

UNIVERSITE D'ALGER

8/76

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

2ed

DEPARTEMENT ELECTRICITE



PROJET DE FIN D'ETUDES

ETUDE ET REALISATION
D'UNE
CUVE RHEOGRAPHIQUE

Proposé par :

P. SINTES

Etudié et réalisé par :

Boualem IDIR

Boualem MEZOUE

PROMOTION JUIN 1976

REMERCIEMENTS

A tous ceux qui ont contribué ,de près ou de loin à la réalisation de cette modeste étude , nous exprimons notre sincère reconnaissance et . . . profonde gratitude.

Nos remerciements vont principalement à:

- M^r .P.Sintes (Professeur d'Electronique) qui n'a ménagé aucun effort pour nous prodiguer des conseils fructueux et nous orienter dans notre travail.
- M^{rs}.Les professeurs de Mécanique pour leur bénéfique collaboration et les efforts méritoires qu'ils ont déployés pour la réalisation de notre cuve rhéographique.
- M^{rs}.Les enseignants de l'Ecole Nationale Polytechnique qui ont contribué à notre formation.
- Toutes les personnes qui nous ont généreusement apporté soutien moral ou autre.

---GENERALITES---

Le calcul dit rheographique met en oeuvre la notion d'analogie étudiée par M.A.Jeudon.

Cette technique se situe entre celle des modèles réduits et celle des appareils auxquels on a réservé le nom de CALCULATEURS ANALOGIQUES. Alors que, dans la première, la nature physique du phénomène est la même dans le problème à étudier et dans le modèle expérimental, on ne fait appel ici qu'à une identité d'équations, qui ne suppose aucune parenté physique. On prend comme modèle un phénomène qui est régi globalement par les mêmes équations que le problème à résoudre, mais plus facile que ce dernier à étudier expérimentalement.

Dans la méthode rhéographique, on étudie la répartition du potentiel électrique et du courant dans un milieu continu : liquide dans les cuves rhéographiques. Cette méthode doit son succès à la facilité de mesure du potentiel électrique, à sa souplesse et à sa précision. Elle doit son vaste champ d'applications au fait que les équations de la répartition du potentiel électrique (équation de la Laplace dans un milieu continu homogène) régissent un grand nombre de phénomènes.

Force est de constater que l'utilité de la cuve rhéographique dans l'électronique et d'autres domaines aussi variés ne fait plus de doute. Aussi nous semble-t-il opportun de souligner à titre d'information que les premières applications de la cuve rhéographique à l'étude des champs électrostatiques et magnétiques datent du début de ce siècle. On a pu élargir le champ d'action des cuves rhéographiques, ce qui a permis de traiter des problèmes complexes et variés de la physique mathématique, de la technique, ainsi que de l'optique électronique. De nos jours, l'emploi courant de la cuve n'est plus à contester. C'est ainsi qu'elle est utilisée dans de nombreux laboratoires, touchant à des domaines diversifiés, notamment l'électricité, l'hydrodynamique et l'aérodynamique.

C'est dire donc avec quelle rapidité on a pu adapter la cuve aux progrès et techniques de notre temps, lui ouvrant par -là même un vaste champ d'application.

.....//.....

A V A N T - P R O P O S

Le projet de fin d'études que nous nous proposons d'exposer a pour thème "Cuve Rhéographique ". pour effectuer ce travail, nous avons jugé utile, avant d'aborder l'étude expérimentale proprement dite, de nous pencher sur quelques parties théoriques nécessaires à la compréhension de notre sujet. C'est ainsi que dans notre démarche, nous avons été amenés à axer notre travail en plusieurs chapitres.

Au chapitre I, il nous est apparu nécessaire, d'introduire le principe des analogies rhéoélectriques qui sont indispensables pour la conception et la mise au point de notre cuve. Ce phénomène analogique, dès lors qu'il a été étudié nous a permis certaines conditions pour l'élaboration de notre cuve (parois en matière isolante : pléxyglas etc....)

Le chapitre II est consacré à l'étude des cuves rhéographiques en général. C'est ainsi que nous avons décrit d'une façon assez détaillée les différents éléments les constituant: les électrodes, l'électrolyte etc.

Au chapitre III, nous avons exposé la méthode de M. Bensasson relative à l'étude générale des circuits couplés et des filtres utilisés dans l'industrie électronique en hautes fréquences. Il nous a semblé utile de présenter cette technique car elle est nécessaire à la compréhension de notre travail . En effet, à partir de quelques exemples théoriques relatifs à la méthode de M. Bensasson, nous avons pu réaliser des expériences pratiques sur la cuve rhéographique que nous avons réalisée.

Le chapitre IV a été consacré à la détermination de la constante de la cuve en vue du tracé de la courbe Amplitude en fonction de la fréquence.

Au chapitre V , une fois la constante de la cuve déterminée, nous avons donné deux exemples de circuits couplés. La méthode restant la même on pourrait multiplier les essais sur des circuits beaucoup plus complexes. Ainsi sommes nous arrivés à vérifier expérimentalement les exemples théoriques.

Au chapitre VI, nous essayé d'élargir le champ d'application de notre cuve pour son éventuelle utilisation dans l'industrie électronique.

---C H A P I T R E ---

1

A N A L O G I E S

R H E O E L E C T R I Q U E S

Introduction

Pour résoudre un système d'équation auquel obéit un phénomène, on peut utiliser une méthode de calcul analogique, c'est à dire réaliser un autre phénomène régi par des équations mathématiques identiques à celle du premier.

Parmi les réalisations où le "phénomène analogue" est le courant électrique, il faut distinguer celles où le courant parcourt un réseau de fils conducteurs avec des capacités et des inductances et celles où le courant se répartit dans un conducteur à deux ou trois dimensions.

1.1 Principe de l'analogie Rhéoélectrique

La méthode de l'analogie rhéoélectrique fait intervenir

- soit l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1a)$$

- soit l'équation aux dérivées partielles plus complexe :

$$\text{où } B = B(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0$$

La fonction B a un signe constant

L'équation de Laplace (1 a) est vérifiée par :

- a) - le potentiel des vitesses ($\varphi = \bar{\Phi}$)
 - la fonction de courant $\varphi = \bar{\Psi}$ dans l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide isovolume ;

$\Delta^2 \bar{\Phi} = 0$ exprime la conservation de la masse

$\Delta^2 \bar{\Psi} = 0$ exprime que le rotationnel est nul

- b) - le potentiel électrique $\varphi = V$

$\Delta^2 V = 0$ exprime la conservation de la charge électrique

L'équation (1 b) est vérifiée par :

- a) - le potentiel des vitesses :

soit dans un écoulement méridien de fluide isovolume avec B égal à la distance r à l'axe de révolution

soit dans un écoulement plan de fluide compressible avec B égal à la masse volumique ρ .

Pour ce qui est du phénomène électrique

- le matériau est homogène et isotrope, soit

ξ : sa conductivité

- le phénomène est permanent

- il n'existe pas de source électrique dans le matériau considéré.

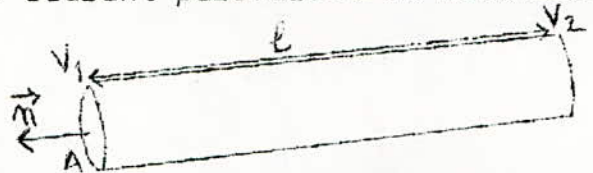
soit un conducteur cylindrique, dont l'aire de la section droite est A et soit l la longueur séparant les 2 surfaces (1) et (2)

appliquons la loi d'Ohm, on a immédiatement :

$$I = \frac{6}{l} (V_1 - V_2)$$

V_1 et V_2 : potentiel des 2 sections (1) et (2)

I courant parcourant le conducteur cylindrique



Dans un conducteur à 3 dimensions l'équation précédente se met sous la forme la plus générale

$$dI = - \frac{\partial V}{\partial n} \delta dA$$

dI : intensité traversant une surface (ds) d'aire dA et de secteur unitaire \vec{n} (normal).

introduisant le secteur gradient du potentiel V , au a alors :

$$dI = - \text{grad } V \cdot \vec{n} dA \quad (1c)$$

pasans $\boxed{\vec{J} = - \text{grad } V} \quad (1d)$

\vec{J} : secteur densité de courant

Le module de $\vec{J} = |\vec{J}|$ s'exprime par le rapport d'une charge électrique par une aire et un temps

$$C / S.t$$

Les 2 équations ainsi définies montrent que le courant I travers une surface (S) est le flux de \vec{J} à travers cette surface

$$I = \int_{(S)} \vec{J} \cdot \vec{n} dA$$

Appliquons la forme d'ostrogradski ; si S est une surface fermée (F) délimitant un domaine (D)

$$I = \int_{(V)} \text{div } \vec{J} dv \quad dv : \text{élément de volume}$$

écrivons la conservation de la charge électrique, ceci s'exprime par le fait que l'intensité I est nulle, en considérant que la surface (F) fermée est au sein du conducteur

$$\underline{\underline{\text{div } \vec{J} = 0}} \quad (1e)$$

comme $\delta = \text{cte}$, l'équation (1d) donne :

$$\text{div grad } V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1f)$$

2 - Analogie d'un écoulement plan irrotationnel d'un fluide isovolume

considérons le cas où le conducteur est formé d'une lame plane d'épaisseur uniforme h :

prenons les axes x et y // au plan de cette face de la lame, supposons les conditions aux frontières indépendantes de la 3ème coordonnée (z)

nous pouvons dire alors que V est indépendant de z et que J est parallèle au plan de xy par suite de (1 d).

L'intensité du courant électrique à travers un élément de surface défini par l'élément d'arc ds situé dans le plan des xy est :

$$dI = h \vec{J} \cdot \vec{n} ds \quad (1g)$$

Si on fait une analogie, dans l'écoulement plan analogue, le débit - volume de fluide à travers le même élément de surface est :

$$dqv = h \cdot \vec{U} \cdot \vec{n} ds$$

La différentielle de la fonction de courant le long de l'arc ds qui correspond à ce débit - volume est :

$$d\psi = - \vec{U} \cdot \vec{n} ds \quad (1h)$$

Signification de ψ et de ϕ

L'équation de Laplace s'écrit :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Les solutions sont des fonctions harmoniques.

toute fonction du type : $u = \sum \frac{m}{r}(P)$

où m est une quantité pouvant dépendre de la position du point P dans l'espace et r la distance du point courant A au point P ou à un ensemble fini de points P est une fonction harmonique.

exple : les potentiels (Newtoniens)

on peut écrire :

$$u(x,y) = \bar{\Phi}(x,y) + j \psi(x,y)$$

$\bar{\Phi}(x,y)$ = fonction potentielle

$\psi(x,y)$ = fonction courant

en chaque point non singulier passent une ligne équipotentielle et une ligne de courant. Ces 2 lignes sont perpendiculaires.

Les équations (1d), (1g) et (1h) permettent d'établir un parallélisme entre le système d'équations

$$\vec{U} = \text{grad } \bar{\Phi}$$

$$d\psi = - \vec{U} \cdot \vec{n} ds$$

qui détermine $d\psi$ à partir de \vec{U} par l'intermédiaire de \vec{U} et le système d'équation :

$$\vec{J} = - \sigma \text{ grad } V$$

$$dI = h \vec{J} \cdot \vec{n} ds$$

qui détermine dI à partir de V par l'intermédiaire de J on déduit alors que, si l'on identifie $\bar{\Phi}$ à V

$$(1 i) \quad \bar{\Phi} = V$$

on aurait : $U = j / \sigma$

$$\text{et par suite : } = \frac{I}{\sigma h} \quad (1 j)$$

Les identités (1 i) et (1 j) définissent une analogie que nous appellerons Analogie A.

Les fonctions Φ et Ψ étant des fonctions harmoniques conjuguées il en est de même des fonctions V et $I/6h$

Interprétation du Phénomène

Dans l'analogie A, les équipotentiels fluides se confondent avec les équipotentiels électriques et, par suite, les lignes de courant fluides, orthogonales aux équipotentiels fluides, se confondent avec les lignes de courant électriques orthogonales aux équipotentiels électriques. résultat qui se traduit par :

$$\vec{U} = - \frac{\vec{J}}{6} \quad (1 m)$$

4 - on va considérer maintenant un cas plus complexe du conducteur formé d'une lame ayant une face plane parallèle au plan des xy et dont l'épaisseur h varie très lentement

$$h = h(x, y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} \ll 1$$

Le vecteur densité de courant \vec{J} est sur chacune des faces, tangent à cette face - il est partout sensiblement parallèle au plan xy.

L'équation (1d) montre que $\frac{\partial V}{\partial z}$ est plus petit que $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$

nous ferons alors l'approximation comme si V et par suite $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ étaient indépendants de z .

$$J_x = -6 \frac{\partial V}{\partial x} ; J_y = -6 \frac{\partial V}{\partial y} ; J_z = -6 \frac{\partial V}{\partial z}$$

Considérons une courbe fermée (C) dans le plan des x y ;

ds un élément d'arc de cette courbe

da l'aire d'un élément de la surface (S) délimitée par cette courbe.

Appliquons le théorème de Green

$$(1n) \int_S \text{grad } V \cdot \vec{n} \, ds = \int_C V \, dl$$

Soit une portion de la lame considérée d'épaisseur h et délimitée par un cylindre des génératrices perpendiculaires au plan des x y.

Calculons l'intensité I du courant à travers sa frontière celle ci est égale à l'intensité à travers la surface latérale.

L'élément d'aire de cette surface latérale est h ds, la longueur ds étant un élément de la directrice (C) dans le plan xy.

$$I = \int_C \vec{J} \cdot \vec{n} \, h \, ds = -6 \int_C \text{grad } V \cdot \vec{n} \, h \, ds$$

$$I = -6 \int_C \left(h \frac{\partial V}{\partial x} n_x + h \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) ds$$

en appliquant 2 fois la relation (1n)

$$I = -6 \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) dA$$

écrivons la conservation de la charge $I = 0$

D'après le théorème de l'intégrale nulle

$$(1P) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0$$

Il est donc possible de simuler, par cette fonction V toute fonction satisfaisant à l'équation (1 b)

exemple d'un écoulement irrotationnel

$$(1a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0$$

d'où l'analogie possible :

$$h = p \quad \Phi = V$$

que nous appellerons analogie A.

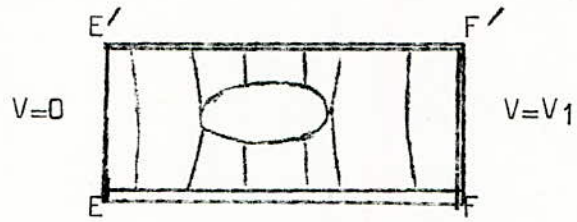
Application aux écoulements plans autour d'un solide

étudions l'écoulement plan avec potentiel des vitesses d'un fluide isovolume autour d'un solide.

Le courant est supposé uniforme au loin ; Pour déterminer le potentiel des vitesses Φ , on va considérer, comme un approximation acceptable, que, ~~a~~ une distance du solide assez grande par rapport aux dimensions du solide.

Les équipotentielles en ^amont et en aval et les lignes de courant de part et d'autre du solide sont rectilignes.

Soit donc un rectangle, dont les côtés EE' et FF' sont des équipotentielles fluides et EF et EF', des lignes de courant fluides.



Supposons d'abord un écoulement sans circulation : le potentiel des vitesses est univoque

Réalisons l'Analogie A : les conditions aux frontières pour la cuve électrique seront les suivantes :

- Les équipotentielles fluides EE' et FF' seront représentées par des parois conductrices, portées chacune à tel potentiel électrique que nous appellerons 0 pour la paroi EE' et V1 pour la paroi FF'
- en tout point d'une ligne de courant, la composante normale de la vitesse étant nulle, il en est de même de la composante normale de l'intensité électrique.

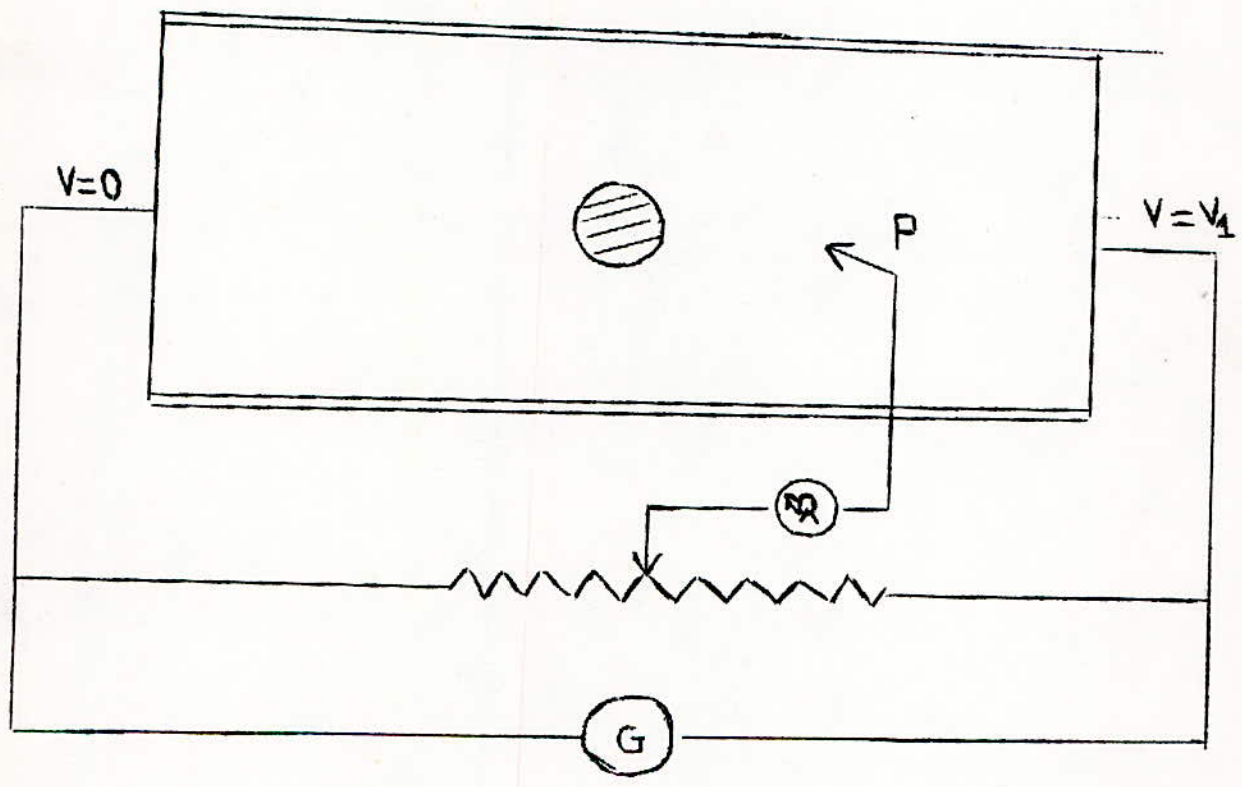
les lignes de courant EF et E'F' et le solide seront représentées par des parois et 1 solide en matériau isolant.

-Réalisation

Les bornes extrêmes d'un potentiomètre sont reliées aux deux pôles d'un générateur G, respectivement aux potentiels zéro et V1.

Le curseur C du potentiomètre étant fixé en une position et, par suite, le potentiel V de ce curseur étant fixé, on déplace une prise de potentiel P qu'on appelle sonde exploratrice, jusqu'à annuler le courant qui parcourt le conducteur PC et que détecte un micro-surpérimètre ou un oscillographe Q. Pour trouver l'équipotentielle V, on déplace la sonde en maintenant nul ce courant.

Schema de realisation



--- C H A P I T R E ---

2

C U V E S

R H E O G R A P H I Q U E S

Introduction

On sait qu'en chaque point d'un milieu conducteur de conductivité σ existe une densité de courant \vec{J} , donnée par la loi d'ohm :
 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; le champ électrique \vec{E} dérive d'un potentiel V , soit $\vec{E} = - \text{grad } V$ et la densité de courant est conservatrice $\text{div} \vec{J} = 0$
 $\text{div} (\sigma \text{grad } V) = 0$ on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

Si on considère le cas où $\sigma = \text{cte}$ on obtient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

C'est la résolution de cette équation que réalise le plus souvent la cuve théographique ; sa signification physique est toujours justifié quand il s'agit de grandeurs irrotationnelles c'est à dire de grandeurs dérivant d'un potentiel V .

Notre étude ira un peu plus loin, car la cuve Rhéographique qu'on a réalisé permettra de donner la courbe de réponse des circuits connaissant la fonction de transfert du système à étudier.

Constitution de la cuve

Dans les cuves théographiques, le milieu conducteur est constitué par un électrolyte, c'est pour cette raison qu'on les appelle le plus souvent : cuves électrolytique.

2.01 Les Récipients

Les parois de la cuve sont en matériaux isolants, tels que ebonite, plexiglas ou verre.

Pour des récipients de grandes dimensions, on peut utiliser des dalles d'ardoise ou de marbre.

Dans notre étude on étudiera la cuve de forme cylindrique pour des raisons qu'on verra par la suite.

Les problèmes plans sont étudiés dans des cuves planes où la hauteur de l'électrolyte est seulement de quelques centimètre, le fond du modèle est alors isolant, rigoureusement plan et horizontal de façon que les lignes de courant soient situées dans les plans horizontaux. Ceci conduit à réaliser le fond de la cuve à l'aide d'une plaque isolante parfaitement dressée, supportée par une armature métallique très rigide ;

L'horizontalité de l'ensemble est réglée par des vis calantes et vérifiée à l'aide d'un niveau à bulle très précis.

2.02 Electrodes et électrolytes

La nature des électrodes et celle de l'électrolyte doivent être choisies de façon à réduire au minimum les phénomènes parasites dus à l'électrolyse, en particulier la polarisation des électrodes, qui produit des déphasages du potentiel au sein de l'électrolyte.

On a donc à choisir comme électrolyte une solution de sulfate de cuivre dans l'eau distillée à quelques grammes par litre et des électrodes en cuivre.

Du fait de la polarisation, il apparaît entre l'électrode et l'électrolyte, une impédance d'interface qui peut être représentée par une résistance et une capacité en parallèle.

L'impédance mesurée entre 2 électrodes est formée d'une résistance représentant l'ensemble de l'électrolyte en série avec les impédances d'interface.

P.A.Einstein a montré que l'impédance d'interface est variable avec la fréquence, c'est ainsi qu'aux BF (100 HZ).

L'impédance d'interface est non linéaire, elle varie avec la tension appliquée et introduit des harmoniques même pour des densités de courant sur les électrodes inférieures à 5 mA/cm².

Par contre pour les fréquences supérieures à quelques centaines de Hertz, l'impédance d'interface est linéaire. P.A.Einstein caractérise le couple électrode-électrolyte par un facteur de mérite.

F :

$$F = \frac{\text{Résistance d'un cube d'électrolyte de 1 cm de côté}}{\text{Impédance d'interface pour 1 cm}^2 \text{ d'électrode}}$$

L'intérêt de ce Facteur de mérite est que l'erreur introduite par la résistance d'interface est de l'ordre de grandeur de celle introduite par un déplacement de l'électrode de $\frac{1}{F}$ cm.

Un autre effet nuisible, sur lequel influe le choix de la combinaison électrode -électrolyte, est la formation de ménisques le long des lignes de raccordement liquide solide.

Dans une cuve plane, ce phénomène n'apporte de perturbations sensibles à la répartition du potentiel qu'au voisinage des électrodes où on peut avoir une erreur à 1%.

Pour palier à cet effet nuisible on dépoli légèrement le plexiglas du côté de l'électrolyte ; pour réduire les effets de capillarité on ajoute à la solution de sulfate de cuivre quelque gouttes de détergent.

Quand on étudie des problèmes traitant les équations de Laplace la résistivité de l'électrolyte n'intervient pas directement. Cependant elle doit être suffisamment faible pour permettre les mesures de potentiel sans perturbation, suffisamment forte pour ne pas circuler dans la cuve des courants trop importants.

2.G³ Zones à conductibilités différentes ou à profondeurs différentes

On sait que ϕ peut être fonction de x,y,z cad que :

$$\phi = \phi(x,y,z)$$

à la cuve on ne peut pas représenter une variation continue de ce paramètre, mais par contre on peut réaliser des zones à conductibilités différentes. On sépare alors le liquide contenu dans la cuve en deux par une frontière mince isolante, sur laquelle on place des cavaliers conducteurs pour assurer la continuité de part et d'autre. On peut aussi utiliser une paroi isolante traversée par des tiges métalliques minces.

C'est ainsi que Grade et Wittich ont proposé une paroi de séparation en matière synthétique percée de nombreux trous (56 trous par cm²), bouchés par une pâte bonne conductrice

Remarquons que les conditions aux limites de part et d'autre d'une telle paroi séparant deux régions A et B sont :

$$V_A = V_B \quad \text{et} \quad \sigma \left(\frac{dV}{dn} \right)_A = \sigma \left(\frac{dV}{dn} \right)_B$$

la dernière relation exprime la continuité et la densité de courant.

Dans une cuve plane, on peut remplacer une variation de conductibilité par une variation de la profondeur h de l'électrolyte.

Ecrivons qu'il entre un courant total nul par les faces d'un parallépipède élémentaire vertical ayant pour côtés s_x , s_y , h (x, y), ou ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h j_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h j_y) = 0$$

ou bien :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0$$

Pour obtenir un champ plan, les lignes de courant doivent être horizontales et les surfaces équipotentielles des cylindriques à génératrices verticales.

ceci ne peut être réalisé rigoureusement qu'avec un fond isolant plan.

2.04 Alimentation des électrodes

L'utilisation du courant continu est prohibée à cause des phénomènes de polarisation du à l'électrolyse.

Bien que le courant à 50 HZ soit assez utilisé dans les installations simples, l'emploi des fréquences très basses présente plusieurs inconvénients : difficulté de réalisation des amplificateurs, difficulté d'élimination des parasites provenant du secteur, caractéristique non linéaire de l'impédance d'interface.

Au fréquences supérieures à 1000 Hz, les déphasages et les inductions deviennent très gênants lorsque l'on désire réaliser un équipement comportant des servomécanismes, tels que des traceurs automatiques d'équipotentielles, le choix d'une fréquence voisine de 400 HZ permet de bénéficier des éléments répandus dans le commerce : moteur et génératrices tachymétrique etc.....

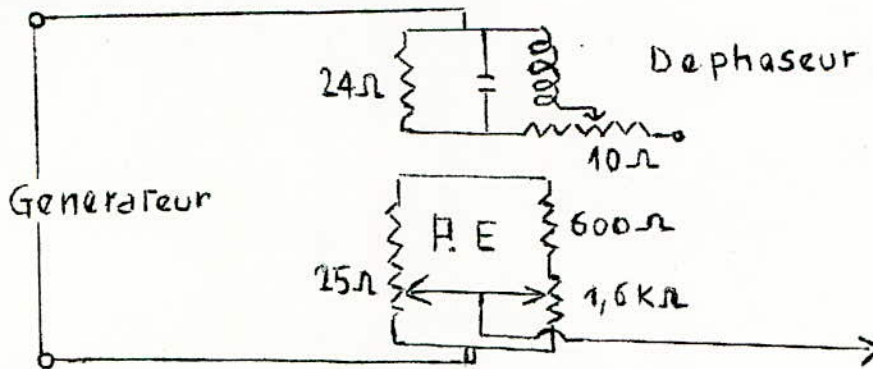
La tension appliquée aux électrodes doit être assez élevée pour que l'on ne soit pas gêné par des tensions parasites et la sensibilité des appareils de mesure.

Cependant, une tension trop élevée produit des courants importants dans la cuve ; une tension de 1 à 10 V est généralement satisfaisante.

On peut donner un exemple d'illustration de l'alimentation d'une électrode (cuve C.N.E.T.)

.../...

L'alimentation des électrodes se fait par une chaîne potentiométrique de résistance faible par rapport à celle de l'électrolyte, soit de 10 à 1000 . on désire parfois diminuer les déphasages dans la cuve en compensant la partie réactive de l'impédance d'interface par un déphaseur placé en série avec le potentiomètre d'alimentation de l'électrode.



P.E : Potentiomètre d'électrode

Le choix des éléments du déphaseur de telle façon que $LC\omega = 1/2$ permet de garder l'amplitude de la tension constante aux bornes du potentiomètre d'électrode lorsqu'on règle le potentiomètre de déphasage.

Ce réglage permet de faire varier de $\pm 5^\circ$ la phase de la tension aux bornes du potentiomètre d'électrode par rapport à la tension du potentiomètre de référence.

2.05 Mesure du Potentiel

La mesure du potentiel en un point quelconque de la cuve se fait par une méthode de zéro, c.à.d par comparaison avec le potentiel fourni par un potentiomètre de référence de grande précision.

Tout appareil de zéro fonctionnant un alternatif peut servir à constater l'égalité des tensions.

On peut utiliser un voltmètre à lampes; un oscilloscope a l'avantage de montrer la nature de la tension résiduelle.

Dans le cas d'une cuve plane, la sonde est constituée par un fil métallique rigide, rigoureusement vertical.

Pour pouvoir repérer le point où l'on effectue la mesure, le porte sonde est généralement mobile sur un pont, suivant une coordonnée que nous appellerons y ; le pont lui même mobile suivant la coordonnée x ; le déplacement de la sonde doit se faire dans un plan rigoureusement horizontal et les déplacements suivant x et y doivent être perpendiculaires entre eux et parallèles aux axes du modèle.

2.06 Tracé des équipotentiellles

Pour chercher tous les points de la cuve ayant même potentiel, on est amené à tracer une carte de courbes équipotentiellles pour un problème plan ou de révolution.

On règle alors que le potentiel de référence à la valeur correspondant à l'équipotentielle à tracer et l'on peut procéder point par point en cherchant pour chaque valeur de y (ou de x) le point ayant le potentiel désiré.

2.07 - DOMAINES D'APPLICATION DE LA METHODE RHEOGRAPHIQUE.

a) - Elaboration d'équations mathématiques.

Avant d'aborder les applications pratiques, voyons le part que l'on peut tirer de la relation entre les fonctions analytiques et les fonctions harmoniques.

Soit par exemple la fonction analytique:

$$F(z) = F(x + iy) = \varphi(x, y) + j \psi(x, y) \quad (1)$$

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour la fonction $F(z)$ ait une dérivée unique en un point z est que φ et ψ satisfassent au système.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}}$$

C'est à dire que les fonctions φ et ψ sont des fonctions harmoniques, et d'après (2) que les lignes $\varphi = \text{cte}$ et $\psi = \text{cte}$ sont orthogonales.

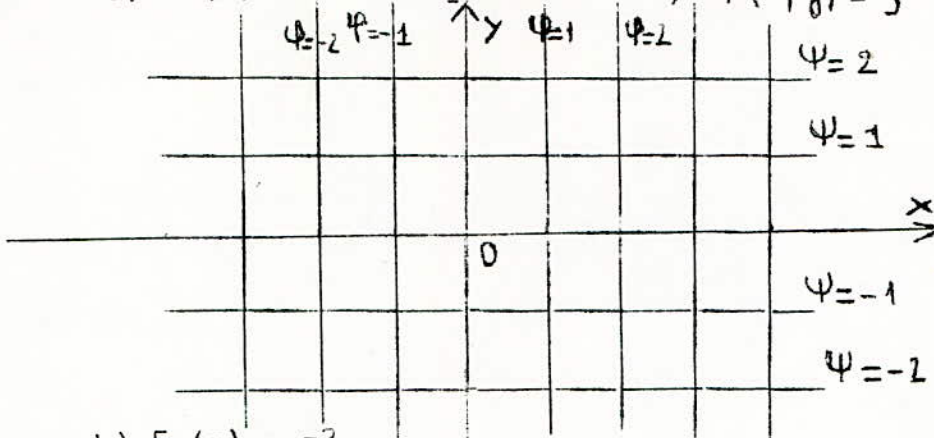
Remarque:

Si donc les lignes $\varphi = \text{cte}$ sont représentées à la cuve rhéographique par des équipotentiels, les lignes $\psi = \text{cte}$ sont des lignes de courant et inversement.

Il existe donc deux analogies possibles pour représenter la fonction $F(z)$ à la cuve, selon que l'on identifie le potentiel à φ ou à ψ . Les fonctions φ et ψ sont dites fonctions conjuguées.

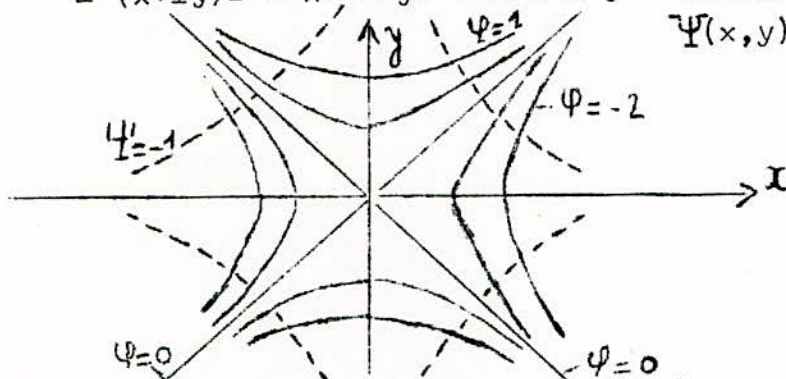
prenons quelques exemples

a) $F(z) = z$ --- $\varphi(x,y) = x$; $\psi(x,y) = y$



b) $F(z) = z^2$

$$= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy \quad \begin{aligned} \varphi(x,y) &= x^2 - y^2 \\ \psi(x,y) &= 2xy \end{aligned}$$



$$F(z) = F(x + iy) = x^2 - y^2 + i 2xy$$

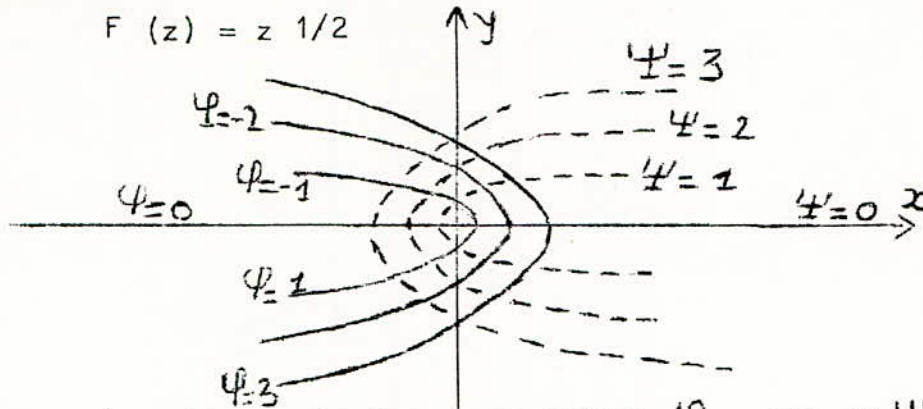
$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{si} \quad \varphi(x,y) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$$

c'est l'équation d'une hyperbole centrée en

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}; \quad \text{le point de symétrie étant} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Exemple 3

$$F(z) = z^{1/2}$$

Exemple 3

Les lignes le long desquelles $\psi = \text{cte}$ ou $\Psi = \text{cte}$ pour les fonctions

$$\begin{aligned} F(z) &= z \\ F(z) &= z^2 \\ F(z) &= z^{1/2} \end{aligned}$$

vérifient les relations déjà trouvées à savoir :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

L'étude des singularités des fonctions analytiques est encore plus intéressante. Il en est ainsi de la fonction $F(z) = K \log z$ au voisinage de l'origine, dont une représentation simple peut être obtenue à la cuve en prenant l'analogie de ψ et du potentiel (voir analogie théoélectrique) c'est à dire que : $V = K \log z$.

Les équipotentielles sont alors des cercles concentriques de centre O. Les lignes de courant sont des rayons.

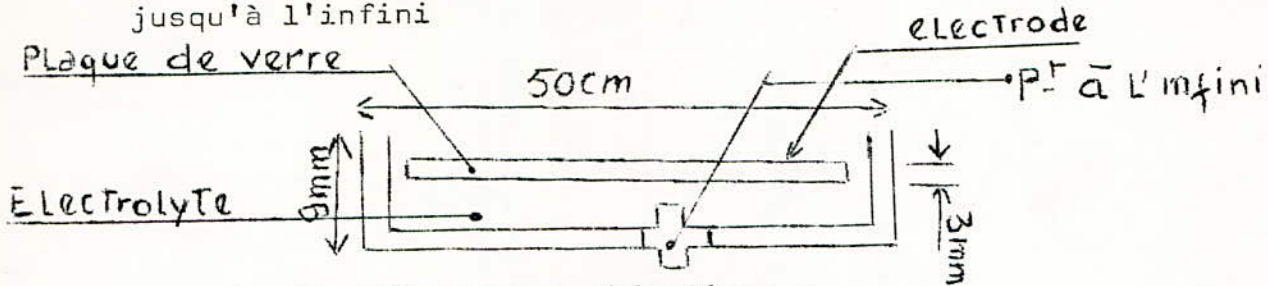
Les autres singularités sont plus difficiles à représenter à la cuve. Ainsi, un pôle d'ordre 1 devra être figuré par un doublet de deux injecteurs très voisins, dont les courants sont égaux, mais de signes opposés, en général les 2 injecteurs sont deux électrodes circulaires dont on a supprimé les parties en contact, que l'on a remplacés par un disque isolant.

Les dimensions finies de la cuve empêchent de représenter la fonction dans tout le plan. On peut tirer parti du fait que $F(1/z)$ est aussi une fonction analytique : on représentera la fonction $F(z)$ pour $z \in R$ dans une première cuve et $F(1/z)$ pour $z \in R$ dans une cuve associée, compte tenu de l'inversion effectué sur z .

On voit donc que dans certains cas on est amené à réaliser deux cuves pour effectuer une mesure expérimentale et puis cette méthode pose le problème de la continuité, de la réalisation des conditions aux limites, zones à conductibilités différentes.

C'est pour cette raison qu'on a proposé la réalisation de double cuve ; une cuve plane circulaire est séparée en deux couches par un disque isolant horizontal, de diamètre à peine inférieur à celui de la cuve, de façon à assurer la continuité du potentiel à la limite des deux couches par l'électrolyte lui-même.

La partie supérieure sert aux mesures tandis que la partie inférieure permet de représenter la partie du plan s'étendant jusqu'à l'infini



exemple d'application mathématique :

On va déterminer les racines d'une équation algébrique par la méthode de F. Lucas.

Soit une équation de degré n .

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

on utilise un polynôme auxiliaire de degré $n + 1$

$$G(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_{n+1})$$

Les racines λ_i ; $i = 1, n + 1$ sont connues. La fonction $H = F(z) / G(z)$ est aussi une fonction rationnelle dont on peut calculer le développement.

$$H(z) = \sum_{v=1}^{n+1} \frac{C_v}{z - \lambda_v}$$

on représente par analogie la fonction ;

$$K(z) = \sum C_v \text{Log}(z - \lambda_v)$$

à l'aide d'électrodes d'intensité C_v placées aux points λ_v . Les zéros de $F(z)$ sont tels que $dK/dz = 0$; au voisinage des points qui les représentent, les lignes équipotentielles $\text{Re}[K(z)] = \text{cte}$ ont donc l'allure de la fonction $z^2 = F(z)$ au voisinage de l'origine.

Rappel

pour que $K(z)$ soit dérivable en z_0 il est nécessaire que les fonctions réelles :

$$\text{Re}[k(z)] = P(x, y)$$

$$\text{Im}[k(z)] = Q(x, y)$$

admettent des dérivées partielles aux points z_0 et satisfassent

$$\text{à : } \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{dk}{dz} \right)_{z=z_0} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y=y_0, x=x_0} + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

5.02 Analyse et synthèse des réseaux électriques

L'une des applications de la représentation des fonctions analytiques par la méthode rhéographique est l'analyse et la synthèse de réseaux de résistances, d'inductance et de capacité. On sait que l'impédance, l'admittance ou une fonction de transfert est donné toujours sous la forme la plus générale par

$$Z(p) = K \frac{(p - P'1)(p - P'2) \dots (p - P'n)}{(p - P1)(p - P2) \dots (p - Pn)}$$

.../...

où $P = \alpha + j\omega$ représente la fréquence complexe.

On peut représenter à la cuve cette fonction par ces pôles, en la développant sous la forme :

$$Z(p) = Z_0 + \lambda_0 p + \sum_i^n \frac{C_V}{P - P_V}$$

Cette représentation n'est pas simple à réaliser, aussi préfère-t-on généralement représenter la fonction :

$$\begin{aligned} \text{Log } Z(p) &= \text{Log}(|Z|) + j \text{Arg}(Z) \\ &= \text{Log}(K) + \sum \text{Log}(P - P'_V) - \sum \text{Log}(P - P_V) \end{aligned}$$

La fonction $\text{Log}(|Z|)$ est alors représentée par le potentiel d'un ensemble d'injecteurs, le courant entrant par un zéro simple ayant une valeur I_0 , les courants sortants par un pôle simple étant $-I_0$.

On aura la réponse du réseau en régime sinusoïdal en mesurant V le long de l'axe $j\omega$ ce qui nous donnera $\text{Log}(|Z|)$.

--- CHAPITRE ---

3

ETUDE DE CIRCUITS
COUPLES
PAR LA METHODE DES PÔLES

- CIRCUITS COUPLES.

1 - Rappels.a) Impédance de transfert Z_t .

Elle s'exprime par :

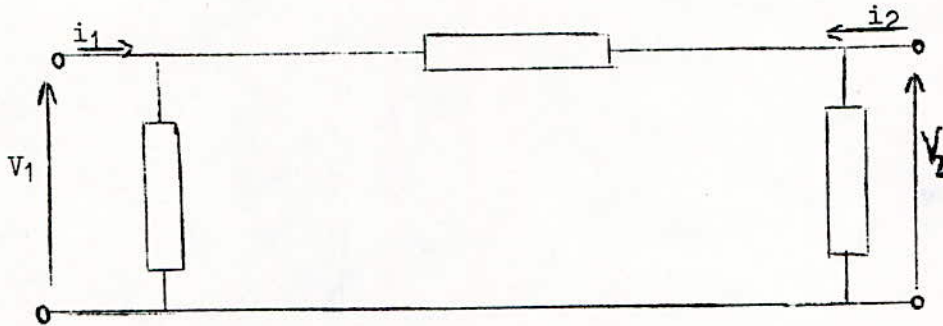
$$Z_t = V_2 / i_1$$

b) Impédance d'entrée.

$$Z_e = V_1 / i_1$$

c) Impédance de sortie.

$$Z_s = V_2 / i_2$$

2 - Diagramme des pôles de l'impédance de transfert Z_t .

Ecrivons les équations aux admittances du quadripôle précédent:

$$(1) \quad \begin{aligned} i_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ 0 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \quad \text{avec } i_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad Y_{11} &= Y_1 + Y_{12} \\ (2) \quad Y_{22} &= Y_2 + Y_{12} \\ Y_{12} &= Y_{21} = j\omega k \sqrt{C_{11} C_{22}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_1 + C_{12} \\ C_{22} &= C_2 + C_{12} \end{aligned} \quad \text{avec } k : \text{coefficient de couplage des 2 circuits couplés}$$

$$k = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}}$$

Ceci est vrai si et seulement si l'admittance Y_{12} est purement capacitive

dans le cas où Y_{12} est purement inductive on a :

$$k = \sqrt{\frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_{12})(L_2 + L_{12})}}$$

$$\text{posons : } Y_1 = \frac{1}{R_1} + j C_{1\omega} + \frac{1}{jL_{1\omega}}$$

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} + j C_{2\omega} + \frac{1}{jL_{2\omega}}$$

L'impédance de transfert Z_t se calcule du système d'équation (1), il vient après résolution :

$$Z_t = \frac{Y_{12}}{Y_{11} Y_{22} - Y_{12}^2} \quad (3)$$

2.1 Détermination des Pôles

On utilise le résultat suivant :

"Les pôles se déterminent à partir des fréquences complexes P_{11} et P_{22} . P_{11} étant la fréquence complexe du primaire avec le secondaire en court circuit et P_{22} étant la fréquence complexe du secondaire quand le primaire est en court circuit".

Ainsi P_{11} est la fréquence complexe du circuit dans l'admittance est : $Y_{11} = Y_1 + Y_{12}$ (pour $V_2 = 0$)

on voit que pour $V_2 = 0$ l'admittance de couplage se trouve en parallèle avec Y_1

il en est de même pour P_{22} ; fréquence complexe du circuit dont l'admittance est : $Y_{22} = Y_2 + Y_{12}$ pour $V_1 = 0$

Le système d'équation (2) donne :

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= Y_1 + Y_{12} \\
 &= G_1 + j C_1 \omega + \frac{1}{j L_1 \omega} + j k \omega \sqrt{C_{11} C_{22}} \quad \text{avec } G_1 = \frac{1}{R_1} \\
 &= G_1 + j (C_1 + C_{12}) \omega + \frac{1}{j L_1 \omega} \quad \text{car } k = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} \\
 &= G_1 + j C_{11} \omega + \frac{1}{j L_1 \omega}
 \end{aligned}$$

$$Y_{11} = G_1 + p C_{11} + \frac{1}{L_1 p}$$

donc l'impédance s'écrit :

$$Z_{11} = \frac{1}{G_1 + p C_{11} + \frac{1}{L_1 p}} = \frac{p}{p G_1 + p^2 C_{11} + \frac{1}{L_1}}$$

Les fréquences complexes P_{11} sont racines du Polynôme :

$$C_{11} p^2 + G_1 p + \frac{1}{L_1} = 0$$

$$\Delta = G_1^2 - 4 \frac{C_{11}}{L_1} < 0$$

$$P_{11} = -\frac{G_1}{2C_{11}} + \frac{j}{2C_{11}} \sqrt{4C_{11}^2 \frac{1}{L_1} - G_1^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{G_1}{2C_{11}} + \frac{j}{2C_{11}} \sqrt{4C_{11}^2 \left[\frac{1}{L_1 C_{11}} - \left(\frac{G_1}{2C_{11}} \right)^2 \right]} \\
 P_{11} &= -\frac{G_1}{2C_{11}} + j \sqrt{\frac{1}{L_1 C_{11}} - \left(\frac{G_1}{2C_{11}} \right)^2} \quad \text{ou } G = \frac{1}{R_1}
 \end{aligned}$$

de même on obtient pour la fréquence complexe P_{22}

$$P_{22} = \frac{G_2}{2C_{22}} + j \sqrt{\frac{1}{L_2 C_{22}} - \left(\frac{G_2}{2C_{22}} \right)^2} \quad \text{avec } G_2 = \frac{1}{R_2}$$

dans le cas où $C_{12} = 0$ on a : $C_{22} = C_2$
 $C_{11} = C_1$

$$P_{11} = -\frac{G_1}{2C_1} + j \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} - \left(\frac{G_1}{2C_1} \right)^2}$$

$$P_{22} = -\frac{G_2}{2C_2} + j \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2} - \left(\frac{G_2}{2C_2} \right)^2}$$

.../...

portons ces 2 relations dans la relation (z) nous avons :

$$Z_t = \frac{j k \omega_0 \sqrt{C_1 C_2}}{4 C_1 C_2 \left[(P - P_{11})(P - P_{22}) - \left(\frac{k \omega_0}{2}\right)^2 \right]} \quad C_{12} = 0$$

$$= \frac{j k \omega_0}{4 \sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{P^2 - P (P_{22} + P_{11}) + P_{11} P_{22} + \frac{k \omega_0^2}{2}}$$

Les 2 pôles recherchés sont les racines complexes du dénominateur.

$$P^2 - P (P_{22} + P_{11}) + P_{11} P_{22} + \left(\frac{k \omega_0}{2}\right)^2 = 0$$

on trouve :

$$(4) \quad P_1 = \frac{P_{11} + P_{22}}{2} + j \sqrt{\left(\frac{\omega_0 k}{2}\right)^2 - \left(\frac{P_{11} - P_{22}}{2}\right)^2}$$

$$P_2 = \frac{P_{11} + P_{22}}{2} - j \sqrt{\left(\frac{\omega_0 k}{2}\right)^2 - \left(\frac{P_{11} - P_{22}}{2}\right)^2}$$

Le système d'équation () s'écrit encore :

$$P_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0 k}{2} + j \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2}$$

$$P_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j \frac{\omega_0 k}{2} + j \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2}$$

Si Q est relativement élevé $\frac{\omega_0^2}{(2Q)^2}$ le système d'équation (4) se simplifie et devient :

$$P_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \left(\omega_0 + \frac{\omega_0 k}{2}\right)$$

$$P_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \left(\omega_0 - \frac{\omega_0 k}{2}\right)$$

Si on veut exprimer P_1 et P_2 en Hertz, après division par 2π on a :

$$P_1 = -\frac{f_0}{2Q} + j \left(f_0 + \frac{f_0 k}{2}\right)$$

$$P_2 = -\frac{f_0}{2Q} + j \left(f_0 - \frac{f_0 k}{2}\right)$$

On remarque que dans le cas où $f_1 = f_2$; $Q_1 = Q_2$ la distance entre les pôles est de $f_0 k$, et que le coefficient d'amortissement est $f_0/2Q$.

Remarque :

f_1 et f_2 fréquences du primaire et du secondaire avec l'élément de couplage débranché dans le cas du circuit en Π et court-circuité dans le cas du circuit en T.

L'impédance de transfert se met sous la forme générale :

$$Z_t = \frac{kj\omega}{4 \sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{(P-P_1)(P-P_2)} = K \frac{1}{(P-P_1)(P-P_2)}$$

$$Z_t = K \frac{1}{(P-P_1)(P-P_2)} \quad (5)$$

établissons la forme de la courbe de réponse à partir de l'emplacement des pôles dans les cas suivants :

- a) $f_1 = f_2$; $Q_1 = Q_2$
- ;
- ;
- ;
- ;

2.2. Emplacement des Pôles ($f_1 = f_2$; $Q_1 = Q_2$)

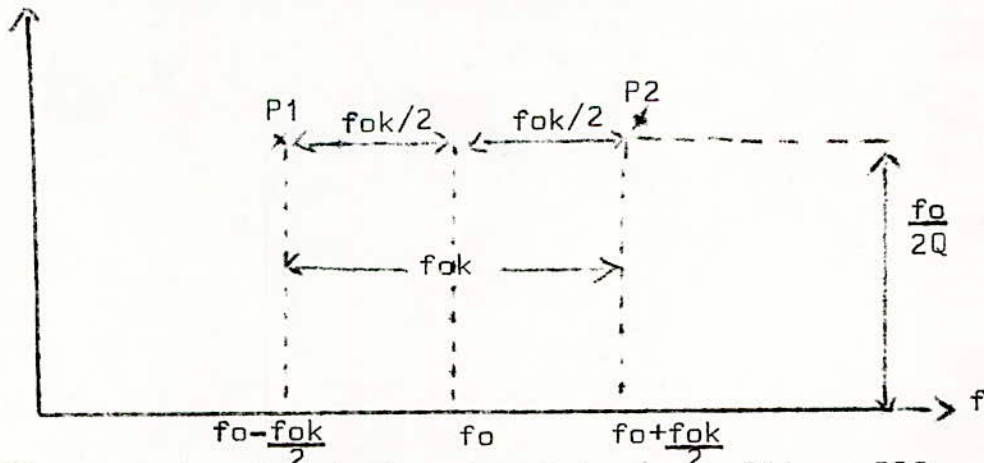
si $f_1 = f_2$ c'est à dire que les fréquences du primaire et du secondaire sont égales, et si $Q_1 = Q_2$ (coefficients de surtensions du primaire et du secondaire) : dans ce cas nous aurons l'égalité des parties réelles et imaginaires des fréquences complexes P_{11} et P_{22} .

en tenant compte que :

$$\frac{G}{2C} = \frac{1}{2RC} = \frac{\omega_0}{2Q} \quad (Q = RC\omega_0)$$

et que : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Diagramme de pôles de deux circuit couplés ($Q_1 = Q_2$)



f_{11} , f_{22} : parties imaginaire des fréquences P_{11} et P_{22}
 si $f_1 = f_2$ $f_{11} = f_{22}$

on peut écrire avec une approximation légitime, que la fréquence centrale f_0 s'exprime par :

$$f_0 = \frac{f_{11} + f_{22}}{2}$$

si $f_{11} = f_{22}$ on a : $f_0 = f_{11} = f_{22}$

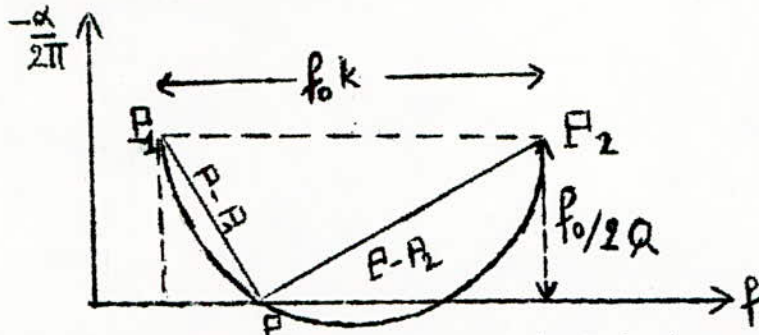
2.3 Etablissement des relations fondamentales

Récrivons la fonction de transfert Z_t :

$$Z_t = \frac{k i \omega_0}{4 \sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{(P-P_1)(P-P_2)}$$

P_1 et P_2 étant déjà déterminés.

a) Ecart entre les sommets



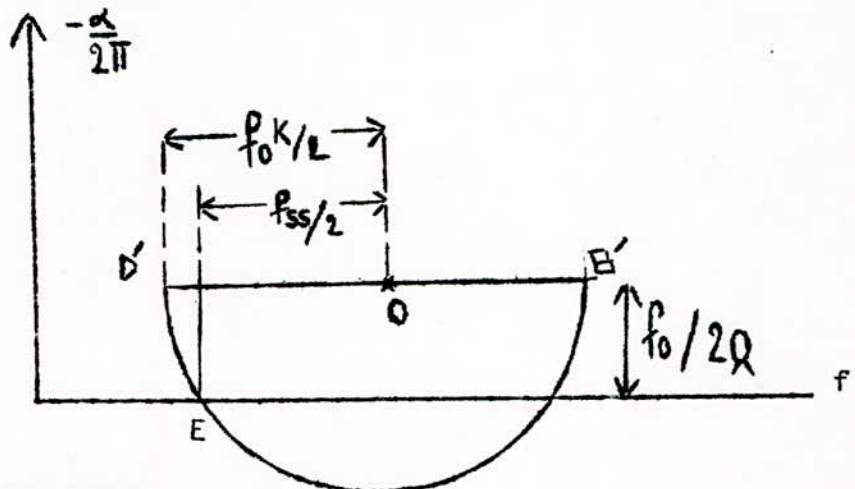
Les deux sommets cherchés correspondent à des pts d'amplitude maximale, ainsi il faut que $(P-P_1) (P-P_2)$ soit minimal.

$P-P_1$ peut être représenté par un vecteur de même que $P-P_2$; cherchons les pts sur l'axe des fréquences, formant un triangle de base $f_0 k$. Les pts vérifiant la propriété :

$(P-P_1) (P-P_2)$ minimal

forment un triangle rectangle donc inscriptible dans un cercle de diamètre $f_0 k$ passant par P_1 et P_2 ; ce cercle coupe l'axe des fréquences en 2 pts correspondant aux fréquences des sommets.

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle ainsi obtenu



$$OF = \sqrt{OE^2 - EF^2}$$

où $OE = OD' = f_0 k / 2$

$$OF = f_{ss} / 2 = \sqrt{(f_0 k / 2)^2 - (f_0 / 2Q)^2} \quad \boxed{f_{ss} = \frac{f_0}{Q} \sqrt{(kQ)^2 - 1}}$$

La relation 6 donne l'écart entre sommets quand $Q_1 = Q_2$

Remarque :

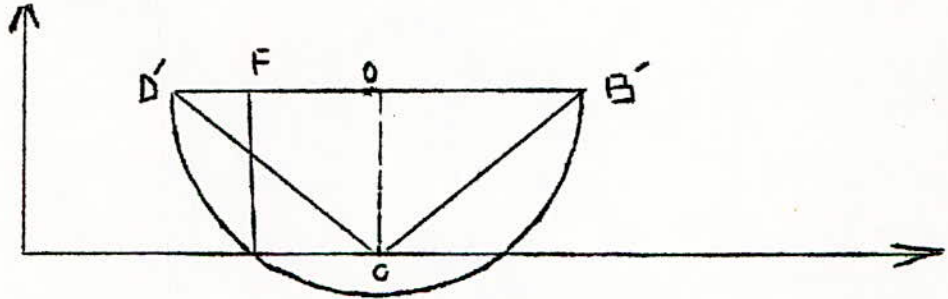
Si $f_{ok}/2 = f_0/2Q$ c'est à dire $kQ = 1$ $f_{ss} = 0$

L'écart entre sommet est nul; le cercle ayant comme diamètre la distance entre les pôles est tangent à l'axe des fréquences; les 2 sommets sont alors confondus ou pourra alors parler de couplage transitionnel.

Ce couplage donne une courbe avec un sommet plat que nous verrons plus loin (fonction du Butterworth de deuxième ordre).

b) Gain relatif à la fréquence centrale

Il s'exprime par le rapport entre le produit $(P-P_1)$ $(P-P_2)$ correspondant à la fréquence centrale et celui correspondant aux sommets; ainsi on a :



à la fréquence centrale le produit est :

$$(CB')^2 = (OC)^2 + (OB')^2 = (f_0/2Q)^2 + (f_{ok}/2)^2 \\ = (f_0/2Q)^2 (kQ)^2 + 1$$

à la fréquence correspondant aux sommets :

$$D'E \cdot EB' = EF \cdot D'B' = (f_0/2Q) \cdot (f_{ok})$$

$$A(f_p) = \frac{2 k Q}{1 + (kQ)^2} \quad (7)$$

c) Gain à la fréquence centrale

$$G = \frac{g_m w_o k}{4 \sqrt{C_1 C_2}} \frac{1}{(P-P_1)(P-P_2)}$$

g_m : pente du tube (ou du transistor) utilisé.

comme $(P-P_1)(P-P_2)$ est exprimé par : $(f_0/2Q)^2 (kQ)^2 + 1$

$$\text{et que } \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{w_o \sqrt{R_1 R_2}}{Q} \quad \text{car } \frac{1}{RC} = \frac{w_o}{Q}$$

Le gain s'exprime encore par :

$$G = \frac{g_m \sqrt{R_1 R_2}}{1 + (kQ)^2} \quad (8)$$

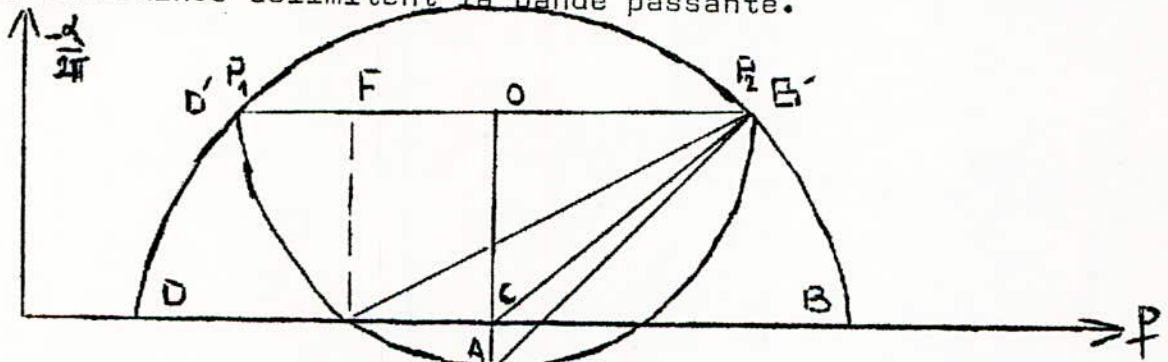
d) Gain maximal

La relation (8) présente un gain maximum pour $kQ=1$

$$G_{\max} = \frac{g_m \sqrt{R_1 R_2}}{2}$$

e) Détermination de la bande passante à 3 dB

Pour déterminer la bande passante à -3 dB, on trace un deuxième cercle ayant comme centre le point inférieur A du premier cercle et passant par les 2 pôles. Les points d'intersection D et B ainsi déterminés délimitent la bande passante.



$$(AB')^2 = (OA)^2 + (OB')^2$$

$$AB' = AB$$

$$(AB)^2 = 2 \left(\frac{f_0 k}{2} \right)^2$$

$$OA = OB' = \frac{f_0 k}{2}$$

$$AC = OA - OC = \frac{f_0 k}{2} - \frac{f_0}{2Q} = \frac{f_0}{2Q} (kQ - 1)$$

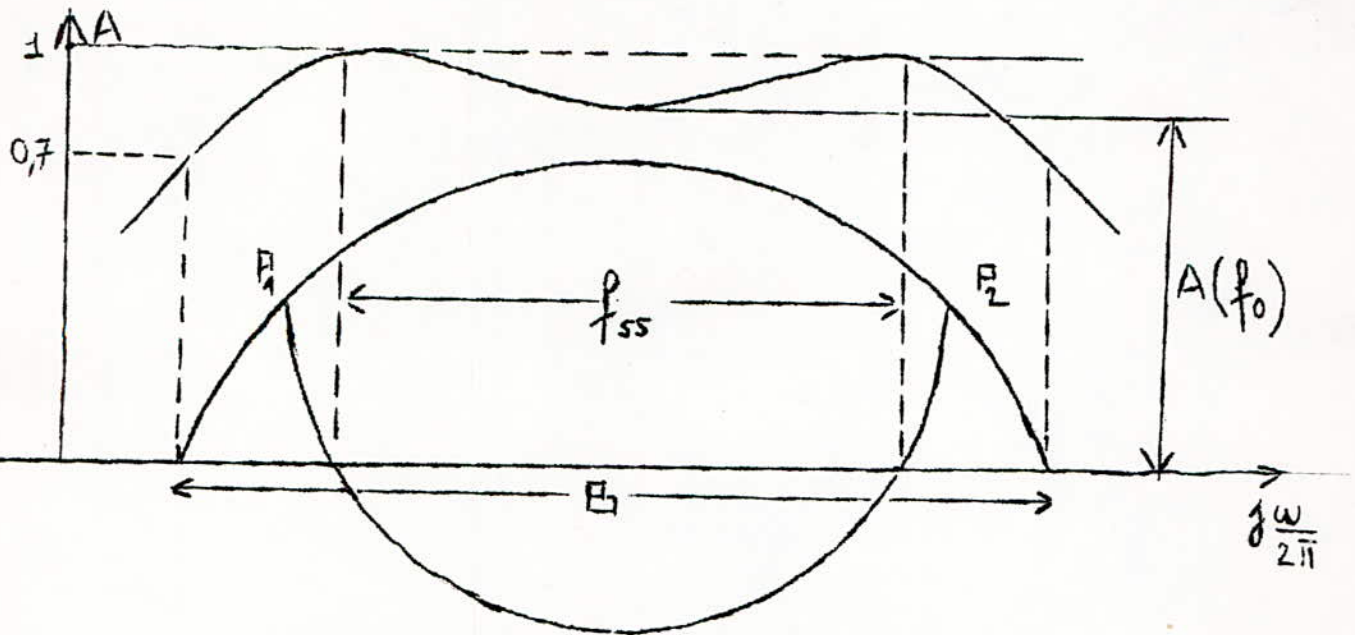
$$2 CB = \sqrt{(AB)^2 - (AC)^2}$$

$$= 2 \sqrt{2 \left[\frac{f_0 k}{2} \right]^2 - \left[\frac{f_0}{2Q} \right]^2 (kQ - 1)^2} \quad CB = \frac{f_0}{2Q} \sqrt{(kQ)^2 + 2kQ - 1}$$

$$B = 2CB = \frac{f_0}{Q} \sqrt{(kQ)^2 + 2kQ - 1} \quad (9)$$

Si $kQ = 1$

$$B = \frac{f_0}{Q} \sqrt{2}$$



Amplificateurs à circuits Bouchons synchrones

1 Courbe amplitude / fréquence d'un circuit bouchon

Si l'amplificateur comporte n étages utilisant des circuits synchrones, l'amplitude relative de la courbe de réponse à une fréquence quelconque s'obtient en élevant à la puissance n l'amplitude relative d'un seul étage.

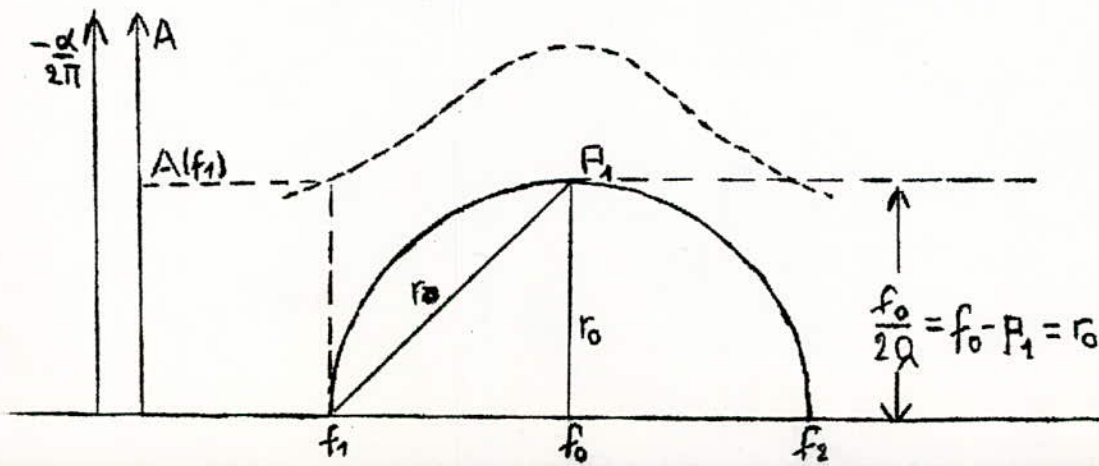
$$G_T = G^n$$

On avait vu précédemment que :

$$Z(f_1) = \frac{1}{2C} \left| \frac{1}{f_1 - P_1} \right| = K \frac{1}{r_1} \quad \text{avec } K = \frac{1}{2C}$$

$$Z(f_0) = \frac{1}{2C} \left| \frac{1}{f_0 - P_1} \right| = K \frac{1}{r_0} \quad \text{avec } K = \frac{1}{2C}$$

$$A(f_1) = \left| \frac{Z(f_1)}{Z(f_0)} \right| = \left| \frac{f_0 - P_1}{f_1 - P_1} \right| = \frac{r_0}{r_1}$$

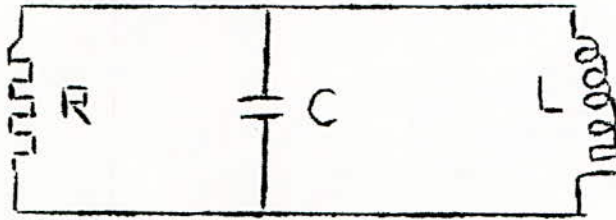


Comme $A(f_1) =$

en renouvelant l'opération aux différentes fréquences, on obtient la courbe de résonance, cette courbe est symétrique de part et d'autre de la fréquence de résonance f_0 .

exemple : courbe d'amplitude d'un circuit antirésonnant : $f_0 = 30 \text{ MHz}$
(voir sur feuille papier millimétré)

schéma



soit ω_0 la pulsation de résonance

$$Q_t = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} \quad Q_t : \text{coefficient de surtension}$$

Impédance du circuit antirésonnant et diagrammes des pôles

$$Z = 1/Y$$

$$Y = C_p + \frac{1}{Lp} + G \quad \text{ou } p = j\omega, \quad \omega = 2\pi f, \quad G = 1/R$$

$$Z(p) = \frac{1}{C_p + \frac{1}{Lp} + G} = \frac{p}{p^2 C + pG + \frac{1}{L}}$$

$$Z(p) = \infty \text{ qd } p^2 C + pG + \frac{1}{L} = 0$$

$$p_1, p_1^* = \frac{-G}{2C} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2}$$

Application numérique :

$$- \frac{\omega}{2\pi} = \frac{f_0}{2Q}$$

on sait que $Q = R C \omega_0$

$$\text{donnons nous } \begin{aligned} R &= 3 \text{ k}\Omega \\ C &= 5,59 \text{ pF} \\ L &= 5 \text{ nH} \end{aligned}$$

$$\omega_0 = 2\pi \times 30 \times 10^6 = 6\pi \times 10^7 \text{ rd/s}$$

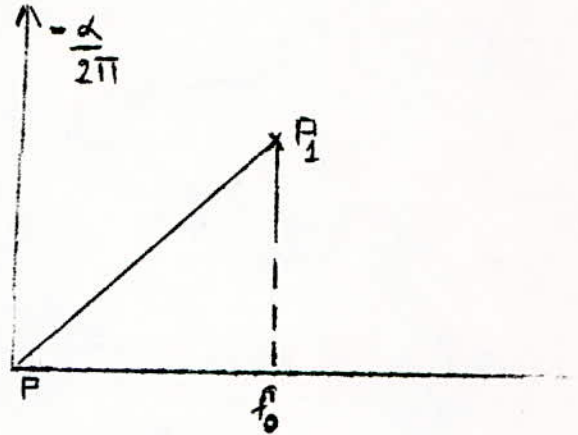
$$Q = RC\omega_0 = 3 \times 10^3 \times 5,59 \times 10^{-12} \times 30 \times 2\pi \times 10^6$$

$$= 16,77 \times 3 \times 2\pi \times 10^{-2} = 315,94 \times 10^{-2}$$

$$Q = 3,16$$

comme P_1 , $P_1^* = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0$

$$P_1, P_1^* = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0$$



$$\frac{-dC_0}{2\pi} = \frac{30 \cdot 10^6}{2 \times 3,16} = \frac{30}{6,32} = 4,74 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$\frac{dC_0}{2\pi} = 4,74 \text{ MHz}$$

$$P_1 = \underline{\underline{(4,74 + j 30) \text{ MHz}}}$$

comme $\frac{G}{2C} = \frac{1}{2RC} = \frac{\omega_0}{2R}$ ($Q = RC\omega_0$)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$P_1, P_1^* = \frac{\omega_0}{2Q} \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2}$$

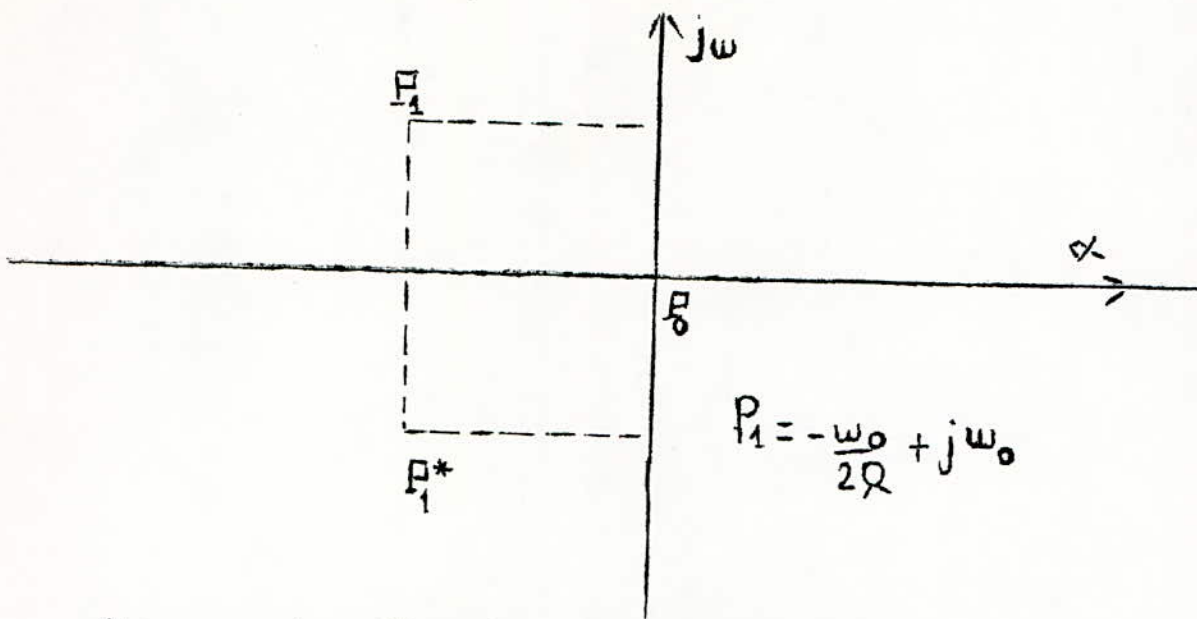
si $\omega_0^2 \gg \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2$

$$P_1, P_1^* = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0$$

Le point $p = 0$ correspondant à l'origine des axes que nous indiquons par p_0 ; p_0 s'appelle le zéro de la fonction car $Z(p_0) = 0$

$d_0 = \frac{\omega_0}{2Q}$: coefficient d'amortissement

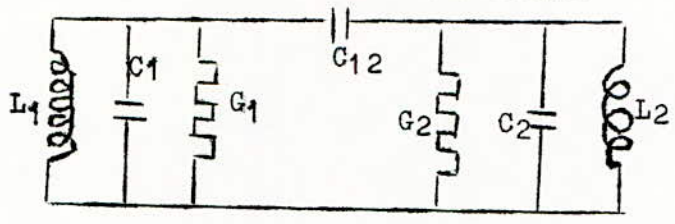
$$Z(p) = \frac{P}{c(p^2 + p\frac{G}{C} + \frac{1}{LC})} = \frac{1}{c} \frac{(P-p_0)}{(P-P_1)(P-P_1^*)}$$



$$P_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0$$

diagramme des pôles de deux circuits couplés

a) courbe d'amplitude fréquence
proposons nous le schéma suivant



la fonction de transfert d'un tel circuit est :

$$Z_t = \frac{j \omega_0 k}{4 \sqrt{C_{11} C_{22}}} \frac{1}{(P-P_1)(P-P_2)}$$

$$C_{11} = C_1 + C_{12}$$

$$C_{22} = C_2 + C_{12}$$

$$P_1 = \frac{P_{11} + P_{22}}{2} + j \left[\left(\frac{\omega_0 k}{2} \right)^2 - \left[\frac{P_{11} - P_{22}}{2} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (1)$$

$$P_2 = \frac{P_{11} + P_{22}}{2} - j \left[\left(\frac{\omega_0 k}{2} \right)^2 - \left[\frac{P_{11} - P_{22}}{2} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

les fréquences complexes P_{11} et P_{22} sont données par :

$$P_{11} = -\frac{G_1}{2C_{11}} + j \sqrt{\frac{1}{L_1 C_{11}} - \left[\frac{G_1}{2C_{11}}\right]^2} \quad (3)$$

$$P_{22} = -\frac{G_2}{2C_{22}} + j \sqrt{\frac{1}{L_2 C_{22}} - \left[\frac{G_2}{2C_{22}}\right]^2} \quad (4)$$

$$\omega_0 = \frac{P_{11} + P_{22}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} \quad (5)$$

$$k = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} \quad (6)$$

soient $C_1 = C_2 = C = 6 \text{ p F}$

$R_1 = R_2 = R = 3 \text{ k}\Omega$

$L_1 = L_2 = L = 5 \text{ N H}$

on a donc $C_{22} = C_{11} = C_1 + C_{12}$

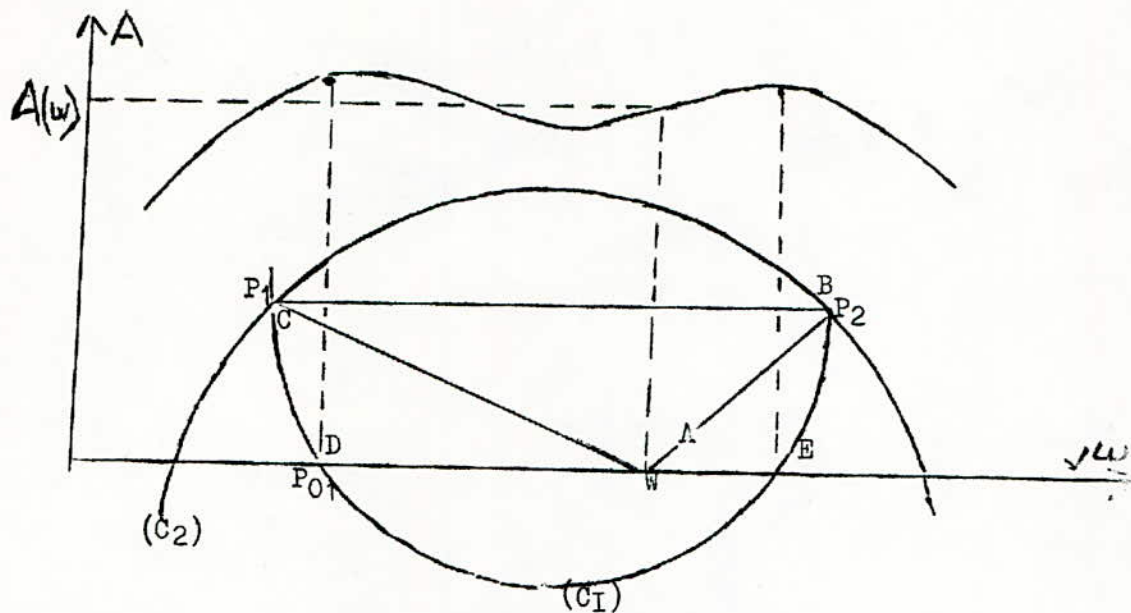
imposons nous un coefficient de couplage $k = 0,8$
de la relation (6) on a :

$$0,8 = \frac{C_{12}}{C_{11}} = \frac{C_{12}}{(C_1 + C_{12})} = \frac{C_{12}}{(6 + C_{12})}$$

$$0,8 (6 + C_{12}) = C_{12} \quad 0,48 = C_{12} - 0,8C_{12} = 0,2C_{12}$$

$$\underline{\underline{C_{12} = 2,4 \text{ p F}}}$$

Bouchons b - trace de la courbe Amplitude / fréquence de 2 circuits



en prenant les deux cercles C_1 et C_2 on définit les deux points dont dépend la forme de la courbe.

on peut déterminer les autres points de la courbe en mesurant le produit des distances $P_{01} - P_1$ et $P_{01} - P_2$ et en le divisant par le produit des distances $(P - P_1)$ et $(P - P_2)$

$$A(\omega) = \frac{(P_{01} - P_1)(P_{01} - P_2)}{(P - P_1)(P - P_2)} = \frac{C D \cdot B D}{A C \cdot A B}$$

pour le tracé de la courbe (voir feuille millimétrée) compte tenu des hypothèses on a :

$$P_{11} = P_{22}$$

on a donc :

$$P_1 = \frac{P_{11} + P_{22}}{2} - j \frac{\omega k}{2}$$

$$P_2 = \frac{P_{11} + P_{22}}{2} - j \frac{\omega k}{2}$$

calcul de la pulsation ω_0

$$\omega_0 = P_{11}$$

on trouve : $P_{11} = (-19,8 + j 153) 10^6$

$$\begin{aligned} \text{donc } \omega_0 &= \sqrt{(19,8)^2 + (153)^2} \cdot 10^6 \\ &= \sqrt{392,04 + 23409} \cdot 10^6 \\ &= 154,27 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\omega_0 = 154,27 \cdot 10^6 \text{ rd/s}}}$$

$$P1 = [-19,8 + j 153 + j 123,416] 10^6 \quad P1 = (-19,8 + j 276,416) 10^6$$

$$P2 = [-19,8 + j 153 - j 123,416] 10^6 \quad P2 = (-19,8 + j 29,584) 10^6$$

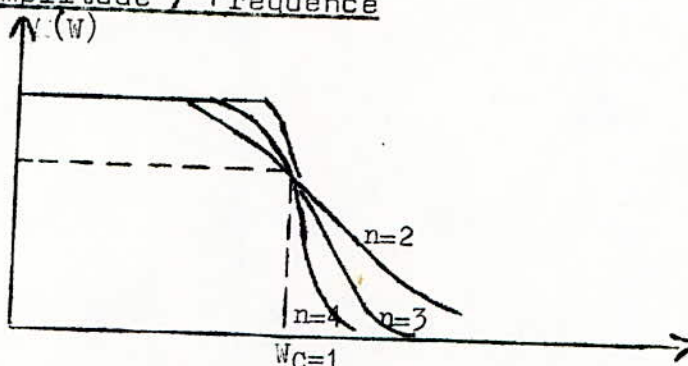
étude d'un filtre de Butterworth
à l'aide de la méthode des Pôles

-o0o-

Les distributions des pôles des filtres passe bas assurant des courbes d'amplitudes les plus plates possibles ont été étudiés par Butterworth. D'après cet auteur on peut rapprocher la courbe de réponse du filtre passe pas idéal à l'aide de la fonction :

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$

courbe d'amplitude / Fréquence



montrons que la fonction de transfert $A(\omega)$ a des pôles distribués le long d'un cercle.

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \quad (1)$$

développons la relation (1)

$$\left[1 + \omega^{2n}\right]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \omega^{2n} + \frac{3}{8} \omega^{6n} + \dots$$

on sait que, au moins, les trois premières dérivées s'annulent pour $\omega = 0$

on peut montrer que :

$$A(\omega)^2 = \text{Réal } A(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (2)$$

posons $p = j\omega$ la relation (2) devient

$$(P) = \frac{1}{1 - p^{2n}}$$

les valeurs qui annulent le dénominateur sont :

$$p^{2n} = 1 = e^{j2\pi(k-1)/2n} \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, 2n$$

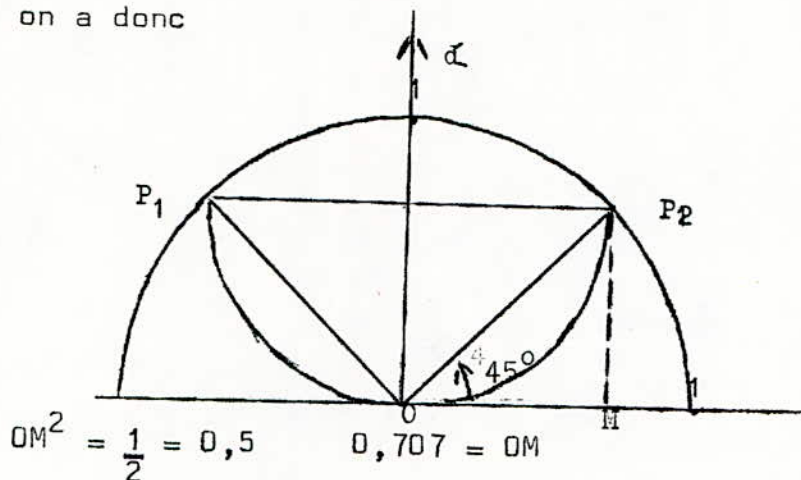
les racines du dénominateur sont :

$$j^2 (k - 1) / 2n$$

$$P_k = e$$

ces racines constituent les pôles de la fonction $f(P)$ on voit que ces pôles sont également distribués le long d'une circonférence.

on a donc



on peut donc parler de fréquences normalisées des pôles mesurée en valeur Δf par rapport à $B/2$ soit $2 \Delta f/B$.

exemple de calcul de circuits couplés

Donnons nous un circuit couplé de fréquence d'accord $f_0 = 30$ MHz et de Bande passante $B = 10$ MHz

Les pôles P_1 et P_2 ont les coordonnées suivantes :

$$P_2 : 0,707 \text{ et } 0,707$$

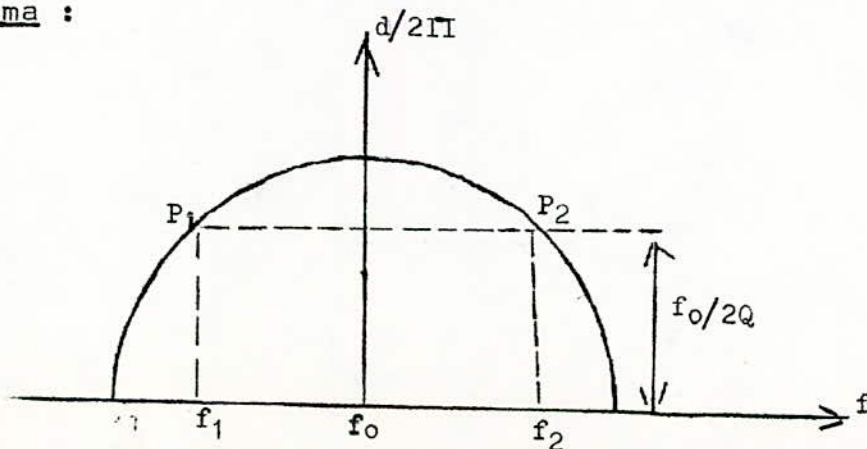
$$P_1 : 0,707 \text{ et } 0,707$$

$$f_{P_1} = f_0 - 0,707 \cdot B/2 = 30 \cdot 10^6 - 0,707 \times 5 \times 10^6$$

$$f_{P_1} = 26,465 \text{ MHz}$$

$$f_{P_2} = f_0 - (-0,707 \cdot \frac{B}{2}) = f_0 + 0,707 \times 5 \times 10^6 = 33,535 \text{ MHz}$$

Schéma :



.../...

On sait que l'ordonnée des Poles P_1 et P_2 est donnée par :

$$\frac{f_0}{2Q} = 0,707 \quad \frac{B}{2} = 0,707 \cdot 5 \times 10^6 = 3,535 \text{ MHz}$$

$$\text{d'où } Q = \frac{30 \times 10^6}{2 \times 3,535 \cdot 10^6} = 4,24328$$

comme les filtres de Butterworth s'obtiennent dans le couplage transitionnel.

$$kQ = 1 \quad k = \frac{1}{4,24328} = 0,236$$

calcul des éléments du circuit couplé .

prenons $C = 10 \text{ pF}$

$$\text{comme } Q = RC\omega_0 = R \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 6,28 \times 30 \times 10^6 = 4,24$$

$$R = 2,26 \text{ K}\Omega$$

Calculons L

$$\text{on sait que : } LC\omega_0^2 = 1$$

on aura donc :

$$L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-12} (6,28 \times 30 \times 10^6)^2}$$

$$L = 2,8 \mu\text{H}$$

Le tracé de la courbe est donnée sur feuille millimétrée.

— CHAPITRE —

4

APPLICATION DE LA CUVE
RHEOGRAPHIQUE
A L'ETUDE DES RESEAUX

Détermination de la réponse des filtres
à l'aide de la cuve rhéographique.

Principe de la cuve rhéographique.

On sait que la fonction impédance d'un réseau peut toujours s'exprimer par :

$$Z(\alpha, w) = |Z(\alpha, w)| e^{j\beta(\alpha, w)}$$

ou bien encore :

$$\begin{aligned} \text{Log } Z(\alpha, w) &= \text{Log } |Z(\alpha, w)| + j\beta(\alpha, w) \\ &= A + jB \end{aligned}$$

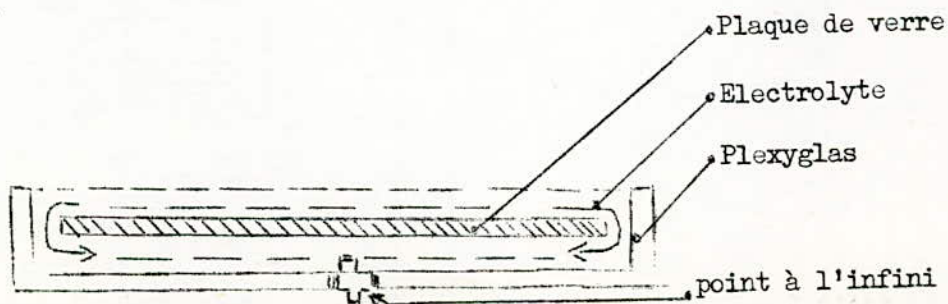
en tenant compte des conditions de Cauchy-Riemann on a :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial w} \\ \frac{\partial A}{\partial w} = -\frac{\partial B}{\partial \alpha} \end{array} \quad \text{où l'on déduit} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial w^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 B}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial w^2} = 0 \end{array}$$

Ces équations expriment aussi la loi de répartition du potentiel sur une surface uniformément résistante.

On a utilisé une cuve à double couches ; cette cuve contient une solution faible de sulfate de cuivre et comporte une cloison isolante séparant le contenu en deux couches communiquant aux deux extrémités. A l'aide des images de Kelvin composant toute une théorie, on montre que ces deux couches sont équivalentes à une surface infinie uniformément résistante.

C'est ainsi que, si l'on place au milieu de la cuve une électrode reliée à une source de courant, le flux électrique se refermera dans la couche inférieure suivant les lignes interrompues.



Ainsi tous les points à l'infini se trouvent matérialisés en un pont, la cuve peut être alimentée en courant alternatif par un ampli BF attaqué par un oscillateur 500 HZ

Le point milieu du transformateur de sortie de l'ampli BF sera relié au point de la cuve.



A : sortie >0 vers les électrodes matérialisant les pôles

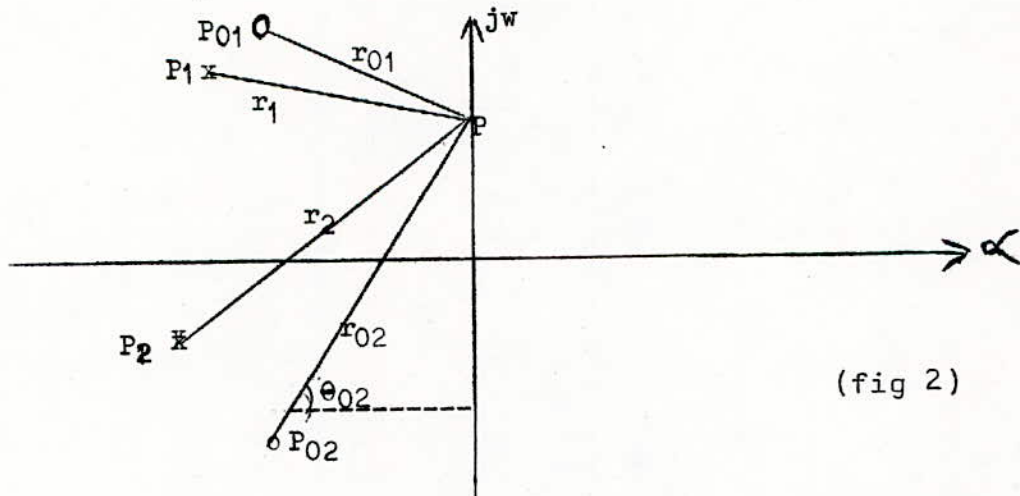
B : " <0 " " " " " zéros

: point milieu du transformateur vers le point infini de la cuve.

Principe de l'analogie

Soit la fonction impédance représentée sur le plan complexe

$$Z(P) = H \frac{(P-P_{01})(P-P_{02})}{(P-P_1)(P-P_2)} \quad \text{où } P-P_k = r_k e^{j\theta_k}$$

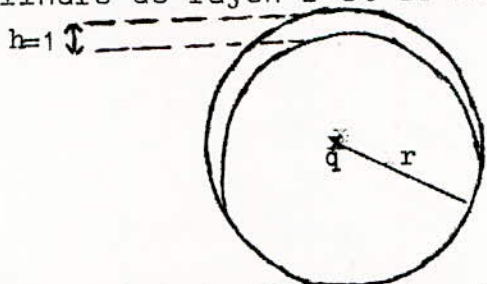


(fig 2)

en utilisant la fonction

$$\begin{aligned} \text{Log } Z(P) &= \text{Log } H + \text{Log } (P-P_{01}) + \text{Log } (P-P_{02}) - \text{Log } (P-P_1) + \text{Log } (P-P_2) \\ &= \text{Log } H + \text{Log } r_{01} + \text{Log } r_{02} - \text{Log } r_1 - \text{Log } r_2 + \\ &\quad + j \left[\theta_{01} + \theta_{02} - (\theta_1 + \theta_2) \right] \\ &= \text{Log } |Z(P)| + j B \end{aligned}$$

soit une charge q placée dans un milieu isotrope et découpons un cylindre de rayon r et de hauteur unité :



La densité de flux D (ou induction électrique) traversant l'anneau est :

$$D = \frac{\Psi}{S} = \frac{q}{S}$$

où Ψ : flux exprimé en Coulombs.

S : Surface de l'anneau : $2\pi r \times 1$

$$D = \frac{q}{2\pi \xi r} = \xi E = - \frac{dv}{dr}$$

- ξ : coefficient diélectrique
- E : champ électrique
- V : potentiel

$$dv = - \frac{q}{2} dr \quad V = - \frac{q}{2} \text{Log } r + k.$$

$$\boxed{V = k_1 \text{Log } r + k_0}$$

Si nous avons un nombre de charges égales aux pôles et zéros de la fonction, disposées dans la cuve suivant le diagramme de la figure 2, les charges positives étant placées en P_1 et P_2 et les charges négatives en P_{01} et P_{02} . On peut alors écrire que :

$$V = K_1 \left[\text{Log } r_{01} + \text{Log } r_{02} (\text{Log } r_1 + \text{Log } r_2) \right] + k.$$

.../...

ainsi la relation en V a la même structure que la relation déjà trouvée :

$$\text{Log } Z(P) = \text{Log } |Z(P)| + j B$$

ainsi on a l'analogie : $\frac{V}{k_1} = \text{Log } |Z|$ (en Nepers)

Mesure des constantes en vue du tracé de la courbe amplitude/fréquence

prenons le cas d'une fonction de transfert à un seul pôle ou zéro, placé par exemple au point -1 , que nous matérialisons par une électrode reliée à la source de courant et placée en ce point.

La variation de $\text{Log } |Z|$ mesurée sur l'axe des fréquences, par rapport à un point de référence par exemple l'origine sera :

$$\text{Log } |Z(r)| - \text{Log } |Z(0)| = \text{Log } r - \text{Log } r_0$$

$$\text{Log } \left| \frac{Z(r)}{Z(0)} \right| = \text{Log } \frac{r}{r_0}$$

Dans l'analogie du potentiel, une charge étant placée dans la cuve à l'endroit du pôle, nous avons :

$$V(r) - V(r_0) = k_1 \text{Log } \frac{r}{r_0}$$

$$k_1 = \frac{V(r) - V(r_0)}{\text{Log } r/r_0}$$

donc :

$$\frac{V(r) - V(r_0)}{k_1} = \text{Log } \frac{Z(r)}{Z(0)}$$

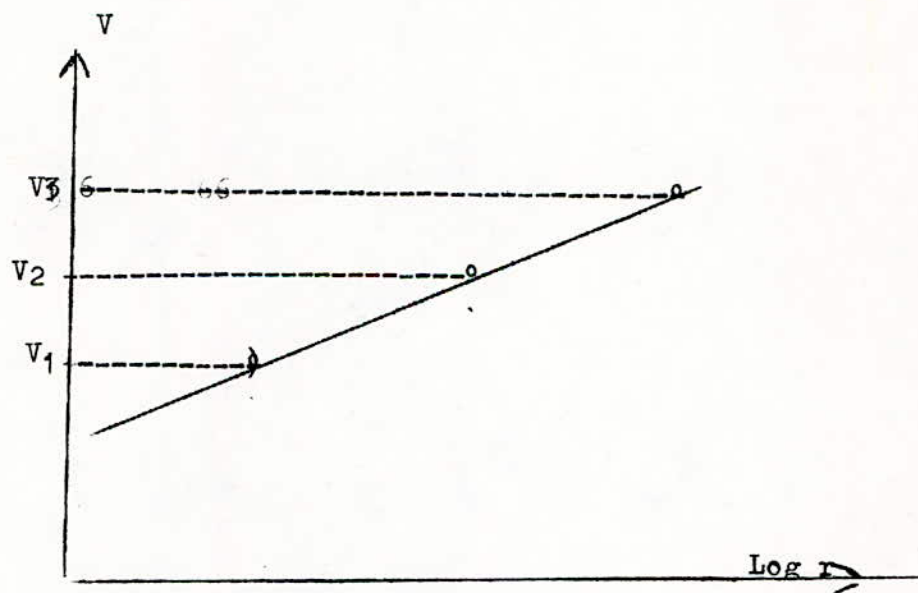
La technique permettant de mesurer la constante $k_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon}$ de la cuve s'en déduit immédiatement.

On place l'électrode au point -1 et on mesure le potentiel à l'aide d'un amplificateur différentiel ayant un bon taux de rejection, sur différents points d'un axe matérialisant l'axe jw .

On déduit le tableau suivant.

Point de mesure	Tension mesurée	r	Logr
j	V_1	1,414	0,464
2j	V_2	2,2360	0,8047
3j	V_3	3,162	1,151
4j	V_4	4,1231	1,4166

Et l'on déduit la courbe $V=f(\text{Log } r)$



En traduisant les résultats graphiquement on obtient donc une droite dont la pente est:

$$dV/d(\text{Log } r)$$

Précaution à prendre au cours de la mesure

---ooo0ooo---

a) les cordons de mesure doivent être blindés, par contre les cordons amenant le courant ne sont pas blindés.

b) L'amplificateur différentiel doit être aussi bien équilibré que possible.

c) les pointes de mesure et les pointes des électrodes doivent être du même métal.

Il faut prendre soin aussi qu'au cours des mesures le courant alimentant les électrodes soit rigoureusement le même, car la mesure de k_1 n'est valable que dans ces conditions.

Il ne faut pas oublier que $k_1 = q/2\pi E$; dans cette relation deux grandeurs déterminantes interviennent, q et 2 c'est à dire l'intensité du courant et le milieu, ce dernier étant déterminé par la solution de sulfate de cuivre qui peut se polluer ou varier par évaporation. Ainsi est-il indispensable de mesurer k_1 avant chaque mesure. D'ailleurs la mesure de k_1 demande à peine 10 mm.

REMARQUE : Si pour parfaire le niveau du liquide dans la cuve, on ajoute de l'eau désionisée, avant d'effectuer une mesure, celle-ci risque d'être faussée.

En effet la densité de l'électrolyte de la couche supérieure n'est pas égale à celle de la couche inférieure et on n'est pas dans les conditions d'une surface isotrope infirmé. C'est pour cette raison qu'il est conseillé de parfaire le niveau quelques heures avant la mesure, afin que la densité de l'électrolyte ait le temps d'être uniforme.

--- C H A P I T R E ---

5

P A R T I E
P R A T I Q U E

Partie pratique :

a) Etude d'un circuit du 1^{er} ordre.

Détermination de la constante de la cuve en vue du tracé de la courbe

Amplitude/ fréquence.

Plaçons l'électrode au point P_I

$$P_I = \begin{cases} \text{REL} = \frac{-\omega}{2\pi} = 4,74 \text{ MHz} \\ \text{Im} = f_0 = 30 \text{ MHz} \end{cases}$$

$$P_I = (4,74 + j 30) 10^6 \text{ Hz}$$

L'électrode est portée à un potentiel $V_1 = 18^V$

Le potentiel à la fréquence d'accord mesure sur l'axe

$j\omega$ est $V(\omega) = 11,2$ volts ; avec $\omega_0 = 4,74$

On a obtenu les résultats suivants :

r	Log r/r ₀	V _r	V _r - V _{r0}	Pt de mesure
5,144	0,0817	11,2	0	J
6,202	0,268	10,8	0,4	2 j
7,646	0,478	10,5	0,7	3 j
9,298	0,673	10,3	0,9	4 j
11,066	0,847	10	1,2	5 j
12,902	1,0013	9,8	1,4	6 j
14,780	1,137	9,6	1,6	7 j
16,687	1,258	9,4	1,8	8 j
18,613	1,367	9,3	1,9	9 j
20,554	1,467	9,2	2	10 j
22,504	1,557	9,1	2,1	11 j
24,463	1,641	9,00	2,2	12 j

en traçant les résultats sur un graphique (voir feuille millimétrée) on a obtenu une droite dont la pente est

$$dV / d (\text{Log} r) = k_1 = 1,37$$

d'autre part on sait que :

$$\frac{V}{k_1} = \text{Log} |Z| \Rightarrow \frac{V - V_{r0}}{k} = \text{Log} \left| \frac{Z}{Z_0} \right|$$

$$\frac{20}{2,3k} (V - V_{r0}) = |Z| \text{ dB}$$

$$|Z| \text{ dB} = 6,347 (V - V_{r0})$$

cherchons sur l'axe $j\omega$ les potentiels V pour différentes fréquences on a obtenu les résultats suivants :

$V_f - V_{ro}$	$ Z $ d B	f/f_c
0,1	0,6347	0,919
0,4	2,538	0,977
0,6	3,808	1,034
0,9	5,7123	1,091
1	6,3470	1,149
1,2	7,6164	1,206
1,4	8,8858	1,264
1,6	10,1552	1,321
1,7	10,7899	1,379
1,8	11,4246	1,436
1,9	12,0593	1,494

On a obtenu la courbe $|Z|_{dB} = f(f/f_c)$ tracée sur le papier millimétré.

b) étude de 2 circuits couplés

-Filtre de butterworth du 2° ordre.

Détermination de la constante de la cuve en vue du tracé de la courbe Amplitude / fréquence.

plaçons deux électrodes portées aux potentiels

$V_{ro} = 18^V$ au pts $P_1 = 0,707 + j 0,707$

$P_2 = 0,707 + j 0,707$

mesurons le potentiel V aux différentes pointes de l'axe $j\omega$
on a obtenu :

Pt de mesure	r_1	r_2	$\text{Log } r_0^2 / r_1 r_2$	$V_r - V_{ro}$
j	8,60	11,4	0,00017	4
2j	7,62	13,04	0,006	4
3j	7,07	14,76	0,0273	4
4j	7,07	16,55	0,0769	4
5j	7,6	18,38	0,1539	4,1
6j	8,6	20,25	0,2495	4,2
7j	9,9	22,14	0,35	4,4
8j	11,4	24,04	0,4469	4,6
9j	13,03	25,96	0,53782	4,8
10j	14,76	27,89	0,6239	4,9
11j	16,55	29,83	0,7030	5

en traçant la courbe $V_r - V_{ro} = f (\text{Log } r_0^2 / r_1 r_2)$ on a obtenu un droite dont la pente est :

$k_2 = 0,469$

$$\frac{V}{k_2} = \text{Log } |Z| \Rightarrow \frac{V - V_{ro}}{k} = \text{Log } \left| \frac{Z}{Z_0} \right|$$

$$\frac{20}{2,3} \times 0,469 (V - V_{ro}) = |Z| \text{ dB}$$

$$|Z| \text{ dB} = 18,5 (V - V_{ro})$$

cherchons sur l'axe des $j \omega$ les potentiels V pour différentes fréquences.

Le potentiel correspondant à la fréquence d'accord est

$$V(r_0) = 7,5$$

on a obtenu les résultats suivants :

V_r	$V_r - V_{ro}$	$ Z \text{ dB}$	Pt de mesure
7,5	0	0	j
7,5	0	0	2j
7,46	0,034	0,634	3j
7,41	0,09	1,665	4j
7,33	0,17	3,145	5j
7,27	0,27	4,995	6j
7,19	0,37	6,045	7j

la courbe $|Z| \text{ dB} = g(f/f_c)$ est tracée sur la feuille millimétrée.

— CHAPITRE —

6

APPLICATION
DE LA
CUVE RHEOGRAPHIQUE
DANS L'INDUSTRIE

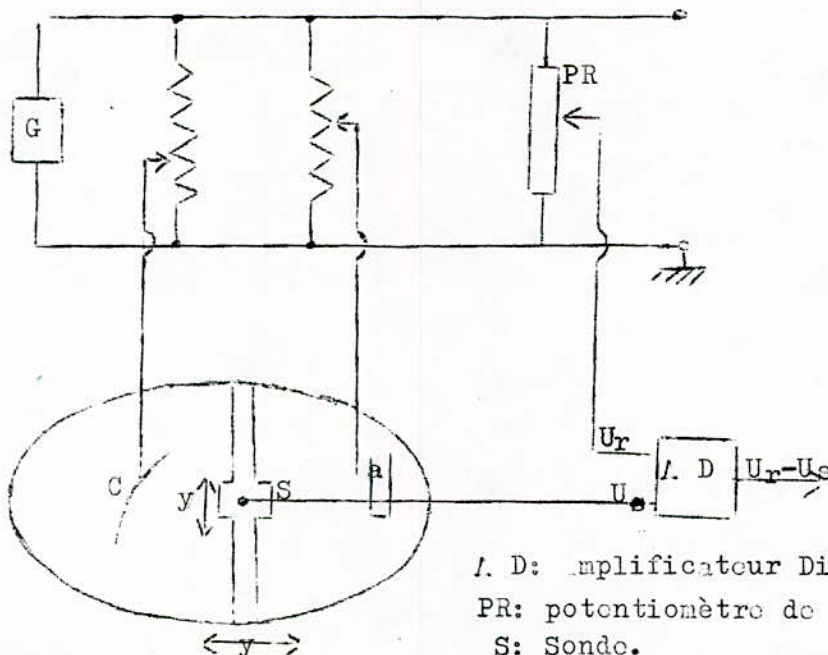
- APPLICATION DE LA CUVE RHEOGRAPHIQUE DANS L'INDUSTRIE.

a) - Application aux semi-conducteurs.

On a essayé d'élargir le domaine d'application de notre cuve qui en première application nous donnait des équipotentielles; cette idée nous a fait penser à résoudre certains problèmes de semi-conducteurs qui peuvent être étudiés par la méthode rhéographique.

En effet, on sait qu'au voisinage d'une jonction il existe des charges négatives (électrons) et positives (trous) et la répartition de potentiel obéit à la loi de Poisson

On connaît la loi de répartition de charges donnée par la théorie de jonctions semi-conductrices, il s'agit d'en déduire le potentiel dans un milieu de révolution ce qui permettra de déterminer les caractéristiques de la jonction qui, mathématiquement on aboutit à des résultats approximatifs. Pour ce faire, on place l'anode et la cathode dans la cuve, avec un amplificateur différentiel bien équilibré on peut rechercher toutes les équipotentielles caractérisant la jonction.

Schéma.

A. D: Amplificateur Différentiel.

PR: potentiomètre de référence.

S: Sonde.

C : Cathode.

a : Anode .

G : Générateur.

D'autres problèmes de semi-conducteurs se ramènent à l'équation de Laplace, il en est ainsi pour l'étude de l'influence de la recombinaison en surface sur les propriétés électriques d'un dispositif à semi-conducteurs.

En effet, les caractéristiques des transistors dépendent en fait essentiellement de la distribution de courant des porteurs minoritaires.

En régime permanent, on a :

$$\Delta m = 0$$

Δ : étant le laplacien.

m : étant la densité des porteurs.

La répartition des porteurs obéit donc à l'équation de Laplace. On peut alors faire l'analogie suivante à la cuve :

- La densité de courant dans la cuve représente la densité de courant dans la base.
- La tension V dans la cuve représente la densité des porteurs minoritaires m .
- La conductibilité de l'électrolyte est l'équivalent du coefficient de diffusion D .

C O N C L U S I O N S

Malgré des problèmes d'ordre matériel et technique, qui nous ont quelque peu limités dans notre travail, nous avons pu, en nous basant essentiellement sur le principe des analogies rhéoelectriques, concevoir et réaliser une cuve rhéographique dont l'application pratique a donné des résultats satisfaisants. Ainsi, on a pu apprécier l'utilité d'une cuve puisqu'elle permet de résoudre des problèmes complexes et variés et ce, d'une façon simple et rapide. Dans cet ordre d'idées, nous avons constaté, de par les expériences pratiques que nous avons effectuées, qu'elle se prête facilement à la résolution de l'équation de Laplace dans un milieu conducteur et permet le tracé automatique d'une carte d'équipotentiels. Et, à ce titre elle constitue un véritable calculateur électronique qui peut avoir sa place à côté des calculateurs analogiques et arithmétiques.

par ailleurs, cette cuve rhéographique nous a permis de déterminer la courbe de réponse des filtres avec une précision appréciable, et les résultats se sont avérés positifs. Cependant, il nous semble utile de souligner que nous avons rencontrés quelques difficultés quant à l'élargissement du champ d'application de notre cuve pour la résolution de certains problèmes, notamment la détermination des racines d'un polynôme de degré n . Ce handicap est principalement au générateur utilisé de type GB 110 délivrant un courant dont l'intensité est très faible. Il nous était alors impossible de varier le courant à notre guise. Néanmoins, il nous semble opportun de souligner l'utilité de la cuve étant donné qu'elle permet des calculs rigoureux et ce, avec une démarche simple et rapide. Elle possède un avantage certain et une efficacité méritoire en ce sens qu'elle permet la détermination de la courbe de réponse d'un circuit connaissant uniquement sa fonction de transfert alors qu'à l'ordinaire il fallait des calculs compliqués et longs avec le plus souvent une combinaison de la méthode de Bode et celle de Black pour tracer la courbe de gain.

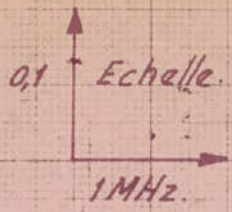
Cependant, si nous disposions d'un équipement adéquat et d'appareils de mesures répondant le mieux aux conditions de travail, nous aurions pu élargir le champ d'action de notre cuve et tenté d'esquisser une étude en vue de son application dans l'industrie électronique.

Il est certain que des améliorations peuvent être apportées à notre cuve en prenant par exemple un pas plus grand pour la tige afin de permettre un déplacement beaucoup plus rapide à la sonde et en utilisant un générateur qui donnerait des tensions stables. On pourrait aussi incorporer un millivoltmètre différentiel bien équilibré, ce qui donnerait des résultats plus appréciables.

En espérant avoir contribué par ce modeste travail à l'approfondissement de nos connaissances en matière de recherche scientifique, nous souhaitons, dans ce sens, que d'autres études soient menées sur le principe de la cuve rhéographique en vue de son application à des domaines plus variés et son utilisation dans l'industrie algérienne.

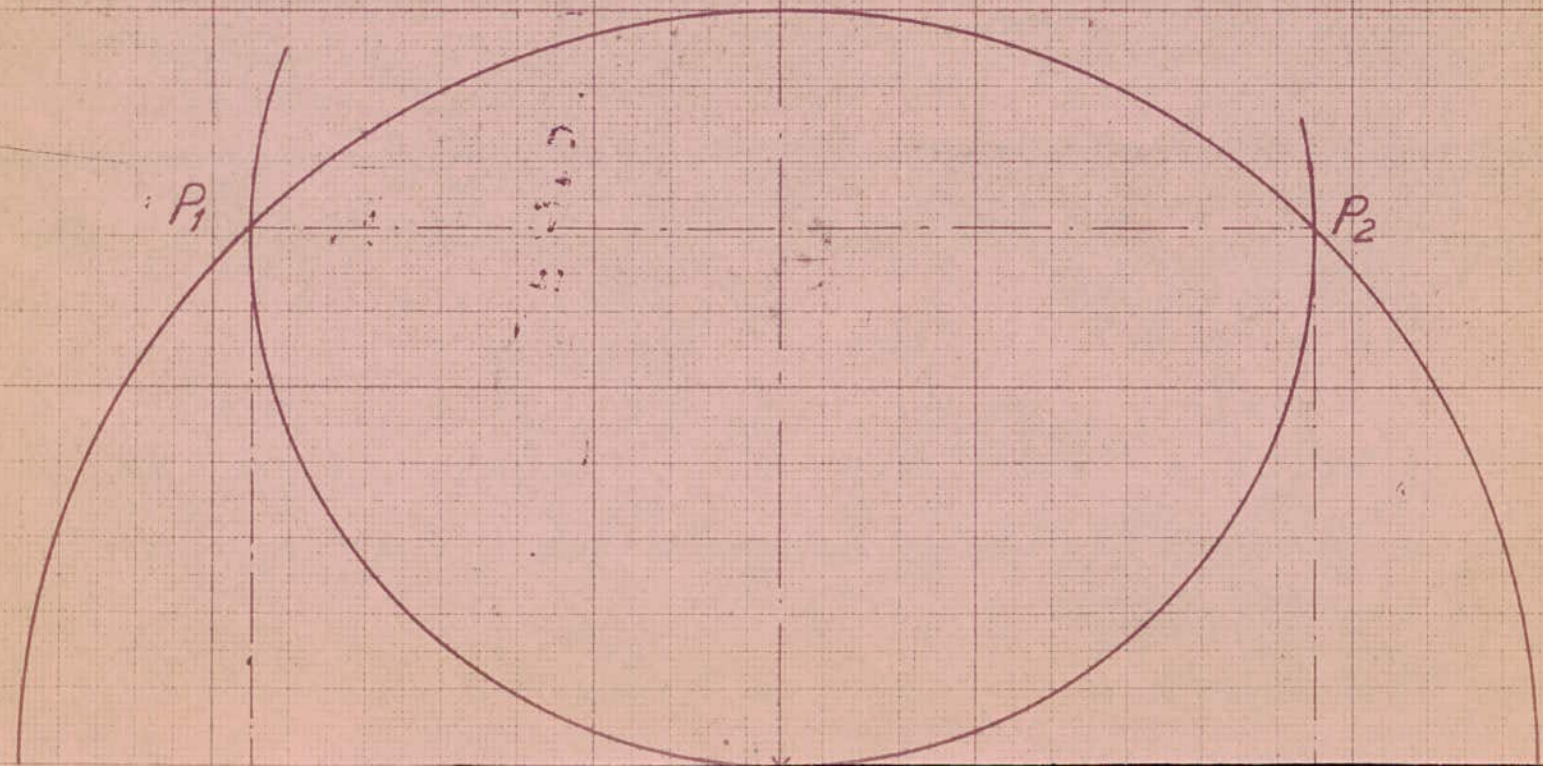
.....//.....

Variation Relative d'Amplitude

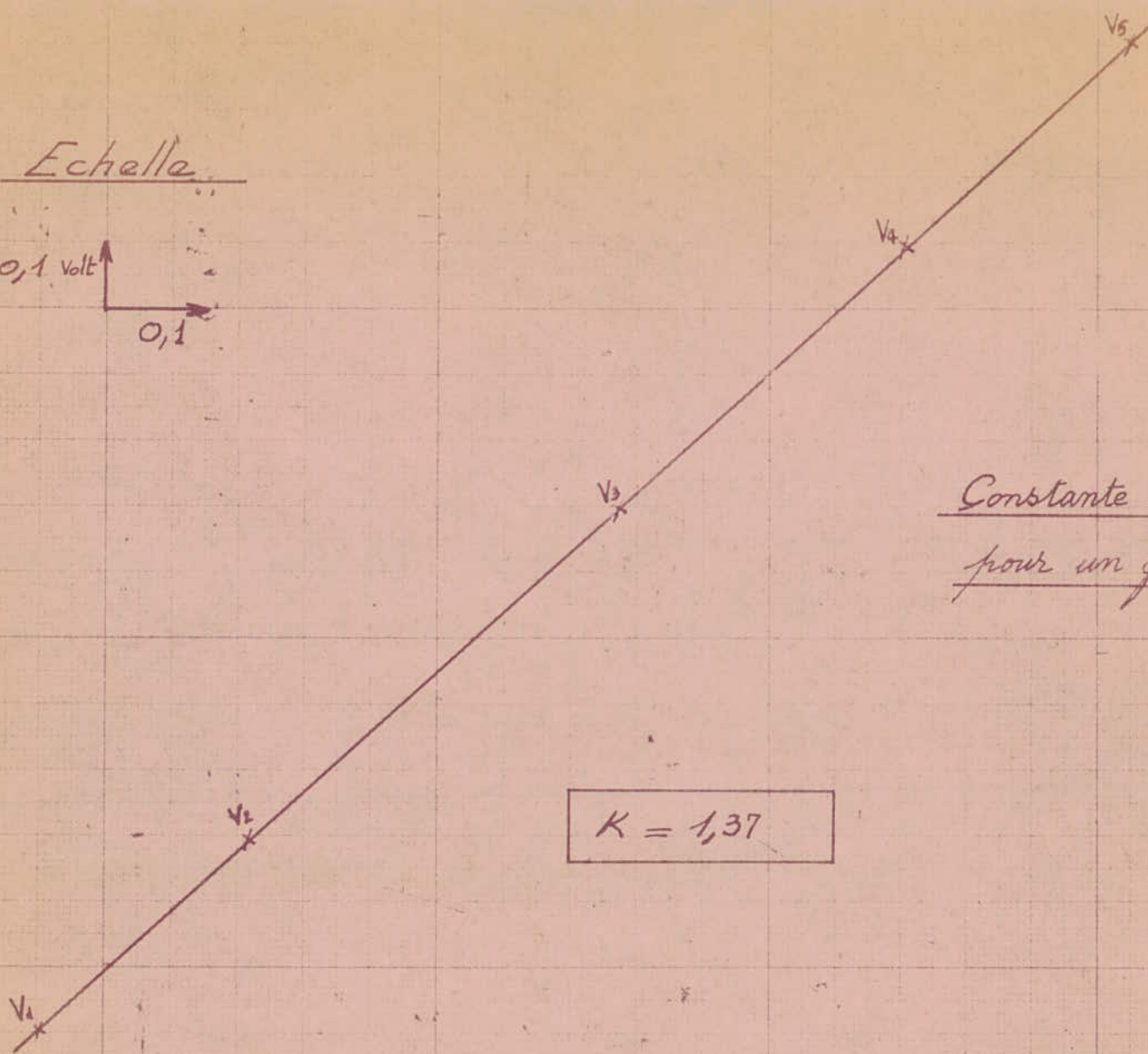
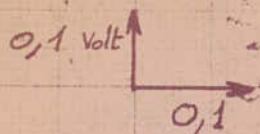


VARIATION RELATIVE D'AMPLITUDE
D'UN FILTRE DE BUTTERWORTH
DU 2^{ème} DEGRÉ.

(Courbe théorique)



Echelle



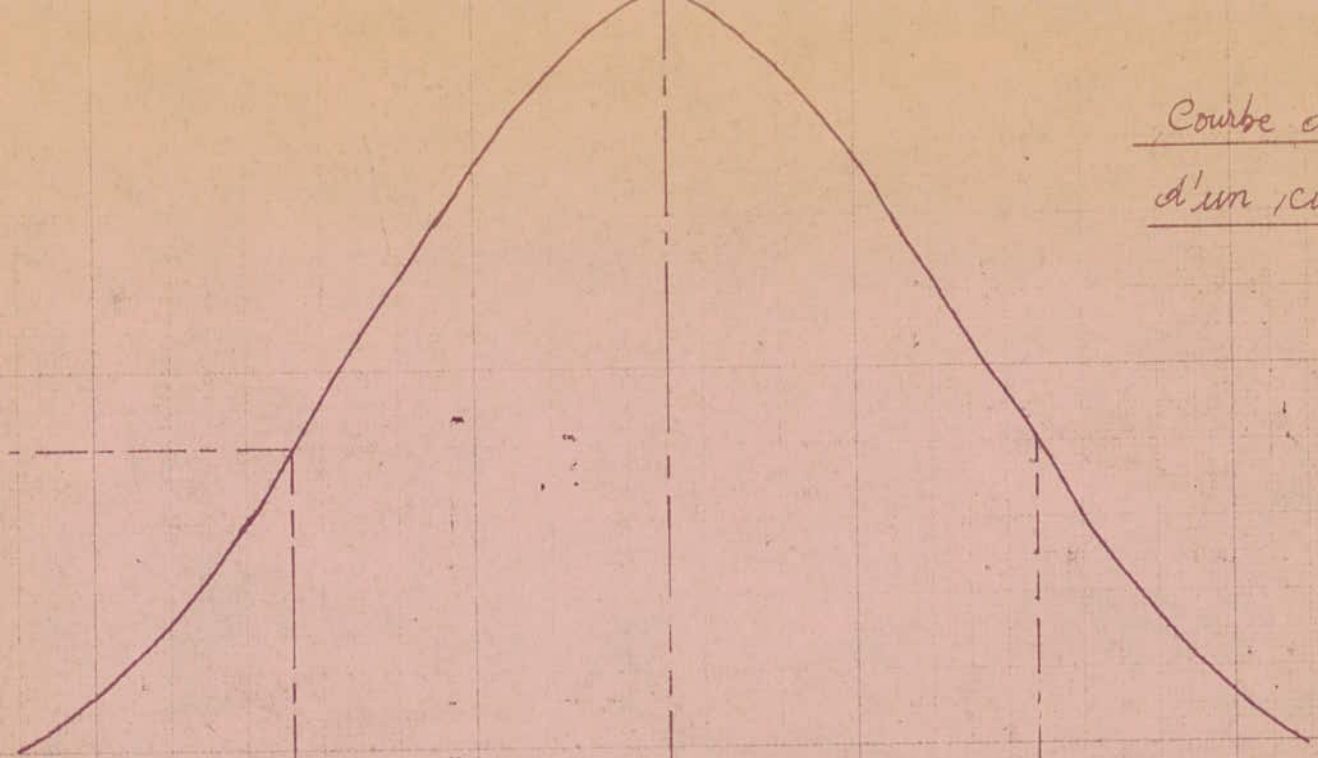
Constante de la ligne
pour un filtre du 1^{er} ordre.

$$K = 1,37$$

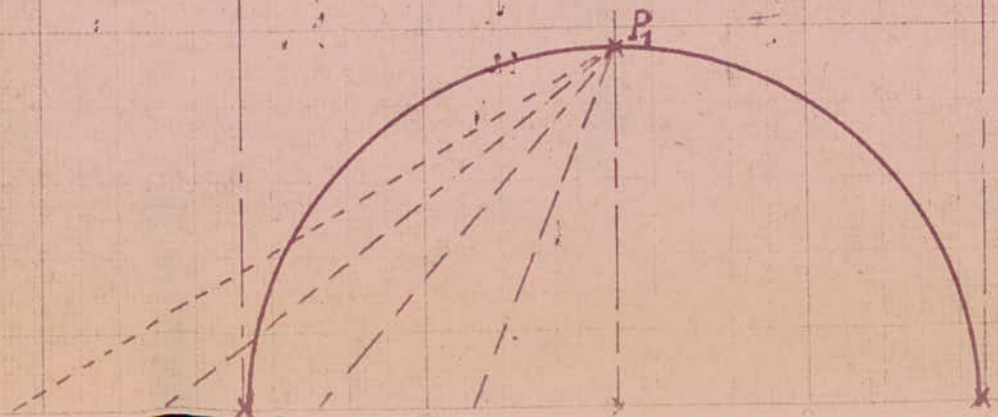
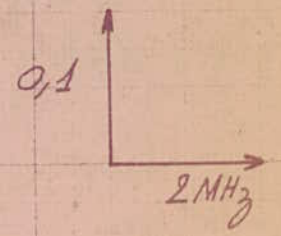
Variation relative d'Amplitude

Courbe d'Amplitude
d'un circuit Antirésonant.

1/c



Echelle

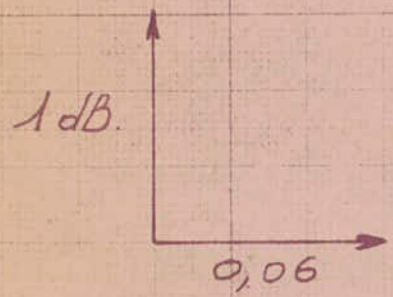


→

Att. en dB.

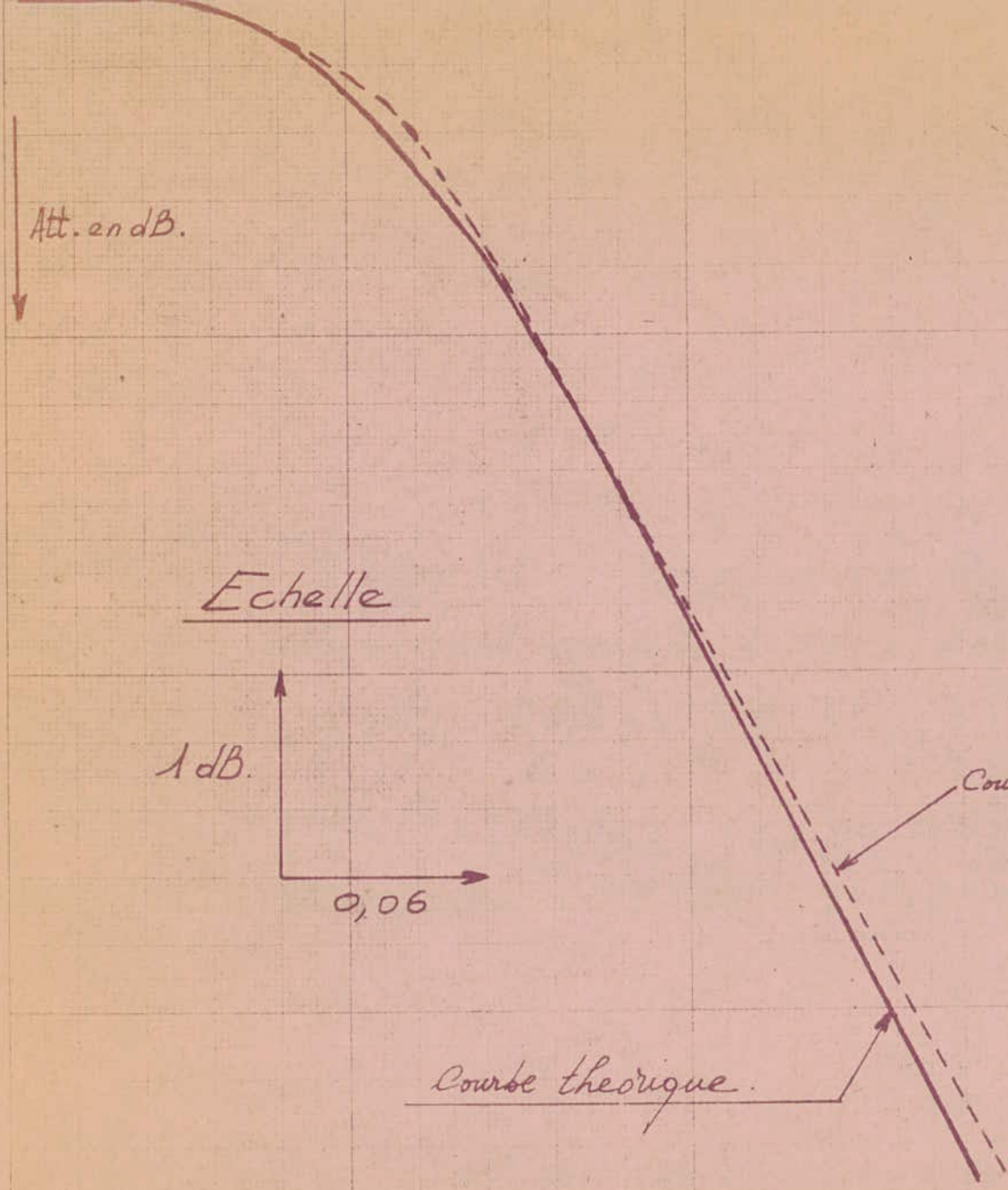
Reponse d'un filtre
du 1^{er} ordre

Echelle



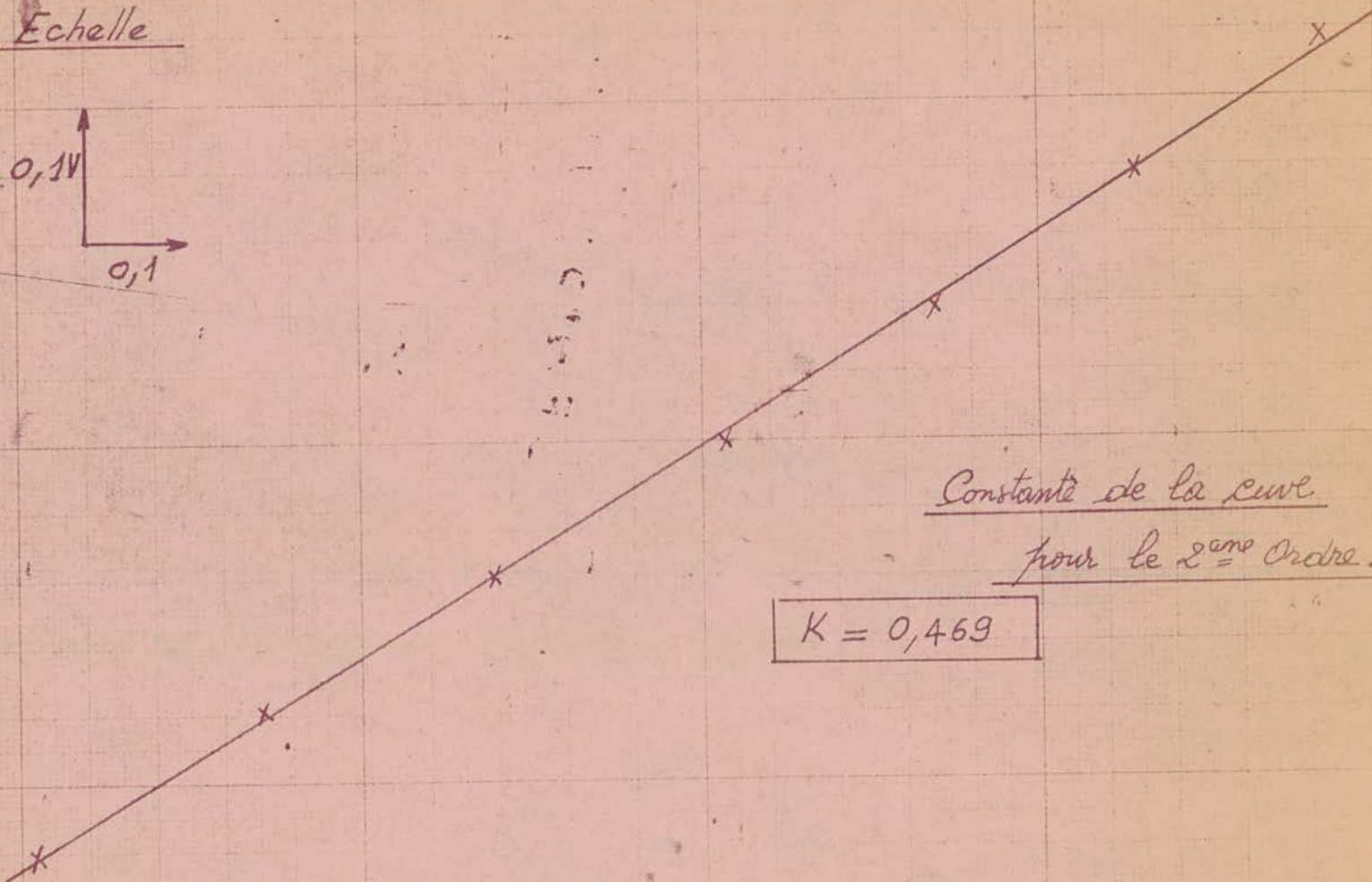
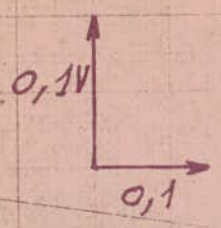
Courbe pratique

Courbe theorique.



AV

Echelle



Constante de la cuve
pour le 2^{ème} Ordre.

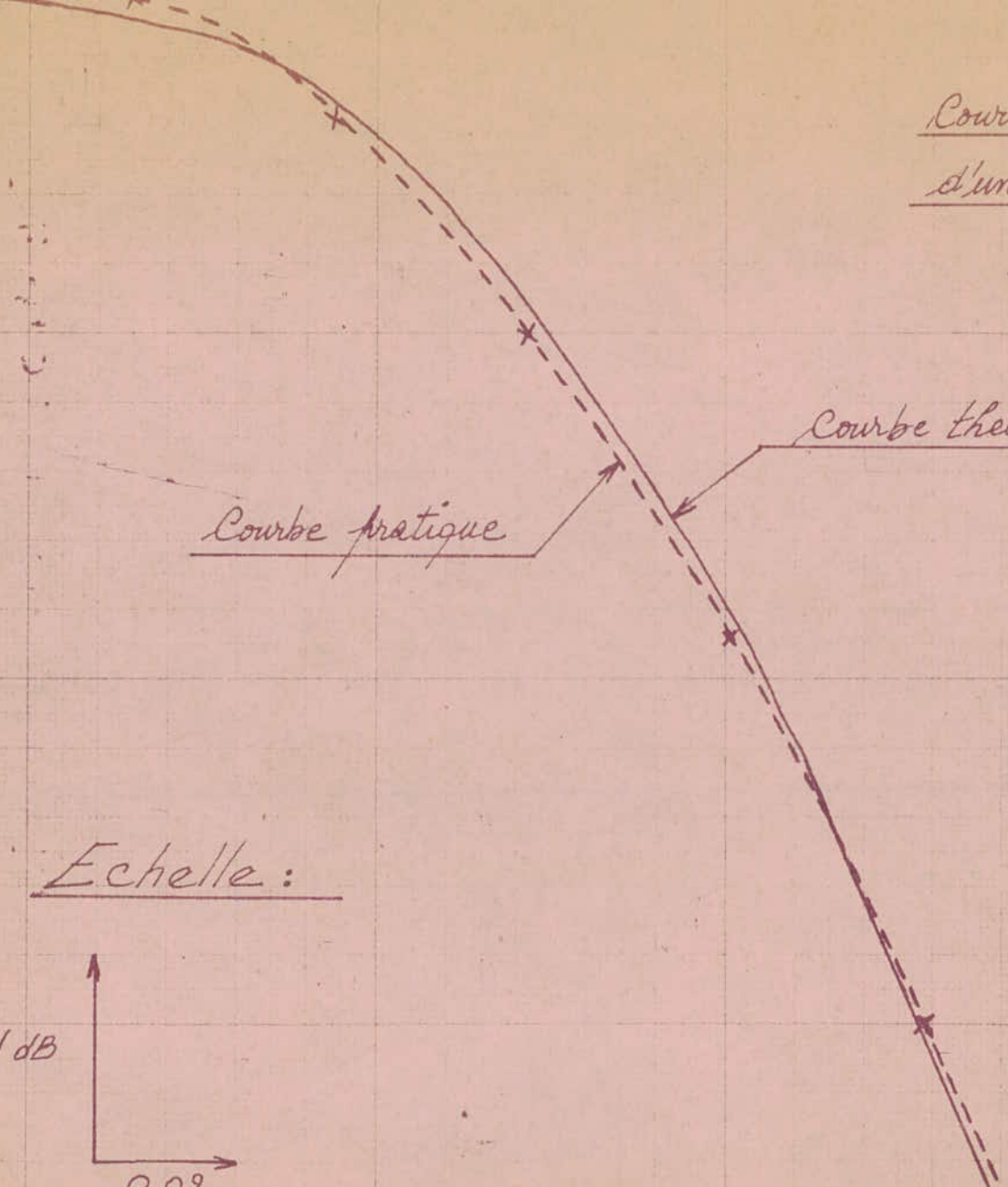
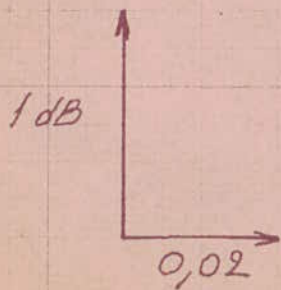
$K = 0,469$

Att. en dB

Courbe d'Amplitude
d'un filtre de Butterworth
de 2^{ème} degré -

Courbe pratique Courbe théorique

Echelle :



 C H E M A S

DE LA

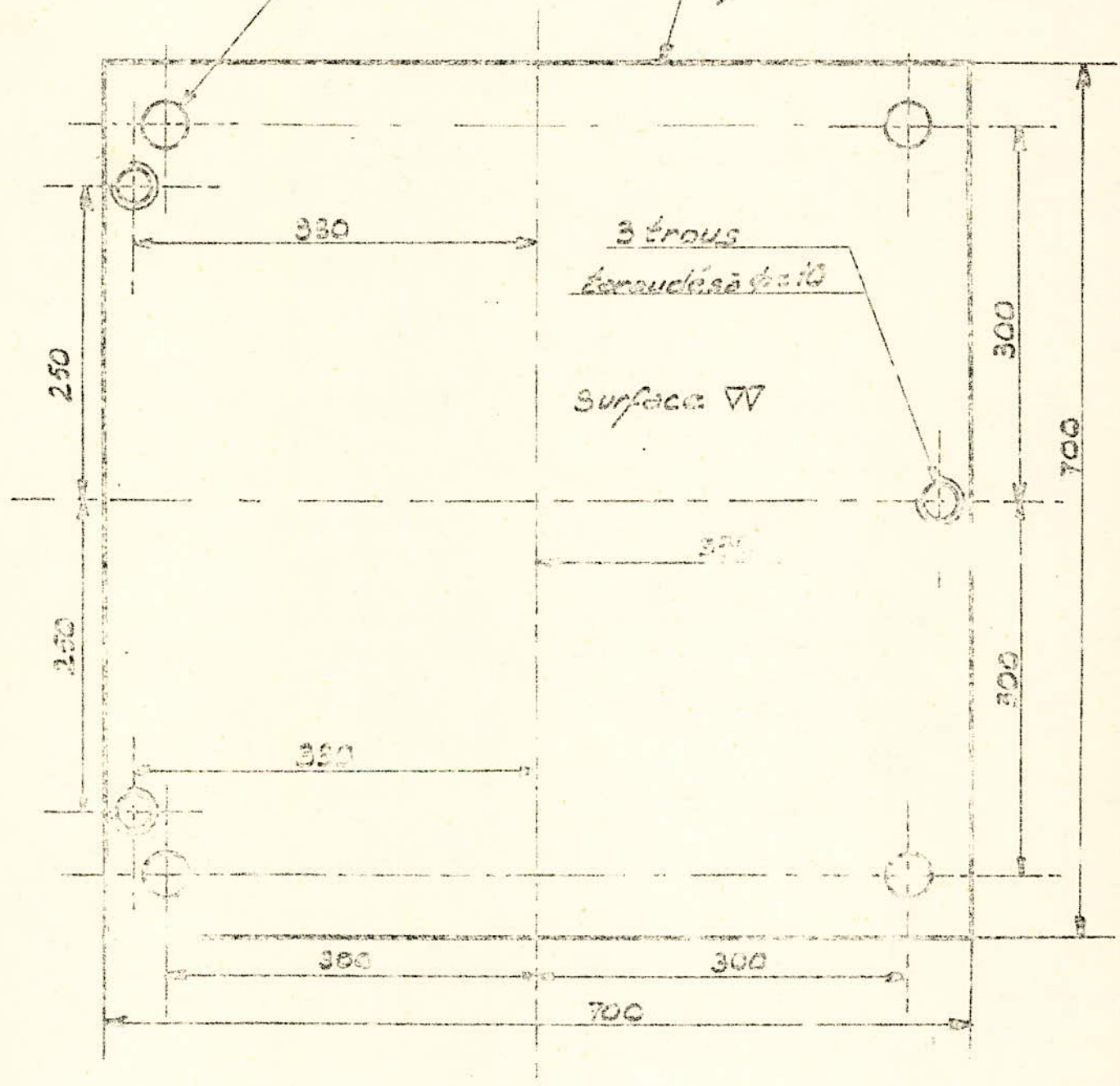
 C U V E R H E O G R A P H I Q U E

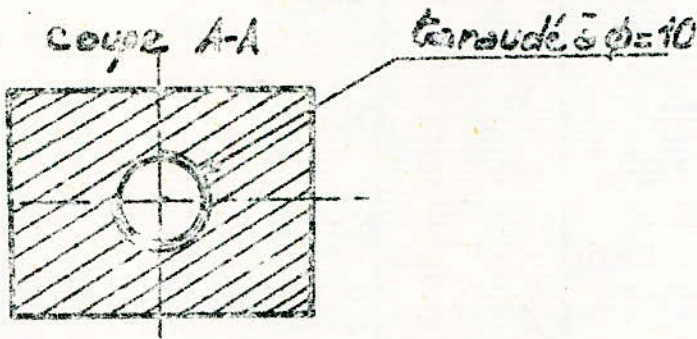
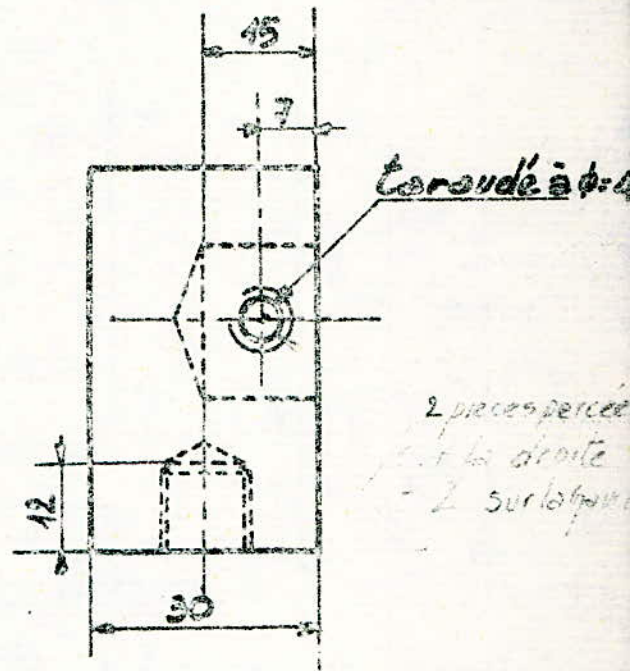
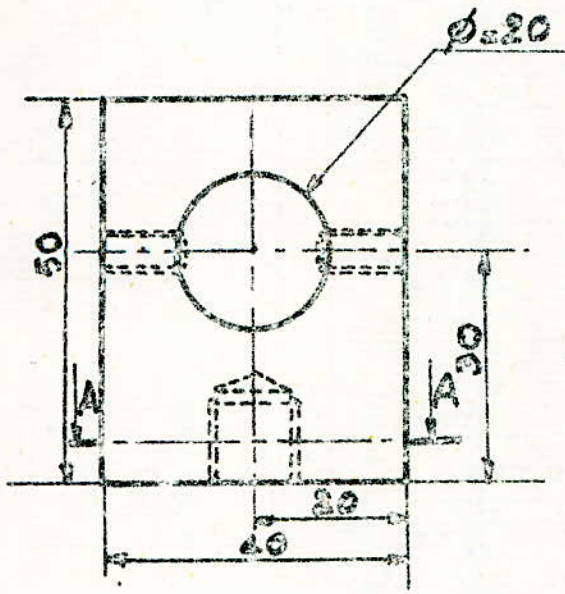
*Dâti en Aluminiu
epaisseur 15 à 20 mm.*

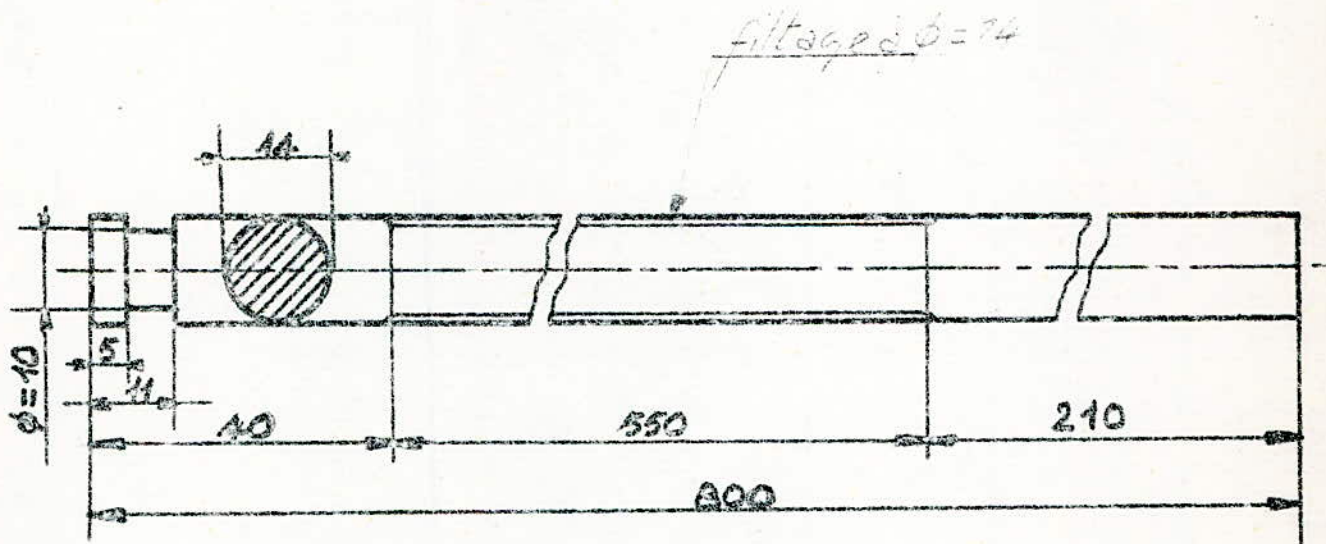
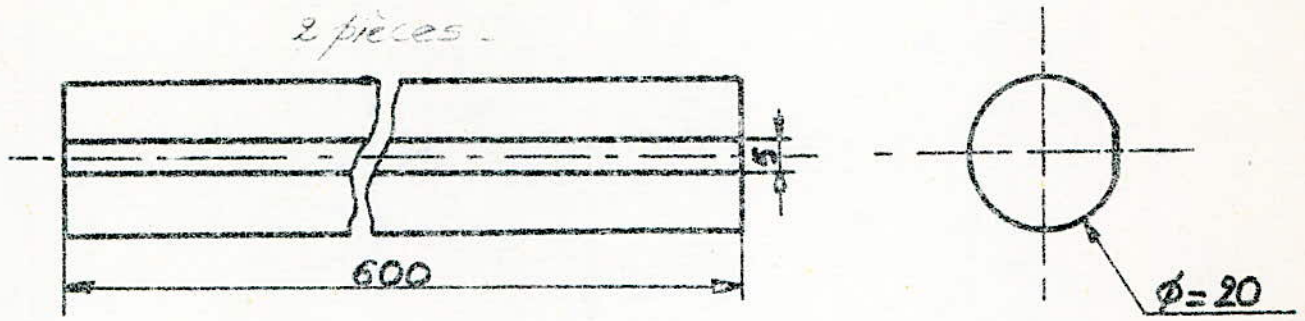
4 trous $\phi=10,5$

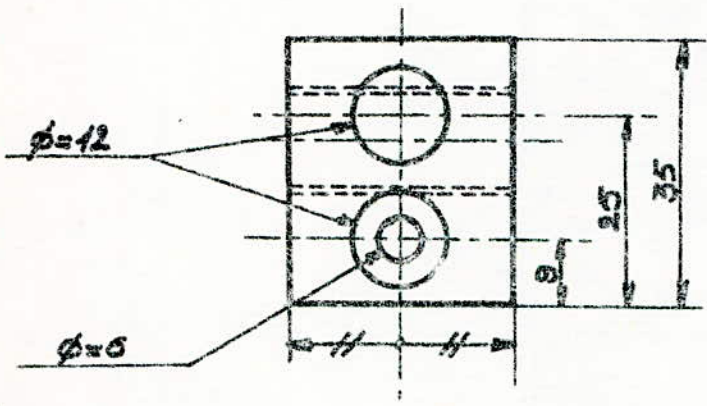
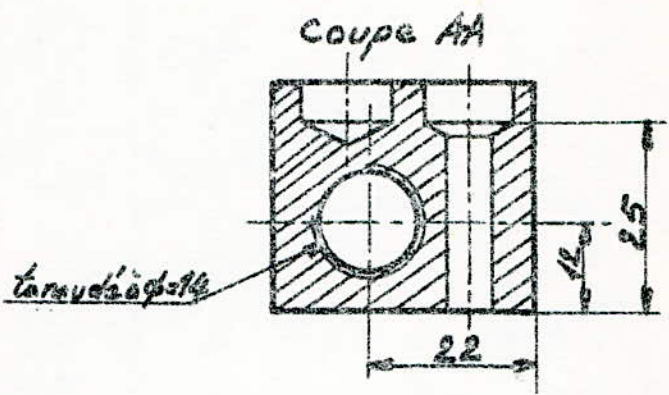
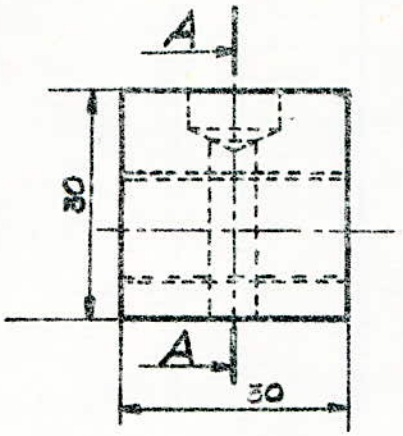
*3 trous
torçonnés $\phi=10$*

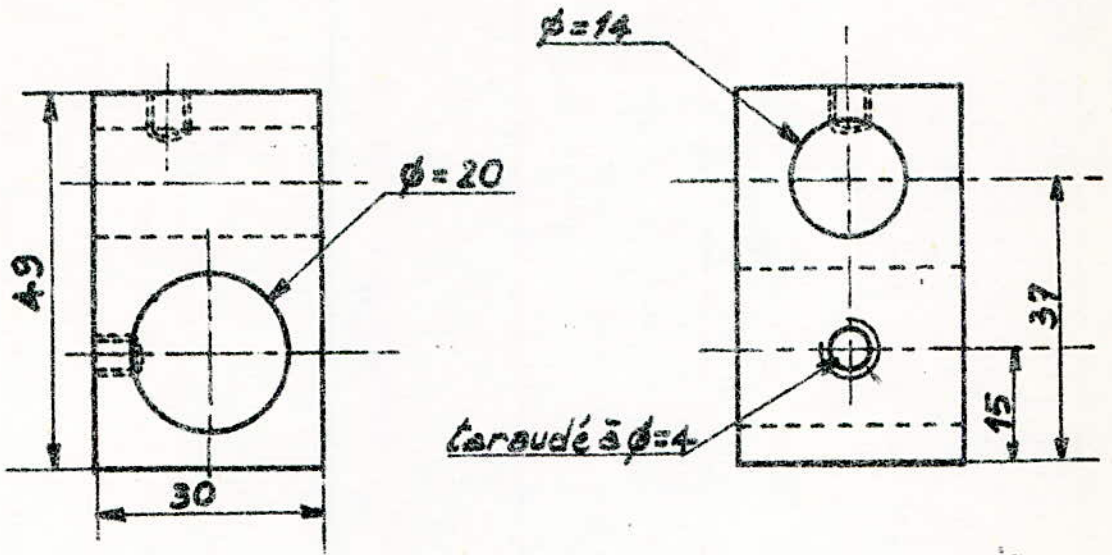
Surface ∇



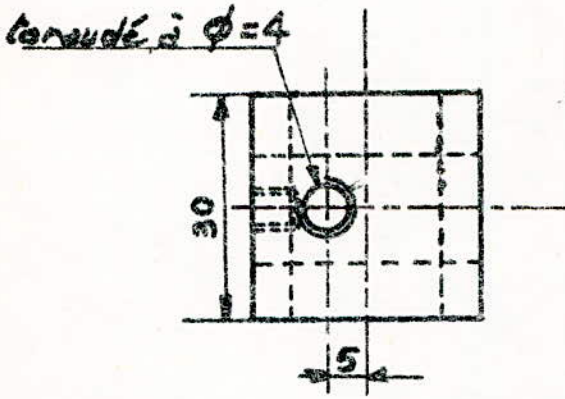








*1 pièce...
1 pièce...*



*se trouve sur la pièce
parce à gauche*

B I B L I O G R A P H I E

I- Analyse et calcul des amplificateurs haute-fréquence: Par A. BENSASSON
(Edition Radio)

2- Techniques de L'ingénieur : Calculateurs rhéographiques par Jean LE MEZEC.