



THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Mécanique
Option : Construction Mécanique

Thème :

**EFFETS DE LA LONGUEUR DE DELAMINAGE ET DE
SA POSITION SUR LE COMPORTEMENT VIBRATOIRE
DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES**

Présentée par: **BACHENE Mourad**
Magister en Génie Mécanique

Jury

Mabrouk	BOUABDELLAH	Professeur	Président	ENSP
Toufik	BOUKHAROUBA	Professeur	Examineur	USTHB
Abdelkader	NOUR	Professeur	Examineur	UMBB
Brahim	NECIB	Professeur	Examineur	UMM-Constantine
Nabil	BELLOUACHRANI	M.C.A	Examineur	EMP
Saïd	RECHAK	Professeur	Directeur de thèse	ENSP

ملخص

في هذه الأطروحة، التصرف الديناميكي للصفائح المركبة ذات تشققات تمت دراسته. النموذج الرياضي استخدم باستعمال العناصر الدقيقة الموسعة (XFEM) مع الأخذ بعين الاعتبار تشوهات القص العرضية وعطالة الدوران. على أساس هذا النموذج الرياضي تم إنجاز برنامج إعلام آلي. تطبيقات عديدة لدراسة تأثير طول الشق وموضعه على التصرف الديناميكي للصفائح المعدنية والمركبة تم إجراؤها. النتائج المحصل عليها بواسطة هذا البرنامج تظهر توافقا كبيرا مع نتائج المراجع. يمكن استنتاج أن التواترات تتناقص كلما زاد طول الشق. هذا التناقص يختلف حسب طبيعة التواتر المعتمد. النتائج المتعلقة بتأثير التصادم تظهر أن قوة الاتصال تمر بثلاث مناطق مع وجود طول شق حرج أين تفقد الصفيحة الكثير من صلابتها.

كلمات مفاتيح : التصرف الديناميكي, الصفائح المركبة, التواتر, تشققات, العناصر الدقيقة الموسعة.

Résumé

Dans cette thèse, le comportement dynamique des plaques composites stratifiées présentant des défauts est étudié. La formulation du modèle mathématique en éléments finis étendue (XFEM) avec prise en compte des déformations en cisaillement transverse et de l'inertie de rotation est ainsi établie. Sur la base de ce développement mathématique, un programme informatique est élaboré par nos soins. Des applications portant sur l'influence de la longueur de la fissure et de sa position sur le comportement dynamique des plaques fissurées isotropes et composites sont traitées. Les résultats obtenus par le biais du présent programme sont en très bonnes concordances avec ceux de la littérature consultée. On reporte que les fréquences décroissent avec l'accroissement de la longueur de la fissure. Ce phénomène est plus accentué sur les modes antisymétriques en y . On attribue ceci au fait que la fissure divise la plaque en deux parties. Les résultats relatifs à la réponse à l'impact montrent que la force de contact passe par trois zones avec l'existence d'une longueur de fissure critique où la plaque perd considérablement sa rigidité.

Mot clés : comportement dynamique, plaques composites, fréquences, fissures, éléments finis étendue

Abstract

In this thesis, the dynamic behavior of the laminated composite plates presenting defects is studied. The mathematical formulation of the model in eXtended Finite Element Method (XFEM) with taking into account the transverse shear deformations and rotary inertia is thus established. On the basis of this mathematical development, a computer program is developed. Applications relating to the influence of crack's length and its position on the dynamic behavior of isotropic and composite cracked plates are treated. The results obtained by the present program are in very good agreements with those of the consulted literature. One defers that the frequencies decrease with the increase of crack's length. This phenomenon is more accentuated on the antisymmetric modes in y . One explains this phenomenon to the fact that the crack divides the plate into two parts. The results relating to the response to the impact show that the force of contact passes by three zones with the existence a critical length of crack where the plate loses considerably its rigidity.

Key words : dynamic behavior, composite plates, frequencies, cracks, eXtended Finite Element

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon Directeur de thèse Mr. Saïd RECHAK, Professeur à l'école nationale polytechnique d'Alger, pour sa disponibilité, sa bonne humeur, sa rigueur scientifique et sa patience pendant toute la durée de ce travail. Tout au long de nos échanges, j'ai pu apprécier leurs expériences et encouragements, profité de leur savoir dans de nombreux domaines, en particulier la dynamique des structures.

J'exprime toute ma reconnaissance à l'égard du Professeur Mabrouk BOUABDELLAH pour avoir accepté de présider mon jury, aux Professeurs Toufik BOUKHAROUBA, Abdelkader NOUR, Brahim NECIB et Nabil BELLOAUCHRANI pour avoir bien voulu examiner ma thèse.

J'adresse également toute ma gratitude aux membres du laboratoire LEMTA de Nancy, France, en particulier Professeur Girard MAURICE et Dr. Mohamed HABOUSSI qui ont su m'accueillir et m'ouvrir l'esprit sur divers aspects du calcul de structures. Un grand merci au Dr. Mohamed HABOUSSI pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la rédaction de ce manuscrit.

Je remercie également mes chers amis Abdellah ABDELLAH EL HADJ et Rachid TIBERKAK pour leur soutien moral et leur bonne humeur, ainsi que tous mes autres amis de l'université de Médéa et l'université de Blida.

En fin, je suis heureux de dédier ce travail à mes parents, à mes frères et sœurs et à ma petite famille.

Notations principales

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}$:	Coefficients de rigidité respectivement en membrane, membrane–flexion, flexion et en cisaillement.
a, b, h	:	Respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque.
$\{\delta\}$:	Vecteur des déplacements globaux.
$[B_i]$:	Matrice d'interpolation des déformations.
c	:	Longueur de la fissure
$\{d_i\}$:	Vecteur des déplacements nodaux.
E	:	Module d'élasticité du matériau
E_1	:	Module d'Young longitudinal.
E_2	:	Module d'Young transversal.
F_c	:	Force de contact
G_{12}	:	Module de cisaillement longitudinal.
G_{13}, G_{23}	:	Modules de cisaillement transversal.
g	:	Nombre de points d'intégration.
$H(\mathbf{x})$:	La fonction de discontinuité
$[J]$:	Matrice Jacobienne,
$[K]$:	Matrice de rigidité globale.
$[K_e]$:	Matrice de rigidité élémentaire.
$[M]$:	Matrice de masse globale.
$[M_e]$:	Matrice de masse élémentaire.
M_x, M_y	:	Moments de flexion.
M_{xy}	:	Moment de torsion.
$[\bar{m}]$:	Matrice d'inertie.
m_p	:	Masse de l'impacteur.
$[N_i]$:	Fonctions d'interpolations des déplacements.
N_x, N_y, N_{xy}	:	Résultantes en membrane.
Q_x, Q_y	:	Résultantes en cisaillement

$[Q]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère principal $(1, 2, 3)$.
$[\bar{Q}]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère du stratifié (x, y, z) .
$[T]$: Matrice de changement de base des contraintes.
$[T']$: Matrice de changement de base des déformations.
u, v, w	: Respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z .
W_a, W_b	: Coefficients de pondération.
(x, y, z)	: Axes liés au stratifié.
$(1, 2, 3)$: Axes principaux liés au pli.
$\alpha_{i,j}$: Facteurs de correction en cisaillement.
γ	: Déformation angulaire.
$\{\Delta\}$: Vecteur déplacement.
ε	: Déformation linéaire.
w_i	: Déplacement de l'impacteur.
ν_i	: Coefficient de poisson de l'impacteur.
α_m	: Indentation maximale.
α_0	: Indentation permanente causée par l'impacteur dans la plaque.
α_{cr}	: Indentation critique.
(ξ, η)	: Système d'axes local.
θ	: L'angle que font le repère $(1, 2)$ et le repère (x, y) .
θ_x, θ_y	: Respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes x, y .
κ	: Déformation en courbure.
ν_{12}, ν_{21}	: Coefficients de Poisson.
ρ	: La masse volumique d'un pli.
σ	: Contrainte normale.
τ	: Contrainte tangentielle.
Ω	: Surface de la plaque.
ω	: Fréquence propre.
ϖ	: Fréquence propre addimensionnelle.

Liste des figures

Figure 1.1. Domaine fissuré avec des conditions aux limites imposées.	15
Figure 1.2. Maillage de la discontinuité dans un modèle éléments finis	17
Figure 1.3. Illustration du choix de la valeur de $H(x)$	18
Figure 1.4. Fissure n'est pas alignée avec le maillage	19
Figure 1.5. Coordonnées locales des pointes de la fissure	19
Figure 1.6. Région du support R_I d'un nœud I	20
Figure 1.7. Fissure arbitraire placée dans un maillage	20
Figure 1.8. Partitionnement des éléments discontinus	21
Figure 1.9. Partitionnement des éléments discontinus en des éléments quadrilatères	22
Figure 1.6. Une zone de maillage avec un élément discontinu	23
Figure 1.7. Géométrie d'une plaque rectangulaire fissurée et ses déformations associées	27
Figure 1.8. Schéma d'une plaque stratifiée	30
Figure 1.9. Directions principales dans un pli	32
Figure 1.10. Changement du repère dans un pli	33
Figure 2.1. Système de numérotation pour un même nombre d'éléments	40
Figure 2.2. Exemple d'une plaque discrétisée en quatre éléments et encastrée sur ses deux côtés	41
Figure 2.3. Répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque	41
Figure 2.4. Répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque après prise en compte de l'enrichissement apporté au nœud 5	42
Figure 2.5. Le test d'orientation pour l'évaluation du signe de H	43
Figure 2.6. Modifications apportées à l'intégration numérique des éléments discontinus	46
Figure 2.7. Procédure de partitionnement des éléments discontinus	46
Figure 2.8. Points de Gauss pour l'élément partitionné	47
Figure 2.9. Algorithme de calcul de la matrice de rigidité pour un élément coupé	48
Figure 2.10. Structure de la matrice de rigidité globale après élimination des degrés de liberté bloqués	49
Figure 3.1. Plaque carrée sur appuis simples avec une fissure au centre	53
Figure 3.2. Position de la fissure par rapport au maillage	53
Figure 3.3. Convergence des fréquences adimensionnelles en fonction du nombre de nœuds ($c/a=0.2$)	55
Figure 3.4. Plaque rectangulaire sur appuis simples avec une fissure au bord	55
Figure 3.5. Comparaison entre la convergence de l'intégration réduite et l'intégration sélective dans le cas d'une plaque avec fissure centrale, l'élément de maillage Q9	56
Figure 3.6. Comparaison entre la convergence de l'intégration réduite et l'intégration sélective dans le cas d'une plaque avec fissure au bord, l'élément de maillage Q9	57
Figure 3.7. Fréquences propres des modes 1,2 et 3 en fonction du rapport de la fissure	59
Figure 3.8. Fréquences propres des modes 4 et 5 en fonction du rapport de la fissure	59
Figure 3.9. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure au centre $h/a=0.001$ $\nu=0.3$	61
Figure 3.10. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure au bord $h/a=0.001$ $\nu=0.3$	62
Figure 3.11. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque rectangulaire	64

simplement appuyée avec une fissure au bord $a/b=2$ $h/a=0.001$ $\nu=0.3$	
Figure 3.12. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au bord $a/b=2$ $h/a=0.001$ $\nu=0.3$	65
Figure 3.13. Plaque encastree libre, encastree libre	66
Figure 3.14. Déformées modales d'une plaque rectangulaire en appuis LELE avec une fissure au centre $a/b=0.5$ $c/a=0.4$ et $\nu=0.31$	67
Figure 3.15. Plaque encastree avec une fissure interne	67
Figure 4.1. Influence du rapport h/a sur les quatre premières fréquences propres normalisées ϖ d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ]_5$	73
Figure 4.2. Influence du cisaillement transverse sur la première fréquence propre normalisées ϖ	74
Figure 4.3 Influence de la symétrie miroir sur la première fréquence propre normalisées de vibration ϖ (a) : stratifié doté de la symétrie miroir (b) : stratifié n'est pas doté de la symétrie	75
Figure 4.4. Evolution de la première fréquence $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2} \cdot 10$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ pour différentes valeurs du rapport géométrique a/b avec $h/a=0.1$	76
Figure 4.5. Evolution de la première fréquence $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2} \cdot 10$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ pour différentes valeurs du rapport géométrique a/b avec $h/a=0.02$	77
Figure 4.6. Evolution de la première fréquence $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2} \cdot 10$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ pour différentes valeurs du rapport géométrique a/b avec $h/a=0.2$	78
Figure 4.7. Influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2 sur les quatre premières fréquences propres normalisées ϖ d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[30^\circ/-30^\circ]_4$	79
Figure 4.8. Influence du nombre de couches sur la première fréquence propre ω d'une plaque carrée simplement appuyée (a) : couches équilibrées antisymétriques $[45^\circ/-45^\circ]_n$ (b) : couches croisées antisymétriques $[0^\circ/90^\circ]_n$	80
Figure 4.9. Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ]_6$	82
Figure 4.10. Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque carrée avec différentes séquences d'empilement	84
Figure 4.11. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque composite carrée sur appuis simples avec une fissure au centre $h/a=0.001$	86
Figure 4.12. Fréquences naturelles normalisées en fonction du degré de l'anisotropie	87
Figure 4.13. Fréquences naturelles normalisées en fonction du degré de l'orientation des fibres θ	88
Figure 4.14. Fréquences naturelles normalisées en fonction du rapport h/a	90
Figure 4.15. Plaque avec fissure interne parallèle à l'axe x	91
Figure 5.1. Description de phénomène de choc	93
Figure 5.2. Schématisation de phénomène de choc	94
Figure 5.3. Caractéristiques géométriques d'une fissure placée dans une plaque	99
Figure 5.4. Force de contact maximale pour deux positions de fissure	100
Figure 5.4. Force de contact maximale pour deux positions de fissure	100
Figure 5.6. Force de contact pour $\bar{a}=0.2$ et $\bar{c} = 0.4$	101
Figure 5.7. Déflexion centrale pour $\bar{a}=0.2$ et $\bar{c} = 0.4$	101

Figure 5.8. Déflexion centrale pour $\bar{a}=0.2$ et $\bar{b} = 0.1$	102
Figure 5.9. Plaque avec plusieurs fissures	103
Figure 5.10. Force de contact pour $\bar{b} = 0.1$	104
Figure 5.11. Déflexion centrale pour $\bar{b} = 0.1$	104
Figure 5.12. Force de contact pour $\bar{a} = 0.4$	105
Figure 5.13. Déflexion centrale pour $\bar{a} = 0.4$	106
Figure 5.14. Force de contact centrale pour $\bar{a} = 0.4$ et $\bar{b} = 0.1$	107
Figure 5.15. Déflexion centrale pour $\bar{a} = 0.4$ et $\bar{b} = 0.1$	107

Liste des tableaux

Tableau	Page
Tableau 3.1 Fréquences propres normalisées d'une plaque carrée isotrope en appuis simples $\nu=0.3$, $h/a=0.1$	52
Tableau 3.2 Fréquences propres normalisées d'une plaque carrée isotrope en appuis simples $\nu=0.3$, $h/a=0.01$	52
Tableau 3.3. Fréquence fondamentale adimensionnelle ω d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée avec une fissure centrale ($\nu=0.3$ et $h/a=0.001$)	54
Tableau 3.4. Fréquences normalisées ω d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure centrale $h/a=0.001$ et $\nu=0.3$	58
Tableau 3.5. Fréquences normalisées ω d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure au bord $h/a=0.001$ et $\nu=0.3$	58
Tableau 3.6. Fréquences normalisées ω d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au bord $a/b=2.0$, $h/a=0.001$ et $\nu=0.3$	63
Tableau 3.7. Fréquences normalisées ω d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au centre $a/b=2.0$, $h/a=0.001$ et $\nu=0.3$	63
Tableau 3.8. Comparaison des fréquences adimensionnelles d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au centre $a/b =0.5$ $c/a =0.4$ et $\nu=0.31$	66
Tableau 3.9. Fréquence naturelle d'une plaque carrée en encastrement avec fissure interne	68
Tableau 4.1. Fréquences propres normalisées d'une plaque carrée stratifiée $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sur appuis simples, $h/a= 0.01$	70
Tableau 4.2 Fréquences propres normalisées d'une plaque rectangulaire stratifiée $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ sur appuis simples, $h/a= 0.01$	71
Tableau 4.3. Fréquences normalisées ω plaque carrée simplement appuyée; stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$; $h/a=0.1$	71
Tableau 4.4. Fréquences normalisées ω d'une plaque composite carrée sur appuis simples avec une fissure au centre $h/a=0.001$	85
Tableau 4.5. Fréquences normalisées ω d'une plaque composite carrée sur appuis simples avec une fissure au centre $h/a=0.001$	85
Tableau 4.6. Comparaison des fréquences normalisées ω d'une plaque carrée en stratifié croisé symétrique $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	89
Tableau 4.7. Fréquences normalisées ω en fonction de la position de la fissure	91

Sommaire

	Page
Introduction générale	
1. Introduction	01
2. La fissuration et les autres modes de ruine	01
3. Les matériaux composites et leurs modes d'endommagement	02
3.1. Fissuration matricielle	04
3.2. Rupture des fibres	04
3.3. Décohésion fibre-matrice.....	04
3.4. Délaminage	05
4. Méthodes numériques pour le traitement de la discontinuité	05
4.1. Méthode des éléments de frontière	06
4.2. Méthode sans maillage	06
4.3. Méthode des éléments finis étendue	07
5. La XFEM, son historique	07
6. Vibrations des plaques fissurées	08
7. Structuration de la thèse	13
Chapitre 1 : Formulation éléments finis étendue	
1.1. Méthode des éléments finis étendue	14
1.2. Modèle mathématique.....	15
1.3. Modélisation des fissures par la XFEM	16
1.4. Sélection des nœuds enrichis	20
1.5. Intégration numérique et partitionnement des éléments discontinus	21
1.6. Construction des matrices élémentaires	22
1.7. Application à l'analyse vibratoire des plaques fissurées	26
1.7.1. Plaques isotropes	27
1.7.2. Plaques composites	30
Chapitre 2 : Mise en œuvre numérique de la X-FEM	
2.1. Structuration du programme	38
2.2. Introduction des données	39
2.3. Traitement de la discontinuité	43
2.4. Construction des matrices de rigidité et de masse	44
Chapitre 3 : Vibrations des plaques isotropes fissurées	
3.1. Plaque carrée isotrope sans fissure	51
3.2. Effet de la fissure	52
3.2.1. Plaque carrée avec fissure interne au centre	52
3.2.2. Plaque carrée sur appuis simples	57

3.2.3.	Plaque rectangulaire sur appuis simples	62
3.2.4.	Plaque rectangulaire sur appuis libre-encastree, libre-encastree	66
3.2.5.	Plaque carree encastree	67
Chapitre 4 : Vibrations des plaques composites fissurees		
4.1.	Vibration des plaques sans fissures	69
4.1.1.	Plaque stratifiee orthotrope [0°/90°/90°/0°]	69
4.1.2.	Stratifie croise antisymetrique [0°/90°/0°/90°]	70
4.1.3.	Starifie equilibre antisymetrique [45°/-45°/45°/-45°]	71
4.1.2.	Etudes parametriques.....	72
a.	Influence du rapport epaisseur/longueur (h/a)	72
b.	Effet de l'orientation des fibres	75
c.	Influence de l'anisotropie du materiau E_1/E_2	78
d.	Influence du nombre de couches	79
e.	Influence des conditions aux limites	81
f.	Influence de l'empilement des couches.....	83
4.2.	Vibration des plaques fissurees	85
4.2.1.	Effets de la longueur de la fissure	85
4.2.2.	Effets de l'anisotropie du materiau	87
4.2.3.	Effets de l'orientation des fibres	88
4.2.4.	Influences du changement de l'epaisseur.....	89
4.2.5.	Influences de la position de la fissure.....	90
Chapitre 5 : Reponses a l'impact des plaques fissurees isotropes et composites		
5.1.	Description de processus de contact	92
5.2.	Calcul de la force de contact	92
5.3.	Solution des equations d'equilibres dans l'analyse dynamique	95
5.3.1.	Algorithme de Newmark	95
5.3.2.	Methode de Newton Raphson	97
5.4.	Applications numeriques	98
5.4.1	Plaque isotrope	98
a.	Effets de la longueur de la fissure	99
b.	Effets de la position de la fissure	101
5.4.2	Plaque composite	102
a.	Effets de la longueur de la fissure	103
b.	Effet des conditions aux limites	105
c.	Effets de nombre de fissures	106
Conclusion Generale		108
Annexe 1 : Matrices de changement de base		111
Annexe 2 : Relations fondamentales des plaques stratifiees		115
Annexe 3 : Sous-programme Subspace		124
Bibliographie		137

Introduction Générale et état de l'art

1. Introduction

La présence de défauts dans les structures affaiblit leur résistance mécanique, peut entraîner leur ruine, et être à l'origine de catastrophes graves. Afin d'éviter celles-ci, ingénieurs et scientifiques doivent donc être capable de prédire le comportement des structures fissurées, et d'en garantir l'intégrité.

Selon les cas, la présence de fissures peut être constatée lors d'inspection si le composant est accessible au contrôle, ou supposée lorsque l'on souhaite évaluer la sûreté d'un composant.

La mécanique de la rupture est la science qui étudie le comportement des structures fissurées. Elle fournit les outils nécessaires pour l'analyse de l'intégrité de structures. Il s'agit d'un domaine scientifique relativement récent puisqu'il est apparu après la première guerre mondiale, notamment avec les études de Griffith en 1920 et d'Irwin en 1957.

La mécanique de la rupture trouve notamment ses applications dans les domaines aéronautiques, de construction navale, de génie civil, et dans les activités nucléaires.....

2. La fissuration et les autres modes de ruine

Les modes de ruine en mécanique des solides sont nombreux. Parmi les principaux, la ruine due à la fissuration est un danger essentiel à prendre en compte lors de la conception de structures à côté d'autres modes comme la ruine par déformation plastique, flambement, fluage, corrosion, etc. La fissuration prend en compte l'existence de défauts de fabrication comme des inclusions ou des vides dans le matériau ou encore de zones d'endommagement à partir desquels des fissures vont s'initier puis se propager pour parvenir à une taille où la structure atteint la ruine.

Différents types de fissuration sont à distinguer :

- la fissuration stable qui comprend
 - la fissuration quasi-statique sous une charge constante,
 - la fissuration par fatigue sous une charge répétée et
 - la fissuration dynamique lorsqu'une charge est appliquée soudainement.
- la fissuration instable qui est instantanée et à laquelle peut conduire la fissuration stable.

3. Les matériaux composites et leurs modes d'endommagement

Un matériau composite peut être défini comme l'assemblage de plusieurs matériaux de nature différente à l'échelle microstructurale. Les composites sont le plus souvent constitués d'une matrice dans laquelle on a dispersé de façon contrôlée des renforts. La matrice maintient les renforts et assure les transferts de charge, tandis que les renforts apportent principalement leurs caractéristiques mécaniques élevées (modules et limite d'élasticité, résistance mécanique...). Cette association a pour but d'obtenir un matériau dont les propriétés spécifiques (propriétés mécaniques rapportées à la masse volumique) sont supérieures à celles de la matrice non renforcée. Le concept de matériau composite, par le choix des constituants et de leurs proportions respectives, ainsi que par le choix de la forme, des dimensions et de la disposition des renforts, permet donc de concevoir un matériau présentant les caractéristiques spécifiques recherchées.

La nature du matériau constituant la matrice permet de répertorier trois grandes classes de composites, considérées ici par ordre croissant de tenue en température : les composites à matrice polymère, les composites à matrices métallique et les composites à matrice céramique. Il est alors possible d'associer à ces trois types de matrice soit des renforts discontinus, dont toutes les dimensions sont très inférieures aux dimensions de la pièce, soit des renforts continus, dont au moins une dimension est du même ordre de grandeur qu'une dimension de la pièce. Les matériaux utilisés comme renforts présentent de bonnes propriétés mécaniques intrinsèques (carbone, alumine, silice, bore, kevlar, acier, nitrure et carbure de silicium...). Parmi les renforts discontinus, on trouve des fibres courtes monocristallines d'une longueur comprise entre 20 et 100 micromètres et des particules (billes, plaquettes, éclats...) caractérisées par un rapport d'élancement inférieur à 5 et une taille qui peut varier du micromètre à quelques centaines de micromètres. Les renforts

continus ou fibres longues ont quant à eux un diamètre qui varie selon leur nature entre quelques micromètres à plus de centaine de micromètres. Selon l'application envisagée, l'assemblage de ces fibres longues peut être unidimensionnel (plis tissés, mats à fibres coupées de quelques centimètres ou à fibres continues) ou tridimensionnel (tissus multidimensionnels).

Les matériaux composites trouvent de plus en plus d'applications dans la réalisation de pièces structurales de dimensions diverses dans de nombreux secteurs industriels tels que l'aéronautique, la construction automobile, le nucléaire, le génie biomédical.....En effet dans ces domaines d'application, le remplacement des matériaux métalliques par les composites est motivé par l'allègement des structures à propriétés égales voir supérieures. En raison du coût généralement élevé de ces matériaux, un effort particulier est fait en direction d'une réduction des coûts de fabrication afin d'optimiser les processus d'élaboration et les propriétés d'usage. Un autre point important est le comportement à long terme de ces matériaux. Un effort important a été fait ces dernières années pour prolonger la durée de vie des structures en matériaux composites et prévoir dans le cas échéant leur rupture. D'une façon générale, la durabilité de ces matériaux fortement hétérogènes et d'une grande complexité structurale n'est pas encore maîtrisée alors qu'elle est au cœur des problèmes de sécurité des grandes structures technologiques notamment aéronautique, spatiales et nucléaire.

Lors d'une sollicitation quelconque sur un matériau composite, le développement de l'endommagement au sein du matériau commence assez tôt. Dans un composite, les premiers endommagements détectés commencent à se développer à l'échelle microscopique lorsque l'effort localisé atteint la limite de rupture d'un des constituants ou celle de l'interface les reliant. Les microfissures qui se développent sont habituellement trop petites pour causer la rupture finale du composite. Ainsi, un nombre important de ces microfissures s'accumule dans le composite avant la rupture finale. Les paramètres, tels que la fraction volumique, l'orientation des fibres, l'épaisseur des plis et l'espacement entre fibres, jouent un rôle très important dans la progression de l'endommagement. En conséquence, le procédé global de la rupture dans les composites est souvent considéré comme un processus d'accumulation de différents types d'endommagements.

Les mécanismes d'endommagement potentiels d'un composite peuvent se regrouper en quatre principaux modes différents :

- Fissuration matricielle ;
- Rupture de l'interface fibre matrice ;
- Rupture des fibres ;
- Délaminage inter plis.

3.1. Fissuration matricielle

La complexité des matériaux composites introduit plusieurs types d'endommagements à l'échelle microscopique. Les microfissures se produisent au sein de la matrice apparaissent aux niveaux des porosités et des inclusions soit par fissuration transverse soit par fissuration longitudinale. Ce dernier mode de la rupture se produit lorsque la contrainte décohésion est supérieure à celle de cisaillement. Cette fissuration se propage selon la direction perpendiculaire à la sollicitation et elle peut provoquer une décohésion fibre matrice.

3.2. Rupture de fibre

La rupture de fibre intervient lorsque la contrainte de traction dans une fibre atteint la contrainte à la rupture de la fibre. Elle se produit souvent dans les plis les moins désorientés par rapport à la direction de sollicitation. L'excès d'effort provoquera la rupture des constituants voisins, et ce de proche en proche jusqu'à la ruine du volume sollicité.

3.3. Décohésion fibre-matrice

C'est dans la zone de l'interface où s'effectue le transfert de charge de la matrice vers le renfort ou vice versa. Après initiation, la propagation de la rupture change suivant la nature de l'adhésion fibre matrice. Dans le cas d'un composite à fibres unidirectionnelles sollicité parallèlement aux fibres, on peut distinguer les cas suivants :

- Cas d'une interface très forte : Si l'adhérence entre fibres et matrice est très forte, on aura une propagation de la fissure initiée soit par rupture de fibres, soit par

rupture de la matrice comme si elle n'avait rencontré aucun obstacle, la rupture observée sera de type fragile.

- Cas d'une interface très faible : la fissuration matricielle est déviée à l'interface, la décohésion fibre matrice s'étend sur une très grande distance.
- Cas d'une interface ayant des propriétés intermédiaires : la fissure au contact d'une fibre se dévie dans un plan perpendiculaire en provoquant un décollement de la matrice au niveau de l'interface.

3.4. Délaminage :

Dans le cas de stratifiés, aux mécanismes décrits précédemment (fissuration matricielle, rupture de fibre, décohésion, etc...), s'ajoute un autre mécanisme d'endommagement entre couche appelé délaminage. Le processus de délaminage est le résultat d'une chronologie de divers types d'endommagement. Les propriétés mécaniques de la matrice et de la fibre ainsi que les propriétés adhésives et cohésives de l'interface gèrent cette chronologie en révélant des types d'endommagement fréquemment rencontrés comme la micro fissuration de la matrice, la rupture des fibres et la rupture des interfaces. Le délaminage progresse essentiellement par fissuration interlaminaire considéré comme le premier responsable du dédoublement de son épaisseur. A cela on associe un réseau très important de fissures intralaminaires qui sont eux aussi induites par les fissures interlaminaires par différents moyens (rupture de matrice, de fibre et d'interface) allant jusqu'au décollement total des deux plis. Ce type d'endommagement contribue largement à la dégradation des propriétés mécaniques de la structure.

4. Méthodes numériques pour le traitement de la discontinuité

La fissuration est simulée par une méthode numérique à l'aide d'analyses successives. Une première analyse résout les équations aux dérivées partielles qui modélisent le comportement du solide fissuré en tenant compte des charges appliquées et des déplacements imposés pour obtenir une estimation des déplacements, déformations et contraintes en tout point de ce solide. L'intensité et la variation de ces champs à proximité du front de fissure sont ramenées à quelques grandeurs caractéristiques qui sont introduites dans le modèle de fissuration choisi pour obtenir la direction et la longueur de propagation

de la fissure. En mécanique linéaire de la rupture par exemple, ces grandeurs caractéristiques sont les trois facteurs d'intensité de contrainte. En ajoutant l'incrément de fissure prédit par le modèle au front de fissure, nous obtenons une nouvelle fissure, qui est la nouvelle frontière interne pour l'analyse suivante qui donnera les nouveaux champs de déplacement, déformation et contrainte et ainsi de suite.

Si la méthode des éléments finis classique a montré son efficacité et sa puissance pour résoudre de nombreux problèmes en mécanique des solides, elle est moins adaptée pour réaliser les analyses successives d'un problème de fissuration. En effet, pour appliquer cette méthode, un maillage du domaine en sous-domaines dont les frontières doivent correspondre aux frontières du domaine est nécessaire. Comme les frontières internes changent d'une analyse à l'autre, cette opération de maillage doit être recommencée à chaque étape, au moins dans une zone entourant la formation des nouvelles frontières. Cette opération peut être coûteuse en temps de calcul. Si une telle approche est envisageable à deux dimensions et pour les fissures planes à trois dimensions, il semble irréaliste de procéder de cette manière pour des fissures tridimensionnelles arbitraires. On distingue trois familles principales de méthodes numériques plus appropriées que la méthode classique des éléments finis pour la propagation de fissures.

Méthode des éléments de frontière : Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis une vingtaine d'années, elle présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière du domaine et non de l'intérieur. Le travail de remaillage entre chaque étape est donc minime puisqu'il suffit d'ajouter un ou quelques éléments sur les incréments de fissure. Dans cette méthode, les équations aux dérivées partielles sont transformées en des équations intégrales sur la frontière par le biais d'une certaine solution fondamentale de ces équations aux dérivées partielles, dite solution de Green. Cette méthode n'est applicable que si une telle solution existe, ce qui n'est pas le cas des problèmes élasto-plastiques. Pour ces problèmes, un maillage de la zone plastifiée est nécessaire, ce qui fait perdre une grande partie des avantages de la méthode.

Méthode sans maillage Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1994, cette méthode est plus proche de la méthode des éléments finis que la méthode précédente. Elle se base sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin comme en éléments finis mais par contre l'approximation du champ de déplacement qui est construite pour être introduite dans la

forme faible ne nécessite pas de maillage. Seul un ensemble de noeuds est réparti dans le domaine et l'approximation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point par rapport aux noeuds qui l'entourent et non de l'appartenance à un certain élément fini. En mécanique de la rupture, la fissure se propage parmi cet ensemble de noeuds et la présence d'une fissure est simplement prise en compte en diminuant le poids que possède un noeud sur l'approximation du déplacement en un certain point si la ligne joignant ce noeud et ce point est coupée par la fissure.

Méthode des éléments finis étendue Plus connue sous le sigle XFEM (pour eXtended Finite Element Method) et parfois appelée méthode des éléments finis généralisée, elle est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1999. Elle se base sur la méthode des éléments finis avec un maillage normal en remplaçant les éléments qui sont coupés par une fissure par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de celle-ci. Cette méthode sera utilisée dans le présent travail.

5. La XFEM, son historique

L'utilisation de la méthode des éléments finis étendue bien que récente a connu un vif succès pour des cas de propagation de fissure très divers : la rupture par fatigue, la rupture fragile élasto dynamique, la déchirure ductile et la fissuration multiple.

La méthode des éléments finis étendue est une idée originale de Belytschko et Black [1], les auteurs ont présenté une méthode pour l'enrichissement des éléments finis pour que les problèmes de propagation de la fissure peuvent être résolus avec un remaillage minimal. Mões et al. [2] ont éliminé complètement les opérations de remaillage en ajoutant une fonction discontinue dans la base d'enrichissement. Ainsi, le remaillage ne représente plus une contrainte lors de la modélisation par éléments finis de la propagation de fissures. Daux et ces collaborateurs [3] ont proposé le concept de la fonction de jonction pour représenter plusieurs fissures branchées. Pour les fissures branchées, ils ont utilisé les fonctions asymptotiques ; la fonction discontinue $H(x)$ et une nouvelle fonction $J(x)$ pour tenir compte du branchement. Cette technique a été employée pour modéliser les géométries compliquées telles que les fissures multiples branchées, les vides et les fissures émanant de trous. Dolbow et al. [4] ont étudié la propagation des fissures dans les plaques

de type Mindlin-Reissner. La formulation XFEM est semblable à celle développée dans [2].

Sukumar et al. [5] ont présenté l'implémentation de la XFEM dans la modélisation des fissures en trois dimensions. Ils ont démontré l'exactitude de cette technique pour des fissures statiques tridimensionnelles, une fonction discontinue a été utilisée pour modéliser la surface intérieure de la fissure, et des fonctions asymptotiques dérivées à partir du champ de déplacements bidimensionnel pour l'enrichissement des frontières de la fissure. Belytschko et al. [6] ont généralisé la méthode pour la représentation des discontinuités arbitraires. Stolarska et al. [7] ont utilisé la XFEM en conjonction avec la méthode level set [8] pour traiter la propagation de la fissure en deux dimensions.

Belytschko et al. [9] ont présenté une méthode simplifiée basée sur des fonctions implicites pour décrire les discontinuités entre matériaux, glissement des surfaces et les fissures. Ventura et al. [10] ont développé une méthode vectorielle de level set pour décrire la propagation de fissures dans les problèmes bidimensionnels. La fonction level set est mise à jour par des formules géométriques simples. Budyn et al. [11] ont utilisé la méthode vectorielle de level set développée par Ventura [10] pour modéliser la propagation des fissures multiples. Des matériaux homogènes et hétérogènes ont été considérés.

Ventura et al. [12] ont proposé une nouvelle méthode éléments finis pour modéliser d'une manière exacte le déplacement et les contraintes produits par une dislocation. Dans leurs approches, le champ des contraintes local produit par la dislocation est inclus dans la base éléments finis et aucune procédure de projection n'est introduite. Möes et al. [13] ont présenté une stratégie pour imposer les conditions de Dirichlet aux frontières des surfaces stationnaires ou instationnaires en préservant le taux optimal de convergence.

6. Vibrations des plaques fissurées

La connaissance des fréquences naturelles est un moyen de contrôle non destructif utilisé pour connaître s'il y a des défauts dans le matériau ou il y a des changements dans la rigidité. En plus, il est important de connaître les fréquences naturelles de vibration dans la conception des plaques composites, les vibrations peuvent être minimisées par la sélection d'un matériau ou une plaque qui ne sera pas excité dans l'un de ses fréquences propres.

Différentes études ont été entreprises pour déterminer les propriétés dynamiques des plaques stratifiées. Whitney et Pagano [14] ont présenté des solutions pour la vibration des stratifiées symétriques et antisymétriques en adoptant la théorie de Yang, Norris, et Stavsky [15]. La théorie, développée spécialement pour le traitement des plaques isotropes homogènes, tien en compte les déformations du cisaillement et l'inertie de rotation de la même manière que celle de la théorie de Mindlin pour les plaques isotropes homogènes.

Wu et Vinson [16] ont étudié l'effet des déformations du cisaillement transverse sur les fréquences fondamentales des plaques composites avec différentes conditions d'appuis, la solution a été basée sur la méthode de Galerkin, les auteurs ont trouvé que pour une plaque composée de couches fortement anisotropes, l'effet des déformations en cisaillement transverse pour les petites et grandes amplitudes de vibration est important. En utilisant une autre approche, Hearmon [17] a appliqué la méthode de Rayley–Ritz sur des plaques orthotropes, avec des conditions d'appuis simples et d'encastrement, en négligence du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation.

Bert [18] a examiné l'effet du cisaillement transverse sur les plaques rectangulaires en stratifiée équilibré antisymétrique. La théorie de Yang, Norris, et Stavsky [15] a été utilisée. Les résultats ont été présentés en termes des rapports géométriques, nombre de couches et l'orientation des fibres. Il a été conclu que (a) l'effet des déformations en cisaillement transverse sur les fréquences fondamentales est plus grand sur les plaques équilibrées antisymétriques que sur les plaques isotropes homogènes de même dimensions, et (b) l'effet du rapport a/b (longueur/largeur de la plaque) sur les fréquences fondamentales est plus remarqué dans les plaques épaisses que dans le cas des plaques minces

Bhimaraddi and Stevens [19] ont présenté une théorie d'ordre élevé pour l'analyse vibratoire des plaques stratifiées rectangulaires orthotropes et homogènes. La théorie tien en compte les effets de l'inertie inter-plan, de l'inertie de rotation et des déformations du cisaillement. La méthode proposée utilise le principe de Hamilton et suppose que les déformations en cisaillement transverse varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque. Les conclusions suivantes ont été tirées : (a) l'épaisseur de la plaque à un effet plus prononcé sur le comportement des plaques composites que sur celui des plaques isotropes, (b) l'effet des déformations en cisaillement transverse est plus prononcé dans le cas des

plaques composites épaisses, et (c) les fréquences calculées par la présente analyse sont proches aux valeurs exactes que celles calculées par la théorie des déformations en cisaillement.

Reddy [20] a développé la théorie de layerwise pour l'analyse de la vibration libre des plaques stratifiées. Cette méthode de résolution, la plus courante et la plus sophistiquée, se base essentiellement de divers effets tridimensionnels. Les résultats ont été aussi obtenus pour les stratifiées symétriques et antisymétriques.

Mirza et Li [21] ont présenté une approche analytique basée sur le théorème réciproque des vibrations libres des plaques sandwich. Marco and Ugo [22] ont présenté un élément plaque basé sur une formulation d'ordre élevé pour l'analyse des plaque carrée symétrique $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ pour les cas de conditions d'appuis simples. La distribution de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque a été obtenue en utilisant la procédure éléments finis d'ordre élevé.

Numayr et al. [23] ont utilisé la méthode des différences finies pour montrer que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et de cisaillement transverse affecte les fréquences propres de vibration des plaques minces et épaisses.

Bachene et al. [24] ont étudié les effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. Dans leur étude, les effets du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation ont été pris en considération. Ils ont démontré que l'augmentation du rapport (longueur/largeur) conduit à une position de stabilité caractérisée par une variation constante de la première fréquence propre. Cette position est rapidement atteinte pour les plaques épaisses en comparaison avec les plaques minces.

Dans un autre travail, Bachene et al. [25] ont étudié les effets de certains paramètres d'influences sur les caractéristiques vibratoires des plaques stratifiées, à savoir : la géométrie de la plaque, le degré de l'anisotropie du matériau et de l'orientation des fibres. Lors de cette étude, il a été constaté que les déformations en cisaillement transverse ne peuvent pas être négligées dans la situation des plaques épaisses, il a été aussi constaté que

la rigidité de la plaque est affectée par l'anisotropie du matériau ainsi que de l'orientation des fibres.

Cependant, quand les plaques composites sont en service, des fissures peuvent se présenter à cause de l'impact accidentel ou des effets environnementaux, en conséquence, leurs propriétés dynamiques peuvent être modifiées. Les fréquences de vibration différents de celles des plaques sans défaut et des facteurs d'intensité de contraintes sont produits. Les structures peuvent alors être abandonnées à cause du grand déplacement causé par la résonance ou par la propagation de la fissure.

Le phénomène vibratoire des plaques fissurées a été initialement traité par Lynn et Kumbasar [26]. Dans leur travail, l'équation intégrale de Fredholm a été obtenue en utilisant la fonction de Green. Stahl et Keer [27] ont étudié la vibration libre et la stabilité des plaques rectangulaires fissurées. Leur développement a été basé sur une équation de séries duels pour obtenir la solution en terme de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.

Ali et Atwani [28] ont utilisé la méthode de Rayleigh pour prédire les fréquences naturelles des plaques rectangulaires avec vides. Soliki [29] a utilisé une transformation de séries de Fourier en conjonction avec le théorème généralisé de Green-Gauss. L'amélioration de son travail précédent est faite en remplaçant les amplitudes des déplacements inconnus de la discontinuité à travers la fissure par la discontinuité de la deuxième dérivée du même déplacement.

Liew et al. [30] ont utilisé la décomposition du domaine dans la détermination des fréquences des plaques fissurées. Khadem et Razaee [31] ont introduit les fonctions de comparaison modifiées pour analyser les vibrations des plaques rectangulaires fissurées. Leurs fonctions de comparaison modifiées sont dérivées de la méthode de Rayleigh-Ritz. Wu et Shih [32] ont étudié l'instabilité dynamique des plaques rectangulaires avec une fissure au bord, ils ont utilisé l'équilibre harmonique par accroissement pour résoudre l'équation temporelle non linéaire du mouvement pour l'analyse dynamique de l'instabilité.

La méthode des éléments finis a été également utilisée dans l'analyse vibratoire des plaques fissurées. Qian et al. [33] ont étudié les vibrations des plaques rectangulaires

contenant des fissures parallèles à l'un des côtés de la plaque. Dans une autre étude, Prabhakara et Datta [34] ont utilisé la méthode des éléments finis pour examiner la stabilité statique et les vibrations des plaques rectangulaires fissurées. Considérant les effets du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation, Lee et Lim [35] ont utilisé une approche numérique basée sur la méthode de Rayleigh-Ritz pour prédire les fréquences naturelles de plaques rectangulaire avec une fissure au centre. Krawczuk et Ostachowicz [36] et Krawczuk [37] ont calculé la matrice de flexibilité de la plaque avec fissure comme une somme de plaques non fissurées et matrice de flexibilité additionnelle causé par la fissure. Toutes les études suscitées ont fait la conclusion que la fréquence naturelle et les amplitudes de vibration dépendent de la longueur et de la position de la fissure.

Bachene et al. [38-40] ont utilisé la XFEM pour décrire le comportement vibratoire des plaques fissurées. Plaques avec fissure centrale et plaques avec fissure au bord ont été traitées. Les vibrations des plaques composites ont fait l'objet d'une autre étude faite par Bachene et al. [41] où les effets de la position de la fissure, de l'anisotropie du matériau et de l'orientation des fibres ont été complètement examinés.

Dans cette thèse, le comportement vibratoire des plaques isotropes et composites à base de fibres et en présence des défauts est analysé. La méthode des éléments finis étendue est utilisée. A notre connaissance, l'emploi de la XFEM dans l'analyse vibratoire des plaques fissurées n'est pas encore reporté. La méthodologie proposée dans [2] est suivie. Le développement du modèle mathématique est basé sur la théorie de Mindlin–Reissner. Sur la base de ce développement mathématique, un programme informatique est élaboré par nos soins. Ce programme écrit en Fortran, permet d'effectuer plusieurs tâches, à savoir, l'analyse des contraintes, les réponses vibratoires des plaques, et le phénomène de choc dans les matériaux anisotropes. La première étape du travail consiste à valider le programme développé par rapport aux résultats expérimentaux, analytiques et numériques existant dans la littérature. En second lieu, une étude paramétrique sur les fréquences propres des plaques sans défauts est effectuée, les paramètres d'études sont les dimensions géométriques de la plaque, les conditions de sa fixation, l'anisotropie du matériau, et enfin l'orientation et la séquence d'empilement des couches. Les mêmes paramètres sont ensuite considérées dans la troisième étape, afin d'examiner leurs influences sur les vibrations des plaques fissurées où plusieurs cas de fissures sont traités. Le comportement au choc des plaques fissurées a été aussi traité dans cette thèse. Les résultats obtenus sont

encourageants, et montrent la puissance de cette méthode dans l'analyse dynamique des plaques fissurées.

7. Organisation de la thèse

La thèse est composée de cinq chapitres : le chapitre 1 est consacré à une nouvelle méthode d'analyse numérique des structures présentant des discontinuités : la méthode des éléments finis étendue (XFEM), les fondements théoriques de cette méthode sont adaptés pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques fissurées. Le chapitre 2 est dédié à l'implémentation numérique de cette méthode. Un intérêt particulier est porté au calcul des matrices de rigidité et de masse des éléments discontinus. Afin de donner une idée sur le degré d'exactitude du programme développé dans le traitement des plaques isotropes, des études comparatives sont effectuées au chapitre 3 sur des cas de plaques saines et fissurées, le chapitre est accompli par des études paramétriques. Dans le chapitre 4, le comportement vibratoire des plaques composites sans défauts et avec fissures est examiné, des cas de plaques avec fissure interne et aux bords sont traités. Le 5^{ème} chapitre traite l'effet du choc sur les réponses dynamiques des plaques isotropes et composites fissurées. La thèse est achevée par une conclusion générale et des recommandations et perspectives pour des travaux futures.

Chapitre 1

Formulation Eléments Finis Etendue

Ce chapitre expose la méthode des éléments finis étendue (XFEM) utilisée pour la modélisation de structures mécaniques contenant des fissures préexistantes. La méthode est d'abord présentée d'une manière générale, le cadre bidimensionnel est ensuite retenu pour réaliser les tests de validation. Ces derniers concernent le problème de vibration de plaques isotropes et composites contenant des fissures situées à différents endroits de la structure et orientées arbitrairement.

1.1. Méthode des éléments finis étendue

La méthode des éléments finis étendue a été introduite par Mões *et al.* [2] en 1999 pour résoudre les problèmes de discontinuités dans les éléments dues à la présence de fissures. Elle se présente comme une extension de la méthode des éléments finis classique en remplaçant les éléments traversés par une éventuelle fissure par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires. Ces derniers permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de la fissure. Le choix de cette dernière dépend du type de discontinuité présente dans l'élément. Ainsi, la fonction Heaviside par exemple est utilisée pour décrire une fissure qui traverse complètement l'élément. Nous avons également les fonctions asymptotiques, obtenues à partir de l'expression du champ de déplacement autour de la pointe de la fissure, qui sont utilisées pour décrire le comportement d'un élément contenant la pointe de la fissure [2].

1.2. Modèle mathématique

Considérons un domaine matériel Ω contenant une fissure (discontinuité interne représentée par Γ_c) et soumis au travers sa frontière $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ à des champs de force \mathbf{f}^t (sur Γ_t) et de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$ (sur Γ_u).

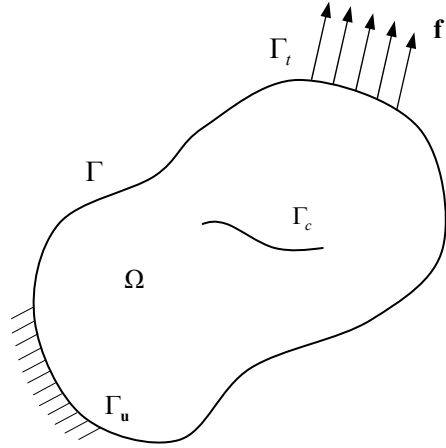


Figure 1.1 Domaine fissuré avec des conditions aux limites imposées.

La formulation locale ou forte de la loi de conservation de la quantité de mouvement nous amène à l'équation du mouvement :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^b = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.1)$$

A cette équation, on adjoint les conditions aux limites suivantes:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^t \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (1.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (1.4)$$

où \mathbf{n} représente la normale unitaire extérieure, $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur de contraintes, ρ , la masse volumique, \mathbf{f}^b , la densité des forces de volume, et \mathbf{f}^t , l'effort extérieur.

La loi de conservation de la quantité de mouvement peut être formulée de manière faible ou globale, grâce à l'utilisation du théorème de la divergence, sous la forme :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^b \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}^t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (1.5)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \text{ cinématiquement admissible (i.e. } \delta \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_u)$$

1.3. Modélisation des fissures par la XFEM

Soit \mathbf{x} un point d'un domaine plan (bidimensionnel) contenant une discontinuité arbitraire. Dans la méthode des éléments finis étendue, l'approximation suivante est utilisée pour calculer le déplacement au point \mathbf{x} [2]:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \Delta^{EF} + \Delta^{Enrichi} = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x})\delta_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\delta'_j \quad (1.6)$$

où N_i représente les fonctions d'interpolation standards (éléments finis classiques), I , l'ensemble des nœuds du domaine discrétisé, J , l'ensemble des nœuds des éléments traversés par la fissure, δ_i , le vecteur déplacement classique au nœud i , δ'_j , le vecteur de déplacement au nœud j correspondant à l'enrichissement et f , la fonction d'enrichissement.

Le terme $\Delta^{EF} = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x})\delta_i$ de l'équation (1.6) représente l'approximation élément finis classique, le deuxième terme $\Delta^{Enrichi} = \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\delta'_j$ tient compte la présence de la discontinuité.

Dans le cas où le modèle possède plusieurs fissures n_f , (1.6) est modifiée pour se mettre sous la forme :

$$\Delta(\mathbf{x}) = \Delta^{EF} + \Delta^{Enrichi} = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x})\delta_i + \sum_{l=1}^{n_f} \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\delta'_j \quad (1.7)$$

Dans les travaux de Moës, Dolbow et Belytschko [2], deux types d'enrichissement sont considérés pour modéliser les discontinuités dans le cas bidimensionnel :

- des fonctions échelon d'Heaviside H pour les éléments complètement traversés par la discontinuité.
- des fonctions asymptotiques, obtenues à partir de l'expression du champ de déplacement autour de la pointe de la fissure, pour les éléments contenant une pointe de fissure.

L'enrichissement par les fonctions Heaviside (échelon) a été initialement introduit par Moës en 1999 où il a proposé une fonction échelon qui permet de représenter le « saut »

dans le champ de déplacements coupé par une discontinuité en prenant la valeur +1 au dessus de la discontinuité (domaine appelé "positif") et -1 en dessous (domaine appelé "négatif").

Moës a appliqué sa démarche pour le cas simple d'une fissure alignée avec les cotés d'éléments du maillage dont la pointe coïncide exactement avec l'un des nœuds de celui-ci comme le montre la figure 1.2.

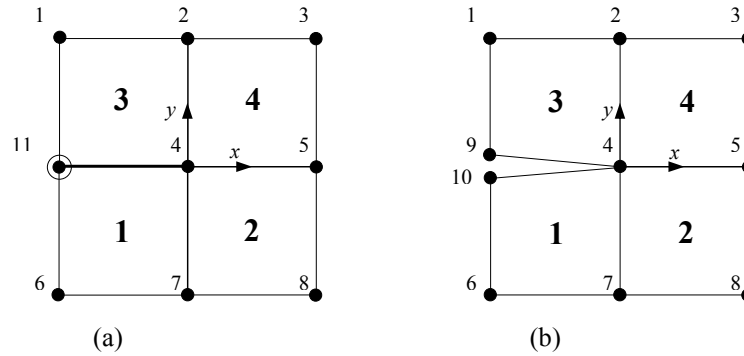


Figure 1.2. Maillage de la discontinuité dans un modèle éléments finis
 a) Maillage par l'enrichissement du nœud 9
 b) Maillage par dédoublement du nœud au niveau de la discontinuité

Dans les méthodes classiques, pour représenter le saut de déplacement imposé par la présence d'une fissure, il est d'usage d'employer la notion de double nœud représenté sur la figure (1.2(b)) par le couple 9-10. Celui-ci est remplacé dans l'approche XFEM par un seul nœud 11 (figure 1.2(a)). L'approximation éléments finis peut être définie comme suit :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{10} \delta_i N_i \quad (1.8)$$

où δ_i est le champ de déplacement du nœud i et N_i la fonction d'interpolation associée au nœud i .

Dans [2] deux nouveaux termes sont définis qui font apparaître le déplacement moyen a et le saut déplacement b du double nœud :

$$a = \frac{\delta_9 + \delta_{10}}{2}, \quad b = \frac{\delta_9 - \delta_{10}}{2} \quad (1.9)$$

A partir de la relation (1.9), δ_9 et δ_{10} peuvent être exprimées sous la forme:

$$\delta_9 = a + b \quad \delta_{10} = a - b \quad (1.10)$$

Si on remplace δ_9 et δ_{10} par leurs expressions dans (1.8), on obtient :

$$\Delta = \sum_{i=1}^8 \delta_i N_i + a(N_9 + N_{10}) + b(N_9 + N_{10})H(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

$H(\mathbf{x})$ représente la fonction de discontinuité (la fonction Heaviside), elle est définie dans le système de coordonnées local de la fissure (Figure 1.2) par :

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Ceci à dire que, $H(\mathbf{x})$ est égale à 1 sur l'élément 1 et -1 sur l'élément 3.

L'équation (1.11) peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta = \sum_{i=1}^8 \delta_i N_i + \delta_{11} N_{11} + b N_{11} H(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

avec $N_{11} = N_9 + N_{10}$ et $\delta_{11} = a$

Il s'ensuit donc une nouvelle expression du champ de déplacement enrichi de la structure plane illustrée sur la figure 1.2 faisant une fonction discontinue.

Nous venons de voir comment la fonction d'Heaviside permet de décrire une fissure rectiligne dont les lèvres coïncident avec les arrêtes des éléments du maillage.

Dans le cas d'une fissure « ligne » courbe (Figure 1.3), la fonction d'Heaviside peut être définie comme le signe du produit $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n$, avec \mathbf{x} , un point du domaine, \mathbf{x}^* , le point le plus proche à \mathbf{x} appartenant à la discontinuité. \mathbf{e}_s et \mathbf{e}_n vecteurs unité sur la discontinuité, respectivement tangent et normal à la courbe en \mathbf{x}^* ,

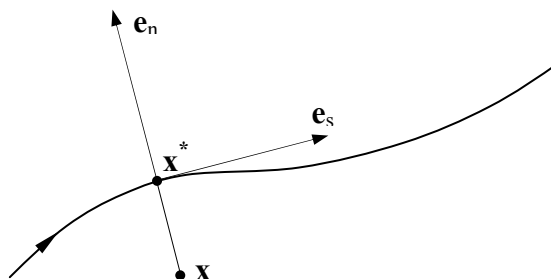


Figure 1.3 Illustration du choix de la valeur de $H(\mathbf{x})$ (ici $H(\mathbf{x}) = -1$)

Pour sortir du cadre d'une fissure alignée sur les arêtes des éléments du maillage avec les pointes de la fissure coïncidant avec un nœud du bord de l'élément, il faut utiliser, en plus de la fonction d'Heaviside H , des fonctions asymptotiques obtenues à partir de l'expression du champ de déplacement autour de la pointe de la fissure.

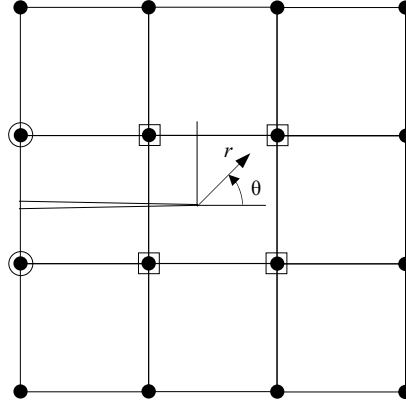


Figure 1.4. Fissure n'est pas alignée avec le maillage
Les nœuds encerclés sont enrichis par les fonctions Heaviside
Les nœuds entourés par un carré sont enrichis par les fonctions asymptotiques

L'approximation XFEM s'écrit dans ce cas :

$$\Delta = \sum_{i \in I} u_i N_i + \sum_{j \in J} \bar{a}_j N_j H(x) + \sum_{k \in K_1} N_k \left(\sum_{l=1}^4 \bar{b}_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in K_2} N_k \left(\sum_{l=1}^4 \bar{b}_k^{l2} F_l^2(x) \right) \quad (1.14)$$

où :

$$\{F_l(r, \theta)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\}$$

r et θ sont les coordonnées polaires locales par rapport aux pointes de la fissure (Fig. 1.5), I , l'ensemble des nœuds du maillage, J , l'ensemble des nœuds enrichis par la fonction de discontinuité H , \bar{a} , les degrés de liberté associés aux nœuds enrichis par H , \bar{b} , les degrés de liberté associés aux nœuds enrichis par les fonctions asymptotiques, K_1 et K_2 , les ensembles de nœuds au voisinage des pointes de fissure enrichis par les fonctions asymptotiques.

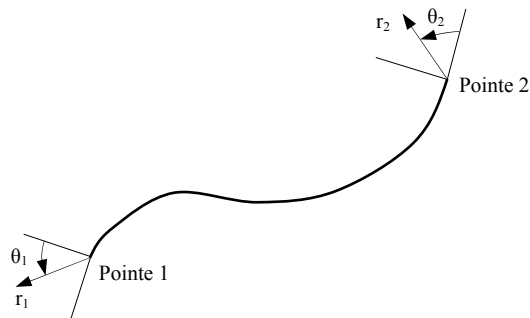


Figure 1.5 Coordonnées locales des zones autour des pointes de la fissure

1.4. Sélection des nœuds enrichis

La méthode des éléments finis étendue introduit, par l'intermédiaire de fonctions d'enrichissement, des degrés de liberté additionnels. Ces derniers sont associés aux nœuds dont la région du support est coupée par la discontinuité. Un nœud est enrichi si au moins l'un des bords intérieurs de la région de ses supports est coupé par la discontinuité. Un exemple simple est montré sur la figure 1.6, pour le nœud I du maillage, la discontinuité coupe au moins un des bords intérieurs de la région R_I , donc le nœud I sera enrichi.

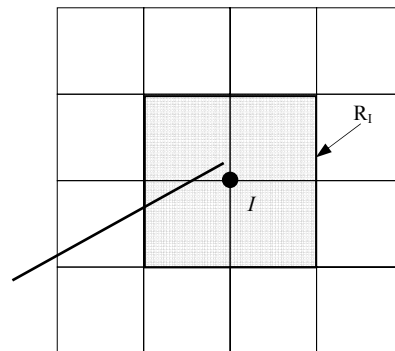


Figure 1.6. Région du support R_I d'un nœud I

La figure 1.7 illustre le cas d'une fissure arbitraire dans un maillage éléments finis régulier. Les nœuds des éléments complètement traversés par la discontinuité sont enrichis par les fonctions Heaviside H , tandis que les nœuds des éléments contenant les pointes de la fissure sont enrichis par les fonctions asymptotiques F , données par l'équation 1.14.

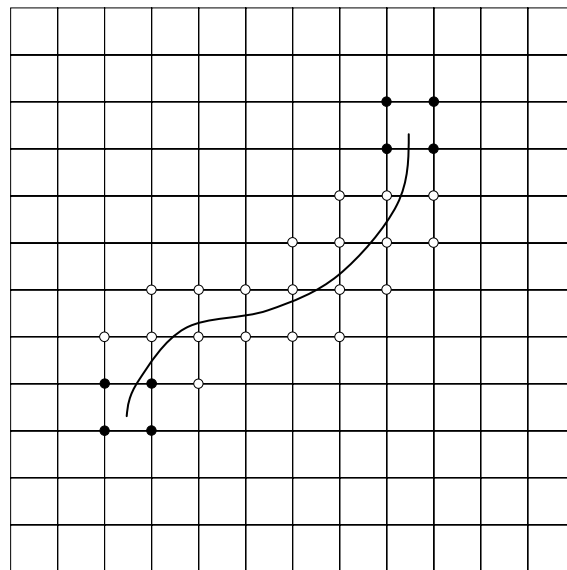


Figure 1.7. Fissure arbitraire placée dans un maillage

- Nœuds enrichis par les fonctions Heaviside
- Nœuds enrichis par les fonctions asymptotiques

1.5. Intégration numérique et partitionnement des éléments discontinus

La quadrature de Gauss est largement utilisée dans les calculs par éléments finis grâce à son efficacité dans le calcul des matrices élémentaires. Cependant, la présence de discontinuité dans un élément, rend imprécise son intégration si l'on conserve la même méthode que si l'élément n'était pas enrichi. L'alternative proposée dans la méthode des éléments finis étendue pour résoudre ce problème est d'augmenter le nombre de point de Gauss de part et d'autre de la discontinuité. Ceci est fait en subdivisant l'élément en sous éléments simples (triangles ou quadrangles) pour les quels les matrices élémentaires sont ensuite évaluées.

En fait, la subdivision ou bien le partitionnement a été utilisé dès le début du développement de la méthode, a titre d'exemple, Moës[2] a proposé un tel partitionnement des éléments coupés par la discontinuité en utilisant des éléments triangulaires dont les bords coïncident avec les segments de la discontinuité, Dolbow[4] a quant à lui subdivisé l'élément en sous quadrangles, les deux méthodes de partitionnement sont illustrées sur la figure 1.8.

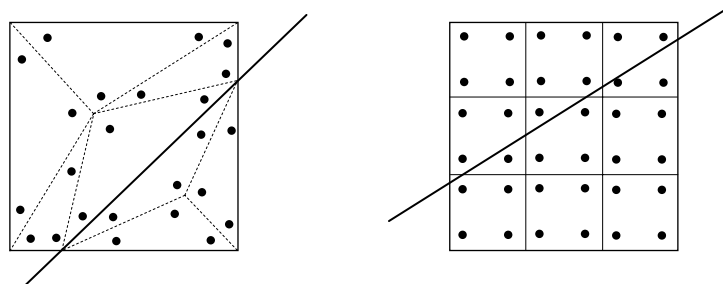


Figure 1.8. Partitionnement des éléments discontinus

Dans les deux cas proposés par Moës et Dolbow, le partitionnement diffère du remaillage par quelques aspects importants:

- le partitionnement des éléments est réalisé à des fins d'intégration numérique; aucun degré de liberté additionnel n'est introduit dans l'espace ainsi discrétisé
- les fonctions de forme étant associées aux noeuds attachés aux éléments "parents", il n'y a pas de contraintes sur la forme des partitions.
- L'opération de subdivision des éléments coupés par les discontinuités se réduit à un exercice géométrique relativement simple à réaliser.

Une autre technique a été proposée par Ventura [46] où il a montré qu'une intégration exacte des fonctions Heaviside H est possible sans découpage explicite des éléments enrichis. L'approche développée par l'auteur est attrayante, cependant, le cas des fonctions singulières n'a pas été traité.

Récemment, Nistor [47] a proposé un nouveau type de partitionnement plus approprié aux éléments quadrilatéraux, les éléments concernés étant divisés en quadrangles. L'idée de base est de garder les mêmes fonctions de forme que celles correspondant aux éléments quadrilatéraux pour les partitions obtenues après la subdivision des éléments. Au lieu de triangles, les nouvelles partitions sont des quadrilatères dont le domaine de référence, le nombre et la position des points d'intégration sont les mêmes que pour l'élément parent. L'illustration de ce partitionnement, pour les éléments coupés sur des bords opposés, et pour ceux coupés sur des bords adjacents, est montrée sur la figure 1.9.

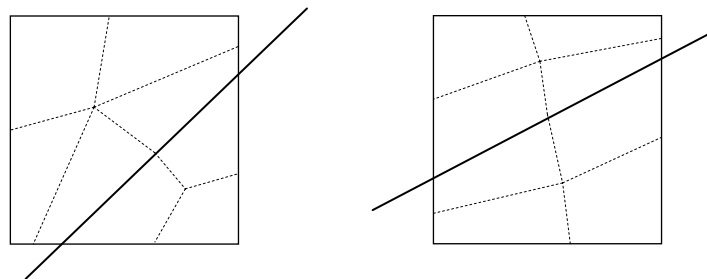


Figure 1.9 Partitionnement des éléments discontinus en des éléments quadrilatères

1.6. Construction des matrices élémentaires

La construction des matrices élémentaires dans la formulation élément fini classique étant bien connue, on va présenter ici, à l'aide d'un exemple simple, les particularités de cette construction dans le cadre de la XFEM. Dans cet exemple, l'élément choisi pour la discrétisation est quadrangulaire à quatre nœuds. Pour alléger de la présentation, seulement deux degrés de liberté par nœuds vont être traités. Le raisonnement est similaire lorsque le nœud possède plus de deux degrés de liberté.

Deux aspects différencient les matrices élémentaires en XFEM par rapport au cas classique: la présence des degrés de liberté additionnels, en nombre variable selon la position de l'élément par rapport à la discontinuité, et l'intégration des quantités

spécifiques (rigidité et masse) sur le domaine des éléments coupés. On a choisi donc une zone de maillage (Figure 1.10) contenant un élément coupé (E_1), deux éléments avec 2 noeuds enrichis (E_2 et E_4) et un élément avec un seul noeud enrichi (E_3). Pour les éléments avec 3 noeuds enrichis (qui peuvent apparaître aussi), le raisonnement est similaire à celui des éléments E_2 ou E_3 . On garde, pour tous ces éléments, la numérotation locale pour leurs noeuds.

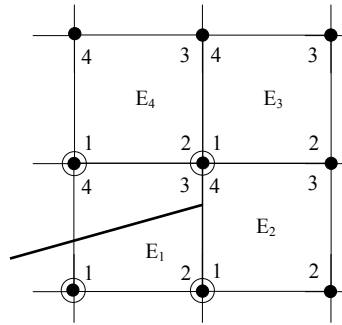


Figure 1.10. Une zone de maillage avec un élément discontinu

Pour l'élément fini quadrilatère, les fonctions d'interpolation qui régissent le champ de déplacements à l'intérieur du domaine élémentaire sont exprimées avec les coordonnées (ξ, η) du domaine parent par :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.15)$$

où (ξ_i, η_i) sont les coordonnées des 4 noeuds du domaine parent.

Pour l'élément E_1 , le vecteur des déplacements est :

$$u^{E_1} = \{u_1 \quad v_1 \quad u'_1 \quad v'_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u'_2 \quad v'_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u'_3 \quad v'_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u'_4 \quad v'_4\}^T \quad (1.16)$$

où par (u_i, v_i) on désigne les degrés de liberté classiques, et par (u'_i, v'_i) les degrés de liberté d'enrichissement.

En accord avec l'expression du champ de déplacement en XFEM, la matrice d'interpolation N de l'élément E_1 s'écrit :

$$N^{E_1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & HN_1 & 0 & N_2 & 0 & HN_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & HN_1 & 0 & N_2 & 0 & HN_2 \\ N_3 & 0 & HN_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_4 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & HN_3 & 0 & N_4 & 0 & HN_4 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

où on peut distinguer les blocs N_i^u et N_i^a correspondant respectivement aux fonctions de forme classiques et enrichies.

La matrice liant les déformations aux degrés de liberté B va s'écrire :

$$B^{E_1} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & HN_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & HN_{2,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & HN_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & HN_{2,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & HN_{1,y} & HN_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & HN_{2,y} & HN_{2,x} \\ N_{3,x} & 0 & HN_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & HN_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{3,y} & 0 & HN_{3,y} & 0 & N_{4,y} & 0 & HN_{4,y} \\ N_{3,y} & N_{3,x} & HN_{3,y} & HN_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} & HN_{4,y} & HN_{4,x} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Les blocs associés au nœud i , pour la construction de la matrice N , par exemple, sont :

$$N_i^u = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad N_i^a = \begin{bmatrix} HN_i & 0 \\ 0 & HN_i \end{bmatrix}$$

où par N_i^u on note le bloc de la fonction de forme classique et par N_i^a celui de l'enrichissement.

De la même façon, pour la matrice B on aura :

$$B_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad B_i^a = \begin{bmatrix} HN_{i,x} & 0 \\ 0 & HN_{i,y} \\ HN_{i,y} & HN_{i,x} \end{bmatrix}$$

Ainsi, les matrices (1.17) et (1.18) peuvent s'écrire :

$$N^{E_1} = [N_1^u \quad N_1^a \quad N_2^u \quad N_2^a \quad N_3^u \quad N_3^a \quad N_4^u \quad N_4^a] \quad (1.19)$$

$$B^{E_1} = [B_1^u \quad B_1^a \quad B_2^u \quad B_2^a \quad B_3^u \quad B_3^a \quad B_4^u \quad B_4^a] \quad (1.20)$$

De manière similaire, les vecteurs de déplacements nodaux, pour les éléments E_2 et E_3 sont donnés par :

$$u^{E_2} = \{u_1 \quad v_1 \quad u'_1 \quad v'_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u'_4 \quad v'_4\}^T \quad (1.21)$$

$$u^{E_3} = \{u_1 \quad v_1 \quad u'_1 \quad v'_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}^T \quad (1.22)$$

Qui correspondent aux matrices d'interpolation suivantes en utilisant la notation par bloc :

$$N^{E_2} = [N_1^u \quad N_1^a \quad N_2^u \quad N_3^u \quad N_4^u \quad N_4^a] \quad (1.23)$$

$$B^{E_2} = [B_1^u \quad B_1^a \quad B_2^u \quad B_3^u \quad B_4^u \quad B_4^a] \quad (1.24)$$

$$N^{E_3} = [N_1^u \quad N_1^a \quad N_2^u \quad N_3^u \quad N_4^u] \quad (1.25)$$

$$B^{E_3} = [B_1^u \quad B_1^a \quad B_2^u \quad B_3^u \quad B_4^u] \quad (1.26)$$

Pour les éléments contenant les pointes de la fissure, les blocs N et B associés au nœud i sont définis comme suit:

$$N_i^b = \begin{bmatrix} N_i F_1 & 0 & N_i F_2 & 0 & N_i F_3 & 0 & N_i F_4 & 0 \\ 0 & N_i F_1 & 0 & N_i F_2 & 0 & N_i F_3 & 0 & N_i F_4 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$B_i^b = \begin{bmatrix} (N_i F_1)_{,x} & 0 & (N_i F_2)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i F_1)_{,y} & 0 & (N_i F_2)_{,y} \\ (N_i F_1)_{,y} & (N_i F_1)_{,x} & (N_i F_2)_{,y} & (N_i F_2)_{,x} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$\begin{bmatrix} (N_i F_3)_{,x} & 0 & (N_i F_4)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i F_3)_{,y} & 0 & (N_i F_4)_{,y} \\ (N_i F_3)_{,y} & (N_i F_3)_{,x} & (N_i F_4)_{,y} & (N_i F_4)_{,x} \end{bmatrix}$$

Les matrices élémentaires, de rigidité et de masse, sont ensuite obtenues en considérant la forme discrète de l'équation (1.5) en conjonction avec l'équation (1.6). On trouve alors :

Pour la matrice de rigidité élémentaire:

$$[k_{ij}^e] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{uu}] & [k_{ij}^{ua}] & [k_{ij}^{ub}] \\ [k_{ij}^{au}] & [k_{ij}^{aa}] & [k_{ij}^{ab}] \\ [k_{ij}^{bu}] & [k_{ij}^{ba}] & [k_{ij}^{bb}] \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$\text{avec: } [k_{ij}^{rs}] = \int_{\Omega_e} [B_i^r]^T [C] [B_j^s] d\Omega \quad r, s = u, a, b$$

où $[C]$ est la matrice de comportement élastique du matériau, u , représente les degrés de libertés classiques, a , les degrés de libertés enrichis liés à H et b , les degrés de libertés enrichis liés aux fonctions asymptotiques F .

Pour la matrice de masse élémentaire:

$$[M_{ij}^e] = \begin{bmatrix} [M_{ij}^{uu}] & [M_{ij}^{ua}] & [M_{ij}^{ub}] \\ [M_{ij}^{au}] & [M_{ij}^{aa}] & [M_{ij}^{ab}] \\ [M_{ij}^{bu}] & [M_{ij}^{ba}] & [M_{ij}^{bb}] \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

$$\text{avec: } [M_{ij}^{rs}] = \int_{\Omega_e} [N_i^r]^T [\rho] [N_j^s] d\Omega \quad r, s = u, a, b$$

Les matrices globales sont ensuite obtenues par assemblage des matrices élémentaires.

1.7. Application à l'analyse vibratoire des plaques fissurées

Nous envisageons deux modèles de plaques, celui de Kirchhoff–love et celui de Mindlin–Reissner. Le modèle de Kirchhoff–love fait négliger par hypothèses les déformations en cisaillement transverse, ce qui limite son application au cas des plaques minces. Le modèle de Mindlin–Reissner est le plus utilisé en pratique, il est mieux adapté à l'analyse des plaques épaisses où les déformations en cisaillement transverse ne sont pas négligeables, il est basé sur l'hypothèse que la normale à la surface moyenne avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale à la surface moyenne après déformation. Dans sa formulation éléments finis, la condition de compatibilité ne nécessite qu'une continuité C_0 , en plus, l'utilisation des éléments de la famille Lagrange permet le traitement à la fois des plaques minces et des plaques épaisses.

Dans ce qui suit, la XFEM est appliquée à l'analyse vibratoire des plaques fissurées en considérant une cinématique de type Mindlin–Reissner. Les fissures considérées sont statiques et traversent toutes l'épaisseur de la plaque, la propagation ne sera pas traitée dans le cadre de ce travail. Dans la formulation XFEM, seul l'enrichissement par la fonction Heaviside H sera considéré, ceci impose que les bouts de fissures (discontinuités) soient situés sur les arêtes des éléments finis, l'enrichissement par les fonctions asymptotiques permet d'améliorer les calculs des facteurs d'intensité de contraintes lorsque les éléments contiennent les pointes de la fissure, ce qui n'est pas le cas ici. La méthode sera successivement appliquée aux cas des plaques isotropes et composites.

1.7.1. Plaques isotropes

a. Champ des déplacements :

Etant donnée une plaque rectangulaire fissurée de dimensions a et b et d'épaisseur h (Figure 1.11), la taille de la fissure est c . D'après la théorie de Mindlin–Reissner, le champ de déplacement d'un point M de la plaque par rapport à la surface moyenne est :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.31)$$

u , v , w sont les translations de M respectivement suivant les directions x , y et z , w_0 , le déplacement transversal de la surface moyenne, θ_x et θ_y sont les rotations de la normale à la surface moyenne respectivement dans les plans xz et yz .

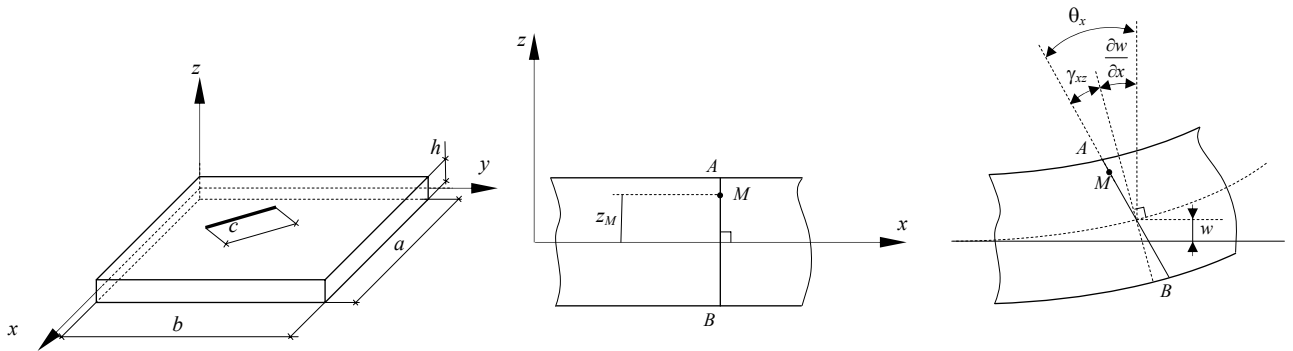


Figure 1.11. Géométrie d'une plaque rectangulaire fissurée et ses déformations associées

b. Champ des déformations :

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (1.31) et s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = z\kappa_x & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = z\kappa_{xy} & & \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.32)$$

c. Formulation XFEM :

Dans la formulation élément fini classique, le déplacement d'un nœud i de la plaque est défini par trois degrés de liberté indépendants, une translation w_{0i} suivant z et deux rotations θ_{xi} et θ_{yi} respectivement autour de l'axe y et l'axe x . Dans le cas où le nœud est enrichi, le nombre de degrés de liberté est doublé, l'approche XFEM s'écrit alors:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_I [N_i] \{\delta_i\} + \sum_J H [N_j] \{\delta'_j\} \quad (1.33)$$

où: $\{\delta_i\} = \{w_{0i} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}^T$, $\{\delta'_j\} = \{w'_{0j} \quad \theta'_{xj} \quad \theta'_{yj}\}^T$ et

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

Tenons compte des équations (1.32) et (1.33), le champ des déformations s'écrit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z \left(\sum_I \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{xi} + \sum_J H \frac{\partial N_j}{\partial x} \theta'_{xj} \right) \\ \varepsilon_y &= z \left(\sum_I \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} + \sum_J H \frac{\partial N_j}{\partial y} \theta'_{yj} \right) \\ \gamma_{xy} &= z \left(\sum_I \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{xi} + \sum_J H \frac{\partial N_j}{\partial y} \theta'_{xj} \right) + z \left(\sum_I \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{yi} + \sum_J H \frac{\partial N_j}{\partial x} \theta'_{yj} \right) \\ \gamma_{xz} &= \sum_I N_i \theta_{xi} + \sum_J H N_j \theta'_{xj} + \sum_I \frac{\partial N_i}{\partial x} w_{0i} + \sum_J H \frac{\partial N_j}{\partial x} w'_{0j} \\ \gamma_{yz} &= \sum_I N_i \theta_{yi} + \sum_J H N_j \theta'_{yj} + \sum_I \frac{\partial N_i}{\partial y} w_{0i} + \sum_J H \frac{\partial N_j}{\partial y} w'_{0j} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Qui se traduit, en faisant intervenir les déformations en courbures et les déformations en cisaillement transverse, par :

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{i \in I} \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \\ N_{i,x} & N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0i} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} + \sum_{j \in J} \begin{bmatrix} 0 & N_{j,x} H & 0 \\ 0 & 0 & N_{j,y} H \\ 0 & N_{j,y} H & N_{j,x} H \\ N_{j,x} H & N_j H & 0 \\ N_{j,y} H & 0 & N_j H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'_{0j} \\ \theta'_{xj} \\ \theta'_{yj} \end{Bmatrix} \quad (1.35)$$

Dans les équations (1.35), les κ sont les déformations en courbure et les γ sont les déformations en cisaillement transverse. Les indices x et y représentent les dérivées premières de N respectivement par rapport à x et y .

Le système (1.35) peut être réécrit sous forme contractée comme suit:

$$\{\varepsilon\} = [B_i]\{u\} + [B_j]\{u'\} \quad (1.36)$$

avec $[B_j] = H[B_i]$

La relation entre les contraintes et les déformations est ensuite établie en considérant la loi de Hooke généralisée dans le cas bidimensionnel :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C][B_i]\{u\} + [C][B_j]\{u'\} \quad (1.37)$$

où par $\{\sigma\}$ on désigne le vecteur des contraintes exprimé en terme des moments et efforts tranchants,

$$\{\sigma\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T$$

$[C]$ est la matrice de comportement élastique du matériau donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}$$

avec :

$$C_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad C_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$C_{33} = \frac{Eh^3}{2(1+\nu)}, \quad C_{44} = \frac{Eh\alpha}{2(1+\nu)}, \quad C_{55} = \frac{Eh\alpha}{2(1+\nu)}$$

E est le module d'élasticité du matériau, ν , le coefficient de Poisson et α , le coefficient de correction en cisaillement transverse, pris dans le présent travail égale à 5/6.

d. Equation du Mouvement:

L'équation du mouvement dans le cas des vibrations libres non amorties est obtenue en ignorant les forces extérieures de l'équation (1.5), la forme générale devient donc :

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\delta\} = 0 \quad (1.38)$$

Les matrices $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$ résultent de l'assemblage des matrices élémentaires $[k_{ij}^e]$ et $[M_{ij}^e]$ définies par (1.29) et (1.30). Il faut noter que les termes de rigidités et de masse relatifs à l'enrichissement par les fonctions asymptotiques ne contribuent pas aux expressions des matrices élémentaires,

$$[k_{ij}^e] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{uu}] & [k_{ij}^{ua}] \\ [k_{ij}^{au}] & [k_{ij}^{aa}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [M_{ij}^e] = \begin{bmatrix} [M_{ij}^{uu}] & [M_{ij}^{ua}] \\ [M_{ij}^{au}] & [M_{ij}^{aa}] \end{bmatrix}$$

1.7.2. Plaques composites

a. Champ des déplacements :

La plaque fissurée considérée ici est un stratifié composite possédant les mêmes caractéristiques géométriques qu'en paragraphe 1.8.1 (Figure 1.11). La plaque est constituée de n couches stratifiées de même matériau et d'orientations des fibres différentes. Le déplacement d'un point M quelconque de la plaque rapporté à la surface moyenne est déduit de la théorie de Yang, Norris et Stavsky [15] (extension de la théorie de Mindlin-Reissner au cas des plaques composites), il est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.39)$$

u_0 et v_0 représentent les déplacements de la surface moyenne respectivement suivant les directions x et y . Cette forme permet de prendre en compte le couplage entre les déformations planes et de courbures, par

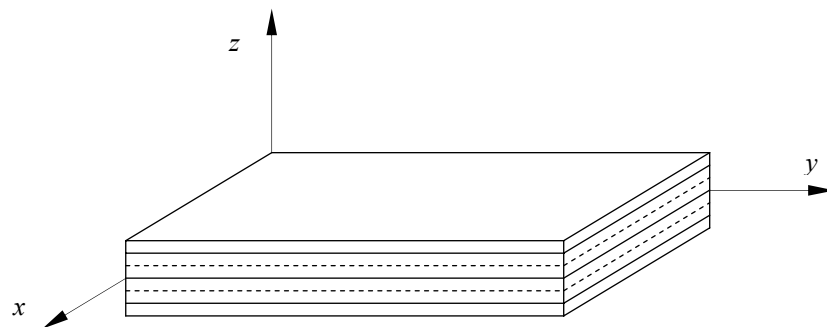


Figure 1.12 Schéma d'une plaque stratifiée

b. Champs des déformations :

Le champ des déformations ne diffère de celui du cas isotrope que par la présence des déformations dues aux déplacements u_0 et v_0 :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z\kappa_x \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z\kappa_y \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

c. Formulation XFEM :

c.1. Equations cinématiques

En combinant les équations (1.33) et (1.40), la relation entre les déformations et les déplacements nodaux en présence des déformations membranaires s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{yx0} \\ \gamma_{xy0} \\ \kappa_{x0} \\ \kappa_{y0} \\ \kappa_{xy0} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{i \in I} \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \\ 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} + \sum_{j \in J} \begin{bmatrix} HN_{j,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & HN_{j,y} & 0 & 0 & 0 \\ HN_{j,y} & HN_{j,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & HN_{j,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & HN_{j,y} \\ 0 & 0 & 0 & HN_{j,y} & HN_{j,x} \\ 0 & 0 & HN_{j,x} & HN_j & 0 \\ 0 & 0 & HN_{j,y} & 0 & HN_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{0i} \\ v'_{0i} \\ w'_{0i} \\ \theta'_{xi} \\ \theta'_{yi} \end{Bmatrix} \tag{1.41}$$

c.2. Relation contraintes déformations

La relation entre contraintes et déformations pour l'ensemble du stratifié doit être tout d'abord établie pour chaque pli à cause de la discontinuité des contraintes inter-laminaires, pour un pli k de la plaque stratifiée, cette relation, rapportée au repère local $(1,2,3)$ s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{33} & 0 & 0 \\ sym & & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k \quad (1.42)$$

où :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{33} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}$$

avec :

E_1 : Module d'Young longitudinal.

E_2 : Module d'Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversal.

ν_{12}, ν_{21} : Coefficients de Poisson.

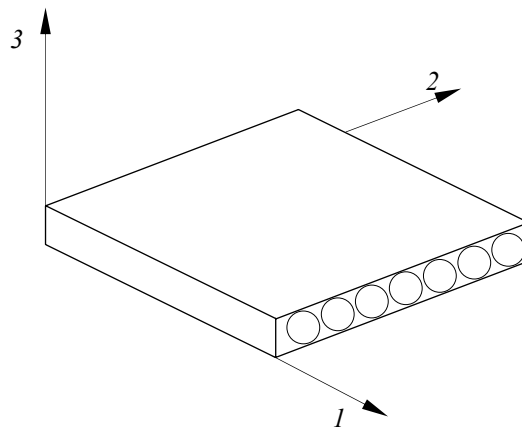


Figure 1.13 Directions principales dans un pli

Généralement, dans un stratifié, la direction des fibres est décalée d'un pli à un autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (1.42) par rapport au système d'axes global (x,y,z) , cette opération est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations (annexe 1).

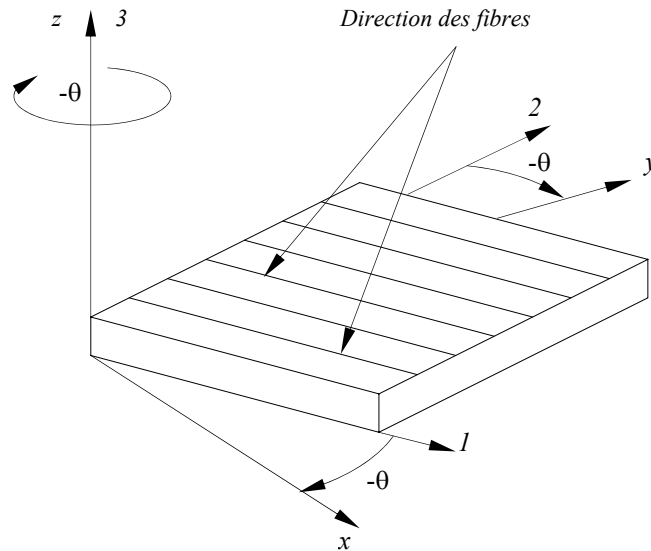


Figure 1.14 Changement du repère dans un pli

La relation (1.42) rapportée au repère du stratifié (x,y,z) s'écrit dans ce cas comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & sym & & \bar{Q}_{44} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (1.43)$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[\bar{Q}]$ s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice $[Q]$ et de l'angle θ :

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + (2Q_{11} + 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{1.44}$$

L'intégration de (1.43) suivant l'épaisseur de la plaque conduit finalement à écrire l'équation constitutive de l'ensemble du stratifié en termes de résultantes et moments :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{1.45}$$

où sous la forme contractée :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

Dans le système (1.45), les résultantes en membrane sont définies comme suit :

$$N(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{1.46}$$

Au même titre que les moments de flexion et de torsion :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{1.47}$$

Et les résultantes en cisaillement :

$$Q(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{zy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k dz \tag{1.48}$$

Dans ces différentes expressions (1.46), (1.47) et (1.48), n représente le nombre de couches constituant le stratifié.

Les coefficients d'extension A_{ij} , de flexion D_{ij} et de couplage B_{ij} sont définis comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6$$

alors que, les coefficients de cisaillement transverse F_{ij} sont définis par :

$$F_{ij} = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k dz, \quad i, j = 4, 5$$

où α_{ij} désigne les facteurs de correction en cisaillement prenant la valeur unique 5/6 dans le présent travail.

c.3. Matrices de rigidité et de masse

Les matrices de rigidité élémentaires sont définies par la relation (1.29). La contribution des termes de membrane est prise en considération, ce qui augmente la taille de ces matrices par rapport au cas isotrope. Par exemple, la taille du bloc k_{ii}^{uu} est de $5 \times n$ si n est le nombre de nœuds par élément, par contre cette taille est réduit à $3 \times n$ dans le cas isotrope.

Le bloc k_{ii}^{uu} de la matrice élémentaire est défini comme suit :

$$[K_{ii}^{uu}] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & 0 & [K^{14}] & [K^{15}] \\ & [K^{22}] & 0 & [K^{24}] & [K^{25}] \\ & & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ & Sym & & [K^{44}] & [K^{45}] \\ & & & & [K^{55}] \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Les éléments des matrices $[K^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 5$) sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= A_{11}S_{ij}^{\xi} + A_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{12} &= A_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + A_{16}S_{ij}^{\xi} + A_{26}S_{ij}^{\eta} + A_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{14} &= B_{11}S_{ij}^{\xi} + B_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{15} &= B_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{26}S_{ji}^{\eta} + B_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{22} &= A_{22}S_{ij}^{\eta} + A_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{24} &= B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{12}S_{ji}^{\xi\eta} + B_{26}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{25} &= B_{66}S_{ij}^{\xi} + B_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{22}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{33} &= F_{44}S_{ij}^{\xi} + F_{45}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + F_{55}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{34} &= F_{44}S_{ij}^{\xi 0} + F_{45}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{44} &= D_{11}S_{ij}^{\xi} + D_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{66}S_{ij}^{\eta} + F_{44}S_{ij}^0 \\
K_{ij}^{45} &= D_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + D_{16}S_{ij}^{\xi} + D_{26}S_{ji}^{\eta} + D_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{45}S_{ij}^0 \\
K_{ij}^{55} &= D_{66}S_{ij}^{\xi} + D_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{22}S_{ij}^{\eta} + F_{55}S_{ij}^0
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{\xi\eta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} |J| d\xi d\eta \\
S_{ij}^{00} &= S_{ij} \\
S_{ij}^{\xi\xi} &= S_{ij}^{\xi}
\end{aligned} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (1.50)$$

$|J|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne.

Les matrices de masse élémentaires sont définies par :

$$M^e = \begin{bmatrix} M_{ii}^e & M_{ij}^e \\ M_{ji}^e & M_{jj}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{A_e} N_i \bar{m} N_i dA & \int_{A_e} N_i \bar{m} N_j HdA \\ \int_{A_e} N_j H \bar{m} N_i dA & \int_{A_e} N_j H \bar{m} N_j HdA \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

où \bar{m} est la matrice d'inertie :

$$[\bar{m}] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } I_i = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^i \rho^k dz \quad i = 0,1,2$$

n représente le nombre de plis constituant le stratifié, et ρ la masse volumique d'un pli k .

Une fois les matrices élémentaires sont calculées, on procède à la construction des matrices globales puis à la recherche des réponses vibratoires par la résolution de l'équation du mouvement (1.38).

Chapitre 2

Mise en œuvre numérique de la XFEM

Dans le chapitre précédent, les étapes de calcul de la XFEM dans un cadre 2D ont été présentées et mis en œuvre pour l'analyse vibratoire de plaques fissurées isotropes et composites. Dans ce chapitre la résolution numérique des équations établies précédemment est effectuée. En particulier un code de calcul nommé « AMOPLAF-XFEM », a été réalisé permettant la recherche des réponses vibratoires (fréquences propres et déformées modales) des plaques fissurées en matériau isotrope et composite.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes étapes suivies au cours du développement de ce programme, une attention particulière est réservée à la partie relative au traitement de la discontinuité. Celle-ci s'est révélée être la phase la plus importante et la plus délicate dans l'élaboration de ce programme. Lors de cette présentation, on reviendra sur quelques points qui constituent le fondement de la XFEM.

2.1. Structuration du programme

Un programme de calcul par éléments finis est en général structuré comme suit :

- Introduction des données.
- Calcul des quantités physiques (rigidité, masse, charges,...).
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats.

Ces quatre étapes constituent les piliers de tout programme basé sur la méthode des éléments finis. Leurs définitions dépendent de la nature du problème traité, par exemple dans l'analyse modale, il n'est pas nécessaire de connaître le chargement externe, par contre la matrice de masse doit être calculée. Aussi les méthodes de résolution doivent être soigneusement choisies car elles influencent directement le temps du calcul et le niveau de précisions des résultats recherchés.

2.2. Introduction des données

Les données sont classées en deux types ; matérielles et géométriques. Les données matérielles permettent de calculer la matrice de comportement de matériau. Les données géométriques définissent la géométrie de la plaque et les conditions de sa fixation.

Le calcul de la matrice du comportement dépend du type de matériau utilisé, pour les matériaux métalliques, le comportement est défini par le module de Young, le coefficient de poisson ainsi que la masse volumique.

Dans le cas d'un matériau composite, les données suivantes doivent être déclarées :

- Module d'élasticité longitudinal E_1 .
- Module d'élasticité transversal E_2 .
- Module de cisaillement longitudinal G_{12} .
- Coefficient de Poisson ν_{12} .
- Masse volumique du pli.
- Epaisseur du pli.
- Nombre de plis.
- Direction de chaque pli.

Le calcul de la matrice du comportement est ensuite effectué en trois étapes :

1. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans ses axes propres 1,2.
2. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans les axes du stratifié x,y .
3. Calcul des coefficients de rigidité de l'ensemble du stratifié.

Par contre, la géométrie de la plaque peut être complètement définie en précisant :

- ❖ *Le nombre d'éléments et le nombre de nœuds ainsi que le nombre de degrés de liberté bloqués.*
- ❖ *Les connections des nœuds* : La géométrie de chaque élément est spécifiée en donnant une liste systématique des points nodaux qui le définissent. L'ordre de numérotation des nœuds influe directement sur la structure de la matrice de rigidité globale et par conséquent sur le temps du calcul requis pour la résolution. Généralement, la matrice de rigidité est une matrice symétrique bandée, la largeur L de cette bande est donnée par la relation suivante :

$$L = 2[mn + (n - 1)] + 1$$

où n désigne le nombre de degrés de liberté par nœud, et m , la différence maximale entre les numéros de deux nœuds adjacents.

Il s'agit, pour une matrice de rigidité peu dispersée, de minimiser la largeur de la bande tout en jouant sur l'ordre de la numérotation. La figure 2.2 montre, pour un même nombre d'éléments, deux types de numérotations différentes:

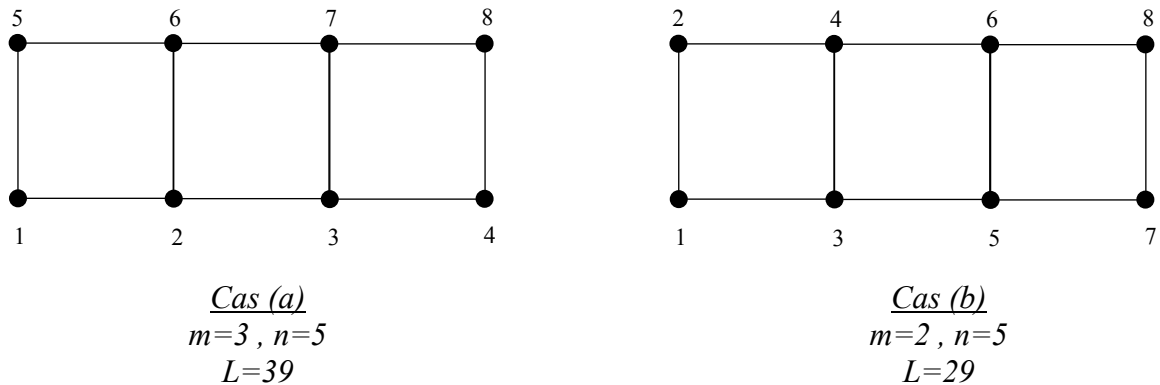


Figure 2.1 Système de numérotation pour un même nombre d'éléments.

On voit bien que la matrice de rigidité dans le cas (a) est plus dispersée que dans le cas (b). Ce qui entrainera une utilisation de plus de mémoire et davantage de calcul.

- ❖ *Les coordonnées des nœuds* : Chaque nœud est défini par ses coordonnées par rapport au système d'axes (x,y) . Ces coordonnées sont stockées dans une matrice de taille $NPOIN \times 2$ où $NPOIN$ représente le nombre total de nœuds résultant de la discrétisation.
- ❖ *Conditions aux limites* : Un degré de liberté est identifié par zéro (**0**) lorsqu'il est actif (libre), et par un (**1**) lorsqu'il est non actif (bloqué), ces valeurs sont stockées dans une matrice d'identification ID de dimension $NDDL \times NPOIN$ où $NDDL$ représente le nombre de degrés de liberté par nœud. Cette matrice est par la suite modifiée dans le but de déduire le nombre total des équations à résoudre.

Pour illustrer la procédure d'introduction des conditions aux limites, on considère un exemple d'une plaque encastree sur ses deux côtés. La plaque est discrétisée en six éléments, chaque élément possède 4 nœuds et trois de degrés de liberté par nœud ; un déplacement w et deux rotations θ_x et θ_y , (les déplacements u et v sont considérés nuls) (Figure 2.2).

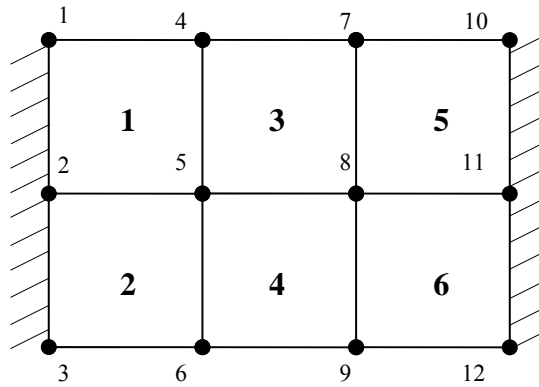


Figure 2.2 Exemple d'une plaque discrétisée en quatre éléments et encastree sur ses deux côtés

Les nœuds 1,2,3,10,11 et 12 sont bloqués dans toutes les directions, le reste des nœuds est libre. La matrice d'identification s'écrit dans ce cas :

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Le nombre total des zéros dans ID représente le nombre total des équations à résoudre. La matrice d'identification est ensuite modifiée en remplaçant chaque zéro dans (2.1) par le numéro de sa position dans ID en allant dans un ordre croissant par rapport au premier zéro, cette opération est effectuée colonne par colonne, les valeurs (1) seront remplacées par (0). La matrice d'identification modifiée s'écrit donc :

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

D'après (2.2), le nombre total des équations est égal à 18. La figure 2.3 montre la répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque.

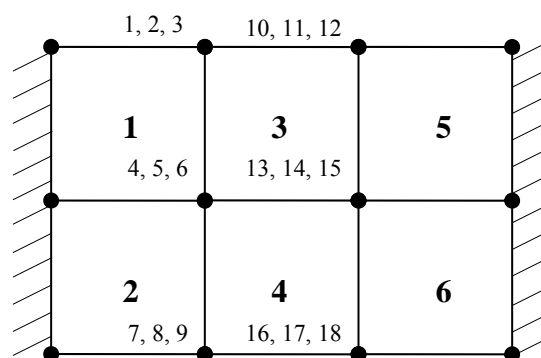


Figure 2.3 Répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque

Dans le cas où un élément possède un nœud enrichi, le nombre total de degrés de liberté pour ce nœud est doublé, modifiant aussi le nombre des équations à résoudre. Si par exemple le nœud 5 de la figure 2.3 est enrichi, alors le nombre de degrés de liberté actifs pour ce nœud est six, la matrice ID devient :

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La matrice ID modifiée s'écrit dans ce cas :

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & 13 & 16 & 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 11 & 14 & 17 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 12 & 15 & 18 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

On voit bien que le nombre total des équations est devenu 21. La nouvelle répartition des degrés de liberté actifs est indiquée sur la figure 2.4

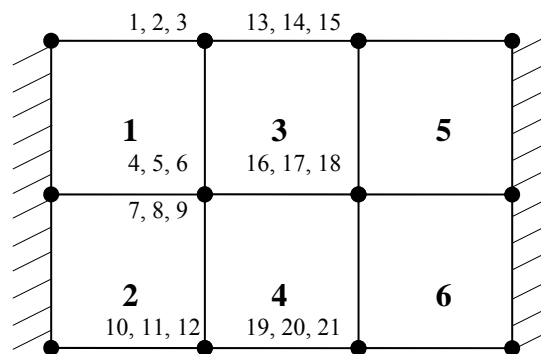


Figure 2.4 répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque après prise en compte de l'enrichissement apporté au nœud 5

2.3. Traitement de la discontinuité

La fissure est définie par son intersection avec les côtés des éléments. Prise dans un maillage, elle se présente comme une droite, qui est définie par deux points. Pour l'ensemble des éléments coupés, une table regroupant l'intersection de la fissure avec tous les éléments du domaine est créée. Un élément est codé (**1**) s'il est traversé par la fissure, les éléments non coupés sont codés (**0**) par défaut. Chaque intersection est définie par deux coordonnées par rapport au repère global de la plaque.

Pour déterminer le signe des fonctions Heaviside sur les éléments coupés par la discontinuité, un test d'orientation est effectué sur les nœuds concernés. Le test permet de savoir si le nœud se trouve sur le côté positif ou sur le côté négatif de la fissure. Ce test d'orientation est basé sur l'évaluation du signe du déterminant Δ du triangle formé par le point de recherche $\mathbf{x} \equiv (x, y)$ et le segment de la fissure défini par les coordonnées $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, y_1)$ et $\mathbf{x}_2 \equiv (x_2, y_2)$.

$$\Delta = (x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y) \quad (2.6)$$

Le nœud se trouve sur le côté positif de la fissure si $\Delta > \varepsilon$, sur le côté négatif si $\Delta < -\varepsilon$ et sur la fissure si $-\varepsilon \leq \Delta \leq \varepsilon$, ε étant une tolérance prise égale à 10^{-6} pour un élément de maillage de longueur 1 [5].

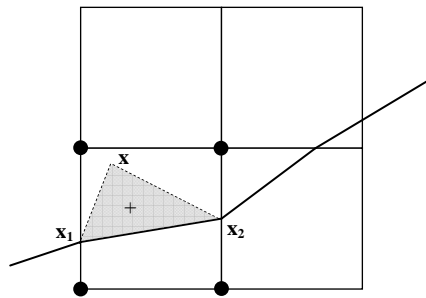


Figure 2.5. Le test d'orientation pour l'évaluation du signe de H

Si un nœud enrichi est localisé au dessus de la fissure alors la fonction d'enrichissement H vaut +1 en ce nœud. Si le nœud est situé au dessous de la fissure, la valeur de H est -1. Si le nœud est traversé par la fissure, la fonction H est +1 pour l'élément au dessus de la fissure et -1 pour l'élément au dessous de la fissure.

Pour les éléments qui ne sont pas traversés par la discontinuité et contiennent au moins un nœud enrichi, une autre table est créée où la valeur **-1** est affectée aux fonctions d'interpolation des nœuds situés au dessous de la fissure et la valeur **+1** pour les fonctions d'interpolation des nœuds au dessus de la fissure.

2.4. Construction des matrices de rigidité et de masse :

La présence de la discontinuité modifie naturellement le calcul des matrices élémentaires. La construction de ces dernières dépend du nombre de nœuds enrichis par élément qui dépend lui-même du type de la fissure selon qu'elle traverse l'élément ou pas. Dans un domaine discrétisé, deux types d'éléments enrichis peuvent se présenter; les éléments qui sont complètement traversés par la fissure où l'enrichissement doit être apporté à tous les nœuds de ces éléments, et les éléments qui ne sont pas traversés par la fissure mais possèdent au moins un nœud enrichi. Ces deux cas nécessitent un traitement numérique particulier. La construction des matrices globales est ensuite effectuée de manière classique. Dans ce qui suit, la construction des matrices de rigidité élémentaires sera présentée. Une attention particulière sera apportée par la suite au calcul des éléments enrichis. Le calcul des matrices de masse se fait de la même manière.

Les matrices classiques sont définies par le bloc $[k_{ij}^{uu}]$ dans l'équation (1.29). Pour chaque élément du domaine discrétisé, les opérations suivantes sont effectuées :

1. Initialisation de $[k_{ij}^{uu}]$ à zéro.
2. Pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i) , on calcule :
 - les fonctions d'interpolations ainsi que leurs dérivées.
 - la matrice Jacobienne, son inverse et son déterminant.
 - les éléments k_{ij} de la matrice de rigidité élémentaire.

Du fait que les matrices obtenues sont symétriques, seuls les éléments de la partie triangulaire supérieure sont mémorisés. Ces éléments sont stockés dans un vecteur de dimension $NEVAB \times NEVAB/2$ où $NEVAB$ représente le nombre de variables par élément.

On définit aussi un vecteur de connectivité des éléments LM qui permet de mémoriser les degrés de liberté élémentaires. Pour l'exemple illustré sur la figure 2.3, les vecteurs LM pour les différents éléments sont :

$$\begin{aligned}
 LM_1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 8 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_3 &= [4 \ 5 \ 6 \ 13 \ 14 \ 15 \ 10 \ 11 \ 12 \ 1 \ 2 \ 3]^T \\
 LM_4 &= [7 \ 8 \ 9 \ 16 \ 17 \ 18 \ 13 \ 14 \ 15 \ 4 \ 5 \ 6]^T \\
 LM_5 &= [13 \ 14 \ 15 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 11 \ 12]^T \\
 LM_6 &= [16 \ 17 \ 18 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 13 \ 14 \ 15]^T
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pour l'exemple de la figure 2.4 où le nœud 5 est enrichi, les vecteurs LM deviennent :

$$\begin{aligned}
 LM_1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 11 \ 12 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_3 &= [4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 16 \ 17 \ 18 \ 13 \ 14 \ 15 \ 1 \ 2 \ 3]^T \\
 LM_4 &= [10 \ 11 \ 12 \ 19 \ 20 \ 21 \ 16 \ 17 \ 18 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]^T \\
 LM_5 &= [16 \ 17 \ 18 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 13 \ 14 \ 15]^T \\
 LM_6 &= [19 \ 20 \ 21 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 16 \ 17 \ 18]^T
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Construction des matrices élémentaires enrichis :

La présence de la discontinuité dans les éléments coupés pose le problème de leur intégration numérique. L'une des solutions proposées dans la littérature [2] est d'augmenter le nombre de points d'intégration de part et d'autre de la discontinuité en partitionnant l'élément coupé en éléments simples on évalue par la suite la matrice élémentaire sur les points de Gauss de ces éléments. L'idée de base du partitionnement est montrée sur la figure 2.6.

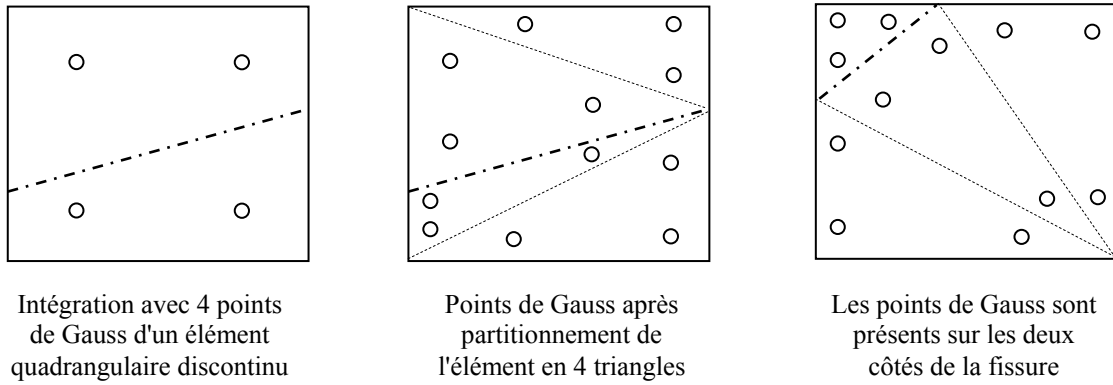


Figure 2.6. Modifications apportées à l'intégration numérique des éléments discontinus

En fait, le partitionnement des éléments coupés par la fissure et l'intégration des matrices élémentaires sur ces domaines est la phase la plus délicate dans l'implémentation numérique de la XFEM qui doit être soigneusement traitée. Dans le présent travail, la procédure de partitionnement par les éléments quadrilatères présentée au chapitre 1 est adoptée. Les principales étapes de cette procédure, pour un élément coupé, sont résumées ci après :

- Définition de l'intersection de la discontinuité avec l'élément.
- Localisation des centres de gravité positif et négatif (C^+ et C^-) des sous domaines au dessus et au dessous de la fissure.
- Détermination des points médians m_i de tous les segments des sous domaines
- Construction des sous éléments S_i .

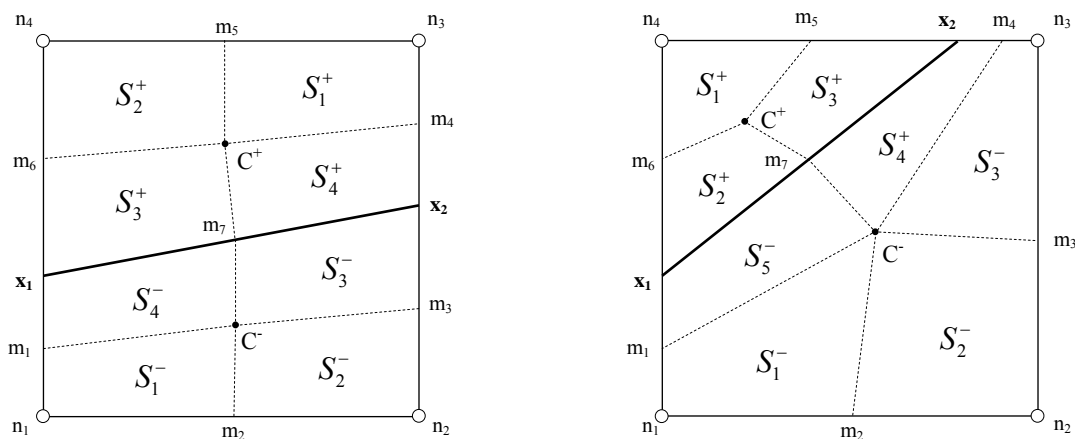


Figure 2.7. Procédure de partitionnement des éléments discontinus

Sur la figure 2.7 on montre le principe de partitionnement d'un élément traversé par la discontinuité. Les éléments de partitionnement sont indiqués dans les deux configurations

possibles pouvant se présenter ; deux côtés opposés coupés ou deux côtés adjacents coupés. L'élément étant partitionné en 8 sous éléments, la matrice Jacobienne pour chaque sous élément doit être construite et son déterminant calculé aux points d'intégration g_j du domaine parent correspondant (Figure 2.8)

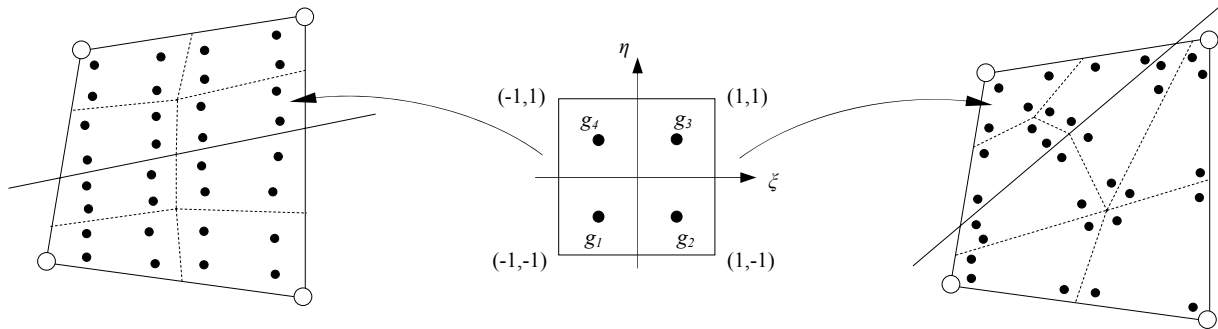


Fig. 2.8 Points de Gauss pour l'élément partitionné

Les matrices élémentaires K^{Ei} sont ensuite construites en additionnant la contribution de chaque sous élément de partitionnement. La fonction d'enrichissement H présente dans les matrices internes B^{Ei} prenant les valeurs $+1$ et -1 selon le signe de la surface courante. L'intégration numérique des matrices élémentaires des éléments coupés sera réalisée sur ces sous éléments :

$$K^{Ei} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^4 B(p_j^{S_i})^T C B(p_j^{S_i}) \det J^{S_i}(p_j^{S_i}) w_j \quad (2.7)$$

De même, les matrices de masse élémentaires peuvent être calculées en utilisant l'expression suivante :

$$M^{Ei} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^4 N(p_j^{S_i})^T \rho N(p_j^{S_i}) \det J^{S_i}(p_j^{S_i}) w_j \quad (2.8)$$

$p_j^{S_i}$ correspond au point d'intégration j du sous éléments i et w_j son poids

L'algorithme de construction et d'intégration numérique de la matrice de rigidité d'un élément coupé est présenté sur la figure 2.9

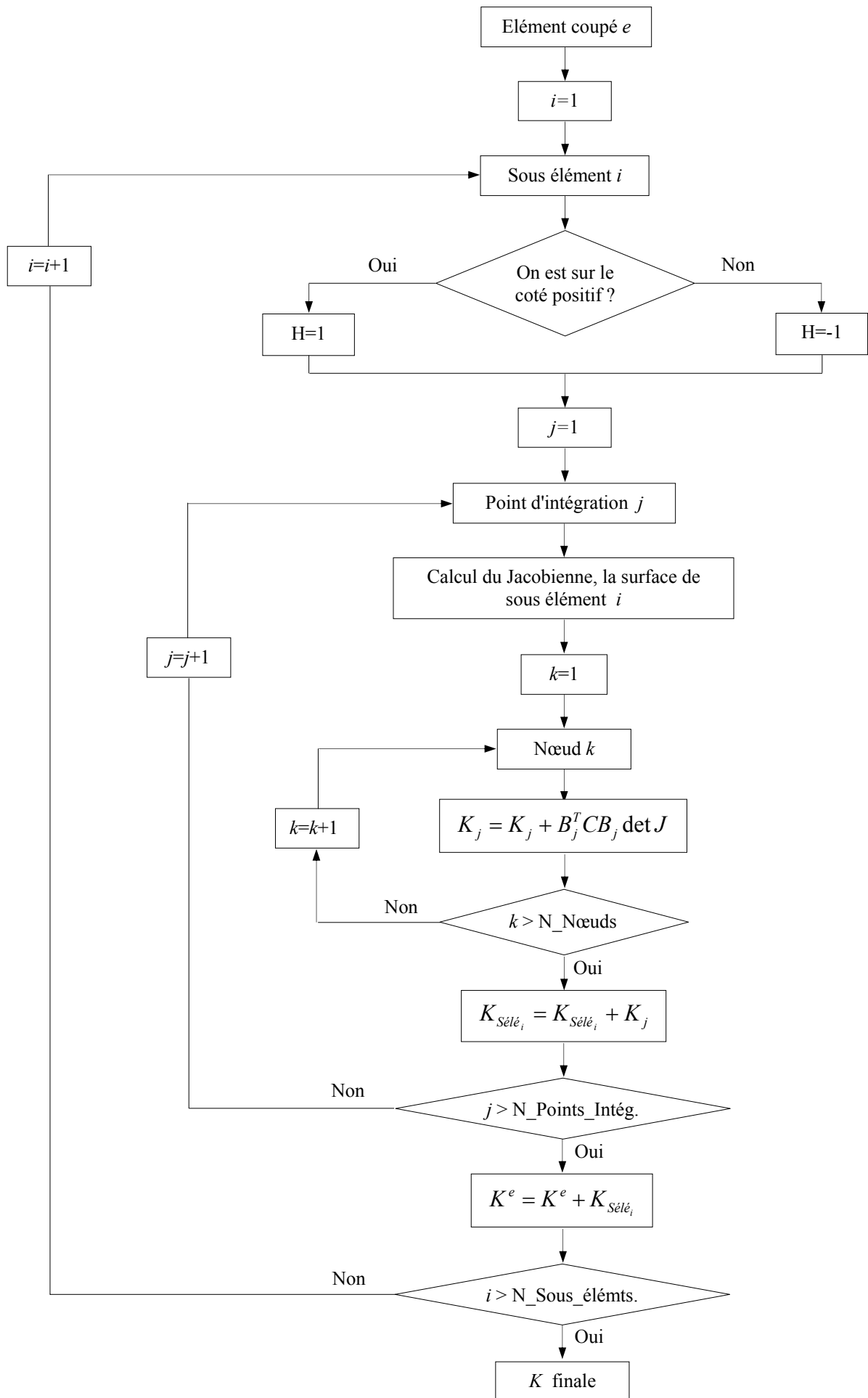


Fig. 2.9 Algorithme de calcul de la matrice de rigidité pour un élément coupé

La matrice de rigidité globale \mathbf{K} s'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires. Le résultat est une matrice bandée symétrique. La méthode de stockage la plus efficace pour \mathbf{K} est celle de la ligne de ciel (sky line). Celle-ci consiste à mémoriser les termes de la matrice par des colonnes à hauteurs variables. Ces dernières sont déterminées à partir des vecteurs de connectivité des éléments LM et sont données par la relation suivante :

$$H_i = i - L_i \tag{2.9}$$

où L_i représente le premier élément non nul de la colonne i et H_i représente la hauteur de la même colonne.

Les adresses des termes situés sur la diagonale de \mathbf{K} doivent être aussi mémorisées afin de déterminer le début de chaque colonne.

Considérons le cas de la plaque de la figure 2.4. Soit à déterminer la hauteur de la colonne 12 dans la matrice globale \mathbf{K} . Le premier élément non nul L_{12} dans cette colonne est défini par la plus petite valeur dans les vecteurs LM contenant le degré de liberté 12. En se référant aux vecteurs LM donnés par (2.8), le degré de liberté 12 est commun aux éléments 2 et 4. La plus petite valeur dans ces deux vecteurs est 4, la hauteur de cette colonne par rapport à la diagonale peut être donc calculée en considérant la relation (2.9). On trouve $H_{12}=8$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x				
2		x	x	x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x				
3			x	x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x				
4				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
5					x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
6						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7							x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
8								x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
9									x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
10										x	x	x				x	x	x	x	x	x	x
11											x	x				x	x	x	x	x	x	x
12												x				x	x	x	x	x	x	x
13													x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
14														x	x	x	x	x	x	x	x	x
15															x	x	x	x	x	x	x	x
16																x	x	x	x	x	x	x
17																	x	x	x	x	x	x
18																		x	x	x	x	x
19																			x	x	x	x
20																				x	x	x
21																						x

Figure 2.10 Structure de la matrice de rigidité globale après élimination des degrés de liberté bloqués

La figure 2.10 montre la structure de la matrice de rigidité globale après assemblage des matrices élémentaires et élimination des degrés de libertés non actifs. Les éléments de cette matrice sont stockés ensuite dans un vecteur où seuls les éléments au dessous de la ligne de ciel sont mémorisés.

Le calcul de la matrice de masse globale est similaire à celui de rigidité. Une fois ces deux matrices sont construites, on procède à la résolution numérique de l'équation du mouvement. Pour ce faire, plusieurs méthodes sont envisagées dans la littérature, on cite à titre d'exemple, la méthode de Householder, la méthode de Q-R, la méthode d'itération sur sous espace. Ces méthodes ont fait l'objet de plusieurs codes de calcul [61,66].

En fait, le choix d'une méthode de résolution dépend des caractéristiques des matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} , de leurs tailles, de la largeur de bande et de nombre de solutions requis. Dans ce travail, nous avons opté pour le sous programme Subspace développé par Bath [61]. Le sous programme est basé sur la méthode d'itération sur sous-espace. Cette méthode est largement utilisée dans les programmes de calcul des structures, elle permet de calculer les plus petites valeurs propres des matrices de grande taille.

Chapitre 3

Vibrations des plaques isotropes fissurées

Avant d'entamer l'étude du comportement vibratoire des plaques composites, il sera judicieux d'examiner l'efficacité du code de calcul développé dans l'analyse des plaques isotropes. A cet effet, les cas de plaques saines et fissurées sont traités. Dans une première phase, le programme sera validé sur quelques résultats de la littérature, des études paramétriques seront par la suite effectuées.

3.1. Plaque carrée isotrope sans fissure

La première application consiste à calculer les fréquences naturelles d'une plaque carrée épaisse en matériau isotrope. La plaque est supposée simplement appuyée sur ces quatre côtés. Le coefficient de Poisson et les dimensions utilisés sont $\nu=0.3$ et $a \times a$. On considère un rapport h/a (épaisseur/longueur)=0.1. Pour les comparaisons à venir, les fréquences naturelles sont normalisées par $\bar{\omega} = \omega(\rho / Gh)^{1/2}$.

Dans la discrétisation par éléments finis, l'élément de référence choisi est le quadrangle à 9 nœuds. Ce choix est fondé sur le fait que cet élément ne présente pas le phénomène de verrouillage, c'est-à-dire il permet de traiter à la fois les plaques minces et les plaques épaisses. Pour représenter le domaine entier de la plaque, 16 éléments sont utilisés. Le calcul de la matrice de rigidité est effectué par intégration sélective. Par ailleurs, le schéma de Lobatto est utilisé pour le calcul de la matrice masse. Le sous programme Subspace, développé par Bath [61] est utilisé pour le calcul des solutions propres.

Sur le tableau 3.1, on reporte les cinq premières valeurs obtenues en utilisant notre code de calcul comparées aux résultats exacts de Sirinivas et *al.* [48] calculés par la théorie d'élasticité tridimensionnelle. Les fréquences sont classées en fonctions des numéros des demi-ondes m et n produites respectivement suivant les directions x et y . L'erreur en

pourcent entre nos résultats et ceux de Sirinivas [48] reportée sur le même tableau montre la qualité des résultats fournis dans ce cas par le code de calcul que nous avons développé.

Tableau 3.1 Fréquences propres normalisées d'une plaque carrée isotrope en appuis simples $\nu=0.3$, $h/a=0.1$

m	n	ω		Erreur (%)
		Présente étude	Solution exacte [48]	
1	1	0.09302	0.09315	-0.14
2	1	0.22238	0.22260	-0.10
2	2	0.33946	0.34207	-0.76
3	1	0.41976	0.41714	-0.63
3	2	0.51754	0.52391	-1.22

ω en rd/s

Afin d'examiner l'efficacité du code de calcul dans l'analyse des plaques minces, l'exemple précédent est repris mais cette fois ci avec un rapport $h/a=0.01$. La solution exacte est donnée par la relation [60] :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + n^2) \sqrt{\frac{D}{\rho_s}} \quad (3.1)$$

où D est la rigidité flexionnelle de la plaque et ρ_s la masse par unité de surface.

Les valeurs des fréquences propres normalisées ω fournies par le code de calcul développé et ceux calculées par (3.1) sont reportées dans le tableau 3.2. Nous observons une bonne concordance entre nos résultats et la solution de référence.

Tableau 3.2 Fréquences propres normalisées d'une plaque carrée isotrope en appuis simples $\nu=0.3$, $h/a=0.01$

m	n	ω		Erreur (%)
		Présente étude	Référence [60]	
1	1	0.9627	0.9632	-0.05
2	1	2.4129	2.4080	0.20
2	2	3.8441	3.8529	-0.23
3	1	4.9049	4.8161	1.84
3	2	6.2765	6.2604	0.26

ω en rd/s

3.2. Effet de la fissure

3.2.1. Plaque carrée avec fissure interne au centre

Afin de donner une idée sur l'ordre de précision du programme développé pour le traitement des plaques fissurées, une étude comparative est effectuée sur la base des premières fréquences propres. Nos résultats sont comparés aux ceux obtenus dans d'autres

travaux de la littérature. A cet effet, une plaque carrée isotrope en appuis simples est étudiée, la plaque contient une fissure au centre de longueur c parallèle à la direction longitudinale de la plaque (Figure 3.1). Le rapport épaisseur/longueur de la plaque (h/a) est pris égal à 0.001, le coefficient de Poisson vaut 0.3.

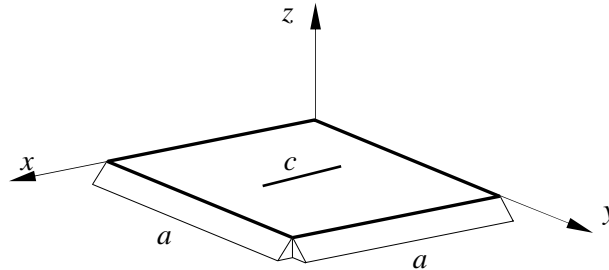


Figure 3.1. Plaque carrée sur appuis simples avec une fissure au centre

Le maillage est basé sur deux types d'élément isoparamétriques de la famille de Lagrange, l'élément quadrilatère à 4 nœuds et l'élément quadrilatère à 9 nœuds. 20x20 éléments sont utilisés dans le maillage par l'élément à 9 nœuds, et 40x40 dans la discrétisation par l'élément à 4 nœuds. Le nombre total de degrés de liberté utilisés pour chaque cas est 1681.

La fissure est supposée alignée avec les bords des éléments (Figure 3.2). Le partitionnement des éléments discontinus dans l'intégration numérique ne sera pas donc nécessaire. Dans ce cas, le calcul des matrices élémentaires peut être effectué par les techniques d'intégration classiques. A cet effet, les techniques de l'intégration sélective et de l'intégration réduite sont utilisées pour le calcul des matrices de rigidité. Pour le calcul des matrices masse, 3 points de Gauss sont utilisés.

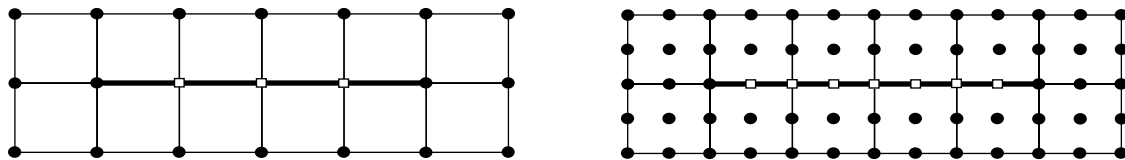


Figure 3.2. Position de la fissure par rapport au maillage (Seuls les nœuds en carrée seront enrichis)

Les fréquences sont calculées pour différents rapports c/a (longueur de la fissure/longueur de la plaque), et sont normalisées par l'expression $\varpi = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$, où D désigne la rigidité flexionnelle de la plaque.

Les résultats obtenus par ces différentes discrétisations concernant les fréquences fondamentales normalisées de la plaque fissurée sont présentés sur le tableau 3.3. On reporte sur le même tableau les résultats analytiques obtenus par Stahl et Keer [27]. Il ressort de ce tableau la bonne concordance entre nos résultats XFEM et ceux de Stahl et Keer [27], l'erreur maximale étant de 0.42%. On observe également que l'intégration réduite est la plus précise comparée à l'intégration sélective. Du point de vue de l'élément, le Q9 s'avère plus précis que l'élément Q4.

Tableau 3.3. Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée avec une fissure centrale ($\nu=0.3$ et $h/a=0.001$)

c/a	Ref. [27]	Présente							
		4 Nœuds Réduite		4 Nœuds Selective		9 Nœuds réduite		9 Nœuds Selective	
0.0	19.739	19.747	(0.04)	19.750	(0.06)	19.739	(0.00)	19.739	(0.00)
0.1	19.621	19.633	(0.06)	19.662	(0.21)	19.623	(0.01)	19.644	(0.12)
0.2	19.305	19.313	(0.04)	19.363	(0.30)	19.305	(0.00)	19.340	(0.18)
0.3	18.831	18.840	(0.05)	18.905	(0.39)	18.833	(0.01)	18.879	(0.25)
0.4	18.279	18.283	(0.02)	18.354	(0.41)	18.278	(0.01)	18.327	((0.26)
0.5	17.706	17.712	(0.03)	17.781	(0.42)	17.707	(0.01)	17.756	(0.28)
0.6	17.193	17.184	(0.05)	17.245	(0.30)	17.180	(0.08)	17.223	(0.17)
0.7	16.739	16.741	(0.01)	16.790	(0.30)	16.738	(0.01)	16.772	(0.20)
0.8	16.403	16.409	(0.04)	16.445	(0.26)	16.406	(0.02)	16.430	(0.16)
0.9	16.206	16.206	(0.00)	16.225	(0.12)	16.202	(0.02)	16.214	(0.05)
1.0	16.127	16.134	(0.04)	16.139	(0.07)	16.133	(0.04)	16.133	(0.04)

Les valeurs entre parenthèses indiquent le pourcentage d'erreur par rapport aux résultats de Stahl

Sur la Figure 3.3, on montre la convergence vers la solution exacte [27] des fréquences normalisées en fonction du nombre de nœuds, lorsque le rapport $c/a=0.2$. On observe que pour le même nombre de nœuds, les résultats donnés par l'élément Q9 avec intégration réduite sont plus proches à la solution exacte. La convergence avec l'élément en utilisant une intégration réduite est plus rapide.

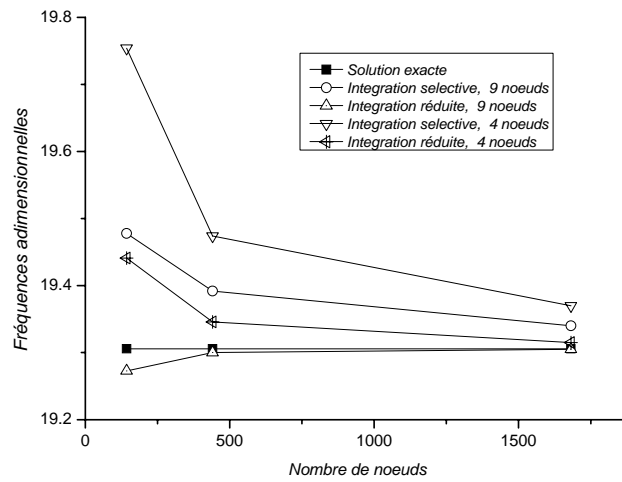


Figure 3.3. Convergence des fréquences adimensionnelles en fonction du nombre de nœuds ($c/a=0.2$)

Nous voulons maintenant regarder l'évolution de la vitesse de convergence entre l'intégration réduite et l'intégration sélective lorsqu'on fait varier la longueur et la position de la fissure. Deux types de plaque sont alors considérés ; une plaque carrée avec une fissure au centre et une plaque rectangulaire ($a/b=2.0$) avec une fissure au bord (Figures 3.1 et 3.4). L'élément Q9 a été utilisé dans la discrétisation par éléments finis. Les résultats obtenus sont montrés sur les figures 3.5 et 3.6.

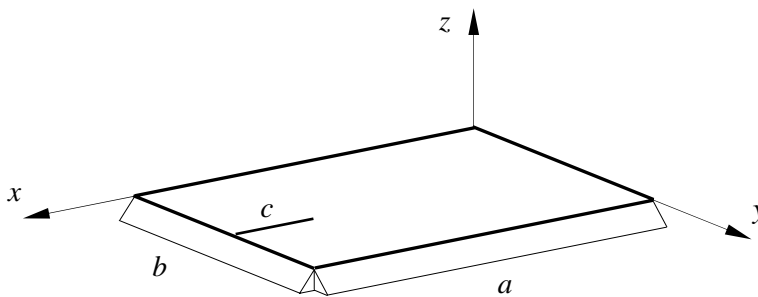


Figure 3.4. Plaque rectangulaire sur appuis simples avec une fissure au bord

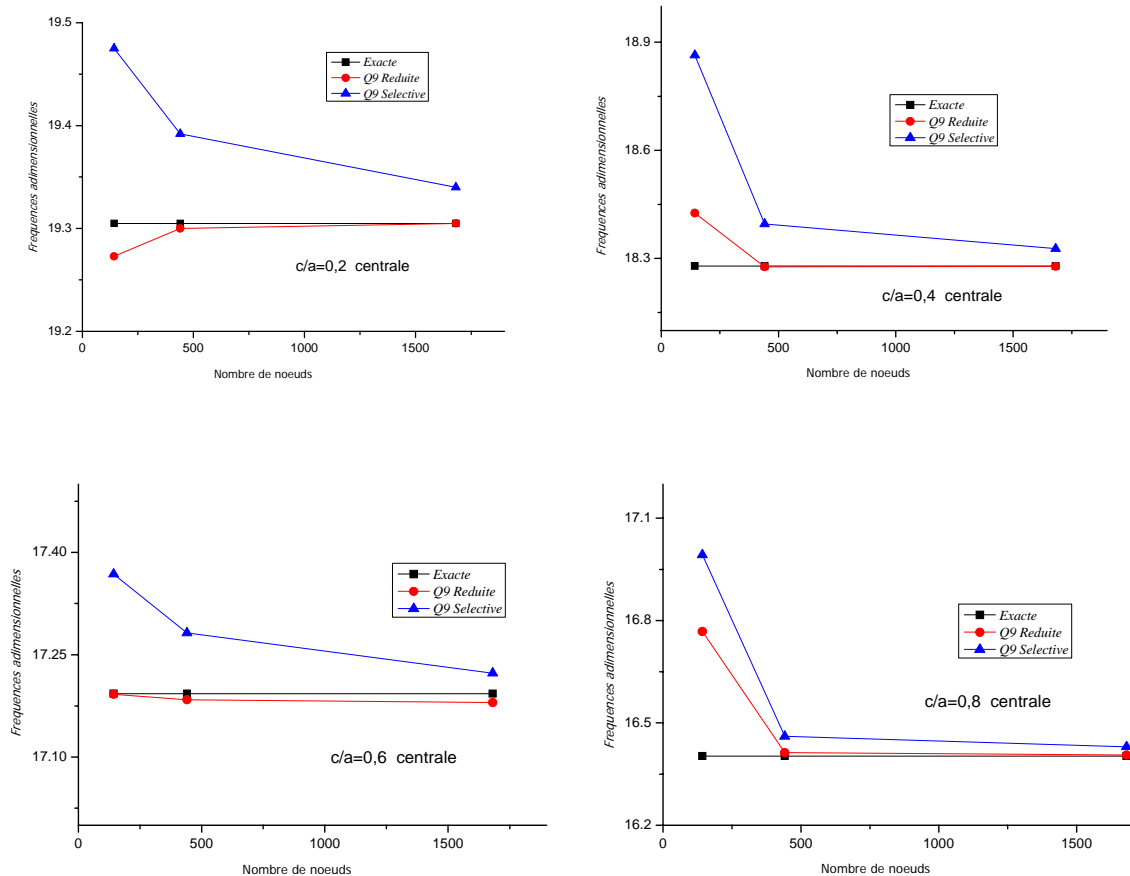


Figure 3.5. Comparaison entre la convergence de l'intégration réduite et l'intégration sélective dans le cas d'une plaque avec fissure centrale, discrétisation avec l'élément Q9

A partir de ces résultats, on peut faire les remarques suivantes :

1. La convergence est meilleure lorsqu'on utilise le Q9 avec intégration réduite.
2. Quant aux modes de la convergence, on peut dire que :
 - La convergence se fait par le haut pour tous les cas lorsque l'intégration sélective est utilisée.
 - En utilisant l'intégration réduite, on peut observer de la convergence par le haut (cas d'une fissure centrale $c/a=0.4$ et $c/a=0.6$ et cas de la fissure au bord $c/a=0.2$) et dans quelques autres cas, de la convergence par le bas (le cas d'une fissure centrale : $c/a=0.2$ et $c/a=0.6$).
 - Dans certains cas, le mode de convergence est mixte, c'est-à-dire commencer par le haut et finir par le bas (le cas de fissure au bord $c/a = 0.4$, $c/a=0.6$, $c/a=0.8$) en fonction du nombre de degrés de liberté.

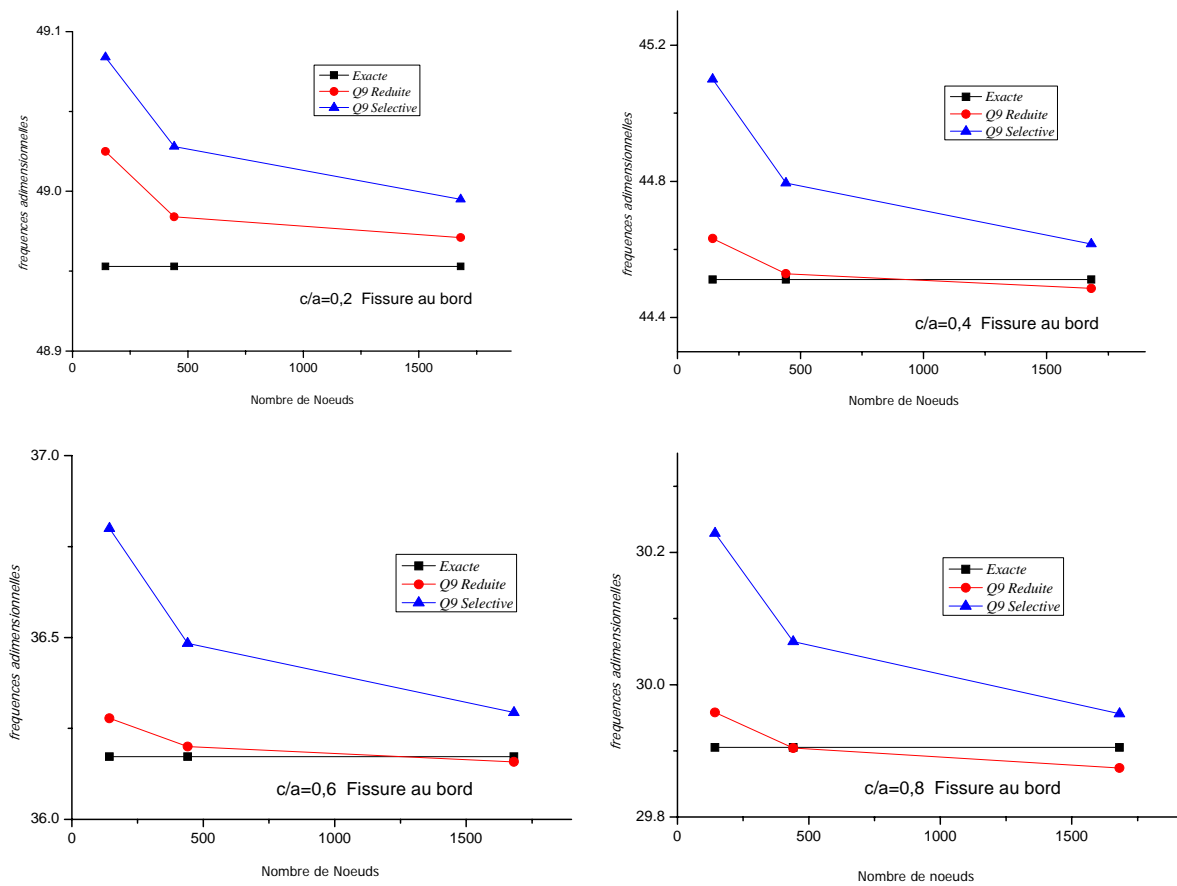


Figure 3.6. Comparaison entre la convergence de l'intégration réduite et l'intégration sélective dans le cas d'une plaque avec fissure au bord, discrétisation avec l'élément Q9

Dans les applications qui suivent, l'élément Q9 avec intégration réduite sera utilisé.

3.2.2. Plaque carrée sur appuis simples

Dans cette section, l'effet de la fissure sur les premières fréquences propres est examiné. Deux cas de plaques sont étudiés, à savoir ; plaque carrée avec une fissure centrale et plaque carrée avec une fissure au bord. Les propriétés mécaniques et géométriques sont celles utilisées dans la section précédente,

Tableau 3.4. Fréquences normalisées ω d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure centrale $h/a=0.001$ $\nu=0.3$

N° Mode	Description du mode	Source des résultats	Rapport de la fissure c/a						
			0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
1	S-x, S-y	Stahl [27]	19.739	19.305	18.279	17.706	17.193	16.403	16.127
		Liew [30]	19.74	19.38	18.44	17.85	17.33	16.47	16.13
		Présente	19.739	19.305	18.278	17.707	17.180	16.406	16.133
2	S-x, A-y	Stahl [27]	49.348	49.170	46.624	43.031	37.978	27.773	16.127
		Liew [30]	49.35	49.16	46.44	42.82	37.75	27.43	16.13
		Présente	49.348	49.181	46.635	43.042	37.987	27.753	17.826
3	A-x, S-y	Stahl [27]	49.348	49.328	49.032	48.697	48.223	47.256	46.742
		Liew [30]	49.35	49.31	49.04	48.72	48.26	47.27	46.74
		Présente	49.348	49.324	49.032	48.685	48.214	47.201	46.734
4	A-x, A-y	Stahl [27]	78.957	78.957	78.602	77.733	75.581	65.732	46.742
		Liew [30]	78.96	78.81	78.39	77.44	75.23	65.19	46.74
		Présente	78.955	78.945	78.600	77.710	75.579	65.715	49.099
5	S-x, S-y	Stahl [27]	98.696	93.959	85.510	82.155	79.588	76.371	75.285
		Liew [30]	98.70	94.69	86.71	83.01	80.32	76.60	75.28
		Présente	98.698	93.893	85.450	82.108	79.556	76.351	75.275

S: mode symétrique, A: mode Anti-symétrique.

Les cinq premiers modes de vibrations obtenus dans le cas d'une fissure au centre et dans le cas d'une fissure au bord sont respectivement reportés sur les tableaux 3.4 et 3.5. On observe que la fréquence décroît quand la longueur de la fissure augmente. Cette observation s'applique sur tous les cinq modes et pour les deux types de plaques. On peut également observer que les fréquences propres des modes antisymétriques autour de l'axe y sont les plus affectées par la longueur de la fissure. Par exemple, pour le mode 2 (symétrique autour de x et antisymétrique autour de y), la fréquence propre chute de 64% de sa valeur initiale (lorsqu'elle est saine).

Tableau 3.5. Fréquences normalisées ω d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure au bord $h/a=0.001$ $\nu=0.3$

N° Mode	Description du mode	Rapport de la fissure c/a						
		0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
1	S-x, S-y	19.739	19.697	19.199	18.646	17.956	16.662	16.133
2	S-x, A-y	49.348	49.328	48.013	44.213	37.693	26.226	17.826
3	A-x, S-y	49.348	49.189	48.241	47.916	47.862	47.446	46.734
4	A-x, A-y	78.955	78.806	72.385	65.789	63.282	61.774	49.099
5	S-x, S-y	98.698	97.878	92.219	88.063	83.753	77.378	75.275

S: mode symétrique, A: mode Anti-symétrique.

Il est aussi à noter que la fissure au centre a plus d'effet sur les fréquences des modes symétriques autour de x que la fissure au bord (le premier, le deuxième et le cinquième modes). Par contre, les fréquences des modes antisymétriques autour de x (le troisième et le quatrième modes) sont plus affectées par la fissure au bord que par la fissure au centre. On retrouve ces observations sur les figures 3.7 et 3.8.

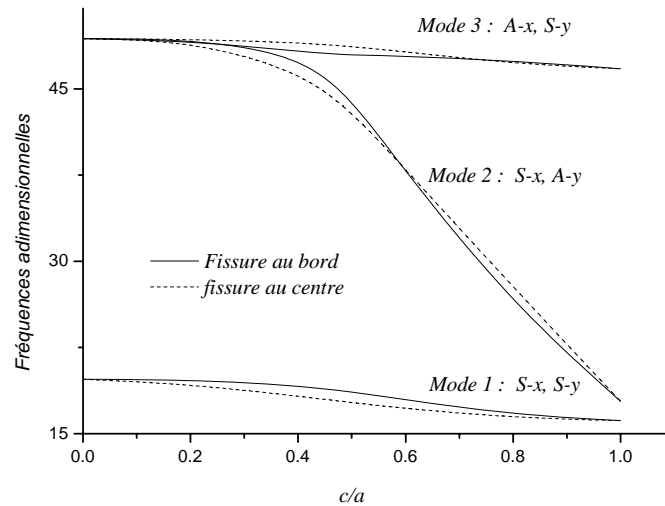


Figure 3.7. Fréquences propres des modes 1,2 et 3 en fonction du rapport de la fissure

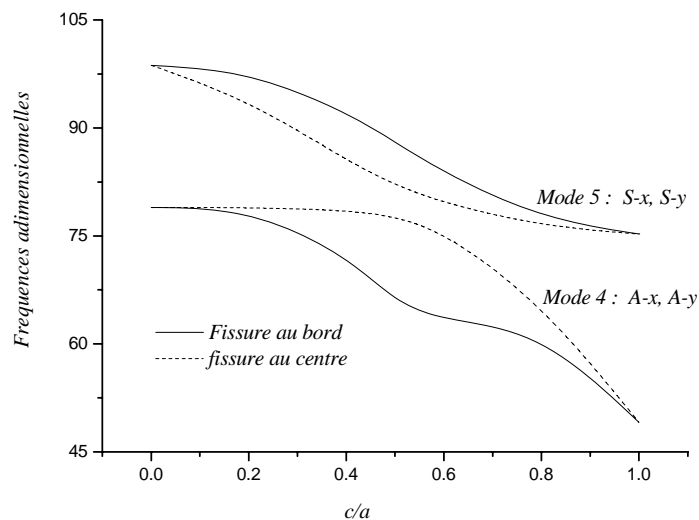


Figure 3.8. Fréquences propres des modes 4 et 5 en fonction du rapport de la fissure

Les Figures 3.9 et 3.10 montrent les déformées des cinq premiers modes de vibration pour différentes valeurs du rapport c/a . A partir de la figure 3.9, on peut observer pour le mode 2 par exemple (mode antisymétrique autour de l'axe y), que l'effet de la fissure commence à apparaître pour une valeur de c/a égale à 0.2. Lorsque la longueur de la fissure augmente ($c/a > 0.8$), la plaque se divise en deux parties.

On observe aussi que pour le mode 4, la déformée change d'allure lorsque la valeur de c/a est supérieure à 0.5, la fissure devenant bien visible. Le phénomène de division de la plaque est observé lorsque la longueur de la fissure augmente. Ce phénomène explique la perte dans la rigidité de la plaque qui provoque de sa part une nette décroissance dans les fréquences. Cependant, l'effet de la fissure n'affecte pas les déformées des modes 1, 3 et 5 signifiant une petite décroissance dans la rigidité et par conséquent une petite dégradation dans les fréquences, (Les dégradations dans les fréquences sont de 18%, 5% et 24% respectivement pour les modes 1, 3 et 5).

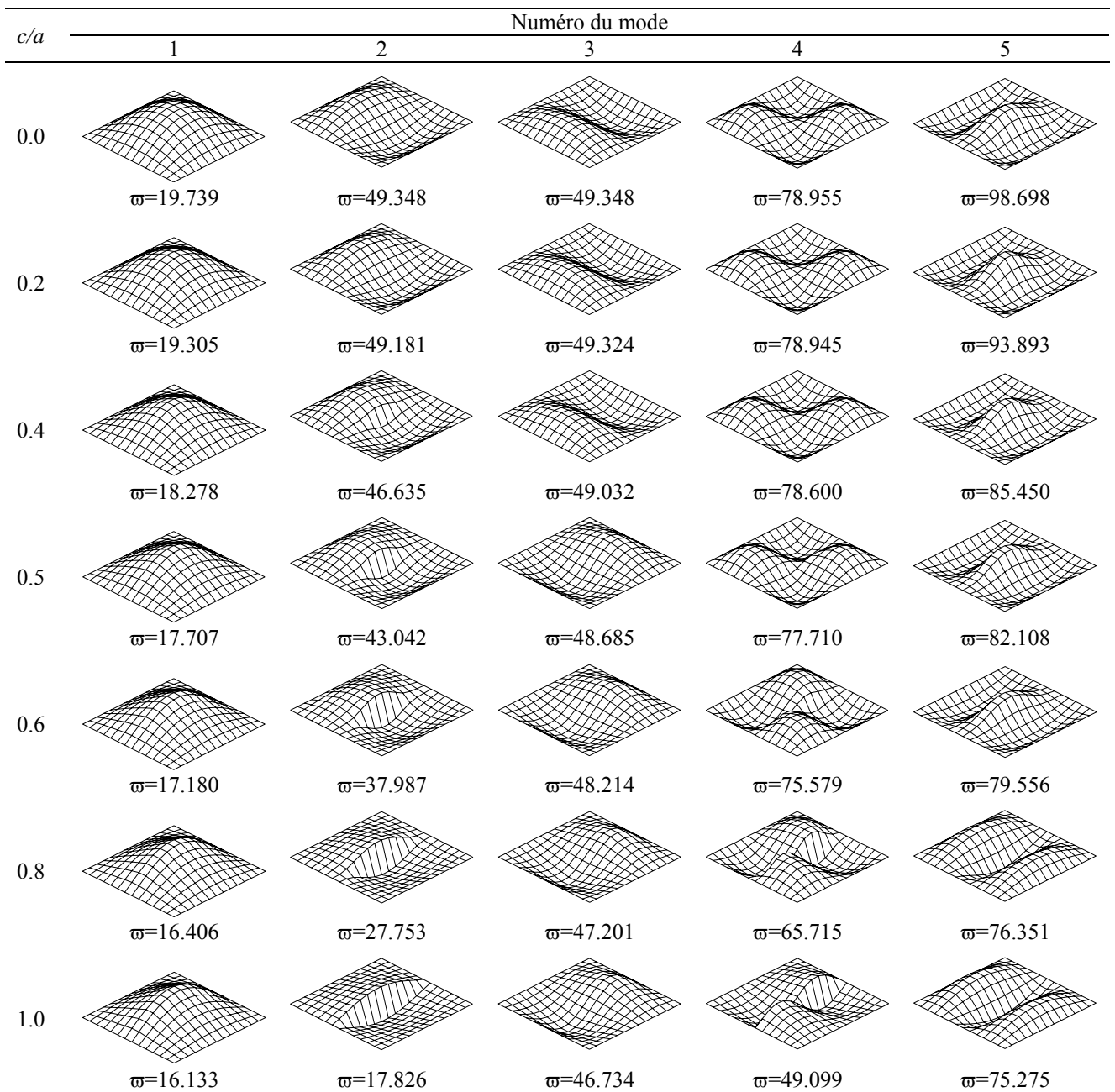
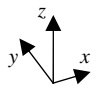


Figure 3.9. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure au centre $h/a=0.001$ $\nu=0.3$



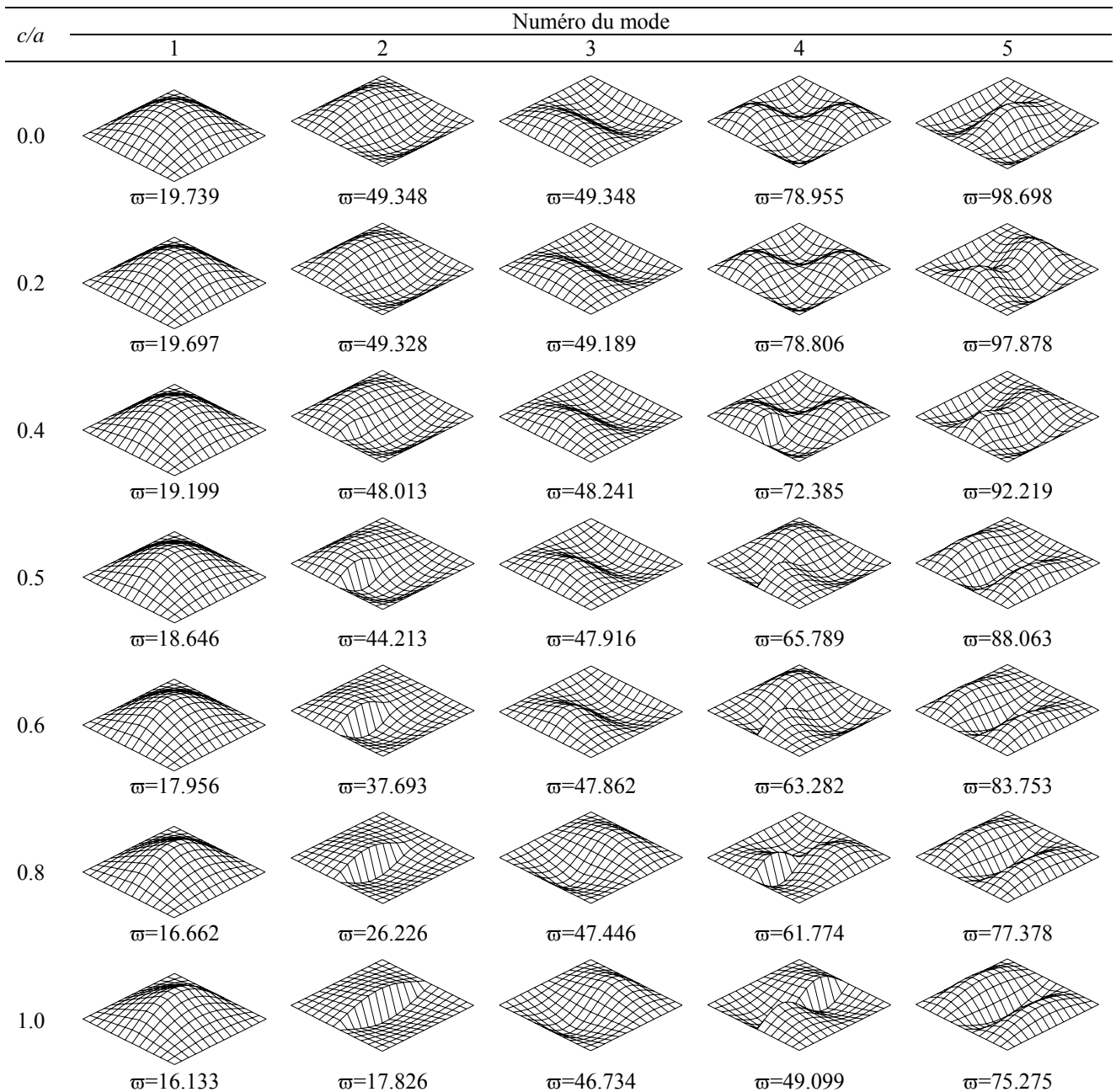


Figure 3.10. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque carrée simplement appuyée avec une fissure au bord $h/a=0.001$ $\nu=0.3$



3.2.3. Plaque rectangulaire sur appuis simples

La deuxième application traitée est celle d'une plaque rectangulaire sur appuis simples de rapport $a/b=2$. Le cas de fissures au bord et au centre sont considérés. Le rapport h/a est pris égal à 0.001 et le coefficient de poisson à 0.3. Les résultats obtenus en terme de fréquences

normalisées $\varpi = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$ sont reportés sur les tableaux 3.6 et 3.7. Ils sont comparés aux résultats de Stahl et Keer [27], et Liew, Hung et Lim [30].

Tableau 3.6. Fréquences normalisées ϖ d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au bord $a/b=2.0$, $h/a=0.001$ et $\nu=0.3$

N° Mode	Description du mode	Source des résultats	Rapport de la fissure c/a						
			0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
1	S-y	Stahl [27]	49.348	48.953	44.512	40.367	36.172	29.905	27.536
		Liew [30]	49.35	48.05	45.40	41.62	37.44	30.50	27.52
		Présente	49.348	48.971	44.486	40.323	36.158	29.874	27.508
2	S-y	Stahl [27]	78.957	77.871	73.282	72.788	72.591	68.199	64.547
		Liew [30]	78.96	78.08	73.82	72.89	72.62	68.82	64.54
		Présente	78.955	77.861	73.283	72.772	72.562	68.173	64.514
3	S-y	Stahl [27]	128.305	126.578	124.456	123.419	121.347	120.212	116.856
		Liew [30]	128.3	126.9	124.5	123.8	121.0	120.3	116.8
		Présente	128.303	126.542	124.437	123.413	121.299	120.157	116.798
4	A-y	Stahl [27]	167.783	167.092	100.078	73.627	57.490	39.528	27.536
		Liew [30]	167.8	167.2	104.7	76.55	59.31	40.02	27.52
		Présente	167.779	167.229	105.182	77.298	60.149	41.078	29.412
5	A-y	Stahl [27]	197.392	194.036	173.754	168.573	141.629	94.501	64.547
		Liew [30]	197.4	194.7	173.7	170.5	145.8	95.79	64.54
		Présente	197.384	194.698	174.130	170.113	144.203	96.537	67.298

S: mode symétrique, A: mode Anti-symétrique.

Tableau 3.7. Fréquences normalisées ϖ d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au centre $a/b=2.0$, $h/a=0.001$ et $\nu=0.3$

N° Mode	Description du mode	Rapport de la fissure c/a						
		0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
1	S-y	49.348	45.724	38.576	35.257	32.476	28.750	27.508
2	S-y	78.955	78.790	76.793	74.575	71.809	66.629	64.514
3	S-y	128.303	125.679	124.099	124.036	123.350	119.424	116.798
4	A-y	167.779	163.533	109.488	82.667	64.707	43.858	29.412
5	A-y	197.384	197.274	191.101	173.490	145.595	100.114	67.298

S: mode symétrique, A: mode Anti-symétrique.

On observe que les résultats que nous avons obtenus sont en bon accord avec les solutions de [27] et [30]. Ces résultats montrent que les fréquences de tous les modes de vibration décroissent avec l'accroissement de la longueur de la fissure. Cet effet est plus accentué sur les modes antisymétriques autour de y (le quatrième et le cinquième modes). En effet, la fréquence du quatrième mode chute de 82.5% de sa valeur initiale, celle du cinquième mode chute de 66%. Cette nette décroissance dans les fréquences peut être expliquée par

les déformées à différentes fréquences présentées sur les figures 3.11 et 3.12 dans lesquelles on peut observer comment la fissure divise la plaque en deux parties.

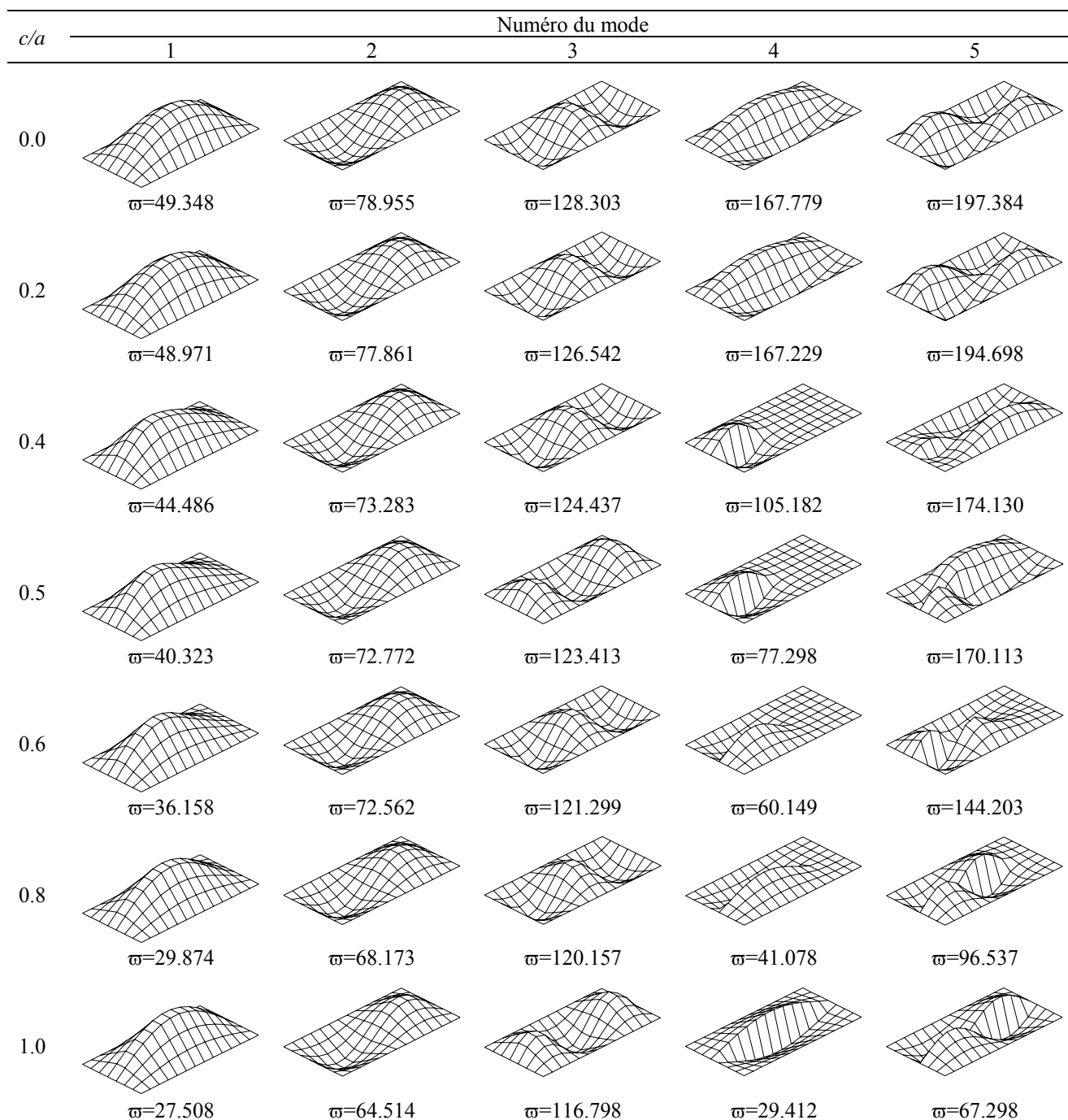
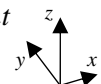


Figure 3.11. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au bord $a/b=2$ $h/a=0.001$ $\nu=0.3$



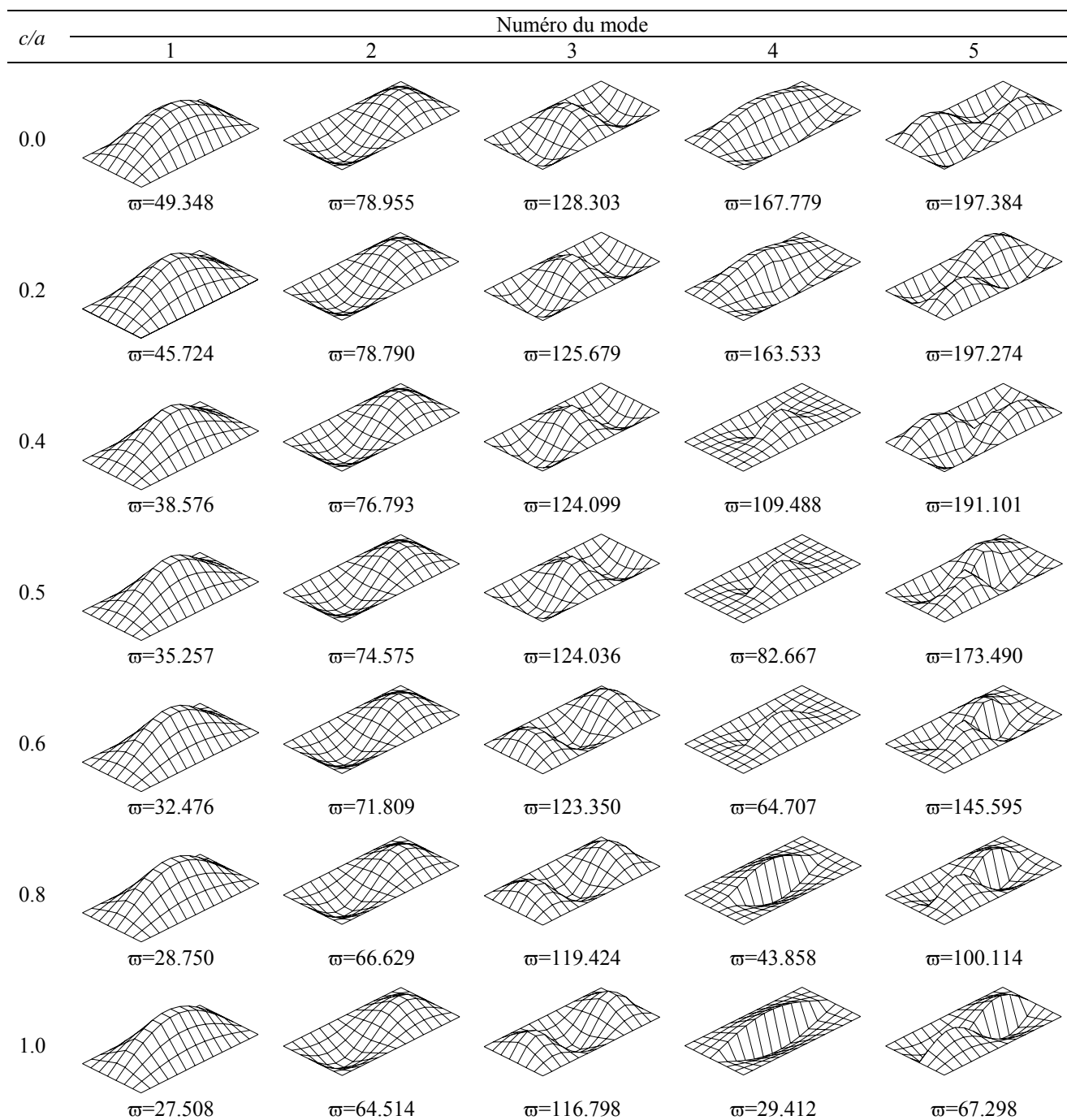


Figure 3.12. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au centre $a/b=2$ $h/a=0.001$ $\nu=0.3$



3.2.4. Plaque rectangulaire sur appuis libre-encastree, libre-encastree

Dans cette application, nous considérons le cas d'une plaque rectangulaire avec deux côtés opposés libres et deux côtés opposés encastres. Les côtés encastres sont parallèles à la direction x (Figure 3.13). La plaque présente une fissure au centre parallèle aux côtés encastres (l'axe x). Les données du problème sont les suivantes; $a/b = 0.5$, $h/a = 0.001$, $c/a = 0.4$, coefficient de Poisson $\nu = 0.31$.

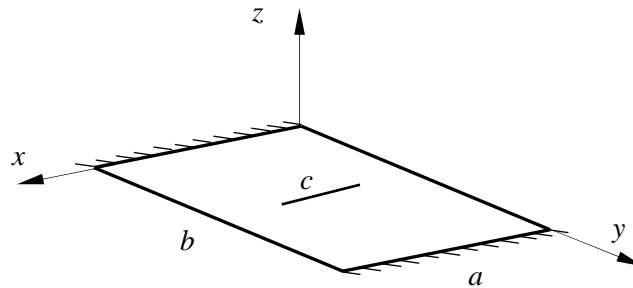


Figure 3.13. Plaque encastree libre, encastree libre

Cette application a été reportée par Liew, Hung et Lim [30] dans laquelle des résultats expérimentaux, analytiques et numériques sont présentés. Le tableau 3.8 montre les fréquences adimensionnelles $\varpi = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$ des cinq premiers modes de vibration obtenues par la présente méthode et ceux de [30,42]. Un bon accord est observé entre nos prédictions avec celles de [30,42], l'erreur maximale par rapport aux résultats expérimentaux étant de 2 % environ.

Tableau 3.8. Comparaison des fréquences adimensionnelles d'une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une fissure au centre $a/b = 0.5$ $c/a = 0.4$ et $\nu = 0.31$

N° Mode	Présente	Experiment [42]	Liew [30]	FEM [42]
1	5.31	5.3	5.26	5.33
2	8.98	9.0	8.98	8.93
3	15.15	15.6	15.11	15.32
4	20.58	20.6	20.50	20.63
5	26.75	26.3	26.56	26.37

La Figure 3.14 montre les 5 premières déformées obtenues pour les cas $c/a = 0.4$ et $c/a = 1.0$. La fissure est bien visible sur le mode 1 et le mode 5 (symétrique autour de x , symétrique autour de y), pour ces deux modes. La fréquence chute de 21% de sa valeur à $c/a = 0.4$ pour le mode 1 et de 14% pour le mode 5, par contre la fissure n'a pas de grand effet sur les trois autres déformées

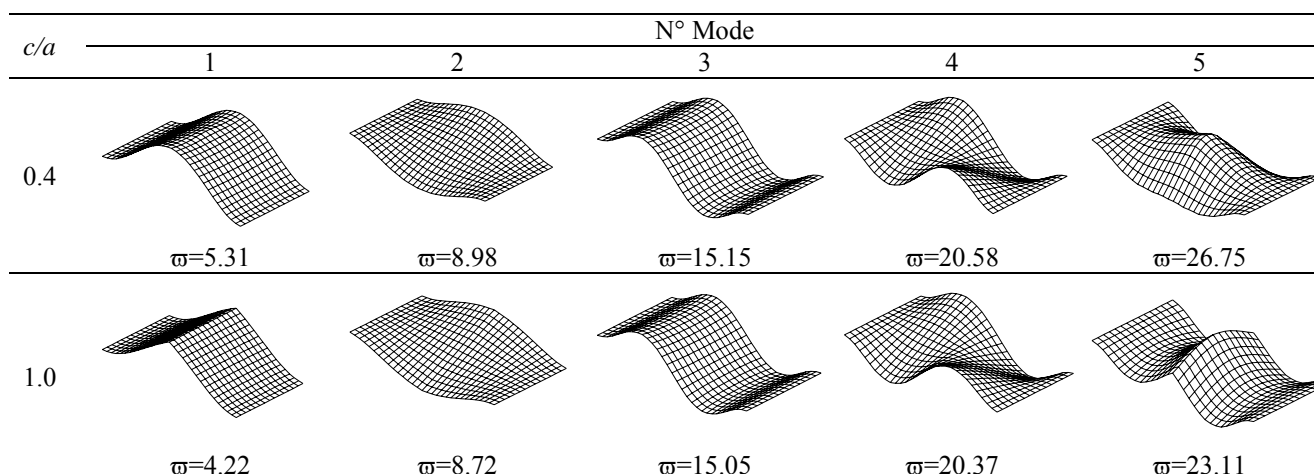


Figure 3.14 Déformées modales d'une plaque rectangulaire en appuis LELE avec une fissure au centre $a/b = 0.5$ $c/a = 0.4$ et $\nu = 0.31$



3.2.5. Plaque carrée encastrée

Nous examinons le cas d'une plaque carrée en Aluminium, encastrée d'un seul côté et contenant une fissure définie par les coordonnées $x_c = 90\text{mm}$, et $y_c = 90\text{ mm}$. La longueur de la fissure est 34 mm orientée parallèlement au côté encastré (Figure 3.15).

Les dimensions de la plaque sont $240 \times 240 \times 2.75$ (mm^3), et ses propriétés mécaniques sont : $E = 6.7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 2800 \text{ Kg/m}^3$ et $\nu = 0.33$.

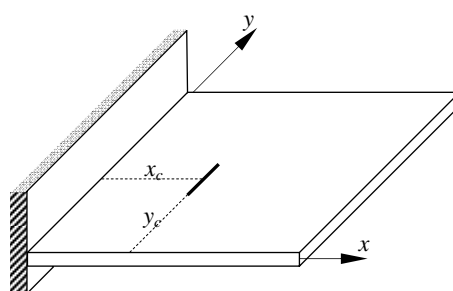


Figure 3.15. . Plaque encastrée avec une fissure interne

Le tableau 3.9 présente les résultats obtenus pour les trois premières valeurs comparés aux résultats expérimentaux et numériques obtenus dans d'autres travaux [36,43]. Les résultats sont normalisés par rapport à la fréquence initiale (lorsque la plaque est saine). Une bonne précision est observée après comparaison.

Tableau 3.9. Fréquences naturelles d'une plaque carrée en encastrement avec fissure interne

Source de résultats	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Expériment [43]	0.9931	0.9989	0.9837
Théorie [43]	0.9917	0.9981	0.9807
Krawieczuk [36]	0.9921	0.9984	0.9823
Présente	0.9925	0.9995	0.9936

Chapitre 4

Vibrations des plaques composites fissurées

Dans ce chapitre, le cas des plaques composites est traité. Dans une première phase, plaques sans fissures sont examinées. Par la suite, plaques composites avec fissures à différents endroits et de différentes longueurs sont traitées.

4.1. Vibration des plaques sans fissures

4.1.1. Plaque stratifiée orthotrope [0°/90°/90°/0°]

Un stratifié orthotrope est obtenu, soit à partir d'une seule couche en matériau orthotrope, soit à partir d'un stratifié symétrique constitué de couches orthotropes dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence du stratifié.

Dans cette application, nous considérons une plaque carrée multicouche [0°/90°/90°/0°] de côté a et de caractéristiques mécaniques :

$$E_1/E_2 = 40 \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6 \quad G_{23}/E_2 = 0.5 \quad \nu_{12} = 0.25$$

Le choix de E_2 et ρ est arbitraire à cause de l'adimensionnalité des résultats.

L'expression analytique des fréquences propres, pour une plaque orthotrope simplement appuyée, est donnée par [61] :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2 + D_{22}n^4]} \quad (4.1)$$

Les fréquences naturelles sont normalisées par : $\varpi = \omega (a^2/h) \sqrt{\rho/E_2}$

Les six premières valeurs obtenues via la relation (4.1) ainsi que les résultats donnés par notre code de calcul sont reportés dans le tableau 4.1. Il faut noter que pour un stratifié orthotrope, les fréquences propres ne sont pas symétriques ($\omega_{12} \neq \omega_{21}$) [61].

Tableau 4.1 Fréquences propres normalisées d'une plaque carrée stratifiée $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sur appuis simples, $h/a=0.01$

m	n	ω		Erreur (%)
		Présente étude	Solution exacte [61]	
1	1	18.836	18.891	-0.29
1	2	33.808	33.823	-0.05
1	3	67.160	66.079	1.64
2	1	68.129	68.637	-0.74
2	2	74.699	75.565	-1.15
2	3	95.217	96.363	-1.19

ω en rd/s

4.1.2. Stratifié croisé antisymétrique $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des fibres est antisymétrique par rapport au plan moyen du stratifié. L'alternance $[0^\circ/90^\circ]$ est souvent désignée par stratifié croisé.

Nous considérons une plaque rectangulaire simplement appuyée de dimension $a=1$ m et $b=0.5$ m, et constituée d'un stratifié croisé antisymétrique $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$, pour ce type de stratifié nous avons :

$$\begin{aligned} A_{16}=A_{26}=0 & \quad B_{12}=B_{16}=B_{26}=B_{66}=0 & \quad D_{16}=D_{26}=0 \\ A_{22}=A_{11} & \quad B_{22}=-B_{11} & \quad D_{22}=D_{11} \end{aligned}$$

La plaque est constituée d'un matériau de caractéristiques mécaniques identiques à celles du matériau utilisé dans la section précédente.

Les fréquences propres sont calculées par la relation mathématique suivante [61] :

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\rho_s a^4} \left\{ \left[D_{11}(m^4 + R^4 n^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2 m^2 n^2 \right] - \frac{B_{11}^2}{\Delta_1} (\Delta_3 m^4 + \Delta_2 R^4 n^4) \right\} \quad (4.2)$$

avec :

$$\Delta_1 = (A_{11}m^2 + A_{66}R^2n^2)(A_{66}m^2 + A_{11}R^2n^2) - (A_{12} + A_{66})^2 R^2 m^2 n^2$$

$$\Delta_2 = (A_{12} + A_{66})^2 m^4 + A_{11}R^2 m^2 n^2 + A_{66}R^4 n^4$$

$$\Delta_3 = A_{66}m^4 + A_{11}R^2 m^2 n^2 + (A_{12} + A_{66})R^4 n^4$$

et $R=a/b$.

Les valeurs des fréquences propres normalisées, $\varpi = \omega (a^2/h) \sqrt{\rho/E_2}$, sont reportées dans le tableau 4.2, pour un rapport h/a égal à 0.01. L'écart maximal est de 2% en comparant les six premières valeurs, données par le code, à ceux obtenues par la relation 4.2.

Tableau 4.2 Fréquences propres normalisées d'une plaque rectangulaire stratifiée $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ sur appuis simples, $h/a=0.01$

m	n	ϖ		Erreur.(%)
		Présente étude	Solution exacte [61]	
1	1	49.177	49.479	-0.61
2	1	68.748	69.366	-0.89
3	1	118.093	119.521	-1.19
1	2	187.878	189.590	-0.90
2	2	195.454	197.916	-1.24
3	2	219.200	223.796	-2.05

ω en rd/s

4.1.3. Starifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$

Nous considérons le cas d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ avec les mêmes données de l'application 4.1.1. Les 11 premières valeurs sont montrées sur le tableau 4.3. Sur ce même tableau sont présentées les résultats trouvés par [18,51] ainsi que l'écart entre nos calculs et les résultats de [18].

Tableau 4.3. Fréquences normalisées $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$: plaque carrée simplement appuyée; stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$; $h/a=0.1$

m	n	Présente étude	Bert et Chen [18]	HOST[51]	Erreur/à [18]
1	1	18.46	18.46	18.32	0.00
1	2	34.87	34.87	34.54	0.00
2	2	50.51	50.52	49.71	-0.02
1	3	54.27	54.27	53.63	0.00
2	3	67.13	67.17	65.02	-0.06
1	4	75.55	75.28	75.65	0.36
3	3	82.72	82.84	83.14	-0.14
2	4	85.15	85.27	86.75	-0.14
1	5	97.45	97.56	99.45	-0.11
3	4	98.73	99.02	100.88	-0.29
2	5	104.67	104.95	103.28	-0.27

ω en rd/s, HOST : higher order shear deformation theory

Les résultats présentés sur les tableaux 4.1 à 4.3 confirment la validité du code de calcul que nous avons développé. Ils permettent d'entrevoir l'utilisation de celui-ci pour l'analyse vibratoire de toute plaque composite à base de fibres unidirectionnelles. Dans les études qui suivent, d'autres paramètres seront considérés.

4.1.2. Etudes paramétriques

La réalisation de stratifiés est souvent faite à partir de couches qui ont les mêmes caractéristiques (mêmes constituants, mêmes configurations géométriques, mêmes épaisseurs, etc.), mais avec des orientations différentes de leurs axes principaux par rapport aux axes de référence du stratifié.

a. Influence du rapport épaisseur/longueur (h/a)

Nous considérons une plaque carrée de côté a , constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ]_5$, de caractéristiques mécaniques identiques à celles présentées dans la section 4.1.1. Nous étudions le cas où la plaque est en appuis simples. Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} u_0 = w_0 = \theta_y = 0 & \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = a. \\ v_0 = w_0 = \theta_x = 0 & \quad \text{en } y = 0 \text{ et } y = a. \end{aligned}$$

La Figure 4.1 illustre la variation des quatre premières fréquences propres normalisées $\varpi = \omega \sqrt{\rho h^2 / E_2} \cdot 100$ en fonction du rapport h/a variant de 0.01 à 0.2. On remarque que la fréquence propre augmente avec l'accroissement du rapport h/a . Celui-ci passe par deux zones différentes :

La première zone est caractérisée par une variation parabolique des fréquences normalisées pour des valeurs de h/a appartenant à $[0.01 \quad 0.1]$ (cas des plaques minces). La deuxième zone est caractérisée par une variation de ϖ presque linéaire pour des valeurs de h/a appartenant à $[0.1 \quad 0.2]$ (cas des plaques épaisses). De plus, la variation de ϖ est plus lente dans la zone 2 que la zone 1, ceci est dû peut être à la présence des déformations en cisaillement transverse et leur degré d'influence sur les fréquences fondamentales. En fait, la négligence de ces déformations modifiée largement l'allure de la fréquence dans la zone 2. La figure 4.2 illustre la variation de la première fréquence normalisées ϖ pour deux configurations : avec et sans prise en compte des déformations en cisaillement transverse.

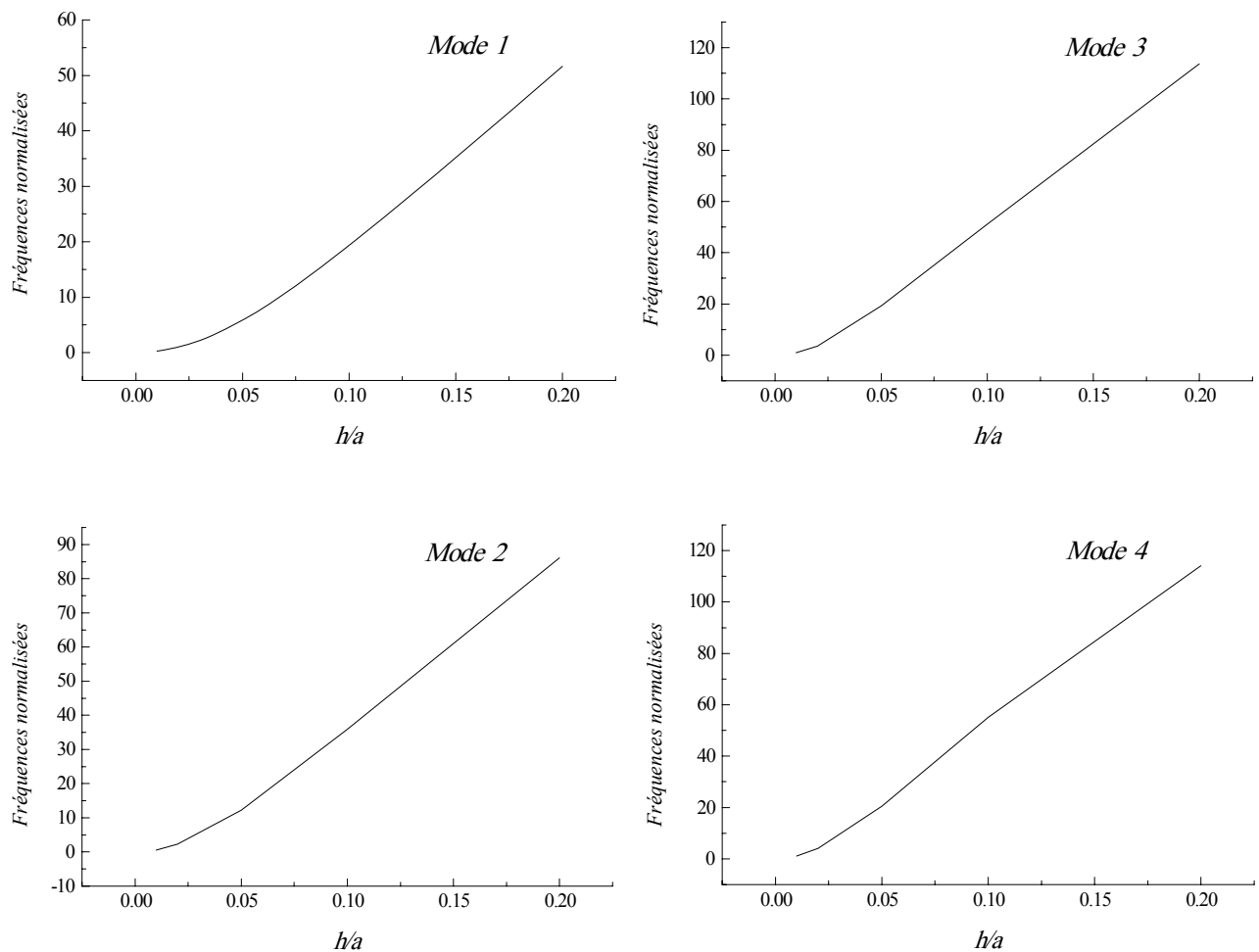


Figure 4.1 Influence du rapport h/a sur les quatre premières fréquences propres normalisées ω d'une plaque carrée en appuis simples constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ]_5$

En examinant la zone 2, les fréquences obtenues par la théorie des plaques laminées (théorie basée sur les hypothèses de Kirchoff) sont supérieures à celles obtenues par la présente étude (étude basée sur les hypothèses de Mindlin), le décalage augmente avec l'augmentation du rapport h/a . Par contre, les courbes tracées dans la zone 1, pour les deux configurations, sont presque confondues. Ce résultat permet de conclure que les déformations en cisaillement transverse réduisent la valeur de la fréquence propre pour des rapports h/a supérieures à 0.1, cet effet devient négligeable lorsque le rapport h/a est inférieur à 0.1.

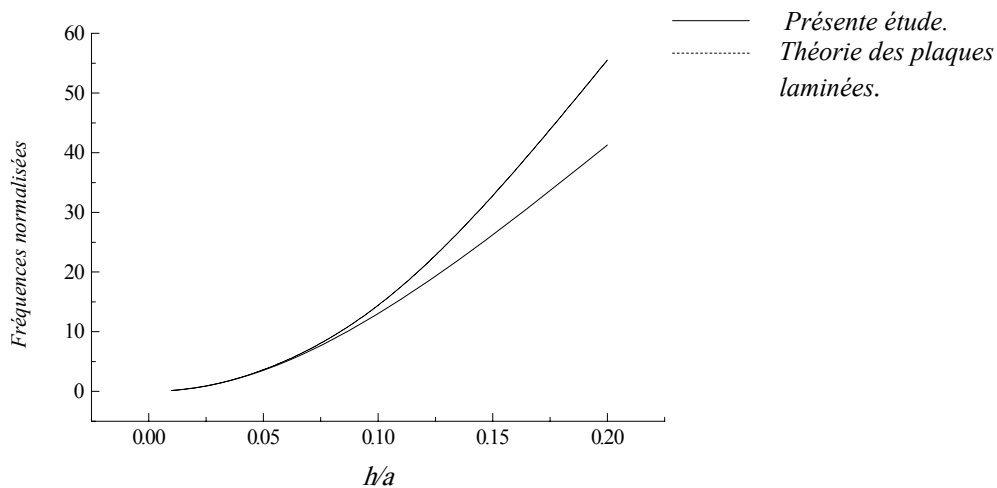


Figure 4.2 Influence du cisaillement transverse sur la première fréquence propre normalisées ω

Cette analyse nous permet de confirmer que la théorie classique des plaques laminées devient mal adaptée à la description du comportement vibratoire des plaques composites pour des rapports h/a supérieur à 0.1, et au-delà de cette valeur, il n'est plus question de négliger les déformations en cisaillement transverse.

Nous examinons maintenant l'influence de la symétrie miroir sur les fréquences propres. Un stratifié est doté de la symétrie miroir lorsque ces plis de part et d'autre du plan moyen ont :

- Les mêmes orientations.
- Les mêmes épaisseurs.
- Des cotes opposées z_k et $-z_k$.

Dans ce cas les coefficients B_{ij} (couplage membrane-flexion) de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls.

En outre, les stratifiés dotés de la symétrie miroir sont largement utilisés car ils ne présentent pas une tendance au gauchissement lors des déformations induites lors de refroidissement consécutif au processus de mise en oeuvre des matériaux

Nous considérons le cas de deux types de stratifiés :

- Stratifié doté de la symétrie miroir $[0^\circ/30^\circ/-30^\circ/45^\circ/-45^\circ/60^\circ/-60^\circ/90^\circ]_s$.
- Stratifié n'est pas doté de la symétrie miroir $[0^\circ_2/30^\circ_2,[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_T,30^\circ_2]$.

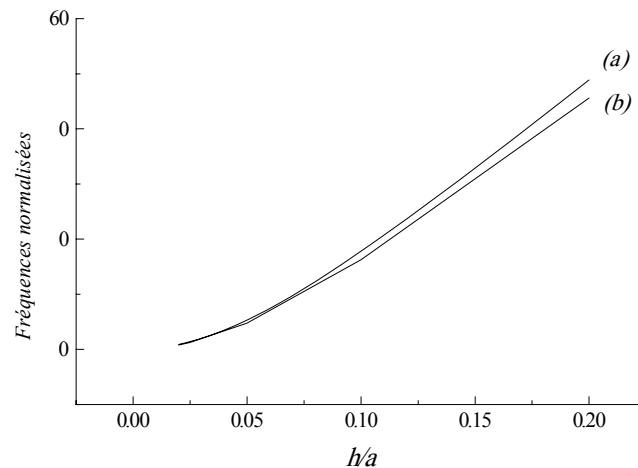


Figure 4.3 Influence de la symétrie miroir sur la première fréquence propre normalisée ω
 (a) : stratifié doté de la symétrie miroir (b) : stratifié n'est pas doté de la symétrie miroir.

La variation de la première fréquence propre normalisée en fonction du rapport h/a est illustrée, pour les deux types de stratifiés, sur la figure 4.3. On constate que la présence de la symétrie miroir influe d'une manière positive sur la rigidité de la plaque pour des rapports h/a élevés. La figure montre également que, pour des rapports h/a relativement faibles, l'effet de la symétrie miroir est négligeable.

b. Effet de l'orientation des fibres

Dans cette application, un stratifié antisymétrique $[\theta/-\theta]_4$ est considéré. Les caractéristiques mécaniques et les conditions aux limites sont celles mentionnées dans la section 4.1.1. Le rapport h/a est fixé à 0.1.

La fréquence normalisée $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ est calculée en fonction de l'orientation des fibres θ pour différentes valeurs du rapport a/b et représentée sur la Figure 4.4.

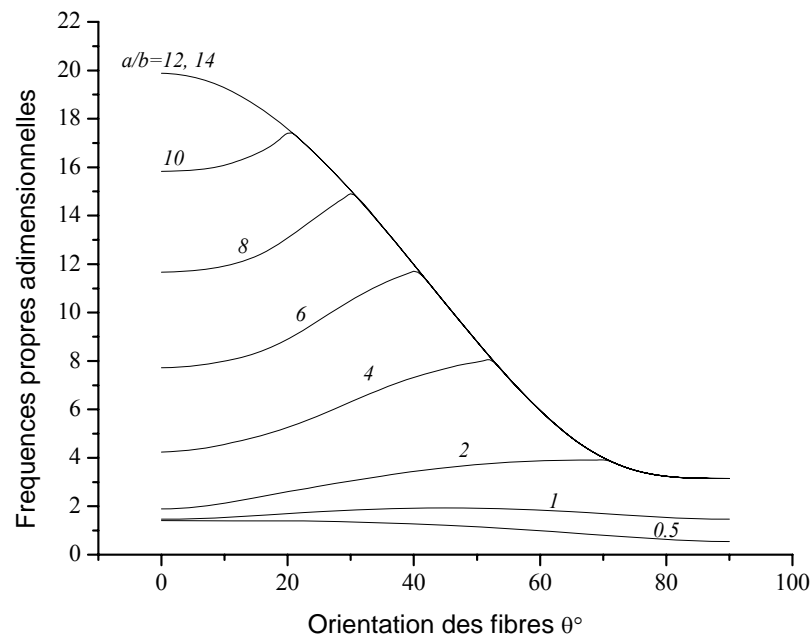


Figure 4.4. Evolution de la première fréquence $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2} \cdot 10$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ pour différentes valeurs du rapport géométrique a/b avec $h/a=0.1$

On remarque d'après la figure 4.4 que :

- Lorsque $a/b < 1$, la fréquence ϖ décroît quand l'angle θ augmente,
- Lorsque $a/b = 1$, la fréquence ϖ augmente légèrement dans l'intervalle $[0^\circ, 45^\circ]$ pour atteindre son maximum à $\theta=45^\circ$, puis diminue symétriquement dans l'intervalle $[45^\circ, 90^\circ]$.
- Lorsque $1 < a/b < 10$, la fréquence ϖ augmente dans l'intervalle $[0^\circ, \theta_a]$ pour atteindre son maximum à $\theta=\theta_a$ (point anguleux), puis diminue continuellement dans l'intervalle $[\theta_a, 90^\circ]$. La courbe $\varpi=f(\theta)$ est continue au point $\theta=\theta_a$, mais non dérivable en ce point. La valeur de l'orientation θ_a relative au point anguleux dépend systématiquement du rapport a/b .
- Lorsque $a/b > 12$, la fréquence ϖ atteint son maximum pour $\theta=0^\circ$, puis diminue quand θ augmente. La courbe représentative est continue et dérivable sur tout l'intervalle $[0^\circ, 90^\circ]$.

On peut conclure à partir de la Figure 4.4 que pour $a/b > 12$, la valeur maximale de ϖ est toujours atteinte en $\theta=0^\circ$; l'augmentation du rapport a/b n'a aucun effet sur la variation de ϖ . Par ailleurs, cette configuration peut être identifiée comme : " la position de stabilité

des fréquences propres''. Pour cette configuration, la plaque devient plus rigide lorsque les fibres sont orientées suivant la direction prédominante x . Le comportement macroscopique de la plaque est alors identique à celui d'une plaque homogène isotrope. Ces mêmes observations peuvent être considérées pour les valeurs de a/b inférieures à 1.

Afin de généraliser les observations précédemment notées pour $h/a=0.1$, on considère le cas d'une plaque mince de rapport $h/a=0.02$. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 4.5. On remarque que la variation de ϖ en fonction de θ pour différentes valeurs de a/b présente des caractéristiques similaires à celles du cas précédent, sauf que la stabilité des fréquences est obtenue, cette fois-ci pour des rapports de a/b supérieurs à 24. La stabilité des fréquences dépend donc du rapport h/a , elle est plus rapidement atteinte dans le cas des plaques épaisses.

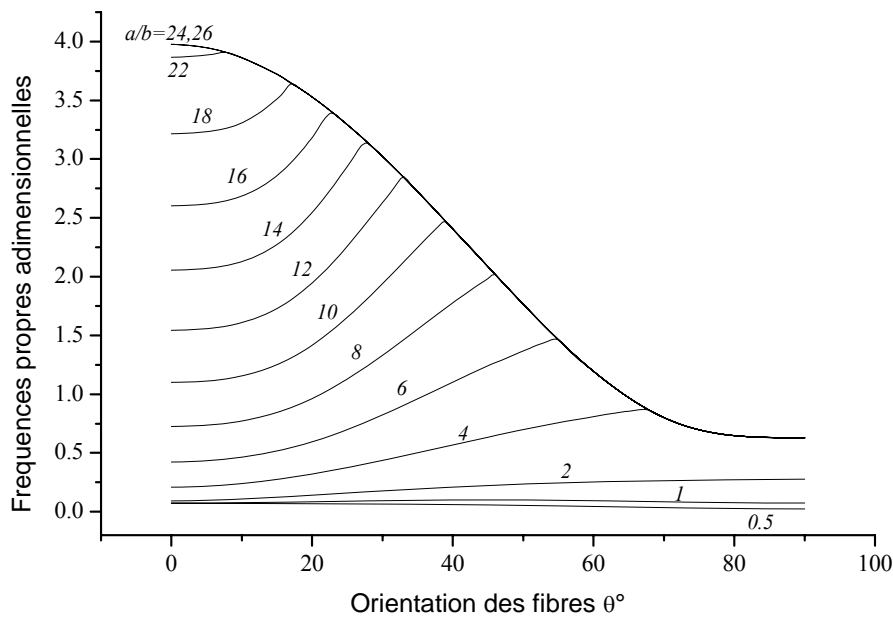


Figure 4.5. Evolution de la première fréquence $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2} \cdot 10$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ pour différentes valeurs du rapport géométrique a/b avec $h/a=0.02$

Examinons maintenant le cas d'une plaque épaisse de rapport h/a égal à 0.2. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 4.6. On remarque que la variation de ϖ diffère des deux cas précédemment examinés. En effet, la stabilité des fréquences est rapidement atteinte. Pour le rapport $a/b=8,10$, la fréquence maximale $\varpi=27.5$ correspond à un angle $\theta=29^\circ$. Pour des rapports de $a/b < 1$, la variation de ϖ diffère aussi des cas déjà examinés; la Figure 4.6 illustre l'allure de cette variation.

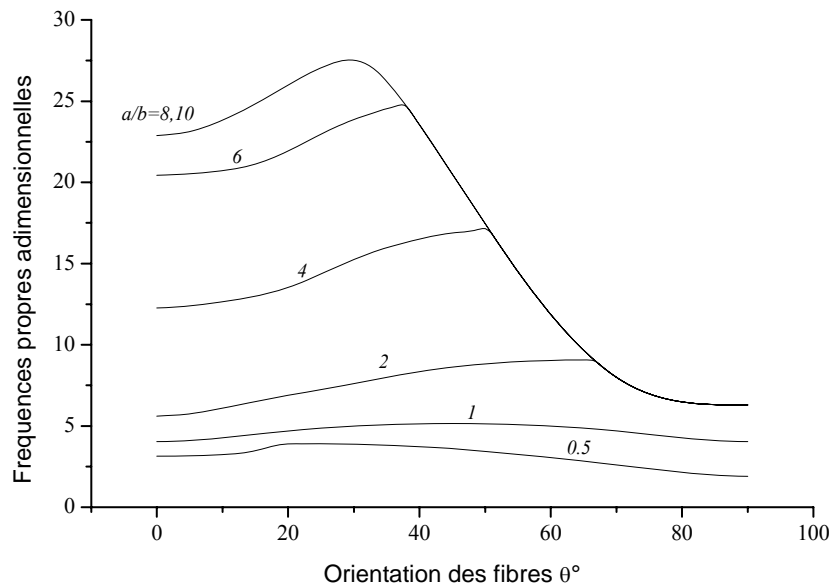


Figure 4.6. Evolution de la première fréquence $\varpi = \omega^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2} \cdot 10$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ pour différentes valeurs du rapport géométrique a/b avec $h/a=0.2$

c. Influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2

Dans le but d'examiner l'influence de l'anisotropie du matériau caractérisée ici par E_1/E_2 , nous considérons une plaque rectangulaire de dimension $a=2m$, $b=1m$ et $h=0.4m$, constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[30^\circ/-30^\circ]_4$ de caractéristiques mécaniques :

$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6 \quad G_{23}/E_2 = 0.5 \quad \nu_{12} = 0.25$$

L'effet de l'anisotropie du matériau est examiné pour des rapports E_1/E_2 variant de 3 à 40. Les conditions aux limites utilisées sont celles d'appuis simples. Elles sont données comme suit :

$$\begin{aligned} u_0 = w_0 = \theta_y = 0 & \quad \text{à } x = 0, a. \\ v_0 = w_0 = \theta_x = 0 & \quad \text{à } y = 0, b. \end{aligned}$$

La variation des quatre premières fréquences propres normalisées $\varpi = \omega \sqrt{\rho h^2 / E_2}$ en fonction du rapport E_1/E_2 est reportée sur la figure 4.7. Nous observons une croissance très rapide de ϖ (de l'ordre de 50%), pour des valeurs de E_1/E_2 appartenant à l'intervalle $[3, 10]$.

Cette croissance devient par la suite lente et tend vers une valeur négligeable E_1/E_2 supérieures à 40.

Par ailleurs, la rigidité de la plaque est proportionnelle au degré de l'anisotropie du matériau utilisé. On constate d'après la figure 4.7 que les plaques hautement anisotropes sont structurellement plus rigides que les plaques faiblement anisotropes.

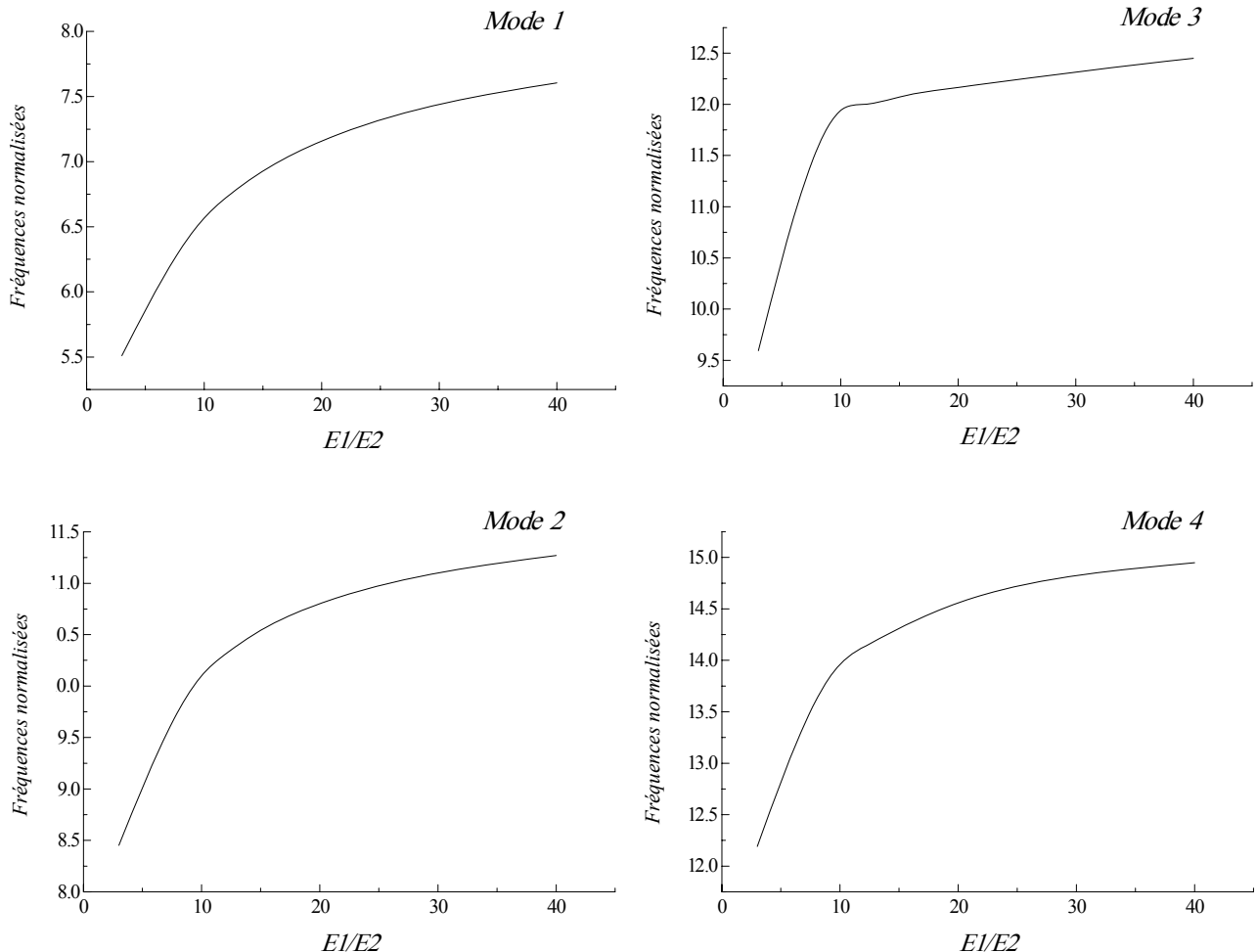


Figure 4.7 Influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2 sur les quatre premières fréquences propres normalisées ω d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[30^\circ/-30^\circ]_4$

d. Influence du nombre de couches

Pour cette application, nous considérons le cas d'une plaque carrée constituée d'un stratifié antisymétrique de rapport $h/a=0.2$. Nous examinons deux types de séquences d'empilement différentes :

- Couches équilibrées $[45^\circ/-45^\circ]_{nT}$
- Couches croisées $[0^\circ/90^\circ]_{nT}$

où n représente le nombre de paires de couches constituant le stratifié.

Pour chaque couche, les caractéristiques du composite verre-époxyde suivantes sont utilisées :

$$E_1=46 \text{ GPa} \quad E_2=10 \text{ GPa} \quad G_{12}=4.6 \text{ GPa} \quad \nu=0.31 \quad \rho=2040 \text{ kg/m}^3$$

La plaque est supposée en appuis simples, les conditions aux limites sont les mêmes que celles utilisées dans la section *a*.

On fait varier le nombre de couches tout en gardant constante l'épaisseur du stratifié. La variation de la fréquence fondamentale ω en fonction du nombre de couches est représentée sur la figure 4.8. On constate que l'augmentation du nombre de couches, sauf lorsqu'on passe de deux couches à quatre, n'a pas une grande influence sur ω (un écart de l'ordre de 3% entre 12 couches et 4 couches). La figure 4.8 indique également que les stratifiés équilibrés sont plus rigides que les stratifiés croisés. Ainsi, la rigidité obtenue pour un stratifié équilibré constitué de quatre couches est supérieure à celle obtenue pour un stratifié croisé constitué d'un nombre de couches plus élevé.

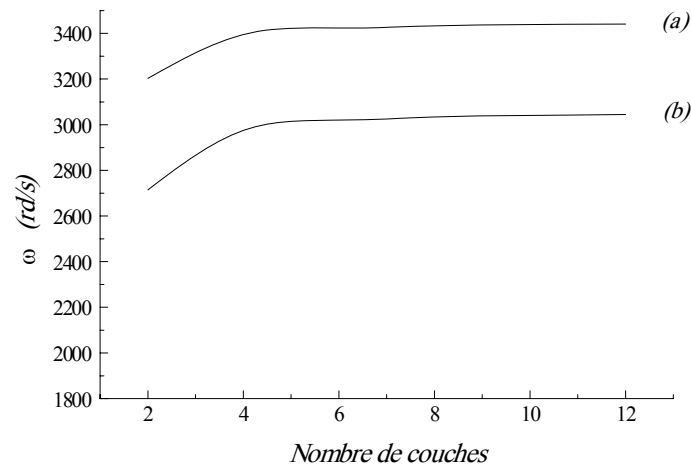


Figure 4.8 Influence du nombre de couches sur la première fréquence propre ω d'une plaque carrée simplement appuyée

(a) : couches équilibrées antisymétriques $[45^\circ/-45^\circ]_{nT}$

(b) : couches croisées antisymétriques $[0^\circ/90^\circ]_{nT}$

Cependant, il est important de noter que les coefficients de rigidité en membrane A_{ij} ainsi que les coefficients de rigidité en flexion et en torsion D_{ij} sont indépendants du nombre de couches et du type de stratifié. Par contre, le couplage membrane-flexion/torsion qui provient des termes B_{ij} décroît lorsque le nombre de couches augmente.

e. Influence des conditions aux limites

Nous considérons une plaque rectangulaire de dimensions : $a=1m$, $b=0.5m$ et $h=0.3m$ constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ]_6$. Les caractéristiques mécaniques de ce stratifié sont typiques d'un composite carbone-époxyde :

$$E_1=230 \text{ GPa} \quad E_2=14.4 \text{ GPa} \quad G_{12}=4.9 \text{ GPa} \quad \nu_{12}=0.32 \quad \rho=1650 \text{ kg/m}^3$$

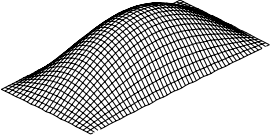
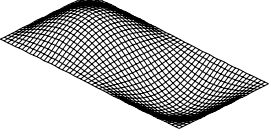
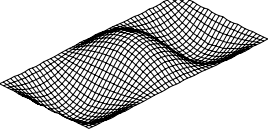
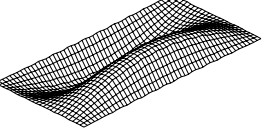
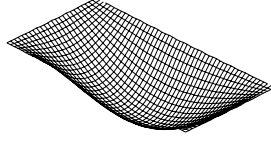
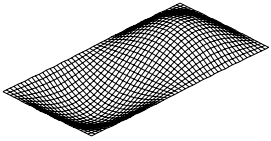
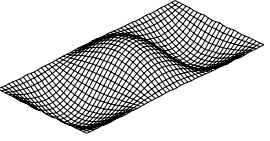
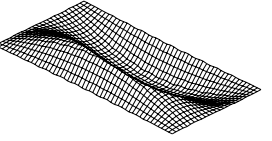
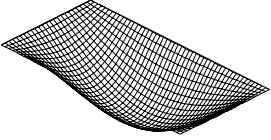
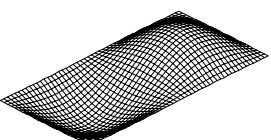
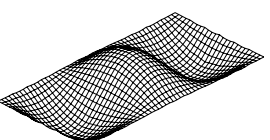
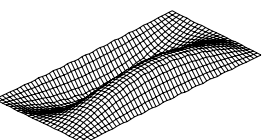
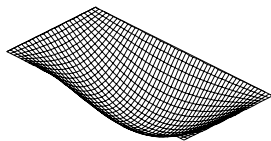
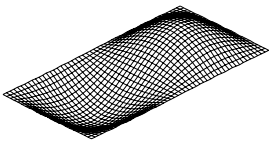
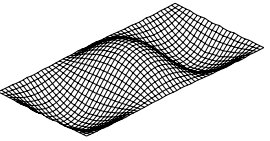
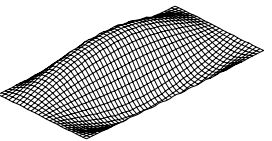
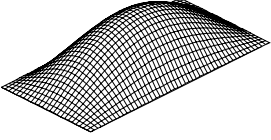
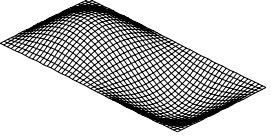
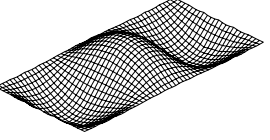
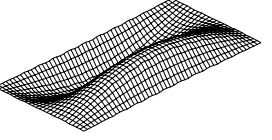
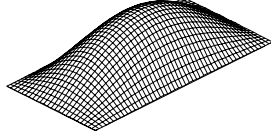
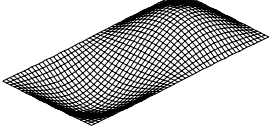
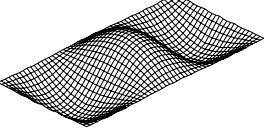
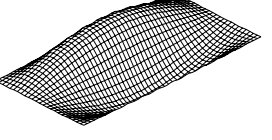
Les conditions d'appuis simples considérées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} v_0 = w_0 = \theta_x &= 0 && \text{à } y = 0. \\ v_0 = w_0 = \theta_x &= 0 && \text{à } y = b. \\ u_0 = w_0 = \theta_y &= 0 && \text{à } x = 0. \\ u_0 = w_0 = \theta_y &= 0 && \text{à } x = a. \end{aligned}$$

Par contre, la condition d'encastrement est donnée par :

$$u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0 \quad \text{sur les quatre côtés}$$

L'étude de l'influence des conditions aux limites sur les fréquences fondamentales est effectuée en combinant les conditions d'appuis mentionnées précédemment. Les quatre premières valeurs des fréquences propres ainsi que leur déformées modales sont présentées sur la figure 4.9. On remarque que le comportement le plus rigide est obtenu lorsque la plaque est encadrée sur ses quatre extrémités. Par contre, la plaque devient plus flexible dans le cas des extrémités simplement appuyées. Cependant, le type des conditions aux limites n'a pas un grand effet sur la déformée de la plaque. En effet, la même allure est presque obtenue dans tous les cas considérés. D'autre part, les résultats obtenus indiquent clairement que les fréquences propres sont affectées par le type d'appuis utilisé.

Type des conditions aux limites	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
SSSS	 $\omega=11261 \text{ rd/s}$	 $\omega=14859 \text{ rd/s}$	 $\omega=18950 \text{ rd/s}$	 $\omega=21635 \text{ rd/s}$
ESES	 $\omega=11273 \text{ rd/s}$	 $\omega=14880 \text{ rd/s}$	 $\omega=19059 \text{ rd/s}$	 $\omega=21640 \text{ rd/s}$
SSSE	 $\omega=11525 \text{ rd/s}$	 $\omega=14882 \text{ rd/s}$	 $\omega=18971 \text{ rd/s}$	 $\omega=21670 \text{ rd/s}$
SSEE	 $\omega=11526 \text{ rd/s}$	 $\omega=14916 \text{ rd/s}$	 $\omega=19025 \text{ rd/s}$	 $\omega=21675 \text{ rd/s}$
SEEE	 $\omega=11871 \text{ rd/s}$	 $\omega=14954 \text{ rd/s}$	 $\omega=19042 \text{ rd/s}$	 $\omega=21694 \text{ rd/s}$
EEEE	 $\omega=11904 \text{ rd/s}$	 $\omega=15014 \text{ rd/s}$	 $\omega=19095 \text{ rd/s}$	 $\omega=21696 \text{ rd/s}$

E : Extrémité encastée. *S* : Extrémité simplement appuyée.

ESES : Plaque (i) : encastée suivant $x=0$, (ii) : simplement appuyée suivant $y=0$, (iii) : encastée suivant $x=a$, (iv) : simplement appuyée suivant $y=b$.

Figure 4.9 Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ]_{6T}$

f. Influence de l'empilement des couches

L'étude de l'influence de l'empilement des couches permet d'appréhender les phénomènes de couplages entre membrane, flexion, cisaillement et torsion. Divers couplages peuvent être observés et mis en évidence. Le couplage traction – cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26} . Le couplage membrane – flexion résulte des termes B_{11} , B_{12} et B_{22} , alors que le couplage membrane – torsion résulte des coefficients B_{16} et B_{26} . Enfin, le couplage flexion – torsion résulte des termes D_{16} et D_{26} .

Pour cette application, nous considérons une plaque carrée de mêmes caractéristiques géométriques que celles présentées dans la section 4.2.2. Nous étudions les séquences d'empilement suivantes :

- Stratifié croisé symétrique (SCS) $[0^\circ/90^\circ]_4$ pour lequel il n'existe aucun type de couplage ($A_{16}=A_{26}=0$, $B_{ij}=0$, $D_{16}=D_{26}=0$).
- Stratifié croisé antisymétrique (SCAS) $[0^\circ/90^\circ]_4$ qui est caractérisé par la présence de couplage membrane–flexion ($A_{16}=A_{26}=0$, $B_{12}=B_{16}=B_{26}=B_{66}=0$, $D_{16}=D_{26}=0$).
- Stratifié équilibré symétrique (SES) $[45^\circ/-45^\circ]_4$ qui présente un couplage flexion–torsion ($A_{16}=A_{26}=0$, $B_{ij}=0$).
- Stratifié équilibré antisymétrique (SEAS) $[45^\circ/-45^\circ]_4$ qui présente un couplage membrane–torsion ($A_{16}=A_{26}=0$, $B_{11}=B_{22}=B_{12}=B_{66}=0$, $D_{16}=D_{26}=0$).
- Stratifié équilibré quelconque (SEQ) $[0^\circ/30^\circ/45^\circ/60^\circ/0^\circ/-30^\circ/-45^\circ/-60^\circ]$ qui est caractérisé par un couplage membrane–flexion/torsion ($A_{16}=A_{26}=0$).
- Stratifié quelconque (SQ) $[0^\circ/15^\circ/30^\circ/45^\circ/60^\circ/70^\circ/80^\circ/90^\circ]$ où nous avons la présence simultanée de tous les types de couplages.

Les couches des stratifiés étudiés ont les mêmes caractéristiques mécaniques, ces caractéristiques sont typiques à celles du composite Kevlar–epoxyde :

$$E_1=84 \text{ GPa} \quad E_2=5.6 \text{ GPa} \quad G_{12}=2.1 \text{ GPa} \quad \nu_{12}=0.34 \quad \rho=1370 \text{ kg/m}^3$$

D'après les résultats présentés dans la figure 4.10, on constate que la présence simultanée des couplages entre membrane, cisaillement, flexion et torsion réduit la fréquence propre de vibration. Par contre, l'absence des couplages membrane–flexion, flexion–torsion et traction–cisaillement (cas d'un stratifié équilibré antisymétrique), permet d'avoir un comportement plus rigide de la structure. Les résultats montrent également que les

stratifiés symétriques sont plus flexibles que les stratifiés antisymétriques. Cependant, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira une bonne planéité du stratifié après démoulage.

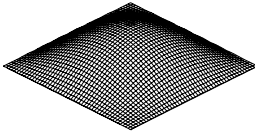
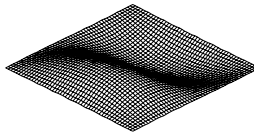
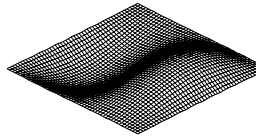
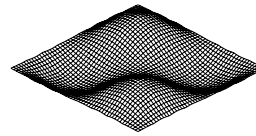
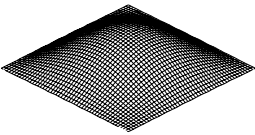
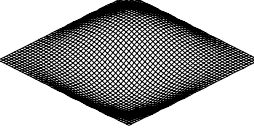
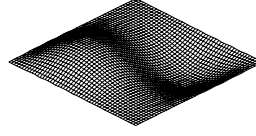
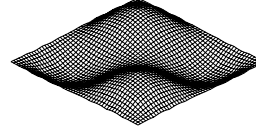
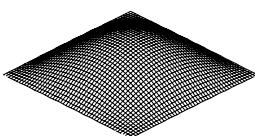
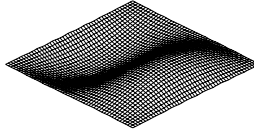
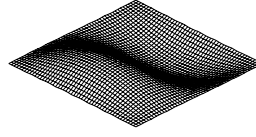
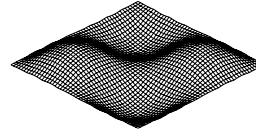
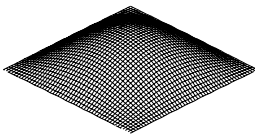
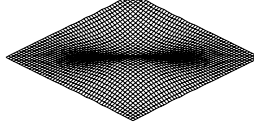
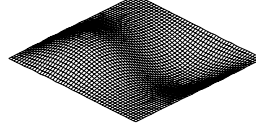
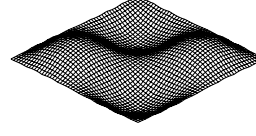
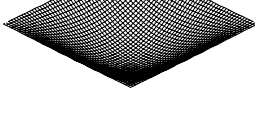
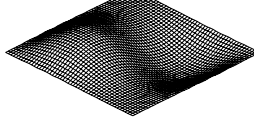
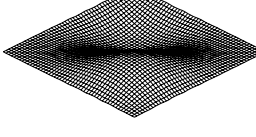
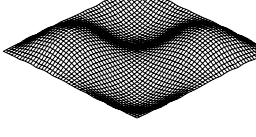
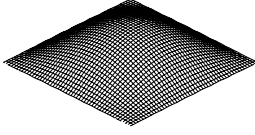
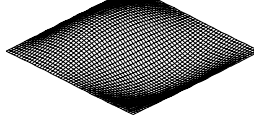
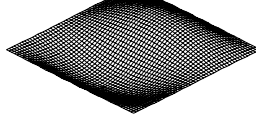
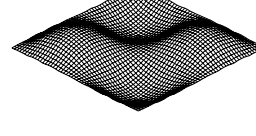
Type de stratifié	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
SEQ	 $\omega=3294 \text{ rd/s}$	 $\omega=6041 \text{ rd/s}$	 $\omega=6725 \text{ rd/s}$	 $\omega=8369 \text{ rd/s}$
SQ	 $\omega=3381 \text{ rd/s}$	 $\omega=5711 \text{ rd/s}$	 $\omega=6178 \text{ rd/s}$	 $\omega=7453 \text{ rd/s}$
SCS	 $\omega=3557 \text{ rd/s}$	 $\omega=6818 \text{ rd/s}$	 $\omega=7196 \text{ rd/s}$	 $\omega=9195 \text{ rd/s}$
SCAS	 $\omega=3594 \text{ rd/s}$	 $\omega=7054 \text{ rd/s}$	 $\omega=7054 \text{ rd/s}$	 $\omega=9244 \text{ rd/s}$
SES	 $\omega=4086 \text{ rd/s}$	 $\omega=7082 \text{ rd/s}$	 $\omega=7273 \text{ rd/s}$	 $\omega=9737 \text{ rd/s}$
SEAS	 $\omega=4102 \text{ rd/s}$	 $\omega=7197 \text{ rd/s}$	 $\omega=7197 \text{ rd/s}$	 $\omega=9755 \text{ rd/s}$

Figure 4.10 Fréquences propres ω et déformées modales d'une plaque carrée avec différentes séquences d'empilement

4.2. Vibration des plaques fissurées

Les plaques traitées dans cette section sont des composites stratifiées à base de fibres unidirectionnelles. Elles sont constituées de plusieurs plis dont les propriétés mécaniques sont les suivantes :

$$E_1 / E_2 = 40 ; G_{12} / E_2 = 0.6 ; G_{23} / E_2 = 0.5 ; \nu_{12} = 0.25$$

Les fréquences naturelles sont normalisées par $\varpi = \omega a \sqrt{\rho / E_2 h^2}$.

4.2.1. Effets de la longueur de la fissure

Dans cette première application, nous considérons une plaque carrée constituée de plusieurs plis orientés suivant $\theta=0^\circ$. La plaque est supposée sur appuis simples et contient une fissure au centre parallèle à la direction longitudinale x , le rapport h/a est pris égal à 0.001.

L'influence de la longueur de la fissure sur les fréquences fondamentales est examinée. Les dix premières fréquences adimensionnelles sont calculées en fonction du rapport c/a et sont reportées sur les tableaux 4.4 et 4.5. Pour plus de clarté, elles sont classées par modes symétriques et antisymétriques.

Tableau 4.4. Fréquences normalisées ϖ d'une plaque composite carrée sur appuis simples avec une fissure au centre $h/a=0.001$

c/a	Modes symétriques en x symétriques en y .			modes antisymétriques en x , symétriques en y	
	Mode 1	Mode 3	Mode 7	Mode 5	Mode 8
0.0	18.89	34.58	77.77	72.84	81.83
0.2	18.87	34.02	75.93	72.84	81.82
0.4	18.82	32.63	71.95	72.83	81.67
0.6	18.75	31.08	68.43	72.81	81.18
0.8	18.68	29.95	66.36	72.77	80.46
1.0	18.66	29.55	65.67	72.75	80.07

Tableau 4.5. Fréquences normalisées ϖ d'une plaque composite carrée sur appuis simples avec une fissure au centre $h/a=0.001$

c/a	modes symétriques en x antisymétriques en y .			modes antisymétriques en x , antisymétriques en y	
	Mode 2	Mode 4	Mode 10	Mode 6	Mode 9
0.0	23.44	52.76	109.30	75.55	93.58
0.2	23.44	52.71	109.10	75.55	93.58
0.4	23.39	52.00	105.12	75.54	93.54
0.6	23.18	48.76	87.81	75.51	93.13
0.8	22.59	41.25	72.86	75.34	91.25
1.0	19.93	31.03	66.69	74.18	83.17

On observe que les fréquences décroissent avec l'augmentation du rapport c/a . Les modes les plus affectés par la présence de la fissure sont les modes symétrique en x et antisymétrique en y . Par contre, une légère dégradation est observée dans les valeurs des modes antisymétriques en x et symétriques en y , signifiant une petite dégradation dans la rigidité de la plaque.

La figure 4.11 montre les cinq premiers modes de déformations en fonction du rapport c/a . Comparativement au cas isotrope, un changement dans l'ordre du classement de ces modes est remarqué, il y a prédominance des modes symétrique en x sur les cinq premières valeurs. La fissure est bien visible sur les modes antisymétriques en y , mais son amplitude est moins faible que celle de la plaque isotrope.

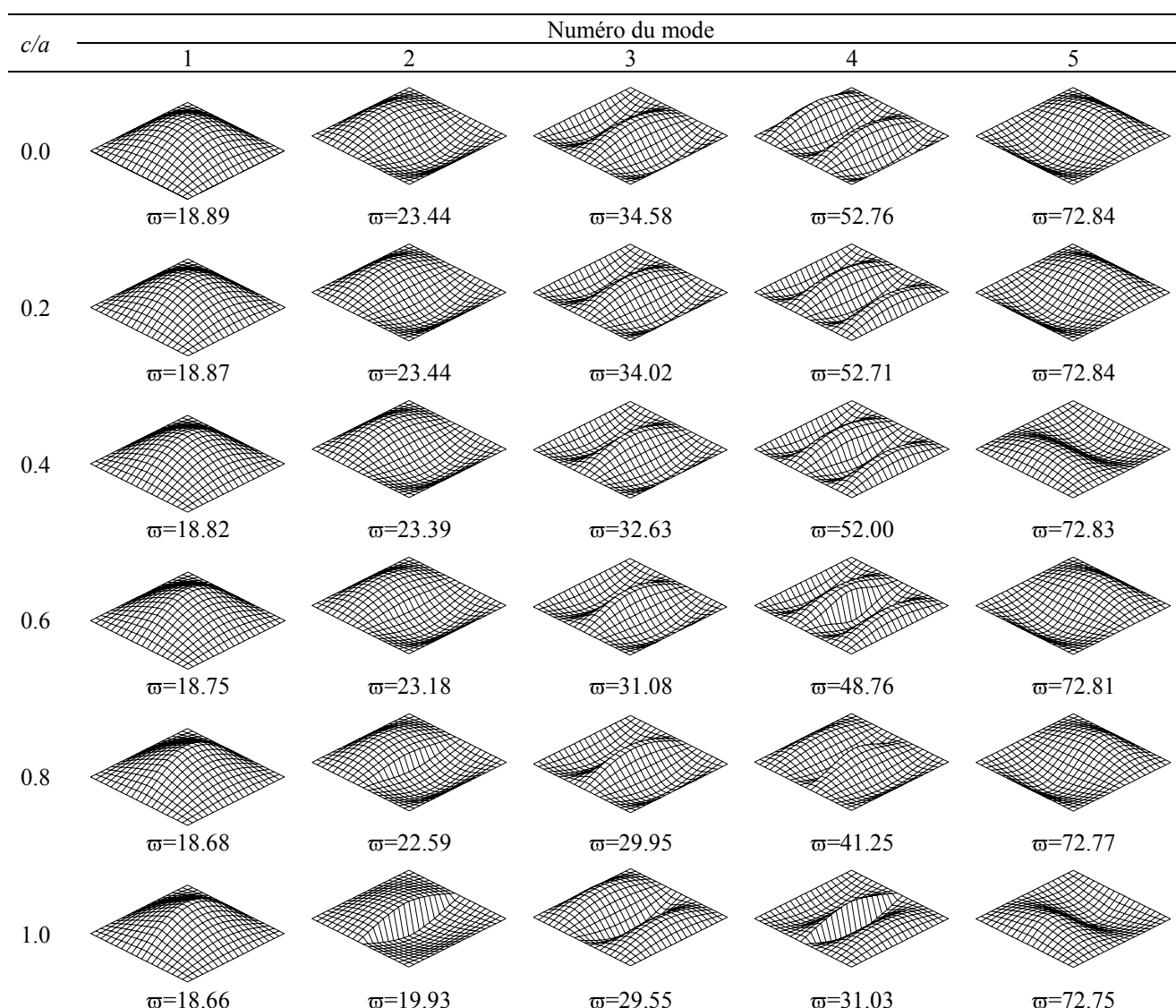


Figure 4.11. Déformées modales des cinq premiers modes d'une plaque composite carrée sur appuis simples avec une fissure au centre $h/a=0.001$



4.2.2. Effets de l'anisotropie du matériau

Dans cette section, l'effet de l'anisotropie du matériau E_1/E_2 sur les fréquences fondamentales est examiné. Des valeurs E_1/E_2 variant entre 1 et 40 sont considérées, les fibres de la plaque sont toujours orientées suivant l'axe x ($\theta=0^\circ$).

Les résultats obtenus en fonction du rapport E_1/E_2 pour différentes valeurs de c/a sont présentés sur la figure 4.12. Ces résultats sont relatifs à la première valeur des modes : symétrique en x – symétrique en y , symétrique en x – antisymétrique en y , antisymétrique en x – symétrique en y et antisymétrique en x – antisymétrique en y .

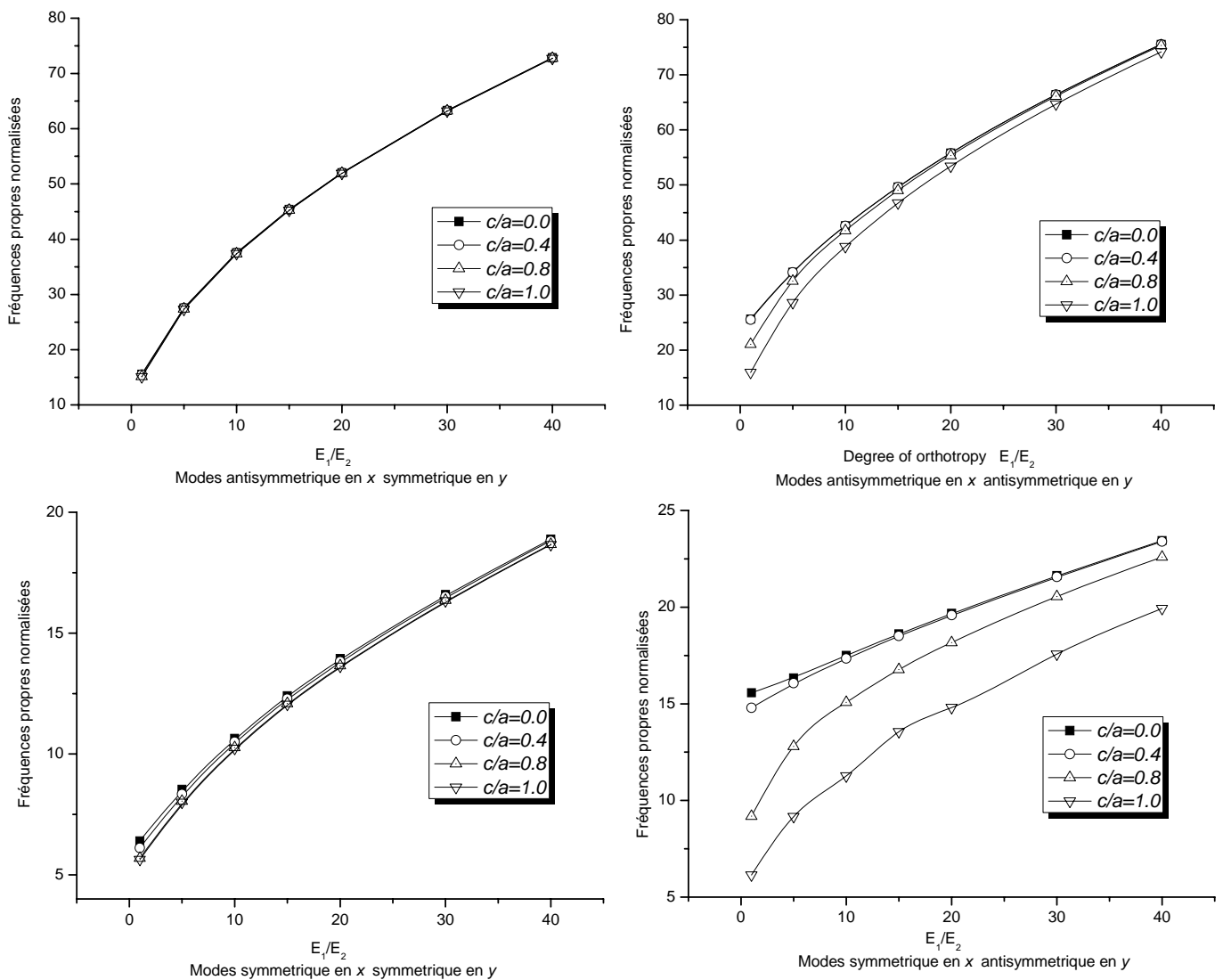


Figure 4.12. Fréquences naturelles normalisées en fonction du degré de l'anisotropie

Les graphes de la figure 4.12 montrent que les fréquences augmentent avec l'augmentation du degré de l'anisotropie du matériau. La présence de la fissure réduit les fréquences fondamentales. Les modes antisymétriques en y sont les plus affectés, beaucoup plus le mode symétrique en x et antisymétrique en y , le mode antisymétrique en x et symétrique en y est le moins affecté, ces constatations confirment les résultats de l'application précédente.

4.2.3. Effets de l'orientation des fibres

On étudie ici l'effet de l'orientation des fibres θ sur la fréquence fondamentale, pour cette application. Le rapport E_1/E_2 est pris égale à 40 (fortement anisotrope). La variation de la fréquence fondamentale normalisée en fonction de la direction des fibres est tracée sur la Figure 4.13. Les résultats sont calculés et tracés pour différentes valeurs du rapport c/a .

On observe à partir du graphe de la figure que pour tous les rapports c/a considérés et à l'exception du cas où la plaque est saine, la fréquence fondamentale décroît avec l'accroissement de l'angle θ et le rapport c/a . Le stratifié devient moins rigide lorsque la fissure est perpendiculaire à la direction des fibres. La fréquence est considérablement affectée par le rapport c/a , elle chute de plus de 70% de sa valeur initial quand la fissure occupe toute la longueur de la plaque, par contre, elle ne subit pas un grand changement lorsque la fissure est parallèle à la direction des fibres (environ 1.2%).

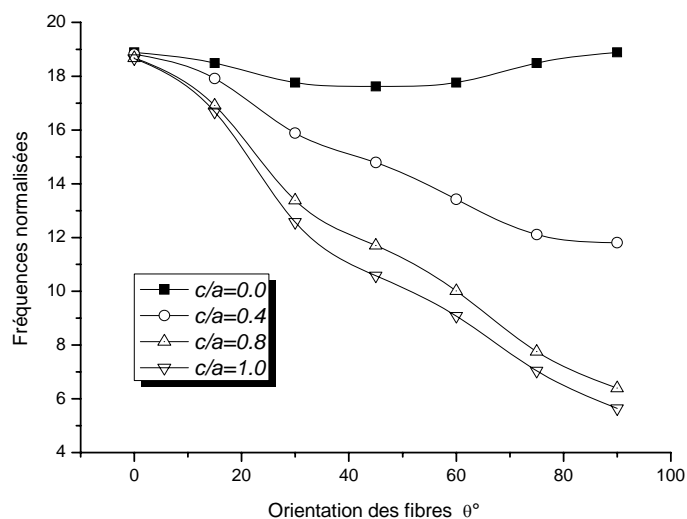


Figure 4.13. Fréquences naturelles normalisées en fonction du degré de l'orientation des fibres θ

4.2.4. Influences du changement de l'épaisseur

Nous examinons dans cette section l'effet du rapport épaisseur/longueur de la plaque (h/a) sur les fréquences fondamentales. Quatre types de stratifiés sont considérés : stratifié croisé symétrique $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, stratifié croisé antisymétrique $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$, stratifié équilibré symétrique $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$, stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$. Ces quatre stratifiés sont généralement les plus utilisés en pratique. Nous étudions le cas d'une plaque carrée sur appuis simples et contenant une fissure au centre, les rapports c/a considérés sont 0.0, 0.4 et 0.8. Les propriétés mécaniques du matériau utilisé sont :

$$E_1 / E_2 = 40 \quad G_{12} / E_2 = 0.6 \quad G_{23} / E_2 = 0.5 \quad \nu_{12} = 0.25$$

Sur le tableau 4.6 sont présentés les résultats obtenus par notre code de calcul dans le cas d'un stratifié croisé symétrique sans fissure. Pour des raisons de comparaison, on reporte aussi les résultats obtenus par d'autres chercheurs [50]. Les fréquences sont normalisées par l'expression $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$. Nos résultats sont en bonne concordance en les comparant avec ceux de Srinivas [50] utilisant une théorie d'ordre élevé. Par contre, un écart très important est observé sur les fréquences des plaques ayant un rapport h/a supérieur à 0.1 en comparant les présents résultats avec ceux obtenus par la théorie classique des plaques laminées (TCPL) où les déformations en cisaillement transverse sont négligeables.

Tableau 4.6. Comparaison des fréquences normalisées ϖ d'une plaque carrée en stratifié croisé symétrique $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

h/a	Présente	Srinivas [50]	TCPL [50]	Erreur %
0.5	5.500	5.306	15.902	3.53
0.2	10.854	10.675	18.299	1.65
0.1	15.142	15.066	18.738	0.50
0.05	17.659	17.634	18.853	0.14
0.04	18.071	18.054	18.867	0.09
0.02	18.674	18.669	18.885	0.03
0.01	18.836	18.834	18.890	0.01

Sur la figure 4.14 on montre la variation de la première fréquence normalisée $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$ en fonction du rapport h/a pour les différents rapports c/a . On observe que la fréquence fondamentale normalisée décroît lorsque le rapport h/a augmente, cette observation s'applique sur tous les rapports c/a considérés. On observe aussi que le stratifié croisé antisymétrique est le plus affecté par la présence de la fissure, beaucoup plus pour les rapports h/a faibles (cas des plaques minces). Par contre, la fissure n'a pas un grand

effet sur la fréquence fondamentale normalisée des stratifiées équilibrés relativement épaisses ($h/a > 0.4$). Une autre observation concerne la vitesse de décroissance des fréquences normalisées. En fonction du rapport h/a on peut distinguer deux régions caractérisant cette décroissance, une région limitée par des rapports h/a inférieurs à 0.2. Dans cette région, le taux de dégradation est plus grand que celui de la deuxième région caractérisée par des rapports h/a supérieurs à 0.2. Ces taux sont environ 100% et 70% respectivement pour la région 1 et la région 2.

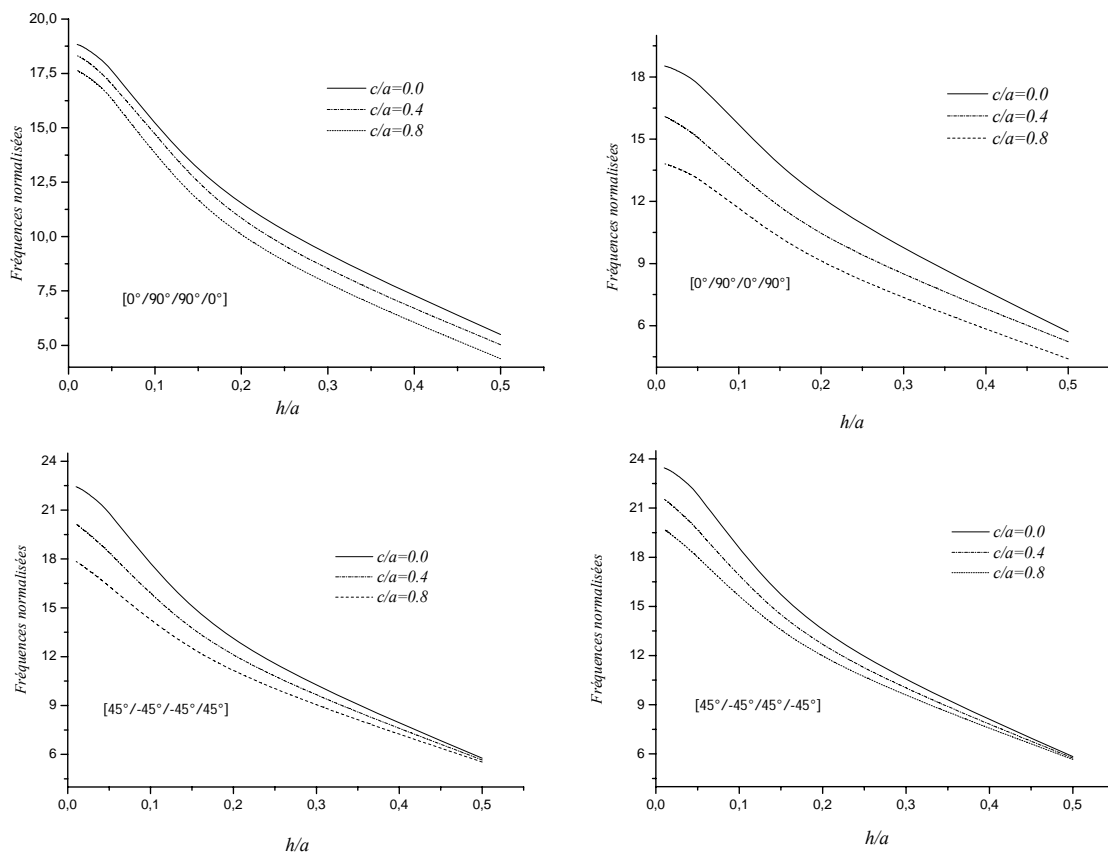


Figure 4.14. Fréquences naturelles normalisées en fonction du rapport h/a

4.2.5. Influences de la position de la fissure

Nous considérons dans cette section le cas où la fissure est parallèle à l'un des côtés d'une plaque carrée sur appuis simples et nous étudions l'influence de sa position par rapport au bord libre de la plaque sur les fréquences fondamentales. On définit la quantité sans dimensions l/a caractérisant le rapport entre la mesure de la position de la fissure par rapport au bord de la plaque l (figure 4.15) et la longueur de la plaque a . Le rapport c/a est

pris égal à 0.4. Nous examinons trois types de stratifiés ; stratifié équilibré antisymétrique $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$, stratifié croisé antisymétrique $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ et stratifié avec séquence d'empilement $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$.

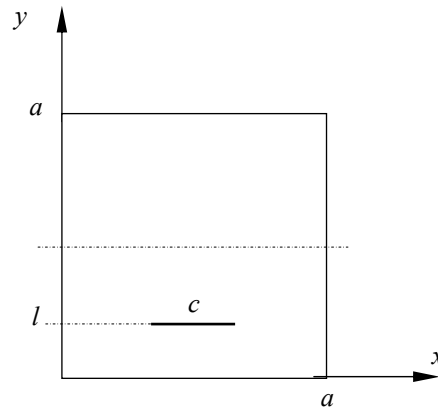


Figure 4.15. Plaque avec fissure interne parallèle à l'axe x

Les fréquences fondamentales normalisées $\varpi = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ en fonction du rapport l/a sont dressées sur le tableau 4.7. Les résultats obtenus ont été calculés pour des valeurs h/a égaux à 0.1 et 0.01. On peut remarquer à partir de ce tableau que les fréquences normalisées décroissent avec l'accroissement du rapport l/a . le stratifié croisé est le plus affecté par la position de la fissure, la fréquence normalisée chute de 10.25% dans le cas de $h/a= 0.1$ et de 8.85% lorsque h/a est égal 0.01. Il est aussi remarqué que la position de la fissure n'a pas de grand effet sur les fréquences lorsque les plis sont orientés suivant la direction longitudinale x.

Tableau 4.7. Fréquences normalisées ϖ en fonction de la position de la fissure

l/a	h/a	$[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$		$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$		$[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	
		0.01	0.1	0.01	0.1	0.01	0.1
0.5		21.55	16.79	16.09	13.33	18.75	14.57
0.4		21.63	16.76	16.20	13.41	18.76	14.58
0.3		21.84	16.70	16.55	13.62	18.77	14.60
0.2		22.13	16.64	17.13	14.00	18.80	14.63
0.1		22.49	16.73	17.74	14.51	18.81	14.66

Chapitre 5

Réponses à l'impact des plaques fissurées

Dans ce chapitre, le comportement au choc des plaques fissurées est traité. L'équation caractéristique est identique à celle utilisée dans l'analyse vibratoire, mais avec un terme supplémentaire qui tien en compte de la force de l'impact. Un développement de la formulation mathématique est présenté au début du chapitre. Des cas de plaques fissurées isotropes et composites sont par la suite traités.

5.1. Description du processus de contact

L'analyse de contact entre les solides est très délicate à mettre en œuvre du fait que les paramètres qui rentrent en jeu sont difficilement maîtrisable. On cite :

- Formes et état des surfaces en contact;
- Répartition des efforts en contact;
- Vitesses relatives;
- Conditions aux limites.

On distingue deux types de contact:

- Contact linéique ou ponctuel: dans le cas où le contact se fait selon une petite surface.
- Contact surfacique: dans le cas où le contact se fait suivant une surface importante.

5.2. Calcul de la force de contact

La réponse dynamique due au choc est étudiée avec la considération des hypothèses suivantes:

- (i) négliger les frottements entre les surfaces en contact (l'impacteur et la plaque),
- (ii) négliger l'effet d'amortissement de la plaque et
- (iii) l'impacteur est supposé un corps rigide avec des propriétés isotropes.

L'équation dynamique de la plaque en négligeant l'effet d'amortissement est donnée par:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \tag{5.1}$$

où $[M]$ et $[K]$ sont respectivement, la matrice de masse et la matrice de rigidité globale de la plaque. $\{u\}$ et $\{\ddot{u}\}$ sont respectivement, le vecteur de déplacement et de l'accélération. $\{F\}$ est la force extérieure équivalente. Elle est donnée par:

$$\{F\} = \{0,0,0, \dots, F_c, 0,0, \dots\}^T \tag{5.2}$$

où, F_c est la force de contact.

L'élément de Lagrange à 9-nœuds est utilisé dans la discrétisation par éléments finis. Le déplacement de chaque nœud possède cinq degrés de liberté indépendants $(u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})$.

L'équation dynamique de l'impacteur est donnée par:

$$F_c = -m_p \ddot{w}_p \tag{5.3}$$

où m_p est la masse de l'impacteur. Le signe (-) indique que la force de contact est appliquée dans le sens contraire du déplacement de l'impacteur. Les figures (5.1) et (5.2) décrivent le phénomène du choc entre les deux structures.

Le déplacement et la vitesse initiale de l'impacteur au moment du contact avec la plaque sont $\dot{w}_p = v_0$ et $w_p = 0$.

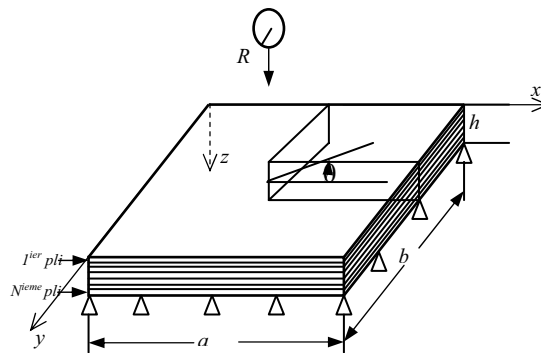


Figure 5.1 : Description de phénomène de choc

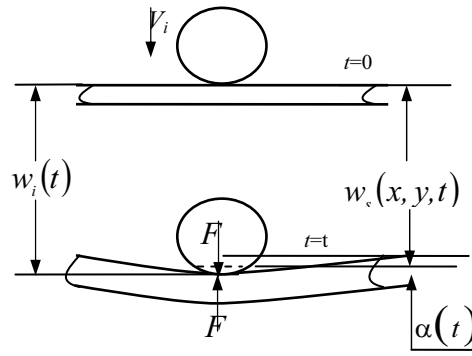


Figure 5.2 : Schématisation de phénomène de choc,
 (a) Juste avant contact,
 (b) Après contact.

Afin de résoudre les équations (5.1) et (5.3), la force de contact doit être connue. Cette force, appliquée au centre de la plaque, est calculée par l'utilisation de la loi de contact de Hertz modifiée pour la phase de chargement. Pour la phase de déchargement, elle est calculée à partir des relations de Tan et Sun [52]. Ces lois sont données par:

$$F_c = \begin{cases} k\alpha^{3/2} & \text{Pour le chargement} \\ F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q & \text{Pour le déchargement} \end{cases} \quad (5.4)$$

où q est une constante expérimentale et k une constante élastique dépendant des propriétés mécaniques et géométriques des solides en contact (appelée constante de hertz modifiée). F_m représente la force maximale de contact avant la phase de déchargement, α_m l'indentation maximale et α_0 est l'indentation permanente causée par l'impacteur dans la plaque, définie comme suit :

$$\alpha_0 = \begin{cases} \beta(\alpha_m - \alpha_{cr}) & \text{if } (\alpha_m > \alpha_{cr}) \\ 0 & \text{if } (\alpha_m \leq \alpha_{cr}) \end{cases} \quad (5.5)$$

où β est une constante expérimentale et α_{cr} est l'indentation critique.

Diverses techniques analytiques et expérimentales pour la détermination de k ont été proposées dans la littérature. Dans le cas d'un stratifié à base de fibres, k est définie comme suit [53,54,55] :

$$k = \frac{4}{3} \frac{R^{1/2}}{\left[\frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1}{E_2} \right]} \quad (5.6)$$

par R , ν_i et E_i on note respectivement, le rayon, le coefficient de poisson, et le module de Young de l'impacteur. E_2 est le module de Young transversal de la plaque (pièce impactée).

L'indentation α est définie comme étant la différence entre le déplacement de l'impacteur et le déplacement du point de contact de la plaque (Figure 5.1). Elle est donnée par la relation suivante:

$$\alpha(t) = w_i(t) - w_s(t) \quad (5.7)$$

où $w_i(t)$ et $w_s(t)$ sont respectivement, le déplacement de l'impacteur et le déplacement du point de contact à la surface moyenne.

A l'instant $(n+1)$, les deux équations (5.1) et (5.3) deviennent:

$$F_{c(n+1)} = -m_i \ddot{w}_{i(n+1)} \quad (5.8)$$

$$[M]\{\ddot{u}_{(n+1)}\} + [K]\{u_{(n+1)}\} = \{F_{(n+1)}\} \quad (5.9)$$

Ces deux équations sont couplées, leur résolution peut être faite par intégration numérique.

5.3. Solution des équations d'équilibres dans l'analyse dynamique

La résolution des équations dynamiques couplées non linéaires de la plaque et de l'impacteur est possible par le biais des méthodes numériques. Plusieurs algorithmes d'intégration dans le temps sont proposés dans la littérature afin de surmonter la difficulté précédente. Parmi ces algorithmes on cite, l'algorithme de Rung-Kutta, les algorithmes multipas, les algorithmes de Newmark et de Wilson- θ .

5.3.1 Algorithme de Newmark

En 1959, Newmark a proposé l'algorithme le plus populaire pour la résolution des problèmes de la dynamique des structures. Dans cet algorithme, les interpolations relient les positions, les vitesses, et les accélérations de l'étape n à l'étape $n+1$. Ces paramètres à l'étape $n+1$ sont donnés par:

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t (1 - \gamma) a_n + \gamma a_{n+1} \quad (5.11)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1}] \quad (5.12)$$

où x_n , v_n et a_n sont respectivement les vecteurs, positions, vitesses, et accélérations à l'étape n . Δt est l'incrément du temps. β et γ sont des paramètres qui dépendent de la méthode utilisée. Cette méthode est implicite, sa stabilité est garantie pour $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$, elle est inconditionnellement stable pour un pas du temps Δt quelconque. Les équations dynamiques (5.8) et (5.9) peuvent être résolues avec x_{n+1} en tant qu'inconnues primaires, en substituant a_{n+1} et v_{n+1} en termes de x_n, v_n, a_n et x_{n+1} , les équations (5.10) et (5.11) peuvent être alors écrites comme suit:

$$a_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} v_n - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) a_n \quad (5.12)$$

$$v_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (x_{n+1} - x_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) v_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t a_n \quad (5.13)$$

Pour résoudre l'équation de l'impacteur on pose: $\ddot{w}_{p(n+1)} = a_{n+1}$, et en substituant l'équation (5.12) dans l'équation (5.8), on aura:

$$m_i \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} (w_{i(n+1)} - w_{i(n)}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{w}_{i(n)} - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{w}_{i(n)} \right] = -F_{c(n+1)} \quad (5.14)$$

De cette dernière équation on tire:

$$w_{i(n+1)} = w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)} - \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} F_{c(n+1)} \quad (5.15)$$

A l'étape $(n+1)$ la force de contact pour la phase de chargement est donnée par la première relation de l'équation (5.4), et α est donnée par la relation (5.7). En substituant (5.15) dans (5.7), on abouti à :

$$\alpha = \left(w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)} - \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} \right) \quad (5.16)$$

on remplace (5.16) dans la première relation de (5.4), on obtient l'expression de la force de contact dans la phase de chargement:

$$F_{c(n+1)} = K \left(w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)} - \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} \right)^{3/2} \quad (5.17)$$

Posons,

$$q_1 = w_{i(n)} + \Delta t \dot{w}_{i(n)} + \beta \Delta t^2 \left(-1 + \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{w}_{i(n)}, \quad q_2 = \frac{\beta \Delta t^2}{m_i} \quad (5.18)$$

La relation (5.17) devient :

$$F_{c(n+1)} = K \left(q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} \right)^{3/2} \quad (5.19)$$

Pour la phase de déchargement et à l'étape $(n+1)$, la force de contact est donnée par:

$$F_{c(n+1)} = K_1 \left(q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} - \alpha_0 \right)^q \quad (5.20)$$

avec,

$$K_1 = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_0)^q} \quad (5.21)$$

Les deux équations (5.19) et (5.20) sont des équations non linéaires, et leurs résolutions nécessitent l'utilisation des méthodes itératives telle que la méthode de Newton-Raphson.

5.3.2 Méthode de Newton Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative qui consiste à trouver la solution de l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la forme de la solution suivante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (5.22)$$

Pour la phase de chargement la relation (5.19) de la force de contact peut être écrite sous la forme :

$$G(F_{c(n+1)}) = F_{c(n+1)} - K \left(q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} \right)^{3/2} = 0 \quad (5.23)$$

D'après la relation (5.22), la solution de l'équation (5.23) peut être donnée par:

$$F_{c(n+1)} = F_{c(n)} - \frac{G(F_{c(n)})}{G'(F_{c(n)})} \quad (5.24)$$

Avec;

$$G(F_{c(n)}) = F_{c(n)} - K(q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{3/2} \quad (5.25)$$

et;

$$G'(F_{c(n)}) = 1 + \frac{3}{2} K q_2 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{1/2} \quad (5.26)$$

En substituant (5.25) et (5.26) dans (5.24) on aboutit à:

$$F_{c(n+1)} = F_{c(n)} - \frac{F_{c(n)} - K(q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{3/2}}{1 + \frac{3}{2} K q_2 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)})^{1/2}} \quad (5.27)$$

Pour la phase de déchargement la relation (5.20) peut être écrite sous la forme suivante:

$$H(F_{c(n+1)}) = F_{c(n+1)} - K_1 (q_1 - q_2 F_{c(n+1)} - w_{s(n+1)} - \alpha_0)^q = 0 \quad (5.28)$$

De même que pour la phase de chargement, la force de contact pour la phase de déchargement est donnée par:

$$F_{c(n+1)} = F_{c(n)} - \frac{F_{c(n)} - K_1 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)} - \alpha_0)^{3/2}}{1 + q K q_2 (q_1 - q_2 F_{c(n)} - w_{s(n)} - \alpha_0)^{q-1}} \quad (5.29)$$

5.4. Applications numériques

5.4.1. Plaque isotrope

Dans cette section, le modèle d'une plaque fissurée soumise à une force d'impact appliquée sur son centre est étudié. La fissure de longueur a est orientée suivant l'axe des x et est distante de b par rapport au centre de la plaque (Figure 5.3). Les paramètres adimensionnels utilisés ici sont $\bar{a} = a/l$, $\bar{b} = b/L$, et $\bar{c} = c/l$, où les côtés dimensionnels l , L et c sont indiqués sur la figure 5.3. Des études paramétriques tenant compte la longueur de la fissure et sa position sont effectuées.

$\bar{a} = a/l$: Rapport longueur de la fissure -longueur de la plaque

$\bar{b} = b/l$: Rapport position de la fissure suivant y -longueur de la plaque

$\bar{c} = c/l$: Rapport position de la fissure suivant x -longueur de la plaque

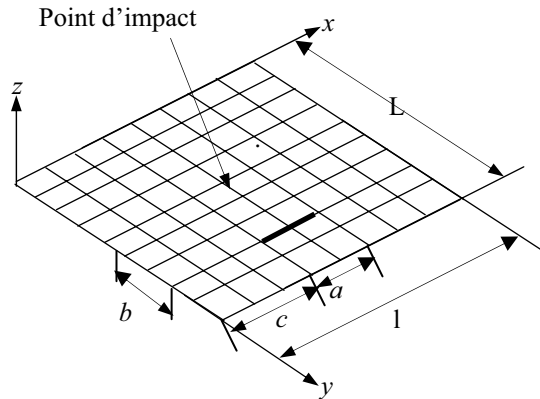


Figure 5.3. Caractéristiques géométriques d'une fissure placée dans une plaque

a. Effets de la longueur de la fissure

Considérons une plaque carrée de dimensions latérales 20x20 (cm) et d'épaisseur 8 mm. La plaque est supposée encastree sur ses quatre côtés. Une force d'impact est appliquée sur son centre dont la vitesse d'impact est de 5m/s.

Les propriétés mécaniques de la plaque utilisée sont $E=67GPa$, $\nu=0.33$ et $\rho=2800Kg.m^{-3}$, celles de l'impacteur $E=200GPa$, $\nu=0.3$, $\rho=7800Kg.m^{-3}$ et $r=12.5mm$

Sur les figures 5.4 et 5.5, on montre respectivement les variations, de la force de contact et de la déflexion au centre de la plaque en fonction de la longueur de la fissure. Il est observé à partir de ces deux figures que lorsque la longueur de la fissure augmente, la force de contact décroît alors que la déflexion au centre de la plaque augmente. Aussi, on peut observé à partir de la figure 5.3 que, la variation de la force de contact F_c en fonction du rapport \bar{a} , et pour différents rapports \bar{b} , passe par trois zones différentes; une zone où la force F_c reste constante malgré que le rapport \bar{a} augmente, signifiant que la fissure n'as pas d'influence sur la force de contact. Cette zone est située dans l'intervalle $0 \leq \bar{a} \leq 0.1$. La deuxième zone, limitée par des valeurs de \bar{a} entre 0.1 et 0.15, est caractérisée par une nette décroissance de la force de contact en fonction du rapport de la fissure. Dans cette zone, la plaque perde considérablement sa rigidité. Dans la troisième zone, la force de

contact varie d'une manière très lente en fonction de \bar{a} . Ces observations s'appliquent aussi sur la variation de la déflexion au centre de la plaque lorsqu'on examine la figure 5.5.

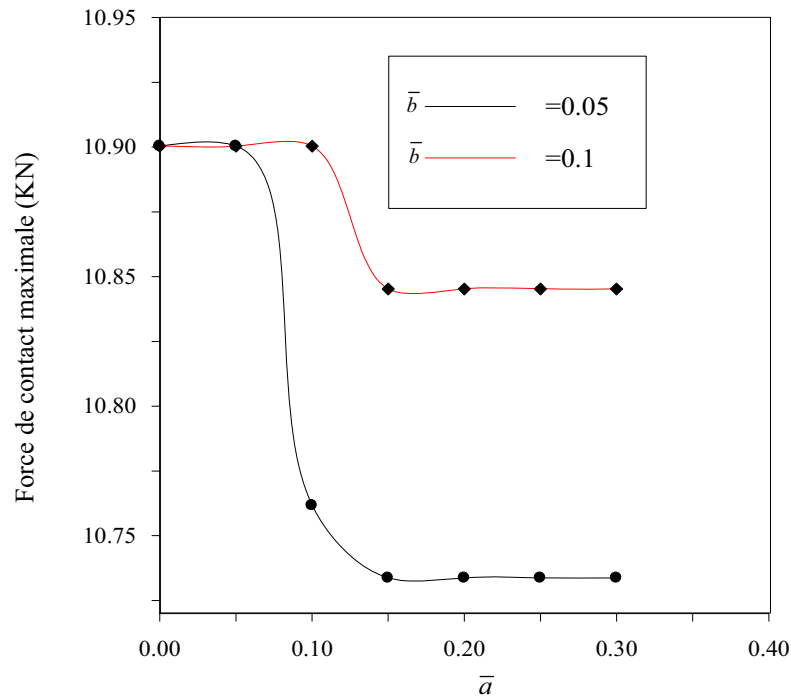


Figure 5.4 Force de contact maximale pour deux positions de fissure

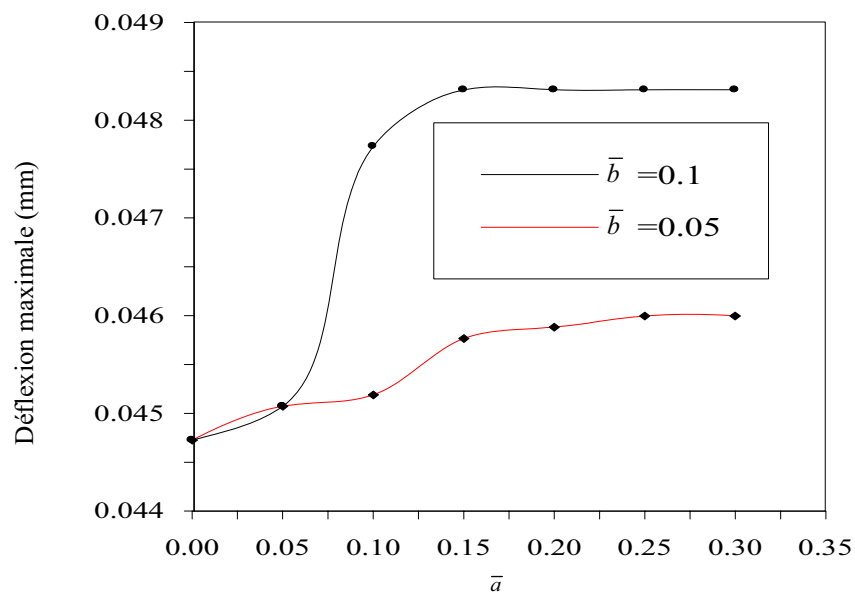


Figure 5.5 Déflexion centrale maximale pour deux positions de fissure

b. Effets de la position de la fissure

b.1. Effets du rapport de la position \bar{b}

la variation de la force de contact et la déflexion centrale en fonction du temps est illustrée pour différentes valeurs du rapport de la position suivant $y \bar{b}$. Referons à la figure 5.6, la présence d'une fissure symétrique affecte légèrement la force de contact pour un rapport \bar{b} inférieur à 0.1. Quand \bar{b} est supérieur à 0.1, il n'y a aucun effet significatif sur la force de contact. Cependant, pour un rapport inférieur à 0.3, un effet significatif sur la déflexion au centre est observé (figure 5.7).

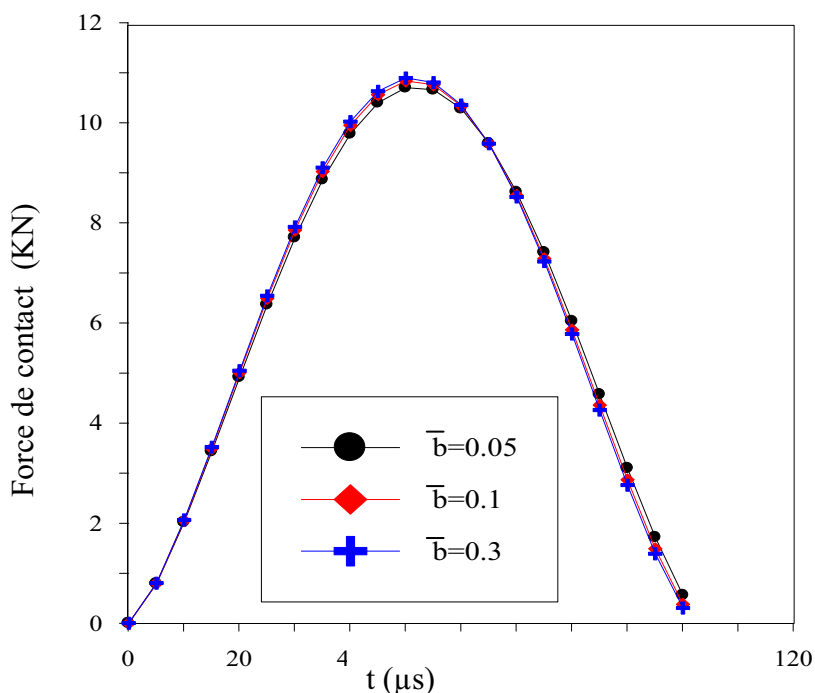


Figure 5.6 Force de contact pour $\bar{a}=0.2$ et $\bar{c}=0.4$

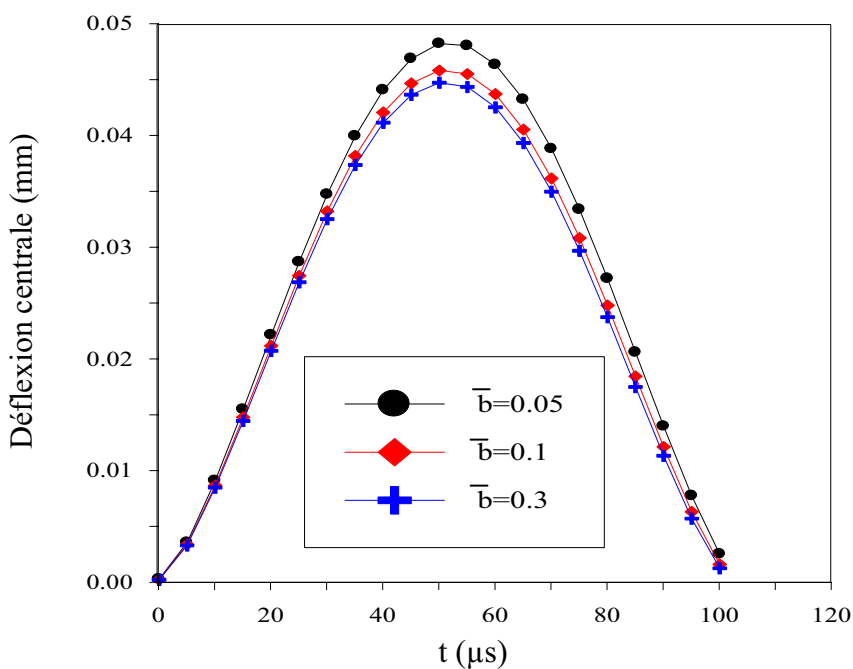


Figure 5.7 Déflexion centrale pour $\bar{a}=0.2$ et $\bar{c}=0.4$

b.2. Effets du rapport de la position \bar{c}

La figure 5.8 montre la déflexion centrale en fonction de la position de la fissure suivant x \bar{c} . On peut observer à partir de cette figure que la déflexion central avec l'augmentation du rapport de position \bar{c} . Ceci peut être expliqué par le fait que la déflexion centrale augmente quand la position de la fissure est proche de la zone d'impact.

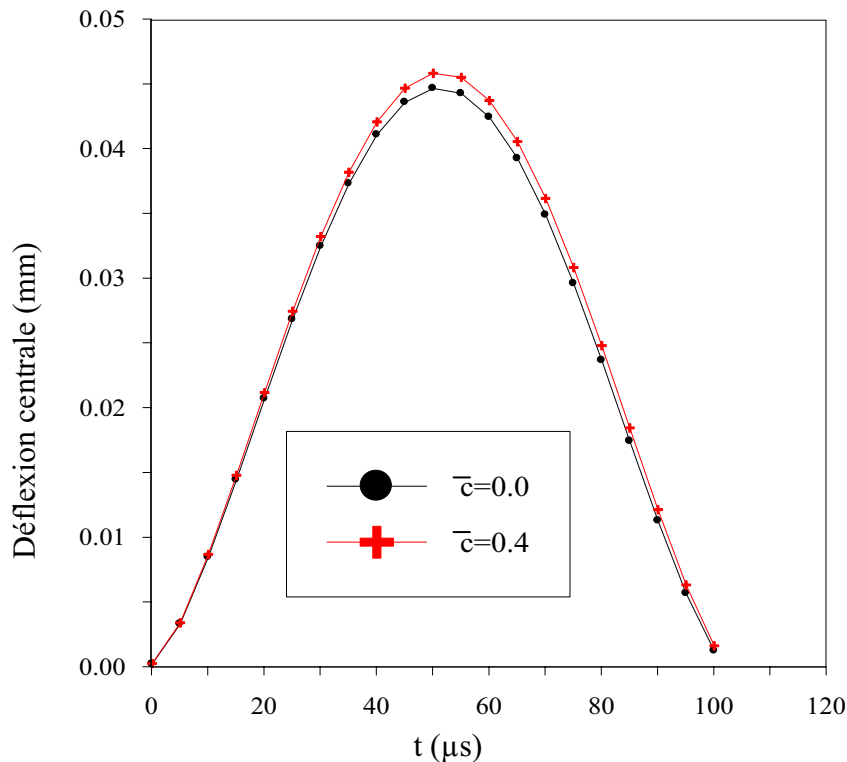


Figure 5.8 Déflexion centrale pour $\bar{a}=0.2$ et $\bar{b} = 0.1$

5.4.2. Plaque composite

Nous considérons maintenant le cas où la plaque fissurée est fabriquée en matériau composite. La fissure de longueur a se prolonge suivant les deux directions x et y .

Les dimensions de la plaque sont 200x200x4.65 (mm), ses propriétés mécaniques sont : $E_1=129GPa$, $E_2=7.5GPa$, $G_{12}=3.5GPa$, $\nu_{12}=0.33$ et $\rho=1540Kg.m^{-3}$, l'orientation des fibres est suivant la direction de l'axe x . La plaque est frappée sur son centre par une balle sphérique avec une vitesse de 5m/s. Les propriétés mécaniques et géométriques de la balle sont $E=207GPa$, $\nu=0.3$, $\rho=7800Kg.m^{-3}$ et $r=12.7$.

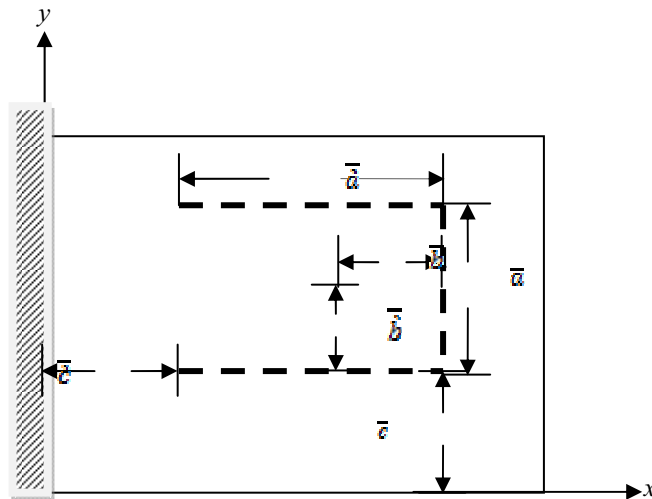


Figure 5.9. Plaque avec plusieurs fissures

Les quantités adimensionnelles $\bar{a} = a/l$, $\bar{b} = b/L$ et $\bar{c} = c/l$ définies dans la section précédente sont examinées dans cette section.

a. Effets de la longueur de la fissure

La plaque est supposée encastree sur ses quatre cotes. Une force d'impact est appliquee sur son centre dont la vitesse d'impact est de 5m/s. On suppose que la fissure est orientee suivant la direction encastree ($x=0$).

Les figures 5.10 et 5.11 illustrent la variation de la force de contact et la deflexion maximale au centre de la plaque en fonction du temps et pour differents rapports de fissure. A partir de ces deux figures, on peut observer que la force de contact est tres importante dans le cas ou la plaque est saine ($\bar{a} = 0$) que celle lorsque la plaque est fissuree ($\bar{a} = 0.8$). Il est aussi observe que la deflexion augmente avec l'accroissement de la longueur de la fissure. Cependant, la duree de contact est plus petite pour une plaque sans fissure que pour une plaque avec fissure. Ceci peut etre explique par le fait que la plaque sans fissure a plus d'energie pour compenser le phenomene de chargement.

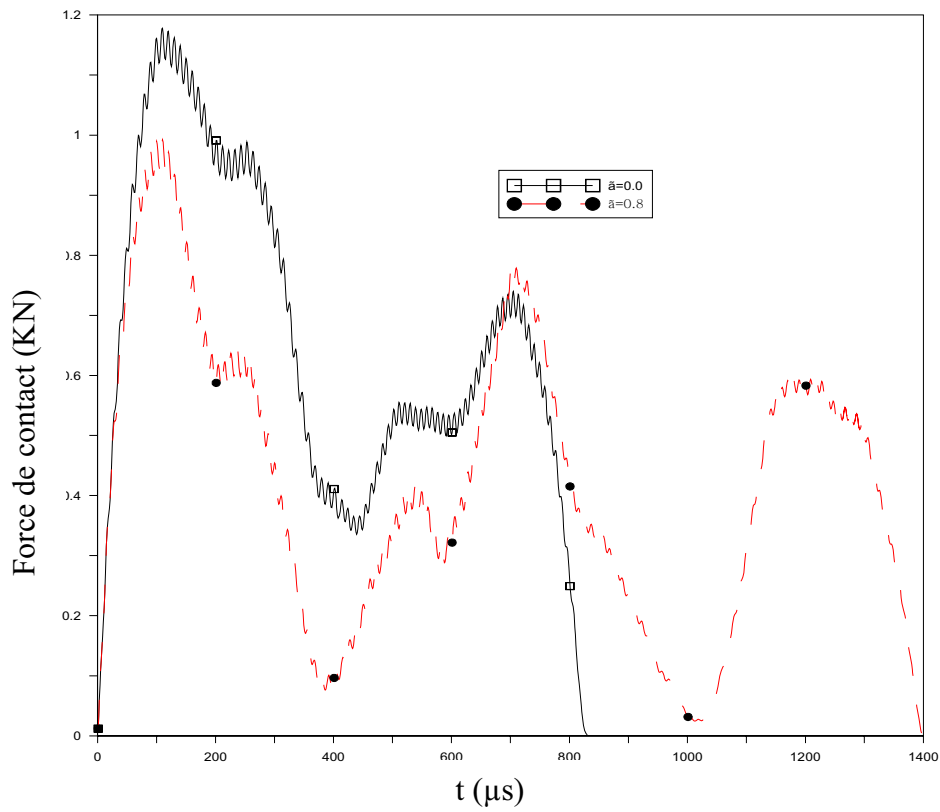


Figure 5.10 Force de contact pour $\bar{b} = 0.1$

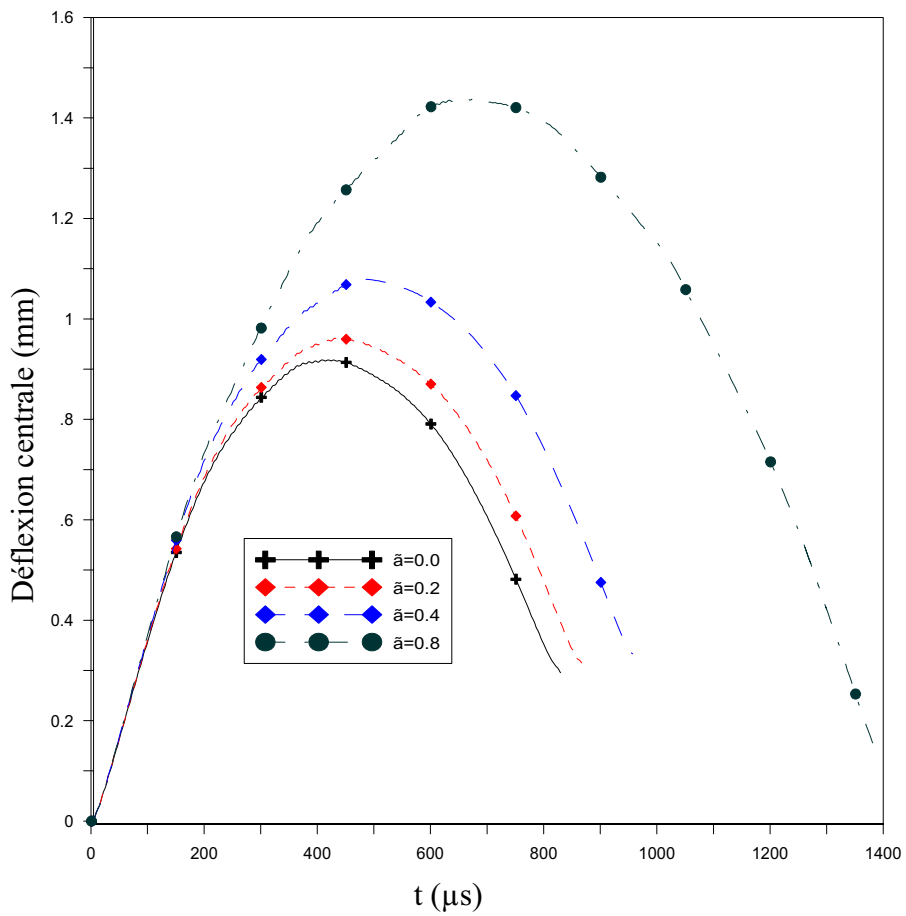


Figure 5.11 Déflexion centrale pour $\bar{b} = 0.1$

b. Effet des conditions aux limites

Une vitesse d'impact faible est utilisée (5 m/s) pour démontrer l'effet des conditions aux limites sur le comportement dynamique des plaques composites fissurées ($\bar{a} = 0.4$, $\bar{b} = 0.1$). Les paramètres utilisés dans la loi d'indentation entre la balle rigide et la plaque sont : $q = 2.5$, $\beta = 0.094$, $\alpha_{cr} = 1.7 \times 10^{-4} m$. Les figures 5.12 et 5.13 montrent les variations de la force de contact et la déflexion maximale en fonction du temps. Aucun changement significatif n'est observé sur la force de contact et la déflexion lorsque les conditions aux limites changent

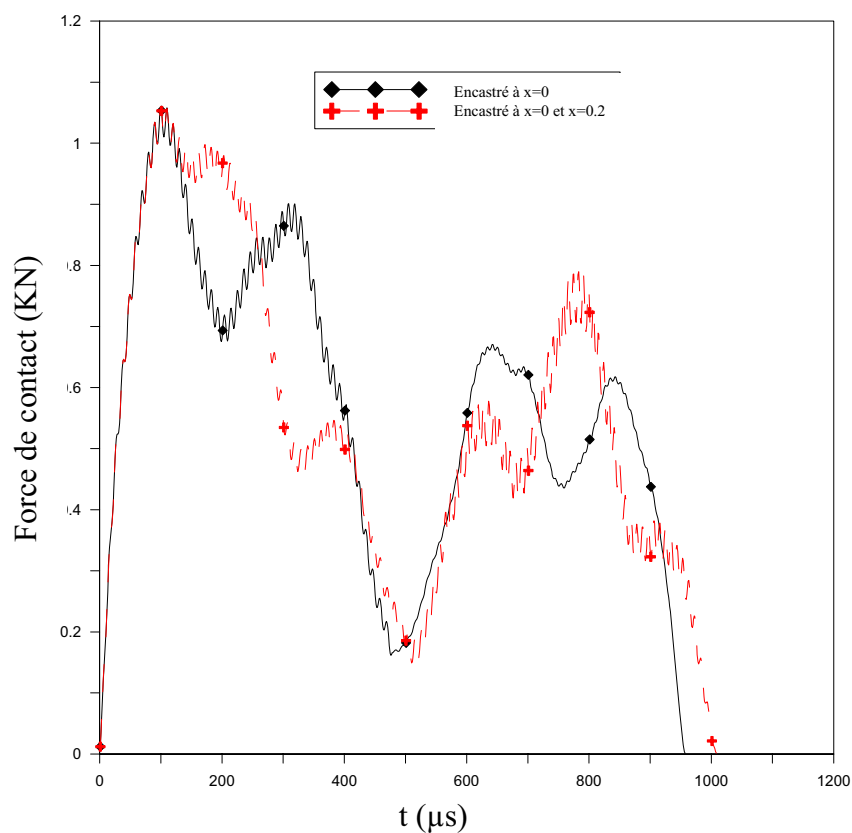


Figure 5.12 Force de contact pour $\bar{a} = 0.4$

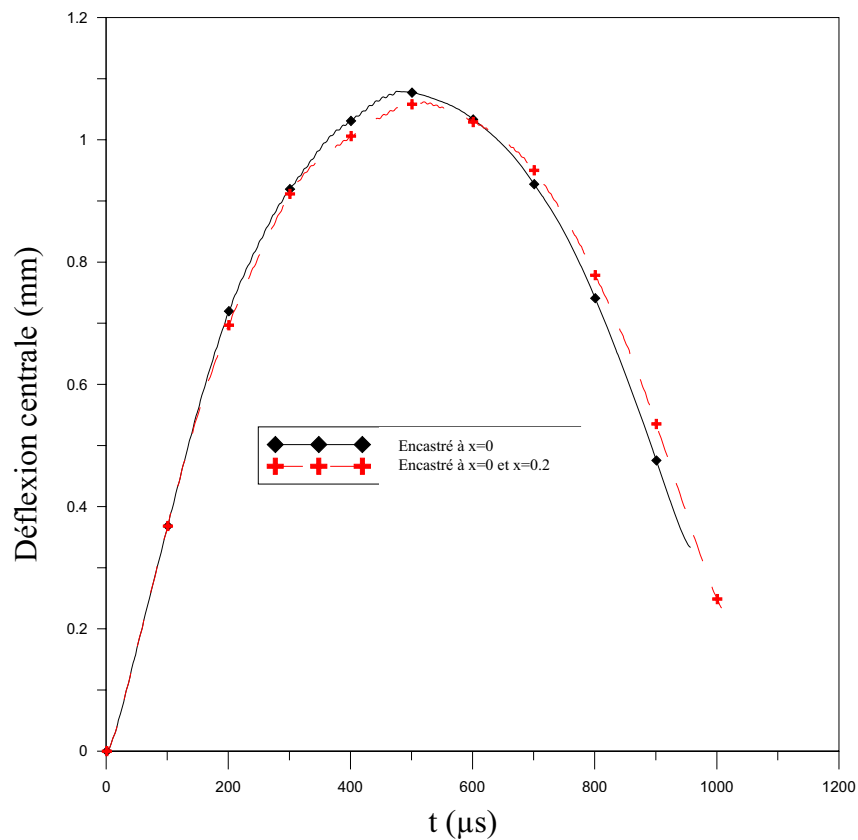


Figure 5.13 Déflexion centrale pour $\bar{a} = 0.4$

c. Effets de nombre de fissures

Dans le but de déterminer l'effet de nombre de fissure sur le comportement à l'impact des plaques fissurées, la force de contact et la déflexion centrale sont calculées dans deux cas :

cas 1 : plaque contient une seule fissure parallèle à l'axe x.

cas 2 : plaque contient deux fissures symétriques et parallèles à l'axe x.

A partir des figures 5.14 et 5.15, on peut noter que la force de contact dans le premier cas est supérieure à celle de deuxième cas dans l'intervalle du temps $[0, 300\mu s]$. Par contre, la déflexion dans le deuxième cas est supérieure à celle du premier cas.

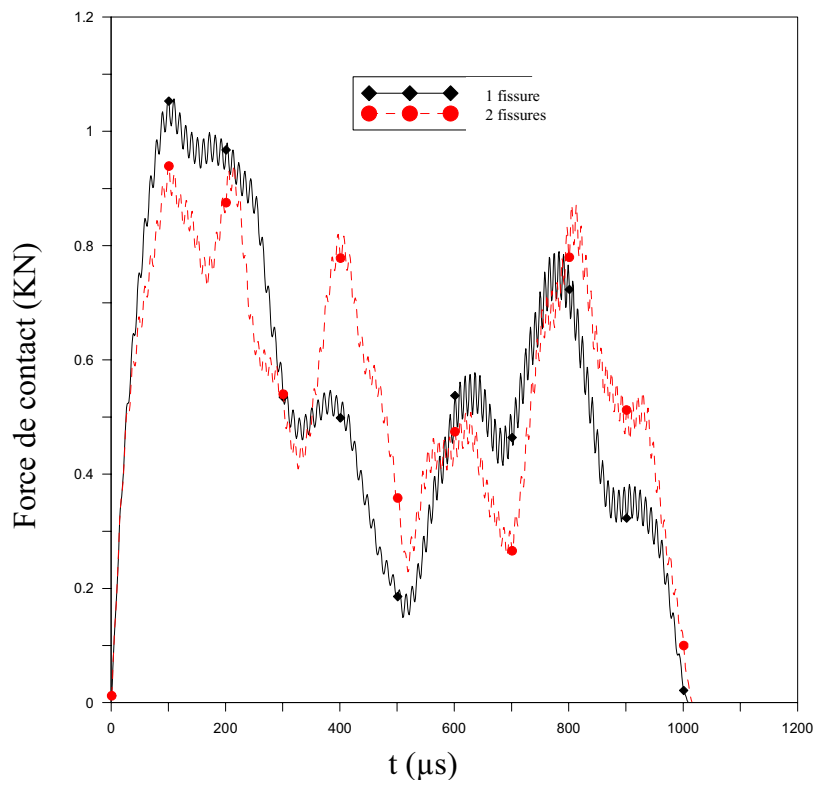


Figure 5.14 Force de contact centrale pour $\bar{a} = 0.4$ et $\bar{b} = 0.1$

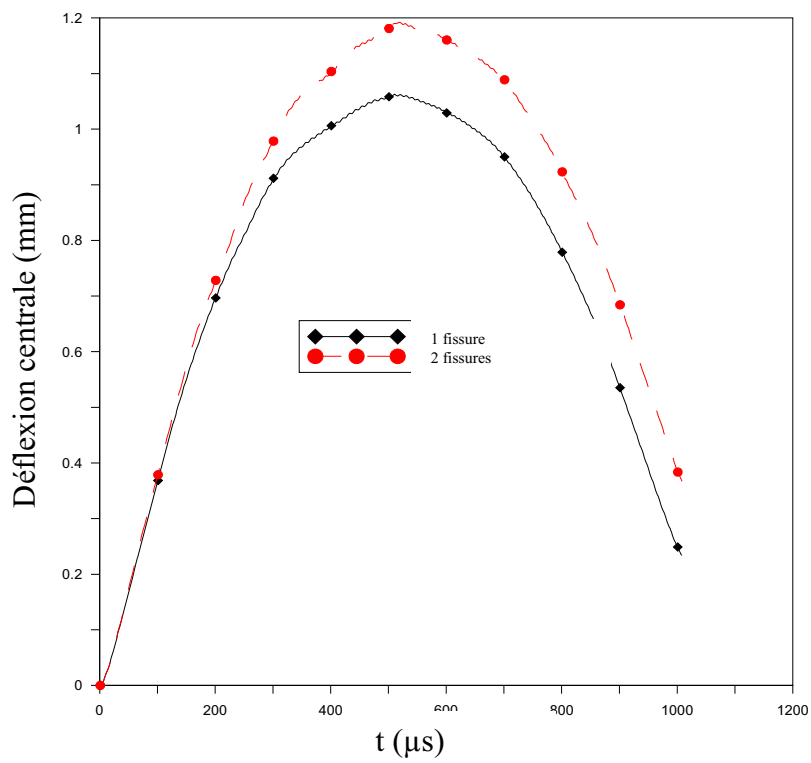


Figure 5.15 Déflexion centrale pour $\bar{a} = 0.4$ et $\bar{b} = 0.1$

Conclusion Générale

La connaissance des fréquences propres de vibrations des plaques est importante afin d'éviter les coïncidences avec les fréquences d'excitation. Les fréquences propres sont sensibles aux propriétés du matériau. Lorsque ces plaques présentent certains défauts structuraux, les fréquences de vibrations peuvent être modifiées, le calcul des nouvelles valeurs provenant de ces défauts devient donc indispensable.

Bien qu'un grand nombre de travaux, traitant le phénomène vibratoire des plaques fissurées, a été publié et montrant ainsi son importance, un certain nombre de ces phénomènes restent encore non révélés ou mal cernés.

Dans cette thèse, la modélisation du comportement vibratoire des plaques avec défauts a été traitée et mise en œuvre en utilisant la méthode des éléments finis étendue (XFEM). Dans cette méthode, la fissure ne dépend pas du maillage, le déplacement des nœuds au voisinage de la fissure est enrichi par des fonctions d'enrichissement qui tiennent en compte la présence de la discontinuité. C'est un avantage par rapport à la méthode des éléments finis classique, où la discontinuité est traitée en remaillant le domaine à chaque fois que la fissure se propage, ce qui augmente considérablement le temps du calcul.

Dans le développement du modèle mathématique, la théorie de Reissner-Mindlin qui tient en compte les effets des déformations en cisaillement transverse et de l'inertie de rotation, a été utilisée. Un programme Fortran a été développé à cet effet. Différents exemples ont été étudiés pour voir la validité de la XFEM et sa puissance dans l'analyse vibratoire. Le programme a été tout d'abord testé sur des cas de plaques sans défauts où une bonne concordance a été constatée avec les résultats de la littérature. Des études paramétriques ont été ensuite entreprises où les effets de la géométrie de la plaque, de l'anisotropie du matériau, de l'orientation des fibres et des conditions aux limites sur les fréquences fondamentales ont été examinés.

Dans la modélisation par XFEM, deux types de maillage ont été considérées, le maillage par l'élément à 4 nœuds et le maillage par l'élément à 9 nœuds. Les techniques de l'intégration sélective et de l'intégration réduite ont été utilisées pour le calcul de la matrice de rigidité.

Plaques avec fissures internes ont été examinées. D'après les résultats obtenus, il a été constaté que pour un même type d'intégration, l'élément à 9 nœuds converge plus rapidement vers la solution exacte que l'élément à 4 nœuds, par contre, pour le même nombre de nœuds, les résultats obtenus par intégration réduite sont plus précise que ceux obtenus par intégration sélective.

Le comportement vibratoire des plaques fissurées a été ensuite examiné. Des cas de plaques isotropes et composites, avec fissures débouchantes de différentes longueurs et en différentes locations ont été traités. Des applications portant sur l'influence de la géométrie de la plaque, des conditions aux limites, et des propriétés du matériau ont été effectuées. Il a été constaté lors de ces études que les fréquences propres décroissent avec l'accroissement de la longueur de la fissure. Ce fait est plus accentué sur certains modes de vibration, par exemple, les modes antisymétriques par rapport à l'axe des y sont les plus affectés, une décroissance très importante est remarquée dans leurs fréquences, les déformées de ces modes montrent que la fissure divise la plaque en deux parties. L'effet de l'anisotropie du matériau a été aussi examiné. Les résultats obtenus montrent que les plaques hautement anisotropes présentent plus de rigidité comparativement aux plaques faiblement anisotropes. Dans une autre application, l'effet de l'orientation des fibres a été étudié, il a été constaté que la fréquence naturelle décroît lorsque la longueur de la fissure augmente, cette décroissance dépend de la direction de la fissure par rapport à la direction des fibres. La fréquence est moins affectée lorsque la fissure est orientée suivant la direction des fibres, par contre, une nette décroissance est observée lorsque la fissure devient perpendiculaire à la direction des fibres.

Le comportement au choc des plaques fissurées a été aussi examiné. Les plaques fissurées en isotropes et composites ont été traitées. Il a été constaté lors des études entreprises que, la force de contact décroît lorsque la fissure augmente. Par contre, la déflexion de la plaque augmente avec l'accroissement de la longueur de la fissure. Aussi, il a été observé que la force de contact passe par trois zones avec l'existence d'une longueur de fissure critique où la plaque perd considérablement sa rigidité.

Cependant, et en fonction des résultats obtenus en comparaison avec ceux de la littérature, la méthode des éléments finis étendue a montrée sa puissance et son efficacité dans l'analyse vibratoire des plaques fissurées.

ANNEXE 1

MATRICES DE CHANGEMENT DE BASE

A1.1 CHANGEMENT DE BASE

Considérons deux systèmes de références orthonormés (x,y,z) et $(1,2,3)$ dont leurs bases sont respectivement $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (Figure A1.1).

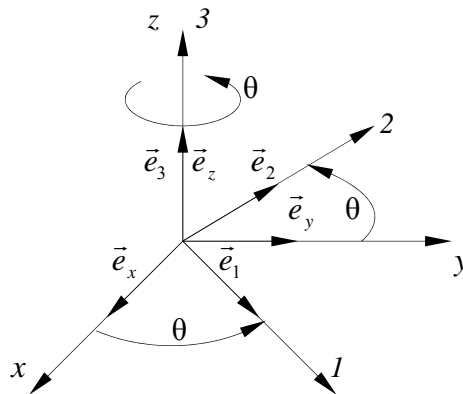


Figure A1.1 Changement de base

Dans le cas d'une rotation θ autour de la direction \vec{e}_z , la relation entre les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta \\ \vec{e}_2 &= -\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z\end{aligned}\tag{A1.1}$$

ou sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix}\tag{A1.2}$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3})$$

La matrice $[A]$ s'appelle *la matrice de changement de base*.

Le passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vers la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'effectue par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta \\ \vec{e}_y &= \vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} = [A^T] \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.5})$$

avec :

$$[A^T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.6})$$

La matrice $[A^T]$ est la matrice transposée de la matrice $[A]$, elle est égale à son inverse.

A1.2 MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE DES CONTRAINTES

En tout point M d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté $[\sigma(M)]_{xyz}$. Ce tenseur est de rang deux, symétrique, représenté par la matrice :

$$[\sigma(M)]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A1.7})$$

Le tenseur $[\sigma(M)]_{xyz}$ défini dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ peut être défini dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la relation matricielle suivante [33] :

$$[\sigma]_{123} = [A][\sigma]_{xyz} [A^T] \quad (\text{A1.8})$$

La relation inverse s'écrit :

$$[\sigma]_{xyz} = [A^T][\sigma]_{123}[A] \quad (\text{A1.9})$$

où :

$$[\sigma]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.10})$$

La relation (A1.8) conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \cos^2 \theta \\ \sigma_3 &= \sigma_z \\ \tau_{12} &= -\sigma_x \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sigma_y \cos \theta \sin \theta \\ \tau_{23} &= -\tau_{xz} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta \\ \tau_{13} &= \tau_{xy} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A1.11})$$

La relation (A1.11) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.12})$$

ou sous forme contractée :

$$\{\sigma\}_{123} = [T]\{\sigma\}_{xyz} \quad (\text{A2.13})$$

$[T]$: est la matrice de changement de base des contraintes :

A1.3 MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE DES DEFORMATIONS

Le tenseur des déformations ayant un tableau des composantes semblable à celui des contraintes :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{A1.14})$$

Les relations de changement de base s'expriment sous la même forme que celles du tenseur des contraintes.

Tenons compte de la relation :

$$\varepsilon_{ij} = 2\gamma_{ij} \quad i, j = x, y, z \quad \text{et} \quad i \neq j \quad (\text{A1.15})$$

l'expression (A1.8) rapportée au champ des déformations conduit à écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.16})$$

ou sous forme contractée :

$$\{\varepsilon\}_{123} = [T'] \{\varepsilon\}_{xyz} \quad (\text{A1.17})$$

$[T']$: est la matrice de changement de base des déformations.

ANNEXE 2

RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES STRATIFIEES

A2.1 RELATIONS D'EQUILIBRE DYNAMIQUE

Soit (D) un domaine d'un milieu continu, de frontière (S) (Figure A2.1). les forces exercées sur le domaine (D) sont de deux sortes :

1. les forces volumiques (forces de pesanteur, d'inertie, etc.), qui s'exercent dans tout le volume, caractérisées par la densité de force $\vec{f}(M,t)$ par unité de volume. La force qui s'exerce sur l'élément de volume dV entourant le point M est :

$$d\vec{f}(M,t) = \vec{f}(M,t)dV \quad (\text{A2.1})$$

2. les forces surfaciques qui ne s'exercent que sur la frontière (S) du domaine (D) . Elles sont caractérisées par la densité de force (vecteur contrainte) $\vec{t}(M,t)$ par unité de surface. La force qui s'exerce sur l'élément de surface dS entourant le point M s'écrit :

$$d\vec{t}(M,t) = \vec{t}(M,t)dS \quad (\text{A2.2})$$

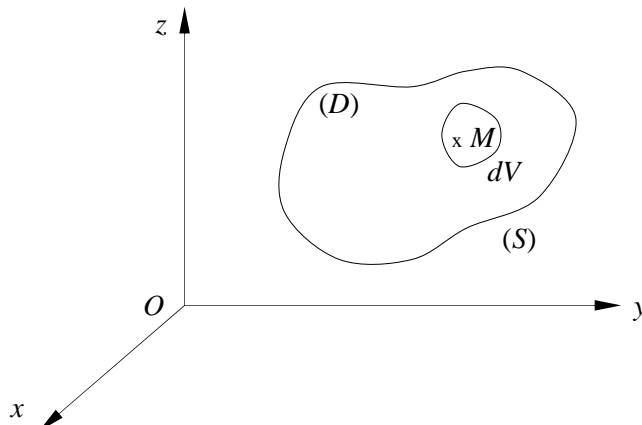


Figure A2.1 Domaine d'un milieu continu

L'orientation du vecteur contrainte est prise positive de l'intérieur vers l'extérieur de l'élément et correspond dans ce cas à une tension ou traction au point M . Dans le cas contraire, s'exerce en M une compression.

Dans le cas où le repère de référence (x,y,z) est un repère galiléen, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'élément entourant un point M s'écrit :

$$\rho(M,t)\vec{a}^{(T)}(M,t)dV = \vec{f}(M,t)dV + \vec{t}(M,t)dS \quad (\text{A2.3})$$

où :

$\rho(M,t)$ est la masse volumique en M à l'instant t .

$\vec{a}^{(T)}(M,t)$ est le vecteur accélération du point M , par rapport au repère (x,y,z) à l'instant t .

Etendue à l'ensemble du domaine (D) , la relation fondamentale conduit à une équation de résultante :

$$\int_V (\rho\vec{a} - \vec{f})dV - \int_S \vec{t}dS = \vec{0} \quad (\text{A2.4})$$

et une équation de moment en un point de référence, par exemple le point O :

$$\int_V \overrightarrow{OM} \wedge (\rho\vec{a} - \vec{f})dV - \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{t}dS = \vec{0} \quad (\text{A2.5})$$

où les intégrales sont étendues au volume V du domaine et à la surface S de la frontière. Chaque équation conduit dans une base donnée à trois équations scalaires. Par exemple, en introduisant les composantes des différents vecteurs, l'équation de la résultante s'écrit pour la direction i :

$$\int_V (f_i - \rho a_i)dV + \int_S t_i dS = 0 \quad (\text{A2.6})$$

ou bien :

$$\int_V (f_i - \rho a_i)dV + \int_S \sigma_{ij}n_j dS = 0 \quad (\text{A2.7})$$

L'intégral de surface peut être transformée en une intégrale de volume en utilisant la formule générale de Gauss qui permet de transformer une intégrale de surface en intégrale de volume et conduit ici à :

$$\int_S \sigma_{ij} n_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \quad (\text{A2.8})$$

La relation (A3.7) s'écrit donc :

$$\int_V (f_i - \rho a_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}) dV = 0 \quad (\text{A2.9})$$

Cette relation devant être vérifiée pour toute partie du domaine (D) se réduit à :

$$f_i - \rho a_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (\text{A2.10})$$

L'exploitation de l'équation du moment conduit à la même relation, appelée relation fondamentale. Cette relation sous la forme (A2.10) est applicable aux cas de petites déformations. La composante a_i du vecteur accélération s'exprime en fonction de la composante u_i du vecteur déplacement suivant :

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t^2} \quad (\text{A2.11})$$

et la relation fondamentale conduit aux trois équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (\text{A2.12})$$

A2.2 RELATIONS FONDAMENTALES RELATIVES AUX RESULTANTES DE MEMBRANE

L'intégration des deux premières relations (A2.12) suivant l'épaisseur du stratifié conduit aux relations relatives aux résultantes de membrane :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \quad (\text{A2.13})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (\text{A2.14})$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (\text{A2.15})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (\text{A2.16})$$

où $\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right)$ et $\sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right)$ sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles. Dans le cas où il sera nécessaire d'en tenir compte, nous les noterons :

$$\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) = \tau_{1x} \quad \text{et} \quad \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \tau_{2x} \quad (\text{A2.17})$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x} \quad (\text{A2.18})$$

En fin, nous posons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (\text{A2.19})$$

L'intégration du second membre s'effectue on introduisons le champ des déplacements utilisé au Chapitre 1 (relation 1.39), d'où :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) dz = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \quad (\text{A2.20})$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad (\text{A2.21})$$

en posant :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (\text{A2.22})$$

la masse surfacique du stratifié au point (x,y) :

et

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \quad (\text{A2.23})$$

L'intégration de la première équation (A2.12) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad (\text{A2.24})$$

De même, l'intégration de la deuxième équation (A1.1) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \quad (\text{A2.25})$$

où τ_{1x} et τ_{2x} tiennent compte des contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces :

$$\sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) = \tau_{1y} \quad \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \tau_{2y} \quad (\text{A2.26})$$

et

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_y dz = F_y \quad (\text{A2.27})$$

A2.3 RELATION FONDAMENTALE RELATIVE AUX RESULTANTES DE CISAILLEMENT

L'intégration suivant l'épaisseur de la troisième équation (A2.12) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz \quad (\text{A2.28})$$

nous avons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (\text{A2.29})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (\text{A2.30})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (\text{A2.31})$$

Les contraintes $\sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right)$ et $\sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right)$ apparaissent comme des forces de pression exercées

sur chaque face de la plaque. Nous notons leur différence :

$$q(x, y) = q = \sigma_z \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_z \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (\text{A2.32})$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = q \quad (\text{A2.33})$$

Enfin

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{A2.34})$$

La combinaison des équations (A2.28) à (A2.34) conduit finalement à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{A2.35})$$

en posant :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = F_z \quad (\text{A2.36})$$

A2.4 RELATIONS FONDAMENTALES RELATIVES AUX MOMENTS

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par z les deux premières équations (A2.12), puis en intégrant suivant l'épaisseur. Soit pour la première équation :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz \quad (\text{A2.37})$$

En intégrant par parties, nous avons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) - Q_x \quad (\text{A2.38})$$

soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x \quad (\text{A2.39})$$

Le second membre s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) dz = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (\text{A2.40})$$

soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad (\text{A2.41})$$

en posant :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (\text{A2.42})$$

I_{xy} est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (Oxy) de l'élément de plaque localisé au point (x,y) et ayant des côtés unité :

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad (\text{A2.43})$$

en posant :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz \quad (\text{A2.44})$$

De même, la deuxième équation (A3.12) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \quad (\text{A2.45})$$

avec :

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz \quad (\text{A2.46})$$

A2.5 RESUME DES RELATIONS FONDAMENTALES

Les relations fondamentales des plaques sont donc constituées des expressions (A2.24), (A2.25), (A2.35), (A2.43) et (A2.45). Soit en les regroupant :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y &= R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{A2.47}$$

avec :

$$(\rho_s, R, I_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz \tag{A2.48}$$

ANNEXE 3

SOUS-PROGRAMME SUBSPACE

Le sous-programme SUBSPACE a été développé par K.-J. Bathe [34], dans le but de résoudre, par la méthode d'itération sur sous-espace, le problème aux valeurs propres $([K] - \lambda[M])\{a_0\} = \{0\}$.

```
SUBROUTINE SSPACE(A,B,MAXA,R,EIGV,TT,W,AR,BR,VEC,D,RTOLV,BUP,BLO,
  $BUPC,NN,NNM,NWK,NWM,NROOT,RTOL,NC,NNC,NITEM,IFSS,IFPR,NSTIF)
*-----*
* PROGRAM *
* TO SOLVE FOR THE SMALLEST EIGENVALUES AND CORRESPONDING *
* EIGENVECTORS IN GENERALISED EIGENPROBLEM USING *
* THE SUBSPACE ITERATION METHOD *
*-----*
* INPUT VARIABLES *
*
* A(NWK) : STIFFNESS MATRIX IN COMPACTED FORM (ASSUMED *
* POSITIVE DEFINITE) *
* B(NWK) : MASS MATRIX IN COMPACTED FORM *
* MAXA(NNM) : VECTOR CONTAINING ADDRESSES OF DIAGONAL *
* ELEMENTS OF STIFFNESS MATRIX A *
* R(NN,NC) : EIGENVECTORS ON SOLUTION EXIT *
* EIGV(NC) : EIGENVALUES ON SOLUTION EXIT *
* TT(NN) : WORKING VECTOR *
* W(NN) : WORKING VECTOR *
* AR(NNC) : WORKING MATRIX STORING PROJECTION OF K *
* BR(NNC) : WORKING MATRIX STORING PROJECTION OF M *
* VEC(NC,NC) : WORKING MATRIX *
* D(NC) : WORKING VECTOR *
* RTOLV(NC) : WORKING VECTOR *
* BUP(NC) : WORKING VECTOR *
* BLO(NC) : WORKING VECTOR *
* BUPC(NC) : WORKING VECTOR *
* NN : ORDER OF STIFFNESS AND MASS MATRICES *
* NNM : NN+1 *
* NWK : NUMBER OF ELEMENTS BELOW SKYLINE OF *
* STIFFNESS MATRIX *
* NWM : NUMBER OF ELEMENTS BELOW SKYLINE OF *
* MASS MATRIX *
* I.E. NWM=NWK FOR CONSISTENT MASS MATRIX *
* NWM=NN FOR LUMPED MASS MATRIX *
```

```

*      NROOT      : NUMBER OF REQUIRED EIGENVALUES AND EIGENVECTORS      *
*      RTOL       : CONVERGENCE TOLERANCE ON EIGENVALUES                *
*                  (1.E-06 OR SMALLER)                                *
*      NC         : NUMBER OF ITERATION VECTORS USED                    *
*                  (USUALLY SET TO MIN(2*NROOT,NROOT+8), BUT NC       *
*                  CANNOT BE LARGER THAN THE NUMBER OF MASS          *
*                  DEGREES OF FREEDOM)                                *
*      NNC        : NC*(NC+1)/2 DIMENSION OF STORAGE VECTOR AR,BR     *
*      NITEM      : MAXIMUM NUMBER OF SUBSPACE ITERATIONS PERMITTED    *
*                  (USUALLY SET TO 16)                                *
*                  THE PARAMETERS NC AND/OR NITEM MUST BE            *
*                  INCREASED IF A SOLUTION HAS NOT CONVERGED        *
*      IFSS       : FLAG FOR STRUM SQUENCE CHECK                        *
*                  EQ.0 NO CHECK                                       *
*                  EQ.1 CHECK                                          *
*      IFPR       : FLAG FOR PRINTING DURING ITERATION                 *
*                  EQ.1 NO PRINTING                                    *
*                  EQ.1 PRINT                                          *
*      NSTIF      : SCRATCH FILE TO STORE STIFFNESS MATRIX            *
*      IOUT       : OUTPUT PRINTING FILE                               *
*
*      OUTPUT
*
*      EIGV(NROOT): EIGENVALUES
*      R(NN,NROOT): EIGENVECTORS
*
*-----*

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
SQRT(x)=DSQRT(x)
ABS(x)=DABS(x)

```

```

DIMENSION A(NWK),B(NWM),R(NN,NC),TT(NN),W(NN),EIGV(NC),D(NC),
$VEC(NC,NC),AR(NNC),BR(NNC),RTOLV(NC),BUP(NC),BLO(NC),BUPC(NC)
INTEGER MAXA(NNM)

```

```

*** SET TOLERANCE FOR JACOBI ITERATION

```

```

TOLJ=0.000000000001

```

```

*** INITIALISATION

```

```

ICONV=0
NSCH=0
NSMAX=12
N1=NC+1
NC1=NC-1
rewind NSTIF
write(NSTIF)A
do 60 i=1,NC
60      D(i)=0

```

```

*** ESTABLISH STARTING ITERATION VECTORS

```

```

ND=NN/NC
if(NWM.GT.NN) goto 4
j=0
do 2 i=1,NN
  ii=MAXA(i)
  R(i,1)=B(i)

```

```

        if(B(i).GT.0)j=j+1
2       W(i)=B(i)/A(ii)
        if(NC.LE.j) goto 16
        write(IOUT,1007)
        stop
4       do 10 i=1,NN
           ii=MAXA(i)
           R(i,1)=B(ii)
10      W(i)=B(ii)/A(ii)
16      do 20 j=2,NC
           do 20 i=1,NN
20         R(i,j)=0
           L=NN-ND
           do 30 j=2,NC
               RT=0
           do 40 i=1,L
               if (W(i).LT.RT) goto 40
               RT=W(i)
               ij=i
40      continue
           do 50 i=L,NN
               if(W(i).LE.RT) goto 50
               RT=W(i)
               ij=i
50      continue
           TT(j)=float(ij)
           W(ij)=0
           L=L-ND
30      R(ij,j)=1
        write(IOUT,1008)
        write(IOUT,1002)(TT(j),j=2,NC)

***  FACTORIZE MATRIX A INTO (L)*(D)*(L(T))

        ISH=0
        call DECOMP(A,MAXA,NN,ISH,IOUT)

***  START OF ITERATION LOOP

        NITE=0
100     NITE=NITE+1
           if(IFPR.EQ.0) goto 90
           write(IOUT,1010)NITE

***  CALCULATE THE PROJECTIONS OF A AND B

90      ij=0
           do 110 j=1,NC
               do 120 k=1,NN
120         TT(k)=R(k,j)
           call REDBAK(A,TT,MAXA,NN)
           do 130 i=j,NC
               ART=0
           do 140 k=1,NN
140         ART=ART+R(k,i)*TT(k)
               ij=ij+1
130         AR(ij)=ART
               do 150 k=1,NN
150         R(k,j)=TT(k)
110     continue
           ij=0

```

```

      do 160 j=1,NC
      call MULT(TT,B,R(1,j),MAXA,NN,NWM)
      do 180 i=j,NC
        BRT=0
        do 190 k=1,NN
190    BRT=BRT+R(k,i)*TT(k)
        ij=ij+1
180    BR(ij)=BRT
        if(ICONV.GT.0) goto 160
        do 200 k=1,NN
200    R(k,j)=TT(k)
160    continue

```

*** SOLVE FOR EIGENSYSTEM OF SUBSPACE OPERATORS

```

      if(IFPR.EQ.0) goto 320
      IND=1
210  write(IOUT,1020)
      ii=1
      do 300 i=1,NC
        ITEMP=ii+NC-i
        write(IOUT,1005)(AR(j),j=ii,ITEMP)
300    ii=ii+N1-i
        write(IOUT,1030)
        ii=1
        do 310 i=1,NC
          ITEMP=ii+NC-i
          write(IOUT,1005)(BR(j),j=ii,ITEMP)
310    ii=ii+N1-i
          if(IND.EQ.2) goto 350
320  call JACOBI(AR,BR,VEC,EIGV,W,NC,NNC,TOLJ,NSMAX,IFPR,IOUT)
          if(IFPR.EQ.0) goto 350
          write(IOUT,1040)
          IND=2
          goto 210

```

*** ARRANGE EIGENVALUES IN ASCENDING ORDER

```

350  IS=0
      ii=1
      do 360 i=1,NC1
        ITEMP=ii+N1-i
        if(EIGV(i+1).GE.EIGV(i)) goto 360
        IS=IS+1
        EIGVT=EIGV(i+1)
        EIGV(i+1)=EIGV(i)
        EIGV(i)=EIGVT
        BT=BR(ITEMP)
        BR(ITEMP)=BR(ii)
        BR(ii)=BT
        do 370 k=1,NC
          RT=VEC(k,i+1)
          VEC(k,i+1)=VEC(k,i)
370    VEC(k,i)=RT
360    ii=ITEMP
        if(IS.GT.0) goto 350
        if(IFPR.EQ.0) goto 375
        write(IOUT,1035)
        write(IOUT,1006)(EIGV(i),i=1,NC)

```

*** CALCULATE B TIMES APPROXIMATE EIGENVECTORS (ICONV.EQ.0) OR FINAL

```

*** EIGENVECTOR APPROXIMATIONS (ICONV.GT.0)

375  do 420 i=1,NN
      do 422 j=1,NC
422   TT(j)=R(i,j)
      do 424 k=1,NC
          RT=0
      do 430 L=1,NC
430   RT=RT+TT(L)*VEC(L,k)
424   R(i,k)=RT
420  continue
      if(ICONV.GT.0) goto 500

*** CHECK FOR CONVERGENCE OF EIGENVALUES

      do 380 i=1,NC
          DIF=ABS(EIGV(i)-D(i))
380   RTOLV(i)=DIF/EIGV(i)
          if(IFPR.EQ.0) goto 385
          write(IOUT,1050)
          write(IOUT,1005)(RTOLV(i),i=1,NC)
385   do 390 i=1,NROOT
          if(RTOLV(i).GT.RTOL) goto 400
390  continue
          write(IOUT,1060)RTOL
          ICONV=1
          goto 100
400   if(NITE.LT.NITEM) goto 410
          write(IOUT,1070)
          ICONV=2
          IFSS=0
          goto 100
410   do 440 i=1,NC
440   D(i)=EIGV(i)
          goto 100

*** END OF ITERATION LOOP

500  write(IOUT,1100)
      write(IOUT,1006)(EIGV(i),i=1,NROOT)
      write(IOUT,1110)
          do 530 j=1,NROOT
              write(IOUT,1005)(R(k,j),k=1,NN)

*** CALCULATE AND PRINT ERROR NORMS

      rewind NSTIF
      read(NSTIF)A
          do 580 L=1,NROOT
              RT=EIGV(L)
              call MULT(TT,A,R(1,L),MAXA,NN,NWK)
              VNORM=0
          do 590 i=1,NN
590   VNORM=VNORM+TT(i)*TT(i)
              call MULT(W,B,R(1,L),MAXA,NN,NWM)
              WNORM=0
          do 600 i=1,NN
              TT(i)=TT(i)-RT*W(i)
600   WNORM=WNORM+TT(i)*TT(i)
          VNORM=SQRT(VNORM)
          WNORM=SQRT(WNORM)

```

```

        D(L)=WNORM/VNORM
580  continue
        write(IOUT,1115)
        write(IOUT,1006)(D(i),i=1,NROOT)

***  APPLY STURM SEQUENCE CHECK

        if(IFSS.EQ.0) goto 700
        call SCHECK(EIGV,RTOLV,BUP,BLO,BUPC,D,NC,NEI,RTOL,SHIFT)
        write(IOUT,1120)SHIFT

***  SHIFT MATRIX A

        rewind NSTIF
        read(NSTIF)A
        if(NWM.GT.NN) goto 645
        do 640 i=1,NN
            ii=MAXA(i)
640  A(ii)=A(ii)-B(i)*SHIFT
        goto 660
645  do 650 i=1,NWK
650  A(i)=A(i)-B(i)*SHIFT

***  FACTORIZE SHIFTED MATRIX

660  ISH=1
        call DECOMP(A,MAXA,NN,ISH,IOUT)

***  COUNT NUMBER OF NEGATIVE DIAGONAL ELEMENTS

        NSCH=0
        do 664 i=1,NN
            ii=MAXA(i)
            if(A(ii).LT.0) NSCH=NSCH+1
664  continue
            if(NSCH.EQ.NEI) goto 670
            NMIS=NSCH-NEI
            write(IOUT,1130)NMIS
            goto 700
670  write(IOUT,1140)NSCH
700  return
1002 format (1x,10f10.0)
1005 format (5x,12E11.4)
1006 format (5x,6E22.14)
1007 format (///,63h STOP, NC IS LARGER THAN THE NUMBER OF MASS DEGREES
        $OF FREEDOM )
1008 format ( ///,62h DEGREES OF FREEDOM EXCITED BY UNIT STARTING ITERA
        $TION VECTORS)
1010 format (//,1x,23h**** ITERATION NUMBER:,I4,3x,4h****,/)
1020 format (28h PROJECTION OF A (MATRIX AR) )
1030 format (28h PROJECTION OF B (MATRIX BR) )
1035 format (30h EIGENVALUES OF AR-LAMBDA*BR )
1040 format (1x,40hAR AND BR AFTER JACOBI DIAGONALISATION )
1050 format (43h RELATIVE TOLERANCE REACHED ON EIGENVALUES )
1060 format (///,30h CONVERGENCE REACHED FOR RTOL ,E10.4)
1070 format (51h*** NO CONVERGENCE IN MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
        $ ,9hPERMITTED/35h WE ACCEPT CURRENT ITERRATION VALUES/
        $ 42h THE STRUM SEQUENCE CHECK IS NOT PERFORMED)
1100 format (///,31h THE CALCULATED EIGENVALUES ARE )
1115 format (//1x,36hPRINT ERROR NORMS ON THE EIGENVALUES )
1110 format (///,32h THE CALCULATED EIGENVECTORS ARE //)

```

```

1120 format (///,23h CHECK APPLIED AT SHIFT      ,E22.14)
1130 format (// 10h THERE ARE      ,I4,21h EIGENVALUES MISSING )
1140 format (// 20h WE FOUND THE LOWEST      ,I4,12h EIGENVALUES )
end

```

```
*****
```

```
      SUBROUTINE DECOMP(A,MAXA,NN,ISH,IOUT)
```

```

*-----*
* PROGRAM
* TO CALCULATE (L)*(D)*(L)(T) FACTORISATION OF STIFFNESS MATRIX
*-----*

```

```

      IMPLICIT real*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),MAXA(1)
      ABS(x)=DABS(x)
      if(NN.EQ.1) return
      do 200 N=1,NN
        KN=MAXA(N)
        KL=KN+1
        KU=MAXA(N+1)-1
        KH=KU-KL
210      if(KH)304,240,210
          K=N-KH
          IC=0
          KLT=KU
          do 260 j=1,KH
            IC=IC+1
            KLT=KLT-1
            KI=MAXA(k)
            ND=MAXA(k+1)-KI-1
270          if(ND)260,260,270
            KK=MIN0(IC,ND)
            C=0
            do 280 L=1,KK
280            C=C+A(KI+L)*A(KLT+L)
              A(KLT)=A(KLT)-C
260            k=k+1
240            K=N
              B=0
              do 300 KK=KL,KU
                k=k-1
                KI=MAXA(k)
                C=A(KK)/A(KI)
                if(ABS(C).LT.1.E07) goto 290
              write(IOUT,2010)N,C
              stop
290            B=B+C*A(KK)
300            A(KK)=C
              A(KN)=A(KN)-B
304            if(A(KN))310,310,200
310            if(ISH.EQ.0) goto 320
              if(A(KN).EQ.0) A(KN)=-1.E-16
              goto 200
320            write(IOUT,2000)N,A(KN)
              stop
200            continue
            return
2000 format(//47h STOP - STIFFNESS MATRIX NOT POSITIVE DEFINITE ,//
           $          33h NON POSITIVE PIVOT FOR EQUATION ,I4,//
           $          9h PIVOT=      ,E20.12)
2010 format(//47h STOP-STRUM SEQUENCE CHECK FAILED BECAUSE OF      ,      35h

```

```
$MULTIPLIER GROUTH FOR COLUMN NUMBER ,I4, //12h MULTIPLIER*,E20.8)
end
```

```
*****
```

```

SUBROUTINE MULT(TT,B,RR,MAXA,NN,NWM)
*-----*
* PROGRAM *
* TO EVALUATE PRODUCT OF B TIMES RR AND STOR RESULT IN TT *
*-----*
IMPLICIT real*8(A-H,O-Z)
DIMENSION TT(1),B(1),RR(1),MAXA(1)
if(NWM.GT.NN) goto 20
do 10 i=1,NN
10 TT(i)=B(i)*RR(i)
return
20 do 40 i=1,NN
40 TT(i)=0
do 100 i=1,NN
KL=MAXA(i)
KU=MAXA(i+1)-1
ii=i+1
CC=RR(i)
do 100 KK=KL,KU
ii=ii-1
100 TT(ii)=TT(ii)+B(kk)*CC
if(NN.EQ.1) return
do 200 i=2,NN
KL=MAXA(i)+1
KU=MAXA(i+1)-1
if(KU-KL)200,210,210
210 ii=i
AA=0
do 220 KK=KL,KU
ii=ii-1
220 AA=AA+B(KK)*RR(ii)
TT(i)=TT(i)+AA
200 continue
return
end
```

```
*****
```

```

SUBROUTINE REDBAK(A,V,MAXA,NN)
*-----*
* PROGRAM *
* TO REDUCE AND BACK-SUBSTITUTE ITERATION VECTORS *
*-----*
IMPLICIT real*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(1),V(1),MAXA(1)
do 400 N=1,NN
KL=MAXA(N)+1
KU=MAXA(N+1)-1
if(KU-KL)400,410,410
410 K=N
C=0
do 420 KK=KL,KU
k=k-1
420 C=C+A(KK)*V(k)
V(N)=V(N)-C
400 continue
```



```

do 480 N=1,NN
  k=MAXA(N)
480  V(N)=V(N)/A(k)
  if(NN.EQ.1) return
  N=NN
  do 500 L=2,NN
    KL=MAXA(N)+1
    KU=MAXA(N+1)-1
    if(KU-KL)500,510,510
510   k=N
    do 520 KK=KL,KU
      k=k-1
520   V(k)=V(k)-A(KK)*V(N)
500   N=N-1
  return
end

```

```

SUBROUTINE SCHECK(EIGV,RTOLV,BUP,BLO,BUPC,D,NC,NEI,RTOL,SHIFT)
*-----*
* PROGRAM *
* TO EVALUATE SHIFT FOR STURM SEQUENCE CHECK *
*-----*

```

```

IMPLICIT real*8(A-H,O-Z)

```

```

DIMENSION EIGV(NC),RTOLV(NC),BUP(NC),BLO(NC),BUPC(NC),D(NC)
FTOL=0.01
do 100 i=1,NC
  BUP(i)=EIGV(i)*(1+FTOL)
100  BLO(i)=EIGV(i)*(1-FTOL)
  NROOT=0
do 120 i=1,NC
120  if(RTOLV(i).LT.RTOL) NROOT=NROOT+1
  if(NROOT.GE.1) goto 200
write(6,1010)
stop

```

*** FIND UPPER BOUNDS ON EIGENVALUES CLUSTERS

```

200  do 240 i=1,NROOT
240  D(i)=1
  if(NROOT.NE.1) goto 260
  BUPC(1)=BUP(1)
  LM=1
  L=1
  i=2
  goto 295
260  L=1
  i=2
270  if(BUP(i-1).LE.BLO(i)) goto 280
  D(L)=D(L)+1
  i=i+1
  if(i.LE.NROOT) goto 270
280  BUPC(L)=BUP(i-1)
  if(i.GT.NROOT) GOTO 290
  L=L+1
  i=i+1
  if(i.LE.NROOT) goto 270
  BUPC(L)=BUP(i-1)
290  LM=L

```

```

        if(NROOT.EQ.NC) goto 300
295   if(BUP(i-1).LE.BLO(i)) goto 300
        if(RTOLV(i).GT.RTOL) goto 300
        BUPC(L)=BUP(i)
        D(L)=D(L)+1
        NROOT=NROOT+1
        if(NROOT.EQ.NC) goto 300
        i=i+1
        goto 295

***   FIND SHIFT

300   write(6,1020)
        write(6,1005)(BUPC(i),i=1,LM)
        write(6,1030)
        write(6,1006)(D(i),i=1,LM)
        LL=LM-1
        if(LM.EQ.1) goto 310
330   do 320 i=1,LL
320   D(L)=D(L)+D(i)
        L=L-1
        LL=LL-1
        if(L.NE.1) goto 330
310   write(6,1040)
        write(6,1006)(D(i),i=1,LM)
        L=0
        do 340 i=1,LM
        L=L+1
        if(D(i).GE.NROOT) goto 350
340   continue
350   SHIFT=BUPC(L)
        NEI=D(L)
        return

1005  format (1h0,6E22.14)
1006  format (1h0,6f22.0)
1010  format (37h ***ERROR SOLUTION STOP IN *SCHECK*, /12x,
        $      21hNO EIGENVALUES FOUND., / 1x)
1020  format(///,37h UPPER BOUNDS ON EIGENVALUE CLUSTERS  )
1030  format(34h NO OF EIGENVALUES IN EACH CLUSTER  )
1040  format(42h NO OF EIGENVALUES LESS THAN UPPER BOUNDS  )
        end

*****

        SUBROUTINE  JACOBI(A,B,X,EIGV,D,N,NWA,RTOL,NSMAX,IFPR,IOUT)
*-----*
*   PROGRAM
*   TO SOLVE THE GENERALISED EIGENPROBLEM USING THE GENERALISED
*   JACOBI ITERATION
*-----*

        IMPLICIT real*8(A-H,O-Z)
        DIMENSION A(NWA),B(NWA),X(N,N),EIGV(N),D(N)
        ABS(x)=DABS(x)
        SQRT(x)=DSQRT(x)

***   INITIALISE EIGENVALUE IN EIGENVECTOR MATRICES

        N1=N+1
        ii=1
        do 10 i=1,N
        if(A(ii).GT.0.and.B(ii).GT.0) goto 4

```

```

        write(IOUT,2020)ii,A(ii),B(ii)
        stop
4       D(i)=A(ii)/B(ii)
        EIGV(i)=D(i)
10      ii=ii+N1-i
        do 30 i=1,N
        do 20 j=1,N
20      X(i,j)=0
30      X(i,i)=1
        if(N.EQ.1) return

*** INITIALISE SWEEP COUNTER AND BEGIN ITERATION

        NSWEEP=0
        NR=N-1
40      NSWEEP=NSWEEP+1
        if(IFPR.EQ.1) write(IOUT,2000)NSWEEP

*** CHECK IF PRESENT OFF-DIAGONAL ELEMENT IS LARGE ENOUGH
*** TO REQUIRE ZEROING

        EPS=(.01**NSWEEP)**2
        do 210 j=1,NR
        JP1=j+1
        JM1=j-1
        LJK=JM1*N-JM1*j/2
        jj=LJK+j
        do 210 k=JP1,N
        KP1=k+1
        KM1=k-1
        JK=LJK+k
        KK=KM1*N-KM1*k/2+k
        EPTOLA=(A(JK)*A(JK))/(A(jj)*A(KK))
        EPTOLB=(B(JK)*B(JK))/(B(jj)*B(KK))
        if((EPTOLA.LT.EPS).and.(EPTOLB.LT.EPS))goto 210

*** IF ZEROING IS REQUIRED,CALCULATE THE ROTATION MATRIX
*** ELEMENTS CA AND CG

        AKK=A(KK)*B(JK)-B(KK)*A(JK)
        AJJ=A(jj)*B(JK)-B(jj)*A(JK)
        AB=A(jj)*B(KK)-A(KK)*B(jj)
        CHECK=(AB*AB+4*AKK*AJJ)/4
        if(CHECK)50,60,60
50      write(IOUT,2020)
        stop
60      SQCH=SQRT(CHECK)
        D1=AB/2+SQCH
        D2=AB/2-SQCH
        DEN=D1
        if(ABS(D2).GT.ABS(D1)) DEN=D2
        if(DEN)80,70,80
70      CA=0
        CG=-A(JK)/A(KK)
        goto 90
80      CA=AKK/DEN
        CG=-AJJ/DEN

*** PERFORM THE GENERALIZED ROTATION TO ZERO THE PRESENT
*** OFF-DIAGONAL ELEMENT

```

```

90   if(N-2)100,190,100
100  if(JM1-1)130,110,110
110  do 120 i=1,JM1
      IM1=i-1
      IJ=IM1*N-IM1*i/2+j
      IK=IM1*N-IM1*i/2+k
      AJ=A(IJ)
      BJ=B(IJ)
      AK=A(IK)
      BK=B(IK)
      A(IJ)=AJ+CG*AK
      B(IJ)=BJ+CG*BK
      A(IK)=AK+CA*AJ
120  B(IK)=BK+CA*BJ
130  if(KP1-N)140,140,160
140  LJI=JM1*N-JM1*j/2
      LKI=KM1*N-KM1*k/2
      do 150 i=KP1,N
          JI=LJI+i
          KI=LKI+i
          AJ=A(JI)
          BJ=B(JI)
          AK=A(KI)
          BK=B(KI)
          A(JI)=AJ+CG*AK
          B(JI)=BJ+CG*BK
          A(KI)=AK+CA*AJ
150  B(KI)=BK+CA*BJ
160  if(JP1-KM1)170,170,190
170  LJI=JM1*N-JM1*j/2
      do 180 i=JP1,KM1
          JI=LJI+i
          IM1=i-1
          IK=IM1*N-IM1*i/2+k
          AJ=A(JI)
          BJ=B(JI)
          AK=A(IK)
          BK=B(IK)
          A(JI)=AJ+CG*AK
          B(JI)=BJ+CG*BK
          A(IK)=AK+CA*AJ
180  B(IK)=BK+CA*BJ
190  AK=A(KK)
      BK=B(KK)
      A(KK)=AK+2*CA*A(JK)+CA*CA*A(jj)
      B(KK)=BK+2*CA*B(JK)+CA*CA*B(jj)
      A(jj)=A(jj)+2*CG*A(JK)+CG*CG*AK
      B(jj)=B(jj)+2*CG*B(JK)+CG*CG*BK
      A(JK)=0
      B(JK)=0

***  UPDATE THE EIGENVECTOR MATRIX AFTER EACH ROTATION

      DO 200 i=1,N
          XJ=X(i,j)
          XK=X(i,k)
          X(i,j)=XJ+CG*XK
200  X(i,k)=XK+CA*XJ
210  continue

```

```

*** UPDATE THE EIGENVALUES AFTER EACH SWEEP
    ii=1
    do 220 i=1,N
        if(A(ii).GT.0.and.B(ii).GT.0) goto 215
        write(IOUT,2020)ii,A(ii),B(ii)
    stop
215    EIGV(i)=A(ii)/B(ii)
220    ii=ii+N1-i
        if(IFPR.EQ.0) goto 230
        write(IOUT,2030)
        write(IOUT,2010)(EIGV(i),i=1,N)

*** CHECK FOR CONVERGENCE

230    do 240 i=1,N
        TOL=RTOL*D(i)
        DIF=ABS(EIGV(i)-D(i))
        if(DIF.GT.TOL) goto 280
240    continue

*** CHECK ALL OFF-DIAGONAL ELEMENTS TO SEEIF ANOTHER SWEEP IS REQUIRED

        EPS=RTOL**2
        do 250 j=1,NR
            JM1=j-1
            JP1=j+1
            LJK=JM1*N-JM1*j/2
            jj=LJK+j
            do 250 k=JP1,N
                KM1=k-1
                JK=LJK+k
                KK=KM1*N-KM1*k/2+k
                EPSA=(A(JK)*A(JK))/(A(jj)*A(KK))
                EPSB=(B(JK)*B(JK))/(B(jj)*B(KK))
                if((EPSA.LT.EPS).and.(EPSB.LT.EPS)) goto 250
            goto 280
250    continue

*** FILL OUT BOTTOM TRIANGLE OF RESULTANT MATRICES AND SCALE EIGENVECTORS

255    ii=1
        do 275 i=1,N
            BB=SQRT(B(ii))
            do 270 k=1,N
270        X(k,i)=X(k,i)/BB
275    ii=ii+N1-i
        return

*** UPDATE D MATRIX AND START NEW SWEEP ,IF ALLOWED

280    do 290 i=1,N
290    D(i)=EIGV(i)
        if(NSWEEP.LT.NSMAX) goto 40
        goto 255
2000 format(27h SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = ,I4)
2010 format(6E20.12)
2020 format (25h *** ERROR SOLUTION STOP /
    $          31h MATRICES NOT POSITIVE DEFINITE /
    $4h ii=,I4,6hA(ii)=,E20.12,6hB(ii)=,E20.12)
2030 format(36h CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE,/)
    end

```

Bibliographie

1. Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int J Numer Meth Engng*; 45(5):601–620 (1999).
2. Möes N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int J Numer Meth Engng*; 46: 131-150 (1999)
3. Daux C, Möes N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int J Numer Meth Eng*; 48: 741–60 (2000).
4. Dolbow J, Möes N, Belytschko T. Modeling fracture in Mindlin–Reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*; 37(48–50):7161–7183 (2000)
5. Sukumar N, Moes N, Moran B, Belytschko T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int J Numer Meth Eng*; 48: 1549–70 (2000).
6. Belytschko T, Moes N, Usui S, Parimi C. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int J Numer Meth Eng*; 50: 993–1013 (2001).
7. Stolarska M, Chopp DL, Moes N, Belytschko T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int J Numer Meth Eng*; 51: 943–60 (2001).
8. Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J Comput Phys*; 79(1):12–49 (1988).
9. Belytschko T, Parimi C, Moes N, Sukumar N, Usui S. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *Int J Numer Meth Eng*; 56: 609–35 (2003).
10. Ventura G, Budyn E, Belytschko T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *Int J Numer Meth Eng*; 58: 1571–92 (2003).
11. Budyn E, Zi G, Möes N, Belytschko T. A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *Int J Numer Meth Eng*; 61:1741–70 (2004).
12. Ventura G, Moran B, Belytschko T. Dislocations by partition of unity. *Int J Numer Meth Eng*; 62: 1463–87 (2005).
13. Möes N, Béchet E, Tourbier M. Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *Int J Numer Meth Eng*; 67: 1641–69 (2006).
14. Whitney JM, Pagano NJ. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plate. *Journal of Applied Mechanics*; 37: 1031–6 (1970).

15. Yang PC, Norris GH, Stavsky Y. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of Solid and Structures*; 2: 1665–84 (1966).
16. Wu CI, Vinson JR. Nonlinear oscillations of laminated specially orthotropic plates with clamped and simply supported edges. *Journal of Acoustical Society of America*; 49(5): 1561–8 (1971).
17. Hearmon R. The frequency of flexural vibrations of rectangular orthotropic plates with clamped or simply supported edges. *Journal of Applied Mechanics*; 26: 537–42 (1959).
18. Bert CW, Chen TC. Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plate. *Institute Journal of Solid Structures*; 14: 265–473 (1977).
19. Bhimaraddi A, Stevens LK. A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates. *Journal of Applied Mechanics*; 51: 95–8 (1984).
20. Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*; 51(84): 745–52 (1984).
21. Mirza S, Li N. Analytical approach to free vibration of sandwich plates. *AIAA Journal*; 33(12): 1988–90 (1995).
22. Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*; 51(84): 745–52 (1984).
23. Numayr KS, Haddad RH, Haddad MA, Free vibration of composite plates using the finite difference method. *Thin-Walled Structures*; 42: 399–414 (2004).
24. Bachene M, Rechak S, Tiberkak R, Effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. 5^{èmes} Journées de Mécanique JM'05, EMP Alger 28-29 Mars 2006.
25. Bachene M, Tiberkak R, Rechak S, Necib B, Effets de certains paramètres d'influences sur les caractéristiques vibratoires des plaques stratifiées. Congrès Algérien de Mécanique de Construction. USTHB Alger 29-30 Avril 2007.
26. Lynn PP, Kumbasar N. Free vibration of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges. *Proceedings of the 10th Midwestern Mechanics Conf.* Colorado State University, Fort Collins CO. 911-928 (1967).
27. Stahl B, Keer LM. Vibration and stability of cracked rectangular plates. *Int J Solids Structures*; 8:69-92 (1972).

28. Ali R, Atwai SJ. Prediction of natural frequencies of vibration of rectangular plates with rectangular cutouts. *Computers and Structures*; 12:819-826 (1980).
29. Solecki R. Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge. *Engineering Fracture Mechanics*; 18(6):1111-1118 (1983).
30. Liew KM, Hung KC, Lim MK. A solution method for analysis of cracked plates under vibration. *Engineering Fracture Mechanics*; 48(3):393-404 (1994).
31. Khadem SE, Rezaee M. Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate. *Journal of Sound and Vibration*; 236(2):245-58 (2000).
32. Wu GY, Shih YS. Dynamic instability of rectangular plate with an edge crack. *Computers and Structures*; 84(1-2):1-10 (2005).
33. Qian GL, Gu SN, Jiang JS. A finite element model of cracked plates and application to vibration problems. *Computers and Structures*; 39(5):483-487 (1991).
34. Prabhakara DL, Datta P K. Vibration and static stability characteristic of rectangular plates with a localized flaw. *Computers and Structures*; 49: 825-836, (1993).
35. Lee HP, Lim SP. Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inertia. *Computers and Structures*; 49(4):715-718 (1993).
36. Krawczuk M, Ostachowicz WM. A finite plate element for dynamic analysis of a cracked plate. *Comput Meth Appl Mech Eng*; 115: 67-78 (1993).
37. Krawczuk M, Natural vibration of rectangular plates with a through crack; *Archive of Applied Mechanics*; 63 491-504 (1993).
38. Bachene M, Tiberkak R, Rechak S, Vibration analysis of cracked plates using the extended-finite element method (X-FEM). *Archive of Applied Mechanics*, 79, 249-262, (2009).
39. Bachene M, Tiberkak R, Rechak S, Hachi B K, Analyse du comportement vibratoire des plaques fissurées par la X-FEM. 18^{ème} Congrès Français de Mécanique, Grenoble, France, 27-31 Août 2007.
40. Bachene M, Tiberkak R, Rechak S, Enriched Finite Element Method for Modal Analysis of Cracked Plates, 1st African InterQuadrennial ICF Conference, Algiers, June 1-5, 2008.
41. Bachene M, Tiberkak R, Rechak S, Hachi B K, Dynamic Analysis of Cracked Plates by The Extended Finite Element Method (XFEM), Accepted for communication in ICF 12, Ottawa, Canada, July 12-17, 2009

42. T. Fujimoto and S. Sumi, Vibration characteristics of center cracked plates under tension. Bull. Jpn Soc. Mech. Engrs 53, 1124-1131, 1987.
43. P. Cawley and R.D. Adams, The location of defects in structures from measurements of natural frequencies, J. Strain Anal. 14, 49-57, 1979.
44. Vaziri R., Quan X. and Olson M.D. Impact analysis of laminated composite plates and shells by super finite elements. Int. J. Impact Engng Vol.18, Nos 7-8, pp. 765-782, 1996.
45. Rechak S. "Effect of adhesive layers on impact damage and dynamic response in composite laminates". Doctor of Philosophy. PURDUE UNIVERSITY, USA. December 1986.
46. Tiberkak R, Bachene M, Rechak S, Necib B, Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact. Composite Structures, Volume 83, Issue 1, March 2008, Pages 73-82.
47. Tiberkak R, Bachene M, Rechak S, Dynamic response of cracked plate subjected to impact loading using the extended finite element method (X-FEM), 1st African InterQuadrennial ICF Conference, Algiers, June 1-5, 2008
48. Ventura G, On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method . Int J Numer Meth Eng; 66: 761–795 (2006).
49. Nistor I, Pantalé O, Caperaa S, Numerical implementation of the eXtended Finite Element Method for dynamic crack analysis, Advances in Engineering Software, 39: 573-587 (2008)
50. S. Srinivas, C. V. Joga Rao and A. K. Rao, An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, J. Sound Vib. 12, 187-199 (1970).
51. Mallikarjuna, Kant T, Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher-order theory with finite element technique, Int. J. Numer. Methods eng., **28**, 1875-1889 (1989).
52. Tan T. M., Sun C.T. Wave propagation in graphite/epoxy laminates due to impact. NASA CR 168057 1982.
53. Krishnamurthy K.S., Mahajan P., Mittal R.K. Impact response and damage in laminated composite cylindrical shells. Composite Structures 59 (2003) 15–36.
54. Krishnamurthy K.S., Mahajan P., Mittal R.K. .A parametric study of the impact response and damage of laminated cylindrical composite shells. Composites Science and Technology 61 (2001) 1655–1669.

55. Ik Hyeon Choi, Cheol Ho Lim. Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law. *Composite Structures* 2004;66:125-32.
56. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, Mac Graw-Hill, New York (1977).
57. R. H. Gallagher, *Introduction aux éléments finis*. Editions Pluralis (1976).
58. T. Y. Yang, *Finite element structural analysis*, Prentice Hall (1986).
59. G. Datt et G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. Editeur (1984).
60. J.-M. Berthelot, *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures*, Masson (1992).
61. K. -J. Bathe, *Finite element procedures*. Prentice Hall (1996).
62. J. -F. Imbert, *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadué – Editions (1991).
63. Cook R D, *Finite element modeling for stress analysis*, John Wiley & Sons, INC. (1995).
64. Jones R M, *Mechanics of composite materials*, Taylor & Francis, (1999).
65. Ochoa O O, Reddy J N, *Finite element analysis of composite laminates*, Kluwer Academic Publishers, (1994).
66. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W.T.Vetterling, *Numerical recipes the art of scientific computing*, Cambridge University Press (1986).
67. Soheil M. *Extended finite element method for fracture analysis of structures*, Blackwell Publishing, (2008).
68. E. Hinton, *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*, Pineridge Press, Swansea, U.K. (1988).