

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Investigation Analytique et
Numérique de Structures en
Coques Mince

Proposé par :

Pr. B. TILIOUINE

Mr. M. BERRAH

Etudié par :

A, DJEBLOUNE

N. AIT-BELKACEM

Dirigé par :

Mr. M. BERRAH

PROMOTION JUIN 1991

- دعاء -

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

اللهم آت نفس تقواها وزكها
انت خير من زكاهها وانت

وليها ومولاها

اللهم اني اعوذ بك من شر ما عملت
او امرت به ومن شر ما لم اعمل
واغفر لي خطيئتي وجهلي واسراني
في اسري وما انت اعلم به
مني..

Ministère aux Universitaires.
Ecole Nationale Polytechnique.
Département : Génie Civil.
Promoteur : M. M. BERRAH
Elèves
Ingénieurs: A. Djebbloun et N. Ait Belkacem

وزارة الجامعات
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
مصلحة: الهندسة المدنية.
موجه:
تلميذ مهندس:

الموضوع: بحث تحليلي وحسابي في هياكل المقوِّعات ذوات التناظر المحوري.

ملخص: يتمحور هذا المشروع حول بحث في أساليب المعالجة والحساب لهياكل المقوِّعات ذوات التناظر المحوري. وتعرض فيه الدراسة التحليلية الكلاسيكية و الدراسة الحديثة باستخدام برنامجين اليبين، أولهما يتمثل في طريقة العناصر المحددة، والثاني يتمثل في طريقة العناصر ومن خلالهما نتعلم على تعيين المجاميل الإنمائية لهذه الهياكل منها الإجهادات والإنتقالات.

Sujet : Investigation analytique et numérique de structures en coques minces

Resume: Le présent sujet est relatif aux structures en coques minces. Il s'articule sur deux volets. Le premier ayant trait à une investigation analytique. Quant au second, il y a eu développement de logiciels de calcul permettant l'obtention des champs de déplacements et de contraintes.

Subject: Analytical and Numerical Invesgation of thin shell structures.

Summary: The present work deals with thin shell structures. It is twofold. The first part is relative to an analytical investigation, while the second one is of a numerical nature. For both parts, au analysis computer programme has been developed which allows the obtaining of displacement and stress fields.

DEDICACES

A mon père.

A ma mère.

A mes frères et soeurs.

A toute ma famille.

A tous mes vrais amis.

Nacer eddine Ait belkacem

A mes très chers parents.

A mes frères et soeurs.

A toute ma famille.

Et à tous ceux que j'aime.

Abd el hay Djebloun

*Et à tous les martyrs de ce monde qui sacrifient
leur temps, leur savoir et leur vie pour qu'un
jour le soleil d'Allah brille sur l'Humanité.*

R E M E R C I E M E N T S :

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre profonde gratitude à nos encadreurs ,Messieurs ,B. TILIOUINE , et M. BERRAH pour nous avoir estimé capable de traiter ce sujet, pour les efforts qu'ils n'ont pas ménagé pour le bon déroulement de notre travail, ainsi que pour nous avoir soutenu moralement.

Nos remerciements vont aussi à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin et nous ont facilité notre tâche ,en l'occurrence : M^r A. YAHIAOUI et M^r O. BELHADJ.

Sans oublier l'administration de notre école qui a fait de son mieux pour mettre à notre disposition les différents moyens de l'école afin d'alléger la tâche des étudiants. Et en particulier les responsables et le personnel du centre de calcul.

Que tous ceux qui ont contribué à notre formation trouvent ici, l'expression de nos profondes reconnaissances .

S O M M A I R E

CHAPITRE I : INTRODUCTION.

CHAPITRE II : THEORIE DES COQUES MINCES A SYMETRIE AXIALE.

1. Introduction.
2. Hypothèses de calcul.
3. Théorie membranaire.
 - 3.1. Détermination des efforts internes.
 - 3.2. Détermination des déplacements.
4. Théorie de flexion pour les coques minces de révolution chargées symétriquement.
 - 4.1. Théorie de flexion pour les coques sphériques.
 - 4.2. Théorie de flexion pour les coques cylindriques.

CHAPITRE III : METHODE MATRICIELLE APPLIQUEE AUX COQUES MINCES
AXISYMETRIQUES.

1. Introduction.
2. Procédure de la méthode
3. Interaction entre coques de géométries variables.
4. Tables.

CHAPITRE IV : METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX COQUES
MINCES AXISYMETRIQUES.

1. Introduction.
2. Critères de convergence.
3. Développement de l'élément de coque tronconique.
 - 3.1. Introduction.
 - 3.2. Etapes de calcul de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément fini tronconique.
 - 3.3. Calcul de $[B]$, $[H]$ et $[B]^t \cdot [D] \cdot [B]$.
 - 3.4. Exemple.
4. Vecteur charge élémentaire.

CHAPITRE V : PROGRAMMATION

A_ Programmation de la méthode des éléments finis.

- 1.Introduction.
- 2.Organigramme.
- 3.présentation détaillée du programme.

B_ Programmation de la méthode matricielle.

- 1.Programme principal.
- 2.Sous-programmes.
- 3.Organigramme.

CHAPITRE VI : EXEMPLES ET APPLICATIONS.

- 1.Exemple 1:Cylindre soumis à une pression hydrostatique.
- 2.Exemple 2:Dôme sphérique fermé chargé radialement.
- 3.Exemple 3:Dôme sphérique fermé chargé radialement.
- 4.Exemple 4:Dôme sphérique ouvert soumis à un moment concentré au niveau de l'ouverture.
- 5.Exemple 5:Dôme sphérique ouvert chargé radialement.

CHAPITRE VII : CONCLUSION GENERALE.

Références Bibliographiques :

CHAPITRE I INTRODUCTION :

De nombreuses constructions font un large appel aux coques; les tôles d'acier des coques de navires, soumises à la pression de l'eau; les dômes et réservoirs à parois minces, de toutes formes, soumis à des pressions intérieures ou extérieures; les chaudières; et récemment, les constructions aéronautiques; les missiles... etc.

Dans le cas le plus général, tout élément de structure ou de construction est traité comme étant un corps continu élastique et à trois dimensions, mais dans certains cas, où une des dimensions de l'élément est très faible par rapport aux deux autres, l'élément peut être considéré comme bidimensionnel, si la surface de l'élément est plane c'est une plaque, si elle est courbe, l'élément est une coque.

Il existe une importante différence dans le comportement des plaques et des coques sous l'action de charges extérieures. L'équilibre d'un élément de plaque soumis à une charge transversale n'est seulement possible que par l'action des moments de flexion et de torsion accompagnés d'efforts tranchants; tandis qu'une coque, en général, est capable de transmettre la surface de charge par des contraintes de membrane qui agissent parallèlement au plan tangent en tout point de la surface moyenne et sont distribuées uniformément à travers l'épaisseur de la coque.

De ce fait, les coques sont plus rigides et plus économiques que les plaques, une fois placées dans les mêmes conditions.

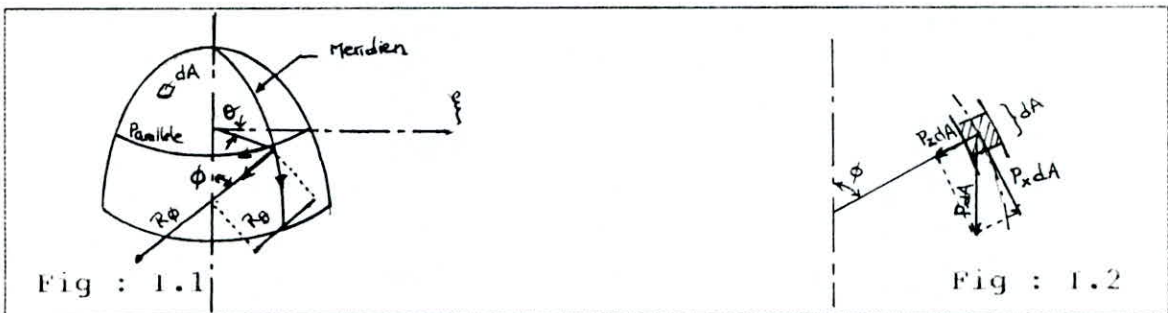
Une coque est entièrement définie géométriquement lorsqu'on spécifie la forme de sa surface moyenne et son épaisseur en chaque point. Si cette épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions de la coque et à ses rayons de courbure, la coque est dite mince et est régie par la théorie des coques minces, sinon, elle est dite épaisse et est régie par la théorie des coques épaisses.

Les coques auxquelles on va s'intéresser sont les coques minces en forme de surface de révolution chargées symétriquement par rapport à leur axe.

CHAPITRE II THEORIE DES COQUES MINCES A SYMETRIE AXIALE :

II.1/ INTRODUCTION :

Une surface de révolution est obtenue en tournant une courbe plane autour d'un axe passant par le plan de la courbe. Cette courbe est alors appelée : méridien, et son plan est un plan méridien. L'intersection de la surface avec des plans perpendiculaires à l'axe de rotation sont des cercles parallèles appelés : parallèles. les méridiens et les parallèles forment ainsi les lignes de courbure principales. Les notations suivantes sont utilisées dans l'établissement des équations de la théorie.



ϕ : Angle entre l'axe de révolution et la normale à la coque au niveau du point considéré de la surface moyenne de la coque.

θ : Angle entre r et une ligne définie. ξ

R_ϕ : Rayon de courbure du méridien.

R_θ : Longueur de la normale entre le point considéré de la surface moyenne et l'axe de révolution.

r : Rayon de courbure du parallèle.

Une relation très importante est à noter :

$$r = R_\theta \cdot \sin\phi$$

* Charges extérieures :

Les charges extérieures peuvent être décomposées en trois composantes :

_Une tangente au méridien (suivant l'axe x).

_Une tangente au parallèle (suivant l'axe y).

Une normale à la surface de la coque (suivant l'axe z).

* Contraintes internes :

Les contraintes seront déterminées le long des méridiens et des parallèles définis par les angles ϕ et θ .

Comme forces internes, on trouve au niveau des coques : des forces de membrane, des efforts tranchants, des moments de flexion, et des moments de torsion.

II.2/ HYPOTHESES DE CALCUL :

Des hypothèses simplificatrices sont en général introduites dans le calcul des coques minces :

- a/ Le matériau constructif est supposé continu, homogène, isotrope et élastique.
- b/ Les déformations sont petites par rapport à l'épaisseur de la coque.

On introduit aussi les hypothèses de Love qui sont la transposition des hypothèses de Bernouilli relatives aux poutres, et celles de Kirchhoff relatives aux plaques et qui sont :

- c/ Les points situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une normale à la surface moyenne déformée.
- d/ Les dilatations normales à la surface moyenne sont négligées.
- e/ Les contraintes normales agissant sur des facettes parallèles à la surface moyenne sont négligées.

II.3/ THEORIE MEMBRANNAIRE :

II.3.1- Détermination des efforts internes :

Une structure constituée par un assemblage rigide de plusieurs éléments unidimensionnels est, à priori, statiquement indéterminée; Ce problème compliqué peut être simplifié en supposant les joints articulés; Chaque membrure est alors contrainte axialement, et la structure devient statiquement

déterminée.

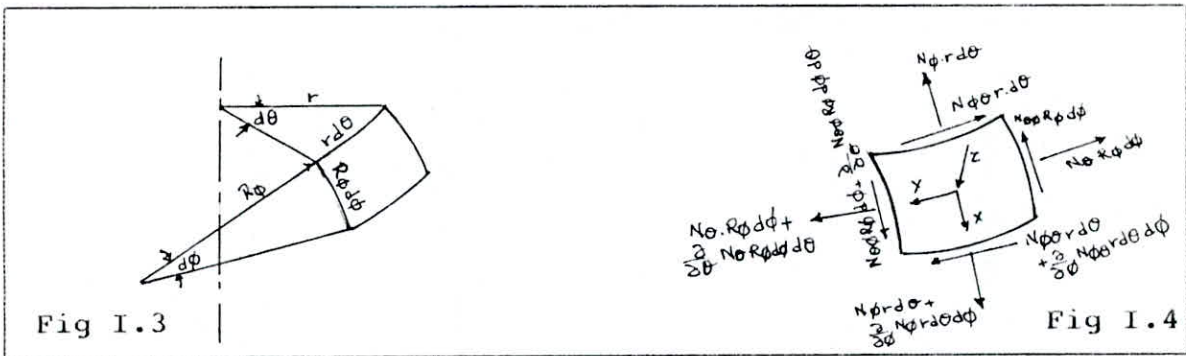
Un raisonnement analogue est utilisé dans le cas des coques. Les liaisons de la coque peuvent être adaptées de façon à n'obtenir en termes de contraintes que des efforts plans cette fois (la coque étant un élément de surface), et le problème devient alors statiquement déterminé. Les inconnues du problème seront : N_ϕ , N_θ , $N_{\phi\theta}$, $N_{\theta\phi}$ (les forces de membrane).

On constatera dans ce cas que :

$$M_\phi = M_\theta = M_{\phi\theta} = M_{\theta\phi} = Q_\phi = Q_\theta = 0.$$

La théorie qui se base sur ces hypothèses est appelée théorie des membranes.

* Equations d'équilibre :



La figure I.3 montre un élément différentiel de la coque dont l'aire est donnée par :

$$dA = r \cdot d\theta \cdot R_\phi \cdot d\phi$$

La figure I.4 montre les forces en équilibre agissant sur l'élément différentiel.

Les composantes des charges extérieures sont données par :

$$X = P_x \cdot r \cdot d\theta \cdot R_\phi \cdot d\phi$$

$$Y = P_y \cdot r \cdot d\theta \cdot R_\phi \cdot d\phi$$

$$Z = P_z \cdot r \cdot d\theta \cdot R_\phi \cdot d\phi$$

Les équations d'équilibre sont tirées à partir de la considération d'un élément différentiel, et de son équilibre sous l'action des charges externes et des efforts internes. Ces équations sont, en fait, des relations entre des quantités

différentielles des efforts internes et sont donc dits équations différentielles.

Les équations d'équilibre qui doivent être satisfaites toujours sont :

$$\begin{aligned} \sum F_i &= 0 : \\ \sum M_i &= 0 : \end{aligned} \quad (I.1)$$

$\sum F_i$: Somme des forces dans la direction i ; $i = x, y, z$

$\sum M_i$: Somme des moments par rapport à l'axe i ; $i = x, y, z$

$$- \sum M_x = 0 :$$

$$- \sum M_y = 0 :$$

Ces deux équations sont toujours satisfaites car les efforts plans ne produisent aucun moment par rapport aux axes x et y .

$$- \sum M_z = 0 :$$

Les valeurs d'ordre supérieur étant négligées, on aura :

$$N_{\phi\vartheta} \cdot r \cdot d\vartheta \cdot R_\phi \cdot d\phi - N_{\vartheta\phi} \cdot r \cdot d\vartheta \cdot R_\phi \cdot d\phi = 0$$

Ce qui conduit à :

$$N_{\phi\vartheta} = N_{\vartheta\phi} \quad (I.2)$$

$$- \sum F_x = 0 :$$

Les termes d'ordre supérieur étant négligés, elle se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (N_\phi \cdot r \cdot d\vartheta) d\phi + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (N_{\vartheta\phi} \cdot R_\phi \cdot d\phi) d\vartheta - N_{\vartheta\phi} \cdot R_\phi \cdot d\phi \cdot d\vartheta \cdot \cos\phi +$$

$$P_x \cdot r \cdot d\vartheta \cdot R_\phi \cdot d\phi = 0 \quad (I.3)$$

$$- \sum F_y = 0 :$$

Se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (N_{\vartheta\phi} \cdot R_\phi \cdot d\phi) d\vartheta + \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi\vartheta} \cdot r \cdot d\vartheta) d\phi + N_{\vartheta\phi} \cdot R_\phi \frac{r \cdot d\vartheta}{R_\phi} \cdot \text{tg}\phi +$$

$$P_y \cdot R_\phi \cdot d\phi \cdot r \cdot d\vartheta = 0 \quad (I.3)$$

$$- \sum F_z = 0 :$$

Se traduit par :

$$N_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta \cdot d\phi + N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot d\phi \cdot d\vartheta \cdot \sin\phi + P_z \cdot R_{\phi} \cdot d\phi \cdot r \cdot d\vartheta = 0 \quad (1.5)$$

Ainsi l'équilibre de l'élément est régie par trois équations: deux différentielles et une algébrique et qui une fois simplifiées donnent le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi) + \frac{\partial N_{\phi\vartheta}}{\partial \vartheta} R_{\vartheta} - N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot \cos\phi + P_x \cdot R_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi = 0 \\ \frac{\partial N_{\vartheta}}{\partial \vartheta} R_{\phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi\vartheta} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi) + N_{\phi\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot \cos\phi + P_y \cdot R_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi = 0 \\ N_{\phi} \cdot R_{\vartheta} + N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} + P_z \cdot R_{\phi} \cdot R_{\vartheta} = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

On peut remarquer ainsi que les efforts sont ici indépendants des propriétés de rigidité du matériau, la structure étant bien entendu statiquement déterminée.

Dans le cas où la charge est symétrique par rapport à l'axe de révolution de la coque, les équations d'équilibre se limitent à deux équations seulement, car du fait de la symétrie on a :

$$N_{\phi\vartheta} = N_{\vartheta\phi} = 0 \quad ; \quad \text{et} \quad P_y = 0$$

Les équations s'écriront comme suit :

— L'équilibre suivant z :

$$N_{\phi} \cdot R_{\vartheta} + N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} + P_z \cdot R_{\phi} \cdot R_{\vartheta} = 0$$

— L'équilibre suivant x :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi) - N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot \cos\phi + P_x \cdot R_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi = 0$$

Une équation d'équilibre plus pratique peut remplacer la première équation. Elle est obtenue en établissant l'équilibre de la portion de coque au dessus d'un parallèle défini par l'angle ϕ .

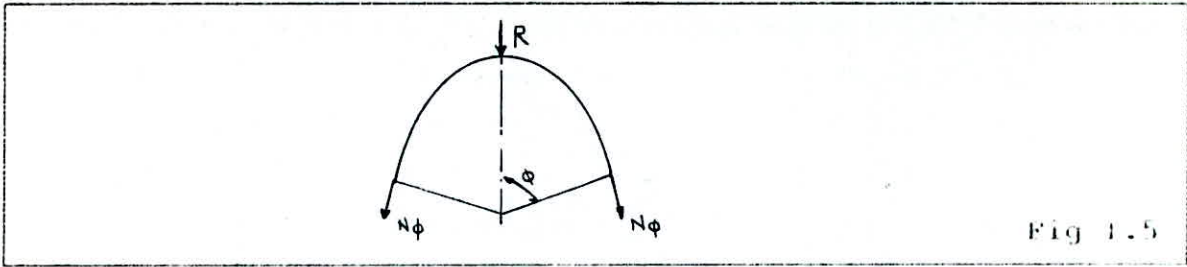


Fig 1.5

R étant la résultante verticale de la charge totale, on aura l'équation suivante :

$$2 \cdot \pi \cdot R_{\phi} \cdot N_{\phi} \cdot \sin^2 \phi + R = 0 \quad (1.7)$$

En fin de compte le système suivant est établis :

$$\begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot R_{\phi} \cdot N_{\phi} \cdot \sin^2 \phi + R = 0 \\ \frac{N_{\phi}}{R_{\phi}} + \frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} = -P_z \cdot R_{\phi} \cdot R_{\theta} \end{cases} \quad (1.8)$$

II.3.2- Détermination des déplacements :

Dans le cas d'un chargement symétrique le déplacement de tout point de la coque possède deux composantes: une tangente au méridien u , et une normale à la surface moyenne w .

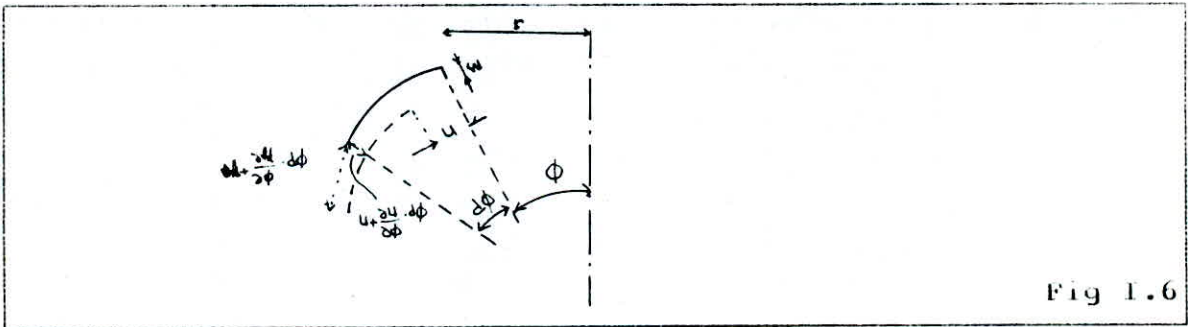


Fig 1.6

La variation totale de l'élément AB due a la déformation est :

$$\frac{du}{d\phi} d\phi - w \cdot d\phi$$

Par conséquent, la déformation de la coque suivant le méridien est :

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{R_{\phi}} \frac{du}{d\phi} - \frac{w}{R_{\phi}} \quad (1.9)$$

Pour un parallèle donné, du fait du déplacement, le rayon r augmente de la valeur :

$$u \cdot \cos\phi - w \cdot \sin\phi$$

La circonférence augmentant proportionnellement à son rayon, et en tenant compte du fait que :

$$r = R_{\phi} \cdot \sin\phi$$

La déformation suivant le parallèle sera :

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{u}{R_{\phi}} \cotg\phi - \frac{w}{R_{\phi}} \quad (1.10)$$

En éliminant w des deux équations 1.9 et 1.10, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{d\phi} - u \cdot \cotg\phi = \frac{1}{Eh} \left[N_{\phi} (R_{\phi} + \mu \cdot R_{\phi}) - N_{\phi} (R_{\phi} + \mu \cdot R_{\phi}) \right] \quad (1.11)$$

dont la solution est :

$$u = \sin\phi \left[\int \frac{f(\phi)}{\sin\phi} d\phi + C \right] \quad (1.12)$$

où :

$$f(\phi) = \frac{1}{Eh} \left[N_{\phi} (R_{\phi} + \mu \cdot R_{\phi}) - N_{\phi} (R_{\phi} + \mu \cdot R_{\phi}) \right]$$

C étant une constante d'intégration dépendant des conditions d'appui.

On peut aussi déterminer les courbures de la coque dans les deux sens méridional et parallèle.

Soit un élément de coque; le côté supérieur de cet élément tourne sous l'effet des déplacements u et w d'un angle :

$$\frac{u}{R_{\phi}} + \frac{dw}{R_{\phi} \cdot d\phi}$$

Pour le côté inférieur la rotation est :

$$\frac{u}{R_{\phi}} + \frac{d}{R_{\phi} \cdot d\phi} + \frac{d}{d\phi} \left[\frac{u}{R_{\phi}} + \frac{dw}{R_{\phi} \cdot d\phi} \right] d\phi$$

Par suite, la variation de courbure du méridien est :

$$\kappa_{\phi} = \frac{1}{R_{\phi}} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{u}{R_{\phi}} + \frac{dw}{R_{\phi} \cdot d\phi} \right] \quad (1.13)$$

Alors que suivant le parallèle elle est :

$$\kappa_{\vartheta} = \left[\frac{u}{R_{\varphi}} + \frac{dw}{R_{\varphi} \cdot d\varphi} \right] \frac{\cotg\varphi}{R_{\vartheta}}$$

*Exemples:

_Dôme sphérique fermé chargé radialement :

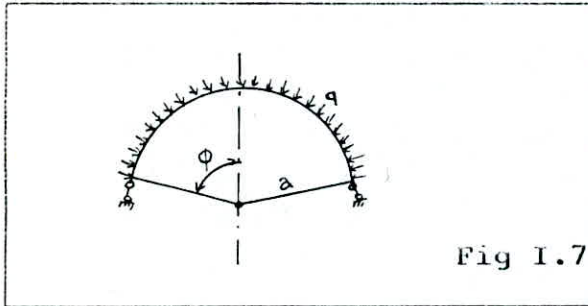


Fig I.7

$$N_{\varphi} = N_{\vartheta} = -\frac{qa}{2}$$

$$\Delta\delta = -\frac{a^2 \sin\varphi}{2 \cdot E \cdot t} (1-\nu)$$

$$\beta = 0$$

_Cylindre chargé hydraustatiquement :

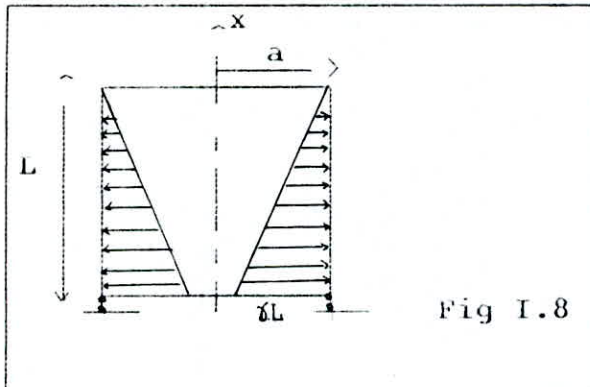


Fig I.8

$$N_x = 0$$

$$N_{\varphi} = \gamma \cdot a \cdot (L-x)$$

$$\Delta\delta = \frac{\gamma \cdot a^2}{Et} (L-x)$$

$$\beta = -\frac{\gamma \cdot a^3}{Et}$$

Les conditions aux limites des coques calculées dans les exemples précédents sont compatibles avec les hypothèses de la théorie des membranes. Ce sont des appuis simples qui permettent aux bordures des coques de se dilater librement sans apparition de moment de flexion ou d'effort tranchant dans la coque, et les réactions des appuis sont tangentes aux méridiens.

Pour de tels appuis, les contraintes calculées par la théorie des membranes représentent avec une grande exactitude les contraintes réelles de la coque, mais, les appuis qu'on utilise, en général, ne vérifient pas ces conditions.

Pour les dômes, par exemple, la disposition des appuis est telle que seules les réactions verticales sont imposées au dôme par les appuis, tandis que les composantes horizontales des forces N_{φ} sont absorbées par un anneau d'appui qui subit un

allongement circonférentiel uniforme. Ce dernier est généralement différent de la déformation le long du parallèle de la coque, il se produit alors une flexion de la coque près de l'anneau d'appui. Seulement, cette dernière a un caractère très localisé, et à une certaine distance de l'anneau d'appui, les contraintes calculées dans les exemples précédents représentent les conditions réelles de contraintes de la coque avec une exactitude satisfaisante.

II.4/ THEORIE DE FLEXION POUR LES COQUES MINCES DE REVOLUTION CHARGEES SYMETRIQUEMENT :

Les efforts considérés dans ce cas sont en plus des efforts plans, ceux indiqués sur les figures I.9 et I.10.

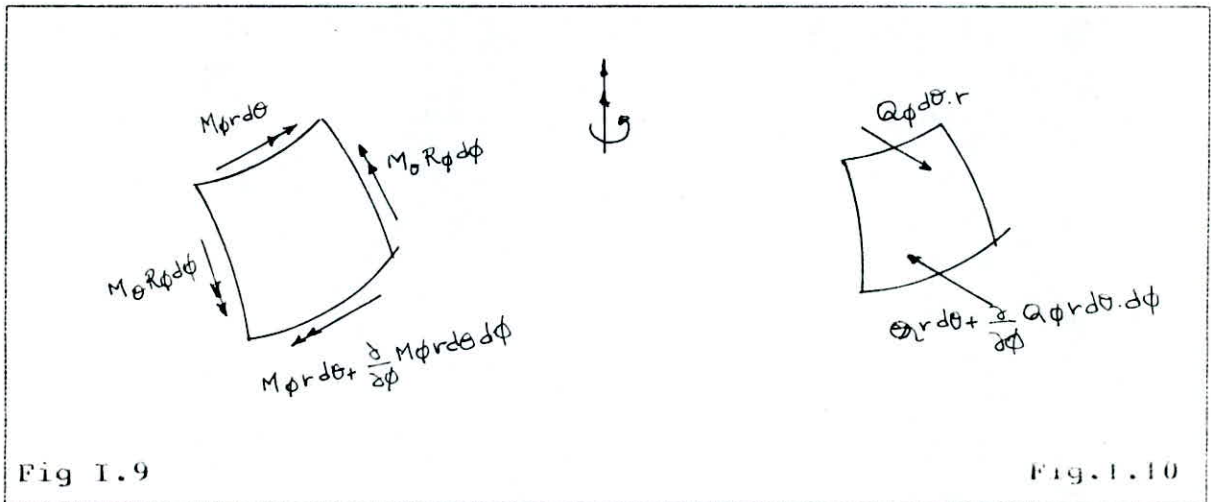


Fig I.9

Fig. I.10

Il est à noter que du fait de la symétrie du chargement on a :

$$N_{\phi\theta} = N_{\theta\phi} = M_{\phi\theta} = M_{\theta\phi} = Q_{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad P_y = 0$$

L'équilibre est obtenu en satisfaisant les six équations précédentes :

— $\sum F_x=0$: Se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta) d\phi - N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot d\phi \cdot \cos\phi - Q_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta \cdot d\phi + P_x \cdot R_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta = 0$$

(I.14)

$\Sigma F_z=0$: Se traduit par :

$$N_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta \cdot d\phi + N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot d\phi \cdot d\vartheta \cdot \sin\phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (Q_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta) d\phi + P_z \cdot R_{\phi} \cdot d\phi \cdot r \cdot d\vartheta$$

(I.15)

$\Sigma My=0$: Se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (M_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta) d\phi - Q_{\phi} \cdot r \cdot d\vartheta \cdot R_{\phi} \cdot d\phi + M_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot d\phi \frac{r \cdot d\vartheta}{R_{\vartheta} \cdot \operatorname{tg}\phi} = 0 \quad (I.16)$$

Les trois autres équations sont toujours vérifiées du fait de la symétrie de chargement.

La modification et la simplification des équations d'équilibre précédentes donne le système d'équations suivant à résoudre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi) - N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot \cos\phi - Q_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi + P_x \cdot R_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi = 0 \\ N_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi + N_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot \sin\phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (Q_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi) + P_z \cdot R_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} (M_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot \sin\phi) - Q_{\phi} \cdot R_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot \sin\phi + M_{\vartheta} \cdot R_{\phi} \cdot \cos\phi = 0 \end{array} \right. \quad (I.17)$$

On a cinq inconnues: N_{ϕ} , N_{ϑ} , M_{ϕ} , M_{ϑ} , Q_{ϕ} et trois équations.

Donc le problème est statiquement indéterminé. Des équations supplémentaires vont donc être utilisées pour le résoudre, il s'agit des relations de compatibilité de la structure et des lois de comportement du matériau constitutif, ce qui ramène à l'introduction de trois nouvelles inconnues ε_{ϕ} , ε_{ϑ} , β , on aura alors en tout, huit inconnues et huit équations.

Le système peut maintenant être résolu théoriquement, mais cette tâche est pratiquement insurmontable dans le cas général. Les solutions exactes de ce système, ne sont obtenus que pour des cas particuliers très limités. dans la plupart des cas, des approximations sont faites dans le but de faciliter la résolution

I.4.2 THÉORIE GÉNÉRALE DES COQUES CYLINDRIQUES :

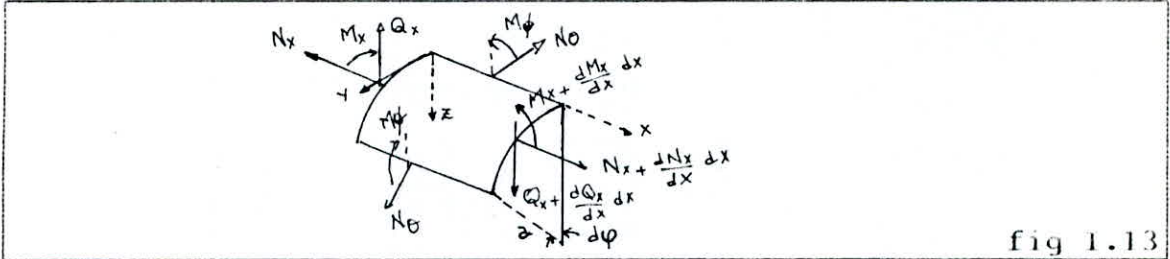


fig 1.13

La figure 1.13 montre un élément différentiel d'une coque cylindrique chargée symétriquement.

Du fait de la symétrie du chargement on a :

$$N_{\phi x} = N_{x\phi} = M_{x\phi} = M_{\phi x} = Q_{\phi} = 0$$

et M_{ϕ} et N_{ϕ} sont indépendants de ϕ ainsi que $N_x, M_x,$ et Q_x .

Les équations d'équilibre de cet élément prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_x}{dx} \cdot a \cdot dx \cdot d\phi = 0 \\ \frac{dQ_x}{dx} \cdot a \cdot dx \cdot d\phi + \frac{N_x}{r} \cdot dx \cdot d\phi + p_z \cdot a \cdot dx \cdot d\phi = 0 \\ \frac{dM_x}{dx} \cdot a \cdot dx \cdot d\phi - Q_x \cdot a \cdot dx \cdot d\phi = 0 \end{array} \right. \quad (I.18)$$

La première équation indique que la force N_x est constante, on la prend égale à 0 dans la suite du raisonnement. Si elle est différente de 0, la déformation et la contrainte correspondantes à de telles forces se calculent facilement et se superposent aux déformations et contraintes dues aux autres efforts. Les deux autres équations s'écrivent sous la forme simplifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{a} \cdot N_x = -p_z \\ \frac{dM_x}{dx} + Q_x = 0 \end{array} \right. \quad 1.19$$

Ces deux équations comportent trois inconnues donc on a recours aux relations déformations-déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{du}{dx} \\ \epsilon_{\phi} = -\frac{w}{a} \end{array} \right.$$

En appliquant la loi de hook, on obtient :

$$N_x = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\phi) = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{\omega}{a} \right) = 0$$

$$N_\phi = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu \varepsilon_x) = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} \left(-\frac{\omega}{a} + \nu \frac{du}{dx} \right)$$

De la première de ces équations découle :

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{\omega}{a}$$

La seconde donne :

$$N_\phi = \frac{E \cdot t \cdot \nu}{a} \quad \text{I.20}$$

Les moments sont donnés par :

$$M_\phi = \nu M_x \quad \text{I.21}$$

$$M_x = -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \quad \text{I.22}$$

avec $D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$: Rigidité à la flexion de la coque.

En éliminant Q_ϕ du système I.18, on obtient :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{1}{a} N_\phi = -P_z$$

qui conduit, en remplaçant M_x et N_ϕ par leurs valeurs en fonction

de w :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(-D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{E \cdot t}{a} \cdot \omega = P_z$$

Quand l'épaisseur est constante on a l'équation suivante :

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot \omega = \frac{P_z}{D} \quad \text{I.23}$$

$$\text{Avec : } \beta^4 = \frac{E \cdot t}{4 \cdot a \cdot D} = \frac{3 \cdot (1-\nu^2)}{a \cdot t}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cdot \cos \beta x + C_4 \cdot \sin \beta x) + f(x) \quad (\text{I.23})$$

où $f(x)$ est la solution particulière de l'équation différentielle. et C_1, \dots, C_4 sont les constantes d'intégration dépendant des conditions aux limites de la coque cylindrique.

*Exemples:

1_Coque cylindrique longue soumise à des moments de flexion M_0

et des efforts tranchants Q_0 uniformément répartis sur la bordure ($x=0$) :

Dans ce cas il n'existe pas de pression radiale sur la coque. Puisque l'effet des forces appliquées est local et s'estompe à mesure que la distance x s'accroît, le premier terme du second membre doit s'annuler et ainsi on a :

$$C_1 = C_2 = 0$$

et donc on aura :

$$\omega = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)$$

Au niveau de l'extrémité, on a :

$$(M_x)_{x=0} = -D \cdot \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0$$

$$(Q_x)_{x=0} = \left(\frac{dM_x}{dx} \right)_{x=0} = -D \cdot \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0$$

Il vient que :

$$C_3 = -\frac{1}{2 \cdot D \cdot \beta^3} (Q_0 + \beta M_0) \quad ; \quad C_4 = \frac{1}{2 \cdot D \cdot \beta^2} M_0$$

L'expression finale de ω devient :

$$\omega = \frac{e^{-\beta x}}{2 \cdot D \cdot \beta^3} [\beta \cdot M_0 \cdot (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cdot \cos \beta x]$$

Alors que la rotation est donnée en dérivant ω par rapport à x .

Toutes les contraintes peuvent maintenant être déterminées à partir des déplacements par les formules déjà mentionnées ci dessus.

2_ Réservoir cylindrique à paroi d'épaisseur uniforme :

La charge extérieure est ici donnée par :

$$P_z = -\gamma (d-x)$$

γ : poids par unité de volume du liquide.

L'équation I.23 deviendra :

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot \omega = \frac{-\gamma (d-x)}{D}$$

La solution particulière de cette équation est :

$$\omega_1 = \frac{-\gamma (d-x)}{4 \cdot D \cdot \beta^4} = \frac{-\gamma (d-x)}{E \cdot t} \cdot a^2$$

représentant la solution membranaire. On obtient comme solution complète :

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma (d-x)}{E \cdot t} \cdot a^2$$

En considérant la coque infiniment longue, la solution se simplifie:

$$\omega = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma (d-x)}{E \cdot t} \cdot a^2$$

C_3 et C_4 déterminées à partir des conditions aux limites. En supposant le réservoir encastré à sa base on a:

$$(\omega)_{x=0} = C_3 - \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot L}{E \cdot t} = 0$$

$$\left(\frac{d\omega}{dx} \right)_{x=0} = \beta \cdot (C_4 - C_3) + \frac{\gamma \cdot a^2}{E \cdot t} = 0$$

Ce qui donne:

$$C_3 = \frac{\gamma \cdot a^2}{E \cdot t} d \quad ; \quad C_4 = \frac{\gamma \cdot a^2}{E \cdot t} \left(d - \frac{1}{\beta} \right)$$

et l'expression de ω devient

$$\omega = - \frac{\gamma \cdot a^2}{E \cdot t} \left[d-x - e^{-\beta x} \left(d \cdot \cos \beta x + \left(d - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right) \right] \quad 1.26$$

A partir de cette expression, on calcul facilement la flèche en tout point. De même pour les autres valeurs des efforts de réduction.

$$N_{\phi} = - \frac{E \cdot t}{a} \cdot \omega$$

$$M_x = -D \frac{d^2 \omega}{dx^2}$$

1.4.1- THEORIE GENERALE POUR LES COQUES SPHERIQUES :

Les équations d'équilibre de l'élément de coque peuvent être transformées en tenant compte des relations suivantes exprimant les extensions et les courbures de l'élément de coque en fonction des déplacements:

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{1}{R_{\phi}} \frac{du}{d\phi} - \frac{v}{R_{\phi}} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{u}{R_{\theta}} \cot \phi - \frac{v}{R_{\theta}}$$

$$\kappa_{\phi} = \frac{1}{R_{\phi}} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{u}{R_{\phi}} + \frac{dw}{R_{\phi} d\phi} \right) \quad ; \quad \kappa_{\theta} = \frac{\cot \phi}{R_{\theta}} \left(\frac{u}{R_{\phi}} + \frac{dw}{R_{\phi} d\phi} \right)$$

La loi de Hook permet alors d'écrire :

Ce qui donne : $N_{\phi} = -\frac{R}{l} \frac{d\phi}{du} \cdot (0 \cdot R \cdot \phi) = -\frac{R}{l} \frac{d\phi}{du}$

$$R \cdot N_{\phi} \cdot \sin \phi = -N_{\phi} \cdot r \cdot \frac{d\phi}{d(0 \cdot r \cdot \phi)}$$

obtient :

En substituant dans la seconde equation d'équilibre, on

$$2 \cdot n \cdot r \cdot N \cdot \sin \phi + 2 \cdot n \cdot r \cdot 0 \cdot \cos \phi = 0$$

$$d'où : N = -\frac{0 \cdot \cos \phi}{l} \cdot \cot \phi = -\frac{R}{l} \cdot 0 \cdot \cot \phi$$

Pour simplifier la transformation des equations avec les nouvelles variables, on remplace la première des equations d'équilibre par une equation plus pratique, obtenue en considérant l'équilibre de la portion de coque au dessus du parallèle défini par l'angle ϕ . Pour une coque non chargée, on a :

$$l = \frac{R}{l} (u + \frac{d\phi}{du})$$

$$u = R \cdot 0 \cdot \phi$$

de variables suivant :

Reinsner en analysant une coque sphérique a permis de simplifier énormément le problème en introduisant le changement

obtient un système de trois equations a trois inconnues.

En substituant ces égalités dans les equations d'équilibre, on

$$N_{\phi} = \frac{1-v}{E \cdot t} \cdot z \cdot \left[\frac{R}{l} \frac{d\phi}{du} - \omega \right] + \frac{R}{l} \cdot \omega \cdot \cot \phi \quad (1)$$

$$M_{\phi} = -\frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{R}{l} \frac{d^2\phi}{du^2} \left(\frac{R}{u} + \frac{d\phi}{du} \right) + \frac{R}{l} \frac{d\phi}{du} \left(\frac{R}{u} + \frac{d\phi}{du} \right) \right]$$

$$M_{\theta} = -\frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{R}{l} \frac{d^2\phi}{du^2} \left(\frac{R}{u} + \frac{d\phi}{du} \right) + \frac{R}{l} \frac{d\phi}{du} \left(\frac{R}{u} + \frac{d\phi}{du} \right) \right]$$

A partir des deux premières équations de I. on tire :

$$\frac{du}{d\phi} - w = \frac{R_{\phi}}{E \cdot t} (N_{\phi} + \nu \cdot N_{\theta})$$

$$u \cdot \cotg \phi - w = \frac{R_{\theta}}{E \cdot t} (N_{\theta} + \nu \cdot N_{\phi})$$

En éliminant w on obtient :

$$\frac{du}{d\phi} - u \cdot \cotg \phi = \frac{1}{E \cdot t} [(R_{\phi} + \nu R_{\theta}) N_{\phi} - (R_{\theta} + \nu R_{\phi}) N_{\theta}]$$

En combinant cette équation avec la seconde équation de (I), on obtient :

$$u + \frac{dw}{d\phi} = R_{\phi} \cdot \beta - \frac{\cotg \phi}{E \cdot t} [(R_{\phi} + \nu R_{\theta}) N_{\phi} - (R_{\theta} + \nu R_{\phi}) N_{\theta}] - \frac{d}{d\phi} \left[\frac{R_{\theta}}{E \cdot t} (N_{\theta} + \nu \cdot N_{\phi}) \right]$$

En remplaçant N_{ϕ} et N_{θ} par leurs valeurs, on obtient finalement la première équation liant U et β :

$$\frac{R_{\theta}}{R_{\phi}^2} \frac{d^2 U}{d\phi^2} + \frac{1}{R_{\phi}} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \right) + \frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \cotg \phi - \frac{R_{\theta}}{R_{\phi} \cdot t} \cdot \frac{dt}{d\phi} \right] \frac{dU}{d\phi} - \frac{1}{R_{\phi}} \left[\frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \cdot \cotg^2 \phi - \nu - \frac{\nu}{t} \frac{dt}{d\phi} \cotg \phi \right] \cdot U = E \cdot t \cdot \beta$$

La seconde équation liant U et β est obtenue à partir de la troisième équation d'équilibre et des deux dernières équations de (I). On trouve :

$$\frac{R_{\theta}}{R_{\phi}^2} \frac{d^2 \beta}{d\phi^2} + \frac{1}{R_{\phi}} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \right) + \frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \cotg \phi - \frac{3 R_{\theta}}{R_{\phi} \cdot t} \cdot \frac{dt}{d\phi} \right] \frac{d\beta}{d\phi} - \frac{1}{R_{\phi}} \left[\frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \cdot \cotg^2 \phi + \nu - \frac{\nu 3}{t} \frac{dt}{d\phi} \cotg \phi \right] \cdot \beta = - \frac{U}{D}$$

Et donc la solution du problème de la flexion des coques revient à l'intégration de ces deux équations.

Si l'épaisseur de la coque est constante, on peut définir l'opérateur suivant appelé opérateur de Meissner :

$$L(\dots) = \frac{R_{\theta}}{R_{\phi}^2} \cdot \frac{d^2}{d\phi^2} (\dots) + \frac{1}{R_{\phi}} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \right) + \frac{R_{\theta}}{R_{\phi}} \cotg \phi \right] \frac{d}{d\phi} (\dots) - \frac{R_{\theta}}{R_{\phi} \cdot R_{\phi}} \cotg^2 \phi (\dots)$$

qui permet la simplification de l'écriture des deux équations, ce qui donne :

$$L(U) + \frac{\nu}{R_\phi} \cdot U = E \cdot t \cdot \beta \qquad L(\beta) + \frac{\nu}{R_\phi} \cdot \beta = -\frac{U}{D}$$

En exécutant l'opération indiquée par le symbole $L(\dots)$ sur la première équation et en substituant dans la seconde équation, on peut tirer l'équation différentielle du quatrième ordre suivante :

$$L L(U) + \nu \cdot L\left(\frac{U}{R_\phi}\right) - \frac{\nu}{R_\phi} L(U) - \frac{\nu^2}{R_\phi^2} \cdot U = -\frac{E \cdot t}{D} \cdot U$$

De même, on peut tirer la deuxième équation :

$$L L(\beta) - \nu \cdot L\left(\frac{\beta}{R_\phi}\right) + \frac{\nu}{R_\phi} L(\beta) - \frac{\nu^2}{R_\phi^2} \cdot \beta = -\frac{E \cdot t}{D} \cdot \beta$$

Si le rayon de courbure R_ϕ est constant, les deux équations se réduisent à la forme :

$$L L(U) + \mu^4 \cdot U = 0 \quad (III)$$

avec :
$$\mu^4 = \frac{E \cdot t}{D} - \frac{\nu^2}{R_\phi^2}$$

Cette équation peut être écrite suivant l'une des deux formes ci-contre :

$$L (L(U) + i \cdot \mu^2 \cdot U) - i \cdot \mu^2 \cdot (L(U) + i \cdot \mu^2 \cdot U) = 0$$

$$L (L(U) - i \cdot \mu^2 \cdot U) + i \cdot \mu^2 \cdot (L(U) - i \cdot \mu^2 \cdot U) = 0$$

Donc les solutions des équations du second ordre :

$$L(U) \pm i \cdot \mu^2 \cdot U = 0 \quad (IV).$$

sont aussi solution de l'équation (I).

La solution complète de (I), s'obtient donc par la résolution de l'une des équations IV.

Dans le cas d'une coque sphérique d'épaisseur constante l'opérateur de Meissner devient :

$$L(\dots) = \frac{1}{a} \left[\frac{d^2}{d\phi^2} (\dots) + \cotg\phi \frac{d}{d\phi} (\dots) - \cotg^2\phi \cdot (\dots) \right].$$

En introduisant la constante ρ définie par :

$$\rho^2 = \frac{a \cdot \mu^2}{2} = \sqrt{3 \cdot a^2 (1 - \nu^2) / (1 - \mu^2 / 4)}$$

En remplaçant U par sa valeur, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \cotg\phi \cdot \frac{dQ}{d\phi} - \cotg^2\phi \cdot Q + 2 \cdot i \cdot \rho^2 Q = 0$$

dont la solution est très compliquée et se présente sous la forme de séries de puissances appelées séries hypergéométriques. la détermination de la solution dépend essentiellement de la convergence de ces séries.

De telles difficultés amènent à l'établissement d'autres théories offrant un moyen plus pratique et moins compliqué pour l'approximation de la solution. du système.

CHAPITRE III: METHODE MATRICIELLE APPLIQUEE AUX SYSTEMES EN COQUES DE REVOLUTION

III.1 INTRODUCTION:

La théorie membranaire décrite dans les paragraphes précédents a une limitation significative. La théorie de flexion est très exacte, mais présente des difficultés dans la résolution des équations.

Les deux théories peuvent être néanmoins combinées dans une méthode pratique d'ingéniering. Celle-ci permet d'éliminer les limitations que présentent les deux théories et rend possible l'analyse de coques compliquées dans un temps plus court.

— Cette méthode propose une solution qui représente la superposition d'une solution dite primaire (régie par la théorie membranaire) et d'une solution secondaire (régie par la théorie flexionnelle pour un chargement corrigé appliqué aux bordures).

— La solution primaire est une solution membranaire de la coque chargée ou les conditions aux limites sont compatibles avec la théorie membranaire.

— La solution secondaire est une solution généralement flexionnelle de la coque soumise à un chargement uniformément concentré le long de la bordure de la coque, cette dernière étant libre. Le chargement étant pris d'intensité unitaire, et est représenté généralement par (un moment, une charge horizontale, et une charge verticale).

— La solution membranaire ne respecte pas les conditions aux limites de la coque et introduit au niveau de la bordure un déplacement non nul; Cette discontinuité est éliminée par l'introduction de chargement unitaire uniformément concentré aux bordures et qui est multiplié par un certain facteur, de telle façon que le chargement résultant permet de ramener les déplacements des bordures aux valeurs imposées par les conditions aux limites.

La superposition des deux solutions primaire et secondaire donne une solution presque identique à celle obtenue par la théorie de flexion.

III.2 PROCEDURE DE LA METHODE :

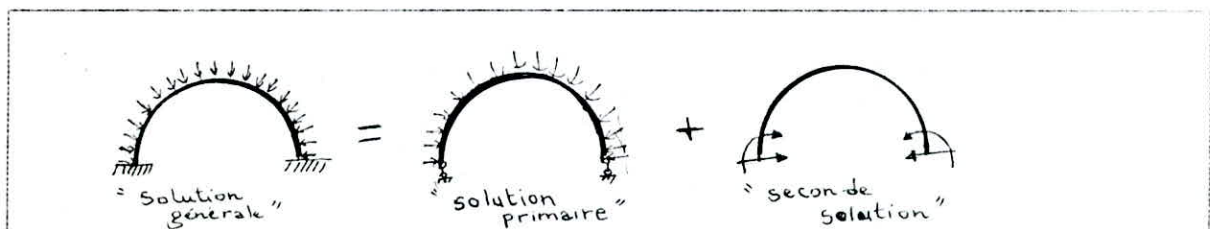
a/ Supposer la coque comme étant une membrane libre, et établir la solution pour cette membrane soumise au chargement donné. Noter les contraintes et déplacements de la bordure au niveau des points qui présentent un intérêt. C'est la solution primaire qui est généralement obtenue par la théorie membranaire, et qui est tabulée pour différents cas de coques. Dans des cas exceptionnels, la solution est obtenue par des méthodes autres que la théorie membranaire.

b/ Appliquer le long de la bordure: un moment; un effort horizontal; et un effort vertical de valeurs unitaires. Les déplacements et contraintes dues à chaque chargement constituent la solution secondaire et sont tabulés pour différents cas de coques.

c/ Les charges correctives M,H,etV sont déterminées par la procédure d'interaction.

d/ Les déplacements et contraintes dues aux efforts correctives sont alors déterminés.

e/ La superposition des contraintes et déplacements obtenus par la solution ^{primaire} et ceux obtenus pour les charges de bordure correctives donnent la solution finale.



III.3 INTERACTION ENTRE COQUES DE GEOMETRIES VARIABLES:

On étudie, l'exemple, d'interaction entre deux coques: l'une

sphérique, l'autre cylindrique. Cette coque composée étant soumise à une pression interne uniforme. La théorie des membranes donne les déplacements et contraintes de chaque coque à part. Soit:

δ_d : Déplacement radial du cylindre le long de la ligne de discontinuité.

β_d : Rotation du cylindre le long de la ligne de discontinuité.

δ_c : Déplacement radial du dôme le long de la ligne de discontinuité.

β_c : Rotation du dôme le long de la ligne de discontinuité.

Les deux coques étant prises indépendamment l'une de l'autre, on a:

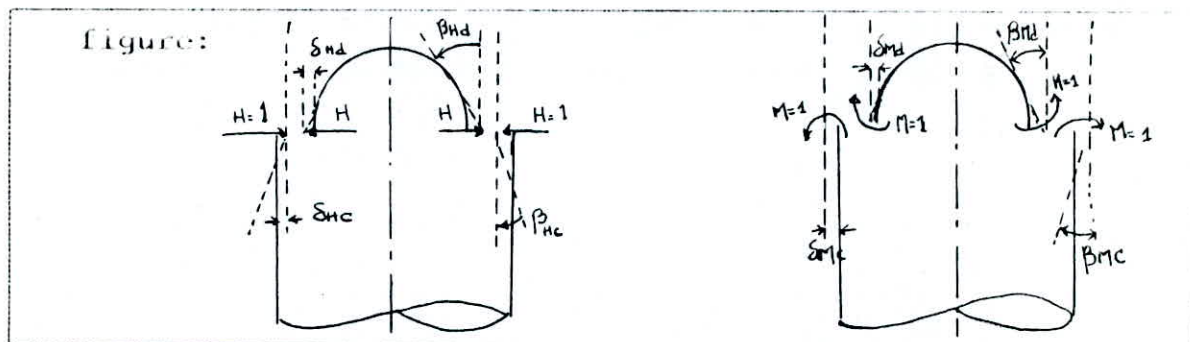
$$\delta_c \neq \delta_d$$

$$\beta_c \neq \beta_d$$

Par conséquent, il existe une discontinuité:

1- Dans le déplacement : $\delta_c - \delta_d$

2- dans la rotation : $\beta_c - \beta_d$



Les charges unitaires H et M produisent les déplacements suivants:

δ_{nd}, β_{nd} et δ_{cd}, β_{cd} : Déplacement et rotation de la bordure du cylindre .

δ_{mc}, β_{mc} , et δ_{nc}, β_{nc} : Déplacement et rotation de la bordure du dôme .

δ et β : sont les déplacements ,et rotations des différentes coques sous le chargement existant ,avec des conditions d'appuis compatible à la théorie de membrane .

Pour éliminer la discontinuité entre les deux coques, on établit les équations suivantes :

$$\begin{cases} \delta_d + \delta_{hd} \cdot H + \delta_{md} \cdot M = \delta_c - \delta_{hc} \cdot H + \delta_{mc} \cdot M \\ \beta_d + \beta_{hd} \cdot H + \beta_{md} \cdot M = \beta_c - \beta_{hc} \cdot H + \beta_{mc} \cdot M \end{cases}$$

Tous les coefficients δ et β sont généralement connus et tabulés pour différents cas de coques et de chargement.

En utilisant les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \delta_{hc} + \delta_{hd} &= \delta_h & \beta_{hc} - \beta_{hd} &= \beta_h \\ \delta_{mc} - \delta_{md} &= \delta_m & -\beta_{mc} - \beta_{md} &= \beta_m \\ \delta_c + \delta_d &= \delta & \beta_c + \beta_d &= \beta \end{aligned}$$

Et en sachant que: $\beta_c=0$, $\beta_d=0$
On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \delta_h \cdot H + \delta_m \cdot M = \delta \\ \beta_h \cdot H + \beta_m \cdot M = \beta \end{cases} \quad (I)$$

Dont la résolution donne les valeurs des charges de bordure corrigées

En tout point on peut maintenant déterminer les déplacements et contraintes membrannaires et les déplacements et contraintes dus aux charges de bordure correctives H et M, la superposition nous donne les déplacements et les contraintes totaux en tout points de la structure.

En tout point i, on pourra écrire:

$$\bar{\alpha}_i = \sum_j \alpha_{ij} P_j + \alpha_{i0}$$

$\bar{\alpha}_i$: déplacements généralisés global.

α_{i0} : déplacements généralisés primaires (obtenus par la théorie membrannaire).

α_{ij} : déplacements généralisés secondaires dus à $P_j=1$. (H, M, V)

ou matriciellement:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \dots & \dots \\ \alpha_{21} & & \alpha_{2n} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & \dots & \dots \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$[a_{ij}]$: Etant appelé, matrice de flexibilité.

Similairement, on détermine les contraintes en tout point par la relation matricielle suivante :

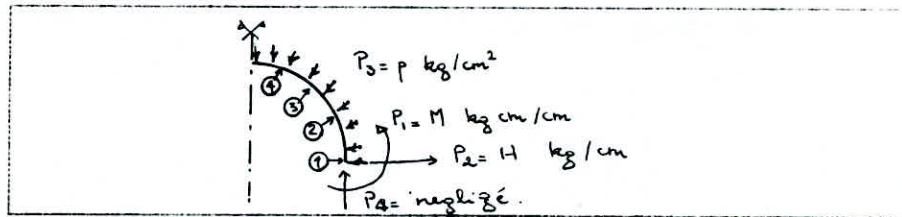
$$\{ \bar{N} \} = [B_{ij}] * \{ P_j \} + \{ N_{i0} \}$$

$$\text{ou } \{ \bar{N} \} = \{ N_{\phi} , N_{\theta} , M_{\phi} , M_{\theta} \}$$

$\{ \bar{N}_{i0} \}$: vecteur des contraintes obtenues par la solution membranaire.

$[B_{ij}]$: vecteur des contraintes aux points i dues à une charge $P_j=1$

*Exemple:



soit un dôme sphérique soumis à une pression normale. Détermination des déplacements (β :rotation ; δ :translation horizontale) provoqués par P_i ; $i=1,2,3,4$.

On a :

$$\beta_1 = (\beta_{11} . H + \beta_{12} . M) + \beta_{10}$$

$$\delta_1 = (\delta_{11} . H + \delta_{12} . M) + \delta_{10}$$

$$\beta_2 = (\beta_{21} . H + \beta_{22} . M) + \beta_{20}$$

$$\delta_2 = (\delta_{21} . H + \delta_{22} . M) + \delta_{20}$$

Similairement ,pour les points 3 et 4 .

L'expression matricielle de ce système est comme suit :

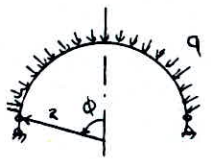
$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \\ \beta_4 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \delta_{11} & \delta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \delta_{31} & \delta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \\ \delta_{41} & \delta_{42} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} H \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_{10} \\ \delta_{10} \\ \beta_{20} \\ \delta_{20} \\ \beta_{30} \\ \delta_{30} \\ \beta_{40} \\ \delta_{40} \end{Bmatrix}$$

II.5 : LES TABLES

II.5.1/ Dôme sphérique fermé :

II.5.1.1 / Solution primaire :

a / Sous une pression radiale :

	N_{ϕ}	$-q \cdot R / 2$
	N_{θ}	$-q \cdot R / 2$
	δ_{10}	$-q \cdot R^2 (1-\nu) \sin \phi / 2 \cdot E \cdot t$
	β_{10}	0

t: épaisseur de la coque.

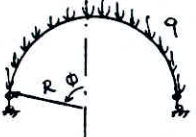
E: module de Young.

q: charge.

R: rayon de coque.

ν : coefficient de Poisson.

b / Sous le poids propre :

	N_{ϕ}	$-q \cdot R / (1 + \cos \phi)$
	N_{θ}	$-q \cdot R (\cos \phi - 1 / (1 + \cos \phi))$
	δ_{10}	$R \cdot q \cdot \sin \phi (-\cos \phi + \frac{1+\nu}{2 \sin \phi} (1 - \cos \phi))$
	β_{10}	$-q \cdot R (2 + \nu) \sin \phi / E \cdot t$

II.5.1.2 / Solution secondaire :

Qφ	$[-\sqrt{2} \cdot \sin\phi \cdot e^{-k\alpha} \cdot \cos\phi(k\alpha + \pi/4)] \cdot H$	$[\frac{2 \cdot k}{R} e^{-k\alpha} \cdot \sin k\alpha] \cdot M$
Nφ	$-Q\phi \cdot \cot\phi$	$-Q\phi \cdot \cot\phi$
Nθ	$[2 \cdot k \cdot \sin\phi \cdot e^{-k\alpha} \cdot \cos k\alpha] \cdot H$	$[2\sqrt{2} \cdot k^2 \cdot e^{-k\alpha} \cdot \cos\phi(k\alpha + \pi/4)] \cdot M$
Mφ	$[\frac{R}{k} \cdot \sin\phi \cdot e^{-k\alpha} \cdot \sin k\alpha] \cdot H$	$[\sqrt{2} \cdot e^{-k\alpha} \cdot \sin(k\alpha + \pi/4)] \cdot M$
Mθ	$[\frac{-R}{\sqrt{2} \cdot k^2} \cdot \sin\phi \cdot \cot\phi \cdot e^{-k\alpha} \cdot \sin(k\alpha + \pi/4)] \cdot H + \nu \cdot M\phi$	$[\frac{1}{k} \cdot \cot\phi \cdot e^{-k\alpha} \cdot \cos k\alpha] \cdot M + \nu \cdot M\theta$
β _φ / E.t	$[-2\sqrt{2} \cdot k^2 \cdot \sin\phi \cdot e^{-k\alpha} \cdot \sin(k\alpha + \pi/4)] / H$	$[-4 \cdot \frac{k^3}{R} e^{-k\alpha} \cdot \cos k\alpha] \cdot M$
δ _φ / E.t	$[R \cdot \sin\phi \cdot e^{-k\alpha} \cdot (2k \cdot \sin\phi \cdot \cos k\alpha - \sqrt{2} \cdot \nu \cdot \cos\phi \cdot \cos\phi(k\alpha + \pi/4))] \cdot H$	$2 \cdot k \cdot e^{-k\alpha} \cdot [\sqrt{2} \cdot k \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi(k\alpha + \pi/4) + \nu \cos\phi \cdot \sin k\alpha] \cdot M$

II.5.2/ Dôme sphérique ouvert :

II.5.1.1 / Solution primaire :

a / Sous une pression radiale :

	Nφ	$-q \cdot R / 2 (1 - \sin^2\beta / \sin^2\phi)$
	Nθ	$-q \cdot R / 2 (1 - \sin^2\beta / \sin^2\phi)$
	δ _{φ0} / E.t	$\frac{-q \cdot R^2}{E \cdot t} \sin\phi (1 - \frac{1+\nu}{2} (1 - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\phi}))$
	β _{φ0}	0

t: épaisseur de la coque, β: angle d'ouverture
 E: module de Young.
 q: charge.
 R: rayon de coque.
 ν: coefficient de Poisson.

b / Sous le poids propre :

	Nφ	$\frac{-Rq}{2 \sin\phi} (\cos\beta - \cos\phi)$
	Nθ	$-Rq (\cos\phi - \frac{1}{2} (\cos\beta - \cos\phi))$
	δ _{φ0} / E.t	$R^2 \cdot q \cdot \sin\phi (-\cos\phi + \frac{1+\nu}{2} (\cos\beta - \cos\phi))$
	β _{φ0}	$-q \cdot R (2+\nu) \sin\phi / E \cdot t$

II.5.3 / Cylindre hydrostatique :

5.3.1 / solution primaire :

	N_x	0
	N_θ	$\gamma \cdot R \cdot (1-x)$
	u	$\frac{1}{E \cdot t} (-\nu \cdot \gamma \cdot L \cdot R \cdot x \cdot (1 - \frac{x}{L}))$
	v	0
	w	$\frac{1}{E \cdot t} (\gamma \cdot R^2 (1-x))$
	β	$-\frac{\gamma \cdot R^2}{E \cdot t}$

5.3.2 / Solution secondaire :

N_θ	$-\frac{M \cdot 2 \cdot k^2 \cdot R \cdot F_4(\zeta)}{F_3(\zeta)}$	$H \cdot 2 \cdot k \cdot R \cdot F(\zeta)$	$H \cdot F_2(\zeta) / k$
M_x	$-\frac{M \cdot F_3(\zeta)}{F_3(\zeta)}$		
Q_x	$-\frac{M \cdot 2 \cdot k^2 \cdot R \cdot F(\zeta)}{F_3(\zeta)}$	$-\frac{H \cdot F_4(\zeta)}{F_3(\zeta)}$	$\frac{H}{2D \cdot k^3} F_1(\zeta)$
δ_{ij}	$-\frac{M}{2D \cdot k^2} F_4(\zeta)$		
β_{ij}	$\frac{M}{D \cdot k} F_1(\zeta)$	$-\frac{H}{2D \cdot k^2} F_3(\zeta)$	

Avec : $\zeta = \frac{x}{L}$, $k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R \cdot t}}$

et : $F_1(\zeta) = e^{-kL\zeta} \cdot \cos(kL\zeta)$

$$F_2(\zeta) = e^{-kL\zeta} \cdot \sin(kL\zeta)$$

$$F_3(\zeta) = e^{-kL\zeta} \cdot [\cos(kL\zeta) + \sin(kL\zeta)]$$

$$F_4(\zeta) = e^{-kL\zeta} \cdot [\cos(kL\zeta) - \sin(kL\zeta)]$$

N.B: Le cas étudié est celui d'un cylindre long , avec la

relation qui la vérifie :

$$k.L \geq 4 \text{ ou } L \geq 3.1 \sqrt{R.t} .$$

CHAPITRE IV LA METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX COQUES AXISYMETRIQUES

IV.1/ INTRODUCTION

Le problème des coques de révolution présente suffisamment d'importance dans la pratique pour justifier, que soit consacré la méthode des éléments finis qui lui est propre, comme méthode moderne de résolution.

La première tentative de résolution par éléments finis des problèmes de coques de révolution est due à GRAFTON et STROME. Dans ce travail, les éléments sont de simples troncs de cône et l'on utilisait une méthode directe avec donnée de fonctions de déplacements.

Plus récemment, de nombreux travaux ont été consacrés à l'extension du processus aux éléments courbes et, par là, à l'amélioration de la précision de la méthode.

De même que dans toutes les autres coques, on doit considérer dans les coques de révolution à la fois des forces de flexion, et des forces dans le plan dites "membrannaires". Elles seront définies de manière unique en fonction des déformations généralisées, qui comprennent dans ce cas les extensions et les courbures de la surface moyenne. La définition du déplacement de chaque point de la surface moyenne permet de déterminer ces déformations et les contraintes qui en résultent; à partir des formules données dans les ouvrages classiques traitants de la théorie des coques.

Les principales particularités qui résident dans l'utilisation de la M.E.F pour les structures en coques de révolutions sont:

- 1_ Les points nodaux sont remplacés par des lignes nodales, qui sont représentées par des cercles.
- 2_ les déplacements de la coque peuvent être approximes par

trois composantes de déplacement (deux translations et une rotation) en chaque noeud.

3_ les charges équivalentes correspondantes (deux forces et un moment) sont exprimées par unité de longueur.

Le premier avantage de cette modification, prenant avantage de la symétrie axiale, est le remplacement d'un très grand nombre de points nodaux ayant chacun généralement six degrés de liberté, par un nombre relativement petit de cercles nodaux ayant chacun trois degrés de liberté. La diminution de la taille et des vecteurs à manipuler est évidente.

IV.2/ CRITERES DE CONVEGENCE

La donnée des fonctions de forme revient à limiter le nombre de degré de liberté -en réalité infini- du système, et le vrai minimum de l'énergie peut ne pas être atteint, quelle que soit la finesse de la subdivision .

Pour que soit garantie la convergence vers le résultat correct, certaines critères doivent être remplies:

CRITERE_1: La fonction de déplacement choisie doit être telle qu'elle ne permette pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements de ses noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps solide .

CRITERE_2: La forme de la fonction de déplacement doit être choisie de telle manière que, si ses déplacements nodaux sont compatible avec un état de déformation constante, on ^{puisse} réellement obtenir ces déformations constante dans tout l'élément, on peut remarquer que le critère:2 englobe en fait les deux conditions requise par le critère:1, et on peut dire que ces deux critères n'ont en fait à être satisfaits qu'à la limite, quand la taille de l'élément tend vers zero, et leur vérification par des éléments de taille finie conduit néanmoins à une amélioration sensible des résultats.

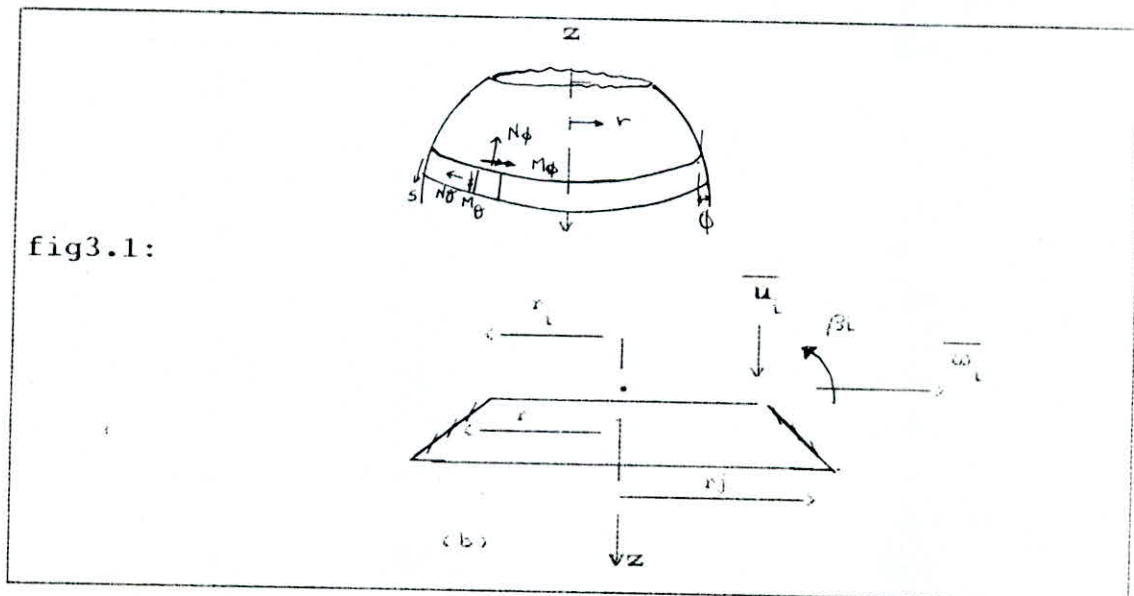
CRITERE_3: Les fonctions de déplacement doivent être choisies de

telle manière que les déformations aux interfaces des éléments soient finies (même si elles restent indéterminées) c'est donc assurer la continuité des déplacements entre deux éléments adjacents. Et puisque les déformations sont exprimées en fonction des déplacements et de leur dérivées $n^{ème}$ faut que les fonctions de forme et leur dérivées à l'ordre $(n^{ème} - 1)$ soient continues. Dans le cas de l'élément de coque axisymétrique, les déformations sont définies par les dérivées première et secondaire des déplacements dans ce cas les déplacements et leur dérivées premières doivent assurer la continuité sur tout l'élément.

IV.3/ DEVELOPPEMENT DE L'ELEMENT DE COQUE TRONCONIQUE.

3.1/INTRODUCTION

On peut modéliser une structure de coque à symétrie axiale par une série d'éléments de forme tronconique, comme le montre la figure ci-dessous, on remarque que ce seul élément a deux "noeuds" circulaires. Puisque l'on doit considérer dans les coques à la fois des déplacements et des forces dans le plan et hors du plan, le vecteur de déplacement pour chaque noeud contient rotation et mouvements axiaux et radiaux.

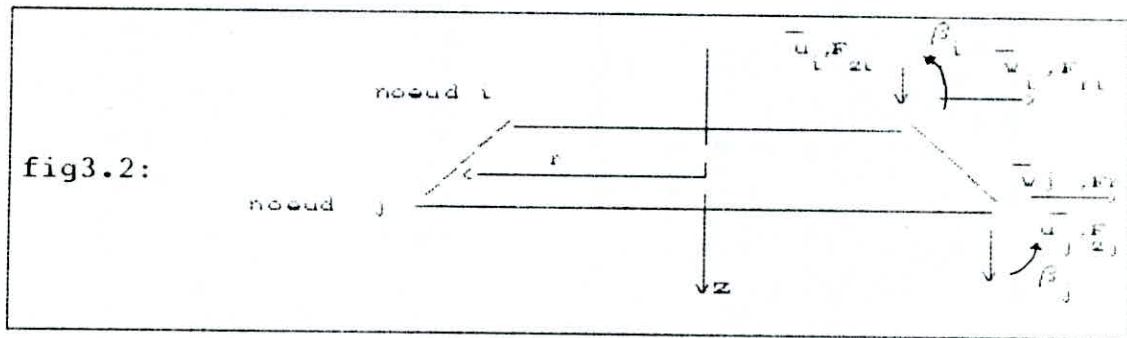


3.2/ETAPES DE CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT FINI TRONCONIQUE

Les différentes étapes à suivre pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire sont:

a_ Choix d'un système de coordonnées et numéroté les noeuds

Puisque la coque est modélisée par une série d'éléments tronconique, il est commode d'utiliser un système de coordonnées cylindrique(r,z)



On peut écrire le vecteur de déplacement de la façon suivante:

$$\{ \delta_1 \} = \{ u_1 \ w_1 \ \beta_1 \}^T \quad (1)a$$

où u est le déplacement axial et w est le déplacement radial dans le système de coordonnées global, et β est la rotation, les forces correspondantes au noeud 1 sont:

$$\{ F_1 \} = \{ F_{z1} \ F_{r1} \ M_1^t \} \quad (2)a$$

où F_z est la force axiale et F_r la force radiale dans le repère global, et M_s le moment méridien.

Les vecteurs complets des déplacements et des forces pour l'élément (noeud 1 et 2) s'écrivent:

$$\{ \delta^e \} = \{ \{ \delta_1 \} \ \{ \delta_2 \} \}^T = \{ \bar{u}_1 \ \bar{w}_1 \ \bar{\beta}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{w}_2 \ \bar{\beta}_2 \}^T \quad (3)a$$

$$\{ F^e \} = \{ \{ F_1 \} \ \{ F_2 \} \}^T = \{ F_{z1} \ F_{r1} \ M_1 \ F_{z2} \ F_{r2} \ M_2 \}^T \quad (4)a$$

Ainsi chaque élément de coque a symétrie axiale a six degrés de

liberté et la matrice complete de rigidité de $[K^e]$ est carrée d'ordre six(6)

$$\{ F^e \} = [K^e].\{\delta^e \} \quad (5)a$$

b_ Choix d'une fonction de déplacement $[f(r,z)]$ qui définit le déplacement en chaque point de l'élément

On suppose que dans chaque élément l'angle ϕ ne varie pas, et à cause de cet inclinaison par rapport à l'axe z de la coque, il est plus commode d'écrire la fonction de déplacement de l'élément en fonction de ces coordonnées locales (r,z), où u: déplacement dans le plan et w: déplacement normal au plan. Puisque il y a six degrés de liberté par élément, on doit prendre six coefficients inconnus dans les polynomes representants le modèle de déplacement permis. Le système suivant donne un ensemble convenable de relations dans lesquelles la fonction u varie linéairement en s et ou w est une fonction cubique de s.

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 \cdot s \\ w &= a_3 + a_4 \cdot s + a_5 \cdot s^2 + a_6 \cdot s^3 \\ dw/ds &= a_4 + 2 \cdot a_5 \cdot s + 3 \cdot a_6 \cdot s^2 \end{aligned} \quad (1)b$$

avec dw/ds : la rotation obtenue en differentiant la seconde équation. En écrivant le système précédant sous forme matricielle, on aura:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ dw/ds \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s & 3s^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (2)b$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\{ \delta(r,s) \} = [f(r,s)]. \{ a \} \quad (3)b$$

c_ Expressions des déplacements dans l'élément en fonction des déplacements nodaux.

Cette étape s'accomplit en remplaçant les coordonnées nodales

(r,z) par les valeurs données par (3)b ,et en résolvant cette dernière, on obtient la relation qui relie les coefficients (ai) aux déplacements nodaux.

Par exemple au noeud 1, s=0 on'a:

$$u_1 = a_1, w_1 = a_2, (dw/ds)_1 = a_4 \quad (1)c$$

Au noeud 2 ,s=L on'a:

$$\begin{aligned} u_2 &= a_1 + a_2 \cdot L, w_2 = a_2 + a_4 \cdot L + a_5 \cdot L^2 + a_6 \cdot L^3 \\ (dw/ds)_2 &= a_4 + 2 \cdot a_5 \cdot L + 3 \cdot a_6 \cdot L^2 \end{aligned} \quad (2)c$$

Et, on aura ainsi l'expression matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ (dw/ds)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ (dw/ds)_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (3).c$$

Pour obtenir { a } en fonction des déplacements nodaux, on doit simplement inverser la matrice carrée d'ordre six(6), on aura :

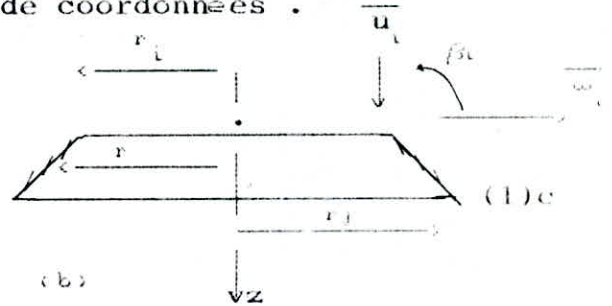
$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & -2/L^2 & 0 & 3/L^2 & -1/L \\ 0 & 2/L^3 & 1/L^2 & 0 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ (dw/ds)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ (dw/ds)_2 \end{Bmatrix}$$

On exprime alors les déplacements u et w de chaque point de l'élément, en fonction des coefficients { a }, à l'aide du système suivant:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (1)b$$

Ainsi, en combinant les équations (1)b et (4)c, on peut

exprimer les déplacements nodaux u_i, w_i et $(dw/ds)_i$, avec $i=1,2$. Cependant, les déplacements nodaux sont exprimés en fonction des coordonnées locales de l'élément (r,s) et doivent être maintenant transformés en coordonnées globales (r,z) et en déformations globales u, w, β puisque la géométrie et la charge de la structure sont définies dans ce système de coordonnées.



Ce qui donne la matrice de transformation pour le noeud 1 suivante:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ dw/ds_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\beta}_1 \end{Bmatrix} \quad (5)c$$

Pour un seul élément :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ (dw/ds)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ (dw/ds)_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\beta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\beta}_2 \end{Bmatrix}$$

(6)c

Il est maintenant possible d'écrire l'équation donnant les déplacements locaux de l'élément u et w en fonction de la déformation nodale globale de l'élément. cela se fait en remplaçant (ai) par sa valeur (4)c dans l'équation (1)b et les déformations nodales globales données par les équations (6)c. Tout cela est écrit entièrement dans l'équation (7)c et la multiplication matricielle conduit finalement à l'équation (8)c.

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p)\cos\phi & (1-p)\sin\phi & 0 \\ -\sin\phi(1-\frac{3p^2}{3p^2+2p}) & \cos\phi(1-\frac{3p^2}{3p^2+2p}) & L(\frac{p-2}{2p+p}) \\ p.\cos\phi & p.\sin\phi & 0 \\ -\sin\phi(\frac{3p^2}{-2p}) & \cos\phi(\frac{3p^2}{-2p}) & L(\frac{-p^2}{+p}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

c_ Les déformations en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux.

En se basant sur les hypothèses de Love_Kirchoff, on'a les composantes des déformations pour une coque de révolution, qui fait intervenir des extentions et des courbures, qui sont reliées aux déplacements u et w par l'équation (1)d .

$$\{\varepsilon(r,s)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \kappa_r \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/ds & 0 \\ \sin\phi/r & \cos\phi/r \\ 0 & -d^2/ds^2 \\ 0 & -\sin\phi/r.d/ds \end{bmatrix} * \{u \ w\}^T \quad (1)d$$

En remplaçant u et w par leur valeur à partir de l'équation (6)c et en calculant les différentiations indiquées dans (1)d on obtient la matrice [B] reliant déformations et déplacements nodaux.

$$\{\varepsilon(r,s)\} = [B].\{\delta\}^e \quad (2)d$$

On remarque que, puisque $p=s/L$ on aura $ds=L.dp$ et $1/ds=1/L.1/dp$
LA MATRICE [B]:voir plus loins

e_ Les contraintes internes en fonction des déformations et des déplacements nodaux

Dans le cas des coques ,il est habituel de travailler en termes de résultats de contraintes qui sont les forces et les moments par unité de longueur.Pour un élément de coque à symétrie

axiale, ces résultantes consistent en N_ϕ et N_θ , qui sont les forces de membranes par unité de longueur et M_ϕ et M_θ , qui sont les moments par unité de longueur. La matrice reliant les déformations aux contraintes [D], appelée matrice d'élasticité de l'élément, est donnée par l'équation suivante:

$$\begin{Bmatrix} N_\phi \\ N_\theta \\ M_\phi \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot t}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu \cdot t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu \cdot t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \\ \kappa_\phi \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} \quad (1)e$$

E : Module de Young. V : coefficient de Poisson
t : Epaisseur de la coque

On peut alors relier les contraintes dans l'élément aux déplacements nodaux par la relation suivante:

$$\{\sigma(r,s)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\} = [H] \cdot \{\delta^e\} \quad (2)e$$

Avec [H] : la matrice contrainte

f Les forces nodales statiquement équivalentes F^e aux contraintes internes en fonction des déplacements nodaux

On utilise le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges nodales qui est statiquement équivalent aux contraintes internes. La condition d'équivalence peut s'exprimer comme suit : durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes. On choisit un ensemble arbitraire de déplacements nodaux représenté par le vecteur :

$$\{\delta^e\} = \{ \{\delta_1^e\} \{\delta_2^e\} \dots \{\delta_n^e\} \} \quad (1)f$$

Le travail extérieur W_{ext} des forces nodales est donné par la relation:

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \{\delta_1^e\} \cdot \{F_1^e\} + \dots + \{\delta_n^e\} \cdot \{F_n^e\} \\ &= \{\delta^{e*}\} \cdot \{F^e\} \end{aligned} \quad (1)f$$

Si les déplacements arbitrairement imposés produisent des déformations aux points de l'élément ou les contraintes réelles

sont les $\{\sigma(x,y)\}$, alors le travail par unité de volume est donné par:

$$W_{int} = \{\varepsilon(x,y)^*\}^t \cdot \{\sigma(x,y)\} \quad (2)f.$$

et le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément c.à.d :

$$\int_V W_{int} \cdot dV = \int_V \{\varepsilon(x,y)^*\}^t \cdot \{\sigma(x,y)\} \cdot dV \quad (3)f.$$

et sachant que :

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B] \cdot \{\delta^{\omega}\} \Rightarrow \{\varepsilon(x,y)\} = [B] \cdot \{\delta^{\omega}\} \quad (4)f.$$

$$\text{et que : } \{\varepsilon(x,y)^*\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^{\omega*}\} \quad (5)f.$$

Donc l'équation des travaux virtuels pour le travail interne sera exprimée ainsi :

$$\int_V W_{int} \cdot dV = \int_V [B]^t \cdot \{\delta^{\omega*}\} \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^{\omega}\} \cdot dV \quad (6)f.$$

$$\text{et : } W_{ext} = \{\delta^{\omega*}\} \cdot \{F^{\omega}\} \quad (7)f.$$

L'opération finale consiste à égaler le travail interne et externe produit pendant les déplacements virtuels $\{\delta^{\omega*}\}$.

En supposant les déplacements nodaux égaux à l'unité on'a :

$$\begin{aligned} [F^{\omega}] &= \left(\int_V [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \right) \cdot \{\delta^{\omega}\} \\ &= [K^{\omega}] \cdot \{\delta^{\omega}\} \end{aligned} \quad (8)f.$$

$$\text{d'où } \boxed{[K^{\omega}] = \int_V [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV} \quad (9)f.$$

Cette relation est valable dans le cas général, pour notre cas l'intégration est de surface, où "t": épaisseur de la coque n'entre pas en compte, car les contraintes sont exprimées en résultantes (forces et moments par unité de longueur). Donc la matrice de raideur élémentaire est exprimée ainsi :

$$[K^{\omega}] = \int_S [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot ds \quad (10)f.$$

Avec : $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s \Rightarrow dS = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dp$

$$\text{Alors : } [K^{\omega}] = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \int_0^1 [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot r \cdot dp \quad (11)f.$$

En exprimant r en fonction de p on aura :

$$[K^{\omega}] = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \int_0^1 [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot (r_1 + L \cdot p \cdot \sin\phi) \cdot dp \quad (12)f.$$

g_ Etablissement de la matrice [H] reliant les contraintes et

déplacements nodaux.

L'étape finale est la détermination des contraintes en chaque point de l'élément à partir de ses déplacements nodaux. Cela est réalisé par la relation suivante :

$$\{\sigma(r,s)\} = [D].[B].\{\delta^e\} \quad (1)g.$$

$$\text{ou } \{\sigma(r,s)\} = [H].\{\delta^e\}$$

$$\text{d'où } [H] = [D].[B] \quad (2)g.$$

3.3 / CALCUL DE [B] ; [H] ET [B]^t.[D].[B]

— Etablissement de [B] :

On pose :

$$a = \cos\phi/L$$

$$a_1 = \cos\phi \cdot \sin\phi \cdot (1-p)/r - \cos\phi \cdot \sin\phi \cdot (1-3.p^2+2.p^3)/r$$

$$a_2 = \sin\phi^2 \cdot (-6+12p)/L$$

$$a_3 = \sin\phi^2 \cdot (-6.p+6.p^2)/L.r$$

$$b = \sin\phi/L$$

$$b_1 = \sin\phi^2 \cdot (1-p)/r + \cos\phi^2 \cdot (1-3.p^2+2.p^3)/r$$

$$b_2 = -\cos\phi \cdot (-6+12.p)/L^2$$

$$b_3 = -\cos\phi \cdot \sin\phi \cdot (-6.p+6.p^2)/L.r$$

$$c_1 = \cos\phi \cdot L \cdot (p+2.p^2+p^3)/r$$

$$c_2 = -(-4+6.p)/L$$

$$c_3 = -\sin\phi(1-4.p+3.p^2)/r$$

$$d_1 = p \cdot \cos\phi \cdot \sin\phi/r - \cos\phi \cdot \sin\phi \cdot (3.p^2-2.p^3)/r$$

$$d_2 = \sin\phi \cdot (6-12.p)/L^2$$

$$d_3 = \sin\phi^2 \cdot (6.p-6.p^2)/L.r$$

$$e_1 = p \cdot \sin\phi^2/r + \cos\phi^2(3.p^2-2.p^3)$$

$$e_2 = -\cos\phi \cdot (6-12.p)/L$$

$$e_3 = -\cos\phi \cdot \sin\phi \cdot (6.p-2.p^2)/L.r$$

$$f_1 = L \cdot \cos\phi \cdot (-p^2+p^3)/r$$

$$f_2 = (2-6.p)/L$$

$$f_3 = \sin\phi \cdot (2.p-3.p^2)/r$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -a & -b & 0 & a & b & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \quad (1).3$$

- Etablissement de [H] :

$$[H] = [D].[B]$$

$$[H] = \frac{E.t}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} -a+a_1\nu & -b+\nu.b_1 & \nu.c_1 \\ -a.\nu+a_1 & -b.\nu+b_1 & c_1 \\ T(a_2+\nu.a_3) & T(b_2+\nu.b_3) & T(c_2+\nu.c_3) \\ T(a_2.\nu+a_3) & T(b_2.\nu+b_3) & T(c_2.\nu+c_3) \\ & a+\nu.d_1 & b+\nu.e_1 & \nu.f_1 \\ & a.\nu+d_1 & b.\nu+e_1 & f_1 \\ & T(d_2+\nu.d_3) & T(e_2+\nu.e_3) & T(f_2+\nu.f_3) \\ & T(d_2.\nu+d_3) & T(e_2.\nu+e_3) & T(f_2.\nu+f_3) \end{bmatrix}$$

avec $T = t^2 / 12$

- Etablissement de $[B]^t.[D].[B]$ (cas général) :

On aura une matrice élémentaire symétrique d'ordre 6*6

$$[B]^t.[D].[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{16} \\ & B_{22} & \dots & B_{26} \\ & & \text{SYM} & \dots \\ & & & \dots \\ & & & B_{66} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$B_{11} = a^2 + a_1^2 - 2.\nu.(a.a_1 - T a_2.a_3) + T(a_2^2 + a_3^2)$$

$$B_{12} = b.a - b.\nu.a_1 + b_1.a_1 - b_1.a.\nu + T(a_2^2 + a_3^2) + 2.\nu T.a_2.a_3$$

$$B_{13} = c_1.a_1 - c_1.a.\nu + T(c_2.b_2 + c_3.b_3) + T(a_2^2 + a_3^2) + 2.T.\nu a_2.a_3$$

$$B_{14} = -a^2 + d_1.a_1 + \nu.(a.a_1 - d_1.a) + T(d_2.a_2 + a_3.d_3) + T.\nu(d_2.a_3 + a_2.d_3)$$

$$B_{15} = -b.a + e_1.a_1 + \nu(b.a_1 - e_1.a) + T(e_2.a_2 + e_3.a_3) + T.\nu(e_2.a_3 + e_3.a_2)$$

$$B_{16} = f_1.a_1 - \nu.f_1.a + T(f_2.a_2 + f_3.a_3) + T.\nu(f_2.a_3 + f_3.a_2)$$

$$B_{22} = b^2 + b_1^2 - 2.\nu(b.b_1 - T b_2.b_3) + T(b_2^2 + b_3^2)$$

$$B_{23} = c_1.b_1 - c_1.a.\nu + T(c_2.b_2 + c_3.b_3) + \nu.T(c_2.b_3 + c_3.b_2)$$

$$B_{24} = -a.b + b_1.d_1 + \nu(a.b_1 - b.d_1) + T(d_2.b_2 + d_3.b_3) + T.\nu(d_2.b_3 + d_3.b_2)$$

$$B_{25} = -b^2 + e_1.b_1 + \nu(b.b_1 - b.e_1) + T(e_2.b_2 + e_3.b_3) + T.\nu(e_2.b_3 + e_3.b_2)$$

$$B_{26} = f_1.b_1 - \nu f_1.b + T(f_2.b_2 + f_3.b_3) + T.\nu(f_2.b_3 + f_3.b_2)$$

$$B_{33} = c_1^2 + T(c_2^2 + c_3^2) + 2.T.\nu.c_2.c_3$$

$$\begin{aligned}
B_{44} &= a \cdot \nu c_1 + d_1 \cdot c_1 + T(d_2 \cdot c_2 + d_3 \cdot c_3) + T \cdot \nu (d_2 \cdot c_3 + d_3 \cdot c_2) \\
B_{45} &= e_1 \cdot c_1 + \nu \cdot b \cdot c_1 + T(e_2 \cdot c_2 + e_3 \cdot c_3) + T \cdot \nu (e_2 \cdot c_3 + e_3 \cdot c_2) \\
B_{46} &= c_2 \cdot f_1 + T(f_2 \cdot c_2 + f_3 \cdot c_3) + T \cdot \nu (f_2 \cdot c_3 + f_3 \cdot c_2) \\
B_{44} &= a^2 + d_1^2 + 2 \cdot \nu (a \cdot d_1 + T \cdot d_2 \cdot d_3) + \nu \cdot T (d_2^2 + d_3^2) \\
B_{45} &= a \cdot b + d_1 \cdot e_1 + \nu (b \cdot d_1 + e_1 \cdot a) + T(e_2 \cdot d_2 + e_3 \cdot d_3) + \nu \cdot T (e_2 \cdot d_3 + e_3 \cdot d_2) \\
B_{46} &= f_1 \cdot d_1 + \nu \cdot f_1 \cdot a + T(f_2 \cdot d_2 + f_3 \cdot d_3) + \nu \cdot T (f_2 \cdot d_3 + f_3 \cdot d_2) \\
B_{55} &= b^2 + e_1^2 + 2 \cdot \nu (b \cdot e_1 + T \cdot e_2 \cdot e_3) + T(e_2^2 + e_3^2) \\
B_{56} &= f_1 \cdot e_1 + f_1 \cdot b \cdot \nu + T(f_2 \cdot e_2 + f_3 \cdot e_3) + \nu \cdot T (f_2 \cdot e_3 + f_3 \cdot e_2) \\
B_{66} &= f_1^2 + T(f_3^2 + f_2^2) + 2 \cdot \nu \cdot T \cdot f_2 \cdot f_3
\end{aligned}$$

3.4 / EXEMPLE

Cas du cylindre hydrostatique : $\phi = 0$

On a :

$$a = 1/L ; b = 0$$

$$a_1 = 0 ; b_1 = (1 - 3p^2 + 2p^3)/r ; c_1 = L(p - 2p^2 + p^3)/r ; d_1 = 0 ;$$

$$a_2 = 0 ; b_2 = (12p - 6)/L^2 ; c_2 = (4 - 6p)/L ; d_2 = 0$$

$$a_3 = 0 ; b_3 = 0 ; c_3 = 0 ; d_3 = 0$$

$$e_1 = (3p^2 - 2p^3)/r ; f_1 = L(-p^2 + p^3)/r$$

$$e_2 = (6 - 12p)/L^2 ; f_2 = (2 - 6p)/L$$

$$e_3 = 0 ; f_3 = 0$$

Etablissement de [B]t.[D].[B] :

$$B_{11} = 1/L^2, B_{12} = -\nu(1 - 3p^2 + 2p^3)/r \cdot L, B_{13} = -\nu(p - 2p^2 + p^3)/r$$

$$B_{14} = -1/L^2, B_{15} = -\nu(3p^2 - 2p^3)/L \cdot r, B_{16} = -\nu(-p^2 + p^3)/r$$

$$B_{22} = (1 - 3p^2 + 2p^3)^2/r^2 + T(-6 + 12p)^2/L^4$$

$$B_{23} = L(p - 2p^2 + p^3)(1 - 3p^2 + 2p^3)/r^2 + T(6 - 12p)(4 - 6p)/L^3$$

$$B_{24} = \nu(1 - 3p^2 + 2p^3)/L \cdot r$$

$$B_{25} = (1 - 3p^2 + 2p^3)(3p^2 - 2p^3)/r^2 + T(12p - 6)(6 - 12p)/L^4$$

$$B_{26} = L(1 - 3p^2 + 2p^3)(-p^2 + p^3)/r^2 + T(6 - 12p)(2 - 6p)/L^3$$

$$B_{33} = L^2((p - 2p^2 + p^3)/r^2 + T(4 - 6p)^2/L^2), B_{34} = \nu(p - 2p^2 + p^3)/r$$

$$B_{35} = L(p - 2p^2 + p^3)(3p^2 - 2p^3)/r^2 + T(4 - 6p)(12p - 6)/L^3$$

$$B_{36} = L^2(p - 2p^2 + p^3)(-p^2 + p^3)/r^2 + T(4 - 6p)(2 - 6p)/L^2, B_{44} = 1/L^2$$

$$B_{45} = \nu(3p^2 - 2p^3)/L \cdot r, B_{46} = \nu(-p^2 + p^3)/r$$

$$B_{55} = (3p^2 - 2p^3)^2/r^2 + T(6 - 12p)^2/L^4$$

$$B_{56} = L(-p^2 + p^3)(3p^2 - 2p^3)/r^2 + T(4 - 6p)(2 - 6p)/L^3$$

$$B_{66} = L^2(-p^2 + p^3)/r^2 + T(2 - 6p)^2/L^2$$

Calcul de la matrice de raideur élémentaire [K^e] :

$$[K^e] = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^L [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot L \cdot r \cdot dp$$

On aura :

$$\begin{aligned} K_{11} &= r/L, K_{12} = -\nu/2, K_{13} = -L \cdot \nu/12, K_{14} = -r/L, K_{15} = -\nu/2 \\ K_{16} &= \nu \cdot L/12, K_{22} = 13 \cdot L/35 + t^2 \cdot r/L^3, K_{23} = -11 \cdot L^2/210 \cdot r - r \cdot t^2/2 \cdot L^2 \\ K_{24} &= \nu/2, K_{25} = 9 \cdot r/70 \cdot L^3 - t^2 \cdot r/L^3, K_{26} = -13 \cdot L^2/420 \cdot r + t^2 \cdot r/3 \cdot L^2 \\ K_{33} &= L^3/105 \cdot r + t^2 \cdot r/3 \cdot L, K_{34} = \nu \cdot L/1, K_{35} = 13 \cdot L^2/420 \cdot r + t^2 \cdot r/L^2 \\ K_{36} &= -L^3/140 \cdot r + T \cdot r/6 \cdot L, K_{44} = r/L, K_{45} = \nu/2, K_{46} = -\nu \cdot L/12 \\ K_{55} &= 13/35 \cdot L/r + r \cdot t^2/L^3, K_{56} = 11 \cdot L^2/210 \cdot r - t^2 \cdot r/2 \cdot L^2 \\ K_{66} &= L^2/105 \cdot r^2 + t^2 \cdot r/3 \cdot L \end{aligned}$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{16} \\ & K_{22} & \dots & K_{26} \\ \text{sym} & & \dots & \\ & & & K_{66} \end{bmatrix}$$

Remarque : le calcul confirme la symétrie de [K^e].

Etablissement de [H] : Matrice contrainte pour une coque cylindrique.

$$[H] = [D] \cdot [B] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{41} & \dots & \dots & H_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } H_{11} &= -1/L, H_{12} = \nu(1-3p^2+2p^3)/r, H_{13} = \nu \cdot L(p-2p^2+p^3)/r \\ H_{14} &= 1/L, H_{15} = \nu(3p^2-2p^3)/L, H_{16} = \nu \cdot L(-p^2+p^3)/r, H_{21} = -\nu/L \\ H_{22} &= (1-3p^2+2p^3)/r, H_{23} = L(p-2p^2+p^3)/r, H_{24} = \nu/L \\ H_{25} &= (3p^2-2p^3)/r, H_{26} = L(-p^2+p^3)/r, H_{31} = 0 \\ H_{32} &= -T(-6+12p)/L^2, H_{33} = T(4-6p)/L, H_{34} = 0, H_{35} = -T(6-12p)/L^2 \\ H_{36} &= T(2-6p)/L, H_{41} = 0, H_{42} = -\nu \cdot T(-6+12p)/L^2, H_{43} = \nu \cdot T(4-6p)/L \\ H_{44} &= 0, H_{45} = -\nu \cdot T(6-12p)/L^2, H_{46} = \nu \cdot T(2-6p)/L \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } T = t^2/12$$

On a enfin la matrice [H] reliant les contraintes aux déplacements, avec $p = s/L$.

$$\text{Pour un élément : } s=0 \Rightarrow p=0 \quad \text{et} \quad s=L \Rightarrow p=1$$

Donc les expressions des contraintes nodales sont :

Au noeud :1

$$\begin{Bmatrix} N\phi_1 \\ NS_1 \\ M\phi_1 \\ MS_1 \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot t}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -1/L & \nu/r & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ -\nu/L & 1/r & 0 & \nu/L & 0 & 0 \\ 0 & -t^2/2L^2 & t^2/3L & 0 & t^2/2L^2 & t^2/6L \\ 0 & -\nu t^2/2L^2 & \nu t^2/3L & 0 & \nu t^2/2L^2 & \nu t^2/6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{w_1} \\ \beta_1 \\ \overline{u_2} \\ \overline{w_2} \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

Au noeud :2

$$\begin{Bmatrix} N\phi_2 \\ NS_2 \\ M\phi_2 \\ MS_2 \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot t}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -1/L & \nu/r & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ -\nu/L & 1/r & 0 & \nu/L & 0 & 0 \\ 0 & t^2/2L^2 & -t^2/6L & 0 & -t^2/2L^2 & -t^2/3L \\ 0 & \nu t^2/2L^2 & \nu t^2/6L & 0 & -\nu t^2/2L^2 & -\nu t^2/3L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{w_1} \\ \beta_1 \\ \overline{u_2} \\ \overline{w_2} \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

De même on détermine simplement les contraintes aux autres points en donnant à p la valeur appropriée.

IV.4 / VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE :

4.1 / INTRODUCTION :

Les sollicitations extérieures sont de deux natures :

- * Sollicitations concentrées (généralement nodales)
- * sollicitations réparties

Pour le premier genre ,le vecteur charge est simple à déterminer. On fait correspondre à chaque degré de liberté la charge qui lui est appliquée. Alors que le deuxième type de chargement, on le remplace par des charges ponctuelles équivalentes appliquées aux noeuds. Pour cela, il faut poser:

LE TRAVAIL DU CHARGEMENT REEL = AU TRAVAIL DES FORCES NODALES
EQUIVALENTES (appliquées aux
noeuds).

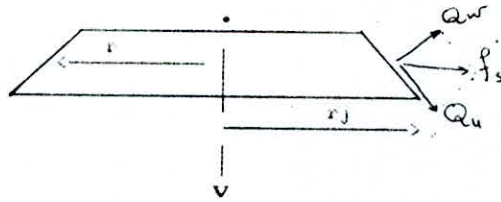
On a deux types de chages réparties :

- _ charges surfaciques.
- _ charges volumiques .

* Charges surfaciques :

Soit une charge de surface [Fs] de composantes Qu et Qw dans le

repère local, et Q_z et Q_r dans le repère global, comme le montre la figure ci-dessous :



$$r = r_i + L \cdot p \cdot \sin\theta \quad \text{et} \quad p = s/L$$

$$[F_s] = \{ Q_z \quad Q_r \}^t$$

Le travail dû à un déplacement virtuel sera :

$$W(r, z) = (Q_z \cdot du + Q_r \cdot dw) \cdot ds$$

On intègre sur la surface où la charge est répartie on aura :

$$W(r, z) = \{ du \quad dw \}^t * \{ F_s \} \cdot ds$$

Et le travail des forces nodales équivalentes: $[F_s^e]$ est :

$$W_{feq} = \{ d \delta \}^t \cdot \{ F^e \}$$

L'égalité des deux travaux donne :

$$[F_s] = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} Q_z(1-p) \\ Q_r(1-3p^2+2p^3) \\ L \cdot Q_r(p-2p^2+p^3) \\ Q_z \cdot p \\ Q_r(3p^2-2p^3) \\ L \cdot Q_r(-p^2+p^3) \end{array} \right\}$$

Nous étudierons deux cas de charges répartie :

_ uniformément répartie.

- charge triangulaire (pression d'eau).

a_ Charge répartie uniforme :

On pose : $s=L \cdot p \Rightarrow ds=L \cdot dp$ et $r = r_1 + L \cdot p \cdot \sin\theta$

Avec r_1 : rayon du premier noeud d'un élément.

$$[F_s^e] = 2 \cdot \pi \cdot L \left\{ \begin{array}{l} Q_z(r_1/2 + L \cdot \sin\theta/6) \\ Q_r(r_1/2 + 3 \cdot L \cdot \sin\theta/20) \\ Q_r \cdot L(r_1/12 + L \cdot \sin\theta/30) \\ Q_z(r_1/2 + L \cdot \sin\theta/3) \\ Q_r(r_1/2 + 7L \cdot \sin\theta/20) \\ -Q_z \cdot L(r_1/12 + L \cdot \sin\theta/20) \end{array} \right\}$$

b_ Chargement triangulaire

$$[F] = 2\pi L \begin{Bmatrix} Qz[Z_1(r_1/2 + L \cdot \sin\phi/6) + L \cdot \cos\phi(r_1/6 + L \cdot \sin\phi/12)] \\ Qr[Z_1(r_1/2 + 3 \cdot L \cdot \sin\phi/20) + L \cdot \cos\phi(3 \cdot r_1/20 + 2 \cdot L \cdot \sin\phi/60)] \\ Qr \cdot L^2 [Z_1(r_1/12 + L^2 \sin\phi/30) + \cos\phi(17 \cdot r_1/60 + 13 \cdot L \cdot \sin\phi/60)] \\ Qz[Z_1(r_1/2 + L \cdot \sin\phi/3) + L \cdot \cos\phi(r_1/3 + L \cdot \sin\phi/4)] \\ Qr[Z_1(r_1/2 + 7L \cdot \sin\phi/20) + L \cdot \cos\phi(7 \cdot r_1/20 + 4 \cdot L \cdot \sin\phi/15)] \\ -Qz \cdot L^2 [Z_1(r_1/12 + L \sin\phi/20) + \cos\phi(r_1/20 + L \cdot \sin\phi/30)] \end{Bmatrix}$$

Où r_1 et Z_1 sont les coordonnées du premier noeud de l'élément.

CHAPITRE V : PROGRAMMATION :

A: PROGRAMATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

1_ INTRODUCTION :

L'aspect général de la méthode des éléments finis permet de concevoir un programme d'ordinateur ,capable de résoudre tous les problèmes de coques.On peut distinguer dans la structure d'un tel programme quatre parties principales qui sont :

a_ Entrée des données :

Cette partie renferme :

- _ Caractéristiques géométriques de la structure
(rayon, épaisseur, ...etc.).
- _ Caractéristiques mécaniques du matériau
(module de Young, coefficient de Poisson ...etc).
- _ Caractéristiques du chargement dans la structure
(charge répartie, triangulaire, ou concentre...etc).

b_ Etude de l'élément :

Evaluation des matrices de raideurs élémentaires $[K_e]$ et du vecteur chargement en cas de chargement répartie.

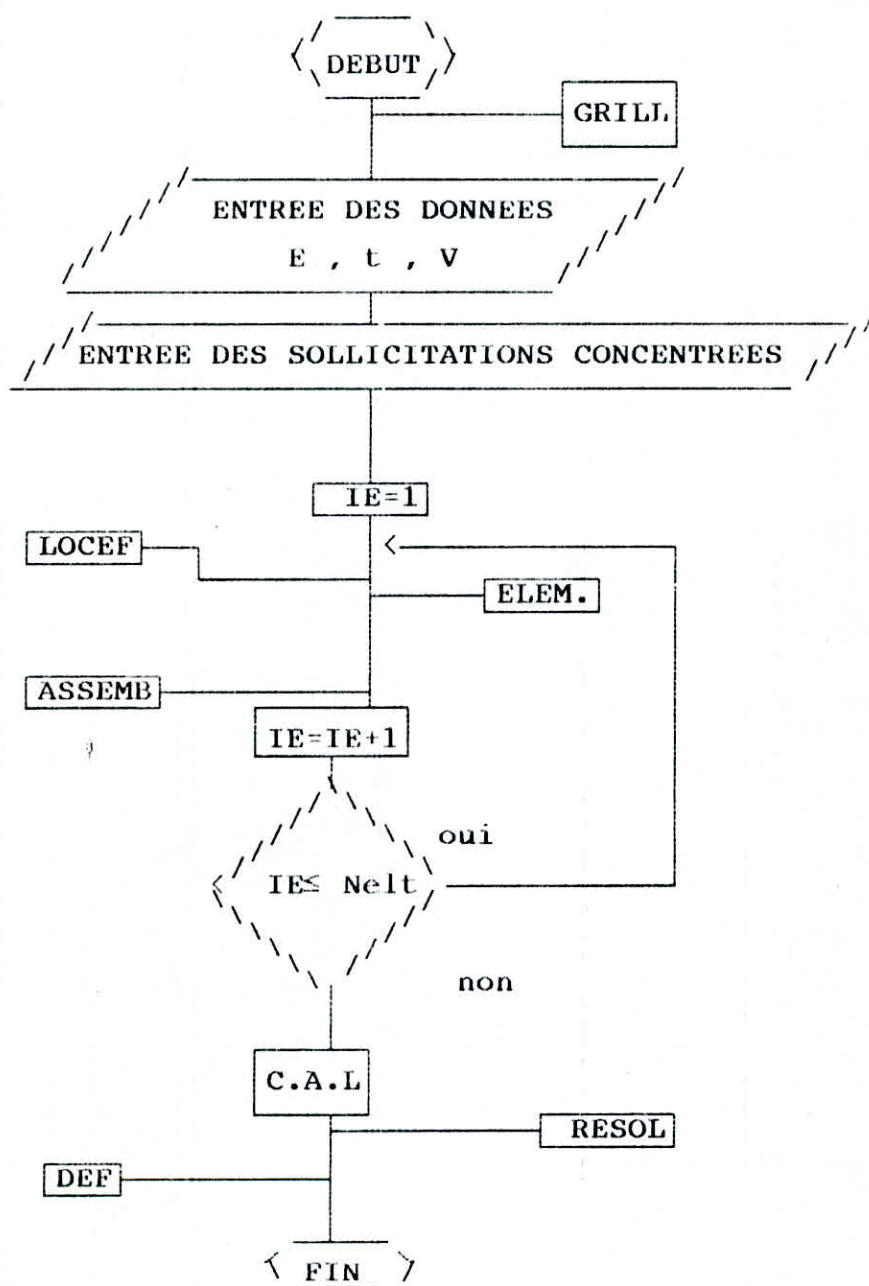
c_ Résolution :

Construction et résolution du modèle mathématique représentant le système entier.

d_ Résultats :

présentation des déplacements et contraintes ou efforts internes par unité de longueur, calculer par le programme.

2_ Organigramme



3_ PRESENTATION DETAILLEE DU PROGRAMME

Il se compose d'un programme principal, faisant appel à six(6) sous_ programmes ,chacun possédant une fonction bien spécifique.

3.1_ programme principale:

Il est utilisé pour l'introduction des données et

l'impression de celles-ci ,fait appel aux différents sous_programme, et lit les sollicitations nodales, surfaciques et les conditions aux limites.on a utiliser ici la méthode du terme diagonal dominant;qui consiste à additionner aux termes diagonaux de la matrice ,des raideurs globales [K] correspondantes aux déplacements fixés, un grand nombre (x) égal à 10^{30} c_à_à_d remplacer K_{ii} par $K_{ii}+x$ et F_i par $x*U_i$ nous aurons :

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{i1} & \dots & K_{ii}+x & \dots & K_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{n1} & \dots & \dots & \dots & K_{nn}
 \end{bmatrix}
 *
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 \vdots \\
 U_i \\
 \vdots \\
 U_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 \\
 \vdots \\
 x.U_i \\
 \vdots \\
 F_n
 \end{bmatrix}$$

Comme $K_{ij} \ll$ devant x on peut dir que $U_i = \bar{U}_i$ ce qui n'est valable que si $x*U_i \gg$ devant la somme des $K_{ij}*U_j$

3.2_ SOUS_PROGRAMMES :

3.2.1_ S.P: GRILLE

Ce S.P consiste à lire le nombre total d'éléments,et le nombre total de noeuds, et de les coordonnées stocker dans la table de coordonnées globales appelée CORG,et qu'il imprimera ensuite pour la vérification.

Cette table se présente sous la forme suivante :

		Noeuds					
coord		1	2	3	.	.	n
r		r1	r2	r3	.	.	rn
z		z1	z2	z3	.	.	zn

La deuxième partie de ce programme consiste à la création d'une table de connectivite, qui définit chaque élément par la liste des numéros de ces noeuds. Cette table se présente sous la forme ci-dessous:

		Elements					
Noeuds		1	2	...	e	...	ne
1		.	.	.	t1	.	.
2		.	.	.	t2	.	.
.	
.	
n		.	.	.	tn	.	.

avec nombre d'éléments total

$$[VK] = \begin{bmatrix} & \\ & / \backslash \\ & & \end{bmatrix} \quad \text{d'ordre } n*b$$

Avec $K_{ij} = VK_{ij}$ si $i = I, j = I - J + 1$, et $j \geq I$

Ensuite la résolution se fait par le procédé de triangularisation de Gauss, tout en tennant compte que la matrice est redressée.

3.2.6_ S.P : DEF

Il intervient apres résolution du système $[K].(U)=(F)$; et calcul les déformations et efforts internes à partir des déplacements déjà calculer.

B_ PROGRAMMATION DE LA METHODE MATRICIELLE :

La programmation de cette méthode est beaucoup plus simple que celle de la M.E.F ,elle se base principalement sur la résolution d'un système d'équation linéaire de la forme $A.x=b$ qui est élaboré à partir de la formulation présentée dans le chapitre II .

Il est organisé de la manière suivante:

1_ Programme principal

C'est à partir de ce dernier qu 'on fait appelle à un ensemble de sous.programmes et fonctions ,la lecture des caractéristiques mécaniques et géométriques de la coque, et la détermination des déplacements et efforts membrannaires et flexionnelles.

2_ Sous_programmes

2.1_ S.P : MENU

Il presente un choix de coque varier a l'utilisateur, avec leur propre cas de chargement

2.2_ S.P :RESOL

Dans ce s.programme on résouds un système d'équation linéaire simple, où on détermine les inconnues H et M ,les efforts uniformément répartis le long de la bordure .

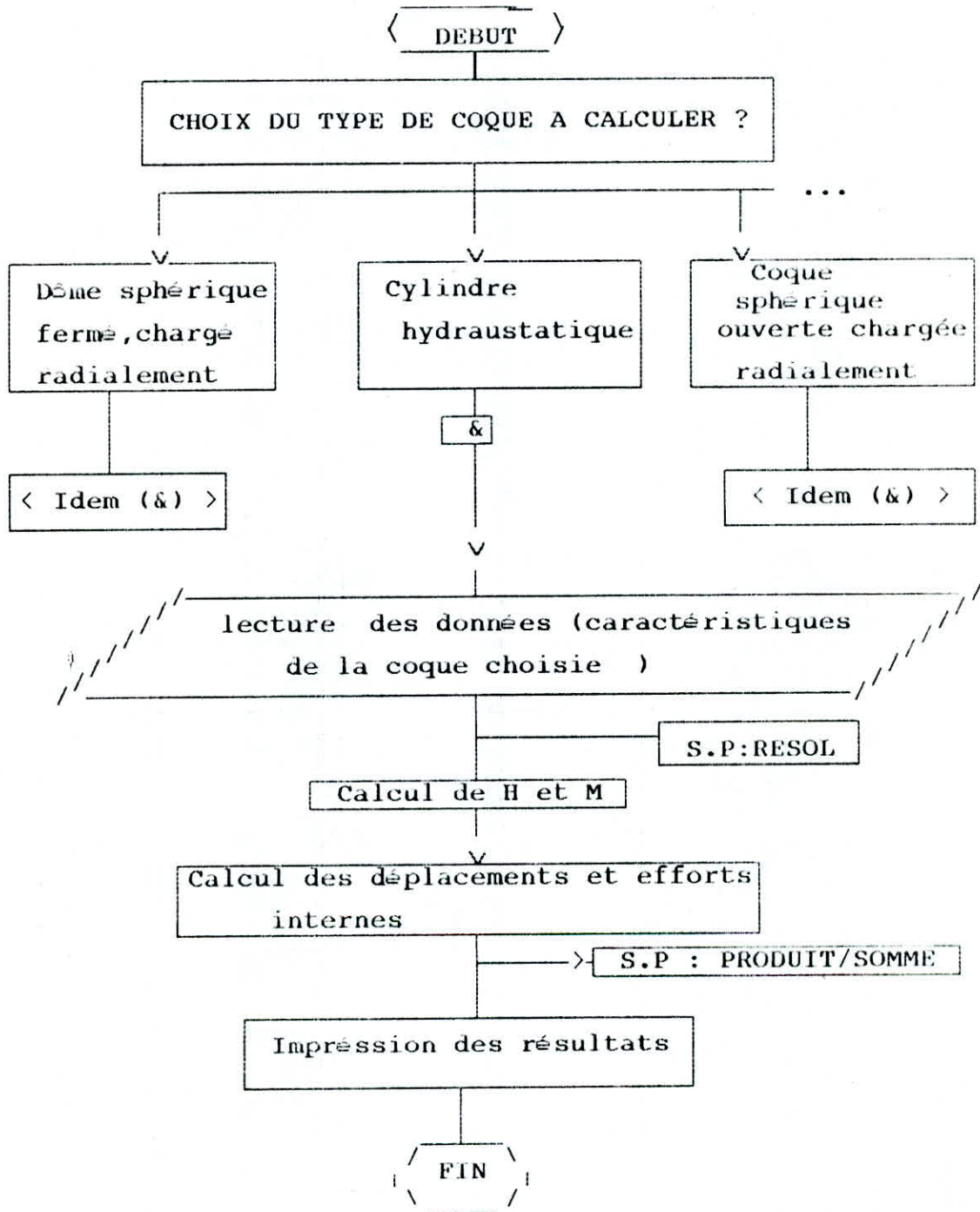
2.3_ S.P :PRODUIT & SOMME

En fin ,après avoir déteminer les inconnues H et M ,on calcul les déplacements totaux et les efforts totaux en différents points de la coque étudiée .

2.4_ FONCTIONS

Après avoir fait le choix de la coque à calculer et lut ses différentes caractéristiques ,on fait appelle aux fonctions relatives a la coque choisie ,où on a les expressions des déplacements et des efforts de reductions (membranaires et flexionnelles en fonction de H et M et des caractéristiques géométriques et mécanique de la coque .

3_ ORGANIGRAMME :



CHAPITRE VI : EXEMPLES ET APPLICATIONS

1_ EXEMPLE 1 :Cylindre soumis à une pression
hydraustatique (exemple de Timoshenko).

Caractéristiques de la coque:

Hauteur totale	= 312	in
Rayon 'a'	= 360	in
Module de Young 'E'	= 2249.78 E+07	lb/in.in
Epaisseur 't'	= 14	in
Coefficient de Poisson 'V'	= 0.25	
Charge hydraustatique 'q'	= 0.03613	t/in.in

1.1_ Solutions par la méthode matricielle :

Wmax : Déplacement horizontal maximal (noté : δ ailleurs)

	Wmax (in)	Mxmax(lb.in/in)
Sol:M.M	2.8041 .E-06	-0.139624.E+05
Sol:Theo- rique	2.8063 .E-06	-0.139621.E+05
Erreur(%)	-0.077	0.002

C.P.U = 0:00:01.32 (temps d'exécution)

1.2_ Solutions par la méthode des éléments finis :

Nbr d'elts	Wmax (in)	Erreur %	Mxmax(lb.in/in)	Erreur %
10	2.75356.E-06	-1.87	-0.137927.E+05	-1.21
15	2.81083.E-06	0.16	-0.137898.E+05	-1.23
22	2.80833.E-06	0.07	-0.137782.E+05	-1.3
Sol: Théorique	2.8063 .E-06	###	-0.139621.E+05	####

Nbr d'elts	C.P.U :TIME
10	0:00:14.37
15	0:00:21.13
22	0:00:31.92

1.3_ Graphes : Etude comparative (voir graphe N° V)

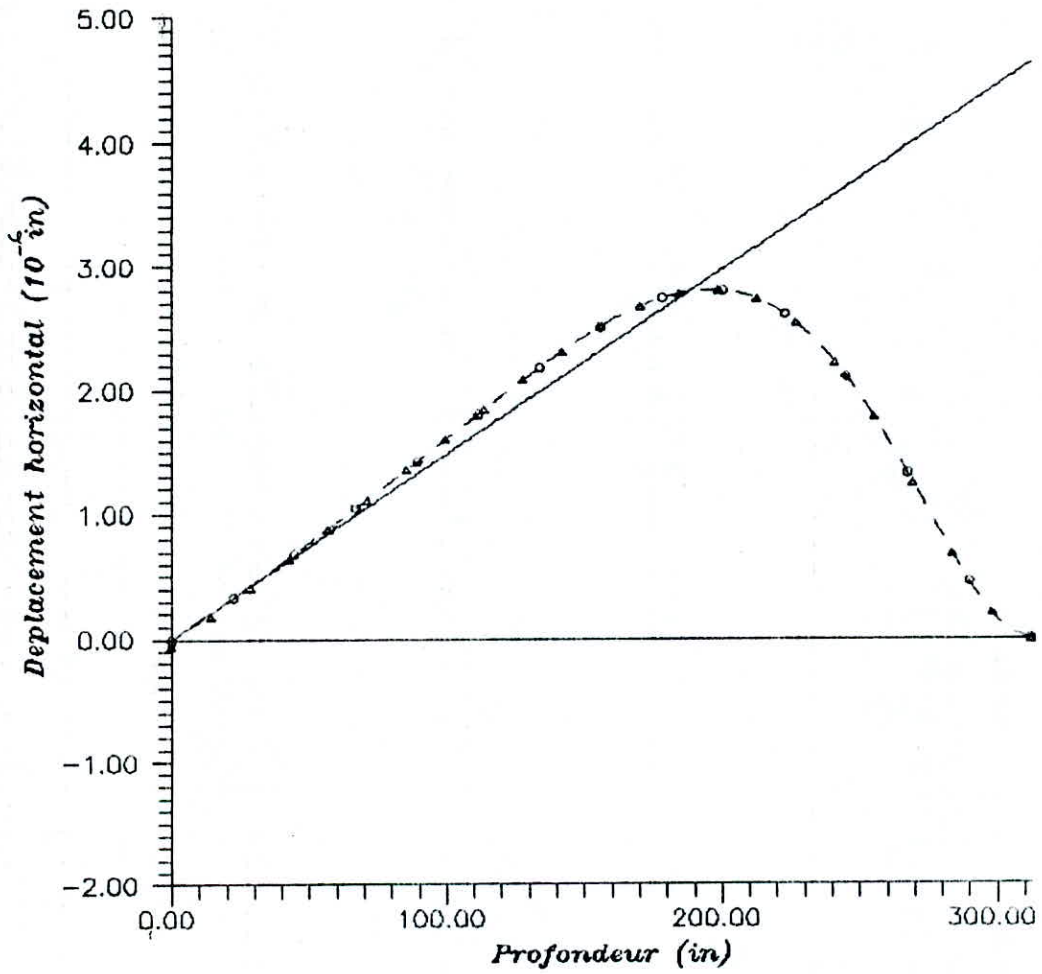
1.4_ Effet de bord (voir graphe des résultats par M.M)

Comme c'est mentionné dans les chapitres précédents, l'effet de bord a un sens physique dans les structures en coques, selon les conditions d'appui existantes. Pour ce cas cet effet réside sur une distance égale a:

$$x \leq \sqrt{a.t}$$

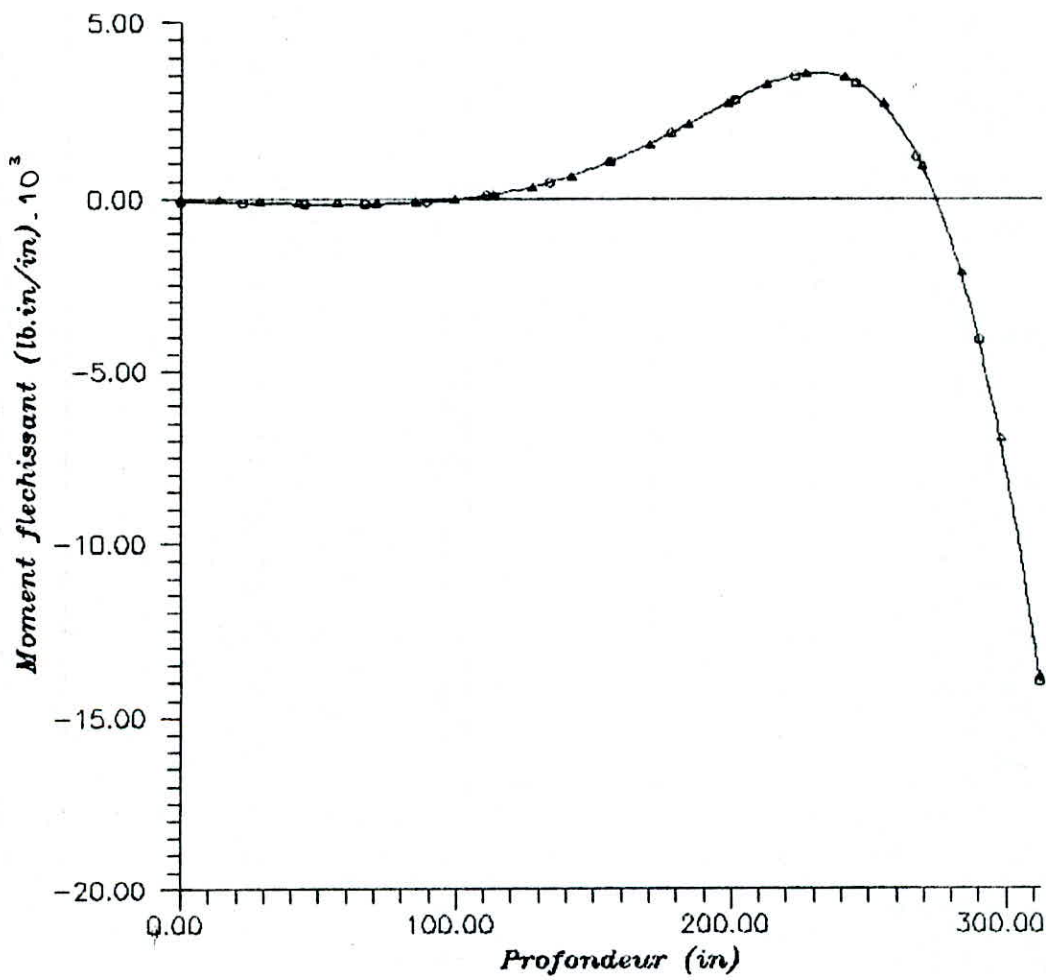
$x \leq 70.99 \text{ in}$

——— courbe obtenue par la T.M
 - - - courbe obtenue par la T.F
 ▲▲▲▲▲ courbe obtenue par la M.E.F
 ○○○○○ courbe obtenue par la M.M



Deformee du reservoir cylindrique
 charge hydrostatiquement

——— courbe obtenue par la T.G.
 ▲▲▲▲ courbe obtenue par la M.E.F.
 ○○○○ courbe obtenue par la M.M.



Courbe du moment flechissant meridien
 dans le reservoir cylindrique

2_ EXEMPLE 2 : Dôme sphérique fermé chargé radialement
(exemple de Timoshenko).

Caractéristiques de la coque:

Angle total	= 39	Degres
Rayon 'a'	= 56.3	in
Module de Young 'E'	= 1.E+07	lb/in.in
Epaisseur 't'	= 2.36	in
Coëfficient de Poisson 'v'	= 0.2	
Charge 'q'	= 284.	lb/in.in

2.1_ Solutions par la méthode matricielle : (voir graphes)

-Comparaison des contraintes a la base :

Contrainte maximale	: $N\phi/h + 6.M\phi/h^2 = 7824.4671$	lb/in.in
Contrainte MAX théorique:	= 8130.1017	lb/in.in
Erreur (%)	: = -3.76	%

v.2.2_ Effet de bord (voir graphes)

Dans cette exemple l'effet de bord est sur une distance
d'arc:

$$X \leq 11.53 \text{ in} \quad \text{ou} \quad \phi \leq 11^{\circ} 43'50.57$$

3_ EXEMPLE 3 : Dôme sphérique fermé chargé radialement
 (exemple de Timoshenko et recalculé par
 Zienckiewicz avec la M.E.F en utilisant
 des éléments isoparamétriques).

Caractéristiques de la coque:

Angle totale	= 35	Degres
Rayon 'a'	= 90	cm
Module de Young 'E'	= 1.E+07	kg/cm.cm
Epaisseur 't'	= 3	cm
Coefficient de Poisson 'ν'	= 0.1667	
Charge 'q'	= 1.	kg/cm.cm

3.1_ Solutions par la méthode matricielle : (voir graphes)

Remarque: les courbes théoriques de référence sont sur
 Timoshenko

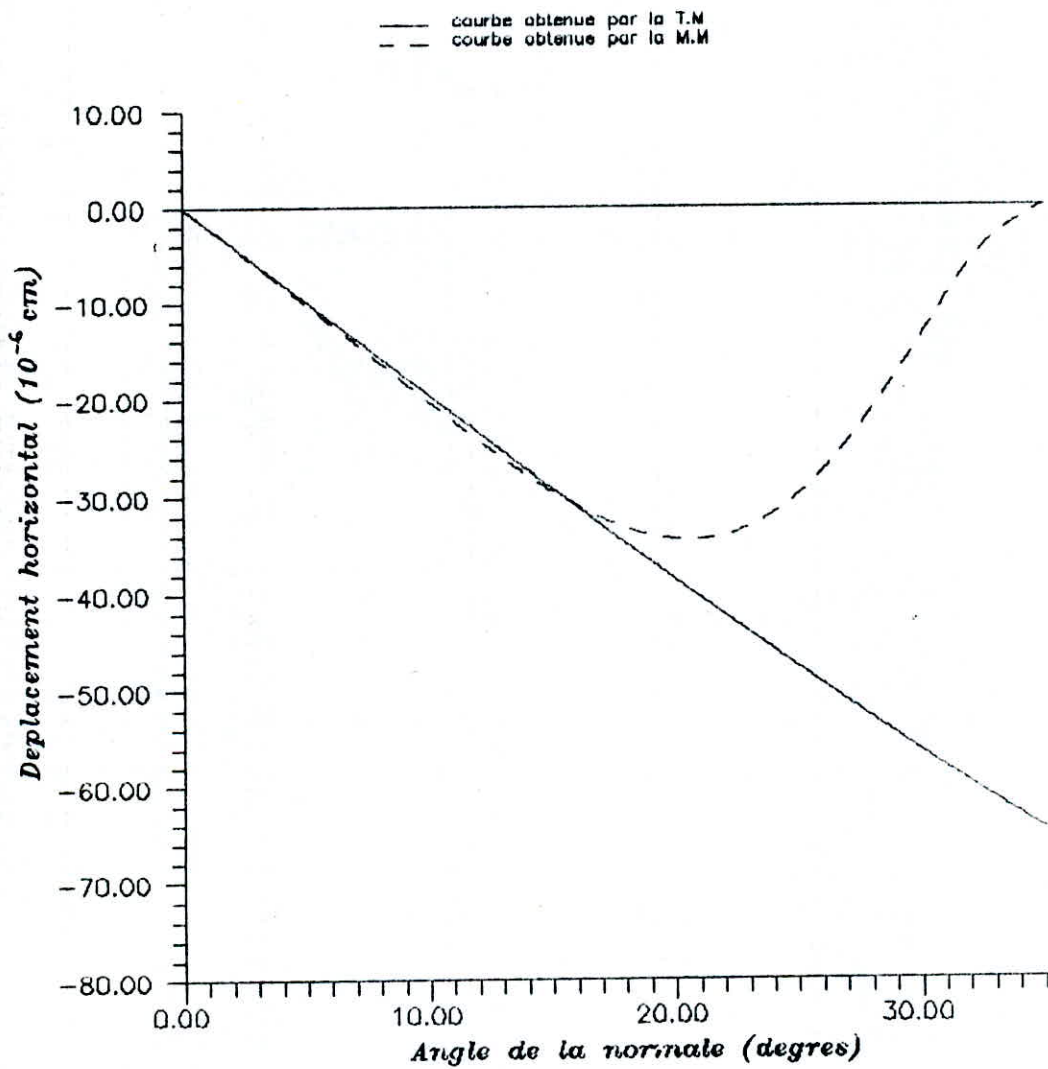
-Comparaison des contraintes à la base :

Contrainte maximale	: $N\phi/h + 6.M\phi/h^2 = 35.133$	kg/cm.cm
Contrainte MAX théorique:	= 36	kg/cm.cm
Erreur (%)	: = -2.4	%

3.2_ Effet de bord (voir graphes)

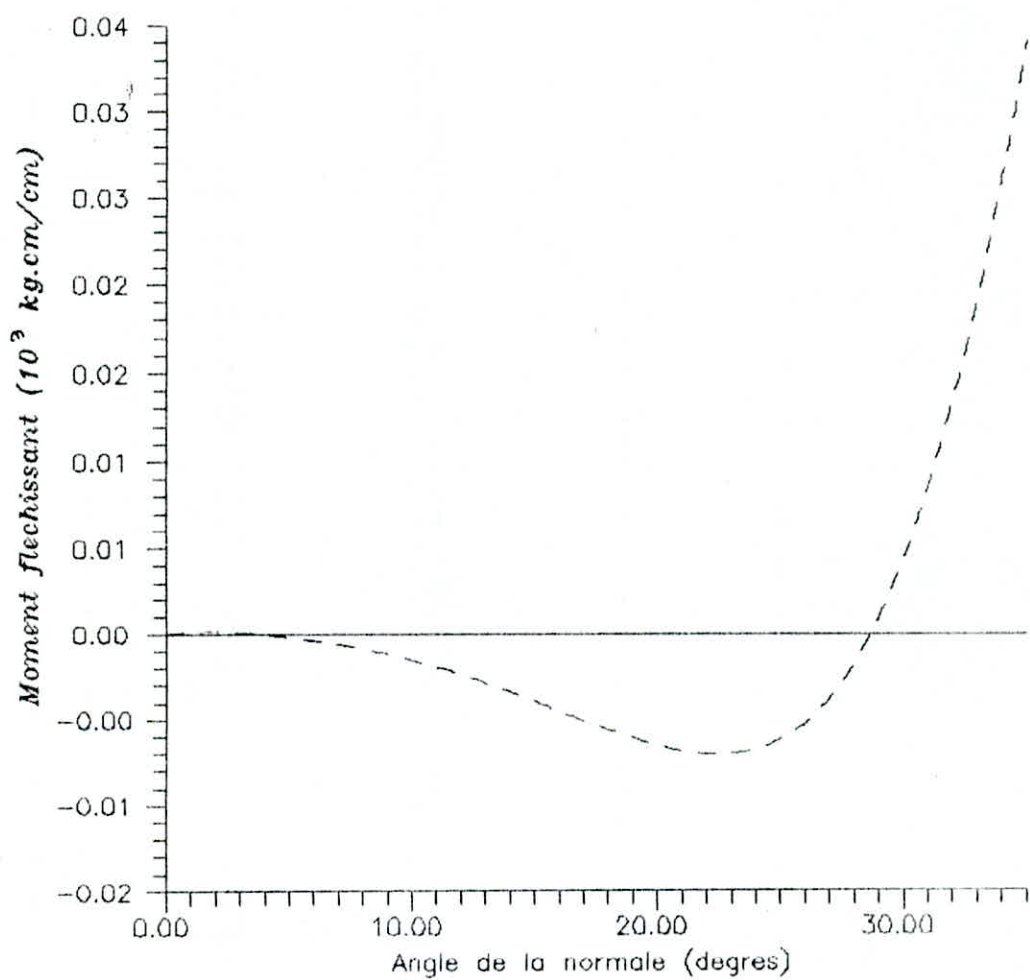
Dans cet exemple l'effet de bord est sur une distance
 de :

$X \leq 16.43 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad \phi \leq 10^\circ 27' 34.79$



Courbe de la deforme du dome ferme
 charge radialement

— courbe obtenue par la T.M
- - courbe obtenue par la M.M



Courbe du moment flechissant meridien
dans le dome ferme

4_ EXEMPLE 4 : Dôme sphérique ouvert avec moment concentré au niveau de l'ouverture .

(exemple traité par Zienkiewicz avec la M.E.F des éléments tronconiques).

Caractéristiques de la coque:

Angle totale	= 90	Degrés
Angle d'ouverture	= 30	Degrés
Rayon 'a'	= 100	cm
Module de Young 'E'	= 1.E+07	Kg/cm ²
Epaisseur 't'	= 1	cm
Coefficient de Poisson 'ν'	= 0.33	
Charge 'q'	= 0	
Moment concentré 'M'	= 1	Kg.cm/cm

1.2_ Solutions par la méthode des éléments finis :

Nbr d'elts	Wmax (cm)	Erreur %	Mxmax(kg.cm/cm)	Erreur %
14	-0.1588.E-04	-0.06	-0.100629.E+05	0.6
28	-0.1589.E-04	0	-0.100176.E+01	0.17
Sol: théoriqu ^e	-0.1589.E-04	###	-0.100000.E+01	###

Nbr d'elts	C.P.U :TIME
14	0:00:26.89
28	0:00:53.52

5_ EXEMPLE 5 : Dôme sphérique ouvert chargé radialement

Caractéristiques de la coque:

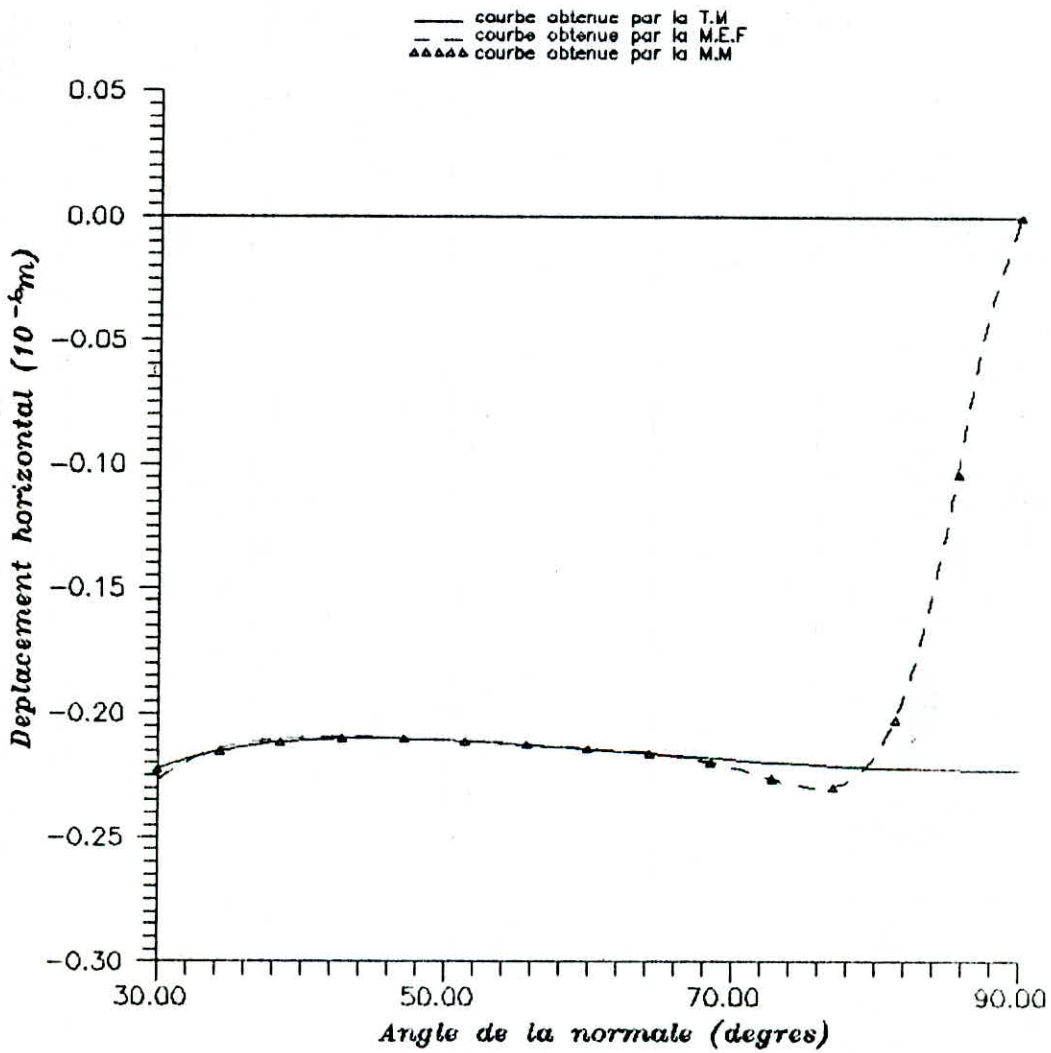
Angle totale	= 90	Degrès
Angle d'ouverture	= 30	Degrès
Rayon 'a'	= 100	cm
Module de Young 'E'	= 1.E+07	Kg/cm ²
Epaisseur 't'	= 1	cm
Coefficient de Poisson 'ν'	= 0.33	
Charge 'q'	= 1	Kg/cm ²

5.1_ Etude comparative entre la M.E.F et la M.M
(voir graphes)

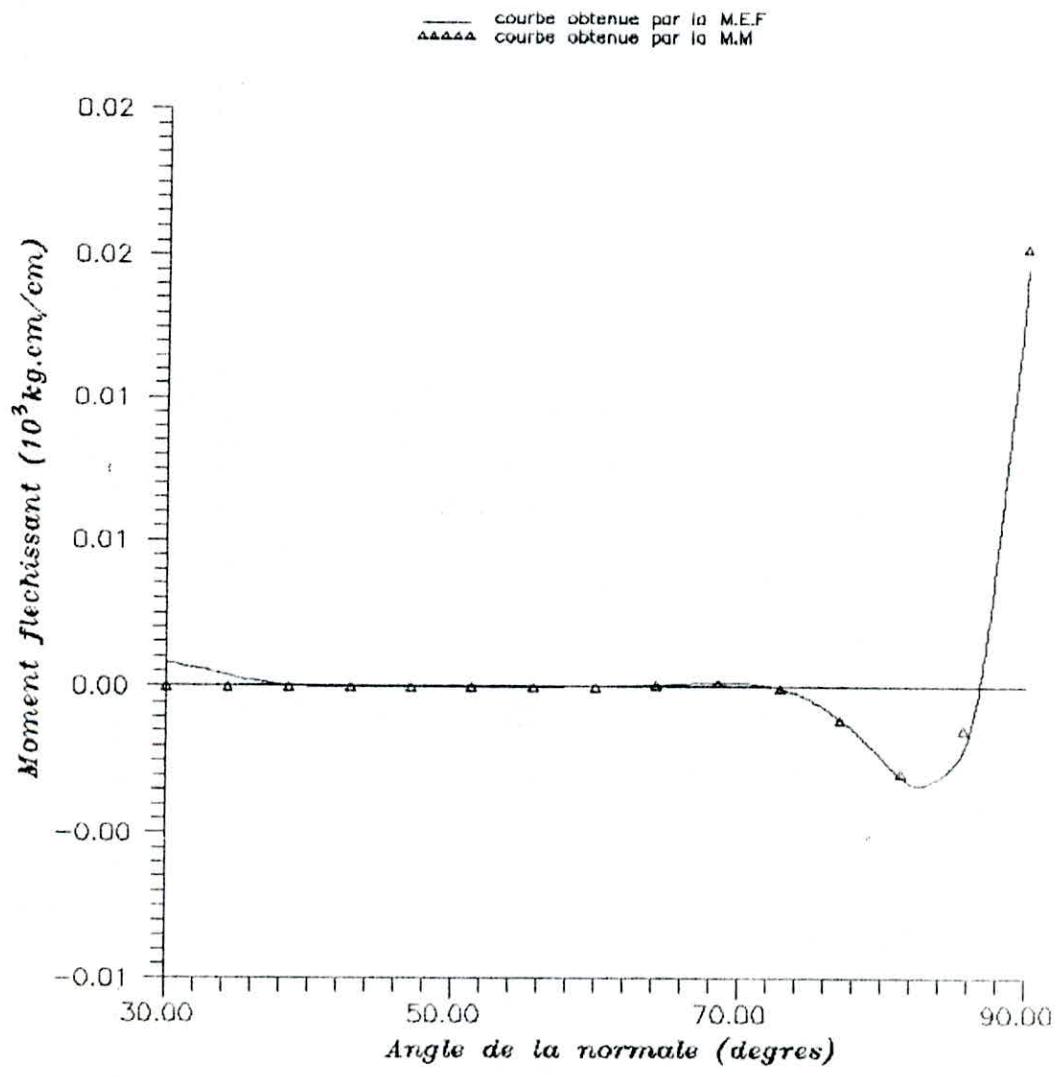
5.2_ Effets de bord (voir graphes)

Dans cet exemple l'effet de bord est sur une distance
de :

$$X \leq 10.00 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad \phi \leq 05^{\circ} 43' 46.48$$



Courbe de la deforme du dome ouvert
 charge radialement



Courbe du moment flechissant meridien
 dans le dome ouvert

CHAPITRE VII : CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Devant la complexité des équations différentielles et de compatibilité, plusieurs méthodes modernes furent établies, pour lever cette entrave. Dans cette modeste investigation nous proposons deux d'entre elles, toutes les deux sont considérées comme méthodes matricielles, sauf qu'une est basée sur les équations d'équilibre, alors que l'autre est basée sur les équations de compatibilité.

1_ Pour la première méthode, nommée méthode matricielle, les conditions d'équilibre aux noeuds sont d'abord satisfaites, puis on pose les équations exprimant la compatibilité des déplacements nodaux et on les résoud pour obtenir les forces inconnues dans les différentes parties de la structure. La formulation matricielle que nous proposons pour les coques minces de révolution présente plusieurs avantages: Elle permet la détermination simultanée des efforts et des déplacements, la matrice de souplesse obtenue est variable en fonction de l'angle ϕ , pour le cas du cylindre elle se simplifie considérablement, et ici la matrice de souplesse est fonction de la profondeur.

Il faut noter aussi qu'avec l'aide de cette méthode, on a pu mettre en évidence l'effet de bord dans les structures en coque, et on est arrivé à un résultat important, c'est que cet effet s'estompe très rapidement à partir du bord, ce qui permet de ne considérer que la valeur maximale au bord.

Cette approche matricielle se prête aisément à la programmation. Les résultats obtenus avec le programme élaboré sur la base de cette approche sont très proches de ceux obtenus par les méthodes classiques.

Notons aussi un autre avantage qui est celui de la simplicité du fichier des données et le temps d'exécution de la machine qui est très réduit (le C.P.U moins de 2 secondes).

2_ Pour la deuxième méthode, il s'agit de la méthode des

éléments finis, qui est basée sur une approche déplacement, donc les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites et les équations d'équilibre sont posées et résolues pour obtenir les déplacements nodaux inconnus. L'étude des coques minces de révolution par cette technique est énormément simplifiée et ceci grâce à l'utilisation de l'élément tronconique, qui introduit par son utilisation un nouveau jargon dans la méthode des éléments finis, il s'agit des lignes nodales au lieu des points nodaux. Parmi les avantages de cet apport, on cite la suppression du problème de continuité aux interfaces des éléments et une diminution importante du nombre de données et du temps d'exécution, vu la remarquable simplicité de la construction de la matrice de raideur. Et pour confirmer ces avantages, on note la précision que confère cette méthode à partir des différents exemples traités dans cette étude et aussi le temps d'exécution court (C.P.U : moins d'une minute).

Si on a à comparer les deux méthodes, on peut distinguer les points principaux suivants :

- La première méthode est basée sur les équations de compatibilité alors que la seconde est basée sur les équations d'équilibre .

- La première méthode présente plus de simplicité, dans l'élaboration de son programme informatique, et aussi, comme c'est mentionné au préalable, son temps d'exécution est remarquablement inférieur à celui de la seconde méthode.

- Le programme informatique de la méthode des éléments finis peut traiter différents types de structures de la famille des coques minces de révolution en introduisant seulement les bonnes données, parcontre, la première méthode exige l'introduction au niveau du programme des changements indispensables, bien sûr, si la formulation est disponible .

3_ Dans le cadre de cette investigation, et pour la clôturer, il a été question d'élaborer un programme qui traite les structures en coque minces de révolution, et qui est basé sur une

formulation mixte, dans laquelle on utilise à la fois les déplacements et les forces comme variables puis l'on obtient un système de forme mixte, mais par faute de temps ,on n'a pas pu le mener jusqu'au bout.

Le but de l'élaboration de cette méthode mixte est principalement dans l'intention de préserver la puissance que procure le programme de M.E.F dans le calcul de différents types de coques, et de combler le manque que présente celle-ci par la méthode matricielle, lorsqu'il s'agit d'une structure gérable par cette dernière, car, il faut noter que le programme de M.E.F présenté dans cette étude, a ses limites, et ceci est du à sa formulation mathématique, qui se traduit par une singularité lorsqu'il est question d'une structure fermée.

La philosophie suivie dans cette méthode est la même que celle suivie dans la première approche, c.à.d assurer la compatibilité des déplacements au droit de la jonction de deux coques, mais pour y arriver, il faut connaître les déplacements et rotations de chaque coque au droit de cette jonction, et c'est ici qu'interviennent les deux programmes, qui vont permettre de déterminer les efforts qui assurent la compatibilité, et de là, en utilisant les tables de la méthode matricielle, on détermine les déplacements et les efforts de réduction dans les différents noeuds, et le système sera ainsi, totalement défini .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1.S.TIMOSHENKO :Théorie des plaques et coques, édition française, 1959.
- 2.O.C ZIENKIEWICZ :The finite element method in engineering science, version française, 1979.
- 3.L.ROCKEY :Introduction à la méthode des éléments finis, Eyrolles, 1979.
- 4.G.DHATT;G.TOUZOT :Une présentation de la méthode des éléments finis, Deuxième édition, Maloine.S.A, 1984.
- 5.W.FLÜGGE :Statique et dynamique des coques.
- 6.RIEMANN-WEBER :Die partiellen differential-gleichungen (Vol.2,1901).
qui traite le procédé de résolution des équations différentielles par les séries hypergéométriques.
- 7.A.STODOLA :Die dampfturbinen ,4^{ème} éd.,1910
sur le problème de la flexion des coques.
- 8.T.Y.YANG :Finte Element Structural Analysis, Prentice-Hall, 1986.

