

وزارة الجامعات  
Ministère aux Universités

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

lex

### SUJET

ELABORATION D'UN LOGICIEL  
D'ETUDE DE STRUCTURES EN  
PORTIQUES, VOILES OU MIXTES

Proposé par :

A.CHARIF

Etudié par :

C.CHERFA

S.LARBI-YOUCHEF

Dirigé par :

A.CHARIF

PROMOTION Juin 91

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَاللَّهُ جَعَلَ لَكُمْ الْأَرْضَ

بَسَاطًا لَتَسْلُكُوا مِنْهَا

سُبُلًا فَجَاجًا



الآيات (19 - 20) من سورة نوح

DEDICACES

A la mémoire de mon père qui aurait tant aimé me voir arriver ,

A ma mère ,

A mes frères et soeurs ,

A tous ceux qui croient en ALLAH et en son PROPHETE .

C.CHERFA .

DEDICACES



*A mes parents ,*

*A mes soeurs ,*

*A mes frères ,*

*A toute ma FAMILLE ,*

*A tous mes amis (es) ,*

*A tous les martyres de la guerre du GOLF .*

**S.LARBI-YOUCEF**

## REMERCIEMENTS

Que le Pr. A.CHARIF , trouve ici l'expression de nos vifs remerciements ; c'est en effet grâce à ses conseils précieux et à son aide permanente que nous avons pu mener à bien notre travail . Nous lui en somme profondément reconnaissant.

Que l'ensemble du personnels de la bibliothèque et du centre de calcul trouvent ici nos remerciements les plus distingués .

Que Mlle DJAMILA trouve ici l'expression de notre profonde gratitude et sympathie pour l'aide incomparable qu'elle nous a accordée .

Que Mlles NADIA et ZAHIA trouve ici notre profonde reconnaissance et sympathie pour leur gentillesse et soutient matériels .

Ministere aux universités  
Ecole Nationale Polytechnique  
Département : GENIE CIVIL  
Promoteur : A.CHARIF  
Eleve ingénieur : C.CHERFA

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

S.LARBI-YOUCF

الموضوع: برنامج ألي للدراسة الأ توماتكية لمشاريع بنايات المزدوجة المائلص: البرنامج يدرس البنايات المزدوجة ( أروقة . جدران مسلحة) مع احتمال وجود إنفكاك سطحي و عمودي 'تغيرات أبعاد الأعمدة' الروافد والجدران المسلحة ' الشحن الدائمة و الإستفلا لية في نفس الطابق مختلف أصناف السقفيات مع احتمال وجود بلا ط شافر ( فارغ) . يسمح كذلك بقيام دراسة شبه ديناميكية للبنايات . النتائج المحصل عليها هي انتقال العقد ' تفاعلات الأركان و الجهود في طرفي القواضب تحت تأثير مختلف الحملات .

SIMULATION CODE OF A MIXED STRUCTURE :

ABSTRACT :

The simulation code developed in this work studies the mixed structures (concrete walls and cranes) having eventually plan or height unhook. The code also allows the variation of :

- poles , beams , concrete walls dimensions ,
- various types of floor with a possibility of an empty slab.

This code permits to carry out a pseudo-dynamic study of the structure and to model the concrete walls as cranes.

The outputs are : node displacements , support reactions and the strains at the end of bars under any combination of loads .

RESUME :

SUJET : Logiciel d'étude d'une structure mixte .

Le logiciel étudie les structures mixtes (voiles et portiques) avec éventuellement des décrochements en plan et en élévation , variation des dimensions des poteaux , des poutres , et des voiles des charges et des surcharges dans un même étage , différents types de plancher avec possibilité d'existence de dalle vide .

Il permet de faire une étude pseudo-dynamique de la structure , de modélise les voiles en portique .

Les résultats fournis sont les déplacements des noeuds , les réactions d'appuis et les efforts aux extrémités des barres sous n'importe quelle combinaison de charge .

S O M M A I R E

CHAPITRE I : INTRODUCTION

- I.1 Introduction
- I.2 Calcul des structures en informatique
- I.3 Méthodologie de la programmation
- I.4 Méthodologie de l'élaboration du logiciel
- I.5 Organigramme général du logiciel
- I.6 Introduction aux structures mixtes

CHAPITRE II : INTRODUCTION DES DONNEES

- II.1 Introduction
- II.2 Entrée des données
  - II.2.1 Menu et présentation
  - II.2.2 Données générales
  - II.2.3 Nombre et position des files
- II.3 Dimensions en plan du bâtiment
  - II.3.1 Les poteaux
  - II.3.2 Les poutres
  - II.3.3 Les voiles
  - II.3.4 Les planchers
    - a/ Planchers dalle
    - b/ Planchers à corps creux
- II.4 Caractéristiques mécaniques des matériaux
- II.5 Données relatives à l'étude pseudo-dynamique
  - II.5.1 Coefficient d'accélération de zone A
  - II.5.2 Facteur de comportement de la structure B
  - II.5.3 Facteur de qualité Q
  - II.5.4 Facteur d'amplification dynamique moyen

CHAPITRE III : CENTRE DE MASSE - CENTRE DE TORSION

- III.1 Centre de masse

III.1.1 Introduction

III.1.2 Principe de la programmation

III.2 Centre de torsion

III.2.1 Introduction

III.3 Calcul de l'exentricité

III.4 Organigramme

CHAPITRE IV : DESCENTE DE CHARGE

IV.1 Définition

a/ Charges permanentes

b/ Surcharges d'exploitations

IV.2 Principe général adopté

IV.2.1 Planchers dalle

IV.2.1.1 Panneaux du type 'portiques '

IV.2.1.2 Panneaux du type 'voile '

IV.2.1.3 Panneaux du type 'mixte '

IV.2.2 Planchers à corps creux

IV.3 Organigramme

CHAPITRE V : REPARTITION DES FORCES SISMIQUES SELON LES  
DIFFERENTS PLANS DE CONTREVENTEMENTS DE LA  
STRUCTURE

V.1 Données

V.2 Répartition des forces sismiques selon les  
différents éléments (voile ou portique)  
composant un plan de contreventement

V.3 Organigramme

CHAPITRE VI : ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE

VI.1 Introduction

VI.2 Le modèle mathématique

VI.3 Caractéristiques du modèle



- VI.3.1 Masses concentrées
  - VI.3.1.1 Matrice masse
- VI.3.2 Rigidité latérale  $KH$ 
  - VI.3.2.1 Matrice de rigidité latérale
- VI.3.3 Matrice d'amortissement
- VI.4 Equation du mouvement
- VI.5 Calcul des caractéristiques propres de vibration
  - VI.5.1 Choix de la méthode de calcul
  - VI.5.2 Exposé de la méthode de JACOBI
- VI.6 Calcul des forces sismiques
  - VI.6.1 Résultantes des forces sismiques modales

## CHAPITRE VII : CALCUL DES EFFORTS INTERNES

- VII.1 Introduction
- VII.2 Modélisation des voiles
- VII.3 Rappels des méthodes énergétiques
  - VII.3.1 Travail mécanique des efforts extérieurs
  - VII.3.2 Travail mécanique des forces intérieures
  - VII.3.3 Théorème de CASTGLIANO
- VII.4 Matrice de rigidité
  - VII.4.1 Définition
  - VII.4.2 Matrice de rigidité d'une poutre simple avec bi-encastree
  - VII.4.3 Matrice de rigidité d'une poutre avec des parties infiniment rigides aux extrémités
- VII.5 Calcul des réactions d'appuis dûs aux chargements extérieurs
  - VII.5.1 Réaction d'appuis d'une barre bi-encastree
    - VII.5.1.1 Chargement uniforme

perpendiculaire

VII.5.1.2 Chargement uniforme normal à la barre

VII.5.2 Calcul des réactions d'appuis d'une barre à extrémités rigides

VI.5.2.1 Chargement uniformément réparti sur la poutre souple

VI.5.2.2 Chargement uniformément réparti sur toute la poutre

VII.6 Méthode des déplacements

VII.6.1 Principe de la méthode

VII.6.2 Matrice de rotation

VII.6.3 Formation de la matrice de rigidité de la structure

VII.6.4 Influence de la numérotation des noeuds

VII.6.5 Propriétés de la matrice de rigidité

VII.6.6 Méthode de stockage de la matrice de rigidité

VII.6.7 Equation d'équilibre

VII.6.8 Vecteur force de la structure

VII.6.9 Conditions aux limites

VII.6.10 Résolution du système d'équation linéaire

VII.6.10.1 Méthodes directes

VII.6.10.2 Méthodes itératives

VII.6.11 Organigramme de résolution

VII.7 Application à l'informatique

VII.7.1 Organigramme

CHAPITRE VIII : CONCLUSION

## **CHAPITRE I**

# **INTRODUCTION**

## I INTRODUCTION

### I.1 INTRODUCTION :

Lorsque l'homme se trouve confronté à un problème difficile, son premier souci est d'éliminer les pistes inutiles, en d'autres termes restreindre l'éventail de la recherche aléatoire des solutions .

C'est en ceci que réside l'essence de l'intelligence.

A ce propos un penseur disait :

*"Bien qu'il nous soit impossible de faire la démonstration de toute chose avec certitude, nous devons néanmoins prendre et embrasser les opinions qui nous paraissent les plus raisonnables".*

Une discipline nouvelle de l'informatique est apparue depuis une trentaine d'années : 'la construction de logiciels '.

Son but est de constituer , à l'aide d'ordinateurs , des raisonnements et des calculs fastidieux pour l'homme.

Le développement de la micro-informatique à rendu possible la solution de problèmes qui nécessitaient auparavant des moyens fastidieux , et ainsi permettra de vulgariser le calcul des structures.

Le programme informatique de calcul faisant l'objet de notre travail est élaboré en langage FORTRAN sur ordinateur du type VAX. Le FORTRAN , FORMula TRANslator , est le langage de programmation le plus utilisé pour implanter sur ordinateur des applications scientifiques , techniques , statistiques , de recherche opérationnelle , de gestion scientifique , ect .

### I.2 CALCUL DES STRUCTURES EN INFORMATIQUE :

Lors de l'étude d'une structure le recours à l'ordinateur est bien souvent inévitable. Celui-ci permet en effet d'effectuer des calculs complexes difficilement réalisables par des méthodes

manuelles ou bien procure un gain de temps important en évitant des opérations longues et fastidieuses.

Que le projeteur fasse appel à un logiciel directement ou par l'intermédiaire d'un informaticien, il lui incombe dans tous les cas de poser le problème correctement, de modéliser la structure et de définir les sorties graphiques ou les tableaux des résultats qu'il compte utiliser. Le calcul sur ordinateur n'est en effet qu'une aide matérielle et ne peut en aucun cas se substituer à la réflexion de l'ingénieur.

### 1.3 METHODOLOGIE DE LA PROGRAMMATION :

Pour écrire un programme, il faut faire un certain nombre d'opérations qui doivent s'enchaîner avec ordre :

a/ La première étape consiste à effectuer l'analyse détaillée du problème, à choisir la méthode et à rechercher les cas dégénérés.

b/ La seconde étape consiste à établir l'organigramme qui définit d'une manière précise l'organisation logique du problème et à le présenter sous une forme graphique normalisée aisément compréhensible sans aucune ambiguïté.

c/ Division du problème en parties distinctes qui donneront lieu à une série de sous-programmes reliés par un programme principal.

d/ Ecriture du programme.

f/ Introduction des données pour avoir les résultats.

### 1.4 METHODOLOGIE DE L'ELABORATION DU LOGICIEL :

L'élaboration d'un logiciel de calcul de structures doit faire l'objet de rigueur et de logique afin de permettre à l'utilisateur une exécution facile sur ordinateur.

Une des premières difficultés rencontrées dans notre travail est le grand nombre de données à introduire.

Dans le souci de rendre plus souple cette étape de départ du

logiciel nous avons opté pour une entrée de données sous forme de fichier inter-actif accompagné de commentaires.

- L'entrée des données se fait aussi par bloc d'étage et par le choix entre différentes options.

Cette méthode peut paraître laborieuse, et éventuellement erronée ainsi dans le but de palier ce dernier inconvénient nous avons créé un fichier résultat commenté, où toutes les données introduites sont sauvegardées. L'utilisateur pourra alors effectuer les opérations suivantes :

a/ interrompre l'exécution du programme à la fin de l'entrée des données.

b/ accéder au fichier précédemment cité.

c/ réaliser les corrections nécessaires (s'il y en a).

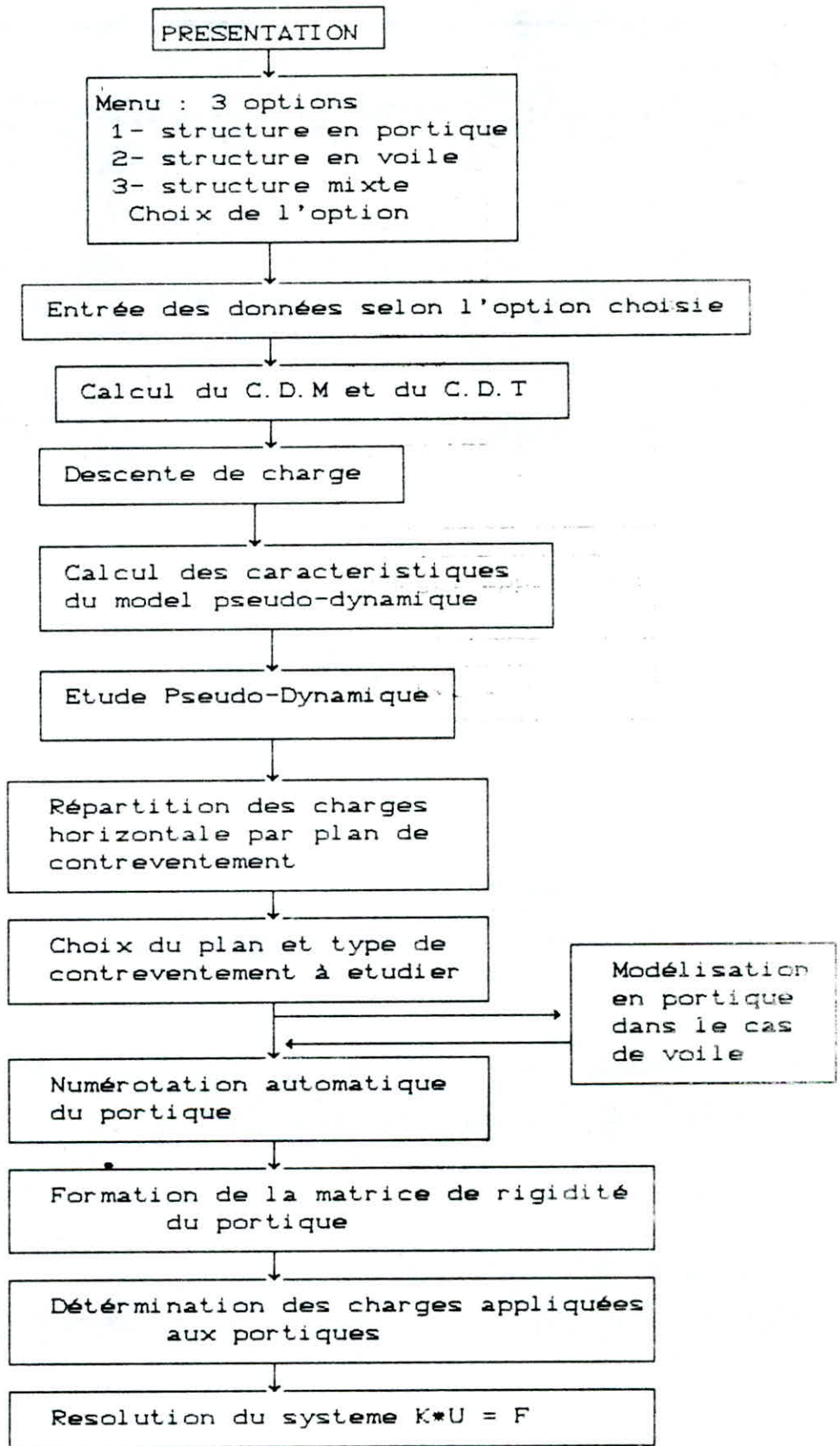
d/ effacer tous les commentaires du fichier.

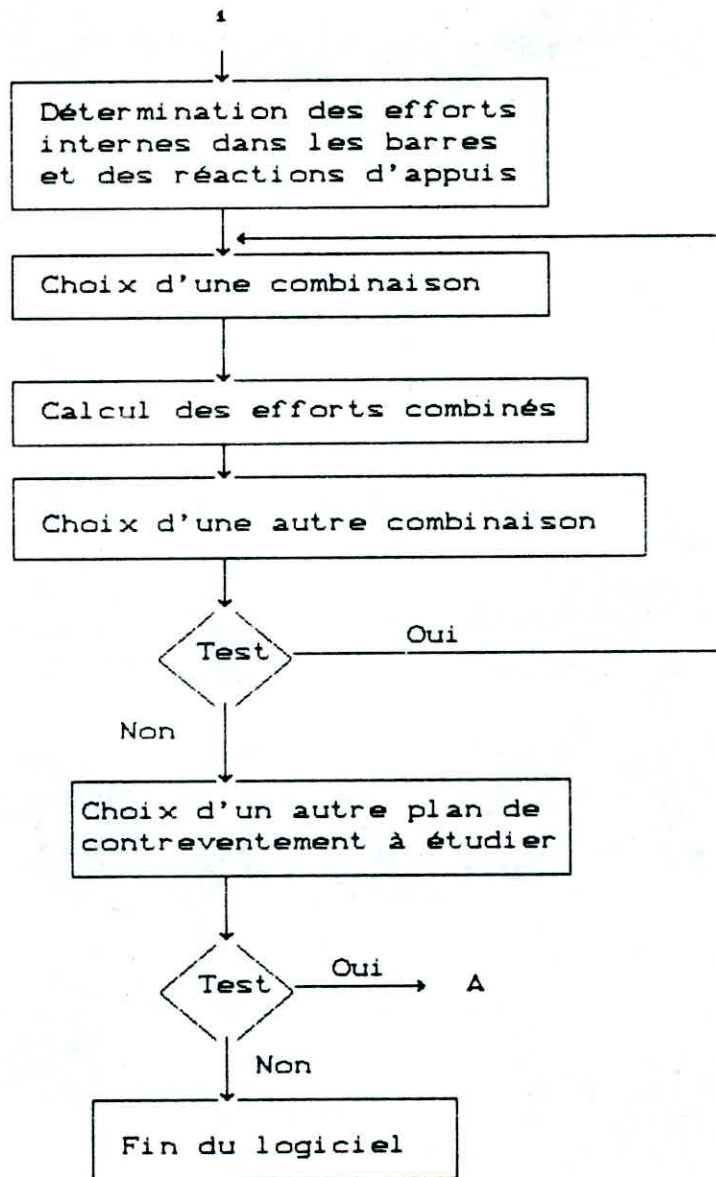
Une fois les étapes précédentes accomplies, il en résulte la création d'un fichier de données qui pourra être utilisé par la suite.

- Pour ne pas avoir à des conversions d'unités pendant le calcul toutes les données sont introduites dans le système MKS et elles y sont affichées aussi, sauf s'il y a une contre-indication.

soulignons que ce logiciel peut-être utilisé sur micro-ordinateur compatible et ceci du fait de l'existence de nouveau compilateur FORTRAN (version 4.1) qui est proche de celle du VAX.

#### I.5 ORGANIGRAMME GENERAL DU LOGICIEL :







## REMARQUE :

Tous les résultats intermédiaires sont sauvegardés dans un fichier de sortie commenté.

### I.6 INTRODUCTION AUX STRUCTURES MIXTES :

La construction des structures mixtes est devenue chose fréquente ces dernières années, et cela grâce aux intérêts divers qu'elles présentent par rapport aux autres types de structures classiques à savoir ; les structures en voiles et les structures autostables. Les avantages d'une telle structure peut se resumer en deux points essentiel :

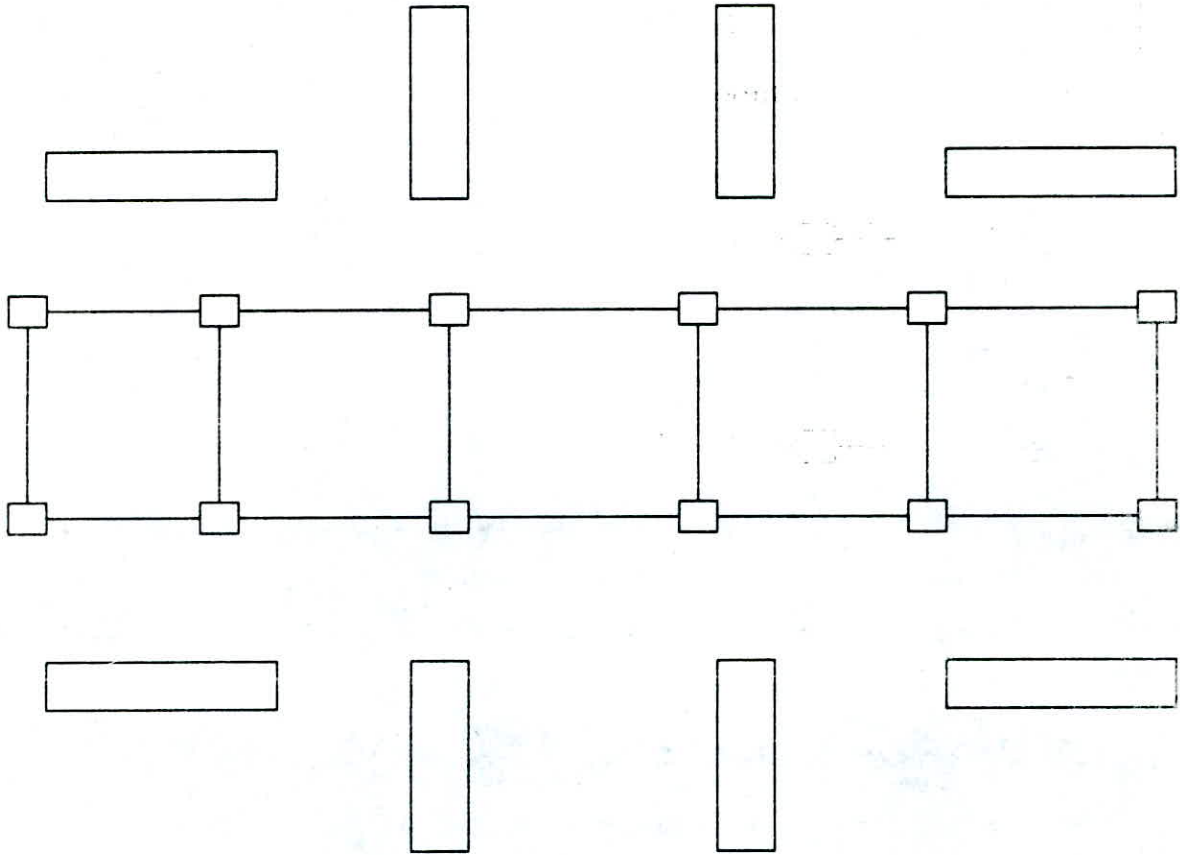
1°. Le comportement d'une structure mixte vis à vis des efforts horizontaux (*tel que le séisme*) est très satisfaisant.

2°. On réalise avec ce type de structure, une économie de matériaux (*Béton et Acier*), très appréciable et ceci par rapport aux structures en voiles.

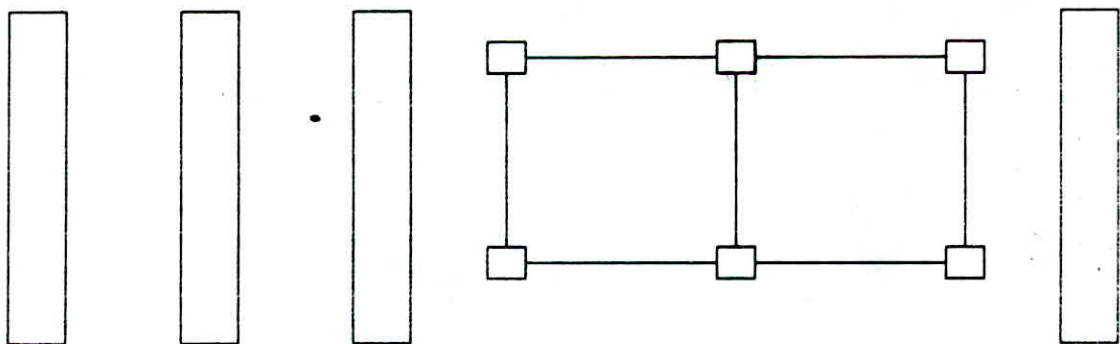
Dans la pratique, les voiles d'une structure mixte sont généralement disposées sur les pourtours pour assurer ainsi une grande rigidité ; leur rôle essentiel est de reprendre les efforts horizontaux (*tel que le séisme*), alors que les portiques (*Poteau et Poutre*) seront disposés dans la partie centrale du bâtiment, leur rôle est de reprendre les efforts verticaux (*poids propre et les surcharges*) et éventuellement de réduire les portées importantes qui peuvent séparer deux voiles parallèles.

L'établissement d'un logiciel de structures mixtes est donc justifier, mais reste néanmoins une tâche difficile à réaliser dans son ensemble.

**EXEMPLE 1 : Voiles disposé sur le poutour.**



**EXEMPLE 2 : Voiles disposés parallèlement.**



***CHAPITRE II***

***INTRODUCTION DES DONNEES***

## II INTRODUCTION DES DONNEES :

### II.1 INTRODUCTION :

Ainsi qu'il a été spécifié dans le paragraphe (I.4) , la lecture des données est prévue de manière toute formelle en mode inter-actif .

Nous avons cherché une présentation aussi claire que possible étayée par de nombreux commentaires. Il en résulte donc en contre partie des programmes volumineux .

Le problème de souplesse recherché en introduisant les données se pose pour les structures importantes (*surtout Mixte*) , il a fallu par conséquent penser à réduire le nombre de données introduites pour les cas identiques (*même dimensions des poteaux , même épaisseurs des voiles , même charges et surcharges , même hauteur des étages ...etc* ) et cela :

- par le choix d'option dont le programme précise la forme numérique ou alphanumérique , ainsi que le contenu des réponses .

- par une saisie de données par blocs et cela pour les étages identiques ; donc il suffira d'introduire une seule fois les données relatives à ces étages .

### II.2 ENTREE DES DONNEES :

La structure est repérée dans un référentiel OXYZ orthonormé , l'origine du repère est située au bas gauche du plan ; le plan OXY est confondu avec la base du bâtiment .

#### II.2.1 MENU ET PRESENTATION :

Un MENU principal apparaîtra et demandera à l'utilisateur de préciser le type de structure à étudier , sous la forme :

- 1- Structure en Portique .
- 2- Structure en Voile .
- 3- Structure Mixte .

Faite entrer votre choix (1,2 ou 3).

Une fois le choix effectué , le reste des données à introduire dépendra automatiquement du facteur précédent .

## II.2.2 DONNEES GENERALES :

Dans cette partie il est demandé à l'utilisateur de fournir les données générales de la structure (*c'est à dire communes aux trois types de structures citées plus haut*) à savoir :

a/ Nombre d'étages du bâtiment y compris le rez-de-chaussée qui sera pris comme étant l'étage numéro 1 ; cette variable est désignée par NE .

b/ Nombre de bloc d'étages (*une définition détaillée apparaitra sur l'écran*) .

c/ Etage initiaux et finaux de chaque bloc .

d/ Hauteur d'étage du bloc (*des affectations automatiques aux différents étages du bloc sont réalisées à l'aide de sous-programme*) .

e/ Nombres de files principales parallèles à x-x et à y-y .

f/ Entres axes des files dans les deux sens .

### REMARQUE :

Il est à noter qu'une file principale est définie soit par :

- 1- Une file de poteau (*portique*) .
- 2- Une file de voile .
- 3- Des voiles et portiques alignés .
- 4- L'extrémitée d'un voile .
- 5- Un poteau .
- 6- La bordure d'une dalle (*balcon par exemple*) .

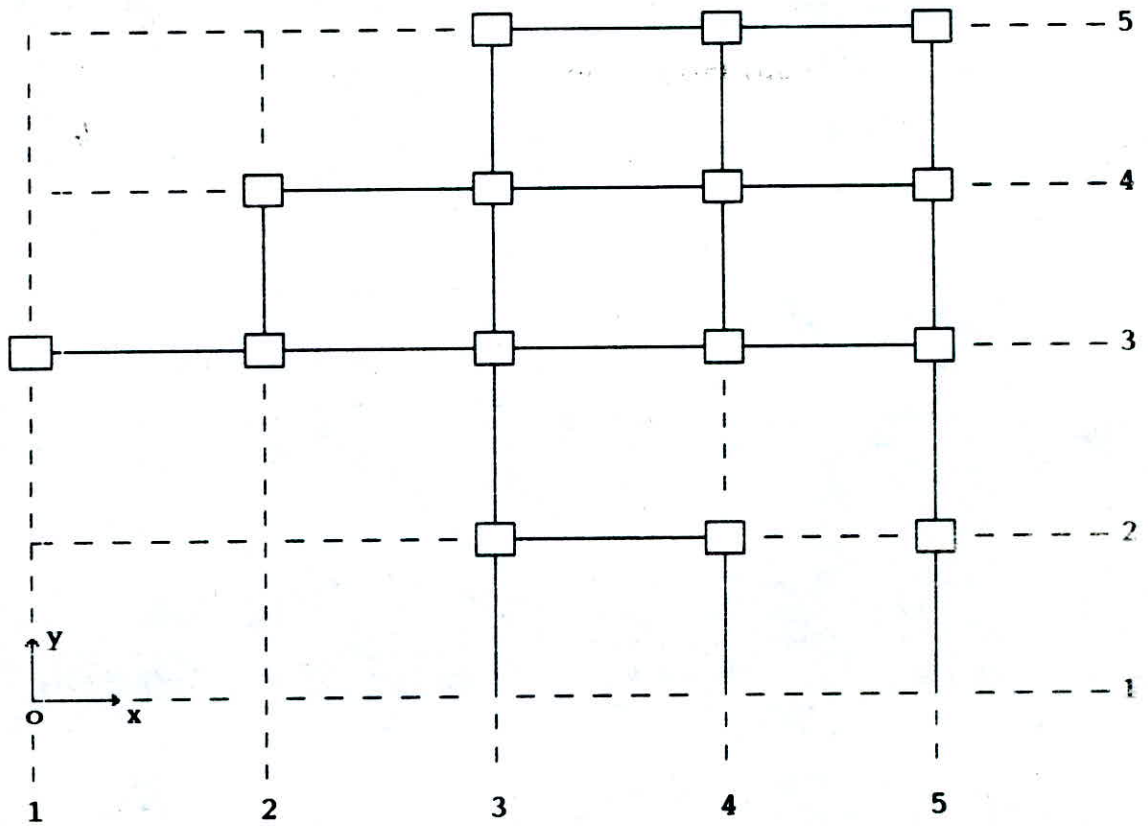
Les schémas ci-dessous illustres les définitions citées précédemment :

1<sup>er</sup>.CAS :

Structure en portique avec :

5 files // à x-x

5 files // à y-y



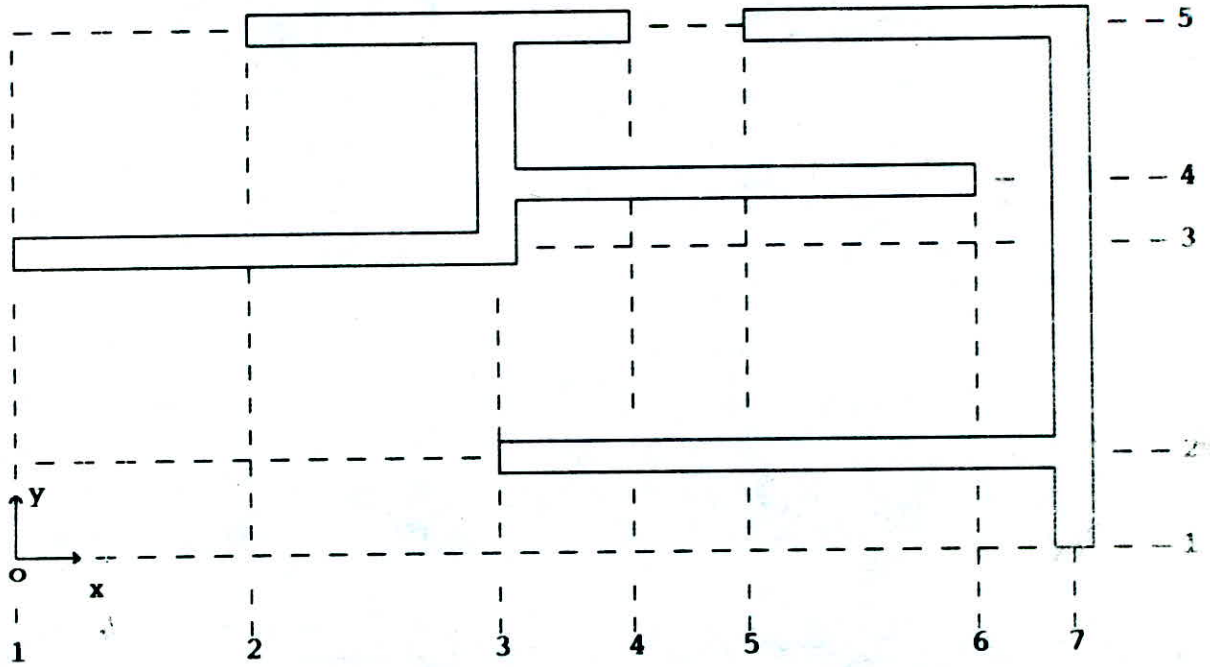
Une file peut comporter plusieurs portiques à la fois .

2<sup>ème</sup> CAS :

Structure en voile avec :

5 files // à x-x

7 files // à y-y

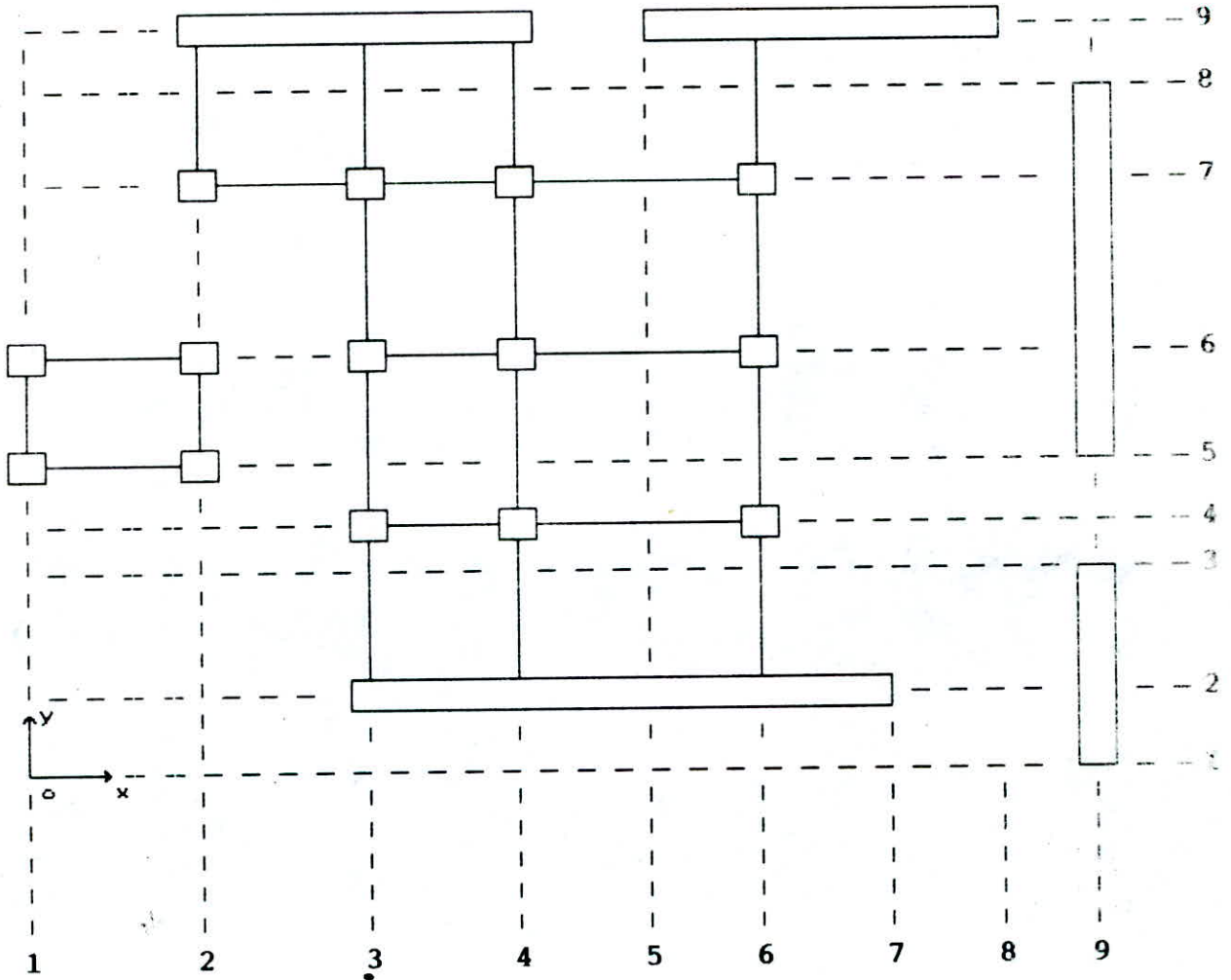


3<sup>ème</sup> CAS :

Structure mixte avec :

9 files // à x-x

9 files // à y-y



La position des voiles et des portiques est tout à fait arbitraire dans cet exemple .



### II.2.3 NOMBRE ET POSITION DES FILES :

Une numérotation des files sera effectuée comme suit :

- Le nombre de files parallèle à x-x de 1 à NX .

- Le nombre de files parallèle à y-y de 1 à NY .

Nous aurons ainsi , pour chaque file , une position initiale et une position finale .

Ces données seront répétées pour chaque bloc d'étage , ce qui nous permet d'introduire un bâtiment avec des décrochements en plan et en élévation .

Il existe des bâtiments ayant plus d'un portique et/ou de voile par file , il est demandé donc de préciser le nombre de portiques et/ou de voiles dans la file considéré .

Nous notons par :

NPX(i,j) : le nombre de portique secondaire sur la file principale j à l'étage i (sens x-x) .

NPY(i,j) : le nombre de portique secondaire sur la file principale j à l'étage i (sens y-y) .

NVX(i,j) : le nombre de voile existant dans la file principale j à l'étage i (sens x-x) .

NVY(i,j) : le nombre de voile existant dans la file principale j à l'étage i (sens y-y) .

IXIP(i,j,k) : position initiale du portique secondaire k , de la file principale j à l'étage i (sens x-x) .

IXFP(i,j,k) : position finale du portique secondaire k , de la file principale j à l'étage i (sens x-x) .

IXIV(i,j,k) : position initiale du voile k de la file j à l'étage i (sens x-x) .

IXFV(i,j,k) : position finale du voile k de la file j à l'étage i (sens x-x) .

Pour le sens y-y , il suffit de remplacer le x par un y dans les variables précédentes .

## REMARQUES :

-Pour prendre en compte les bords extérieures des poutres consoles (*dans le cas des portiques*) et des dalles en console (*cas des balcons*) nous les considérerons comme des files principales en précisant lors de l'introduction des données relatives aux poteaux ou aux voiles, qu'il n'y a ni poteaux ni voiles dans ces files.

-Un poteau peut constituer un portique.

### II.2.3 DIMENSION EN PLAN DU BATIMENT :

L'utilisateur introduira la dimension maximale en plan de chaque bloc d'étage. (*cette donnée servira pour le calcul de l'exentricité accidentelle*).

Il doit donner aussi les distances entre les files pour les deux sens ; cette distance est considérée entre-axes des files.

XL(j) : distance entre les files adjacentes parallèle à y-y.

YL(j) : distance entre les files adjacentes parallèle à x-x.

### II.3 CARACTERISTIQUES DES ELEMENTS DU BATIMENT :

#### II.3.1 LES POTEAUX :

Les poteaux sont les éléments porteurs d'une structure ; ils transmettent les efforts revenant des autres éléments à l'infrastructure.

En général, le poteau a une section carré ou rectangulaire, et, est caractérisé par deux dimensions PX et PY.

Ces dimensions doivent-être en rapport avec les charges à supporter. L'entrée des données relative aux poteaux s'effectuera aussi par bloc d'étage dans le sens x-x.

#### II.3.2 LES POUTRES :

Les poutres sont des éléments horizontaux qui transmettent les

charges revenant des planchers aux poteaux ou aux voiles (*structure mixte*). Elles forment un quadrillage de la structure, et, sont disposées dans les deux sens afin de parfaire le contreventement. Une poutre est caractérisée par trois dimensions. La longueur, la largeur, et la hauteur; elle est supportée par un poteau à chaque extrémité, où repose sur des voiles (*structure mixte*), où bien suspendue en console.

Les dimensions des poutres sont notées comme suit :

files // à x-x : largeur de poutre BY .

                  hauteur de poutre HY .

files // à y-y : largeur de poutre BX .

                  hauteur de poutre HX .

La portée de chaque poutre est calculée automatiquement par le LOGICIEL (*sous-programme LONG*).

#### REMARQUE :

En ce qui concerne les poutres qui n'appartiennent pas à un portique (*non relié à un poteau, c'est à dire reposant sur un voile*), les dimensions de ces dernières sont introduites à l'aide d'un sous-programme à part POUTREM.

#### II.3.3 LES VOILES :

Les voiles représentent les éléments porteurs de la structure. Ils sont considérés comme une consoles encastree à sa base.

L'utilisateur devra introduire :

- les positions du centre de gravité des voiles supposé plein (*sans les ouvertures*) on notera :

XGVX(j,k) et YGVY(j,k) : voiles // à x-x .

XGVY(j,k) et YGVY(j,k) : voiles // à y-y .

- longueur du voile à la base :

VLX(j,k) : voiles // à x-x .

VLY(j,k) : voiles // à y-y .

- hauteur totale du voile à partir de la base :
  - HVX(j,k) : voiles // à x-x .
  - HVY(j,k) : voiles // à y-y .
- indice des vides : égale à
  - IROX(j,k) , IROY(j,k) :
    - 1- sans ouvertures , ni décrochements .
    - 2- avec ouvertures et/ou décrochements .
- indice des ouvertures : égale à
  - IOX(j,k) , IOY(j,k) :
    - 1- ouvertures régulières .
    - 2- ouvertures pseudo-régulières .
    - 3- ouvertures irrégulières .
- nombre de file d'ouverture dans le cas d'ouverture régulières et pseudo-régulière .
- nombre d'ouvertures totales dans le voile dans le cas d'ouverture irrégulières .
- épaisseur du voile à chaque bloc d'étage .
- les côtes , largeurs et hauteurs des ouvertures selon leurs types .

Avec :

j : file principale .

k : numero du voile dans la file principale j .

#### REMARQUE :

Si le voile comporte un décrochement , ce dernier est déclaré comme étant une ouverture dont les dimensions sont celles du décrochement .

#### II.3.4 LES PLANCHERS :

Un plancher est une aire plane qui détermine les différents niveaux d'une construction . Il s'appuie sur :

- les poutres de rives .
- les poutres interieures .
- des points d'appuis isolés (*poteaux*) .
- les voiles .

Les planchers jouent le rôle :

- de plate-forme porteuse pour l'étage considéré .
- de toit pour l'étage sous-jacent .
- d'écran permettant le confort de l'habitat .
- d'élément de stabilité .

Les principales fonctions d'un plancher sont :

- résistance aux charges permanentes et surcharges mobiles .
- circulation possible entre étages par des trémies :
  - \* pour les escalier .
  - \* pour les ascenseur .
- écran isolan entre les étages ; acoustique et thermique .

On distingue deux types de planchers :

- planchers dalles .
- planchers à corps creux .

#### a/ Planchers dalle :

C'est des planchers en dalle épaisses réalisés en béton armé s'appuyant sur des poutres longitudinales ou transversales très espacées .

Les épaisseures peuvent atteindre 25 et même 30 cm pour le cas des planchers industrielle lourdement chargés . Ce type de plancher est caractérisé par :

- poids propre des planchers ( $\text{Kg/m}^2$ ) .
- surcharges (*cloisons comprises*) ( $\text{Kg/m}^2$ ) .

#### b/ Planchers à corps creux :

Il existe une très grande variété de plancher à corps creux , constitués d'un corps creux , d'une dalle de compression et de poutrelles .

Ce type de plancher est caractérisé par :

- le poids propre du plancher ( $\text{Kg/m}^2$ ) .
- surcharges (*cloisons comprises*) ( $\text{Kg/m}^2$ ) .
- sens porteur x-x ou y-y .

L'utilisateur devra donner :

- le nombre de panneaux pleins qui constituent le plancher du bloc d'étage considéré .

- le type de panneau (*corps creux ou dalle pleine*) (*si tous les panneaux du planchers sont identiques alors le type ne sera définit qu'une seule fois*) .

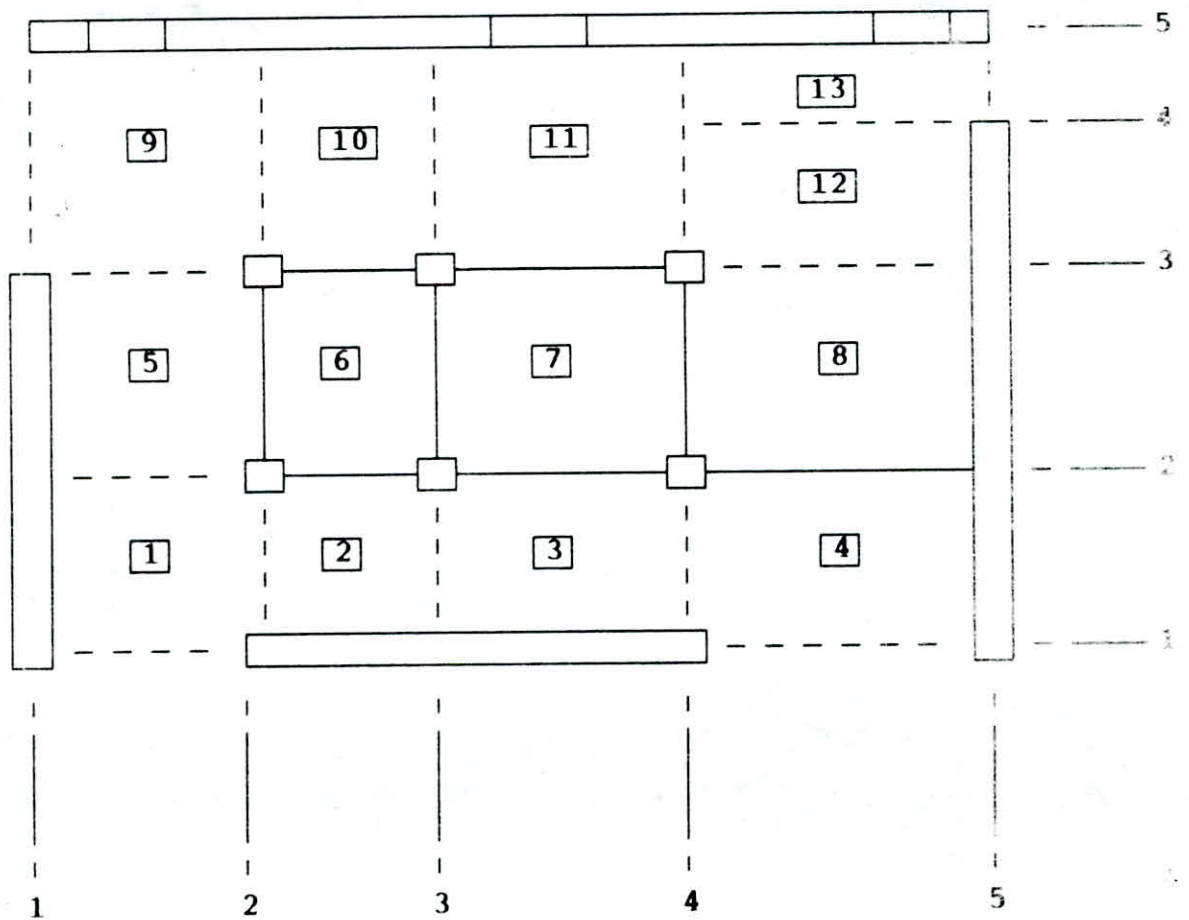
- le sens porteur s'il s'agit de panneau à corps creux .

- charges et surcharges du panneau dalle .

- noeuds début et fin selon les deux sens .

- la dimension maximale en plan du plancher du bloc d'étage considéré .

**EXEMPLE :**



Pour la figure ci-dessus on a :

- nombre de panneau plein NP = 13 .

- Panneau **1** : noeud début selon x-x : 1  
 noeud fin selon x-x : 2  
 noeud début selon y-y : 1  
 noeud fin selon y-y : 2
- Panneau **8** : noeud début selon x-x : 4  
 noeud fin selon x-x : 5  
 noeud début selon y-y : 2  
 noeud fin selon y-y : 3

**REMARQUE :**

Il n'est pas nécessaire de préciser , le nombre de panneaux vides , ou leurs positions .

**II.4 CARACTERISTIQUES MECANIQUES DES MATERIAUX :**

La nature du matériau constituant les éléments de notre structure est complètement définie par le module d'élasticité (ou module de YOUNG) . Ce module , noté E , est défini de la manière suivante :

si on applique une force F (de compression ou de traction) sur une poutre de longueur L et de section S , on obtient un déplacement U tel que :  $U = F.L / E.S$

E est donc une caractéristique du matériau et est indépendant de la géométrie des barres ; il est exprimé en unité de forces par unité de surface :

- pour les charges et surcharges permanentes :

$$E_v = 2,1 \cdot 10^8 \sqrt{1,2 \sigma'_{28}} \quad (\text{Kg/m}^2)$$

ou :

$\sigma'_{28}$  : contrainte de rupture par compression à 28 jours .

- pour les charges rapidement variables :

$$E_l = 0,7 \cdot 10^8 \sqrt{1,2 \sigma'_{28}} \quad (\text{Kg/m}^2)$$

L'utilisateur devra introduire la valeur de la contrainte du béton ainsi que la masse volumique du béton armé VM en ( $\text{Kg/m}^3$ ) .

**II.5 DONNEES RELATIVES A L'ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE :**

Les structures présentant une dissymétrie dans leurs plans et des irrégularités en élévation , dépassant les tolérances fixées par les RPA , nécessitent une analyse pseudo-dynamique . Cette analyse a pour but la détermination des forces sismiques horizontales qui dépendent des coefficients suivant :



### II.5.1 COEFFICIENT D'ACCELERATION DE ZONE A :

(Article 3.3.1.1. RPA 81 version 83)

Le coefficient d'accélération de zone A dépend du groupe d'usage de la structure défini en annexe N°1 , et de la zone sismique (carte de zones sismiques de l'Algerie ).

### II.5.2 FACTEUR DE COMPORTEMENT DE LA STRUCTURE B :

(Article 3.3.1.3. RPA 81 version 83)

Le facteur B de comportement de la structure dépend de son type et de la nature de ses contreventements . Les valeurs de B correspondantes sont données dans le tableau 2 .

### II.5.3 FACTEUR DE QUALITE Q :

(Article 3.3.1.2. RPA 81 version 83)

Le facteur de qualité du système de contreventement d'une structure donnée est fonction de l'hyperstaticité et de la surabondance du système , de ses symetries en plan , de sa régularité en élévation et de la qualité du contrôle pendant la construction . La valeur de Q devra être déterminée par la formule

$$Q = 1 + \sum_{q=1}^6 P_q$$

où  $P_q$  est la pénalité qui dépend de l'observation ou non des critères de pénalité q . Les critere ainsi que les valeurs  $P_q$  correspondantes sont données dans le tableau 3 .

### II.5.4 FACTEUR D'AMPLIFACATION DYNAMIQUE MOYEN :

(Article 3.3.1.2. RPA 81 version 83)

La valeur de D sera déterminée d'après le type de sol en fonction de la période T du bâtiment , peut-etre lu sur les spectres annexés dans la figure de la page 81 .

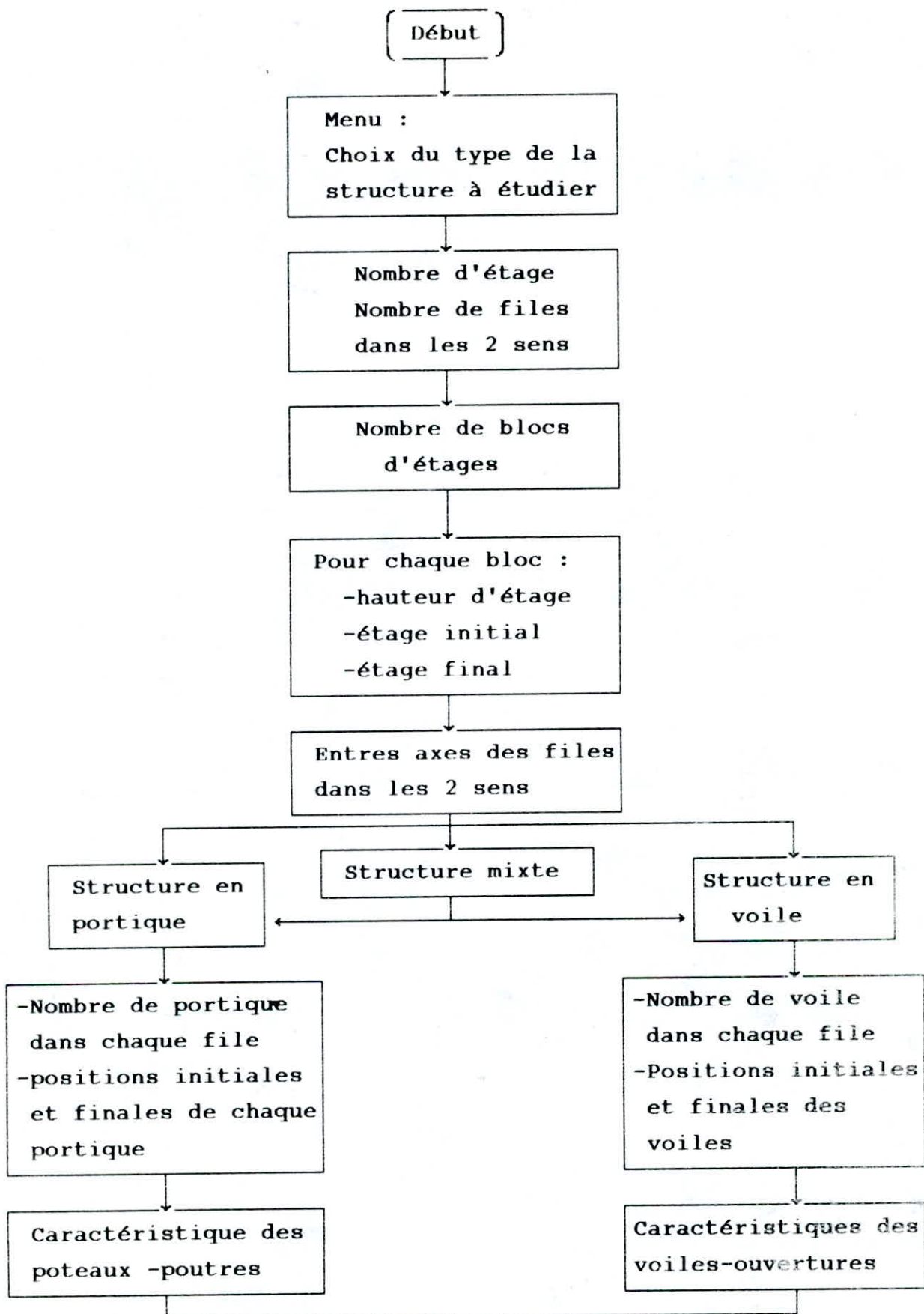
deux cas peuvent se présenter :

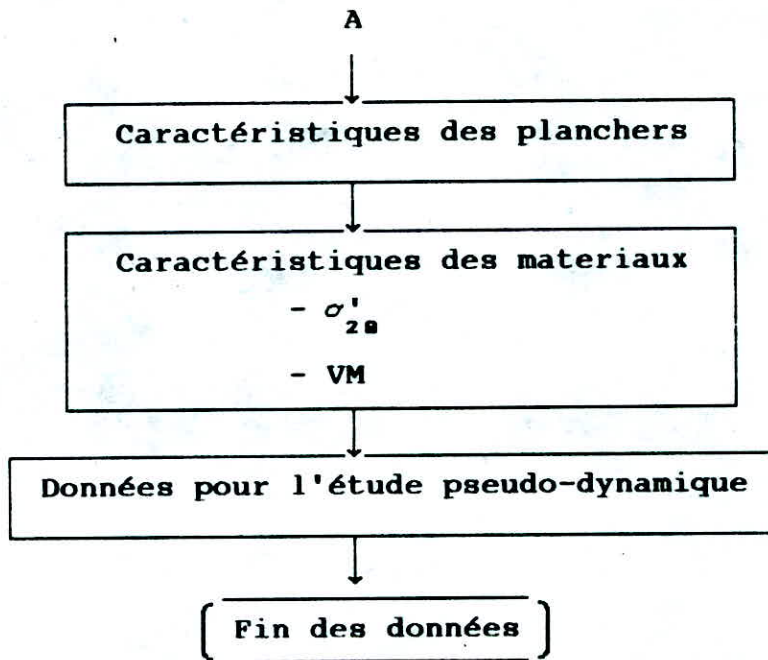
- Sol meuble : 0,5 →  $D = 2 \sqrt{0,5/T}$  .

- Sol ferme : 0,3 →  $D = 2 \sqrt{0,3/T}$  .

La période T sera déterminée par une méthode pseudo-dynamique .

#### 11.5 ORGANIGRAMME :





**CHAPITRE III**

**CENTRE DE MASSE –  
CENTRE DE TORSION**

### III CENTRE DE MASSE - CENTRE DE TORSION

#### III.1 CENTRE DE MASSE :

##### III.1.1 INTRODUCTION :

Le centre de masse est défini comme étant la position du centre de gravité des masses.

Pour le plancher d'un étage Z quelconque les coordonnées du centre de masse sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_G(Z) = \frac{\sum m(i).x(i)}{\sum m(i)} \\ Y_G(Z) = \frac{\sum m(i).y(i)}{\sum m(i)} \end{array} \right.$$

où :

$m(i)$  : masse du panneau de dalle i appartenant au plancher de l'étage Z.

$x(i)$  : l'abscisse du centre de gravité du panneau de dalle i .

$y(i)$  : l'ordonnée du centre de gravité du panneau de dalle i .

Notre logiciel traite les cas suivants :

- Dans un même étage les panneaux peuvent être de types différents .

- Epaisseur des planchers variable par étage .

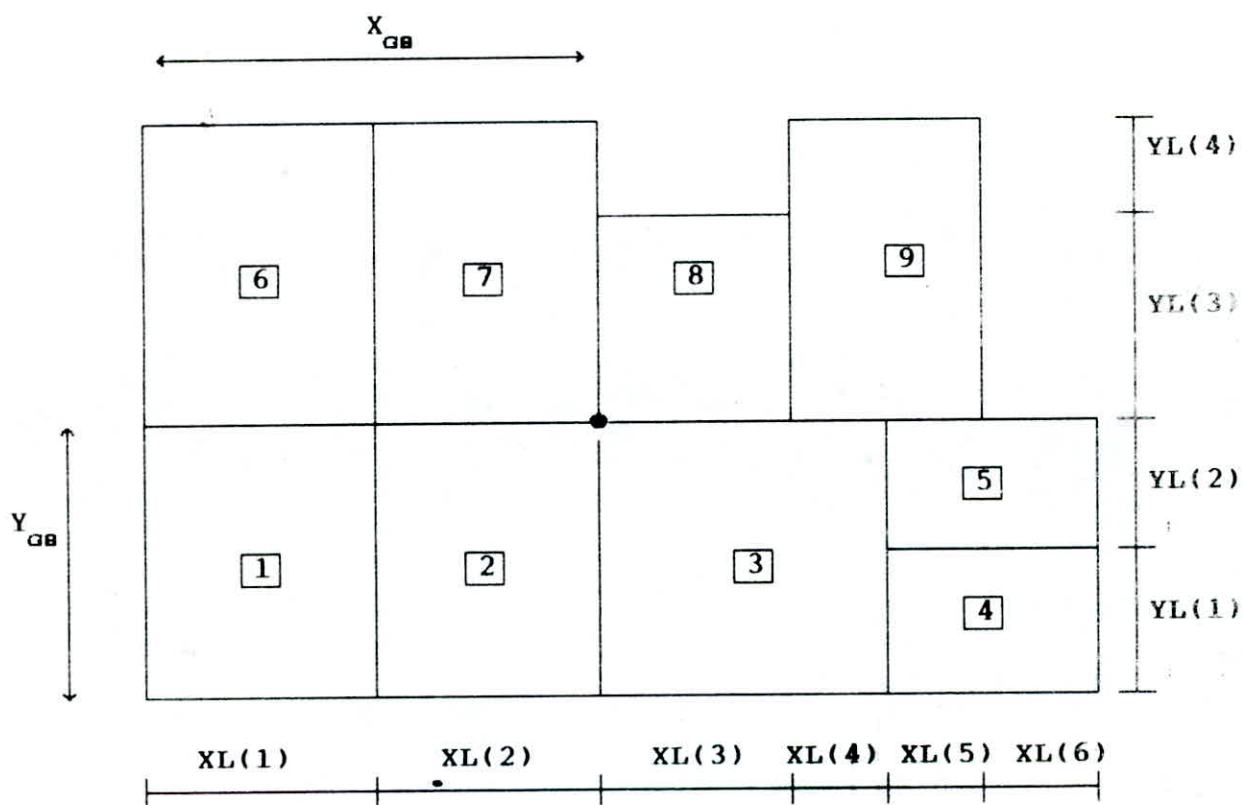
Donc poids propre différent d'un panneau à un autre .La masse d'un plancher n'est donc pas nécessairement proportionnelle à sa surface.

##### III.1.2 PRINCIPE DE LA PROGRAMMATION :

Le problème majeur réside dans la détermination de la surface

de chaque panneau dalle ; vu leur variation , nous avons élaboré un sous-programme (CENTREM) qui reconnaitra la position de chaque panneau et calculera sa surface , puis son poids propre ; le principe est le suivant :

Chaque panneau de dalle est défini par une position initiale et une position finale suivant les deux sens x-x et y-y . Dans la plupart des bâtiments , les panneaux de dalle ont une forme rectangulaire . L'illustration de la méthode de calcul sur un exemple est comme suit :



$$\begin{cases} X_{iB} = XL(1) + XL(2) \\ Y_{iB} = YL(1) + YL(2) \end{cases}$$

$$S_B = XL(3) * YL(3)$$

$$\begin{cases} X_{iB} = X_{iB} + [XL(3)/2] \\ Y_{iB} = Y_{iB} + [YL(3)/2] \end{cases}$$

Ce même calcul est répété pour chaque panneau de dalle.

### III.2 CENTRE DE TORSION :

#### III.2.1 INTRODUCTION :

Le centre de torsion d'un niveau i est défini comme étant le centre de gravité des rigidités des éléments de contreventement (c'est à dire des voiles et des portiques ).

Les propriétés du centre de torsion sont :

1- une force dont la ligne d'action passe par le centre de torsion engendre uniquement une translation des plans de contreventement dans la direction de cette force.

2- un moment dont l'axe vertical passe par le centre de torsion engendre uniquement une rotation des plans de contreventement dans le sens du moment.

#### DEFINITIONS :

-La rigidité d'un portique j à l'étage Z est définie comme étant la somme des rigidités brutes des poteaux appartenant à ce portique à l'étage considéré.



-La rigidité d'un poteau à la translation se définit par :

$$r_{ij} = a_{ij} \frac{12 EI_{ij}}{h^3}$$

où :

$E$  : module de YOUNG .

$I_{ij}$  : moment d'inertie du poteau .

$a_{ij}$  : coefficient correcteur dépendant des conditions d'encastrement du poteau.

Donc la rigidité d'un portique est égale à :

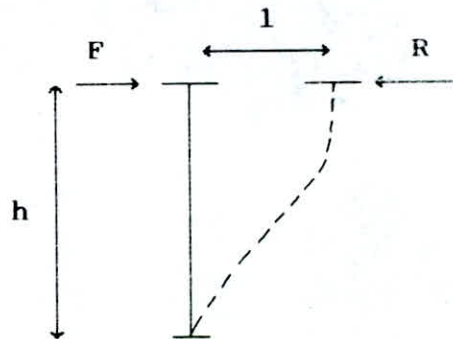
$$R_p = \sum r_{ij}$$

-La rigidité à la flexion  $R_v$  d'un voile est la force de rappel par laquelle le voile réagit quand une force extérieure  $F$  produit une translation unitaire.

$$R_{v} = \frac{12 EI_v}{h^3}$$

où :

$I_v$  : moment d'inertie du voile .



Ainsi si un même plan de contreventement est constitué de voiles et de portiques , la rigidité de ce plan est alors donnée par :

$$R = \sum_{i=1}^{\text{nb de portique}} R_{pi} + \sum_{i=1}^{\text{nb de voile}} R_{vi}$$

Le centre de torsion du plancher de l'étage i est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_T(i) = \frac{\sum_{j=1}^n RY(j) * X(j)}{\sum_{j=1}^n RY(j)} \\ Y_T(i) = \frac{\sum_{j=1}^n RX(j) * Y(j)}{\sum_{j=1}^n RX(j)} \end{array} \right.$$

où :

- n : nombre de plan de contreventement ( // x-x ou à y-y )
- RX(j) : rigidité du j<sup>lème</sup> plan de contreventement parallèle à x-x .
- RY(j) : rigidité du j<sup>lème</sup> plan de contreventement parallèle à y-y .
- Y(j) : position du j<sup>lème</sup> plan de contreventement parallèle à x-x par rapport à x-x .
- X(j) : position du j<sup>lème</sup> plan de contreventement parallèle à y-y par rapport à y-y .

REMARQUES :

- 1 Comme hypothèse de calcul , nous avons considéré les planchers comme étant indéformables , les coefficients correcteur  $a_{ij}$  défini précédemment sont dans ce cas proches de 1 .
- 2 La rigidité d'un étage dans un sens bien définie (x-x ou y-y) est effactée d'une correction et ceci en considérant la rigidité des trumeaux appartenat aux voiles perpendiculaires au sens considéré ; ainsi la rigidité de l'étage i dans le sens x-x est augmentée grâce à la prise en compte de la rigidité des trumeaux des voiles // à y-y (même raisonnement selon le sens y-y)

### III.3 calcul de l'EXENTRICITE :

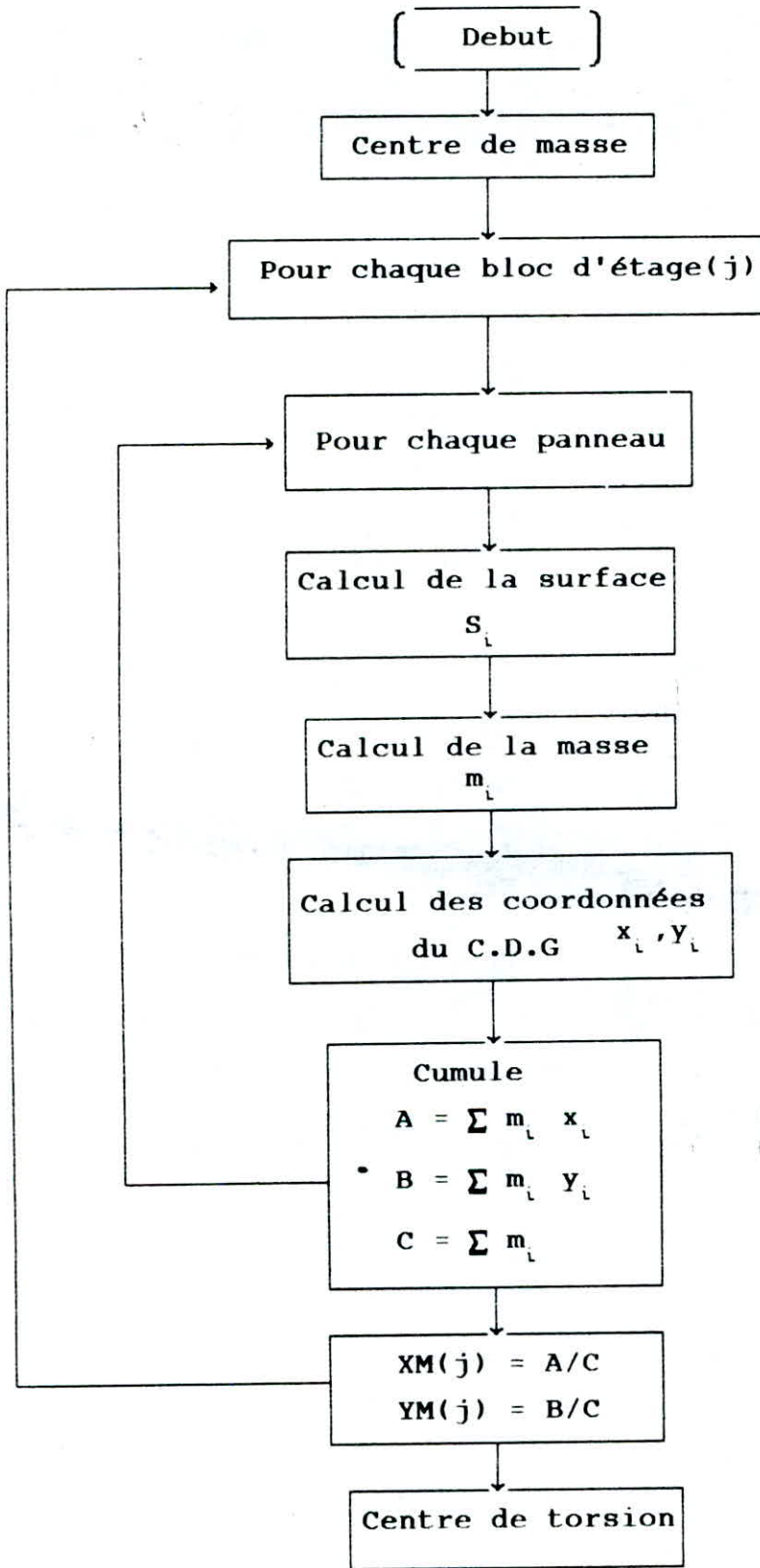
Les forces horizontales agissants au centre de masse d'un plancher provoquent une translation , cependant si le centre de masse du plancher ne coïncide pas avec le centre de torsion cette translation est accompagnée d'une rotation .

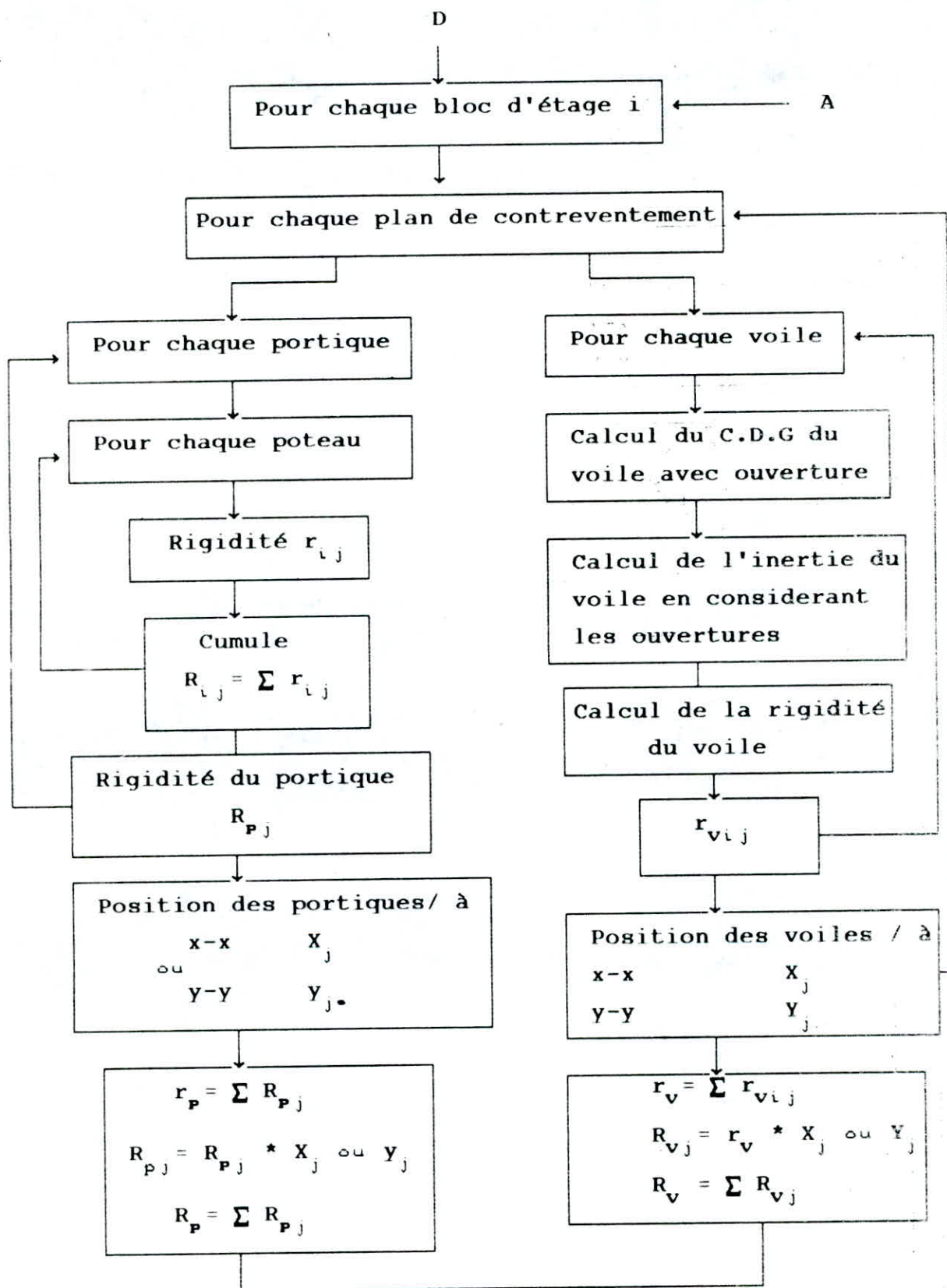
Les efforts de torsion sont induits dans la structure et dépendent de la distance (*Exentricité*) entre les centre de masse et de torsion . Le RPA 81 (*version 83*) prévoit , une exentricité "e" définie comme suit :

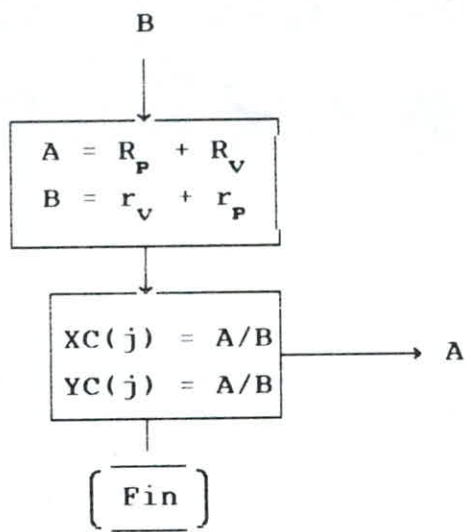
$$e = \max \left\{ \begin{array}{l} e : \text{théorique.} \\ 5 \% \text{ de la plus grande dimension du} \\ \text{bâtiment en plan .} \end{array} \right.$$

On calculera donc l'exentricité théorique (*qui défini les position relatives des centres de masse et de torsion*) qu'on comparera au 5 % de la plus grande dimension en plan DM.

III.4 ORGANIGRAMME :







***CHAPITRE IV***

***DESCENTE DE CHARGE***

## VI DESCENTE DE CHARGE :

### VI.1 DEFINITION :

On appelle "*descente de charges*" l'opération qui consiste à calculer pour tous les éléments porteurs de la construction , c'est à dire voiles , poteaux , et poutres , les charges qu'ils supportent au niveau de chaque étage .

Il faudra , en premier lieu , considerer la nature et l'importance des forces agissantes sur le bâtiment . On distingue :

#### a/ Les charges permanentes :

Cette charge est notée  $G$  , son calcul résulte d'un metré et de la connaissance des poids volumiques des matériaux et des éléments de la construction .

Ainsi par exemple les charges permanentes que l'on peut citer :

- poids de l'acrotère pour les voiles ou portiques de rives du dernier niveau .
- poids propre du voile , ou de la poutre ou du poteau .
- poids des planchers .
- poids des façades s'il s'agit de voiles ou de portiques de rives .

#### b/ Les charges d'exploitations :

Cette charge est notée  $Q$  , elle est donnée en fonction du type d'utilisation du bâtiment .

### VI.2 PRINCIPE GENERAL ADOPTE OU PRINCIPE DE PROGRAMMATION :

Dans le cas des voiles , la charge que peut reprendre ce dernier est calculée comme suit :

On calculera la surface qui lui revient de chaque panneau dalle . Chaque surface est multipliée par la charge répartie sur la



surface du panneau correspondant .

On fait le cummule de tout les panneaux qui entourent le voile ; la charge obtenue est par la suite divisée par la longueur du voile à l'étage considéré pour obtenir la charge linéaire répartie uniformément sur le voile .

Le même raisonnement est valable pour les poutres .

#### HYPOTHESE :

L'hypothèse adoptée est que la surface de chaque panneau est répartie entre les éléments qui le limite , à savoir poutres et/ou voiles ; les poutres transmettent par la suite aux poteaux ce qu'il leur revient .

Le problème majeur réside donc dans la détermination des éléments qui limitent le panneau étudié .

Pour y remédier , on fera appel à deux sous-programme "TRIP" et "TRIV" qui localisent respectivement les poutres et les voiles qui limitent le panneau considéré .

Une fois les limites d'appuis et la surface (calculer dans CENTREM) sont connues pour chaque panneau , on peut faire la répartition des charges appliquées pour chaque élément de la structure , nous distinguons deux cas possibles suivant le type de plancher .

#### VI.2.1 PLANCHERS DALLES :

Chaque panneau élémentaire transmet aux poutres et/ou voiles qui le supportent , une charge répartie déduite à partir des lignes de rupture des panneaux .

Pour un panneau rectangulaire , les lignes de rupture sont dirigées selon des angles de  $45^\circ$  ; les charges triangulaires et trapézoïdales sont par la suite uniformisées le long des poutres et/ou voiles .

Trois cas principaux sont calculés par le LOGICIEL .

VI.2.1.1 PANNEAUX TYPE 'PORTIQUES' :

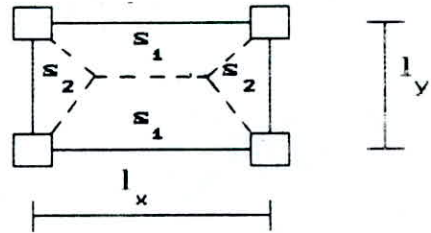
Ce sont tout les panneau qui reposent uniquement sur les poutres (et poteaux) . Le logiciel traite les sous cas suivant :

a/ Panneau qui repose sur 4 poutres et 4 poteaux :

Selon que  $l_x$  ou  $l_y$  soit le plus grand on a :

$$S_1 = \frac{l_x \cdot l_y}{2} - \frac{l_y^2}{4}$$

$$S_2 = \frac{l_y^2}{4}$$



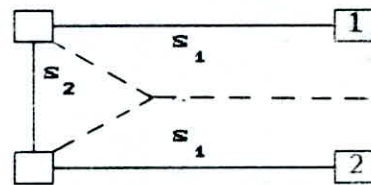
b/ Panneau qui repose sur 3 poutres :

[1] et/ou [2] peuvent représenter ou non des poteaux .

CAS A :

$$S_1 = \frac{l_y}{2} \left( l_x - \frac{l_y}{4} \right)$$

$$S_2 = \frac{l_y^2}{4}$$

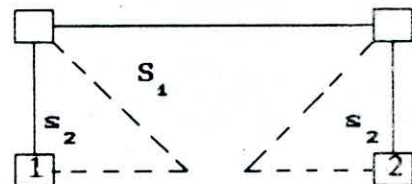


CAS A

CAS B :

$$S_1 = l_y \left( l_x - l_y \right)$$

$$S_2 = \frac{l_y^2}{2}$$

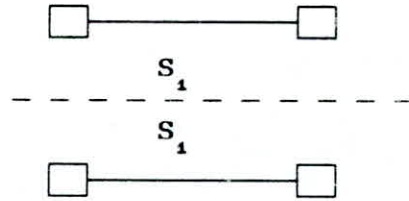


CAS B

c/ Panneau qui repose sur 2 poutres :

1-Les Poutres sont parallèles :

$$S_1 = \frac{l_x \cdot l_y}{2}$$

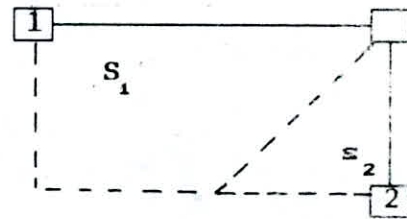


2-Les poutres sont perpendiculaires :

1 et 2 peuvent représenter des poteaux ou non .

$$S_1 = l_y \left( l_x - \frac{l_y}{2} \right)$$

$$S_2 = \frac{l_y^2}{2}$$



#### VI.2.1.2 PANNEAUX DU TYPE 'VOILE' :

On distingue six (6) sous cas .

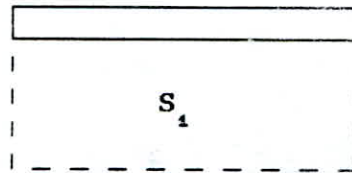
Les cinq premiers sont analogues à ceux cités si-dessus , et ceci en remplaçant les poutres par des voiles .

Le sixieme sous cas est le suivant :

a/ Panneaux encastrés à un voile :

(Exemple de balcon)

$$S_1 = l_x \cdot l_y$$



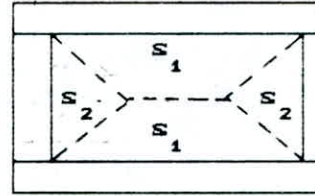
#### IV.2.1.3 PANNEAUX TYPE 'MIXTES' :

a/ Panneaux qui repose sur 4 côtés :

1- Cas de 3 voiles et 1 poutres :

$S_1$  et  $S_2$  sont définis comme en (IV.2.1.1 a) .

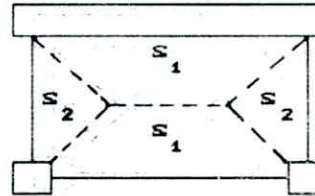
La poutre peut-être selon la grande portée .



2- Cas de 3 poutres et 1 voile :

$S_1$  et  $S_2$  sont définis comme précédemment.

Le voile peut-être selon la grande portée .

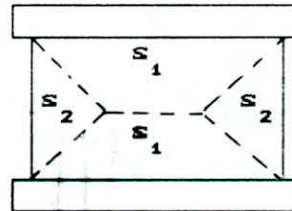


3/ cas de 2 voiles et 2 poutres :

3.1- Cas de 2 voiles parallèles :

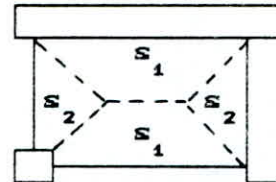
$S_1$  et  $S_2$  sont définis comme précédemment .

Les deux poutres peuvent se trouver selon la grande dimension .



3.2- cas de 2 voiles perpendiculaires :

$S_1$  et  $S_2$  sont définis comme précédemment .

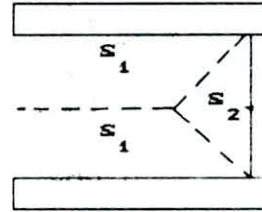


b/ Panneaux qui reposent sur 3 côtés :

1- Cas de 2 voiles et 1 poutre :

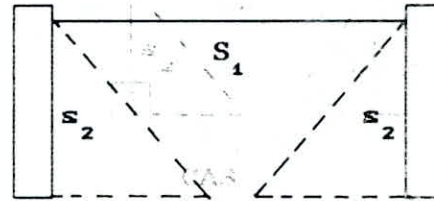
1-1 Les 2 voiles sont parallèles :

$S_1$  et  $S_2$  sont définis de la même manière que  
(IV.2.1.1 b.CAS A)



CAS A

$S_1$  et  $S_2$  sont définis de la même manière que  
(IV.2.1.1 b.CAS B)

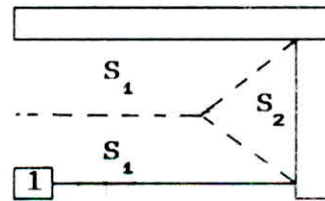


CAS B

1-2 Les 2 voiles sont perpendiculaires :

$S_1$  et  $S_2$  sont définis de la même manière que  
(IV.2.1.1 b.CAS A)

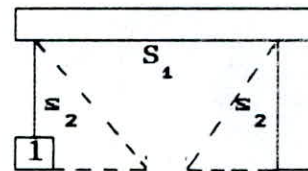
1 peut représenter un poteau



CAS A

$S_1$  et  $S_2$  sont définis de la même manière que  
(IV.2.1.1 b.CAS A)

1 peut représenter un poteau



CAS B

2- Cas de 2 poutres et 1 voile :

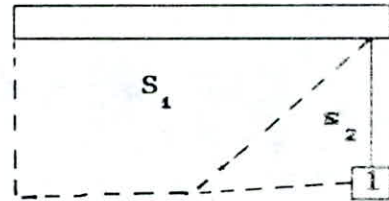
De la même manière que (IV.2.1.3 B.1-) , les poutres peuvent être soit parallèles , soit perpendiculaires , le raisonnement reste donc analogue à celui fait précédemment , en remplaçant les voiles par les poutres et la poutre par la voile .

c/ Panneaux qui reposent sur 2 côtés :

1- Le voile et la poutre sont perpendiculaires :

$S_1$  et  $S_2$  sont définis de la même manière que (IV.2.1.3 C.2-)

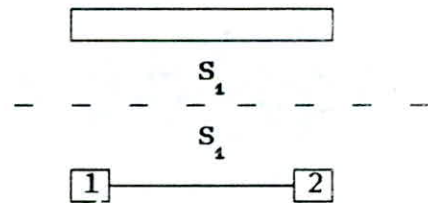
1 peut représenter un poteau  
La poutre peut se trouver selon la grande dimension .



2- Le voile et la poutre sont parallèles :

$S_1$  est analogue à celle définie en (IV.2.1.1 C.1-)

1 et 2 peuvent représenter des poteaux .



REMARQUE :

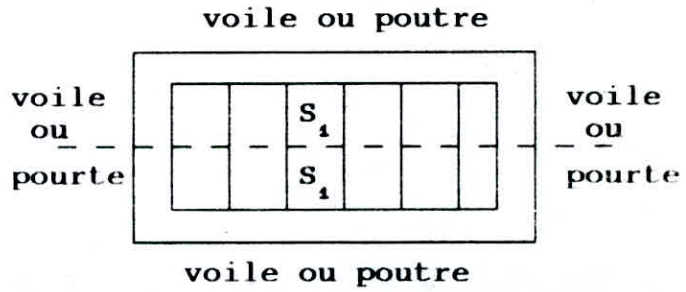
Dans tout les cas cités ci-dessus , on peut avoir :

- 1-  $l_x < l_y$  : dans ce cas il suffira de remplacer  $l_x$  par  $l_y$  dans les formules précédentes donnant  $S_1$  et  $S_2$  .
- 2-  $l_x = l_y$  : les formules précédentes restent valables .

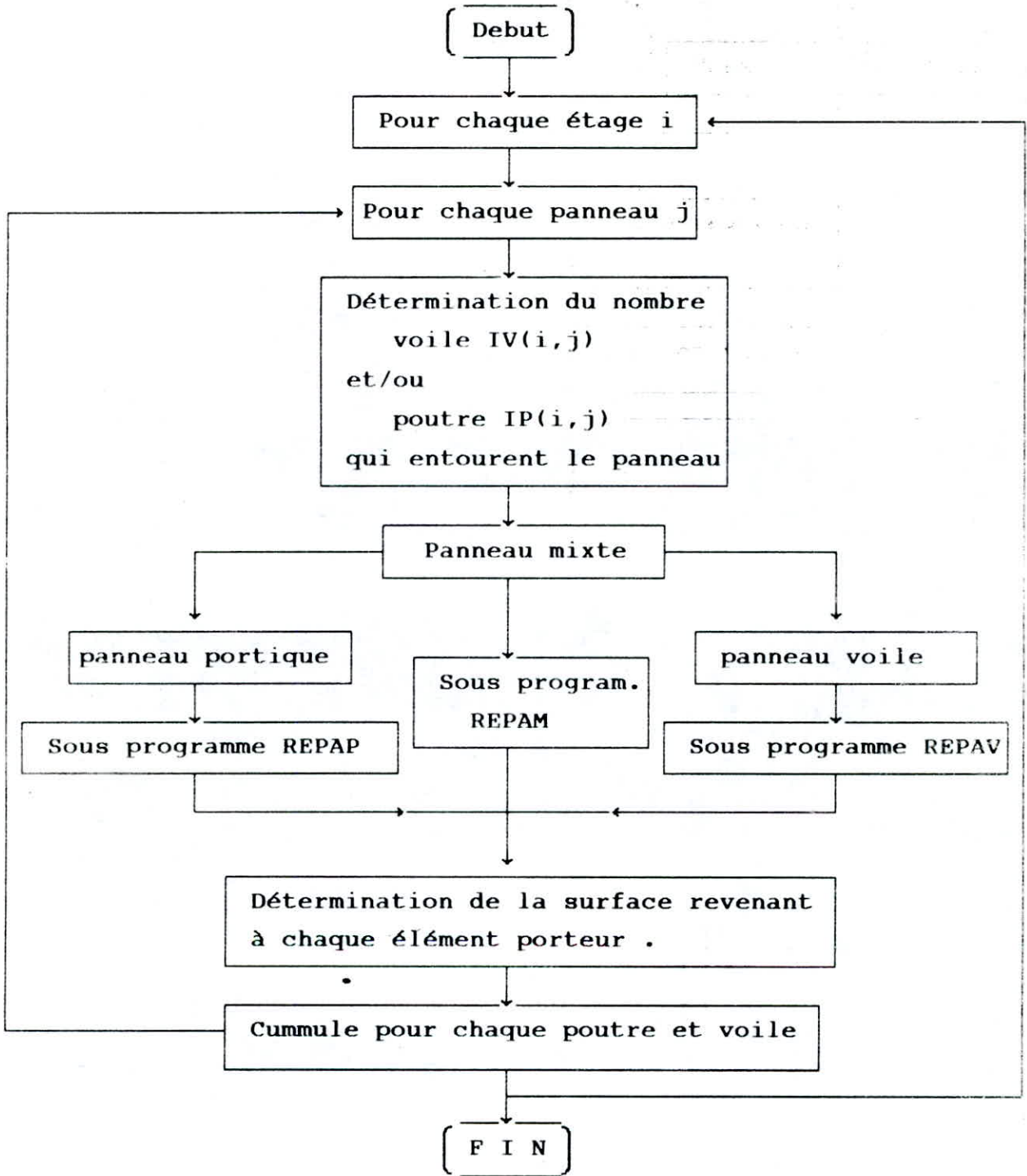
### VI.2.2 PLANCHERS A CORPS-CREUX :

Le sens porteur correspond à la grande dimension du panneau . Celui-ci est donné par l'utilisateur . Le panneau à corps creux attribué aux éléments porteurs (voiles ou poutres) la moitié de sa surface ; les éléments perpendiculaires au sens porteur ne reprennent rien .

$$S_1 = \frac{l_x \cdot l_y}{2}$$



VI.3 ORGANIGRAMME :





**CHAPITRE V**

***REPARTITION DES FORCES SISMIQUES  
SELON LES DIFFERENTS PLANS DE  
CONTREVENTEMENT DE LA STRUCTURE***

V REPARTITION DES FORCES SISMIQUES SELON LES DIFFERENTS PLANS  
DE CONTREVENTEMENT DE LA STRUCTURE

V.1 DONNEES :

Nous admettrons lors de notre étude , l'inderformabilité des planchers supposés infiniment rigides par rapport au plan de contreventement , donc l'effort repris par chaque plan de contreventement est proportionnel à sa rigidité.

Soient :

$F_x(Z)$  : force horizontale appliquée à l'étage Z suivant la direction x-x .

$F_y(Z)$  : force horizontale appliquée à l'étage Z suivant la direction y-y .

La force appliquée dans chaque plan de contreventement j à l'étage Z suivant le sens x-x est :

$$F_x^t(Z, j) = \frac{F_x(Z) \cdot RX(Z, j)}{\sum_{j=1}^n RX(Z, j)}$$

où :

n : nombre de plan de contreventement parallèle à x-x ou y-y .

$RX(Z, j)$  : rigidité dans le sens x-x du j<sup>ème</sup> plan de contreventement à l'étage Z parallèle à x-x .

$$RX(Z, j) = \sum_{i=1}^n R_{p_x} + \sum_{i=1}^n R_{v_x}$$

terme relatif aux portiques composants le plan j	+	terme relatif aux voiles composants le plan j
---	---	--

Lorsque la résultante des forces sismiques à l'étage considéré ne passe pas par le centre de torsion (Dissymétrie de charges appliquées , ou de rigidité) , la déformation due à un couple de torsion entre les planchers , étant une rotation autour du centre

de torsion , les déplacements subis par chaque plan de contreventement seront proportionnels à leurs distances au centre de torsion .

On définit alors  $RT(Z)$  : la rigidité à la torsion du niveau considéré.

$$RT(Z) = \sum_{i=1}^n RY(Z,i,j) \cdot X_i^2 + \sum_{i=1}^n RX(Z,i,j) \cdot Y_i^2$$

avec :

$RX(Z,j)$  : rigidité du  $j^{i\text{ème}}$  plan de contreventement parallèle à  $x-x$  .

$RY(Z,j)$  : rigidité du  $i^{i\text{ème}}$  plan de contreventement parallèle à  $y-y$  .

$X_i$  : distance du  $i^{i\text{ème}}$  plan de contreventement par rapport à l'axe  $Y_T$  .

$Y_i$  : distance du  $i^{i\text{ème}}$  plan de contreventement par rapport à l'axe  $X_T$  .

$(OX_T Y_T)$  : système d'axe passant par le centre de torsion .

Les forces de rotations repris par chaque plan de contreventement sont :

$$F_x^r(Z,j) = \frac{F_x(Z) \cdot e_y \cdot RX(Z,j) \cdot Y_i}{RT(Z)}$$

Donc la résultante est la somme des forces dues à la translation et à la rotation :

$$F_x(Z,j) = F_x^l(Z,j) + F_x^r(Z,j)$$

## V.2 REPARTION DES FORCES SISMIQUES SELON LES DIFFERENTS ELEMENTS

(voile ou portique) COMPOSANT UN PLAN DE CONTREVENTEMENT :

La force sismique revenant à un plan de contreventement est

distribuée aux différents éléments composants ce plan proportionnellement à leur rigidité .

Ainsi on aura :

$$F_x(Z, j, i) = F_x(Z, j) \cdot \frac{RX(Z, j, i)}{RX(Z, j)}$$

avec :

$F_x(Z, j)$  : force sismique revenant au  $j^{\text{ème}}$  plan de contreventement à l'étage Z .

$F_x(Z, j, i)$  : force sismique revenant au  $i^{\text{ème}}$  élément (voile ou portique) se trouvant dans le  $j^{\text{ème}}$  plan de contreventement à l'étage Z .

$RX(Z, j, i)$  : rigidité du  $i^{\text{ème}}$  élément (voile ou portique) se trouvant dans le  $j^{\text{ème}}$  plan de contreventement à l'étage Z .

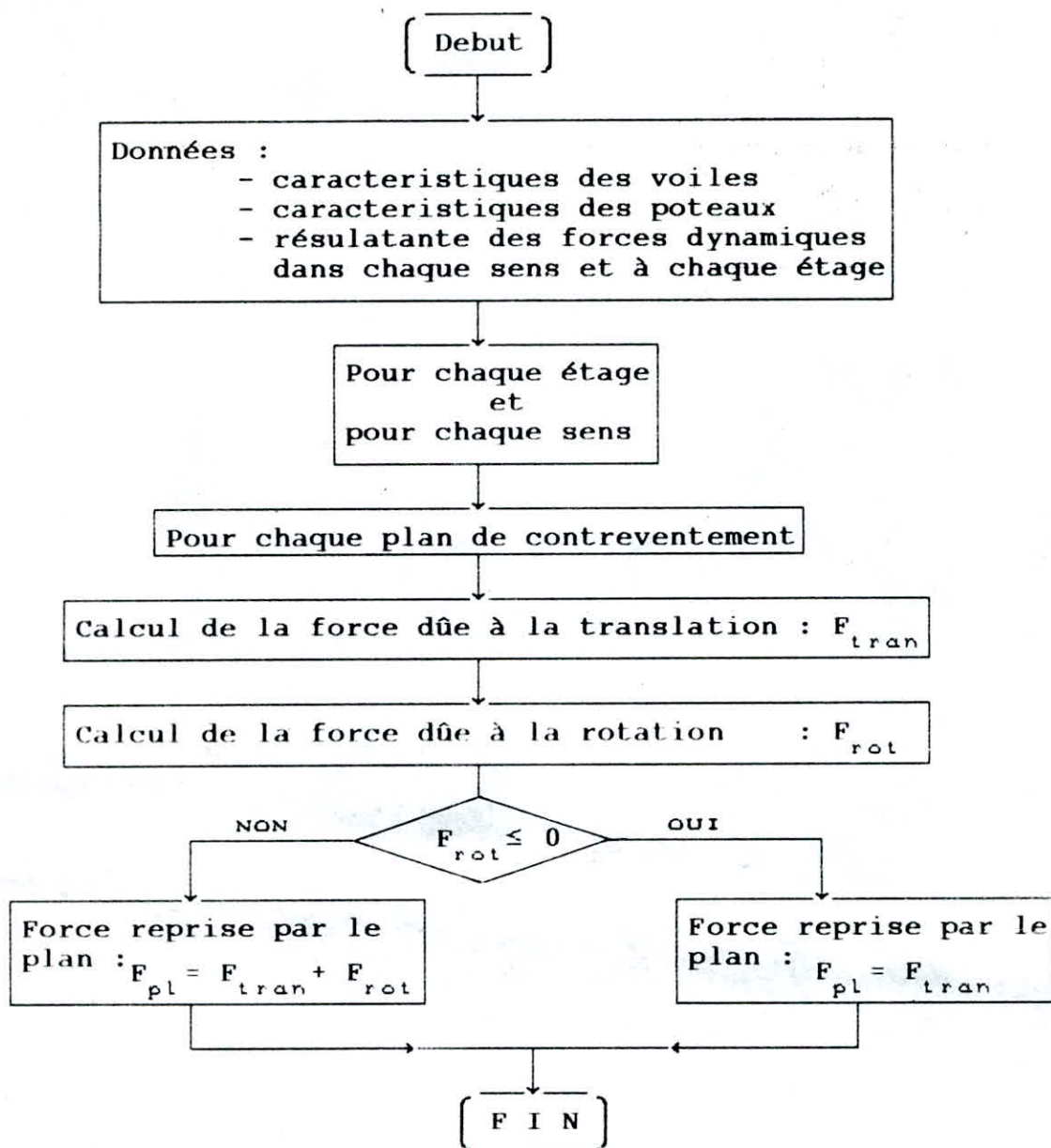
$RX(Z, j)$  : rigidité du  $j^{\text{ème}}$  plan de contreventement à l'étage Z .

REMARQUES :

① Le même raisonnement est valable selon y-y .

② Si la force de rotation est négative , elle est prise égale à zero.

V.3 ORGANIGRAMME :



## VI- ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE

### VI.1 INTRODUCTION :

Les tremblements de terres ont représenté depuis toujours un des plus grave désastre pour l'humanité. Leur apparition brutale et imprevue, la violence des forces mises en jeu, l'énormite des pertes humaines et matérielles ont marqué la mémoire des générations.

De nos jours, avec l'accélération du développement industriel, la réalisation de construction audacieuse, telles que les barrages, immeubles de grande hauteur abritant des centaines de personnes, etc., la concentration d'une grand partie de la population dans les agglomérations urbaines immenses, la garantie antisismique des constructions s'impose comme une absolue nécessité du point de vue social et économique.

Pour les structures à comportement élastique linéaires, deux méthodes de calcul sont utilisables, basées sur la décomposition modale. La première méthode étant exacte consiste en l'étude des efforts dans la structures en fonction du temps; elle nécessite la donnée d'un accélérogramme et impose, en pratique l'usage de l'ordinateur. La deuxième méthode (méthode pseudo-dynamique) consiste en la recherche du maximum de réponse sur chacun des modes propres dont on en déduit la valeur maximum probable des efforts, elle nécessite la connaissance du spectre de réponse de la secousse sismique.

Dans le cas de notre projet, on utilisera la deuxième méthode pour des forces sismiques horizontales, une modélisation de la structure permettra la détermination de ces forces dans chacun de ses modes propres de vibration. Une combinaison de ces forces modales donnerait alors les forces sismiques résultantes agissant sur un bâtiment selon les différents niveaux. Pour cela, on a utilisé le spectre de réponse élastique réglementaire du R P A 81 (version 83) donné par le produit  $(A \cdot D)$  et qui représente le spectre des accélérations.

**CHAPITRE VI**

***ETUDE PSEUDO-DYNAMIQUE***

## VI.2 LE MODELE MATHEMATIQUE :

La détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement possible de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à des chargements dynamiques en particulier le séisme. Si le calcul des masses et de leurs positions peut-être effectué avec une bonne précision, par contre, celui des raideurs est souvent très approché. En effet, dans le cas des constructions en béton armé les inerties des sections sont modifiées par la fissuration et il existe une imprécision sur la valeur des modules et des largeurs des tables de compression. Par ailleurs quelque soit le type de structure, il faut tenir compte de l'imprécision souvent très importante des données relatives au sol de fondation. En admettant les hypothèses suivantes :

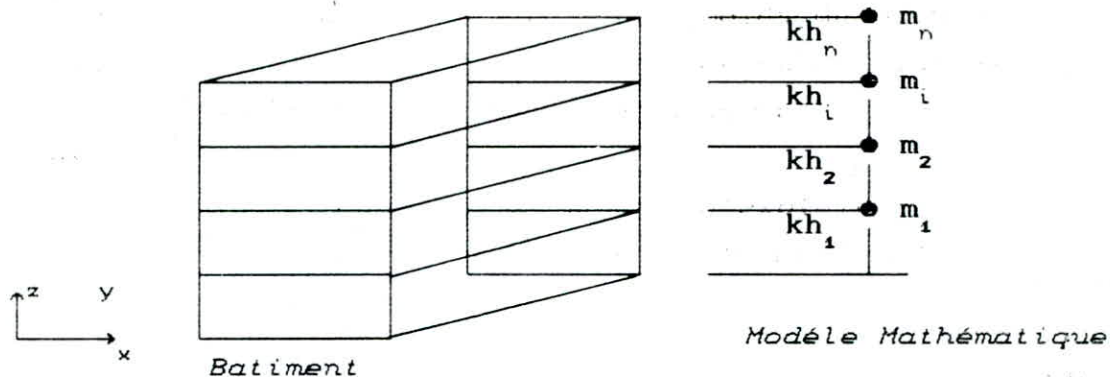
a/ les masses du bâtiment le long de sa hauteur sont supposées concentrées aux niveaux de ses différents planchers.

b/ ces derniers sont supposés infiniment rigides dans leur plan horizontal.

c/ les déformations axiales des poteaux sous l'effet d'un déplacement latéral du bâtiment par rapport à sa base sont négligées.

Pour l'étude des efforts du séisme horizontal, on assimilera le bâtiment à une console verticale à masses concentrées par des colonnes de masses négligeables et de rigidités latérales " $K_E$ " (i représente la colonne considérée), en prenant en compte uniquement les déplacements horizontaux.





### VI.3 CARACTERISTIQUES DU MODELE :

#### VI.3.1 MASSES CONCENTREES :

La manière la plus simple de représenter les caractéristiques massiques consiste à supposer toute la masse  $M_i$  concentrées aux points de définition des déplacements en translation, du niveau du modèle. Elle sera égale à la somme :

- des charges permanentes : charges et poids du plancher  $i$ , de ses poutres, de la moitié des poteaux et/ou des voiles et celles des murs de façades qui sont au dessus et au dessous de ce dernier.
- et à 50% de la valeur des surcharges d'exploitations (plancher à forte surcharge) conformément au RPA 81 (version 83) (article 3.3 .1.5)

#### VI.3.1.1 MATRICE MASSE :

Pour un système dont on ne considère que les degrés de liberté de translation (la rotation et le déplacement vertical sont supposés négligeable pour chaque masse du modèle), La matrice masse est diagonale ; le nombre de termes diagonaux de cette matrice est égale au nombre de degrés de liberté. Les termes extra-diagonaux sont nuls car une accélération appliquée à un noeud où est concentré une masse ne produit de force d'inertie qu'en ce même

point. Lorsque que toutes les masses sont accélérées, les forces d'inerties ont pour valeur :

$$F_1 = m_1 \ddot{U}_1$$

$$F_2 = m_2 \ddot{U}_2$$

⋮

$$F_j = m_j \ddot{U}_j$$

⋮

$$F_n = m_n \ddot{U}_n$$

où  $m_j$  : la masse relative au degré de liberté  $j$  .

$\ddot{U}_j$  : l'accélération dans la direction du degré de liberté  $j$  .

Les relations précédentes s'écrivent :

$$F = M \ddot{U}$$

$\ddot{U}$  représente le vecteur des accélérations :

$$\ddot{U} = \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_j \\ \ddot{U}_n \end{bmatrix}$$

$M$  est la matrice des masses, diagonale, et de dimension  $n \times n$  .

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & m_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & m_j & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

Sym.

### VI.3.2 RIGIDITE LATERALE $KH_L$ :

Elles est égale à la rigidité de la colonne  $i$  correspondante au niveau  $i$  parallèlement à la direction de l'effort sismique .

- Les poteaux sont supposés encastres aux planchers ; la rigidité d'un poteau bi-encasté est égale à :

$$\frac{12EI_p}{h_l^3}$$

ou  $I_p$  : inertie du poteau dans la direction de l'effort sismique.

- Le voile étant supposé comme une console verticale encastree au niveau du plancher , sa rigidité est égale à :

$$\frac{12EI_v}{h_l^3}$$

$h_l$  : hauteur du poteau .

$E$  : module de YOUNG .

En raison de l'hypothese sur l'indéformabilité des planchers , la rigidité latérale  $KH_L$  de la colonne  $i$  , peut être considerer comme la somme des rigidités des voiles et des poteaux du niveau  $i$  dans le sens de l'effort sismique .

$$KH_L = \sum_{k=1}^m \frac{12EI_{p_k}}{h_l^3} + \sum_{k=1}^n \frac{12EI_{v_k}}{h_l^3}$$

terme relatif      terme relatif  
aux poteaux      aux voiles

$m$  : nombre de poteau de l'étage  $i$  .

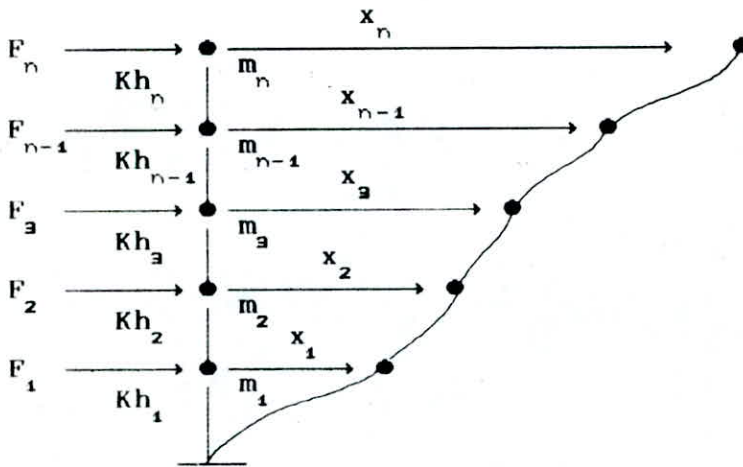
$n$  : nombre de voile de l'étage  $i$  .

$I_{p_k}$  : inertie du poteau  $k$  à l'étage  $i$  dans le sens du séisme .

$I_{v_k}$  : inertie du voile  $k$  à l'étage  $i$  dans le sens du séisme .

VI.3.2.1 MATRICE DE RIGIDITE LATERALE :

La matrice de rigidité  $[KH]$  correspondant aux degrés de liberté horizontaux du modèle sera obtenue en considérant l'équilibre de ce dernier vis à vis des déplacements horizontaux des masses par rapport à la base.



La force élastique (de rappel)  $F_i$  appliquées à la masse  $i$  est :

$$F_i = KH_i (X_i - X_{i-1}) - KH_{i+1} (X_{i+1} - X_i)$$

par conséquent :

$$F_1 = KH_1 (X_1 - X_0) - KH_2 (X_2 - X_1) \quad \text{et} \quad X_0 = 0$$

$$F_1 = (KH_1 + KH_2) X_1 - KH_2 X_2$$

$$F_2 = -KH_2 X_1 + (KH_2 + KH_3) X_2 - KH_3 X_3$$

$$F_3 = -KH_3 X_2 + (KH_3 + KH_4) X_3 - KH_4 X_4$$

$$F_n = -KH_n X_{n-1} + KH_n X_n$$

ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KH_1 + KH_2 & -KH_2 & 0 & & 0 \\ -KH_2 & KH_2 + KH_3 & KH_3 & & 0 \\ 0 & -KH_3 & KH_3 + KH_4 & -KH_4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & -KH_{n-1} & KH_n + KH_{n-1} & -KH_n \\ 0 & & & -KH_n & KH_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$[F] = [KH] [U]$$

REMARQUE :

La matrice [KH] est une matrice bande (tridiagonale) symétrique .

### V.3.3 MATRICE D'AMORTISSEMENT :

Pour un oscillateur simple, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse relative  $\dot{U}$  :

$$f = - C \dot{U}$$

Pour un oscillateur multiple, cette relation est généralisée sous la forme :

$$[F] = - [C] [\dot{U}]$$

ou [F] représente le vecteur force d'amortissement, [U] le vecteur des vitesses relatives :  $[U] = [U_1, U_2, \dots, U_n]$  et [C] la matrice d'amortissement de dimension  $n \times n$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{1j} & C_{1n} \\ C_{i1} & C_{ij} & C_{in} \\ C_{n1} & C_{nj} & C_{nn} \end{bmatrix}$$

#### VI.4 EQUATION DU MOUVEMENT :

Le modèle en console est mis en mouvement par suite du déplacement de sa base selon une loi sinusoidale.

Le mouvement  $V$  de la masse  $M_k$  concentrée au niveau  $k$  est la somme du mouvement d'entraînement de la base  $V_{\square}$  et du mouvement relatif  $U$  de la masse  $M_k$  du aux déformations élastiques de la structure.

Le mouvement du système peut-être traité comme les vibrations forcées d'un système à  $n$  degrés de liberté .

Les forces éxitatrices  $f(t) = M_k * V_{\square}$  appliquées à chacune des masses  $M_k$  représentent les forces d'inerties engendrées par le mouvement d'entraînement de la base.

Pour une déformation relative  $[U]$  donnée, les masses sont soumises aux forces suivantes :

- Les forces élastiques de rappel :

$$[Fr] = -[K][U]$$

- Les forces d'amortissement :  $[Fa] = -[C][\dot{U}]$

- Les forces éxterieures :  $[F(t)]$

Ainsi l'équation du mouvement de la structure s'écrit :

$$[Fr] + [Fa] + [F(t)] = [M][\ddot{U}]$$

Soit :

$$[M][\ddot{U}] + [C][\dot{U}] + [K][U] = [f(t)] \quad (I)$$

Pratiquement pour les valeurs usuelles du coefficient d'amortissement, la pseudo-période d'un oscillateur simple amorti diffère très peu du même oscillateur supposé non amorti.

De même, l'étude des oscillations libres de l'oscillateur multiple supposé non amorti, donne une bonne approximation du mouvement réel et fournit les éléments nécessaires pour le calcul des oscillations forcées.

L'équation du mouvement en l'absence d'amortissement et de forces extérieures s'écrit :

$$[M]\ddot{U} + [K]U = 0 \quad (II)$$

La solution particulière est donnée par l'expression de  $U$  qui s'écrit sous la forme :

$$U = a [\phi] \sin(\omega t + \theta) \quad (III)$$

où  $a$  et  $\theta$  sont des constantes et  $[\phi]$  le vecteur des déplacements  $\phi_j$  des masses concentrées.

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}$$

En remplaçant l'expression (III) dans l'équation (II) on aura l'équation suivante :

$$([K] - [M]\omega^2)[\phi] = 0. \quad (IV)$$

Cette expression représente un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues qui sont les composantes du vecteur  $[\phi]$ . Une solution différente de zéro n'est possible que si le déterminant de la matrice  $([K] - [M]\omega^2)$  est nul :

$$\det([K] - [M]\omega^2) = 0.$$

Si on développe ce déterminant, on obtient une équation de degrés  $n$  en  $\omega^2$ . La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots, \omega_n$  relatives aux modes de vibrations

possibles.

$$[\phi^j] = \begin{bmatrix} \phi_1^j \\ \phi_2^j \\ \vdots \\ \phi_k^j \\ \vdots \\ \phi_j^j \\ \vdots \\ \phi_k^j \end{bmatrix}$$

$[\phi^j]$  étant le vecteur de déformation qui correspond aux modes de vibration  $j$  de la pulsation  $\omega_j$  est donné par la relation :

$$([K] - [M]\omega_j^2)[\phi^j] = 0.$$

Ainsi la résolution de l'équation (IV) se ramène à un problème de calcul des valeurs et vecteurs propres .

#### VI.5 CALCUL DES CARACTERISTIQUES PROPRES DE VIBRATION :

Le calcul direct des caractéristiques propres de vibration d'une structure par les méthodes mathématiques traditionnelles est très laborieux , c'est ainsi que des méthodes approchées ont été élaborées . Parmi ces méthodes on cite :

##### 1. METHODE DE RAYLEIGH :

Cette méthode ramène l'étude de la structure réelle à une structure ne possédant qu'un seul degré de liberté. Elle est essentiellement utilisée à trouver la première fréquence propre . Cette méthode repose sur le principe de la conservation de l'énergie : l'énergie totale d'un système non amorti et libre de ce mouvoir est constante .

##### 2. METHODE DE STODOLA-VIANELLO :

La méthode STODOLA consiste à faire une hypothèse initiale sur l'allure du mode; cette hypothèse est ensuite améliorée par itération successives jusqu'à ce qu'une approximation satisfaisante du mode soit obtenue. Cette méthode est fondée sur



l'équation suivante :

$$\frac{1}{\omega^2} \{ VI \} = [S] [M] \{ VI \}$$

{VI} : la déformée.

[S] : la matrice de souplesse .

[M] : la matrice masse .

$\omega$  : la pulsation .

### 3. METHODE DE HÖLZER :

Cette méthode fait une hypothèse sur la fréquence de vibration, cette fréquence sera ajustée de manière itérative jusqu'à satisfaction des conditions aux limites; la forme du mode se trouve déterminée lors du processus de satisfaction de ces conditions aux limites. Cette méthode est fondée sur l'équation récurrente suivante :

$$X(k-1) = X(k) \frac{\omega^2}{R(k)} \sum m(k) X(k)$$

X(k) : déplacement relatif du niveau k .

m(k) : masse concentrée au niveau k .

R(k) : rigidité du niveau .

### 4. METHODE DE JACOBI :

La méthode de JACOBI permet de calculer les n valeurs et vecteurs propres d'un système de dimensions limitées ( $n < 100$ ) dont les matrices sont symétriques et définies positives. Elle consiste à transformer les matrices [M] et [K] en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives.

### 5. METHODE DE RITZ :

La méthode de RITZ permet de transformer un problème de grande dimension en un problème de dimension plus réduite. On aura ainsi un système réduit qui sera calculé par la méthode de JACOBI. Soit le problème de valeur propre suivant, de dimension  $n$  :

$$([K]-[M])\{X\} = 0$$

Pour réduire ce problème à une dimension  $p < n$ , on contraint chacun de ses vecteurs propres à s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de  $p$  vecteurs indépendants  $q_i$ .

$$\{X\} = [ \{q_1\}, \{q_2\}, \dots, \{q_p\} ] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = [Q]\{a\}$$

(n, 1)    (n, p)(p, 1)

Le vecteur  $a$  est déterminé par l'expression suivante, définissant un problème de vecteur propre de dimension  $p$  :

$$([\bar{K}] - R[\bar{M}])\{a\} = 0.$$

$$[\bar{K}] = [Q]^T [K] [Q] \quad , \quad [\bar{M}] = [Q]^T [M] [Q]$$

#### VI.5.1 CHOIX DE LA METHODE DE CALCUL :

Le choix de la méthode est fait en fonction de la technique dont on dispose, de l'importance et du type de la structure analysée, de la précision désirée et du nombre de modes propres qui doivent être déterminés ; ainsi dans le cadre de notre projet on choisit celle de JACOBI.

#### VI.5.2 EXPOSE DE LA METHODE DE JACOBI :

Comme il a été dit précédemment, la méthode de JACOBI consiste à transformer les matrices  $[K]$  et  $[M]$  en des matrices diagonales, et cela en utilisant des transformations successives :

$$\begin{aligned} [K^1] &= [K] & [M^1] &= [M] \\ [K^2] &= [Q^1]^T [K^1] [Q^1] & [M^2] &= [Q^1]^T [M^1] [Q^1] \end{aligned}$$

$$[K^{k+1}] = [Q^k]^T [K^k] [Q^k]$$

$$[M^{k+1}] = [Q^k]^T [M^k] [Q^k]$$

Les matrices  $[K^{k+1}]$  et  $[M^{k+1}]$  tendent vers des matrices diagonales  $[K^d]$  et  $[M^d]$  lorsque  $k$  tend vers l'infini .

Les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$[\omega^2] = [K^d] [M^d]^{-1} \quad \text{ou} \quad \omega^2 = K_{ii}^d / M_{ii}^d$$

$$[\phi] = [Q^1] [Q^2] \dots [Q^k] [Q^{k+1}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \frac{1}{(M_{ii}^d)^{1/2}} \end{matrix}$$

Matrice de transformation :

Chaque matrice  $[Q^k]$  est choisie de manière à ce qu'un terme  $(i, j)$  non diagonal et non nul de  $[K^k]$  et  $[M^k]$  soit nul après la transformation numéro  $(k)$ . La matrice  $[Q]$  à la structure suivante

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & a & \dots & \\ & & \vdots & & & \vdots & & \\ & & b & \dots & \dots & 1 & \dots & \\ & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & & \vdots & & & \vdots & & 1 \\ & & \vdots & & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \dots \text{ ligne } i \\ \dots \text{ ligne } j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

colonne i                  colonne j

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont calculés en écrivant que  $K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$ , soit en supprimant par simplicité l'indice  $k+1$  sur les termes de chaque matrice :

$$\begin{aligned} a \cdot K_{ii} + (1 + a \cdot b) \cdot K_{ij} + b \cdot K_{jj} &= 0 \\ a \cdot M_{ii} + (1 + a \cdot b) \cdot M_{ij} + b \cdot M_{jj} &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier ou :

$$(K_{ii} / M_{ii}) = (K_{jj} / M_{jj}) = (K_{ij} / M_{ij})$$

Les valeurs de a et b sont :

$$a = 0 \quad , \quad b = - K_{ij} / K_{ij}$$

Dans le cas général notons :

$$\begin{aligned} C_1 &= K_{ii} \cdot M_{ij} - M_{ii} \cdot K_{ij} \\ C_2 &= K_{jj} \cdot M_{ij} - M_{jj} \cdot K_{ij} \\ C_3 &= K_{ii} \cdot M_{jj} - M_{ii} \cdot K_{jj} \\ d &= C_3 / 2 + \text{Signe}(C_3) \sqrt{(C_3 / 2)^2 + C_1 C_2} \end{aligned}$$

Alors :

$$a = C_2 / d \quad , \quad b = - C_1 / d .$$

Lorsque [M] est définie positive, le coefficient  $(C_3 / 2)^2 + C_1 C_2$  est positif .

ALGORITHME DE LA METHODE DE JACOBI

Définir la précision de convergence requise  $\varepsilon$  .

Pour chaque cycle s

Définir la tolérance dynamique  $\varepsilon_a = 10^{-2a}$

Pour chaque ligne  $i = 1, 2, \dots, n$

Pour chaque colonne  $j = i+1, \dots, n$

Calculer les facteurs de couplage :

$$f_k = \frac{|K_{ij}|}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}} \quad f_m = \frac{|M_{ij}|}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}}$$

Si  $f_k$  ou  $f_m > \varepsilon_a$

-Calculer a et b par :

-Transformer les matrices [K] et [M]

colonne i = colonne i + b.colonne j

colonne j = a.colonne i + colonne j

Puis :

ligne i = ligne i + b.ligne j

ligne j = a.ligne i + ligne j

-Modifier les vecteurs propres [X]

colonne i = colonne i + b.colonne j

colonne j = a.colonne i + colonne j

Calcul des valeurs propres

$$\lambda_i = \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad \text{et} \quad F_\lambda = \frac{|\lambda_i^a - \lambda_i^{a-1}|}{|\lambda_i^{a-1}|}$$

Calculer les facteurs de couplage

$$F_k = \text{Max}_{i,j} \frac{|K_{ij}|}{(K_{ii} \cdot K_{jj})^{1/2}} \quad , \quad F_M = \text{Max}_{i,j} \frac{|M_{ij}|}{(M_{ii} \cdot M_{jj})^{1/2}}$$

Test de convergence :  $F_k < \varepsilon$  et  $F_M < \varepsilon$  et  $F_\lambda < \varepsilon$

## VI.6 CALCUL DES FORCES SISMIQUES :

Le calcul des batiments à l'égard de leur sécurité antisismique repose avant tout sur l'évaluation de la charge sismique susceptible d'être engendrée lors d'un séisme éventuel.

Les forces sismiques de calcul représentent une charge statiquement appliquée provoquant dans la structure des efforts qui pourraient être engendrés par une sollicitation sismique future. Ces forces sont appliquées aux niveaux des planchers ou l'on suppose que les poids des masses des étages contigus sont concentrés.

On détermine la charge sismique de calcul séparément pour la direction longitudinale et pour la direction transversale, c'est à dire suivant les axes référentiels de la construction.

### FORCES SISMIQUES DANS CHAQUE MODE DE VIBRATION DE LA STRUCTURE :

Conformément au règlement RPA 81, les forces sismiques de calcul seront déterminées d'après la formule :

$$F_{ik} = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot \phi_{ik} \cdot W_l$$

ou :

$F_{ik}$  : est la force sismique aux niveau  $i$  de la structure dans le mode  $k$ .

$A, B, Q$  : coefficient déjà définits .

$D_k$  : facteur d'amplification dynamique moyen de la structure dans le mode  $k$ .

$\phi_k$  : composante du vecteur  $\{\phi_k\}$  du mode  $k$  au niveau  $i$  .

$W_l$  : poids de la masse  $m_l$  ( $W_l = m_l \cdot g$ ).

$\gamma_k$  : facteur de contribution du mode :

$$\gamma_k = \frac{\sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk}}{\sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk}^2}$$

L'effort tranchant dû au séisme à la base du bâtiment s'écrit :

$$F = \sum_{l=1}^n F_{lk} = \sum_{l=1}^n A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot \phi_{lk} \cdot W_l = \sum_{l=1}^n A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot \phi_{lk} \cdot m_l \cdot g$$

$$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot \gamma_k \cdot g \sum_{l=1}^n \phi_{lk} \cdot m_l$$

$$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot g \sum_{l=1}^n \phi_{lk} \cdot m_l \cdot \frac{\sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk}}{\sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk}^2}$$

$$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot g \frac{\left[ \sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk} \right]^2}{\sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk}^2}$$

On pose :

$$m_k = \frac{\left[ \sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk} \right]^2}{\sum_{l=1}^n m_l \cdot \phi_{lk}^2}$$

d'où

$$F = A \cdot D_k \cdot B \cdot Q \cdot g \cdot m_k \quad , \quad m_k \text{ étant la masse modale.}$$

Ainsi chaque mode fait vibrer une certaine masse .

La notion de masse modale est importante pour la troncature des modes. En pratique on ne détermine pas tous les modes , on arrête dès que les masses modales cumulées atteignent 90 à 95% de la

masse totale :

$$\sum_{k=1}^m m_k > 0.9 \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{avec } m < n$$

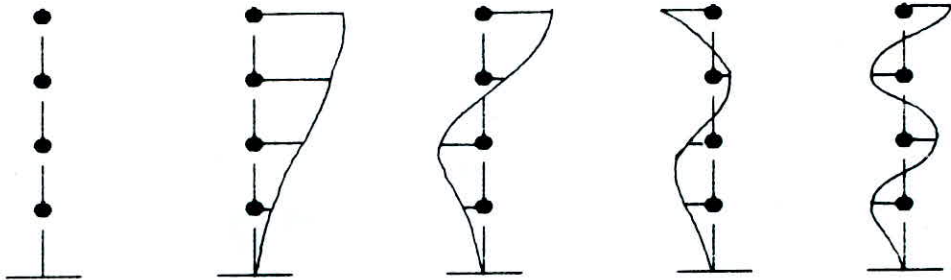
On pose :

$$\varepsilon_k = \frac{m_k}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Où  $\varepsilon_k$  : représente le coefficient d'équivalence du mode k.

$$\sum_{k=1}^m \varepsilon_k > 0.9$$

MODE PROPRE DE VIBRATION

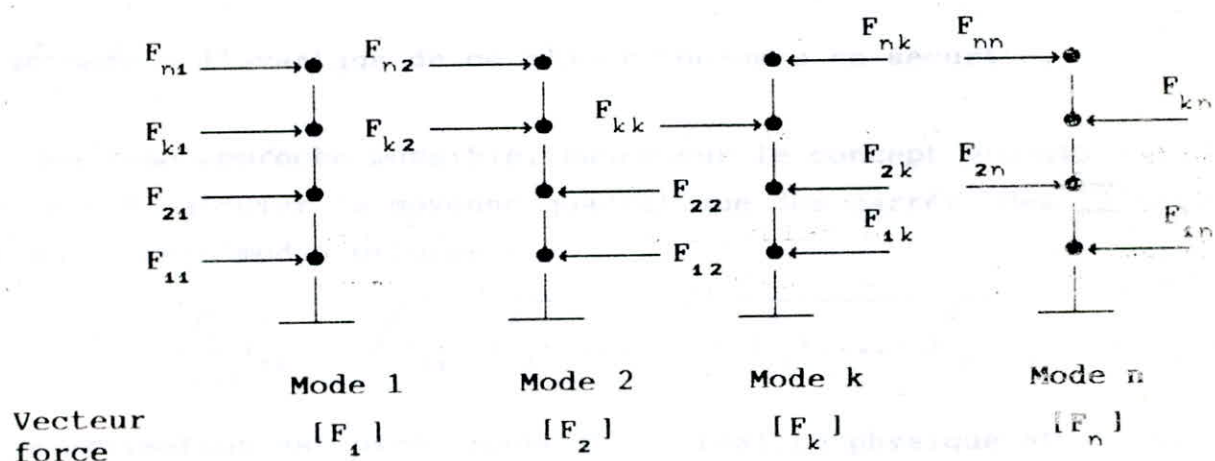


Mode 1                      Mode 2                      Mode k                      Mode n

Fréquence	$\omega_1$	<	$\omega_2$	<	$\omega_k$	<	$\omega_n$
Période	$T_1$	>	$T_2$	>	$T_k$	>	$T_n$
Vecteur déplacement	$[\phi_1]$		$[\phi_2]$		$[\phi_k]$		$[\phi_n]$



## FORCES SISMIQUES DANS CHAQUE MODE



### VI.6.1 RESULTANTE DES FORCES SISMIQUES MODALES :

Comme les réponses maximales des différents modes propres se manifestent, en général, à différents moments ( $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n$ ) et qu'il n'existe pas de théorie exacte pour associer ces valeurs maximales tirées des spectres, la réponse maximale totale de la structure ne peut être calculée que par des méthodes approximatives.

Les deux méthodes les plus connues sont les suivantes :

Une première possibilité consiste à calculer la somme des valeurs absolues des forces sismiques correspondant aux différents modes propres :

$$F_I = \sum_{k=1}^n |F_{Ik}| = |F_{I1}| + |F_{I2}| + |F_{I3}| + \dots + |F_{In}|$$

Il est clair que cette combinaison conduit toujours à une estimation par excès de la force réelle  $F_I$  au niveau  $i$  de la structure du fait que les réponses maximales des différents modes ne se manifestent pas en même temps et avec le même signe.

Néanmoins, d'un point de vue dimensionnement de la structure, cet-

te méthode à l'avantage de ce placer toujours en sécurité.

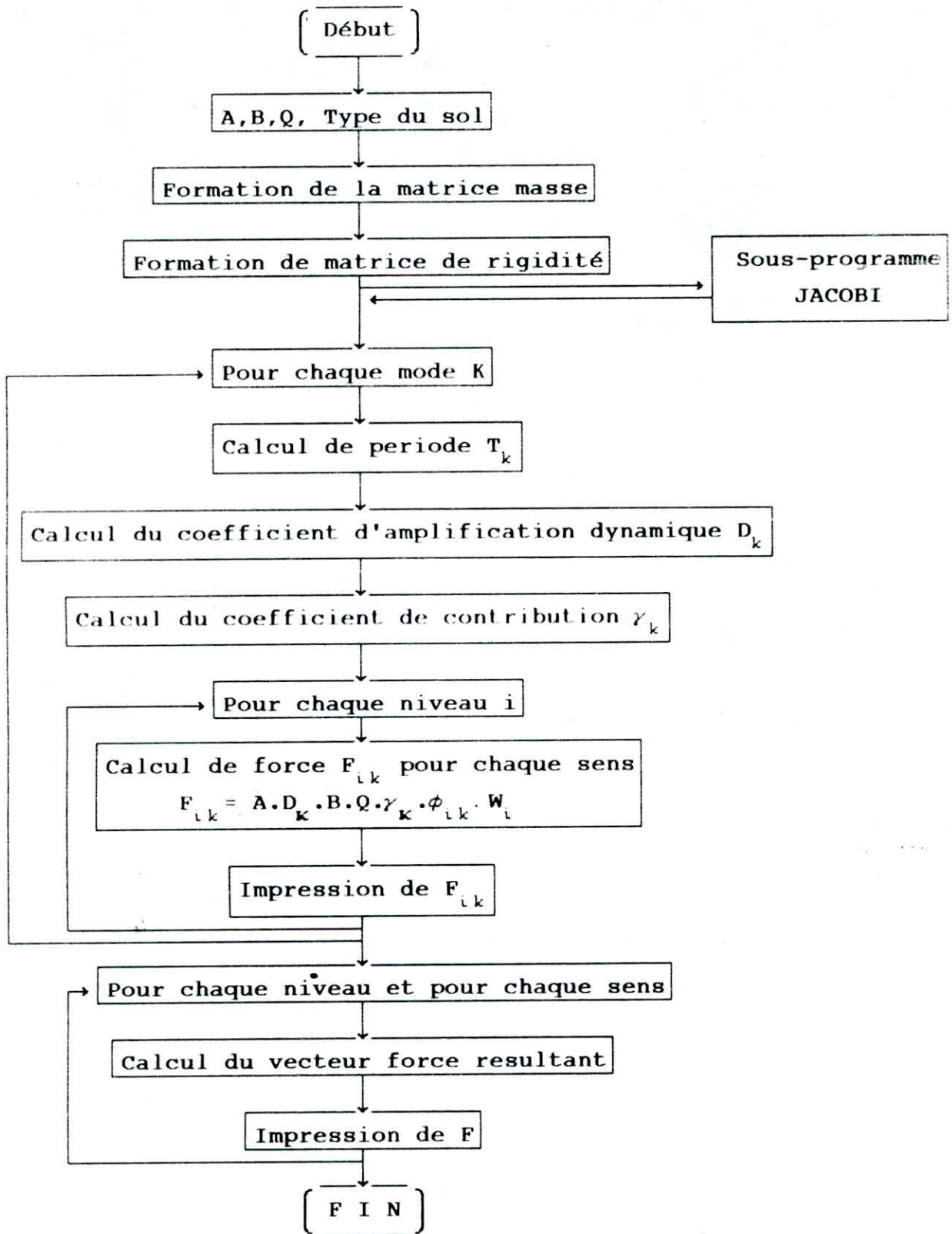
Une deuxième approche possible, basée sur le concept probabiliste, consiste à calculer la moyenne quadratique des carrés des forces des différents modes propres :

$$F_I = \sqrt{\sum_{k=1}^n F_{Ik}^2} = \sqrt{F_{I1}^2 + F_{I2}^2 + \dots + F_{Ik}^2 + \dots + F_{IN}^2}$$

Cette estimation est plus proche de la réalité physique et est recommandée par plusieurs codes parasismique.

On choisit la deuxième approche pour le calcul de la résultante des forces sismiques modales.

#### VI.7 ORGANIGRAMME :



**CHAPITRE VII**

***CALCUL DES EFFORTS INTERNES***

## VII. CALCUL DES EFFORTS INTERNES

### VII.1 INTRODUCTION :

Depuis de nombreuses années , les ingénieurs sont capables de calculer les efforts dans les structures dont le contreventement est assuré par des voiles et/ou portiques longitudinaux et transversaux.

Les hypothèses admises dans le cadre de la théorie , permettent d'utiliser des méthodes rigoureuses et relativement simples à mettre en oeuvre :

La méthode des rotations , la méthode de CROSS (*structures portiques*) , la méthode ALBIGES et GOULET (*structures voiles*) sont des solutions itératives et accessibles à la main qui permettent d'obtenir des déplacements et des efforts dans des structures simples . Il est apparu assez vite que la méthode des déplacements qui consiste à prendre comme inconnues de départ , les déplacements (*translations et rotations*) de chacun des noeuds de la structure donnerait une solution élégante pour le calcul des efforts.

L'avènement des ordinateurs , capables d'effectuer dans des délais et à des coûts raisonnables la masse de calcul nécessaire a définitivement banalisé de telles méthodes.

Dans la méthode des déplacements , on considère comme dans la méthode des forces une structure comme un assemblage de composants élémentaires. Les points de jonctions de ces composants sont appelés "noeuds".

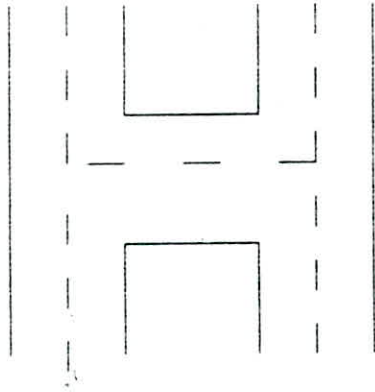
Pour cela, on est amené à modéliser le voile à étudier en portique qui est un assemblage de poutres et poteaux , puis appliquer au modèle la méthode des déplacements , ou méthode des matrices de rigidité .

Les forces dans les barres sont reliées aux déplacements du point nodal par une matrice définie comme la rigidité de chaque barre, les forces nodales sont reliées aux déplacements des noeuds par une matrice définie comme la matrice de rigidité de la structure. Cette dernière matrice est obtenue par des séries de

transformations matricielles à partir de la matrice de rigidité particulière à chaque barre. Finalement, selon les conditions d'équilibre les forces nodales obtenues à partir des déplacements inconnus des noeuds, et de la rigidités de la structure doivent équilibrer les charges extérieures appliquées aux noeuds.

### VII.2 MODELISATION DES VOILES :

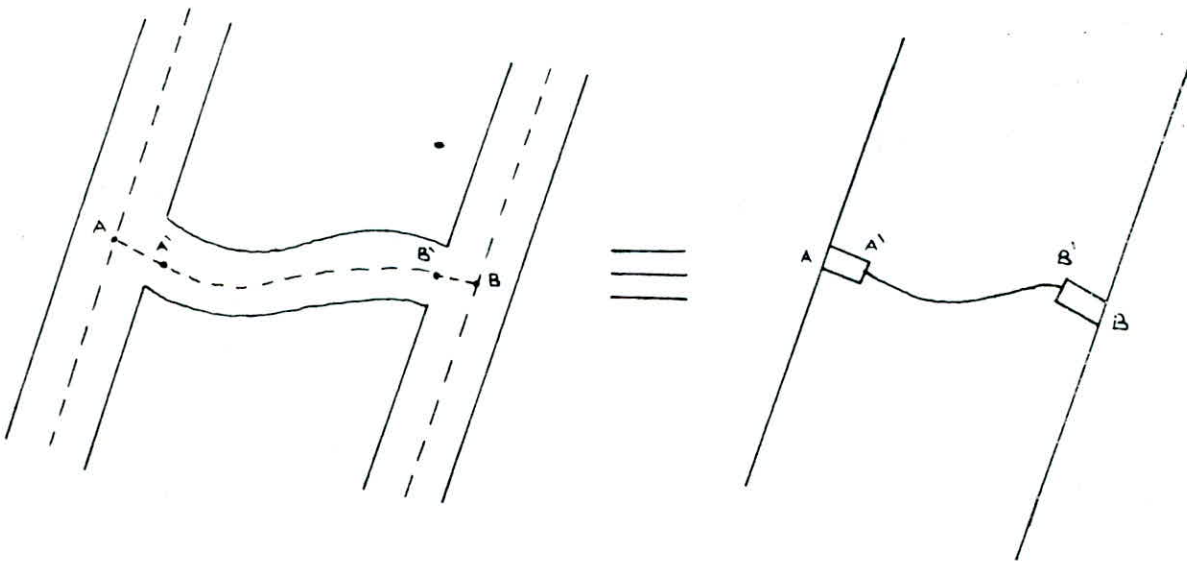
Comme il a été dit ci-dessus, le voile avec ouverture est assimilé à un portique (*poteaux et poutres*) dont les barres sont supposées être concentrées dans les lignes moyennes des trumeaux et des linteaux.



En pointillé :

Modélisation en portique.

LA poutre (linteau) possède deux extrémités infiniment rigides :



Les parties AA' et BB' sont considérées comme infiniment rigides. L'emploi des poutres comportant une partie centrale déformable et une partie rigide à chaque extrémités est obligatoire dans le cas des refends.

En effet l'utilisation de poutres déformables sur toute leur longueur conduit à surestimer la déformation de la partie commune au linteau et au trumeau .

Par contre la présence d'éléments rigides aux extrémités du linteau permet de retrouver un fonctionnement plus conforme à la réalité.

### VII.3 RAPPELS DES METHODES ENERGETIQUES :

Sous l'action des charges toutes structures subit des déformations qui sont la conséquence de la déformabilité des matériaux utilisés à leurs réalisations. La structure passe ainsi de sa position initiale , non déformée , à une autre , d'équilibre , toute proche de la première , qu'on appelle position déformée.

Pour exprimer la condition d'équilibre dans la position déformée on peut procéder de deux manières :

-Appliquer le principe de la conservation de l'énergie : METHODE ENERGETIQUE.

-Appliquer le principe des déplacements virtuels : METHODE CINEMATIQUE.

Les deux procédés conduisent aux mêmes relations pour exprimer la condition d'équilibre.

#### VII.3.1 TRAVAIL MECANIQUE DES FORCES EXTERIEURS :

Soit un corps élastique soumis à une force F et subissant un déplacement ds proportionnel à F on a :

$$ds = K \cdot dF \longrightarrow S = K \cdot F$$

Le travail élémentaire de cette force :

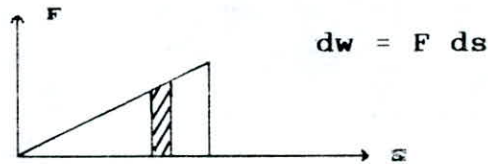
$$dW = F \cdot ds$$

Le travail mécanique total est :

$$W = \int F \cdot K \cdot dF = \frac{1}{2} \cdot K \cdot F^2 = \frac{1}{2} \cdot F \cdot S$$

Le travail produit par un système de forces :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum F_i \cdot \Delta_i$$



### VII.3.2 TRAVAIL MECANIQUE DES FORCES INTERIEURES OU ENERGIE DE DEFORMATION :

L'action des forces extérieures (Appelées très souvent charges) produit dans les sections de la structure une sollicitation caractérisée par l'apparition des efforts et des déformations dans les points du matériau.

A chaque moment, il existe un équilibre entre le travail mécanique extérieur et le travail mécanique intérieur (Dans le domaine des déformations élastique).

L'évaluation du travail mécanique intérieur se fait en partant des contraintes et déformation unitaires de chaque sollicitation.

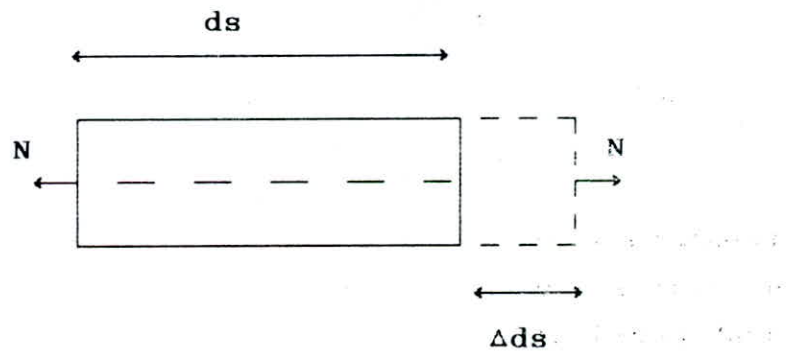
#### 1. TRAVAIL MECANIQUE PRODUIT PAR L'EFFORT NORMAL :

$$dW(N) = N \cdot \Delta ds / 2$$

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EA}$$

$$dW(N) = \frac{N^2 \cdot ds}{2 EA}$$

$$W(N) = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} \cdot ds$$



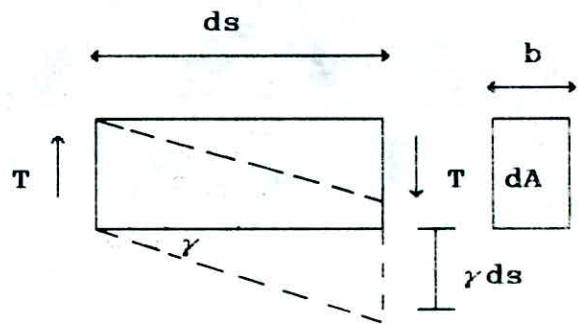


2. TRAVAIL MECANIQUE, PRODUIT PAR L'EFFORT TRANCHANT :

$$dW(T) = \frac{T\gamma ds}{2}$$

$$T = \tau \cdot dA \quad , \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\tau = \frac{T \cdot S_t}{I \cdot b}$$



$S_t$  : Moment statique.

$I$  : Moment d'inertie.

$$dW(T) = \frac{\tau^2 \cdot dA \cdot ds}{2 \cdot G} = \frac{T^2 \cdot S_t^2}{2 \cdot G \cdot I^2 \cdot b^2} \cdot dA \cdot ds$$

$$W(T) = \int_0^l \frac{T^2 \cdot S_t^2}{2 \cdot G \cdot I^2 \cdot b^2} \cdot dA \cdot ds = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{G \cdot I^2} ds \cdot \int_0^l \int_0^l \frac{S_t^2}{I^2 \cdot b^2} \cdot dA$$

$$W(T) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{G \cdot I^2} \cdot \int_0^l \int_0^l \frac{S_t^2}{I^2 \cdot b^2} \cdot dA \cdot ds$$

On définit une section réduite :  $A_r = \frac{I^2}{\int_0^l \int_0^l \frac{S_t^2}{b^2} \cdot dA}$

$$W(T) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{G \cdot A_r} \cdot ds$$

3. TRAVAIL MECANIQUE, PRODUIT PAR LE MOMENT FLECHISSANT :

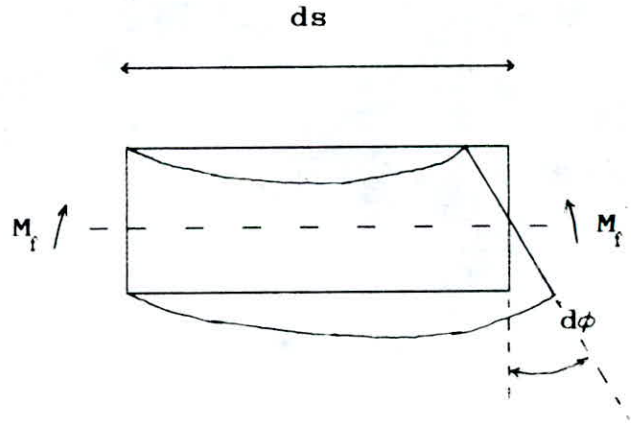
$$dW(M_f) = \frac{1}{2} \cdot M_f \cdot d\theta$$

$$d\theta = \epsilon \cdot ds$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_y} = \frac{M_f}{EI_z}$$

$$dW(M_f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2}{EI_z} \cdot ds$$

$$W_{M_f} = \int_0^l \frac{M_f^2}{2 \cdot EI_z} \cdot ds$$



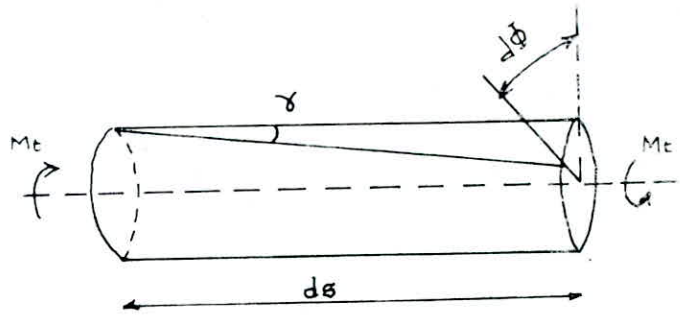
4. TRAVAIL MECANIQUE PRODUIT PAR LE MOMENT DE TORSION :

$$dW(M_t) = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot d\phi$$

$$d\phi = \frac{M_t \cdot ds}{G \cdot I_p}$$

$$dW(M_t) = \frac{M_t^2}{2 \cdot GI_p} \cdot ds$$

$$W(M_t) = \int_0^l \frac{M_t^2}{2 \cdot GI_p} \cdot ds$$

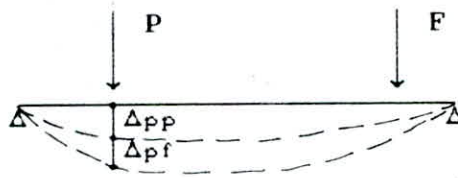


Dans le cas général d'une sollicitation, l'énergie de déformation d'une barre de longueur 'l' est :

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int_0^l \frac{N^2}{EA} \cdot ds + \int_0^l \frac{T^2}{G \cdot A_r} \cdot ds + \int_0^l \frac{M_f^2}{EI} \cdot ds + \int_0^l \frac{M_t^2}{GI_p} \cdot ds \right]$$

### VII.3.3 THEOREME DE CASTIGLIANO :

"Le déplacement du point d'application d'une force généralisée dans le sens d'action de cette dernière équivaut à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force."



$$U = \frac{1}{2} \cdot P \Delta_{pp} + P \Delta_{pf} = \frac{1}{2} \cdot P^2 \cdot \delta_{pp} + P \cdot \Delta_{pf}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P \cdot \delta_{pp} + \Delta_{pf} = \Delta_{pp} + \Delta_{pf} = \Delta_p$$

d'où :

$$\Delta_p = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Dans le calcul de l'énergie de déformation , et des éléments de matrices de souplesse et de rigidité , on néglige souvent l'effet de l'effort tranchant. Cet effet est négligeable pour les éléments d'élancement  $\lambda \geq 5$  (poutres et poteaux courants).

Pour les éléments d'élancements réduits tels que les poteaux courts et les voiles , l'influence de l'effort tranchant devient très important et ne peut-être négligée.

### VII.4 MATRICE DE RIGIDITE :

#### VII.4.1 DEFINITION :

On appelle matrice de rigidité d'un élément simple , la matrice qui exprime les forces en fonction des déplacements en un

certain nombre de point.

Elle est donc définie par :

$$[F] = [K] \cdot [U]$$

ou :

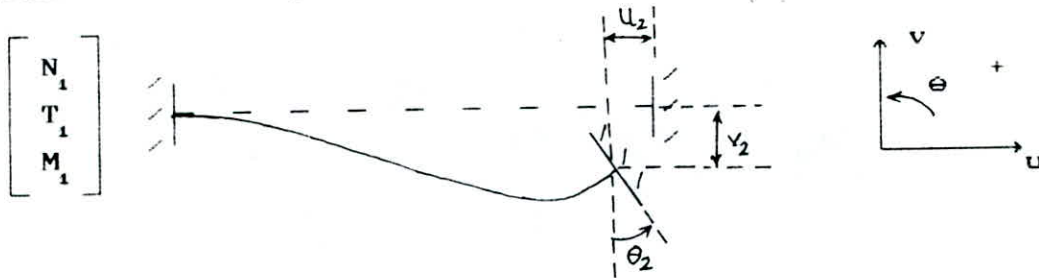
[F] : est le vecteur forces.

[K] : est la matrice de rigidité.

[U] : est le vecteur des déplacements.

#### VII.4.2 MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE SIMPLE BI-ENCASTREE :

Soit une barre encastrée à ses deux extrémités. Cette barre est soumise à des déplacements imposés à l'une de ses extrémités :



C'est un système hyperstatique de degré 3. Ces inconnues hyperstatiques sont :  $N_2, T_2, M_2$ .

Les équations d'équilibre donnent :

$$N_1 + N_2 = 0.$$

$$T_1 + T_2 = 0.$$

$$M_1 + M_2 + T_2 \cdot L = 0.$$

Les efforts dans la barre sont les suivants :

$$N = N_2$$

$$M = T_2 (L-s) + M_2$$

$$T = T_2$$

L'énergie de déformation de la barre s'écrit :

$$U = \int_0^L \left[ \frac{N^2}{2EA} ds + \frac{M^2}{2EI} ds + \frac{T^2}{2GA_r} ds \right]$$

$$U = \int_0^l \left( \frac{N_2^2}{2EA} ds + \frac{T_2^2}{2GA_r} ds + \frac{(T_2(L-S) + M_2)^2}{2EI} ds \right)$$

D'après le théorème de CASTIGLIANO on a :

$$u_2 = \frac{\partial U}{\partial N_2} = \frac{N_2}{E} \int_0^l \frac{ds}{A}$$

$$v_2 = \frac{\partial U}{\partial T_2} = \frac{1}{E} \left( T_2 \int_0^l \frac{(L-S)^2}{I} ds + M_2 \int_0^l \frac{(L-S)}{I} ds + T_2 \int_0^l \frac{ds}{GA_r} \right)$$

$$\theta_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} = \frac{1}{E} \left( T_2 \int_0^l \frac{(L-S)}{I} ds + M_2 \int_0^l \frac{ds}{I} \right)$$

Si l'inertie I et la section A sont constantes :

$$u_2 = \frac{N_2 L}{EA}$$

$$v_2 = T_2 \left( \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GA_r} \right) + \frac{M_2 L^2}{2EI}$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 L^2}{2EI} + \frac{M_2 L}{EI}$$

En posant :

$$\alpha = \frac{12 EI}{L^2 GA_r}$$

On a :

$$u_2 = \frac{N_2 L}{EA}$$

$$v_2 = T_2 \left( 1 + \frac{\alpha}{4} \right) + \frac{M_2 L^2}{2EI}$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 L^2}{2EI} + \frac{M_2 L}{EI}$$

Et réciproquement, en notation matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{12EI}{L^3} & -\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

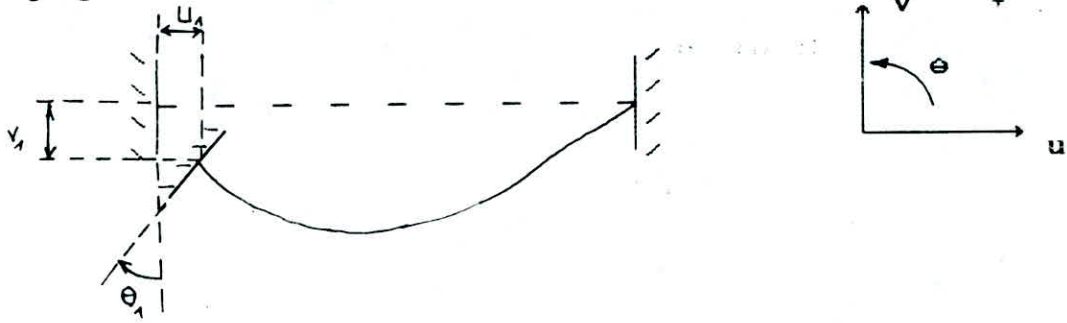
Ainsi que :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

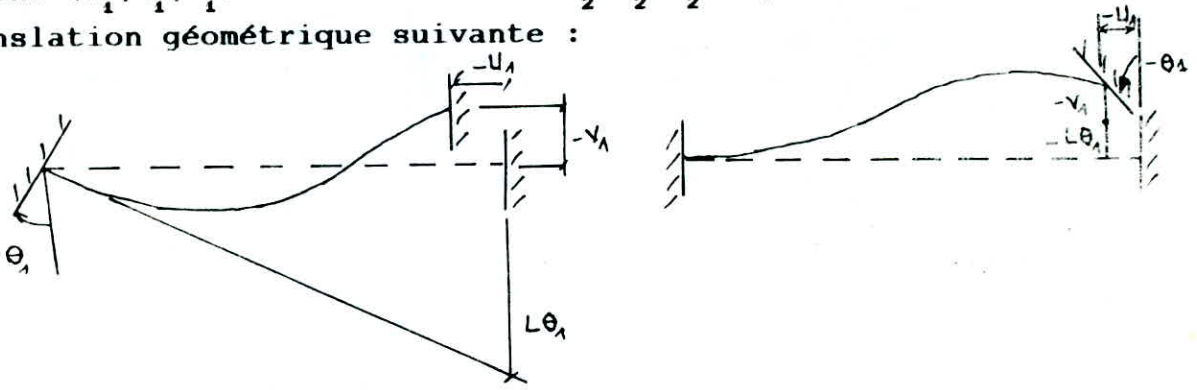
d'ou :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{12EI}{L^3} & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} & \frac{(2-\alpha)}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

De même on calcul les efforts provoqués par les déplacements  $(u_1, v_1, \theta_1)$ .



Exprimons  $(u_1, v_1, \theta_1)$  en fonction de  $(u_2, v_2, \theta_2)$ , pour cela on fait la translation géométrique suivante :



a- Translation  $(-u_1, -v_1)$

b- rotation  $-\theta_1$

En écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Ainsi après transformation on aura :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{12EI}{L^3} & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

De même :

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{12EI}{L^3} & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{6EI}{L^2} & \frac{(2-\alpha)}{1+\alpha} \cdot \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

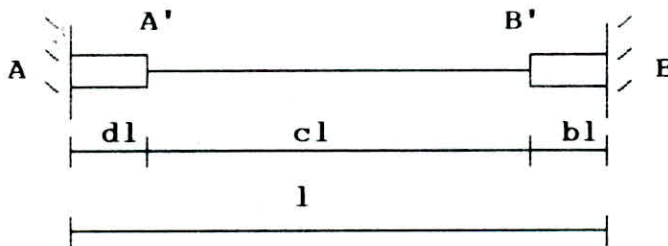
La matrice de rigidité de la barre bi-encastée s'écrit :



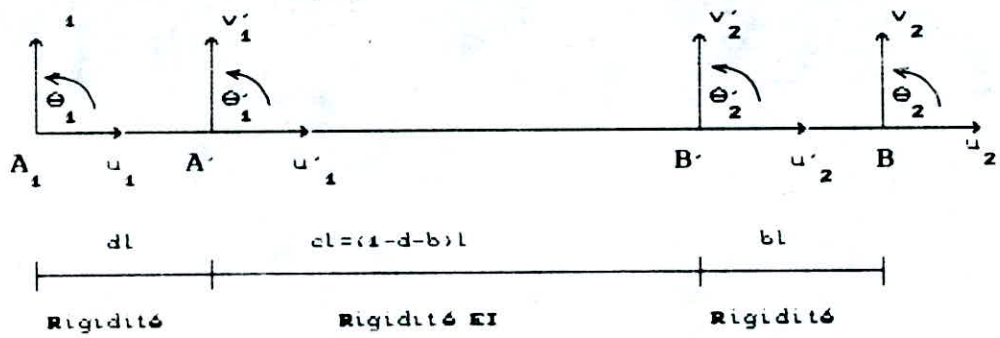
$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(2-\alpha)EI}{(1+\alpha)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\alpha)L^2} & \frac{(4+\alpha)EI}{(1+\alpha)L} \end{bmatrix}$$

On remarque que la matrice de rigidité est symétrique.

#### VII.4.3 MATRICE DE RIGIDITE D'UNE POUTRE AVEC EXTREMITES INFINIMENT RIGIDES :



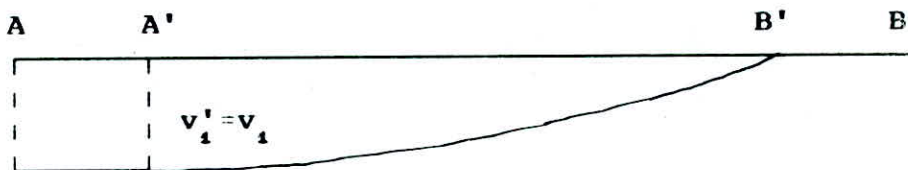
Les déplacements  $[U]$  aux points  $A$  et  $B$  sont liés aux déplacements  $[U']$  en  $A'$  et  $B'$  par la relation géométrique comme suit :



$$[U] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{bmatrix}$$

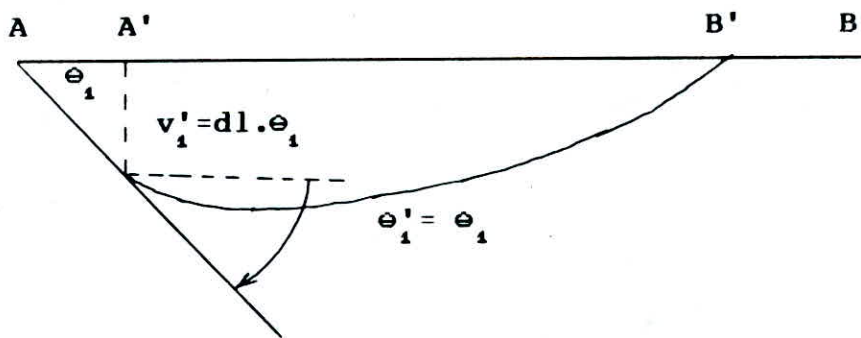
$$[U'] = \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \\ u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = 0 \quad u'_1 = u_1 \quad \text{et} \quad v'_1 = \theta'_1 = v'_2 = u'_2 = \theta'_2 = 0$$



$$v_1 = 0 \quad v'_1 = v_1 \quad \text{et} \quad u'_1 = \theta'_1 = u'_2 = v'_2 = \theta'_2 = 0$$

$$\theta_1 = 0 \quad \theta'_1 = \theta_1 \quad \text{et} \quad u'_1 = u'_2 = v'_1 = v'_2 = \theta'_2 = 0$$



Les autres relations sont obtenues de manière similaire.

Ainsi :

$$[U'] = [H].[U]$$

[H] : Transformation géométrique qui s'écrit comme suit :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & dl & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -bl \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de la poutre A'B' de rigidité EI et de vecteur déplacement U' s'obtient en remplaçant dans la matrice de rigidité dans le paragraphe précédent L par cL .

$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{cL} & 0 & 0 & -\frac{EA}{cL} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)c^3L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} & 0 & \frac{-12EI}{(1+\alpha)c^3L^3} & \frac{6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} & (4+\alpha)EI & 0 & \frac{-6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} & (2-\alpha)EI \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{(1+\alpha)c^3L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\alpha)c^3L^3} & \frac{-6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} & (2-\alpha)EI & 0 & \frac{-6EI}{(1+\alpha)c^2L^2} & (4+\alpha)EI \end{bmatrix}$$

$c = 1-b-d$ ,  $b$  et  $d$  rapport des parties rigides du linteau à sa longueur totale.

D'autre part le théorème de BETTI (élasticité linéaire) permet d'écrire :

$$\sum F_l \cdot U_{lf} = \sum F'_l \cdot U'_{lf}$$

C'est à dire que le travail des forces  $F_l$  soumises aux déplacements  $U_{lf}$ , dûs à un système de forces  $F'_l$  est égal au travail des forces  $F'_l$  soumises aux déplacements  $U'_{lf}$  dûs au système de forces  $F_l$ .

les forces  $[F]$  en A et B et  $[F']$  en A' et B' engendre des déplacements semblables car les parties AA' et BB' sont infiniment rigides, on peut donc écrire :

$$\sum F_l \cdot U_l = \sum F'_l \cdot U'_l$$

ou bien sous forme matricielle :

$$[F]^T [U] = [F']^T [U']$$

$$\text{or, } [U'] = [H][U]$$

$$\text{d'où : } [F]^T [U] = [F']^T [H][U]$$

$$\text{En transposant : } [U]^T [F] = [U]^T [H]^T [F']^T$$

$$\text{Ce qui donne : } [F] = [H]^T [F']$$

$$[F] = [K][U]$$

$$[F] = [K][U] = [H]^T [F'] = [H]^T [K'] [U']$$

$$[F] = [H]^T [K'] [H][U]$$

d'où :

$$[K] = [H]^T [K'] [H]$$

En connaissant  $[K']$  et  $[H]$  on peut déduire  $[K]$ .

$[K]$  est la matrice de rigidité correspondant aux degrés de liberté (déplacements)  $[U]$  en A et B d'une barre prismatique de longueur  $l$ , avec les parties  $bl$  et  $dl$  extrémités infiniment rigides.

Le coefficient  $\alpha = 12EI/c^2 l^2 GA_y$  tient compte de l'effet de l'effort tranchant.

Matrice K d'une barre avec extrémités infiniment rigides.

$$[K] = \frac{EI}{1 + \alpha}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{A(1+\alpha)}{IcL} & 0 & 0 & -\frac{A(1+\alpha)}{IcL} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{c^3L^3} & \frac{\sigma}{c^2L^2} + \frac{12d}{c^3L^2} & 0 & \frac{12}{c^3L^3} & \frac{\sigma}{c^2L^2} + \frac{12b}{c^3L^2} \\ 0 & \frac{\sigma}{c^2L^2} + \frac{12d}{c^3L^3} & \frac{4+\alpha}{cL} + \frac{12d}{c^2L} + \frac{12d^2}{c^3L} & 0 & -\frac{\sigma}{c^2L^2} - \frac{12d}{c^3L^3} & \frac{2-\alpha}{cL} + \frac{\sigma(b+d)}{c^2L} + \frac{12bd}{c^3L} \\ -\frac{A(1+\alpha)}{IcL} & 0 & 0 & \frac{A(1+\alpha)}{IcL} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{c^3L^3} & -\frac{\sigma}{c^2L^2} - \frac{12d}{c^3L^2} & 0 & \frac{12}{c^3L^3} & -\frac{\sigma}{c^2L^2} - \frac{12b}{c^3L^2} \\ 0 & \frac{\sigma}{c^2L^2} + \frac{12b}{c^3L^2} & \frac{2-\alpha}{cL} + \frac{\sigma(b+d)}{c^2L} + \frac{12bd}{c^3L} & 0 & -\frac{\sigma}{c^2L^2} - \frac{12b}{c^3L^2} & \frac{4+\alpha}{cL} + \frac{12b}{c^2L} + \frac{12b^2}{c^3L} \end{bmatrix}$$

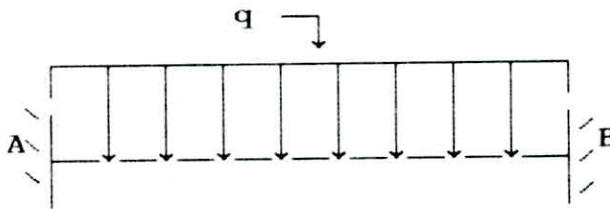
En conclusion , un voile uniforme (sans ouvertures) peut-être modélisé comme une barre dont la matrice de rigidité est celle de la barre bi-encastree. Un voile avec ouvertures peut-être modélisé comme un portique (en tenant compte de l'effet de T) ; la matrice de rigidité des poteaux est celle de la barre bi-encastree et la matrice de rigidité des poutres est celle de la barre à extrémités rigides.

## VII.5 CALCUL DES REACTIONS D'APPUIS DUES AUX CHARGEMENTS

EXTERIEURES :

### VII.5.1 REACTION D'APPUIS D'UNE BARRE BI-ENCASTREE :

#### VII.5.1.1 CHARGEMENT UNIFORME PERPENDICULAIRE A LA BARRE :



En supprimant l'encastrement B , l'énergie de déformation s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \frac{T^2}{GA_r} + \frac{M^2}{EI} \right] ds$$

$$T = -X_1 + qs$$

$$M = -X_2 - X_1 + qs^2/2$$

d'ou :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \frac{(-X_1 + qs)^2}{GA_r} + \frac{(-X_2 - X_1 + qs^2/2)^2}{EI} \right] ds$$

D'après le théorème de CASTIGLIANO on a :

$$u_1 = \frac{\partial W}{\partial X_1} \quad , \quad u_2 = \frac{\partial W}{\partial X_2}$$

puisque l'extrémité B est un encastrement  $u_1 = u_2 = 0$  ; d'où après intégration on a :

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = X_1 \left( \frac{1}{GA_r} + \frac{L^2}{3EI} \right) + X_2 \frac{1}{2EI} - q \left( \frac{1}{2GA_r} + \frac{qL^3}{8EI} \right) = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_2} = \frac{X_2 L}{EI} + \frac{X_1 L^2}{2EI} - \frac{qL^3}{6EI} = 0. \quad (II)$$

Les équations (I) et (II) donnent :

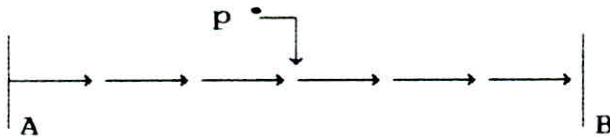
$$X_1 = qL / 2 \quad , \quad X_2 = -qL / 12$$

De la même manière on calcul les réactions de l'appuis A .

Le vecteur des réactions de la barre est :

$$[F] = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix}$$

#### VII.5.1.2 CHARGEMENT UNIFORME NORMAL A LA BARRE :



En supprimant l'encastrement B , l'énergie de déformation s'écrit:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds$$

L'expression de l'effort normal :

$$N = X + ps .$$

d'ou :

$$W = \frac{1}{2 \sigma} \int_0^L \frac{(X + ps)^2}{EA} ds$$

D'après le théorème de CASTIGLIANO on a :

$$u = \frac{\partial W}{\partial X}$$

X est une réaction , alors u = 0

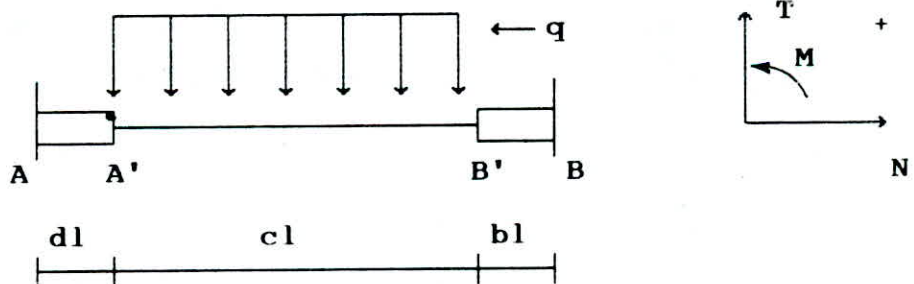
$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{EA} \left[ XL + \frac{pL^2}{2} \right] = 0 .$$

d'ou :

$$X = - pL / 2$$

### VII.5.2 CALCUL DES REACTIONS D'APPUI D'UNE BARRE A EXTREMITES RIGIDES :

#### VII.5.2.1 CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTI SUR LA POUTRE SOUPLE :



Nous avons :

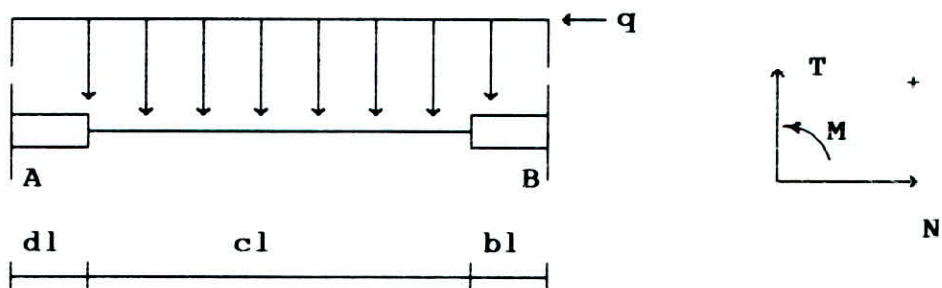


$$[F'] = \begin{bmatrix} T'_A \\ M'_A \\ T'_B \\ M'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qcL/2 \\ qc^2L^2/12 \\ qcL/2 \\ -qc^2L^2/12 \end{bmatrix}$$

$$[F] = [H^T][F'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qcL/2 \\ qc^2L^2/12 \\ qcL/2 \\ -qc^2L^2/12 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} qcL/2 \\ dqcL/2 + qc^2L^2/12 \\ qcL/2 \\ -bqcL/2 - qc^2L^2/12 \end{bmatrix}$$

#### VII.5.2.2 CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTI SUR TOUTE LA POUTRE :

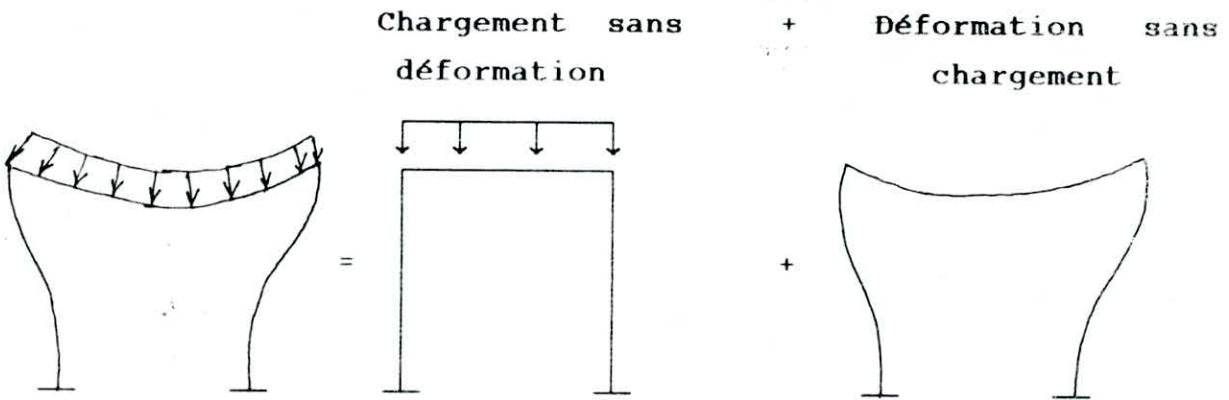


$$[F] = \begin{bmatrix} T_A \\ M_A \\ T_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qc/2+qd \\ qcd/2+qc^2/12+qd^2/2 \\ qc/2+qb \\ -qcb/2-qc^2/12-qb^2/2 \end{bmatrix}$$

VII.6 METHODE DES DEPLACEMENTS :

VII.6.1 PRINCIPE DE LA METHODE :

La méthode des déplacements se base sur le principe simple de la superposition des états d'équilibre qui sont les suivants :



Ainsi pour chaque barre de la structure nous pourrons décomposer les efforts réels en la somme de :

- Efforts dûs aux chargements en considérant la barre bi-encastée et chargé.
- Efforts dûs aux déplacements imposés réels sur cette barre.



Les efforts  $(N_1', T_1', M_1', N_2', T_2', M_2')$  peuvent être facilement calculés par la méthode énergétique simple telle que celle de CASTIGLIANO .

Les efforts  $(N_1', T_1', M_1', N_2', T_2', M_2')$  correspondent eux à des efforts dus à des déplacements imposés aux extrémités de la poutre.

Compte tenu des relations explicités ci-dessus , il faut et il suffit donc de connaître les déplacements pour pouvoir calculer les efforts correspondants.

Le but de la méthode des déplacements est de calculer les déplacements des noeuds , et en appliquant le principe de superposition des états d'équilibre évoqué plus haut , nous en déduirons alors les efforts dans les barres et les réactions d'appuis.

#### VII.6.2 MATRICE DE ROTATION :

Jusqu'ici les relations trouvées ne supposaient qu'un seul système d'axe lié à la barre (*repère LOCAL*). Si les efforts dans les barres sont toujours exprimés par rapport à ce système d'axes, on choisit par contre pour donner les réactions les appuis et les déplacements des noeuds un système global d'axes qui ne correspond pas nécessairement avec celui de la barre.

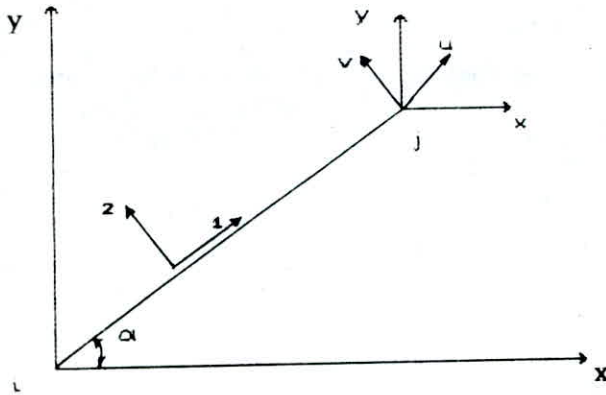
Il nous faut donc à partir des déplacements introduits précédemment et qui concerneraient le repère local de la barre , trouver leur expression dans le repère global. Pour cela il est nécessaire d'introduire l'angle  $\alpha$  entre l'axe X du repère global et l'axe 1 du repère local. Cette relation consiste donc à exprimer une rotation d'angle  $\alpha$  d'où on obtient en notant  $(u, v, \varphi)$  les déplacements dans le repère local et  $(x, y, \theta)$  ceux dans le repère global.

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

On remarquera que la rotation  $\varphi$  n'est pas affectée par ce

changement de repère et donc que :  $\varphi = \theta$  .



Passage du repère local  
au repère global.

Compte tenu de la formulation linéaire de cette transformation , nous pouvons également l'exprimer sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

De même les efforts (N,M,T) exprimés dans le repère local se déduiront de la même façon des efforts (H,V,C) liés au repère global par :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix}$$

Réciproquement il est intéressant de déterminer la relation permettant de trouver (H,V,C) connaissant (N,T,M). Il suffit pour cela de prendre la matrice inverse de la matrice de rotation écrite précédemment , ce qui se fait ici sans difficulté , on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$$

Compte tenu que la transformation est une rotation, sa matrice inverse est la transposée de la matrice précédente, c'est à dire que les termes diagonaux restent inchangés tandis que les termes extra-diagonaux sont permutés symétriquement deux à deux. Afin de simplifier les écritures, par la suite nous noterons par  $[R]$  la matrice rotation et  $[R]^T$  sa matrice transposée. Ainsi nous obtiendrons les formulations suivantes :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H \\ V \\ C \end{bmatrix} = [R]^T \begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix}$$

REMARQUE :

Afin de simplifier les écritures, on notera notre matrice de rigidité  $[K_a]$ , et la divisons en quatre sous-matrices telle que pour une barre 'a' allant du noeud i au noeud j, nous aurons la notation suivante :

$$[K_a] = \begin{bmatrix} K_a^i & L_a^j \\ L_a^i & K_a^j \end{bmatrix}$$

La connaissance de la matrice de rigidité inférieure droite  $[K_a^j]$  nous permet d'obtenir les autres sous matrices ; pour cela nous aurons besoin de deux matrices de transformations ou matrices de transferts notées  $[T_d]$  et  $[T_g]$ .

$$[T_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [T_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix}$$

Notons que :

$$[T_g] = [T_d]^T$$

A partir des matrices  $[K_a^l]$ ,  $[T_d]$  et  $[T_g]$  nous obtenons :

$$[L_a^j] = [T_g] [K_a^j]$$

$$[L_a^l] = [K_a^j] [T_d]$$

$$[K_a^l] = [L_a^j] [T_d]$$

Ensuite ces différentes matrices seront calculées dans le repère global .

$$(1) \quad [F_a] = [K_a] [U_a] \quad \text{repère local}$$

$$(2) \quad [F] = [K] [U] \quad \text{repère global}$$

$$[F_a] = [R_a] [F]$$

$$[U_a] = [R_a] [U]$$

$$(1) \rightarrow [R_a] [F] = [K_a] [R_a] [U]$$

$$(1)+(2) \rightarrow [F] = [R_a]^{-1} [K_a] [R_a] [U] = [K] [U]$$

$$\rightarrow [K] = [R_a]^{-1} [K_a] [R_a]$$

avec  $[R_a]^{-1} = [R_a]^T$  (orthogonalité de la matrice  $[R]$  ) .

$[K_a]$  : matrice de rigidité dans le repère local .

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_a^j] = [R_a]^T [k_a^j] [R_a] \\ [L_a^j] = [R_a]^T [l_a^j] [R_a] \\ [K_a^l] = [R_a]^T [k_a^l] [R_a] \\ [L_a^l] = [R_a]^T [l_a^l] [R_a] \end{array} \right.$$

Sur le plan informatique , cela se traduit par l'introduction des matrices  $[R_a]$  et  $[R_a]^T$  , le programme se charge des différentes multiplications matricielles citées ci-dessus .

multiplications matricielles citées ci-dessus .

### VII.6.3 FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE LA STRUCTURE :

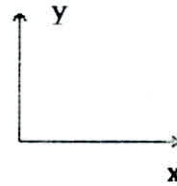
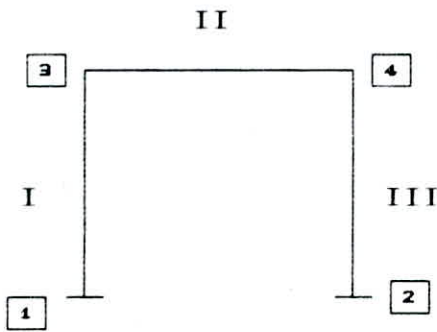
Il s'agit dans cette partie d'assembler les différentes matrices de rigidité de façon à construire la matrice de rigidité de la structure . Pour cela il faut :

- calculer la somme des  $[K_a^i]$  .
- connaître les différents noeuds  $j$  intervenant dans le noeud  $i$  et calculer alors le terme  $[L_a^j]$  correspondant .

On peut également procéder de la façon suivante en calculant pour chacune des barres les sous-matrices  $[K_a^i]$  ,  $[K_a^j]$  ,  $[L_a^i]$  ,  $[L_a^j]$  et ensuite :

- additionner les termes  $[K_a^i]$  et  $[K_a^j]$  à ceux déjà existants.
- placer les termes  $[L_a^i]$  et  $[L_a^j]$  à leur position respective.

Exemple :



Barre I :

$$[K_I] = \begin{bmatrix} K_1^I & L_3^I \\ L_1^I & K_3^I \end{bmatrix}$$

Barre II :

$$[K_{II}] = \begin{bmatrix} K_3^{II} & L_4^{II} \\ L_3^{II} & K_4^{II} \end{bmatrix}$$

Barre III :

$$[K_{III}] = \begin{bmatrix} K_2^{III} & L_4^{III} \\ L_2^{III} & K_4^{III} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \sum_{\alpha=I}^{III} [K_{\alpha}]$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u & v & \theta \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} u & v & \theta \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} u & v & \theta \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} u & v & \theta \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_1^I & K_{12} &= 0 & K_{13} &= L_3^I & K_{14} &= 0 \\ K_{24} &= 0 & K_{22} &= K_2^{III} & K_{23} &= 0 & K_{24} &= L_4^{III} \\ K_{31} &= L_1^I & K_{32} &= 0 & K_{33} &= K_3^I + K_3^{II} & K_{34} &= L_4^{II} \\ K_{41} &= 0 & K_{42} &= L_2^{III} & K_{34} &= L_3^{II} & K_{44} &= K_4^{II} + K_4^{III} \end{aligned}$$



d'où :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1^I & 0 & L_3^I & 0 \\ 0 & K_2^{III} & 0 & L_4^{III} \\ L_1^I & 0 & K_3^I + K_3^{II} & L_4^{II} \\ 0 & L_2^{III} & L_3^{II} & K_4^{II} + K_4^{III} \end{bmatrix}$$

Remarque :

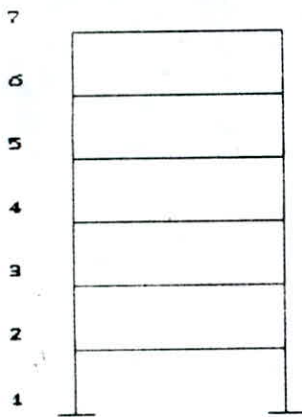
- a/ S'il n'y a pas de barres entre deux noeuds  $i$  et  $j \rightarrow k_{ij} = k_{ji}$
- b/  $k_{ii} = \sum_a k_i^a$
- c/  $i \neq j \quad K_{ij} = L_i^a \text{ ( ou } L_j^a \text{ )}$

#### VII.6.4 INFLUENCE DE LA NUMEROTATION DES NOEUDS :

Il apparait de ce qui précède que la numérotation des noeuds et des éléments est arbitraire. Toutefois, les grands programmes de calculs de structure tiennent compte du fait que tous les noeuds ne sont pas reliés les uns aux autres ; la matrice globale peut donc être une matrice bande et les gains en capacité du programme et de résolution peuvent être considérables.

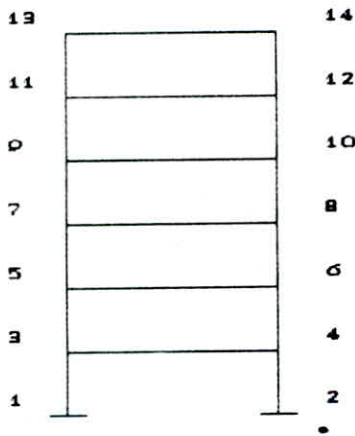
Exemple :

Portique plan défini ci-dessous :



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14
1	x	x											
2	x	x	x										x
3		x	x	x								x	
4			x	x	x						x		
5				x	x	x				x			
6					x	x	x		x				
7						x	x	x					
8							x	x	x				
9						x		x	x	x			
10					x				x	x	x		
11				x						x	x	x	
12			x								x	x	x
13				x								x	x
14													x

Cette numérotation est mauvaise : les liaisons horizontales donnent des termes hors-diagonale. La numérotation ci-dessous est meilleure ( c'est d'ailleurs la meilleure possible ) .



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14
1	x			x									
2		x			x								
3	x		x	x	x								
4		x	x	x		x							
5			x		x	x	x						
6				x	x	x		x					
7					x		x	x	x				
8						x	x	x		x			
9							x		x	x	x		
10								x	x	x		x	
11									x		x	x	x
12										x	x	x	
13											x		x
14												x	x

### VII.6.5 PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

a/ La matrice [K] établie précédemment est symétrique.

Cette propriété permet également des économies importantes pour le stockage et la résolution du système d'équation.

b/ La structure de bande de la matrice [K] est une

caractéristique importante , elle permet des économies tant au niveau du stockage de la matrice que dans la résolution du système d'équation final. Bien que le nombre de termes non nuls de  $[K]$  reste constant , la largeur de bande peut varier considerablement avec l'ordre de numérotation des noeuds. Cette notion de largeur de bande maximale est facilement interprétable au niveau du calcul des structures. En effet , sa valeur LB correspond au maximum de barre , puisque ceci est lié à la présence d'une matrice extra-diagonale non nulle.

$$LB = 3. ( \text{Max}_a |j-i| + 1 )$$

#### VII.6.6 METHODE DE STOCKAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

Il existe différentes méthodes de stockage de la matrice de rigidité , la plus part de ces méthodes se basent sur les propriétés de cette matrice (*Symetrie et Bande*).

##### a/ Matrice pleine non symetrique :

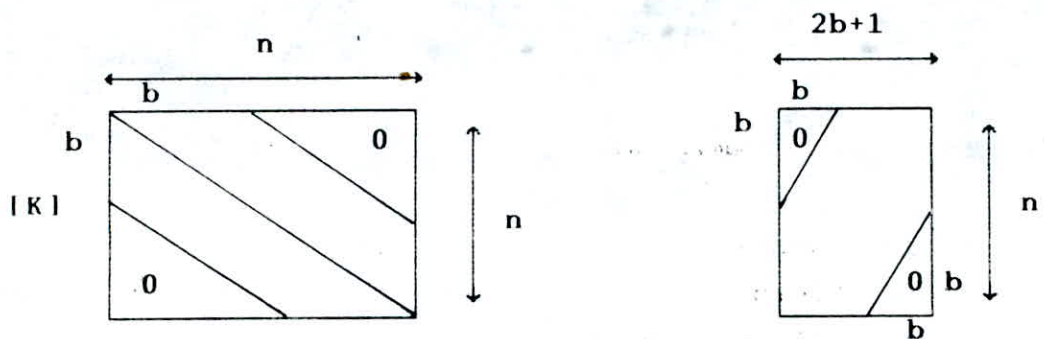
Dans ce cas la matrice est stockée entierement sans tenir compte de ses propriétés (*Symetrie et Bande*) , elle occupera alors (si elle est de dimension  $n \times n$ )  $n^2$  nombres réels en mémoire .

##### b/ Matrice pleine symetrique :

Il suffit de stocker le triangle supérieur de la matrice , dans ce cas il faut stocker  $n(n+1)/2$  mots réels.

##### c/ Matrice bande non symetrique :

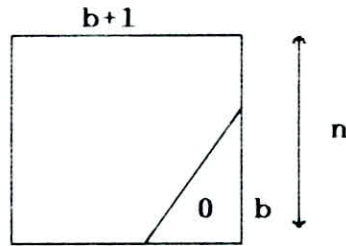
on stockera la matrice "*redressée*" dans une table rectangulaire de dimension  $n(2b + 1)$  :



Il faut stocker  $n(2b + 1)$  mots réels , incluant  $b(b + 1)$  valeurs nulles inutiles.

d/ Matrice bande symétrique :

dans ce cas il faut stocker  $n(b + 1)$  mots réels , incluant  $b(b + 1)/2$  valeurs nulles inutiles .



e/ Matrice à ligne de ciel non symétrique :

La méthode de stockage la plus efficace pour les matrices globales est la méthode de "ligne de ciel" (Sky ligne). Elle consiste à stocker les termes de  $K$  par lignes et colonnes de longueurs variables.

La ligne de ciel est l'enveloppe des sommets des colonnes de hauteurs variables.

Exemple :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} \end{bmatrix}$$

f/ Matrice à ligne de ciel symetrique :

Le stockage est identique à celui d'une matrice non symétrique pour la diagonale et le triangle superieur.

#### VII.6.7 EQUATION D'EQUILIBRE :

Afin de déterminer nos déplacements , nous allons tout simplement écrire l'équilibre de chaque noeud. Plaçons nous en un noeud i ,auquel arrive un certain nombre de barre.

$$\text{Soit } [F_o^i] = \begin{bmatrix} H_o^i \\ V_o^i \\ C_o^i \end{bmatrix}$$

les forces exterieures appliquées sur ce noeud et  $[F_a^i]$  les forces provenant des barres .

L'équilibre de ce noeud s'écrit alors (*Principe de l'action et de la réaction*) :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_o^i = \sum_a H_a^i \\ V_o^i = \sum_a V_a^i \\ C_o^i = \sum_a C_a^i \end{array} \right.$$

Soit encore :  $[F_o^i] = \sum_a [F_a^i]$

Compte tenu des définitions prises plus haut nous pourrions exprimer  $[F_a^i]$  en fonction de  $[f_a^i]$  :

$$[F_a^i] = [R_a]^{T} [f_a^i]$$

et en décomposant  $[f_a^i]$  suivant le principe évoqué de la superposition des états d'équilibre en un terme  $[f']$  dû aux déplacements seuls et en terme  $[f'']$  dû aux charges seules nous obtenons alors :

$$[f_a^i] = [f_a'^i] + [f_a''^i]$$

Enfin , compte tenu de sa définition nous pourrions exprimer  $[f']$  en fonction des déplacements des extrémités de la barre soit :

$$[f_a'^i] = [k_a^i] [u_a^i] + [l_a^j] [u_a^j]$$

et en exprimant les déplacements  $[u]$  en fonction du repère global nous obtenons :

$$[u_a^i] = [R_a] [u_a^i]$$

d'où :

$$[f_a'^i] = [k_a^i] [R_a] [u_a^i] + [l_a^j] [R_a] [u_a^j]$$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$[F_o^i] = \sum_a \left( [R_a]^{T} [k_a^i] [R_a] [u_a^i] + [R_a]^{T} [l_a^j] [R_a] [u_a^j] + [R_a]^{T} [f_a''^i] \right)$$

A ce niveau , il faut constater que les vecteurs  $[u_a^i]$  représentant les déplacement du noeud  $i$  sont identiques quelque soit la barre concernée. Nous les noterons désormais  $[U^i]$  .Ainsi nous pouvons

formuler notre équation de la façon suivante :

$$[F_o^l] = \sum_a [R_a]^T [f_a^{l'}] + \left( [R_a]^T [k_a^l] [R_a] \right) [U^l] + \sum_a \left( [R_a]^T [l_a^j] [R_a] [U^j] \right)$$

ce que nous pouvons exprimer encor en notant :

$$[F^l] = [F_o^l] - \sum_a [R_a]^T [f_a^{l'}]$$

$$= \left( \sum_a [R_a]^T [k_a^l] [R_a] \right) [U^l] + \sum_a \left( [R_a]^T [l_a^j] [R_a] [U^j] \right)$$

qui est une relation du type :  $[K] [U] = [F]$  .

ou  $[F]$  représente le vecteur force et  $[U]$  les déplacements des noeuds ,  $[K]$  étant appelée la matrice de rigidité globale de la structure. Si  $n$  est le nombre de noeuds de la structure nous aurons un système de  $3n$  équation. De plus en chaque noeud nous connaissons soit les déplacements (dans le cas des noeuds appuis) soit le vecteur  $[F_o]$  dans le cas ou le noeud n'est pas appui (le plus souvent nul , sauf dans le cas ou des forces extérieures sont directement appliquées au noeud , ces forces étant connues de toute façon ). Dans tous les cas le vecteur  $[f'']$  est parfaitement déterminé. Ainsi pour les noeuds appuis , nous connaissons les déplacements (nul le plus souvent) et nous chercherons le vecteur  $[F_o]$  ; et pour les noeuds non appuis , nous chercherons les déplacements. En chaque noeud nous avons donc toujours 3 inconnues (déplacements ou réactions d'appuis). Le système d'équation comportera donc  $3n$  inconnues et ce système de  $3n$  équations à  $3n$  inconnues admet une solution unique que nous chercherons. La méthode de calcul par les matrices de rigidité consitera donc à calculer la matrice de rigidité  $[K]$  à partir de relations évoquées précédemment , calculer le terme  $[f'']$  et dans la mesure du possible le terme  $[F_o]$  , puis on ne retenant que les inconnues

relatives aux déplacements déterminer le vecteur  $[U]$  tel que :

$$[K] [U] = [F]$$

A partir de ces déplacements  $[U]$  et en reprenant les efforts  $[f']$  on déduira alors les efforts réels  $[f]$  dans les barres , ainsi que les réactions des appuis.

#### VII.6.8 VECTEUR FORCE DE LA STRUCTURE :

Le second membre de notre équation c'est le vecteur  $[F]$  qui se décompose en fait en deux parties qui sont :

- un terme dû aux forces appliquées directement aux noeuds .
- un terme dû aux forces appliquées sur les barres .

Nous avons vu que nous pouvions calculer notre matrice  $[K]$  du système d'équation :

$$[F] = [K] [U]$$

Dans cette partie nous allons déterminer le vecteur  $[F]$  qui représente l'ensemble des forces. Lors de l'équation d'équilibre des noeuds , nous avons vu que  $[F^l]$  se décomposait sous la forme :

$$[F^l] = [F_o^l] - \sum_a [F_a'^l]$$

- le terme  $[F_o^l]$  représentant les forces extérieures appliquées au noeud :

ces forces sont soit des actions ponctuelles connues ponctuelles connues exercées sur des noeuds non appuis , soit les réactions d'appuis. Ainsi le terme  $[F_o^l]$  est connu pour les noeuds non appuis et inconnu pour les noeuds appuis.

- le terme  $[F_a'^l] = [R_a]^T [F_a'^l]$  qui correspond aux forces résultant des charges appliquées sur les barres en considérant celle-ci sans déplacements :

ce terme est toujours connu. On voit que le terme  $[F^l]$  est parfaitement déterminé pour les noeuds non appuis , ie pour tous les noeuds dont on cherche le déplacement. Pour les noeuds



appuis , ou justement l'un des buts du problème est de déterminer ces réactions d'appuis. En ce qui concerne le terme en  $[F'_c]$  il est nécessaire pour chaque barre de calculer les efforts résultant des charges qui lui sont directement appliquées , en la considérant isolée de la structure et encastrée à ses deux extrémités. Donc les charges peuvent avoir "trois" possibilités de direction :

- pour les charges sur les noeuds :

- \* direction X (force horizontale de nature sismique)
- \* direction Y (force verticale dû au poids du poteau , effort tranchant dû aux consoles , poids des planchers et des poutres ainsi que le poids propres des voiles).
- \* couple (moment concentré au noeud , dû aux consoles éventuelles)

#### VII.6.9 CONDITIONS AUX LIMITES :

Arrivé à ce stade des calculs , ou nous connaissons la matrice  $[K]$  complète et le vecteur  $[F]$  , et avant de passer à la résolution du problème , nous allons tenir compte des conditions aux limites , ce qui signifie prendre en considération les appuis. Le vecteur est complètement déterminé pour tous les noeuds non appuis et encore imparfaitement connu pour les noeuds appuis. Néanmoins , le but de notre formulation étant de rechercher les déplacements des noeuds , nous pourrons donc essayer de supprimer les équations correspondant aux noeuds qui ont des déplacements connus (dans notre cas ce sont des déplacements nuls).

1<sup>ère</sup> Méthode :

(Méthode de réarrangement du système)

On divisera notre système d'équation en deux sous-systèmes :

- l'un correspondant aux noeuds non appuis .
- l'autre correspondant aux noeuds appuis .

Au niveau de la matrice , ceci peut se traduire par une

permutation des lignes et des colonnes. Nous pouvons donc mettre notre système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

- $[U_1]$  : vecteur déplacement de tous les noeuds appuis inconnus .
- $[U_2]$  : vecteur déplacement de tous les noeuds appuis , connus ( $[U_2]=0$ ).
- $[F_1]$  : vecteur force pour les noeuds non appuis ; ce vecteur est parfaitement déterminé.
- $[F_2]$  : vecteur force pour les noeuds appuis ; ce vecteur n'étant pas complètement connu.

On se ramène donc à une résolution en deux temps :

- tout d'abord détermination de  $[U_1]$  à partir de l'équation :

$$[K_1] [U_1] = [F_1]$$

- connaissant les déplacement  $[U_1]$  , nous déduisons  $[F_2]$  par :

$$[K_2] [U_1] = [F_2]$$

et à partir de  $[F_2]$  nous pouvons retrouver les réactions d'appuis ie les termes  $[F_0^i]$  (les termes  $[F_a^i]$  dus aux forces sur les barres sont connus).

## 2<sup>ème</sup> Méthode :

(Méthode du terme unité sur la diagonal)

Dans cette méthode , nous allons disposer d'un tableau qui nous permet de savoir si un noeud est un non appui , le but étant bien sûr d'éliminer la résolution des termes provenant des noeuds appuis. La première méthode envisagée précédemment étant relativement complexes aux niveau informatique , pour cela nous choisirons la deuxième méthode qui conduit bien sûr au même résultat. Ceci consiste à conserver la disposition de la matrice tout en remplaçant les lignes et les colonnes correspondant aux noeuds par des 0 en mettant toutefois un 1 pour le terme

diagonala (afin d'éviter que la matrice ne soit singulière). De même on placera un 0 sur la ligne correspondante du vecteur force. Ainsi si  $u_k$  est l'inconnue du déplacement, nous aurons à résoudre sur cette ligne :  $1 \times u_k = 0$ , d'où  $u_k = 0$ , ce qui est bien le résultat espéré pour un appui. De plus le terme  $u_k$  n'interviendra dans aucune autre équation, compte tenu de la colonne de 0.

$$\begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

[K]  
Complète
[F]
[K]  
Demi-bande
[F]

Cette maniere de programmation a l'avantage ainsi, outre sa simplicité de ne pas bouleverser l'ordre de la matrice.

3<sup>ème</sup> Methode :

(Méthode du terme diagonal dominant)

Elle consiste à ajouter aux termes diagonaux de la matrice [K] correspondants aux noeuds fixes un nombre très grand par rapport à tous les termes  $K_{ij}$ , ce qui revient à remplacer :

- $K_{ii}$  par  $K_{ii} + \alpha$
- $F_i$  par  $\alpha \cdot U_i$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & & K_{1n} \\ & & & & \\ K_{l1} & & & & K_{ln} \\ & & & & \\ K_{n1} & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \\ U_l \\ \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \\ \alpha \cdot U_l \\ \\ F_n \end{bmatrix}$$

L'équation i s'écrit :

$$\alpha U_i + \left[ \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j \right] = \alpha \cdot \bar{U}_i$$

Elle admet la solution approchée :

$$U_i \simeq \bar{U}_i \quad \text{si} \quad \alpha \cdot \bar{U}_i \gg \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j$$

Le terme est choisi selon la précision de l'ordinateur , ceci conduit à une erreur sur  $U_i$  qui est du même ordre que la précision de l'ordinateur.

REMARQUE :

Dans le cadre de notre travail nous avons utilisés la méthode du terme diagonal unité.

#### VII.6.10 RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION LINEAIRE :

Nous avons à résoudre le système linéaire d'équation :

$$[K] [U] = [F]$$

A ce sujet on peut constater qu'il serait intéressant de connaître directement la matrice inverse de la matrice  $[K]$  . Cette résolution permettrait alors une fois  $[K]^{-1}$  connue , de déterminer directement  $[U]$  , connaissant  $[F]$  à partir de

$$[U] = [K]^{-1} [F]$$

Néanmoins , les algorithmes développées montrent qu'il est très nettement plus simple et plus rapide de résoudre un système d'équations plutôt que de calculer une matrice inverse. Nous nous contenterons d'une résolution de systèmes linéaires d'équations.

### VII.6.10.1 METHODE DIRECTE :

Les méthodes directes conduisent à la solution en un nombre d'opérations connu à priori .

#### a/ Méthode de GAUSS (ou de substitution) :

Elle consiste à exprimer successivement chacune des inconnues en fonction des autres , puis remplacer dans les autres équations cette inconnue par l'expression obtenue. Par cette méthode on élimine à chaque fois une inconnue , jusqu'à la dernière équation qui fournit alors la première solution. Celle-ci connue , on reprend l'avant dernière équation qui fournit alors la deuxième solution , et ainsi de suite jusqu'à la première équation . Nous allons expliciter cette formulation mathématique , très proche de nombreuses solutions manuelles. Nous partons donc de :

$$k_{11} u_1 + \sum_{l=2}^n k_{1l} u_l = f_1$$

d'où on déduit (si  $k_{11} \neq 0$  )

$$u_1 = \frac{1}{k_{11}} \left( f_1 - \sum_{l=2}^n k_{1l} u_l \right)$$

remplaçons  $u_1$  par cette valeur dans l'équation  $j$  , qui est :

$$k_{j1} u_1 + \sum_{l=2}^n k_{jl} u_l = f_j$$

nous obtenons :

$$\frac{k_{j1}}{k_{11}} \left( f_1 - \sum_{l=2}^n k_{1l} u_l \right) + \sum_{l=2}^n k_{jl} u_l = f_j$$

ou encore :

$$\sum_{l=2}^n \left[ k_{jl} - \frac{k_{jl} k_{1l}}{k_{11}} \right] u_l = f'_j - \frac{k_{1j}}{k_{11}} f_1$$

Cette équation étant valable pour  $j = 2$  jusqu'à  $n$ .

On continuera ensuite pour les lignes 2, 3 jusqu'à  $n-1$  où on obtiendra alors :

$k'_{nn} u_n = f'_n$  (le ' indique que les termes ont été modifiés par calcul successifs), ce qui nous donnera un  $u_n$  par simple division puis en reprenant l'équation  $n-1$ , ....., jusqu'à 1 nous déterminerons les valeurs  $u_l$  en utilisant la dernière équation de la ligne  $i$  :

$$k'_{ii} u_i + \sum_{j=i+1}^n k'_{ji} u_j = f'_i$$

**b/ Methode de cholesky :**

Nous pouvons utiliser pour la résolution du système un algorithme plus efficace que la méthode de résolution de GAUSS ; il s'agit de la décomposition de CHOLESKY, qui s'applique parfaitement aux matrices symétriques. Le principe de cet algorithme est de décomposer la matrice de rigidité globale de la structure  $[K]$  en un produit d'une matrice triangulaire inférieure  $[L]$ , une matrice diagonale  $[D]$  et une matrice supérieure  $[L^T]$  soit donc :

$$[K] = [L] [D] [L^T]$$

de plus on a  $[L] = [L^T]^T$  et ces matrices triangulaires sont prises avec des 1 sur la diagonale.

L'algorithme de cette méthode est le suivant :

$$\left[ \begin{array}{l} a_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (a_{ki})^2 \\ a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} \cdot a_{kj} \right] \end{array} \right]$$

$$[Ls]^T [D] [Ls] [X] = [F]$$

de plus [Ls] étant une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale alors [Ls] [Ls]<sup>T</sup> = [I].

[I] : matrice identité.

d'où on obtient :

$$[D] [Ls] [X] = [Ls]^T [F]$$

On calcul donc [Ls]<sup>T</sup> [F] et on se ramène à résoudre un système triangulaire identique à celui de GAUSS , et que la précision est meilleure.

D'autre part on peut procéder à la résolution en deux étapes :

- Décomposition de la matrice de rigidité .
- Résolution du système .

La première étape ne fait jamais intervenir le second membre de l'équation. Ainsi , la décomposition peut-être faite une fois pour toute et la résolution est appliquée successivement aux différents cas de chargement (G,Su,Si).

#### VII.6.10.2 METHODE ITERATIVE :

Ces méthodes conduisent à la solution par succession d'améliorations d'une solution approchée , le nombre d'iterations nécessaires étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice [K].

a/ Methode de GAUSS-SEIDEL :

A partir des valeurs approximatives initiales des inconnues :

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} & & & & & \textcircled{0} \\ X_1 & , & X_2 & , & X_3 & , & \dots & , & X_n \end{array} \right]$$

On obtient d'autres valeurs approximatives successives :

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & & & & & \textcircled{k} \\ X_1 & , & X_1 & , & X_1 & , & \dots & , & X_1 \end{array} \right]$$

D'après l'algorithme suivant :

$$1^{\circ} - \quad X_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k-1)} \right]$$

$i = 1, n$

$$2^{\circ} - \quad \text{Arrêter si } \left| X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)} \right| < \epsilon_1$$

ou :

$$\frac{\left| X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)} \right|}{\left| X_i^{(k)} \right|} < \epsilon_2 \quad K = 1, 2, \dots, K_{\text{MAX}}$$

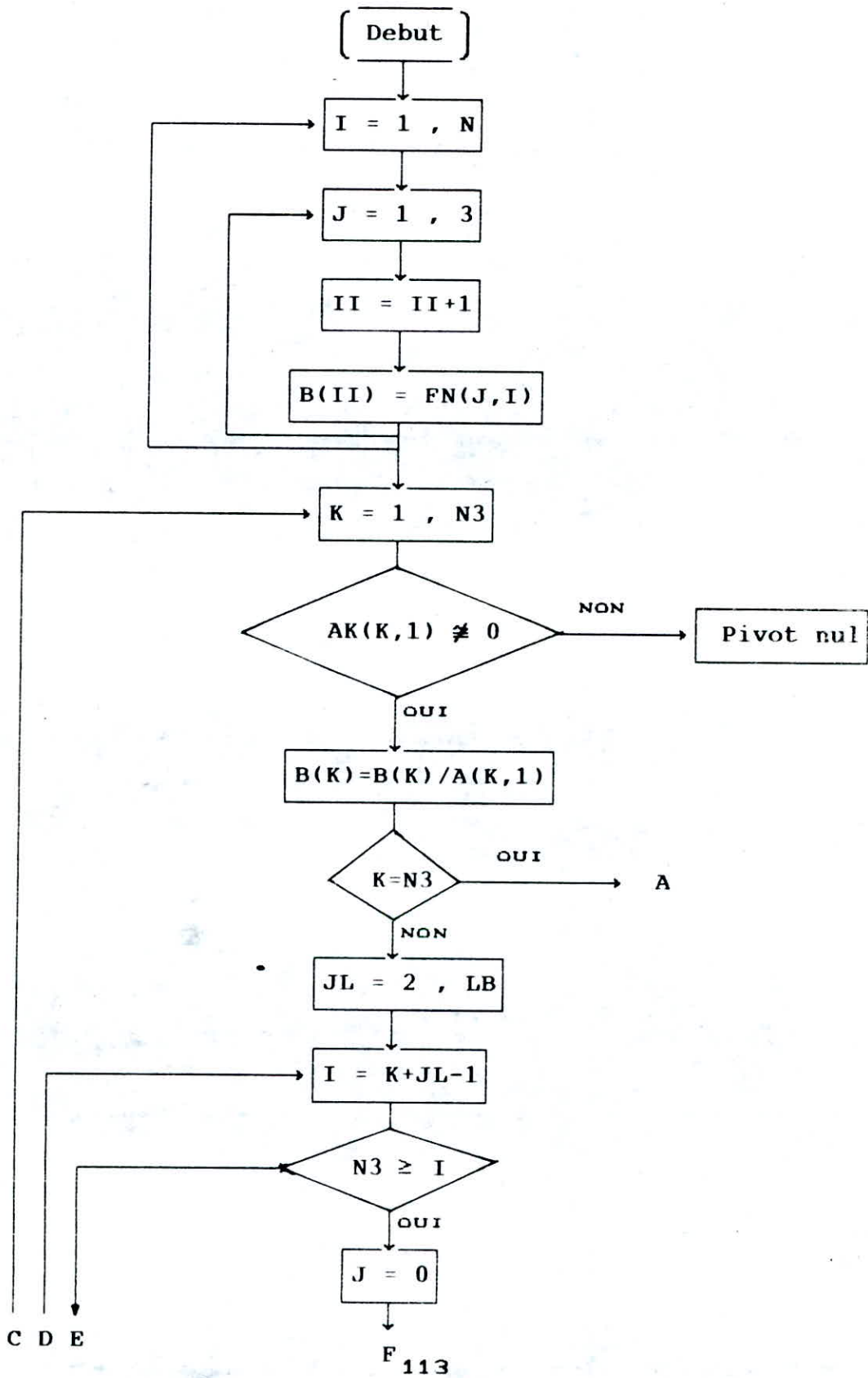
$$\epsilon_2 = 10^{-2} \quad \text{et} \quad \epsilon_1 = 10^{-7}$$

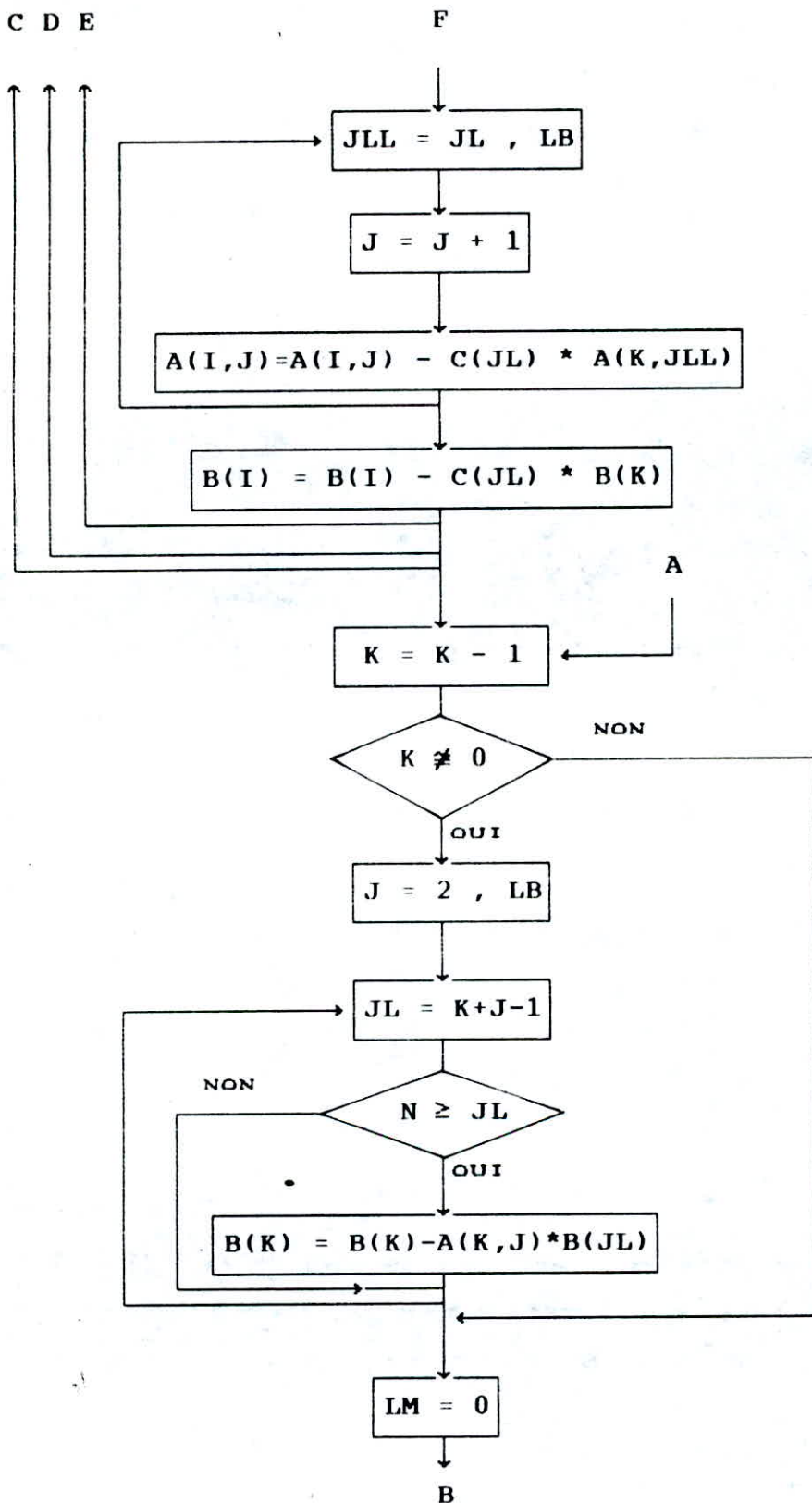
REMARQUE :

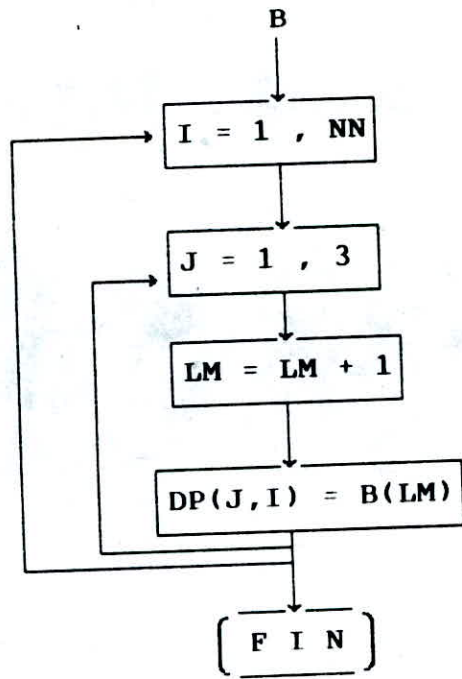
Dans le cadre de notre travail, nous avons utilisé une méthode directe qui celle de GAUSS, on lui adoptant un stockage en BANDE dont l'organigramme est représenté ci-dessus.



VII.6.11 ORGANIGRAMME DE RESOLUTION DU SYSTEME (GAUSS POUR MATRICES BANDE ) :





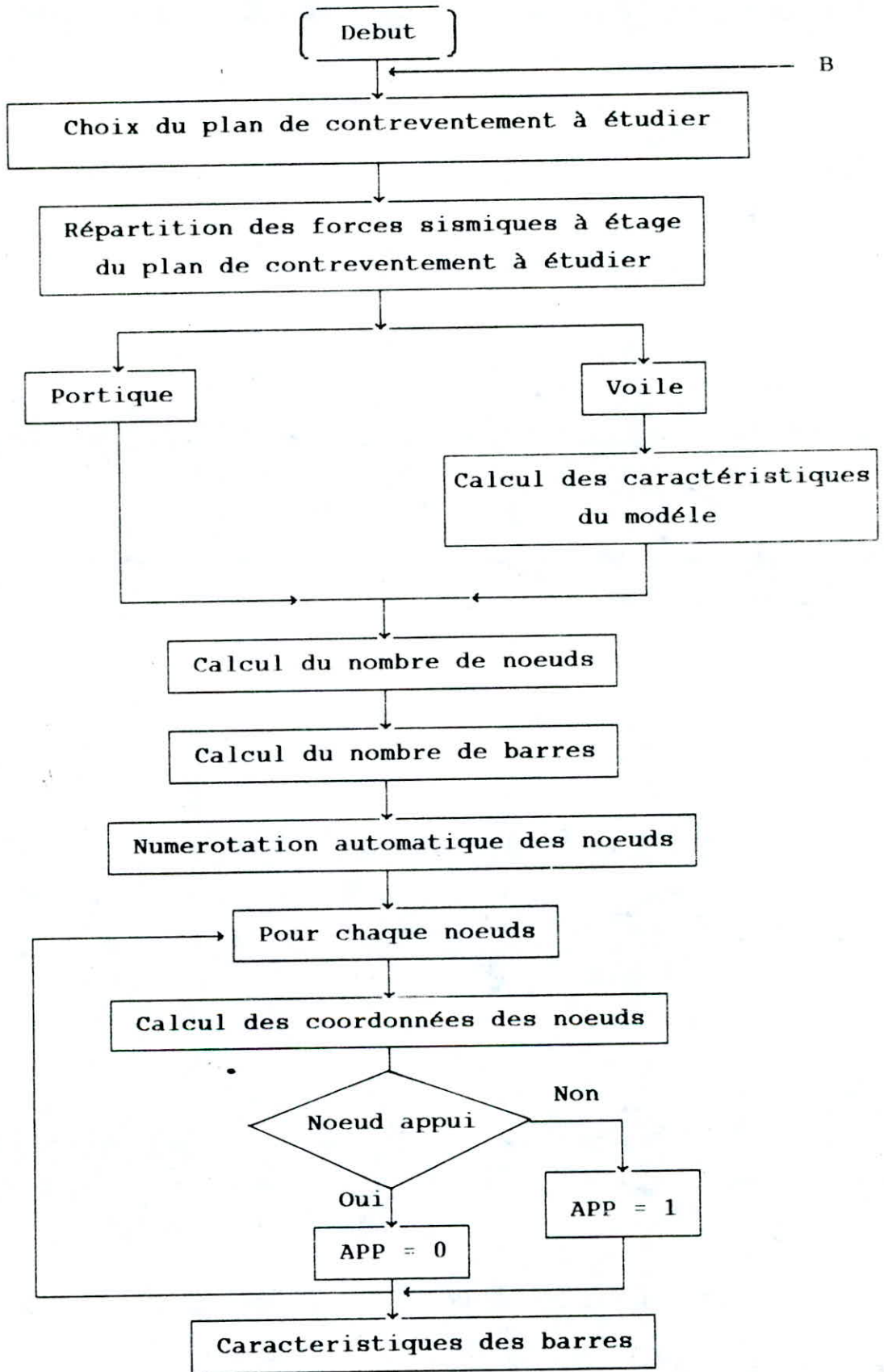


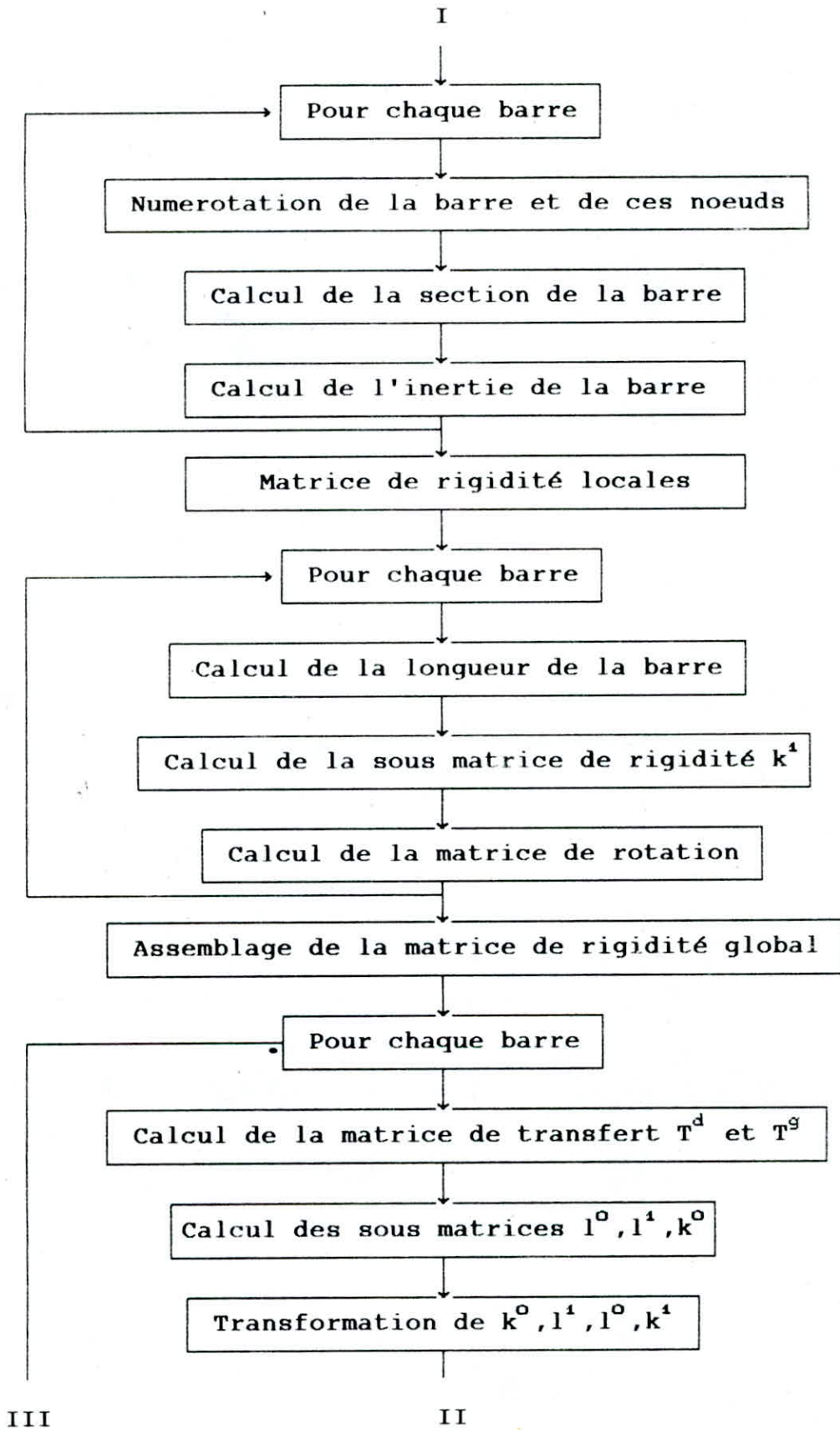
## VII.7 APPLICATION A L'INFORMATIQUE :

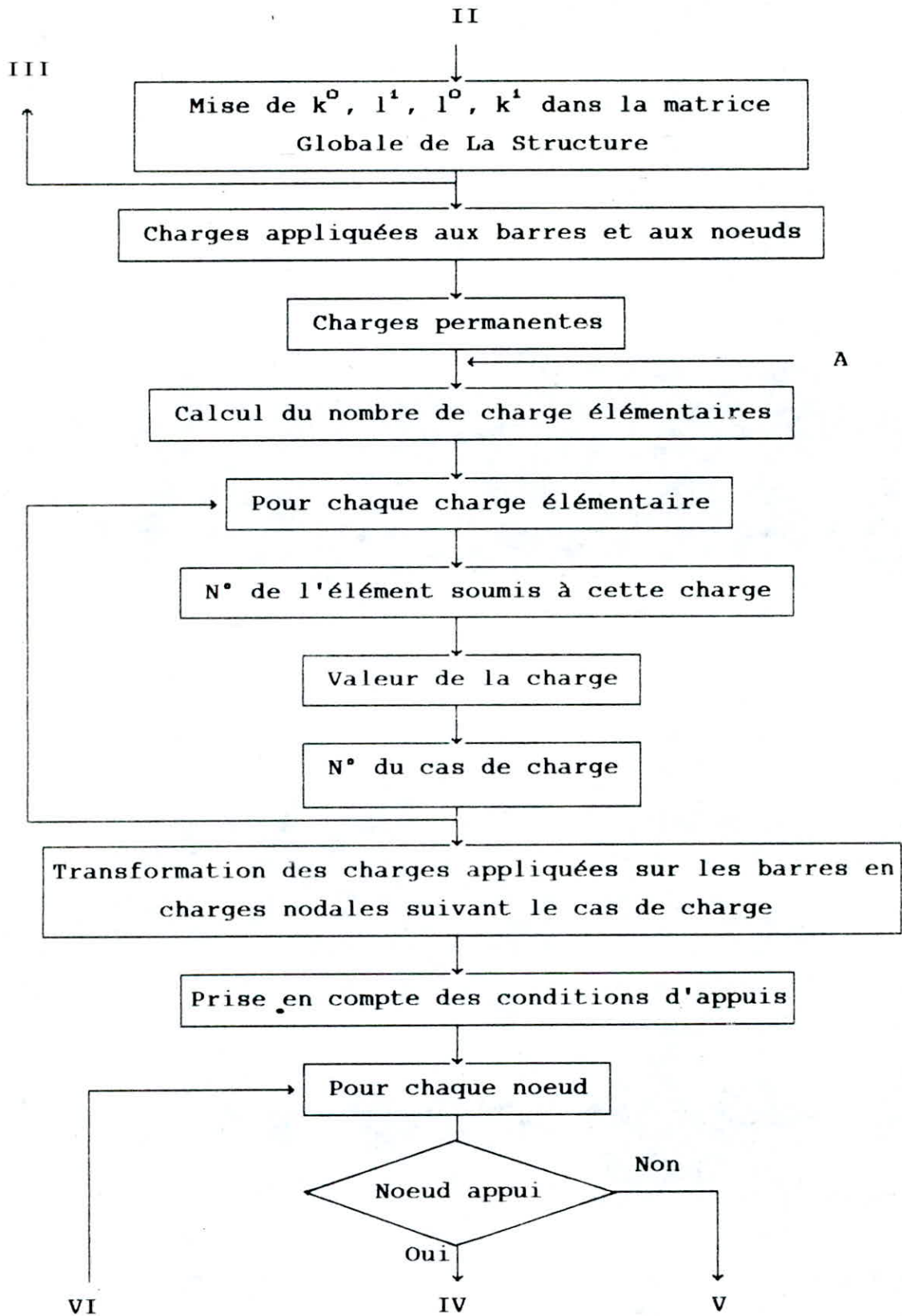
Le but de ce paragraphe est d'expliquer à partir d'un organigramme général les différentes phases de la mise en oeuvre de la méthode des déplacements au niveau de la programmation .

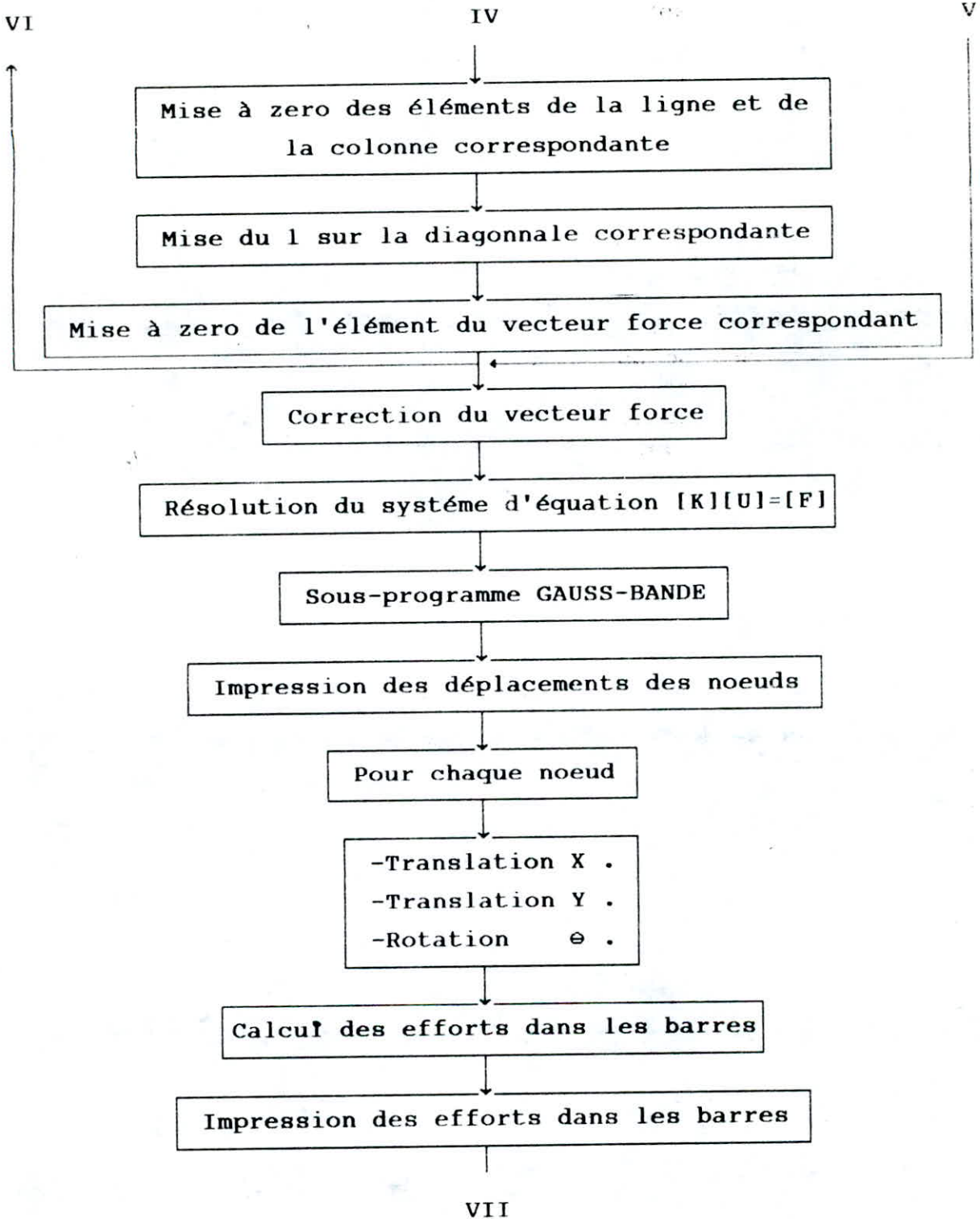
### VII.7.1 ORGANIGRAMME :

Organigramme général pour le calcul des efforts dans les barres .



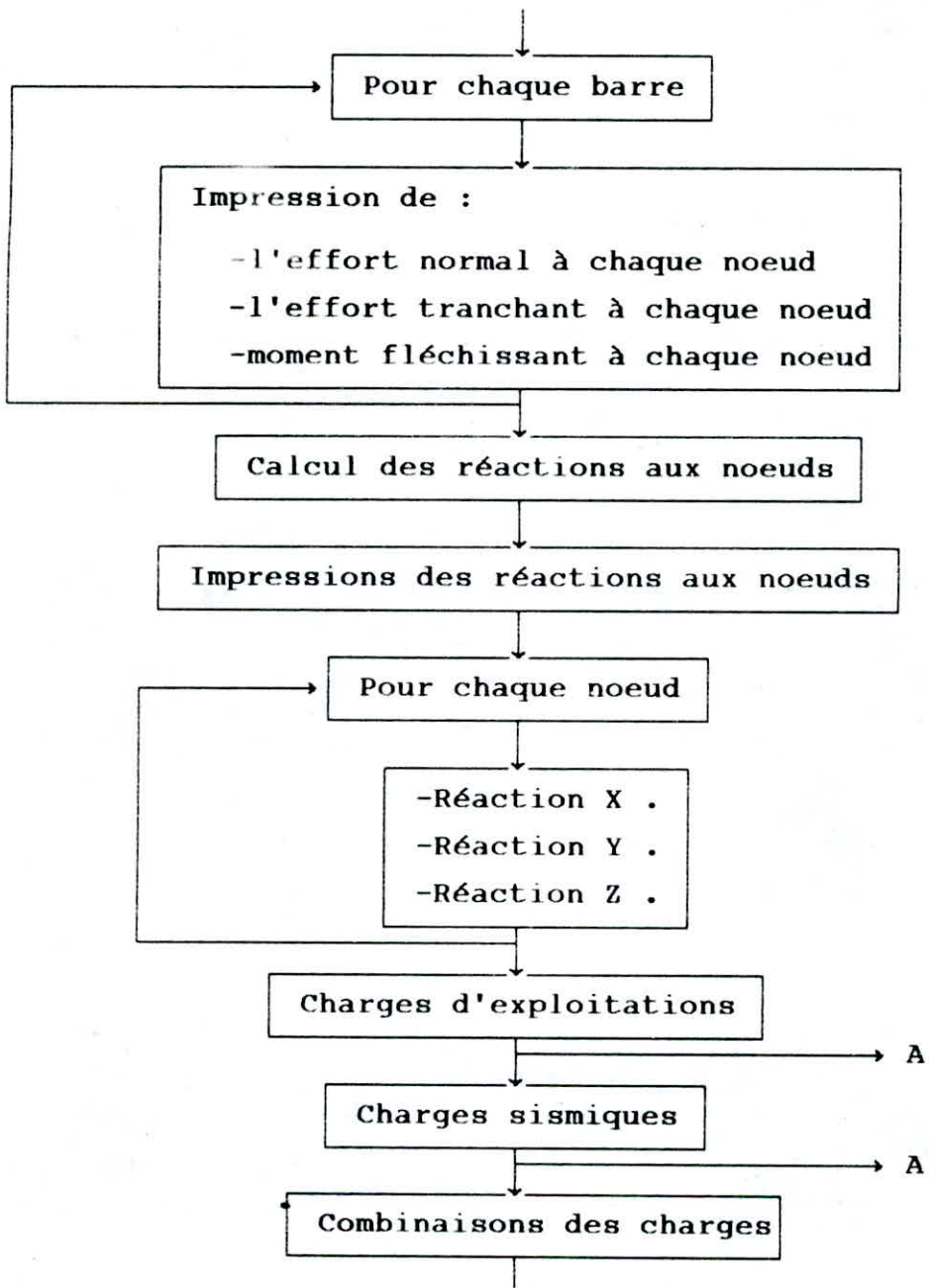






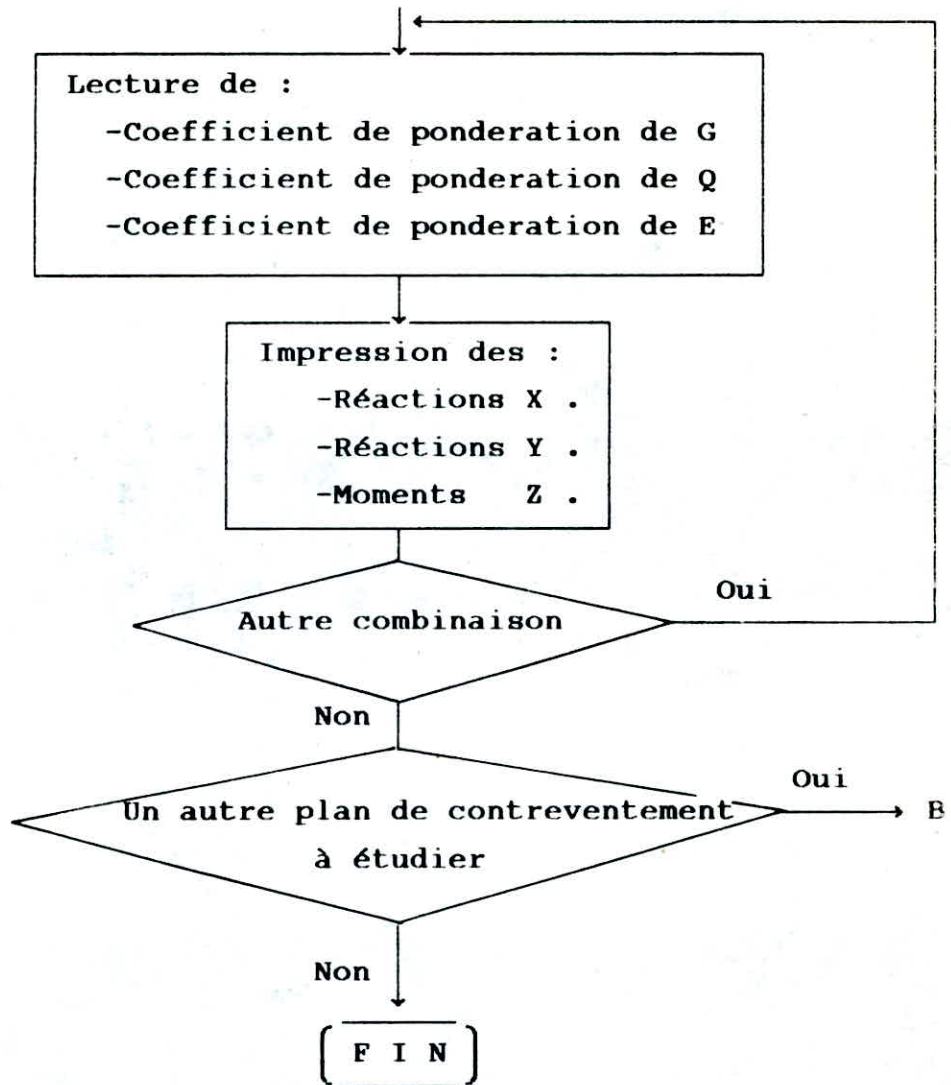


VII



VII

VIII



***CHAPITRE VIII***

***CONCLUSION***

## VIII CONCLUSION :

Il existe de nombreux logiciels de calcul des structures , mais le logiciel qu'a fait l'objet de notre projet de fin d'étude (intitulé 'LESM') a la particularité d'être programmé et exécuté sur un ordinateur puissant qu'est le VAX .

Son objectif est le calcul des éléments porteurs d'une structure (en voile , autostable , ou mixte) en vu de la détermination de leurs portance vis-à-vis des efforts latéraux (sismiques en particulier) et des efforts verticaux (charges permanentes et surcharges d'exploitations) ; il offre le moyen d'étudier des structures droites en B.A avec :

- décrochement horizontal et vertical .
- variation du type de plancher dans un même étage .
- existence de vide .
- variation des charges et surcharges dans un même étage .

Il présente des avantages pratiques parmi lesquels nous citons :

- l'introduction des données peut se faire en mode interactif illustrée par des commentaires (messages) .

- seules les données définissant les caractéristiques mécaniques et architecturales sont déduites à partir de celles-ci.

- possibilité de correction des données en cas d'une erreur d'introduction .

- l'éventail d'erreurs et réduit au maximum par l'utilisation de méthodes exactes tel que :

\* JACOBI pour la détermination des modes de vibration du bâtiment .

\* METHODES DES DEPLACEMENTS pour le calcul des efforts internes dans les portiques et les voiles en modélisant ceux-ci en éléments finis de barres .

- toutes les charges sollicitant le voile sont prises en considération y compris son poids propre .

- les efforts dans les sections intermédiaires des barres peuvent être calculer manuellement à partir des barres fournies

par le logiciel sans pour autant recalculer toute la structure .

- le logiciel peut aussi calculer les efforts sous n'importe quelle combinaison de charges permanentes , surcharges d'exploitations et forces sismiques pour chaque voile et/ou portique longitudinal ou transversal du bâtiment et cela en tenant compte de l'effet de l'effort tranchant .

- en plus des avantages cités ci-dessus il ne faut pas oublier le plus important , la vitesse d'exécution , qu'est le but de l'élaboration de tout logiciel . Ainsi grâce à cet outil , le calcul des éléments porteurs d'une structure peut se faire en quelques minutes .

Dans le calcul des structures la partie calcul des efforts internes (*et réactions*) conditionne beaucoup l'aspect 'économie ' de l'ouvrage , savoir si l'on pourra construire avec tel type de barre ou adopter telle épaisseur de voile est déjà intéressant à connaître mais il est encore plus intéressant de savoir si l'on pourra ou non réduire telle ou telle section et ainsi diminuer sensiblement le poids de l'ouvrage tout en conservant sa stabilité aux efforts extérieurs réalisant ainsi une économie de matériaux . Notre logiciel peut contribuer d'une manière très satisfaisante à atteindre de tels objectifs .

Enfin , l'élaboration d'un tel logiciel nous a permis de nous initier dans le domaine du calcul automatique des structures et de l'analyse de leur comportement dynamique , ainsi que dans le domaine de l'informatique qui est un outil très indispensable pour l'ingénieur .

*BIBLIOGRAPHIE*

## B I B L I O G R A P H I E

a/ *Calcul des structures en informatique*

J-F. AUBOIN

Ed Eyrolles 1983

b/ *Modélisation des structures pour calcul sur ordinateur*

A. CAPRA & M. HAUTCOEUR

Ed Eyrolles 1983

c/ *Une présentation de la méthode des éléments finis*

G. TOUZOT & G. DHATT

Collection de l'université de COMPIEGNE

d/ *Calcul dynamique des structures en zone sismique*

A. CAPRA & V. DAVIDOVICI

Ed Eyrolles 1984

e/ *Dynamique des structures*

P.W.CLOUGH & J.PENZIEN

Ed Mc GRAW-HILL

f/ *Numerical methods in finite element analysis*

K.J BATH & WILSON

g/ *Conception et calcul des structures soumises aux séismes*

M. DAOUDI , M. RILI & A. SALHI

OPU 1984

h/ *Règles parasismiques Algériennes 81 (version 83)*

C.T.C ENAL

