

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT: G.CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Determination de l'état de
contrainte et de déformation
d'un sol par la M.E.F.

Proposé par :

M^r Messafer

Etudié par :

Moussa M

Mansour S

Dirigé par :

M^r Messafer

PROMOTION 1991

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

بسم الله الرحمن الرحيم

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة الجامعات
Ministère aux Universitaires

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT G.Civil

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DETERMINATION DE L'ETAT DE
CONTRAINTE ET DE DEFORMATION
D'UN SOL PAR LA M.E.F

Proposé par :

M^r Messafer

Etudié par :

Mansour S

Moussa M

Dirigé par :

DEDICACES

A ma chère famille, à qui je serai reconnaissante pour son soutien
A tous ceux qui me sont chers
Je vous aime

SABRINA

A ma grande famille avec toute mon affection et ma reconnaissance
A tous mes amis sincères
A tous ceux qui étaient présents dans les moments difficiles

MERIEM

REMERCIEMENTS

Nous remercions notre promoteur M^r MESSAFER pour son aide précieuse, son soutien et sa présence constante. Nous exprimons notre profonde gratitude, à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation ainsi qu'au personnel du centre de calcul de l'E.N.P

Ecole Nationale Polytechnique

Département : Genie Civil

Promoteur: MESSAFER M.T

Elèves ingénieur: MANSOUR S.

MOUSSA M.



الموضوع:

إيجاد حالة الإجهادات والتشوهات في التربة بإستعمال طريقة العناصر المحدودة

الملخص:

هذا المشروع يهدف إلى إنجاز برامج آلية لدراسة وإيجاد الإجهادات والتشوهات في التربة تحت حمولة ساكنة وذلك بإستعمال طريقة العناصر المحدودة.

S U B J E T :

Détermination de l'état de contraintes et de déformations dans un sol par la méthode des éléments finis.

RESUME :

Le présent projet consiste en l'élaboration de programmes basés sur la méthode des éléments finis en vue de la détermination de l'état de contraintes et de déformations au sein d'un sol, chargé statiquement à sa surface.

S U B J E C T :

Determination of the states of stress and strain in a soil using the finite element method.

ABSTRACT :

The present project consists essentially in the development of finite element computer programmes for evaluation of states of stress and strain within a soil loaded statically.

SOMMAIRE



CHAPITRE I) INTRODUCTION

- I.1) Introduction à la méthode des éléments finis
- I.2) Présentation du sujet

CHAPITRE II) THEORIE DE L'ELASTICITE

- II.1) Introduction
- II.2) Equations gouvernantes de l'élasticité
 - II.2.1) Equations différentielles de l'équilibre
 - II.2.2) Equations déformation -déplacement et de compatibilité
 - II.2.3) Equations intrinsèque du matériau
- II.3) Elasticité plane en coordonnées cartésiennes
 - II.3.1) état de déformation plane
 - II.3.2) état de contrainte plane
- II.4) Résolution
 - II.4.1) Méthodes analytiques
 - II.4.2) Méthodes numériques

CHAPITRE III) REPRESENTATION GENERALE DE LA M.E.F

- III.1) Introduction
- III.2) Historique
- III.3) Concepts d'éléments finis
- III.4) Connaissances fondamentales nécessaires
- III.5) Modélisation par éléments finis
- III.6) Idéalisation par éléments finis
- III.7) Différentes formulations de la M.E.F
- III.8) Choix de la formulation variationnelle
- III.9) Principe des travaux virtuels
- III.10) Discrétisation du travail virtuel
- III.11) Principe de minimisation de l'énergie potentielle totale

CHAPITRE IV) PRESENTATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE POUR L'ELASTICITE PLANE

- IV.1) Introduction
- IV.2) Calcul de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire en élasticité plane
- IV.3) Détermination du vecteur élémentaire des forces nodales

CHAPITRE V) PRESENTATION DE L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

V.1) Introduction

V.2) Principe et propriétés

V.3) Calcul des éléments isoparamétriques

v.3.1) Expression de la fonction approchée $U(x)$

V.3.2) Propriétés fondamentales de l'approximation nodale

V.3.3) Construction des fonctions de N et N

V.4) Calcul de l'élément isoparamétrique choisi pour l'étude des contraintes au niveau d'un tunnel

V.4.1) Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[k^{(e)}]$

V.4.2) Calcul des contraintes au noeud de l'élément réel

CHAPITRE VI) CRITERES DE CONVERGENCE ET NOTION D'ERREUR

VI.1) Introduction

VI.2) Condition de convergence et taux de convergence

VI.2.1) Condition de convergence monotone

VI.2.2) Erreur et taux de convergence

VI.2.3) Condition de convergence non monotone

CHAPITRE VII) PRESENTATION DU PROGRAMME BMAT CORRESPONDANT A L'ELEMENT RECTANGULAIRE

VII.1) Introduction

VII.2) Présentation du programme

CHAPITRE VIII) PRESENTATION DU PROGRAMME ISOBANDE CORRESPONDANT A L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

VIII.1) Introduction

VIII.2) Présentation des étapes de calcul de la matrice de rigidité locale

CHAPITRE IX) APPLICATIONS

Application de l'élément rectangulaire ,et de l'élément isoparamétrique
(Application au sol ,avec interprétation des résultats)

CONCLUSION

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Chapitre 1

INTRODUCTION

I.1) INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères.

Nous pensons bien sûr aux projets spatiaux aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale.

Pour dominer ces projets l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes.

Dans les problèmes relevant de la mécanique de structure l'ingénieur recherche la répartition des contraintes et de déplacements qui règnent dans la structure étudiée afin de s'assurer que la résistance de celle-ci est vérifiée et les spécifications des flèches sont respectées.

Le champ des contraintes calculé doit être l'image d'un système de forces extérieures et intérieures se trouvant partout en équilibre avec la condition supplémentaire que les déplacements doivent rester continus (ce sont les notions d'équilibre et de compatibilité). Pour un problème donné deux étapes dans la détermination du système des contraintes et des déplacements sont établies.

La première consiste à définir des équations régissant la solution et satisfaisant des conditions d'équilibre et de compatibilité. La seconde consiste à résoudre ces équations.

Une difficulté majeure mise à part la résolution des équations choisies réside dans leur aptitude à représenter fidèlement les conditions réelles c'est à dire toutes les complexités pouvant intervenir dans la géométrie, le chargement et les propriétés intrinsèques des matériaux constituant la structure.

Conservant à l'esprit cette première difficulté et les

INTRODUCTION

I.1) INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères.

Nous pensons bien sûr aux projets spatiaux aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale.

Pour dominer ces projets l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes.

Dans les problèmes relevant de la mécanique de structure l'ingénieur recherche la répartition des contraintes et de déplacements qui règnent dans la structure étudiée afin de s'assurer que la résistance de celle-ci est vérifiée et les spécifications des flèches sont respectées.

Le champ des contraintes calculé doit être l'image d'un système de forces extérieures et intérieures se trouvant partout en équilibre avec la condition supplémentaire que les déplacements doivent rester continus (ce sont les notions d'équilibre et de compatibilité). Pour un problème donné deux étapes dans la détermination du système des contraintes et des déplacements sont établies.

La première consiste à définir des équations régissant la solution et satisfaisant des conditions d'équilibre et de compatibilité. La seconde consiste à résoudre ces équations.

Une difficulté majeure mise à part la résolution des équations choisies réside dans leur aptitude à représenter fidèlement les conditions réelles c'est à dire toutes les complexités pouvant intervenir dans la géométrie le chargement et les propriétés intrinsèques des matériaux constituant la structure.

Conservant à l'esprit cette première difficulté et les

approximations qui ne manqueront pas d'en découler; on passe à la seconde étape avec la résolution des équations aux dérivées partielles.

La solution de ces équations n'est pas toujours facile à établir en effet pour la plupart des problèmes rencontrés dans la nature (cas de problèmes bi ou tridimensionnels) les solutions exactes ne sont pas connues.

Il est à peine plus fréquent que la construction d'une solution littérale adéquate sous la forme d'un développement comprenant un certain nombre de ces termes pour obtenir une solution précise.

Heureusement avec l'avènement des ordinateurs les possibilités de résolution se sont multipliées. Plusieurs méthodes numériques ont été élaborées dans ce sens. Parmi elles: **LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**.

L'idée de base de la M.E.F lorsqu'elle est appliquée à des problèmes d'analyse des structures est la suivante: on peut représenter de manière analytique un milieu continu en le subdivisant en domaines possédant chacun ces propres fonctions pour décrire les contraintes et les déplacements.

La forme à supposer est souvent choisie de manière à assurer la continuité du comportement de l'ensemble du milieu.

la M.E.F qui constitue une extension de la méthode des déplacements (pour avoir été utilisée dans l'analyse des structures) revêt une importance considérable quand il s'agit de résoudre des problèmes concernant les structures hétérogènes. De plus elle s'applique aux problèmes stationnaires ou non stationnaires linéaires ou non linéaires.

En effet elle est en mesure de:

- décrire les équations différentielles régissant chaque domaine de la structure.
- d'offrir une aisance quant à la formation automatique de ces équations.
- de représenter les complexités de problèmes réels (de type chargement et structure).

approximations qui ne manqueront pas d'en découler; on passe à la seconde étape avec la résolution des équations aux dérivées partielles.

La solution de ces équations n'est pas toujours facile à établir en effet pour la plupart des problèmes rencontrés dans la nature (cas de problèmes bi ou tridimensionnels) les solutions exactes ne sont pas connues.

Il est à peine plus fréquent que la construction d'une solution littérale adéquate sous la forme d'un développement comprenant un certain nombre de ces termes pour obtenir une solution précise.

Heureusement avec l'avènement des ordinateurs les possibilités de résolution se sont multipliées. Plusieurs méthodes numériques ont été élaborées dans ce sens. Parmi elles: **LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**.

L'idée de base de la M.E.F lorsqu'elle est appliquée à des problèmes d'analyse des structures est la suivante: on peut représenter de manière analytique un milieu continu en le subdivisant en domaines possédant chacun ces propres fonctions pour décrire les contraintes et les déplacements.

La forme à supposer est souvent choisie de manière à assurer la continuité du comportement de l'ensemble du milieu.

la M.E.F qui constitue une extension de la méthode des déplacements (pour avoir été utilisée dans l'analyse des structures) revêt une importance considérable quand il s'agit de résoudre des problèmes concernant les structures hétérogènes. De plus elle s'applique aux problèmes stationnaires ou non stationnaires linéaires ou non linéaires.

En effet elle est en mesure de:

- décrire les équations différentielles régissant chaque domaine de la structure.
- d'offrir une aisance quant à la formation automatique de ces équations.
- de représenter les complexités de problèmes réels (de type chargement et structure).

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel au trois domaines suivants:

- sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles
- méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateurs.

I.2) PRESENTATION DU SUJET

Dans la présente étude nous traitons le cas d'un sol semi-infini chargé à sa surface (charges réparties, charges concentrées). Nous nous emploierons à déterminer l'état de contraintes et l'état de déformations y régnant.

Nous étudions d'abord un sol semi-infini élastique selon la direction (✓) soumis à une charge concentrée appliquée à sa surface de déformations planes ayant des caractéristiques mécaniques définies (module de YOUNG E et coefficient de POISSON).
surface est se trouve à l'état

Ce sol est supposé avoir déjà tassé sous son propre poids.

Une solution exacte a été élaborée pour ce type de problème: solution proposée par BOUSSINESQ basée sur les hypothèses suivantes:

- sol élastique homogène isotrope semi-infini obéissant la loi de HOOKE.
- sol non pesant
- sol non contraint à l'état neutre
- la distribution des contraintes est indépendante de la nature du matériau étudié

- la variation relative de volume du sol est supposée négligée
- continuité des contraintes dans le sol
- distribution symétrique des contraintes par rapport à l'axe suivant la profondeur du sol lorsque le chargement est symétrique.

Le but de notre travail est de déterminer le champ de contraintes et de déformations au sein du sol en essayant d'approcher au mieux les hypothèses citées précédemment avec l'utilisation d'une méthode numérique de calcul: **LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.**

Nous procédons alors par subdivision du sol en éléments rectangulaires à quatre noeuds ayant deux degrés de liberté par noeud. Deux types de maillage sont à envisager: un maillage régulier et un maillage non régulier et ceci dans le but de comparer les résultats obtenus avec la solution exacte.

Il arrive que l'ingénieur soit confronté à l'étude de certains sols comportant des cavités ou des trous.

Ces cavités qui peuvent être naturelles (grottes) ou artificielles (tunnels) sont considérées comme des zones dangereuses c'est à dire de faiblesse pour le sol, dans la mesure où il y'a apparition d'un excédent de contraintes au voisinage de celle ci.

Il serait intéressant de déterminer l'état de contraintes et de déformation d'un tel sol en vue de vérifier la résistance à la rupture (effondrement) sous l'action d'un chargement extérieur. Nous étudions le cas d'un sol présentant un tunnel circulaire soumis à un chargement réparti suivant une distance égale au diamètre du tunnel.

Ce problème est traité par la méthode des éléments finis en utilisant l'élément isoparamétrique à quatre noeuds avec deux degrés de liberté par noeud.

Ce choix d'élément a été fait de manière à approcher au mieux la géométrie du tunnel.

En vue de résoudre les problèmes précédemment énoncés nous avons élaboré des programmes informatiques qui traitent l'élément rectangulaire et l'élément isoparamétrique.

Chapitre 2

Chapitre 2

II.1) INTRODUCTION :

Généralement les matériaux ont à l'état solide un comportement complexe. Nous comprendrons à cet égard qu'il est impossible de mettre au point une équation ni même un système d'équations décrivant le comportement du matériau en tenant compte de tous les paramètres intervenant.

En pratique, on procède à une formulation séparée d'équations décrivant différentes catégories de réponses du matériau idéal. Chacune de ces équations est une formulation mathématique ayant pour but, l'approximation d'observations physiques de la réponse d'un matériau réel dans un domaine déterminé.

Comme exemple de matériaux idéaux, nous citerons:

- Solide élastique hookien idéal.
- fluide visqueux newtonien.

La théorie d'élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces-déplacements.

Pour un solide soumis à un chargement donné, cette théorie a pour but l'étude des contraintes et des déformations qui en résultent avec pour hypothèses:

- Les déformations sont supposées petites.
- La loi de comportement reliant contraintes et déformations est linéaire.
- le solide est élastique, homogène, isotrope.

II. 2) EQUATIONS GOUVERNANTES DE L'ELASTICITE

La théorie de l'élasticité consiste à formuler 3 types d'équations qui sont :

- * LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE L'EQUILIBRE
- * LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS
- * LES LOIS INTRINSEQUES DES MATERIAUX

II.2) EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE L'EQUILIBRE

Les forces de volume :

L'état de contrainte dans le corps chargé varie d'un point à un autre et les composantes des contraintes sont donc des fonctions des coordonnées du point :

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z) \quad \text{et} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y, z)$$

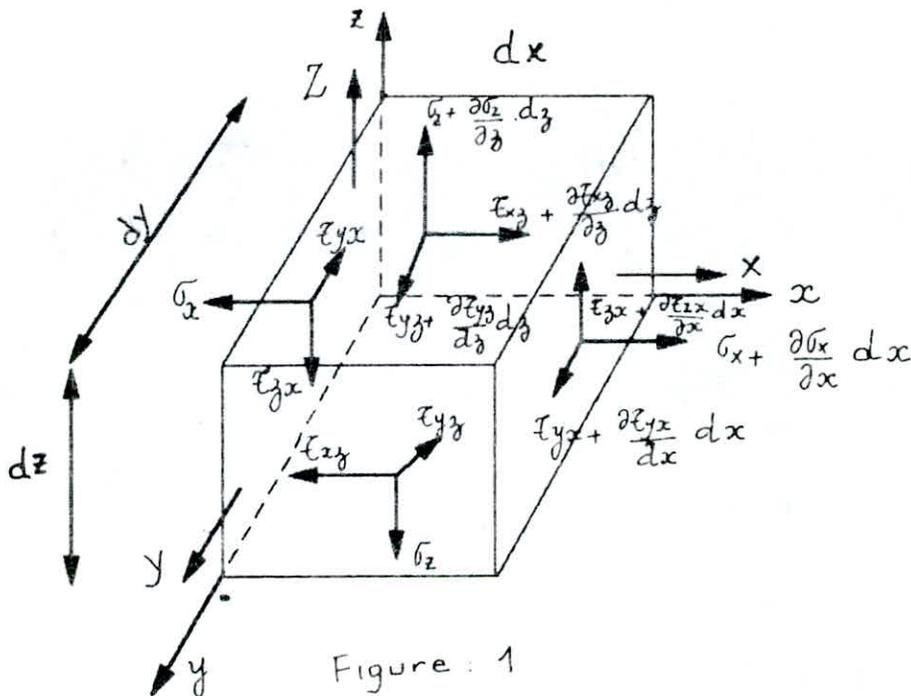


Figure : 1

soit x, y, z Les composantes de la force volumique par unité de volume, les équations d'équilibre obtenues en faisant le bilan des forces élastiques agissant sur l'élément prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \sum Z_i &= 0 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned} \quad (II.1)$$

avec :

σ_x : contrainte normale suivant x

σ_y : contrainte normale suivant y

σ_z : contrainte normale suivant z

τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} : les contraintes tangentielles respectivement dans le plan xy, xz, yz.

II.2.2) EQUATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS ET COMPATIBILITE

II.2.2.1) EQUATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS

On traite d'abord le problème à deux dimensions, puis il sera généralisé à trois dimensions. Considerons un élément de côté dx, dy, dz d'un corps élastique. Si le corps subit une déformation et que u, v sont les composantes du déplacement du point A (les déplacements sont des infiniments petits et varient d'une manière continue dans le volume du corps), le déplacement dans la direction x d'un point voisin B sur l'axe à une distance dx du point A sera :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$$

Définissons les coordonnées des points de l'élément :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; B \begin{pmatrix} x+dx \\ y \end{pmatrix} ; C \begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \end{pmatrix} ; D \begin{pmatrix} x \\ y+dy \end{pmatrix}$$

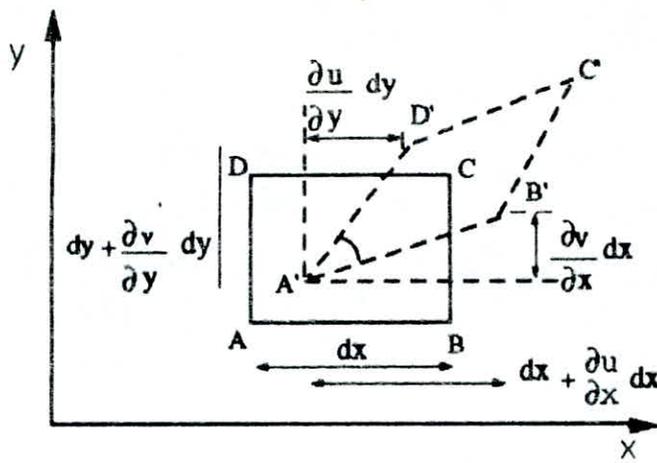


Figure: 2

Soit ϵ_x l'allongement par unité de longueur suivant x .

$$\epsilon_x = \frac{(A'B' - AB)}{AB}$$

sachant que :

$$(A'B')^2 = (APA')^2 + (PA'B')^2 \quad (II.2)$$

où :

$$APA' = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + dx$$

$$PA'B' = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx$$

On obtient

$$A'B' = (1 + \epsilon_x) dx \quad (II.3)$$

En élevant l'équation (II.3) au carré et en l'identifiant à l'équation (II.2), puis en divisant le tout par $(dx)^2$ on a :

$$2 \cdot \epsilon_x + \epsilon_x^2 = 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \quad (II.4)$$

Les termes d'ordre supérieurs sont à éliminer en raison de l'hypothèse des petites déformations.

Il en découle :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (II.5)$$

De la même manière, l'allongement par unité de longueur suivant y s'écrira :

$$\epsilon_x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{II.6})$$

La déformation tangentielle γ_{xy} est définie comme la diminution d'un angle qui est droit avant déformation (Fig.II.3).

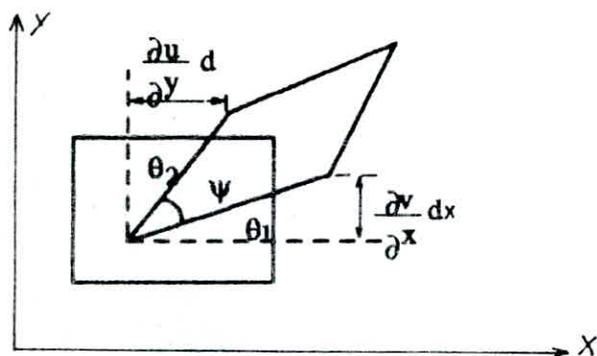


Figure:3

Il en vient que γ_{xy} s'écrira comme étant la somme des angles θ_1 et θ_2 :

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{II.7})$$

L'ensemble des équations citées précédemment (II.5,II.6,II.7) constitue trois équations déformations-déplacements de problèmes plans.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Dans le cas où l'élément est à trois dimensions, en procédant de la même manière que précédemment on obtient, les équations géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & ; & & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (II.9)$$

où :

ϵ_z représente l'allongement par unité de longueur suivant z .

γ_{xy} , γ_{yz} représentent les déformations transversales entre les plans (yx) , (yz) et les plans (xy) , (xz) .

II .2.2.2) EQUATIONS OU CONDITIONS DE COMPATIBILITES

Il existe des relations qui expriment les restrictions sur la forme des déformations pour que le système d'équations soit intégrable.

Ces conditions d'intégrabilité sont appelées conditions de compatibilité de déformations.

Les conditions de compatibilité relatives aux problèmes plans, peuvent s'écrire de la manière la plus élémentaire qui soit: il suffit de dériver γ_{xy} par rapport à x et y .

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

Si on généralise cette condition à trois dimensions, on parvient ensemble de six équations qui sont:

$$2. \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \cdot \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$2. \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \quad (II.10)$$

$$2. \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2}$$

La solution qui satisfait à toutes les conditions d'équilibre et de compatibilité au sein d'un corps et sur ces frontières, constitue la solution unique. Il est très important en analyse par éléments finis de conserver l'unicité de la solution, car si une représentation par éléments finis parvenait à vérifier les conditions d'équilibre et de compatibilité, alors on aurait accédé à la solution exacte. Et par conséquent tout affinage du maillage serait inutile.

II.2.3) ÉQUATIONS INTRINSEQUES DU MATERIAU

Les équations intrinsèque caractérisent les propriétés du matériau. Elle prennent forme de $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$ dans le cas d'un état de contrainte uniaxiale.

Dans le cas d'un élément cubique soumis à des contraintes normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, et à des contraintes tangentielles τ_{xy}, τ_{yz} et τ_{zx} alors les déformations s'expriment en fonction des contraintes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)) & ; & & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)) & ; & & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_x)) & ; & & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

avec G représentant le module de cisaillement: $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

En exprimant les contraintes en fonctions des déformations, sous forme matricielle on a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

avec :

λ, μ : coefficients de LAME définis par les expressions suivantes:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 - 2 \cdot \nu)(1 + \nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

II.3) ELASTICITE PLANE EN COORDONNEES CARTESIENNES

Ce sont deux cas particuliers de problèmes plans, où les équations sont très simplifiées: ce sont l'état de déformations plan et l'état de contraintes plan. Dans ces deux cas, les contraintes et les déformations sont indépendantes de la direction Z.

II.3.1) ETAT DE DEFORMATIONS PLAN

Dans un état de déformations plan, la dimension de la structure dans une direction par exemple Z est supposée très grande par rapport aux deux autres directions (les directions x, y). Les forces appliquées agissent dans le plan xy, et sont uniformément réparties dans la direction Z.

Les analyses de barrages, sol, murs de soutènement et autres ouvrages géotechniques en sont parmi les applications les plus importantes.

II.3.1.1) DEFINITION

Un état de déformation plan est défini par:

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

$$w = 0$$

Dans ce cas on définit trois composantes du tenseur de déformations nulles :

$$\begin{aligned}\epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0\end{aligned}$$

Et trois composantes de déformation en fonction de x et y qui sont :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

II.3 .1.2) EQUATIONS CONTRAINTES-DEFORMATIONS

Les contraintes s'expriment en fonction des déformations par le biais de la relation matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$ est indépendante de la direction z.

Et inversement les déformations s'expriment en fonction des contraintes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu) \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu) \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_x] \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2 \cdot G}\end{aligned}$$

avec:

ν : coefficient de POISSON.

E : module de YOUNG.

II.3.1.3) EQUATION D'EQUILIBRE

Les équations d'équilibre obtenues pour un cas tridimensionnel se réduisent à deux équations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (II.13)$$

II.3.1.4) EQUATIONS DE COMPATIBILITE

Dans un cas bidimensionnel, les six équations de compatibilité se réduisent à une seule et s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \quad (II.14)$$

Cette équation peut s'exprimer de façon simple en fonction des contraintes.

Dérivons à cet effet, les équations d'équilibre, la première par rapport à x la seconde par rapport à y et additionnant les membre à membre afin d'obtenir l'équation en terme de contraintes suivantes

:

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = - \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] - \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right]$$

De plus en substituant les expressions de ϵ_x , ϵ_y , ϵ_{xy} dans l'équation (II.14) on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}$$

A partir de ces deux égalités on trouve :

$$\left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] = - (1 + \nu) \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right]$$

c'est à dire :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = - (1 + \nu) \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right]$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = - (1 + \nu) \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right]$$

Dans le cas où σ_x et σ_y sont nuls ou constants, cette condition se réduit à :

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (II.15)$$

II.3.1.5) EXEMPLE DE DÉFORMATIONS PLANES

Cas d'un mur de barrage de section constante soumis à son propre poids et la pression d'eau (Fig.II.4).

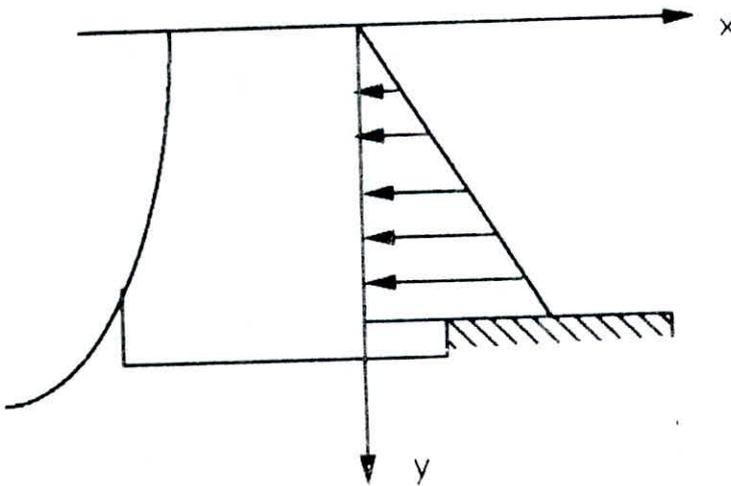


Figure: 4

Remarque

Une déformation plane n'entraîne pas une contrainte plane car en exprimant les contraintes en fonction des déformations selon la loi intrinsèque du matériau on obtient :

$$\text{pour } \epsilon_z = 0 : \quad \sigma_z = \lambda \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

II 3.2) ETAT DE CONTRAINTES PLANES

L'état de contraintes plan concerne les problèmes de structures où la dimension suivant z est très négligeable par rapport à la dimension en plan . De plus le chargement est latéral et parallèle au plan moyen de la structure. Exemple: le cas d'une plaque (Fig.II.5).

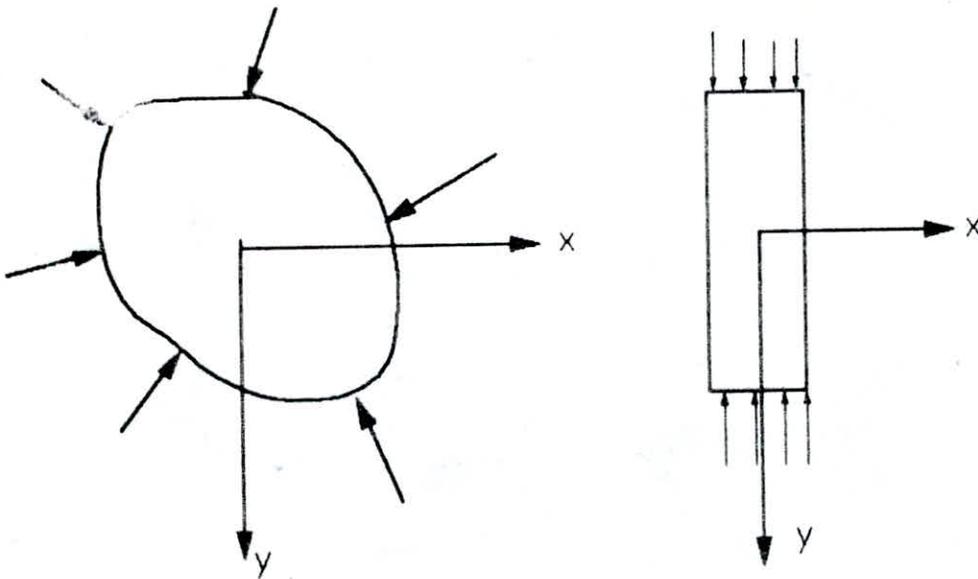


Figure 5

II.3.2.1) DEFINITION

L'état de contraintes planes est défini par :

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$$

$$\epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$$

II.3.2.2) EQUATIONS CONTRAINTES-DEFORMATIONS

Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope, les déformations s'expriment en fonction des contraintes telles que :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2.G}\end{aligned}$$

De la même manière on exprime les contraintes en fonction des déformations :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

II.3.2.3) EQUATION D'EQUILIBRE

Les équations d'équilibre dans ce cas sont identiques à celles obtenues dans l'état de déformation plan (II.13).

II.3.2.4) EQUATIONS DE COMPATIBILITE

Les équations de compatibilité dans le cas de contraintes planes sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & (II.16) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial x} = 0\end{aligned}$$

Dans le cas où les forces volumiques sont nulles ou constantes, la condition de compatibilité s'écrit comme suit :

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Remarque :

A partir du système d'équations (II.12) reliant les contraintes aux déformations on obtient pour $\sigma_z=0$ l'expression de la déformation suivant z.

$$\epsilon_z = \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

L'ensemble des équations de compatibilité (II.16) ne peut être satisfait que si le problème est vraiment bidimensionnel c'est à dire que les contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sont indépendantes de z, ce qui implique la nécessité d'avoir les trois conditions de compatibilité citées précédemment à savoir :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial x} = 0$$

Ces équations ne sont vraies que si les contraintes sont une fonction linéaire de x et y, mais en général ces équations ne sont pas vérifiées par des contraintes planes indépendantes de z. En général les conditions aux limites, les conditions d'équilibre et les conditions de compatibilités suffisent pour déterminer complètement un problème en contraintes planes.

Lorsque les forces volumiques X, Y sont nulles ou constantes on peut passer aisément des formules relatives aux contraintes planes, aux formules relatives aux déformations planes de la en assumant le module de YOUNG à $\frac{E}{1 - \nu}$, et le coefficient de poisson à $\frac{\nu}{1 - \nu}$.

II 4) RESOLUTION

la résolution des problèmes bidimensionnels peut se se faire par le biais des méthodes numériques ou par des méthodes analytiques.

II.4.1) METHODES ANALYTIQUES

Une solution pratique pour définir un champ de contraintes qui satisfait aux équations de l'équilibre, consiste en l'utilisation de fonctions de contraintes.

Ces fonctions sont des expressions qui dérivées selon certaines règles donnent des composantes de contraintes satisfaisant aux conditions de l'équilibre. En l'absence de forces volumiques, l'état de contraintes admet une solution de ces fonctions appelées fonctions d'AIRY notées ϕ .

Elles s'expriment sous la forme d'un polynome en x et y .

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cdot x^m \cdot y^n$$

Les équations d'équilibre sont identiquement satisfaites, si les contraintes sont reliées à une fonction scalaire $\phi(x,y)$ par les équations suivantes :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

La satisfaction de l'équation de compatibilité entraîne :

$$\nabla^4 \phi (x,y) = 0 \quad \text{équation biharmonique}$$

De plus cette fonction doit satisfaire les conditions aux limites.

Remarque

Comme les contraintes sont des dérivées secondes de ϕ , celle ci doit être au moins d'ordre deux. Les polynômes d'ordre supérieur (>3) peuvent être utilisés mais les coefficients doivent être ajustés pour que l'équation biharmonique soit satisfaite.

II 4.2) METHODES NUMERIQUES

Parmi les méthodes numériques de résolution nous énonçons le principe de quelque unes .

**** Méthode des différences finies**

Dans cette méthode, le domaine de variation continue des arguments est remplacé par un ensemble fini de points obtenus par quadrillage de la structure, par une série de droites parallèles aux axes de coordonnées.

les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites sont remplacées par des combinaisons linéaires de valeurs prises par la fonction déplacement en certains noeuds.

**** Méthode des bandes finies**

le principe de cette méthode repose sur sur la subdivision de la structure en sous domaines bidimensionnels (bandes), ou tridimensionnels (prismes ou couches) dont deux extrémités (cas de bandes) ou deux faces (cas de prismes, couches), opposées coïncident avec les côtés de la structure.
Cette méthode est applicable pour les structures avec deux

extrémités opposées simplement appuyées, pour lesquelles un choix judicieux des fonctions de déplacements simplifie considérablement le système d'équations à résoudre. Et ceci car elle utilise des fonctions qui à priori satisfont les conditions aux limites .

** Méthode des éléments frontières

Cette méthode est la technique la plus puissante pour la résolution de problèmes présentant certaines difficultés qui surgissent quand le domaine à étudier est infini, et quand apparaissent des singularités en des points.

** Méthode des éléments finis

C'est une méthode universelle et puissante applicable pour des structures de formes diverses avec des conditions très variées. Elle consiste à subdiviser le milieu continu en un nombre fini d'éléments assemblés aux noeuds, et à approximer les déplacements en des points déterminés.

Remarque

Nous devons noter que les méthodes analytiques restent à application limitée, en effet elle ne se prête pas à la formulation d'éléments complexes, d'où la nécessité de recourir à des méthodes numériques.

Dans ce qui va suivre, nous allons étudier la méthode des éléments finis dans le détail.

Chapitre 3

REPRESENTATION GENERALE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III.1) INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est une méthode extrêmement puissante dans l'analyse des structures continues telles: les plaques, coques, poutres épaisses, murs de barrage, tunnel ... etc. Des approximations simples des variables inconnues permettront de transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques que l'on résoud par des méthodes numériques.

III.2) HISTORIQUE :

La méthode des éléments finis a été développée sur la base de fondements physiques reposant d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures, et d'autre part sur les méthodes d'approximations.

C'est au professeur Courant (1940) que revient l'idée de résolution, des problèmes de milieux continus par la discrétisation en éléments à l'aide de méthodes d'approximations adéquates.

La fin de la 2^{ème} guerre mondiale marque un tournant décisif dans l'apparition de la M.E.F. l'évolution de l'industrie aéronautique entraîne le développement des méthodes matricielles. De contributions très importantes voient le jour, telles celle de LEVY (1947), GARVEY (1951) pour la méthode des forces puis de nouveau LEVY en 1953 pour la méthode des déplacements.

En 1955 ARGYRIS présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et l'année suivante Turner et Clough publient une présentation systématique de la méthode des déplacements ces deux publications représentent véritablement le début de la M.E.F.

En 1960, avec l'avènement des premiers ordinateurs, la M.E.F

connait un essort considérable dans plusieurs directions telles :

- Reformulation à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous la forme des résidus pondérés.
- Création d'éléments de haute précision (éléments à cote curviligne, isoparamétriques).
- Utilisation de la M.E.F dans la résolution de problèmes non linéaires et non stationnaires (déplacements indépendants du temps aussi bien dans le domaine des structures que celui de la mécanique des fluides ,thermiques ...etc .
- Construction d'une base mathématique de la M.E.F à partir de l'analyse variationnelle (fonctionnelle).

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la M.E.F en particulier: le livre de ZIENKIEWICZ, de GALLAGHER de Rockey ainsi que les ouvrages de ABSI et IMBERT. D'autre part, plusieurs revues sont consacrées principalement à la M.E.F.

La M.E.F est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale navale et nucléaire elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides .

De nombreux programmes généraux de calcul sont disponibles pour utiliser industriellement la M.E.F, principalement dans la mécanique des solides, citons par exemple NASTRAN, ASKA, SAP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA. Pour que la M.E.F soit efficace dans les applications industrielles il faut utiliser des programmes d'assistance à la préparation des données et à l'interprétation des résultats .

Des micro-ordinateurs ont permis le développement de nouveaux programmes adaptés à ces machines utilisées par les entreprises et les bureaux d'études SAP 80, SUPERSAP, ROBOCAD.

SYNOPTIQUE DES PRINCIPAUX DEVELOPPEMENTS DES METHODES MODERNES D'ANALYSE DES STRUCTURES JUSQU'EN 1956

1800 -

Structures hyperstatiques NAVIER (1819)
Théorème de l'énergie MAXWELL (1864)
CASTGLIANO (1878)

1900

Méthodes d'approximations..... RITZ (1908)
GALERKINE (1915)
Approche par E.F COURANT (1940)
Méthodes matricielles LEVY (1947)
GARVEY (1951)

1955 *Concept d'éléments finis*

Méthode des forces..... ARGYRIS (1955)
Méthode des déplacements..... TURNER (1956)

1960 *Ordinateur*

- Reformulation à partir de considération énergétique sous les formes de résidus pondérés.
- Création d'éléments de haute précision.

III.3) CONCEPTS D'ELEMENTS FINIS

La M.E.F étudie le comportement d'un milieu continu supposé composé d'éléments indépendants reliés uniquement par des noeuds dits "virtuels". C'est simplement par cette représentation que la méthode diffère des méthodes matricielles (méthode de force, méthode des déplacements, méthodes mixtes).

Pour mieux comprendre l'établissement des étapes de la M.E.F, nous

pensons qu'il serait utile de donner un aperçu sur des méthodes matricielles .

Celles ci traitent des problèmes de structure dites à "treillis" composées naturellement d'une réunion de parties indépendantes reliées entre elles par des points ou noeuds .Comme exemples citons: poutres continues, cadre à plusieurs étages.

L'analyse de telles structures requiert dans un premier temps : L'élaboration d'une matrice de rigidité élémentaire décrivant le comportement du matériau en s'appuyant sur les hypothèses de R.D.M. Puis l'assemblage de ces différentes matrices élémentaires en vue de la formation d'une matrice de rigidité globale avec laquelle nous établissons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuités des déplacements et d'équilibre des forces aux noeuds.

Ensuite nous passons à la détermination des déplacements de tous les noeuds par résolution du système d'équations. En fin l'obtention des contraintes par substitution des valeurs des déplacements obtenues dans les relations reliant contraintes déplacements.

Pour sa part la M.E.F passera pour les étapes citées précédemment à condition d'idéaliser d'abord la structure totale continue, puis de la discrétiser "artificiellement" au moyen d'un assemblage d'éléments finis connectés aux noeuds ,et pour lesquels les déplacements nodaux seraient les inconnues.

Outre le caractère continu des structures étudiées par la M.E.F, cette dernière diffère de l'analyse des structures (à base d'éléments barres et d'éléments poutres) par le fait que les matrices de rigidité exactes (exacte dans le contexte d'une théorie bien précise) sont disponibles dans les méthodes matricielles, à l'inverse de la M.E F ou le choix de fonctions de formes ne mène pas à la solution exacte, mais tente de s'en approcher.

III.4) CONNAISSANCES FONDAMENTALES NECESSAIRES

Trois conditions de base doivent être vérifiées dans une structure.

- 1- L'équilibre des forces
- 2- La compatibilité des déplacements
- 3- Les lois de comportement des matériaux

La première exprime que les forces intérieures contre-balancent l'action de la charge extérieure appliquée .

La seconde exprime que la structure est convenablement déformée dans son ensemble .

La troisième exprime la relation entre charge et déformation pour chaque composante de la structure (loi de HOOKE dans les problèmes d'élasticité linéaire) .

III.5) MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

Cette méthode consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu qui décrira fidèlement les conditions réelles (géométrie, charge), l'établissement d'un tel modèle pour un problème réel est basé sur les trois aspects suivants :

- 1- Compréhension de la nature du problème
- 2- Connaissance approfondie des principes fondamentaux mécaniques
- 3- Connaissance des procédures d'analyse de la M.E.F

III 6) IDEALISATION PAR ELEMENTS FINIS

Il serait intéressant afin de mieux définir l'esprit commun aux nombreuses approches possibles de la formulation des équations des éléments finis de comparer au phénomène réel un modèle mathématique simple du comportement d'un élément .

Une structure réelle connaît généralement des contraintes réparties sur l'ensemble de ses différentes régions, un modèle mathématique consisterait en fait à représenter l'état de contrainte dans les différents éléments finis correspondant par des efforts forces

généralisées supposées localisées aux noeuds. Les déplacements de ces mêmes noeuds suivant les degrés de liberté suffiront à caractériser l'état des déplacements de tous les éléments. Pour mieux illustrer ces hypothèses simplificatrices prenons l'exemple de la fig n°1 .

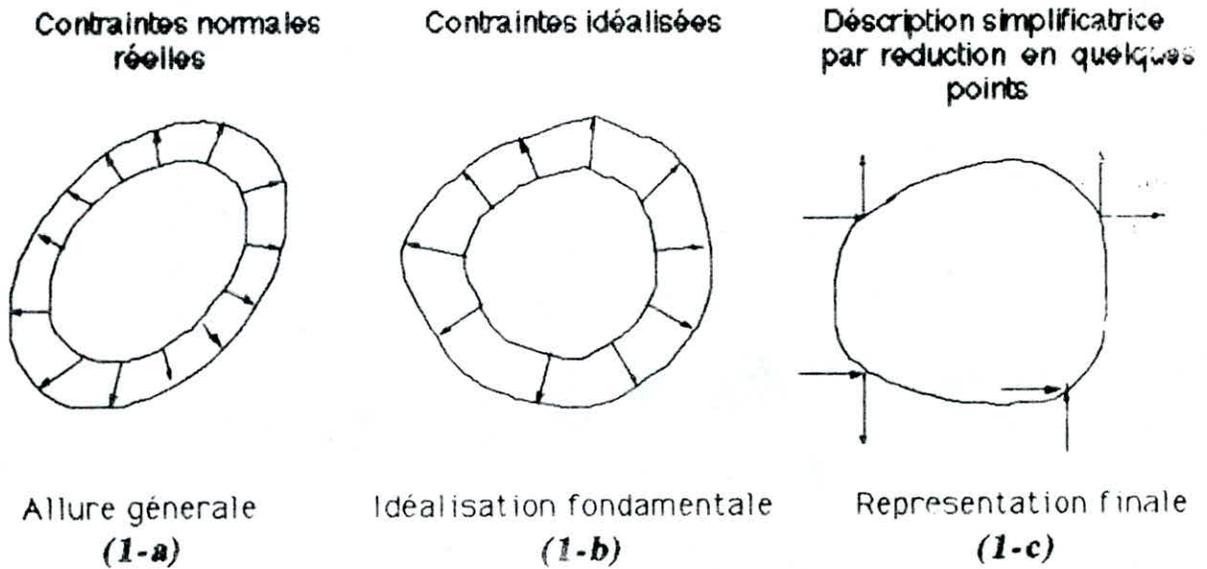


Figure : 1

Nous voyons à travers cet exemple que dans un premier temps (Fig:1-a) les hypothèses simplificatrices portent sur les états de contraintes, de déformations et de déplacements (uniformité) puis tendent à rendre l'élément plus aisément manipulable (réduction des contraintes superficielles en nombre finie de forces généralisées concentrées aux noeuds).

Le processus de formulation d'un élément fini consisterait à définir l'état correspondant à la (fig:1-b), puis à effectuer quelques manipulations algébriques pour parvenir à des modèles

semblable à celui de la (fig: 1-c) L'idéalisation doit être faite de manière à ce que la représentation tende vers la solution exacte, à mesure que l'on réduit la taille de l'élément, ce qui se traduit par un état de déformation constant.

Il est à noter que l'affinage du maillage ne constitue pas la seule manière de s'approcher de la solution exacte on peut également affiner les hypothèses de constructions de ces éléments: construction de formulations élaborées correspondant à des éléments dits " d'ordre supérieur".

III.7) DIFFERENTES FORMULATIONS DE LA M.E.F

Trois formulations possible sont développées pour résoudre un, problème en éléments finis .

- 1- formulation en déplacements
- 2- formulation en contraintes
- 3- formulation hybride

Le traitement de techniques de formulation des équations relatives à chaque grande classe de méthode peut être examiné par l'une des méthodes distinctes de formulation

- 1- La méthode directe
- 2- La méthode des résidus pondérés
- 3- La méthode variationnelle

Dans ce qui suit, nous énoncerons dans une première étape les principes des trois grandes classes de méthode pour la construction d'équations algébriques, puis dans une seconde étape nous nous intéresserons aux méthodes relatives aux traitements techniques pour chacune de ces classes .

PREMIERE ETAPE

1) Formulation déplacements

Dans cette formulation on se donne une approximation du champ de déplacements, le critère variationnel étant celui de l'énergie potentielle total .

2) Formulation contrainte

Dans cette formulation, on se donne une approximation soit sous, forme d'un champ des contraintes en équilibre ou soit sous la forme, d'une fonction contrainte, le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle complémentaire .

3) Formulation hybride

Dans cette formulation on définit le plus souvent la solution en termes d'approximation d'une part du champ de contraintes internes en équilibre, d'autre part des déplacements sur la frontière de l'élément, le critère variationnel utilisé est une variante de l'énergie complémentaire .

Nous retiendrons pour notre étude la méthode des déplacements, vu que, c'est une méthode puissante qui présente en plus certaines facilités, par rapport à la méthode des forces, on cite par exemple qu'il est plus facile d'approcher un champ déplacement qu'un champ de contraintes, de plus elle offre une aisance du point de vue programmation .

La méthode des forces est aujourd'hui partiquement abandonnée pour la résolution des structures complexes parceque d'une part son efficacité numérique est moindre par rapport à celle de la méthode des déplacements, et d'autre part, la méthode des déplacements est plus universelle en permettant plus aisement la résolution de problèmes dynamiques ou non linéaires .

La méthode directe est a application limitée, elle s'applique pour les éléments directs, et il est difficile, voir même impossible de

l'appliquer à des éléments complexes ou à des phénomènes spéciaux. En revanche, la méthode des résidus pondérés présente un éventail d'application virtuellement illimité.

La méthode des résidus pondérés suppose que l'on a choisi à priori une fonction d'approximation par exemple un polynôme, cette fonction ne satisfait généralement pas l'équation différentielle du problème $[L(u)+F(v)]$, et la substituer dans cette équation différentielle entraînerait l'apparition d'un résidu noté R. Afin de déterminer une solution meilleure, on s'efforcera de minimiser l'intégrale des résidus portant sur le domaine concerné, minimisation, que l'on peut symboliser comme suit

$$\int_V R \, dV = \text{minimum}$$

On peut augmenter les chances de succès de cette méthode en associant de manière fonction de pondération ϕ à la fonction résidu de manière à obtenir un minimum nul. La forme générale ci dessus devient :

$$\int_V R \phi \, dV = 0$$

Cette dernière équation résume la méthode des résidus pondérés elle fournit selon le choix des fonctions de pondérations tout un ensemble de type Galerkin ou de Ritz si l'on utilise la notion de fonctionnelle.

En effet dans certains cas la méthode des résidus pondérés équivaut à rendre stationnaire une fonctionnelle, ce qui permet d'obtenir une formulation intégrale directement à partir des conditions de stationnarité, de fonctionnelle, ce qui est utile lorsque la fonctionnelle est plus simple à exprimer que les équations aux dérivées partielles.

DEUXIEME ETAPE

La formulation déplacement étant retenue, nous l'exposerons de manière, succincte à partir des deux premières méthodes (méthode

directe et méthode des résidus pondérés) en mettant en évidence l'importance et l'aisance relative à la méthode variationnelle qui sera l'objet du prochain chapitre .

Dans la méthode directe on combine directement les trois systèmes d'équations d'élasticité à savoir: les équations de l'équilibre, les équations déformation-déplacement et les équations intrinsèque du matériau, avec l'équation relation entre forces et contraintes.

- 1- $\{ F \} = [K] \{ \hat{U} \}$ équation d'équilibre
- 2- $\{ \sigma \} = [D] \{ \varepsilon \}$ équation intrinsèque
- 3- $\{ \varepsilon \} = [L] \{ \hat{U} \}$ équation déformation déplacement
- 4- $\{ F \} = [A] \{ \sigma \}$ équation force contraintes

$$\text{d'ou } \{ F \} = [A] . [D] . [L] . \{ \hat{U} \} \quad [K] = [A] . [D] . [L] .$$

avec : $\{ F \}$: vecteur de forces nodales,
 $[K]$: matrice de rigidité,
 $\{ \hat{U} \}$: vecteur des déplacements nodaux,
 $\{ \varepsilon \}$: vecteur déformations,
 $\{ \sigma \}$: vecteur contraintes
 $[D]$: matrice d'élasticité,
 $[L]$: matrice operateur différentiel,
 $[A]$: matrice relation contrainte force,

III.8) CHOIX DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE

Les méthodes variationnelles ou de l'énergie constituent en mécanique des structures une approche puissante utilisée pour formuler les équations des éléments.

Pour sa part la méthode directe présente des limites sévères quand il s'agit de traiter des structures présentant des complexités de chargement et de géométrie (charges réparties).

On conçoit l'utilisation de la méthodes des résidus pondérés qui est une approche générale de la formulation des équations

d'éléments lorsque la méthode des éléments finis s'applique au delà de la mécanique des structures .

III.9) PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

Le principe des travaux virtuels constitue le fondement des principes variationnels. Il constitue en lui même un moyen de formulation des équations d'éléments finis. Il apparaît sous deux formes courantes: déplacement virtuels et forces virtuelles, menant respectivement au principe de l'énergie potentielle stationnaire et de l'énergie complémentaire stationnaire.

Sous sa forme de déplacement virtuel, le principe des travaux virtuel stipule que l'équilibre du milieu nécessite pour tout champs de déplacement virtuel infinitesimal compatible satisfaisant les conditions aux limites essentielles (de type déplacements) imposées au milieu, il y'ait égalité des travaux extérieurs et intérieurs.

Exprimé en termes concrets, le phénomène établit l'équilibre entre ce qui entre dans la structure, ce qui en sort, et ce qu'elle conserve .

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \bar{\mathbf{U}}^{ST} \mathbf{f}^S dS + \sum \mathbf{U}^{LT} \mathbf{F}^L \quad (1)$$

energie interne
travail des forces exterieures

Avec :

$\bar{\mathbf{u}}^T$: Vecteur des déplacements virtuels

\mathbf{f}^B : Forces volumiques

\mathbf{f}^S : forces surfaciques

\mathbf{F}^L : force concentrée

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$: déformation correspondant au déplacement virtuel $\bar{\mathbf{U}}$

$\boldsymbol{\sigma}$: Vecteur contrainte

Remarque:

Le champs de déplacement virtuel est décrit par des composantes (δu , δv , δw) définies en chaque point. Il faut noter que ce champs de déplacement doit être cinématiquement admissible, c'est à dire exprimable par des fonctions continues des coordonnées de l'espace et qui satisfait aux conditions cinématiques de frontière la ou de telles conditions existent.

La figure (2) montre des déplacements admissibles pour une barre en fléxion (poutrelle): chacune respecte les conditions aux extrémités et présente une variation de pente dans la partie inférieure. La figure (3) montre par contre une lacune au niveau du champs de déplacement choisi. Il manque soit la satisfaction des conditions d'appui, soit la continuité de la pente. Ils sont donc inadmissibles.



Figure:2



Figure:3

III.10) DISCRETISATION DU TRAVAIL VIRTUEL PAR ELEMENTS FINIS

Le principe des travaux virtuels étant établi, nous passons à la construction de la matrice de rigidité d'un élément fini .

La formulation en éléments finis, transforme l'intégrale sur tout le volume en une somme d'intégrales sur des volumes élémentaires.

L'équation (1) s'écrira donc :

$$\sum_e \int_{V^e} \sigma^T \delta v^e dV - \sum_e \int_{V^e} \bar{U}^{\sigma T} f^b dV + \sum_e \int_{S^e} \bar{U}^{s1} f^s dS + \sum_e U^{\sigma T} F^1$$

OU e = représente le nombre d'éléments
 $e = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, k$

Les différentes intégrales de volumes et de surface ont lieu au niveau de chaque élément en référence au système de coordonnées correspondant à cet élément, ainsi le calcul intégral se fera de manière efficace.

Nous choisissons sur le domaine étudié V un ensemble de n noeuds d'interpolation de coordonnées x_i . Sur chaque élément $V(e)$ utilisons une approximation nodale de la fonction exacte $U(x)$.

La fonction d'approximation choisie doit respecter certaines conditions qui sont un guide pour choisir la forme de l'élément fini, le nombre, la position des noeuds ainsi que le champs des déplacements doit être:

- Continu, dérivable au sein de l'élément ainsi qu'au passage des frontières inter-éléments lorsque les éléments adjacents sont de même type ou possèdent les mêmes fonctions d'interpolation notées N_i sur les frontières en contact.
- cinématiquement admissible (conditions d'appuis)
- les équations forces déplacements doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement de corps rigide.
- doit coïncider avec la valeur exacte $U(x)$ en n points appelés noeuds.

Notons que ces conditions seront détaillées ultérieurement dans le chapitre traitant de la convergence.

La fonction approchée s'écrit

$$\hat{U}(x) = N_1(x)\mu_1 + N_2(x)\mu_2 + \dots + N_n(x)\mu_n \quad (3)$$

où $N_i(x)$: fonction d'interpolation sur l'élément

μ_i : paramètres nodaux ou variables nodales de l'approximation

L'expression (3) s'écrit sous forme matricielle comme suit:

$$U^e(x) = [N^{(e)}]^T \{ \hat{U} \}$$

Remarque:

- Les fonctions d'interpolations $N_i(x)$ sont indépendantes des déplacements nodaux U_i .

Comme $\hat{U}(x_i) = U_i$ aux noeuds

Ces fonctions vérifient

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

L'erreur d'approximation définie par :

$$e(x) = \hat{U}(x) - U(x) \text{ s'annule en fait en tout les noeuds } x_i \\ \text{donc : } e(x_i) = 0$$

- Malgré que le vecteur \hat{U}^T renferme tous les déplacements nodaux, seul les déplacements aux noeuds de l'élément affectent les déformations.

L'expression des déformations $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ dans un cas bidimensionnel s'écrivent en fonction des déplacements nodaux comme suit:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \sum N_i \hat{U}_i}{\partial x} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{U}_i \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \sum N_i \hat{U}_i}{\partial y} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{U}_i \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\sum N_i \hat{U}_i \right) = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) N_i \hat{U}_i \end{aligned} \quad (4)$$

Le système d'équation (4) s'écrit sous la forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = B^{(e)} \{\hat{U}\}$$

ou $B^{(e)}$: représente la matrice déformation-déplacement

Les lignes de $B^{(e)}$ sont le résultats de différentiation des combinaisons des lignes $N_i(e)$.

Conformement aux relations contraintes déformations déjà établies dans le chapitre de l'élasticité, on peut exprimer les contraintes des noeuds de chaque élément en fonction des déplacement nodaux comme suit :

$$\sigma^{(e)} = D \cdot \varepsilon = D^{(e)} B^{(e)} \hat{U}$$

où $D^{(e)}$: Matrice d'élasticité élémentaire

Compte tenu de toutes les relations précédentes l'équation (2) s'écrira comme suit :

$$\hat{U}^T \left[\sum_c \int_{V^{(e)}} B^{eT} D^{(e)} B^{(e)} dV \right] \hat{U} = \hat{U}^T \left\{ \sum_c \int_{V^{(e)}} N^{T(e)} f^{B(e)} dV^{(e)} \right\} + \left\{ \sum_c \int_{S^{(e)}} N^{S(e)} f^{S(e)} dS^{(e)} \right\} + F$$

(5)

La 1^{ème} composante de F est une force nodale concentrée.

L'équation (5) pourra être simplifiée en attribuant au vecteur déplacement virtuel les composantes suivantes :

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ puis } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On obtient l'expression suivante

$$[K] \cdot \{\hat{U}\} = \{R\}$$

où

{0} représente le vecteur déplacements nodaux de toute la structure

[K] représente la matrice de rigidité globale

{R} = {R_B} + {R_S} + {R_C} : représente la résultante de toutes les charges extérieures

$$K = \sum \int_{V(e)} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} dV^{(e)}$$

K s'écrit comme la somme de matrices de rigidité élémentaires

$$K^{(e)} = \int_{V(e)} B^{(e)T} D^{(e)} B^{(e)} dV^{(e)}$$

R^B : résultante de toutes les forces volumiques de la structure

$$R^B = \sum \int_{V(e)} N^{B(e)} f^{B(e)} dV^{(e)}$$

R^{B(e)} : vecteur force volumique élémentaire

$$R^{B(e)} = \int_{V(e)} N^{BT(e)} f^{B(e)} dV^{(e)}$$

R^S : résultante de toutes les forces surfaciques de la structure

$$R^S = \sum \int_{S(e)} N^{ST(e)} f^{S(e)} dS^{(e)}$$

R^{S(e)} : vecteur force surfacique élémentaire

$$R^{S(e)} = \int_{S(e)} N^{ST(e)} f^{S(e)} dS^{(e)}$$

R^C : résultante des forces concentrées appliquées à toute la

$$R^C = \sum F^{(e)}$$

$F^{(e)}$: vecteur force élémentaire

III.11) PRINCIPE DE MINIMISATION DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE

Le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale constitue un fondement variationnel de la formulation directe des équations de rigidité des éléments .

PRINCIPE

Parmi tous les déplacements de formes admissibles qui vérifient les conditions de compatibilité, ceux qui satisfont l'équilibre donnent à l'énergie potentielle totale π une valeur stationnaire .

En un point de stationnarité nous avons :

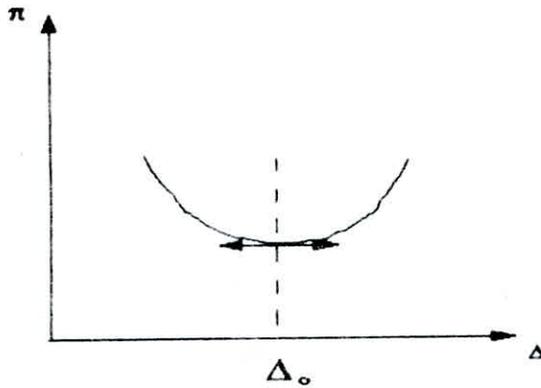
$$\frac{d \pi(\Delta^0)}{d \Delta} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \Delta : \text{vecteur déplacement} \\ \Delta^0 : \text{extremum recherché} \end{array}$$

On reconnaît la condition de pente nulle au point de stationnarité qui est donc un extrémum .

La nature de l'extrémum est donnée par le signe de la courbure c'est à dire de la dérivée seconde .

Pour un minimum la courbure est positive .

$$\frac{d^2 \pi(\Delta_0)}{d\Delta^2} > 0$$



La méthode des éléments finis lorsqu'elle est basée sur l'approche variationnelle, est considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle totale; le processus des éléments finis consistera donc à chercher un minimum dans la limite d'un type de champs de déplacements imposés. Ceci fait intervenir la notion de convergence vers la solution exacte qui est celle qui assure l'équilibre avec la condition que les déplacements tendent vers les valeurs réelles. La solution approchée obtenue par la M.E.F à partir de la formulation en déplacements fournira toujours une valeur approchée de π supérieur à la valeur exacte. On parle alors de convergence par le haut (borne supérieure de la valeur de l'énergie π).

$$\pi^* < \pi^*_N$$

avec π^* : énergie potentielle totale correspondant à la solution exacte

π^*_N : énergie potentielle totale correspondant à la solution approchée

Puisque la fonctionnelle (π) est minimale pour un certain nombre de paramètres, on peut traduire ce minimum par la stationnarité de π

$$\frac{\partial \pi}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial U_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \pi}{\partial U_n} \end{pmatrix} = 0$$

Systeme d'equation (6)

Parmi les processus d'approximation de la fonctionnelle (π), il existe la methode de RAYLEIGH-RITZ, des moindres carrés, GALERKINE, collocation par points et par intervalles.

La methode de R.RITZ est identique à la M.E.F dans le sens ou elle discretise la fonctionnelle (π) en utilisant la meilleure approximation appartenant au sous-espace de dimension fini N de fonctions cinematiquement admissibles engendrees par les fonctions de base $\phi_i(M)$.

$$\hat{U}(M) = \sum a_i \phi_i(M)$$

On forme ensuite un systeme d'equations simultannees exprimant la minimisation de π par rapport à ces parametres .

La difference residerait dans le fait que la methode de RITZ, les deplacements sont definis sur tout le domaine considere. On est conduit alors à un systeme ou la notion de bande n'intervient pas (matrice de rigidite peulee).

Cependant dans la M.E.F du fait que chaque parametre nodal (U_i) n'a d'influence que sur les elements qui lui sont adjacents. On obtient une matrice de rigidite peu peulee ayant une structure bande.

Cela d'une part , d'autre part la methode de RITZ est limitee à des formes geometriques relativement simples; en effet il n'est pas toujours possible de trouver des fonctions de base qui conviennent

à des géométries complexes.

Par contre la M.E.F se limite au choix de l'élément uniquement, puis par assemblage d'éléments de formes simples, on peut représenter des configurations complexes et proches de la réalité. En plus de ces différences, il faut noter que pour la M.E.F les paramètres indéterminés sont pris comme étant les déplacements nodaux, ce qui simplifie l'interprétation physique.

La méthode de RITZ conduit à des modèles approchés de structures qui sont plus rigide que ne l'est la structure réelle.

En effet puisque. $\pi^* < \pi^*_N$

avec $\pi^* = -1/2 P \delta$ exact

$\pi^*_N = -1/2 P \delta$ approché

d'où δ approché $<$ δ exact

Cette surévaluation de rigidité peut être compenser dans le cas de la M.E.F par l'utilisation de l'intégration réduite qui a pour effet de ne pas prendre en compte dans le calcul de l'énergie de déformation de certains modes de déformation, donc de diminuer la rigidité.

Chapitre 4

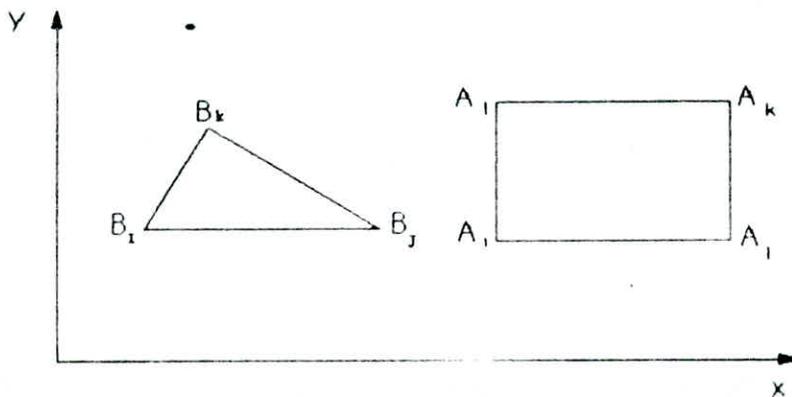
**PRESENTATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE
POUR L'ELASTICITE PLANE**

IV .1) INTRODUCTION

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être divisés en deux groupes distincts, les problèmes de contraintes planes et les problèmes de déformations planes. Comme déjà vu dans le chapitre Elasticité, dans les premiers cas la structure a une petite épaisseur par rapport à ses autres dimensions et les contraintes normales au plan sont négligées tandis que dans le deuxième cas la structure a une dimension très grande par rapport à ses autres dimensions et la déformation normale au plan du chargement est nulle.

*** DEPLACEMENT ET FORCES NODALES :**

La forme la plus simple des éléments utilisés pour l'analyse des structures bidimensionnelles soumises à des charges dont les lignes d'action sont dans le plan est un triangle ou un rectangle avec des noeuds aux coins.



Si l'élément est supposé dans le plan (xy) chaque noeud A_i a deux composantes u_i et v_i suivant les directions x et y respectivement. Pour l'élément rectangulaire à quatre noeuds les composantes du vecteur déplacements nodaux $\{U\}$ est représenté par:

$$\{U\}^T = (U_i \ v_i \ U_j \ v_j \ U_k \ v_k \ U_l \ v_l)$$

si on suppose qu'en chaque noeud, on a une force dont les composantes sont F_x et F_y suivant les directions x et y respectivement alors le vecteur forces nodales s'écrit comme suit:

$$\{F\}^T = (F_{xi} \ F_{yi} \ F_{xj} \ F_{yj} \ F_{xk} \ F_{yk} \ F_{xl} \ F_{yl})$$

avec $\{F\} = [K] \{U\}$

où $[k]$: matrice de rigidité élémentaire

IV .2) CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE EN ELASTICITE PLANE

L'élément utilisé dans notre cas est l'élément rectangulaire à quatre noeuds avec deux degrés de liberté par noeud. L'élaboration de la matrice de rigidité en élasticité plane passe par sept étapes:

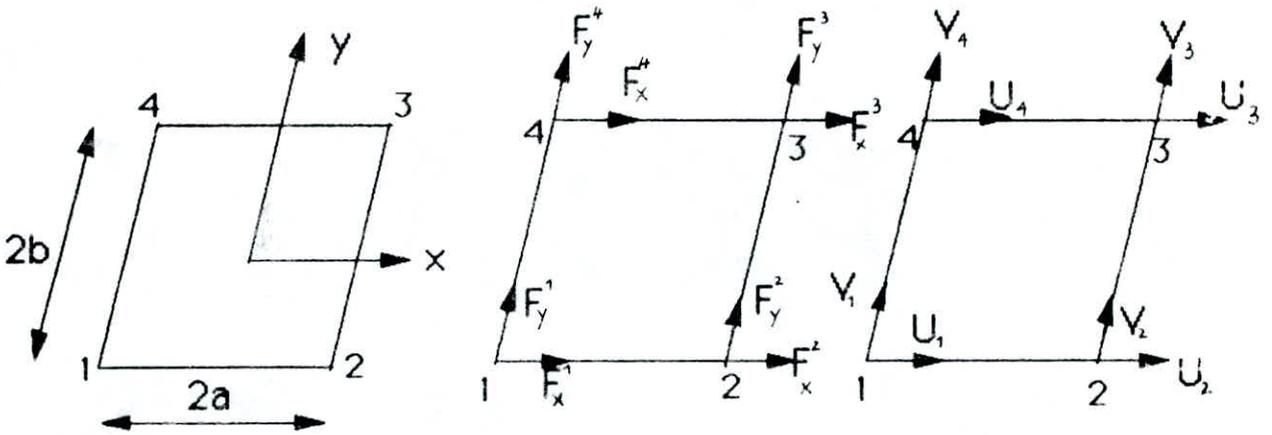
* **ETAPE 1**

Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées convenable avec numérotation des noeuds de l'élément de référence. L'élément rectangulaire est de côté $2a$ et $2b$.

Dans notre cas le repère est pris au centre de l'élément la numérotation se fait dans le sens trigonométrique en commençant par le noeud inférieur gauche

Remarque :

Le choix du repère local au centre de l'élément a été fait de façon à simplifier le calcul de l'intégrale de la matrice de rigidité par la méthode numérique de gauss l'intégrale sera simplement multipliée par le déterminant du jacobien (axb)



forces nodales

déplacements nodaux

$$\{\hat{U}\} = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{pmatrix}, \quad \{F^e\} = \begin{pmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \\ F_x^3 \\ F_y^3 \\ F_x^4 \\ F_y^4 \end{pmatrix}$$

U : déplacements nodaux

F^e: forces nodales

*ETAPE 2

Elle concerne le choix de la fonction de déplacement $f(x,y)$ qui définit le déplacement U,V en chaque point de l'élément. Tout déplacement $U(x,y)$ peut être représenté par ses deux composantes

$$U(x,y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

L'élément a huit degrés de libertés (2 d.d.L par noeud donc huit coefficients inconnus dans le polynome) , représente le modèle de déplacement :

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy && \text{système (1)} \\ V &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned}$$

Ces deux déplacements varient linéairement le long de chaque cote de l'élément de référence rectangulaire. La fonction choisie assure la continuité des déplacements .

On peut écrire le système (1) sous forme matricielle.

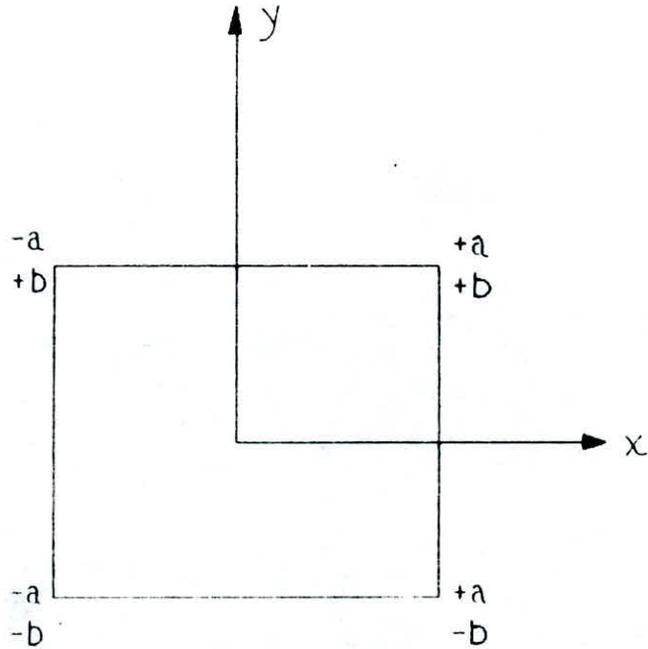
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

$$\{U(x,y)\} = [f(x,y)]\{\alpha\} \quad \text{equation (1)}$$

ETAPE 3

Elle consiste à établir l'expression de l'état de déplacement $\{U(x,y)\}$ en un point quelconque de l'élément en fonction des déplacements noeuds en substituant x et y par les coordonnées des quatres noeuds dans l'equation (1) de l'élément, on obtient alors:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{Bmatrix} \cdot \{\alpha\}$$



$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

Ce qui se réduit à :

$$\{0\} = [A] \{\alpha\} \quad \text{equation (2)}$$

$\{\alpha\}$: vecteur des coefficients inconnus des polynomes de l'équation.

A partir de l'équation (2) on obtient :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{0\} \quad \text{equation (3)}$$

L'inverse de la matrice [A] peut être obtenue algébriquement ou numériquement.

$$[A]^{-1} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 \\ -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab & 0 & ab \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & b & 0 & -b \\ 0 & -a & 0 & -a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque :

On peut vérifier le résultat de [A] en calculant le produit :

$$[A]^{-1}[A] = \text{Id}$$

En substituant $\{\alpha\}$ dans l'équation (2) on obtient :

$$\{U(x,y)\} = \{f(x,y)\} [A]^{-1}\{0\}$$

Le produit $\{f(x,y)\} [A]^{-1} = N(x,y)$

N : matrice de fonctions de formes ou fonction d'interpolation.

Pour le système de numérotation adoptée, on a sous forme matricielle :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) \end{bmatrix}$$

après avoir effectué le produit $\{f(x,y)\} [A]^{-1}$ on aura :

$$[N] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} ab-bx-ay & 0 & ab+bx-ay & 0 & ab+bx+ay & 0 & ab-bx+ay & 0 \\ +xy & & -xy & & +xy & & -xy & \\ 0 & ab-bx-ay & 0 & ab+bx-ay & 0 & ab+bx+ay & 0 & ab-bx+ay \\ & +xy & & -xy & & +xy & & -xy \end{bmatrix}$$

* ETAPE 4

Elle consiste à établir l'expression des déformations $\epsilon(x,y)$ en chaque point en fonction des déplacements $(U(x,y))$ et donc des déplacements nodaux (\hat{u}) .

Comme déjà établies dans un problème d'élasticité plane les déformations s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

En remplaçant U et V par leurs valeurs à partir de l'équation (1) on obtient l'expression des déformations en tout point de l'élément.

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) = \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{cases}$$

Sous une forme matricielle on a :

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{pmatrix}$$

Soit $\{\epsilon(x,y)\} = [c]\{\alpha\}$ (4)

en remplaçant (3) dans (4) on trouve :

$$\{\epsilon(x,y)\} = [c][A]^{-1}\{U\}$$

ou bien $\{\epsilon(x,y)\} = [B]\{U\}$ (5)

avec $[B] = [c][A]^{-1}$: matrice déformations déplacements.

L'équation (5) permet de relier les déformations dans n'importe quel point de l'élément en fonction des déplacements nodaux.

* ETAPE 5 :

Elle consiste à trouver la relation exprimant les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ en fonction des déformations $\{\epsilon(x,y)\}$ donc en fonction des déplacements nodaux.

D'après la loi de Hooke les contraintes sont liées aux déformations par une matrice d'élasticité $[D]$ telle que :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D]\{\epsilon(x,y)\} \quad (6)$$

avec

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{22} = E(1-\alpha\nu) / ((1-\nu)(1-\nu-\alpha\nu))$$

$$d_{12} = d_{21} = d_{11} / (1-\alpha\nu)$$

$$d_{33} = E/2(1+\nu)$$

E : module de YOUNG

ν : coefficient de POISSON

α = 0 : état de contraintes planes

α = 1 : état de déformations planes

* **ETAPE 6**

cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales et les déplacements modaux $\{u\}$ en substituant les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ par des forces nodales statiquement équivalentes $\{F^e\}$. D'où l'obtention de la matrice de rigidité $[K^e]$ d'un élément.

L'équation $[K^e] \cdot \{u^e\} = \{F^e\}$ déjà établie en appliquant le principe des travaux virtuels a donné l'expression de la matrice élémentaire $[K^e]$.

$$[K^e] = H \int_V [B]^T [D] [B] \, dvol$$

Pour un élément d'épaisseur constante H on a :

$$(dv) = H \cdot dx \cdot dy$$

$$[K^e] = H \iint [B]^T [D] [B] \, dx \, dy \quad (7)$$

$$[K^e] = H [A]^{-1T} \iint [C]^T [D] [C] \, dx \, dy \quad [A]^{-1}$$

L'intégrale $\iint [C]^T [D] [C] \, dx \, dy$ peut être obtenue numériquement (intégrale de GAUSS) ou analytiquement.

$[K^e]$ est appelée matrice de rigidité ou des raideurs. Les expressions de $[B]$ et de $[D]$ sont connues, d'où on tire la matrice des raideurs élémentaires suivant la numérotation, adoptée (voir figure 3).

Le produit analytique des matrices $[C]^T[D].[C] = G$ est donné par la matrice suivante (figure 1)

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 & yd_{11} & 0 & 0 & d_{12} & xd_{12} \\ 0 & 0 & d_{33} & xd_{33} & 0 & d_{33} & 0 & yd_{33} \\ 0 & yd_{11} & xd_{33} & y^2d_{11} + x^2d_{33} & 0 & xd_{33} & yd_{12} & xyd_{12} + yxd_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & xd_{33} & 0 & d_{33} & 0 & yd_{33} \\ 0 & d_{21} & 0 & yd_{21} & 0 & 0 & d_{22} & xd_{21} \\ 0 & xd_{21} & yd_{33} & xyd_{21} + yxd_{33} & 0 & yd_{33} & xd_{22} & y^2d_{33} + x^2d_{22} \end{bmatrix}$$

(figure 1)

L'intégrale analytique de G est obtenue en intégrant chaque terme de la matrice G , et soit G_1 cette matrice (voir figure 2).

$$G_1 = \iint G \, dx \, dy$$

d'où

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4abd_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4abd_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 4abd_{33} & 0 & 0 & 4abd_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4ab}{3} \frac{(a^2 d_{11} + b^2 d_{33})}{b^2 d_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4abd_{33} & 0 & 0 & 4abd_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 4abd_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4abd_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4ab}{3} \frac{(a^2 d_{22} + b^2 d_{33})}{b^2 d_{33}} \end{bmatrix}$$

(figure 2)

*** ETAPE 7 :**

Lors de cette étape, on établit la matrice [H] reliant les contraintes et les déplacements nodaux :

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] [B] \{\hat{U}\}$$

d'où

$$\{\sigma(x,y)\} = [H] \{\hat{U}\} \quad (8)$$

avec $[H] = [D] [B]$

$$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3ab}$$

$$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$$

$$\frac{a^2 d_{33} - 2b^2 d_{11}}{6ab}$$

$$\frac{c_{12} - d_{33}}{4}$$

$$\frac{-(a^2 d_{33} + b^2 d_{11})}{6ab}$$

$$\frac{-(d_{33} + d_{12})}{4}$$

$$\frac{(-2a^2 d_{33} + b^2 d_{11})}{6ab} \cdot \frac{d_{33} - c_{12}}{4}$$

$$\frac{b^2 d_{33} + a^2 d_{22}}{3ab}$$

$$\frac{d_{33} - d_{12}}{4}$$

$$\frac{a^2 d_{22} - 2b^2 d_{33}}{6ab}$$

$$\frac{-(d_{33} + d_{12})}{4}$$

$$\frac{-(a^2 d_{22} + b^2 d_{33})}{6ab}$$

$$\frac{d_{12} - d_{33}}{4}$$

$$\frac{b^2 d_{33} - 2a^2 d_{22}}{6ab}$$

$$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3ab}$$

$$\frac{-(d_{33} + d_{12})}{4}$$

$$\frac{-2a^2 d_{33} + b^2 d_{11}}{6ab}$$

$$\frac{d_{12} - d_{33}}{4}$$

$$\frac{-(a^2 d_{33} + b^2 d_{11})}{6ab}$$

$$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$$

$$\frac{b^2 d_{33} + a^2 d_{22}}{3ab}$$

$$\frac{d_{33} - d_{12}}{4}$$

$$\frac{-2a^2 d_{22} + b^2 d_{33}}{6ab}$$

$$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$$

$$\frac{-(a^2 d_{22} + b^2 d_{33})}{6ab}$$

$$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3ab}$$

$$\frac{d_{33} + d_{12}}{4}$$

$$\frac{a^2 d_{33} - 2b^2 d_{11}}{6ab}$$

$$\frac{d_{12} - d_{33}}{4}$$

$$\frac{b^2 d_{33} + a^2 d_{22}}{3ab}$$

$$\frac{d_{33} - d_{12}}{4}$$

$$\frac{a^2 d_{22} - 2b^2 d_{33}}{6ab}$$

$$\frac{b^2 d_{11} + a^2 d_{33}}{3ab}$$

$$\frac{-(d_{33} + d_{12})}{4}$$

(Figure 3)

$$\frac{b^2 d_{33} - a^2 d_{22}}{3ab}$$

[H] matrice des contraintes déplacements
(voir figure 4)

IV 3) DETERMINATION DU VECTEUR ELEMENTAIRE DES FORCES NODALES

Comme précédemment établie dans le chapitre "Représentation générale de la méthode des éléments finis", lors de l'établissement du principe des travaux virtuels, on a pu exprimer le vecteur élémentaire des forces nodales obtenues à partir des charges réparties appliquées à l'élément rectangulaire.

$$\text{on a } :R^B(e) = \int N^{TB}(e) f_b(e) dv(e)$$

Cette relation exprime que le vecteur forces nodales est déterminé pour l'intégrale sur le volume élémentaire du produit de la matrice des fonctions de forme par le vecteur chargement reparté.

Si le chargement est surfacique ou linéaire, on remplace dans ce cas le terme (dv) par (ds) ou par (dl) .

1^{er} CAS:

Le chargement agit suivant x (le côté chargé est i, l).
on a alors (voir figure 5)

$$\{Q\} = \{Q_x(y), 0\}^T$$

Avec $Q_x(y) = Q_{xi} + (Q_{xl} + Q_{xi}) \cdot y/b$

Dans ce cas on aura:

$$R(e) = \int N^T(Q) dy$$

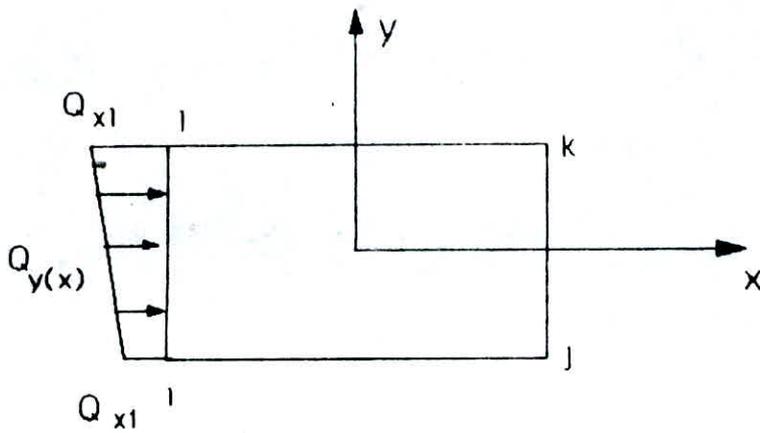


Fig 5

dans le cas ou le coté jk est chargé on substitue l'indice (i) par l'indice (j) et (l) par (k)

2^{ème} CAS :

Le chargement agit suivant y le coté chargé est kl (voir figure 6).

On aura dans ce cas $\{Q\} = \{Q_y(x), 0\}^T$

Avec $Q_y(x) = Q_{yl} + (Q_{yk} + Q_{yl}) \cdot x/a$

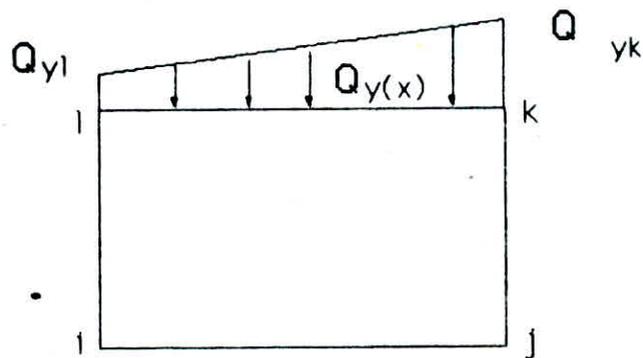


Fig 6

De même que pour le premier cas . Si c'est le coté (ij) qui est

chargé alors dans ce cas on remplace l'indice (k) par l'indice (j) et (l) par (i)

Remarque :

Si les quatre côtés de l'élément sont chargés on peut superposer les cas de charges précédentes.

3^{ème} CAS :

Dans ce cas on est en présence d'un chargement en densité volumique qui s'écrit comme suit :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \cdot x \cdot y \cdot t \end{Bmatrix}$$

Remarque :

Ce chargement n'intervient que pour les structures dont le poids propre (ou une de ces composantes) agit dans leurs plans.

Après les opérations du produit matricielle et intégrations on obtient l'expression du vecteur forces nodeles élémentaire suivant :

$$\{R_e\} = \begin{Bmatrix} (2Q_{xi} + Q_{xl})b/3 \\ (4Q_{yi} - Q_{yj})a/3 \\ -(2Q_{xi} + Q_{xl})b/3 \\ (4Q_{yi} + Q_{yj})a/3 \\ -(4Q_{xj} - Q_{xl})b/3 \\ -(2Q_{yi} + Q_{yk})a/3 \\ (4Q_{xi} - Q_{xl})b/3 \\ -(4Q_{yi} - Q_{yk})a/3 \end{Bmatrix}$$

Ce vecteur correspond au cas de chargement comme indiqué sur la figure 7.

Dans le cas où le chargement est réparti uniformément le long du

côté (lk) seulement le vecteur de forces nodales devient :

$$\{R^{(e)}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -aQ_y \\ 0 \\ -aQ_y \end{pmatrix}$$

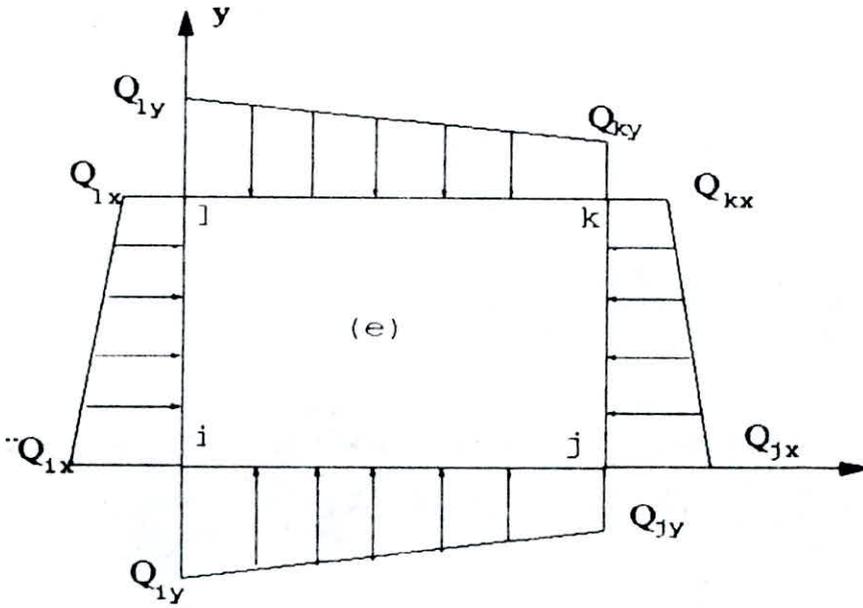


Fig 7

$$[H] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} d_{11}(y-b) & d_{12}(x-a) & d_{11}(b-y) & -d_{12}(x+a) & d_{11}(b+y) & d_{12}(x+a) & -d_{11}(b+y) & d_{12}(a-x) \\ d_{21}(y-b) & d_{22}(x-a) & d_{21}(b-y) & -d_{22}(x+a) & d_{21}(b+y) & d_{22}(x+a) & -d_{21}(b+y) & d_{22}(a-x) \\ d_{33}(x-a) & d_{33}(y-b) & -d_{33}(x+a) & d_{33}(b-y) & d_{33}(x+a) & d_{33}(b+y) & d_{33}(a-x) & -d_{33}(b+y) \end{bmatrix}$$

Fig 4

Chapitre 5

PRESENTATION DE L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

V 1) INTRODUCTION

La représentation par éléments isoparamétriques est des plus nécessaire quand il s'agit de représenter une structure à géométrie complexe. En effet le cas d'un sol présentant un tunnel nécessite l'utilisation de l'élément isoparamétrique capable de décrire les frontières courbes et les déplacements en tout point de la structure.

V.2) PRINCIPES ET PROPRIETES

Dans le cas des éléments isoaramétriques le mode de représentation du comportement en déformation est conservé pour représenter la géométrie de l'élément. Construire un élément isoparamétrique revient à définir une application d'un élément rectangulaire adimensionnel (élément de référence) comportant un certain nombre de noeuds, sur l'élément réel à frontières courbes ou inclinées (Fig.V.1) comportant le même nombre de noeuds. L'élément isoparamétrique est basé sur les interpolations identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement.

Il n'est pas essentiel d'utiliser exactement les même fonction de représentation pour les déplacements et pour la géométrie. Lorsque l'interpolation géométrique est de degré inférieur à celui de l'interpolation de déplacement, l'élément est dit "subparamétrique", si elle est de degré plus élevé il est dit "superparamétrique".

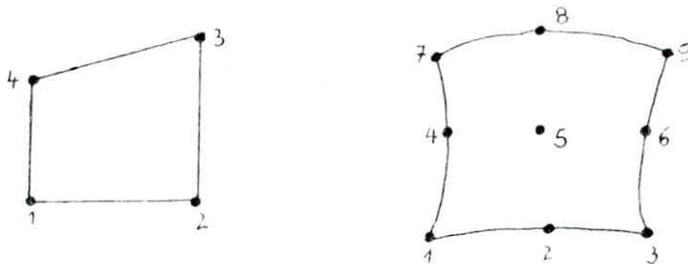


Fig. V.1

V.2.2) PROPRIETES DES ELEMENTS

V.2.2.1) CONTINUITÉ INTER-ELEMENTS

Si les fonctions d'interpolation satisfont les conditions de continuité requises pour l'élément de référence, alors ces conditions sont également satisfaites pour l'élément isoparamétrique.

V.2.2.2) COMPLETUDE

Les états de déformation constants sont correctement représentés dans les éléments isoparamétriques si la condition suivante est respectée : $\sum N_i = 1$.

V.3) CALCUL DES ELEMENTS ISOPARAMETRIQUE

Pour décrire la méthode de formulation isoparamétrique, on introduit la notion d'élément de référence de forme très simple (Fig.V.2) qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique τ° .

Cette transformation définit les coordonnées X° de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées (ξ, η) du point correspondant de l'élément de référence.

$$\tau^\circ : \xi \longrightarrow X^\circ = X^\circ(\xi)$$

τ° dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent

$$\tau^\circ : \xi \longrightarrow X^\circ = X^\circ(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots)$$

x_i, x_j, x_k, \dots sont les coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. La transformation τ° est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes :

-bijectivité en tout point ξ de l'élément de référence ou sur sa frontière.

-Les noeuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux noeuds géométriques de l'élément réel.

-Chaque portion de frontière de l'élément de référence correspond à la portion frontière de l'élément réel, définie par ses noeuds.

Notre cas d'étude est celui d'un élément quadrilatère à quatre noeuds (2 degrés de liberté par noeud).

On a donc la transformation τ qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \tau : \xi &\longrightarrow X(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \cdot \{X_n\} \\ Y(\xi) &= [\bar{N}(\xi)] \cdot \{Y_n\} \\ \xi &= (\xi, \eta) \end{aligned}$$

$$\{X_n\}^T = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; \{Y_n\}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}; [\bar{N}] = [N_1, N_2, N_3, N_4]$$

Les fonctions N_i sont appelées fonctions de transformation géométriques. $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ sont les coordonnées géométriques de l'élément réel.

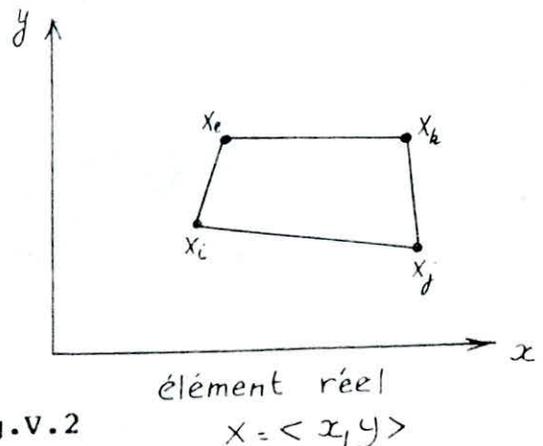
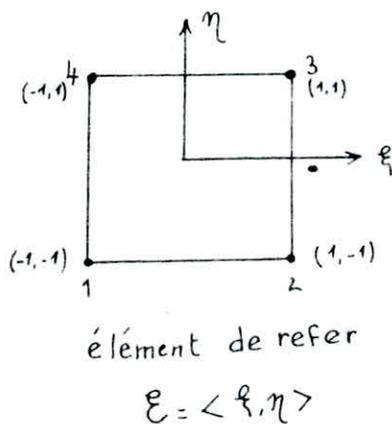


Fig.V.2

V.3.1) EXPRESSION DE LA FONCTION APPROCHEE U(x)

Sur chaque élément réel, on utilise une approximation nodale de la fonction $U_{\text{ex}}(x)$:

$$U_{\text{ex}}(x) \simeq U(x)$$

$$\text{où : } U(x) = \langle N_1(x), 0, N_2(x), 0, N_3(x), 0, N_4(x), 0, \dots \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{Bmatrix}$$

$$U(x) = \langle N(x) \rangle \cdot \{\hat{u}_n\}$$

$\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$ sont les valeurs de U_{ex} aux noeuds d'interpolation de l'élément ou variables nodales.

$N(x)$ est la fonction d'interpolation sur l'élément réel.

L'approximation sur l'élément de référence est donc :

$$U_{\text{ex}}(\xi) \simeq U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \cdot \{\hat{u}_n\}$$
$$\tau: \xi \longrightarrow X(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \cdot \{x_n\}$$

Remarque :

En général les fonctions $N(x)$ ne sont utilisées que pour des éléments simples. Elles sont le plus souvent remplacées par les fonctions $N(\xi)$ où X et ξ sont liés par la transformation bijective τ .

$N(\xi)$ sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel, donc elles pourront être utilisées pour tous les éléments réels possédant le même élément de référence.

V.3.2) PROPRIETES FONDAMENTALES DE L'APPROXIMATION NODALE

Les propriétés de l'approximation nodale sont :

- La fonction approchée $U(x)$ coïncide avec la fonction exacte U_{ex} en tous les noeuds d'interpolation de l'élément de coordonnées x_i .

$$U_{\text{ex}}(x_i) = U(x_i)$$
$$U(x_i) = \langle N_1(x_i), N_2(x_i), \dots \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

De même pour l'élément de référence.

- La fonction approchée $U(x)$ est continue sur l'élément si les fonctions $N_i(x)$ utilisées le sont aussi.

V.3.3) CONSTRUCTION DES FONCTIONS $N(\xi)$ ET $\bar{N}(\xi)$

Les étapes de construction des fonctions $N(\xi)$ et $\bar{N}(\xi)$ sont les suivantes :

V.3.3.1) CHOIX DE LA BASE POLYNOMIALE $\langle P(\xi) \rangle$

La relation $U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot \{\alpha\}$ définit l'approximation généralisée par opposition à l'approximation nodale donnée par :

$$U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \cdot \{\hat{u}_n\}$$

Exprimons en chaque noeud d'interpolation de coordonnées $\{\xi_i\}$ la fonction $U(\xi)$ prend la valeur $\hat{u}_i = u_{ex}(\xi_i)$

on a :

$$\{\hat{u}_n\} = [P_n] \cdot \{\alpha\}$$

d'où :

$$\{\alpha\} = [P_n]^{-1} \cdot \{\hat{u}_n\}$$

V.3.3.2) EXPRESSIONS DES FONCTIONS N et \bar{N} AUX POINTS ξ DESIRES

Dans le cas des fonctions N on a :

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \cdot [P_n]^{-1} \cdot \{\hat{u}_n\}$$

$$U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \cdot \{\hat{u}_n\}$$

alors,

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle \cdot [P_n]^{-1}$$

Dans le cas des fonctions N on a :

$$\begin{aligned} X(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \cdot \{x_n\} \\ Y(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \cdot \{y_n\} \\ \langle \bar{N}(\xi) \rangle &= \langle \bar{P}(\xi) \rangle \cdot [\bar{P}_n]^{-1} \end{aligned}$$

Pour construire la matrice de rigidité d'un élément, il faut exprimer les déformations qui sont les dérivées des déplacements par rapport à x, y . Etant donné que les déplacements sont fonction des coordonnées ζ et η il nous faut trouver une relation entre les dérivées par rapport à x et y d'une part, et par rapport à ζ et η d'autre part.

Cela peut se faire à l'aide des règles classiques de dérivation suivantes :

$$\frac{\partial N_L}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_L}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial N_L}{\partial \eta} = \frac{\partial N_L}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

d'où sous forme matricielle la dérivation par rapport à ζ et η s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \\ \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta, \eta} \right\} &= [J] \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x, y} \right\} \end{aligned}$$

où $[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation géométrique. De la même manière, les dérivées en (x, y) s'obtiennent à partir des dérivées (ζ, η) .

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x, y} \right\} = [j] \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta, \eta} \right\}$$

où

$$[j] = [J]^{-1}$$

La transformation τ étant bijective, l'inverse de $[J]$ existe en tout point de l'élément de référence. L'inverse de $[J]$ est en fait très sensible à certain types de distorsions du rectangle de base. Ceci est dû au fait que la matrice $[J]$ peut devenir singulière. Les situations pathologiques suivantes (Fig.V.3) correspondent à un jacobien singulier donc à la transformation τ non bijective.

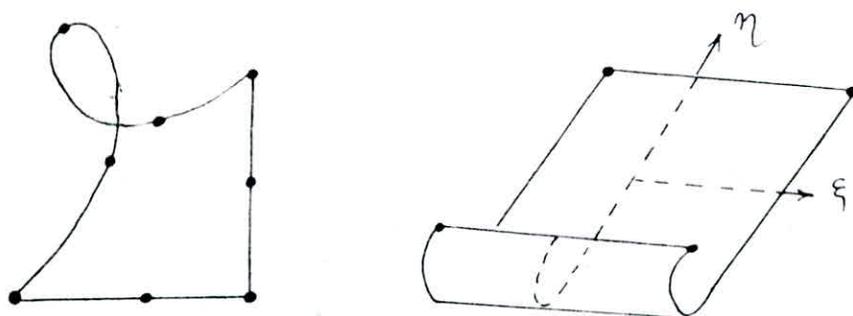


Fig.V.3

On peut calculer la matrice jacobienne en utilisant la relation d'interpolation géométrique suivante :

$$\langle x \ y \rangle = \langle \bar{N}(\xi) \rangle \cdot [\{x_n\} \ \{y_n\}]$$

La matrice [J] s'écrit :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \cdot \langle x \ y \rangle$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \bar{N}_{,\zeta} \\ \bar{N}_{,\eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{x_n\} & \{y_n\} \end{bmatrix}$$

Il est donc possible d'écrire la formule conventionnelle de la matrice de rigidité d'un élément de la façon suivante :

$$[K^e] = H \cdot \int_S [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dx \ dy$$

$$[K^e] = H \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det[J] \cdot w_i \cdot w_j \cdot d\zeta \ d\eta \quad (V.1)$$

où w_i, w_j sont des coefficients de pondération.

Cette matrice de rigidité est calculée par intégration numérique dans le domaine (ζ, η) en utilisant l'intégration de GAUSS.

On peut maintenant exprimer les équations déformations-déplacements de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\hat{v}\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \cdot \begin{Bmatrix} \{\hat{u}\} \\ \{\hat{v}\} \end{Bmatrix}$$

Les équations contraintes et déformations s'expriment par la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\epsilon\}$$

V 4) CALCUL DE L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE A QUATRES NOEUDS F
L'ETUDE DES CONTRAINTES AU NIVEAU D'UN TUNNEL

V.4.1) CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE [K^o]

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire passe par les étapes suivantes :

V.4.1.1) DETERMINATION DES FONCTIONS N

Quatres fonctions d'interpolation sont définies :

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle = \langle P \rangle \cdot [P_n]^{-1}$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4} \cdot \langle (1-\zeta)(1-\eta); (1+\zeta)(1-\eta); (1+\zeta)(1+\eta); (1-\zeta)(1+\eta) \rangle$$

L'élément étant isoparamétrique on a :

$$\langle N \rangle \equiv \langle N \rangle$$

$$X(\zeta, \eta) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$Y(\zeta, \eta) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

V.4.1.2) DETERMINATION DE LA MATRICE JACOBIENNE

L'expression de [J] dans le cas bidimensionnel s'écrit comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

avec : $J_{11} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i$

$$J_{12} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i$$

$$J_{21} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i$$

$$J_{22} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i$$

d'où :

$$J = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\zeta) & -(1+\zeta) & (1+\zeta) & (1-\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$J = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ +\eta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +\eta(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \\ +\zeta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +\zeta(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{bmatrix}$$

V.4.1.3) DETERMINATION DE L'INVERSE DE LA MATRICE JACOBIEENNE

L'expression de la matrice inverse etant de la forme :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

Le calcul du déterminant donne dans le cas particulier o l'élément est réctangulaire de côtés :

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &= 2a & ; X_1 - X_4 & ; X_2 - X_3 \\ Y_4 - Y_1 &= 2b & ; Y_1 - Y_2 & ; Y_3 - Y_4 \\ \det &= a \cdot b \end{aligned}$$

V.4.1.4) DETERMINATION DE LA MATRICE [B]

La matrice [B] qui lie les déformations aux déplacement définie ci-dessous est déterminée en dérivant les fonctions d formes par rapport aux coordonnées de l'élément réel x,y.

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

où :

$$N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$N_{i,y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad i = 1, \dots, 4$$

Etant donné que les dérivées par rapport à x et y sont difficiles à exprimer, on écrira la matrice [B] dans le repère (ζ, η) en utilisant la relation :

$$\partial(x,y) = [J]^{-1} \cdot \partial(\zeta, \eta)$$

d'où la nouvelle expression de la matrice [B] :

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,\zeta} & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & N_{3,\zeta} & 0 & N_{4,\zeta} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \\ N_{1,\eta} & N_{1,\zeta} & N_{2,\eta} & N_{2,\zeta} & N_{3,\eta} & N_{3,\zeta} & N_{4,\eta} & N_{4,\zeta} \end{bmatrix} \cdot [J]^{-1}$$

où :

$$N_{i,\zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$$

$$N_{i,\eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad i = 1, \dots, 4$$

Remarque :

Dans le calcul de la matrice de rigidité $[K^e]$ (V.1) les termes ζ et η qui expriment la matrice [B] seront remplacés par les points de GAUSS.

V.4.2) CALCUL DES CONTRAINTES AUX NOEUDS DE L'ELEMENT REEL

L'expression de la matrice [B] pour le calcul des contraintes est identique à celle calculée lors de l'élaboration de la matrice locale $[K^e]$ sauf que le calcul se fait aux noeuds de l'élément réel.

L'expression de la contrainte σ s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\hat{u}\}$$

où $\{\hat{u}\}$ sont les déplacements nodaux de chaque élément.

Chapitre 6

CRITERES DE CONVERGENCE
NOTION D'ERREUR ET TAUX DE CONVERGENCE

VI 1) **INTRODUCTION,**

Il y a des propriétés qui sont nécessaires ou tout au moins souhaitables au niveau de l'élément afin d'obtenir de bonnes solutions .

La convergence de la solution éléments finis vers la solution exacte au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente peut se faire soit de manière monotone soit de manière non monotone.

VI 2.1) **CONDITIONS DE CONVERGENCE ET TAUX DE CONVERGENCE**

VI 2.1) **CONDITIONS DE CONVERGENCE MONOTONE,**

VI 2.1.1) **COMPLETUDE,**

Un élément fini est dit complet s'il satisfait les deux critères suivants:

Représentation de modes rigides

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondant à un déplacement d'ensemble on doit trouver un état de déformations nulles dans l'élément.,

Représentation de l'état de déformations constant,

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondant à un état de déformations constant on doit trouver effectivement cet état de déformations à l'intérieur de l'élément.

VI 2.1.2) COMPATIBILITE,

Un élément est dit compatible s'il permet la définition d'un champ compatible, c'est à dire une continuité de type déplacements pour les d'élasticité et une continuité de type déplacements et leurs dérivées premières pour les problèmes de flexion . Cette condition de continuité s'applique à l'intérieur et aux interfaces des éléments.

Les éléments finis de type déplacements convergent en énergie s'ils satisfont aux conditions de complétude et de compatibilité.

De tels éléments sont appelés ELEMENTS CONFORMES.

Les déplacements obtenus par la M.E.F, dans le cas d'éléments conformes convergent vers la solution exacte à mesure que l'on augmente le nombre d'éléments comme indiqué sur la figure 1. Cependant si les hypothèses de la solution par éléments finis et celles de la solution exacte sont différentes alors la convergence peut se présenter comme indiqué sur la figure 2.

A titre d'exemple lors d'un calcul de poutres en R.D.M ayant pour hypothèses celles de BERNOULLI les déformations dues au cisaillement n'apparaissent dans la poutre ce qui n'est pas le cas lorsqu'il s'agit d'un calcul par éléments finis.

VI 2.2) CONDITION DE CONVERGENCE NON MONOTONE

Certains éléments ne satisfont pas toutes les conditions de complétude et de compatibilité. De tels éléments sont appelés éléments non conformes .

La tendance actuelle en matière d'éléments non conformes consiste à garder la propriété de complétude en condition essentielle mais à remplacer la compatibilité par un autre critère de complétude sur un groupe d'éléments. Ce test de complétude collective est appelé "Patch test" ou "test de rapiéçage".

On constate que les éléments complets et incompatibles qui satisfont ce test convergent.

Exemple de convergence non monotone: Convergence en "dent de scie", (voir fig:3),

VI 2.2) ERREUR ET TAUX DE CONVERGENCE

On sait que la solution obtenue par éléments finis pour une taille (h) des éléments converge vers la solution exacte lorsque (h) diminue jusqu'à tendre vers zéro.,

Dans le cas où l'on peut toujours écrire la solution exacte au voisinage d'un noeud (i) sous la forme d'un développement polynomial: Et si ce développement est d'ordre (p) alors l'erreur commise sur (U) sera de l'ordre du polynome $O(h)$ qui est (p+1) .

Pour ce qui est des déformations et des contraintes supposées correspondre aux dérivées des déplacements d'ordre (m) l'erreur de convergence est de l'ordre (p+1+m) .

Le fait de connaître l'ordre de convergence a un intérêt considérable pour la détermination de la solution exacte .

Par exemple si l'on sait que les déplacements convergent à l'ordre 2 et si on a obtenu deux solutions approchées U1 et U2 correspondants respectivement à (h) et (h/2) on peut obtenir la solution exacte par extrapolation de RICHARDSON telle que:

$$\begin{aligned} U_1 - U &= O(h^2) = 4 \\ U_2 - U &= O(h/2)^2 \end{aligned}$$

avec U la solution exacte .

Cette solution "exacte" est en fait très proche de la solution réelle. On remarque à travers cet exemple que l'erreur commise sur les déplacements serait réduite au quart pour une diminution de la moitié de la taille(h) de l'élément.

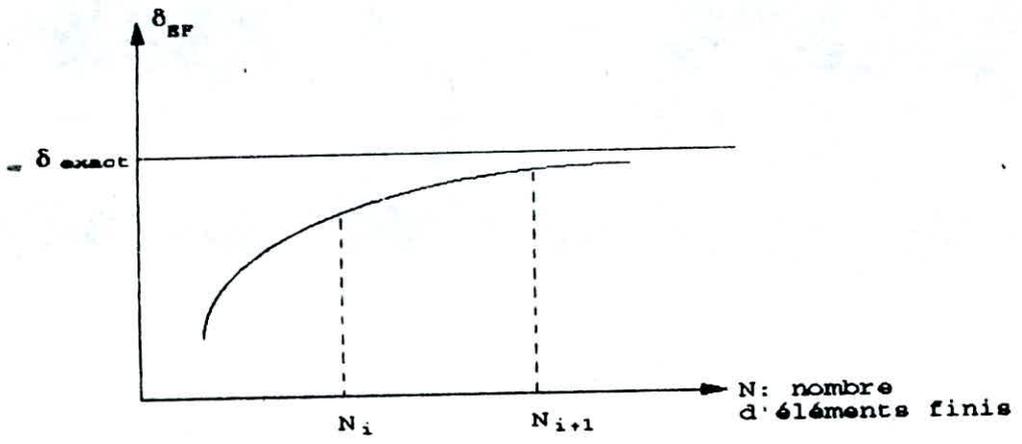


Fig:1

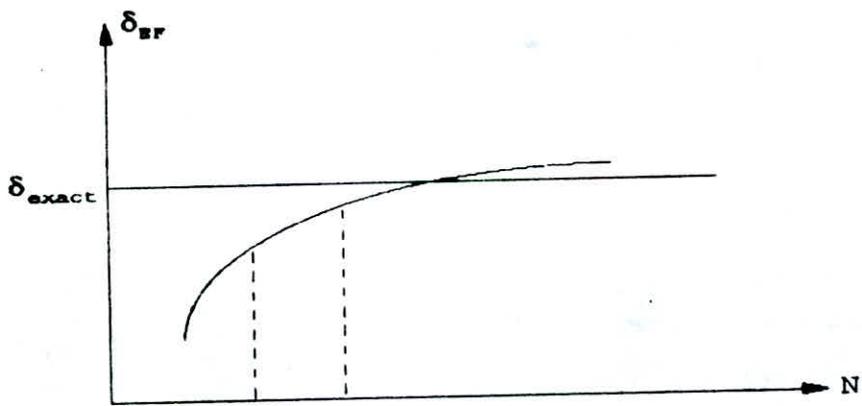


Fig:2

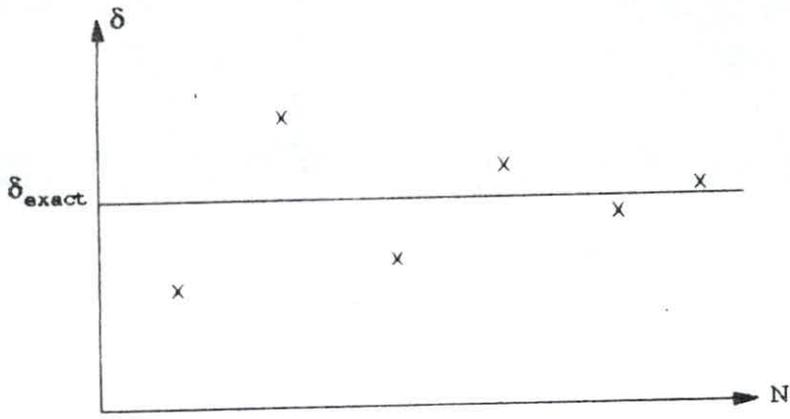


Fig. 3

Chapitre 7

PRESENTATION DU PROGRAMME B M A T CORRESPONDANT A L'ELEMENT RECTANGULAIRE

VII.1) INTRODUCTION :

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis ou autres méthodes, nécessite la manipulation de matrices vecteurs de grande taille et la résolution de système d'équations important. Ceci rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle à l'application de ces méthodes .

Mathématiquement, la M E F revient à poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations simultané écrit sous la forme

$$\left[K \right] \cdot \left\{ \hat{u} \right\} = \left\{ F \right\}$$

avec

$\left[K \right]$: vecteur de rigidité global.

$\left\{ \hat{u} \right\}$: vecteur déplacements inconnus .

$\left\{ F \right\}$: vecteur force global.

VII.2) PRESENTATION DU PROGRAMME :

Ce programme constitue la première partie de notre travail il permet la modélisation d'un sol soumis à une charge concentrée et semi-infini, par la methode des éléments finis. Ce sol sera subdivisé en éléments rectangulaires à quatres noeuds (2 degré de liberté par noeud).

Le programme B.M.A.T est établi d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous programme, mais par le biais de blocs communs (COMMON), ce qui rend la programmation souple et facile car on ne serait pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une subroutine à l'autre. On peut distinguer deux parties essentielles :

- *La génération et la lecture des données.
- *La résolution et l'exploitation des résultats.

Les données sont constituées principalement d'informations sur les noeuds (nombre de noeuds total, nombre de noeuds restreints, numéro des noeuds restreints, conditions de chargement, conditions d'appuis...) et sur les éléments (nombre d'éléments suivant les directions x et y, la taille de l'élément, caractéristiques géométriques du matériau utilisé).

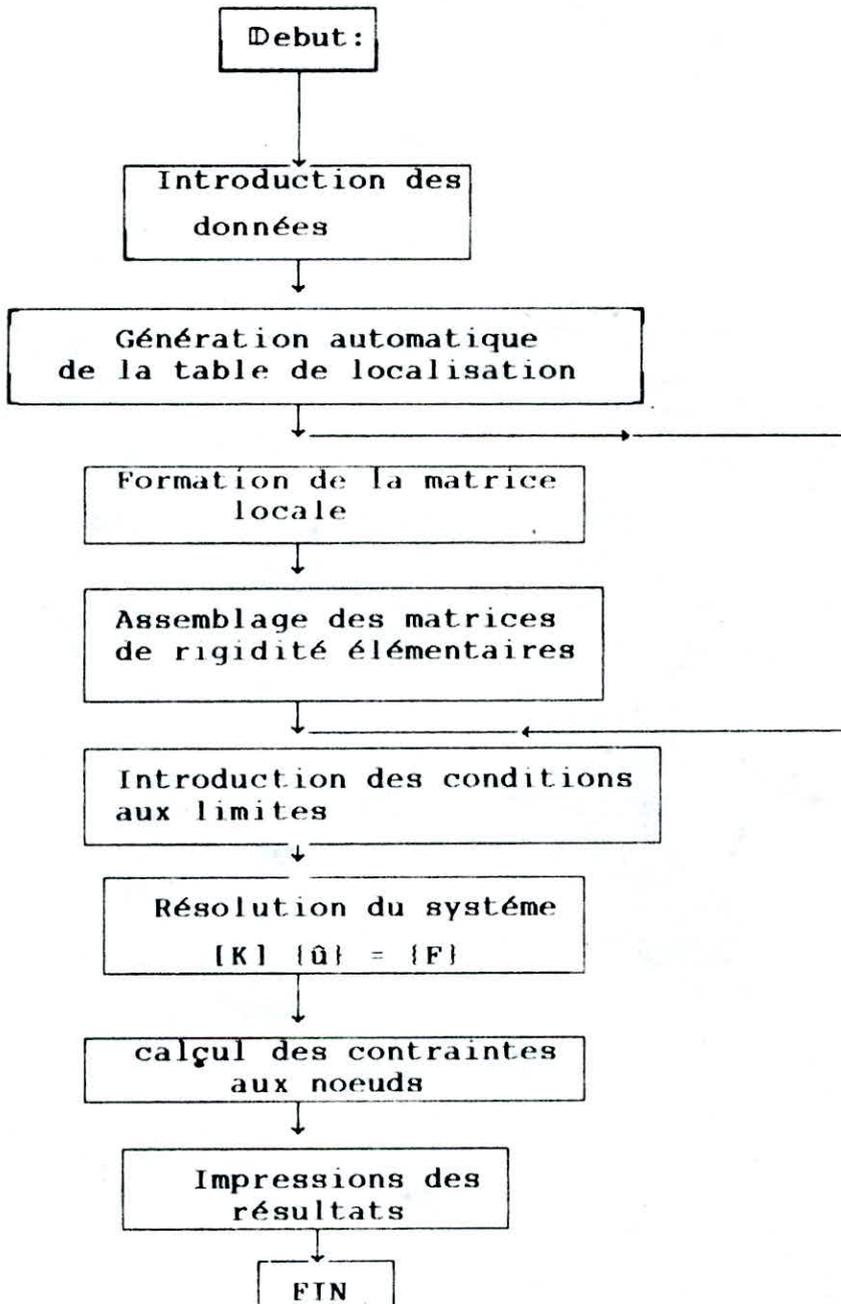
VII.2.1) ENTREE DES DONNEES

L'entrée des données se fait en stockant toutes les informations concernant la structure à modéliser dans un fichier d'entrée.

Les données sont donc les suivantes :

- Nombre de noeuds total de toute la structure.
- Nombre d'éléments total de la structure.
- Propriétés du matériau des sol (E, ν).
- Les abscisses des lignes nodales dans le sens x et les ordonnées des lignes nodales dans le sens y.
- Le sens et la valeur des charges extérieures appliquées ainsi que les conditions d'appuis.

Ce fichier sera utilisé par un sous-programme lecture appelé InputG.



VII.2.2) LECTURE DES DONNEES :

Cette partie consiste à saisir toutes les données concernant la structure d'une subroutine INPUTG.

Ce sous programme peut accéder à plusieurs blocs communs où il stocke les données lues afin qu'elles puissent être exploitées par d'autres sous-programmes.

Les blocs communs sont les suivants :

* COMMON /NFE/ pour les données concernant les noeuds et les éléments :

- Nombre de noeuds total : NN
- Nombre d'éléments total : NE
- Connectivités des noeuds : NNS(IE,4)
- Numéro de l'élément : IE

* COMMON/DIO/ pour les paramètres mécaniques du matériau.

- Module de young : E
- Coefficient de poisson : CP
- Epaisseur de la section du sol : H.

* COMMON/COORD/ pour les coordonnées de chaque noeud de la structure.

- Vecteurs x et y.

* COMMON/UE/ pour le numéro de l'unité d'entrée et de sortie :
NiN, Nout.

Lors de la lecture, le sous programme INPUTG fait appel à deux subroutines GENERATION et COODS, qui forment respectivement :

1) La table de connectivité (NNS (IE1,4)) pour la section du sol discretisée en plusieurs éléments reliés entre eux par des noeuds numérotés séquentiellement de 1 à NN globalement, sachant que chaque élément est numéroté dans son propre repère.

Le sous programme "GÉNÉRATION" permet de déterminer d'une manière automatique la table de connectivité par simple lecture de certaines données :

Lx : Pas de connectivité suivant x

Ly : Pas de connectivité suivant y

NEY: Nombre d'éléments suivant y

NEX: Nombre d'éléments suivant X

L'algorithme du sous programme "génération automatique" passe par les étapes suivantes :

- Détermination des connectivités du premier élément de la structure.

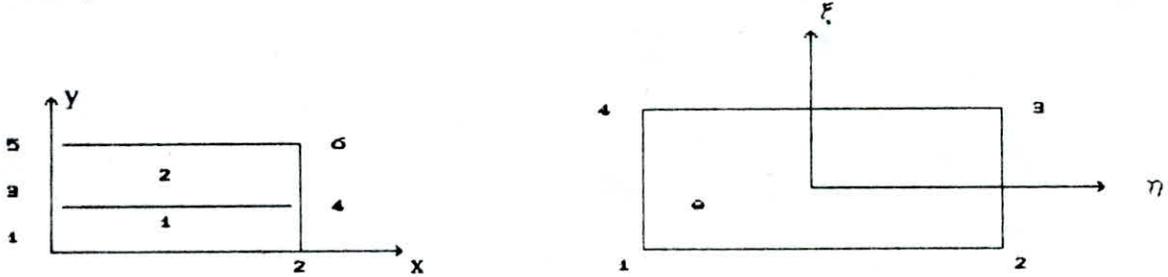
- Détermination de la table de connectivité des éléments suivant x assurée par incrémentation grâce à Lx.

- Par incrémentation suivant Ly, on détermine les connectivités des premiers éléments de la deuxième rangée.

De nouveau, par incrémentation suivant x, on obtient les connectivités des éléments de la seconde rangée.

Cette opération sera menée de la même façon que précédemment jusqu'à la numérotation totale de toute la structure.

Exemple :



(a) numérotation dans le repère global

(b) numérotation dans le repère local

Fig.VI.1

REMARQUES

a) La numérotation des noeuds de la structure se fait suivant le sens qui présente le moins d'éléments et de façon à minimiser la largeur de bande de la matrice globale (Fig.VII.1a).

b) La convention prise pour le sens de parcours lors de la numérotation locale, est le sens trigonométrique (Fig.VII.1b)

c) Chaque élément de la structure est isolé et les numéros sont lus dans la liste des connectivités (Tableau 1)

N° element	IE	N° du noeud			
		1	2	3	4
1		1	2	4	3
2		3	4	6	5

Tabl. 1

2) Les coordonnées x et y de chaque noeud de la structure définis par les tableaux $x(NN)$, $y(NN)$.

où NN est le nombre de noeuds total de toute la structure

Le sous-programme coordonnées permet le calcul de ses coordonnées par :

- Recupération de certaines données communes avec le sous-programme GENERATION (NEX, NEY, NN).

- Lecture des abscisses des lignes nodales suivant X ($DIMX(K), K=1, NEX$) et des coordonnées des lignes nodales suivant Y ($DIMY(K), K=1, NEY$)

Ce sous programme tient compte de la numérotation se faisant dans le sens du plus petit nombre d'éléments, en effet si le nombre d'éléments suivant X est supérieur au nombre d'éléments suivant Y alors, dans une première étape :

-on affecte la valeur zéro aux coordonnées (X, Y) du noeud 1 puis par incrémentation de l'ordonnée précédente ($DIMY(K)$) on obtient toutes les ordonnées de la première ligne nodale parallèle à Y , pour une valeur fixée de l'abscisse (Dans le 1er cas $x=0$).

La seconde étape consiste à incrémenter l'abscisse du noeud suivant en vue de déterminer l'abscisse du premier noeud de la deuxième ligne nodale (suivant Y) pour $Y=0$ puis on répète les opérations citées dans la première étape; on obtient ainsi les ordonnées de la 2eme ligne nodales.

Ce processus est réitéré jusqu'à détermination des coordonnées de tous les noeuds de la structure.

Ces coordonnées seront stockées dans deux vectures $X(NN)$ et $Y(NN)$.

VII.2.3) DETERMINATION ET EVALUATION DES MATRICES DE RIGIDITE

Après lecture des données et formation des tables de connectivités nécessaires à la modélisation, on procède à l'élaboration de matrices de rigidité élémentaires.

Le principe des travaux virtuels utilisé dans les paragraphes précédents a permis d'exprimer la matrice de rigidité élémentaire sous la forme suivante :

$$[K] = H \int_V [B]^T [D] [B] dV = H [A]^{-T} \left(\int_V [c]^T [D] [c] dV \right) [A]^{-1} \quad (VII.1)$$

La matrice de rigidité $[K]$ est déterminée dans notre cas de deux façons :

1°) calcul de l'intégrale d'une façon analytique.

2°) calcul de l'intégrale par une méthode numérique qui est la méthode d'intégration de GAUSS.

Cette deuxième méthode consiste à choisir un certain nombre de points puis à intégrer le produit $[B]^T [D] [B]$ par rapport aux coordonnées intrinsèques de l'élément rectangulaire de référence $(-1, +1)$, après avoir effectué le changement de variable adéquat permettant la transposition de l'intégrale sur l'élément réel.

L'intégrale (VII.1) devient :

$$[K] = H \int_{vr} [B(\zeta, n)]^T [D] [B(\zeta, n)] \det(J(\zeta, n)) dvr \quad (VII.2)$$

Cette intégrale se réduira donc à une double somme du produit $[B]^T [D] [B]$ multiplié par les coefficients de pondération w_i et w_j . L'éléments rectangulaire de référence $(-1, +1)$, après avoir

effectué le changement de variables adéquat permettant la transposition de l'intégrale de GAUSS sur l'élément réel.

$$[K] = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} [B(\zeta, \eta)]^T [D] [B(\zeta, \eta)] \det(J(\zeta, \eta)) dVr \quad (\text{VII.3})$$

r_1 : nombre de points de Gauss suivant la direction ζ .

r_2 : nombre de points de gauss suivant la direction η .

Dans notre cas, nous avons utilisé la méthode "produit" de GAUSS à $r = 2 \times 2$ points pour intégrer l'expression (VII.2) de $[K]$.

VII.2.3.1) CALCUL DE LA MATRICE INVERSE $[A]^{-1}$ (SUBROUTINE INVERS)

Lors de l'établissement de la matrice de rigidité élémentaire, il est nécessaire de calculer l'inverse de la matrice $[A]$ non symétrique et non singulier. Un sous programme appelé subroutine Invers a été élaboré en conséquence.

L'inversion se base sur l'algorithme qui satisfait la relation suivante :

$$[A]^{-1} [A] = [A] [A]^{-1} = I$$

Le calcul de l'inverse de la matrice carré d'ordre n , $[A]$ revient à chercher un certain vecteur X dont les composantes seraient les colonnes respectives de la matrice inverse A^{-1} en résolvant un système linéaire $A.X = B$.

pour cela on procède comme suit :

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- On se donne un premier vecteur B_1 tel que $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$

-On determine le vecteur X

$$X = A^{-1} \cdot B_1$$

Dans ce cas les composantes du vecteur X correspondent aux termes de la première colonne de la matrice inverse.

On determine ensuite ce vecteur X par résolution du système $A \cdot B_i$, cette opération sera exécutée n fois, le vecteur B_i prenant respectivement pour composantes les termes des colonnes de la matrice identité .

Enfin de compte, on obtient la matrice inverse $[A]^{-1}$.

VII.2.3.2) CALCUL DE LA LARGEUR DE LA BANDE (SUBROUTINE LARGANDE)

L'objet de ce sous programme est de rechercher pour une certaine numérotation des noeuds de la structure la largeur de la matrice bande. L'algorithme stipule que pour chaque élément on recherche la différence entre le maximum et le minimum des numéros de ces noeuds (numérotation globale), puis on calcule le maximum de ces différences pour toutes la structure.

soit :

- R la plus grande différence entre les numéros d'un élément.
- NDJ le nombre de degrés de liberté par noeud (2).

La largeur de la bande (diagonale comprise) s'exprime comme suit :

$$B_w = (R+1).NDJ$$

Remarque

Suivant la numérotation adoptée, la largeur de la bande B_w prend plusieurs valeurs. On recherche la numérotation qui donne à B_w la plus petite valeur en vue de diminuer la taille de la matrice globale.

VII.2.4) ASSEMBLAGE DES MATRICES DE RIGIDITE

VII.2.4.1) DIFFERENTES METHODES D'ASSEMBLAGES

Compte tenu de certaines propriétés des matrices globales (structure bande, symétrie), plusieurs méthodes de stockage ont été élaborées en vue de réduire la taille des matrices calculées. Parmi elles on citera :

* MATRICE PLEINE NON SYMETRIQUE:

Une matrice pleine, non symétrique de dimension $(n \times n)$, occupe n^2 nombres réels dans la mémoire de l'ordinateur.

* MATRICE PLEINE SYMETRIQUE :

Il suffit de stocker le triangle supérieur de la matrice dans une table V_k , par exemple par colonnes descendantes :

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} ; V_k = \langle K_{11} ; K_{12} ; K_{22} ; K_{13} ; K_{23} ; K_{33} \rangle$$

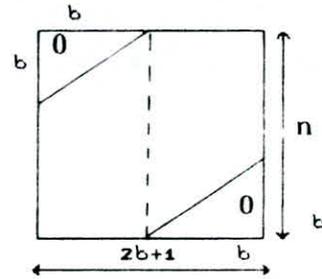
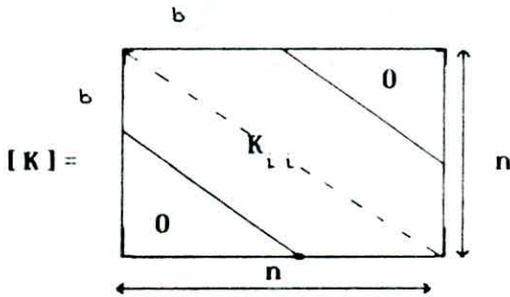
$$K_{ij} = V_k_l \quad \text{si } l = \frac{J(J-1)}{2} + I$$

$$J \geq I$$

il faut stocker $\frac{n(n+1)}{2}$ termes réels

* MATRICE BANDE NON SYMETRIQUE :

Nous stockons la matrice « redressée » dans une table rectangulaire V_k de dimensions $n \cdot (2b + 1)$

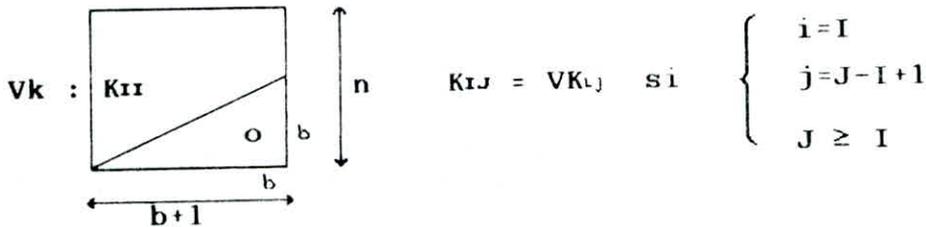


$$K_{ij} = V_{kij} \quad \text{si } \begin{cases} i = I \\ j = J - I + 1 + b \end{cases}$$

Il faut stocker $n(2b+1)$ réels, incluant $b(b+1)$ valeurs nulles inutiles

*** MATRICE BANDE SYMETRIQUE**

dans ce cas on a :



Il faut stocker $n.(b+1)$ valeurs réelles incluant $b.(b+1)/2$ valeurs nulles inutiles.

*** MATRICE A LIGNE DE CIEL NON SYMETRIQUE**

La méthode de stockage la plus efficace pour les matrices globales est la méthode de la "ligne de ciel". Elle consiste à stocker les termes de $[K]$ par lignes et colonnes de longueurs variables.

Nous choisissons d'utiliser trois tables de stockage.

VKGD : contient les termes diagonaux.

VKGS : contient les termes du triangle supérieur de $[K]$ organisés par colonnes descendantes (sans les termes diagonaux).

VKGI : contient les termes du triangle inférieur de $[K]$ organisé par lignes de gauche à droite (sans les termes diagonaux).

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

$$VKGS = \langle K_{11}; K_{23}; K_{14}; K_{24}; K_{34}; K_{35}; 0 \rangle$$

$$VKGI = \langle K_{21}; K_{32}; K_{41}; K_{42}; K_{43}; K_{53}; 0 \rangle$$

$$VKGD = \langle K_{11}; K_{22}; K_{33}; K_{44}; K_{55} \rangle$$

* MATRICE A LIGNE DE CIEL SYMETRIQUE

Le stockage est identique à celui d'une matrice non symétrique pour la diagonale du triangle supérieur. La table VKGI n'est pas utilisée dans ce cas.

REMARQUE :

Dans le cas de matrice bande symétrique on stocke $n.(b+1)$ incluant $b.(b+1)/2$ valeurs nulles inutiles alors que la matrice à ligne de ciel non symétrique ne stocke pas de valeurs inutiles.

* MATRICE A LIGNE DE CIEL SEGMENTEE SUR DISQUE

On a recours à cette méthode lorsque la matrice $[K]$ est très volumineuse ou lorsqu'on utilise un ordinateur de capacité réduite. Il est nécessaire de décomposer les tables VKGS et VKGI en blocs stockés sur disque. Il suffit de conserver en mémoire un instant donné un ou deux blocs de chacune des deux tables. Pour notre étude nous avons opté pour l'assemblage en matrice bande compte tenu de la simplicité de la programmation.

VII.2.4.2) SUBROUTINE ASSB

La subroutine ASSB assemble les matrices élémentaires au fur et à mesure de leur formation respective, en utilisant le stockage en matrice bande symétrique.

L'assemblage se fait en deux étapes :

Extension des matrices de rigidité élémentaires.

Sommation des matrices élémentaires.

Il est à noter que ces deux étapes sont effectuées simultanément lors de la programmation.

L'algorithme général de l'assemblage se présente de la façon suivante :

Pour chaque élément IE on définit :

-Les indices relatifs au repère local : IIL, JIL.

-Les indices relatifs au repère global : IIG, JIG.

L'assemblage après extension des matrices locales s'obtient grâce à la relation suivante :

$$A(IIG, JIG) = A(IIG, JIG) + VLK(IIL, JIL)$$

avec les conditions

$$JIG > IIG$$

$$JIG \leq Bw - 1 + IIG$$

Ces conditions traduisent le fait que nous stockons la partie supérieure de la matrice bande symétrique.

VII.2.5) INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Il est important de s'assurer que la structure est bien conditionnée avant de procéder à la résolution. N'étant soumis à aucune condition d'appui, la structure peut subir des translations et rotations sans qu'il y ait déformations internes. Ce sont les

déplacements de corps rigides correspondant à une énergie de déformations nulle, ce qui signifie que la matrice de rigidité globale est singulière.

Donc il faut imposer les conditions d'appuis en nombre suffisant pour avoir un système d'équations algébriques plausible à résoudre (système non singulier).

Le traitement des conditions d'appuis qui est assuré par le sous-programme CONDB, se traduit par les opérations suivantes :

- Rendre la matrice de rigidité globale $[K]$ non singulière.
- Les valeurs imposées doivent être prises en compte lors de la résolution.

Il existe divers techniques pour la prise en compte des conditions aux limites.

VII.2.5.1) METHODE DU TERME DIAGONAL DOMINANT

Les étapes de cette technique sont les suivantes :

-La matrice $[K]$ est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites.

-On repère les degrés de liberté imposés, soit i ce degré tel que $U_i = \bar{U}_i$.

-On remplace le terme K_{ii} de la matrice globale par le terme $(K_{ii} + \alpha)$ où α est un nombre très grand. Dans notre cas $\alpha = 10^{20}$.

-On remplace dans le vecteur forces nodales, le terme F_i par $\alpha \bar{U}_i$.

Le système devient alors à matrice non singulière et résoluble.

On schématise ce qui précède par :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \dots & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ K_{i1} & \dots & \dots & K_{ii} + \alpha & \dots & K_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_i \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \alpha u_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

L'équation (i) s'écrit :

$$\alpha \cdot \hat{u}_i + \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot \hat{u}_j = \alpha \cdot u_i$$

En divisant les termes de l'équation par α qui est très grand devant $\sum K_{ij} \cdot \hat{u}_j$ on en déduit que $\hat{u}_i = u_i$

Remarque :

Cette méthode est très simple à programmer, il faudra néanmoins s'assurer que le terme infiniment grand choisi, le soit suffisamment par rapport aux termes diagonaux de la matrice de rigidité.

VII.2.5.2) METHODE DU TERME UNITE SUR LA DIAGONALE

Cette technique consiste à remplacer le terme de rigidité diagonal correspondant au degré de liberté imposé (i) par l'unité (1), et d'annuler tous les termes de la ligne et de la colonne (i), puis de remplacer le terme f_i dans le vecteur force par u_i (valeur imposée au degré de liberté i) et les autres termes par $[f_j - K_{ji} \cdot u_i]$.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1l} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \dots & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{l1} & \dots & \dots & K_{ll} & \dots & K_{ln} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_l \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - K_{1l} \cdot u_l \\ \vdots \\ \vdots \\ u_l \\ \vdots \\ f_n - K_{nl} \cdot u_l \end{bmatrix}$$

l'équation (i) devient alors :

$$0 \cdot \sum_{j=1, j \neq l}^n \hat{u}_j + \hat{u}_l = \bar{u}_l$$

Remarque :

Pour ces deux méthodes, du fait que la matrice de rigidité globale soit stockée en bande, les substitutions se font sur la première colonne de la matrice qui représente la diagonale.

VII.2.5.3) METHODE DE SUPPRESSION DES LIGNES ET COLONNES

Cette méthode consiste à restructurer le système d'équations $[K] \cdot [u] = [F]$, de façon à supprimer les équations correspondantes aux degrés de liberté imposés.

Remarque :

Cette méthode a l'avantage de travailler dans un système d'équations réduit. Dans notre cas, nous avons opté pour la méthode du terme diagonal, à cause de sa simplicité de programmation.

Le sous programme CONDB utilise la méthode pour respecter les conditions aux limites; il forme aussi le vecteur forces nodales qui agit sur le sol étudié.

L'algorithme se présente comme suit :

1) Formation du vecteur forces nodales :

Pour chaque noeud chargé et pour chaque direction de chargement dont le vecteur est connu on a :

$$KK = 2 \times N - 2 + K$$
$$GP(KK,1) = GP(KK,1) + P(K,1)$$

avec :

N : numéro du noeud chargé.

K : direction du chargement.

K=1 : chargement suivant x.

K=2 : chargement suivant y

P : vecteur forces élémentaire.

GP : vecteur forces globale.

2) Introduction des conditions aux limites :

Pour chaque noeud bloqué et pour chaque nature de déplacement on a :

$$KK = 2 \times N - 2 + K$$
$$GD(KK,1) = D(K,1)$$
$$LN = 10^{30}$$
$$A(KK,1) = A(KK,1) + LN$$
$$GP(KK,1) = GD(KK,1) \cdot LN$$

avec :

A : matrice bande redressée.

GD : vecteur déplacements nodaux dans le repère global.

D : vecteur déplacements nodaux dans le repère local.

VII.2.6) RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

Les méthodes de résolution utilisées doivent être adaptées aux différents types de problèmes, en tirant profit de la symétrie des matrices de rigidité et généralement de leur faible densité de peuplement. En outre de telles méthodes doivent permettre la résolution la plus économique possible.

Il existe plusieurs méthodes de résolution en analyse statique. Elles peuvent être classées de la façon suivante :

- Méthodes itératives : telles la méthode de GAUSS-SEIDEL
- Méthodes directes : telles que celle de CHOLESKY et la méthode d'élimination de GAUSS.

Ces différentes méthodes doivent être performantes pour une précision donnée de l'ordinateur et doivent permettre la détection des singularités ou des situations de mauvais conditionnement.

Les méthodes itératives sont simples à programmer, elles demandent un espace mémoire moindre par rapport aux méthodes directes. Malgré cet avantage, elles ne sont pratiquement pas utilisées dans les logiciels d'analyse des structures vu le nombre important et inconnu d'opérations à effectuer pour une précision donnée.

Les méthodes directes possèdent une excellente fiabilité et une performance supérieure à celle des méthodes itératives dans la majorité des cas. Elles se basent sur l'algorithme d'élimination de GAUSS ou ses variantes (factorisation de CROUT) ou sur l'algorithme de factorisation de CHOLESKY.

Nous avons opté pour la méthode de GAUSS modifiée car la matrice de rigidité globale a une structure bande. Le sous-programme concernant cette méthode s'appelle RESOLB. Il est obtenu en modifiant le sous-programme RESOL qui utilise lui, la méthode d'élimination de GAUSS.

VII.2.6.2) METHODE DE RESOLUTION DE GAUSS POUR LES MATRICES BANDES

Le sous programme RESOLB est une variante du sous programme RESOL dans la mesure où il triangularise la matrice de rigidité K d'ordre $(B_v \cdot NV)$.

Où B_v la demi largeur de la bande avec diagonale comprise .

NV le nombre de degrés de liberté de toute la structure.

Il résout un système d'équations triangulaire supérieur par remontée (back substitution), c'est à dire on en calculant les inconnues \hat{u}_n de la dernière à la première.

VII.2.7) CALCUL DES CONTRAINTES

Les contraintes sont liées aux déplacements nodaux par les matrices contraintes élémentaires et sont calculées en chaque noeud de l'élément IE selon la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\hat{u}_n\}$$

Où $[D]$: Matrice d'élasticité.

$[B]$: Matrice déformation-déplacement de chaque noeud.

$\{\hat{u}_n\}$: vecteur déplacements nodaux de chaque élément IE.

$\{\sigma\}$: vecteur contraintes de chaque noeud.

Un sous programme MOYENNE est envisagé pour le calcul des contraintes moyennes au milieu de l'élément.

Remarque :

Le vecteur déplacements $\{\hat{u}_n\}$ est exprimé dans le repère local .

Le passage du repère global au repère local s'opère comme suit .

```

DO J=1,4
DO I=1,7,2
    N=NNS(IE,J)
DO K=1,2
    KK = 2.N-2 + K
    D(L+K-1,1) = GD(KK,1)

```

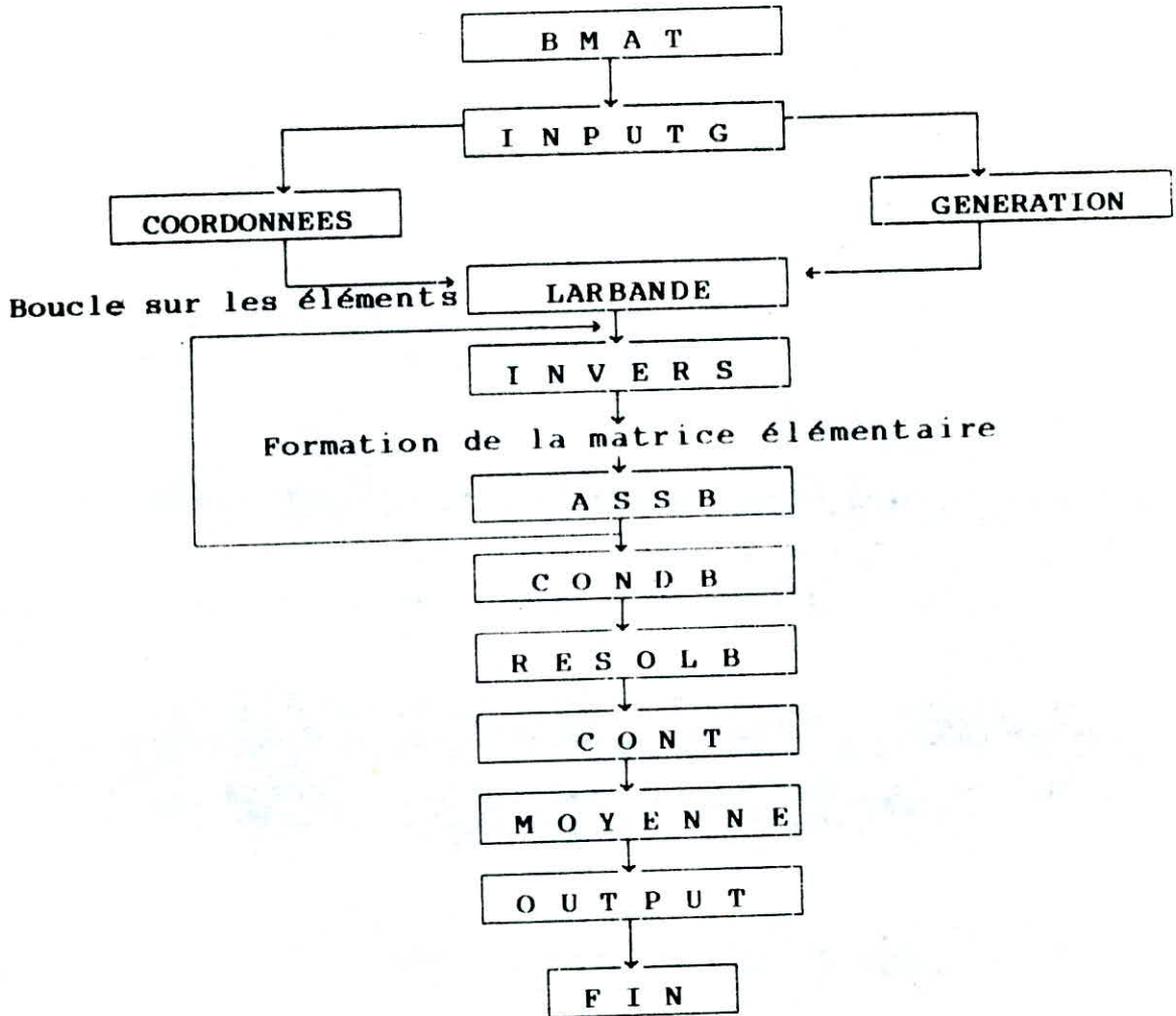
où |D| et |GD| représentent les vecteurs déplacements nodaux locaux et globaux.

VII 2.8) IMPRESSION DES RESULTATS

Les résultats obtenus après calcul sont imprimés dans un fichier de sortie préalablement défini grâce à un sous-programme appelé OUTPUT. Les résultats sont les suivants :

- Les connectivités des noeuds des éléments de la structure.
- Les coordonnées des noeuds de toute la structure.
- Les déplacements globaux des noeuds de la structure.
- Les contraintes de chaque noeud de la structure.

STRUCTURE DU PROGRAMME BMAT



Chapitre 8

PRESENTATION DU PROGRAMME ISOBANDE CORRESPONDANT A L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

VIII.1) INTRODUCTION

La notion d'élément isoparamétrique a été introduite de manière à simplifier la définition analytique des éléments de formes complexes et à représenter au mieux une géométrie délicate des frontières de certains éléments.

Le programme ISOBANDE construit l'élément isoparamétrique en définissant une application d'un élément rectangulaire addimensionnel défini dans un repère (ξ, η) comportant quatre noeuds, sur un élément réel (origine) à frontières rectilignes inclinés comportant le même nombre de noeuds. Pour ce faire on a recours à la détermination de fonctions de formes N et de leurs dérivées.

VIII.2) PRESENTATION DES ETAPES DE CALCUL DE LA MATRICE LOCALE ELEMENTAIRE

Comme il a été déjà énoncé dans le chapitre VII, les termes présents dans le calcul de la matrice de rigidité élémentaire contiennent des dérivations par rapport aux coordonnées cartésiennes x et y . Les dérivations peuvent être exprimées en fonction des coordonnées addimensionnelles (ξ, η) (élément de référence). L'utilisation systématique de l'élément de référence a permis de remplacer l'emploi de fonctions compliquées $\langle N(X) \rangle$ par $\langle N(\xi) \rangle$.

Dans ce qui suit, nous allons énoncer les différentes étapes nécessaires à la formation de la matrice locale.

VIII.2.1) FORMATION DE FONCTIONS DE FORME ET DE LEURS DERIVEES PREMIERES PAR RAPPORT AUX COORDONNEES ADIMENSIONNELLES ξ ET η

Dans cette étape nous utilisons la forme explicite de $\langle N(\xi, \eta) \rangle$ pour un élément de référence. Nous dérivons manuellement ces expressions et les évaluons en chaque point d'intégration ξ (point de GAUSS).

Remarque :

Les expressions des fonctions de forme et de leurs dérivées ne dépendent pas de la géométrie de l'élément réel, elles ne sont fonction que des caractéristiques de l'élément de référence (ξ, η) . Par conséquent, ces fonctions et leurs dérivées ne sont évaluées qu'une fois pour chaque type d'élément.

VIII.2.2) FORMATION DE LA MATRICE JACOBIEENNE, DE SON DETERMINANT ET DE SON INVERSE

La matrice Jacobienne $| J(\xi_r) |$ et son déterminant utilisent les expressions des dérivées premières $\langle \frac{\partial N(\xi_r)}{\partial \xi} \rangle$ ainsi que les coordonnées des noeuds géométriques de l'élément réel; Ce qui revient à les calculer pour chaque élément réel (extraction des noeuds des coordonnées de l'élément réel). Il est à noter que les termes de la matrice Jacobienne et de son déterminant sont définis dans le programme de façon implicite et évalués aux points d'intégration de GAUSS.

VIII.2.3) FORMATION DES DERIVEES DES FONCTIONS DE FORME PAR RAPPORT AUX COORDONNEES CARTESIENNES X ET Y

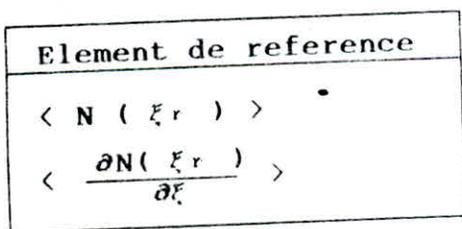
Grace à la relation (VIII.1) qui relie les dérivées des fonctions de forme dans le repère cartésien à celles exprimées dans le repère de référence, nous pouvons évaluer les différents termes de la matrice B des dérivées premières des fonctions d'interpolation en chaque point d'intégration.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{(VIII.1)}$$

Après avoir déterminé la matrice dérivées [B] on forme sa transposée puis le produit $[B]^T \cdot [D] \cdot [B]$; où [D] représente la matrice d'élasticité. Par sommation des produits $[B]^T \cdot [D] \cdot [B]$ obtenus en chaque point d'intégration, on obtient finalement la matrice de rigidité élémentaire.

$$[K^e] = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j \cdot [B(\xi_i, \eta_j)]^T \cdot [D] \cdot [B(\xi_i, \eta_j)] \cdot \det J(\xi_i, \eta_j)$$

où r_1 et r_2 sont le nombre de points d'intégration de GAUSS suivant le sens ξ, η . La figure (VIII.1) montre l'organisation des calculs de $\langle N \rangle$, [J], $[K^e]$



Informations nécessaires

- { ξ_i } noeuds d'interpolation
- { ξ_r } points d'integration
- $N_i = (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)$

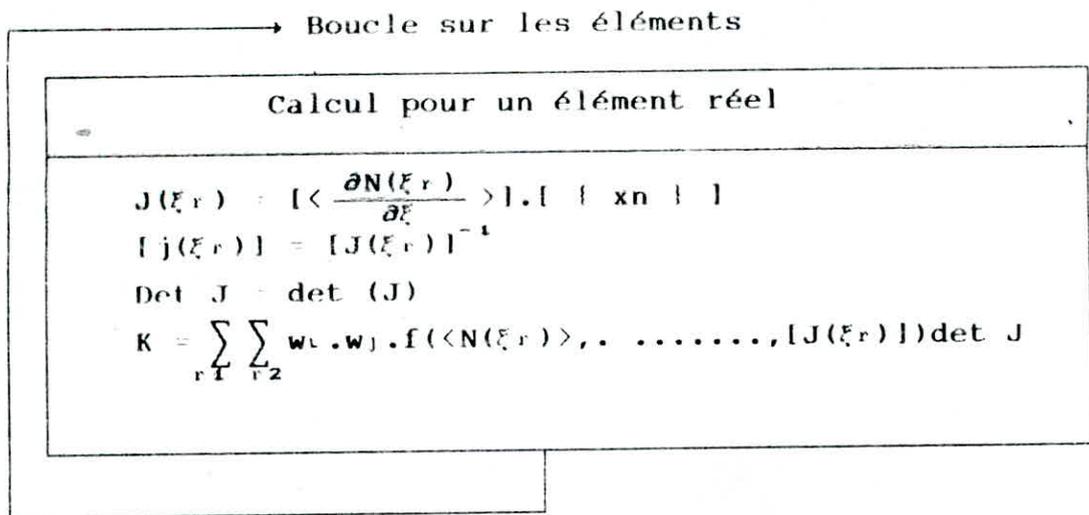


Fig.VIII.1

Les matrices élémentaires étant déterminées, on procédera à l'assemblage de celles-ci, à l'introduction des conditions aux limites et à la résolution du système d'équations linéaires en vue de calculer les déplacements nodaux de la structure. Ces opérations sont effectuées de la même manière que dans le programme BMAT. La détermination des contraintes aux noeuds de la structure se fait par l'intermédiaire d'un sous programme appelé CONTISO.

Compte tenu de la relation $\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\hat{u}\}$ reliant les contraintes aux déplacements nodaux de l'élément, la matrice [B] sera calculée en suivant les mêmes étapes citées précédemment dans la détermination de la matrice élémentaire avec pour seule différence, l'évaluation des fonctions de forme ainsi que leurs dérivées, non plus aux points d'intégration mais aux noeuds d'interpolation de l'élément de référence.

STRUCTURE DU PROGRAMME ISOBANDE

Définition de certains blocs fonctionnels :

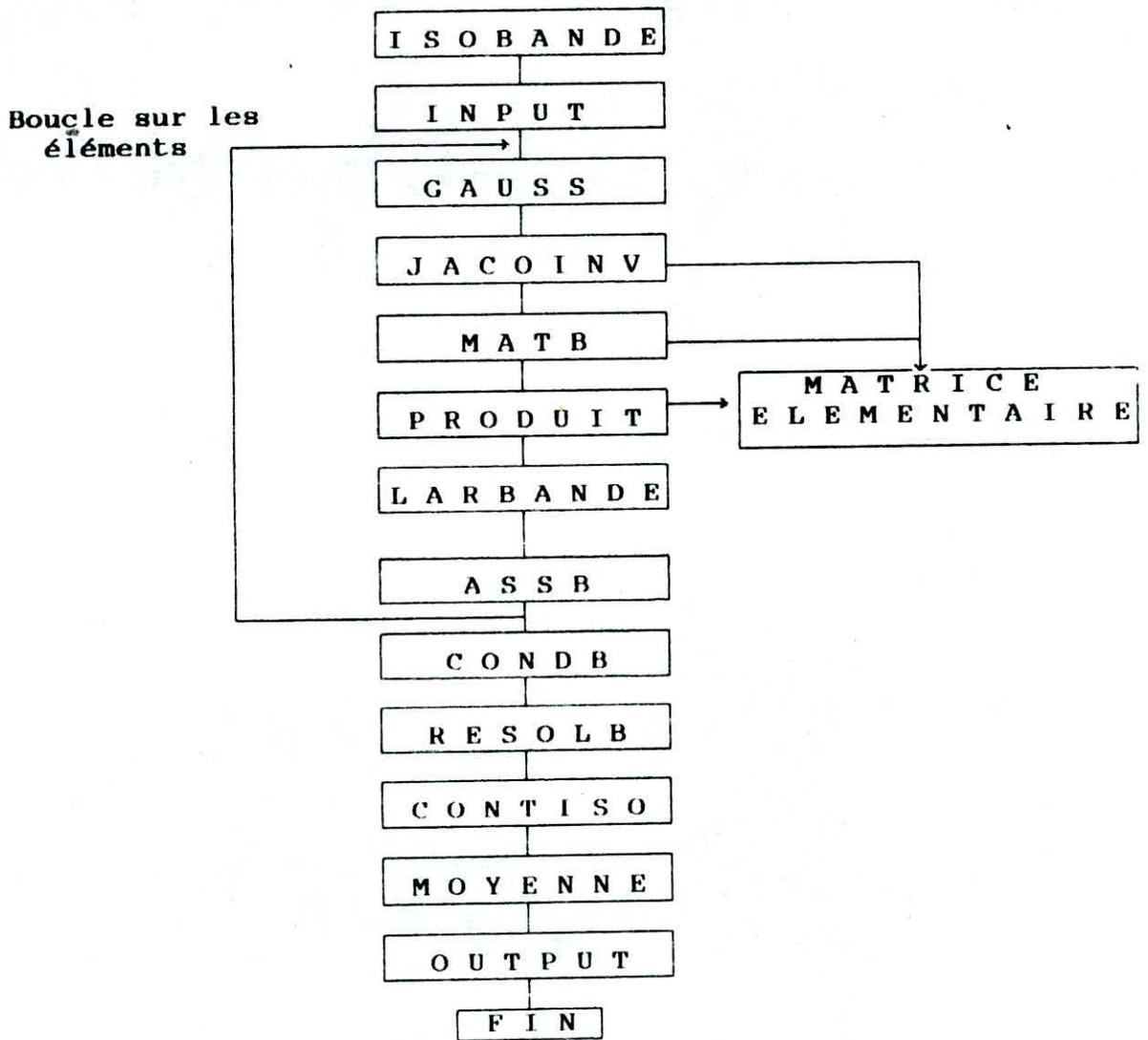
ISOBANDE : programme principal.

JACOINV : sous programme calculant la matrice jacobienne.

MATB : sous programme calculant la matrice [B] et sa transposée.

PRODUIT : sous programme calculant le produit $[B]^T \cdot [D] \cdot [B]$

CONTISO : sous programme calculant les contraintes aux noeuds de l'élément.



Chapitre 9

APPLICATIONS

IX 1) APPLICATION DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE

IX 1.1) 1^{er} EMEPLE

Dans cet exemple nous traitons le cas d'une plaque mince soumise à un chargement agissant dans son plan moyen, se trouvant dans un état de contraintes planes.

Nous nous proposons de comparer les résultats obtenus par notre programme, à ceux déjà élaborés dans l'ouvrage "ANALYSIS OF STRUCTURE".

La plaque en traction est subdivisée en quatre éléments rectangulaires (Fig.IX.1), par raison de symétrie (chargement et géométrie), on étudie le quart de la plaque.

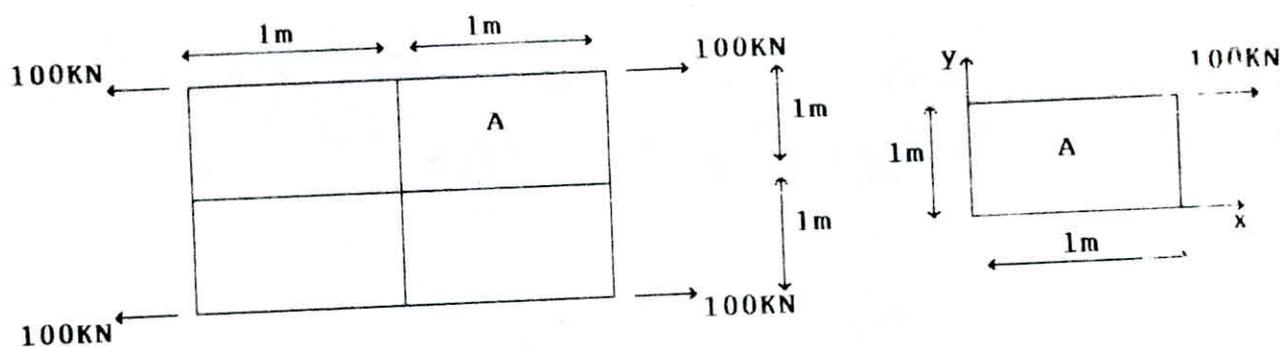


Fig.IX.1 Plaque mince en traction.

Caractéristiques de la plaque

$$h = 0.01 \text{ m}$$

$$G = 182 \text{ GN/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

Nous obtenons les déplacements nodaux suivants :

NOEUDS	DEPLACEMENTS (m)	
	Ux	Vy
1	0	0
2	-2.23E-05	0
3	13.22E-05	-5.03E-05
4	0	1.73E-05

Tabl.1 : Déplacements

NOEUDS	CONTRAINTES (N/m ²)		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}
1	-34.3E+05	21.3E+05	0
2	-74.9E+05	-114.0E+05	108.2E+05
3	234.3E+05	-21.3E+05	-60.9E+05
4	274.9E+05	114.0E+05	-47.3E+05

Tabl.2 : Contraintes aux noeuds

Les contraintes moyennes normales σ_x et σ_y , tangentièlles τ_{xy} sont :

$$\sigma_x = \frac{\sum_{l=1}^4 \sigma_{xl}}{4} = 10.000 \text{KN/m}^2$$

$$\sigma_y = \frac{\sum_{l=1}^4 \sigma_{yl}}{4} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{\sum_{l=1}^4 \tau_{xyl}}{4} = 0$$

Ces résultats sont conformes à ceux donnés par l'ouvrage précédemment cité, qui a utilisé des éléments triangulaires. un moyen supplémentaire pour vérifier la validité des résultats obtenus par notre programme consiste à :

- Remplacer les constantes (E, ν, a, b) dans l'expression de la matrice élémentaire obtenue analytiquement par leurs valeurs.
- Tenir compte des conditions aux limites, en effet la résolution du système d'équations $K.U = F$ de huit équations à huit inconnues se réduit à quatre équations à quatre inconnues en supprimant les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté empêchés (dans notre cas $U_1 = V_2 = U_4 = V_2 = 0$).
- Déterminer les contraintes en utilisant la matrice contraintes [H] obtenue analytiquement et le vecteur déplacements nodaux [U] calculés précédemment. Les contraintes sont obtenues grâce à la relation suivante :

Les résultats déplacements et contraintes obtenus par le procédé analytique sont identiques à ceux donnés par le programme M.E.F (BMAT).

Remarque

Nous obtenons les mêmes valeurs du vecteur contraintes moyennes ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) en subdivisant le quart de la plaque en deux éléments.

IX. 1.2) 2^{ème} EXEMPLE

Le second exemple est celui d'une poutre (Fig.IX.1a) rectangulaire encastée et chargée .

On se propose d'étudier la convergence des solutions en déplacements et en contraintes obtenues par le programme BMAT vers

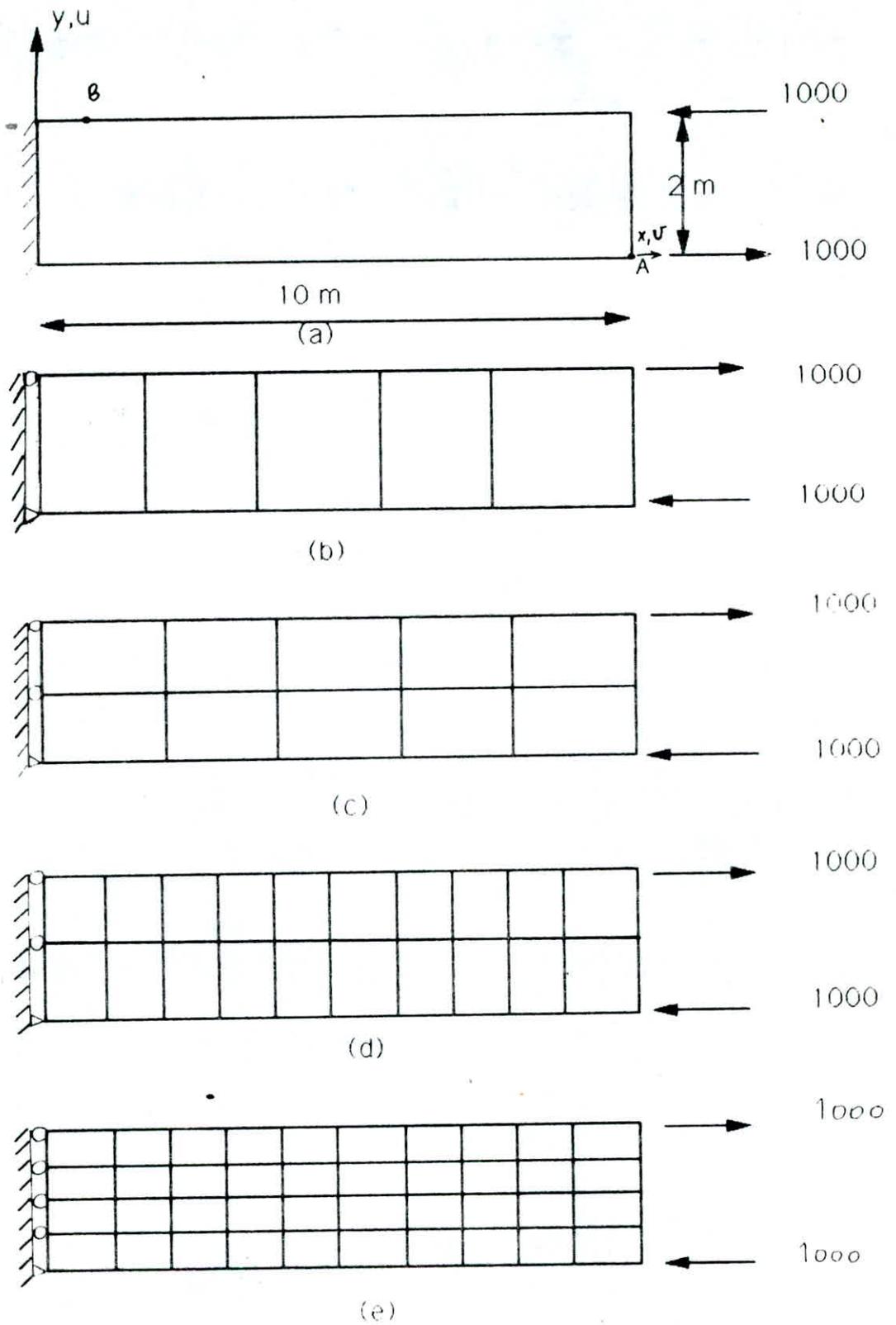


Figure 2

- a-Test de la poutre encastree
- b-Poutre discretisee en 5 elements
- c-Poutre discretisee en 10 elements
- d-Poutre discretisee en 20 elements
- e-Poutre discretisee en 40 elements

la solution exacte donnée par la théorie des poutres ,et ceci en affinant le maillage.

Les résultats obtenus sont les suivants

Théorie des poutres	Déplacement V en A	Contrainte σ_x en B
	100	3000
Nombre d'éléments	M.E.F.	
5	68.18	2181.82
10	70.56	2188.24
20	89.55	2766.78
40	90.87	2776.12
80	97.67	2963.56
160	99	3018.55

Tabl.3 :Déplacements et contraintes cas d'une d'une poutre

CONCLUSION

A mesure que l'on affine le maillage, il y'a convergence de la solution en déplacements et en contraintes vers la solution exacte. Il est à noter que le nombre d'éléments nécessaire à la convergence est très important, d'où la nécessité de recourir à des éléments plus performants (exemple: élément cubique ou quadratique).

IX.1.3) APPLICATION AU SOL

L'étude porte sur un sol semi-infini de dimension $(12*12)m^2$ se trouvant dans un état de déformations planes.

Ce sol est soumis à une charge concentrée dans le plan (x, z) et répartie le long de l'axeY .

Par raison de symétrie de la structure et du chargement nous avons considéré la moitié du sol, discrétisée en 160 éléments rectangulaires selon deux maillages : maillage régulier et maillage non régulier.

Pour tenir compte des conditions aux limites, nous avons supposé qu'à partir d'une certaine profondeur, les déplacements causés par le chargement extérieur deviennent négligeables, ce qui se traduit par un encastrement à la profondeur 12m de la surface du sol.

De la même manière, à partir d'une certaine distance x nous avons supposé que la charge P ne provoque pas de déplacements horizontaux, d'où la présence d'appuis simples à l'extrémité droite du sol.

Etant donné que la structure et le chargement sont symétriques, les noeuds situés sur la verticale en dessous de la charge P ne se déplacent pas horizontalement, par conséquent lors de l'étude de la moitié de la structure, nous plaçons des appuis simples au niveau de chacun de ses noeuds. Ces conditions aux limites sont représentés sur la figure (IX.2a, IX.2b).

Les résultats obtenus par notre programme, nous ont permis de tracer les courbes suivantes:

- La variation du déplacement vertical V en fonction de l'abscisse x à différentes profondeurs Z (Fig IX.3).
- La variation de la contrainte verticale σ_z en fonction de la profondeur Z pour différentes abscisses x (Fig.IX.4a, Fig.IX.4b).
- Les bulbes des contraintes tracés grâce aux valeurs données par la méthode des éléments finis, sont comparés à ceux obtenus par la théorie de boussinesq (Fig.IX.5a, Fig.IX.5b)

IX.3.1) INTERPRETATION DES COURBES

** Cas de maillage régulier

1) Variation du déplacement vertical V en fonction de l'abscisse x pour différentes profondeurs

On constate que le déplacement verticale diminue à mesure que l'on s'éloigne de la charge (Fig.3) Les courbes représentant la variation du déplacement V le long de l'axe des abscisse x s'appâtissent à mesure que l'on s'enfonce dans le sol, par conséquent nous pouvons déterminer la profondeur à partir de laquelle le tassement instantané devient négligeable.

2) Variation de la contrainte verticale σ_z en fonction de la profondeur z pour différentes abscisses.

Les courbes représentées sur les figures (Fig.IX.4a) et (Fig.IX.4b) montrent la variation de la contrainte σ_z pour deux abscisses $x_1 = 0m.$ (sous la charge) et $x_2 = 0.3m.$

On remarque que le contraintes diminuent à mesure que l'on s'éloigne de la surface du sol, et que les courbes obtenues par la M.E.F. s'approchent des courbes données par la solution exacte.

3) Traçé des bulbes de contraintes σ_z

Les bulbes de contraintes délimitent les lignes où les contraintes sont constantes. Les bulbes tracés à partir des résultats donnés par la M.E.F. et ceux donnés par la solution exacte (théorie de BOUSSINESQ) sont comparables (Fig.IX.5a)

**** Cas de Maillage non régulier**

Nous avons également utilisé un maillage non régulier pour lequel les dimensions des mailles situées au voisinage de la charge sont réduites par rapport aux mailles situées plus loin (Fig.IX.5b).

Les bulbes de contraintes obtenus par la M.E.F correspondant à ce maillage se rapprochent des bulbes donnés par la solution exacte. Par conséquent, il est intéressant d'utiliser une subdivision graduelle en éléments pour permettre une étude plus détaillée dans les régions où on attend une grande concentration de contraintes (ouvertures ou près des charges concentrées).

CONCLUSION

Vu que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont très proches de ceux de la théorie. On peut conclure que le maillage choisi est suffisamment affiné pour représenter correctement le comportement de ce sol.

IX.2) APPLICATION DE L'ELEMENT ISOPARAMETRIQUE

Avant d'étudier l'exemple d'un sol présentant un tunnel , nous nous sommes assuré de la validité du programme "ISOBANDE", en exécutant les exemples précédement cités. Les résultats obtenus par le programme "ISOBANDE" et "BMAT" sont identiques.

IX.2.1) 1^{er} EXEMPLE

Dans cet exemple, on étudie un sol semi-infini présentant un tunnel de 20m de diamètre, soumis à une pression uniforme de 15N/m^2 (répartie sur la circonférence et le long de l'axe Z) (Fig.IX.6a).

On se propose de déterminer les déplacements dans le sens radial. Le sol étudié est subdivisé en éléments isoparamétriques à quatre noeuds (2 d d l par noeud). Nous avons opté pour une subdivision graduelle qui consiste à affiner le maillage au voisinage du trou, dans le but d'obtenir le plus de renseignements possible concernant les points se trouvant dans la zone de faiblesse.

Cet exemple a été traité par la méthode des intégrales de frontières (voir MESSAFER PHD THESIS 1990; Fig.4-43).

D'après le graphe (Fig.IX.6b) on constate que les déplacements obtenus par la méthode des intégrales de frontières convergent vers la solution exacte à mesure que l'on augmente le nombre de noeuds de la circonférence du tunnel de 16 à 72 noeuds . Le déplacement radial obtenu par la méthode des éléments finis a une valeur de 7.5mm.

CONCLUSION

L'obtention de la solution exacte a nécessité l'utilisation de 72 noeuds sur la circonférence dans le cas de la méthode des intégrales de frontières, et 196 noeuds répartis sur toute la structure dans le cas de la méthode des éléments finis. Par conséquent la méthode des intégrales de frontières est mieux adaptée à la résolution des problèmes de grande dimension, car on ne discrétise que la surface du problème.

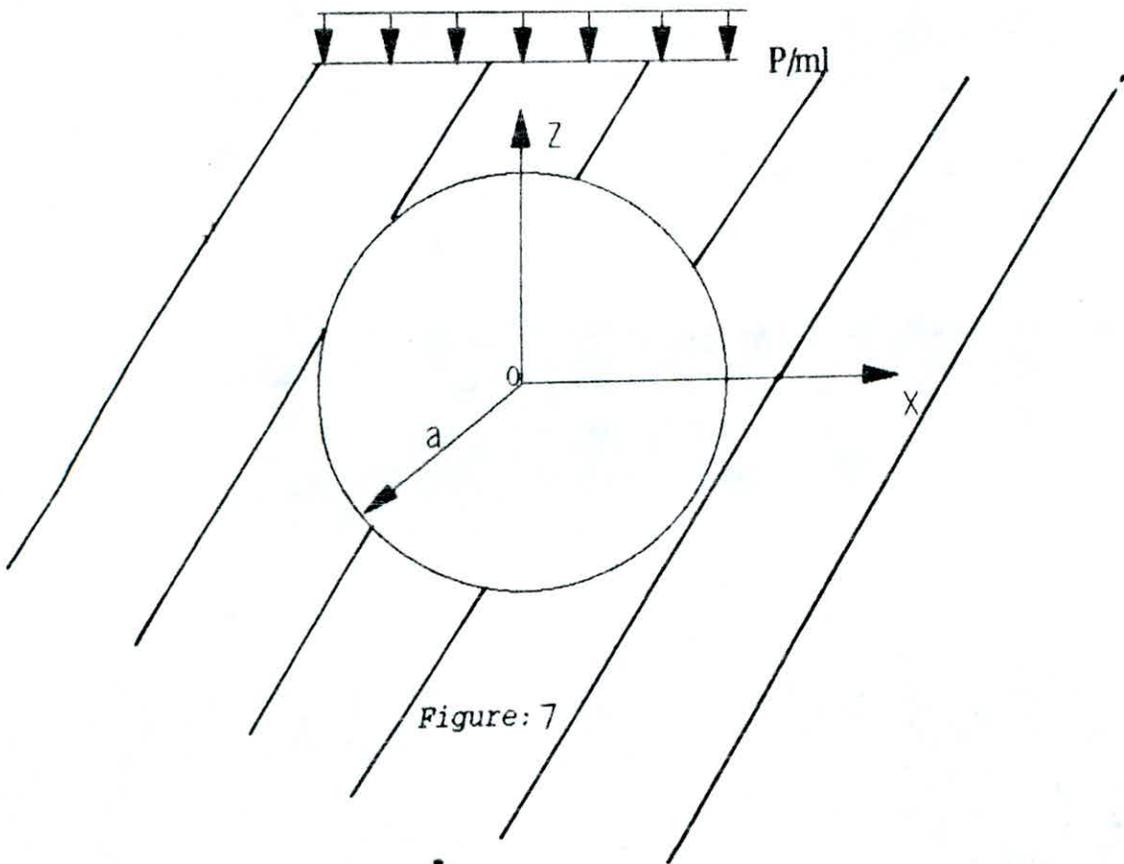


Figure: 7

IX.2.2) 2^{ème} EXEMPLE

On analyse le cas d'un sol semi-infini présentant un tunnel circulaire de deux mètres de diamètre, soumis à sa surface à un chargement reparté de 1 N/m^2 , sur une distance égale au diamètre et le long de l'axe Y . (Fig 7)

Dans le but de déterminer les contraintes et les déplacements au sein de ce sol, nous l'avons discretisé en éléments isoparamétriques puis en éléments rectangulaires.

Les courbes tracées représentent la variation de la contrainte normale σ_z le long de :

-la profondeur z , pour tous les points situés sur la verticale ($x=0$), (Fig.IX.7a)

-la distance x , pour tous les points situés sur l'horizontale ($z=0$), (Fig.IX.7b)

INTERPRETATION DES COURBES :

1- Courbes σ_z en fonction de z/a :

Cette courbe (Fig.IX.7a) représente la variation de la contrainte σ_z pour les différentes ordonnées (z/a). La contrainte croît au fur et à mesure que l'on s'approche de la charge P . Les courbes obtenues dans le cas du maillage rectangulaire et isoparamétrique sont pratiquement confondues.

2- Courbes σ_z en fonction de x/a :

Les courbes (Fig.IX.7b) montrent que la contrainte σ_z croît progressivement pour les points dont les abscisses sont comprises entre 1.8m et 6.5m puis augmentent brusquement au voisinage du tunnel jusqu'à atteindre une valeur maximale.

De la même manière, les courbes tracées dans les cas de maillage rectangulaire et isoparamétrique sont pratiquement confondues. Une légère différence apparaît cependant, à la surface du tunnel. Cette différence est de l'ordre de 12.5 %. On peut néanmoins la diminuer en augmentant le nombre d'éléments rectangulaires.

En l'absence de solution exacte, nous opterons pour la solution donnée par les éléments isoparamétriques car la frontière du tunnel est mieux représentée.

Remarque :

Les courbes tracées pour les maillages rectangulaires et isoparamétriques sont pratiquement identiques. Il est à noter qu'il a fallu discretiser la structure en 204 éléments rectangulaires pour se rapprocher de la solution donnée par 160 éléments isoparamétriques

Par conséquent les éléments isoparamétriques paraissent mieux adaptés pour ce genre de problème car ils représentent mieux les surfaces courbes et sont utilisées en un nombre moindre par rapport aux éléments (isoparamétriques) *rectangulaires* pour la même précision.

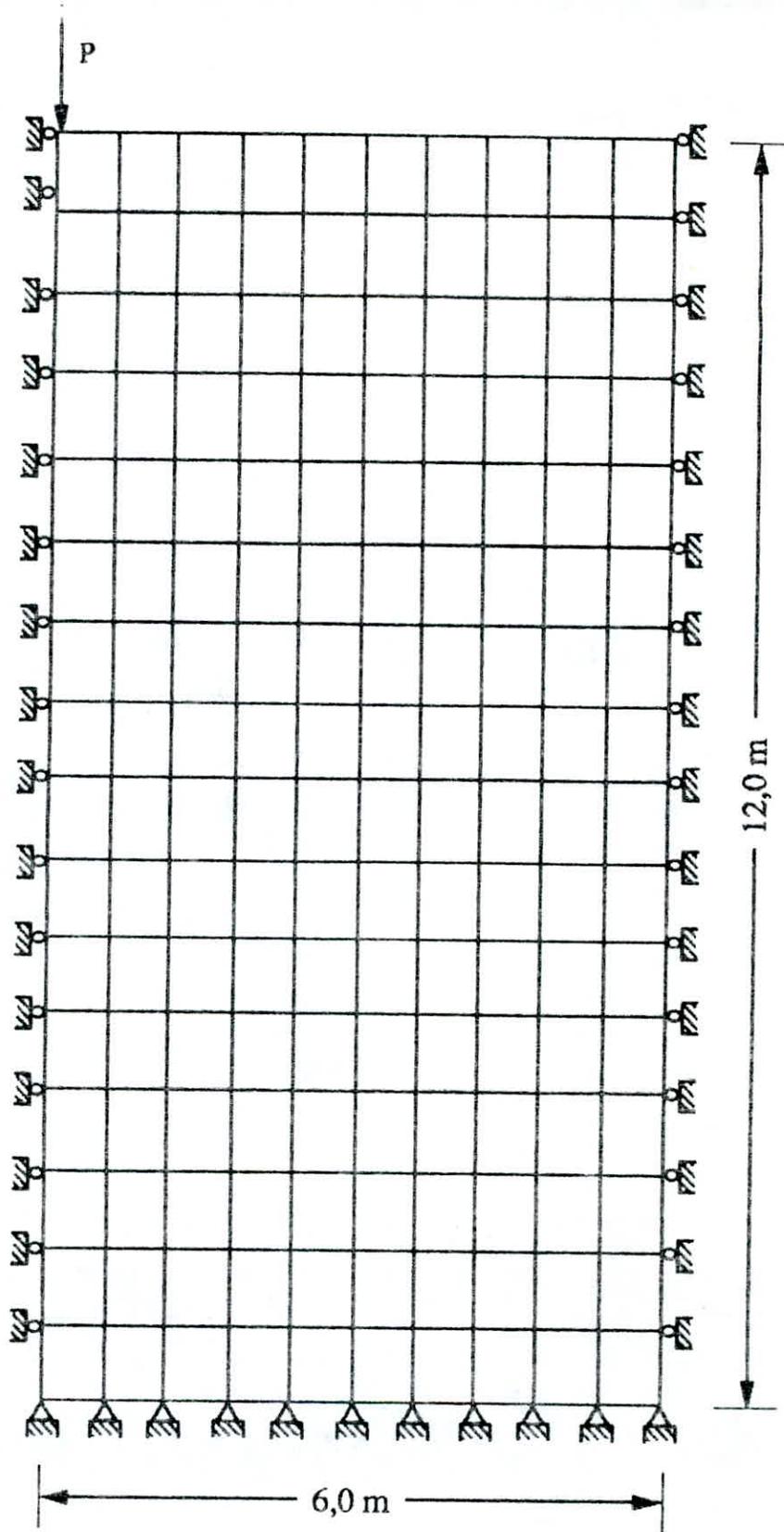


Fig: 2a Discretisation par éléments rectangulaires
Maillage régulier

Nombre d'élément = 160

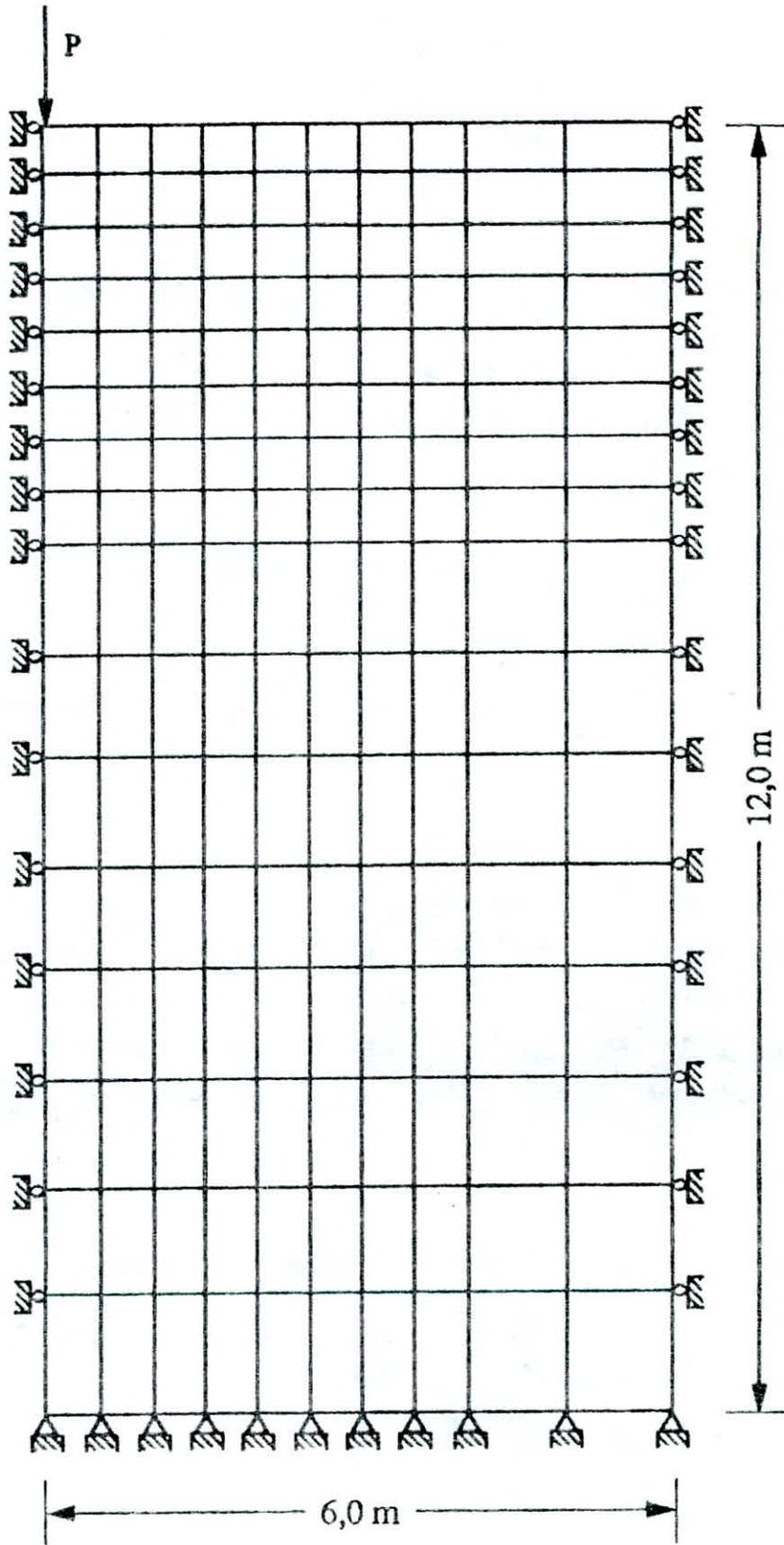


Fig: 2_b Discretisation par éléments rectangulaires
Maillage non régulier

Nombre d'élément = 160

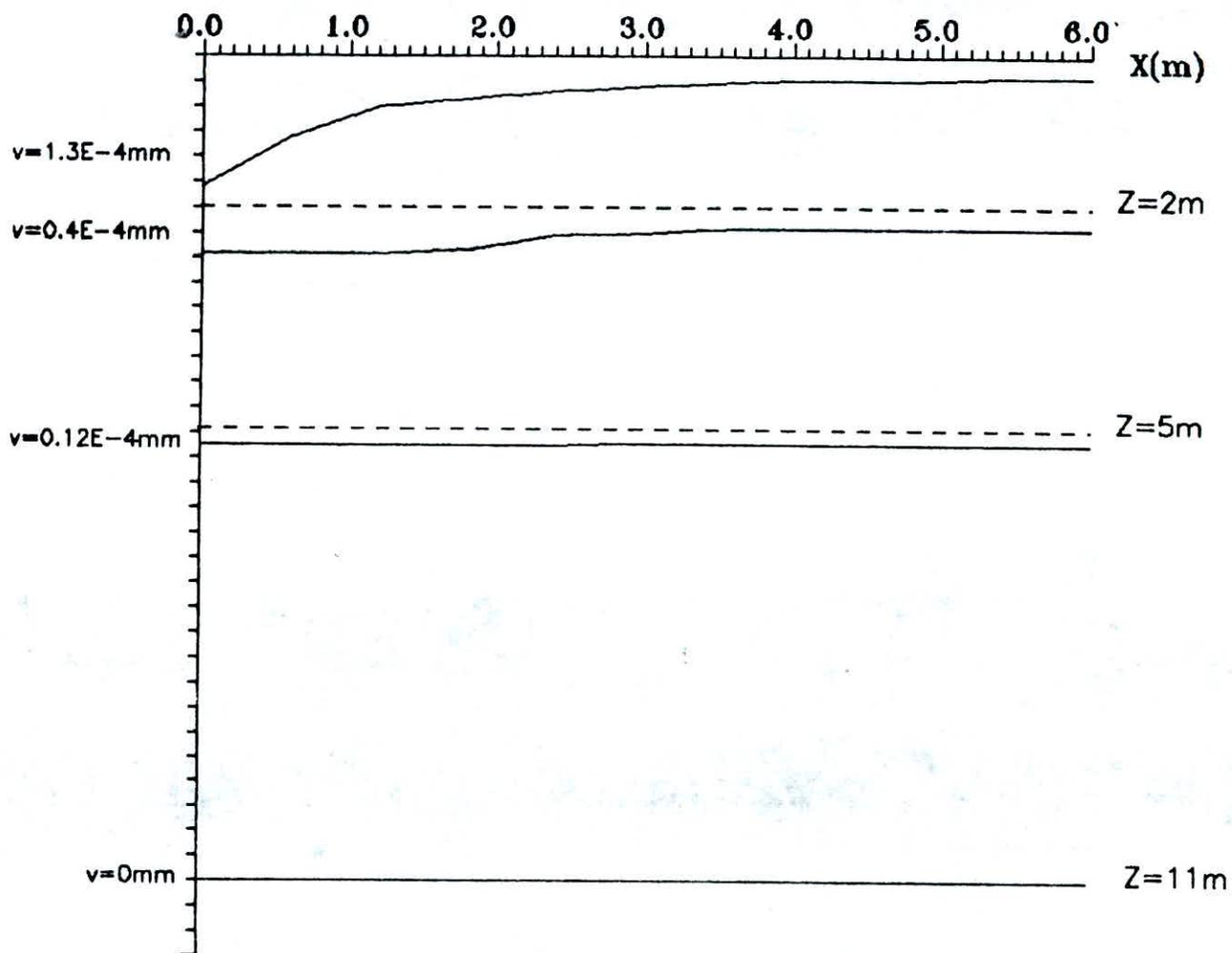


Fig.3 Variation du déplacement V en fonction de l'abscisse x a différentes profondeurs.

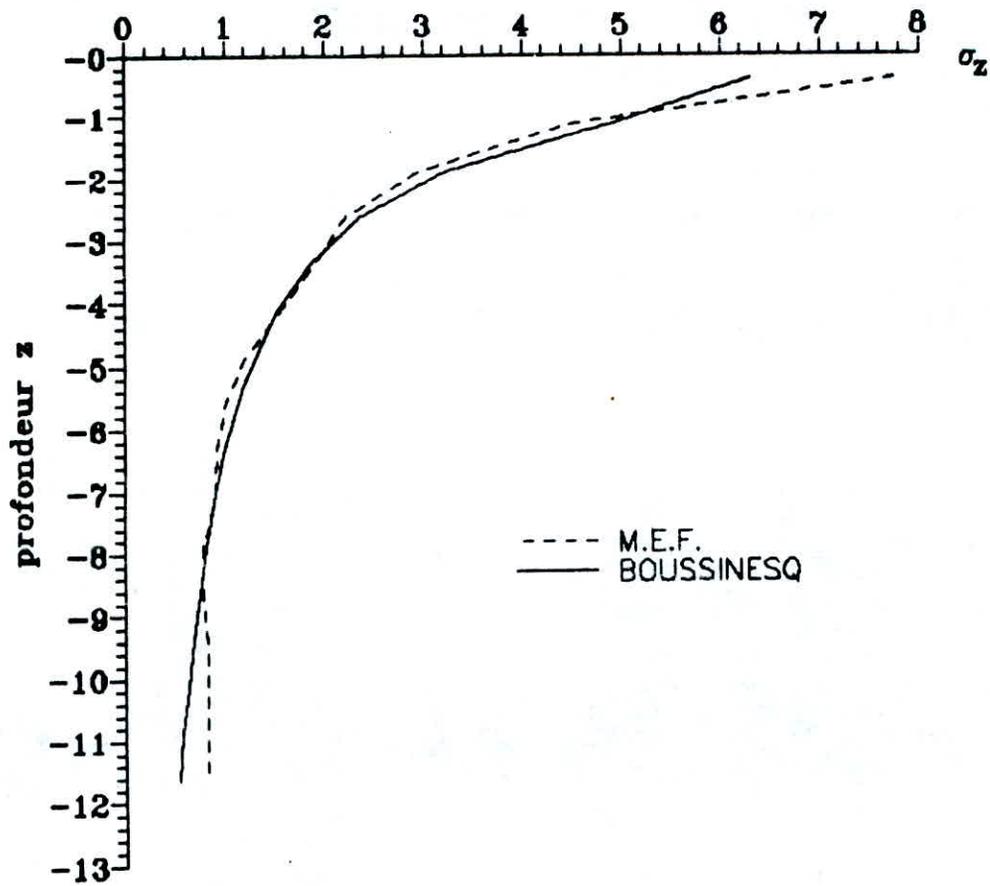


Fig. IX.4a Courbes de variation de la contrainte en fonction de la profondeur z ($r=0.3$)

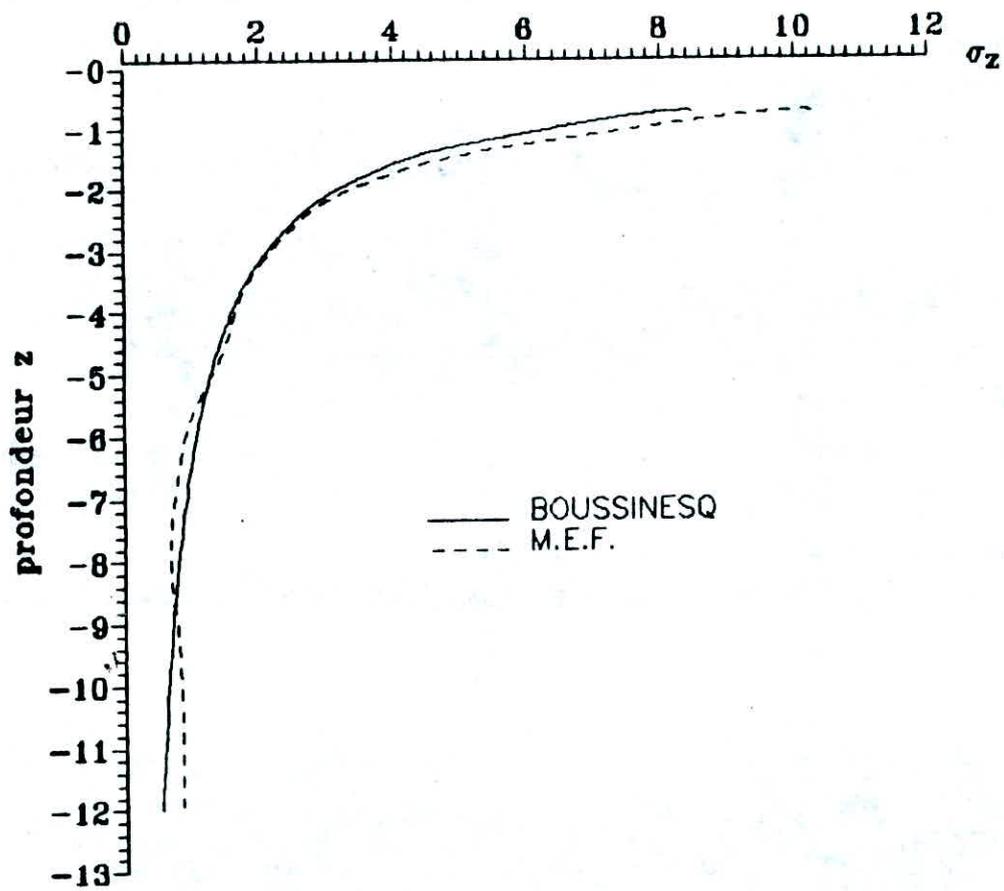


Fig. IX 4 Courbes de variation de la contrainte σ_z en fonction de la profondeur z ($r=0$).

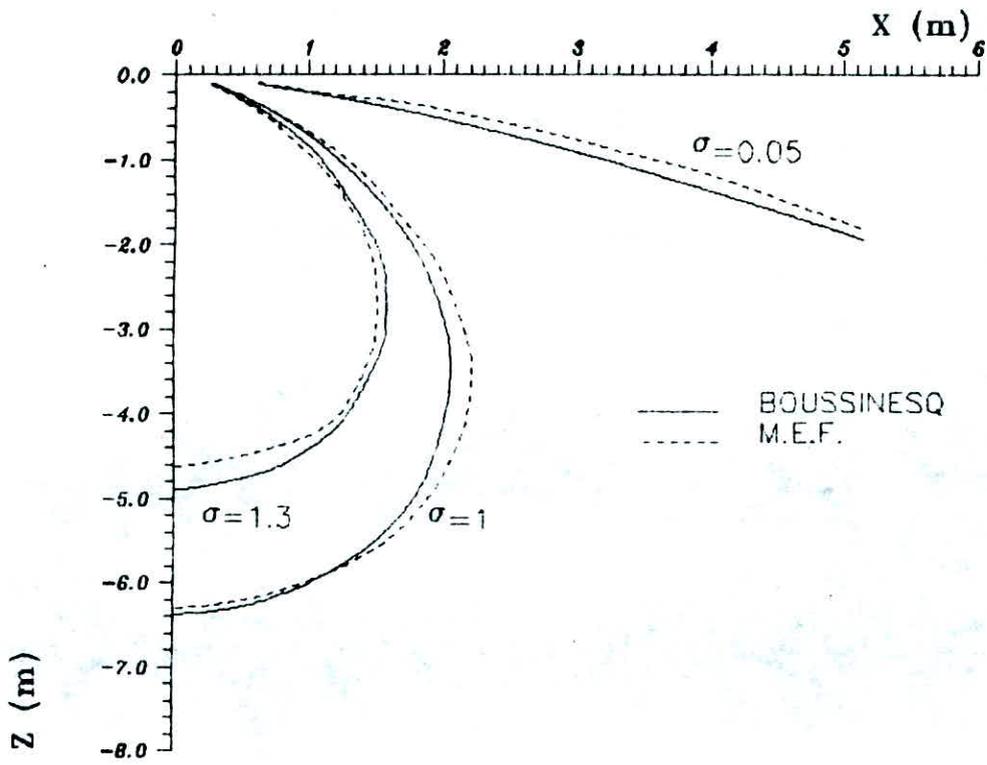


Fig. 5a Comparaison des bulbes de contraintes σz obtenues par la theorie de BOUSSINESQ et par la M.E.F.- maillage regulier.

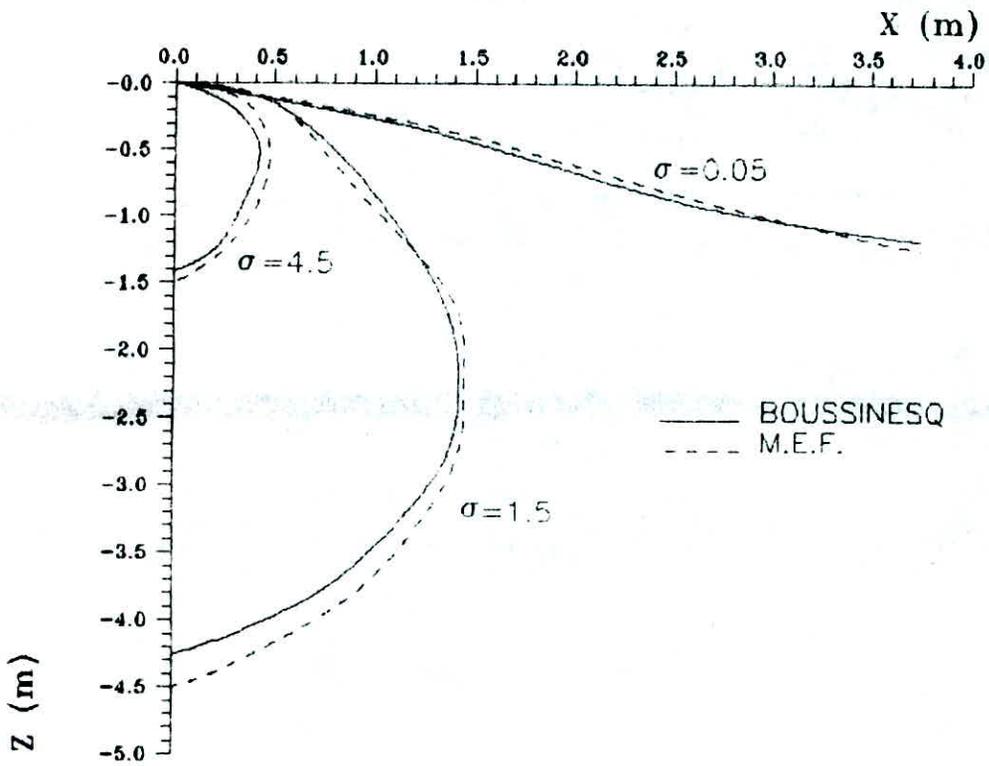


Fig 5b Comparaison des bulbes de contraintes σ_z obtenues par la theorie de BOUSSINESQ et par la M.E.F.-maillage non regulier

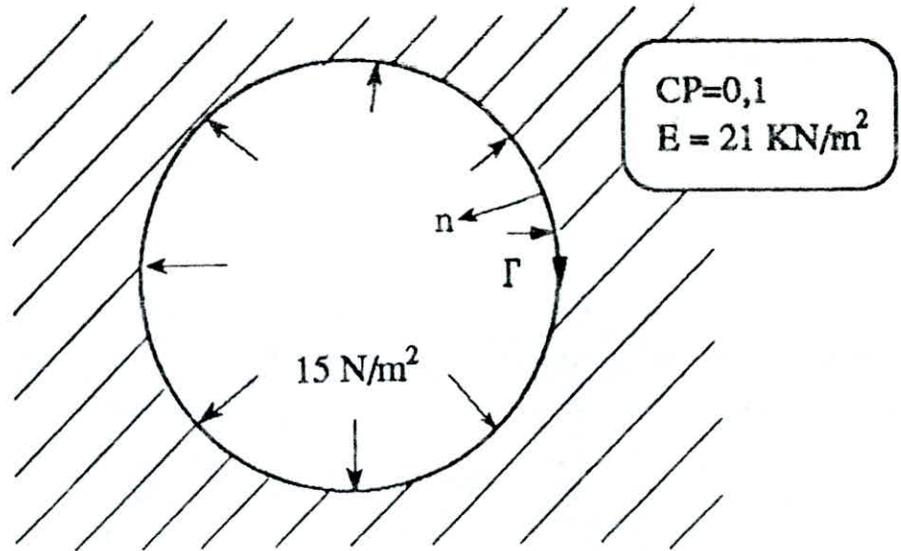


Fig: 6a Tunnel circulaire dans un milieu infini

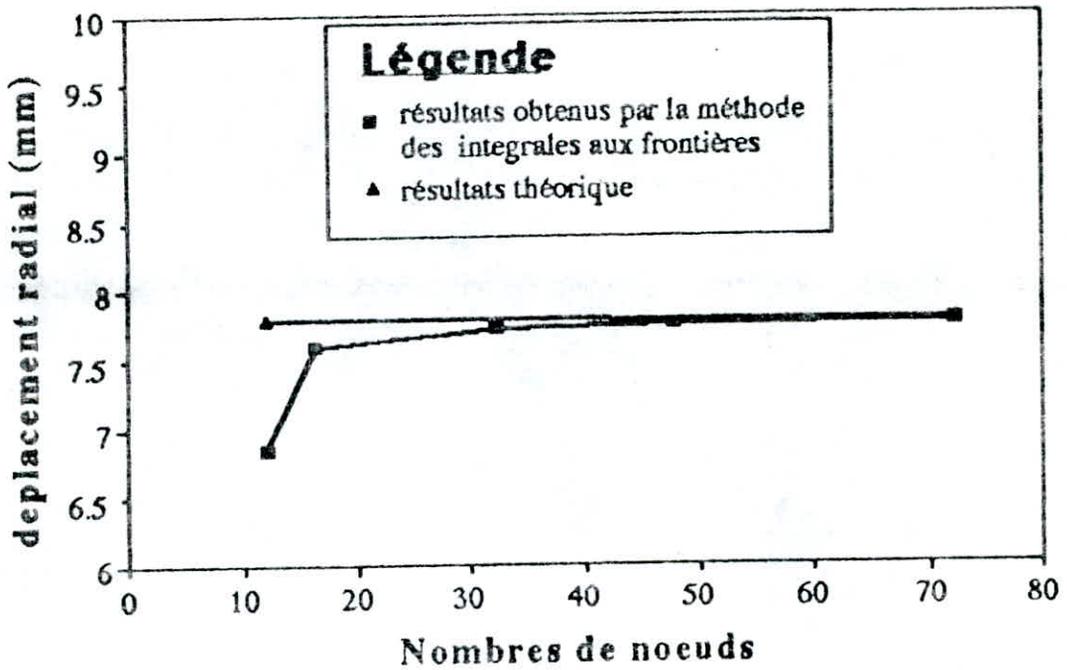


fig: 6b Déplacement radial dûs a une pression uniforme dans le tunnel

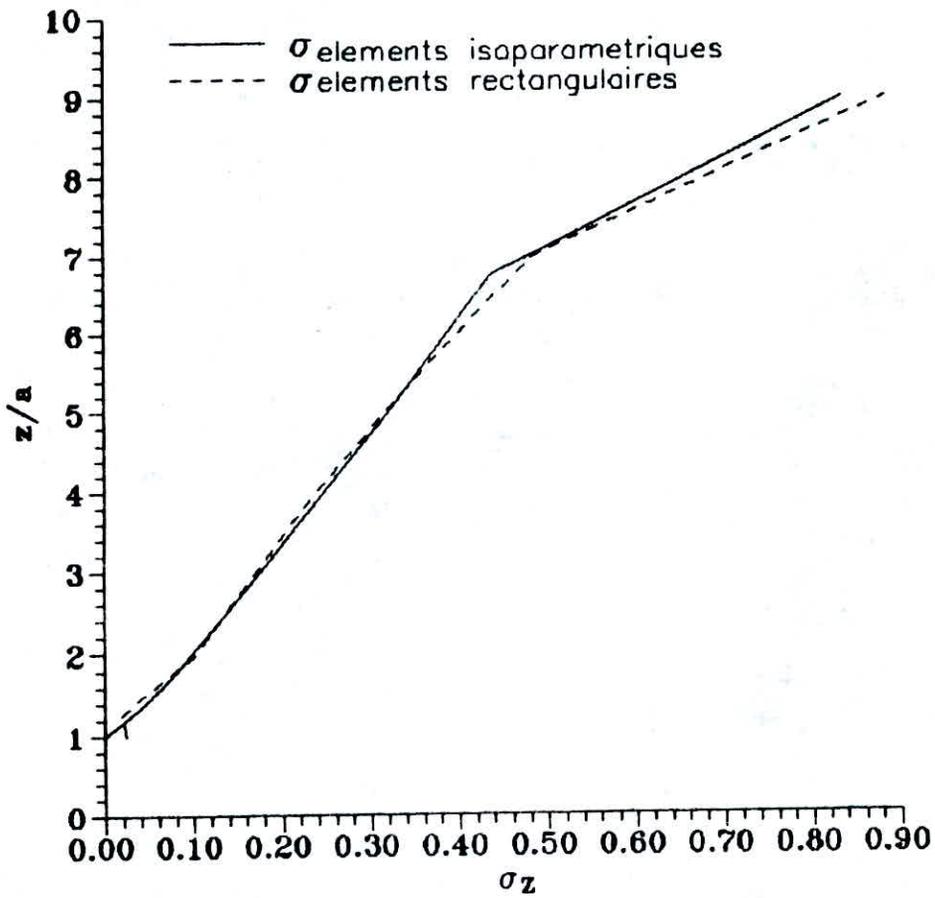


Fig. 1. Courbes de variation de la contrainte σ_z en fonction de la profondeur z . ($x=0$)

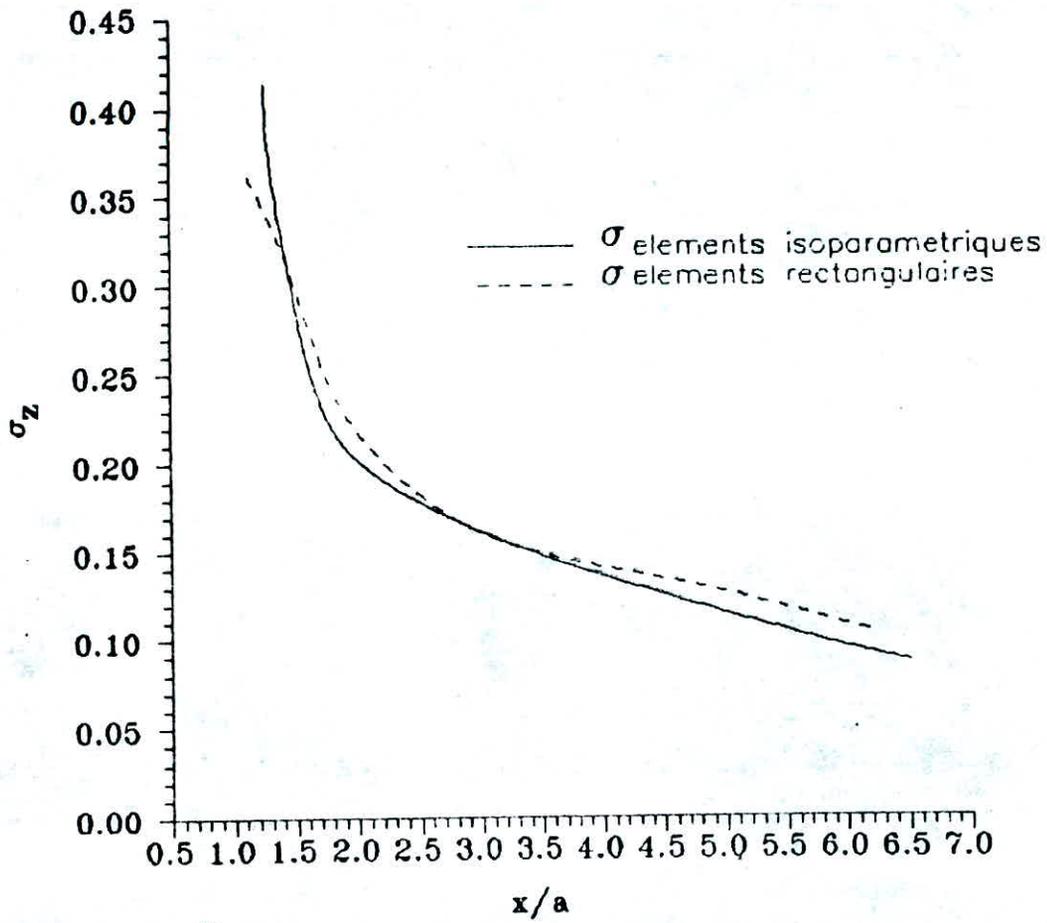


Fig. 7b Courbes de variation de la contrainte σ_z le long de l'abscisse x . ($z=0$)

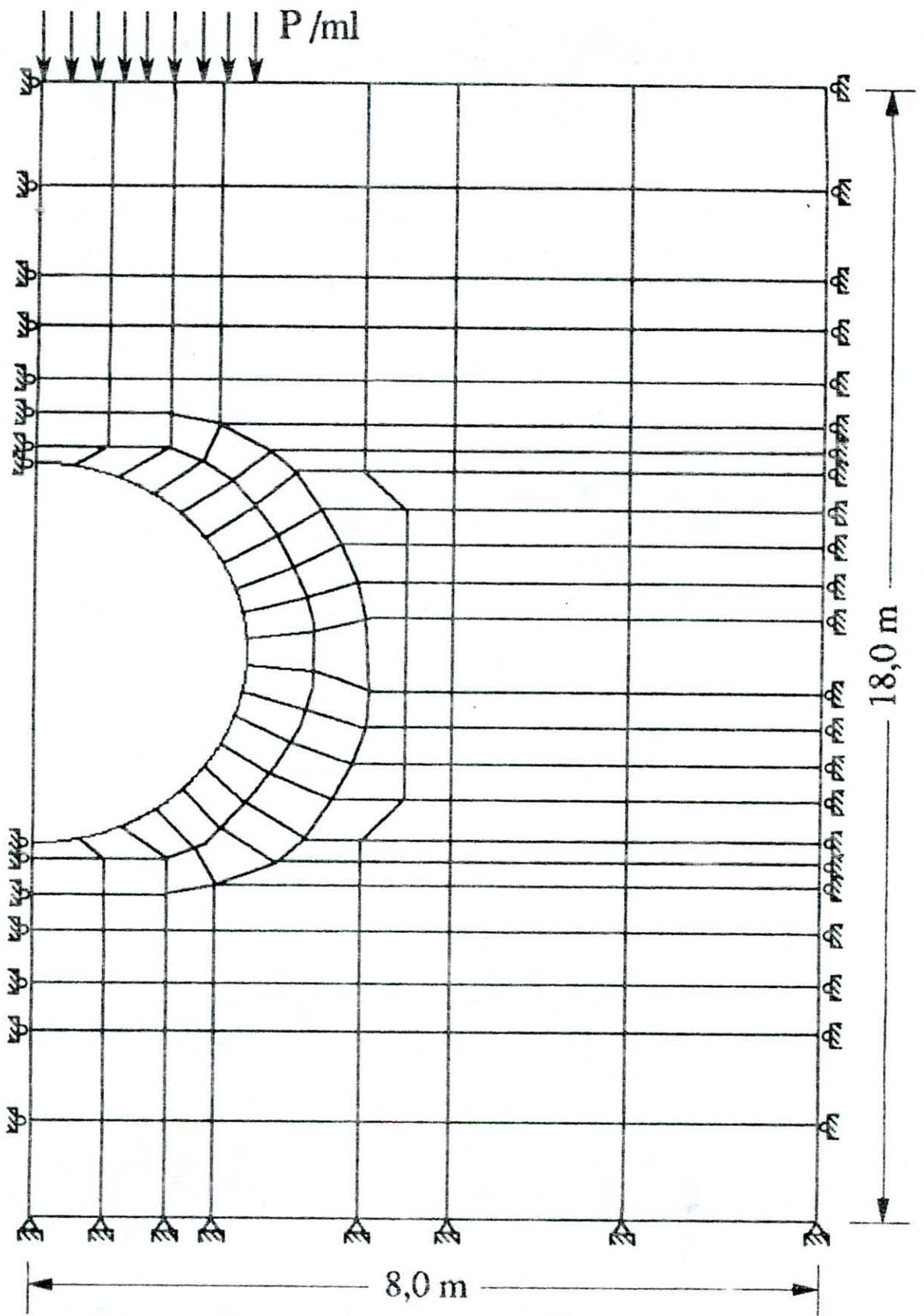


Fig: 8a Subdivision par éléments isoparamétriques

Nombre d'élément= 160

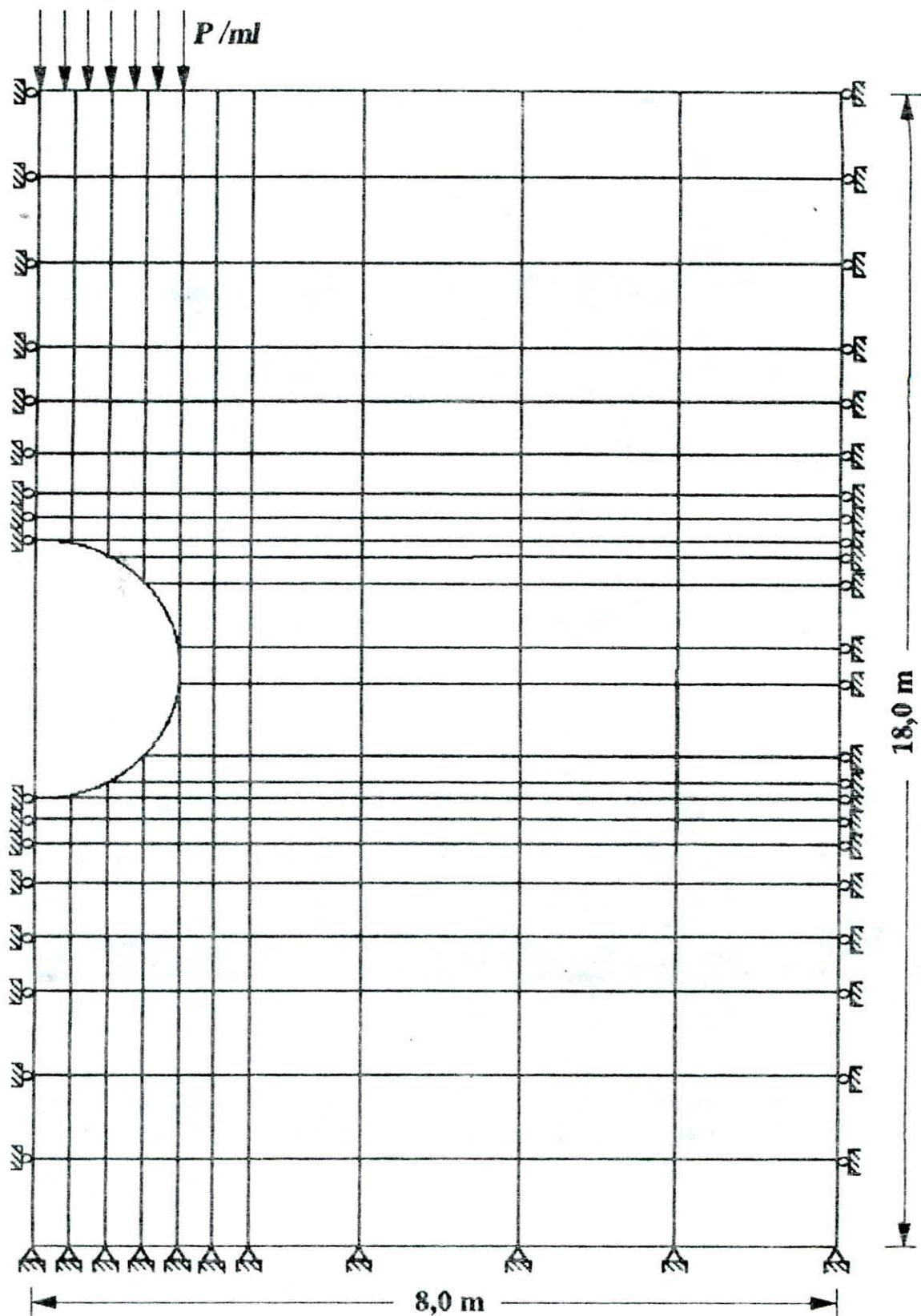


Fig: 8b Subdivision par éléments rectangulaires

Nombre d'éléments = 208

CONCLUSION GENERALE

Notre travail nous a permis de déterminer les champs de contraintes et de déplacements au sein d'un milieu continu, chargé supposé homogène, linéaire, isotrope.

Nous avons traité le cas d'un sol simplement chargé à sa surface. Il existe cependant dans la nature des sols présentant des cavités correspondants à des zones de faiblesse. C'est pourquoi nous nous sommes penchés sur l'étude de ce cas.

Notre étude a pu être menée à bien grâce à l'utilisation de la méthode des éléments finis qui présente une grande souplesse d'adaptation aux problèmes pratiques, en tenant compte de la complexité de la topologie de la structure ainsi que celle du comportement du matériau.

En effet cette méthode est en mesure de représenter correctement les conditions réelles de la structure, aussi bien à géométrie simple (cas de sol semi infini chargé à sa surface), qu'à géométrie complexe (cas de sol présentant une cavité). Ceci en utilisant l'élément rectangulaire et l'élément isoparamétrique. Ces éléments choisis ont donné de bons résultats pour les problèmes d'élasticité plane et ont permis d'approcher au mieux la solution exacte.

SUGGESTIONS

On suggère de reformuler le problème d'analyse de la structure sol, en utilisant l'élément isoparamétrique à huit noeuds en vue de réduire le nombre d'éléments nécessaires pour obtenir des résultats avec une précision donnée.

Il est à noter en outre, que notre étude a porté sur l'analyse d'une structure idéale (nous avons supposé le sol homogène, linéaire, isotrope, à caractéristiques mécanique constantes), or il est clair que la plupart des problèmes rencontrés dans la nature ne présentent pas toutes ces simplifications.

Il serait intéressant donc, par amélioration de notre programme, de traiter le cas de sol où les caractéristiques mécaniques telles que le module de YOUNG, varierait linéairement en fonction de la profondeur. La simulation du comportement d'un tel sol serait possible si nous considérons la structure comme un assemblage de parties ayant chacune un module de YOUNG constant. De la même manière, il serait possible de traiter le cas d'un sol hétérogène (bicouches ou multicouches).

Néanmoins les résultats obtenus seront approximatifs car on n'aura pas tenu compte de l'interaction entre les différentes couches aux interfaces.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **O.C ZIENKIEWICZ** La methode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur.
PARIS, Edition 1973
- [2] **G.DHATT ET G. TOUZOT** Présentation de la méthode des éléments finis .Edition
MALOINE
- [3] **K. C ROCKEY** Introduction à la méthode des éléments finis .E.dition EYROLLES 1979
- [4] **J.F IMBERT** Analyse des structures par la méthode des éléments finis
- [5] **R.H GALLAGHER** Introduction a la methode des éléments finis

