

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE
LABORATOIRE DE RECHERCHES DES SCIENCES DE L'EAU "LRS-EAU"

THESE

Présentée par

Mr Ali BERREKSI

Ingénieur d'Etat en Hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger
Magister en Hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Pour l'obtention

DU DIPLOME DE DOCTORAT ES SCIENCES
SPECIALITE : HYDRAULIQUE

Intitulée

**MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE
DES ECOULEMENTS NON PERMANENTS DANS
DES CANAUX A CIEL OUVERT**

Soutenue Publiquement, le *02 Février 2012* devant le jury composé de :

Président	BOUABDALLAH Mabrouk	Professeur à l'E.N. Polytechnique d'Alger
Directeur de Thèse	KETTAB Ahmed	Professeur à l'E.N. Polytechnique d'Alger
Co-Directeur de Thèse	REMINI Boualem	Professeur à l'Université de Blida
Examineurs	KADRI Mohammed	Professeur à l'Université de Boumerdes
	BENMAMAR Saâdia	M. C. 'A' à l'E.N. Polytechnique d'Alger
	BESSENASSE Mohamed	M. C. 'A' à l'Université de Blida
Invité	ZELLA Lakhdar	Professeur à l'Université de Blida

REMERCIEMENTS

Le temps des remerciements est arrivé. Comme tout thésard, je ferais au mieux pour que tous ceux qui liront ces lignes sachent qu'elles ont été écrites avec beaucoup d'émotion.

*Je tiens, tout d'abord, à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur **Ahmed Kettab**, Professeur et Directeur du Laboratoire de Recherches des Sciences de l'Eau "LRS-EAU" à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, qui a constamment veillé, avec compétence et patience, à ce que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions. Grâce à ses qualités humaines, il a su me soutenir et grâce à sa culture scientifique, qui dépasse largement le cadre du sujet de ma thèse, il a su me conseiller et m'orienter ; et lui dire tout le plaisir que j'ai eu à travailler sous sa direction.*

*Mes plus sincères remerciements s'adressent ensuite à mon Co-directeur de thèse, Monsieur **Boualem Remini**, Professeur à l'Université Saad Dahleb de Blida qui, malgré des moments difficiles et mes baisses de motivation, m'a encouragé sans relâche. Grâce à son enthousiasme, il a su me redonner confiance. L'expérience que j'ai acquise en travaillant avec lui a été très enrichissante.*

*Je remercie également et chaleureusement Mademoiselle **Saâdia Benmamar**, Maître de Conférences "A" à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, de m'avoir toujours encouragé à terminer ce travail et de m'avoir fourni des idées et de précieux conseils, au moment où j'en avais vraiment besoin. Qu'elle trouve dans ces quelques mots, toute ma considération.*

*J'exprime ma vive gratitude à Monsieur le Professeur **Mabrouk Bouabdallah** de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de la présente thèse.*

*Je remercie aussi Mademoiselle **Saâdia Benmamar**, Maître de Conférences "A" à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Monsieur **Mohammed Kadri**, Professeur à l'Université de Boumerdes, Monsieur **Mohamed Bessenasse**, Maître de Conférences "A" à l'Université de Blida, pour avoir accepté la lourde tâche d'examiner cette thèse.*

*Je remercie infiniment Monsieur **Lakhdar Zella**, Professeur à l'Université de Blida, d'avoir accepté d'être invité dans la présente thèse.*

*Mes remerciements vont encore à Monsieur **Tahar Ikni**, Maître Assistant "A" à l'Université de M'Sila, pour sa précieuse collaboration dans cette thèse.*

Je voudrais aussi remercier ma grande famille, ma petite famille, mon oncle Hocine et sa famille, et la famille de ma femme pour leur soutien, leurs encouragements et leur souhait de me voir finir ce travail de recherche.

J'exprime aussi ma gratitude à messieurs, *Abdelghani Seghir, Salim Benziada, Mohammed Kadri, Mohamed Amireche, Samir Bengherifa, Abdelouahab Lefkir, Noureddine Gafsi* et *Larbi Houichi*, pour leurs avis éclairés qui ont accompagné cette thèse.

Je suis redevable aussi à mon frère *Youcef* et à *Abdelghani Seghir, Chouaib Labiod, Abderrahmane Hammouche, Souad Sebai, Myriam Graba* ainsi que *Samir Hamchaoui*, pour toute la bibliographie appréciable et inestimable ramenée de la Malaisie, de Paris, des Etats Unis d'Amérique et de Toulouse, un très grand merci.

Je remercie vivement mes amis et collègues, *Mohamed Belhocine, Abderrahmane Hammouche, Azzeddine Chenafi, Redouane Benamrane, Mahmoud Debabeche, Mohammed Khattaoui, Lyes Amara, Abdelhadi Ammari, Abderrezak Brakeni, Abbes Benzerra, Ferhat Merah* et *Lazhar Belkhiri*, pour les encouragements, leur soutien moral et leur envie de me voir finir cette thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur *Mustapha Maza*, Maître de Conférences "A" à l'Université Abderrahmane Mira de Bejaia, pour ses encouragements continus me poussant à soutenir ma thèse.

Je tiens à remercier mon frère et ami *Mohamed Belhocine*, pour sa précieuse contribution dans la correction de la dernière version de la présente thèse.

Je remercie vivement le personnel de la bibliothèque de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger pour toute leur aide, en particulier : *Ammi Salah, Krimou* et *Toufik*.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe du centre de tirage de l'Université Abderrahmane Mira de Bejaia, en particulier *Foudhil*.

Je tiens à remercier aussi mes amis *Farid Kali, Abdelmalek Negri, Redouane Kessar, Kamel Negri, Abdelhamid Nakib, Djillali Benmakhlouf, Larbi Mahgoune, Omar Semaoui* et *Sid Ahmed Senhadji*, pour les encouragements et leur soutien moral.

Je remercie également les enseignants du Département d'Hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, et, ceux du département d'Hydraulique de l'Université Abderrahmane Mira de Bejaia, qui ont voulu que je termine cette thèse le plus tôt possible.

J'exprime enfin, ma profonde gratitude à toutes les personnes qui, par un sourire ou une parole bienveillante, m'ont permis de garder le moral tout au long de ces années de thèse.

Un grand merci à tous.

Voilà, je pense que c'est fini.

Ali Berreksi

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	14
-----------------------------------	-----------

Chapitre 1 : ETAT DE L'ART ET TRAVAUX EFFECTUES

1.1. Etat de l'art.....	18
1.2. Travaux effectués.....	24

Chapitre 2 : CANAUX NON PRISMATIQUES EN ECOULEMENT TORRENTIEL

2.1. Les transitions en écoulement torrentiel.....	26
2.2. Notion d'Onde transversale.....	26
2.3. Déviation positive d'une paroi.....	27
2.4. Déviation négative d'une paroi.....	29
2.5. Contraction d'un canal.....	31
2.5.1. Contraction en forme d'entonnoir.....	31
2.5.2. Contraction en forme d'éventail.....	34
2.6. Elargissement d'un canal.....	36
2.7. Réduction des ondes transversales.....	40

Chapitre 3 : MISE EN EQUATIONS DU PHENOMENE

3.1. Introduction.....	42
3.2. Les variables de l'écoulement.....	43
3.3. Equations de Navier Stokes.....	44
3.3.1. Equation de conservation de la masse.....	44
3.3.2. Equations de quantité de mouvement.....	44
3.4. Intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur.....	45
3.4.1. Intégration de la loi de conservation de la masse.....	46
3.4.2. Intégration des équations dynamiques.....	48
3.4.2.1. Intégration de la première équation de Navier Stokes.....	48
3.4.2.2. Intégration de la seconde équation de Navier Stokes.....	51
3.5. Généralisation du système d'équations de Saint Venant.....	56
3.6. Génération de maillages orthogonaux dans le cas de géométrie variable.....	58
3.7. Génération de grilles par la résolution des équations aux dérivées partielles.....	58
3.8. Transformation de coordonnées.....	58
3.9. Application de la transformation de coordonnées.....	59
3.10. Conditions particulières de l'écoulement.....	61
3.10.1. Conditions initiales.....	61
3.10.2. Conditions aux limites.....	61
3.10.2.1. Conditions aux frontières ouvertes.....	61
3.10.2.2. Conditions de symétrie.....	62
3.10.2.3. Conditions sur les parois latérales solides.....	62

Chapitre 4 : RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

4.1. Introduction.....	65
4.2. Méthode des différences finies.....	65
4.3. Le maillage.....	66
4.4. Types de schémas aux différences finies.....	66
4.5. Les principaux schémas aux différences finies fréquemment utilisés.....	67
4.6. Schéma explicite de MacCormack.....	68
4.6.1. Formulation générale du schéma de MacCormack.....	68
4.6.2. Application du schéma de MacCormack aux équations du mouvement.....	69
4.7. Schéma implicite de Beam et Warming.....	71
4.7.1. Formulation générale du schéma de Beam et Warming.....	71
4.7.2. Factorisation du schéma.....	75
4.7.3. Application du schéma de Beam et Warming aux équations du mouvement.....	79
4.8. Stabilité des schémas aux différences finies.....	81

Chapitre 5 : ETUDE NUMERIQUE DE CAS

5.1. Introduction.....	84
5.2. Première partie : Schéma explicite de MacCormack.....	84
5.2.1. Etude d'une contraction rectiligne symétrique.....	84
5.2.2. Etude de l'élargissement de Rouse.....	87
5.2.3. Etude d'un élargissement rectiligne symétrique.....	89
5.3. Deuxième partie : Schéma implicite de Beam et Warming.....	91
5.3.1. Etude d'une contraction rectiligne symétrique.....	91
5.3.2. Etude de l'élargissement de Rouse.....	93
5.3.3. Etude d'un élargissement rectiligne symétrique.....	94
5.4. Troisième partie : Etude comparative "Schéma explicite-Schéma implicite".....	95
5.4.1. Contraction rectiligne symétrique.....	95
5.4.2. Elargissement de Rouse.....	97
5.4.3. Elargissement rectiligne symétrique.....	98
5.4.4. Choix du schéma.....	100
5.4.5. Etude approfondie.....	100
5.4.5.1. Contraction rectiligne.....	100
5.4.5.2. Elargissement de Rouse.....	104
5.4.5.3. Elargissement rectiligne.....	106
5.4.5.4. Transitions à pente variable.....	109
A. Canal rectangulaire à forte pente.....	109
B. Contraction rectiligne de canal à pente variable.....	111
C. Elargissement de Rouse à pente variable.....	113
5.5. Quatrième partie : Etude paramétrique.....	114
5.5.1. Contraction rectiligne de canal.....	115
5.5.1.1. Paramètres hydrauliques.....	115
A. Variation du nombre de Froude amont.....	115
B. Variation du coefficient de rugosité de Manning.....	116
C. Variation de la longueur de la transition.....	117

5.5.1.2.	Paramètres numériques.....	119
	A. Variation du pas de discrétisation longitudinal.....	119
	B. Variation du pas de discrétisation transversal.....	120
	C. Variation des pas de discrétisation longitudinal et transversal.....	121
	D. Variation du nombre de Courant.....	121
5.5.2.	Elargissement de Rouse.....	122
5.5.2.1.	Paramètres hydrauliques.....	122
	A. Variation du nombre de Froude amont.....	122
	B. Variation du coefficient de rugosité de Manning.....	124
	C. Variation de la largeur amont de la transition.....	125
	D. Variation de la longueur de la transition.....	126
5.5.2.2.	Paramètres numériques.....	127
	A. Variation du pas de discrétisation longitudinal.....	127
	B. Variation du pas de discrétisation transversal.....	128
	C. Variation des pas de discrétisation longitudinal et transversal.....	129
	D. Variation du nombre de Courant.....	130
CONCLUSION GENERALE.....		132
BIBLIOGRAPHIE.....		137

NOTATIONS

B(x)	: Largeur de la transition à une distance x
b₁	: Largeur amont de la transition
b₃	: Largeur de la transition à l'aval
b_{min}	: Largeur minimale de la transition
c	: Célérité d'onde
C	: Coefficient de Chezy
C_n	: Nombre de Courant
D_h	: Profondeur hydraulique
F_i	: Nombre de Froude au niveau de la section i (amont ou aval)
f_c	: Facteur de Coriolis
f_e	: Paramètre de courbure de la paroi
g	: Accélération de la pesanteur
H₁	: La charge
h	: Profondeur de l'écoulement
h₀	: Hauteur d'eau à l'amont de la transition
h_i	: Profondeur de l'écoulement au niveau de la section i (amont ou aval)
h_M	: Profondeur maximale de l'écoulement au centre (point C)
h_m	: Hauteur maximale de l'écoulement au mur (point I)
h^f	: Profondeur de l'écoulement au point fictif du maillage
i	: Indice du maillage suivant la direction x ou ξ
j	: Indice du maillage suivant la direction y ou η
k	: Indice de l'incrément de temps
L	: Longueur de la transition
L_p	: Longueur de la courbe modifiée
L_t	: Longueur totale de la zone de transition
m	: Rapport de convergence
n	: Coefficient de rugosité de Manning
P	: Pression
P_a	: Pression atmosphérique
Q	: Débit d'écoulement
R₁	: Rayon du seuil de l'évacuateur
R_h	: Rayon hydraulique
r	: Rapport de contraction
S_{0x}	: Pente de fond suivant x
S_{0y}	: Pente de fond suivant y
S_{0ξ}	: Pente de fond suivant ξ
S_{0η}	: Pente de fond suivant η
S_{fx}	: Pente de frottement suivant x
S_{fy}	: Pente de frottement suivant y
S_{fξ}	: Pente de frottement suivant ξ
S_{fη}	: Pente de frottement suivant η
T_{ij}	: Contraintes effectives
t	: Temps
u	: Composante de la vitesse suivant x ou ξ
u₀	: Vitesse longitudinale à l'amont de la transition
u^f	: Composante de la vitesse suivant x ou ξ au point fictif

V	: Vitesse résultante d'écoulement
V_i	: Vitesse d'écoulement au niveau de la section i (amont ou aval)
V_{in}	: Vitesse normale au front de l'onde au niveau de la section i (amont ou aval)
V_{it}	: Vitesse tangentielle au front de l'onde au niveau de la section i (amont ou aval)
V^f	: Vitesse résultante d'écoulement au point fictif
v	: Composante de la vitesse suivant y ou η
v_0	: Vitesse transversale à l'amont de la transition
v^f	: Composante de la vitesse suivant y ou η au point fictif
w	: Composante de la vitesse suivant z
x	: Coordonnée spatiale longitudinale
Y	: Rapport de profondeur d'écoulement aval-amont
Y_s	: Rapport de profondeur d'écoulement amont-aval
y	: Coordonnée spatiale transversale
y_M	: Profondeur relative correspondant à la profondeur maximale h_M
y_m	: Profondeur relative correspondant à la profondeur maximale h_m
z	: Coordonnée spatiale verticale
α_x	: Inclinaison du fond suivant x
α_y	: Inclinaison du fond suivant y
α_ξ	: Inclinaison du fond suivant ξ
α_η	: Inclinaison du fond suivant η
β	: Angle de l'onde transversale
β_i	: Angle de l'onde transversale au niveau de la section i (amont ou aval)
γ	: Angle au centre
ε	: Coefficient de la viscosité turbulente
η	: Coordonnée spatiale transformée (transversale)
θ	: Angle de déviation de la paroi
θ_1	: Paramètre du schéma de Beam et Warming
θ_2	: Paramètre du schéma de Beam et Warming
ρ	: Masse volumique de l'eau
τ_{ij}	: Contraintes dans le fluide
τ_{bx}	: Contraintes du fond suivant x
τ_{by}	: Contraintes du fond suivant y
τ_{wx}	: Contraintes du vent suivant x
τ_{wy}	: Contraintes du vent suivant y
τ_x	: Le rapport $\Delta t / \Delta x$
τ_y	: Le rapport $\Delta t / \Delta y$
τ_ξ	: Le rapport $\Delta t / \Delta \xi$
τ_η	: Le rapport $\Delta t / \Delta \eta$
ν	: Viscosité dynamique
ξ	: Coordonnée spatiale transformée (longitudinale)
Δx	: Pas de discrétisation suivant x
Δy	: Pas de discrétisation suivant y
Δt	: Pas de temps
$\Delta \xi$: Pas de discrétisation suivant ξ
$\Delta \eta$: Pas de discrétisation suivant η
Δ	: Opérateur de différence finie avant
∇	: Opérateur de différence finie arrière
"~"	: Indice relatif à l'étape de prédiction
"^"	: Indice relatif à l'étape de correction

LISTE DES FIGURES

Figure (2.1)	: Déviation positive d'une paroi.....	27
Figure (2.2)	: Déviation négative d'une paroi.....	29
Figure (2.3)	: Schématisation de l'écoulement dans une contraction de canal d'après Ippen et Dawson (1951)	31
Figure (2.4)	: Conception d'une contraction de canal en forme d'entonnoir d'après Ippen et Dawson (1951)	32
Figure (2.5)	: Contraction de canal en écoulement torrentiel avec minimisation des ondes transversales.....	34
Figure (2.6)	: Contraction en forme d'éventail à l'aval d'un évacuateur de crue	35
Figure (2.7)	: Caractéristiques de l'écoulement dans une contraction en forme d'éventail....	35
Figure (2.8)	: Ondes transversales dues à une paroi concave	36
Figure (2.9)	: Canal avec élargissement infini	37
Figure (2.10)	: Graphique général de la profondeur relative h/h_1 pour $2 < F_1 < 8$ d'après Rouse et al. (1951)	38
Figure (2.11)	: Elargissement de Rouse	38
Figure (2.12)	: Elargissement à parois inversées de Rouse.....	39
Figure (2.13)	: Représentation géométrique générale d'un élargissement suivant l'équation (2.31) avec $f_e = 1/4$	39
Figure (3.1)	: Ecoulement dans une transition à surface libre	43
Figure (3.2)	: Ecoulement en eau peu profonde -Système de coordonnées-.....	45
Figure (3.3)	: Ecoulement en eau peu profonde -Distribution de la vitesse-.....	47
Figure (3.4)	: Distribution de la pression dans un canal incliné.....	56
Figure (3.5)	: Procédure de réflexion pour une paroi solide (Bhallamudi et Chaudhry,1992)...	63
Figure (4.1)	: Schéma du maillage aux différences finies.....	72
Figure (5.1)	: Contraction rectiligne symétrique.....	85
Figure (5.2)	: Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans une contraction rectiligne symétrique.....	85
Figure (5.3)	: Ligne d'eau le long de la paroi latérale solide dans une contraction rectiligne symétrique.....	86
Figure (5.4)	: Elargissement de Rouse	87
Figure (5.5)	: Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans l'élargissement symétrique de Rouse.....	88
Figure (5.6)	: Ligne d'eau le long de la paroi dans l'élargissement symétrique de Rouse	88
Figure (5.7)	: Elargissement rectiligne symétrique.....	89
Figure (5.8)	: Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans un élargissement rectiligne symétrique.....	90
Figure (5.9)	: Ligne d'eau le long de la paroi latérale dans un élargissement rectiligne symétrique.....	90
Figure (5.10)	: Ligne d'eau le long de l'axe médian dans une contraction rectiligne symétrique.....	91

Figure (5.11) :	Ligne d'eau le long de la paroi dans une contraction rectiligne symétrique	92
Figure (5.12) :	Ligne d'eau le long de l'axe d'écoulement dans l'élargissement graduel symétrique de Rouse.....	93
Figure (5.13) :	Ligne d'eau le long de la paroi latérale dans l'élargissement graduel symétrique de Rouse.....	93
Figure (5.14) :	Ligne d'eau au niveau de l'axe de symétrie dans un élargissement rectiligne symétrique.....	94
Figure (5.15) :	Ligne d'eau au niveau de la paroi dans un élargissement rectiligne symétrique	94
Figure (5.16) :	Ligne d'eau le long de l'axe dans une contraction rectiligne symétrique.....	96
Figure (5.17) :	Ligne d'eau le long de la paroi dans une contraction rectiligne symétrique.....	96
Figure (5.18) :	Ligne d'eau le long de l'axe dans l'élargissement symétrique de Rouse.....	97
Figure (5.19) :	Ligne d'eau le long de la paroi dans l'élargissement symétrique de Rouse	98
Figure (5.20) :	Ligne d'eau le long de l'axe dans un élargissement rectiligne symétrique	99
Figure (5.21) :	Ligne d'eau le long de la paroi dans un élargissement rectiligne symétrique ...	99
Figure (5.22) :	Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	101
Figure (5.23) :	Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans une contraction rectiligne (Paroi latérale).....	101
Figure (5.24) :	Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans une contraction rectiligne (Domaine de calcul rectangulaire).....	102
Figure (5.25) :	Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans une contraction rectiligne (Domaine physique irrégulier).....	102
Figure (5.26) :	Représentation plane de l'écoulement dans une contraction rectiligne (Domaine physique à géométrie variable).....	102
Figure (5.27) :	Système d'ondes transversales dans une contraction rectiligne (Domaine de calcul rectangulaire).....	103
Figure (5.28) :	Système d'ondes transversales dans une contraction rectiligne (Domaine physique irrégulier).....	103
Figure (5.29) :	Champ de vitesses dans une contraction rectiligne symétrique.....	103
Figure (5.30) :	Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie).....	104
Figure (5.31) :	Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale).....	104
Figure (5.32) :	Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans l'élargissement de Rouse.....	105
Figure (5.33) :	Représentation bidimensionnelle de l'écoulement dans l'élargissement de Rouse.....	105
Figure (5.34) :	Représentation plane de l'écoulement dans l'élargissement de Rouse.....	106
Figure (5.35) :	Champ de vitesses dans l'élargissement de Rouse.....	106
Figure (5.36) :	Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans un élargissement rectiligne symétrique (Axe de symétrie).....	107
Figure (5.37) :	Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans un élargissement rectiligne symétrique (Paroi latérale).....	107
Figure (5.38) :	Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique.....	108

Figure (5.39) :	Représentation plane de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique.....	108
Figure (5.40) :	Représentation bidimensionnelle de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique.....	108
Figure (5.41) :	Champ de vitesses dans un élargissement rectiligne symétrique.....	109
Figure (5.42) :	Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de $0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$	110
Figure (5.43) :	Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de $0.0689 \text{ m}^3/\text{s}$	110
Figure (5.44) :	Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$	111
Figure (5.45) :	Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne symétrique (Axe de symétrie).....	112
Figure (5.46) :	Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne symétrique (Paroi latérale).....	112
Figure (5.47) :	Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie).....	113
Figure (5.48) :	Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale).....	114
Figure (5.49) :	Effet de la variation du nombre de Froude amont sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	115
Figure (5.50) :	Effet de la variation du nombre de Froude amont sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Paroi latérale).....	115
Figure (5.51) :	Effet de la variation du nombre de Manning sur la surface d'eau dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	117
Figure (5.52) :	Effet de la variation du nombre de Manning sur la surface d'eau dans une contraction rectiligne (Paroi latérale).....	117
Figure (5.53) :	Influence de la variation de la longueur de la transition sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	118
Figure (5.54) :	Influence de la variation de la longueur de la transition sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Paroi latérale).....	118
Figure (5.55) :	Influence de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur le profil d'eau dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	119
Figure (5.56) :	Influence de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur le profil d'eau dans une contraction rectiligne (Paroi latérale).....	119
Figure (5.57) :	Effet de la variation du pas de discrétisation transversal dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	120
Figure (5.58) :	Effet de la variation du pas de discrétisation transversal dans une contraction rectiligne (Paroi latérale solide).....	120
Figure (5.59) :	Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	121
Figure (5.60) :	Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal dans une contraction rectiligne (Paroi latérale).....	121
Figure (5.61) :	Influence de la variation du nombre de Courant sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie).....	122

Figure (5.62) :	Influence de la variation du nombre de Courant sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne (Paroi solide).....	122
Figure (5.63) :	Effet de la variation du nombre de Froude incident sur l'écoulement dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie).....	123
Figure (5.64) :	Effet de la variation du nombre de Froude incident sur l'écoulement dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale).....	123
Figure (5.65) :	Influence de la variation du nombre de Manning sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie).....	124
Figure (5.66) :	Influence de la variation du nombre de Manning sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale).....	124
Figure (5.67) :	Influence de la variation de la largeur amont de l'élargissement de Rouse sur la surface d'eau (Axe de symétrie).....	125
Figure (5.68) :	Influence de la variation de la largeur amont de l'élargissement de Rouse sur la surface d'eau (Paroi latérale).....	125
Figure (5.69) :	Effet de la variation de la longueur de l'élargissement de Rouse sur l'écoulement (Axe de symétrie).....	126
Figure (5.70) :	Effet de la variation de la longueur de l'élargissement de Rouse sur l'écoulement (Paroi solide).....	126
Figure (5.71) :	Effet de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie).....	127
Figure (5.72) :	Effet de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi solide).....	127
Figure (5.73) :	Influence de la variation du pas de discrétisation transversal sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie).....	128
Figure (5.74) :	Influence de la variation du pas de discrétisation transversal sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale).....	128
Figure (5.75) :	Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)..	129
Figure (5.76) :	Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale).....	129
Figure (5.77) :	Influence de la variation du nombre de Courant sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie).....	130
Figure (5.78) :	Influence de la variation du nombre de Courant sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi solide).....	130

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (3.1) :	Conditions aux frontières ouvertes.....	62
Tableau (4.1) :	Variétés du schéma de Beam et Warming	72
Tableau (5.1) :	Conditions de l'écoulement dans le coursier rectangulaire à forte pente	109

INTRODUCTION GENERALE

Aujourd'hui, l'étude de l'écoulement de l'eau dans des canaux découverts revêt un grand intérêt dans le domaine de l'hydraulique. Cet écoulement est d'autant plus complexe et difficile s'il est d'une part, non permanent, en régime torrentiel et à deux dimensions spatiales ; et d'autre part, si le canal est non prismatique, présentant des changements de section le long du courant liquide, ce qui engendre dans la majorité des cas des discontinuités assez désagréables à la surface de l'eau.

Les écoulements fluvial et torrentiel ont un comportement tout à fait différent, en ce qui concerne l'étude mathématique du problème. L'écoulement avec un nombre de Froude inférieur à l'unité ($F < 1$) a un comportement elliptique, c'est-à-dire que des problèmes aux limites doivent être résolus. Au contraire, l'écoulement avec un nombre de Froude supérieur à l'unité ($F > 1$) a un comportement hyperbolique entraînant des particularités du type ondes.

Les équations du mouvement régissant l'écoulement étudié sont assez consistantes et nécessitent ainsi une attention particulière. Ces équations sont obtenues à partir de l'intégration des équations tridimensionnelles de Navier-Stokes.

Presque deux siècles se sont écoulés depuis que le mathématicien anglais Sir George Gabriel Stokes a clarifié la mise en équations des écoulements de fluides visqueux, introduite par le mathématicien et ingénieur français Claude Louis Marie Henry Navier à partir des considérations antérieures, établies par le mathématicien suisse Leonhard Euler qui n'avait pas pris en compte les effets de la viscosité. Pourtant, aujourd'hui encore, nombre de questions mathématiques concernant ces équations dites de Navier-Stokes, restent sans réponse. Lorsque l'écoulement est incompressible, un des problèmes qui résiste encore et toujours aux assauts des mathématiciens est l'existence de solutions classiques globales de ces équations surtout en trois dimensions d'espace pour des données générales, c'est-à-dire pas nécessairement régulières.

L'intégration sur la profondeur des équations de Navier-Stokes donnera le système d'équations en eau peu profonde ou "*Shallow water equations*", introduit à la fin du dixième siècle par Adhémar Jean-Claude de Saint Venant et, ceci, en tenant compte de quelques hypothèses simplificatrices appelées "*Hypothèses classiques de Saint Venant*". Le système de Saint Venant ainsi obtenu est propre seulement aux cas des canaux à pentes nulles, ou à la limite, très faiblement inclinés. Mais, il se trouve que dans la réalité, on peut également être confronté à des cas de canaux à fortes pentes (coursiers d'évacuateurs de crues par exemple), et c'est pour cette raison que le système initial de Saint Venant sera généralisé afin de prendre en considération l'effet de pentes de fond quelconques.

Un très grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles. Le système de Saint Venant est composé des équations aux dérivées partielles non linéaires du type hyperbolique. L'examen des systèmes hyperboliques représente actuellement un des plus importants champs d'investigation de l'étude des équations aux dérivées partielles.

La quasi-totalité des écoulements non permanents torrentiels sont modélisés donc, par des équations hyperboliques et le plus souvent non linéaires. Une résolution analytique est tout simplement inenvisageable. Ainsi, la recherche de la solution exacte est presque impensable et il ne reste que l'utilisation de méthodes numériques. Ces dernières sont à vocation de calcul scientifique.

L'une des techniques les plus utilisées dans le domaine de la mécanique des fluides et d'hydraulique, qui date du début des années soixante et née approximativement en même temps

que les outils de calcul informatique, est la méthode des différences finies. Celle-ci, employée dans les premiers temps sous une forme simpliste (classique), s'est distinguée au fur et à mesure de l'avancement des recherches dans ce domaine, par deux grandes classes de schémas, à savoir, les schémas aux différences finies explicites et les schémas aux différences finies implicites, qui sont d'un côté, beaucoup plus performants que les schémas classiques de la méthode des différences finies, basés essentiellement sur la discrétisation en différences finies centrales, avants ou arrières, et d'un autre côté, sont exigeants et très fastidieux dans leur utilisation.

En outre, il existe divers schémas aux différences finies explicites et implicites dans la littérature spécialisée dans ce domaine. Afin de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles hyperboliques et non linéaires de Saint Venant, qui gouvernent les écoulements bidimensionnels non permanents et torrentiels, on opte pour l'utilisation de deux schémas, l'un explicite, appelé schéma de MacCormack, précis à l'ordre deux en espace et en temps, et le deuxième, implicite, nommé schéma de Beam et Warming, et ceci, dans la perspective de faire une étude comparative afin de tirer des constatations et des conclusions sur l'aptitude de chaque type de schéma à simuler l'écoulement étudié.

On se propose d'analyser l'écoulement en question dans des canaux à géométrie irrégulière appartenant aux canaux non prismatiques, ce qui augmente d'ailleurs la complexité de cette étude.

Les irrégularités dans les canaux découverts sont d'une manière générale, soit des contractions ou des élargissements, qui entraînent souvent la naissance d'un système d'ondes, appelé "ondes transversales", dans le cas des écoulements à grandes vitesses (torrentiels). Ces dernières, qui représentent des perturbations et des instabilités dangereuses à la surface de l'eau, constituent des problèmes caractéristiques le long du canal dans les deux directions, amont et aval.

Les structures hydrauliques convergentes et divergentes sont retrouvées dans diverses applications d'hydraulique, particulièrement dans les coursiers d'évacuateurs de crues de surface. Elles sont fréquemment appelées "transitions", du fait que leur longueur n'occupe qu'une petite distance par rapport à la longueur totale du coursier de l'évacuateur de surface. Il est donc, très utile de calculer le réseau d'écoulement dans ces transitions pour des écoulements torrentiels surtout, afin de voir qu'elle est la hauteur maximale que peut atteindre l'onde transversale et si le système d'ondes se propage vers le canal aval rectangulaire.

En optant pour l'utilisation des méthodes numériques, afin d'analyser l'écoulement de l'eau dans des canaux non prismatiques, on sera confronté à une contrainte liée aux conditions aux limites au niveau des parois convergentes ou divergentes. Afin de remédier à cette contrainte, on utilisera la transformation de coordonnées proposée par Jimenez et Chaudhry (1988) et Bhallamudi et Chaudhry (1992), qui permet de passer d'une forme relativement complexe à une forme rectangulaire plus simple à traiter. Ceci nous obligera par conséquent, à résoudre des systèmes d'équations écrites en fonction de nouvelles coordonnées et non en fonction des coordonnées cartésiennes x et y .

Par ailleurs, on utilisera aussi la technique suggérée par Jimenez (Jimenez et Chaudhry, 1988 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) dans laquelle, il propose d'appliquer un système d'équations en régime transitoire afin d'avoir des résultats en régime permanent. Cette technique repose sur le principe d'utiliser la variable temps qui se trouve dans les équations du mouvement comme un facteur essentiel dans toutes les itérations qui seront effectuées avec le ou les modèles numériques élaborés.

Les deux modèles numériques élaborés avec le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming, seront principalement testés dans la simulation des écoulements à grandes vitesses dans une contraction rectiligne symétrique, dans l'élargissement symétrique de Rouse et dans un élargissement rectiligne symétrique à surface libre.

Le travail effectué dans la présente thèse, s'articule autour des chapitres suivants :

Une synthèse bibliographique portant sur les écoulements supercritiques engendrant l'apparition des ondes transversales, sur les équations bidimensionnelles en régime non permanent de Saint Venant et sur les méthodes numériques utilisées dans la résolution des équations du mouvement, est l'objectif du premier chapitre.

Le second chapitre est consacré à l'étude des écoulements torrentiels à travers des transitions hydrauliques convergentes et divergentes, où le réseau d'ondes transversales prend naissance ; la propagation de ces ondes le long du courant liquide, les moyens de réduction de ces ondes ainsi que la conception de ces transitions, sont présentés.

Dans le troisième chapitre, nous abordons l'étape de la modélisation mathématique relative à la détermination du système d'équations gouvernant les écoulements à surface libre non permanents dans des canaux non prismatiques. On y trouve, une démonstration assez complète de l'élaboration des équations du mouvement en coordonnées cartésiennes (x et y) et celles en coordonnées transformées (ξ et η) après l'application de la transformation géométrique, ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites utilisées dans le problème étudié.

Tandis que le quatrième chapitre est destiné à la résolution numérique des équations de base par la méthode des différences finies moyennant le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming. Les équations du mouvement en coordonnées transformées seront discrétisées suivant les étapes spécifiées, selon les propriétés de chacun des deux schémas.

Nous consacrons le cinquième chapitre à la phase de validation des modèles numériques présentés. Une contraction rectiligne symétrique, l'élargissement symétrique de Rouse et une expansion rectiligne symétrique seront étudiés dans cette partie, avec comme objectif la détermination des profils des lignes d'eau le long de l'axe médian et le long de la paroi latérale solide de ces transitions. Les résultats obtenus par chaque schéma seront comparés tout d'abord avec les résultats numériques et expérimentaux retrouvés dans la littérature spécialisée dans le présent domaine. Ensuite, une confrontation entre les résultats trouvés par les deux schémas sera faite, afin d'opter pour le schéma qui donnera des résultats acceptables dans l'ensemble des trois cas traités. On entamera par la suite, une étude approfondie en utilisant le modèle numérique basé sur le schéma choisi et ayant pour objectifs, d'une part, la détermination des réseaux d'écoulement et des champs de vitesses, et d'autre part, la généralisation de la présente étude aux cas des transitions hydrauliques avec des pentes de fond variables. Puis, une étude paramétrique dans laquelle l'influence des quelques paramètres hydrauliques (nombre de Froude incident, nombre de Manning, longueur de la transition, largeur amont de la transition) et numériques (le pas de discrétisation longitudinal, le pas de discrétisation transversal, les pas de discrétisation longitudinal et transversal simultanément, le nombre de Courant relatif à la condition de stabilité du schéma numérique explicite) sur l'allure de la ligne d'eau sera entamée, et, ceci, en utilisant le schéma qui aurait donné dans l'ensemble des résultats acceptables dans les trois applications traitées précédemment.

Enfin, on terminera par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART ET TRAVAUX EFFECTUES

1.1. Etat de l'art

L'étude des écoulements non permanents dans des canaux découverts représente un domaine de recherche assez vaste et assez compliqué. En particulier, si ces écoulements sont à caractère bidimensionnel, en régime torrentiel et dans des canaux non prismatiques, présentant des changements locaux de section qui sont le siège d'apparition de très fortes instabilités à la surface, caractérisées par des ondes transversales souvent assez désagréables et qu'il faut essayer, dans la mesure du possible, d'éviter ou de réduire.

Cette complexité a été d'ailleurs soulignée par Galilée (1564-1642) : *"Je me suis heurté, dit-il, à moins de difficultés dans la découverte du mouvement des corps célestes, malgré leur éloignement étonnant que dans les recherches sur le mouvement de l'eau courante qui se produit cependant sous nos yeux"*.

Les écoulements non permanents bidimensionnels sont gouvernés par le système d'équations du mouvement donné par Saint Venant. La résolution de ce système représente en lui-même un domaine d'étude qui a intéressé, par le passé et même à ce jour, pas mal de chercheurs de partout dans le monde, vu son importance, sa complexité et sa consistance comme travail de recherche.

De ce fait, le thème de recherche entrepris dans la présente thèse contient trois grands volets ou axes, à savoir :

- un premier volet, relatif à l'étude des écoulements torrentiels à travers des canaux à géométrie variable, soit des contractions ou des élargissements ;
- un second volet, propre à la modélisation mathématique afin de déterminer les équations du mouvement régissant ces écoulements ;
- et enfin un troisième volet très important, concernant la modélisation numérique, dans le but de résoudre les équations du mouvement.

Dans ce qui suit, on essayera de faire le tour des principaux travaux effectués jusqu'à présent par quelques investigateurs dans ce domaine de recherche. On tient à signaler dans cette synthèse bibliographique qu'il y a des travaux qui ont traité seulement les élargissements et/ou les rétrécissements de canaux traversés par un écoulement torrentiel, en présentant le réseaux d'écoulement dans ces transitions, ainsi que les équations simples du mouvement déterminées à partir du tracé du réseau d'écoulement. D'un autre côté, on retrouve des travaux présentant la résolution des équations de Saint Venant par des méthodes numériques. Ces dernières ont étudié dans la majorité des cas, les écoulements unidimensionnels avec applications autres que les canaux non prismatiques. Cependant, il y a quelques travaux traitant la résolution numérique des équations de base avec, à l'actif, des applications sur les transitions en écoulement torrentiel et parfois même fluvial.

Les écoulements torrentiels dans des canaux découverts à géométrie complexe entraînent souvent des perturbations distinctes, qui par contre, ne se manifestent pas dans le cas fluvial. Celles-ci, ne sont autres que des ondes stationnaires appelées "ondes transversales", et qui peuvent conduire à de grandes complications si leur hauteur est considérable.

Plusieurs chercheurs ont essayé d'analyser ce type d'écoulement avec toutes ces complexités, afin de présenter l'influence d'un changement de direction de la paroi d'un canal sur la surface de l'eau.

Généralement, l'analyse des écoulements torrentiels ou supercritiques traversant des transitions à surface libre a suscité l'attention depuis les années cinquante. Ainsi, les toutes premières études relatives aux contractions et aux élargissements de canaux sont respectivement à l'actif d'Ippen et Dawson (1951) et de Rouse et al. (1951). Ces auteurs ont présenté dans un symposium, des études, probablement les plus complètes jusqu'à ce jour, sur les écoulements à grande vitesse, traversant des structures hydrauliques rétrécies ou élargies à surface libre. Le réseau d'écoulement, le système d'ondes transversales qui peut se former, la hauteur de ces ondes et la propagation de ces ondes, étaient les objectifs principaux de ces analyses, dans le but de donner des informations sur la conception de ces structures hydrauliques.

D'autres études sont venues par la suite, utilisant bien sûr les travaux effectués par Ippen et Dawson (1951) et Rouse et al. (1951) comme supports de base. Dans ce contexte, certains auteurs se sont intéressés seulement à l'étude des écoulements torrentiels et la notion d'ondes transversales ; d'autres se sont lancés dans l'analyse des écoulements supercritiques dans des élargissements de canaux, soit par voie analytique ou expérimentale ; alors que d'autres ont préféré traiter ce genre d'écoulements à travers une transition plus complexe où l'apparition des ondes transversales est quasiment sûre, et qui n'est autre qu'une contraction de canal ; et enfin, une quatrième catégorie d'auteurs, qui sont rares d'ailleurs, ont tenté d'examiner des rétrécissements et des élargissements de canaux à la fois.

▪ ***Ainsi, pour la première catégorie de travaux :***

Heggen (1988), Shimizu et al. (1990), Sarma et Syamala (1991), Alhamid et Negm (1996), Stockstill et al. (1997), Yost et Rao (2000), De Martino et al. (2002), Boes et Hager (2003), Ohtsu et al. (2003), Ohstu et al. (2004) et Hossain et al. (2005) ont traité quelques travaux relatifs aux écoulements torrentiels à surface libre, en faisant intervenir d'une manière générale le concept d'ondes transversales.

Par ailleurs, Lenau (1979), Hager (1989), Dammuller et al. (1989), Hager et Mazumder (1992), Reinauer et Hager (1994), Schwalt et Hager (1995), Kim et Kim (1996), Molls et Zhao (2000), Valiani et Caleffi (2005) ont étudié respectivement le phénomène d'apparition des ondes transversales et leurs complexités le long des canaux courbes, des canaux à jonctions, des élargissements brusques de canaux et au niveau des écoulements autour des piles de pont.

L'écoulement supercritique au voisinage d'un déflecteur brusque, qui correspond à une déviation positive et brusque d'une seule paroi d'un canal prismatique, engendrant des ondes transversales dans le réseau d'écoulement, fut l'objectif des études effectuées par Schwalt et Hager (1992), Hager et al. (1994) et Lin et al. (2003).

▪ ***Dans la deuxième catégorie de travaux :***

Engelund et Munch-Peterson (1953), Bagge et Herbich (1967), Herbich et Walsh (1972) et Dakshinamoorthy (1977) ont présenté respectivement des études relatives à un écoulement supercritique à travers un élargissement de canal à section transversale rectangulaire, un écoulement torrentiel dans un élargissement rectiligne de canal à pente variable, où les équations du mouvement obtenues, en appliquant les équations de continuité et de l'énergie, ont été résolues par la méthode des caractéristiques, une étude expérimentale d'un élargissement rectiligne avec différentes pentes de fond et un écoulement supercritique à travers des canaux rectangulaires divergents, ayant pour but l'étude de l'influence de plusieurs valeurs du nombre de Froude sur l'écoulement et dont la résolution a été basée sur la méthode des caractéristiques également.

Toutefois, un examen plus approfondi des élargissements de canaux en écoulement torrentiel est retrouvé dans les travaux de Mazumder et Hager (1993), de Hager et Mazumder (1993) et également de Mazumder et Hager (1995). Ces auteurs ont donné des détails très intéressants sur l'écoulement à travers des élargissements progressifs (Elargissement de Rouse), des élargissements à parois modifiées de Rouse et des élargissements à parois inversées de Rouse, comme ils ont fourni aussi des indications sur la conception de ce type de transitions qui, dans l'ensemble, ne causent pas de discontinuités telles que les ondes transversales à la surface de l'eau.

▪ ***Pour ce qui est de la troisième catégorie de travaux :***

Contrairement aux élargissements de canaux, les contractions entraînent souvent la naissance des ondes transversales généralement assez dangereuses. De ce fait, on recense certaines analyses faites dans ce sens et portant sur le calcul des écoulements torrentiels dans des canaux rétrécis et dont on peut citer entre autres celles de : Englund et Munch-Peterson (1953), Taübert (1974), Hager et Altinakar (1984), Sturm (1985), Hager et Bretz (1987), Krüger et al. (1998), Reinauer et Hager (1998), Causon et al. (1999), Krüger et Rutshmann (2001) et Wu et Molinas (2001). Dans ces travaux, a été donné essentiellement, le système d'ondes qui peut survenir dans ces transitions, les perturbations nuisibles dans le canal aval après la transition elle-même, et aussi les facteurs à prendre en considération afin de réduire l'intensité de ces ondes.

▪ ***Alors que dans la quatrième catégorie de travaux :***

Hager (1992) et Reinauer (1995) ont présenté respectivement, un rapport du comité de l'Hydraulique des Barrages de la Commission Internationale des Grands Barrages (CIGB) et un document fascinant sur les écoulements supercritiques dans les transitions à surface libre. Hager (1992) a donné une synthèse extrêmement intéressante sur les différents types de rétrécissements et d'élargissements, le réseau d'écoulement dans ces structures et les conditions de l'amélioration de l'écoulement dans ces dernières, qui sont basées sur le choix correct de l'angle de déviation de la paroi et du nombre de Froude amont pour les contractions, et sur le choix de la courbure des parois dans le cas des élargissements. Tandis que, Reinauer (1995) a axé en grande partie sur l'étude des contractions rectilignes de canaux, où il a illustré les relations analytiques, déterminées à partir de la configuration de l'écoulement dans cette structure hydraulique et permettant de calculer les dimensions optimales d'un rétrécissement. Enfin, Vischer et Hager (1994) et Schwalt et Hager (1994) ont fourni par leurs études, les moyens nécessaires pour la réduction des ondes transversales, basés particulièrement sur le principe d'interférence des ondes.

Comme il a été signalé auparavant, l'écoulement de l'eau dans les transitions est régi par les équations de Saint Venant, obtenues à partir des équations de Navier Stokes, qui sont jusqu'à présent un champ de recherche très sollicité. L'intégration suivant la profondeur de ces équations permettra d'avoir le système d'équations en eau peu profonde ou "*Shallow Water Equations*". Ce système, introduit à la fin du dix neuvième siècle (1871) dans un compte rendu à l'Académie des Sciences, rédigé par l'Ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémar Jean Claude Barré de Saint Venant, permet de modéliser les fluides géophysiques à surface libre en écoulements peu profonds. Du fait de sa validité expérimentale et de son efficacité numérique largement reconnue, il est aujourd'hui très utilisé pour la simulation de nombreux phénomènes d'actualité : écoulements dans des canaux découverts à géométrie régulières ou irrégulières, pollution environnementale, catastrophes naturelles...etc. Enoncer ces thématiques, c'est déjà dire que toute expérimentation en vraie grandeur est impossible à réaliser. On comprend alors pourquoi

ces dernières années ont vu un engouement sans précédent pour la résolution numérique de ces équations, suscitant ainsi l'apparition de nombreuses questions nouvelles. Parallèlement, des progrès ont également été accomplis en amont, d'une part, dans l'étude mathématique du système de Saint Venant proprement dit, et d'autre part, dans l'étude des relations entre les modèles de Saint Venant et de Navier Stokes.

Dans sa version monodimensionnelle initiale, le système de Saint Venant décrit l'écoulement de l'eau dans un canal rectangulaire à fond horizontal, par l'intermédiaire de la hauteur d'eau et de la vitesse moyenne. En outre, sa version bidimensionnelle, qui peut inclure plusieurs termes par rapport au premier, décrit les écoulements dans des baies peu profondes ou dans des rivières quand les effets bidimensionnels -horizontaux- ne peuvent être négligés, toujours par l'intermédiaire de la hauteur d'eau et de la vitesse moyenne.

L'intérêt majeur d'une approche de type Saint Venant est de permettre, grâce à l'utilisation de la vitesse moyenne de l'écoulement et à l'introduction explicite de la hauteur d'eau comme inconnue, d'aborder des problèmes physiques tridimensionnels, ou bidimensionnels et voire même unidimensionnels instationnaires ou invariants en temps.

Lors de la détermination des équations de Saint Venant, certaines hypothèses simplificatrices avaient été prises en compte, appelées d'ailleurs, hypothèses classiques de Saint Venant, et qui s'articulent autour d'un fluide incompressible, d'une répartition uniforme de la vitesse, d'une distribution hydrostatique de la pression et d'une faible pente de fond. Cependant, le système de Saint Venant, tel qu'il a été obtenu en fonction de ces dernières hypothèses, ne peut être utilisé pour le cas des canaux découverts à pente variable, du moment que l'une des principales hypothèses simplificatrices est une faible pente du fond. Dans le cas où des études portant sur les écoulements à surface libre à travers des structures hydrauliques à fortes pentes, il faut apporter quelques changements dans le système original de Saint Venant.

Le système monodimensionnel de Saint Venant a été le premier à être utilisé pour analyser les écoulements à surface libre. Plusieurs travaux peuvent être cités dans ce cas, dont ceux de : Cunge et Wegner (1964), Liggett et Woolhiser (1967), Baltzer et Lai (1968), Strelkoff (1970), Terzidis et Strelkoff (1970), Yen (1973), Dakshinamoorthy (1977), Zovne et Martin (1979), Fennema et Chaudhry (1986), Shoucri (1986), Fennema et Chaudhry (1987), Skeels et Samuels (1989), Steffler et Jin (1993), Nujic (1995), Jha et al. (1996), Laigle et Coussot (1997), Meselhe et al. (1997), Zoppou et Roberts (2003), Lin et al. (2003) et Kazezyilmaz-Alhan et al. (2005), pour ne citer que ceux-là. On constate que jusqu'à ce jour, les équations à une dimension continuent à être utilisées. Parmi tous ces travaux, Yen (1973) a le mérite de présenter une étude purement théorique et globale relative à ces équations. On y trouve dans son document, des développements détaillés sur les équations unidimensionnelles de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie, pour différents types d'écoulements : turbulent ou laminaire, permanent ou non permanent, uniforme ou non uniforme, fluvial ou torrentiel, graduellement ou rapidement varié, et pour différents types de fluides : compressible ou incompressible, homogène ou non homogène et visqueux ou non visqueux.

Vinrent par la suite, des investigations employant les équations de Saint Venant à deux dimensions et moyennées sur la profondeur dans les canaux découverts. Ces études sont beaucoup plus difficiles que celles correspondant au cas unidimensionnel. Parmi les recherches menées dans cet axe, on peut évoquer celles accomplies par Flokstra (1977), Lai (1977), Ponce et Yabusaki (1981), Vreugdenhil et Wijbenga (1982), Katapodes (1984), Abbot et al. (1984), Garcia et Kahawita (1986), Jimenez et Chaudhry (1988), Fennema et Chaudhry (1989),

Popovska (1989), Fennema et Chaudhry (1990), Bhallamudi et Chaudhry (1992), Berreksi et Bouhadji (1993), Hager et al. (1994), Nujic (1995), Molls et Chaudhry (1995), Jovanović et Djordjević (1995), Mohapatra et Bhallamudi (1996), Kim et Kim (1996), Fulu et Tanaka (1996), Rahman et Chaudhry (1997), Louaked et Hanich (1998), Mingham et Causon (1998), Berreksi (1998), Klondis et Soulis (2001), Berreksi et Kettab (2002), Zoppou et Roberts (2003), Lin et al. (2003), Lachamp (2003), Ikni et Berreksi (2003), Rao (2004), Audusse (2004), Berreksi et al. (2004), Ikni et al. (2004), Guinot (2005), Valiani et Caleffi (2005), Berreksi et al. (2005), Ikni et al. (2005) et Berreksi et al. (2008); entre autres bien sûr.

Néanmoins, il y a d'une part, quelques travaux utilisant les équations de Saint Venant en coordonnées curvilignes, tels que ceux de Rajar et Cetina (1983), Iwasa et Hosoda (1989), Djuric et al. (1989), Yang et Hsu (1993) et Younus et Chaudhry (1994); et d'autre part, certaines explorations employant directement les équations de Navier Stokes, dont celles opérées par Shimizu et al. (1990), Bürgisser (1998), Alliot (1998), Jiroveanu (2002), Novo (2002), Métier (2003) et Lachamp (2003).

Il existe cependant des ouvrages édités qui ont mentionné les équations de Saint Venant, que ce soit en unidimensionnel : Davis et Sorensen (1969), Brater et King (1976), Abbot (1979), Douglas et al. (1985), Cunge (1988), Sabersky et al. (1989), Sinniger et Hager (1989), Graf et Altinakar (1993), Graf et Altinakar (1996), Fox et MacDonald (1994), Hwang et Houghtalen (1996), Roberson et al. (1998), Mays (1999), Chin (2000), Nalluri et Featherstone (2001), Sturm (2001) et Wurbs et James (2002); ou en bidimensionnel : Hug (1975), Ryhming (1985) et Wu (2008).

Parmi toutes les études abordant les équations de Saint Venant à deux dimensions spatiales, on trouve celles propres à l'analyse des écoulements dans les rivières et les estuaires : Vreugdenhil et Wijbenga (1982), Garcia et Kahawita (1986) et Fulu et Tanaka (1996); celles concernant l'étude de la propagation de l'onde de rupture de barrages : Fennema et Chaudhry (1989), Popovska (1989), Fennema et Chaudhry (1990), Nujic (1995), Jouvanović et Djordjević (1995), Mohapatra et Bhallamudi (1996), Louaked et Hanich (1998), Zoppou et Roberts (2003) et Lin et al. (2003); celles visant à examiner l'apparition des ondes transversales dans des canaux courbes : Iwasa et Hosoda (1989), Djuric et al. (1989), Shimizu et al. (1990), Molls et Chaudhry (1995), Kim et Kim (1996) et Valiani et Caleffi (2005); celles analysant les écoulements torrentiels à travers des changements brusques, rectiligne ou courbés : Younus et Chaudhry (1994) et Kim et Kim (1996); celles traitant les écoulements supercritiques dans des rétrécissements brusques, rectilignes et des déviations positives de parois : Katapodes (1984), Jimenez et Chaudhry (1988), Fennema et Chaudhry (1990), Hager et al. (1994), Molls et Chaudhry (1995), Kim et Kim (1996) et Rao (2004); et finalement, celles correspondant à l'étude des écoulements torrentiels avec présence d'ondes transversales traversant des contractions et des élargissements non brusques de canaux : Bhallamudi et Chaudhry (1992), Rahman et Chaudhry (1997), Berreksi (1998) et Klondis et Soulis (2001).

D'un autre côté, le système de Saint Venant est de nature hyperbolique non linéaire. L'étude des systèmes hyperboliques est actuellement un des grands champs d'investigation de l'examen des équations aux dérivées partielles. Ils apparaissent, en effet, dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques : électromagnétisme, dynamique des matériaux hyperélastiques, phénomènes de transport et, bien sûr dynamique des gaz Eulérienne modélisée par les célèbres équations d'Euler. L'étude du système de Saint Venant, en tant que système hyperbolique de lois de conservation, a bénéficié de l'expérience acquise dans l'étude de ces autres problèmes.

La résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires du type hyperbolique ne peut se faire que par des méthodes numériques, vu l'impossibilité de solutions analytiques. Nous parlons ici des méthodes dites "*Eléments finis*", "*Différences finies*" et "*Volumes finis*". Ces trois techniques de calcul datent du début des années soixante, même si certaines sources font état de prémices une dizaine d'années auparavant, dès la fin de la seconde guerre mondiale. En fait, elles sont approximativement nées en même temps que les outils de calcul informatique. Toutefois, la méthode des caractéristiques fut la première à être utilisée avant les trois citées ci-dessus : Bagge et Herbich (1967), Baltzer et Lai (1968), Strelkoff (1970), Dakshinamoorthy (1977), Lai (1977), Zovne et Martin (1979) et Iwasa et Hosoda (1989).

L'analyse de la documentation que nous avons récolté après ces années de recherche, montre clairement que la méthode des différences finies reste, jusqu'à nos jours, la plus utilisée lors du calcul des équations du mouvement régissant les écoulements dans des canaux découverts.

Le développement de cette technique est passé par plusieurs étapes. En effet, en premier lieu, elle a été énoncée d'une manière assez globale et simple, basée sur le principe d'une discrétisation en différences finies centrales, en différences finies avants ou en différences finies arrières : Cunge et Wegner (1964), Liggett et Woolhiser (1967), Strelkoff (1970), Terzidis et Strelkoff (1970), Zovne et Martin (1979), Vreugdenhil et Wijbenga (1982), Iwasa et Hosoda (1989), Djuric et al. (1989), Popovska (1989), Skeels et Samuels (1989), Thomson et al. (1992), Yang et Hsu (1993), Nujic (1995), Kim et Kim (1996), Laigle et Coussot (1997), Meselhe et al. (1997), Atanov et al. (1998), Ahmad et al. (1999), Causon et al. (1999), Yost et Rao (2000), Klondidis et Soulis (2001), Yu et Liu (2001), Guinot (2005) et Valiani et Caleffi (2005), parmi d'autres.

Par la suite, cette méthode a été améliorée et elle s'est divisée d'elle-même en deux grandes familles de schémas : les schémas aux différences finies explicites et les schémas aux différences finies implicites. Ces schémas présentent l'avantage d'une nette performance par rapport à la technique générale, mais leur utilisation est très délicate et parfois même très fastidieuse.

Dans la catégorie des schémas aux différences finies explicites, on trouve plusieurs types qui sont utilisés, dont celui de Lambda (Fennema et Chaudhry (1986)) ; celui de Lax-Wendroff (Jimenez et Chaudhry (1988), Louaked et Hanich (1998) et Zoppou et Roberts (2003)) ; celui de Gabutti (Fennema et Chaudhry (1986), Fennema et Chaudhry (1987), Fennema et Chaudhry (1990) et Berreksi (1998)) et celui de MacCormack (MacCormack (1971), Fennema et Chaudhry (1986), Garcia et Kahawita (1986), Jimenez et Chaudhry (1988), Dammuller et al. (1989), Fennema et Chaudhry (1990), Bhallamudi et Chaudhry (1992), Berreksi et Bouhadji (1993), Hager et al. (1994), Bermudez et Vazquez (1994), Jovanović et Djordjević (1995), Mohapatra et Bhallamudi (1996), Fulu et Tanaka (1996), Rahman et Chaudhry (1997), Berreksi (1998), Molls et Zhao (2000), Zoppou et Roberts (2003), Rao (2004), Hossain et al. (2005) et Kazezyilmaz-Alhan et al. (2005)), pour ne citer que ceux-là.

Tandis que, dans la classe des schémas aux différences finies implicites, on décèle le schéma de Preissman (Fennema et Chaudhry (1986)), le schéma implicite de directions alternées (Ponce et Yabusaki (1981) et Abbot et al. (1984)) et le schéma de Beam et Warming (Beam et Warming (1976), Fennema et Chaudhry (1987), Fennema et Chaudhry (1989), Younus et Chaudhry (1994), Molls et Chaudhry (1995), Jha et al. (1996), Klondidis et Soulis (2001) et Ikni (2002)).

Il est à noter également, qu'il y a quelques ouvrages qui ont cité dans des brefs passages les schémas aux différences finies : Abbot (1979), Lepourhiet (1980), Peyret et Taylor (1983), Godounov et Riabenki (1986), Chaudhry (1987), Prashun (1987), Hoffman (1989), Banat (1990), Boisson et al. (1990), Euvrard (1990), Hwang et Houghtalen (1996), Roberson et al. (1998), Chin (2000), Nalluri et Featherstone (2001), Sturm (2001), Wurbs et James (2002) et Wu (2008).

On signale au passage aussi, que les méthodes des éléments finis (Katapodes (1984)) et des volumes finis (Mingham et Causon (1998), Lagoutière (2000), Lin et al. (2003) et Audusse (2004)) sont beaucoup moins utilisées dans cet axe de recherche. Quoique, ces dernières années quelques chercheurs travaillent dans le sens d'orienter les études vers l'utilisation de la méthode des volumes finis dans les problèmes de la mécanique des fluides et de l'hydraulique.

Suite à ce qui a précédé, on peut constater d'une part, que les schémas aux différences implicites sont moins présents dans l'analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en régime torrentiel, comparativement au nombre de recherches utilisant les schémas explicites. Le peu d'études effectuées avec ces schémas concernent seulement la propagation des ondes courtes, les ondes de ruptures de barrages, les canaux rectangulaires, les phénomènes de recirculations dans les écoulements à surface libre et les canaux courbes ; mais elles sont très très faibles quand il s'agit des canaux non prismatiques. D'autre part, pour les schémas explicites, celui de MacCormack est le plus en vue jusqu'à présent, il est utilisé dans la résolution des équations de Saint Venant à deux dimensions, traitant de nombreux problèmes d'hydraulique, de la mécanique des fluides, de la physique, de mécanique et bien d'autres.

Par conséquent, et en fonction de ces constatations, on s'est proposé de faire une étude purement numérique dans le but de résoudre les équations bidimensionnelles de Saint Venant gouvernant les écoulements non permanents et torrentiels à travers des structures hydrauliques à géométries irrégulières, qui engendrent des discontinuités brutales à la surface de l'eau, et ceci, en utilisant deux schémas aux différences finies, l'un explicite (Schéma de MacCormack) et l'autre implicite (Schéma de Beam et Warming), afin de faire une comparaison entre eux et d'en tirer par la suite les conclusions adéquates, en fonction de la nature du problème traité dans le présent travail de recherche.

1.2. Travaux effectués

Divers travaux de recherches ont été entrepris et effectués dans le cadre de la présente thèse. Ainsi, des communications nationales (Ikni et Berreksi (2003), Ikni et al. (2004), Berreksi et al. (2005) et Berreksi et al. (2008)), des communications internationales (Berreksi et Kettab (2002), Berreksi et al. (2004) et Ikni et al. (2004)), des publications nationales (Berreksi et al. (2005), Ikni et al. (2005) et Berreksi et al. (2008)) et une publication internationale (Berreksi et al. (2008)) sont présentées, et qui contiennent l'analyse de l'écoulement de l'eau dans des contractions et des élargissements de canaux, gouverné par le système bidimensionnel de Barré de Saint Venant, et dont la résolution a été faite via le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming.

CHAPITRE 2

CANAUX NON PRISMATIQUES EN ÉCOULEMENT TORRENTIEL

Dans un canal découvert prismatique, un écoulement variable dans le temps se manifeste par des ondes de gravité à la surface libre. Mais, dans le cas où le canal est à géométrie irrégulière et assez complexe, souvent des discontinuités importantes et dangereuses apparaissent dans la ligne d'eau.

Dans la présente étude, on s'intéresse aux écoulements à surface libre bidimensionnels, non permanents, en régime torrentiel dans des canaux non prismatiques, qui sont le siège d'apparition des instabilités à la surface. Ceci dénote la complexité et la consistance d'une telle analyse.

2.1. Les transitions en écoulement torrentiel

Un barrage comprend entre autres, deux éléments importants : l'évacuateur de crue et le dissipateur d'énergie. L'évacuateur contrôle le déversement, en particulier lors des crues, et achemine l'eau à l'aval du barrage. Le dissipateur d'énergie reçoit le débit évacué au pied du barrage et le restitue sans danger à la rivière ou dans le lac.

Le raccordement entre le seuil de l'évacuateur et le dissipateur est assuré au moyen de dispositifs appropriés. Il est à noter (Roberson et al., 1998 ; Mays, 1999 ; Chin, 2000 ; Boes et Hager, 2003 ; Wu, 2008) que :

- en raison des grandes différences de niveau entre le seuil de l'évacuateur et le lit de la rivière, l'énergie cinétique au pied du barrage peut être énorme et les vitesses, par suite, seront assez considérables ;
- la distance horizontale entre les deux éléments précités peut atteindre plusieurs centaines de mètres lorsque l'écoulement se fait dans un canal d'évacuation. Ce dernier ouvrage est désigné sous le nom d'évacuateur avec coursier, en soulignant le mot coursier où a lieu l'écoulement ;
- ce coursier, qui est généralement à section transversale rectangulaire, peut être dans certains cas prismatique ; mais dans la majorité des cas, il peut contenir des changements locaux de section, ce qui le rend non prismatique ;
- ces changements de section qui peuvent être, soit des rétrécissements ou des élargissements, n'occupent qu'une petite distance dans la longueur totale du coursier ; ils sont ainsi appelés "*Transitions*".

L'écoulement de l'eau à grande vitesse dans les transitions entraîne souvent des irrégularités et des ondulations très dangereuses (Engelund et Munch-Petersen, 1953 ; Sinniger et Hager, 1989 ; De Martino et al., 2002 ; Ahmad, 2003 ; Hossain et al., 2005).

2.2. Notion d'onde transversale

Les écoulements torrentiels entraînent souvent des particularités de type ondes, qui constituent des problèmes caractéristiques le long du canal dans les deux directions, amont et aval. Ainsi, n'importe quelle discontinuité dans le canal, telle que, contraction (Täubert, 1974 ; Hager et Altinakar, 1984 ; Heggen, 1988), élargissement (Bagge et Herbich, 1967 ; Herbich et Walsh, 1972 ; Mazumder et Hager, 1993 ; Berreksi et al., 2005), déviation brusque (Fennema et Chaudhry, 1990 ; Schwalt et Hager, 1992 ; Hager et al., 1994 ; Lin et al., 2003), canal courbé

(Lenau, 1979 ; Iwasa et Hosoda, 1989 ; Dammuller et al., 1989 ; Hager, 1992 ; Mizumura, 1995 ; Molls et Zhao, 2000 ; Ghamry et Steffler, 2002), jonction de mur (Hager, 1989 ; Schwalt et Hager, 1995 ; Krüger et al., 1998) ou pile (Graf et Altinakar, 1993 ; Reinauer et Hager, 1994 ; Lachamp, 2003), peut entraîner de fortes instabilités dans le mouvement de l'eau à travers le canal en question. Ces instabilités sont caractérisées par des ondes, appelées souvent "*Ondes transversales*" (Jaumotte, 1973 ; Katapodes, 1984 ; Wu et Molinas, 2001 ; Haddad, 2005). Par ailleurs, un certain nombre de chercheurs (Hwang et Houghtalen, 1996 ; Meselhe et al., 1997 ; Causon et al., 1999 ; Nalluri et Featherstone, 2001) préfèrent utiliser l'appellation "*Ressaut hydraulique oblique*".

Par conséquent, on peut dire que les ondes transversales sont fréquemment présentes dans des canaux non prismatiques en écoulement torrentiel (Alhamid et Negm, 1996 ; Stockstill et al., 1997 ; Ohtsu et al., 2003 ; Ohtsu et al., 2004). De ce fait, il est indispensable d'analyser le réseau d'écoulement qui se forme dans ce type de structures, car la formation de ces ondes nécessite dans la plupart des cas une revanche supplémentaire dans le coursier.

2.3. Déviation positive d'une paroi

La figure (2.1) ci-après, donne une schématisation d'un écoulement torrentiel à travers un canal présentant, à une certaine distance, une déviation positive de la paroi latérale d'un angle "+ θ ". Par conséquent, ce changement dans la direction de la paroi entrainera des instabilités à la surface de l'eau, le long d'une ligne droite ayant une inclinaison d'un angle β , comparativement à l'écoulement amont. Cette ligne inclinée est appelée "*Onde transversale*", tandis que l'angle β est à son tour appelé "angle de l'onde transversale" (Chow, 1959 ; Terzidis et Strelkoff, 1970 ; Schwalt et Hager, 1992).

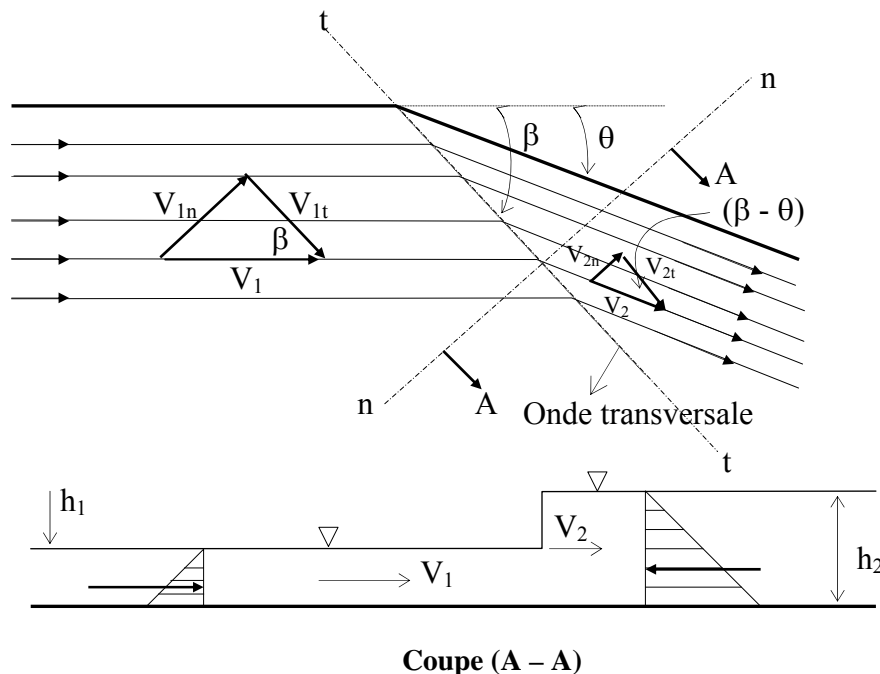


Figure (2.1) : Déviation positive d'une paroi

En désignant respectivement par les indices «1» et «2» les positions à l'amont et à l'aval de l'onde transversale, l'application des principes de l'équation de continuité et de la quantité de mouvement (Massey, 1983 ; Prashun, 1987 ; Nalluri et Featherstone, 2001 ; Wurbs et James, 2002) normalement au front de l'onde, donne :

$$h_1 V_{1n} = h_2 V_{2n} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{g} h_1 V_{1n}^2 = \frac{1}{2} h_2^2 + \frac{1}{g} h_2 V_{2n}^2 \quad (2.2)$$

Où, h_1 , h_2 , V_{1n} et V_{2n} sont respectivement les profondeurs d'écoulement et les vitesses normales au front de l'onde, à l'amont et à l'aval.

On admet par ailleurs, que tangentiellement au front de l'onde, la quantité de mouvement est nulle (Chow, 1959 ; Sturm, 2001), d'où :

$$V_{2t} = V_{1t} \quad (2.3)$$

Les termes V_{1t} et V_{2t} représentent les vitesses transversales au front de l'onde.

De la figure (2.1), on peut avoir :

$$V_{1n} = V_1 \sin \beta \quad (2.4)$$

$$V_{2n} = V_2 \sin (\beta - \theta) \quad (2.5)$$

$$V_{1t} = \frac{V_{1n}}{\operatorname{tg} \beta} \quad (2.6)$$

$$V_{2t} = \frac{V_{2n}}{\operatorname{tg} (\beta - \theta)} \quad (2.7)$$

En remplaçant les relations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) dans les équations (2.1), (2.2) et (2.3), et après réarrangement, on aura (Brater et King, 1976 ; Sinniger et Hager, 1989 ; Sarma et Syamala, 1991 ; Reinauer et Hager, 1998 ; Berreksi, 1998) :

$$Y = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 F_1^2 \sin^2 \beta} - 1 \right] \quad (2.8)$$

$$\sin \beta = \frac{1}{F_1} \left[\frac{1}{2} Y (Y + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

$$Y = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\beta - \theta)} \quad (2.10)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta \left(\sqrt{1 + 8 F_1^2 \sin^2 \beta} - 3 \right)}{2 \operatorname{tg}^2 \beta + \sqrt{1 + 8 F_1^2 \sin^2 \beta} - 1} \quad (2.11)$$

$$F_2^2 = Y^{-1} \left[F_1^2 - \frac{1}{2Y} (Y - 1)(Y + 1)^2 \right] \quad (2.12)$$

Où :

- F_1 est le nombre de Froude de l'écoulement entrant à l'amont, tel que : $F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g h_1}}$
- F_2 est le nombre de Froude de l'écoulement sortant à l'aval, tel que : $F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g h_2}}$
- Y est le rapport des profondeurs aval-amont de l'écoulement, telle que : $Y = \frac{h_2}{h_1}$

Connaissant h_1 , V_1 et θ , on peut alors calculer h_2 , V_2 et β .

Signalons que les équations (2.8) à (2.12) ont été vérifiées expérimentalement (Hager, 1992 ; Graf et Altinakar, 1993 ; Reinauer, 1995). Pour $Y > 2$, ce système d'équations concorde d'une manière très acceptable avec les observations (Shwalt et Hager, 1992 ; Hager et al., 1994). Notons aussi que l'équation (2.11) est valable seulement pour les contractions de canaux.

2.4. Déviation négative d'une paroi

Soit un écoulement à grande vitesse à travers un canal présentant une déviation négative de la paroi d'un angle θ par rapport à la direction initiale (Figure (2.2)) :

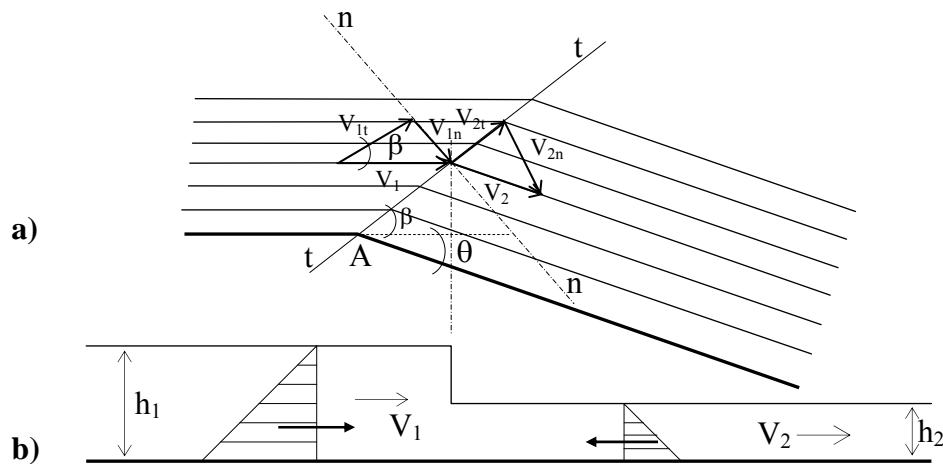


Figure (2.2) : Déviation négative d'une paroi

a) Composantes de la vitesse

b) Coupe perpendiculaire au front de l'onde

L'angle de déviation θ est négatif dans ce cas. L'application de l'équation de continuité, perpendiculairement au front de l'onde (Reinauer, 1995 ; Berreksi, 1998) donnera :

$$h_1 V_1 \sin\beta = h_2 V_2 \sin(\beta - \theta) \quad (2.13)$$

A partir de la figure (2.2), on a :

$$V_{1t} = V_{2t}$$

D'où :

$$V_1 \cos\beta = V_2 \cos(\beta - \theta) \quad (2.14)$$

De l'équation (2.14), on obtient :

$$\sin(\beta - \theta) = \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_2^2}(1 - \sin^2 \beta)} \quad (2.15)$$

La combinaison des équations (2.13) et (2.15) donne pour l'angle β , l'expression suivante :

$$\sin\beta = \frac{1}{F_1} \sqrt{\frac{2}{\frac{h_1}{h_2} \left(\frac{h_1}{h_2} + 1 \right)}} \quad (2.16)$$

La résolution de l'équation (2.16) par rapport au rapport des profondeurs d'eau $Y_s = h_1/h_2$, permet d'obtenir :

$$Y_s = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2 \sin^2 \beta}} - 1}{2} \quad (2.17)$$

En égalisant l'équation (2.17) et l'équation (2.10), on obtient alors l'équation qui donne l'angle de l'onde transversale β :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta \left(\sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2 \sin^2 \beta}} - 3 \right)}{\operatorname{tg}^2 \beta \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2 \sin^2 \beta}} \right) - 2} \quad (2.18)$$

Le théorème de conservation de l'énergie s'écrit :

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (2.19)$$

De l'équation (2.19), la relation qui permet d'avoir le nombre de Froude de l'écoulement à l'aval s'écrit de la manière suivante :

$$F_2 = \sqrt{\frac{h_1}{h_2} (F_1^2 + 2)} - 2 \quad (2.20)$$

2.5. Contraction d'un canal

Une contraction de canal dans un écoulement torrentiel se présente aux endroits où la pente du radier est accentuée, où la rugosité est réduite et où le débit augmente (Täubert, 1974 ; Krüger et Rutshmann, 2001 ; Wu et Molinas, 2001 ; Boes et Hager, 2003). Une contraction bien conçue se caractérise par un écoulement uniforme dans la partie rétrécie du canal. Sinon, de fortes ondes transversales se formeront et se manifesteront loin à l'aval, nécessitant ainsi des hauteurs considérables des parois du canal. Il existe différents types de contractions, notamment :

2.5.1. Contraction en forme d'entonnoir

Soit la contraction rectiligne symétrique dans le cas d'un angle de contraction quelconque θ , illustrée par la figure (2.3) ci-dessous.

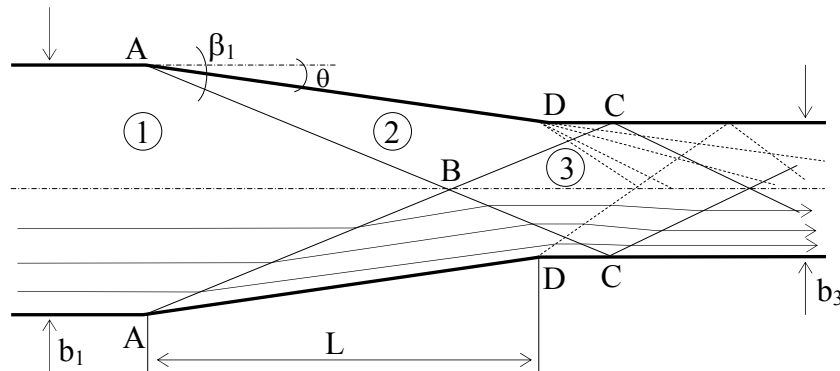


Figure (2.3) : Schématisation de l'écoulement dans une contraction de canal d'après Ippen et Dawson (1951)

F_1 , V_1 et h_1 sont dans l'ordre, le nombre de Froude, la vitesse et la profondeur d'écoulement à l'entrée ; b_1 et b_3 sont les largeurs du canal d'entrée et de sortie ($b_1 > b_3$).

Suite à cette contraction de canal, des ondes positives prennent naissance juste à l'entrée rétrécie du canal et se rencontrent au niveau de l'axe de symétrie du canal, et pénètrent par réflexion dans le canal aval rectangulaire. Au même moment, des ondes négatives prennent naissance juste à la sortie rétrécie du canal et à l'entrée du canal aval rectangulaire. L'interférence entre les ondes positives et négatives donne naissance à des ondes croisées (Reinauer, 1995 ; Sturm, 2001 ; Berreksi et al., 2004 ; Ikni et al., 2004 ; Berreksi et al., 2008), qui peuvent persister loin dans le canal aval, entraînant dans cette zone, de grandes instabilités.

Dans le cas où l'angle de déviation θ est bien choisi (Figure (2.4)), les ondes transversales positives prenant naissance juste à l'entrée rétrécie du canal et se rencontrant au niveau de l'axe de symétrie, seront cette fois-ci dirigées exactement vers les points situés juste au début du canal aval rectangulaire sous un angle β_2 , l'interférence des ondes se produit ainsi, et par suite, il n'y aura pas d'instabilités dans la surface de l'eau dans le canal aval (Figure (2.4.a)).

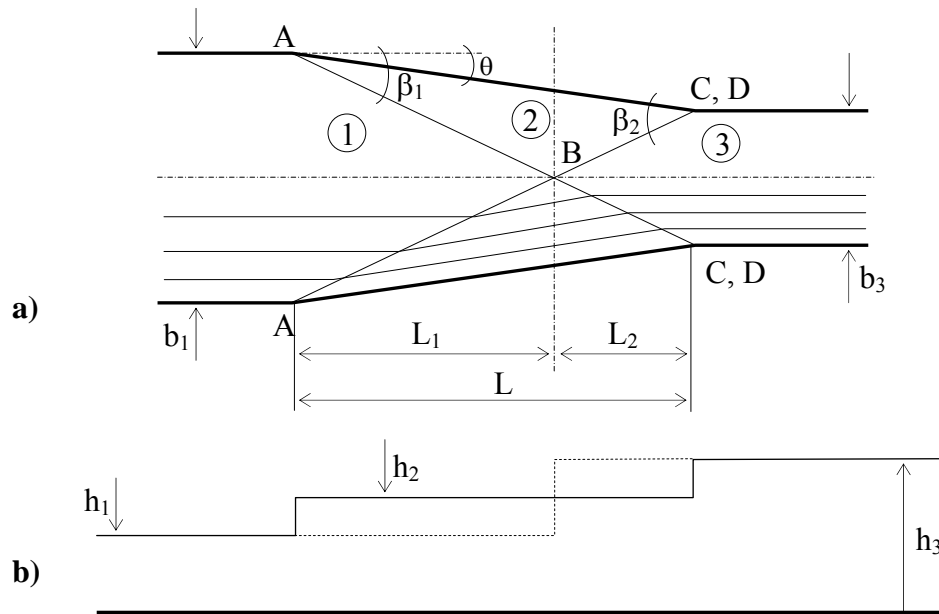


Figure (2.4) : Conception d'une contraction de canal en forme d'entonnoir d'après Ippen et Dawson (1951)

a) Vue en plan

b) Coupe longitudinale avec profil de surface le long des parois (—) et au niveau de l'axe de symétrie (-----)

L'amélioration des conditions d'écoulement dans une contraction rectiligne de canal passe par un judicieux choix de l'angle de déviation θ . Il a été montré (Ippen et Dawson, 1951 ; Sturm, 1985) que ce choix dépend essentiellement du nombre de Froude incident et du rapport des largeurs entre l'entrée et la sortie de la contraction. L'expression (2.21) ci-dessous (Hager et Bretz, 1987 ; Hager, 1992) permet de donner une estimation de l'angle de contraction θ , avec :

$$\text{Arctg}\theta = \frac{1}{2F_1} \left[\frac{b_1}{b_3} - 1 \right] \quad \text{pour } \theta < 10^\circ \quad (2.21)$$

Pour de plus grandes valeurs de θ , les résultats devront être vérifiés vis-à-vis de l'engorgement, car le nombre de Froude aval F_3 peut être proche de l'écoulement critique, ce qui donne une possibilité de formation d'un ressaut hydraulique dans la contraction. De tels phénomènes sont à écarter dans tous les cas et on doit assurer une transition progressive du nombre de Froude de l'amont à l'aval, c'est-à-dire de F_1 à F_3 . Généralement, la conception sera basée (Sturm, 1985 ; Hager, 1992 ; Krüger et al., 1998 ; Krüger et Rutshmann, 2001) sur une valeur minimale du nombre de Froude aval $F_3 > 2$, de telle sorte que $2 < F_3 < F_1$.

Par ailleurs, la condition relative à une nette amélioration du réseau d'écoulement dans une contraction rectiligne (Figure (2.4)) comme proposé par Ippen et Dawson (Ippen et Dawson, 1951 ; Täubert, 1974 ; Zovne et Martin, 1979 ; Berreksi, 1998 ; Boes et Hager, 2003), peut être exprimée par les considérations géométriques ci-après :

$$L = L_1 + L_2 = \frac{b_1 - b_3}{2 \operatorname{tg} \theta} \quad (2.22)$$

$$L_1 = \frac{b_1}{2 \operatorname{tg} \beta_1} \quad (2.23)$$

$$L_2 = \frac{b_3}{2 \operatorname{tg} (\beta_2 - \theta)} \quad (2.24)$$

Où, L représente la longueur totale de la transition.

L'équation de continuité à travers la contraction elle-même donne :

$$\frac{1}{r} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{F_3}{F_1} \left(\frac{h_3}{h_1} \right)^{3/2} \quad (2.25)$$

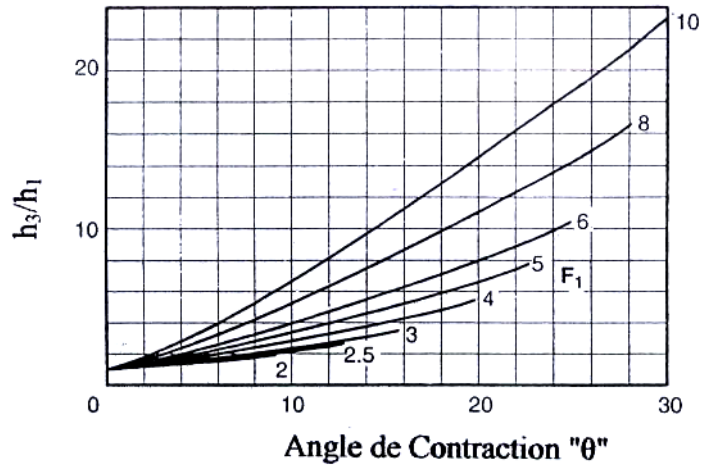
Avec,

$$r = \frac{b_3}{b_1} \quad (2.26)$$

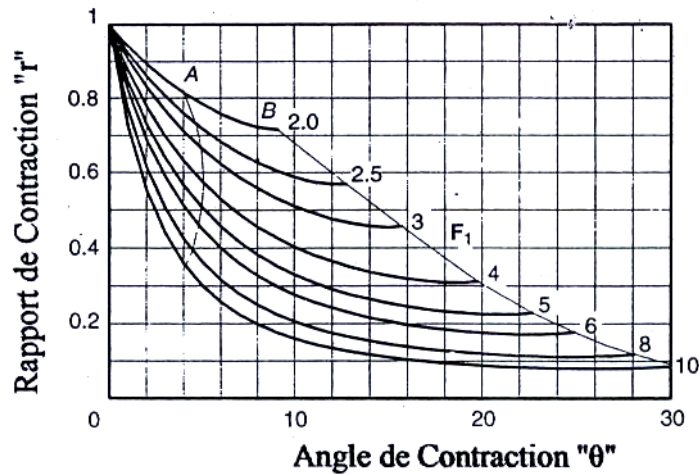
Afin de réduire la propagation d'ondes vers l'aval, Sturm (Sturm, 1985 ; Sturm, 2001) a démontré que :

$$r = \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \beta_1}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} (\beta_2 - \theta)}} \quad (2.27)$$

La figure (2.5), établie par Sturm (Sturm, 1985 ; Sturm, 2001), regroupe les principaux facteurs utilisés dans l'étude d'une contraction rectiligne symétrique de canal, à savoir, le rapport des profondeurs h_3/h_1 , le rapport des largeurs b_3/b_1 , l'angle de déviation de la paroi θ et le nombre de Froude amont F_1 .



a) Rapport des profondeurs à travers une contraction de canal



b) Rapport de contraction dans un rétrécissement de canal

Figure (2.5) : Contraction de canal en écoulement torrentiel avec minimisation des ondes transversales

Cette figure permet la détermination graphique de certains paramètres connaissant d'autres. Pour une valeur du nombre de Froude F_1 , soit la valeur du rapport de contraction 'r' ou de l'angle de déviation ' θ ' peut être donnée, mais pas les deux à la fois. Par exemple, à partir des valeurs données pour 'r' et F_1 , la figure (2.5) détermine l'unique valeur de l'angle de contraction ' θ ' et de la profondeur d'écoulement h_3 .

2.5.2. Contraction en forme d'éventail

Ce type de contraction est particulièrement conçu pour les évacuateurs de crue dont le seuil est arqué. Dans la forme en éventail, on utilise des arcs circulaires dont la courbure est orientée vers l'écoulement. D'après les quelques rares études faites dans ce domaine (Causon et al., 1999 ; Ikni, 2002), une surface minimale a été attribuée aux contractions de canaux en forme d'éventail. La section d'entrée à l'aval du seuil de l'évacuateur a un rayon R_1 (Figure (2.6)). Les principales caractéristiques de cette contraction sont : une prise d'eau en forme d'éventail, un canal convergent et un coursier aval prismatique. Le rapport de convergence est $m = b_d / b_u$ et γ représente l'angle au centre (exprimé toujours en radians). Le radier à l'aval de la zone d'entrée est une surface plane et a généralement une pente longitudinale constante.

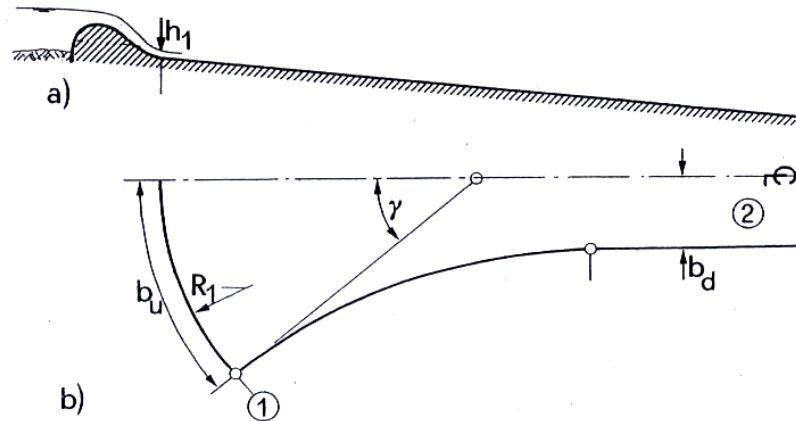


Figure (2.6) : Contraction en forme d'éventail à l'aval d'un évacuateur de crue
 a) Coupe longitudinale
 b) Vue en plan

La profondeur d'écoulement h_1 , la vitesse moyenne V_1 et la charge H_1 , sont les conditions de l'écoulement à l'entrée.

En supposant une contraction entièrement symétrique (Hager, 1992), l'écoulement tend à se concentrer au centre de courbure M , alors que la zone 'DE' le long de la paroi est privée d'écoulement (Figure (2.7)). Cet effet est dû à la composante de la force centrifuge agissant sur les particules se déplaçant le long des lignes de courant courbes.

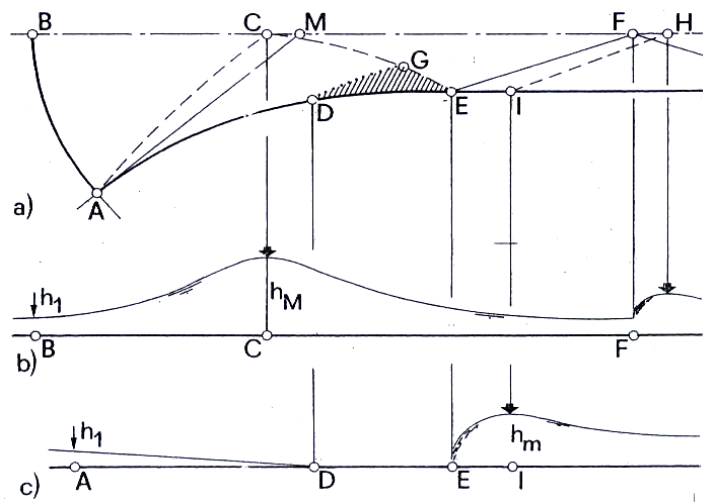


Figure (2.7) : Caractéristiques de l'écoulement dans une contraction en forme d'éventail
 a) Vue en plan
 b) Coupe longitudinale dans l'axe de symétrie
 c) Profil de la surface libre le long de la paroi

La profondeur maximale de l'écoulement h_M se trouve au point C. Vers l'aval, le profil de surface au niveau de l'axe diminue jusqu'au point F puis atteint un deuxième maximum au point H.

L'onde transversale partant du point M intersecte la paroi au point E et sa hauteur maximale h_m se situe au point I, légèrement à l'aval de E. Plus loin à l'aval, un écoulement torrentiel avec une surface agitée s'établit.

Il a été démontré que les deux valeurs relatives $y_M = h_M/H_1$ et $y_m = h_m/H_1$ dépendent du nombre de Froude amont F_1 et de la pente du radier S_0 . Pour $S_0 \approx 10\%$ et $\gamma = 0.70 \text{ rad}$ ($\approx 40^\circ$), il s'en suit que (Ippen et Dawson, 1951) :

$$y_M = 3.66 \gamma (2 + F_1^2)^{-1/2} \quad \text{pour } 1 < F_1 < 3.5 \quad (2.28)$$

$$y_M = 0.915 \left[1 - \left(1.278 - \gamma - 2(2 + F_1^2)^{-1/2} \right)^{1/2} \right] \quad \text{pour } F_1 > 3.5 \quad (2.29)$$

Pour d'autres pentes du radier, il faut écrire $y_m = \delta y_M$, avec $\delta < 1$ qui dépend du rapport de convergence $m = b_d/b_u$ et du débit d'entrée. Afin d'empêcher la formation des ondes transversales dans une contraction en forme d'éventail (Ippen et Dawson, 1951 ; Hager, 1992), des valeurs de m entre '1/3' et '1/2' sont recommandées.

Les Equations (2.28) et (2.29) sont utilisées pour une étude préliminaire. Une étude complète, devra cependant, comprendre une optimisation de la pente du coursier S_0 , de l'angle au centre γ et du rapport de contraction m .

La contraction examinée ci-dessus correspond à des convergences relativement faibles ($r = b_3/b_1 > '1/3'$ à ' $1/2'$ '). Si le rapport 'r' est plus petit, par exemple de l'ordre de ' $1/5'$ ', le nombre de Froude amont F_1 devra être supérieur à 10 pour que le nombre de Froude aval F_3 soit supérieur à 2 (Ippen et Dawson, 1951). Dans un tel cas, la surface en plan deviendra excessive.

Rappelons que les contractions en forme d'éventail sont généralement peu utilisables, c'est pour cela qu'on s'intéressera essentiellement aux contractions en forme d'entonnoir.

2.6. Elargissement d'un canal

Dans la pratique, on retrouve fréquemment les élargissements de canaux en écoulement torrentiel aux endroits où l'écoulement sort avec une grande vitesse à partir d'une conduite fermée, d'une vanne de fond, d'un évacuateur de crue ou d'un déversoir à forte pente (Rouse et al., 1951 ; Chow, 1959 ; Davis et Sorensen, 1969 ; Dakshinamoorthy, 1977 ; Massey, 1983). La figure (2.8) illustre un élargissement graduel de la largeur du canal (Berreksi, 1998).

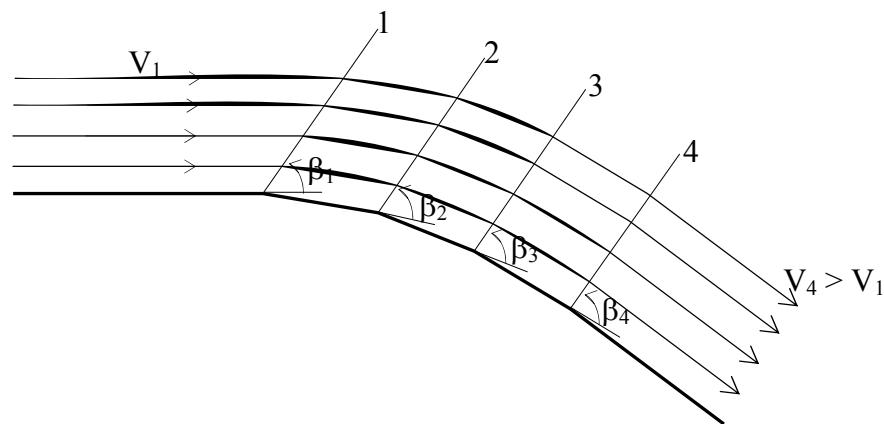


Figure (2.8) : Ondes transversales dues à une paroi concave

Dans une transition à parois divergentes, la vitesse d'écoulement augmente, la profondeur de l'eau décroît, l'angle de choc β_i augmente et les ondes transversales divergent en conséquence. Donc, de tels élargissements n'engendrent pas de variations brusques de la hauteur.

Rouse et al. (Rouse et al., 1951 ; Sinniger et Hager, 1989 ; Hager, 1992) ont été à l'origine des premières études expérimentales et analytiques des élargissements de canaux traversés par un écoulement à grande vitesse, et ceci en comparaison avec un élargissement brusque de canal. Pour un canal avec élargissement infini (Figure (2.9)), il a été établi que la surface libre $h(x,t)$ dépendait seulement de la profondeur amont h_1 , de la largeur relative b_1/h_1 et du nombre de Froude amont $F_1 = Q/(g b_1^2 h_1^3)^{1/2}$.

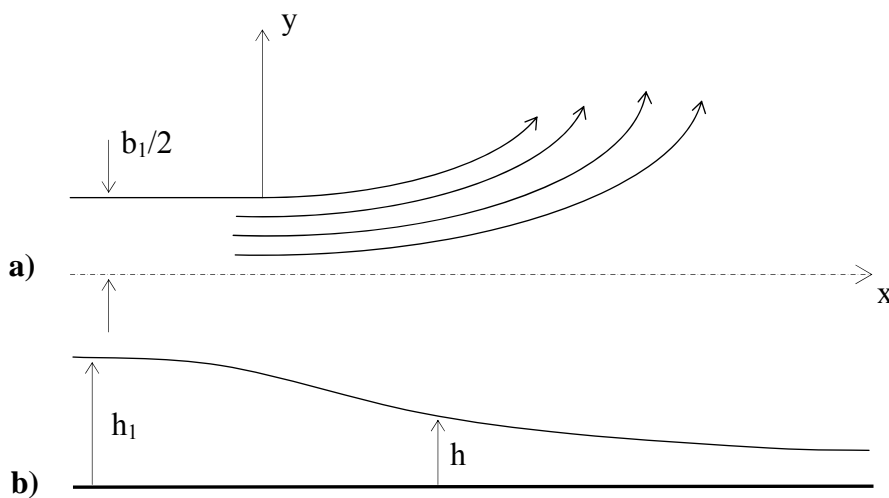


Figure (2.9) : Canal avec élargissement infini

a) Vue en plan

b) Profil le long de l'axe du canal

La profondeur relative (Hager, 1992) est donnée par :

$$\frac{h}{h_1} = f\left(\frac{x}{b_1}, \frac{y}{b_1}, F_1\right) \quad (2.30)$$

En outre, les deux paramètres indépendants x/b_1 et F_1 peuvent être associés linéairement sous la forme $((x/b_1)F_1^{-1})$. La figure (2.10) donne une représentation graphique générale de la surface h/h_1 pour un nombre de Froude incident F_1 compris entre 2 et 8 ($2 < F_1 < 8$).

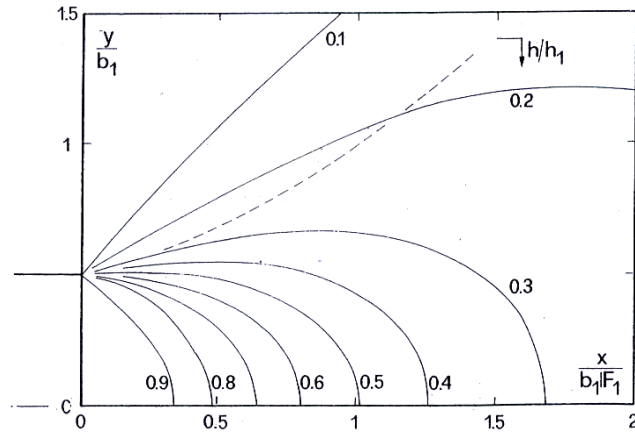


Figure (2.10) : Graphique général de la profondeur relative h/h_1 pour $2 < F_1 < 8$ d'après Rouse et al. (1951)

Il est à noter que cette courbe est seulement applicable aux transitions à faibles pentes. Pour les fortes pentes, l'écoulement a tendance à moins s'étendre latéralement.

Par ailleurs, Rouse et al. (1951) ont déterminé une courbe limite $B(x)$ contenant 90% du débit pour $f_e=1$, et pouvant être définie par l'équation suivante :

$$\frac{B(x)}{b_1} = \frac{1}{2} \left[1 + f_e \left(\frac{x}{b_1 F_1} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (2.31)$$

Où, f_e représente le paramètre de courbure de la paroi.

L'élargissement donné par l'équation (2.31) pour $f_e=1$ est appelé "Élargissement de Rouse". Il a été considéré en premier comme le plus efficace (Hager, 1992 ; Berreksi, 1998) car la divergence des parois est tellement graduelle (Figure (2.11)) que la distribution des pressions est hydrostatique ou pouvant être considérée comme telle et que la formation des ondes transversales est réduite.

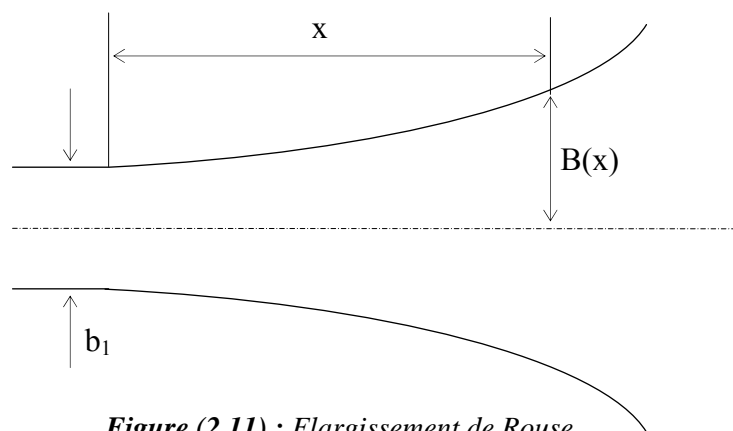


Figure (2.11) : Élargissement de Rouse

Par la suite, Rouse et al. (Rouse et al., 1951 ; Hager et Mazumder, 1992 ; Mazumder et Hager, 1993 ; Mazumder et Hager, 1995) ont proposé une autre forme de l'élargissement appelé "Élargissement à parois inversées de Rouse", schématisé par la figure (2.12) ci-dessous.

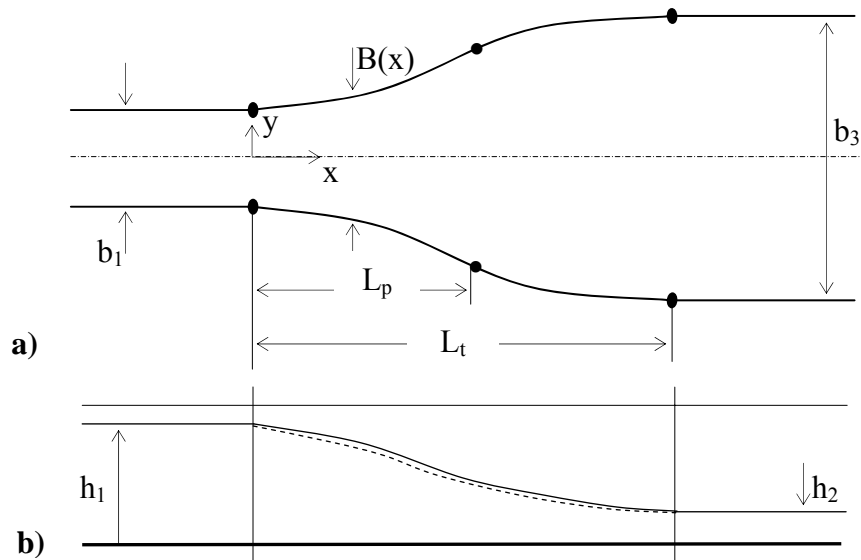


Figure (2.12) : Elargissement à parois inversées de Rouse

- Profil de la surface libre le long de l'axe
- Profil de la surface libre le long des parois
- (•) Début et fin de la transition

C'est une transition depuis le canal d'entrée de largeur \$b_1\$ jusqu'au canal aval de largeur \$b_3\$. Pour des valeurs finies de \$b_3/b_1\$, l'équation (2.31) avec \$f_c = 1/4\$ est utilisée pour représenter la courbe d'extension limite \$L_p\$, à laquelle est ajoutée une courbe convergente inversée à l'aval de la première. La longueur de la courbe modifiée \$L_p\$ et celle de la transition complète \$L_t\$ peuvent être déterminées (Hager et Mazumder, 1992 ; Mazumder et Hager, 1993 ; Mazumder et Hager, 1995 ; Berreksi, 1998) pour \$b_3/b_1 \le 5\$, comme suit :

$$\frac{L_p}{b_1 F_1} = 0,7 \left(\frac{b_3}{b_1} \right) \quad (2.32)$$

$$\frac{L_t}{b_1 F_1} = 1 + 3,25 \left(\frac{b_3}{b_1} - 1 \right) \quad (2.33)$$

La figure (2.13) donne la représentation géométrique générale des élargissements à parois modifiées de Rouse (Rouse et al., 1951 ; Sturm, 2001).

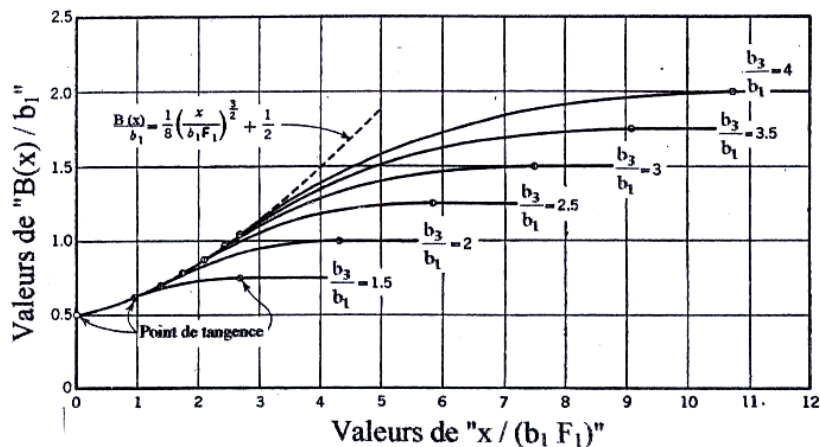


Figure (2.13) : Représentation géométrique générale d'un élargissement suivant l'équation (2.31) avec \$f_c = 1/4\$

Par rapport aux contractions de canaux, un élargissement de canal conduit à une géométrie à ligne courbe. D'après Rouse et al. (Rouse et al., 1951), la conception représentée sur la figure (2.13) donne un écoulement sortant essentiellement uniforme.

2.7. Réduction des ondes transversales

La conception des canaux non prismatiques en écoulement torrentiel est mauvaise quand des ondes transversales considérables apparaissent, et, est par contre, acceptable si ces ondes sont maintenues à des hauteurs raisonnables.

L'objectif principal d'une telle étude est de déterminer l'allure de la surface libre le long des parois latérales, du moment que la hauteur de ces dernières dépend directement du profil des ondes au niveau de ces parois.

Une transition bien conçue permet dans la plupart des cas d'éliminer les régions pratiquement sans écoulement et celles avec concentration d'écoulement, c'est-à-dire, d'arriver à un écoulement uniforme. En d'autres termes, il faut exclure les zones avec des eaux stagnantes où les débris peuvent être déposés, les zones de basses pressions causées par les effets de courbures avec un risque potentiel de cavitation, et enfin, éviter l'écoulement asymétrique qui peut occasionner des difficultés pour la dissipation de l'énergie à l'aval.

Il existe quelques moyens utilisés afin de réduire l'apparition des ondes transversales. Néanmoins, le meilleur procédé employé dans un tel cas, s'articule autour de l'application du principe de l'interférence des ondes (Hager, 1992 ; Hager et Mazumder, 1993 ; Vischer et Hager, 1994 ; Schwalt et Hager, 1994 ; Mazumder et Hager, 1995). Ce dernier énonce qu'une onde négative prend naissance pour remplacer une onde positive similaire.

Cela revient à dire que la géométrie de la transition devra être conçue de sorte à réduire au maximum possible la naissance des ondes transversales. Ceci revient à satisfaire à la fois l'équation de continuité le long du front d'onde, le théorème des quantités de mouvement perpendiculairement et parallèlement à ce front et l'équation de continuité à travers la transition elle-même.

Malgré tous les dispositifs mis au point afin d'éliminer ou de réduire l'apparition des ondes transversales et notamment celui basé sur le principe de l'interférence des ondes, il est évident que ceux-ci ne peuvent supprimer totalement ces ondes dans n'importe quelles conditions d'écoulement, pour plusieurs raisons, parmi lesquelles :

- les effets de la couche limite et de courbure peuvent localement modifier le modèle mathématique ;
- l'effet des frottements sur la paroi n'est pas pris en considération ;
- les débits différents du débit de projet ne satisfont pas aux conditions pour l'élimination des ondes.

On peut dire que l'étude du phénomène d'ondes transversales engendrées, par le passage d'un écoulement supercritique dans une transition, ainsi que les moyens permettant leur réduction est très complexe.

CHAPITRE 3

MISE EN EQUATIONS DU PHENOMENE

« Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle (la mécanique des milieux continus) englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportement. Elle est la clé de ce que l'on appelle aujourd'hui : "La modélisation", qui n'est autre que l'art d'analyser un phénomène physique et de le décrire en termes mathématiques, ce qui permet de l'étudier avec la rigueur propre à cette discipline. On peut alors espérer obtenir par le calcul les grandeurs mises en jeu dans le phénomène considéré et les comparer aux observations expérimentales ». G. Duvant (Métier, 2003)

3.1. Introduction

La description mathématique d'un milieu continu se fait en lui donnant une loi, celle-ci, appelée loi de comportement, définit le type de milieu (fluide, élastique, ...). Avec les lois universelles, conservation de la quantité de mouvement, conservation de la masse et conservation de l'énergie, une caractérisation complète du milieu continu est possible.

La physique utilise les mathématiques pour s'écrire. Ces dernières utilisent d'ailleurs la physique comme but de leur existence.

La modélisation est un concept, une façon d'étudier. Plus qu'un outil, c'est une manière de penser un problème avec comme but de le résoudre. L'outil numérique n'a rien à voir avec la modélisation, celle-ci est bien plus en amont dans la réflexion que la recherche de la solution. A partir du moment où se pose un problème physique, nous allons chercher à décrire les actions et réactions se produisant, afin de trouver une description mathématique de ce qui se passe.

L'analyse mathématique vise donc, à cerner les difficultés du problème abordé, afin de choisir convenablement les outils nécessaires à leur traitement.

L'étude des écoulements à surface libre représente un domaine de recherche assez vaste et assez compliqué. Cette complexité devient de plus en plus importante si ces écoulements sont à deux dimensions, torrentiels et en régime non permanent.

Le mouvement d'une masse liquide est généralement gouverné par les lois de conservation de la physique des milieux continus, à savoir :

- loi de conservation de la masse ;
- loi de conservation de l'énergie ;
- loi de conservation de la quantité de mouvement.

Les écoulements non permanents traversant des canaux découverts à géométrie irrégulière sont gouvernés par un modèle hydrodynamique qui découle des principes fondamentaux de la mécanique. Le système d'équations obtenu n'est autre qu'une généralisation des équations différentielles de Saint Venant, d'un écoulement graduellement varié en régime non permanent dans des canaux à surface libre, avec deux dimensions spatiales.

3.2. Les variables de l'écoulement

Un écoulement à surface libre bidimensionnel en régime non permanent dans un canal non prismatique (Figure (3.1)), dont le repère orthonormé est lié au fond du canal (Brater et King, 1976 ; Lai, 1977 ; Abbot, 1979 ; Jimenez et Chaudhry, 1988 ; Cunge, 1988), est défini dans l'espace et dans le temps par deux variables, en l'occurrence :

- La profondeur d'écoulement : $h = h(x,y,t)$
- La vitesse résultante \vec{V} ayant pour composante, la vitesse longitudinale u suivant x et la vitesse transversale v suivant y : $\vec{V} = \vec{u}(x,y,t) + \vec{v}(x,y,t)$

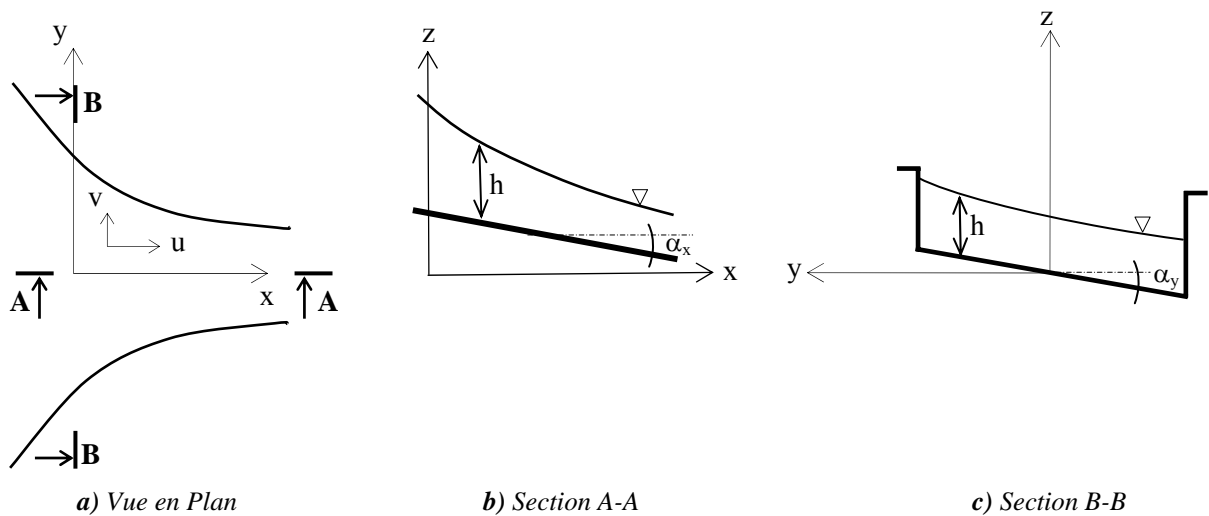


Figure (3.1) : Écoulement dans une transition à surface libre

Où, α_x et α_y représentent les pentes de fond suivant les directions x et y respectivement.

Il y a trois inconnues à déterminer en fonction du temps en chaque point et qui sont la hauteur h , la vitesse longitudinale u et la vitesse transversale v . De ce fait, on a besoin de deux couples de lois de conservation, donnés sous les formes suivantes :

- conservation masse-énergie ;
- conservation masse-quantité de mouvement.

Le premier couple est applicable uniquement aux écoulements continus, alors que le second est applicable aussi bien aux écoulements continus que discontinus (Davis et Sorensen, 1969 ; Douglas et al., 1985 ; Cunge, 1988 ; Fox et McDonald, 1994 ; Graf et Altinakar, 1996).

Puisque les écoulements bidimensionnels supercritiques à travers des canaux à géométrie variable sont souvent le siège d'apparition de discontinuités du type ondes transversales, les variables du problème sont ainsi discontinues. Par suite, le couple de lois conservation masse-quantité de mouvement est le plus approprié.

On rappelle que les équations bidimensionnelles du type hyperbolique de Saint Venant proviennent de l'intégration sur la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes. Elles sont appelées "Equations des écoulements à surface libre en eau peu profonde" ou "*Shallow water equations*".

L'intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur, se fait en tenant compte bien sûr de quelques hypothèses simplificatrices connues comme étant les hypothèses classiques de Saint Venant, et qui seront citées au fur et à mesure de l'établissement des équations du mouvement.

3.3. Equations de Navier Stokes

Les équations tridimensionnelles de Navier Stokes (Alliot, 1998 ; Wu et al., 2000 ; Lagoutière, 2000 ; Métier, 2003 ; Guinot, 2005) s'écrivent comme suit :

3.3.1. Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

3.3.2. Equations de quantité de mouvement

▪ Suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = f_c v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

▪ Suivant y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -f_c u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

▪ Suivant z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} = f_c w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (3.4)$$

Où, x et y sont des coordonnées horizontales, z est la coordonnée verticale, t est le temps, ρ est la masse volumique, u, v et w sont les composantes de la vitesse suivant x, y et z respectivement, τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yy} , τ_{yz} et τ_{zz} sont les contraintes dans le fluide, et f_c représente le paramètre de Coriolis.

Dans le cas d'un écoulement de faible profondeur (presque horizontal), qui est représenté par la figure (3.2), la vitesse verticale w est faible (Ryhming, 1985 ; Kim et Kim, 1996 ; Novo, 2002 ; Wu, 2008), et par suite l'accélération est négligeable, donnant ainsi l'équation d'une distribution hydrostatique des pressions :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (3.5)$$

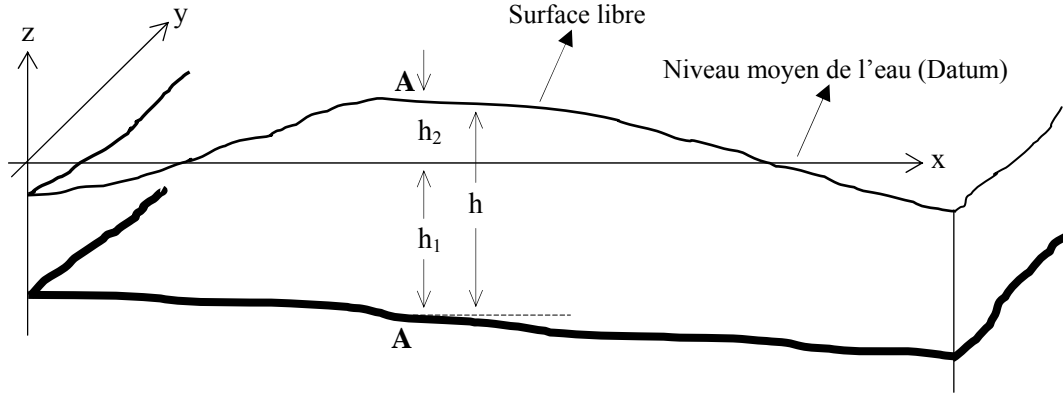


Figure (3.2) : Écoulement en eau peu profonde -Système de coordonnées-

En supposant par ailleurs que la masse volumique ρ est constante le long de la profondeur (fluide incompressible), l'équation (3.5) a une solution analytique (Strelkoff, 1970 ; Ryhming, 1985 ; Sabersky et al., 1989 ; Zienkiewicz et Taylor, 2000) de la forme :

$$P = P_a + \rho g (h_2 - z) \quad (3.6)$$

Où, P_a et h_2 sont la pression atmosphérique (constante) et l'élévation de la surface libre.

La substitution de l'équation (3.6) dans les équations du mouvement (3.2) et (3.3) et en tenant compte de l'hypothèse d'un fluide incompressible, on aboutira au système d'équations ci-dessous, donnant l'équation de continuité et les équations de la quantité de mouvement suivant x et y respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = f_c v - g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -f_c u - g \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (3.9)$$

3.4. Intégration des équations de Navier Stokes suivant la profondeur

L'intégration des équations de Navier Stokes (3.7), (3.8) et (3.9) fournit les équations de Barré de Saint Venant qui gouvernent les écoulements bidimensionnels en régime non permanent à surface libre, et, ceci, sur la base de quelques hypothèses simplificatrices.

L'intégration sur la profondeur de ces équations, se fait en utilisant la "Règle de Leibnitz" des intégrales (Ryhming, 1985 ; Zienkiewicz et Taylor, 2000 ; Wu, 2008) ci-après :

Soit $F(r,s)$ une fonction quelconque, alors :

$$\int_{-a}^b \frac{\partial}{\partial s} F(r, s) dr = \frac{\partial}{\partial s} \int_{-a}^b F(r, s) dr - F(b, s) \frac{\partial b}{\partial s} + F(a, s) \frac{\partial a}{\partial s} \quad (3.10)$$

Elle est appelée aussi, la "Règle de dérivation sous le signe somme", et qui peut s'écrire comme suit :

$$G'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_1}^{h_2} u dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \left[u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} - u(-h_1) \frac{\partial (-h_1)}{\partial t} \right] \quad (3.11)$$

En considérant par ailleurs, les conditions cinématiques (Zienkiewicz et Taylor, 2000 ; Wu, 2008) à la surface et au fond :

- Au niveau de la surface libre, la vitesse verticale w peut être donnée comme la dérivée totale de l'élévation de la surface par rapport au temps :

$$w(h_2) = \frac{Dh_2}{dt} = \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \quad \text{pour } z = h_2 \quad (3.12)$$

- La même chose au niveau du fond :

$$w(-h_1) = \frac{Dh_1}{dt} = u(-h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(-h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} \quad \text{pour } z = -h_1 \quad (3.13)$$

Sachant seulement que la profondeur h_1 ne varie pas avec le temps.

Par ailleurs, pour un écoulement visqueux (La condition de non glissement est appliquée), on a alors :

$$u(-h_1) = 0 \quad (3.14)$$

$$v(-h_1) = 0 \quad (3.15)$$

Et aussi, par continuité :

$$w(-h_1) = 0 \quad (3.16)$$

3.4.1. Intégration de la loi de conservation de la masse

Pour un fluide incompressible, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

L'intégration se fera entre le fond ($-h_1$) et la surface libre (h_2), d'où :

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (3.18)$$

En utilisant la règle de Leibnitz des intégrales, on aura :

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u dz - u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + u(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} v dz - v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + v(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial y} \right] + [w(h_2) - w(-h_1)] \quad (3.19)$$

En tenant compte des conditions cinématiques citées précédemment, on obtiendra :

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} v dz \quad (3.20)$$

Etant donné que les vitesses u et v sont inconnues et sont non uniformes (Figure (3.3)), il est nécessaire d'introduire à ce stade la notion de vitesses moyennes (Yen, 1973 ; Ryhming, 1985 ; Zienkiewicz et Taylor, 2000 ; Wu, 2008).

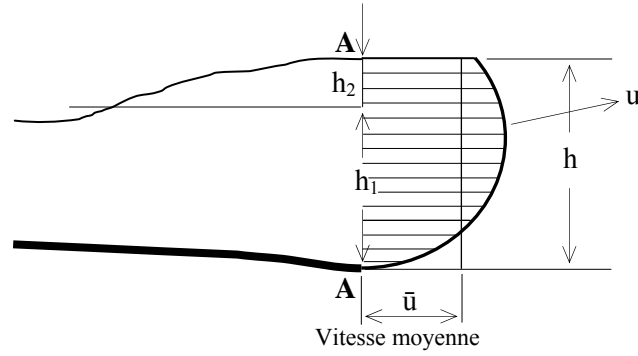


Figure (3.3) : *Écoulement en eau peu profonde -Distribution de la vitesse-*

L'écoulement est moyennement permanent, d'où, les vitesses moyennes sont définies comme suit (Jiroveanu, 2002 ; Caro, 2004 ; Wu, 2008) :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} u dz \quad (3.21)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} v dz \quad (3.22)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} w dz \quad (3.23)$$

Par conséquent, il vient :

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{v}) \quad (3.24)$$

D'où :

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{v}) = 0 \quad (3.25)$$

Sachant que : $h = h_1 + h_2$, alors : $h_2 = h - h_1$, par suite :

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (3.26)$$

La cote du fond h_1 ne varie pas avec le temps, d'où : $\frac{\partial h_1}{\partial t} = 0$, ce qui donnera :

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.27)$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (3.28)$$

3.4.2. Intégration des équations dynamiques

3.4.2.1. Intégration de la première équation de Navier Stokes

La première équation s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} = f_c v - g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (3.29)$$

Intégrons dans un premier lieu, le premier membre de cette équation en posant :

$$A = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \quad (3.30)$$

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \int_{-h_1}^{h_2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right] dz \quad (3.31)$$

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial (u^2)}{\partial x} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial (uv)}{\partial y} dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial (uw)}{\partial z} dz \quad (3.32)$$

L'utilisation de la règle de Leibnitz mène à :

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_1}^{h_2} u dz - u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u^2 dz - u^2(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + u^2(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} uv dz - u(h_2)v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + u(-h_1)v(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial y} \right] + [u(h_2)w(h_2) - u(-h_1)w(-h_1)] \quad (3.33)$$

La prise en compte des conditions cinématiques, conduit à :

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_1}^{h_2} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} uv dz \quad (3.34)$$

Introduisons à présent la notion de vitesses moyennes (Hug, 1975 ; Lai, 1977 ; Rajar et Cetina, 1983 ; Laigle et Coussot, 1997) :

$$u = u - \bar{u} + \bar{u} = [(u - \bar{u}) + \bar{u}] \quad (3.35)$$

$$u^2 = (u - \bar{u})^2 + \bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u}) \quad (3.36)$$

$$(u - \bar{u})(v - \bar{v}) = uv - u\bar{v} - \bar{u}v + \bar{u}\bar{v} \quad (3.37)$$

D'où :

$$uv = (u - \bar{u})(v - \bar{v}) + u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u}\bar{v} \quad (3.38)$$

En remplaçant les termes u^2 et uv dans l'équation (3.34), nous obtenons :

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_1}^{h_2} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} [(u - \bar{u})^2 + \bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})] dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} [(u - \bar{u})(v - \bar{v}) + u\bar{v} + \bar{u}v - \bar{u}\bar{v}] dz \quad (3.39)$$

Après application de la règle de Leibnitz, développement et réarrangement, on arrive à :

$$\int_{-h_1}^{h_2} A dz = \frac{\partial}{\partial t} (h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (h\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} (u - \bar{u})^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} (u - \bar{u})(v - \bar{v}) dz \quad (3.40)$$

Passons à présent à l'intégration suivant la profondeur du second membre de l'équation (3.29), tout en posant :

$$A_1 = f_c v - g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} A_2 \quad (3.41)$$

Avec,

$$A_2 = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (3.42)$$

Intégrons le terme A_2 correspondant aux contraintes dans le fluide :

$$\int_{-h_1}^{h_2} A_2 dz = \int_{-h_1}^{h_2} \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] dz = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}) dz + \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}) dz \quad (3.43)$$

En appliquant la règle des intégrales de Leibnitz, on aura :

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} A_2 dz = & \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_1}^{h_2} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h_1}^{h_2} \tau_{xy} dz - \left[\tau_{xx}(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + \tau_{xy}(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} - \tau_{xz}(h_2) \right] \\ & + \left[\tau_{xx}(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial x} + \tau_{xy}(-h_1) \frac{\partial(-h_1)}{\partial y} - \tau_{xz}(-h_1) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Les termes entre crochets peuvent être interprétés comme étant les composantes du tenseur de l'effort dans les plans de la surface libre et du fond.

L'intégration du second membre de l'équation (3.29) permet d'avoir :

$$\int_{-h_1}^{h_2} A_1 dz = f_c h \bar{v} - g h \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{wx} - \tau_{bx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (h T_{xx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (h T_{xy}) \quad (3.45)$$

Où, τ_{wx} et τ_{bx} sont respectivement les contraintes du vent et du fond suivant x , et T_{xx} et T_{xy} représentent les contraintes effectives définies par les équations (Flokstra, 1977 ; Ponce et Yabusaki, 1981) suivantes :

$$T_{xx} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} \left[2\rho v \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \bar{u}' \bar{u}' - \rho (u - \bar{u})^2 \right] dz \quad (3.46)$$

$$T_{xy} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} \left[\rho v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \bar{u}' \bar{v}' - \rho (u - \bar{u})(v - \bar{v}) \right] dz \quad (3.47)$$

Dans lesquelles, v , u' et v' sont dans l'ordre la viscosité dynamique et les vitesses fluctuantes.

Les contraintes du vent sont fonction de la vitesse du vent, alors que les contraintes du fond suivant x sont généralement données (Zienkiewicz et Taylor, 2000 ; Wu, 2008) par :

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \quad (3.48)$$

Avec, C : Coefficient de Chezy.

Finalement, l'équation (3.29) intégrée sur la profondeur devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{u}\bar{v}) = f_c h\bar{v} - g h \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - \frac{g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(hT_{xx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(hT_{xy}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

3.4.2.2. Intégration de la seconde équation de Navier Stokes

La seconde équation s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -f_c u - g \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (3.50)$$

De la même manière, en intégrant l'équation (3.50) de Navier Stokes suivant la profondeur, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{v}\bar{v}) = -f_c h\bar{u} - g h \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_{wy} - \tau_{by}) \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(hT_{xy}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(hT_{yy}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Les contraintes de fond τ_{by} suivant y et les contraintes effectives T_{yy} sont exprimées (Zienkiewicz et Taylor, 2000 ; Wu, 2008) par :

$$\tau_{by} = \frac{\rho g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \quad (3.52)$$

$$T_{yy} = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_2} \left[2\rho v \frac{\partial v}{\partial x} - \rho \bar{v}' \bar{v}' - \rho (v - \bar{v})^2 \right] dz \quad (3.53)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{v}\bar{v}) = -f_c h\bar{u} - g h \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - \frac{g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(hT_{xy}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(hT_{yy}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Quelques auteurs (Flokstra, 1977 ; Ponce et Yabusaki, 1981 ; Ryhming, 1985 ; Younus et Chaudhry, 1994) ont introduit la notion de la viscosité turbulence ε pour une profondeur constante h, afin de prendre en compte les termes des contraintes effectives comme suit :

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(hT_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(hT_{xy}) \right] = \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (h T_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (h T_{yy}) \right] = \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \quad (3.56)$$

Notons que les équations de Saint Venant, énoncées pour la première fois en 1871, s'écrivent principalement en fonction du tirant d'eau h et des deux vitesses moyennes u et v suivant x et y respectivement. Par conséquent, à partir de cette étape, on utilisera les mêmes notations que Saint Venant au lieu des notations \bar{u} et \bar{v} . Ainsi, le système d'équations de Saint Venant devient comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) = f_c hv - gh \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - \frac{g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2} + \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2) = -f_c hu - gh \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} - \frac{g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} + \varepsilon h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.59)$$

Les différents termes apparaissant dans les équations dynamiques de Saint Venant correspondent respectivement :

- à l'accélération locale de l'écoulement, c'est-à-dire, la variation locale de la quantité de mouvement avec le temps ;
- au transport de quantité de mouvement par convection, en d'autres termes, c'est l'accélération spatiale ;
- à la force de Coriolis ;
- à la composante du poids et au gradient de pression ;
- à la contrainte du vent ;
- au frottement Eau-Sol ;
- aux contraintes effectives.

En négligeant les termes de second ordre et l'accélération de Coriolis et en supposant d'une part, que les contraintes tangentielles au fond sont prépondérantes sur les autres contraintes, et d'autre part, que les pertes de charge générales sont les mêmes que dans le cas d'un mouvement uniforme de même profondeur, on aboutit dans une première étape, au système ci-dessous :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) = -gh \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2) = -gh \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (3.62)$$

Le coefficient de Chezy C est lié au coefficient de rugosité de Manning par la relation suivante :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad (3.63)$$

Pour un canal à section transversale rectangulaire de largeur B, le rayon hydraulique est :

$$R_h = \frac{Bh}{B+2h} \quad (3.64)$$

De plus, puisque le canal est symétrique, le rayon hydraulique devient :

$$R_h = \frac{bh}{b+h} \quad (\text{Avec : } b = B/2) \quad (3.65)$$

D'où, le coefficient de Chezy s'écrit alors de la façon suivante :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} = \frac{1}{n} \left(\frac{bh}{b+h} \right)^{1/6} \quad (3.66)$$

Sachant aussi que : $h = h_1 + h_2$, donc :

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial (h - h_1)}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{\partial (h - h_1)}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \quad (3.68)$$

Le remplacement des expressions (3.66) et (3.67) dans l'équation (3.61) donnera :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h u) + \frac{\partial}{\partial x} (h u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (h u v) = -g h \frac{\partial h}{\partial x} + g h \left[\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{n^2}{h} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \right] \quad (3.69)$$

D'autre part, on sait que :

$$g h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \right) \quad (3.70)$$

L'équation (3.69) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h u^2 + g \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (h u v) = g h \left[\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{n^2}{h} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} u \sqrt{u^2 + v^2} \right] \quad (3.71)$$

On pose :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (3.72)$$

$$S_{0x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} = \sin \alpha_x \quad (3.73)$$

S_{fx} , S_{0x} et α_x sont la pente de frottement, la pente de fond et l'angle d'inclinaison du fond suivant la direction longitudinale x.

On aura par suite :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h u) + \frac{\partial}{\partial x}(h u^2 + g \frac{h^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(h u v) = g h (S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.74)$$

De la même façon, l'équation (3.62) conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h v) + \frac{\partial}{\partial x}(h u v) + \frac{\partial}{\partial y}(h v^2 + g \frac{h^2}{2}) = g h (S_{0y} - S_{fy}) \quad (3.75)$$

Dans laquelle,

$$S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (3.76)$$

$$S_{0y} = \frac{\partial h_1}{\partial y} = \sin \alpha_y \quad (3.77)$$

S_{fy} , S_{0y} et α_y représentent dans l'ordre : la pente de frottement, la pente de fond et l'angle d'inclinaison du fond suivant la direction transversale y.

En récapitulatif, l'intégration sur la profondeur des équations de Navier Stokes donne le système d'équations du mouvement bidimensionnel en régime non permanent de Jean Claude Barré de Saint Venant (Popovska, 1989 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Stockstill, 1997 ; Morita et Yen, 2002 ; Berreksi et Kettab, 2002 ; Rao, 2004 ; Berreksi et al., 2008) en termes des variables d'écoulement (h,hu,hv), et qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h u)}{\partial x} + \frac{\partial(h v)}{\partial y} = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h u) + \frac{\partial}{\partial x}(h u^2 + g \frac{h^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(h u v) = g h (S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h v) + \frac{\partial}{\partial x}(h u v) + \frac{\partial}{\partial y}(h v^2 + g \frac{h^2}{2}) = g h (S_{0y} - S_{fy}) \quad (3.80)$$

$$S_{0x} = \sin \alpha_x \quad (3.81)$$

$$S_{0y} = \sin \alpha_y \quad (3.82)$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (3.83)$$

$$S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (3.84)$$

Ces équations ont été obtenues en faisant les principales hypothèses simplificatrices ci-dessous (Hug, 1975 ; Vreugdenhil et Wijnbenga, 1982 ; Steffler et Jin, 1993 ; Yang et Hsu, 1993 ; Rahman et Chaudhry, 1997) durant toutes les étapes de l'intégration :

- a. le fluide est incompressible ($\rho = \text{Constante}$) ;
- b. la distribution des pressions sur la verticale est hydrostatique ;
- c. la répartition des vitesses est uniforme sur la verticale ;
- d. le canal est horizontal ou faiblement incliné ;
- e. les contraintes tangentielles au fond sont les plus prépondérantes ;
- f. le coefficient de résistance aux frottements pour l'écoulement non permanent peut être représenté globalement par les formules de la résistance du même type que celles qui sont valables dans l'écoulement permanent ;
- g. l'accélération de Coriolis est négligée ;
- h. l'effet de l'entraînement d'air n'est pas pris en considération.

Le système d'équations obtenu, peut s'écrire aussi en termes des variables d'écoulement h , hu et hv (Garcia et Kahawita, 1986 ; Fennema et Chaudhry, 1990 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Ikni et al., 2005 ; Berreksi et al., 2008) sous la forme condensée suivante :

$$U'_t + E_x + F'_y + S' = 0 \quad (3.85)$$

Avec, $U'_t = (h, hu, hv)^t$

$$E_x = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \\ huv \end{bmatrix} ; \quad F'_y = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ hv^2 + g \frac{h^2}{2} \end{bmatrix} ; \quad S' = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ -gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Par ailleurs, le système en question en termes de primitives des variables d'écoulement h , u et v (Fennema et Chaudhry, 1990 ; Berreksi, 1998 ; Ikni et al., 2005) est tel que :

$$V'_t + P_x + R_y + T = 0 \quad (3.87)$$

Avec, $V'_t = (h, u, v)^t$

$$P_x = \begin{bmatrix} hu \\ \frac{u^2}{2} + gh \\ uv \end{bmatrix} ; \quad R_y = \begin{bmatrix} hv \\ uv \\ \frac{v^2}{2} + gh \end{bmatrix} ; \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{0x} - S_{fx}) \\ -g(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

3.5. Généralisation du système d'équations de Saint Venant

Dans la pratique, on se trouve généralement confronté à l'étude des canaux avec des pentes de fond considérables (tels que les coursiers d'évacuateurs de crues à surface libre). Dans un pareil cas, le système de Saint Venant ainsi établi ne peut être utilisé directement, vu que lors de sa détermination, il a été tenu compte de l'une des hypothèses simplificatrices principales émises par Saint Venant, à savoir, un canal horizontal ou faiblement incliné, et c'est pour cela d'ailleurs que ce système d'équations ne peut être appliqué pour des canaux à fortes pentes.

En effet, l'augmentation de la pente de fond d'un canal en écoulement à surface libre aura un effet direct sur l'expression de la pression (Chow, 1959 ; Yen, 1973 ; Graf et Altinakar, 1993 ; Alhamid et Negm, 1996). En se référant au canal à forte pente incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, illustré par la figure (3.4) ci-dessous :

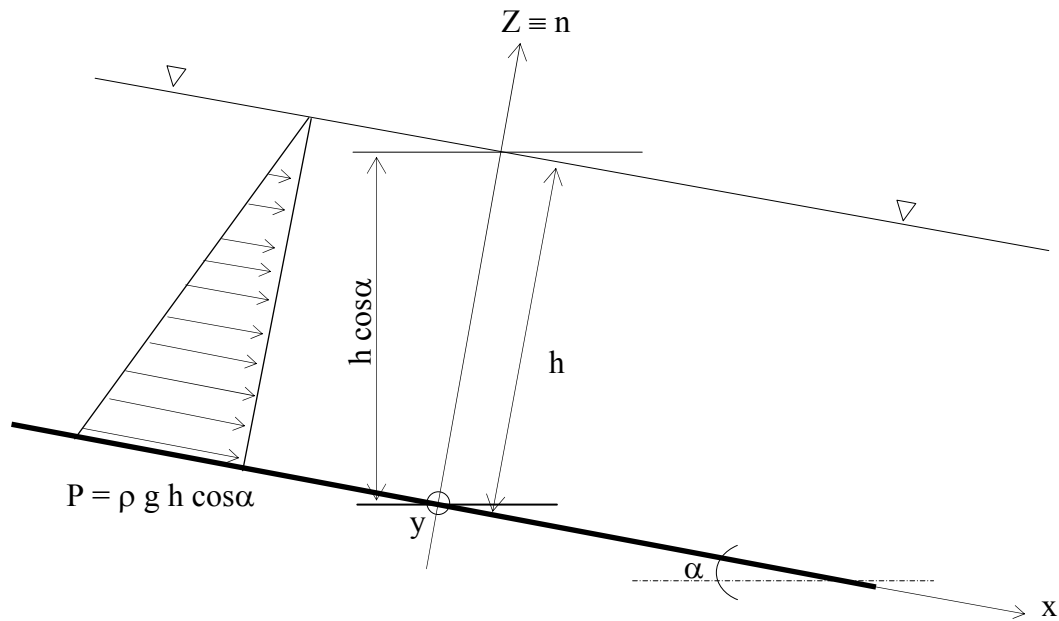


Figure (3.4) : Distribution de la pression dans un canal incliné

L'expression de la pression est alors donnée (Chow, 1959 ; Herbich et Walsh, 1972 ; Yen, 1973 ; Graf et Altinakar, 1993 ; Atanov et al., 1998) par la formule suivante :

$$P = \rho g h \cos \alpha \quad (3.89)$$

On constate donc, que la pression dans un tel cas est multipliée par un facteur de correction « $\cos \alpha$ » (Chow, 1959 ; Graf et Altinakar, 1993 ; Berreksi, 1998), où α représente l'angle d'inclinaison du fond du canal avec l'horizontale, et h , la hauteur d'eau mesurée perpendiculairement au fond du canal.

Hasumi (Chow, 1959) avait étudié la distribution de la pression le long des parements inclinés des barrages déversoirs, l'équation (3.89) avait été vérifiée d'une façon très satisfaisante.

Par ailleurs, le nombre de Froude dans ce cas est donné comme suit :

$$F = \frac{V}{\sqrt{g h \cos \alpha}} \quad (3.90)$$

Par conséquent, le système d'équations de mouvement de Saint Venant généralisé, afin de tenir compte de l'influence d'une variation de la pente de fond, s'écrit en termes des variables d'écoulement h , hu et hv (Berreksi et al., 2004 ; Berreksi et al., 2005 ; Berreksi et al., 2008) de la manière suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2h + g\frac{h^2}{2}\cos\alpha_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2h + g\frac{h^2}{2}\cos\alpha_x\right) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (3.93)$$

Ou encore, sous la forme condensée (Berreksi et al., 2004 ; Berreksi et al., 2005 ; Berreksi et al., 2008) suivante :

$$U'_{1t} + E'_{1x} + F'_{1y} + S'_1 = 0 \quad (3.94)$$

Avec, $U'_{1t} = (h, hu, hv)^t$

$$E'_{1x} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\frac{h^2}{2}\cos\alpha_x \\ uvh \end{bmatrix}; F'_{1y} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + g\frac{h^2}{2}\cos\alpha_x \end{bmatrix}; S'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ -gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Par ailleurs, le système d'équations du mouvement en termes de primitives des variables d'écoulement h , u et v (Berreksi, 1998 ; Berreksi et al., 2005) est tel que :

$$V'_{1t} + P'_{1x} + R'_{1y} + T'_1 = 0 \quad (3.96)$$

Avec, $V'_{1t} = (h, u, v)^t$

$$P'_{1x} = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{u^2}{2} + gh\cos\alpha_x \\ uv \end{bmatrix}; R'_{1y} = \begin{bmatrix} vh \\ uv \\ \frac{v^2}{2} + gh\cos\alpha_x \end{bmatrix}; T'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{0x} - S_{fx}) \\ -g(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Où, les termes S_{0x} , S_{0y} , S_{fx} et S_{fy} sont donnés dans l'ordre par les relations (3.81) à (3.84).

Cependant, lors de l'étude des écoulements à surface libre non permanents en régime torrentiel à travers des canaux non prismatiques (contractions ou élargissements ou même des canaux courbés) par des méthodes numériques, on doit agir avec une grande prudence, car on

sera amené à prendre en compte, dans n'importe quelle résolution numérique de plusieurs types de conditions, dont la plus délicate qui est relative aux conditions aux limites au niveau des parois des différents canaux étudiés, que ce soit rétrécissements ou élargissements.

3.6. Génération de maillages orthogonaux dans le cas de géométrie variable

La génération de maillages orthogonaux pour la simulation des écoulements dans des canaux avec des géométries variables ou complexes, a pour but la détermination du type d'une transformation qui peut prendre en compte les points de la grille depuis le domaine physique au domaine de calcul d'une façon unique (Crowly, 1962 ; Rai et Anderson, 1982 ; Ikni, 2002). Plusieurs conditions doivent être imposées à de telles transformations :

- Les lignes de la grille doivent être fermement espacées sinon des erreurs numériques non négligeables seront présentes.
- Les grilles extrêmement obliques doivent être évitées, parce que ces dernières accentuent parfois les troncutures.

Parmi les techniques de génération de grilles les plus utilisées, on retrouve celle basée sur la résolution des équations aux dérivées partielles.

3.7. Génération de grilles par la résolution des équations aux dérivées partielles

La procédure la plus usuelle est celle qui consiste en la résolution numérique des équations différentielles, qui se base sur la transformation du domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire (Thomson, 1982 ; Thomson et al., 1992 ; Yost et Rao, 2000 ; Ikni, 2002), défini en terme de coordonnées transformées. Il existe deux alternatives dans cette méthode :

- la méthode directe, qui permet de résoudre les équations différentielles pour les coordonnées curvilignes ξ et η sur des grilles cartésiennes x et y dans le plan physique ;
- la méthode inverse, exigeant la résolution des équations différentielles pour les coordonnées x et y sur des grilles rectangulaire ξ et η dans le plan transformé.

3.8. Transformation de coordonnées

Dans la majorité des cas pratiques, on est confronté à l'étude des écoulements dans des canaux découverts de formes géométriques assez complexes. L'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des équations du mouvement de tels écoulements, notamment la méthode des différences finies, peuvent engendrer des problèmes dans la simulation des conditions aux limites le long des parois des canaux non prismatiques.

Afin de remédier à cette contrainte majeure, on utilisera la transformation de coordonnées proposée par Jimenez et Chaudhry (1988) et Bhallamudi et Chaudhry (1992), dans laquelle la forme irrégulière de la contraction ou de l'élargissement étudié sera mise sous une forme régulière. La transformation de coordonnées en question, comme elle a été proposée par les auteurs cités ci-dessus (Jimenez et Chaudhry, 1988 ; Djuric et al., 1989 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Berreksi et al., 2008) s'écrit de la manière suivante :

$$\xi = x \tag{3.98}$$

$$\eta = \frac{y}{b(x)} \tag{3.99}$$

Où, $b(x)$ représente la distance entre l'axe de symétrie et la paroi de la transition à une distance x .

3.9. Application de la transformation de coordonnées

A présent, les équations du mouvement gouvernant l'écoulement étudié, devront être écrites en fonction des nouvelles coordonnées transformées ξ et η , moyennant la transformation géométrique donnée par les équations (3.98) et (3.99).

Les équations du mouvement (3.85) et (3.86) écrites en fonction des variables d'écoulement h , hu et hv dans le cas des canaux faiblement inclinés, auxquelles on applique la transformation de coordonnées, donnent le système d'équations en coordonnées transformées (Berreksi et al., 2005 ; Berreksi et al., 2008) ci-après :

$$U_t'' + E_\xi + F_\eta' + S'' = 0 \quad (3.100)$$

Avec, $U_t'' = (hb, hub, hvb)^t$

$$E_\xi = \begin{bmatrix} hub \\ b \left(hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) \\ huvb \end{bmatrix}; \quad F_\eta' = \begin{bmatrix} hv - \eta hu \frac{\partial b}{\partial \xi} \\ huv - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} \left(hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) \\ hv^2 + g \frac{h^2}{2} - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} (huv) \end{bmatrix}; \quad S'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -g h b (S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ -g h b (S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

De la même manière, les équations du mouvement (3.87) et (3.88) écrites en termes des variables d'écoulement h , u et v dans le cas des canaux avec une pente de fond faible, seront écrites en fonction des nouvelles coordonnées transformées ξ et η (Berreksi, 1998) telles que :

$$V_t' + P_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) P_\eta + \frac{1}{b(\xi)} R_\eta + T = 0 \quad (3.102)$$

Avec, $V_t' = (h, u, v)^t$

$$P_\xi = \begin{bmatrix} hu \\ \frac{u^2}{2} + gh \\ uv \end{bmatrix}; \quad P_\eta = \begin{bmatrix} hu \\ \frac{u^2}{2} + gh \\ uv \end{bmatrix}; \quad R_\eta = \begin{bmatrix} hv \\ uv \\ \frac{v^2}{2} + gh \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ -g(S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

D'un autre côté, l'application de la transformation de coordonnées aux équations du mouvement (3.94) et (3.95) tenant compte d'une pente de fond quelconque et écrites en fonction des variables d'écoulement h , hu et hv , donnera le nouveau système en fonction des coordonnées transformées ξ et η (Berreksi et al., 2004 ; Berreksi et al., 2005 ; Berreksi et al., 2008) suivant :

$$U_{1t}'' + E_{1\xi} + F_{1\eta}' + S_1'' = 0 \quad (3.104)$$

$$\text{Avec, } U_{1t}'' = (hb, hub, hvb)^t$$

$$E_{1\xi} = \begin{bmatrix} uhb \\ b \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi \right) \\ uvhb \end{bmatrix}; F_{1\eta} = \begin{bmatrix} vh - \eta h u \frac{\partial b}{\partial \xi} \\ u v h - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi \right) \\ v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} (uvh) \end{bmatrix}; S_1'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -g h b (S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ -g h b (S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Par contre, si on applique la même transformation de coordonnées au système d'équations (3.96) et (3.97) donné en fonction de variables d'écoulement h , u et v et établi pour des canaux à fortes pentes, on aboutira aux équations du mouvement écrites en coordonnées transformées ξ et η (Ikni, 2002) ci-dessous :

$$V_{1t}' + P_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) P_\eta + \frac{1}{b(\xi)} R_\eta + T_1 = 0 \quad (3.106)$$

$$\text{Avec, } V_{1t}' = (h, u, v)^t$$

$$P_\xi = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha_\xi \\ uv \end{bmatrix}; P_\eta = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha_\xi \\ uv \end{bmatrix}; R_\eta = \begin{bmatrix} vh \\ uv \\ \frac{v^2}{2} + gh \cos \alpha_\xi \end{bmatrix}; T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ -g(S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Par ailleurs, les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes x et y (3.85), (3.87), (3.94) et (3.96), et celles en fonction des coordonnées transformées ξ et η (3.100), (3.102), (3.104) et (3.106), ne sont pas dans une forme totalement conservative à cause de la présence des termes S' , T , S_1' , T_1 , S'' et S_1'' , appelés fréquemment "Termes sources". Lorsque ces termes ne sont pas nuls, ils agissent comme une source (Vazquez, 1999). Toutefois, les propriétés de la forme conservative ne sont pas altérées, car la contribution de ces termes est généralement faible ou négligeable.

Cependant, certains schémas numériques nécessitent l'utilisation des équations de base écrites sous une forme non conservative. Pour cela, certaines substitutions doivent être effectuées dans les équations du mouvement écrites en termes des primitives des variables d'écoulement h , u et v . Si on considère par exemple les équations du mouvement données par le système (3.102), les substitutions ci-dessous (Scouarnec, 1987 ; Fennema et Chaudhry, 1990) seront alors faites :

$$P_\xi = G' V_\xi' \quad (3.108)$$

$$P_\eta = G' V_\eta' \quad (3.109)$$

$$R_\eta = H' V_\eta' \quad (3.110)$$

Où, G' et H' sont des matrices Jacobiennes.

Le nouveau système d'équations en forme non conservative (Berreksi, 1998 ; Ikni, 2002) s'écrit de la manière suivante :

$$V'_t + G'^+ V'_\xi + G'^- V'_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) (G'^+ V'_\eta + G'^- V'_\eta) + \frac{1}{b(\xi)} (H'^+ V'_\eta + H'^- V'_\eta) + T = 0 \quad (3.111)$$

Dans lequel, G'^+ et H'^+ représentent des matrices jacobienne contenant des valeurs positives, alors que, G'^- et H'^- sont des matrices jacobienne contenant des valeurs négatives. Celles-ci, ont été obtenues après décomposition des matrices jacobienne G' et H' en deux parties, la première contient des valeurs positives, tandis que la deuxième contient des valeurs négatives.

3.10. Conditions particulières de l'écoulement

Les équations générales qui régissent le mouvement d'un fluide sont celles de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement. A ces équations, on peut rajouter (et il le faut d'ailleurs) des conditions initiales et des conditions aux limites (Obled, 1989 ; Banat, 1990 ; Boisson et al., 1990). Les conditions initiales permettent de connaître l'état du système (c'est-à-dire la valeur des variables du problème) à l'instant $t = 0$. Typiquement, dans le cas d'un écoulement de fluide, les conditions aux limites sont données par la valeur des variables ou des flux sur les parois du domaine.

3.10.1. Conditions initiales

Les valeurs des variables de l'écoulement doivent être choisies et affectées à tous les points de la grille de calcul. D'une manière générale, le choix des valeurs de ces variables se fait à partir de la condition amont.

3.10.2. Conditions aux limites

Afin d'obtenir de bons résultats lors de l'utilisation de méthodes numériques dans la résolution des équations du mouvement, la prise en compte des limites représente un aspect extrêmement important. Les équations du type hyperbolique sont particulièrement très sensibles, car chaque erreur qui s'introduit au niveau des frontières se propage automatiquement à travers le maillage, ce qui conduit dans la majorité des cas à de très fortes instabilités (Lepourhiet, 1980 ; Euvrard, 1990 ; Fulu et Tanaka, 1996 ; Nougier, 2001 ; Audusse, 2004). Les conditions aux limites ci-dessous sont habituellement utilisées :

3.10.2.1. Conditions aux frontières ouvertes

Les conditions aux frontières ouvertes sont appelées également les conditions d'amont et d'aval, où l'écoulement peut entrer ou quitter le domaine de calcul. Ces conditions seront spécifiées en fonction du type d'écoulement, soit fluvial ou torrentiel, et selon le type de problème considéré, soit unidimensionnel ou bidimensionnel (Garcia et Kahawita, 1986 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992). Le nombre de conditions est résumé dans le tableau (3.1) ci-après :

Tableau (3.1) : Conditions aux frontières ouvertes

Problème Considéré	Ecoulement Fluvial $F < 1$		Ecoulement Torrentiel $F > 1$	
	Amont (entrée)	Aval (sortie)	Amont (entrée)	Aval (sortie)
1 D	1	1	2	0
2 D	2	1	3	0

Etant donné que l'écoulement étudié est en régime torrentiel et à deux dimensions spatiales ; alors, les variables d'écoulement h , u et v seront indiquées comme conditions aux limites à l'amont de la structure étudiée, car un écoulement torrentiel se fait seulement de l'amont vers l'aval.

3.10.2.2. Conditions de symétrie

Dans le souci de calculer les variables d'écoulement h , u et v au niveau de l'axe de symétrie d'une transition, il est primordial de choisir une procédure adéquate et convenable. On utilisera la procédure dite de réflexion (Jimenez et Chaudhry, 1988 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992), dont le principe est tel que les valeurs des variables h , u et v aux points fictifs de la grille de calcul, seront remplacées par celles des points intérieurs immédiats.

Une réflexion symétrique est employée pour déterminer la hauteur h et la vitesse longitudinale u , et une réflexion antisymétrique pour avoir la vitesse transversale v (Fennema et Chaudhry, 1990).

3.10.2.3. Conditions sur les parois latérales solides

En optant pour l'utilisation des techniques numériques pour la résolution des équations de mouvement régissant le phénomène analysé, on se trouvera alors confronté à une sérieuse contrainte relative aux points de la grille de calcul au niveau de la paroi latérale de la transition, où les valeurs de toutes les variables d'écoulement h , u et v sont exigées. Par conséquent, il est indispensable de chercher une manière de calculer ces variables et, ceci, en exploitant les informations à partir des points intérieurs.

Plusieurs investigations ont été menées dans ce contexte (Jimenez et Chaudhry, 1998 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) dans le but de proposer des méthodes permettant de déterminer les divers points le long de la paroi. On retrouve dans ce sens quelques techniques, dont la procédure de réflexion proposée et utilisée par Bhallamudi et Chaudhry (1992), qui s'avère être la plus recommandée dans les applications relatives au domaine d'hydraulique, surtout pour les problèmes des écoulements à surface libre à travers des canaux non prismatiques avec une section transversale rectangulaire. Cette procédure a pour principe de considérer que le tirant d'eau h et la vitesse d'écoulement V au point de réflexion fictif de la grille de calcul sont identiques aux valeurs se trouvant au point intérieur de cette grille (Figure (3.5)).

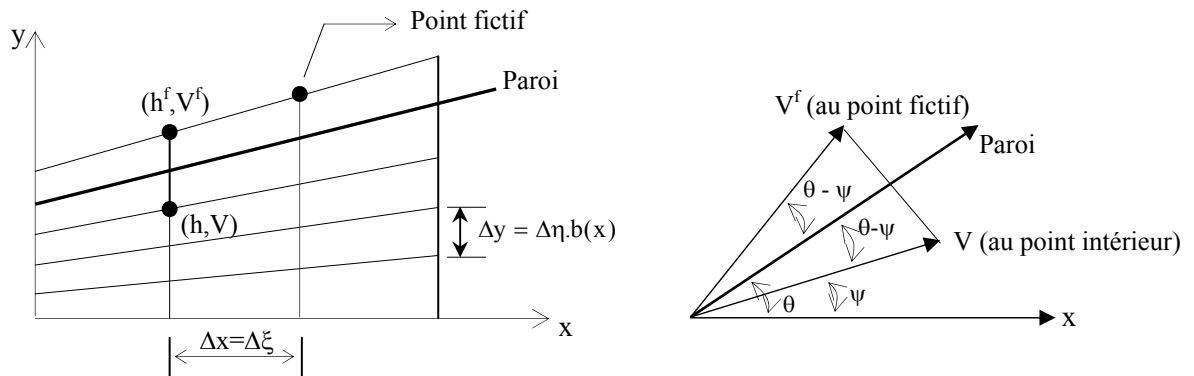


Figure (3.5) : Procédure de réflexion pour une paroi solide (Bhallamudi et Chaudhry, 1992)

Ainsi, cette procédure permettra d'avoir les valeurs des vitesses longitudinale (suivant x) et transversale (suivant y) au niveau des points fictifs (points de réflexions) en utilisant les expressions (Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Berreksi, 1998) suivantes :

$$u^f = V \cos(2\theta - \psi) \quad (3.112)$$

$$v^f = V \sin(2\theta - \psi) \quad (3.113)$$

Dans lesquelles, θ et ψ représentent dans l'ordre, l'angle de déviation de la paroi par rapport à l'axe horizontal et l'angle que fait la vitesse résultante V au point intérieur du maillage avec l'axe horizontal également.

CHAPITRE 4

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

4.1. Introduction

Un très grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être "*modélisés*" par des équations aux dérivées partielles. Par "*modèle*", nous entendons un ensemble d'équations qui, jointes à des conditions aux limites (s'exprimant sur la frontière du domaine spatial où le phénomène est étudié) et, lorsque le phénomène est d'évolution, à des conditions initiales, permet de définir l'état du système.

Cette définition, due à Robert Dautray et Jacques-Louis Lions (Dautray et Lions, 1988, Burg et al., 2001), rend compte du concept de modélisation. Cette technique demande à celui qui la pratique la connaissance du phénomène physique, la mise en équations, ainsi que les techniques permettant d'approcher au mieux l'état du système à un ou plusieurs instants donnés.

L'outil informatique n'est innocent de l'intérêt que l'on porte à la modélisation. En effet, la quasi-totalité des phénomènes de la physique sont modélisés par des équations d'évolutions, et le plus souvent non linéaires. Une résolution manuelle est tout simplement inenvisageable, la recherche de la solution exacte est presque impensable et il ne reste que l'utilisation de méthodes dites numériques, d'approximations, pour espérer comprendre, de manière plus ou moins lointaine, ce qui se passe dans le système que l'on souhaite décrire.

Le phénomène complexe traité dans le présent travail est relatif aux écoulements non permanents bidimensionnels en régime torrentiel. Ceux-ci sont gouvernés par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type hyperbolique. Ces équations ont été obtenues à partir de l'intégration suivant la profondeur des équations tridimensionnelles de Navier Stokes en tenant compte de quelques hypothèses, afin de négliger certains phénomènes par rapport à d'autres et de simplifier le modèle mathématique régissant le type d'écoulement étudié. Malgré ces simplifications, les équations déterminées ne peuvent être résolues théoriquement par les méthodes algébriques connues.

Plusieurs méthodes numériques ont été développées jusqu'à ce jour dans le but de permettre la résolution des équations aux dérivées partielles, dont les équations hyperboliques non linéaires. Parmi les méthodes utilisées dans ce domaine (Liggett et Woolhiser, 1967 ; Baltzer et Lai, 1968 ; Baranger, 1977 ; Zovne et Martin, 1979 ; Sibony et Mardon, 1982 ; Abbot et al., 1984 ; Shoucri, 1986 ; Shimizu et al., 1990 ; Piperno, 1995 ; Atanov et al., 1998 ; Mingham et Causon, 1998), on trouve la méthode des différences finies, celle des éléments finis et la méthode des volumes finis.

Le choix d'une méthode de résolution numérique est assez délicat. On optera dans notre étude pour celle des différences finies, car elle est la plus utilisée et la plus appropriée pour le traitement des problèmes relatifs aux écoulements torrentiels en régime non permanent et à deux dimensions spatiales dans des canaux à surface libre.

4.2. Méthode des différences finies

L'objectif (l'avantage) fondamental des méthodes numériques est la transformation d'une équation différentielle en une approximation écrite en termes de l'équation algébrique. Cette transformation consiste à remplacer une équation différentielle continue, dont l'espace solution est généralement de dimension finie, par un ensemble d'équations algébriques dont l'espace

solution est de dimension finie. Parmi les procédures par lesquelles cette transformation peut être effectuée, il y a "*La méthode des différences finies*".

Celle-ci procède, en premier lieu, par l'identification d'un nombre fini de points discrets dans le domaine d'étude spatio-temporel "espace-temps". Ces points sont appelés "*Nœuds*", et c'est à cet emplacement que l'approximation vers une solution exacte est calculée. La définition de l'emplacement des nœuds est appelée "*Etape de discrétisation*". Cette étape est une opération de transformation de la géométrie initiale en une géométrie discrétisée, donnant ainsi, une grille ou un maillage de calcul.

Par la suite, les dérivées qui apparaissent dans les équations différentielles sont remplacées par des approximations en différences discrètes. Ces approximations sont écrites en termes d'évaluations nodales de la fonction inconnue. Cette étape, appelée "*Etape de l'approximation*", produit un ensemble d'équations algébriques avec des valeurs nodales discrètes comme inconnues. Si l'opérateur différentiel initial est linéaire, le système algébrique résultant sera aussi linéaire ; dans le cas contraire, les équations algébriques seront non linéaires. La troisième étape venant après l'étape de l'approximation, concerne "*La solution*" du système d'équations algébriques résultant. En achevant cette étape, une approximation discrète de la solution de l'équation différentielle d'origine est obtenue.

La procédure décrite ci-dessus, donne la méthodologie de calcul d'une solution d'approximation. Pour que cette procédure soit utilisée d'une manière générale, la solution approchée doit être une "*Bonne approximation*" de la solution exacte.

4.3. Le maillage

La notion du maillage est indispensable pour la résolution spatiale des équations du mouvement. Il est le plus souvent impossible de résoudre ces équations analytiquement. Donc, nous devons discrétiser le domaine de calcul afin de trouver une approximation de la solution recherchée sur chaque petite partie de l'espace. Il existe de nombreuses techniques de maillage, de nombreuses formes de maillage également, qui ont chacune des propriétés spécifiques et qui s'adaptent de manière préférentielle à tel ou tel problème. En ce qui concerne notre domaine d'étude, on utilisera un maillage appelé souvent "*Maillage classique*" et dont la spécificité est qu'il ne se déforme pas.

4.4. Types de schémas aux différences finies

Divers schémas aux différences finies ont été développés pour la résolution des équations aux dérivées partielles régissant les écoulements à surface libre en régime non permanent (Peyret et Taylor, 1983 ; Chaudhry, 1987 ; Prashun, 1987 ; Ahmad et al., 1999 ; Sturm, 2001). Ces schémas sont regroupés dans deux grandes familles, à savoir, les schémas implicites (Cunge et Wegner, 1964 ; Godounov et Riabenki, 1987 ; Fennema et Chaudhry, 1989 ; Graf et Altinakar, 1996 ; Wurbs et James, 2002) et les schémas explicites (Hoffman, 1989 ; Fulu et Tanaka, 1996 ; Chin, 2000 ; Gerbeau et Perthame, 2001 ; Wu, 2008).

Le choix du type de schéma à utiliser pour la résolution des équations du mouvement, dépend généralement de la nature du problème à analyser d'une part, et de l'aptitude du schéma choisi à prendre en compte les caractéristiques du problème lui-même, d'autre part.

Les principaux avantages et inconvénients (Chaudhry, 1987 ; Godounov et Riabenki, 1987 ; Hoffman, 1989) des deux classes de schémas aux différences finies sont :

a) *Simplicité et souplesse de propagation*

La méthode explicite est relativement plus facile à programmer que la méthode implicite.

b) *Stabilité*

Une condition de stabilité sur le pas de temps est exigée pour les schémas explicites, ce qui n'est pas le cas pour presque la majorité des schémas implicites.

c) *Economie*

Etant donné que la valeur du pas de temps Δt pour un schéma implicite n'est pas souvent conditionnée par un critère de stabilité, n'importe quelle valeur de ce pas, même grande, peut être utilisée et pouvant engendrer un temps de calcul relativement inférieur à celui d'un schéma explicite, qui est limité par une condition de stabilité.

d) *Simulation des sommets brusques*

Généralement, les méthodes explicites sont les plus appropriées pour l'étude des phénomènes transitoires dans lesquels des pics abruptes de courtes durées peuvent avoir lieu, car le pas de temps est habituellement très petit. Par contre, dans les méthodes implicites, de tels sommets sont souvent lissés.

e) *Formation de discontinuités*

Dans le cas d'apparition de discontinuités dans le phénomène analysé, les schémas explicites sont plus appropriés que les schémas implicites.

A lumière de toutes ces constatations, on peut dire, grosso-modo, que les schémas aux différences finies explicites sont plus convenables dans l'étude des écoulements torrentiels en régime non permanent à travers des canaux non prismatiques, dans lesquels des ondes transversales prennent en général naissance. Ces schémas sont mieux adaptés à la prise en compte des discontinuités dans ce type d'écoulements. Néanmoins, ceci ne doit enlever en rien de la puissance des schémas aux différences finies implicites, qui sont aussi largement utilisés.

C'est en grande partie, pour cette raison, qu'on s'est proposé d'utiliser dans notre étude deux schémas numériques aux différences finies, un explicite et un autre implicite, afin de faire une comparaison entre eux en analysant des écoulements torrentiels bidimensionnels dans des transitions à surface libre, et de conclure par la suite, en fonction de la qualité des résultats obtenus, sur l'aptitude de chaque type de schéma à simuler le type d'écoulement analysé, ce qui nous permettra à la fin, de confirmer ou d'infirmer les constatations données ci-dessus.

4.5. Les principaux schémas aux différences finies fréquemment utilisés

Une multitude de schémas numériques aux différences finies, que ce soit explicites ou implicites, ont été développés durant plusieurs années par divers chercheurs. Cependant, il y a des schémas qui sont utilisés jusqu'à présent, tantôt comme ils ont été élaborés initialement et parfois en leur introduisant quelques améliorations. Par ailleurs, il y a d'autres schémas qui ont été abandonnés et laissés de côté, car ils n'ont pas prouvé leur efficacité dans la résolution de certains problèmes posés.

Parmi les principaux schémas aux différences finies explicites les plus en vue dans la littérature et qui sont employés pour la résolution des systèmes d'équations de nature hyperbolique, on trouve (Baltzer et Lai, 1968 ; Fennema et Chaudhry, 1986 ; Fennema et Chaudhry, 1990 ; Bermudez et Vazquez, 1994 ; Bürgisser, 1998 ; Zoppou et Roberts, 2003) : le schéma diffusif de Lax, le schéma de Lax-Wendroff, le schéma de Lambda, le schéma de Gabutti et le schéma de MacCormack, pour ne citer que ceux-là.

D'un autre côté, parmi les schémas implicites les plus usuels dans le même domaine d'étude, on peut citer entre autres (Fennema et Chaudhry, 1989 ; Louaked et Hanich, 1998 ; Hsu et al., 2001 ; Ikni et Berreksi, 2003 ; Ikni et al., 2004 ; Kazezyilmaz-Alhan et al., 2005) : le schéma de Preissman, le schéma de Beam et Warming, le schéma de Beam et Warming-Roe et le schéma de Casier et al.

Le choix d'un tel ou tel schéma pour la résolution des problèmes en hydraulique des écoulements à surface libre surtout, n'est donc pas une chose aisée.

On se propose de faire dans ce travail de recherche une étude comparative de deux schémas aux différences finies de classe différente. Notre choix s'est porté sur le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming.

4.6. Schéma explicite de MacCormack

Le schéma explicite de MacCormack appartient à la catégorie des schémas aux différences finies élaborés par Lax et Wendroff, qui sont très performants dans les calculs de la dynamique des fluides (Fennema et Chaudhry, 1987 ; Jovanović et Djordjević, 1995 ; Molls et Chaudhry, 1995 ; Mohapatra et Bhallamudi, 1996 ; Venutelli, 2004). Ce schéma, proposé pour la première fois en 1971 (MacCormack, 1971), est basé principalement sur un développement d'ordre deux dans le temps en série de Taylor. C'est le schéma le plus utilisé dans la résolution numérique des équations du mouvement non linéaires du type hyperbolique. Le point fort de ce schéma réside d'un côté, dans son aptitude à bien traiter les discontinuités dans les écoulements (telles que les ondes transversales), et d'un autre côté, il est précis à l'ordre deux en espace et en temps.

4.6.1. Formulation générale du schéma de MacCormack

Le principe de fonctionnement du schéma de MacCormack (Garcia et Kahawita, 1986 ; Jimenez et Chaudhry, 1988 ; Fennema et Chaudhry, 1990 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Rahman et Chaudhry, 1997 ; Berreksi et al., 2008) consiste à discrétiser les équations du mouvement d'abord en deux étapes, une première étape appelée séquence de **"Prédiction"**, et une deuxième étape, appelée séquence de **"Correction"**. Par la suite, et dans une troisième étape, appelée séquence de **"Solution"**, les valeurs des variables d'écoulement au niveau du pas de temps $(k+1)$ seront calculées, tout en sachant que leurs valeurs au pas de temps k sont connues.

L'étape de Prédiction utilise les valeurs des variables au pas de temps k , l'étape de Correction utilise les valeurs des variables calculées dans l'étape de Prédiction, et enfin, l'étape de Solution utilise les valeurs des variables obtenues dans l'étape de Correction et celles correspondant au pas de temps k .

Dans le but d'illustrer les étapes de calcul du schéma de MacCormack, reprenons les équations du mouvement données par le système (3.85) en coordonnées cartésiennes x et y , suivant :

$$U'_t + E_x + F'_y + S' = 0 \quad (4.1)$$

Le schéma de MacCormack appliqué au système ci-dessus, se compose de deux étapes :

a) Etape de Prédiction

$$\tilde{U}'_{i,j} = U'_{i,j}{}^k - \tau_x (E_{i,j}^k - E_{i-1,j}^k) - \tau_y (F'_{i,j}{}^k - F'_{i,j-1}{}^k) - \Delta t S'_{i,j}{}^k \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq N \\ 2 \leq j \leq M \end{cases} \quad (4.2)$$

b) Etape de Correction

$$\hat{U}'_{i,j} = \tilde{U}'_{i,j} - \tau_x (\tilde{E}_{i+1,j} - \tilde{E}_{i,j}) - \tau_y (\tilde{F}'_{i,j+1} - \tilde{F}'_{i,j}) - \Delta t \tilde{S}'_{i,j} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{cases} \quad (4.3)$$

c) Etape de Solution

La valeur de la variable U' au nouveau pas de temps (k+1) s'obtient comme suit :

$$U'_{i,j}{}^{k+1} = \frac{1}{2} (U'_{i,j}{}^k + \hat{U}'_{i,j}) \quad (4.4)$$

Avec, $\tau_x = \Delta t / \Delta x$ et $\tau_y = \Delta t / \Delta y$

Les indices «i» et «j» correspondent aux points du maillage suivant les directions x et y respectivement.

4.6.2. Application du schéma de MacCormack aux équations du mouvement

Reprenons les équations de base régissant l'écoulement étudié et écrites en coordonnées transformées ξ et η , données précédemment par le système (3.100).

$$U''_{1t} + E_{1\xi} + F'_{1\eta} + S''_1 = 0 \quad (4.5)$$

Avec, $U''_{1t} = (hb, hub, hvb)^t$

$$E_{1\xi} = \begin{bmatrix} uhb \\ b \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi \right) \\ uvhb \end{bmatrix}; F'_{1\eta} = \begin{bmatrix} vh - \eta h u \frac{\partial b}{\partial \xi} \\ u v h - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} \left(u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi \right) \\ v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_\xi - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} (uvh) \end{bmatrix}; S''_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g h b (S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ -g h b (S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$S_{f\xi} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (4.7)$$

$$S_{f\eta} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \left(\frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (4.8)$$

$$S_{0\xi} = \sin \alpha_\xi \quad (4.9)$$

$$S_{0\eta} = \sin \alpha_\eta \quad (4.10)$$

Afin de simplifier ce système, on opte pour l'introduction des changements de variables proposés par Garcia et Kahawita (1986) ci-après :

$$H = h b \quad (4.11)$$

$$U = h u b \quad (4.12)$$

$$V = h v b \quad (4.13)$$

$$F = \frac{U^2}{H} + \frac{g H^2}{2b} \cos \alpha_\xi \quad (4.14)$$

$$G = \frac{UV}{bH} - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} \left[\frac{U^2}{bH} + \frac{g H^2}{2b^2} \cos \alpha_\xi \right] \quad (4.15)$$

$$K = \frac{UV}{H} \quad (4.16)$$

$$S = \frac{V^2 - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} UV}{bH} + \frac{g H^2}{2b^2} \cos \alpha_\xi \quad (4.17)$$

$$W = \frac{V - \eta \frac{\partial b}{\partial \xi} U}{b} \quad (4.18)$$

$$S_{F\xi} = \frac{n^2 U b \sqrt{U^2 + V^2}}{H^3} \left(\frac{b^2 + H}{bH} \right)^{1/3} \quad (4.19)$$

$$S_{F\eta} = \frac{n^2 V b \sqrt{U^2 + V^2}}{H^3} \left(\frac{b^2 + H}{bH} \right)^{1/3} \quad (4.20)$$

Une formulation plus simplifiée du système d'équations est alors obtenue :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = g H (S_{0\xi} - S_{F\xi}) \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} = g H (S_{0\eta} - S_{F\eta}) \quad (4.23)$$

L'application des principales étapes du schéma aux différences finies explicite de MacCormack aux équations simplifiées ci-dessus, donne :

a) Séquence de Prédiction

$$\tilde{H}_{i,j} = H_{i,j}^k - \tau_\xi (U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k) - \tau_\eta (W_{i,j+1}^k - W_{i,j}^k) \quad (4.24)$$

$$\tilde{U}_{i,j} = U_{i,j}^k - \tau_\xi (F_{i+1,j}^k - F_{i,j}^k) - \tau_\eta (G_{i,j+1}^k - G_{i,j}^k) + g \Delta t H_{i,j}^k (S_{o\xi} - S_{F\xi i,j}^k) \quad (4.25)$$

$$\tilde{V}_{i,j} = V_{i,j}^k - \tau_\xi (K_{i+1,j}^k - K_{i,j}^k) - \tau_\eta (S_{i,j+1}^k - S_{i,j}^k) + g \Delta t H_{i,j}^k (S_{o\eta} - S_{F\eta i,j}^k) \quad (4.26)$$

b) Séquence de Correction

$$\hat{H}_{i,j} = \tilde{H}_{i,j} - \tau_\xi (\tilde{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i-1,j}) - \tau_\eta (\tilde{W}_{i,j} - \tilde{W}_{i,j-1}) \quad (4.27)$$

$$\hat{U}_{i,j} = \tilde{U}_{i,j} - \tau_\xi (\tilde{F}_{i,j} - \tilde{F}_{i-1,j}) - \tau_\eta (\tilde{G}_{i,j} - \tilde{G}_{i,j-1}) + g \Delta t \tilde{H}_{i,j} (S_{o\xi} - \tilde{S}_{F\xi i,j}) \quad (4.28)$$

$$\hat{V}_{i,j} = \tilde{V}_{i,j} - \tau_\xi (\tilde{K}_{i,j} - \tilde{K}_{i-1,j}) - \tau_\eta (\tilde{S}_{i,j} - \tilde{S}_{i,j-1}) + g \Delta t \tilde{H}_{i,j} (S_{o\eta} - \tilde{S}_{F\eta i,j}) \quad (4.29)$$

c) Séquence de solution

La solution au pas de temps (k+1) se calcule de la manière suivante :

$$H_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (H_{i,j}^k + \hat{H}_{i,j}) \quad (4.30)$$

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^k + \hat{U}_{i,j}) \quad (4.31)$$

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (V_{i,j}^k + \hat{V}_{i,j}) \quad (4.32)$$

4.7. Schéma implicite de Beam et Warming

Différents schémas implicites ont été développés par Beam et Warming (Beam et Warming, 1976 ; Fennema et Chaudhry, 1989 ; Younus et Chaudhry, 1994 ; Jha et al., 1996 ; Klonidis et Soulis, 2001 ; Ikni, 2002) pour la résolution numérique des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type hyperbolique. La première version du schéma de Beam et Warming a été proposée en 1976 (Beam et Warming, 1976), mais actuellement, il existe diverses formulations de ce schéma. D'une façon générale, les schémas implicites conduisent à un gain considérable dans le temps de calcul, spécialement dans les problèmes multidimensionnels.

4.7.1. Formulation générale du schéma de Beam et Warming

Afin d'utiliser la méthodologie assez fastidieuse du schéma de Beam et Warming, reprenons le même système d'équations du mouvement (4.1) donné en coordonnées cartésiennes x et y, comme suit :

$$U'_t + E_x + F'_y + S' = 0$$

Ce système peut être résolu par l'approximation ayant la forme générale suivante :

$$U^{k+1} = U^k + \Delta t \left[\frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial t} \right)^{k+1} + \frac{1-\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial t} \right)^k + \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial t} \right)^{k-1} \right] \quad (4.33)$$

Où, θ_1 et θ_2 sont des paramètres décrivant les variétés du schéma de Beam et Warming, k et $(k-1)$ sont les niveaux du temps connus et $k+1$ est le niveau du temps inconnu (Figure (4.1)).

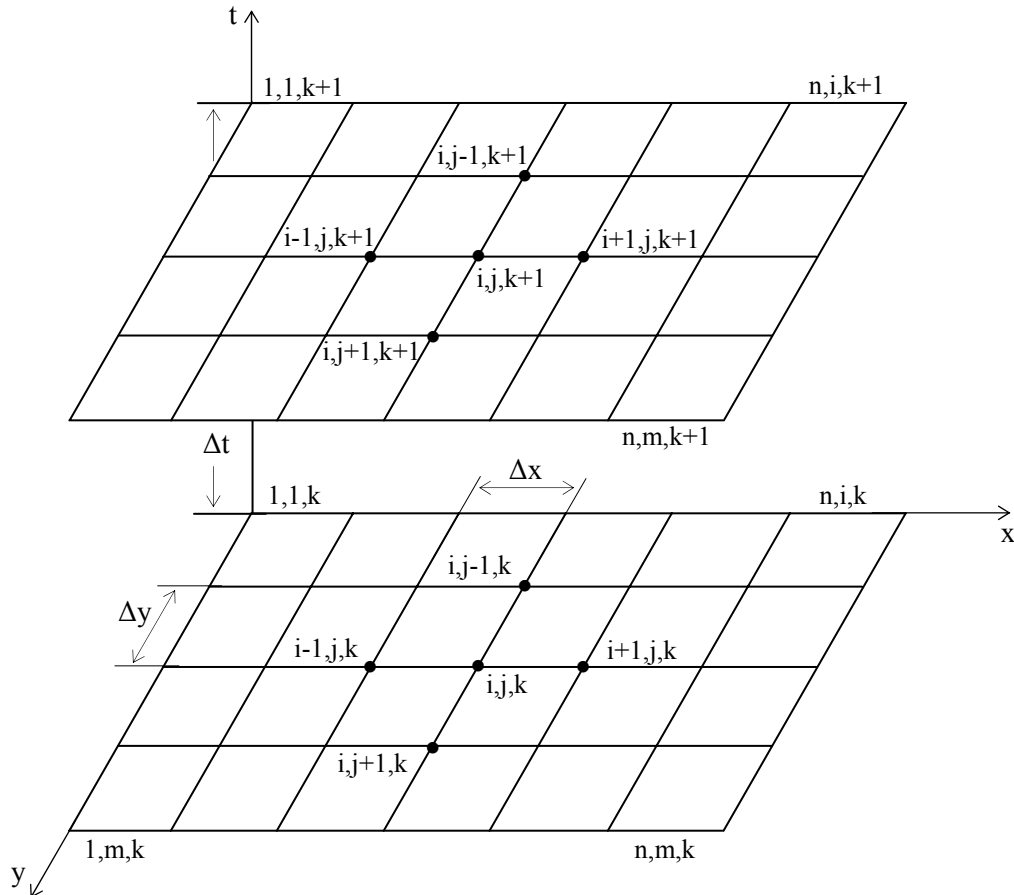


Figure (4.1) : Schéma du maillage aux différences finies

Richtmeyer et Morton (Fennema et Chaudhry, 1989 ; Younus et Chaudhry, 1994 ; Ikni, 2002) ont donné les principales formulations du schéma de Beam et Warming, regroupées dans le tableau (4.1) suivant :

Tableau (4.1) : Variétés du schéma de Beam et Warming

Schéma	θ_1	θ_2
Euler Implicite (Backward Euler)	1	0
Trois points Arrières Implicite (Three-Point Backward)	1	$\frac{1}{2}$
Formule Trapézoïdale (Crank Nicolson)	$\frac{1}{2}$	0
Euler Explicite	0	0
Leapfrog explicite	0	$-\frac{1}{2}$

A partir du système d'équations de base (4.1), on a :

$$\frac{\partial U'}{\partial t} = - \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right) \quad (4.34)$$

En remplaçant l'équation (4.34) dans l'équation (4.33), on aura :

$$U'^{k+1} = U'^k - \Delta t \left[\frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right)^{k+1} + \frac{1-\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right)^k \right] + \Delta t \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial t} \right)^{k-1} \quad (4.35)$$

La non linéarité des vecteurs flux, E^{k+1} , F'^{k+1} et S'^{k+1} présente quelques difficultés, car ils se trouvent au niveau du pas de temps inconnu (k+1). Cependant, ils sont tous fonctions de la variable d'écoulement U' pour laquelle des solutions doivent être obtenues. Ces vecteurs flux peuvent être linéarisés en utilisant un développement limité en série de Taylor.

Le développement du terme E^{k+1} donne :

$$E^{k+1} = E^k + \Delta t \frac{\partial E^k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 E^k}{\partial t^2} + \dots \quad (4.36)$$

Sachant par ailleurs que:

$$\frac{\partial E^k}{\partial t} = \left(\frac{\partial E^k}{\partial U'} \right) \left(\frac{\partial U'^k}{\partial t} \right) \quad (4.37)$$

$\frac{\partial E^k}{\partial U'}$ n'est autre que la matrice jacobienne de E, qu'on note A^k . D'où :

$$\frac{\partial E^k}{\partial t} = A^k \left(\frac{\partial U'^k}{\partial t} \right) \quad (4.38)$$

En retenant les deux premiers termes du développement en série de Taylor de E^{k+1} dans l'équation (4.36), c'est-à-dire un développement en série de Taylor d'ordre 1 ; en substituant aussi le terme $\frac{\partial E^k}{\partial t}$ par sa valeur et en écrivant que : $\frac{\partial U'}{\partial t} = \frac{U'^{k+1} - U'^k}{\Delta t}$, ceci nous donnera :

$$E^{k+1} = E^k + A^k (U'^{k+1} - U'^k) \quad (4.39)$$

De manière similaire, le développement des termes F'^{k+1} et S'^{k+1} donne :

$$F'^{k+1} = F'^k + B^k (U'^{k+1} - U'^k) \quad (4.40)$$

$$S'^{k+1} = S'^k + Q^k (U'^{k+1} - U'^k) \quad (4.41)$$

Dans lesquelles B et Q' sont les matrices jacobienes de F' et S' respectivement.

Remplaçons à présent les équations (4.39), (4.40) et (4.41) dans l'équation (4.35), et après réarrangement des termes ayant les mêmes niveaux de temps, un nouveau système d'équations qui contient le terme U' aux niveaux $(k+1)$ et k est alors obtenu :

$$\begin{aligned}
 U^{k+1} = U^k - \Delta t & \left[\frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k U^{k+1}) + \frac{\partial}{\partial y} (B^k U^{k+1}) + Q^k U^{k+1} \right) \right. \\
 & - \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k U^k) + \frac{\partial}{\partial y} (B^k U^k) + Q^k U^k \right) \\
 & \left. + \frac{1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right)^k \right] + \Delta t \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial t} \right)^{k-1}
 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Après transposition des variables au niveau du pas de temps $(k+1)$, un système linéaire de U^{k+1} est par la suite déterminé :

$$\begin{aligned}
 \left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k) + \frac{\partial}{\partial y} (B^k) + Q^k \right) \right] U^{k+1} = & \left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k) + \frac{\partial}{\partial y} (B^k) + Q^k \right) \right] U^k \\
 & - \Delta t \frac{1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right)^k + \Delta t \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial t} \right)^{k-1}
 \end{aligned} \quad (4.43)$$

La notation $\left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k) + \frac{\partial}{\partial y} (B^k) \right) U^{k+1}$ peut être interprétée comme :

$$\frac{\partial}{\partial x} (A^k U^{k+1}) + \frac{\partial}{\partial y} (B^k U^{k+1})$$

Notons que les termes à l'intérieur des crochets à gauche et à droite de l'équation (4.43) sont identiques.

L'application de la différence finie avant " $\Delta_t U' = U^{k+1} - U^k$ " et son remplacement dans l'équation (4.43), conduit à :

$$\begin{aligned}
 \left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k) + \frac{\partial}{\partial y} (B^k) + Q^k \right) \right] \Delta_t U^{k+1} = & - \Delta t \frac{1}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right)^k \\
 & + \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \Delta_t U^k
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Avec, Δ_t opérateur de différences finies avant.

Les termes à l'intérieur des crochets ont une bande de largeur " $2N$ " dans la matrice, à cause de l'addition de la composante B . Par exemple, si un maillage de quarante (40) points suivant la direction x est utilisé, une inversion d'une matrice à quatre-vingt (80) bandes est requise. Une solution efficace est obtenue par la factorisation du membre gauche de l'équation (4.44).

4.7.2. Factorisation du schéma

La factorisation consiste à décomposer le membre à gauche du signe égal de l'équation (4.44) en deux parties (Fennema et Chaudhry, 1989). La première partie est constituée des dérivées par rapport à x , alors que la seconde partie est constituée à son tour des dérivées par rapport à y . Donc, on peut dire que cette méthode a pour objectif de transformer un problème à deux dimensions en deux problèmes à une dimension chacun.

Par la méthode de factorisation approximée, le terme à gauche du schéma implicite ($\theta_1 \neq 0$) donné par l'équation (4.44), peut être réécrit comme un produit de deux composantes, chacune contient les termes d'une direction spécifique (x ou y), tel que :

$$\begin{aligned} \left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k) \right) \right] \left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (B) + Q' \right)^k \right] \Delta_t U^{k+1} = \\ - \Delta t \frac{1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right)^k + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta_t U^k \end{aligned} \quad (4.45)$$

Les équations sont ainsi factorisées en séries d'étapes de directions indépendantes, données par le système (4.46) ci-après :

$$\begin{aligned} \left[I + \Delta t \frac{\theta}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A^k) \right) \right] \Delta_t \hat{U}' = - \Delta t \frac{1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' \right)^k + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta_t U^k \\ \left[I + \Delta t \frac{\theta}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (B^k) + Q^k \right) \right] \Delta_t U^{k+1} = \Delta_t \hat{U}' \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$U^{k+1} = U^k + \Delta_t U^{k+1}$$

Où, $\Delta_t \hat{U}'$ est une valeur intermédiaire déterminée par la résolution de la première équation du système (4.46) suivant la direction x , et qui sera remplacée dans la seconde équation de ce système suivant la direction y , pour avoir finalement la solution au pas de temps $(k+1)$ à partir de la troisième équation du même système. Ceci représente la procédure implicite de directions alternées (Alternating-Direction-Implicit procedure : **ADI**).

Les matrices flux sont par la suite fractionnées en deux composantes contenant une partie positive et une partie négative ; il s'ensuit que :

$$A = A^+ + A^-$$

$$B = B^+ + B^-$$

$$E = E^+ + E^-$$

$$F' = F'^+ + F'^-$$

Avec,

$$E_x = A U'_x$$

$$F'_y = B U'_y$$

L'incorporation des transformations ci-dessus dans le système (4.46) donne le système :

$$\left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial x} (A^+ + A^-)^k \right] \Delta_t \hat{U}' = - \Delta t \frac{1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial E^+}{\partial x} + \frac{\partial E^-}{\partial x} + \frac{\partial F^{'+}}{\partial y} + \frac{\partial F'^-}{\partial y} + S' \right)^k + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta_t U'^k$$

$$\left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (B^+) + \frac{\partial}{\partial y} (B^-) + Q' \right)^k \right] \Delta_t U'^{k+1} = \Delta_t \hat{U}' \quad (4.47)$$

$$U'^{k+1} = U'^k + \Delta_t U'^{k+1}$$

Ayant aussi :

$$\frac{\partial E^+}{\partial x} = A^+ (U'^k_{i,j} - U'^k_{i-1,j}) = A^+ \nabla_x U'^k_{i,j}$$

$$\frac{\partial E^-}{\partial x} = A^- (U'^k_{i+1,j} - U'^k_{i,j}) = A^- \Delta_x U'^k_{i,j}$$

$$\frac{\partial F^{'+}}{\partial y} = B^+ (U'^k_{i,j} - U'^k_{i,j-1}) = B^+ \nabla_y U'^k_{i,j}$$

$$\frac{\partial F'^-}{\partial y} = B^- (U'^k_{i,j+1} - U'^k_{i,j}) = B^- \Delta_y U'^k_{i,j}$$

Dans ces expressions, Δ et ∇ sont respectivement des opérateurs de différences finies avant et arrière.

En remplaçant ces expressions dans le système (4.47), on obtiendra :

▪ **Suivant x :**

$$\left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} (\nabla_x A^+_{i,j} + \Delta_x A^-_{i,j})^k \right] \Delta_t \hat{U}'_{i,j} = - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{1 + \theta_2} (A^+_{i,j} \nabla_x U'_{i,j} + A^-_{i,j} \Delta_x U'_{i,j})^k$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta y} \frac{1}{1 + \theta_2} (B^+_{i,j} \nabla_y U'_{i,j} + B^-_{i,j} \Delta_y U'_{i,j})^k \quad (4.48)$$

$$- \Delta t \frac{1}{1 + \theta_2} S'^k + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta_t U'^k_{i,j}$$

▪ **Suivant y :**

$$\left[\mathbf{I} + \Delta t \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \left(\frac{1}{\Delta y} (\nabla_y \mathbf{B}_{i,j}^+ + \Delta_y \mathbf{B}_{i,j}^-) + \mathbf{Q}'_{i,j} \right)^k \right] \Delta_t \mathbf{U}'_{i,j}{}^{k+1} = \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{i,j} \quad (4.49)$$

Et,

$$\mathbf{U}'_{i,j}{}^{k+1} = \mathbf{U}'_{i,j}{}^k + \Delta_t \mathbf{U}'_{i,j}{}^{k+1} \quad (4.50)$$

L'équation (4.48) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{a}'_{i,j}{}^k \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{i-1,j} + \mathbf{b}'_{i,j}{}^k \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{i,j} + \mathbf{c}'_{i,j}{}^k \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{i+1,j} = \text{RHS}_{i,j}$$

Où, RHS représente le coté droit (Right Hand Side) de l'équation (4.48).

Ou bien, plus clairement sous la forme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}'_{1,j} & \mathbf{c}'_{1,j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{a}'_{2,j} & \mathbf{b}'_{2,j} & \mathbf{c}'_{2,j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}'_{3,j} & \mathbf{b}'_{3,j} & \mathbf{c}'_{3,j} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{a}'_{n-1,j} & \mathbf{b}'_{n-1,j} & \mathbf{c}'_{n-1,j} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{a}'_{n,j} & \mathbf{b}'_{n,j} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{1,j} \\ \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{n-1,j} \\ \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{RHS}_{1,j} \\ \text{RHS}_{1,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{RHS}_{n-1,j} \\ \text{RHS}_{n,j} \end{bmatrix}^k \quad (4.51)$$

Avec, $\mathbf{a}'_{i,j}$, $\mathbf{b}'_{i,j}$ et $\mathbf{c}'_{i,j}$ sont des matrices de dimensions (3x3) dont les coefficients sont comptés à partir de $i-1$, i et $i+1$, $\Delta_t \hat{\mathbf{U}}'$ est le vecteur de variables d'écoulement h , hu et hv , et RHS est le vecteur à trois éléments contenant les termes du coté droit de l'équation (4.48).

Afin d'obtenir une solution efficace du système (4.51), il faut utiliser une résolution tridiagonale par blocs. De ce fait, le système d'équations en question sera résolu moyennant l'algorithme de Thomas (Lepourhiet, 1980 ; Gourdin et Boumahrat, 1991). Celui-ci consiste à triangulariser les matrices tridiagonales par blocs (la matrice tridiagonale par blocs devient alors bidiagonale). Après l'utilisation de cet algorithme, on passe alors du système (4.51) au système (4.52) suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \gamma'_{1,j} & & & & & \\ & \mathbf{I} & \gamma'_{2,j} & & & & \\ & & \mathbf{I} & \gamma'_{3,j} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{I} & \gamma'_{n-1,j} & \\ & & & & & \mathbf{I} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{1,j} \\ \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{n-1,j} \\ \Delta_t \hat{\mathbf{U}}'_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta'_{1,j} \\ \beta'_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta'_{n-1,j} \\ \beta'_{n,j} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \gamma'_{i,1} &= [s_{i,1}]^{-1} t'_{i,1} && \text{pour } j=1 \\ \beta'_{i,1} &= [s_{i,1}]^{-1} \Delta_t \hat{U}'_{i,1} && \text{pour } j=1 \\ \gamma'_{i,j} &= [s_{i,j} - r'_{i,j} \gamma'_{i,j-1}]^{-1} t'_{i,j} && \text{pour } j=2, n-1 \\ \beta'_{i,j} &= [s_{i,j} - r'_{i,j} \gamma'_{i,j-1}]^{-1} [\Delta_t \hat{U}'_{i,j} - r'_{i,j} \beta'_{i,j-1}] && \text{pour } j=2, n-1 \\ \Delta_t U_{i,n}^{k+1} &= \beta'_{i,n} && \text{pour } j=n \\ \Delta_t U_{i,j}^{k+1} &= \beta'_{i,j} - \gamma'_{i,j} \Delta_t U_{i,j}^{k+1} && \text{pour } j=n-1, 1, -1 \end{aligned}$$

Où, les $\gamma'_{i,j}$ sont des matrices d'ordre (3x3), les $\beta'_{i,j}$ sont des vecteurs à trois composantes, $[s_{i,j}]^{-1}$ est l'inverse de la matrice s , et les $I_{i,j}$ sont des matrices identités.

Les variables d'écoulement $U_{i,j}^{k+1}$ sont alors calculées en additionnant $\Delta_t U_{i,j}^{k+1}$ à $U_{i,j}^k$ (équation (4.50)) correspondant au dernier pas de temps. Donc, une fois qu'on détermine $\Delta_t U_{i,j}^{k+1}$, les variables d'écoulement $h_{i,j}$, $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont finalement obtenues pour le pas de temps (k+1) en résolvant les équations suivantes :

$$h_{i,j}^{k+1} = h_{i,j}^k + \Delta_t h_{i,j}^{k+1} \quad (4.56)$$

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta_t u_{i,j}^{k+1} \quad (4.57)$$

$$v_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^k + \Delta_t v_{i,j}^{k+1} \quad (4.58)$$

4.7.3. Application du schéma de Beam et Warming aux équations du mouvement

Le système d'équations en coordonnées transformées (3.100), qui gouverne les écoulements supercritiques bidimensionnels en régime non permanent dans des canaux à géométries variables, peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$U_t'' + E_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} \frac{\partial b(\xi)}{\partial \xi} E_\eta + \frac{1}{b(\xi)} F_\eta' + S'' = 0 \quad (4.59)$$

Avec, $U_t'' = (h, hu, hv)^t$

$$E_\xi = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \\ huv \end{bmatrix}; \quad E_\eta = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \\ huv \end{bmatrix}; \quad F_\eta' = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + g \frac{h^2}{2} \end{bmatrix}; \quad S'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{o\xi} - S_{f\xi}) \\ -gh(S_{o\eta} - S_{f\eta}) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Le terme U_t'' tiré de l'équation (4.59), sera remplacé dans l'équation (4.35), ce qui produira :

$$U^{k+1} = U^k - \Delta t \left[\frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left[\frac{\partial E}{\partial \xi} - \eta \frac{b'(\xi)}{b(\xi)} \frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial F'}{\partial \eta} + S'' \right]^{k+1} + \frac{1-\theta_1}{1+\theta_2} \left[\frac{\partial E}{\partial \xi} - \eta \frac{b'(\xi)}{b(\xi)} \frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial F'}{\partial \eta} + S'' \right]^k \right] + \Delta t \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \left(\frac{\partial U''}{\partial t} \right)^{k-1} \quad (4.61)$$

L'application de toutes les étapes très fastidieuses du schéma de Beam et Warming au système (4.61), permet d'avoir :

▪ **Suivant la direction ξ :**

$$\left[I + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{\theta_1}{1+\theta_2} (\nabla_\xi A_{i,j}^+ + \Delta_\xi A_{i,j}^-)^k \right] \Delta_t \hat{U}_{i,j}'' = - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{1}{1+\theta_2} (A_{i,j}^+ \nabla_\xi U_{i,j}'' + A_{i,j}^- \Delta_\xi U_{i,j}'')^k + \frac{\eta}{b(\xi)} \frac{\partial b(\xi)}{\partial \xi} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{1}{1+\theta_2} (A_{i,j}^+ \nabla_\eta U_{i,j}'' + A_{i,j}^- \Delta_\eta U_{i,j}'')^k - \frac{1}{b(\xi)} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{1}{1+\theta_2} (B_{i,j}^+ \nabla_\eta U_{i,j}'' + B_{i,j}^- \Delta_\eta U_{i,j}'')^k - \Delta t \frac{1}{1+\theta_2} S_{i,j}''^k + \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \Delta_t U_{i,j}''^k \quad (4.62)$$

▪ **Suivant la direction η :**

$$\left[I + \Delta t \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \left(-\frac{1}{\Delta \eta} \frac{\eta}{b(\xi)} \frac{\partial b(\xi)}{\partial \xi} (\nabla_\eta A_{i,j}^+ + \Delta_\eta A_{i,j}^-) + \frac{1}{\Delta \eta} \frac{1}{b(\xi)} (\nabla_\eta B_{i,j}^+ + \Delta_\eta B_{i,j}^-) + Q \right) \right]^k \Delta_t U_{i,j}''^{k+1} = \Delta_t \hat{U}_{i,j}'' \quad (4.63)$$

Et,

$$U_{i,j}''^{k+1} = U_{i,j}''^k + \Delta_t U_{i,j}''^{k+1} \quad (4.64)$$

Le système (4.64) s'écrit sous la forme développée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} (\nabla_{\xi} \mathbf{A}_{i,j}^+ + \Delta_{\xi} \mathbf{A}_{i,j}^-)^k \right] \Delta_t \hat{\mathbf{U}}_{i,j} = - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{1}{1 + \theta_2} [\mathbf{A}_{i,j}^+] \begin{bmatrix} (\mathbf{h})_{i,j}^k - (\mathbf{h})_{i-1,j}^k \\ (\mathbf{u})_{i,j}^k - (\mathbf{u})_{i-1,j}^k \\ (\mathbf{v})_{i,j}^k - (\mathbf{v})_{i-1,j}^k \end{bmatrix} \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{1}{1 + \theta_2} [\mathbf{A}_{i,j}^-] \begin{bmatrix} (\mathbf{h})_{i+1,j}^k - (\mathbf{h})_{i,j}^k \\ (\mathbf{u})_{i+1,j}^k - (\mathbf{u})_{i,j}^k \\ (\mathbf{v})_{i+1,j}^k - (\mathbf{v})_{i,j}^k \end{bmatrix} + \eta \frac{b'(\xi)}{b(\xi)} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{1}{1 + \theta_2} [\mathbf{A}_{i,j}^+] \begin{bmatrix} (\mathbf{h})_{i,j}^k - (\mathbf{h})_{i,j-1}^k \\ (\mathbf{u})_{i,j}^k - (\mathbf{u})_{i,j-1}^k \\ (\mathbf{v})_{i,j}^k - (\mathbf{v})_{i,j-1}^k \end{bmatrix} \\
 & + \eta \frac{b'(\xi)}{b(\xi)} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{1}{1 + \theta_2} [\mathbf{A}_{i,j}^-] \begin{bmatrix} (\mathbf{h})_{i,j+1}^k - (\mathbf{h})_{i,j}^k \\ (\mathbf{u})_{i,j+1}^k - (\mathbf{u})_{i,j}^k \\ (\mathbf{v})_{i,j+1}^k - (\mathbf{v})_{i,j}^k \end{bmatrix} - \frac{1}{b(\xi)} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{1}{1 + \theta_2} [\mathbf{B}_{i,j}^+] \begin{bmatrix} (\mathbf{h})_{i,j}^k - (\mathbf{h})_{i,j-1}^k \\ (\mathbf{u})_{i,j}^k - (\mathbf{u})_{i,j-1}^k \\ (\mathbf{v})_{i,j}^k - (\mathbf{v})_{i,j-1}^k \end{bmatrix} \\
 & - \frac{1}{b(\xi)} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{1}{1 + \theta_2} [\mathbf{B}_{i,j}^-] \begin{bmatrix} (\mathbf{h})_{i,j+1}^k - (\mathbf{h})_{i,j}^k \\ (\mathbf{u})_{i,j+1}^k - (\mathbf{u})_{i,j}^k \\ (\mathbf{v})_{i,j+1}^k - (\mathbf{v})_{i,j}^k \end{bmatrix} + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \begin{bmatrix} (\mathbf{h})_{i,j}^k - (\mathbf{h})_{i,j}^{k-1} \\ (\mathbf{u})_{i,j}^k - (\mathbf{u})_{i,j}^{k-1} \\ (\mathbf{v})_{i,j}^k - (\mathbf{v})_{i,j}^{k-1} \end{bmatrix} - \Delta t \frac{1}{1 + \theta_2} \mathbf{S}_{i,j}^{nk}
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

4.8. Stabilité des schémas aux différences finies

La stabilité d'une méthode, d'un schéma ou d'un algorithme, est une notion très importante, liée à la fois à la méthode et à l'équation différentielle à résoudre. En utilisant des schémas numériques, les erreurs sont petites à chaque opération effectuée, mais pour un grand nombre d'opérations, on aura un cumul d'erreurs qui entraînera une instabilité des schémas (Warming et Hyett, 1974 ; Hoffman, 1989 ; Zhao et al., 1996 ; Roberson et al., 1998 ; Nougier, 2001 ; Yu et Liu, 2001 ; Valiani et Caleffi, 2005). En d'autres termes, un schéma est stable si l'erreur commise n'est pas amplifiée d'un pas à l'autre. Le théorème de Lax (Dautray et Lions, 1988 ; Boisson et al., 1990 ; Nalluri et Featherstone, 2001) énonce que pour une large classe d'équations (dont les linéaires), la consistance et la stabilité constituent une condition nécessaire et suffisante de convergence ; d'où l'intérêt des deux notions.

Les schémas aux différences finies explicites exigent toujours une condition de stabilité. Pour cela, on utilisera la condition de stabilité de "*Courant-Friedrichs-Lewy*" (**C.F.L.**). Cette dernière est exprimée dans le cas des écoulements bidimensionnels (Fennema et Chaudhry, 1986 ; Garcia et Kahawita, 1986 ; Nujic, 1995 ; Rahman et Chaudhry, 1997) en coordonnées cartésiennes x et y , par :

$$C_n = \frac{(V + \sqrt{gh}) \Delta t}{\Delta x \Delta y} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{4.66}$$

Où, V et C_n sont dans l'ordre, la vitesse résultante au point du maillage et le nombre de Courant.

Dans le cas des équations du mouvement écrites en coordonnées transformées ξ et η , cette condition s'exprime (Bhallamudi et Chaudhry, 1992 ; Berreksi, 1998 ; Berreksi et al., 2008) par conséquent, comme suit :

$$C_n = \frac{(V + \sqrt{gh}) \Delta t}{b(\xi) \Delta \xi \Delta \eta} \sqrt{\Delta \xi^2 + [b(\xi) \Delta \eta]^2} \quad (4.67)$$

La valeur du nombre de Courant est fonction du type de schéma aux différences finies utilisé. Pour le schéma explicite de MacCormack, elle doit être choisie (Fennema et Chaudhry, 1986 ; Fennema et Chaudhry, 1990) en respectant la condition suivante : $C_n \leq 1$.

Par ailleurs, et bien que la plupart des schémas aux différences finies implicites ne nécessitent pas de condition de stabilité, certains auteurs (Skeels et Samuels, 1989 ; Ikni, 2002 ; Ikni et al., 2004) proposent d'utiliser quand même la condition de "*Courant-Friedrichs-Lewy*", car pour eux, c'est une manière effective de choisir un pas de temps approprié.

Le calcul du pas de temps Δt , se fait, dans le cas des équations en coordonnées cartésiennes x et y , par les relations suivantes :

$$\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2) \quad (4.68)$$

Avec,

$$\Delta t_1 = C_n \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta x}{|u| + c} \right) \quad (4.69)$$

Et,

$$\Delta t_2 = C_n \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta y}{|v| + c} \right) \quad (4.70)$$

Dans les relations qui ont précédées, u , v et c représentent dans l'ordre, la vitesse longitudinale, la vitesse transversale et la célérité de l'onde ($c = \sqrt{gh}$).

Si à présent, les équations de base sont écrites en coordonnées transformées ξ et η , le pas de temps se détermine en utilisant les expressions ci-après :

$$\Delta t_1 = C_n \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta \xi}{|u| + c} \right) \quad (4.71)$$

Et,

$$\Delta t_2 = C_n \left(\frac{1}{2} \frac{b(\xi) \Delta \eta}{|v| + c} \right) \quad (4.72)$$

CHAPITRE 5

ETUDE NUMERIQUE DE CAS

5.1. Introduction

Dans ce chapitre très important, les deux modèles numériques élaborés avec le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming seront testés, dans le but de voir leur aptitude à simuler les écoulements bidimensionnels non permanents en régime torrentiel à travers des transitions à surface libre.

L'objectif principal dans notre cas, est de déterminer les profils de la ligne d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi latérale solide de quelques transitions et de comparer par la suite, les résultats numériques obtenus avec des résultats expérimentaux et numériques retrouvés dans la littérature spécialisée dans ce domaine de recherche, qui sont rares d'ailleurs.

On peut dire que dans les études hydrauliques en particulier, la modélisation par les équations aux dérivées partielles, suivie d'une étude théorique, puis d'une analyse numérique, suivie à son tour d'une confrontation à l'expérience, est devenue une démarche de base.

On traitera dans cette partie trois types de transitions, en l'occurrence, une contraction rectiligne symétrique, l'élargissement symétrique de Rouse et un élargissement rectiligne symétrique.

Ce chapitre est scindé en quatre principales parties. Dans la première, on abordera le calcul des écoulements torrentiels à travers les trois transitions ci-dessus par le schéma explicite de MacCormack. La deuxième sera consacrée à la même analyse mais en utilisant le schéma implicite de Beam et Warming. Tandis que dans la troisième partie, une étude comparative entre le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming sera faite, afin d'analyser la qualité des résultats obtenus par les deux schémas, et d'en tirer les conclusions qui permettront de choisir le schéma qui donnera des résultats satisfaisants dans l'ensemble. Par la suite, on passera à une étude très approfondie, dans laquelle, on déterminera essentiellement d'une part, les réseaux d'écoulement et les champs des vitesses dans les transitions en question et d'autre part, la généralisation de la présente étude aux cas des transitions hydrauliques avec des pentes de fond variables, où on analysera l'influence de l'augmentation de la pente du fond sur l'allure de la surface libre dans une contraction et dans un élargissement. Finalement, une étude paramétrique sera menée dans la quatrième partie, dans laquelle on analysera l'influence de la variation de quelques paramètres hydrauliques et numériques sur l'allure de la ligne d'eau dans un rétrécissement rectiligne symétrique et l'élargissement symétrique de Rouse.

5.2. Première partie : Schéma explicite de MacCormack

Dans cette partie, le modèle numérique formé par le schéma explicite de MacCormack sera mis à l'épreuve dans des études de simulations numériques des écoulements dans des canaux non prismatiques.

5.2.1. Etude d'une contraction rectiligne symétrique

L'objectif de cette application consiste en l'étude de l'écoulement torrentiel dans une contraction rectiligne symétrique illustrée par la figure (5.1) ci-dessous. Ce cas a été traité expérimentalement par Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) et numériquement par Bhallamudi et Chaudhry (1992).

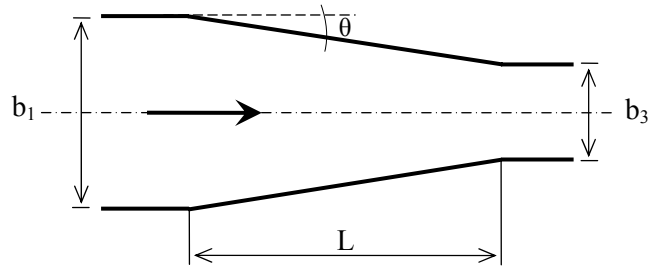


Figure (5.1) : Contraction rectiligne symétrique

Les dimensions de cette transition (Bhallamudi et Chaudhry, 1992) sont :

- une longueur : $L = 1.45$ m ;
- une largeur à l'amont : $b_1 = 0.610$ m ;
- une largeur à l'aval : $b_2 = 0.305$ m ;
- un angle de déviation de la paroi de l'ordre de 6° (plus exactement 6.0038°).

Les conditions aux limites de l'écoulement (Bhallamudi et Chaudhry, 1992) sont :

- un nombre de Froude amont : $F_1 = 4$;
- une profondeur d'écoulement à l'amont : $h_0 = 0.0305$ m ;
- une vitesse d'écoulement longitudinale à l'amont : $u_0 = 2.188$ m/s ;
- une vitesse d'écoulement transversale à l'aval : $v_0 = 0$ m/s.

En outre, les données suivantes sont également considérées dans les calculs (Bhallamudi et Chaudhry, 1992) :

- le maillage utilisé est tel que : $\Delta\xi = 0.0483$ et $\Delta\eta = 0.0476$;
- le nombre de Courant est : $C_n = 0.8$;
- le canal est horizontal ;
- le nombre de Manning est pris égal à zéro.

Les profils des lignes d'eau le long de l'axe et de la paroi obtenus par le modèle numérique utilisant le schéma explicite de MacCormack, sont donnés respectivement par les figures (5.2) et (5.3) ci-après. Celles-ci contiennent, en plus de nos résultats, les résultats expérimentaux obtenus par Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) et ceux numériques calculés par Bhallamudi et Chaudhry (1992).

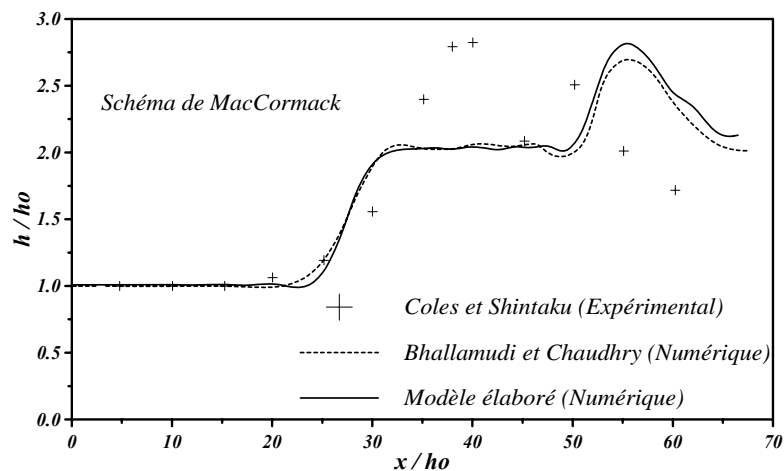


Figure (5.2) : Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans une contraction rectiligne symétrique

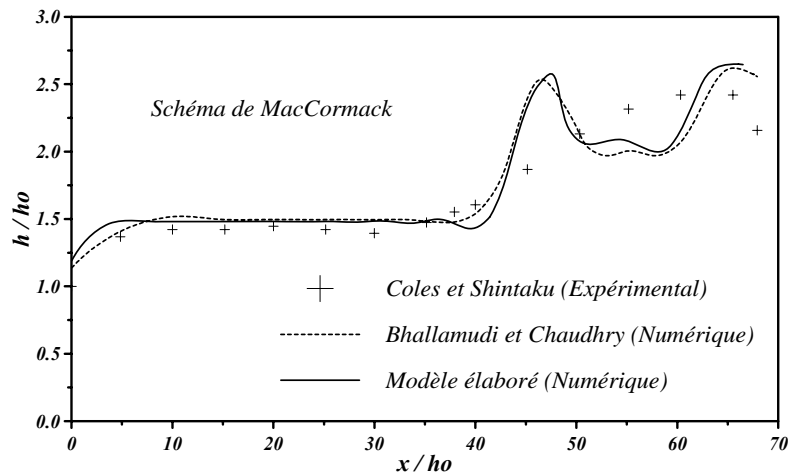


Figure (5.3) : Ligne d'eau le long de la paroi latérale solide dans une contraction rectiligne symétrique

A partir de ces figures, on peut constater essentiellement que :

a) Le long de l'axe de symétrie

- Deux surélévations distinctes sont présentes dans la ligne d'eau au niveau de l'axe de symétrie. Une à l'intérieur de la contraction et une deuxième plus considérable, à l'intérieur du canal aval rectangulaire. Elle prend naissance juste à la fin du rétrécissement et au début du canal aval. Signalons que la fin de la contraction correspond au point d'abscisse 47.75 sur l'axe x/h_0 , donnant ainsi une longueur de 1.45m.
- Les résultats obtenus concordent bien avec les résultats numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992) en utilisant le même schéma numérique.
- Comparés aux mesures expérimentales, les résultats obtenus sont relativement moins bons, où on constate qu'il y a un décalage du pic numérique par rapport au pic expérimental de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992). Cependant, la hauteur maximale de ce pic est identique avec celle mesurée ; ce qui n'est pas le cas de la valeur calculée par Bhallamudi et Chaudhry (1992), qui est légèrement inférieure.

b) Le long de la paroi latérale

- On constate également ici deux surélévations importantes, la première se manifeste presque à la fin de la contraction entre les points $x/h_0 = 40$ et $x/h_0 = 47.5$, correspondant aux longueurs 1.22 m et 1.45 m, et la deuxième loin dans le canal aval rectangulaire.
- Les résultats obtenus montrent un accord satisfaisant avec les résultats numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992), moyennant le même schéma de calcul.
- En comparant les résultats par rapport aux mesures expérimentales, on remarque qu'ils sont assez bons dans l'ensemble. La hauteur maximale calculée ici est supérieure au maximum des valeurs expérimentales obtenues par Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992).

Ce qu'on peut dire après avoir analysé ces deux figures ((5.2) et (5.3)), est que les résultats calculés par le modèle basé sur le schéma explicite de MacCormack sont acceptables au niveau de la paroi latérale solide et relativement moins acceptables le long de l'axe de symétrie.

5.2.2. Etude de l'élargissement de Rouse

A présent, on étudiera le cas de l'élargissement de Rouse en écoulement torrentiel, et qui est appelé habituellement "Elargissement progressif". La forme de cette structure (Figure (5.4)) obéit à la relation suivante :

$$b(x) = \frac{b_1}{2} \left[\left(\frac{x}{b_1 F_1} \right)^{1.5} + 1 \right] \quad (5.1)$$

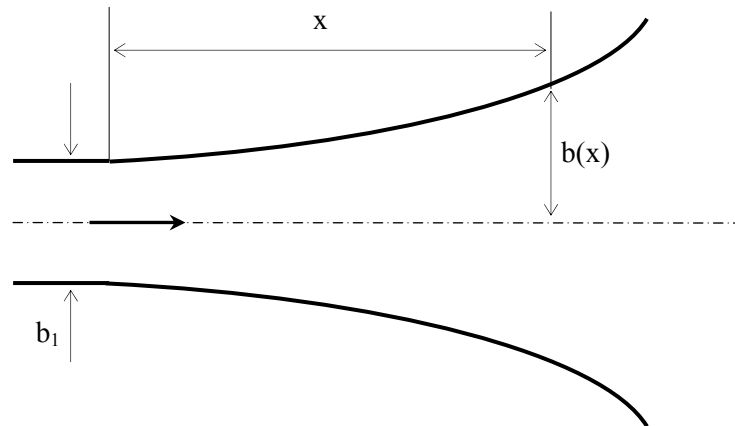


Figure (5.4) : Elargissement de Rouse

On rappelle que ce cas a été également traité numériquement par Bhallamudi et Chaudhry (1992) et expérimentalement par Coles et Shintaku (Bhallamudi et Chaudhry, 1992).

Les dimensions de cette expansion sont :

- une longueur de 0.549 m ;
- un rapport "profondeur-largeur" : $h_0/b_1 = 0.25$, correspondant à une largeur $b_1 = 0.122$ m.

Les conditions aux limites de l'écoulement dans cette transition sont :

- un nombre de Froude incident : $F_1 = 2$;
- une hauteur d'eau à l'amont : $h_0 = 0.0305$;
- une vitesse amont longitudinale : $u_0 = 1.094$ m/s ;
- une vitesse amont transversale : $v_0 = 0$ m/s.

Les données ci-après sont aussi considérées dans les calculs :

- le canal est horizontal ;
- le coefficient de rugosité de Manning est : $n = 0.012$;
- le maillage utilisé est : $\Delta\xi = 0.0305$ et $\Delta\eta = 0.0476$;
- le nombre de Courant est : $C_n = 0.8$.

On tient à signaler que toutes les données de base de la présente application sont les mêmes que celles prises par Bhallamudi et Chaudhry (1992), sauf la valeur du nombre de Courant (Condition de stabilité) qu'on a pris égale à 0.8, alors que Bhallamudi et Chaudhry (1992) avaient pris une valeur de 0.9.

Les profils des lignes d'eau au niveau de l'axe médian et de la paroi sont traduits graphiquement sur les figures (5.5) et (5.6) ci-dessous :

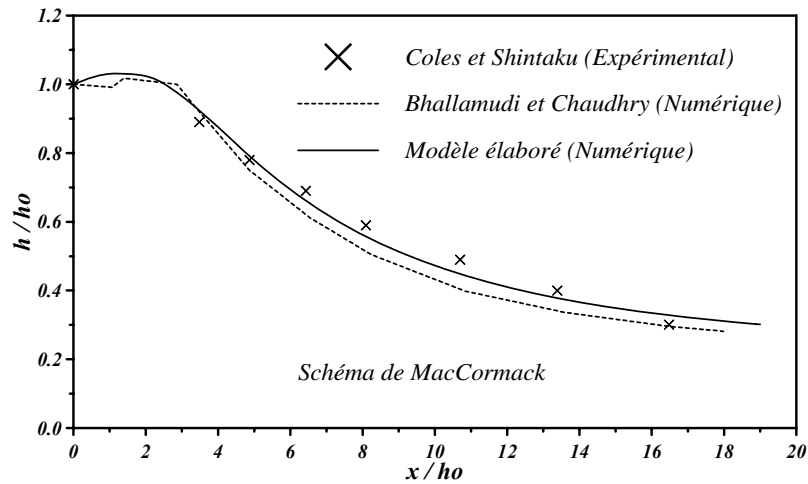


Figure (5.5) : Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans l'élargissement symétrique de Rouse

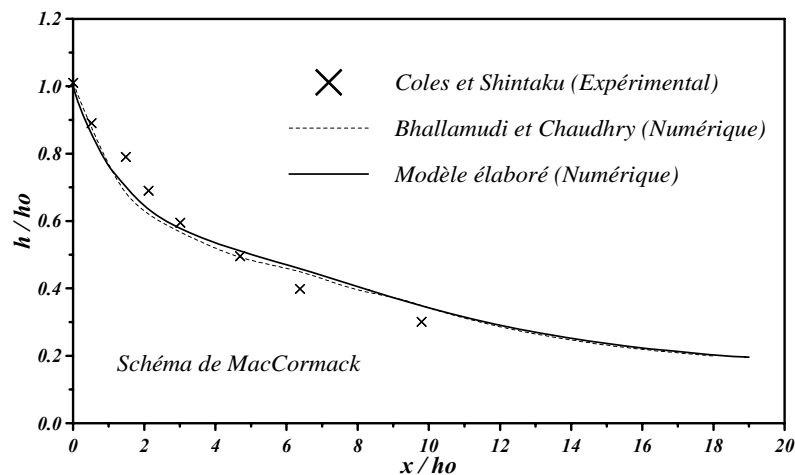


Figure (5.6) : Ligne d'eau le long de la paroi dans l'élargissement symétrique de Rouse

Au regard des figures (5.5) et (5.6), les principales remarques suivantes peuvent être indiquées :

a) Le long de l'axe médian

- La ligne d'eau diminue en fonction de la distance. Cette diminution se fait d'une manière progressive au début de l'élargissement.
- Aucune perturbation de l'écoulement n'est observée dans cette structure hydraulique.
- Une bonne concordance existe entre les résultats calculés par le modèle proposé et ceux obtenus numériquement par Bhallamudi et Chaudhry (1992), en employant le même schéma explicite.
- Les résultats obtenus dans cette analyse présentent aussi un accord très satisfaisant avec les mesures expérimentales faites par Coles et Shintaku (Bhallamudi et Chaudhry, 1992).

b) Le long de la paroi latérale

- Le profil de la surface libre diminue également en fonction de la distance, sauf que, cette diminution est plus rapide que celle observée dans l'axe de symétrie.
- On n'observe aucune agitation dans la surface d'écoulement.
- La ligne d'eau calculée est presque identique à celle déterminée numériquement aussi par Bhallamudi et Chaudhry (1992) avec le même schéma aux différences finies explicite.
- Par rapport aux mesures expérimentales effectuées par Coles et Shintaku (Bhallamudi et Chaudhry, 1992), le profil évalué avec le schéma de MacCormack offre une approche satisfaisante.

Ainsi, la qualité des résultats obtenus dans cette seconde application est très notable.

5.2.3. Etude d'un élargissement rectiligne symétrique

L'analyse d'un écoulement torrentiel à travers un élargissement rectiligne symétrique à section transversale rectangulaire, est le but de cette troisième application (Figure (5.7)). Ce cas fut étudié théoriquement et expérimentalement par Bagge et Herbich (1967) et Herbich et Walsh (1972) respectivement.

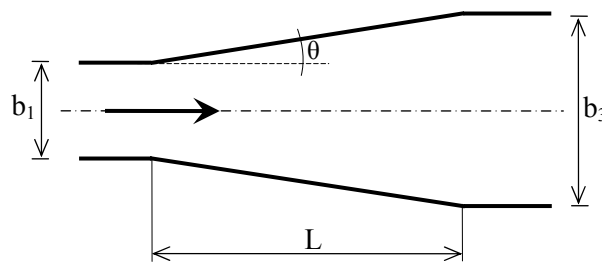


Figure (5.7) : Elargissement rectiligne symétrique

Les dimensions de cet élargissement sont :

- la longueur de la transition est : $L = 1.52$ m ;
- la largeur amont est : $b_1 = 0.305$ m ;
- la largeur de la transition à l'aval est : $b_3 = 0.610$ m ;
- l'angle de déviation de la paroi est : $\theta = 5.73^\circ$.

Les conditions aux limites de l'écoulement considéré sont :

- le nombre de Froude amont est : $F_1 = 4.15$;
- le tirant d'eau amont est : $h_0 = 0.012$ m ;
- la vitesse longitudinale à l'amont est : $u_0 = 1.402$ m/s ;
- la vitesse transversale à l'amont est : $v_0 = 0$ m/s.

Les autres données du problème sont :

- les pentes de frottements sont supposées nulles ;
- le fond est très faiblement incliné avec une pente d'environ 0.745° ;
- le maillage choisi est : $\Delta\xi = 0.0435$ et $\Delta\eta = 0.050$;
- le nombre de Courant est : $C_n = 0.5$.

Les figures (5.8) et (5.9) illustrent les profils de la surface d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi de l'expansion rectiligne.

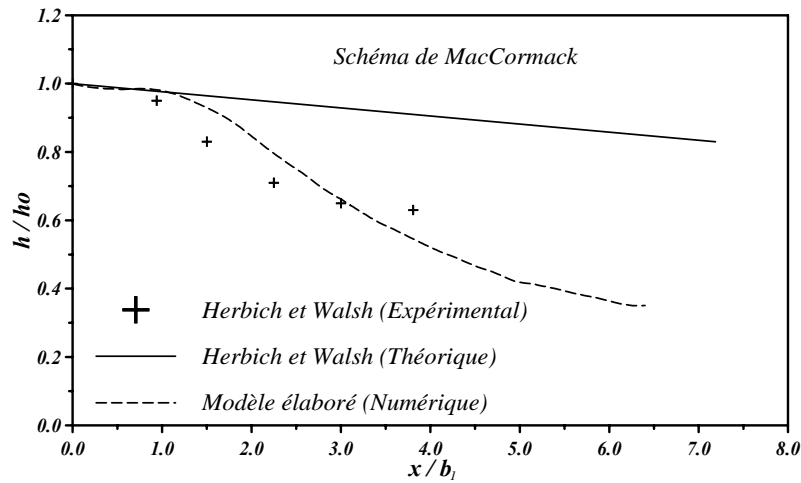


Figure (5.8) : Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans un élargissement rectiligne symétrique

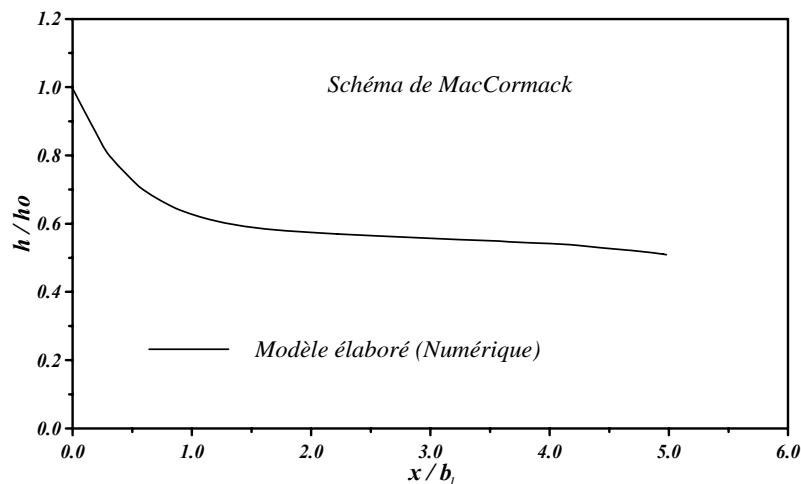


Figure (5.9) : Ligne d'eau le long de la paroi latérale dans un élargissement rectiligne symétrique

On constate dès lors que :

a) *Au niveau de l'axe de symétrie*

- La ligne d'eau présente un faible rabaissement au début de l'élargissement et qui devient de plus en plus important en fonction de la distance.
- Les résultats obtenus se rapprochent quelque peu des mesures expérimentales faites par Herbich et Walsh (1972).
- Le profil calculé dans ce cas, est confondu au début de la transition avec les valeurs théoriques déterminées par Herbich et Walsh (1972), puis une diminution importante est observée en fonction de la distance. C'est d'ailleurs la même chose pour les valeurs expérimentales de Herbich et Walsh (1972) comparées avec les valeurs théoriques des dits auteurs.
- Aucune perturbation dans la surface de l'eau n'est enregistrée dans cette transition.

b) Au niveau de la paroi

- Une diminution assez considérable de la surface d'eau survient à l'entrée de l'élargissement rectiligne et qui continue le long de la longueur de la transition ; ce qui est d'ailleurs attendu pour ce type de transition.
- Pas de perturbations ni d'instabilités dans la surface d'eau.
- Vu l'absence de données expérimentales ou numériques, aucune comparaison ne peut alors être faite.

De ce fait, on constate que les résultats calculés dans cette structure sont plus ou moins acceptables, car ils ne s'éloignent pas vraiment des valeurs expérimentales surtout.

5.3. Deuxième partie : Schéma implicite de Beam et Warming

Cette seconde partie est destinée essentiellement à l'analyse du deuxième modèle numérique conçu au moyen du schéma aux différences finies implicite de Beam et Warming, afin de voir son aptitude à calculer les écoulements bidimensionnels torrentiels à travers des transitions à surface libre. Ce modèle sera testé dans le cas de la contraction rectiligne symétrique (Figure (5.1)), de l'élargissement symétrique de Rouse (Figure (5.4)) et de l'élargissement rectiligne symétrique (Figure (5.7)), traités dans la première partie avec le schéma explicite de MacCormack. Les mêmes données utilisées auparavant sont considérées ici. Rappelons seulement que l'objectif est de déterminer les profils des lignes d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi latérale solide.

5.3.1. Etude d'une contraction rectiligne symétrique

Les résultats obtenus dans cette première application sont exprimés par les figures (5.10) et (5.11) ci-dessous, à partir desquelles on remarque que :

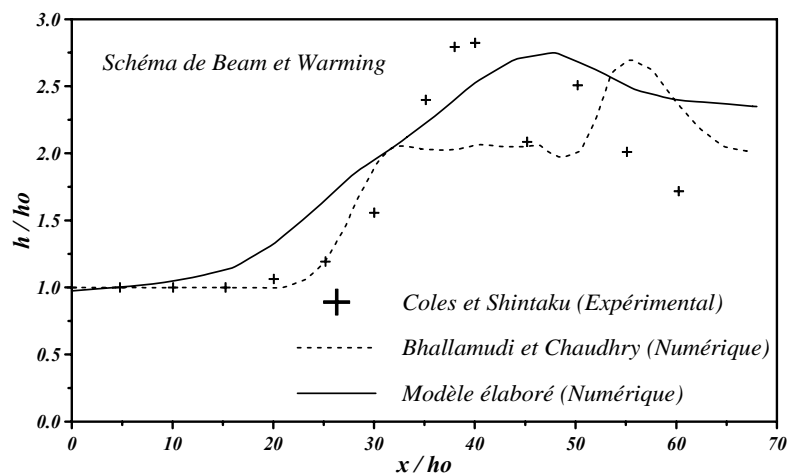


Figure (5.10) : Ligne d'eau le long de l'axe médian dans une contraction rectiligne symétrique

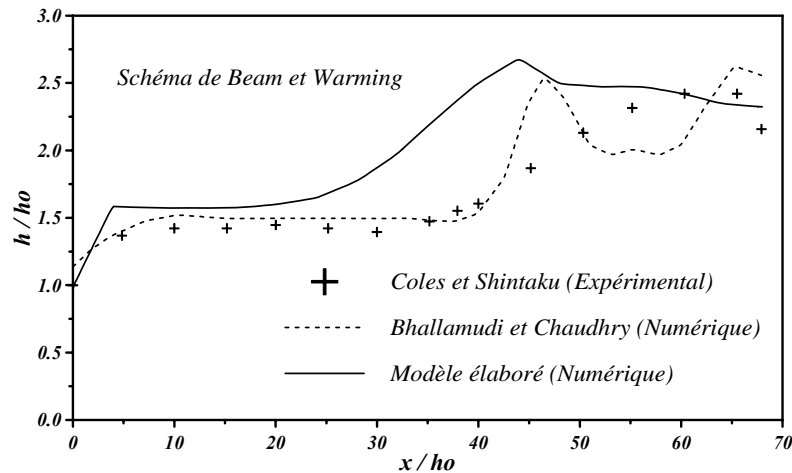


Figure (5.11) : Ligne d'eau le long de la paroi dans une contraction rectiligne symétrique

a) Le long de l'axe de symétrie

- Le profil de la surface libre, calculé cette fois-ci par le schéma de Beam et Warming, possède seulement un seul pic, contrairement aux résultats expérimentaux de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) et numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992), qui ont deux surélévations. Cette ligne d'eau augmente d'une manière progressive et diminue lentement juste à l'entrée du canal aval rectangulaire, correspondant au point " $x/h_0 = 47.5$ ".
- La ligne d'eau obtenue ne concorde pas avec celle déterminée numériquement par Bhallamudi et Chaudhry (1992) avec le schéma explicite de MacCormack. Il y a seulement trois points de rencontre entre elles.
- La même constatation peut être faite également en analysant l'allure de la courbe en question par rapport à la courbe expérimentale de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992). Celles-ci se confondent uniquement au début immédiat de la contraction.
- Cependant, la hauteur maximale de cette surface est légèrement supérieure à celle de Bhallamudi et Chaudhry (1992) et légèrement inférieure à celle de Coles de Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992).

b) Le long de la paroi solide

- Le profil de la surface d'eau dans ce cas est différent, et des mesures expérimentales de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) et des valeurs numériques calculées par Bhallamudi et Chaudhry (1992). Le décalage entre celui-ci et les deux autres profils est assez grand, surtout au centre de la transition.
- Cette ligne d'eau présente en outre, un pic plus élevé que le pic expérimental, et qui survient juste avant la fin du rétrécissement. Un faible rabaissement de la surface d'eau s'établit loin en aval dans le canal rectangulaire.

En résumé, on dira simplement que pour cette application relative à un rétrécissement de canal dans laquelle les chocs sont toujours présents, les résultats obtenus sont à part, car ils ne coïncident ni avec les mesures expérimentales ni même avec les valeurs numériques.

5.3.2. Etude de l'élargissement de Rouse

Les figures (5.12) et (5.13) représentent dans l'ordre, les lignes d'eau au niveau de l'axe médian et le long de la paroi de l'élargissement de Rouse (Elargissement progressif symétrique).

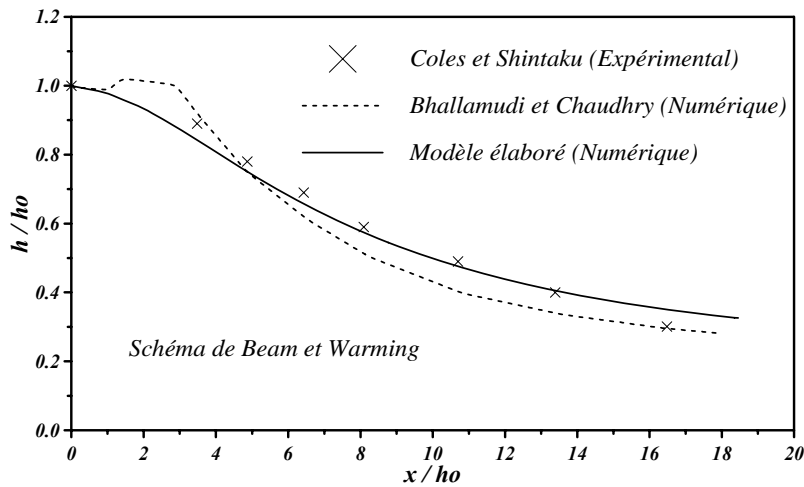


Figure (5.12) : Ligne d'eau le long de l'axe d'écoulement dans l'élargissement graduel symétrique de Rouse

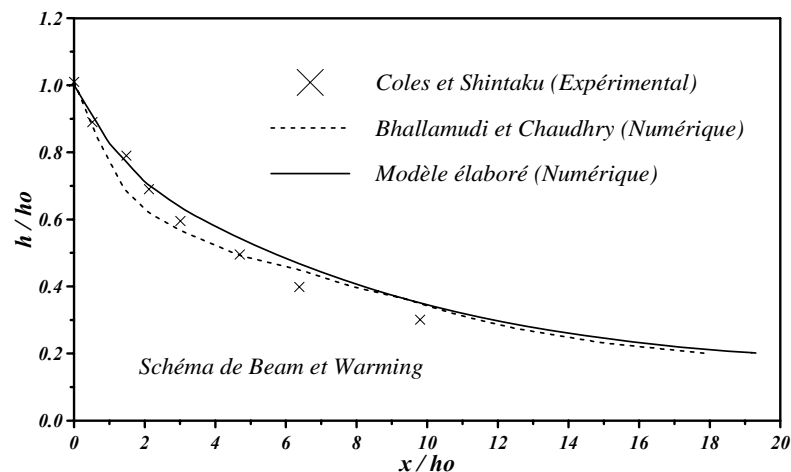


Figure (5.13) : Ligne d'eau le long de la paroi latérale dans l'élargissement graduel symétrique de Rouse

L'examen de ces deux graphes nous mène à dire que :

a) Le long de l'axe de symétrie

- Comme attendu dans le cas des élargissements de canaux, la ligne d'eau calculée au moyen du modèle numérique construit avec le schéma implicite de Beam et Warming, diminue en fonction de la distance. La diminution est toutefois raide au début de l'expansion.
- Le profil s'approche beaucoup plus de la ligne d'eau expérimentale obtenue par Coles et Shintaku (Bhallamudi et Chaudhry, 1992) que de la ligne calculée numériquement par Bhallamudi et Chaudhry (1992).
- Aucune singularité n'est observée sur la surface d'eau de cette transition.

b) Le long de la paroi solide

- Un rabaissement plus prononcé de la ligne d'eau est remarqué aussi le long de la paroi.
- Les résultats calculés sont par contre concordants avec les valeurs numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992) et plus ou moins coïncidents avec les mesures expérimentales de Coles et Shintaku (Bhallamudi et Chaudhry, 1992).
- La ligne d'eau ne présente aucune agitation au niveau de la surface dans cette structure.

Ainsi, les résultats obtenus dans cette seconde application sont appréciables.

5.3.3. Etude d'un élargissement rectiligne symétrique

L'analyse des figures (5.14) et (5.15) ci-dessous, permet de faire les remarques suivantes :

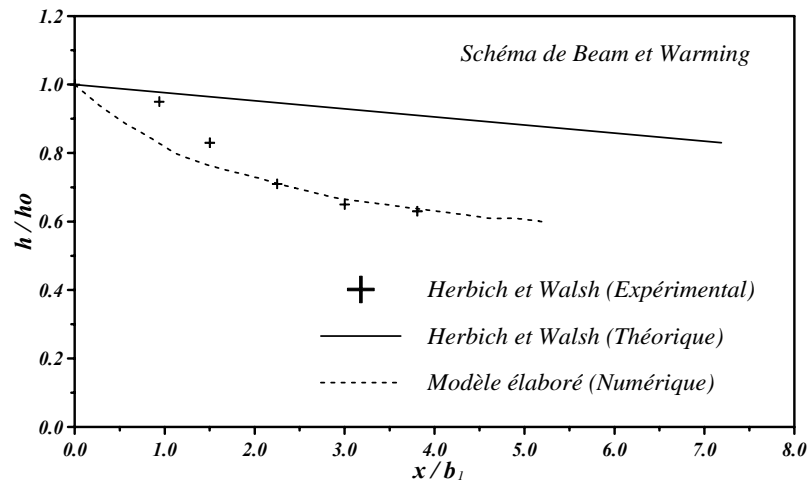


Figure (5.14) : Ligne d'eau au niveau de l'axe de symétrie dans un élargissement rectiligne symétrique

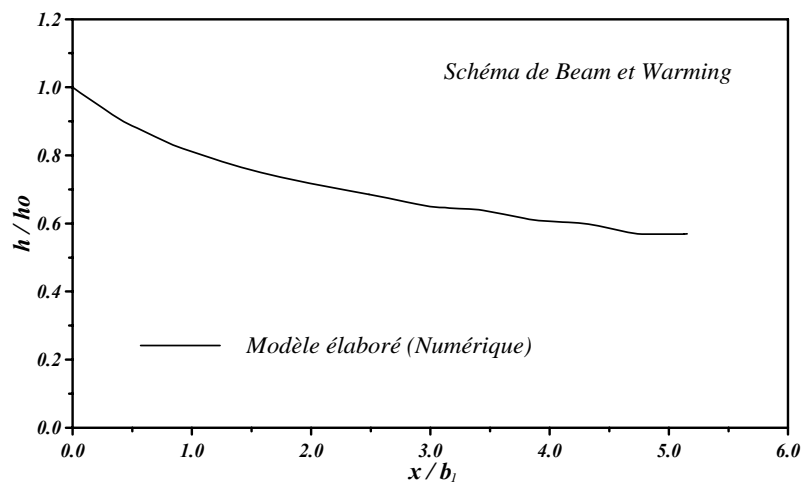


Figure (5.15) : Ligne d'eau au niveau de la paroi dans un élargissement rectiligne symétrique

a) Le long de l'axe de symétrie

- La ligne d'eau décroît progressivement le long de l'axe de symétrie de l'élargissement.
- Le profil calculé coïncide avec le profil expérimental de Herbich et Walsh (1972) dans la deuxième moitié de la transition, alors qu'il s'éloigne dans la première partie.
- D'un autre côté, le modèle numérique a donné une surface d'eau nettement inférieure à la surface théorique déterminée par Herbich et Walsh (1972) également.

b) Le long de la paroi

- L'allure de la ligne d'eau présente un rabaissement graduel en fonction de la longueur de la transition.
- Le profil ressemble beaucoup à celui obtenu le long de l'axe de symétrie. A cause de l'absence de mesures expérimentales, on ne peut affirmer ni infirmer cette allure. Seulement, dans la majorité des cas, la ligne d'eau au niveau des parois décroît d'une façon plus accentuée par rapport à l'axe de l'écoulement dans un élargissement de canal.

Les résultats obtenus dans cet élargissement rectiligne symétrique sont dans l'ensemble acceptables. Signalons que les élargissements rectilignes peuvent entraîner des particularités du type ondes transversales, contrairement aux élargissements progressifs.

5.4. Troisième partie : Etude comparative "Schéma explicite-Schéma implicite"

On abordera dans cette troisième partie, cœur du chapitre 5, une étude comparative entre le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming, dans laquelle sera faite une confrontation de tous les résultats obtenus à travers les trois applications traitées, concernant l'étude d'une contraction rectiligne, de l'élargissement symétrique de Rouse et d'une expansion rectiligne.

Par la suite, on optera pour le schéma ayant donné des résultats satisfaisants dans toutes les applications entreprises, pour qu'on puisse passer à une étude plus approfondie.

5.4.1. Contraction rectiligne symétrique

Les profils des lignes d'eau dans une contraction rectiligne symétrique au niveau de l'axe médian et au niveau de la paroi latérale, calculés par les deux modèles numériques utilisant les schémas de MacCormack et de Beam et Warming, ainsi que les résultats expérimentaux de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) et numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992), sont regroupés respectivement dans les figures (5.16) et (5.17) ci-après.

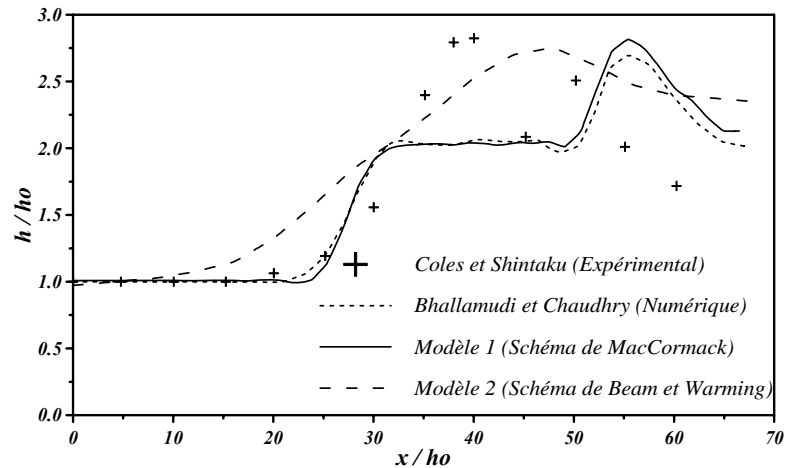


Figure (5.16) : Ligne d'eau le long de l'axe dans une contraction rectiligne symétrique

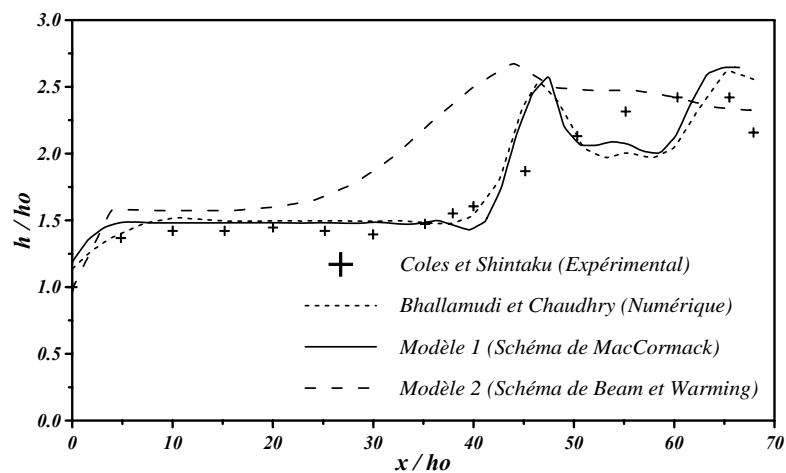


Figure (5.17) : Ligne d'eau le long de la paroi dans une contraction rectiligne symétrique

Celles-ci nous permettent de faire les observations suivantes :

- Les profils obtenus par le premier modèle numérique basé sur la discrétisation suivant le schéma explicite de MacCormack sont, d'une part, très appréciables en les comparant avec ceux calculés numériquement par Bhallamudi et Chaudhry (1992), que se soit le long de l'axe ou le long de la paroi, et d'autre part, en les confrontant avec les mesures expérimentales de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992), ils sont assez bons au niveau de la paroi et relativement moins bons au niveau de l'axe central de la transition.
- Par contre, les profils calculés par le deuxième modèle fondé sur la discrétisation selon le schéma implicite de Beam et Warming, ne se rapprochent ni des valeurs expérimentales de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992), ni des valeurs numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992), et ni même des valeurs obtenues par le premier modèle numérique élaboré. La différence des résultats est très grande, surtout le long de la paroi.

- De ce fait, les résultats obtenus avec le schéma explicite sont plus satisfaisants que ceux obtenus par le schéma implicite dans le cas d'un rétrécissement de canal en écoulement torrentiel.

Sachant pertinemment que les rétrécissements de canaux sont souvent le siège d'apparition d'un système d'ondes, appelées ondes transversales, c'est ce qui explique les deux surélévations distinctes observées dans les lignes d'eau. En dehors de ces surélévations, les résultats calculés concordent très bien avec les mesures expérimentales. Les résultats de cette application sont donc, assez bons dans les régions où les chocs ne sont pas fortement dominants, et moins bons dans les régions où les chocs sont très dominants.

La différence entre les résultats numériques et expérimentaux est due au fait, qu'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices ont été utilisées lors de l'étape de la modélisation mathématique du phénomène étudié. Si, en se basant sur les résultats expérimentaux d'Ippen et Harleman (Ippen et Dawson, 1951), qui ont démontré que l'erreur causée par l'hypothèse d'une répartition uniforme de la vitesse est négligeable, l'hypothèse d'une distribution hydrostatique des pressions par contre, est seulement valide en tous points excepté au voisinage des discontinuités, telles que les ondes transversales.

Certes, puisque les hauteurs des pics, calculées en particulier avec le schéma de MacCormack, concordent bien avec les observations expérimentales, les résultats obtenus peuvent être largement utilisés dans le dimensionnement des parois latérales solides de la transition en question.

5.4.2. Elargissement de Rouse

Les figures (5.18) et (5.19) fournissent les allures de la surface d'eau dans l'élargissement de Rouse en écoulement supercritique, et dans lesquelles on trouve les mesures au laboratoire effectuées par Coles et Shintaku (Bhallamudi et Chaudhry, 1992), la ligne d'eau calculée par Bhallamudi et Chaudhry (1992) et les deux lignes d'eau déterminées dans l'ordre par les modèles numériques employant le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming.

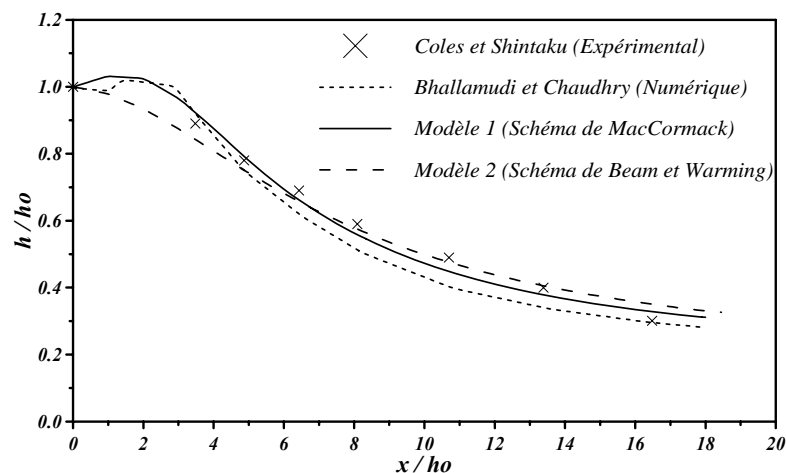


Figure (5.18) : Ligne d'eau le long de l'axe dans l'élargissement symétrique de Rouse

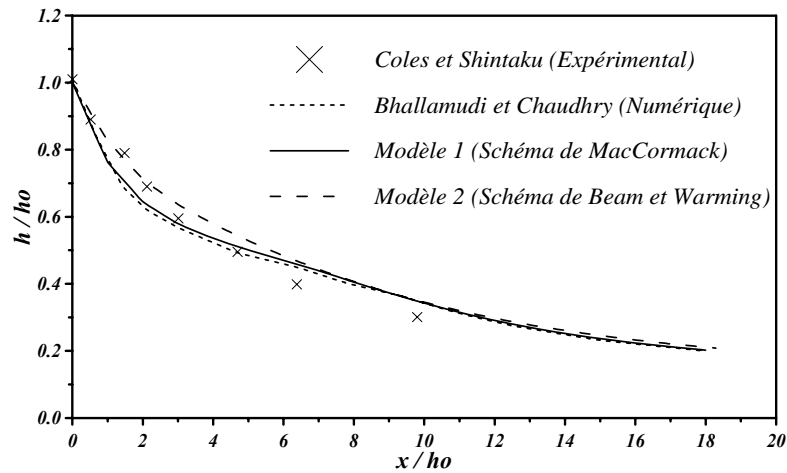


Figure (5.19) : Ligne d'eau le long de la paroi dans l'élargissement symétrique de Rouse

L'analyse de ces figures nous mène à dire que :

- Les lignes d'eau, estimées par le modèle numérique au moyen du schéma explicite de MacCormack, concordent très bien avec les observations expérimentales de Coles et Shintaku (Bhallamudi et Chaudhry, 1992) et les lignes calculées avec un procédé numérique par Bhallamudi et Chaudhry (1992) au niveau de l'axe et de la paroi.
- Les lignes d'eau, évaluées par le second modèle numérique utilisant le schéma implicite de Beam et Warming, sont aussi satisfaisants comparés aux dites valeurs expérimentales et numériques ci-dessus. Sauf que, la surface d'eau présente un rabaissement plus accentué et apparent par rapport aux points expérimentaux et aux deux courbes numériques le long de l'axe de symétrie.
- Donc, les résultats calculés par les deux modèles numériques proposés avec le schéma explicite et le schéma implicite, sont fort intéressants dans ce type de structure hydraulique, avec toutefois, un léger avantage pour le schéma explicite de MacCormack.

Par conséquent, on peut conclure que l'augmentation de l'angle de déviation de la paroi de l'élargissement de Rouse est suffisamment graduel et ne cause par suite, aucun changement brusque de la profondeur d'écoulement à n'importe quelle section du canal, d'une part, et d'autre part, il n'engendre pas la formation des ondes transversales. En effet, le début de la transition est tellement progressif que la distribution des pressions est hydrostatique. Ceci explique clairement les très bons résultats obtenus dans cette seconde application par le modèle numérique, fondé particulièrement sur la résolution avec le schéma aux différences finies explicite de MacCormack, et à un degré moindre, ceux obtenus par le schéma implicite de Beam et Warming.

5.4.3. Elargissement rectiligne symétrique

Dans ce troisième cas, qui concerne l'étude d'un écoulement torrentiel traversant un élargissement rectiligne symétrique, les profils d'eau évalués moyennant les deux modèles numériques sont illustrés dans la figure (5.20), qui contient aussi les profils théorique et expérimental, calculé et mesuré par Herbich et Walsh (1972) le long de l'axe de symétrie seulement.

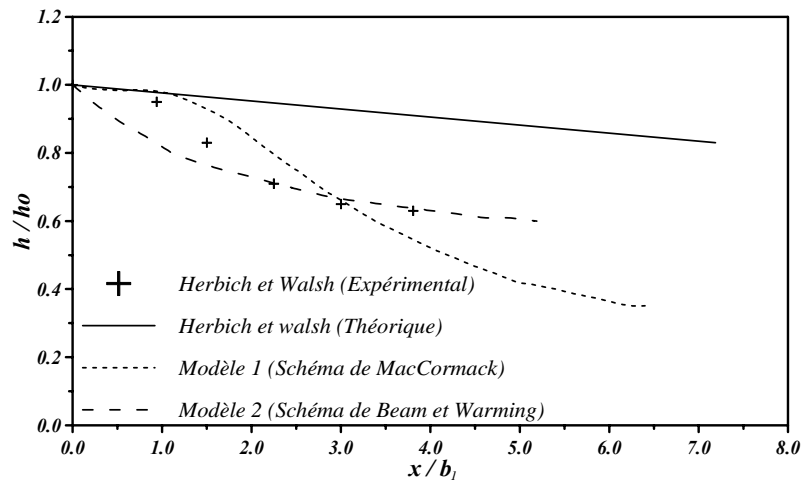


Figure (5.20) : Ligne d'eau le long de l'axe dans un élargissement rectiligne symétrique

On constate que :

- Le profil obtenu en utilisant le schéma de MacCormack s'approche dans le début de la transition des valeurs expérimentales et théoriques (Herbich et Walsh, 1972), puis s'éloigne totalement des valeurs théoriques à la fin de l'élargissement. En somme, ce profil d'eau représente en quelque sorte une moyenne entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques.
- La ligne d'eau calculée, avec le schéma de Beam et Warming, présente une diminution considérable au début de l'élargissement, donnant un éloignement important par rapport aux lignes expérimentale et théorique (Herbich et Walsh, 1972); puis elle se rapproche des valeurs expérimentales à la fin de la contraction.
- Par suite, les résultats obtenus par le modèle numérique élaboré avec le schéma explicite sont dans l'ensemble plus acceptables que ceux déterminés par le schéma implicite.

Par ailleurs, la figure (5.21) regroupe les profils de la surface d'eau le long de la paroi latérale solide de l'élargissement rectiligne symétrique.

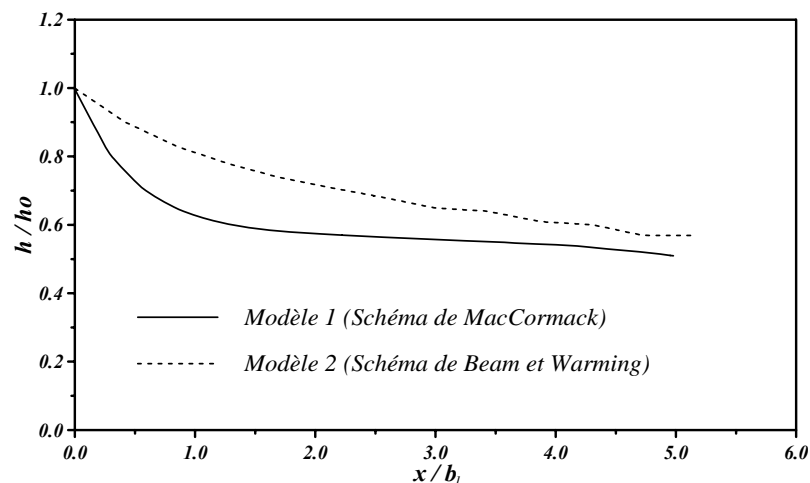


Figure (5.21) : Ligne d'eau le long de la paroi dans un élargissement rectiligne symétrique

Il existe une différence entre les deux lignes d'eau. Le profil calculé avec un schéma implicite présente une diminution presque progressive, si ce n'est identique, avec celui de l'axe de symétrie (Figure (5.20)). Alors que la ligne d'eau obtenue avec le schéma explicite donne un rabaissement accentué au début de la transition, ce qui est généralement attendu dans une telle structure. Suite à cela, on peut dire que le modèle basé sur un schéma explicite donne des résultats plus admissibles.

D'une manière générale, on note principalement que les lignes d'eau s'abaissent en fonction de la distance dans un élargissement rectiligne symétrique. Toutefois, les parois d'une telle transition divergent linéairement suivant un angle de déviation θ , ce qui présente des points de discontinuités au niveau de la jonction entre les parois de l'expansion et celles des canaux rectangulaires amont et aval. Le choix de l'angle θ devra se faire d'une façon très rigoureuse, sinon un décollement surviendra au début de l'élargissement engendrant par suite, une distribution non hydrostatique des pressions. Ceci est principalement à l'origine du léger décalage entre les valeurs expérimentales et numériques.

5.4.4. Choix du schéma

A la lumière de tous les résultats importants obtenus dans les trois cas étudiés ci-dessus, on conclut, selon l'analyse et les constatations faites, que le schéma aux différences finies explicite de MacCormack est plus approprié pour la simulation des écoulements non permanents bidimensionnels en régime torrentiel à travers des canaux non prismatiques, constitués essentiellement par une contraction rectiligne, un élargissement graduel (Elargissement de Rouse) et un élargissement rectiligne.

Bien que le schéma aux différences finies implicite de Beam et Warming ait donné des résultats satisfaisants dans le cas de l'élargissement de Rouse, qui n'entraîne pas la formation de singularités de type ondes, les résultats, dans le cas d'un rétrécissement rectiligne qui engendre souvent l'apparition de discontinuités à la surface de l'eau, et dans le cas d'un élargissement rectiligne qui peut aussi engendrer un système d'ondes si l'angle de déviation est mal choisi, sont vraiment moins satisfaisants.

Tandis que, le schéma explicite de MacCormack a prodigué des résultats très appréciables et notables, le plaçant ainsi comme le plus approprié dans la simulation des discontinuités. Ceci confirme d'ailleurs, ce qui a été dit dans la partie types des schémas aux différences finies (avantages et inconvénients) du chapitre 4.

5.4.5. Etude approfondie

Ayant choisi le schéma qui a donné les résultats les plus concordants, on passe à présent à une étude plus approfondie dans laquelle, entre autres, le réseau d'écoulement et le champ de vitesses seront déterminés pour les trois transitions traitées précédemment, en gardant les mêmes dimensions et les mêmes données de base.

5.4.5.1. Contraction rectiligne de canal

Les figures (5.22) et (5.23) ont pour but la détermination du temps de convergence vers l'état permanent le long de l'axe et le long de la paroi de la contraction.

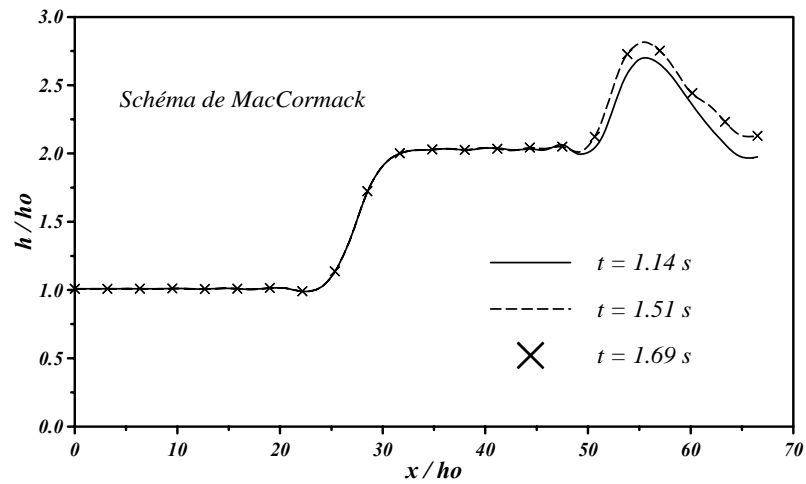


Figure (5.22) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

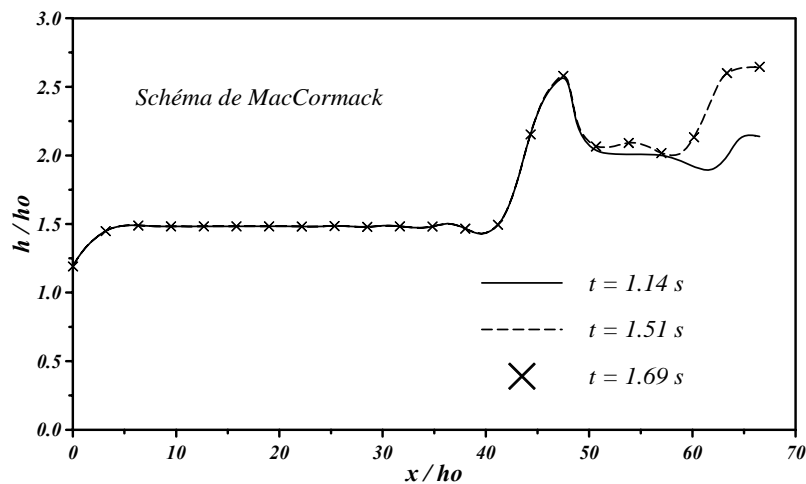


Figure (5.23) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans une contraction rectiligne (Paroi latérale)

A partir de ces deux graphes, on note que les profils tracés pour un temps de 1.69 secondes sont exactement confondus avec ceux correspondant au temps de 1.51 secondes. Le régime permanent est donc atteint à 1.51 secondes, ce qui présente un avantage par rapport aux résultats donnés par Bhallamudi et Chaudhry (1992), où, le régime permanent a été atteint à environ 3 secondes.

Nous tenons à signaler que le pas de temps dans ce cas est de l'ordre de $\Delta t = 1.8459 \cdot 10^{-3}$, ce qui nous permet de constater l'ordre de la précision dans les calculs. A titre indicatif, on peut considérer le petit exemple suivant : pour le pas de temps ci-dessus, on a obtenu un temps de convergence de l'écoulement vers l'état permanent de **1.51 secondes**. Si ce temps est de **1.50 secondes**, cela veut dire qu'il y a une différence de **0.01 seconde** entre les deux temps. Cette très petite différence correspond exactement à : $0.01 / (1.8459 \cdot 10^{-3}) \approx 6 \text{ itérations}$. Donc, entre le temps de convergence de **1.51 secondes** et celui de **1.50 secondes**, il y a **6 itérations** à calculer, c'est-à-dire **6 étapes** de calculs à exécuter **en plus**, par le modèle numérique élaboré avec le schéma explicite de MacCormack.

Les figures (5.24) et (5.25) ci-après donnent respectivement des représentations tridimensionnelles de l'écoulement dans la contraction pour le domaine de calcul rectangulaire et le domaine physique irrégulier.

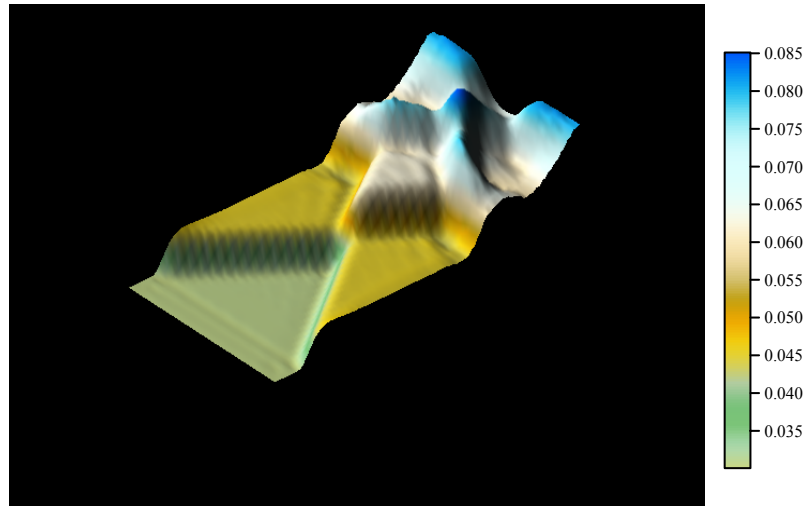


Figure (5.24) : Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans une contraction rectiligne (Domaine de calcul rectangulaire)

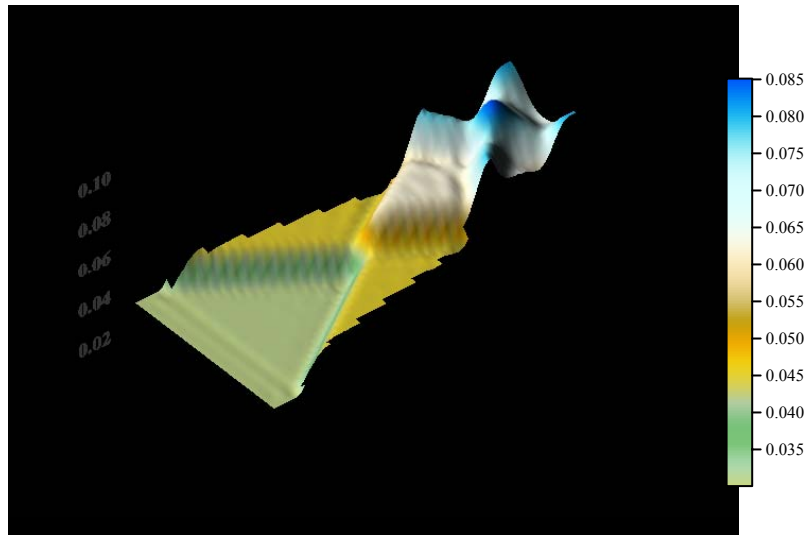


Figure (5.25) : Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans une contraction rectiligne (Domaine physique irrégulier)

Ces figures schématisent d'une façon très claire les ondes transversales entraînées par le passage de l'écoulement torrentiel dans cette structure hydraulique irrégulière. On constate les fronts d'ondes et les fortes perturbations de l'écoulement dans le canal aval notamment.

Par contre, la figure (5.26) fournit une représentation bidimensionnelle de l'écoulement dans le rétrécissement rectiligne.

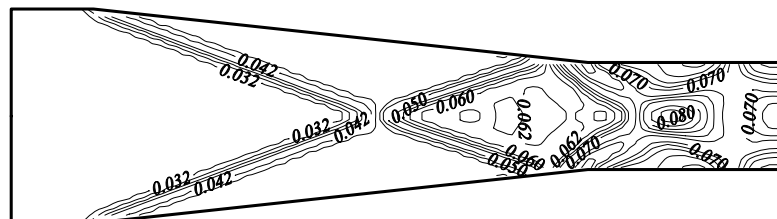


Figure (5.26) : Représentation plane de l'écoulement dans une contraction rectiligne (Domaine physique à géométrie variable)

Celle-ci, met en évidence les deux fronts d'ondes qui prennent naissance juste au début de la contraction, qui se rencontrent au niveau de l'axe de symétrie du canal, et sont réfléchis par la suite sur les parois latérales avant la fin de la contraction, ce qui a engendré des ondes négatives, causant de grandes instabilités dans le canal aval rectangulaire.

Une représentation plane plus significative et plus explicite est illustrée par la figure (5.27) dans le cas du domaine de calcul rectangulaire, et par la figure (5.28) dans le cas du domaine physique à géométrie variable.

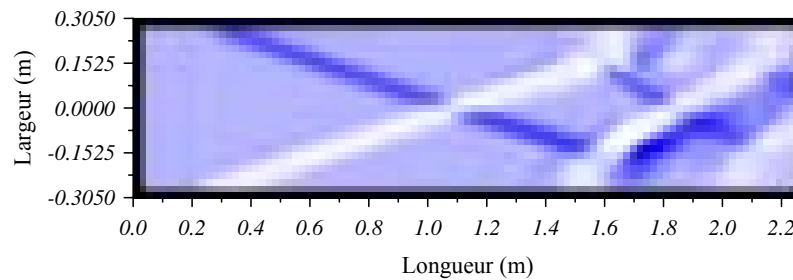


Figure (5.27) : *Système d'ondes transversales dans une contraction rectiligne (Domaine de calcul rectangulaire)*

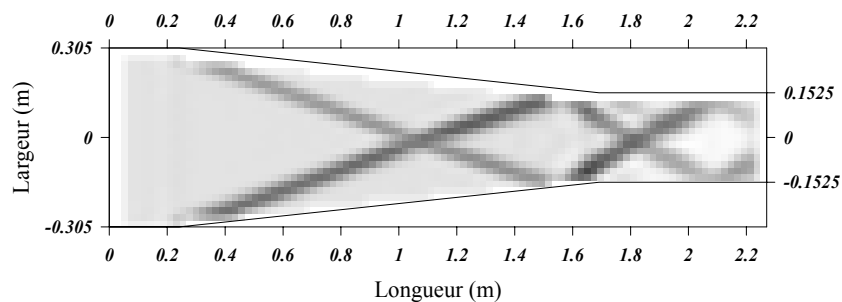


Figure (5.28) : *Système d'ondes transversales dans une contraction rectiligne (Domaine physique irrégulier)*

A partir de ces tracés, on déduit d'une part, que les deux angles des ondes transversales β_1 et β_2 dans la transition en question, sont de l'ordre de 20.26° et 23.60° respectivement, et que la valeur parfaite de l'angle β_2 est d'environ 19.48° . Pour l'angle β_2 trouvé dans ce cas, la réflexion des ondes transversales ne se fait pas donc, exactement à la fin de la contraction (au début du canal aval rectangulaire), mais au contraire, elle se fait à l'intérieur de la contraction elle-même. Ceci a pour conséquence l'agitation de la surface d'eau dans le canal aval rectangulaire. Par conséquent, cette transition ne donne pas une bonne configuration de l'écoulement.

Le champ de vitesses dans la contraction rectiligne est représenté dans la figure (5.29) ci-dessous.

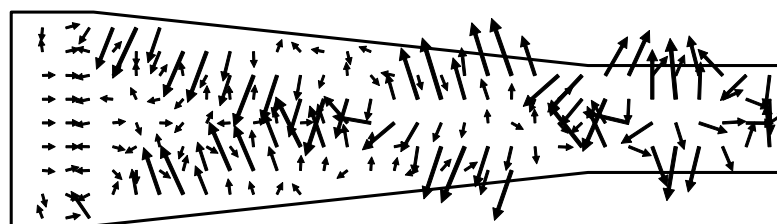


Figure (5.29) : *Champ de vitesses dans une contraction rectiligne symétrique*

On remarque que les vecteurs vitesses ont des directions aléatoires, suivant que les ondes transversales se dirigent vers l'axe de symétrie ou vers les parois. Cette figure dénote la perturbation qui règne vraiment dans la transition étudiée, en écoulement torrentiel.

5.4.5.2. Elargissement de Rouse

La convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans cette transition est atteinte à environ 0.84 seconde, contre le temps de 3 secondes obtenu par Bhallamudi et Chaudhry (1992). Ceci est montré dans les figures (5.30) et (5.31), où la superposition des lignes d'eau calculées pour les temps de 0.84 seconde et 1.04 secondes est bien constatée.

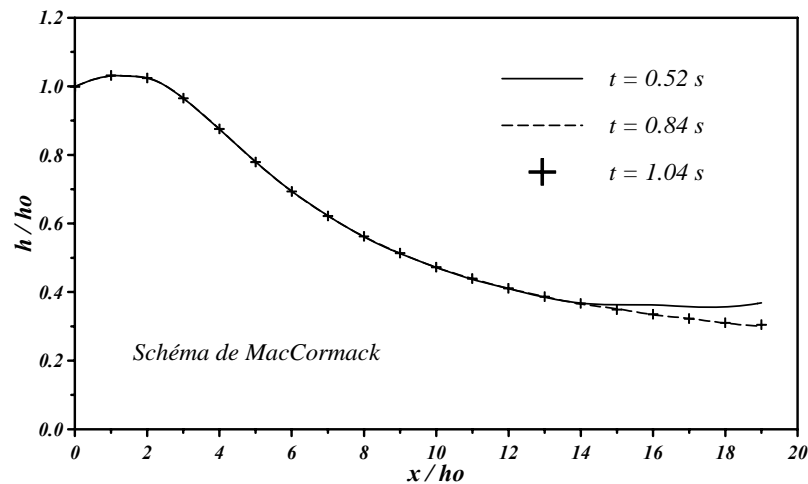


Figure (5.30) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

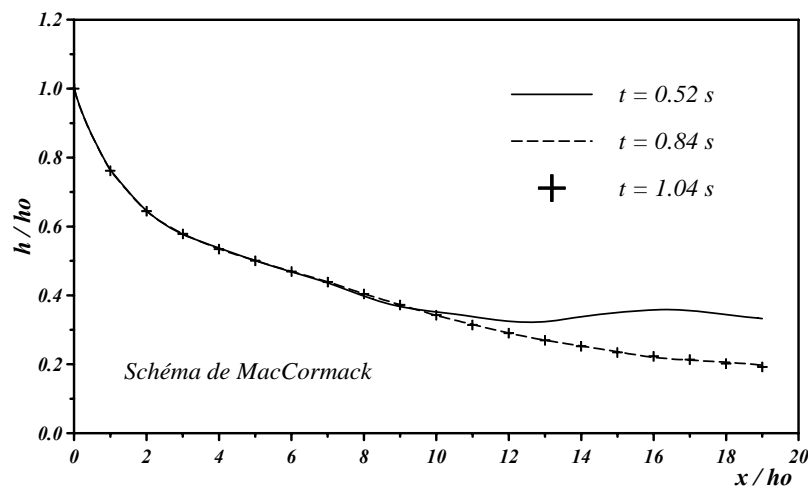


Figure (5.31) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale)

Le temps de convergence de l'écoulement vers l'état permanent est de **0.84 seconde** avec un pas de temps de l'ordre de : $\Delta t = 1.2939 \cdot 10^{-3}$. Si par exemple le temps de convergence est de **0.86 seconde**; ainsi, la différence entre les deux temps est de **0.02 seconde**. Par conséquent, cette petite différence engendrera : $0.02 / 1.2939 \cdot 10^{-3} \approx 16$ **itérations** en plus dans les calculs effectués par le modèle numérique élaboré avec le schéma explicite de MacCormack, par rapport aux calculs faits pour un temps de convergence de **0.84 seconde**, ce qui signifie **16 autres** pas de calculs.

Le réseau d'écoulement dans l'élargissement de canal étudié, est schématisé dans la figure (5.32), qui donne une représentation tridimensionnelle montrant par suite, que l'écoulement s'effectue d'une manière graduelle et non brutale, et qu'il n'y a aucune agitation dans cette structure hydraulique.

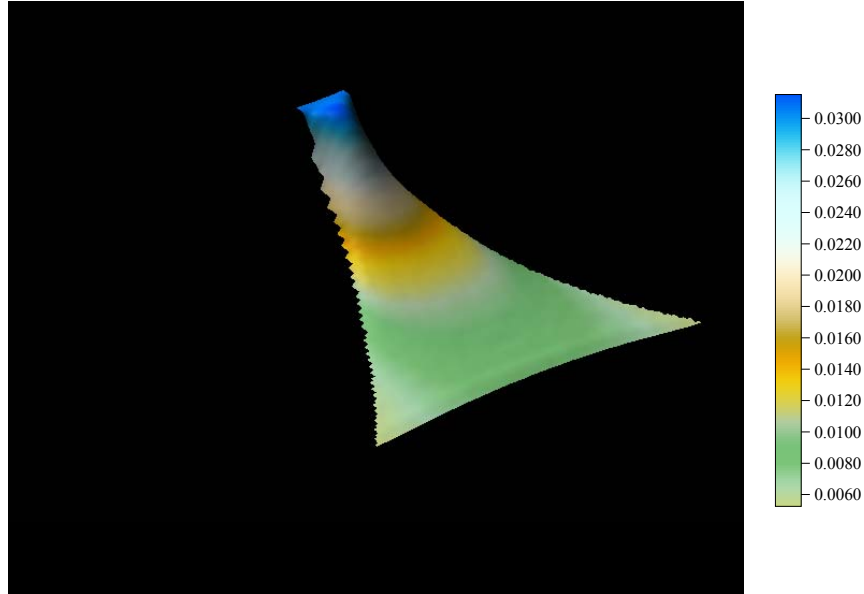


Figure (5.32) : Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans l'élargissement de Rouse

D'autre part, les figures (5.33) et (5.34) donnant une représentation plane de l'écoulement, confirment les constatations faites ci-dessus.

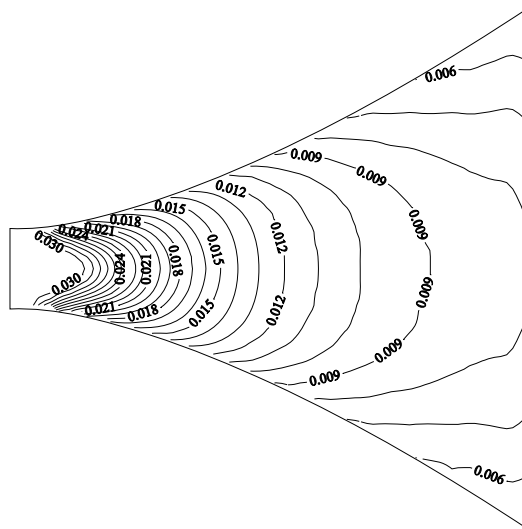


Figure (5.33) : Représentation bidimensionnelle de l'écoulement dans l'élargissement de Rouse

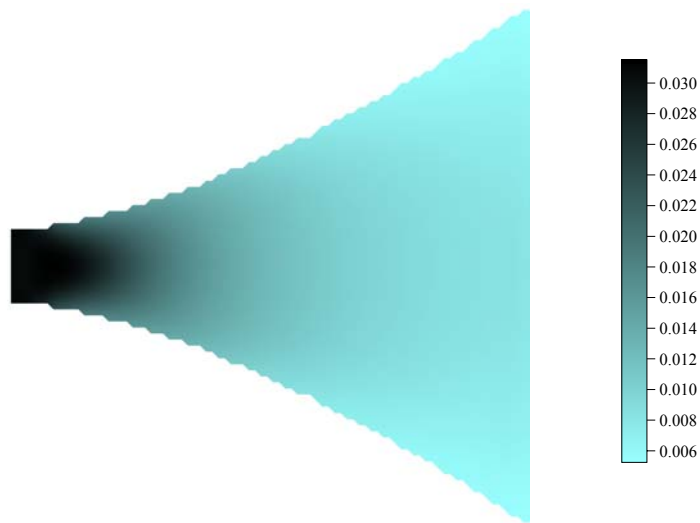


Figure (5.34) : Représentation plane de l'écoulement dans l'élargissement de Rouse

Contrairement à un rétrécissement rectiligne, le champ de vitesses d'écoulement dans l'élargissement de Rouse ne présente pas de mouvements anarchiques. Les directions des vitesses se font de l'amont vers l'aval, sans aucune perturbation (Figure (5.35)).

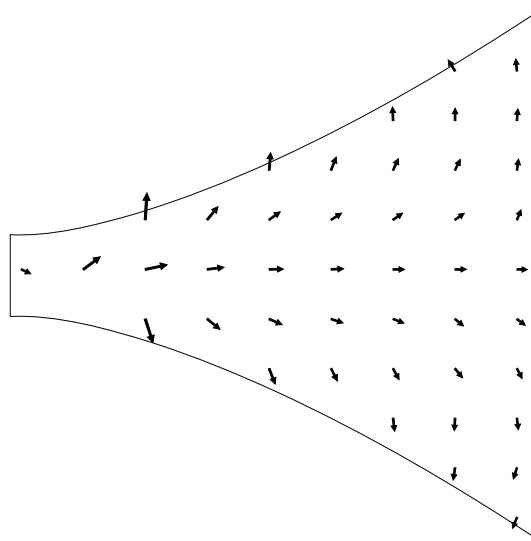


Figure (5.35) : Champ de vitesses dans l'élargissement de Rouse

5.4.5.3. Elargissement rectiligne

Dans cette transition, l'écoulement converge vers l'état permanent aux environs de 1.38 secondes (Figures (5.36) et (5.37)).

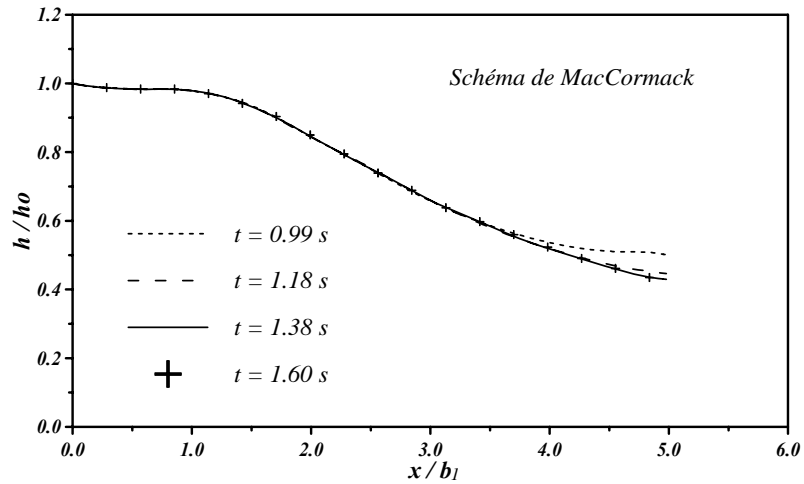


Figure (5.36) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans un élargissement rectiligne symétrique (Axe de symétrie)

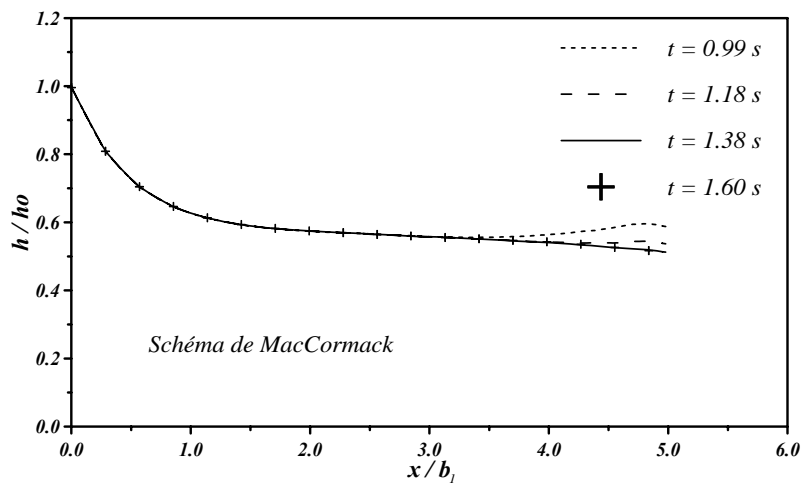


Figure (5.37) : Convergence de l'écoulement vers l'état permanent dans un élargissement rectiligne symétrique (Paroi latérale)

Les figures (5.38), (5.39) et (5.40) donnent respectivement les schématisations tridimensionnelle et bidimensionnelle du réseau d'écoulement à travers l'élargissement rectiligne symétrique.

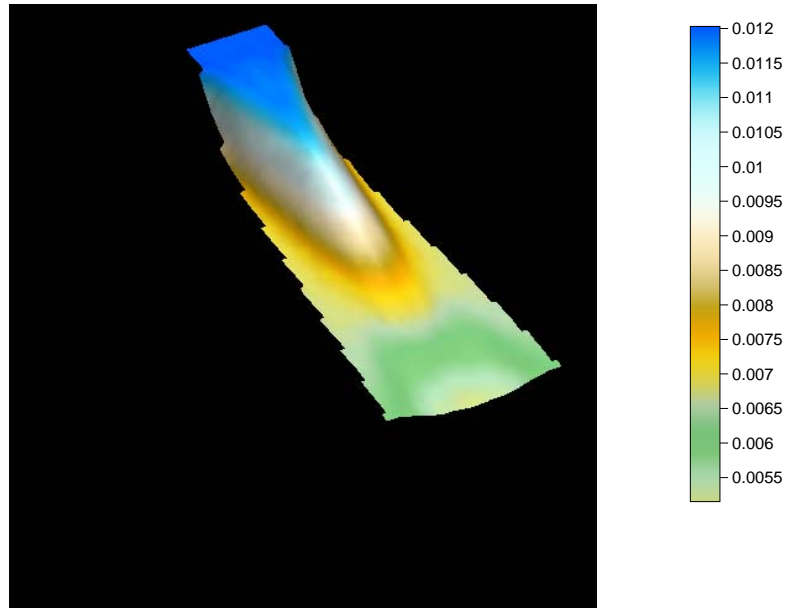


Figure (5.38) : Représentation tridimensionnelle de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique

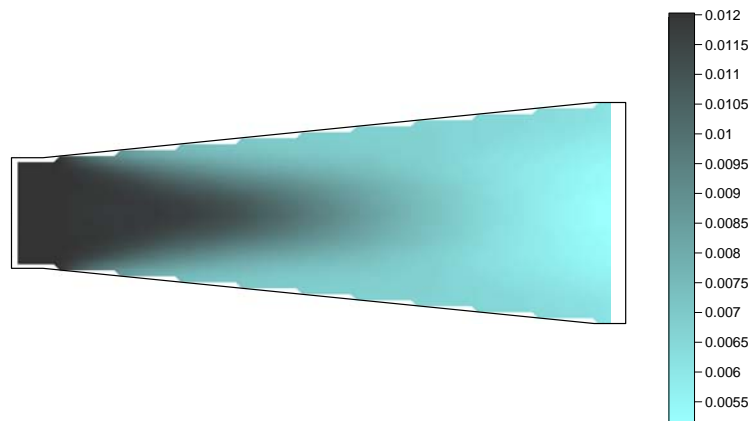


Figure (5.39) : Représentation plane de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique

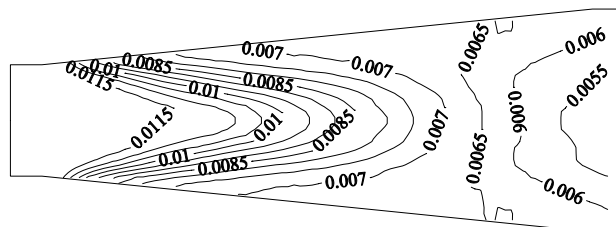


Figure (5.40) : Représentation bidimensionnelle de l'écoulement dans un élargissement rectiligne symétrique

Au regard de ces courbes, on note que la surface d'eau décroît en fonction de la distance d'une façon progressive, et que le système d'ondes ne cause nullement de perturbations dans le canal.

Les vitesses d'écoulement données dans la figure (5.41) se font de l'amont vers l'aval sans qu'il y ait croisement entre elles.

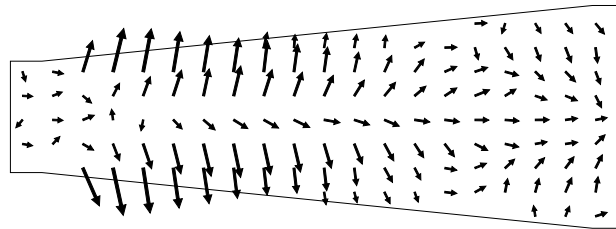


Figure (5.41) : Champ de vitesses dans un élargissement rectiligne symétrique

5.4.5.4. Transitions à pente variable

Après avoir validé les modèles numériques élaborés dans le cas des structures hydrauliques convergentes et divergentes avec une pente de fond faible ou quasiment nulle, on se propose dans cette nouvelle étape de notre travail, de tester l'aptitude des modèles numériques à simuler les écoulements à surface libre bidimensionnels non permanents en régime torrentiel à travers des transitions ayant des pentes de fond importantes, tout en sachant que les équations de Saint Venant initiales ont été généralisées aux cas des canaux à fortes pentes. On sait pertinemment que d'une part, les transitions à surface libre sont rencontrées généralement dans les coursiers d'évacuateurs de crues, et que d'autre part, la majorité des coursiers sont à fortes pentes, mais malheureusement, il n'existe pas d'applications relatives aux structures rétrécies ou élargies, contenant des mesures expérimentales ou des résultats numériques dans le cas de pentes de fond variables. La validation du modèle numérique, élaboré avec le schéma explicite de MacCormack, sera testée sur le cas d'un canal à section transversale rectangulaire à forte pente, et par la suite, une extension de l'étude sera faite au cas d'une contraction et d'un élargissement de canal avec des pentes de fond assez importantes.

A. Canal rectangulaire à forte pente

L'objectif de cette application est de tester l'aptitude du modèle numérique élaboré à traiter les écoulements non permanents torrentiels traversant des canaux à pentes considérables. Pour cela, un canal à section transversale rectangulaire d'un coursier d'évacuateur de crue en modèle réduit (Agence Nationale des Barrages (A.N.B.), 1987) avec une pente de fond d'environ 28° a été choisi.

L'étude expérimentale sur modèle réduit a été faite ((A.N.B.), 1987) avec des débits de $0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$, de $0.0689 \text{ m}^3/\text{s}$ et de $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$, correspondant dans l'ordre aux débits réels de $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, de $2000 \text{ m}^3/\text{s}$ et de $2700 \text{ m}^3/\text{s}$.

Les conditions de l'écoulement dans le canal sont données dans le tableau (5.1) ci-après :

Tableau (5.1) : Conditions de l'écoulement dans le coursier rectangulaire à forte pente

Débits (m^3/s)	0.0344	0.0689	0.0930
Profondeur d'eau à l'amont (m)	0.0656	0.1000	0.1300
Vitesse longitudinale à l'amont (m/s)	1.2800	1.6805	1.7450
Vitesse transversale à l'amont (m/s)	0	0	0

Les données suivantes sont aussi prises en considération dans les calculs :

- la largeur du canal est de 0.41 m ;
- la longueur du canal est de 0.74 m ;
- le maillage utilisé est : $\Delta\xi = 0.0211\text{m}$ et $\Delta\eta = 0.01\text{ m}$;
- le nombre de Courant est : $Cn = 0.5$;
- le nombre de Manning est : $n = 0.01$;
- la pente de fond est : $\alpha = 28,1245^\circ$.

Les figures (5.42), (5.43) et (5.44) donnent respectivement les profils des lignes d'eau le long de la paroi latérale solide du canal rectangulaire, pour des débits de $0.0344\text{ m}^3/\text{s}$, de $0.0689\text{ m}^3/\text{s}$ et de $0.093\text{ m}^3/\text{s}$.

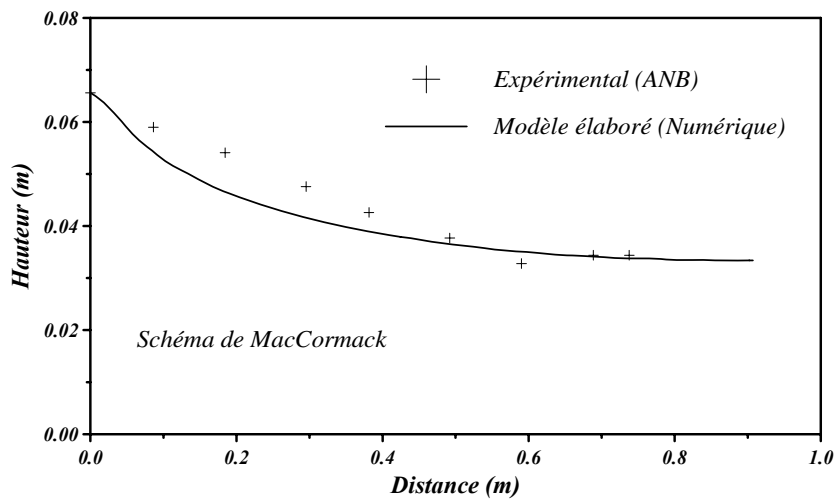


Figure (5.42) : Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de $0.0344\text{ m}^3/\text{s}$

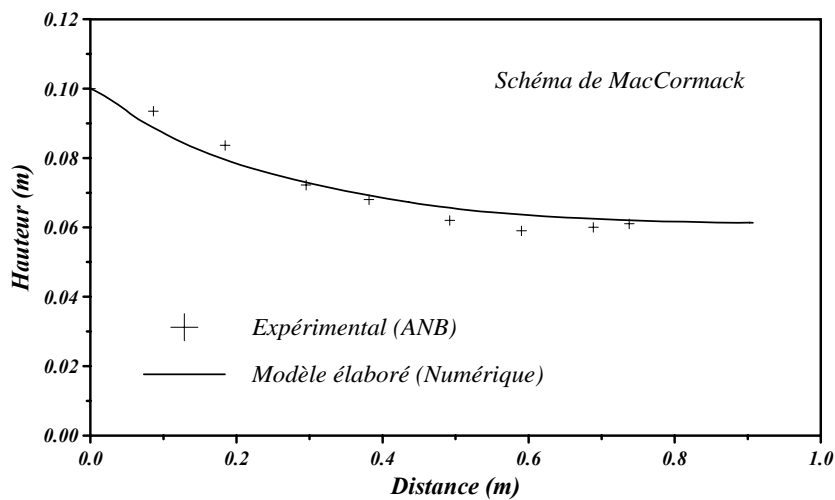


Figure (5.43) : Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de $0.0689\text{ m}^3/\text{s}$

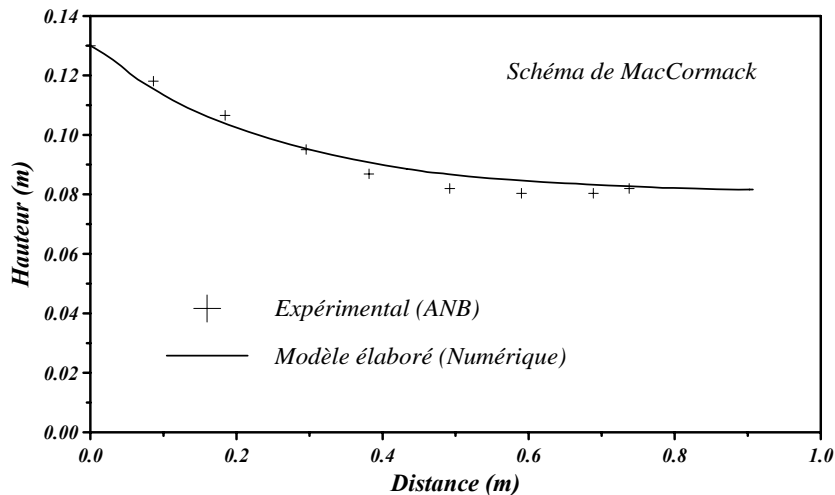


Figure (5.44) : Ligne d'eau le long de la paroi dans un coursier rectangulaire pour un débit de $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$

A partir de ces figures, on constate essentiellement que :

- La profondeur d'écoulement diminue avec l'augmentation de la pente de fond dans un canal prismatique.
- Les résultats calculés s'approchent d'une manière très satisfaisante des mesures expérimentales, surtout pour les débits de $0.0689 \text{ m}^3/\text{s}$ et $0.093 \text{ m}^3/\text{s}$.

Par conséquent, on peut conclure que le modèle numérique développé en utilisant le schéma aux différences finies explicite de MacCormack, est apte à simuler les écoulements torrentiels à deux dimensions spatiales dans des canaux à fortes pentes.

Suite à ces résultats, on se propose d'étendre l'étude à des structures hydrauliques convergente (Contraction rectiligne symétrique) et divergente (Elargissement de Rouse), ayant des pentes de fond importantes.

B. Contraction rectiligne de canal à pente variable

Dans cette application, on analysera un écoulement torrentiel à travers la contraction rectiligne symétrique schématisée par la figure (5.1), qui a été traitée au début avec une pente de fond nulle. Seulement, cette fois-ci, la pente de fond sera considérablement accentuée, dans le but de voir l'allure de la surface d'eau pour différentes pentes, comparativement avec la ligne d'eau obtenue pour le cas d'une transition horizontale. L'étude sera faite pour des pentes de 15° , 25° et 40° . Les résultats seront comparés avec la ligne d'eau calculée pour une pente nulle, qui est considérée comme résultat de référence. Les mêmes dimensions et les mêmes conditions d'écoulement sont utilisées ici.

Les profils des lignes d'eau le long de l'axe de symétrie de la contraction, calculés pour les trois pentes, sont regroupés dans la figure (5.45) ci-dessous.

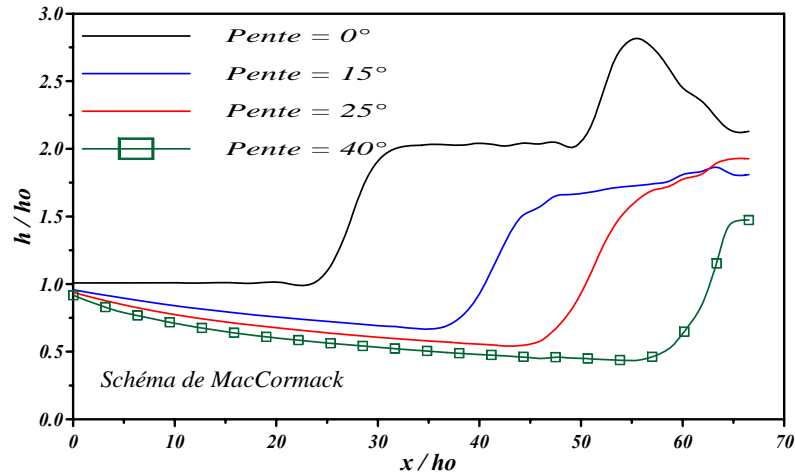


Figure (5.45) : Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne symétrique (Axe de symétrie)

Les observations suivantes peuvent être faites :

- L'augmentation de la pente de fond provoquera un rabaissement de la surface libre par rapport au cas d'une pente nulle (transition horizontale).
- Les profils des lignes d'eau, obtenus pour les trois pentes, montrent seulement une seule surélévation, contrairement au cas d'une pente nulle.
- La surélévation de la surface libre pour les pentes de 15°, 25° et 40°, n'excède pas la première surélévation observée dans les canaux horizontaux.
- Plus on augmente la pente de fond, plus le système d'ondes transversales se déplace loin vers l'aval.

On peut dire que l'augmentation de la pente de fond dans une contraction rectiligne symétrique traversée par un écoulement torrentiel, engendre principalement une diminution de la surface libre et une augmentation de la vitesse d'écoulement. Cette vitesse considérable entraîne le système d'ondes transversales de plus en plus vers l'aval, et empêche la formation des grands sommets d'ondes, ce qui est par contre observé dans les canaux horizontaux (ou faiblement inclinés).

Par ailleurs, la figure (5.46) donne les profils de la surface libre au niveau de la paroi latérale solide pour les différentes pentes étudiées.

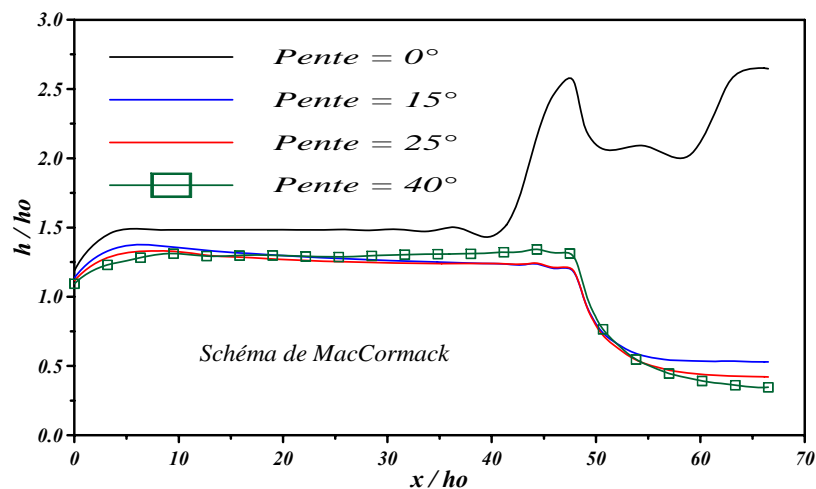


Figure (5.46) : Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne symétrique (Paroi latérale)

A partir de cette figure, on peut remarquer que :

- Aucune surélévation importante de la ligne d'eau n'est observée pour les trois pentes étudiées, par rapport au résultat obtenu dans le cas d'une pente nulle.
- Les lignes d'eau pour les pentes de 15° , 25° et 40° , gardent une hauteur presque constante dans la transition étudiée.
- Par contre, juste à la fin de la contraction (c'est-à-dire à l'entrée du canal aval), la profondeur d'écoulement chute rapidement.
- L'augmentation de la pente de fond entraîne donc, une diminution de la ligne d'eau au niveau de la paroi latérale solide.

Il est à noter ici, qu'au point " $x/h_0 = 47.75$ ", donnant une distance " $x = 1.45 \text{ m}$ ", correspondant à la longueur de la contraction (ce point se trouve juste à l'entrée du canal aval rectangulaire), il y a un rabaissement brusque des lignes d'eau obtenues pour les trois pentes étudiées. Ceci est principalement dû au fait que la vitesse d'écoulement augmente avec l'augmentation de la pente de fond du canal, ce qui engendre une concentration de l'écoulement de l'eau au niveau de l'axe de symétrie, et par conséquent, on n'assiste pas à la naissance des ondes transversales le long des parois.

C. Elargissement de Rouse à pente variable

On passera dans cette troisième application, à l'étude de l'écoulement de l'eau dans un divergent graduel (Elargissement de Rouse) donné par la figure (5.4) et dont la pente de fond est considérablement variée, dans le but d'analyser les changements de la ligne d'eau, par rapport à celle calculée pour une transition horizontale. La présente analyse sera faite pour les trois pentes respectives de 15° , 25° et 40° . On considère les mêmes dimensions et les données de base de l'application initiale.

La figure (5.47) englobe les lignes d'eau au niveau de l'axe de symétrie de l'élargissement de Rouse, pour les trois pentes ci-dessus.

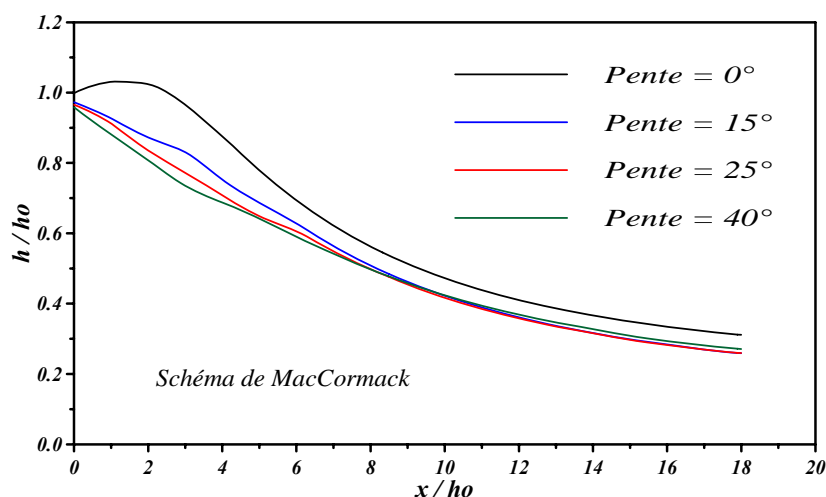


Figure (5.47) : Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

On peut dire que :

- Il apparaît un léger rabaissment au début de la transition, des lignes d'eau obtenues pour les trois pentes consécutives de 15° , 25° et 40° , par rapport au profil calculé pour un élargissement horizontal.
- Les profils d'eau calculés pour les trois pentes se rencontrent à l'aval à une même hauteur (rapport de profondeurs d'écoulement $h/h_0 \approx 0.25$).
- Aucune perturbation de l'écoulement n'est observée dans cette transition.

Par ailleurs, les profils des lignes d'eau le long de la paroi latérale, déterminés pour les trois pentes étudiées, sont donnés dans la figure (5.48) ci-après.

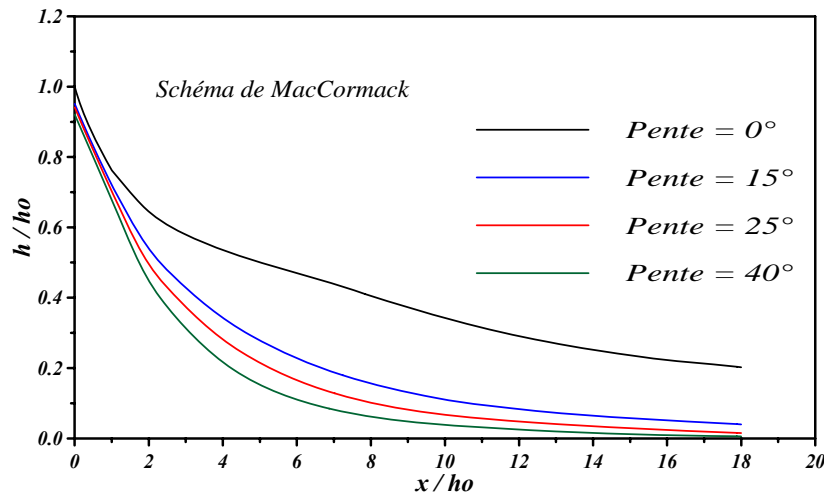


Figure (5.48) : Effet de l'augmentation de la pente de fond sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale)

On constate principalement ce qui suit :

- L'augmentation de la pente de fond engendre un rabaissment important de la profondeur d'écoulement.
- Plus la pente de fond du canal augmente, plus le rabaissment du profil de la surface d'eau devient considérable.
- L'écoulement de l'eau se fait sans aucune perturbation dans la transition étudiée.

Finalement, on dira que l'accroissement de la pente du radier dans l'élargissement de Rouse en écoulement torrentiel, engendre essentiellement une diminution de la profondeur d'écoulement et par suite, une augmentation de la vitesse. D'autre part, en tenant compte des résultats obtenus au niveau de la paroi latérale solide, et qui ont montré un rabaissment très important de la ligne d'eau, on remarque clairement que l'écoulement dans un pareil élargissement avec des pentes appréciables, a tendance à moins s'étendre latéralement.

5.5. Quatrième partie : Etude paramétrique

Dans la quatrième partie de ce chapitre, une étude paramétrique sera développée, ayant pour objet de faire varier quelques facteurs hydrauliques et numériques, et de voir l'influence de cette variation sur la forme de la surface d'eau. Parmi les principaux paramètres qui seront analysés, on trouve : le nombre de Froude amont, le nombre de Manning, la longueur de la transition, la largeur amont de la transition, les pas de discrétisation longitudinal et transversal, et le nombre de Courant propre à la stabilité du schéma numérique. Cette étude sera faite pour le cas de la contraction rectiligne et le cas de l'expansion progressive de Rouse.

5.5.1. Contraction rectiligne de canal

5.5.1.1. Paramètres hydrauliques

A. Variation du nombre de Froude amont

Afin d'étudier l'effet du nombre de Froude amont sur la forme de la ligne d'eau dans une contraction rectiligne, on prendra des valeurs de ce nombre de 3, 5 et 8. Les résultats seront comparés avec ceux obtenus dans l'application de base, correspondant à un nombre de Froude incident égal à 4.

Les profils des lignes d'eau le long de l'axe et de la paroi pour les différentes valeurs prises, sont regroupés successivement dans les figures (5.49) et (5.50).

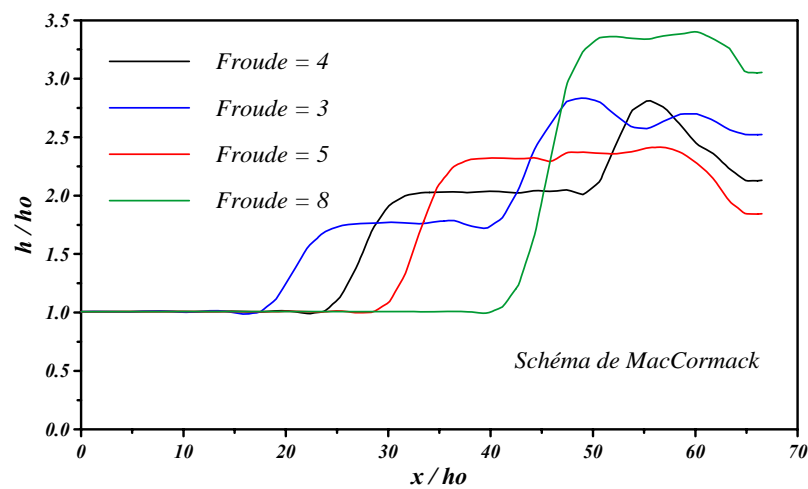


Figure (5.49) : Effet de la variation du nombre de Froude amont sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

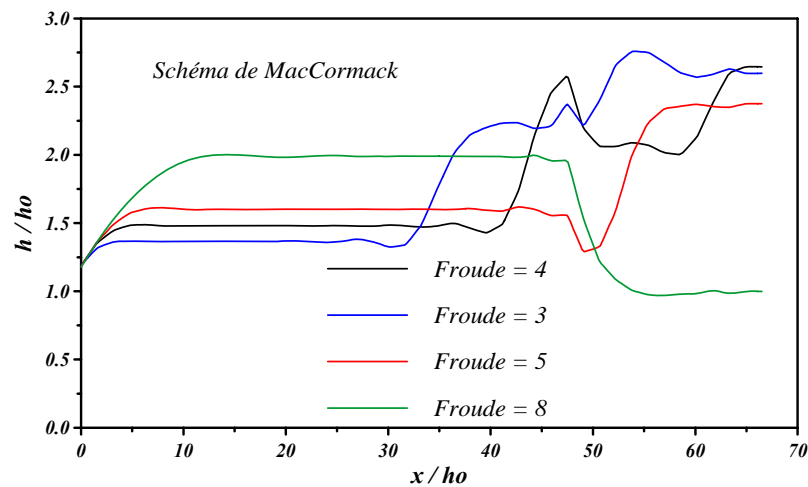


Figure (5.50) : Effet de la variation du nombre de Froude amont sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Paroi latérale)

On constate alors que :

a) *Le long de l'axe médian*

- Pour $F_1 = 3$: la ligne d'eau présente deux surélévations distinctes, semblables à celles obtenues pour $F_1 = 4$, sauf que les pics surviennent dans des sections avancées par rapport à la ligne de référence ($F_1=4$). En diminuant le nombre de Froude par rapport à la valeur de référence, la vitesse d'écoulement a par suite diminuée, expliquant ainsi le décalage cité précédemment. A l'intérieur du canal aval rectangulaire, cette ligne présente une surface quelque peu ondulée.
- Pour $F_1 = 5$: le profil d'eau subit une seule élévation décalée vers l'aval par rapport à celle de référence ($F_1 = 4$). Ce décalage est dû au fait que la vitesse est plus grande, emportant donc le système d'ondes vers l'aval. Une certaine stabilité est remarquée dans le canal aval.
- Pour $F_1 = 8$: la ligne d'eau présente une seule surélévation brusque d'une hauteur plus grande que celle de référence. Elle est décalée encore plus loin vers l'aval à cause de l'augmentation de la vitesse d'écoulement, causée par l'accroissement du nombre de Froude.

b) *Le long de la paroi*

- Pour $F_1 = 3$: la surface d'eau présente aussi deux surélévations, l'une à l'intérieur de la transition, et l'autre plus importante, au début du canal aval. Les perturbations enregistrées dans cette surface disparaissent plus loin dans le canal aval rectangulaire.
- Pour $F_1 = 5$: le profil d'eau à l'intérieur de la contraction est stable avec une hauteur un peu élevée que celle de référence ($F_1 = 4$). Mais, vers la sortie de la transition, on enregistre une élévation plus importante que la première, sans pour autant atteindre la hauteur du pic du profil pris comme référence.
- Pour $F_1 = 8$: la surface libre subit une élévation brusque juste au début de la transition, suivie d'une certaine stabilité, puis on constate une nette diminution de la hauteur d'eau dans le canal aval rectangulaire.

En conclusion, on peut dire que l'allure de la surface libre change en variant le nombre de Froude incident. Pour des valeurs supérieures à 5, la hauteur sera plus élevée au niveau de l'axe de symétrie et moins élevée au niveau de la paroi. Ces grandeurs sont constatées dans le canal aval rectangulaire.

B. Variation du coefficient de rugosité de Manning

L'influence de la variation du nombre de Manning sur l'écoulement sera analysée avec les valeurs suivantes : 0.011, 0.013, 0.014 et 0.016.

Les figures (5.51) et (5.52) donnent les profils de la surface libre le long de l'axe et de la paroi, pour les valeurs du nombre de Manning prises en considération.

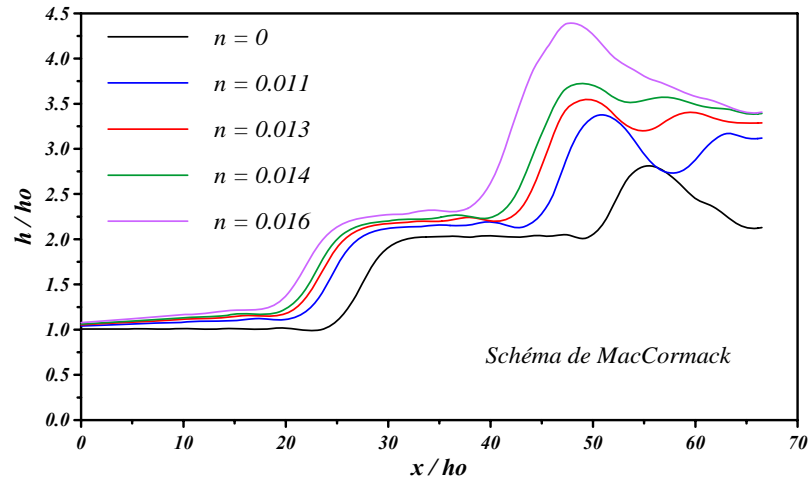


Figure (5.51) : Effet de la variation du nombre de Manning sur la surface d'eau dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

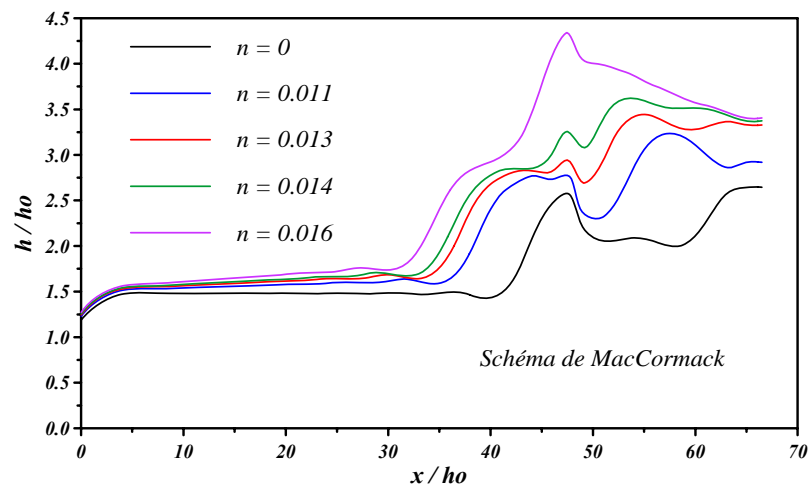


Figure (5.52) : Effet de la variation du nombre de Manning sur la surface d'eau dans une contraction rectiligne (Paroi latérale)

A travers ces figures, on remarque que toutes les lignes d'eau calculées pour les valeurs du nombre de Manning de 0.011, 0.013, 0.014 et 0.016, ont deux surélévations apparentes, que ce soit au niveau de l'axe ou au niveau de la paroi, à l'instar de celles de références, déterminées avec une valeur de Manning nulle. Tous les profils sont d'une part, plus élevés que celui de référence, et d'autre part, ils présentent un avancement par rapport au profil de base ($n=0$). L'élévation de la ligne d'eau est d'autant plus importante que la valeur du coefficient de rugosité de Manning augmente.

On dira alors, que le profil de la surface libre change d'allure pour chaque variation du nombre de Manning. Plus on augmente la valeur de ce coefficient, plus la ligne d'eau enregistre une élévation plus importante par rapport au cas pris comme référence ($n=0$), et plus cette ligne se décale vers l'amont. Il y a aussi naissance de perturbations dans le canal aval rectangulaire.

C. Variation de la longueur de la transition

Les figures (5.53) et (5.54) fournissent les lignes d'eau le long de l'axe médian et le long de la paroi, pour différentes valeurs de la longueur du rétrécissement. Les profils obtenus pour

des longueurs de 1.35 m, 1.60 m et 1.70 m, seront comparés avec le profil de référence pour une longueur de 1.45 m.

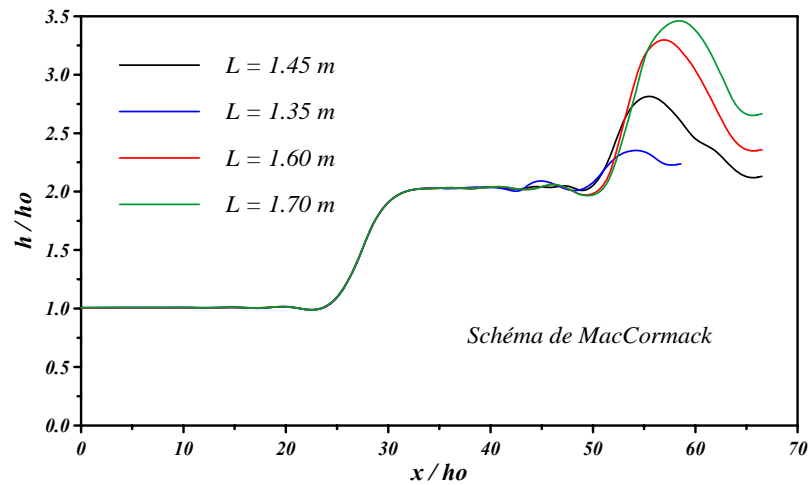


Figure (5.53) : Influence de la variation de la longueur de la transition sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

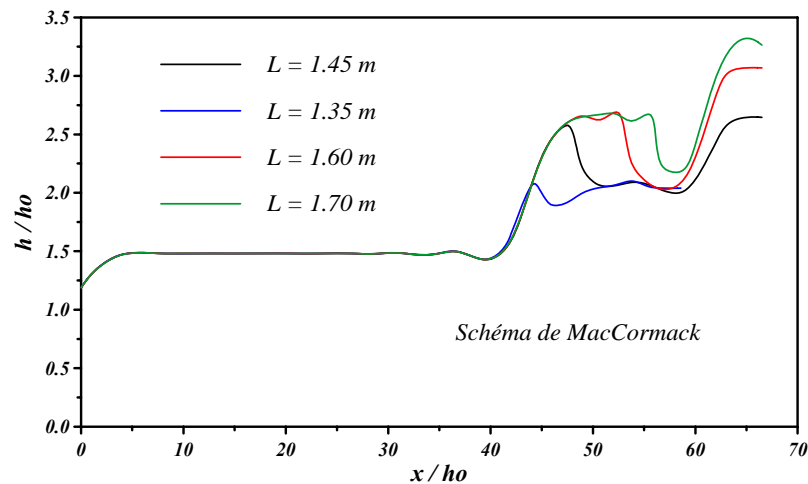


Figure (5.54) : Influence de la variation de la longueur de la transition sur l'écoulement dans une contraction rectiligne (Paroi latérale)

Celles-ci nous permettent de constater ce qui suit :

a) Le long de l'axe médian

- Les lignes d'eau présentent toujours deux élévations différentes.
- Pour les longueurs inférieures à celle de référence, la deuxième élévation est moins importante que le pic enregistré dans le profil de base ($L=1.45$ m).
- Pour les longueurs supérieures à celle de base, la valeur du second pic s'élève plus avec l'augmentation de la longueur de la contraction.
- Plus la longueur est grande, plus les perturbations dans le canal aval se propagent loin vers l'aval.

b) Le long de la paroi

- Pour des longueurs inférieures à 1.45 m, le pic de la ligne d'eau est moins important.
- Tandis que, pour des longueurs dépassant 1.45 m, le premier pic augmente et il y aura un second pic plus élevé, qui apparaît plus loin dans le canal aval rectangulaire.

En résumé, on remarque que pour des longueurs de transition dans la contraction étudiée dépassant la valeur considérée comme référence ($L=1.45$ m), les profils des lignes d'eau présentent des surélévations plus grandes et les perturbations se décalent de plus en plus loin en aval. Alors que, pour des longueurs inférieures à celle de référence, les lignes d'eau donnent des hauteurs et des discontinuités importantes.

5.5.1.2. Paramètres numériques

A. Variation du pas de discrétisation longitudinal

Les résultats de la variation du pas de discrétisation longitudinal $\Delta\xi$ sur l'allure de la ligne d'eau, sont portés sur les figures (5.55) et (5.56). Trois valeurs du pas sont considérées, à savoir, 0.0659, 0.1208 et 0.7250.

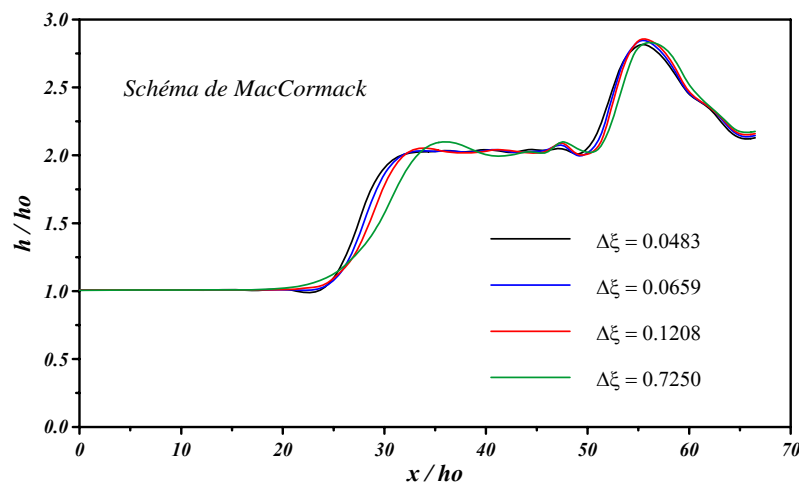


Figure (5.55) : Influence de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur le profil d'eau dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

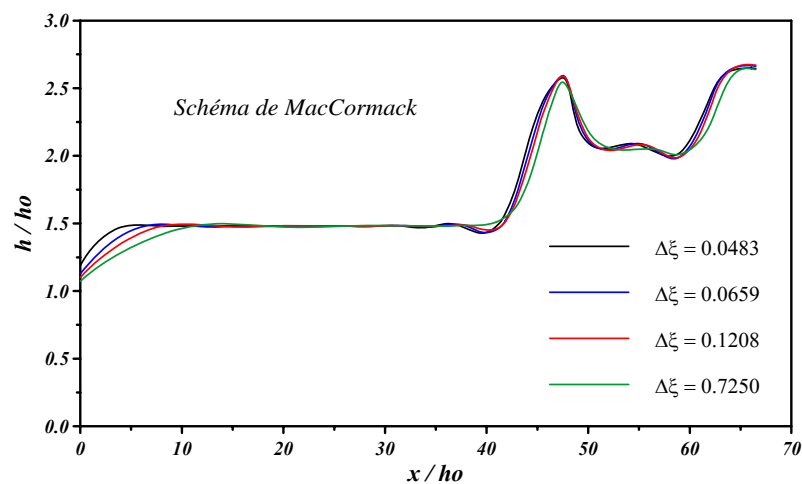


Figure (5.56) : Influence de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur le profil d'eau dans une contraction rectiligne (Paroi latérale)

D'après ces figures, on voit qu'en variant le pas de discrétisation $\Delta\xi$, la ligne présente quelques changements au début de la transition le long de la paroi latérale, et à l'intérieur de la contraction le long de l'axe de symétrie. Plus on augmente la valeur de ce pas, plus les résultats seront moins bons, comparativement à la ligne d'eau calculée avec un pas de 0.0483.

De ce fait, on peut conclure que la variation du pas de discrétisation suivant le sens de l'écoulement, engendre un changement dans le profil de la ligne d'eau. Plus le pas est petit, plus les résultats seront satisfaisants.

B. Variation du pas de discrétisation transversal

Pour voir s'il y a un effet lors de la variation du pas de discrétisation transversal $\Delta\eta$ sur la surface d'eau, des valeurs du pas de l'ordre de 0.0416, 0.0526 et 0.0714 sont prises en compte.

Les figures (5.57) et (5.58) montrent qu'il y a quand même des modifications dans l'allure de la ligne d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi. Elles se manifestent plus précisément à la fin du rétrécissement et à l'intérieur du canal aval rectangulaire, et deviennent plus apparentes pour des pas plus grands. Les résultats sont donc meilleurs pour une discrétisation avec des pas assez petits.

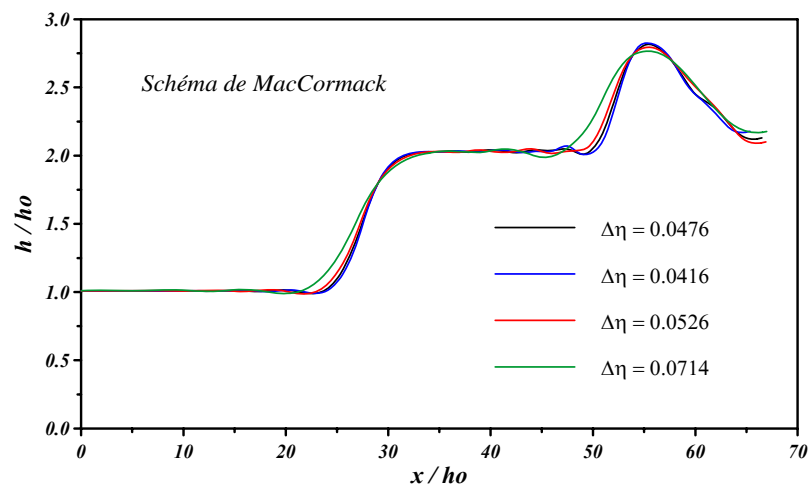


Figure (5.57) : Effet de la variation du pas de discrétisation transversal dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

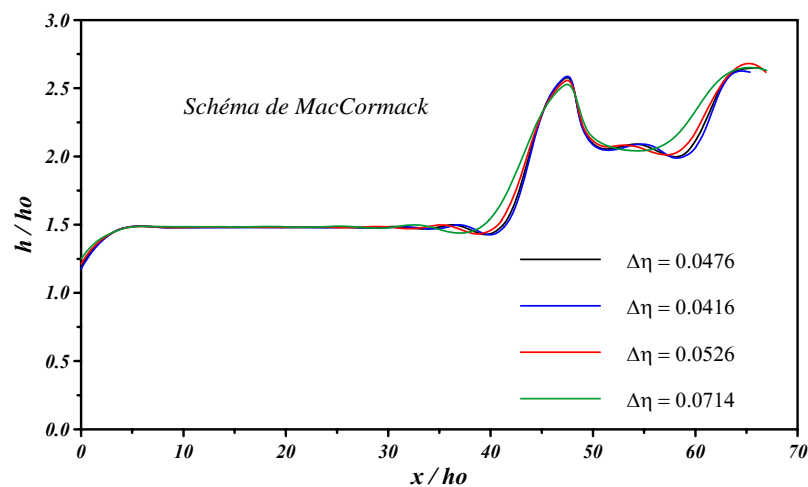


Figure (5.58) : Effet de la variation du pas de discrétisation transversal dans une contraction rectiligne (Paroi latérale solide)

C. Variation des pas de discrétisation longitudinal et transversal

Dans cette étape, on essayera de vérifier s'il y aura une influence sur les résultats, en faisant varier simultanément les pas de discrétisation longitudinal $\Delta\xi$ et transversal $\Delta\eta$. Les profils obtenus des lignes d'eau sont regroupés dans les figures (5.59) et (5.60), contenant les résultats calculés avec la paire de valeurs de référence ($\Delta\xi = 0.0483$, $\Delta\eta = 0.0476$) et les deux paires de pas ci-après : ($\Delta\xi = 0.0537$, $\Delta\eta = 0.0526$) et ($\Delta\xi = 0.0659$, $\Delta\eta = 0.0714$).

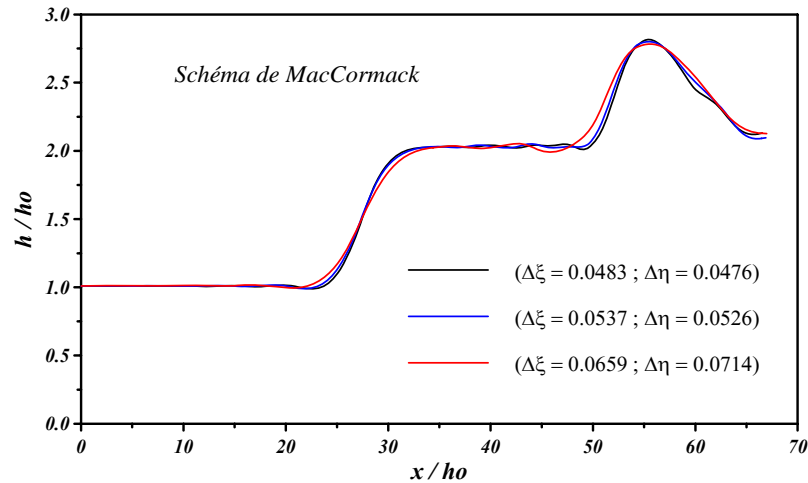


Figure (5.59) : Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

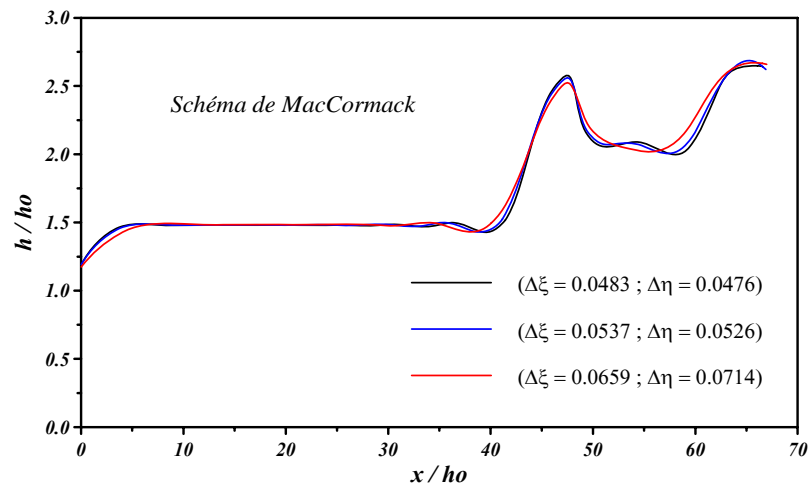


Figure (5.60) : Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal dans une contraction rectiligne (Paroi latérale)

La variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal n'entraîne pas de variations significatives dans les lignes d'eau. On constate que plus le maillage est raffiné, plus les résultats sont bons dans l'ensemble.

D. Variation du nombre de Courant

En prenant des valeurs du nombre de Courant de l'ordre de 0.3, 0.5, 0.6 et 0.9, les lignes d'eau obtenues au niveau de l'axe médian et le long de la paroi (Figures (5.61) et (5.62)), comparées avec la ligne de référence déterminée pour la valeur de 0.8, présentent quelques variations enregistrées à l'intérieur de la transition ainsi, que dans le canal aval.

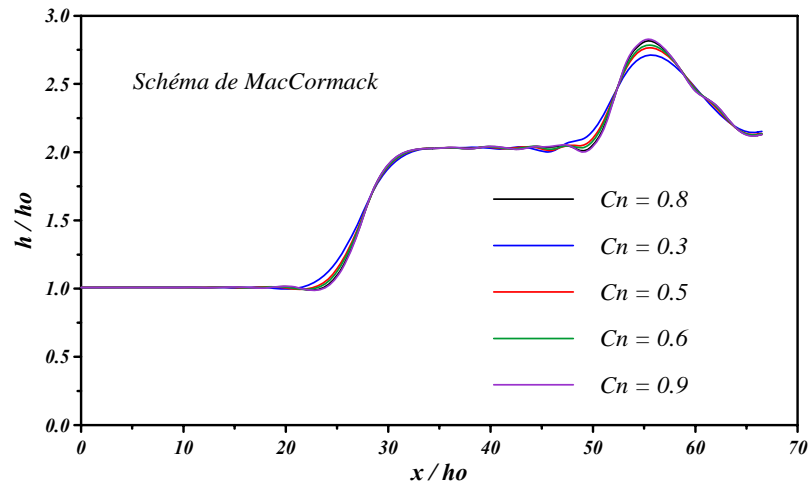


Figure (5.61) : Influence de la variation du nombre de Courant sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne (Axe de symétrie)

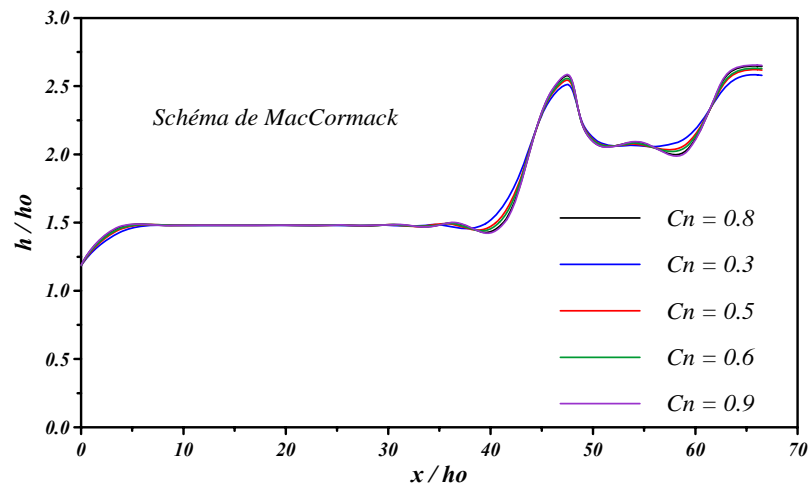


Figure (5.62) : Influence de la variation du nombre de Courant sur la ligne d'eau dans une contraction rectiligne (Paroi solide)

La ligne d'eau correspondant à la valeur du nombre de Courant de 0.9, est superposée avec le profil calculé pour une valeur de 0.8. Donc, la valeur optimale du nombre de Courant utilisée dans la condition de stabilité de "Courant-Friedrichs-Lewy" (C.F.L.) est de 0.8.

5.5.2. Elargissement de Rouse

5.5.2.1. Paramètres hydrauliques

A. Variation du nombre de Froude amont

Sachant que la valeur du nombre de Froude dans l'application de base est égale à 2, on opte dans l'étude paramétrique, pour des valeurs de ce nombre de 1.5, 3, 4 et 5.

Les profils obtenus de la surface d'eau, donnés par les figures (5.63) et (5.64), montrent après comparaison avec le profil de référence que :

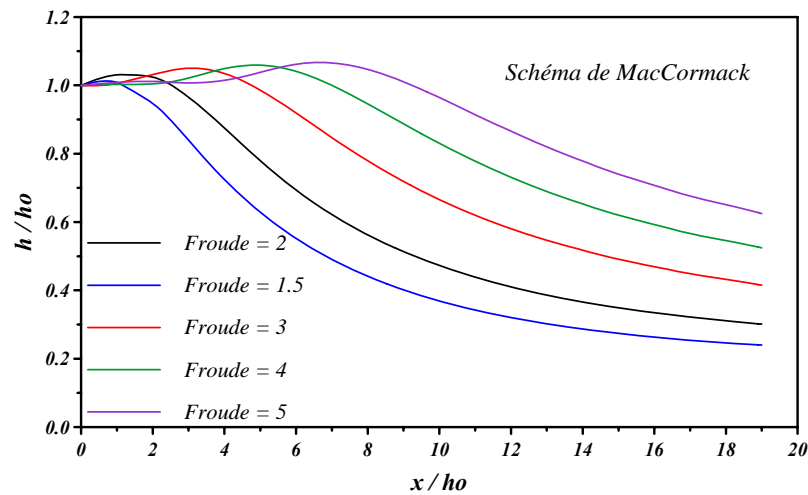


Figure (5.63) : Effet de la variation du nombre de Froude incident sur l'écoulement dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

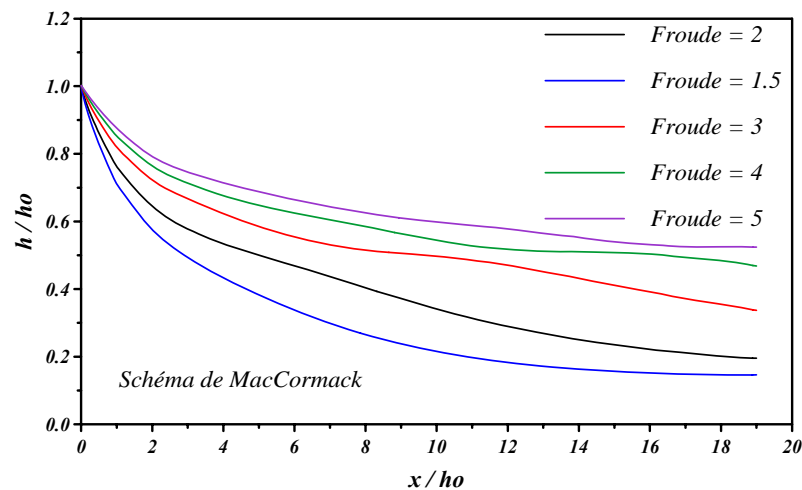


Figure (5.64) : Effet de la variation du nombre de Froude incident sur l'écoulement dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale)

a) Le long de l'axe médian

Pour une valeur de Froude amont inférieure à celle de référence ($F_1=2$), la ligne d'eau se trouve au dessous de la première. Alors qu'en augmentant le nombre de Froude, le profil de surface diminue en fonction de la distance, ce qui est attendu dans le cas d'un élargissement progressif de paroi, sauf que l'abaissement se fait à des sections différentes pour chaque valeur étudiée. La vitesse d'écoulement dans ce cas, croît en accentuant la valeur du nombre de Froude pour la même hauteur d'eau amont, ce qui engendrera bien sûr un certain palier avant le rabaissement du profil d'eau le long de l'axe de symétrie.

b) Le long de la paroi

Dans un élargissement graduel, la ligne d'eau décroît rapidement le long de la paroi. C'est ainsi que, pour des valeurs de Froude inférieures à la valeur de référence, cette ligne présente un rabaissement plus grand que celui de base, et pour des valeurs supérieures, on constate aussi une diminution en fonction de la distance de moins en moins prononcée, suivant la valeur prise du nombre de Froude amont.

La variation du nombre de Froude amont influe ainsi, considérablement sur l'allure de la ligne d'eau dans un élargissement progressif. L'augmentation de ce nombre engendre des surélévations du profil d'eau en chaque point le long de l'axe et le long de la paroi. Les changements dans la surface d'eau sont beaucoup plus apparents le long de l'axe médian, où on assiste à l'apparition d'une certaine distance, en fonction de la valeur du nombre de Froude, dans laquelle la hauteur d'eau est autour de la valeur initiale h_0 .

B. Variation du coefficient de rugosité de Manning

La conséquence du changement du coefficient de rugosité de Manning sur l'allure de la ligne d'eau est analysée dans ce second cas. Les résultats obtenus avec les valeurs de 0, 0.014, 0.016 et 0.018, confrontés avec ceux calculés avec la valeur de référence égale à 0.012, sont illustrés dans les figures (5.65) et (5.66).

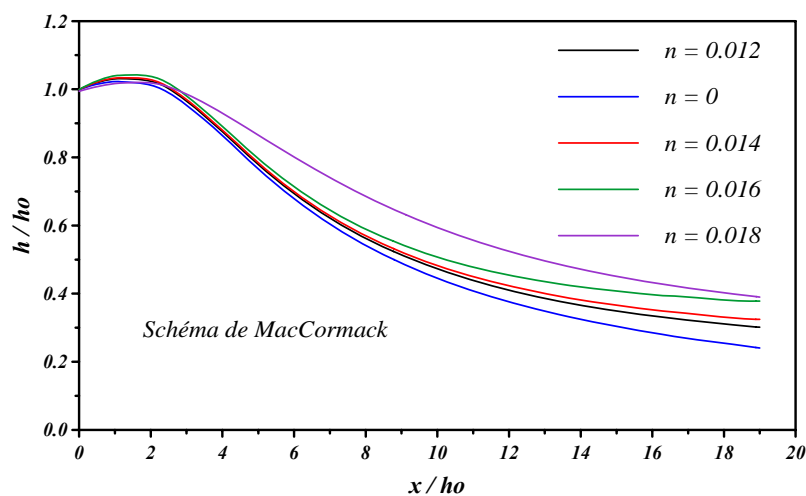


Figure (5.65) : Influence de la variation du nombre de Manning sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

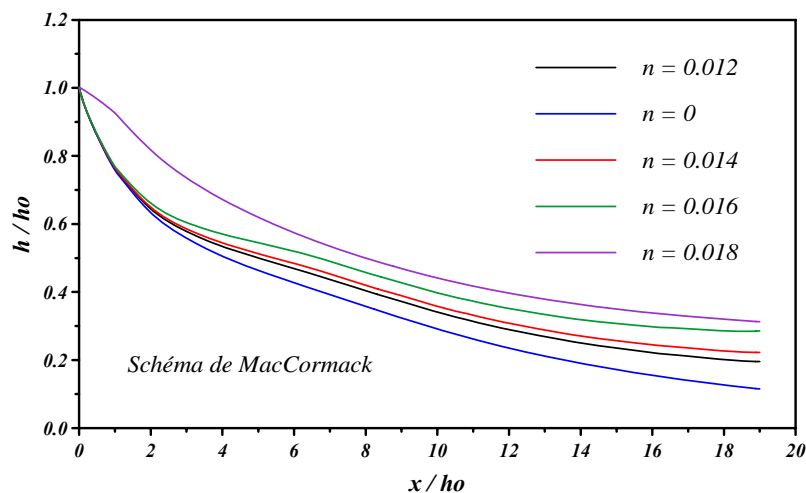


Figure (5.66) : Influence de la variation du nombre de Manning sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale)

On constate alors, que la ligne d'eau au niveau de l'axe et le long de la paroi garde la même allure dans l'ensemble. Plus on accroît la valeur de ce coefficient, on aura une ligne d'eau un peu élevée à partir de la moitié de la transition. Dans le cas où la valeur est inférieure

à celle de référence, il y aura par contre, un rabaissement de la ligne d'eau. La surélévation du profil d'eau devient importante pour la valeur de 0.018.

De ce fait, le nombre de Manning qui est directement lié à la rugosité, a une influence sur la variation du niveau d'eau dans l'expansion progressive analysée. A chaque fois qu'on fait augmenter ce nombre, on observe une surélévation du niveau d'eau. Cela s'explique par le ralentissement de l'écoulement engendré par l'accroissement des frottements.

C. Variation de la largeur amont de la transition

Les profils des lignes d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi, rassemblés dans les figures respectives (5.67) et (5.68) ci-dessous, sont calculés pour des largeurs à l'amont de 0.110 m, 0.115 m, 0.130 m et 0.150 m, en plus de la valeur 0.122 m de référence.

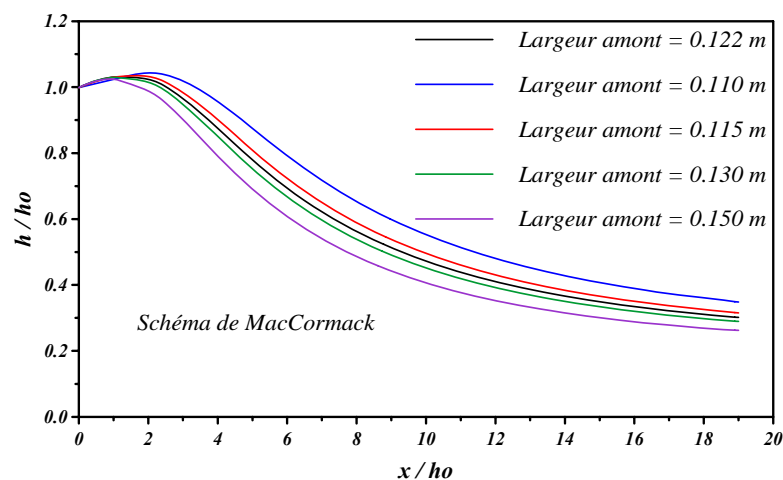


Figure (5.67) : Influence de la variation de la largeur amont de l'élargissement de Rouse sur la surface d'eau (Axe de symétrie)

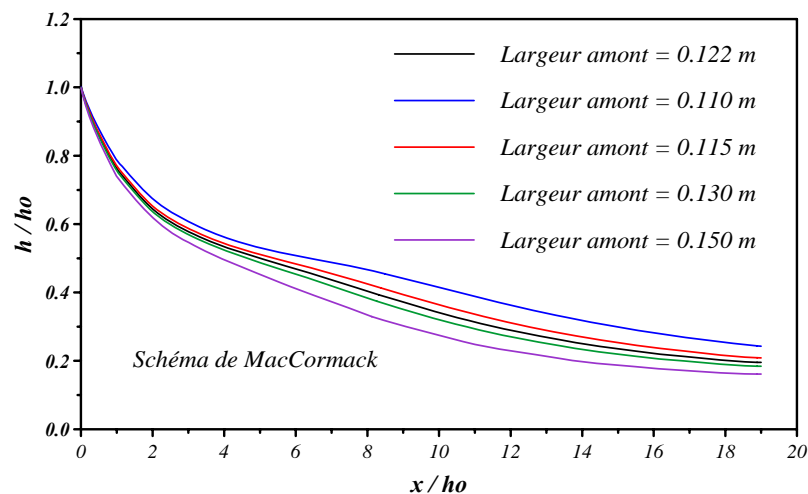


Figure (5.68) : Influence de la variation de la largeur amont de l'élargissement de Rouse sur la surface d'eau (Paroi latérale)

A partir de ces graphes, on remarque que toutes les courbes suivent la même allure. Les lignes d'eau vont en diminuant de l'amont vers l'aval, elles démarrent cependant d'un même point $h=h_0$ (même condition sur la hauteur à l'amont). La variation de la hauteur d'eau tout le

long de l'élargissement est inversement proportionnelle à la largeur b_1 . La ligne d'eau correspondant à une largeur b_1 donnée, se trouvera au dessous d'une ligne d'eau correspondant à une largeur b_1 inférieure, et inversement.

En augmentant la largeur b_1 à l'amont de la transition, c'est toute la dimension de l'élargissement progressif qui change ; et avec les mêmes conditions aux limites à l'amont, l'accroissement de la largeur b_1 entraîne un étalement du tirant d'eau, ce qui va créer une diminution de la hauteur d'eau h .

D. Variation de la longueur de la transition

En variant la longueur de la transition pour des valeurs de 0.305 m, 0.4575 m, 0.610 m, 0.7625 m et 0.915 m, et après comparaison avec le profil de base déterminé pour une longueur de 0.549 m, on constate à partir des figures (5.69) et (5.70) qu'il n'y a aucun changement dans la forme de la surface libre, que ce soit au niveau de l'axe ou au niveau de la paroi.

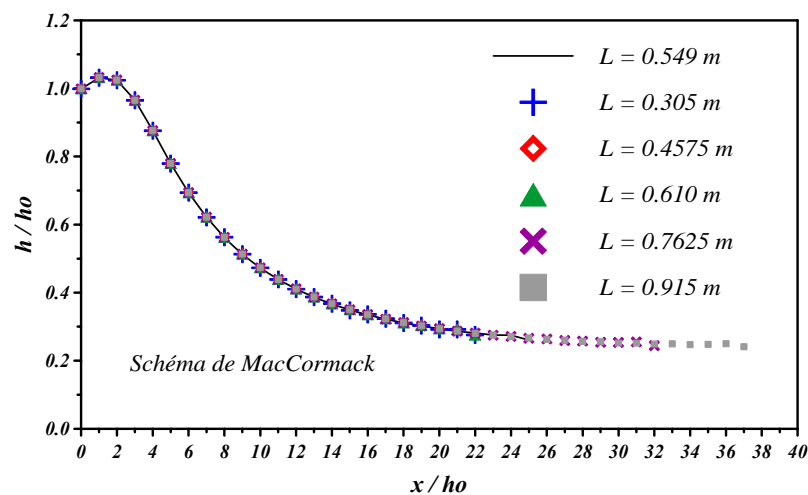


Figure (5.69) : Effet de la variation de la longueur de l'élargissement de Rouse sur l'écoulement (Axe de symétrie)

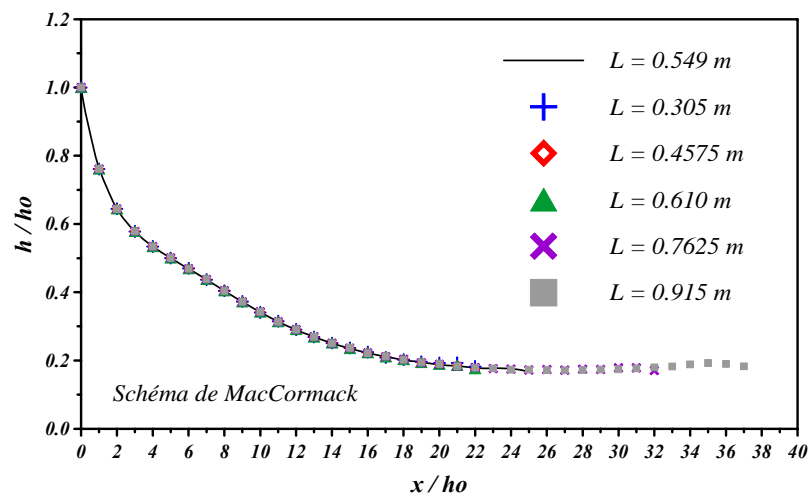


Figure (5.70) : Effet de la variation de la longueur de l'élargissement de Rouse sur l'écoulement (Paroi solide)

On conclut que dans un élargissement graduel de canal, la variation de la longueur de la transition n'influe aucunement sur l'allure de la ligne d'eau. L'écoulement étant supercritique, il se fait de l'amont vers l'aval, et l'expansion est graduelle, ne présentant ainsi aucune discontinuité.

5.5.2.2. Paramètres numériques

A. Variation du pas de discrétisation longitudinal

L'effet de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur la surface d'eau est indiqué dans les figures (5.71) et (5.72), où on a pris en compte la ligne d'eau, calculée pour un pas de 0.0305 comme résultat de référence, et les lignes d'eau calculées avec les pas respectifs de 0.0203, 0.0458 et 0.0784.

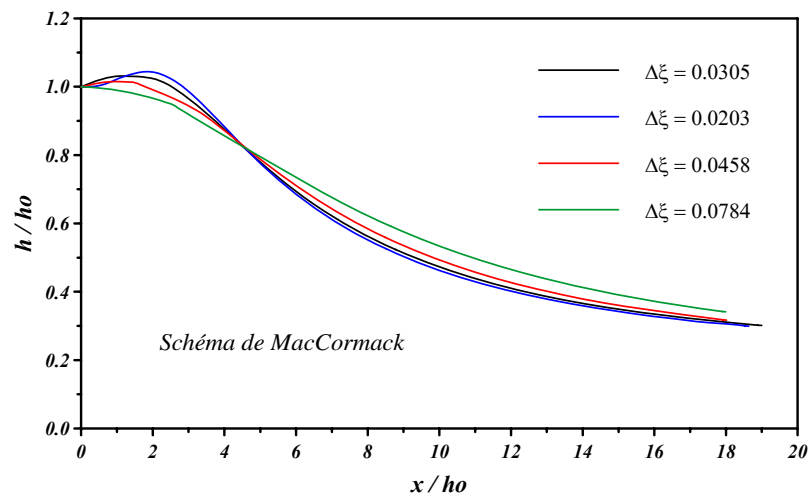


Figure (5.71) : Effet de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

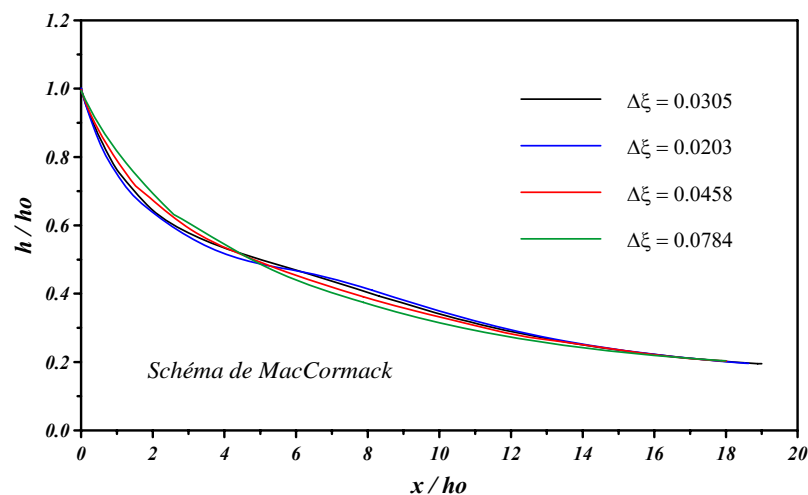


Figure (5.72) : Effet de la variation du pas de discrétisation longitudinal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi solide)

Pour un pas inférieur à 0.0305, la ligne d'eau le long de l'axe de symétrie s'élève par rapport à celle de référence au début de la transition, et s'abaisse à partir du point correspondant à $x/h_0 \approx 4.5$. L'inverse se produit pour des valeurs du pas supérieures à celle de base. Par ailleurs, le contraire est totalement constaté dans la ligne d'eau au niveau de la paroi.

On dira alors, que la variation du pas de discrétisation longitudinal entraîne des modifications dans les profils d'eau bien qu'elle engendre en général la même forme. Cependant, la valeur du pas de 0.0305 est considérée comme optimale, vu qu'elle se rapproche des valeurs expérimentales (comme illustré dans la deuxième application de la première partie).

B. Variation du pas de discrétisation transversal

Pour voir à présent l'effet de la variation du pas de discrétisation transversal $\Delta\eta$ sur la solution obtenue avec un pas de 0.0476, d'autres profils d'eau seront tracés en utilisant les valeurs de 0.0526, 0.0909 et 0.1250 (Figures (5.73) et (5.74)).

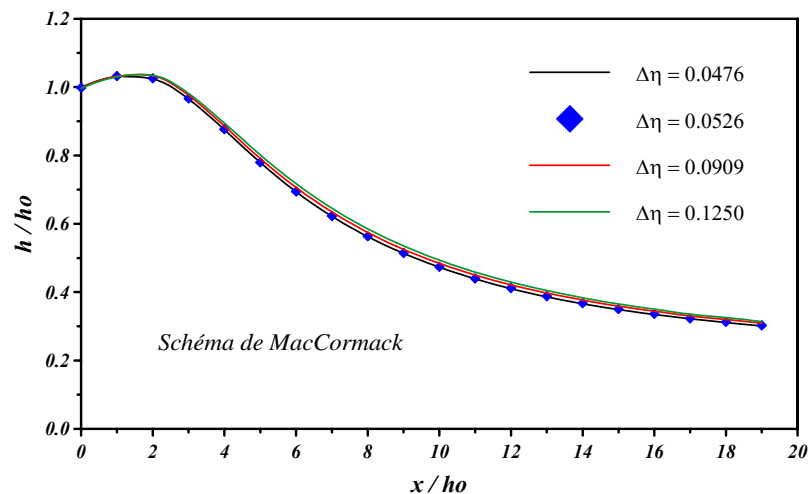


Figure (5.73) : Influence de la variation du pas de discrétisation transversal sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

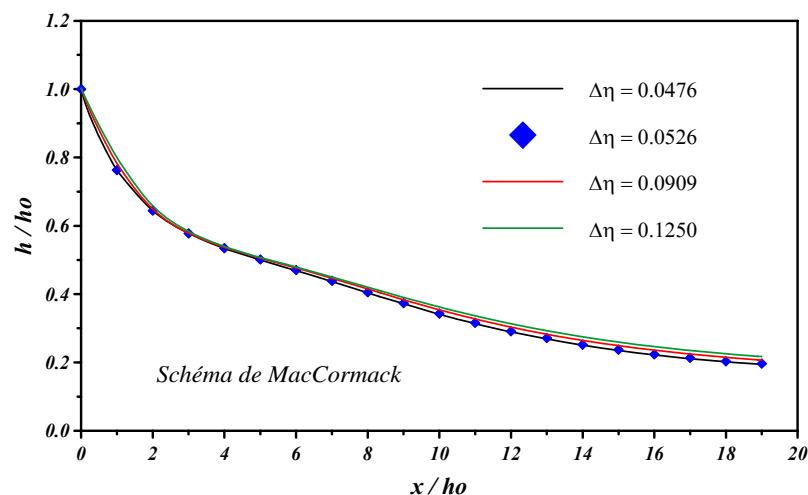


Figure (5.74) : Influence de la variation du pas de discrétisation transversal sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale)

Aucun changement significatif n'est observé sur les différentes lignes d'eau au niveau de l'axe et de la paroi, par rapport au cas pris comme référence. Cela peut s'expliquer par la faible variation des hauteurs dans la direction perpendiculaire au sens d'écoulement, due à la forme de la transition elle-même.

C. Variation des pas de discrétisation longitudinal et transversal

En prenant les couples de valeurs des pas de discrétisation longitudinal $\Delta\xi$ et transversal $\Delta\eta$ de $(\Delta\xi = 0.0172, \Delta\eta = 0.0526)$, $(\Delta\xi = 0.0458, \Delta\eta = 0.0909)$, $(\Delta\xi = 0.0784, \Delta\eta = 0.1250)$ et celui de référence $(\Delta\xi = 0.0305, \Delta\eta = 0.0476)$, les profils obtenus sont exprimés par les figures (5.75) et (5.76) ci-après.

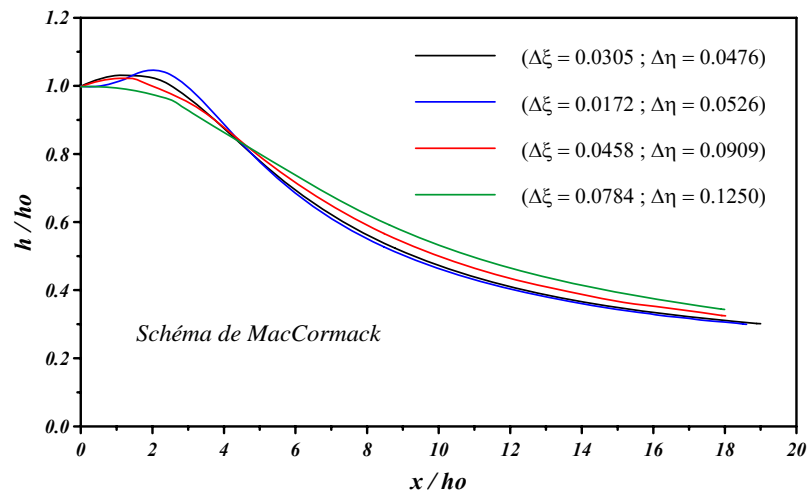


Figure (5.75) : Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

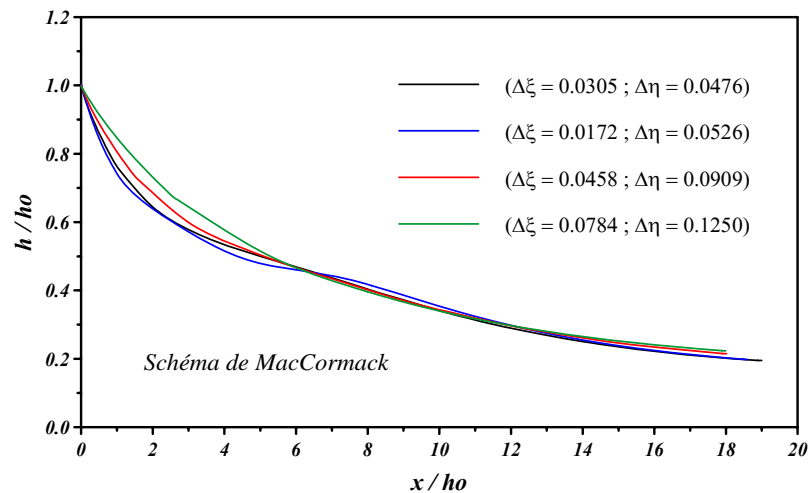


Figure (5.76) : Effet de la variation simultanée des pas de discrétisation longitudinal et transversal sur la ligne d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi latérale)

Au regard de ces deux figures, on observe que les mêmes modifications enregistrées dans le cas de la variation du pas de discrétisation longitudinal $\Delta\xi$, apparaissent presque de la même façon pour la variation simultanée des pas longitudinal et transversal ($\Delta\xi$ et $\Delta\eta$). Ceci dénote que l'influence du changement du pas $\Delta\xi$ est prépondérante, du moment que lors de la variation du pas $\Delta\eta$, il n'y avait pas de modifications notables.

Le choix des pas de discrétisation est finalement très important pour avoir des solutions satisfaisantes.

D. Variation du nombre de Courant

Différentes valeurs du nombre de Courant sont prises dans cette étape, afin d'évaluer s'il y aura une influence sur les résultats. L'analyse est alors faite pour les valeurs de ce nombre de 0.1, 0.3, 0.7 et 0.8, ainsi que celle de référence qui est égale à 0.9. Les figures (5.77) et (5.78) donnent les profils des lignes d'eau pour toutes ces valeurs.

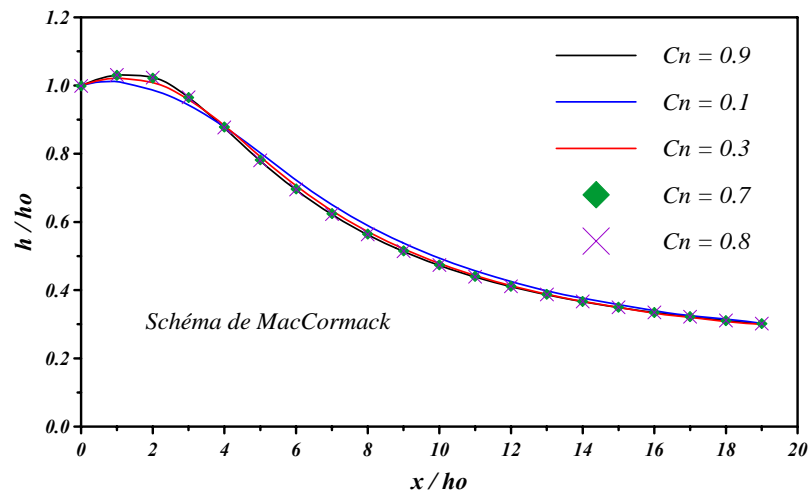


Figure (5.77) : Influence de la variation du nombre de Courant sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Axe de symétrie)

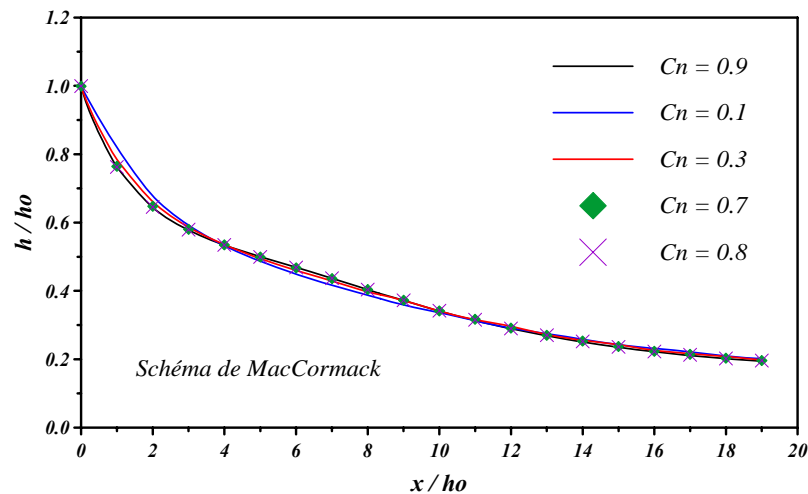


Figure (5.78) : Influence de la variation du nombre de Courant sur le profil d'eau dans l'élargissement de Rouse (Paroi solide)

Pour des faibles valeurs du nombre de Courant (0.1 et 0.3), on observe quelques variations de la ligne d'eau, principalement au début de la transition. Par contre, quand les valeurs s'approchent de celle de référence (0.9), les profils d'eau sont presque confondus. Néanmoins, et en fonction de ces résultats, on opte pour l'utilisation de la valeur de nombre de Courant de 0.8 au lieu de celle proposée par Bhallamudi et Chaudhry (1992), qui est de 0.9.

CONCLUSION GENERALE

Le calcul numérique en hydraulique et en mécanique des fluides, a pratiquement envahi tous les domaines de recherches et d'applications en sciences de l'eau et en ingénierie des fluides. Nous en avons tous bénéficié, dans la mesure où cette invasion a permis une meilleure compréhension de phénomènes complexes dans les fluides, et a fourni un référentiel pour tester et vérifier les concepts et leurs schémas opérationnels. Ces dernières années, l'effort s'est donc déplacé de la description fine des phénomènes, vers les aspects numériques et informatiques du calcul. Ainsi, la discipline d'hydraulique en général et l'hydraulique de surface en particulier, connaît un grand développement grâce à l'outil de calcul numérique, vu que les équations du mouvement régissant plusieurs types d'écoulements sont souvent insolubles par les méthodes algébriques connues (méthodes analytiques).

Un des problèmes qui revêt un grand intérêt dans l'hydraulique de surface, est l'analyse des écoulements non permanents, et dont la difficulté est triplement accentuée s'ils sont en régime torrentiel, traversant des canaux à géométrie variable et à caractère bidimensionnel ; ce qui engendre une quatrième complexité, propre à la nature du système d'équations de base.

Nous avons présenté dans ce travail de recherche, une étude portant sur les écoulements torrentiels dans des contractions et des élargissements symétriques de canaux à surface libre. Ces structures, utilisées essentiellement dans les coursiers d'évacuateurs de crues, sont habituellement appelées "transitions" du fait que leur longueur est petite, comparée à la longueur totale du coursier lui-même.

Les transitions en écoulement torrentiel entraînent souvent des instabilités à la surface de l'eau, caractérisées par des perturbations et des discontinuités donnant naissance à des particularités de type ondes, très dangereuses, connues en hydraulique sous l'appellation "ondes transversales".

Les écoulements torrentiels sont gouvernés par le système d'équations du mouvement des écoulements à surface libre en régime non permanent et à deux dimensions spatiales, donné par Adhémar Jean-Claude Barré de Saint Venant. Ce système a été obtenu, à partir de l'intégration suivant la profondeur des équations de Navier Stokes moyennant des hypothèses simplificatrices, dénommées hypothèses classiques de Saint Venant et émises pour la première fois en 1871.

Sachant pertinemment que l'une des hypothèses simplificatrices principales, émise par Saint Venant lors de l'établissement de ces équations du mouvement, est la faible pente de fond du canal ; et par suite, le modèle mathématique ainsi établi, ne peut être appliqué aux cas des canaux à fortes pentes. Pour cela, une généralisation des équations de base de Saint Venant, a été faite en vue d'analyser des structures hydrauliques avec n'importe quelle pente de fond, que ce soit faible ou importante.

Les équations de base telles qu'elles sont obtenues dans cette étape, ne peuvent pas être appliquées directement pour calculer les écoulements dans des canaux présentant des changements locaux de section lors de l'utilisation d'une méthode numérique de résolution, car la prise en compte des conditions aux limites au niveau des parois de telles structures pose problème. L'application d'une transformation géométrique, proposée par Jimenez et Chaudhry (1988) et Bhallamudi et Chaudhry (1992), permettant la conversion du domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire, fournit de nouveaux systèmes d'équations écrits en coordonnées transformées, que ce soit en fonction des variables d'écoulement (h, h_u, h_v) ou en fonction des primitives des variables d'écoulement (h, u, v), et que ce soit à faible ou à forte pente. Par conséquent, une variété de systèmes d'équations de mouvement a été donnée.

Le modèle mathématique de Saint Venant est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de nature hyperbolique, dont une solution analytique est presque impossible. De ce fait, la seule alternative reste l'utilisation de méthodes numériques de calcul.

La synthèse bibliographique a mis en évidence la méthode des différences finies comme étant la plus employée et la plus adéquate pour la résolution des équations de base de l'écoulement étudié. Cette méthode contient deux groupes de schémas, à savoir, les schémas explicites et les schémas implicites.

La résolution des équations du mouvement a été faite avec deux schémas aux différences finies précis à l'ordre deux, en espace et en temps, qui sont le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming. L'objectif principal de l'utilisation de deux schémas différents, est de tester et de comparer la qualité des résultats obtenus dans les mêmes applications, afin d'en tirer les conclusions quand au choix d'un tel ou tel schéma.

Les deux codes de calcul ainsi élaborés avec les schémas de MacCormack et de Beam et Warming, ont été testés dans le cas d'une contraction rectiligne symétrique, de l'élargissement symétrique de Rouse et d'un élargissement rectiligne symétrique en écoulement torrentiel, avec pour but, la détermination des profils des lignes d'eau le long de l'axe et de la paroi. Les trois cas étudiés dans cette partie, sont soit à pente nulle ou à pente faible.

Les résultats obtenus par le premier modèle numérique, basé sur une discrétisation au moyen du schéma aux différences finies explicite de MacCormack sont :

- En parfaite concordance avec les résultats numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992) le long de l'axe et de la paroi, et, relativement acceptables par rapport aux résultats expérimentaux de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) ; et ceci dans le cas d'un rétrécissement rectiligne symétrique de canal.
- Ils sont très appréciables dans le cas de l'élargissement de Rouse, comparés aux résultats numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992) et aux résultats expérimentaux de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992).
- Pour le cas d'un élargissement rectiligne symétrique de canal, ces résultats présentent une approche satisfaisante avec les mesures expérimentales de Herbich et Walsh (1972) qu'avec les résultats théoriques des mêmes auteurs.

Les résultats obtenus par le deuxième modèle numérique, fondé sur la base du schéma aux différences finies implicite de Beam et Warming, sont à leurs tours :

- Beaucoup moins appréciables dans la contraction rectiligne symétrique, comparés aux résultats numériques de Bhallamudi et Chaudhry (1992) et aux points expérimentaux de Coles et Shintaku (Ippen et Dawson, 1951 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992).
- Par contre, ils sont satisfaisants dans l'élargissement symétrique de Rouse, par rapport à ceux numériques et expérimentaux des mêmes auteurs ci-dessus.
- Tandis qu'ils sont plus ou moins acceptables dans l'élargissement rectiligne symétrique, comparés avec les mesures expérimentales de Herbich et Walsh (1972) et moins appréciables par rapport aux résultats théoriques de Herbich et Walsh (1972) également.

La différence qui apparait entre les résultats calculés moyennant des schémas numériques et les mesures expérimentales dans la contraction en écoulement torrentiel, est due

principalement, à la non validité de l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions. En effet, la déviation positive des parois d'un canal vers l'écoulement, engendre des discontinuités brutales dans la surface de l'eau (ondes transversales), ce qui fait que la pression ne peut en aucun cas être hydrostatique au voisinage de ces points. Dans le but d'obtenir des résultats acceptables dans cette transition, il est nécessaire d'inclure les termes de Boussinesq pour tenir compte de la non-hydrostaticité de la pression due à l'effet de l'accélération verticale. Il a été montré par ailleurs, que l'erreur causée par l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses est négligeable (Bhalla et Chaudhry, 1992).

La bonne concordance entre les résultats numériques déterminés dans notre cas, avec les mesures expérimentales pour l'élargissement symétrique de Rouse, s'explique par le fait que la divergence des parois d'une telle structure hydraulique est tellement graduelle, que la distribution des pressions est hydrostatique, ou pouvant être considérée comme telle. Cette transition offre un écoulement sans aucune perturbation, ni instabilité à la surface.

Contrairement à un élargissement graduel de canal, les parois dans un élargissement rectiligne divergent suivant un angle de déviation θ . Il existe donc, des points de discontinuités à l'endroit de la jonction entre les parois de la transition et celles des canaux rectangulaires amont et aval. Le choix de l'angle de déviation doit se faire d'une manière judicieuse, autrement un décollement se manifesterait juste au début de la transition, entraînant une non-hydrostaticité de la pression. Cela explique en quelque sorte, la différence entre les résultats calculés et les valeurs expérimentales de Herbich et Walsh (1972). Le phénomène de séparation de l'écoulement doit être évité ou au moins minimisé dans de telles structures.

Néanmoins, les hauteurs maximales obtenues dans l'ensemble des applications traitées, s'approchent bien des mesures expérimentales, ce qui permet de les utiliser dans le dimensionnement des parois latérales des zones de transitions étudiées.

L'étude comparative entre le schéma explicite de MacCormack et le schéma implicite de Beam et Warming, montre clairement que les résultats obtenus avec le premier schéma sont, en somme, plus satisfaisants que ceux calculés par le second schéma, en particulier, quand il s'agit du calcul des écoulements torrentiels à travers des transitions présentant des discontinuités brutales dans la ligne d'eau. Le schéma aux différences finies explicite de MacCormack présente ainsi, une meilleure aptitude à simuler les écoulements torrentiels dans des canaux à géométrie irrégulière avec présence des sommets abrupts. Il est d'ailleurs, le plus utilisé durant ces dernières années, parmi tous les schémas aux différences finies, que ce soit implicites ou explicites. La confirmation de cet état de fait, se trouve dans la partie synthèse bibliographique effectuée et dans laquelle il a été constaté que le nombre de travaux de recherches traités avec le schéma de MacCormack est vraiment très important. Ceci dit, et en fonction des résultats obtenus, notre choix s'est porté sur le schéma explicite de MacCormack.

Après avoir opté pour le schéma explicite de MacCormack, comme étant le plus approprié dans le type de travail de recherche entrepris dans notre cas, une étude approfondie a été menée avec le modèle numérique élaboré en utilisant le schéma de MacCormack. Cette étude, faite pour une contraction rectiligne symétrique, l'élargissement symétrique de Rouse et un élargissement rectiligne symétrique, est divisée en deux principaux volets. Le premier volet contient essentiellement, la détermination d'une part, des réseaux d'écoulement en 3D et en 2D, et d'autre part, la présentation des champs de vitesses à l'intérieur des trois transitions traitées, ce qui est très important dans de telles recherches. Par ailleurs, le second volet a été consacré à l'analyse de l'aptitude du modèle numérique à simuler les écoulements non permanents bidimensionnels, à

travers des structures convergentes et divergentes avec des pentes de fond assez importantes ; en d'autres termes, vérifier la validité du modèle mathématique de Saint Venant généralisé aux cas de fortes pentes de fond. Pour cela, et vu le manque flagrant d'applications contenant des mesures expérimentales dans le cas de transitions à fortes pentes, le modèle numérique a été testé d'abord sur un coursier d'évacuateur de crues à section transversale rectangulaire en modèle réduit, ayant une pente de fond considérable d'environ 28° . Les résultats obtenus, comparés aux mesures expérimentales faites pour trois différents débits, sont fort appréciables. En tenant compte de ces bons résultats, l'étude a été étendue au cas d'une structure hydraulique convergente (Contraction rectiligne symétrique) et une autre divergente (Élargissement symétrique de Rouse), avec des pentes de fond variables. L'analyse a été faite en augmentant la pente de fond à 15° , 25° et à 40° pour les deux transitions ; les résultats obtenus sont très intéressants. Donc, le modèle numérique est apte à traiter des écoulements torrentiels à deux dimensions spatiales et en régime non permanent dans n'importe quelle structure hydraulique, à faible ou à forte pente.

Une étude paramétrique a été par la suite menée en utilisant ce schéma numérique, et qui avait pour objectif, de varier quelques facteurs hydrauliques et numériques susceptibles d'entraîner des variations dans les allures des lignes d'eau le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi latérale solide, dans un rétrécissement rectiligne symétrique et l'élargissement symétrique de Rouse. Les résultats obtenus dans les deux applications, montrent que la variation des paramètres hydrauliques influe plus considérablement sur la forme de la surface libre qu'en variant certains paramètres numériques.

Ainsi, et dans le cas d'une contraction rectiligne de canal, l'augmentation des valeurs du nombre de Froude, du coefficient de rugosité de Manning, ou même de la longueur de la transition, engendre de grands changements dans les lignes d'eau le long de l'axe et le long de la paroi. Plus on prend des valeurs de ces paramètres qui dépassent les valeurs considérées comme références ($F_1 = 4$, $n = 0$ et $L = 1.45$ m), plus la surface de l'eau présente des surélévations importantes.

Alors que dans le cas d'une expansion graduelle de canal, les variations sont plus particulièrement importantes en variant la valeur du nombre de Froude amont et à un degré moindre en variant le coefficient de rugosité de Manning et la largeur amont de l'élargissement, aucune variation n'est enregistrée en changeant la longueur de la transition en question.

Signalons à la fin, que d'un côté, la transformation de coordonnées, proposée par Jimenez et Chaudhry (1988) et Bhallamudi et Chaudhry (1992) et qui a été utilisée afin de passer d'un canal de forme géométrique irrégulière, à un autre avec une forme très régulière (exactement rectangulaire) est très efficace, du moment qu'elle a beaucoup facilité la prise en compte des conditions aux limites au niveau des parois latérales solides des transitions traitées ; et d'un autre côté, les résultats obtenus en employant la technique de Jimenez (Jimenez et Chaudhry, 1988 ; Bhallamudi et Chaudhry, 1992) portant sur l'utilisation du modèle mathématique en régime non permanent, pour obtenir des solutions à l'état permanent en considérant le terme temps (t) présent dans les équations du mouvement, comme un facteur d'itération, sont très encourageants, puisqu'ils présentent une nette amélioration, par rapport aux résultats de Bhallamudi et Chaudhry (1992).

BIBLIOGRAPHIE

- Abbot, M. B.**, "Computational hydraulics : Elements of the theory of free surface flow", *Pitman publishing limited Edition*, London, 1979.
- Abbot, M. B., McCowan, A. D. et Warren, I. R.**, "Accuracy of short-wave numerical models", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 110, No. 10, pp.1287-1301, October 1984.
- Ahmad, Z., Kothyari, U. C. et Ranga Raju, K. G.**, "Finite difference scheme for longitudinal dispersion in open channels", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 37, No. 3, pp. 389-405, 1999.
- Ahmad, Z.**, "Quasi-theoretical end-depth-discharge relationship for rectangular channels", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE*, Vol. 129, No. 2, pp. 138-141, March/April 2003.
- Alhamid, A. A. et Negm, A. M.**, "Depth ratio of hydraulic jump in rectangular stilling basins", *Jour. of Hydr. Research*, Vol. 34, No. 5, pp. 597-604, May 1996.
- Alliot, F.**, "Etude des équations stationnaires de Stokes et Navier-Stokes dans des domaines extérieurs", *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 159 pages, Juillet 1998.
- Agence Nationale des Barrages (A.N.B.)**, "Etude d'avant-projet détaillé du barrage de l'Oued CHERF", *Modèle Réduit Hydraulique*, Rapport Partiel No. 11, 1987.
- Atanov, G. A., Evseeva, E. G. et Work, P. A.**, "Variational problem of water-level stabilization in open channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 124, No. 1, pp. 50-54, January 1998.
- Audusse, E.**, "Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes", *Thèse de Doctorat*, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 193 pages, Septembre 2004.
- Bagge, G. et Herbich, J. B.**, "Transitions in supercritical open-channel flow", *Jour. of Hydr. Div., ASCE*, Vol. 93, No. HY5, pp. 23-41, September 1967.
- Baltzer, R. A. et Lai, C.**, "Computer simulation of unsteady flows in waterways", *Jour. of Hydr. Div., ASCE*, Vol. 94, No. HY4, pp.1083-1117, July 1968.
- Banat, A.**, "Finite difference approximations", *Polycopier de méthodes numériques*, 1990.
- Baranger, J.**, "Introduction à l'analyse numérique", *Edition Hermann*, Paris, 1977.
- Beam, R. M. et Warming, R. F.**, "An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form", *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, pp. 87-110, 1976.
- Bermudez, A. et Vazquez, M. E.**, "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms", *Computers Fluids*, Vol. 23, No. 8, pp. 1049-1071, 1994.
- Berreksi, A. et Bouhadji, A.**, "Simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zones de transitions", *Projet de Fin d'Etudes, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger*, 140 pages, Juin 1993.
- Berreksi, A.**, "Simulation des écoulements à surface libre dans des canaux à faible et à forte pente à géométrie variable", *Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger*, 161 pages, Juin 1998.

- Berreksi, A. et Kettab, A.**, "Simulation numérique des écoulements non permanents à surface libre -Etude d'un rétrécissement rectiligne symétrique-", *Colloque International sur l'Eau dans le Bassin Méditerranéen, Watmed 2002*, Monastir, Tunisie, pp. 718-722, 10-13 Octobre, 2002.
- Berreksi, A., Ikni, T., Remini, B. et Kettab, A.**, "Calcul des écoulements bidimensionnels supercritiques dans des canaux à géométrie variable et à forte pente", *Premier Séminaire International sur l'Eau et les Risques dans le Contexte Saharien*, Université de Laghouat, 19-23 Novembre, 2004.
- Berreksi, A., Kettab, A. et Remini, B.**, "Calcul des écoulements bidimensionnels supercritiques dans des canaux à géométrie variable et à forte pente", *Premier Colloque International sur l'Eau et l'Environnement, CIEE'04*, Ecole Normale Supérieure d'Hydraulique de Blida, ENSH, pp. 52-57, 07-08 Décembre, 2004.
- Berreksi, A., Benmamar, S., Remini, B. et Kettab, A.**, "Simulation numérique des écoulements supercritiques à travers un élargissement de canal à forte pente", *Algerian Journal of Technology, AJOT*, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pp. 33-40, Mai 2005.
- Berreksi, A., Kettab, B., Remini, B., Belhocine, M. et Ikni, T.**, "Calcul des écoulements non permanents bidimensionnels à surface libre", *Premier Séminaire National sur la Mobilisation et l'Exploitation des Ressources en Eau*, Université de Batna, pp. 287-293, 12-13 Décembre, 2005.
- Berreksi, A., Kettab, A., Remini, B., Benmamar, S. et Ikni, T.**, "Ecoulement supercritique à travers une contraction symétrique de canal -Etude paramétrique-", *Algerian Journal of Technology, AJOT*, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pp. 61-69, Mars 2008.
- Berreksi, A., Kettab, A., Remini, B., Benmamar, S. et Ikni, T.**, "Analyse d'un écoulement torrentiel à travers un rétrécissement de canal à pente variable", *Séminaire National sur l'Eau dans son Environnement, SNEE*, Université de Blida, pp. 43-47, 07-08 Juin, 2008.
- Berreksi, A., Kettab, A., Remini, B., Benmamar, S. et Ikni, T.**, "Analyse d'un écoulement torrentiel à travers un élargissement symétrique de canal à pente variable", *Séminaire National d'Hydraulique 2008*, Université de Chlef, 23-24 Novembre, 2008.
- Berreksi, A., Kettab, A., Remini, B. and Benmamar, S.**, "Computation of two-dimensional unsteady supercritical flows in open channel contraction of spillway chutes", *Dam Engineering, International Papers of Technical Excellence, Water Power and Dam Construction*, Vol. XIX, Issue 3, pp. 149-168, December 2008.
- Bhallamudi, S. M. et Chaudhry, M. H.**, "Computation of flows in open channel transitions", *Jour. of Hydr. Research*, Vol. 30, No. 1, pp. 77-93, January 1992.
- Boes, R. M. et Hager, W. H.**, "Hydraulic design of stepped spillways", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 129, No. 9, pp. 671-679, September 2003.
- Boisson, C., Gay, B. et Gotteland, M.**, "Différences finies : Quelques applications en mécanique des fluides", *Ecole Centrale de Lyon*, France, 1990.
- Brater, E. F. et King, H. W.**, "Handbook of hydraulics : For the solution of hydraulic engineering problems", *Mc Graw-Hill Edition*, New York, 1976.
- Burg, C. O. E., Huddleston, D. H. et Berger, R. C.**, "Efficient, robust design tool for open-channel flow", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 127, No. 1, pp. 62-70, January 2001.

- Bürgisser, M. F.**, "Hydrodynamics of 2D free surface flows", *Hydroinformatics '98*, Vol. 1, pp. 49-53, 1998.
- Caro, F.**, "Modélisation et simulation des transitions de phase liquide-vapeur", *Thèse de Doctorat*, Ecole Polytechnique, France, 226 pages, Novembre 2004.
- Causon, D. M., Mingham, C. G. et Ingram, D. M.**, "Advances in calculation methods for supercritical flow in spillway channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 125, No. 10, pp. 1039-1050, October 1999.
- Chaudhry, M. H.**, "Applied hydraulic transients", *Van Nostrand Reinhold Company Edition*, New York, 505 pages, 1987.
- Chin, D. A.**, "Water resources engineering", *Pentice Hall Inc. Edition, Upper Saddle River*, New Jersey, USA, 750 pages, 2000.
- Chow, V. T.**, "Open-channel hydraulics", *MacGraw-Hill Book Co. Edition*, New York, 1959.
- Crowly, W. P.**, "An Equipotential Zone on a Quadrilateral Mesh", *Memorandum, Lawrence Livermore National Laboratory*, 1962.
- Cunge, J. A. et Wegner, M.**, "Intégration numérique des équations d'écoulement de Barré de Saint-Venant par un schéma implicite de différences finies", *La Houille Blanche*, N°1, pp. 33-39, 1964.
- Cunge, J. A.**, "Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux", *Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble*, France, 174 pages, 1988.
- Dakshinamoorthy, S.**, "High velocity flow through expansions", *17th Congress IAHR, Baden-Baden, West Germany*, Vol. 2, pp. 373-381, 1977.
- Dammuller, D. C., Bhallamudi, S. M. et Chaudhry, M. H.**, "Modeling of unsteady flow in curved channel", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 115, No. 11, pp. 1479-1495, November 1989.
- Dautray, R. et Lions, J. L.**, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", *Edition Masson*, Paris, 1988.
- Davis, C. V. et Sorensen, K. E.**, "Handbook of applied hydraulics", *McGraw-Hill Edition*, New York, 1969.
- De Martino, F., Gisonni, C. et Hager, W. H.**, "Drop in combined sewer Manhole for supercritical flow", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE*, Vol. 128, No. 6, pp. 397-400, November/December 2002.
- Djuric, M., Kapor, R. et Pavlovic, R. N.**, "Complex flow modelling by curvilinear coordinates", *The International Conference on Interaction of Computational Methods and Measurements in Hydraulics and Hydrology*, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 97-106, 13-16 June, 1989.
- Douglas, J. F., Gasiorek, J. M. et Swaffield, J. A.**, "Fluid mechanics", *Essex Edition*, Great Britain, 1985.
- Engelund, F. et Munch-Peterson, J.**, "Steady flow in contracted and expanded rectangular channels", *La Houille Blanche*, Vol. 8, No. 4, pp. 464-474, 1953.

- Euvrard, D.**, "Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Différences finies, Eléments finis, Méthodes des singularités", *Edition Masson*, Paris, 1990.
- Fennema, R. J. et Chaudhry, M. H.**, "Explicit numerical schemes for unsteady free-surface flows with shocks", *Water Resources Research*, Vol. 22, No. 13, pp. 1923-1930, 1986.
- Fennema, R. J. et Chaudhry, M. H.**, "Simulation of one-dimensional dam-break flows", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 25, No. 1, pp. 41-51, 1987.
- Fennema, R. J. et Chaudhry, M. H.**, "Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows", *Jour. of Hydr. Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 321-332, March 1989.
- Fennema, R. J. et Chaudhry, M. H.**, "Explicit methods for 2-D transient free-surface flows", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 116, No. 8, pp. 1013-1034, August 1990.
- Flokstra, C.**, "The closure problem for depth-averaged two-dimensional flow", *17th Congress, International Association for Hydraulic Research, IAHR, Baden-Baden*, paper A106, Vol. 2, pp. 247-256, 1977.
- Fox, R. W. et McDonald, A. T.**, "Introduction to fluid mechanics", *Siversion, John Wiley and Sons Edition, INC.*, New York, 1994.
- Fulu, L. et Tanaka, Y.**, "Numerical simulation of river bed profile in maruyama reservoir", *Tenth Congress of the Asian and Pacific Division of the International Association for Hydraulic Research: Hydraulic Research and Engineering Towards and Beyond 2000*, Malaysia, pp. 576-583, 26-29 August, 1996.
- Garcia, R. et Kahawita, R. A.**, "Numerical solution of the ST. VENANT equations with the MacCormack finite-difference scheme", *Inter. Jour. for Num. Meth. in Fluids*, Vol. 6, pp. 259-274, 1986.
- Gerbeau, J. F. et Perthame, B.**, "Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; Numerical validation", *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, Vol. 1, No. 1, pp. 89-102, February 2001.
- Ghamry, H. K. et Steffler, P. M.**, "Effect of applying different distribution shapes for velocities and pressure on simulation of curved open channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 128, No. 11, pp. 969-982, November 2002.
- Godounov, S. et Riabenki, V.**, "Schémas aux différences", *Edition Office des Publications Universitaires, OPU*, Alger, 1987.
- Gourdin, A. et Boumahrat, M.**, "Méthodes numériques appliquées", *Edition Office des Publications Universitaires, OPU*, Alger, 440 pages, 1991.
- Graf, W. H. et Altinakar, M. S.**, "Hydraulique fluviale, Tome 1 : Ecoulement permanent uniforme et non uniforme", *Edition Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne, 1993.
- Graf, W. H. et Altinakar, M. S.**, "Hydraulique fluviale, Tome 2 : Ecoulement non permanent et phénomène de transport", *Edition Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne, 1996.
- Guinot, V.**, "An approximate two-dimensional Riemann solver for hyperbolic systems of conservation laws", *Journal of Computational Physics*, 205, pp. 292-314, 2005.

- Haddad, C.**, "Instationnarités, mouvements d'onde de choc et tourbillons à grande échelles dans une interaction onde de choc/couche limite avec décollement", *Thèse de Doctorat*, Université de Provence AIX-Marseille I, France, 162 pages, Janvier 2005.
- Hager, W. H. et Altinakar, M. S.**, "Infinitesimal cross-wave analysis", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol.110, No. 8, pp.1145-1150, August 1984.
- Hager, W. H. et Bretz, N. V.**, "Discussion to : simplified design of contractions in supercritical flow", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 113, No. 3, pp. 422-425, March 1987.
- Hager, W. H.**, "Supercritical flow in channel junctions", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 115, No. 5, pp. 595-616, May 1989.
- Hager, W. H.**, "Spillways, shockwaves and air entrainment: Review and recommendation", *Commission Internationale des Grands Barrages, CIGB*, Bulletin 81, Paris, 1992.
- Hager, W. H. et Mazumder, S. K.**, "Supercritical flow at abrupt expansions", *Proc. Inst. of Civ. Engrs., -Water Maritime and Energy, London-*, 96, pp. 153-166, September 1992.
- Hager, W. H. et Mazumder, S. K.**, "Flow choking in an expanding bucket", *International Water Power and Dam Construction*, Vol. 45, No. 4, pp. 50-52, April 1993.
- Hager, W. H., Schwalt, M., Jimenez, O. et Chaudhry, M. H.**, "Supercritical flow near an abrupt wall deflection", *Jour. of Hydr. Research*, Vol. 32, No. 1, pp. 103-118, January 1994.
- Heggen, R. J.**, "Choke angle in supercritical contractions", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 114, No. 4, pp. 441-444, April 1988.
- Herbich, J. B. et Walsh, P.**, "Supercritical flow in rectangular expansions", *Jour. of Hydr. Div., ASCE*, Vol. 98, No. 9, pp. 1691-1700, September 1972.
- Hoffman, K. A.**, "Computational fluid dynamics for engineers", *Engineering Education System*, USA, 1989.
- Hossain, M. A., Kawahashi, M. et Fujioka, T.**, "Finite amplitude standing wave in closed ducts with cross sectional area change", *Wave Motion*, Vol. 42, pp. 226-237, 2005.
- Hsu, M. H., Chen, C. H. et Teng, W.H.**, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite difference method for computation of free surface flows", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 34, No. 4, pp.1-11, 2001.
- Hug, M.**, "Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement d'énergétique", *Edition Eyrolles*, Paris, 1195 pages, 1975.
- Hwang, N. H. C. et Houghtalen, R. J.**, "Fundamentals of hydraulics engineering systems", *Pentice Hall Inc. Edition, Upper Saddle River*, New Jersey, USA, 415 pages, 1996.
- Ikni, T.**, "Simulation numérique des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variable en utilisant le schéma de Beam et Warming", *Mémoire de Magister, Université de Bejaia*, 106 pages, 2002.
- Ikni, T. et Berreksi, A.**, "Simulation numérique des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variable en utilisant le schéma de Beam et Warming", *Séminaire National sur les Technologies Avancées*, Université de Tlemcen, pp. 30-36, 07-08 Décembre, 2003.

- Ikni, T., Berreksi, A., Benmamar, S. et Kettab, A.**, "Intégration des équations de Saint Venant à deux dimensions par un schéma aux différences finies implicite, Application : Ecoulement torrentiel dans un canal uniforme et dans un divergent rectiligne", *Premier Séminaire National sur les Sciences de la Terre au Service du Développement Durable*, Université de Tébessa, 26-27 Avril, 2004.
- Ikni, T., Berreksi, A., Benmamar, S. et Kettab, A.**, "Etude et analyse des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variables et prismatiques en utilisant des équations de Saint Venant à deux dimensions", *Premier Séminaire International sur l'Eau et les Risques dans le Contexte Saharien*, Université de Laghouat, 19-23 Novembre, 2004.
- Ikni, T., Berreksi, A., Benmamar, S. et Kettab, A.**, "Un schéma explicite de Richtmeyer pour le calcul des écoulements bidimensionnels à surface libre dans des canaux de faible et de forte pente", *Algerian Journal of Technology, AJOT*, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pp. 395-402, Mai 2005.
- Ippen, A. T. et Dawson, J. H.**, "Design of channels contractions", *Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels, Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs., ASCE*, Vol. 116, pp. 326-346, 1951.
- Iwasa, Y. et Hosoda, T.**, "Numerical simulation on high velocity flows through curved open channels", *The International Conference on Interaction of Computational Methods and Measurements in Hydraulics and Hydrology*, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 87-96, 13-16 June, 1989.
- Jaumotte, A. L.**, "Chocs et ondes de choc", *Edition Masson*, Paris, 1973.
- Jha, K. A., Akiyama, J. et Ura, M.**, "A fully conservative Beam and Warming scheme for transient open channel flows", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 34, No. 5, pp. 605-621, 1996.
- Jimenez, O. F. et Chaudhry, M. H.**, "Computation of supercritical free-surface flows", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 114, No. 4, pp. 377-395, April 1988.
- Jiroveanu, D.**, "Analyse théorique et numérique de certains modèles de viscosité turbulente", *Thèse de Doctorat*, Université Joseph Fourier, Grenoble I, France, 117 Pages, Mars 2002.
- Jovanović, M. et Djordjević, D.**, "Experimental verification of the MacCormack numerical scheme", *Advances in Engineering Software*, Vol. 23, pp. 61-67, 1995.
- Katapodes, N. D.**, "Two-dimensional surges and shocks in open channels", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 110, No. 6, pp. 794-812, June 1984.
- Kazezyilmaz-Alhan, C. M., Medina Jr, M. A. et Rao, P.**, "On numerical modeling of overland flow", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 166, pp. 724-740, 2005.
- Kim, C. et Kim, W.**, "Two-dimensional stream flow model based on the finite volume method using the generalized coordinate system", *Tenth Congress of the Asian and Pacific Division of the International Association for Hydraulic Research : Hydraulic Research and Engineering Towards and Beyond 2000*, Malaysia, pp. 560-567, 26-29 August, 1996.
- Klonidis, A. J. et Soulis, J. V.**, "An implicit scheme for steady two-dimensional free-surface flow calculation", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 39, No. 4, pp. 393-402, 2001.
- Krüger, S., Bürgisser, M. F. et Rutschmann, P.**, "Advances in calculating supercritical flows in spillways contractions", *Hydroinformatics '98*, Vol. 1, pp. 163-169, 1998.

- Krüger, S. et Rutshmann, P.**, "Advances in calculation methods for supercritical flow in spillway channels", *Discussion, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, pp. 328-330, April 2001.
- Lachamp, P.**, "Modélisation numérique de l'effet d'un obstacle sur les écoulements de fluides à seuil par la méthode SPH", *Thèse de Doctorat*, Université Joseph Fourier, Grenoble I, France, 161 Pages, Décembre 2003.
- Lagoutière, F.**, "Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants", *Thèse de Doctorat*, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 277 pages, Décembre 2000.
- Lai, C.**, "Computer simulation of two-dimensional unsteady flows in estuaries and embayments by the method of characteristics", *Water Resources Investigations, U.S. Geological Survey*, pp. 77-85, August 1977.
- Laigle, D. et Coussot, P.**, "Numerical modelling of mudflows", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 123, No. 7, pp. 617-623, July 1997.
- Lenau, C. W.**, "Supercritical flow in bends of trapezoidal section", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, No. EM1, pp. 43-53, February 1979.
- Lepourhiet, A.**, "Résolution numérique des équations aux dérivées partielles", 1980.
- Liggett, J. A. et Woolhiser, D. A.**, "Difference solutions of the shallow-water equation", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 93, No. EM2, pp. 39-71, April 1967.
- Lin, G. F., Lai, J. S. et Guo, W. D.**, "Finite-volume component-wise TVD schemes for 2D shallow water equations", *Advances in Water Resources*, Vol. 26, pp. 861-873, 2003.
- Louaked, M. et Hanich, L.**, "TVD scheme for shallow water equations", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 36, No. 3, pp. 363-378, 1998.
- MacCormack, R. W.**, "Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer", *Lectures Notes in Physics, Springer-Verlag*, Vol. 8, pp. 151-163, 1971.
- Massey, B. S.**, "Mechanics of fluids", *Van Nostrand Reinhold Company Edition*, Great Britain, 1983.
- Mays, L. W.**, "Hydraulic Design handbook", *McGraw-Hill Edition*, USA, 1999.
- Mazumder, S. K. et Hager, W. H.**, "Supercritical expansion flow in Rouse modified and reversed transitions", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 119, No. 2, pp. 201-218, February 1993.
- Mazumder, S. K. et Hager, W. H.**, "Comparison between various chute expansions", *IE (I) Journal-CV*, Vol. 75, pp. 186-192, February 1995.
- Meselhe, E. A., Sotiropoulos, F. et Holly, F. M.**, "Numerical simulation of transcritical flow in open channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 123, No. 9, pp. 774-783, September 1997.
- Métier, P.**, "Modélisation, analyse mathématique et application numérique de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires", *Thèse de Doctorat*, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 205 pages, Mars 2003.

- Mingham, C. G. et Causon, D. M.**, "High-resolution finite-volume method for shallow water flows", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 124, No. 6, pp. 605-614, June 1998.
- Mizumura, K.**, "Free-surface profile of open-channel flow with wavy boundary", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 121, No. 7, pp. 533-539, July 1995.
- Mohapatra, P. K. et Bhallamudi, M.**, "Computation of a dam-break flood wave in channel transitions", *Advances in Water Resources*, Vol. 19, No. 3, , pp. 181-187, 1996.
- Molls, T. et Chaudhry, M. H.**, "Depth-averaged open-channel flow model", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 121, No. 6, pp. 453-465, June 1995.
- Molls, T. et Zhao, G.**, "Depth-averaged simulation of supercritical flow in channel with wavy sidewall", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 126, No. 6, pp. 437-445, June 2000.
- Morita, M. et Yen, B. C.**, "Modeling of conjunctive two-dimensional surface-three-dimensional subsurface flows", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 128, No. 2, pp. 184-200, February 2002.
- Nalluri, C. et Featherstone, R. E.**, "Civil Engineering hydraulics", *Blackwell Science Edition*, 431 pages, 2001.
- Nougier, J. P.**, "Méthodes de calcul numérique, Volume 1 : Systèmes d'équations", *Edition Hermes Science Publications, Europe Ltd*, Paris, 332 pages, 2001.
- Nougier, J. P.**, "Méthodes de calcul numérique, Volume 2 : Fonctions, équations aux dérivées", *Edition Hermes Science Publications, Europe Ltd*, Paris, 406 pages, 2001.
- Novo, S.**, "Quelques problèmes aux limites pour les équations de Navier Stokes compressibles et isentropiques", *Thèse de Doctorat*, Université de Toulon et du Var, France, 247 pages, Décembre 2002.
- Nujic, M.**, "Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flows", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 1, pp. 101-111, 1995.
- Obled, C. H.**, "Analyse numérique", *Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble*, France, 1989.
- Ohtsu, I., Yasuda, Y. et Gotoh, H.**, "Flow conditions of undular jumps in horizontal rectangular channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 129, No. 12, pp. 948-955, December 2003.
- Ohtsu, I., Yasuda, Y. et Takahashi, M.**, "Flow characteristics of skimming flows in stepped channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 130, No. 9, pp. 860-869, September 2004.
- Peyret, R. et Taylor, T. D.**, "Computational methods of fluid flow", *Computational Physics, Springer Verlag*, New York, 1983.
- Piperno, S.**, "Simulation numérique de problèmes d'interaction fluide-structure", *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 236 pages, Juin 1995.
- Ponce, V. M. et Yabusaki, S. B.**, "Modeling circulation in depth-averaged flow", *Jour. of Hydr. Div., ASCE*, Vol. 107, No. HY11, pp. 1501-1518, November 1981.

- Popovska, C.**, "Mathematical model for two-dimensional dam break propagation", *The International Conference on Interaction of Computational Methods and Measurements in Hydraulics and Hydrology*, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 127-136, 13-16 June, 1989.
- Prashun, A. L.**, "Fundamentals of Hydraulic Engineering", *Holt, Rinehart and Winston, Inc., International Edition*, New York, 509 pages, 1987.
- Rahman, M. et Chaudhry, M. H.**, "Computation of flow in open-channel transitions", *Jour. of Hydr. Research*, Vol. 35, No. 2, pp. 243-255, 1997.
- Rai, M. M. et Anderson, D. A.**, "Application of adaptative grids to fluid-flow problems with asymptotic solutions", *Am. Inst. Aeronaut. Journal, AIAA*, Vol. 20, No. 4, pp. 496-502, April 1982.
- Rajar, R. et Cetina, M.**, "Two-dimensional Dam-Break flow in steep curved channels", *Proc. XX Congress of IAHR, Inter. Assoc. for Hydr. Research*, Vol. 11, pp. 571-579, 1983.
- Rao, P.**, "A parallel hydrodynamic model for shallow water equations", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 150, pp. 291-301, 2004.
- Reinauer, R. et Hager, W. H.**, "Supercritical flow behind chute piers", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 120, No. 11, pp. 1292-1308, November 1994.
- Reinauer, R.**, "Kanalkontraktionen bei schiessendem abfluss und stosswellenreduktion mit diffraktoren", *VAM, Mitteilungen 140*, Zürich, 1995.
- Reinauer, R. et Hager, W. H.**, "Supercritical flow in chute contraction", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 124, No. 1, pp. 55-64, January 1998.
- Roberson, J. A., Cassidy, J. J. et Chaudhry, M. H.**, "Hydraulic Engineering", *John Wiley & Sons, Inc. Edition*, New York, 1998.
- Rouse, H., Bhoota, B. V. et Hsu, E. V.**, "Design of channels expansions", *Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels, Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, Vol. 116, pp. 347-363, 1951.
- Ryhming, I. L.**, "Dynamique des fluides", *Edition Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne, Suisse, 448 pages, 1985.
- Sabersky, R. H., Acosta, A. J. et Hauptmann, E. G.**, "Fluid flow : A first course in fluid mechanics", *MacMillan Edition*, New York, 1989.
- Sarma, K. V. N. et Syamala, P.**, "Supercritical flow in smooth open channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 117, No. 1, pp. 54-63, January 1991.
- Schwalt, M. et Hager, W. H.**, "Shock pattern at abrupt wall deflection", *Proceedings Environmental Engineering Sessions Water Forum'92*, pp. 231-236, Baltimore, Maryland, August 1992.
- Schwalt, M. et Hager, W. H.**, "Shock-wave reduction by bottom drop", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 120, No. 10, pp. 1222-1227, October 1994.
- Schwalt, M. et Hager, W. H.**, "Experiments to supercritical junction flow", *Experiments in Fluids*, Vol. 18, pp. 429-437, 1995.
- Scouarnec, C.**, "Algèbre spectrale", *Edition Publisud*, Toulouse, 1987.

- Shimizu, Y., Yamaguchi, H. et Itakura, T.**, "Three-dimensional computation of flow and bed deformation", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 116, No. 9, pp. 1090-1107, September 1990.
- Shoucri, M. M.**, "Numerical solution of the shallow water equations", *Journal of Computational Physics*, 63, pp. 240-245, 1986.
- Sibony, M. J. et Mardon, C. I.**, "Analyse numérique : système linéaire et non linéaire", *Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts*, 1982.
- Sinniger, R. O. et Hager, W. H.**, "Constructions hydrauliques : Ecoulements stationnaires", *Edition Presses Polytechniques Romandes, Lausanne*, 1989.
- Skeels, C. P. et Samuels, P. G.**, "Stability and accuracy analysis of numerical schemes modelling open channel flow", *The International Conference on Interaction of Computational Methods and Measurements in Hydraulics and Hydrology*, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 148-157, 13-16 June, 1989.
- Steffler, P. M. et Jin, Y. C.**, "Depth averaged and moment equations for moderately shallow free surface flow", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 31, No. 1, pp. 5-17, 1993.
- Stockstill, R. L., Berger, R. C. et Nece, R. E.**, "Two-dimensional flow model for trapezoidal high-velocity channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 123, No. 10, pp. 844-852, October 1997.
- Strelkoff, T.**, "Numerical solution of Saint-Venant equations", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 96, No. HY1, pp. 223-251, January 1970.
- Sturm, T. W.**, "Simplified design of contractions in supercritical flow", *Jour. of Hydr. Engrg., ASCE*, Vol. 111, No. 5, pp. 871-875, May 1985.
- Sturm, T. W.**, "Open channel Hydraulics", *McGraw-Hill Book Co. Edition, International Edition*, Singapore, 2001.
- Täubert, U.**, "The design of spillway contractions using computer simulation", *Water Power*, Vol. 26, No. 8, pp. 282-287, August 1974.
- Terzidis, G. et Strelkoff, T.**, "Computation of open-channel surges and shocks", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 96, No. HY12, pp. 2581-2609, December 1970.
- Thomson, J. F.**, "Numerical Grid Generation", *Elsevier, Amsterdam*, 1982.
- Thomson, J. F., Zahu, U. A. W. et Mastin, C. W.**, "Boundary fitted coordinate systems for numerical of partial differential equations-A Review", *Journal of Computational Physics*, Volume 47, pp. 1-108, 1992.
- Valiani, A. et Caleffi, V.**, "Brief analysis of shallow water equations suitability to numerically simulate supercritical flow in sharp bends", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 131, No. 10, pp. 912-916, October 2005.
- Vazquez, M. E.**, "Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry", *Journal of Computational Physics*, Vol. 148, pp. 497-526, 1999.
- Venutelli, M.**, "Direct integration of the equation of gradually varied flow", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE*, Vol. 130, No. 1, pp. 88-91, January/February 2004.

- Vischer, D. L. et Hager, W. H.**, "Reduction of shockwaves : a typology", *The International Journal on Hydropower and Dams*, Vol. 1, No. 4, pp. 24-30, July 1994.
- Vreugdenhil, C. B. et Wijnbenga, J. H. A.**, "Computation of flow patterns in rivers", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 108, No. HY11, pp. 1296-1309, November 1982.
- Warming, R. F. et Hyett, B. J.**, "The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods", *Jour. of Comput. Physics*, Vol. 14, No. 2, pp. 159-179, 1974.
- Wu, W., Rodi, W. et Wenka, T.**, "3D numerical modelling of flow and sediment transport in open channels", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 126, No. 1, pp. 4-15, January 2000.
- Wu, B. et Molinas, A.**, "Choked flows through short contractions", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 127, No. 8, pp. 657-662, August 2001.
- Wu, W.**, "Computational river dynamics", *Taylor & Francis Group Edition*, London, 494 pages, 2008.
- Wurbs, R. A. et James, W. P.**, "Water resources engineering", *Pentice Hall Inc. Edition, Upper Saddle River, USA*, 828 pages, 2002.
- Yang, J. Y. et Hsu, C. A.**, "Computations of free surface flows, Part 2 : Two-dimensional unsteady bore diffraction", *Jour. of Hydr. Research*, Vol. 31, No. 3, pp. 403-413, 1993.
- Yen, B. C.**, "Open-channel flow equations revisited", *Jour. of the Engrg. Mech. Div., ASCE*, Vol. 99, No. EM5, pp. 979-1009, October 1973.
- Yost, S. A. et Rao, P.**, "A multiple grid algorithm for one-dimensional transient open channel flows", *Advances in Water Resources*, Vol. 23, pp. 645-651, 2000.
- Younus, M. et Chaudhry, M. H.**, "A depth-averaged $k-\epsilon$ turbulence model for the computation of free-surface flow", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 32, No. 3, pp. 415-443, 1994.
- Yu, H. et Liu, Y. P.**, "A second-order accurate, component-wise TVD scheme for nonlinear, hyperbolic conservation laws", *Journal of Computational Physics*, 173, pp. 1-16, 2001.
- Zhao, D. H., Shen, H. W., Lai, J. S. et Tabios, G. Q.**, "Approximate Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave modelling", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 122, No. 12, pp. 692-702, December 1996.
- Zienkiewicz, O. C. et Taylor, R. L.**, "The finite element method, Volume 3 : Fluid dynamics", *Fifth Edition, Butterworth-Heinemann Edition*, 334 pages, 2000.
- Zoppou, C. et Roberts, S.**, "Explicit schemes for Dam-Break simulations", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 129, No. 1, pp. 11-34, January 2003.
- Zovne, J. J. et Martin, S.**, "Simulation of transient supercritical channel flow", *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 105, No. HY7, pp. 859-875, July 1979.

MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS NON PERMANENTS DANS DES CANAUX A CIEL OUVERT

ملخص

الحساب العددي لمعادلات "سان فنان" للحركة الخاصة بجريان غير المستقر ذو السرعة الكبيرة لمياه ذات السطح الحر و المتحصل عليها عن طريق عملية التكامل العمودي لمعادلات "نافي ستوكس" قد تمّ باستعمال طريقة الفروقات المتناهية بواسطة مخططي "ماك كورماك" و "بيم و وارمينغ". حول المجال الفيزيائي المعقد إلى مجال حسابي مستطيل و هذا بغرض تسهيل عملية الأخذ بعين الاعتبار الشروط الحدودية عند الجدران، و عليه تكتب معادلات الحركة بواسطة الإحداثيات المحولة. استعمل النموذج الرياضي في حالته غير المستقرة لإيجاد حلول في الحالة المستقرة، و هذا بأخذ عنصر الزمن كوسيط تكراري. جرب النموذجين العدديين المقدمين في حالة جريان كبير السرعة عبر تضيق قناة و توسع قناة. بعد ذلك، درس تأثير تغيير بعض العوامل الهيدروليكية و العددية على شكل سطح الماء عبر تضيق القناة و توسع القناة باستعمال المخطط العددي الذي يكون قد أعطى نتائج مرضية في الدراستين السابقتين.

الكلمات الرئيسية : سان فنان؛ غير المستقر؛ كبير السرعة؛ موجات عرضية؛ تضيق قناة؛ توسع قناة؛ دراسة تحليلية؛ الفروقات المتناهية؛ ماك كورماك؛ بيم و وارمينغ.

Résumé

La résolution numérique des équations du mouvement de Saint Venant, gouvernant les écoulements non permanents à deux dimensions en régime torrentiel, dans des canaux à géométries irrégulières, obtenues par l'intégration selon la profondeur des équations de Navier Stokes, est menée moyennant le schéma aux différences finies explicite de MacCormack et le schéma aux différences finies implicite de Beam et Warming. Le domaine physique irrégulier est transformé en un domaine de calcul rectangulaire, pour permettre la prise en compte des conditions aux limites au niveau de la paroi. Ainsi, le système d'équations est écrit en fonction des coordonnées transformées. Le modèle mathématique en régime transitoire est utilisé pour obtenir des résultats en régime permanent, en utilisant le paramètre temps comme un facteur essentiel dans les toutes les itérations. La validation des deux modèles numériques élaborés est testée dans le cas d'un rétrécissement et de deux élargissements de canaux en écoulement torrentiel. L'influence de la variation de quelques paramètres hydrauliques et numériques sur la forme de la ligne d'eau dans les deux structures est par la suite étudiée, en utilisant le schéma ayant donné des résultats satisfaisants dans les premières applications.

Mots clés : Saint-Venant ; Non permanent ; Torrentiel ; Ondes transversales ; Contraction ; Elargissement ; Simulation numérique ; Différences finies ; MacCormack ; Beam et Warming.

Abstract

The numerical computation of the Saint-Venant equations governing two-dimensional unsteady supercritical flows through non-prismatic channels, obtained from the vertical integration of the Navier-Stokes equations (Shallow water equations) is made by using the MacCormack explicit finite difference scheme and the Beam and Warming implicit finite difference scheme. The irregular physical domain is converted into a rectangular computational one in order to facilitate the inclusion of solid side wall boundaries. Thus, the equations of motion are written in a transformed coordinates. The unsteady flow mathematical model is used to obtain steady flow solutions by using the time variable as an essential parameter in the all iterations. The validation of the two elaborate numerical models is tested in the case of supercritical flow through one contraction and two expansions of channels. The influence of the variation of some hydraulic and numerical parameters on the water surface profile in the two structures is studied thereafter by using the scheme which has given satisfactory results in the first applications.

Key words : Saint-Venant ; Unsteady ; Supercritical ; Cross-wave ; Contraction ; Expansion ; Numerical simulation ; Finite difference ; MacCormack ; Beam and Warming.