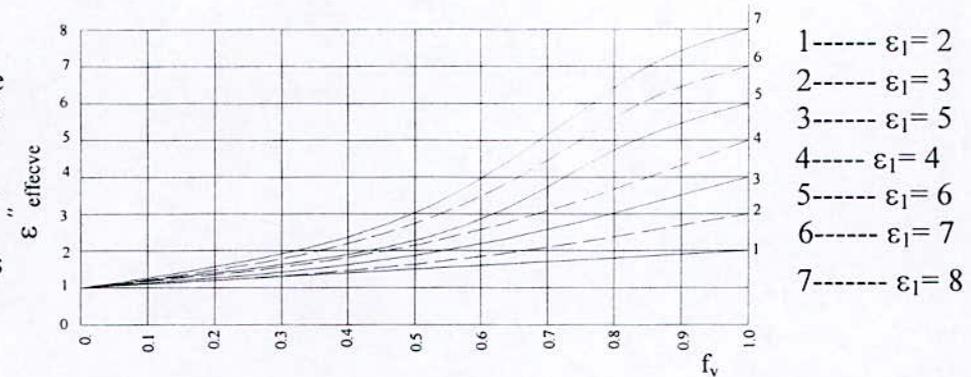
Les inclusions présentent de pertes diélectriques, leur permittivité est donc complexe  $\epsilon_{inc} = \epsilon'_1 - j\epsilon''_1$ , la partie imaginaire de cette permittivité traduit donc l'existence des pertes diélectriques.

La partie imaginaire est restée toujours fixée au centième de la partie réelle afin de ne pas alourdir le calcul numérique.

La partie réelle de la permittivité effective est calculée à partir de l'expression de l'énergie électrostatique totale, tandis que la partie imaginaire est obtenue à partir de la puissance active dissipée.

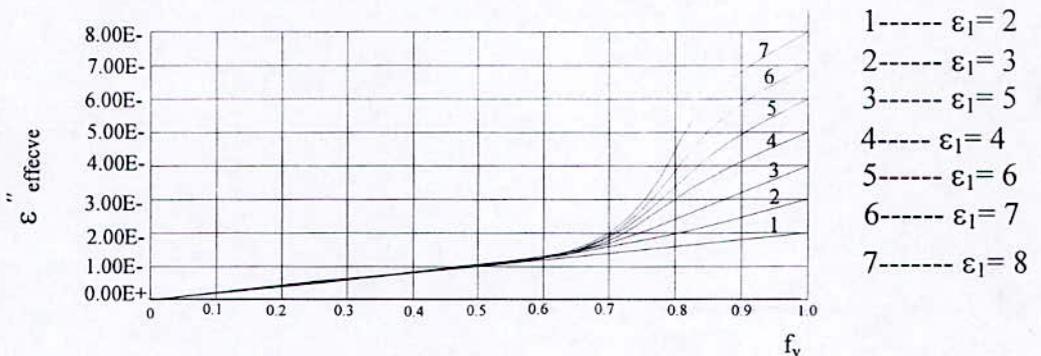
Les figures (II.8,II.9,II.10) permettent de rendre compte de l'évolution des propriétés du matériau homogène équivalent qui changent celons les propriétés des inclusions. L'auteur a noté qu'au seuil de la percolation ( $f_v = 0.785$ ) une évolution appréciable des propriétés effectives, particulièrement la tangente de l'angle de pertes effectif.

Partie réelle de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique des inclusions



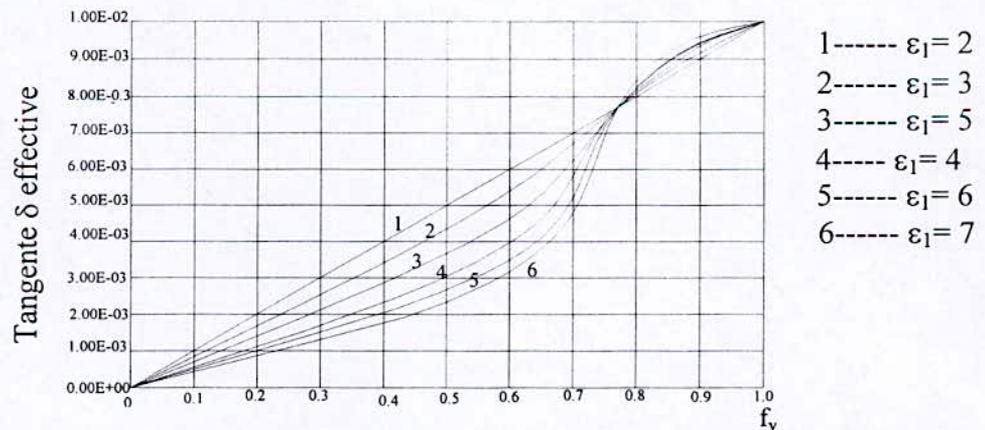
**Fig. II.8 :** Evolution de la partie réelle de la permittivité du matériau pour différentes valeurs de la partie réelle de la permittivité des inclusions.

Partie imaginaire de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique



**Fig.II.9 :** Evolution de la partie imaginaire de la permittivité du matériau pour différentes valeurs de la partie réelle de la permittivité des inclusions.

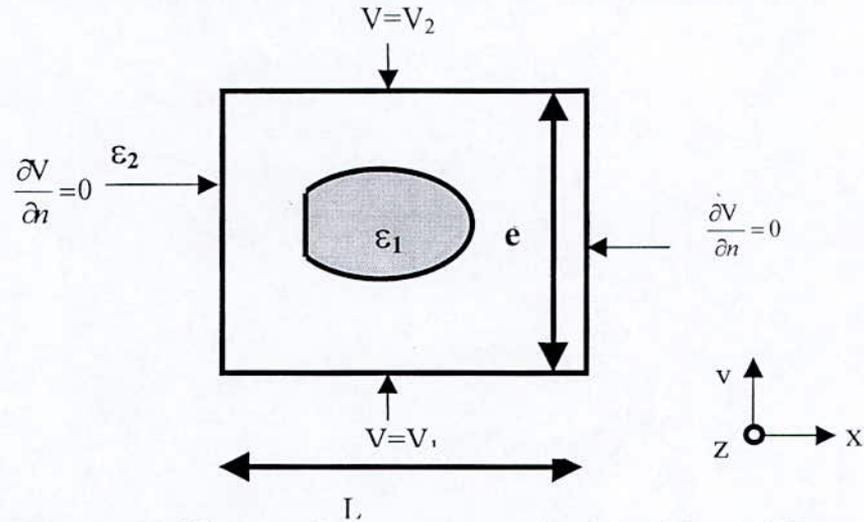
Tangente de l'angle de perte effectif en fonction de la fraction volumique



**Fig. II.10 :** Evolution de la tangente de l'angle de pertes effectif du matériaux en fonction de la fraction volumique de la partie réelle de la permittivité des inclusions

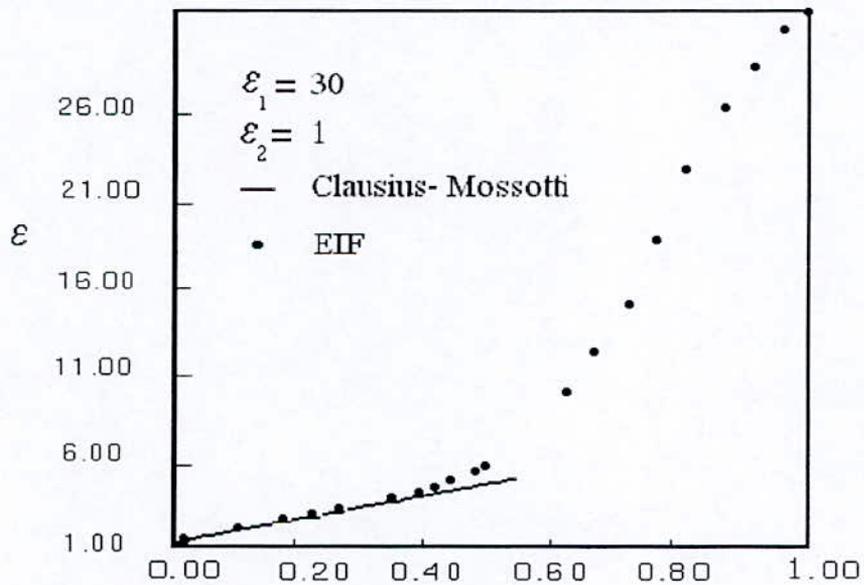
*Travail de B.Sareni :*

Un autre travail a été effectué par B.Sareni [4] basé sur les méthodes (EIF) et (EF) où Le composite est considéré périodique à deux phases. Il a tenu compte de la propriété de symétrie et de périodicité, le composite est réduit à une cellule élémentaire (figure II.11 ).



**Fig.II.11** : Modélisation d'un composite périodique 2D par EF

Les résultats obtenus à l'aide de la méthode (EIF) montrent la limitation du modèle analytique classique ( équation II.5) aux faibles concentrations de la phase dispersée ( $f < 0.35$ ), en particulier lorsque le rapport de permittivité des deux milieux est élevé. (Figure II.12 ).



**Fig. II.12** : Permittivité effective  $\epsilon$  d'un composite périodique à inclusions sphériques.

De même pour un composite périodique à inclusions ellipsoïdales (cas d'un milieu anisotrope  $\epsilon_z = \epsilon_y, \epsilon_z \neq \epsilon_x$ ), la permittivité dans les trois directions x, y et z est représentée sur la figure (II.13), une comparaison est faite avec la formule de Sillar (II.12).

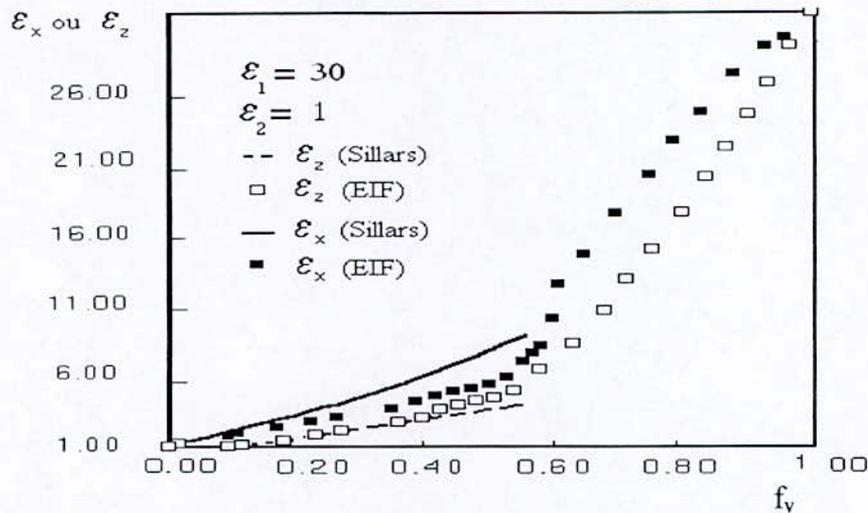


Fig. II.13: Permittivité effective d'un composite périodique à inclusions ellipsoïdales de demi-axes  $b = c = a/4$

La différence entre la permittivité obtenue par le modèle analytique (équation II.12) et celle déduite par la méthode numérique (EIF) est très marquée en particulier dans la direction x où l'interaction entre les particules est plus importante.

Permittivité effective de composites à structure désordonnée :

L'influence de la forme des inclusions sur la permittivité effective des composites est illustrée par la figure (II.14).

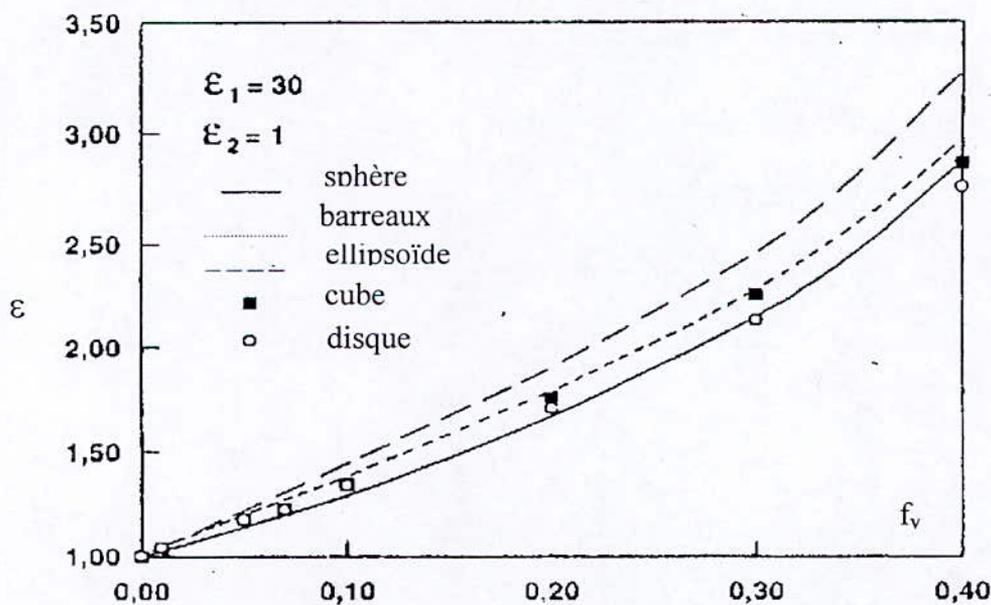
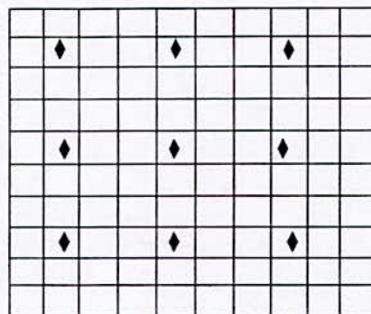


Fig.II.14. influence de la forme des inclusions sur la permittivité effective du milieu

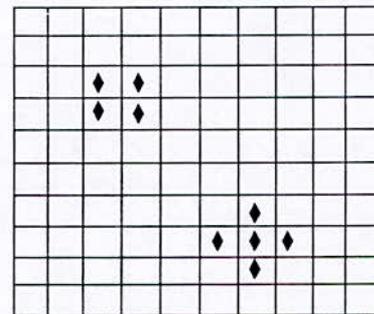
L'introduction d'inhomogénéités de permittivité supérieure à celle du milieu hôte tend à augmenter la permittivité effective d'autant plus que celles –ci ont une forme allongée (ellipsoïdes, barreaux ). Cette dépendance n'a pas été constatée lorsque le rapport des permittivités des deux milieux est faible (très inférieur à 10).

Outre l'orientation et la forme des inclusions, la répartition de celle-ci dans le milieu conditionne la permittivité de composite. L'influence de la distribution d'inhomogénéités est analysée en deux dimensions en dupliquant plusieurs cellules élémentaires d'un composite périodique mais en dispersant les inclusions selon une concentration  $C$ , définie par le rapport du nombre d'inclusion sur le nombre total de cellules.

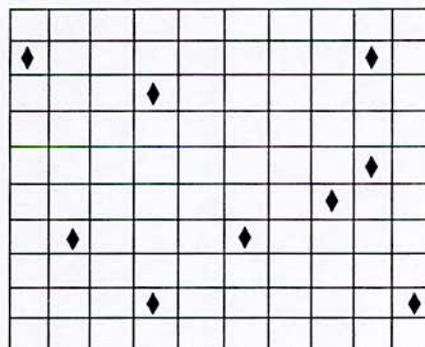
La permittivité effective est alors déterminée par la méthode des éléments finis pour trois types de distribution des inhomogénéité : une distribution régulière quasi-équivalente composite périodique (de faible désordre), une distribution en agglomérat où des inclusions se regroupent entre elles, et une distribution aléatoire (voir figure II.15).



Distribution régulière



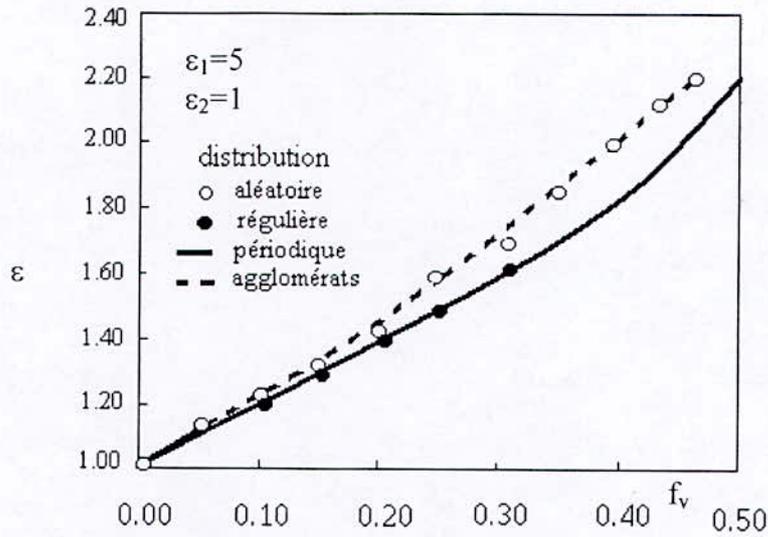
Distribution en agglomérat



Distribution aléatoire

**Fig.II.15 :** *Distribution des inclusions.*

Les résultats obtenus représentés sur la figure II.16 montrent que le désordre a tendance à modifier les caractéristiques des diélectriques du milieu.



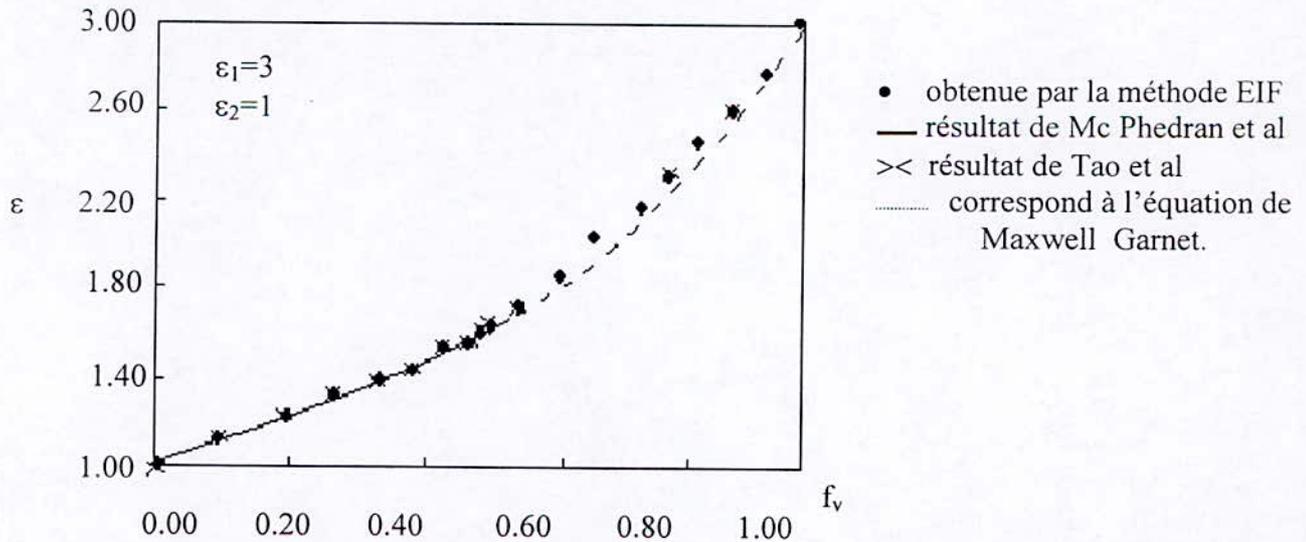
**Fig.II.16 :** Influence de la distribution des inclusions sur la permittivité effective du milieu

Travail de B Sareni, L.Krähenbühl et A. Berouel :

Un autre travail a été effectué par B Sareni, L.Krähenbühl et A Berouel [12], pour montrer l'influence de la forme des inclusions sur la permittivité effective. Les auteurs ont pris deux valeurs différentes de permittivité des inclusions  $\epsilon_1=3$  et  $\epsilon_1=30$ .

Inclusion sphérique

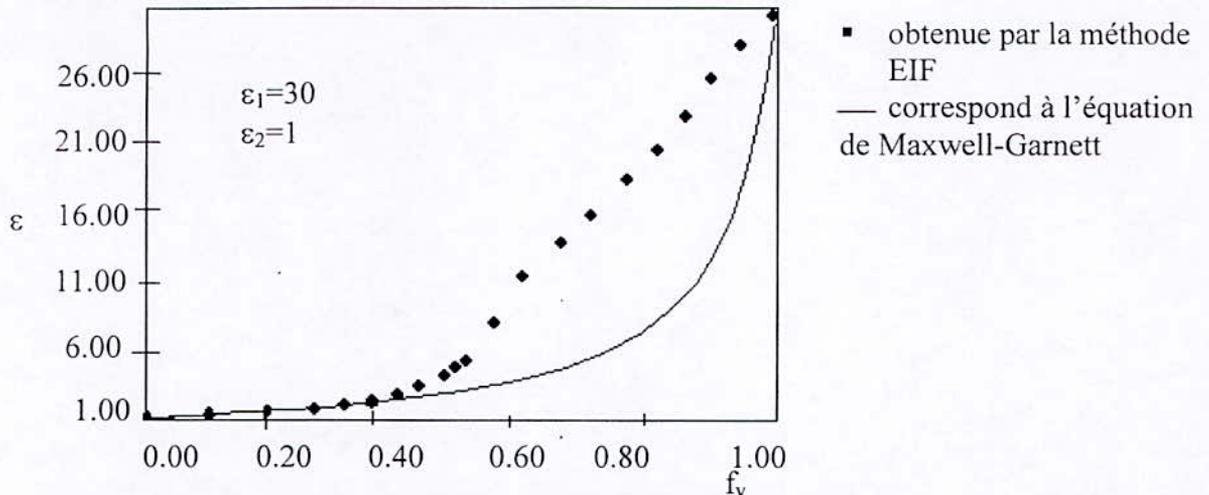
Les auteurs ont comparé leurs résultats avec ceux dérivés de l'équation de Maxwell/Granett [12] et les données numériques obtenues par Mc phedrane et al [12], et Toa et al [12] pour  $\epsilon_1=3$  et  $\epsilon_2=1$  (figure II.17)



**Fig.II.17 :** la permittivité effective en fonction de la fraction volumique pour un composite périodique tridimensionnel à inclusions sphériques.

Dans ce cas il apparaît que les valeurs calculées par la méthode (EIF) concordent d'une manière satisfaisante avec celles calculées analytiquement.

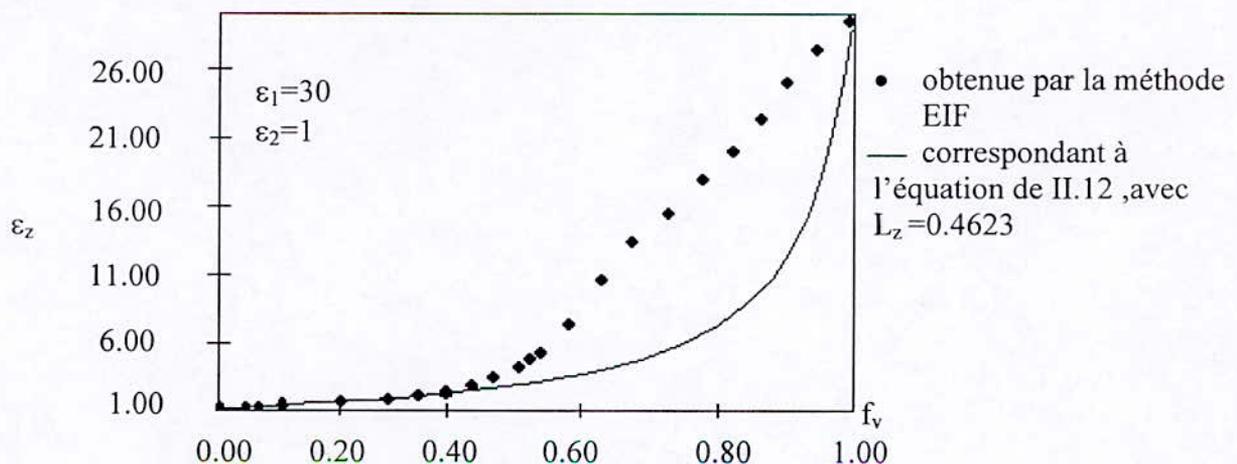
Cet accord n'est pas toujours satisfait, ceci est confirmé sur la figure II.18 qui montre la limite de la théorie de Maxwell/granett [12] pour des fractions supérieures à 0.4, où le rapport entre les permittivités des constituants est élevé ( $\epsilon_1 = 30$  et  $\epsilon_2 = 3$ ).



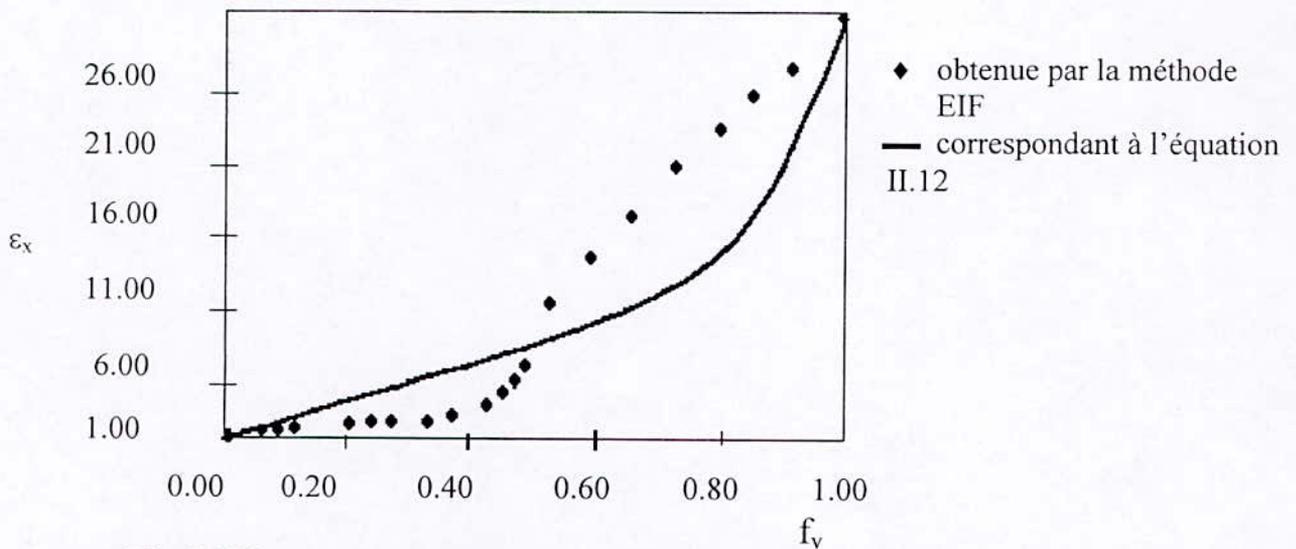
**Fig.II.18 :** la permittivité effective en fonction de la fraction volumique pour un composite périodique tridimensionnel à inclusions sphériques

#### Inclusions ellipsoïdales :

Pour un composite à inclusions ellipsoïdales les auteurs ont pris  $b = c = a/4$ ,  $l = 8$  et  $w = H = 2$ . Les figures (II.19) et (II.20) permettent de comparer les résultats numériques obtenus par (EIF), pour la permittivité effective du milieu dans les directions x et z respectivement ( $\epsilon_1 = 30$  et  $\epsilon_2 = 1$ ), et ceux obtenus de l'équation (II.12). Elles montrent clairement la limite du modèle analytique, pour des fractions volumiques  $f_v$  supérieures à 0.2.



**Fig.II.19 :** la permittivité effective en fonction de la fraction volumique pour un composite périodique tridimensionnel à inclusions ellipsoïdales ( $b=c=a/4$ ).



**Fig.II.20 :** la permittivité effective en fonction de la fraction volumique pour un composite périodique tridimensionnel à inclusions ellipsoïdale ( $b=c=a/4$ ).

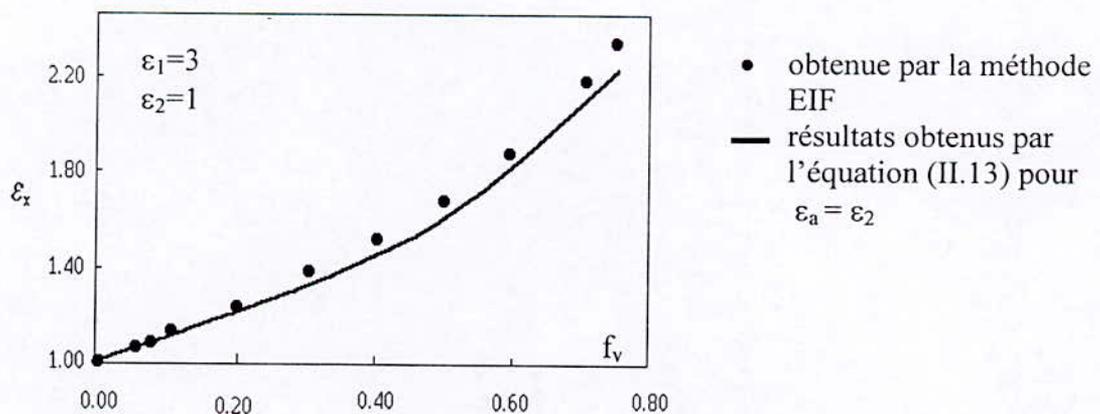
$$L_x = 0.0754$$

Inclusions cylindriques sous forme de barreaux :

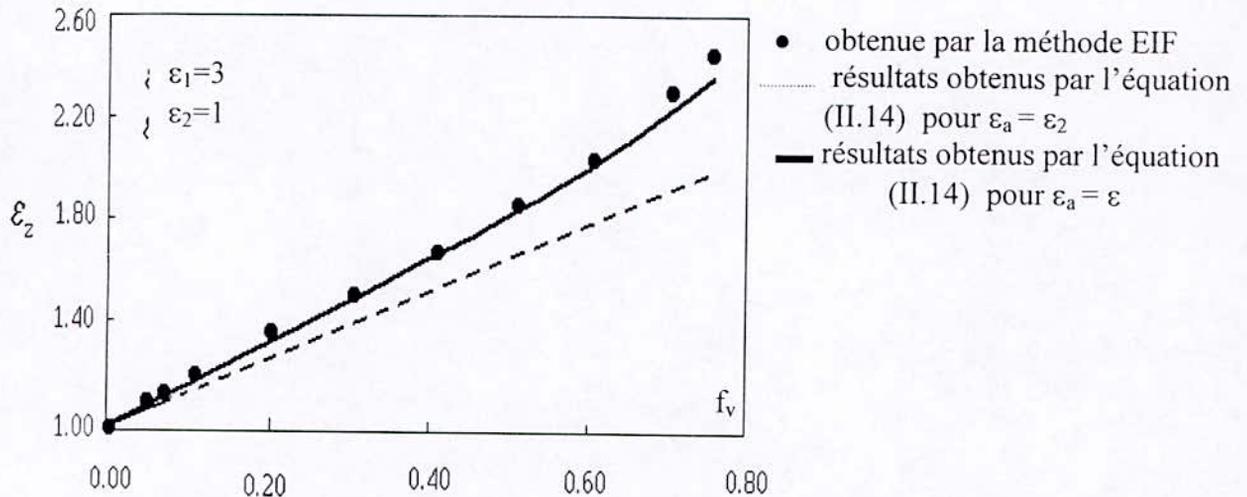
Pour des composites à inclusions cylindriques la simulation est faite pour  $H=8$ ,  $l=w=1$  et  $h=8a$ ,  $r=a/2$  voire figure II.5.

Les figures (II.21) et (II.22) illustrent la permittivité effective dans les directions  $x$  et  $z$  en fonction de la fraction volumique. Les auteurs ont noté qu'à l'aide de la méthode (EIF) les valeurs de  $\epsilon_x$  sont conformes à celle obtenues par l'équation (II.13) pour les inclusions à faible permittivité  $\epsilon_1=3$ , mais pour des valeurs élevées  $\epsilon_1=30$  une différence appréciable est notée.

Dans la direction  $z$  on observe que les données numériques pour des inclusions à faible permittivité  $\epsilon_1=3$  sont bien présentées par l'équation (II.14).



**Fig.II.21 :** la permittivité effective dans la direction  $x$  en fonction de la fraction volumique pour un composite de la fraction volumique périodique tridimensionnel à inclusions cylindriques



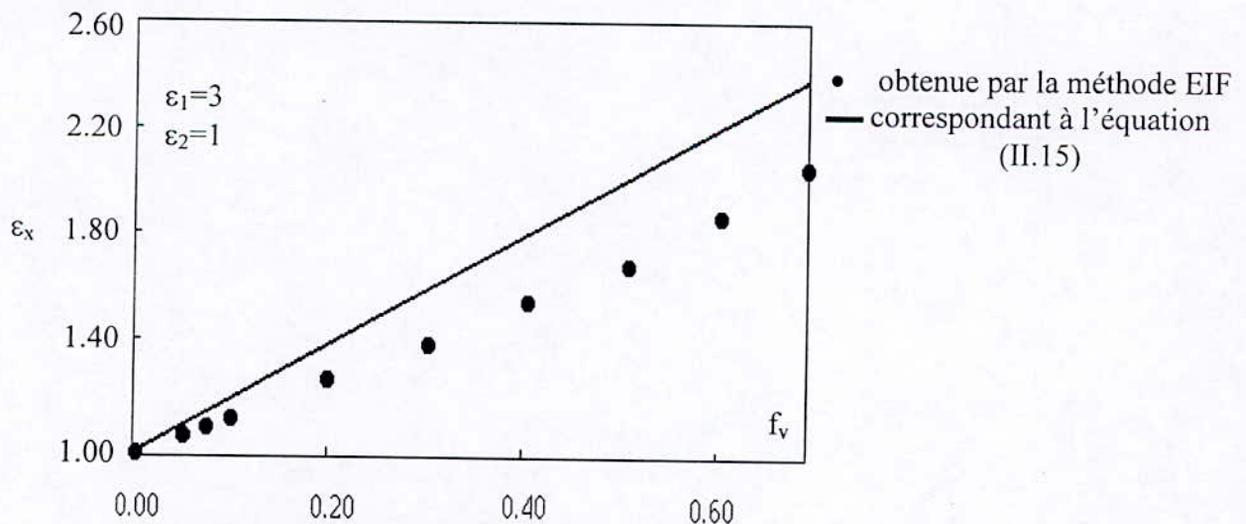
**Fig.II.22** : la permittivité effective dans la direction z en fonction de la fraction volumique périodique tridimensionnel à inclusions cylindriques

Inclusion cylindrique sous forme de disque :

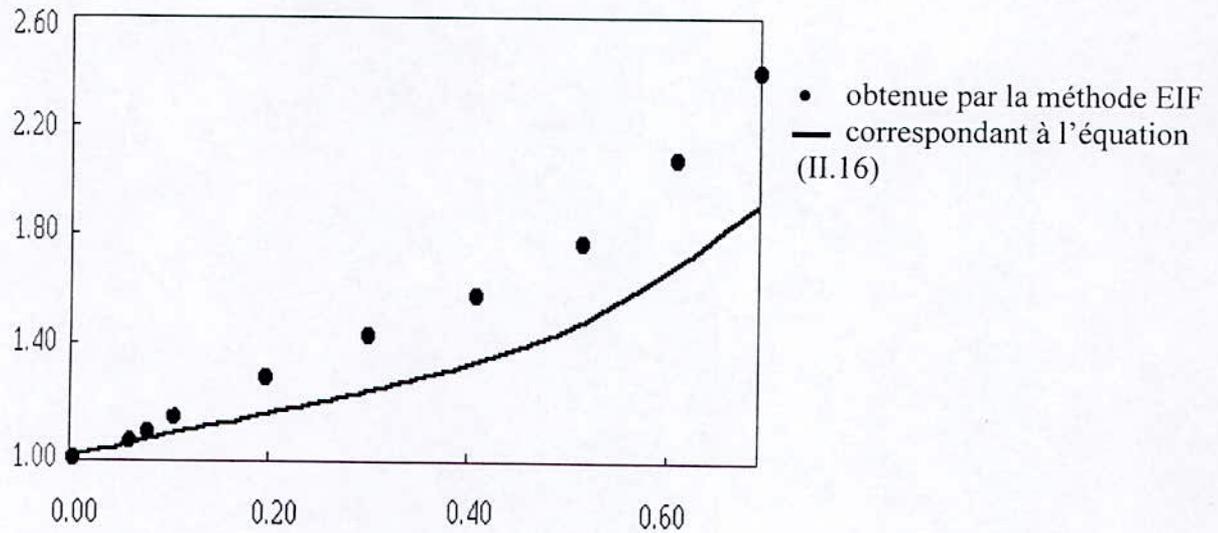
On passe maintenant au cas des inclusions sous forme de disque, la cellule élémentaire est caractérisée par un paramètre singulier a en tenant  $2r = a, l = w = 1, H = 8$  et  $h = 8a$ .

Les valeurs de la permittivité effective, dans les directions x et z; obtenues par la méthode (EIF) pour des inclusions à faible permittivité ( $\epsilon_1 = 3$ ) sont représentées sur les figures (II.23) et (II.24).

Les auteurs ont déduit de ces figures que les équations (II.14) et (II.15) peuvent évaluer la permittivité effective de ces structures.



**Fig.II.23** : la permittivité effective dans la direction x en fonction de la fraction volumique pour un composite périodique tridimensionnel à inclusions sous forme de disques.



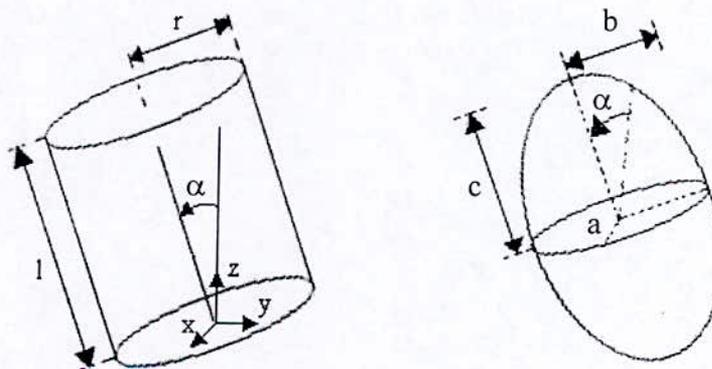
Conclusion des auteurs :

Ce travail a pour avantage de calculer la permittivité effective du milieu hétérogène pour une large gamme de rapport des permittivité de la matrice des inclusions où les modèles analytiques restent toujours limités utilisés dans les faibles fractions. Ce travail montre aussi influence de la forme des inclusions et leurs distribution dans la matrice sur la permittivité effective.

Travail de M<sup>r</sup> Boudida :

M<sup>r</sup> Boudida a complété l'étude sur les matériaux composites en illustrant l'influence de l'orientation des inclusions (cylindriques et ellipsoïdales) par rapport au champ.

Cette orientation des inclusions variant entre  $0^0$  et  $90^0$  (voir la figure (II.25)).



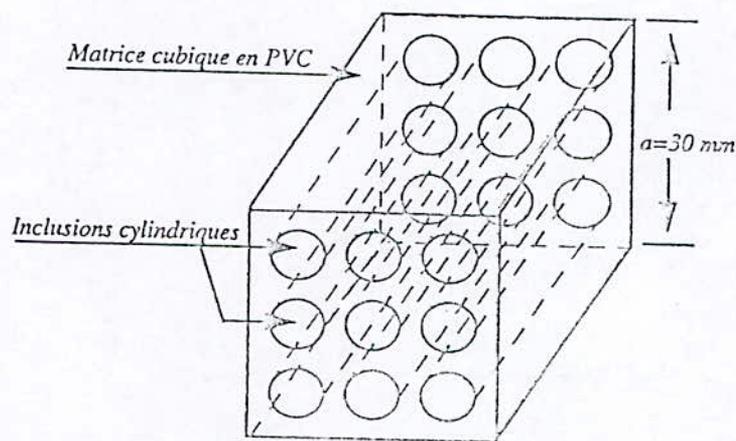
**Fig.II.25 :** Inclusions cylindrique et ellipsoïdale

L'auteur a remarqué que pour une concentration donnée, les permittivités réelle et imaginaire diminuent d'une façon monotone lorsque la valeur de  $\alpha$  (l'orientation de l'inclusion) augmente.

La permittivité est donc maximale lorsque l'inclusion cylindrique est parallèle à l'axe (oz). Ce qui confirme le degré élevé de l'anisotropie axiale.

Validation expérimentale :

Afin de valider les résultats obtenus par des simulations numériques, l'auteur a choisi le matériau composite à inclusions cylindriques. L'échantillon pris est un cube de 3mm d'arête et comporte 9 trous identiques disposés périodiquement sur trois rangées, percés de bout à bout figure (II.26).



**Fig.II.26 :** Matériau à un inclusion cylindrique

Plusieurs séries de mesures sont effectuées selon le type de l'inclusion et leur orientation par rapport au champ appliqué.

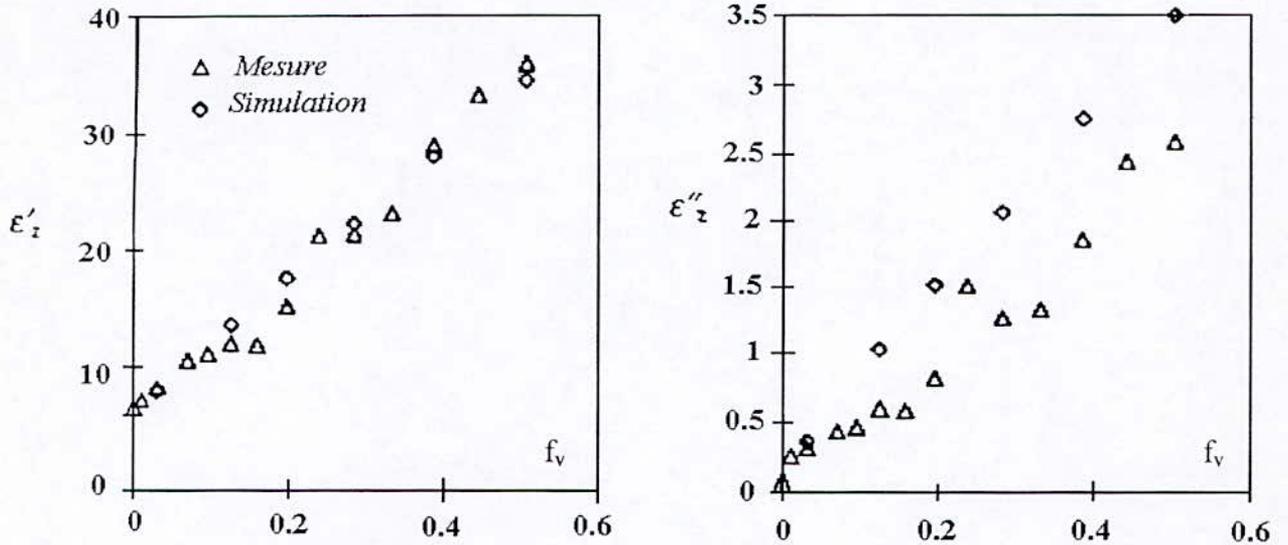
Le tableau ci-dessous donne les caractéristiques de la matrice et les inclusions pris dans cette expérience.

Matériau	$\epsilon'_r$	$\epsilon''_r$ (1MHz)
PVC ( PolyChlorure de Vinyle)	6.00	0.086
Eau déminéralisée	95	15
Air	1.00	$10^{-8}$

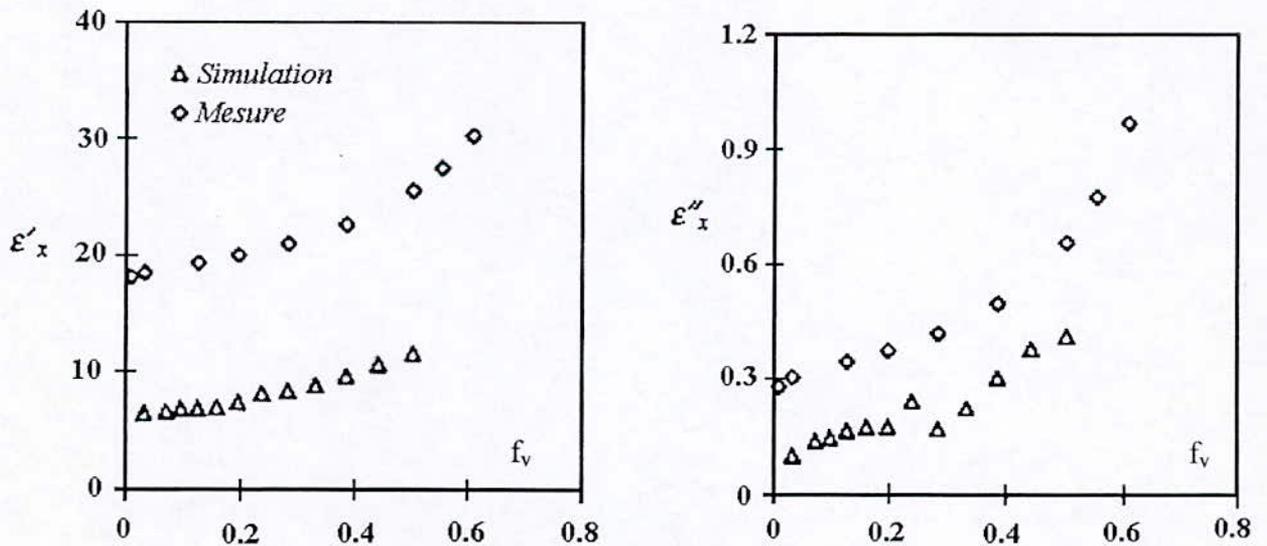
**Tableau II.2 :** Valeurs des permittivités relatives des matériaux

Toute les mesures sont réalisées à une fréquence de 1MHz. Le choix de cette fréquence est justifié par le fait que les mesures de  $C_p$  et  $R_p$  à partir desquelles l'auteur a déterminé la partie réelle et imaginaire de la permittivité effective sont plus stables à cette fréquence.

Les parties réelle et imaginaire obtenues expérimentalement et par simulation pour le cas des matériaux PVC/eau déminéralisée avec le champ électrique appliqué parallèlement et perpendiculairement aux axes des cylindres, sont présentées sur les figures (II.27,II.28).



**Fig.II.27 :** Partie réelle et imaginaire de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique des inclusions d'un composite PVC/eau déminéralisé avec le champ électrique appliqué parallèlement à l'axe du cylindre.



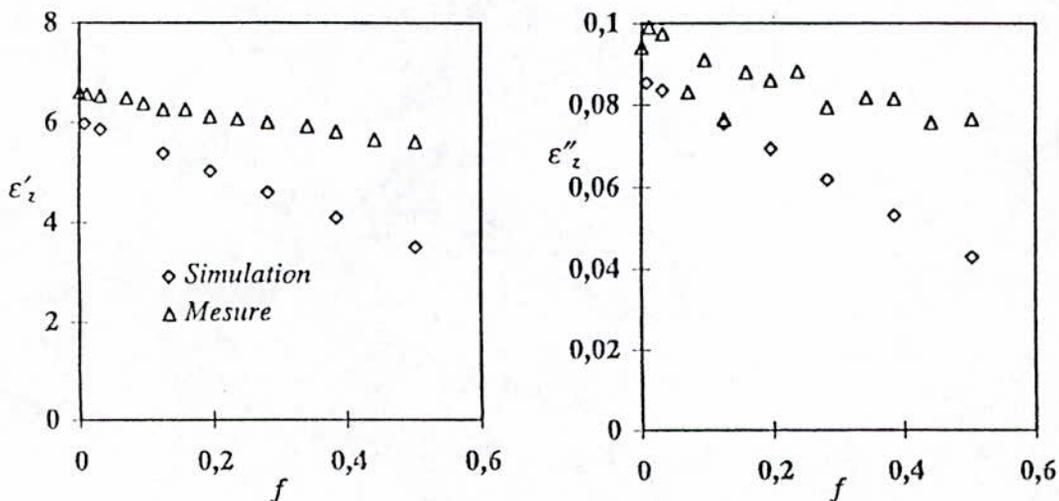
**Fig.II.28 :** Partie réelle et imaginaire de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique des inclusions d'un composite PVC/eau déminéralisé avec le champ électrique appliqué perpendiculairement à l'axe du cylindre.

Les  $\epsilon'_x$  et  $\epsilon'_z$  sont respectivement les parties réelles de la permittivité effective suivant les axes (ox) et (oz) correspondent respectivement à l'application du champ électrique perpendiculaire et parallèle aux axes des inclusions cylindriques.

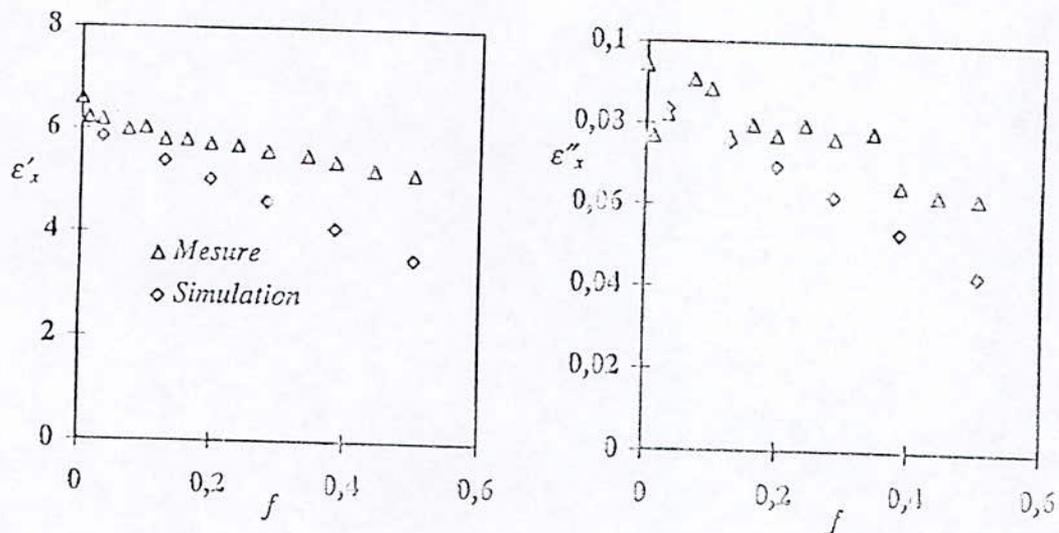
Ces figures montrent que les valeurs expérimentales de  $\epsilon'_z$  et  $\epsilon''_z$  concordent assez bien avec celles obtenues par simulation. Cependant, il existe une légère différence dans la partie imaginaire de la permittivité effective pour  $f > 0.2$ . l'auteur explique cette différence par la difficulté de mesure des valeurs de  $R_p$ .

Quant aux valeurs  $\epsilon'_x$  et  $\epsilon''_x$ , l'auteur observe certain écart (figure II.28) entre les valeurs obtenues par simulation numérique et les valeurs mesurées, cet écart serait dû à la présence d'interstices d'air dans l'inclusion.

Si les inclusions sont remplies d'air, l'auteur a obtenu des résultats représentés sur les figures (II.29, II.30).



**Fig II.29 :** Parties réelle (a) et imaginaire (b) de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique des inclusions d'un composite PVC/air avec le champ électrique appliqué parallèlement à l'axe du cylindre. serie-parallele-air.



**Fig II.30 :** Parties réelle (a) et imaginaire (b) de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique des inclusions d'un composite PVC/air avec le champ électrique appliqué perpendiculairement à l'axe du cylindre. serie-perpendiculaire-air.

Ces dernières montrent que pour des faibles concentrations des inclusions, les résultats expérimentaux concordent assez bien avec les simulations numériques et divergent lorsque la concentration augmente. Ceci serait dû au fait qu'au ces concentrations ( $f > 0.2$ ), les valeurs de  $C_p$  deviennent de plus en plus faibles (donc difficile à mesurer et les valeurs de  $R_p$  de plus en plus élevées et instables).

## II.5. CONCLUSION :

Il ressort de ce chapitre, que la caractérisation diélectrique d'un milieu hétérogène, et par conséquent la détermination de sa permittivité effective, nécessite la connaissance de la géométrie, la concentration de chaque constituant, ainsi que la connaissance des permittivités de chacun d'eux.

# CHAPITRE III

## Simulation et résultats

*Savoir c'est pouvoir.*

### III.1. INTRODUCTION :

Le calcul de la permittivité effective d'un matériau composite exige le calcul de la répartition du potentiel électrique. Ce dernier se fait par la résolution de l'équation de Poisson en utilisant différentes méthodes numériques englobant principalement les méthodes des différences finis (DF), des éléments finis (EF) ainsi que la méthode des équations des intégrales de frontières (EIF).

Notre choix s'est porté sur la méthode (DF) en raison de sa simplicité étant donné les moyens dont nous disposons.

Généralement, la densité de charges libres dans les matériaux diélectriques est négligeable. Dans ce cas le problème se réduit à la résolution de l'équation de Laplace [13].

### III.2. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES :

Cette méthode consiste à discrétiser le domaine d'étude en utilisant une grille surfacique, dont la finesse permet une bonne approximation du contour du domaine, et à approximer en chaque point du réseau la valeur des dérivés partielles de l'équation de Laplace par des différences. En d'autre terme le domaine de variation continu est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds [14]. Ce dernier est délimité par des frontières et forme ainsi un réseau appelé aussi maillage ou grille (figure III.1).

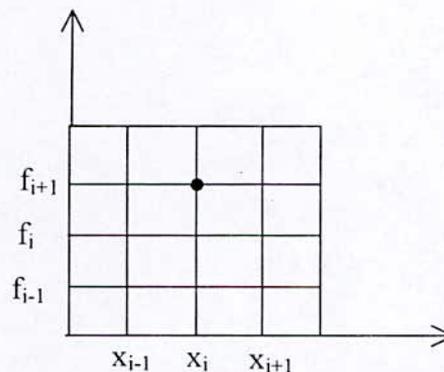


Fig.III.1 : Maillage élémentaire

Si  $f$  est une fonction continue et continûment différentiable, on peut écrire :

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{avec} \quad f_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad x_i = (i-1)\Delta x.$$

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide du développement en séries de Taylor de la fonction  $f$  :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right|_x + R_n$$

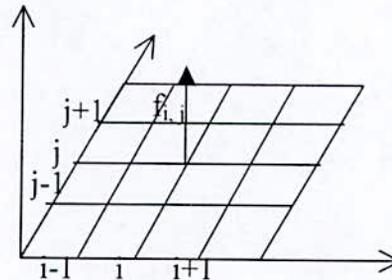
où le reste  $R_n$  est de l'ordre de  $\|\Delta x\|^n$ , ce qui l'on note habituellement :  $R_n = O(\|\Delta x\|^n)$ ,  $n$  représente l'ordre d'approximation.

### III.2.2. Cas d'une approximation à plusieurs variables :

La méthode des différences finies peut être aisément étendue au cas où la fonction  $F$  considérée dépend de deux ou plusieurs variables.

Ainsi, si  $f$  dépend par exemple de deux variables  $(x, y)$  et si dans le plan  $OXY$ , on trace des droites parallèles aux axes formant un réseau de points  $(i, j)$  (figure III.2) qui correspondent aux coordonnées de la fonction inconnue  $f_{i,j}$ , on peut écrire pour les différences centrales :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right] = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$



**Fig.III.2 :** Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables

D'une manière similaire, pour les dérivées de second ordre, on a :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

avec  $\Delta x$  et  $\Delta y$  pas d'espace suivant les directions  $x, y$  respectivement

### 2.2. Discrétisation de l'équation de Laplace :

La discrétisation de l'équation de Laplace se fait de la manière suivante :

Etant donné l'équation  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ , en appliquant la formule (III.2) nous arrivons à

l'équation de différences finies .

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V(i+1, j) - 2V(i, j) + V(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{V(i, j+1) - 2V(i, j) + V(i, j-1)}{(\Delta y)^2} = 0$$

Si on choisit  $\Delta x = \Delta y$ , ceci nous permet de déduire la fonction du potentiel au point  $(i, j)$ .

$$V(i, j) = \frac{1}{4}(V(i+1, j) + V(i, j-1) + V(i-1, j) + V(i, j+1)) \quad (III.3)$$

### 3. MODÉLISATION DU MATÉRIAU COMPOSITE :

Nous considérons le matériau composite comme étant une matrice sans pertes et contenant des inclusions cylindriques de longueur supposée infinie ( $2r \ll h$ ). Ces inclusions présentent des pertes et sont arrangées d'une manière périodique.

L'étude est alors réduite à une cellule élémentaire (figure III.3)

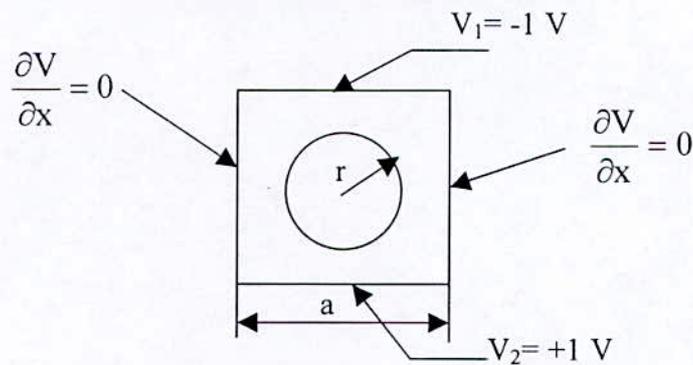


Fig.III.3 : cellule élémentaire

La fonction du potentiel dans les frontières est obtenue comme suit :

Prenons le cas représenté sur la figure(III.4)

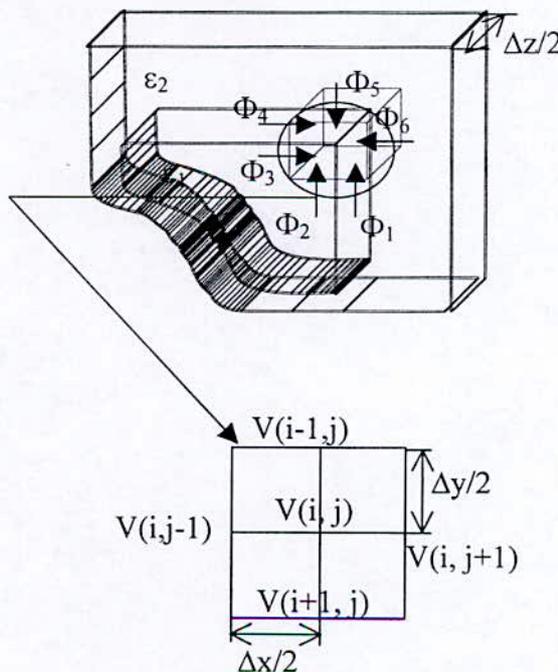


Fig.III.4 : présentation d'un nœud appartenant à la frontière

suisant l'axe (oy)

$$\phi_1 = -\varepsilon_2 \overrightarrow{\text{grad}}(V).dS = -\varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial y} dS = \varepsilon_2 \frac{V(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} \Delta z$$

$$\phi_2 = -\varepsilon_1 \overrightarrow{\text{grad}}(V).dS = -\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial y} dS = \varepsilon_1 \frac{V(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} \Delta z$$

$$\phi_5 = -\varepsilon_2 \overrightarrow{\text{grad}}(V).dS = -\varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial y} dS = \varepsilon_2 \frac{V(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta y} \Delta x \cdot \Delta z$$

suisant l'axe (ox)

$$\phi_3 = -\varepsilon_1 \overrightarrow{\text{grad}}(V).dS = -\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial x} dS = \varepsilon_1 \frac{V(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} \Delta z$$

$$\phi_4 = -\varepsilon_2 \overrightarrow{\text{grad}}(V).dS = -\varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial x} dS = \varepsilon_1 \frac{V(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} \Delta z$$

$$\phi_6 = -\varepsilon_2 \overrightarrow{\text{grad}}(V).dS = -\varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial x} dS = \varepsilon_1 \frac{V(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta x} \Delta y \cdot \Delta z$$

En appliquant le principe de la conservation des flux  $\sum_{i=1}^6 \phi_i = 0$  et en posant  $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ mm}$  et

$\Delta z = 1$ , et  $a = 100 \text{ mm}$ .

on trouve l'expression du potentiel au point (i, j)

$$V(i, j) = (1/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1))((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2)V(i+1, j) + ((\varepsilon_1 + \varepsilon_2))/2.V(i, j-1) + \varepsilon_2 V(i-1, j) + \varepsilon_2 V(i, j+1)) \quad (\text{III.4})$$

Le même raisonnement est fait pour les autres points appartenant à la frontière.

La figure III.5. montre les différentes positions des points (i, j)

2<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = (1/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1))(\varepsilon_2.V(i+1, j) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i, j-1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i-1, j) + \varepsilon_2.V(i, j+1)) \quad (\text{III.5})$$

3<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = (1/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1))(\varepsilon_2.V(i+1, j) + \varepsilon_2 V(i, j-1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i-1, j) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i, j+1)) \quad (\text{III.6})$$

4<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = (1/(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1))((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i-1, j) + \varepsilon_2 V(i, j-1) + \varepsilon_2 V(i-1, j) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i, j+1)) \quad (\text{III.7})$$

5<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = (1/(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2))(\varepsilon_1 V(i+1, j) + \varepsilon_1 V(i, j-1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i-1, j) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i, j+1)) \quad (\text{III.8})$$

6<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = (1/(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2))((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i+1, j) + \varepsilon_1 V(i, j-1) + \varepsilon_1 V(i-1, j) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i, j+1)) \quad (\text{III.9})$$

7<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = (1/(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2))((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i+1, j) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2.V(i, j-1) + \varepsilon_1 V(i-1, j) + \varepsilon_1 V(i, j+1)) \quad (\text{III.9})$$

8<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = \frac{1}{3(\epsilon_1 + \epsilon_2)} (\epsilon_1 V(i+1, j) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i, j-1) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i-1, j) + \epsilon_1 V(i, j+1)) \quad \text{(III.10)}$$

9<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = \frac{1}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} (\epsilon_1 V(i+1, j) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i, j-1) + \epsilon_2 V(i-1, j) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i, j+1)) \quad \text{(III.11)}$$

10<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = \frac{1}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} (\epsilon_2 V(i+1, j) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i, j-1) + \epsilon_1 V(i-1, j) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i, j+1)) \quad \text{(III.12)}$$

11<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = \frac{1}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} ((\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i+1, j) + \epsilon_1 V(i, j-1) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i-1, j) + \epsilon_1 V(i, j+1)) \quad \text{(III.13)}$$

12<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, j) = \frac{1}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} ((\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i+1, j) + \epsilon_2 V(i, j-1) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \cdot V(i-1, j) + \epsilon_2 V(i, j+1)) \quad \text{(III.14)}$$

Conditions aux limites  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$

13<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, 1) = \frac{V(i+1, 1) + V(i-1, 1) + V(i, 2)}{4}$$

14<sup>ème</sup> cas correspondant à l'équation :

$$V(i, n) = \frac{V(i+1, n) + V(i-1, n) + V(i, j)}{4}$$

(III.15)

(III.16)

Dans le reste du maillage nous appliquons l'équation ordinaire (III.6)

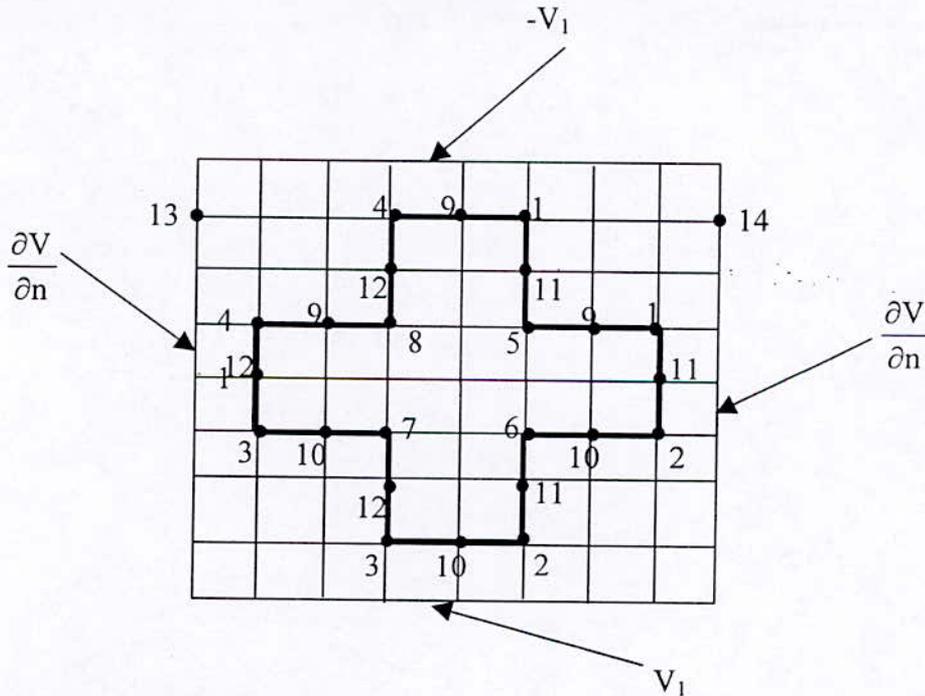


Fig.III.5 : les différentes positions des nœuds

## III.4. CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE :

On a :  $\vec{E} = -\overline{\text{grad}}(V)$

Suivant les axes ox et oy

$$E_x = \frac{V(i, j+1) - V(i, j)}{\Delta x}, \quad E_y = \frac{V(i+1, j) - V(i, j)}{\Delta y}$$

Le champ électrique dans le point (i, j) est :  $E(i, j) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

Pour arriver aux expressions des permittivités effectives réelle et imaginaire, on calcule la puissance active dissipée dans le milieu présentant des pertes, et l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur plan constituée par les deux milieux.

La puissance dissipée P à l'intérieur du cercle s'écrit :

$$P = \omega \cdot \varepsilon'_1 \cdot \text{tg}(\delta) \cdot E_{\text{moy1}}^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{III.17})$$

l'énergie électrostatique  $W_e$  s'écrit :

$$W_e = \varepsilon'_1 \cdot E_{\text{moy1}}^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \varepsilon'_2 \cdot E_{\text{moy2}}^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (\text{III.18})$$

avec  $E_{\text{moy1}}$  et  $E_{\text{moy2}}$  sont respectivement les champ à l'intérieur et l'extérieur du cercle.

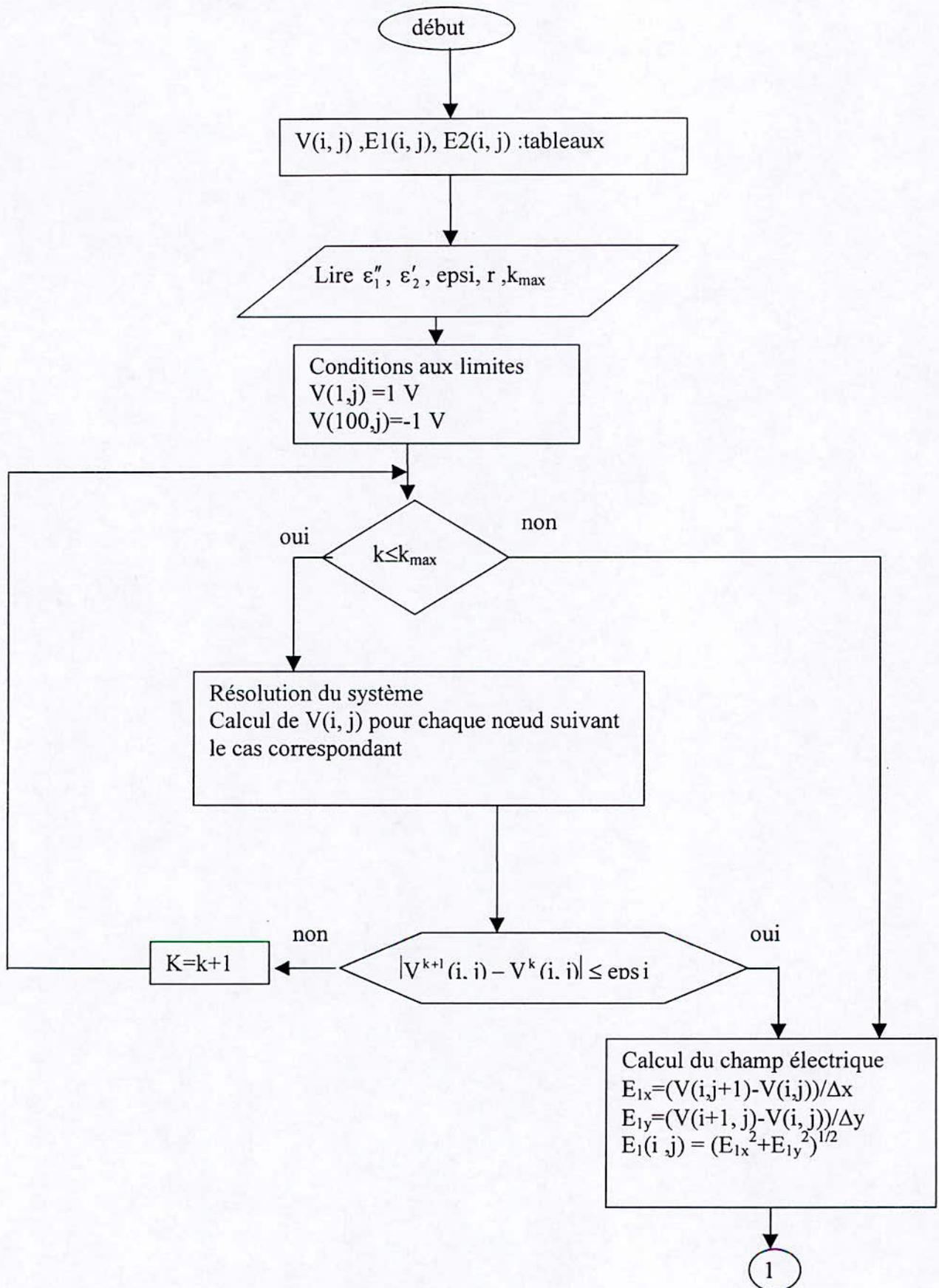
Finalement on aboutit aux expressions :

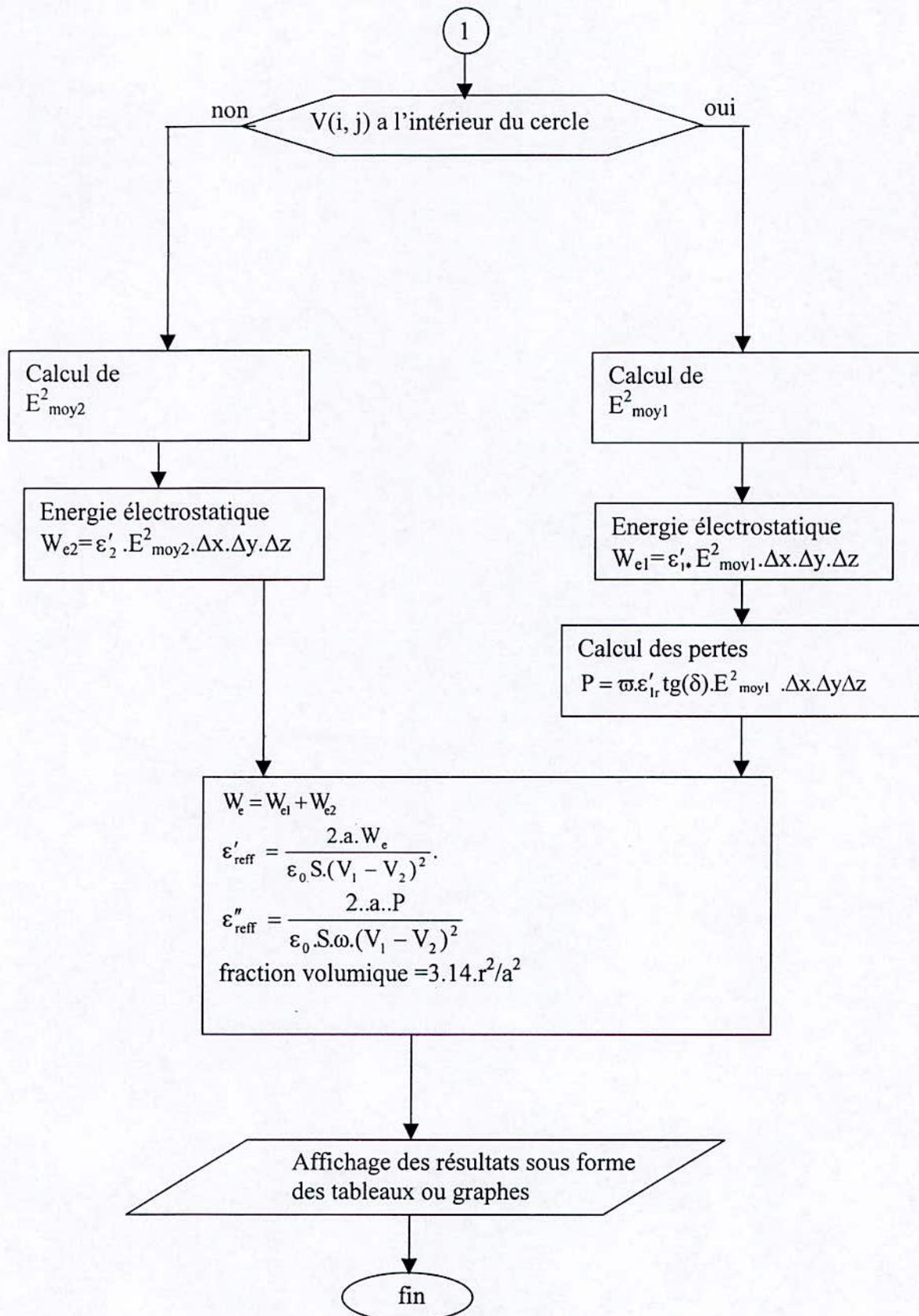
$$\varepsilon'_{\text{reff}} = \frac{2 \cdot a \cdot W_e}{\varepsilon_0 \cdot S \cdot (V1 - V2)^2}$$

$$\varepsilon''_{\text{reff}} = \frac{2 \cdot a \cdot P}{\varepsilon_0 \cdot \omega \cdot S \cdot (V1 - V2)^2}$$

avec S la surface perpendiculaire au champ appliqué  $S = a \cdot \Delta z$

III.5. ORGANIGRAMME :

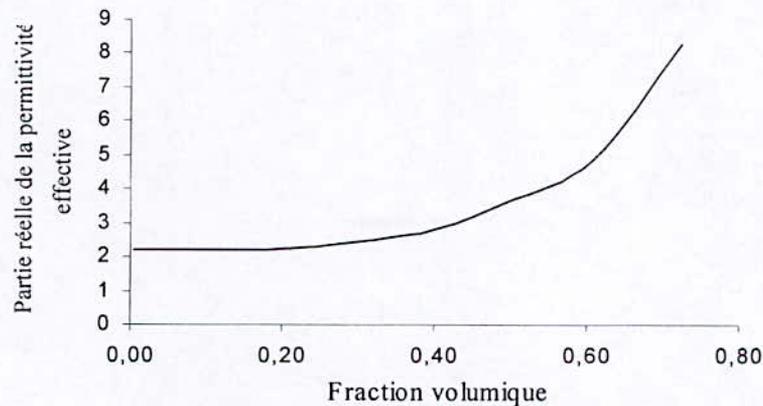




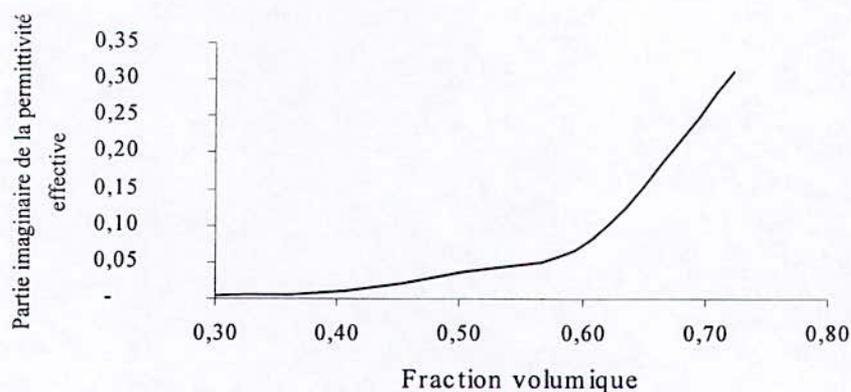
### III.6. RÉSULTATS ET INTERPRÉTATIONS :

Nous allons présenter et discuter les résultats des simulations d'un système hétérogène constituée d'une matrice parfaite de permittivité  $\varepsilon_2 = 2-0j$  dans laquelle des inclusions cylindriques présentant des pertes et une permittivité complexe  $\varepsilon_1 = 40 - 4j$ . pour analyser l'effet de la fraction volumique nous avons fait varier le rayon du cercle pour avoir différentes valeurs de la fractions allant de 0 à 0.723 les figures (III.6.a,III.6.b) illustrent la variation de la partie réelle et imaginaire de la permittivité effective. Nous remarquons que la partie réelle de la permittivité effective reste constante pour des faibles valeurs de la fraction volumique.

Cependant, à partir de la valeur  $f_v = 0.245$ , nous observons une augmentation brusque de la permittivité et plus particulièrement de la partie imaginaire. Cette augmentation brusque peut être due à la concentration des inclusions dans la matrice conduisant à des pertes diélectriques dominantes.



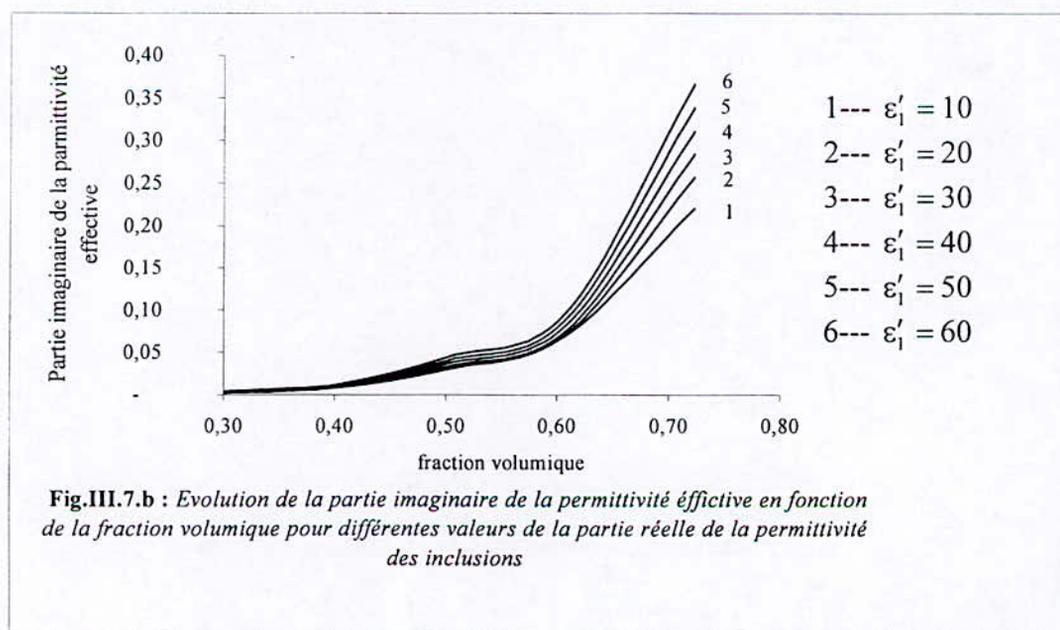
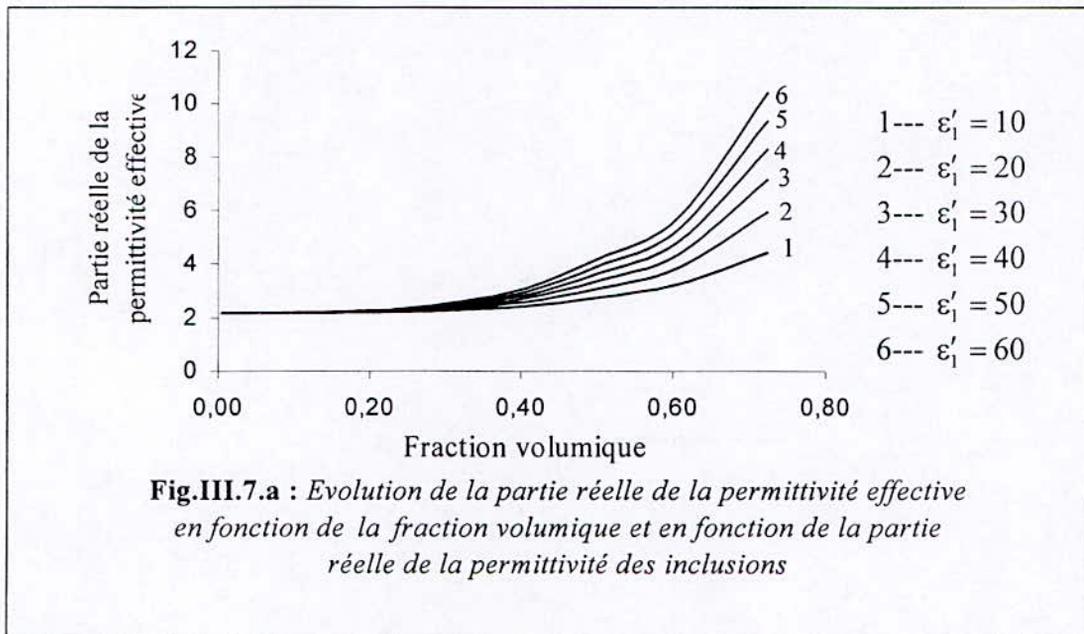
**Fig.III.6.a :** Evolution de la partie réelle de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique



**Fig.III.6.b:** Evolution de la partie imaginaire de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique.

Afin de montrer l'influence de la permittivité des inclusions sur les parties réelle et imaginaire de la permittivité effective ; nous avons fait une superposition des courbes pour différentes valeurs de la permittivité des inclusions en adoptant le rapport  $\frac{\epsilon_1''}{\epsilon_1'} = 0,01$ .

La figure III.7.a montre que la permittivité réelle reste fixe pour les faibles fractions pour différentes valeurs de  $\epsilon_1'$  allant de 10 à 60. La divergence entre les différentes courbes est marqué à partir de la valeur de  $f_v=0.3$ , cette différence est moins marquée dans le cas de la permittivité effective car leur valeurs sont plus proche de 1 à 6.

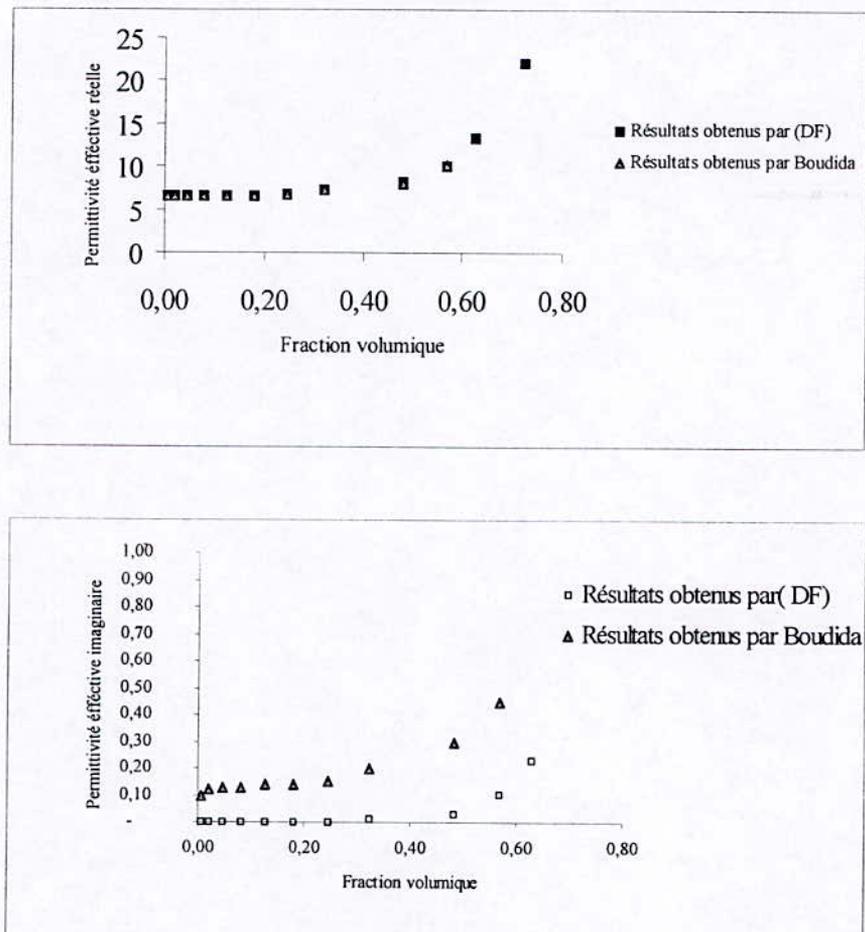


### III.7. Validation :

Pour valider notre travail, nous effectuons une comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par M.Boudida [1]. La figure III.8 montre que les valeurs de la partie réelle de la permittivité effective sont identiques, par contre la partie imaginaire nous trouvons un écart entre les résultats numériques et expérimentaux de M. Boudida, cette différence peut s'expliquer de plusieurs manières.

Nous avons, dans notre simulation, négligé les pertes diélectriques de la matrice, notre courbe commence donc au point (0,0) contrairement à ceux qui considéré M. Boudida où il a adopté des valeurs de permittivité  $\epsilon_2 = 6 - j0.08$ . Notre courbe est donc décalée par rapport à celle de M. Boudida.

Notre simulation a été faite à l'aide de la méthode des différences finies, l'écart peut donc s'expliquer en plus par le choix de la méthode.

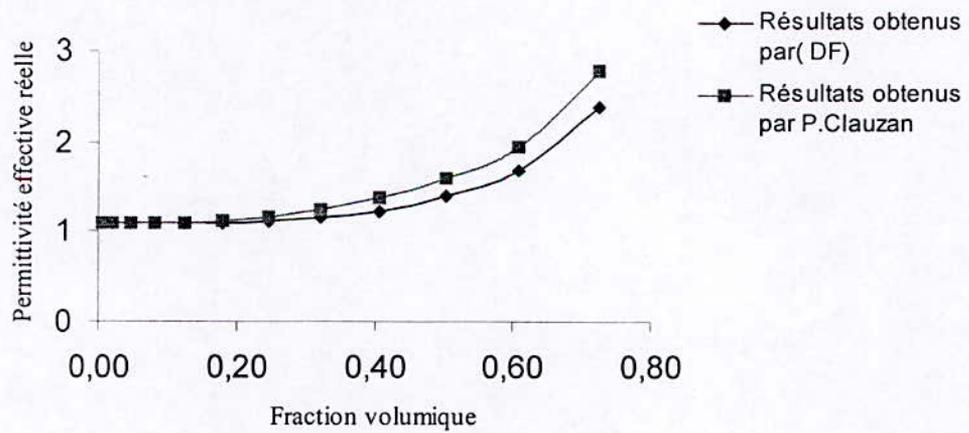
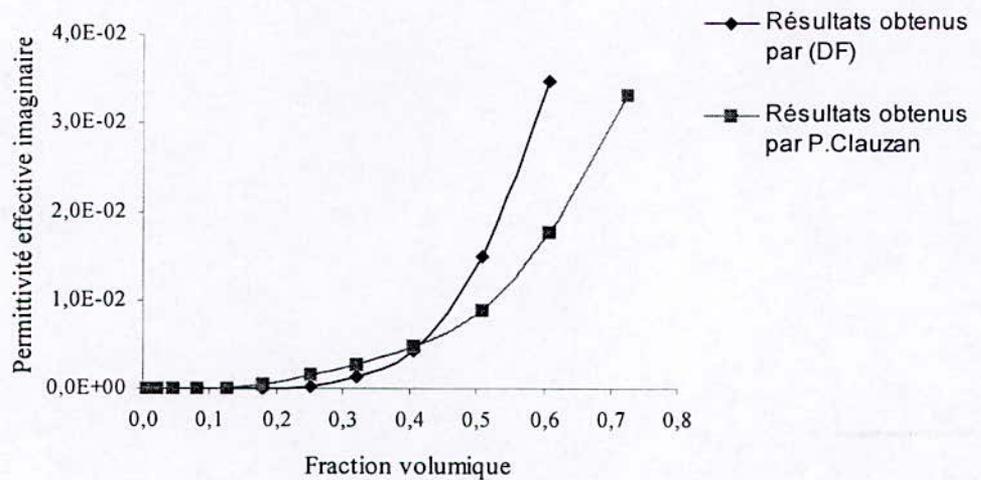


**Fig.III.8 :** Comparaison de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique obtenue par (DF) et par Boudida

Une autre comparaison de nos résultats est effectuée avec ceux obtenus à l'issue des travaux de M<sup>r</sup> P. Clauzan. Les graphes ci-dessous montrent qu'il y a

Les graphes ci-dessous montrent que les valeurs de la partie réelle de la permittivité effective s'accordent avec celles de M<sup>r</sup> P. Clauzan.

Cependant les valeurs de la partie imaginaire présentent certaine différence, cette différence revient essentiellement au choix de la méthode.



**Fig.III.9 :** Comparaison de la permittivité effective en fonction de la fraction volumique obtenue par (DF) et par P. Clauzan

**III.8. CONCLUSION :**

La méthode des différences finies permet de résoudre les problèmes de la détermination des propriétés effectives des matériaux composites en deux dimensions et donne de bons résultats. Cependant, notre programme nous permet d'établir la permittivité effective pour une fraction volumique maximale de 0,723 proche du seuil de percolation. Celui-ci est atteint lorsque le diamètre de cercle est égal à l'arête de la matrice carré.

Nous constatons par ailleurs que la partie réelle de la permittivité des inclusions influe sur la permittivité effective des matériaux.

La connaissance des permittivités de la matrice et des inclusions permet donc de connaître les propriétés des diélectriques du matériau avant sa fabrication.

# Conclusion générale

## CONCLUSION GÉNÉRALE :

Ce travail nous a permis de montrer que, comparée aux méthodes des éléments finis et des équations intégrales de frontières, la méthode des différences finies utilisée dans ce travail, permet aussi de calculer d'une façon exacte la permittivité effective complexe d'un matériau hétérogène constitué d'inclusions sous forme cylindrique.

Les caractéristiques des parties réelle et imaginaire de la permittivité effective de composites comportant des inclusions cylindriques varient en fonction de la fraction volumique et la permittivité de ces inclusions.

Notre travail s'est limité à l'étude de la permittivité effective du matériau hétérogène constitué d'une matrice parfaite et d'inclusions présentant des pertes,.

Nous suggérons pour des études ultérieures, de prendre en considération ces pertes, ainsi que la fraction volumique doit atteindre la valeur de 1 en tenant compte de l'influence de la fréquence et de l'anisotropie.

# PROGRAMME

! Calcul de la permittivité effective d'un matériau hétérogène(composite) en utilisant la méthode des différences finies

```

    implicit none
! Déclaration des variables
    real v(100,100),u(100,100),E1(100,100),E120(100,100) ,g,som,gd,somd,w1,w2,w10,im,delta
real x, epsi1, epsi2, epsi,fact ,Ex10 ,Ey10
,Ex,Ey,perte,e2,e3,hj,epsireff,epsimeff,f,z,ep,epsivide,v1,v2,total,grand,surf,w ,hk1
,hk,po,po1,rk,mp,Ex110,Ey110
    integer s,haut,bas,gauche,droite, kmax, s10,h,i,k j ,y3, ki ,tu ,b,o ,r1,r,y,nbchd,nbcd,d1,h1,h2,h3
    integer x1,x2,y1,y2,l,a,nbc
! Fichier de résultats (fichier texte)
    open(1,file='c:\pfe600.txt',status='unknown')
! La permittivité absolue du vide
epsivide=0.00000000000085
! Entrer les données
write(*,*)'donner rayon du cercle'
read(*,*) r1
write(*,*)'donner epsi1'
read(*,*) epsi1
write(*,*)'donner im'
read(*,*)im
write(*,*)'donner epsi2'
read(*,*)epsi2
write(*,*)'donner epsi'
read(*,*)epsi
write(*,*)'donner Kmax'
read(*,*)Kmax
o=0
epsi1=epsi1*epsivide
epsi2=epsi2*epsivide
kmax=100
! Simulation du cercle
call testmlih(r1,y3)
write(*,*)'bon y=',y3
read(*,*)
! Inisialisation de la matrice des potentiels
do 5 j=1,100
    do 5 i=1,100
v(i,j)=0
5 continue
delta = im/epsi1
surf=0.01
total=0
! Conditions aux limites
do 10 j=1,100
    v(1,j)=1
        v(100,j)=-1
10 continue
write(*,*)'initialisation terminer'
write(*,*)'calcul en cours'
63 continue

```

```

k=k+1
  if (k.gt.100) goto 11
  do 44 j=1,100
    do 44 i=1,100
      u(i,j)=v(i,j)
44 continue
do 70 i=2,99
  j = 1
  v(i,j) = v(i+1,1)/4+v(i-1,j)/4+v(i,j+1)/2
  j = 100
  v(i,j) = v(i+1,j)/4+v(i-1,j)/4+v(i,j-1)/2

do 70 j=2,99
! determination la position du point (i,j)
  call acr(i,j,r1,y3,s)
  call horsdisk(i,j,r1,y3,h)
  call disk(i,j,r1,y3,s10)
if (s.eq.1) then
  call acr(i-1,j,r1,y3,haut)
  call acr(i+1,j,r1,y3,bas)
  call acr(i,j-1,r1,y3,gauche)
  call acr(i,j+1,r1,y3,droite)

  ! Calcul de la répartition du potentiel électrique

  if((haut.eq.0).and.(bas.eq.1).and.(droite.eq.0).and.(gauche.eq.1).and.(i.lt.50).and.(j.gt.50))then
v(i,j)=(1/(3*epsi2+epsi1))*(((epsi1+epsi2)/2)*v(i+1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j-1)+epsi2*v(i-1,j)+epsi2*v(i,j+1))
  else if((haut.eq.1).and.(bas.eq.0).and.(droite.eq.0).and.(gauche.eq.1).and.(i.gt.50).and.(j.gt.50))then
v(i,j)=(1/(3*epsi2+epsi1))*(epsi2*v(i+1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j-1)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i-1,j)+epsi2*v(i,j+1))
  else if((haut.eq.1).and.(bas.eq.0).and.(droite.eq.1).and.(gauche.eq.0).and.(i.gt.50).and.(j.lt.50))then
v(i,j)=(1/(3*epsi2+epsi1))*(epsi2*v(i+1,j)+epsi2*v(i,j-1)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i-1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j+1))
  else if((haut.eq.0).and.(bas.eq.1).and.(droite.eq.1).and.(gauche.eq.0).and.(i.lt.50).and.(j.lt.50))then
v(i,j)=(1/(3*epsi2+epsi1))*(((epsi1+epsi2)/2)*v(i-1,j)+epsi2*v(i,j-1)+epsi2*v(i-1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j+1))
  else if((haut.eq.1).and.(bas.eq.0).and.(droite.eq.1).and.(gauche.eq.0).and.(i.lt.50).and.(j.gt.50))then
v(i,j)=(1/(3*epsi1+epsi2))*(epsi1*v(i+1,j)+epsi1*v(i,j-1)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i-1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j+1))
  else if((haut.eq.0).and.(bas.eq.1).and.(droite.eq.1).and.(gauche.eq.0).and.(i.gt.50).and.(j.gt.50))then
v(i,j)=(1/(3*epsi1+epsi2))*(((epsi1+epsi2)/2)*v(i+1,j)+epsi1*v(i,j-1)+epsi1*v(i-1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j+1))
  else if((haut.eq.0).and.(bas.eq.1).and.(droite.eq.0).and.(gauche.eq.1).and.(i.gt.50).and.(j.lt.50)) then
v(i,j)=(1/(3*epsi1+epsi2))*(((epsi1+epsi2)/2)*v(i+1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j-1)+epsi1*v(i-1,j)+epsi1*v(i,j+1))
  else if((haut.eq.1).and.(bas.eq.0).and.(droite.eq.0).and.(gauche.eq.1).and.(i.lt.50).and.(j.lt.50)) then
v(i,j)=(1/(3*epsi1+epsi2))*(epsi1*v(i+1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j-1)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i-1,j)+epsi1*v(i,j+1))
  else if((i.lt.50).and.(haut.eq.0).and.(bas.eq.0).and.(droite.eq.1).and.(gauche.eq.1))then
v(i,j)=(1/(2*(epsi1+epsi2)))*(epsi1*v(i+1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j-1)+epsi2*v(i,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j+1))
  else if((i.gt.50).and.(haut.eq.0).and.(bas.eq.0).and.(droite.eq.1).and.(gauche.eq.1))then
v(i,j)=(1/(2*(epsi1+epsi2)))*(epsi2*v(i+1,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j-1)+epsi1*v(i,j)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j+1))
  else if((j.gt.50).and.(haut.eq.1).and.(bas.eq.1).and.(droite.eq.0).and.(gauche.eq.0))then
v(i,j)=(1/(2*(epsi1+epsi2)))*(((epsi1+epsi2)/2)*v(i+1,j)+epsi1*v(i,j-1)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j)+epsi1*v(i,j+1))
  else if((j.lt.50).and.(haut.eq.1).and.(bas.eq.1).and.(droite.eq.0).and.(gauche.eq.0)) then
v(i,j)=(1/(2*(epsi1+epsi2)))*(((epsi1+epsi2)/2)*v(i+1,j)+epsi2*v(i,j-1)+((epsi1+epsi2)/2)*v(i,j)+epsi2*v(i,j+1))
  end if
  end if
  if ((h.eq.1))then
    rk=rk+1
    v(i,j)=0.25*(v(i+1,j)+v(i,j-1)+v(i-1,j)+v(i,j+1))
  end if
  if (s10.eq.1)then
    v(i,j)=0.25*(v(i+1,j)+v(i,j-1)+v(i-1,j)+v(i,j+1))

```

```

    end if

70 continue
    do 33 j=1,100
    do 33 i=2,99
    fact=v(i,j)-u(i,j)
    if((abs(fact).ge.epsi)) goto 63
33 continue
11 continue
    y1=1
    y2=11
    x1=1
    x2=8
    write(*,*)'appuyer sur 8 pour se deplacer dans la matrice vers le haut'
    write(*,*)'et sur 2 pour se deplacer dans la matrice vers le bas'
    write(*,*) 'et sur 6 pour se deplacer dans la matrice vers la droite'
    write(*,*) 'et sur 4 pour se deplacer dans la matrice vers la gauche'
    read(*,*)
    do 53 l=1,100000
    do 51 i=y1,y2
write(*,14) (v(i,j),j=x1,x2)
    51 continue
    read(*,*) a
    if (a.eq.8) then
    y1=y1+1
    y2=y2+1
    write(*,*) x1,y1
    else if(a.eq.2)then
    y1=y1-1
    y2=y2-1
    write(*,*) x1,y1
    else if (a.eq.6) then
    x1=x1+1
    x2=x2+1
    write(*,*) x1,y1
    else if(a.eq.4)then
    x1=x1-1
    x2=x2-1
    write(*,*) x1,y1
    else
    goto 99
    end if
53 continue
99 continue
x=0
tu=0
b=0
do 50 j=1,99
do 55 i=1,99
    call acr(i,j,r1,y3,s)
    call horsdisk(i,j,r1,y3,h)
    call disk(i,j,r1,y3,s10)
    if (s10.eq.1)then
    Ex=(v(i,j+1)-v(i,j))/0.001
    b=b+1
    Ey=(v(i+1,j)-v(i,j))/0.001

```

```

E120(i,j)=sqrt( Ey**2 +Ex**2)
      end if

      if(h.eq.1)then
        Ex10=(v(i,j+1)-v(i,j))/0.001

        Ey10=(v(i+1,j)-v(i,j))/0.001

        E120(i,j)=sqrt(Ey10**2+Ex10**2)
          end if
          if(s.eq.1) then
            Ex110=(v(i,j+1)-v(i,j))/0.001

            Ey110=(v(i+1,j)-v(i,j))/0.001
            E120(i,j)=sqrt(Ey110**2+Ex110**2)
          end if

          55 continue
        ey=(v(100,j)-v(99,j))/0.001
        ex=(v(100,j+1)-v(100,j))/0.001
        e120(100,j)=sqrt(ex**2+ey**2)
      50 continue
        ey=(v(100,100)-v(99,100))/0.001
        ex=(v(100,100)-v(100,99))/0.001
        e120(100,100)=sqrt(ex**2+ey**2)
do 140 i=1,99
  j=100
  ex=(v(i+1,j)-v(i,j))/0.001
  ey=(v(i,j)-v(i,j-1))/0.001
  e120(i,j)=sqrt(ex**2+ey**2)
140 continue
      mp=0
      hk=0
      nbc=0
      som=0
      somd=0
do 15 j=1,99
  do 15 i=1,99
    call acr(i,j,r1,y3,s)
    if (s.eq.1) then
      nbc =nbc +1
      call horsdisk(i+1,j+1,r1,y3,h1)
      call horsdisk(i+1,j,r1,y3,h2)
      call horsdisk(i,j+1,r1,y3,h3)
      if ((h1.eq.1).or.(h2.eq.1).or.(h3.eq.1)) then
        g=0.25*(e120(i,j)+e120(i,j+1)+e120(i+1,j)+e120(i+1,j+1))
        som=som+g
      else
        gd=0.25*(e120(i,j)+e120(i,j+1)+e120(i+1,j)+e120(i+1,j+1))
        somd=somd+gd
      end if
    else
      call disk(i,j,r1,y3,d1)
      if (d1.eq.1) then
        gd=0.25*(e120(i,j)+e120(i,j+1)+e120(i+1,j)+e120(i+1,j+1))
        somd=somd+gd
      else
        g=0.25*(e120(i,j)+e120(i,j+1)+e120(i+1,j)+e120(i+1,j+1))

```

```

        som=som+g
        end if
    end if
15  continue
    ! Calcul de l'énergie électrostatique
    call nbcarhd(r1,y3,nbchd)
    call nbcardisk(r1,y3,nbcd)
    w10=((epsi1*somd+epsi2*som)*0.1)/(nbcd+nbchd)
    som=som/nbchd
    somd=somd/nbcd
    w1=epsi2*(som**2)/(r1*15)
    w2=epsi1*(somd**2)/(r1*15)
    ! Calcul de la partie réelle de la permittivité effective
    epsireff=(2*(w10))/(4*epsivide)
    ! Calcul de la puissance dissipée
    perte=epsi1*0.1*(somd**2)*0.001
    ! Calcul de la partie imaginaire de la permittivité effective
    epsimeff=2*perte*10
    /(epsivide*(4))
    ! Calcul de la fraction volumique
    z=r1*0.001
    f=(3.14*z**2)/0.1**2
    ! Affichage des résultats sur écran
    write(*,*) 'reelle=', epsireff
    write(*,*) 'imaginaire=',epsimeff
    write(*,*)'fraction=',f
    read(*,*)
    ! Impression des résultats sur un fichier texte
    write(1,*) 'fraction',' ', 'reelle',' ', 'imaginaire'
    write(1,*) f,' ', epsireff,' ',epsimeff
14  format(1x,8f10.3)
    write(*,*) 'nb de points du cercle',nbc
    write(*,*) 'fin du execution'
    write(*,*)
    write(*,*)
    write(*,*)
    read(*,*)
25  continue
    stop
    end

```

---

```

! sous programme fait le test de l'appartenance d'un point au cercle
subroutine acr (i,j,r10,y, s)
integer s,i,y,r1,j,haut1,bas1,gauche1, droite1,s1
call acr10(i,j,r10,y,s1)
if (s1.eq.1)then
s=1
else
call acr10(i-1,j,r10,y,haut1)
call acr10(i+1,j,r10,y,bas1)
call acr10(i,j-1,r10,y,gauche1)
call acr10(i,j+1,r10,y,droite1)
if (((haut1.eq.1).and.(gauche1.eq.1)).or.((haut1.eq.1).and.(droite1.eq.1))).and.(i.gt.50)) then
s=1
else if (((bas1.eq.1).and.(gauche1.eq.1)).or.((bas1.eq.1).and.(droite1.eq.1))).and.(i.lt.50)) then
s=1
else

```

```

                s=0
            end if
        end if
        return
    end    subroutine

    ! sous programme fait le test du cercle
subroutine testmlh(r,y)
    integer s,haut1,bas1,gauche1,droite1,r, y
    integer i,j,hd,bd,hg, bg
    y=0
    20 continue
    y=y+1
    if (y.eq.r) goto 23
    do 44 i=0,2*r
        do 44 j=0,2*r
            call acr1(i,j,r,y,s)
            if (s.eq.1) then
                call acr1(i-1,j,r,y,haut1)
                call acr1(i+1,j,r,y,bas1)
                call acr1(i,j-1,r,y,gauche1)
                call acr1(i,j+1,r,y,droite1)
                call acr1(i-1,j+1,r,y,hd)
                call acr1(i+1,j+1,r,y,bd)
                call acr1(i-1,j-1,r,y,hg)
                call acr1(i+1,j-1,r,y,bg)

                if
                (((droite1.eq.1).And.(gauche1.eq.1)).or.((haut1.eq.1).And.(bas1.eq.1)).or.((hd.eq.1).And.(bg.eq.1)).or.((hg.eq.1).
                And.(bd.eq.1)).or.((hd.eq.1).And.(bas1.eq.1)).or.((hg.eq.1).And.(bas1.eq.1)).or.((haut1.eq.1).And.(bd.eq.1)).or.(
                (haut1.eq.1).And.(bg.eq.1)).or.((hg.eq.1).And.(droite1.eq.1)).or.((bg.eq.1).And.(droite1.eq.1)).or.((hd.eq.1).And.
                (gauche1.eq.1)).or.((bd.eq.1).And.(gauche1.eq.1))) then
                    else
                        goto 20
                    end if
                end if
            44    continue
            23    continue
        end subroutine

        subroutine acr1 (i,j,r20,y, s)
            integer s,i,r20,j,y
            if (((i-r20)**2+(j-r20)**2.le.r20**2+y).and.((i-r20)**2+(j-r20)**2.ge.r20**2-y))then
                s=1
            else
                s=0
            end if
            return
        end subroutine

        subroutine acr10 (i,j,r30,y,s)
            integer s,i,r30,j,y
            if (((i-50)**2+(j-50)**2.le.r30**2+y).and.((i-50)**2+(j-50)**2.ge.r30**2-y))then
                s=1
            else
                s=0
            end if

```

```
        return
end subroutine
```

---

---

```
subroutine disk(i,j,r,y,s)
  integer s,i,r,j,y
  if ((i-50)**2+(j-50)**2.lt.r**2-y)then
    s=1
  else
    s=0
  end if
  return
end subroutine
```

---

---

```
subroutine horsdisk (i,j,r,y,s)
  integer s,i,r,j,y,s11,s22
  Call acr(i,j,r,y,s11)
  call disk(i,j,r,y,s22)
  if ((s11.eq.0).and.(s22.eq.0))then
    s=1
  else
    s=0
  end if
end subroutine
```

---

---

```
subroutine nbcardisk(r10,y,nbcd)
integer r10,nbd,nbc,nbcd,y,i,j,s,s10
nbd=0
nbc=0
do 201 i=1,100
  do 201 j=1,100
    Call disk(i,j,r10,y,s)
    Call acr (i,j,r10,y, s10)
    if (s.eq.1)then
      nbd=nbd+1
    end if
    if (s10.eq.1) then
      nbc = nbc+1
    end if
  201 continue
  nbcd=nbd+(nbc/2)
return
end subroutine
```

---

---

```
subroutine nbcarhd(r20,y,nbchd)
integer r20,nbcd,nbchd,y,i,j
  call nbcardisk(r20,y,nbcd)
  nbchd = 9081-nbcd
return
end subroutine
```

# Bibliographie

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] A.Boudida « Caractérisation Diélectrique des Matériaux Composites : Influence de l'Anisotropie, de Forme et d'Orientations », Thèse de doctorat. L'école centrale de Lyon 1999.
- [2] Cd-UNIVERSALIS 1998 « Les diélectrique ».
- [3] I.P.Mathieu « Cours de Physique Expérimentale », Edition 1965.
- [4] B. Sareni « Etude de la Permittivité Effective des Matériaux Composites » Université de Bretagne Occidentale, B.P.809.29285 Berst Cedex. France.
- [5] P.Robert « Matériaux de l'électrotechnique », Traité d'Electricité vol II . édition Press P.R. Lausanne 1989
- [6] « Les Diélectrique : Base Théorique », Technique d'ingénieurs vol.D 4.
- [7] « Comportement Diélectrique des Polymères », Technique d'ingénieurs vol A.
- [8] I.Yu.Gutman\*, V.R.Kinevsky, « Tenue Diélectrique de l'Isolation EHT Polluée », CIGRE 1988.
- [9] S.Berthier, « Optique des Milieux composites », Edition Lavoisier. 1993
- [10] L.K.H. Van Beek, « Progress in Dielectrics », vol. 7, (Heywood Books, London, 1967
- [11] C. Philippe « Etude d'un Matériau Diélectrique Composite à Inclusions Présentant des Pertes », Ecole Centrale de Lyon, B.P.163, Ecully Cedex. France.
- [12] B.Sareni, L. Krahenbith, A.Bérouel « Effective Dielectric Constant of Periodic Composite Materials », J.Appl.phys 80, 1996
- [13] J.P. Pelletier « Technique Numériques Appliquées au Calcul Scientifique », Edition Masson, 1989.
- [14] M.Sibonny, J.CI.Mordon « Analyse Numérique, Approximation et Equations Différentielles », Tome II. Edition Hermani, 1988