



المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
Ecole Nationale Polytechnique

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE
Laboratoire Signal & Communications



مختبر الإشارة والاتصالات
Signal & Communications Lab

Mémoire de magister en Électronique

Option : Traitement du Signal et Communications

Présenté par :

TCHOKETCH KEBIR Sofiane.

Ingénieur d'État en Électronique (U.S.T.H.B)

DEVELOPPEMENT D'ALGORITHMES DE SUPER-RESOLUTION EN UTILISANT LA TRANSFORMEE EN ONDELETTES.

Le jury d'examen est composé de :

Président :	Melle M.GUERTI	Professeur (ENP)
Rapporteur :	Mme L.HAMAMI	Professeur (ENP)
Examineurs :	Mr D.BERKANI	Professeur (ENP)
	Mr H.BOUSBIA	Maître de conférences (ENP)
	Mr M.S.AIT CHEIKH	Maître de conférences (ENP)

2011.

Remerciements

Mes plus intenses remerciements vont, en premier lieu, à Dieu le Miséricordieux le Tout-Puissant pour m'avoir donné le courage de mener à terme ce travail.

*Je tiens, en deuxième lieu, à remercier ma promotrice, **Professeur L.HAMAMI**, pour son aide, son soutien et sa patience tout au long de mon mémoire de magister.*

*Je tiens également à remercier **Professeur M.Guertí** d'avoir accepté de présider le jury auprès duquel est exposé le résultat du travail effectué dans ce mémoire.*

*Merci également aux examinateurs, **Professeur D.Berkani**, **Docteur H.Bousbia** et **Docteur M.S.Aít chekh** d'avoir accepté de juger ce modeste travail.*

*J'adresse un spécial remerciement à **Mr R.Oured** de l'université de Genève pour m'avoir fourni les images et éclairé sur la problématique, aux membres du laboratoire «**Signal et communications**» qui m'ont beaucoup aidé et soutenu durant ce projet et avec qui j'ai appris beaucoup de choses intéressantes.*

Enfin, je suis reconnaissant à toutes celles et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.



Dédicaces

*La joie de réussir n'est jamais complète
que si elle est partagée avec ceux qu'on
aime.*

*A ma mère, à mon père, à ma femme
et ma fillette Maha, ceux à qui je dois
tout.*

A mes frères et sœurs.

A mes oncles, à mes tantes.

A toute ma famille.

A mes amis, Benbrîh med,...

*A tous ceux que j'aime et qui
m'aiment.*

Je dédie ce travail

Sofiane.

ملخص

تعد عملية زيادة التوضيح إحدى أهم عمليات المعالجة الأولية للصور، حيث تسمح بتحسين نوعية الصور وإعادة تركيب صور ذات جودة عالية إنطلاقاً من صور ذات جودة رديئة. يهتم هذا العمل بطرح طرق زيادة التوضيح وذلك بالتطرق إلى زيادة التوضيح بالإعتماد على تقنيات لإزالة الشوائب من الصور، ثانياً إعادة تركيب الصور انطلاقاً من صور رديئة الجودة وذلك بغرض توضيحها وتحسينها، كما يهتم هذا العمل بإبراز نتائج استخدام الأمواج القصيرة في خوارزميات زيادة التوضيح وأهميتها في معالجة الصور.

المفاتيح

الأمواج القصيرة، تقليل الضوضاء، زيادة التوضيح الأحادي، زيادة التوضيح متعدد الصور، التوليد بالترشيح، التوليد بكثيرات الحدود.

Résumé

La super résolution est l'ensemble des opérations et des techniques qui corrige les images et reconstruit un signal de bonne qualité à partir d'un signal de médiocre qualité.

Ce travail s'intéresse à deux grandeurs principale qui sont toujours adopte comme des techniques principale à la super résolution parfois à la suppression des bruits (débruitage), c'est l'un des sujets délicats du traitement des images. Le second s'attache à la reconstruction dans le cas de suréchantillonnage. Notre algorithme de super résolution est basé sur la transformée en ondelettes afin de montrer l'efficacité de ce dernier et leur intérêt au traitement d'image.

Mots clés :

Transformée en ondelettes, analyse multirésolution, super résolution, mono image, multi image, débruitage, interpolation, interpolation polynômiales.

Abstract

The super resolution is the operations and technics that corrects images and reconstructs a good quality signal from a bad quality one.

This work focuses on two main sizes that are always considered as super resolution main technics, the first are removing noise (denoising) that is one of the crucial topics of image processing. The second is related to the reconstruction in the case of upsampling. Our super-resolution algorithm is based on the wavelet transform to show the its effectiveness and use in image processing.

Key words:

Wavelet transform, multiresolution analysis, super resolution, single image, multi-image, denoising, interpolation, polynomial interpolation.

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE.....	1
Chapitre I INTRODUCTION A L'IMAGERIE MEDICALE	3
I.1. Introduction.....	3

I.2. Les différentes techniques d'imagerie médicale	4
I.2.1. Utilisation des champs magnétiques	4
I.2.2. Utilisation de la radioactivité	5
I.2.3. Utilisation des rayons X	5
I.2.4. Utilisation des ultrasons	6
I.2.5. Utilisation des rayons lumineux	6
I.3. Objectif visé	7
I.3.1. Qu'est-ce qu'un anévrisme cérébral	7
I.3.2. Qu'est-ce qu'un stent?	7
I.4 Conclusion	9
Chapitre II ETAT DE L'ART DE LA SUPER RESOLUTION	10
II.1. Introduction	10
II.2. Super Résolution mono-image	10
II.2.1. Interpolation avec des Polynômes	11
II.2.2. Interpolation par des B-Splines	12
II.2.3. Interpolation adaptative	14
II.3. Super résolution multi-image (multi-trame)	14
II.3.1. Méthode Fréquentielle	15
II.3.2. Echantillonnage Multicanal	18
II.3.3. Interpolation sur une Grille d'Echantillonnage Non Uniforme	19
II.4. Conclusion	20
Chapitre III LA TRANSFORMEE EN ONDELETTES	22
III.1. Introduction	22
III.2. Cadre mathématique de la transformée en ondelettes	22
III.2.1. Rappel sur la transformée de Fourier	22
III.2.2. Rappel sur la transformation de Gabor	24
III.2.3. La transformée continue en ondelettes	24
III.2.3.1. Bases orthonormées d'ondelettes	27
III.2.3.1.1. Le passage à la transformée discrète en ondelettes	28
III.2.3.1.2. Analyse multirésolutions et bases orthonormées d'ondelettes	28
III.2.3.1.3. Fonction d'Echelle et Sous-espaces	29
III.2.3.1.4. fonction ondelette et espaces de détail	30
III.2.3.1.5. Orthogonalité et bi-orthogonalité	31
III.2.3.1.5.1. Les ondelettes orthogonales	31
III.2.3.1.5.2. Les ondelettes bi-orthogonales	33
III.2.4. Avantages de la transformée en ondelettes	34
III.3. Les différents types de transformées en ondelettes	35
III.3.1. Analyse multi-résolution et bancs de filtres	36
III.3.1.1. Bancs de filtres et ondelettes (bi-)orthogonales.	36
III.3.1.1.1. Ondelettes orthogonales	36
III.3.1.1.2. Ondelettes bi-orthogonales	38
III.3.1.2. Des bases d'ondelettes à l'algorithme rapide	38

III.3.1.2.1. Algorithme de Mallat	39
III.3.1.2.2. Les quatre filtres	39
III.3.1.2.3. Calcul efficace des coefficients.....	40
III.3.2. Le lifting scheme	45
III.3.2.1. Principe de lifting scheme	45
III.3.2.2. Filtres d'analyse équivalents pour la transformée	47
III.3.2.3. Filtres de synthèse équivalents pour la transformée inverse.....	48
III.4. Intérêt en Traitement d'Image	49
III.5. conclusion	50
Chapitre IV LA TRANSFORMEE EN ONDELETTES ET LA SR.	51
IV.1 Introduction	51
IV.2. Super résolution à laide de la transformée en ondelettes TO	51
IV.2.1. Transformation en ondelettes et analyse multirésolution	51
IV.2.2. Interpolation avec la transformée en ondelettes(Algorithme à trous)	52
IV.2.2. 1. Suite d'approximations	53
IV.2.2. 2. Lissages successifs	55
IV.2.2. 3. Extension à deux dimensions	57
IV. 3. Principe de débruitage par ondelettes.....	58
IV. 3.1. Méthode de débruitage	59
IV.3.1. 1. Débruitage avec un estimateur	59
IV.3.1.2. Débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes.....	60
IV.3.1.2.1. Seuillage dur ou "hard thresholding"	60
IV.3.1.2.2. Seuillage "doux "ou "soft thresholding"	60
IV.3.1.2.2. 1. Choix du seuil	61
IV.3.1.2.2. 2. Estimation de la variance du bruit	62
IV.4. Conclusion.....	63
ChapitreV Implémentation de la super-résolution, Résultats et Interprétations.	64
V.1. Introduction	64
V.2 Présentation générale de l'application AnéSup	64
V.2.1. Les différentes fonctions réalisées par AnéSup	64
V.2.2. Présentation des interfaces de AnéSup	65
V.2.2.1. L'interface graphique 1 ou principale	65
V.2.2.2. L'interface graphique 2	69
V.2.2.3. L'interface graphique 3	70
V.3. Implémentation et Résultats	71
V.3.1. Acquisition des images	71
V.3.2. Implémentation de l'application AnéSup.....	72
V.3.2.1. Implémentation du débruitage (par seuillage)	72
V.3.2.2. Implémentation de La super résolution	79
V.3. Conclusion	91
CONCLUSION GENERALE.....	92
Bibliographie.....	94
Annexe	97

Liste des figures

Figure 1.1: Développement d'un anévrisme	7
Figure 1.2. (a)Stent métallique, (b) stent couver.	8
Figure 1.3 : Le traitement de l'anévrisme par des STENT correcteurs du flux sanguin	8
Figure 2.1 : Le Super Résolution multi-trame.....	15
Figure 3.1 Translation et translation-dilatation d'une ondelette	25
Figure 3.2 Représentation schématique de la détection d'une singularité.	26
Figure 3.3 : une fonction d'échelle B-spline	30
Figure 3.4 : une ondelette B-spline.	30
Figure 3.5 : orthogonalité et produit scalaire.....	33
Figure 3.6 : Transformée de Fourier (TF) et transformée en ondelettes (TO)	34
Figure 3.7 : décomposition 1D à l'aide de bancs de filtres	36
Figure 3.8 : décomposition et reconstruction à l'aide de bancs de filtres	36
Figure 3.9 : filtres d'analyse et de synthèse orthogonaux.	37
Figure 3.10 : filtres d'analyse et de synthèse bi-orthogonaux.	38
Figure 3.11: filtres pour l'ondelette db6.	40
Figure 3.12 : Premier pas de la DWT.	41
Figure 3.13 : un pas de décomposition de la DWT (pour $j = 0, A^j = X$)	41
Figure 3.14 : la DWT pour $j= 3$	42
Figure 3.15 : représentation de la IDWT	42
Figure 3.16 : étape de base pour la décomposition en ondelettes pour des images DWT2	43
Figure 3.17 : étape de base pour la reconstruction en ondelettes pour des images IDWT2	44
Figure 3.18 : représentation da la IDWT2 pour $j=2$	44
Figure 3.19 : L'ajout de la prédiction	46
Figure 3.20 : L'ajout de la mise à jour	47
Figure 4.1. Seuillage dur des coefficients	60
Figure 4.2. Seuillage doux des coefficients.....	61
Figure 4.3. Seuillage par l'estimation de la variance du bruit.	63
Figure 5.1(a) : l'interface principale	66
Figure 5.1(b) : des différentes fonctionnalités de l'interface principale.	66
Figure 5.2:Le menu de l'interface principale	67
Figure 5.3: présentation de la fenêtre du traitement.	67
Figure 5.4: présentation de la fenêtre d'affichage.	68

Figure 5.5: présentation de la fenêtre supplémentaire.	69
Figure 5.6: présentation de l'interface graphique 2	70
Figure 5.7: présentation de l'interface graphique 3.	70
Figure 5.8: représentation de deux modèles d'anévrismes.	71
Figure 5.9 : Echantillon de la base de données des images Dicom	71
Figure 5.10 : Image d'un modèle d'anévrisme.....	72
Figure 5.11 : Décomposition de l'image à l'aide de la Transformée en Ondelettes_	73
Figure 5.12 : Représentation des coefficients de l'image après le seuillage.	74
Figure 5.13 : Représentations de l'image reconstruite par la transformée en ondelettes	74
Figure 5.14 : Représentation de l'image reconstruite par AnéSup.	75
Figure 5.15 : Représentation 1D de l'image reconstruite par AnéSup.	75
Figure 5.16 : (a)image reconstruite et débruitée avec TO. (b) détection de contour de l'image débruitée. (c)_représentation théorique de l'image en 1D	76
Figure 5.17(a) : Représentation 1D de : (a) image originale (b) filtrage gaussien 2x2 (c) superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.	76
Figure 5.17(b) : Représentation 1D de : (a) l'image originale (b) filtrage gaussien [5x5] (c) superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.	77
Figure 5.17(c) : Représentation 1D de : (a) l'image originale (b) filtrage gaussien [10 10] (c) superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.	77
Figure 5.18 : Représentation 1D de : (a) l'image originale (b) filtrage avec la TO (c) superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.	78
Figure 5.19 : Représentation de l'influence du filtre de gauss sur l'image.	79
Figure 5.20 : Représentation de l'influence de TO sur l'image.	79
Figure 5.21 : Représentation d'une image basse résolution.	80
Figure 5.22 : Représentation d'une image haute résolution avec un facteur SR=8.	81
Figure 5.23 : Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 1.	81
Figure 5.24 : Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 2.	82
Figure 5.25 : Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 3.	82
Figure 5.26 : Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 4.	83
Figure 5.27 : Représentation de l'image reconstruite par AnéSup.	83
Figure 5.28 :(a) Image originale de taille 556x556 pixels et de diamètre interne d=4.315 mm (b)image de basse résolution de taille 278x278 pixels (f=2), (c) image de basse résolution de taille 139x139 pixels (f=4), (d) image de basse résolution de taille 70x70 pixels (f=8).	84
Figure 5.29 : (a) image reconstruite de haute résolution et de taille 556x556 pixels (f=2) et de diamètre interne d=4.312mm, (b) image reconstruite de haute résolution et de taille 556x556 pixels (f=4) et de diamètre interne d=4.307mm, (c) image reconstruite de haute résolution et de taille 556x556 pixels (f=8) et de diamètre interne d=4.312mm	84
Figure 5.30 (a):taux d'erreur obtenue en appliquant les différentes techniques de SR.....	86
Figure 5.30 (b): taux d'accuracy obtenue en appliquant les différentes techniques de SR.	86
Figure 5.31 (a): taux d'erreur obtenue en appliquant les différentes tailles du filtre de lissage	87
Figure 5.31 (b): taux d'accuracy obtenue en appliquant les différentes tailles du filtre de lissage.	87
Figure 5.32 : Super résolution d'un anévrisme réel à l'aide des ondelettes avec différents facteurs de SR.	88
Figure 5.33 : Influence de la fonction d'interpolation sur les résultats de la SR.	89
Figure 5.34 : Influence du paramètre de la fonction de lissage sur les résultats de la SR.	90

INTRODUCTION GENERALE.

Il y a de nombreux avantages à coder numériquement les images. Grâce au traitement numérique, les images peuvent être manipulées plus aisément. Une image numérique n'est qu'une projection imparfaite et incomplète d'une scène donnée sur un plan. En effet, l'espace réel qui nous entoure est un espace continu construit d'une infinité de points alors qu'une image numérique est considérée comme un signal numérisé ayant des valeurs quantifiées affectées à un ensemble fini de points. Les systèmes d'acquisition sont généralement conçus pour que cette représentation soit suffisante pour les besoins de l'application.

Même avec les technologies les plus récentes, il existe cependant plusieurs cas où la dégradation produite lors de l'acquisition est assez importante pour ne pas répondre à ces besoins. Quand l'amélioration de la résolution n'est plus possible par le remplacement physique de l'appareil d'acquisition pour des raisons de coût ou de limites technologiques, il est conseillé d'utiliser des techniques et des méthodes numériques de superrésolution. En effet, ces dernières peuvent représenter un alternatif à faible coût qui assure l'amélioration de la qualité de l'image et augmente la performance des autres traitements.

Bien que les techniques de la super-résolution constituent l'ensemble des opérations et des techniques qui corrigent les images et reconstruit un signal de bonne qualité à partir d'un signal de médiocre qualité, on distingue deux grandeurs principales souvent adoptées comme des techniques de super-résolution et qui sont : la reconstruction dans le cas de sur-échantillonnage, ou encore la suppression des bruits (débruitage) qui reste un des sujets les plus délicats en traitement d'images.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la super résolution des images en utilisant la transformée en ondelettes. Pour ce faire, nous avons divisé ce travail en cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présenterons des généralités sur l'imagerie médicale et les différentes techniques qui y sont utilisées en soulignant l'objectif visé par notre travail.

Nous exposerons dans le deuxième chapitre, des généralités sur la superrésolution et donnerons un état de l'art des importants travaux et théories exploités dans ce domaine.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons le cadre mathématique de la transformée en ondelettes ainsi que ses différents types ; nous soulignerons l'intérêt qu'offre cet outil au traitement d'images.

La super résolution des images à l'aide de la transformée en ondelettes fera l'objet du quatrième chapitre qui tente d'expliquer comment introduire la transformée en ondelettes dans ces deux grandeurs de la super résolution (sur échantillonnage et débruitage) .

Et enfin, le cinquième chapitre sera consacré à l'implémentation de l'ensemble des techniques présentées dans les chapitres précédents avec la réalisation d'une interface graphique sous Matlab; nous montrerons les mérites de l'utilisation de la transformée en ondelettes sur la qualité du débruitage en tant que prétraitement dans la détection des contours, ainsi que l'augmentation de la résolution des images dans le cas de la super résolution mono-image.

Nous terminerons notre travail par une conclusion générale présentant les principaux avantages de l'utilisation des ondelettes en traitement d'images.

Chapitre I

INTRODUCTION A L'IMAGERIE MEDICALE.

I.1. Introduction:

L'imagerie médicale a révolutionné les pratiques médicales. Néanmoins, de nombreux problèmes liés au traitement d'image y sont encore ouverts et leur résolution (même partielle) peut aboutir à une amélioration des diagnostics et actes chirurgicaux. On peut citer par exemple : le problème de la réduction des radiations administrées lors d'un examen scanner, la chirurgie assistée par ordinateur (incluant des problèmes de segmentation automatique, de recalage de données ...), ou encore la détection et l'analyse de structures alignées, etc.

Le domaine de l'imagerie médicale, et tout particulièrement ici cérébrale, est un domaine de recherche en pleine expansion. Sur un plan purement médical tout d'abord, il devient en effet crucial aujourd'hui d'obtenir des images des différentes structures cérébrales avec la résolution spatiale la plus fine possible, ceci en vue de repérer avec précision par exemple une tumeur, un anévrisme cérébral ou bien la dimension des artères, etc....

Le but de l'imagerie médicale est de créer une représentation visuelle intelligible d'une information à caractère médical. Cette problématique s'inscrit plus globalement dans le cadre de l'image scientifique et technique : l'objectif est en effet de pouvoir représenter sous un format relativement simple une grande quantité d'informations issues d'une multitude de mesures acquises selon un mode bien défini. L'image obtenue peut être traitée informatiquement pour obtenir par exemple :

une reconstruction tridimensionnelle d'un organe ou d'un tissu .

Un film montrant l'évolution ou les mouvements d'un organe au cours du temps.

Une imagerie quantitative qui représente les valeurs mesurées pour certains paramètres biologiques dans un volume donné.

Une représentation multimodale recalant plusieurs données au sein d'un même document (contour du cœur et mobilité des parois par exemple).

Dans un sens plus large, le domaine de l'imagerie médicale englobe toutes les techniques permettant de stocker et de manipuler ces informations. Ainsi, il existe une norme pour la gestion informatique des données issues de l'imagerie médicale : la norme DICOM.

I.2. Les différentes techniques d'imagerie médicale

Suivant les techniques utilisées, les examens d'imagerie médicale permettent d'obtenir des informations sur l'anatomie des organes (leur taille, leur volume, leur localisation, la forme d'une éventuelle lésion, etc.) ou sur leur fonctionnement (leur physiologie, leur métabolisme, etc.). Dans le premier cas on parle d'imagerie structurale et dans le second d'imagerie fonctionnelle.

Parmi les méthodes d'imagerie structurales les plus couramment employées en médecine, on peut citer d'une part les méthodes tomographiques basées soit sur les rayons X (radiologie conventionnelle, tomodensitomètre ou CT-scan, angiographie, ...) soit sur la résonance magnétique (IRM), les méthodes échographiques (qui utilisent les ultra-sons), et enfin les méthodes optiques (qui utilisent les rayons lumineux).

Les méthodes d'imagerie fonctionnelles sont aussi très variées. Elles regroupent les techniques de médecine nucléaire (TEP, TEMP) basées sur l'émission de rayons gamma par des traceurs radioactifs qui, après injection, se concentrent dans les régions d'intense activité métabolique, les techniques électrophysiologiques qui mesurent les modifications de l'état électrochimique des tissus (en particulier en lien avec l'activité nerveuse) ou encore les mesures thermographiques.

Ces différents types de techniques sont souvent employés de façon complémentaire parfois même au sein d'un même système d'imagerie qui permet alors des acquisitions multimodales, simultanées ou non.

I.2.1. Utilisation des champs magnétiques

L'imagerie par résonance magnétique (IRM), utilise l'effet d'un champ magnétique intense sur le spin des protons. C'est un procédé tomographique, permettant d'obtenir des "*coupes virtuelles*" du corps suivant trois plans de l'espace (coupe sagittale, coupe coronale et coupe axiale). En fonction des paramètres choisis, l'IRM permet d'obtenir des images très contrastées de certains tissus en fonction de leurs propriétés histologiques. C'est donc un outil particulièrement utilisé en imagerie cérébrale. Les examens IRM sont considérés à ce jour sans risque sur l'organisme. Cependant, tout objet ferromagnétique, sensible au champ magnétique (piercing, pacemaker, certaines prothèses, etc.), est dangereux.

La magnétoencéphalographie (*MEG*) est une technique de mesure des faibles champs magnétiques induits par l'activité électrique des neurones du cerveau. Contrairement à l'IRM, elle ne repose pas sur l'aimantation préalable des tissus. Par conséquent, la présence d'objet magnétique ne pose aucun risque.

La magnéto-cardiographie est une technique très analogue à la précédente qui consiste à mesurer les champs magnétiques induits par l'activité électrique des cellules du muscle cardiaque au niveau du torse. Elle n'est que très peu utilisée.

I.2.2. Utilisation de la radioactivité

Les techniques de scintigraphie nucléaire reposent sur l'utilisation d'un traceur radioactif qui émet des rayonnements détectables par les appareils de mesure. Ces molécules radiopharmaceutiques sont choisies pour se fixer préférentiellement sur certaines cellules selon le type de diagnostic voulu. Un traitement informatique des données permet ensuite de reconstituer l'origine spatiale de ces rayonnements et de déduire les régions du corps où le traceur s'est concentré. L'image obtenue est le plus souvent une projection mais on peut obtenir une coupe ou une reconstruction 3D de la répartition du traceur.

Tomographie d'émission monophotonique (TEMP ou SPECT) : elle utilise l'émission de photons gamma par une molécule marquée par un isotope radioactif injecté dans l'organisme.

Tomographie à émission de positon (TEP ou PET) : elle utilise le plus souvent du sucre (un analogue du glucose) marqué par un corps radioactif émettant des positons (e.g., Fluor 18), et permet alors de voir les cellules à fort métabolisme (ex : cellules cancéreuses, infection...).

La TEP permet en général d'obtenir des images de meilleure qualité que la TEMP. Toutefois, le nombre et la disponibilité des radiopharmaceutiques utilisables en TEMP ainsi que le coût modéré des gamma caméras compensent ce défaut.

I.2.3. Utilisation des rayons X :

L'utilisation de rayons X est d'usage courant. Ces rayonnements, comme les rayons gamma sont ionisants et donc dangereux. En particulier, l'irradiation d'une cellule en phase de mitose peut provoquer une mutation de l'ADN et qui peut provoquer l'apparition d'un cancer à terme. Toutefois, grâce aux mesures de radioprotection, le risque inhérent aux examens X est limité autant que possible.

Différents types d'examens utilisent les rayons X :

Radiographie, utilisant des rayons X et parfois l'injection de produit de contraste. Les images obtenues sont des projections des organes et des différents systèmes suivant un plan. Généralement, la radiographie est utilisée pour le système osseux car il s'agit du système le plus visible sur une radiographie du corps.

Scanner X, tomographie utilisant les rayons X. Les images obtenues sont des coupes millimétriques (ou infra-millimétriques) pouvant être étudiées dans tous les plans de l'espace, ainsi que des images tridimensionnelles.

Scanner DEXA mesurant la densité osseuse (ou ostéodensitométrie).

I.2.4.Utilisation des ultrasons :

Échographie, utilisant des ultrasons. L'image obtenue est une coupe de l'organe étudié. elle peut être associée à un examen doppler analysant la vitesse du sang dans les vaisseaux ou dans les cavités cardiaques ou à une mesure du module de Young par couplage à une vibration de basse fréquence (technique des années 2005) .

I.2.5.Utilisation des rayons lumineux :

Les technologies d'OCT (Optical Coherent Tomography) permettent d'obtenir une image par réalisation d'interférences optiques sous la surface du tissu analysé. Ces interférences sont mesurées par une caméra (OCT plein champ) ou par récepteur dédié (OCT traditionnelle). Ces techniques sont non destructives et sans danger.

L'OCT plein champ est la plus performante des techniques OCT. L'image obtenue est une biopsie optique virtuelle. C'est une technologie en développement qui permet, grâce à sa résolution (1 μm dans les 3 dimensions X, Y, Z) de voir l'organisation cellulaire en 3 dimensions. Les images sont réalisées en plan, à la manière de photos prises au-dessus du tissu, mais à différentes profondeurs sous la surface du tissu observé. Cette technique utilise une source lumineuse blanche (spectre large).

OCT traditionnelle: l'image obtenue est une coupe du tissu étudié. La résolution est de l'ordre de 10 à 15 μm . Cette technologie utilise un laser pour réaliser les images.

I.3. Objectif visé

L'objectif visé par notre travail est de calculer avec une grande précision la dimension d'un anévrisme cérébral (diamètre de l'artère), pour déterminer la taille idéale du stent à placer.

I.3.1. Qu'est-ce qu'un anévrisme cérébral?

Un anévrisme est un point faible de la paroi d'un vaisseau sanguin, plus couramment d'une artère. La pression sanguine tend à pousser la section affaiblie d'une paroi artérielle vers l'extérieur, formant une saillie similaire à un ballon. Cet effet n'est pas particulièrement dangereux, mais l'artère est susceptible de se rompre. Une rupture d'anévrisme provoque un éclatement de l'artère et un saignement incontrôlable, ce qui peut être fatal.

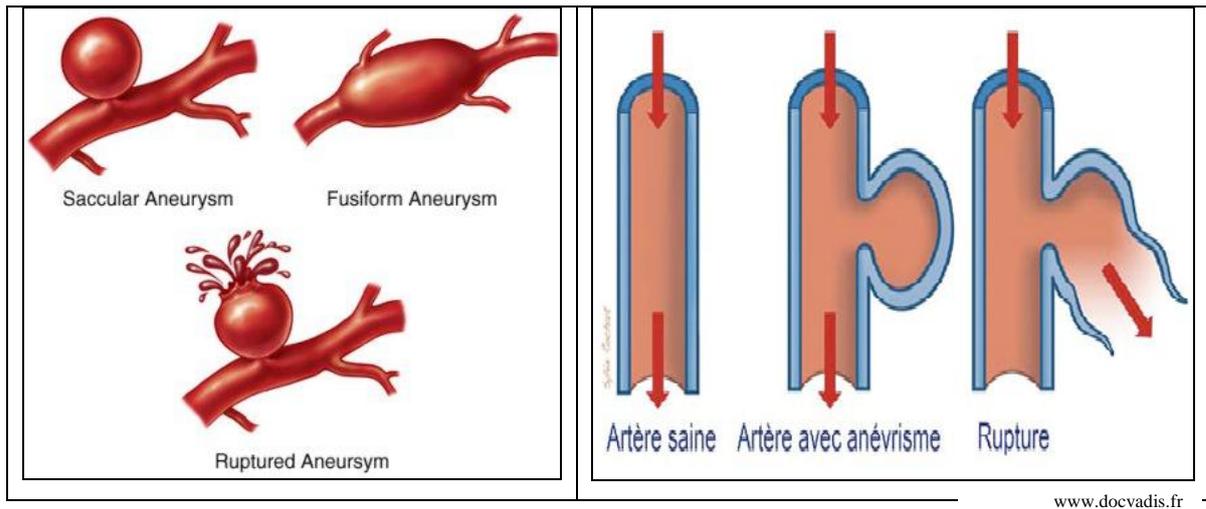


Figure 1: Développement d'un anévrisme.

Parmi les solutions actuelles, adoptées par les spécialistes en la matière, au niveau d'un anévrisme on place un stent pour diminuer la pression du flux sanguin au niveau de la poche évitant ainsi la rupture.

I.3.2 Qu'est-ce qu'un stent?

Stent est un terme anglais dérivé du nom de Charles Thomas Stent, un dentiste anglais du 19^e siècle. Le stent est un ressort métallique qui est positionné sur un ballon d'angioplastie dégonflé. Lors du gonflage de ce dernier dans l'artère, il s'expand et empêche le retour élastique de la sténose. Le ballon est alors retiré et le stent reste en place. Il peut être mis d'emblée (stenting direct) ou après une dilatation par un premier ballon. La mise en place d'un stent se fait sous [radioscopie](#) et n'allonge pas sensiblement la procédure d'angioplastie.

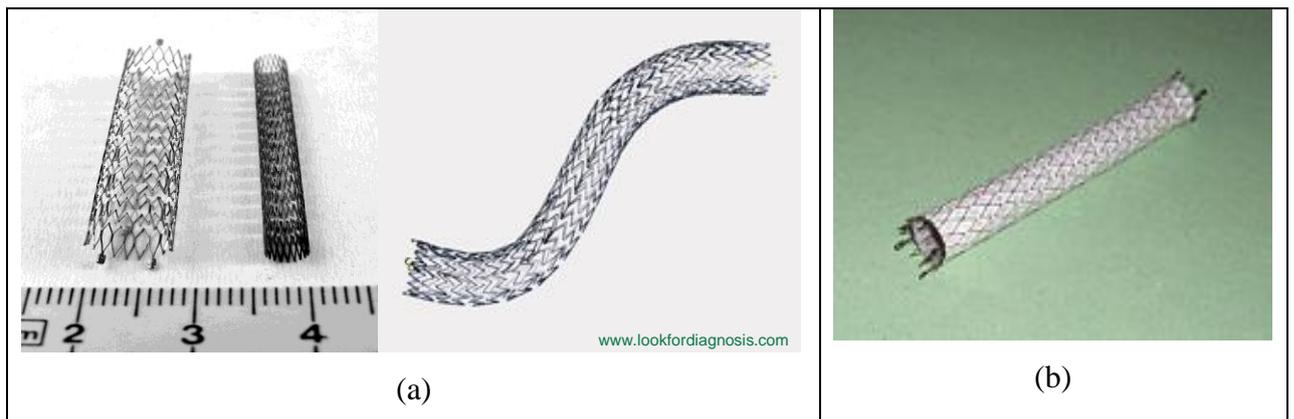


Figure 2 : (a) Stent métallique, (b) Stent couvert.

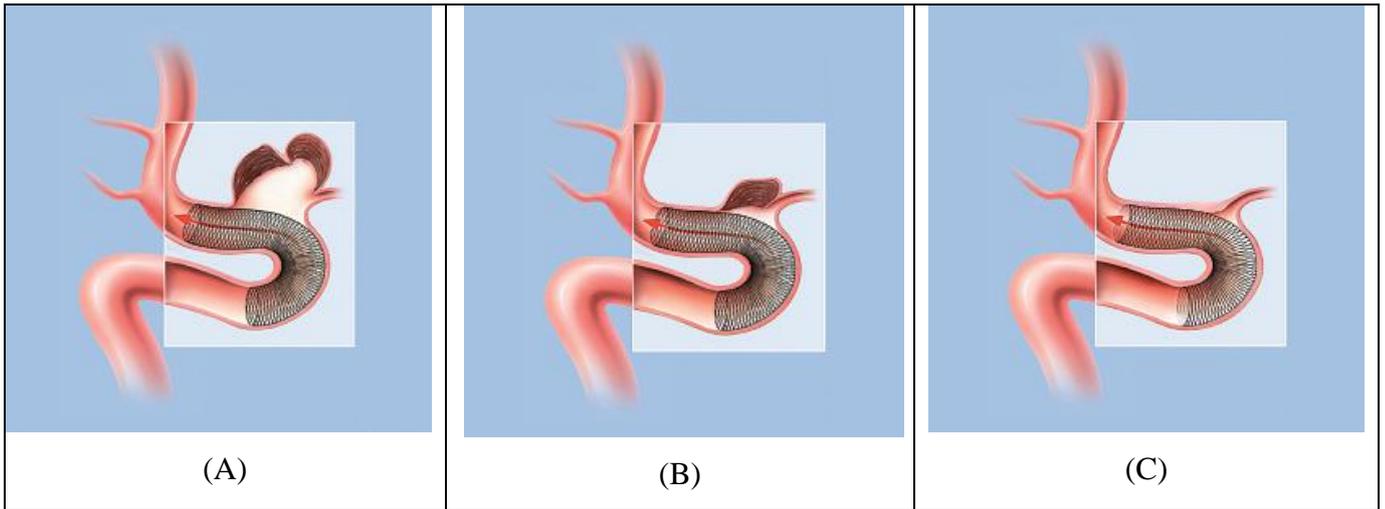


Figure 3: Le traitement de l'anévrisme par des Stents correcteurs du flux sanguin: (A) Réduction du flux sanguin dans l'anévrisme après l'introduction d'un stent. Coagulation progressive de l'anévrisme. (B) Anévrisme ayant déjà fortement régressé après thrombose complète. (C) Anévrisme ayant complètement régressé et guérison du segment vasculaire pathologique.

Le problème actuel repose sur la fabrication des stents qui sont caractérisées par leurs diamètre et longueur. Si le diamètre du stent est plus grand que l'artère, l'emplacement sera impossible, d'autre part si le diamètre du stent est inférieur à l'artère cela pose un problème.

Pour déterminer le diamètre des artères avec une précision la plus fine possible, on doit avoir des images de haute résolution pour calculer le diamètre ; mais l'augmentation de la puissance du champ magnétique est limitée, pour des raisons à la fois techniques et médicales. Pour cela, il est important de réfléchir à des méthodes algorithmiques pouvant passer outre cette limitation et augmenter la résolution pour éventuellement déceler des détails particuliers inaccessibles sur une acquisition standard.

Comme il est courant, dans le cadre d'un suivi de patient, d'acquérir plusieurs séries d'image de basse résolution à des instants différents, on pourra s'interroger sur la possibilité de recourir à l'interpolation pour estimer plus finement la topologie des différentes aires cérébrales entre deux images successives, voire même au sein d'un même plan de coupe. Pour rendre cette interpolation plus précise, il peut être intéressant de passer par des techniques dites **Super Résolution** lorsque l'on dispose, comme c'est le cas, de une ou de plusieurs images de basses résolutions. Néanmoins, l'application de telles techniques n'est envisageable que sur des données bien conditionnées, en termes de **Débruitage**.

I.4. Conclusion

Même avec les technologies les plus récentes, de nombreux problèmes persistent et restent encore ouverts comme par exemple ceux rencontrés en imagerie médicale et engendrés

par les conditions difficiles d'acquisition. Lorsqu'il est impossible d'améliorer le capteur- soit pour des raisons de coût, soit à cause des limitations physiques- la super résolution des images devient nécessaire et ce, non seulement pour améliorer la qualité visuelle de celles-ci mais aussi pour extraire des informations cachées sur les images réelles.

Chapitre II

ETAT DE L'ART DE LA SUPER RESOLUTION

II.1. Introduction :

La Super-Résolution a suscité une activité algorithmique soutenue depuis une dizaine d'années. Les méthodes proposées associent la reconstruction d'une image de haute résolution à partir d'un ensemble d'images de basse résolution. Le terme résolution définit la fidélité aux détails, qui est étroitement liée au taux d'échantillonnage, c'est-à-dire au nombre de pixels du détecteur utilisé pour l'acquisition.

Du point de vue algorithmique, la super résolution réalise la reconstruction d'une image (**HR**) de taille $(kH * kL)$ pixels à partir d'une ou plusieurs images (**BR**) de taille $(H * L)$ pixels avec un facteur k . L'application des techniques de SR est basée sur deux grandeurs principales :

- la super résolution mono-image.
- la super résolution multi-image (multi-trame).

II.2. Super Résolution mono-image :

Le principe général de la SR mono-image est toujours basé sur les techniques de ré-échantillonnage des images (interpolation); ce dernier consiste à introduire des échantillons intermédiaires entre deux ou plusieurs échantillons connus.

Cette opération est nécessaire chaque fois que l'on doit transformer une image dans une géométrie prédéfinie (par exemple en imagerie médicale pour aligner les images sur les repères anatomiques).

L'idée de principe est de considérer que l'image d'origine vérifie le théorème de Shannon, on reconstruit tout d'abord le signal continu dont cette image discrète est issue, puis cette image est filtrée de façon à donner une image dont le spectre est compatible avec le nouvel échantillonnage que l'on souhaite réaliser ; enfin on échantillonne cette image aux points que l'on désire connaître.

Mais cette idée de principe se heurte à des contraintes de mise en œuvre matérielles très difficiles, qui nécessitent que l'on trouve des solutions de remplacement.

Cela se fait en combinant reconstruction et filtrage en un seul filtrage. Cela se fait également très souvent en remplaçant les fonctions canoniques de reconstruction par des fonctions plus compacts, souvent polynomiales, permettant d'effectuer des sommations finies et non infinies.

II.2.1. Interpolation avec des Polynômes

Dans ces approches, on convolue la fonction initiale $f(x)$ par un noyau $h(x)$:

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int f(y)h(x-y)dy \quad (2.1)$$

Ce qui s'exprime dans l'espace de Fourier par :

$$G(u) = F(u)H(u) \quad (2.2)$$

F et H étant la TF de f et h .

L'interpolation idéale est obtenue pour :

$$h(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{x} = \text{sinc } \pi x \quad ; \quad H(u) = \text{rect}(u).$$

Mais d'autres interpolations, plus rapides, sont souvent utilisées :

- **Interpolation au plus proche voisin :**

$$h(x) = \text{rect}(x) \quad ; \quad H(u) = \text{sinc } \pi u.$$

- **Interpolation linéaire :**

$$h(x) = (1 - |x|)\text{rect}(2x) \quad ; \quad H(u) = \text{sinc}^2 \pi u.$$

- **Interpolation quadratique :** plusieurs formules ont été proposées. citez plutôt l'auteur [1] est particulièrement utilisée :

$$\begin{cases} h(x) = -2x^2 + 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}. \\ h(x) = x^2 - \frac{5}{2|x|} + \frac{3}{2} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{1}{2} \\ h(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

Dont la fonction de transfert est :

$$H(u) = \frac{6 \sin \pi u - 6 \sin 3\pi u - \cos \pi u + \cos 3\pi u}{(2\pi u)^2}$$

- **Interpolation cubique** : les solutions possibles sont encore plus nombreuses et ont fait l'objet de très nombreux travaux [2]. on retiendra la famille paramétrée par la variable a :

$$\begin{cases} h(x) = (a+2)|x|^3 - (a+3)x^2 + 1 & \text{si } |x| \leq 1. \\ h(x) = a(|x|^3 - 5x^2 + 8|x| - 4) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ h(x) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.4)$$

La valeur $a = -1/2$ est souvent retenue. Elle conduit à une interpolation dont la fonction de transfert est :

$$H(u) = \frac{18 - 24 \cos 2\pi u + 6 \cos 4\pi u - \pi u(2 \sin 2\pi u - \sin 4\pi u)}{(2\pi u)^4}$$

II.2.2 Interpolation par des B-Splines

Les B-splines forment également une famille de polynômes intéressants [3][4][5]. ils sont de degré k et se déduisent récursivement du polynôme de degré 0 par la formule :

$$\beta^k(x) = \beta^{k-1}(x) * \beta^0(x) \quad (2.5)$$

ou $*$ exprime la $k^{\text{ème}}$ convolution.

ainsi :

$$\beta^1(x) = \beta^0(x) * \beta^0(x)$$

$$\beta^2(x) = \beta^0(x) * \beta^0(x) * \beta^0(x)$$

... etc.

La fonction d'ordre 0 est définie par la fonction porte : $\beta^0(x) = \text{rect } x$; les diverses fonctions sont explicitées dans [6] jusqu'à l'ordre 7. Leurs TF s'expriment simplement par :

$$TF[\beta^k] = (\text{sinc } u/2)^{k+1}$$

Une représentation par les splines d'ordre n prend la forme générale :

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x - k) \quad (2.6).$$

Lorsqu'on interpole un signal dans l'approche par Splines, on choisit généralement des splines interpolâtes, qui passent exactement par tous les points de l'échantillonnage, et non des splines approximâtes qui passent au plus près d'un ensemble de points. Calculer une telle approximation consiste donc à déterminer les coefficients inconnus c_k tels que en tout point x appartenant aux échantillons initiaux on ait :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x-k)|_{x=k} = s(k) \quad (2.7)$$

Les $s(k)$ étant les valeurs connues de l'échantillonnage. On peut calculer les approximations par splines de deux façons :

1. par résolution du système d'équations (2.7) liant les coefficients inconnus des splines aux coordonnées et aux amplitudes connues des échantillons, on est alors amené à inverser une matrice Toeplitz (invariante par translation). Les coefficients de la matrice sont les valeurs des β^n aux nœuds du maillage, ils sont au nombre de $n+1$. Les inconnues, les $c(k)$, sont plus nombreuses que les équations (on ne dispose pas d'équations complètes pour les $\frac{n}{2-1}$ premiers et derniers points de l'échantillonnage). On choisit donc généralement de répéter les premières et les dernières valeurs, ou on les reproduit selon une symétrie miroir.

2. par filtrage (c'est-à-dire par convolution) [7] :

Pour cela, utilisons le noyau b_m^n obtenu en échantillonnant la B-spline de degré n dilatée d'un facteur m et Associons-lui sa transformée en z :

$$b_m^n(k) = \beta\left(\frac{x}{m}\right)|_{x=k} \rightarrow B_m^n(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_m^n(z)(k) z^{-k} \quad (2.8)$$

Nous voulons déterminer les coefficients $c(k)$ des splines qui garantissent l'égalité aux échantillons entiers :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} c(l) \beta^n(x-l)|_{x=k} = s(k) \quad (2.9)$$

ce que l'on peut réécrire comme une convolution :

$$s(k) = b_1^n * c$$

si l'on définit par $\gamma(k)$ la fonction dont la transformée en Z (TZ) est l'inverse de $B_1^n(z)$:

$$\gamma(k) \rightarrow 1/B_1^n(z)$$

On obtient une solution du problème par :

$$c(k) = \gamma(k) * s(k) \quad (2.10)$$

On montre que cette déconvolution est stable et peut être effectuée très rapidement [3][6].

A deux dimensions, l'interpolation spline se déduit du cas monodimensionnel par produit tensoriel de l'interpolation en x et en y (équation (2.6)):

$$s(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} c(k, k') \beta^n(x - k) \beta^n(y - k') \quad (2.11)$$

II.2.3. Interpolation adaptative

Des méthodes complètement différentes des précédentes effectuent des interpolations adaptatives, dans le but de préserver les objets présents dans la scène et leurs contours en particulier. Ces techniques contrôlent souvent l'interpolation par une détection de contours ou une segmentation de l'image. Un exemple de telles techniques est donné par [8]. D'autres méthodes [9] s'appuient sur des décompositions fractales qui permettent de retrouver les propriétés fines - filtrées par l'échantillonnage original - mais présentes à travers la pyramide d'homothétie interne.

II.3. Super résolution multi-image (multi-trame)

La reconstruction d'une image par une méthode SR multi-trame consiste à produire une image de haute résolution à partir de plusieurs images de résolution plus faible. Ces images BR peuvent être extraites d'une séquence vidéo obtenue soit à partir d'une camera fixe montrant une scène en mouvement, soit en bougeant une camera qui filmerait une scène fixe, soit encore à partir de plusieurs cameras fixes ou appareils photographiques observant une même scène

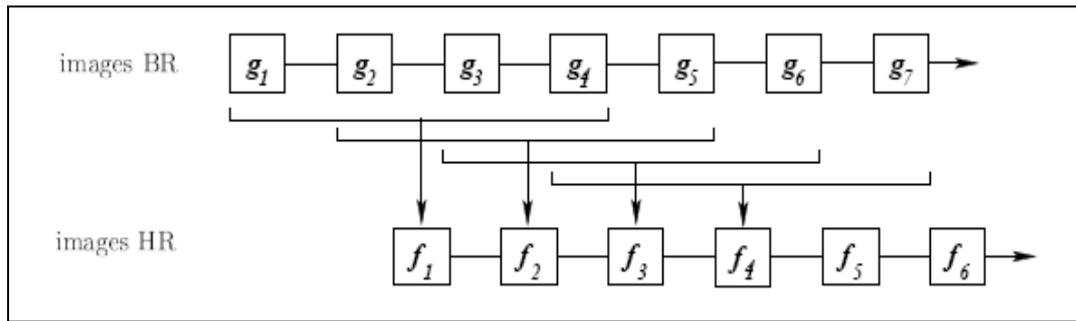


Figure 2.1: Super Résolution multi-frame.

Il est pour cela nécessaire d'obtenir de nouvelles informations sur l'image. Certaines techniques se contentent d'injecter une information a priori et sont en fait des méthodes d'interpolation améliorées. D'autres utilisent l'information temporelle provenant de séquences d'images. Grâce à la connaissance du mouvement apparent entre les images, il est possible de reconstruire une image super résolue. Ce sont ces dernières méthodes qui sont souvent adoptées comme des techniques de super résolution. Elles sont classées en quatre grandes catégories :

- les méthodes fréquentielles qui cherchent à résoudre le problème dans le domaine de Fourier ;
- les méthodes basées sur l'utilisation du théorème d'échantillonnage généralisé ;
- les méthodes d'interpolation qui ramènent tous les pixels de la séquence dans un même repère et interpolent ensuite les échantillons sur une grille uniforme ;
- les méthodes qui considèrent la super résolution comme un problème inverse (modélisation des dégradations puis inversion).

II.3.1. Méthode Fréquentielle:

Cette méthode englobe un ensemble de techniques utilisant une formulation de la super-résolution dans le domaine fréquentiel. Ces techniques utilisent les propriétés de translation de la transformée de Fourier ainsi que la théorie de l'échantillonnage pour reconstruire une image haute résolution à partir d'observations multiples sous-échantillonnées avec des mouvements de translation globale. Cette dernière hypothèse constitue cependant le principal inconvénient de ces méthodes qui peuvent difficilement être étendues à des mouvements plus complexes.

C'est à cette classe de méthodes qu'appartiennent les premières solutions proposées au problème de la super-résolution, introduites par l'article pionnier de Tsai et Huang [10].

Le principe consiste à utiliser les propriétés de la transformation de Fourier afin d'écrire un système d'équations liant les coefficients de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) des images observées aux échantillons de la Transformée de Fourier Continue (TFC) de la scène originale inconnue. Ce système est résolu dans le domaine fréquentiel et l'image est retrouvée grâce à la TFD inverse. L'écriture du système d'équations nécessite la connaissance préalable des mouvements de translation inter-images avec une précision sub-pixelique.

Soit $f(x, y)$ une image continue et f_k ($k = 1, \dots, p$) un ensemble de p versions translattées:

$$f_k(x, y) = f(x + \delta_{x,k}, y + \delta_{y,k}). \quad (2.12)$$

où $\delta_{x,k}, \delta_{y,k}$ sont les composantes en x, y de la translation globale entre l'image $f_k(x, y)$ et $f(x, y)$.

L'ensemble $\{f_k(i, j)\}$ avec $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$; $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ et $k \in \{0, \dots, p\}$ correspond à une version discrète de l'ensemble $\{f_k(x, y)\}$ après échantillonnage uniforme idéal, de période T_x et T_y , selon les axes de coordonnées x et y respectivement. D'où:

$$f_k(x, y) = f(x + \delta_{x,k}, y + \delta_{y,k}) \quad (2.13)$$

La TFC du signal continu F_k^c et la TFD du signal échantillonné F_k sont liées par la relation *d'aliasing* :

$$F_k = \frac{1}{T_x T_y} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_k^c \left(\frac{2\pi m}{M T_x} + \frac{2\pi i}{T_x}, \frac{2\pi n}{N T_y} + \frac{2\pi j}{T_y} \right) \quad (2.14)$$

de plus, d'après la propriété de translation de la transformation de Fourier:

$$F_k^c(u, v) = e^{j2\pi(\delta_{x,k}u + \delta_{y,k}v)} F^c(u, v) \quad (2.15)$$

ou $\delta_{x,k}$ et $\delta_{y,k}$ sont les composantes du déplacement de la $k^{ème}$ image par rapport à l'image de référence f et F_k le spectre de la $k^{ème}$ image.

Si $f(x, y)$ est une fonction à bande limitée, il existe des entiers L_x et L_y tels que :

$$|F^c(u, v)| = 0 \text{ pour } |u| > \frac{2\pi L_x}{T_x} \text{ et } |v| > \frac{2\pi L_y}{T_y} .$$

La somme infinie de l'équation (2.14) devient alors une somme finie. En exploitant (2.14) et (2.15), on obtient un système d'équations qui relie les coefficients de la TFD des images observées et ceux des échantillons de la TFC de l'image continue. Il suffit alors de résoudre le système et d'appliquer la TFD inverse pour reconstruire l'image super-résolue.

Cette méthode bien qu'efficace et élégante a plusieurs inconvénients. Outre l'hypothèse de translation globale qui est inappropriée dans de nombreuses applications, cette méthode fait l'hypothèse d'un échantillonnage idéal et néglige le bruit d'observation ainsi que la fonction de transfert du système optique.

Une procédure récursive, basée sur les moindres carrés pondérés itérés, est introduite pour résoudre le système en présence de bruit. Cette méthode peut également prendre en compte une fonction de transfert optique [11]. On peut ainsi modéliser non seulement le système optique du capteur mais aussi un échantillonnage non idéal. La prise en compte du flou introduit cependant un conditionnement du système d'équations.

Dans [12], la procédure récursive précédente est régularisée par la méthode de Tikhonov. La solution stable d'un système linéaire $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ est donnée par la minimisation de la fonctionnelle:

$$R(X) = \|\mathbf{AX} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \|\mathbf{X} - \mathbf{c}\|^2 \quad (2.16)$$

où \mathbf{c} est une approximation de la solution \mathbf{X} . Ce système est ensuite résolu par une procédure itérative. Comme la solution est inconnue, \mathbf{c} est initialement nul et prend ensuite la valeur de la solution à l'itération précédente, \mathbf{b} est le vecteur contenant les coefficients de la TFD des images basse résolution ; \mathbf{X} contient les coefficients de la TFD de l'image haute résolution et \mathbf{A} est la matrice composée des termes exponentiels complexes reliés à la transformation de Fourier et au déphasage. La principale critique que l'on peut adresser à cette méthode concerne le choix de la régularisation qui peut conduire à des solutions trop lisses. De plus, le choix des paramètres λ et \mathbf{c} est délicat et peut influencer grandement le résultat final. Rhee et Kang [13] proposent d'utiliser une Transformation en Cosinus Discrète (TCD) au lieu de la (TFD). Ils aboutissent à une formulation similaire :

$$R(X) = \|\mathbf{AX} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \|\mathbf{QX}\|^2 \quad (2.17)$$

mais dans laquelle b est le vecteur contenant les coefficients de la TCD des images basse résolution; X contient les valeurs des pixels de l'image haute résolution. La régularisation peut donc être effectuée directement sur les pixels et non plus dans le domaine fréquentiel. Cette régularisation spatiale, réduisant les effets des erreurs d'estimation de mouvement Q , est un filtre passe-haut, ce qui permet de lisser la solution. Enfin A est, dans ce cas, une matrice réelle et non plus complexe. La TCD permet de réduire le coût en mémoire et en calcul de l'algorithme comparativement à la TFD.

Toutes ces méthodes ont une limitation essentielle. Elles ne fonctionnent que dans le cas d'un mouvement de translation globale car elles utilisent la relation simple qui existe entre la translation spatiale et le déphasage dans le domaine transformé. Or dans le cas de mouvements plus complexes, on ne dispose pas d'une telle relation. Afin de contourner ce problème, Su et Kim [14] proposent de décomposer l'image en sous blocs et d'estimer un mouvement de translation pour chacun d'eux. Cette approche pose néanmoins encore quelques problèmes, notamment au niveau des frontières entre les sous-blocs.

II.3.2. Echantillonnage Multicanal

Certaines méthodes proposent une reconstruction basée sur le théorème d'échantillonnage généralisé de Papoulis [15]. C'est le cas de la méthode de Uret Gross [16] qui repose plus précisément sur la version modifiée du théorème d'échantillonnage introduite par Brown [17].

Soit un signal $f(x)$ défini dans une bande de fréquence $]-\sigma, \sigma[$. Ce signal est filtré par K filtres linéaires mutuellement indépendants. La sortie de chacun des filtres est échantillonnée à la fréquence $\frac{2\sigma}{K}$. On obtient ainsi K signaux $g_k(mT), T = K/2\sigma$. Chacun des signaux est donc échantillonné à $1/K$ fois la fréquence de Nyquist, mais comme il y a K signaux, le nombre total d'échantillons correspond bien à celui de la fréquence de Nyquist.

D'après le théorème de Papoulis, f peut être reconstruit à partir de ces signaux. Pour cela on passe les K signaux dans K filtres h_k appropriés et on additionne les sorties. On a donc :

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_k(mT) h_k(x - mT) \quad (2.18)$$

Où $\hat{f}(x)$ est une version échantillonnée de $f(x)$ satisfaisant le critère de Nyquist et qui peut être interpolée pour retrouver $f(x)$ exactement. La méthode permettant de déterminer la réponse impulsionnelle h_k est décrite dans [17].

Pour appliquer cette méthode à la super-résolution, il suffit de considérer que les K filtres dont la sortie est g_k correspondent à la fonction de transfert optique du système ainsi qu'à une translation globale de l'image f (la translation est modélisée comme un délai). Ur et Gross décomposent le problème de la super-résolution en deux phases:

Fusion des signaux sous-échantillonnés en un seul signal, suivie par la déconvolution de ce signal.

L'application du théorème d'échantillonnage multicanal permet d'obtenir une solution analytique pour la fusion des images. On peut ensuite appliquer un algorithme quelconque de déconvolution à celle-ci.

La fusion des images est calculée dans le domaine spatial, mais la formulation du problème est très similaire à la formulation fréquentielle décrite précédemment.

Shekarforoush et Chellappa [18] utilisent également le théorème d'échantillonnage généralisé. L'image super-résolue est construite par combinaison linéaire d'une base construite à partir de la réponse impulsionnelle optique. Ils obtiennent ainsi une solution analytique du problème. Ils supposent de plus que la réponse impulsionnelle optique est inconnue et qu'elle varie pour chaque image. Elle est estimée à partir des données. Pour cela, la détection de singularités dans la puissance spectrale inter-image est exploitée.

II.3.3. Interpolation sur une Grille d'Échantillonnage Non Uniforme

Cette partie décrit des approches simples basées sur l'interpolation spatiale d'échantillons non uniformément répartis.

Grâce à la connaissance du mouvement sub-pixellique dans la séquence d'images, il est possible de rapporter tous les pixels des images de la séquence dans le même référentiel. On obtient alors un sur-échantillonnage des images dont les pixels ne sont pas uniformément répartis. Cette image est ensuite interpolée et ré-échantillonnée sur une grille uniforme.

On peut alors appliquer sur cette image haute résolution une méthode classique de restauration d'image pour déconvoluer la fonction de transfert optique.

Bien que cette approche puisse paraître à première vue intéressante, elle ne prend pas en compte l'aliasage présent dans les images. Les valeurs des pixels des images sous-échantillonnées sont entachées de ces erreurs d'aliasage. L'application de méthodes d'interpolation sur ces pixels ne peut donc permettre de retrouver les fréquences spatiales

originelles. Ces méthodes sont donc, à notre avis, des méthodes d'amélioration d'image mais ne peuvent être classées dans les méthodes de restauration proprement dites puisqu'il est impossible de retrouver les vraies fréquences .

Parmi les méthodes d'interpolation utilisées pour améliorer la résolution, citons celle de Yeh et Stark [19] basée sur la projection sur des ensembles convexes qui améliore la méthode itérative de Sauer et Allenbach [20]. Granrath et Lersch [21] reprennent la méthode de Yeh et Stark et proposent un algorithme rapide dans le cas de mouvements affines, basé sur la TF.

Tekalp, Ôzkan et Sezan ont utilisé des courbes splines pour l'interpolation [22]. Chiang et Boulton [19] proposent une méthode utilisant la fonction de transfert optique. Enfin, Nguyen et Milanfar [20] ont développé une méthode d'interpolation basée sur des ondelettes.

II.4. Conclusion

nous avons présenté un état de l'art des méthodes de super résolution en les classant en deux grandes catégories suivant le type de traitement adopté (mono, ou multi-image).

La première classe (super résolution mono-image) est basée sur des techniques d'interpolation et le choix de la fonction interpolatrice. Mais la plupart des images contiennent des contours (hautes fréquences spatiales) et ne sont donc pas strictement limitées en bande passante, leur échantillonnage ne respecte alors pas le critère de Nyquist. Les images numériques sont aussi dégradées par des phénomènes de recouvrement de spectre. La reconstruction de l'image originale ne peut pas être assurée par interpolation.

La deuxième classe (super résolution multi-image) plusieurs méthodes répondent aux problèmes posés par ce type de SR. Les méthodes fréquentielles sont efficaces dans le cas où les images observées correspondent à des translations d'une image de référence (les méthodes exploitent la relation entre translation dans le domaine spatial et déphasage dans le domaine fréquentiel). Leur principal inconvénient est d'être difficilement généralisables pour des mouvements plus généraux.

C'est aussi le cas concernant le théorème de l'échantillonnage multicanal, car chaque image observée est considérée comme le résultat du filtrage de l'image haute résolution et la définition du filtre correspondant est délicate dans le cas de mouvement complexe.

Les méthodes utilisant l'interpolation des échantillons non uniformément répartis séparent le problème en une phase de fusion des images de la séquence, suivie d'une phase de

restauration (déconvolution du flou). La fusion des images est effectuée par interpolation de tous les pixels de la séquence après recalage dans un même référentiel. Or, l'interpolation n'est théoriquement valide que si le critère de Nyquist a été respecté, ce qui n'est pas le cas ici. Comme l'interpolation équivaut à la convolution avec une fonction proche d'un sinus cardinal, elle équivaut à un filtrage passe-bas de l'image. Il n'est donc pas possible, dans ces conditions, de retrouver les hautes fréquences des images de séquence.

Chapitre III

LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES.

III.1. Introduction

La transformée en ondelettes est une méthode d'analyse et de représentation des signaux qui est complémentaire à celle de Fourier. Elle est caractérisée par l'utilisation de fonctions bien localisées, à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral, engendrées les unes à partir des autres par translation et dilatation.

La transformée de Fourier quant à elle utilise des fonctions non localisées dans l'espace physique, mais bien localisées dans l'espace spectral, engendrées par modulation. La localisation spatiale des fonctions de base et le groupe d'invariance de la transformée constituent les principales différences entre ces deux méthodes.

Les fonctions trigonométriques utilisées par la transformée de Fourier oscillent dans tout l'espace et donc l'information du signal transformé est délocalisée entre tous les coefficients de Fourier. Par contre, les coefficients d'ondelettes préservent les propriétés locales du signal. Ainsi, quand une erreur (de transmission par exemple) affecte un coefficient d'ondelette, son effet sur le signal reconstruit reste local et n'altère pas tout le signal, contrairement à la transformée de Fourier. Cette propriété permet également d'étudier le comportement d'une région particulière du signal directement à partir des coefficients d'ondelettes correspondants. Cette propriété est essentielle pour étudier les signaux non stationnaires ou intermittents

III.2. Cadre mathématique de la transformée en ondelettes

III.2.1. Rappel sur la transformée de Fourier :

La transformée de Fourier (TF) est l'un des outils les plus utilisés par la communauté du Traitement du Signal. Elle permet, en décomposant le signal selon un ensemble de sinusoides, de passer du domaine temps au domaine fréquence.

La transformée de Fourier de $f(t)$ dans L^2 est donnée par :

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi wt} dt, \quad w \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

La transformée de Fourier inverse représente $f(t)$ comme une sommation de sinusoides :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(w) e^{+2i\pi wt} dw, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

En examinant la formule d'analyse, certains des inconvénients de la transformation de Fourier apparaissent.

✓ **Inconvénient 1 : disparition des aspects temporels**

Les aspects temporels de la fonction f disparaissent dans F . En effet, si f n'est pas continue, il est quasiment impossible de la détecter à l'aide de F . L'exemple élémentaire d'une fonction créneau $f = \alpha_{[-a,a]} + \beta_{[-b,b]}$ avec $b > a > 0$, où on ne peut pas (sauf de façon bien compliquée) retrouver a et b à partir de F car la transformée de Fourier ne permet pas de distinguer la position et le nombre de discontinuités.

✓ **Inconvénient 2 : non-causalité de la transformée de Fourier**

Le calcul de F nécessite la connaissance de f sur \mathbb{R} tout entier, un calcul (au fur et à mesure) de la transformée et donc une analyse en temps réel est impossible. En effet, on peut connaître le spectre F , même approche, d'un signal f dont on ignore le futur.

✓ **Inconvénient 3 : principe d'incertitude d'Heisenberg**

Si le support de f est petit, alors le support de F est grand et réciproquement, les localisations de f et de F sont liées par le principe **d'incertitude d'Heisenberg** qui précise le lien qui entoure les dispersions de f et F . Il contraint le produit des dispersions en temps et en fréquence σ_f par σ_F :

$$\sigma_f^2 \sigma_F^2 \geq \frac{1}{4}$$

Et où ces dispersions sont définies par :

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 |f(t)|^2 dt, \quad \sigma_F^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (w - \varepsilon)^2 |F(w)|^2 dw \quad (3.4).$$

Elles quantifient les dispersions de $|f|^2$ et $|F|^2$ autour de leurs valeurs moyennes respectives u et ε données par :

$$u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} w |f(w)|^2 dw$$

Cette propriété implique que la transformée de Fourier inverse peut être numériquement instable puisque les informations utiles pour reconstruire f à partir de F par la formule de synthèse peuvent se trouver à des très hautes fréquences. En particulier, si f est à support compact et irrégulière, il faut pour la reconstruire, utiliser $F(\omega)$ pour de grandes valeurs de ω

On peut résumer en disant que la transformée de Fourier est une transformation intégrale qui a un caractère global.

III.2.2. Rappel sur la transformation de Gabor

Afin de pallier l'inconvénient du caractère global de la transformée de Fourier, une idée consiste à localiser l'analyse en sélectionnant une portion du signal autour d'une position temporelle, de faire l'analyse de Fourier puis de recommencer pour toutes les positions possibles. C'est le principe de la transformée de Fourier à fenêtre glissante, encore appelée transformée de Gabor.

On se donne d'abord une fenêtre $w \in L^1 \cap L^2$ centrée en 0, et on note :

$$w_{w,b}(t) = w(t-b)e^{2j\pi\omega t} \quad \text{pour } \omega, t, b \in \mathbb{R}$$

La transformée continue de Gabor d'un signal f est définie par la formule suivante :

$$Gf(\omega, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{w_{w,b}(t)} dt \quad \omega, b \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

La formule de synthèse ou de reconstruction est :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} (Gf)(\omega, b) w_{w,b}(t) d\omega db \quad \text{dans } L^2 \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

Dans la transformée continue de Gabor la fonction est localisée au voisinage de b , et le nombre d'oscillation augmente avec la fréquence ω mais l'enveloppe reste rigide, donc la résolution temporelle reste fixe. C'est le défaut majeur de cette transformée.

III.2.3. La transformée continue en ondelettes :

Afin de pallier l'inconvénient de la transformée de Gabor, il faut rechercher une transformée permettant une analyse semblable mais capable d'agir pour toute une gamme de résolutions temporelles simultanément. C'est ce qu'effectue, en un certain sens, la transformée en ondelettes.

On appelle ondelettes (ou ondelette mère), une fonction $\psi \in L \cap L^2$ admettant $n+1$ moments nuls (où $n \in \mathbb{N}$), c'est-à-dire vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}} t^p \psi(t) dt = 0. \quad p=0, \dots, n$$

La fonction ψ est d'intégrale nulle, elle est aussi orthogonale aux polynômes de degré inférieur ou égal à n . la fonction ψ oscille, prenant des valeurs positives et négatives. Le nombre n contrôle les oscillations de ψ au sens où plus n est grand, plus ψ oscille.

Par translation et dilatation de l'ondelette ψ , on définit les atomes de la transformée en ondelettes, pour toute échelle $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et toute position $b \in \mathbb{R}$, on définit un atome de la transformée par :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.10)$$

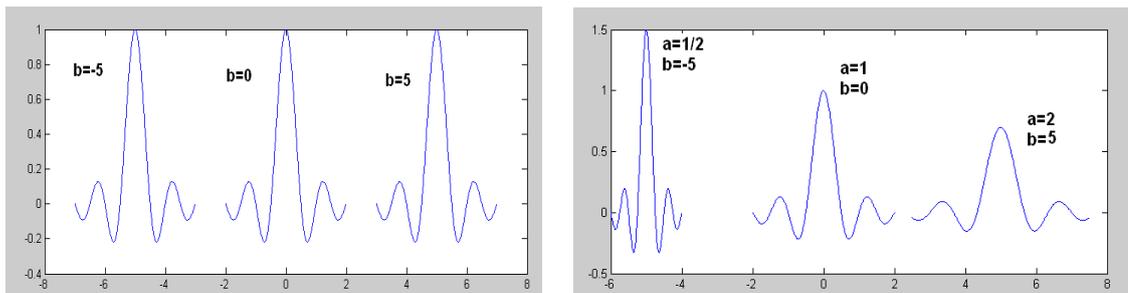


Figure 3.1: Translation et translation-dilatation d'une ondelette.

La famille $\{\psi_{a,b}\}_{a,b}$ est la famille d'ondelettes associées à ψ . en prenant ψ d'énergie égale à 1 ($\|\psi\|_{L^2} = 1$) toutes les fonctions $\psi_{a,b}$ sont alors de norme 1.

Les ondelettes n'ont plus d'enveloppe rigide, contrairement aux atomes de la transformée de Gabor. Elles ont un comportement en accordéon : elles gardent la même forme et le même nombre d'oscillations et sont les translatées-dilatées d'une même fonction. la figure1.1 représente trois ondelettes $\psi_{1,-5}$, $\psi_{1,0}$, $\psi_{1,5}$ obtenues par translation de l'ondelette mère, et trois ondelettes $\psi_{1/2,-5}$, $\psi_{1,-5}$, $\psi_{2,-5}$ obtenues par *translation-dilatation* de ψ .

La transformée continue en ondelettes de la fonction f d'énergie finie est la famille des coefficients $C_f(a,b)$ définis par :

$$C_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = (f, \psi_{a,b})_{L^2} \quad a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

La transformation admet une inverse, sous une condition supplémentaire dite d'admissibilité et la formule de synthèse (ou de reconstruction) est :

$$f(t) = \frac{1}{K_\psi} \int_{]0,+\infty[\times \mathbb{R}} C_f(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad \text{dans } L^2 \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

D'une certaine manière $C_f(a,b)$, le coefficient de f sur l'ondelette $\psi_{a,b}$ caractérise les fluctuations de la fonction f au voisinage de la position b , à l'échelle a . Supposons que ψ soit nulle en dehors de $[-M, M]$, alors $\psi_{a,b}$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-Ma + b, Ma + b]$, la valeur de $C_f(a,b)$ dépend alors des seules valeurs de f dans ce voisinage de b de longueur proportionnelle à a . Illustrons cette idée par la figure 3.2.

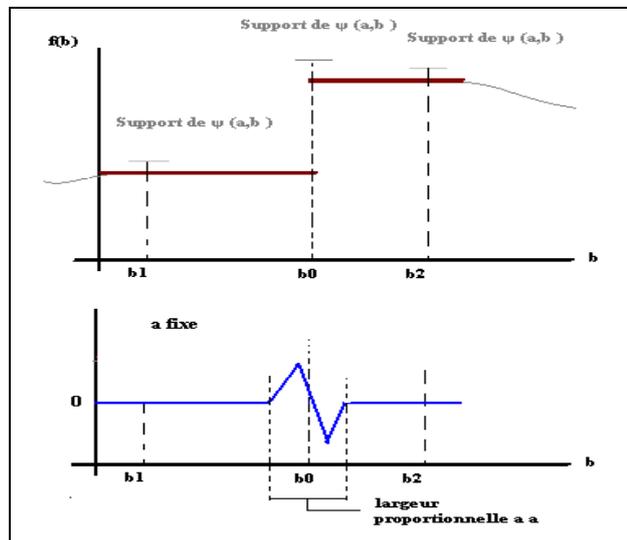


Figure 3.2: Représentation schématique de la détection d'une singularité.

Le premier graphique présente la fonction analysée $f(b)$ et le support de trois ondelettes positionnées autour de b_0, b_1 et b_2 pour une échelle a fixée. La fonction est continue sauf en b_0 . Le second graphique contient les coefficients d'ondelettes $C_f(a,b)$ pour cette même échelle a . Autour de b_1 et b_2 , les coefficients sont nuls puisque la fonction f est constante sur les supports de ψ_{a,b_1} et de ψ_{a,b_2} donnant des coefficients égaux à l'intégrale des ondelettes. En revanche, autour de b_0 , à cause de la discontinuité, les coefficients sont non nuls dans une zone dont la taille est proportionnelle au support de ψ et à la valeur de a . On peut ainsi, en inspectant les coefficients d'ondelettes, déduire la présence d'une singularité dans le signal analysé au voisinage de b_0 et à l'échelle a .

L'invisibilité de la transformée continue en ondelettes dans L^2 compète tenu du fait qu'elle conserve les angles et les longueurs (produits scalaire et normes), est assurée par le théorème suivant :

Soit $\psi \in L^1 \cap L^2$ vérifiant la condition d'admissibilité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\psi(w)|^2}{|w|} dw = \int_{-\infty}^0 \frac{|\psi(w)|^2}{|w|} dw < +\infty \quad (3.14)$$

Notons K_ψ la valeur commune des intégrales. Alors il y a conservation du produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2} = \frac{1}{K_\psi} \int_{]0, +\infty[\times \mathbb{R}} C_f(a, b) \overline{C_g(a, b)} \frac{da db}{a^2} \quad (3.15)$$

et on a la formule de synthèse :

$$f(t) = \frac{1}{K_\psi} \int_{]0, +\infty[\times \mathbb{R}} C_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \text{ dans } L^2 \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

Notons que la condition est difficile à utiliser, on lui préfère souvent une condition suffisante d'admissibilité beaucoup plus simple à vérifier :

$$\psi \text{ réelle, } \psi \in L^1 \cap L^2, \psi(t) \in L^1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \quad (3.17)$$

La transformée C_f associe à une fonction f d'une variable t , une infinité de coefficients doublement indexés par $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$. D'un certain point de vue, la transformation en fait trop : elle est redondante. Il est parfois souhaitable d'éviter cette redondance. On introduit la transformée discrète qui dans certains cas permet d'atteindre cet objectif.

III.2.3.1. Bases orthonormées d'ondelettes.

Contrairement à la transformée continue, dans laquelle l'ondelette est dilatée et translaturée de manière continue, la transformée en ondelettes discrète translate et dilate l'ondelette selon des valeurs discrètes.

Les coefficients a et b seront discrétisés de la manière suivante :

$$a = a_0^m \text{ et } b = n \cdot b_0 \cdot a_0^m, \text{ avec } a_0 > 1 \text{ et } b_0 > 0 \text{ fixés et appartenant à } \mathbb{Z}.$$

Les ondelettes sont alors définies de la manière suivante :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi \left(\frac{t}{a_0^m} - nb_0 \right) \quad (3.18)$$

Nous avons vu que la transformée en ondelettes continue est infiniment redondante. La transformée en ondelettes discrète permet de diminuer fortement cette redondance sans l'annuler entièrement, les signaux sont décrits par un nombre fini d'échantillons. Lorsque l'on voudra obtenir un signal transformé aussi concis que possible (en pratique, un signal transformé qui contienne autant d'échantillons que le signal d'origine) on utilisera alors un cas particulier de la transformée en ondelettes discrète : la transformée en ondelettes orthogonale.

III.2.3.1.1. Le passage à la transformée discrète en ondelettes

Il est légitime de se demander s'il est nécessaire de connaître la transformée C_f sur $R^{+*} \times R$ tout entier pour reconstruire f . Lorsque la réponse est négative, l'utilisation d'un sous ensemble discret semble un objectif raisonnable. L'idée est la suivante :

On considère des sous ensemble discrets de $R^{+*} \times R$. Fixons $a_0 > 1$ $b_0 > 0$ et prenons $a \in \{a_0^p\}_{p \in Z}$ et $b \in \{na_0^p b_0\}_{p,n \in Z}$. Par conséquent, au lieu d'utiliser la famille d'ondelettes :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a \in R^{+*}, b \in R$$

On se sert, pour la transformée discrète de la famille dénombrable d'ondelettes :

$$\psi_{p,n}(t) = a_0^{-p/2} \psi(a_0^{-p} t - nb_0) \quad a_0 > 1 \quad b_0 > 0 \text{ fixes } p, n \in Z$$

Pour $f \in L^2$, on définit la transformée discrète en ondelettes de la fonction f par :

$$C_f(p,n) = \int_R f(t) \overline{\psi_{p,n}(t)} dt = (f, \psi_{p,n})_{L^2} \quad p, n \in Z.$$

III.2.3.1.2. Analyse Multi-Résolutions et bases orthonormées d'ondelettes

Une autre manière de décrire la transformée en ondelettes est de dire qu'elle consiste à obtenir une approximation d'un signal f par projection de celui-ci sur l'espace d'approximation V_j grâce à un opérateur A_j [25][26][27]. Cette approximation faisant perdre une partie de l'information, la reconstruction du signal nécessite d'associer à l'opérateur A_j un opérateur D_j projetant le même signal sur l'espace de détail W_j tel que :

$$A_{j+1}f = A_j f + D_j f$$

Les espaces d'approximation et de détail sont construits respectivement à partir des fonctions de base $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

L'analyse multi-résolution permet de rapprocher l'analyse en variable d'espace avec l'analyse en variable de fréquence. Elle formalise l'idée intuitive selon laquelle tout signal peut être construit par raffinements successifs, c'est-à-dire par l'ajout de détails lorsque l'on passe d'une résolution à la suivante. D'une manière plus précise, une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ est définie comme une suite de sous-espaces fermés V_j de $L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, ayant les propriétés suivantes :

1. $V_j \subset V_{j+1} \Rightarrow$ l'approximation à la résolution a_{j+1} contient toutes les informations nécessaires pour calculer le même signal à la résolution inférieure a_j .
2. $v(x) \in V_j \Leftrightarrow v(2x) \in V_{j+1} \Rightarrow$ si $v(x)$ appartient à V_j , la même fonction dilatée d'un facteur 2 appartient à V_{j+1} .
3. $v(x) \in V_0 \Leftrightarrow v(x-k) \in V_0 \Rightarrow$ si $v(x)$ appartient à V_j , la même fonction traduite d'un facteur quelconque appartient aussi à V_j .
4. $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$ converge vers L^2 et $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \Rightarrow$ chaque fonction $f(x)$ d'énergie finie ($\in L^2$) peut être approximée arbitrairement par une fonction de V_j d'une hauteur j adéquate.
5. Il existe une fonction d'échelle $\varphi \in V_0$, ayant une intégrale non nulle, telle que l'ensemble $\{\varphi(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $V_0 \Rightarrow$ il existe une fonction φ telle que $\{\varphi(x-k)\}$ soit une base orthonormée de V_0 . La fonction φ et toutes ses traductions d'un facteur entier forment une base orthonormée.

Cette dernière propriété de l'analyse multi-résolution introduit une nouvelle fonction, la fonction d'échelle, laquelle possède des propriétés qui ne sont pas sans rappeler les ondelettes.

III.2.3.1.3. Fonction d'Echelle et Sous-espaces

Nous pouvons faire quelques observations à propos de la définition précédente. Comme $\varphi \in V_0 \subset V_1$, il existe une suite $(h_k) \in l^2(\mathbb{Z})$ telle que la fonction d'échelle satisfasse :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k \varphi(2x - k) \quad (3.21)$$

On constate que la définition des fonctions d'échelles est similaire à celle des ondelettes. Elles sont construites par dilatation et translation d'une fonction unique, appelée parfois père des ondelettes.

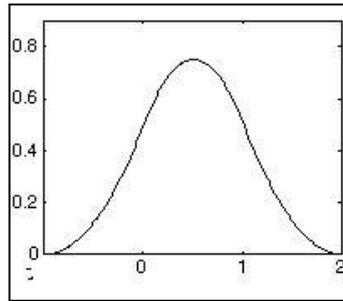


Figure 3.3: une fonction d'échelle B-spline.

Chaque fonction de V_0 peut être écrite comme une combinaison linéaire des fonctions de base

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k) \text{ de } V_1 \quad (3.22).$$

Cette équation fonctionnelle porte différents noms dont les plus utilisés sont «équation de dilatation» ou «équation de raffinement». L'ensemble des fonctions $\{\varphi_{j,l} | l \in \mathbb{Z}\}$, avec : $\varphi_{j,l}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - l)$ est une base de Riesz de V_j .

III.2.3.1.4. fonction ondelette et espaces de détail

Nous avons vu plus haut que $A_{j-1}f = A_j f + D_j f$ Ceci revient à dire :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (3.23)$$

En d'autres termes, chaque élément de V_{j+1} peut être écrit de manière unique comme la somme d'un élément de W_j et d'un élément de V_j . Notons que les espaces W_j eux-mêmes ne sont pas nécessairement uniques ; il peut y avoir plusieurs moyens de compléter V_j en V_{j+1} .

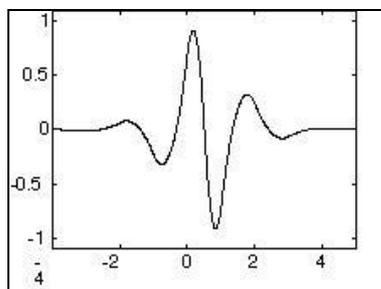


Figure 3.4: une Ondelette B-spline.

L'espace W_j contient l'information de détail nécessaire pour passer d'une approximation de résolution j à la résolution $j + 1$ en conséquence de quoi :

$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = L^2$$

Une fonction ψ est une ondelette si l'ensemble des fonctions $\{\psi(x-l) | l, j \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$. La définition de $\psi_{j,l}$ est similaire à celle de $\varphi_{j,l}$ de la section précédente. Ainsi, de la même manière que précédemment, comme une ondelette est également un élément de V_0 , il existe une suite $\{g_k\}$ telle que :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \psi(2x - k) \quad (3.24)$$

III.2.3.1.5. Orthogonalité et bi-orthogonalité

III.2.3.1.5.1. Les ondelettes orthogonales

L'analyse multi-résolution orthogonale est une analyse multi-résolution dans laquelle les espaces d'ondelettes W_j sont définis comme le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} [28]. En conséquence, les espaces W_j avec $j \in \mathbb{Z}$ sont tous mutuellement orthogonaux.

Une condition suffisante pour qu'une analyse multi-résolution soit orthogonale est :

$$W_0 \perp V_0 \quad \text{ou} \quad \langle \psi, \varphi(\cdot, -l) \rangle = 0 \quad l \in \mathbb{Z}$$

Reprenons l'expression de la famille d'ondelettes discrètes :

$$\psi_{m,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{1}{a_0^m}x - nb_0\right) \quad (3.25)$$

Y. Meyer a montré que pour $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$, les fonctions $\psi_{m,n}(x)$ constituent une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. Les ondelettes sont dites ondelettes orthogonales et s'écrivent alors :

$$\psi_{m,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{1}{2^m}x - n\right) \quad (3.26)$$

Une fonction d'échelle orthogonale est une fonction φ telle que l'ensemble $\{\varphi_{j,l} | l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée, où

$$\langle \psi, \varphi(\cdot, -l) \rangle = 0 \quad l \in \mathbb{Z}$$

avec une telle fonction φ , la collection de fonctions $\{\varphi(x - l) \mid l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0 et la collection de fonctions $\{\varphi_{j,l} \mid l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_j .

L'intérêt d'utiliser des ondelettes orthogonales devient évident lorsque les applications envisagées visent la compression (d'image ou de vidéo par exemple). Dans ce genre de cas, deux conditions doivent être respectées :

1. Ne pas « alourdir » l'information à compresser par de la redondance ;
2. Pouvoir effectuer la décompression de l'information, donc assurer la réversibilité de la transformée en ondelettes.

L'analyse multi-résolution consiste, nous l'avons vu, en la projection du signal à analyser sur deux espaces distincts : un espace d'approximation, et un espace détail. Si les fonctions utilisées (fonction d'échelle ou ondelette) ne sont pas orthogonales :

- l'information ne sera pas décorrélée entre les vecteurs de la base : la même information sera alors répartie sur plusieurs vecteurs, d'où la redondance.
- on ne pourra plus retrouver facilement le signal d'origine à partir des transformées.

Sur la figure 3.5, le produit scalaire de \vec{s} avec \vec{w}_1 nous donne un coefficient c_1 , et le produit scalaire de \vec{s} avec \vec{w}_2 nous donne un coefficient c_2 . Hors, la base n'étant pas orthogonale, $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2$ est bien égal à $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ mais n'est pas égal à \vec{s} la reconstruction n'est pas satisfaisante.

Si les espaces utilisés sont orthogonaux, l'information contenue dans le premier sous-espace sera parfaitement décorrélée de celle contenue dans le second : la projection d'un des vecteurs de la base sur un des autres donne zéro ; il n'y a donc aucune redondance entre les deux sous-signaux obtenus, chaque vecteur encodant une information qui lui est propre. De plus, la reconstruction sera alors parfaite, puisqu'on aura bien ici $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{s}$: le signal d'origine pourra être retrouvé à partir de la transformée.[29]

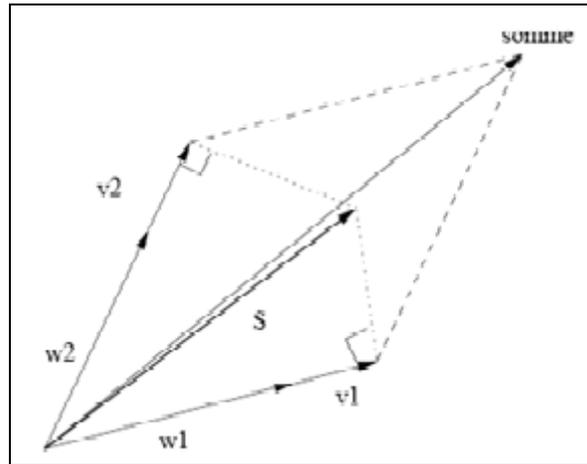


Figure 3.5: orthogonalité et produit scalaire.

III.2.3.1.5.2. Les ondelettes bi-orthogonales

Nous avons vu les avantages que présentait la transformée en ondelettes orthogonale pour le traitement du signal. Cependant, il n'existe pas de filtres RIF orthonormaux, à phase linéaire, qui assurent la reconstruction exacte, à l'exception de ceux correspondant à la base de Haar. Cependant, l'utilisation de bases bi-orthogonales permet la construction de filtres associés à des ondelettes possédant un haut degré de régularité.

Les bases d'ondelettes bi-orthogonales sont une généralisation des bases d'ondelettes orthogonales. Dans le cas bi-orthogonal, on utilise deux ondelettes mères $\psi(x)$ et $\tilde{\psi}(x)$ pour construire les bases d'ondelettes $\psi_{a,b}(x)$ et $\tilde{\psi}_{a,b}(x)$. On utilisera le même principe pour les fonctions d'échelles $\varphi_{a,b}(x)$ et $\tilde{\varphi}_{a,b}(x)$.

Ainsi, l'analyse multirésolution utilisant ces bases bi-orthogonales définit les espaces de détail W_m et \tilde{W}_m , et d'approximation V_m et \tilde{V}_m répondant à la propriété suivante [30]:

$$V_m \perp W_m \text{ et } W_m \perp \tilde{V}_m$$

Ainsi, l'ondelette utilisée pour l'analyse $\psi(x)$ est orthogonale à la fonction d'échelle $\tilde{\varphi}_{a,b}(x)$ utilisée pour la synthèse, et la fonction d'échelle utilisée pour l'analyse $\varphi_{a,b}(x)$ est orthogonale à l'ondelette $\tilde{\psi}(x)$ utilisée pour la synthèse, d'où le nom de bi-orthogonalité. Par contre, et contrairement au cas orthogonal, les ondelettes et les fonctions d'échelle associée ne sont pas orthogonales.

III.2.4. Avantages de la transformée en ondelettes

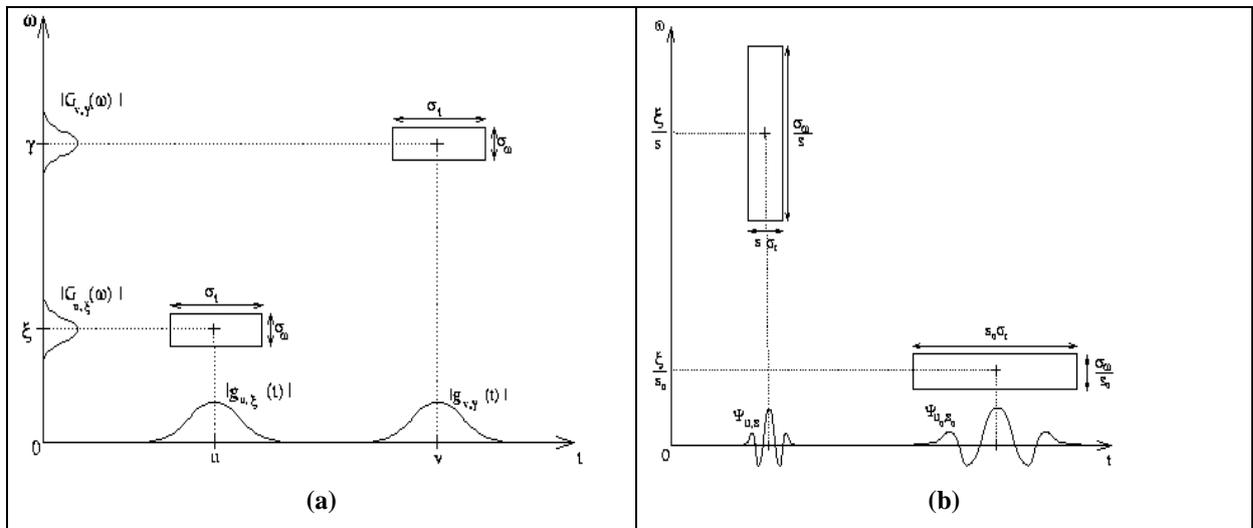


Figure 3.6: (a) Transformée de Fourier (TF), (b) Transformée en Ondelettes (TO).

Nous avons vu que la transformée de Fourier à fenêtre avait l'inconvénient de posséder une résolution d'analyse fixe, définie par la taille de l'enveloppe. La figure 3.6 ci-dessus montre la différence entre la transformée de Fourier à fenêtre (à gauche) et la transformée en ondelettes (à droite).

On constate que dans les basses fréquences, la transformée en ondelettes est très précise en fréquence, mais moins sur le temps. La tendance est inversée en haute fréquence où elle est beaucoup plus précise sur le temps que sur la fréquence. Cette caractéristique est très importante dans la plupart des applications. En traitement audio par exemple, il est reconnu que l'oreille humaine est plus sensible à l'instant d'apparition d'une fréquence élevée qu'à sa valeur exacte. Au contraire, le fait d'avoir une précision sur le temps d'une fréquence donnée supérieure à la période dudit signal, dans le cas de signaux basse fréquence par exemple, serait un non-sens. Ainsi, la transformée en ondelettes s'adapte tout naturellement au signal à analyser, contrairement à la transformée de Fourier à fenêtre qui conserve une résolution d'analyse fixe quelle que soit la fréquence observée. La taille de l'enveloppe à utiliser doit donc être définie avant l'analyse, et nécessite donc la connaissance a priori du signal pour que l'analyse soit efficace.

D'autre part, l'utilisation de la transformée en ondelette orthogonale permet de transformer un signal quelconque de N échantillons en un signal dans la base d'ondelettes

contenant également N échantillons et ce, sans perdre aucune information sur le signal d'origine.

De plus, le traitement par ondelettes permet de réduire le nombre d'opérations nécessaires à la transformée.

III.3. Les différents types de transformées en ondelettes.

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'effectuer la transformée en ondelettes, chacune se différenciant des autres soit par le type de la fonction de base employée, soit par la méthode d'implantation de la transformée. En fonction du type de traitement que l'on voudra effectuer par la suite, on pourra employer l'une des méthodes suivantes :

- ✓ **Translations et dilatations dyadiques d'une fonction** : ce sont les ondelettes classiques. Elles sont naturellement reliées à l'analyse multi-résolution et au codage en sous-bandes

- ✓ **Les paquets d'ondelettes** : extension des ondelettes classiques, ils reposent sur des fonctions de base ayant une meilleure localisation fréquentielle au prix d'une transformée légèrement plus lourde ;

- ✓ **Les bases trigonométriques locales** : l'idée principale est de travailler avec des sinus et des cosinus définis sur des intervalles finis combinés avec une méthode simple mais très puissante permettant de joindre les fonctions de base à leurs extrémités ;

- ✓ **Les ondelettes multiples** : l'idée n'est plus d'utiliser une fonction fixe que l'on va translater et dilater mais plutôt un nombre fini de fonctions. Cette méthode permet d'obtenir des combinaisons de propriétés utiles qui seraient impossibles avec les ondelettes classiques ;

- ✓ **Le lifting schème** : on abandonne ici complètement l'idée de translation et de dilatation. Cela fournit une grande flexibilité dans la construction d'ondelettes adaptées à des échantillons irréguliers ou variés.

Parmi toutes ces méthodes, la première, la plus classique, reste l'une des plus répandues. Cette méthode correspond à la transformée en ondelettes que nous avons décrite précédemment. La transformée en ondelettes par dilatation et translation dyadiques est également la méthode la plus souvent implantée matériellement puisqu'elle est basée sur les techniques éprouvées de filtrage numérique. L'une des raisons de ce succès vient des travaux de Mallat sur la transformée en ondelettes et les bancs de filtres.

III.3.1. Analyse Multi-Résolution et bancs de filtres.

Mallat a montré que les coefficients d'ondelettes définis par la relation $W(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$ peuvent être calculés à partir d'une transformée pyramidale mise en œuvre à l'aide de filtres numériques, récursifs ou non [25]. Le principe de la transformée pyramidale consiste en la décomposition du signal à analyser à l'aide d'une paire de filtres conjugués en quadratures. L'un de ces filtres fournira les coefficients d'ondelettes (ou détails), le second les coefficients d'approximation. L'approximation est elle-même à son tour décomposée par une seconde paire de filtres, l'ensemble constituant une pyramide de filtres.

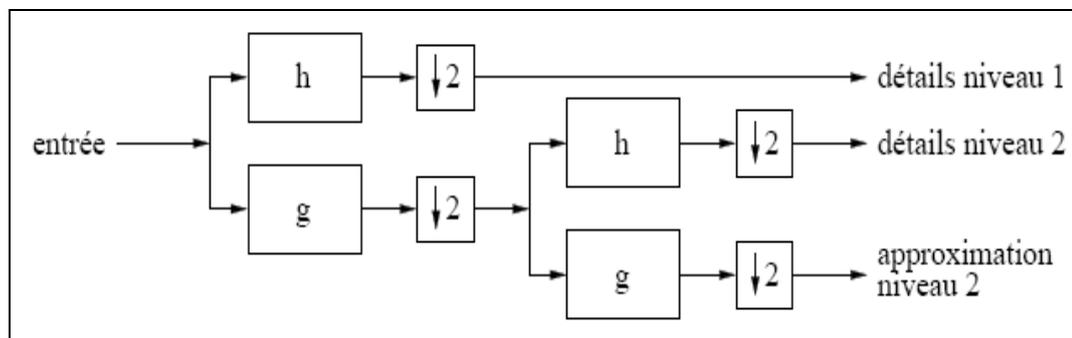


Figure 3.7: décomposition 1D à l'aide de bancs de filtres.

La résolution en sortie de chaque paire (ou banc) de filtres étant deux fois inférieure à la résolution d'entrée, on parle d'analyse multi-résolution dyadique.

III.3.1.1. Bancs de filtres et ondelettes (bi-)orthogonales.

III.3.1.1.1. Ondelettes orthogonales:

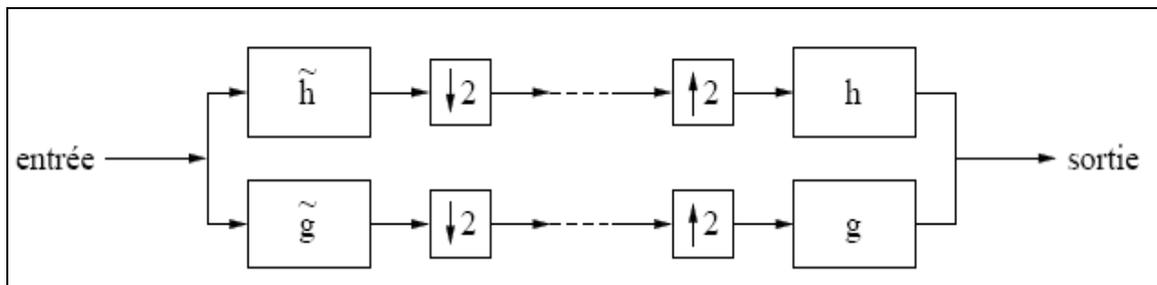


Figure 3.8: décomposition et reconstruction à l'aide de bancs de filtres.

Le principe de cet algorithme pour les ondelettes orthogonales est présenté en figure 3.8, Soit $S_0(n)$ un signal échantillonné correspondant au signal d'origine à la résolution 0. Ce signal est décomposé sur plusieurs niveaux de résolutions en deux bandes de fréquences

(passe-haut et passe-bas) de la manière suivante, où S représente l'approximation et d les détails :

$$S_m(n) = \sum_k h(2n - k)S_{m-1}(k) \text{ et } d_m(n) = \sum_k g(2n - k)S_{m-1}(k) \quad (3.27)$$

Ces filtres sont liés par la relation suivante : $g(n) = (-1)^n h(1 - n)$

$S_m(n)$ est une approximation de $S_{m-1}(n)$ à la résolution 2^{-m} . Les coefficients $d_m(n)$ représentent l'information perdue lorsque l'on passe de S à la résolution 2^{-m+1} à une approximation à la résolution plus grossière 2^{-m} . Les coefficients en sortie de chacun des filtres sont sous-échantillonnés avec un facteur 2 afin de respecter le théorème de Shannon.

La reconstruction est obtenue de la manière suivante :

$$S_{m-1}(k) = \sum_k h(2n - k)S_m(k) + \sum_k g(2n - k)d_m(k) \quad (3.28)$$

En termes de filtrage, la structure des filtres orthogonaux est particulière. Pour des filtres à 4 coefficients par exemple, tous les filtres (d'analyse et de synthèse) utilisent les 4 mêmes coefficients a, b, c et d .

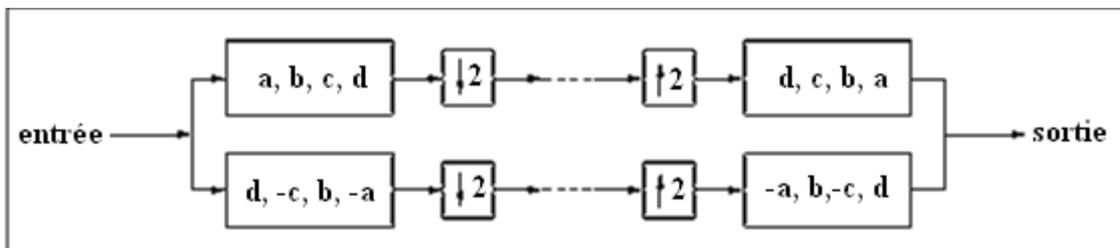


Figure 3.9: filtres d'analyse et de synthèse orthogonaux.

La relation entre ces 4 coefficients doit vérifier la relation suivante :

$$(a, b, c, d) * (d, c, b, a) = \frac{(-1, 0, 9, 16, 9, 0, -1)}{16}$$

Cette convolution est la multiplication de 2 polynômes dont a, b, c et d sont les coefficients vérifiant :

$$(a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3})(d + cz^{-1} + bz^{-2} + az^{-3}) = \frac{-1 + 9z^{-2} + 16z^{-3} + 9z^{-4} - z^{-6}}{16}$$

Ce polynôme dans lequel z^{-1} et z^{-5} sont absents est important dans la théorie des bancs de filtres.

III.3.1.1.2. Ondelettes bi-orthogonales

Dans le cas bi-orthogonal, l'analyse est effectuée de la même manière que dans le cas orthogonal :

$$S_m(n) = \sum_k h(2n - k)S_{m-1}(k) \text{ et } d_m(n) = \sum_k g(2n - k)s_{m-1}(k) \quad (3.29)$$

Par contre, la reconstruction est assurée par les filtres conjugués, soit :

$$S_{m-1}(k) = \sum_k \tilde{h}(2n - k)S_m(k) + \sum_k \tilde{g}(2n - k)d_m(k) \quad (3.30)$$

La relation imposée entre les filtres étant :

$$\tilde{g}(n) = -1^n h(1 - n) \text{ et } g(n) = -1^n \tilde{h}(1 - n) \quad (3.31)$$

Dans le cas bi-orthogonal, la conception des filtres est plus aisée puisqu'on permet aux filtres d'analyse de ne pas être orthogonaux entre eux (fig. 3.10)

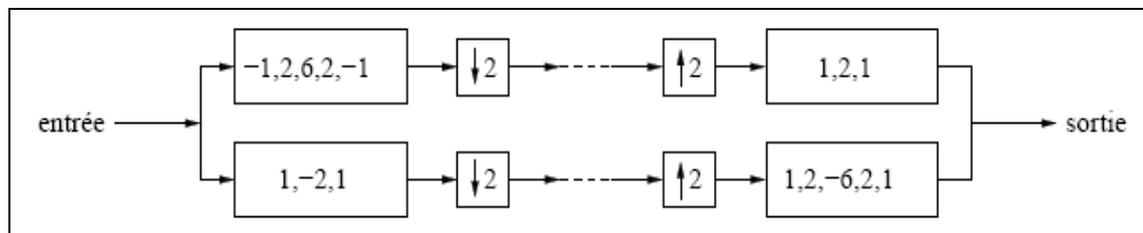


Figure 3.10: filtres d'analyse et de synthèse bi-orthogonaux.

III.3.1.2. Des bases d'ondelettes à l'algorithme rapide

Stéphane Mallat propose l'algorithme rapide de décomposition-reconstruction pour la transformée discrète en ondelettes dès la fin des années 1980. Il établit ainsi le lien entre les bases orthonormées d'ondelettes, dont la mise au point mathématique était alors récente, et les bancs de filtres classiques en traitement du signal.

En outre, deux traits inattendus sont à relever : l'algorithme est remarquablement simple et sa complexité est seulement linéaire dans la taille des données, c'est-à-dire plus fiable que celle de la transformée de Fourier rapide. Cet aspect est évidemment crucial pour les applications.

III.3.1.2.1. Algorithme de Mallat

Faire une décomposition, c'est calculer les coordonnées du signal sur les vecteurs de la base d'ondelettes.

Soit $M = \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Il s'agit d'une famille de sous-espaces vectoriels fermés emboîtés qui permettent l'approximation de fonctions et possèdent des propriétés faisant intervenir la dilatation et la translation des fonctions.

Pour $j \in \mathbb{Z}$ fixé, l'espace W_j est défini comme le supplémentaire orthogonal de l'espace V_j dans l'espace V_{j-1} . Pour une fonction $f \in L^2$, la décomposition en ondelettes consiste à calculer les coordonnées des projections orthogonales de f sur V_j et W_j respectivement, notées $A^j = P_{V_j} f$ et $D^j = P_{W_j} f$. Ces coordonnées dans les espaces V_j et W_j (qui sont munis des bases orthonormées : $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$) ne sont rien d'autre que les coefficients d'approximation et de détail définis par les relations suivantes :

$$A^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^j \varphi_{j,p} \quad \text{avec} \quad a_p^j = (A^j, \varphi_{j,p})_{L^2} = (f, \varphi_{j,p})_{L^2} \quad (3.32)$$

$$D^j = \sum_{p \in \mathbb{Z}} d_p^j \psi_{j,p} \quad \text{avec} \quad d_p^j = (D^j, \psi_{j,p})_{L^2} = (f, \psi_{j,p})_{L^2} \quad (3.33)$$

III.3.1.2.2. Les quatre filtres

Pour une ondelette orthogonale ψ , la fonction d'échelle associée φ satisfait une relation fondamentale qui est l'équation aux deux échelles suivante :

$$\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi_{0,n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \quad (3.34)$$

Les filtres intervenant dans la transformée en ondelettes discrète (DWT) et dans la transformée inverse (IDWT) sont intimement liés à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui n'a qu'un nombre fini d'éléments non nuls. On peut alors voir cette suite comme un filtre passe-bas. Ce filtre, noté ω , laisse donc passer les basses fréquences et retient les hautes. Il est à réponse impulsionnelle finie (FIR), de longueur K , de somme 1 et de norme $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A partir du filtre ω , on définit quatre filtres à réponse impulsionnelle finie, de taille K et de norme 1, on note les filtres de décomposition LoD (passe-bas) et HiD (passe-haut). Les deux filtres de reconstruction sont notés LoR (passe-bas) et HiR (passe-haut).

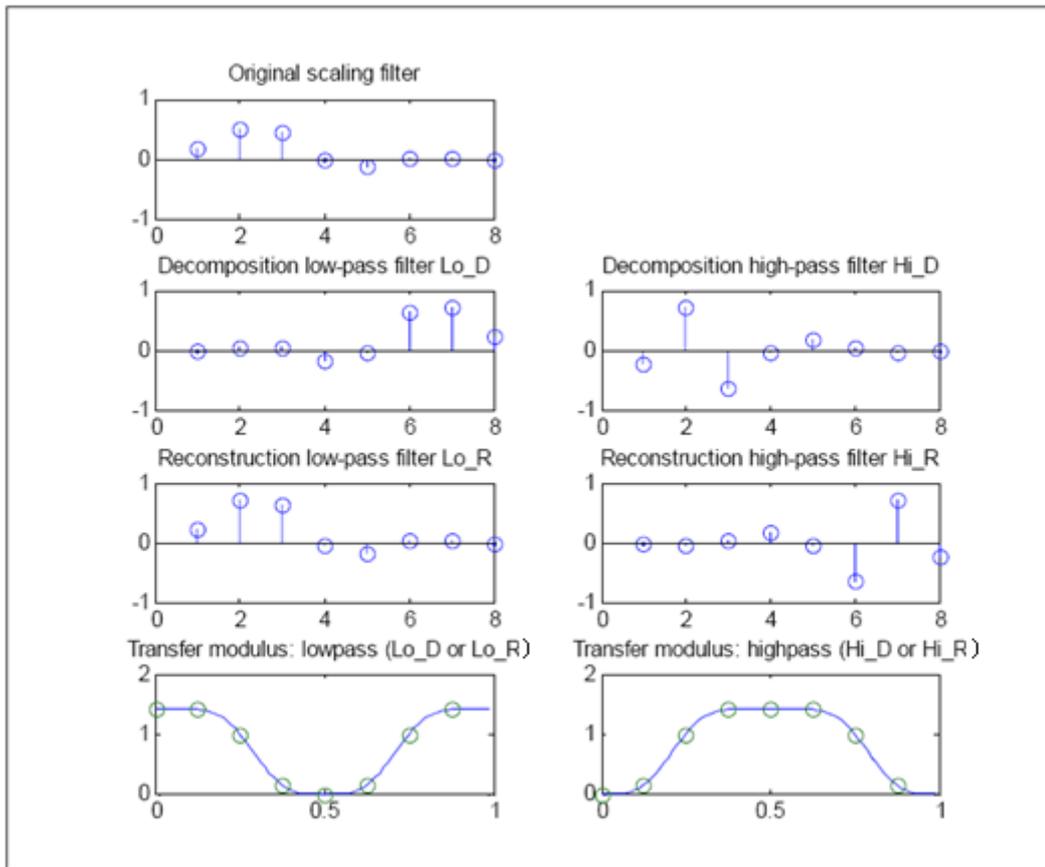


Figure 3.11: filtres pour l'ondelette db6.

Les deux filtres de reconstruction sont liés par :

$$LoR = \frac{\omega}{\|\omega\|} \text{ et } HiR_k = (-1)^{k-1} LoR_{K+1-k} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, K \quad (3.35)$$

Ce sont des filtres miroirs en quadrature. Les deux filtres de décomposition sont obtenus par image miroir des filtres de reconstruction :

$$LoD = LoR_{K+1-k} \text{ et } HiD_k = HiR_{K+1-k} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, K \quad (3.36)$$

III.3.1.2.3. Calcul efficace des coefficients.

L'algorithme de la transformée discrète en ondelettes (DWT) d'un signal X de longueur N consiste à effectuer plusieurs pas élémentaires de décomposition. Partant du signal X , le premier pas produit deux vecteurs de coefficients, les coefficients d'approximation a^1 et les coefficients de détail d^1 . Ces vecteurs sont obtenus par une convolution X avec le filtre passe-bas LoD pour l'approximation :

$$[X * LoD] = \sum_k X_{n-k} LoD_k$$

et avec le filtre passe-haut HiD pour le détail :

$$[X * HiD] = \sum_k X_{n-k} HiD_k$$

suis dans les deux cas par une décimation dyadique ($Y = dec(X)$ ou $Y_n = X_{2n}$). Ils sont de longueur $\frac{N}{2}$ environ.

Plus précisément, le premier pas de l'algorithme peut se représenter par la figure suivante :

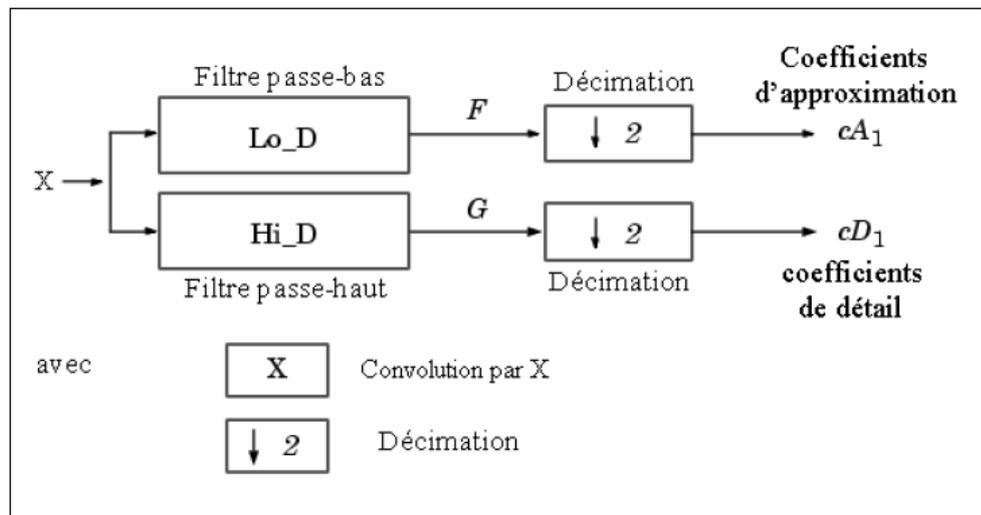


Figure 3.12: Premier pas de la DWT.

Les opérations mises en jeu conduisent de manière naturelle à envisager des décompositions d'ordre plus élevé. Le pas suivant consiste donc à décomposer les coefficients d'approximation cA_1 en deux, en remplaçant le signal X par cA_1 et en produisant cA_2 et cD_2 . L'algorithme se produit selon le même schéma. La décomposition permettant le passage au niveau $j + 1$ est représentée en figure 3.13.

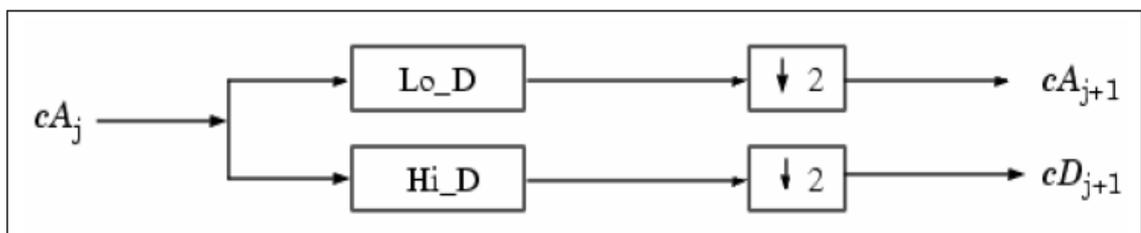


Figure 3.13: un pas de décomposition de la DWT (pour $j = 0, A^j = X$)

Un exemple pour la structure $j = 3$:

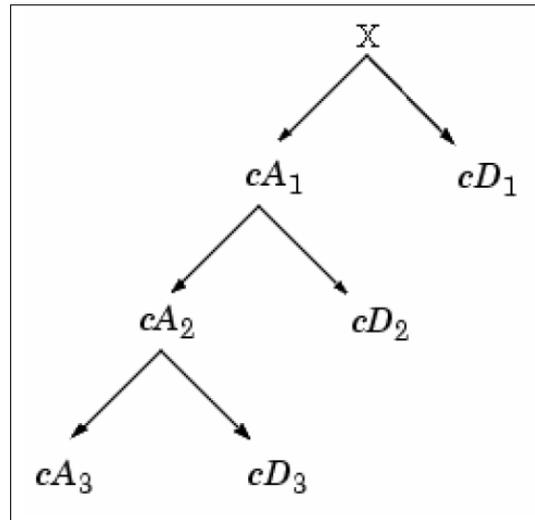


Figure 3.14: la DWT pour $j=3$.

Le calcul des coordonnées de cA_{j-1} connaissant celles de cA_j et de cD_j , se fait par la reconstruction (IDWT) suivante :

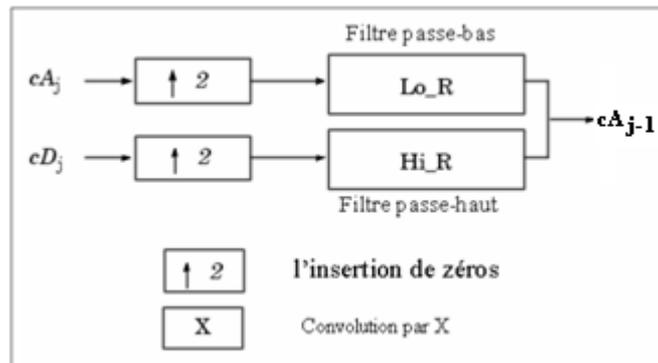


Figure 3.15: représentation de la IDWT.

Les coefficients de l'approximation cA_{j-1} sont donc obtenus simplement à partir des coefficients de l'approximation cA_j et du détail cD_j par une insertion suivie d'une convolution (d'un filtrage linéaire) représentées dans la figure 3.15.

Pour les images, un algorithme similaire est utilisable avec des ondelettes et des fonctions d'échelle obtenues par produit tensoriel de dimension un.

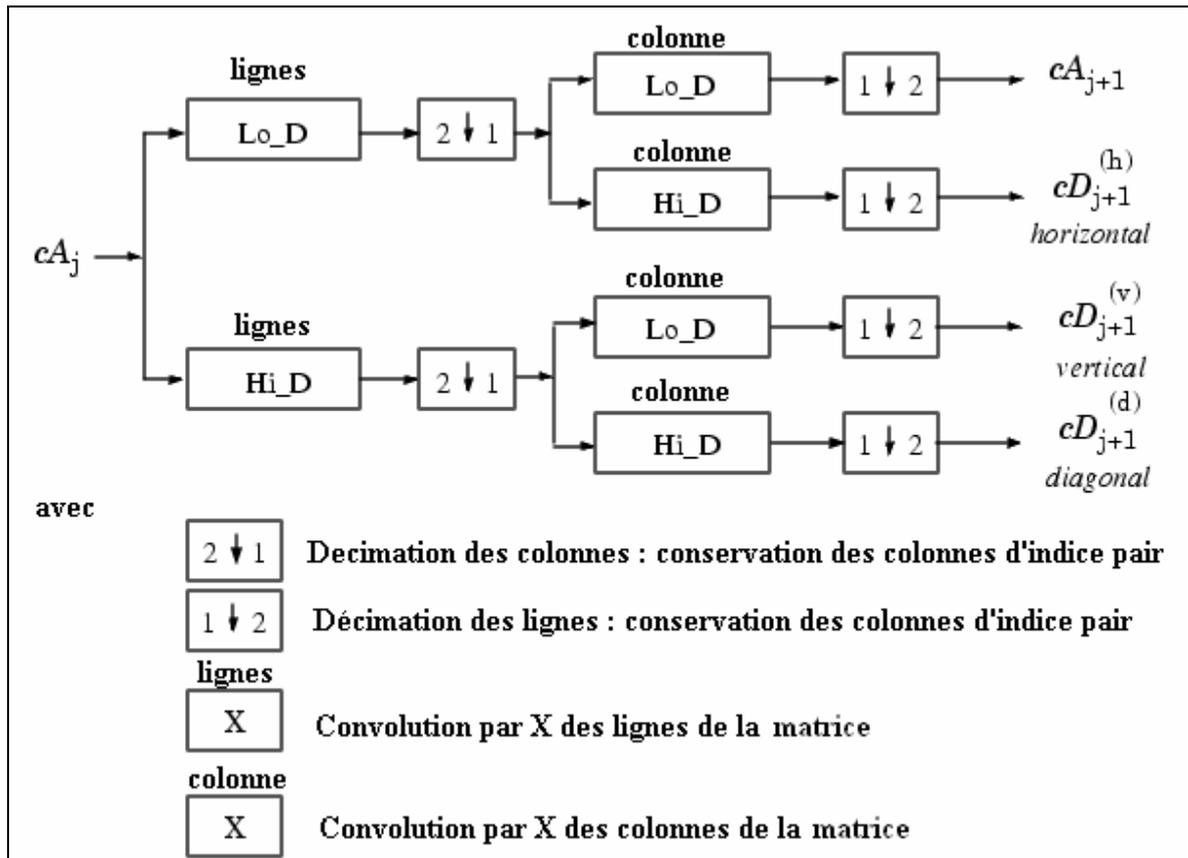


Figure 3.16: étape de base pour la décomposition en ondelettes pour des images DWT2.

Ce type de transformation à l'aide d'une DWT bidimensionnelle (DWT2) conduit à une décomposition des coefficients d'approximation au niveau j en quatre composantes distinctes : d'approximation et de détails selon trois orientations, horizontale, verticale et diagonale, au niveau $j + 1$. Les calculs sont simples. On filtre les lignes de cA_j puis on les décime. On filtre et on décime les colonnes des matrices obtenues. La figure 3.16 présente l'étape de base de la décomposition en ondelettes pour des images.

Pour la reconstruction, l'étape de base est donnée par la figure 3.17

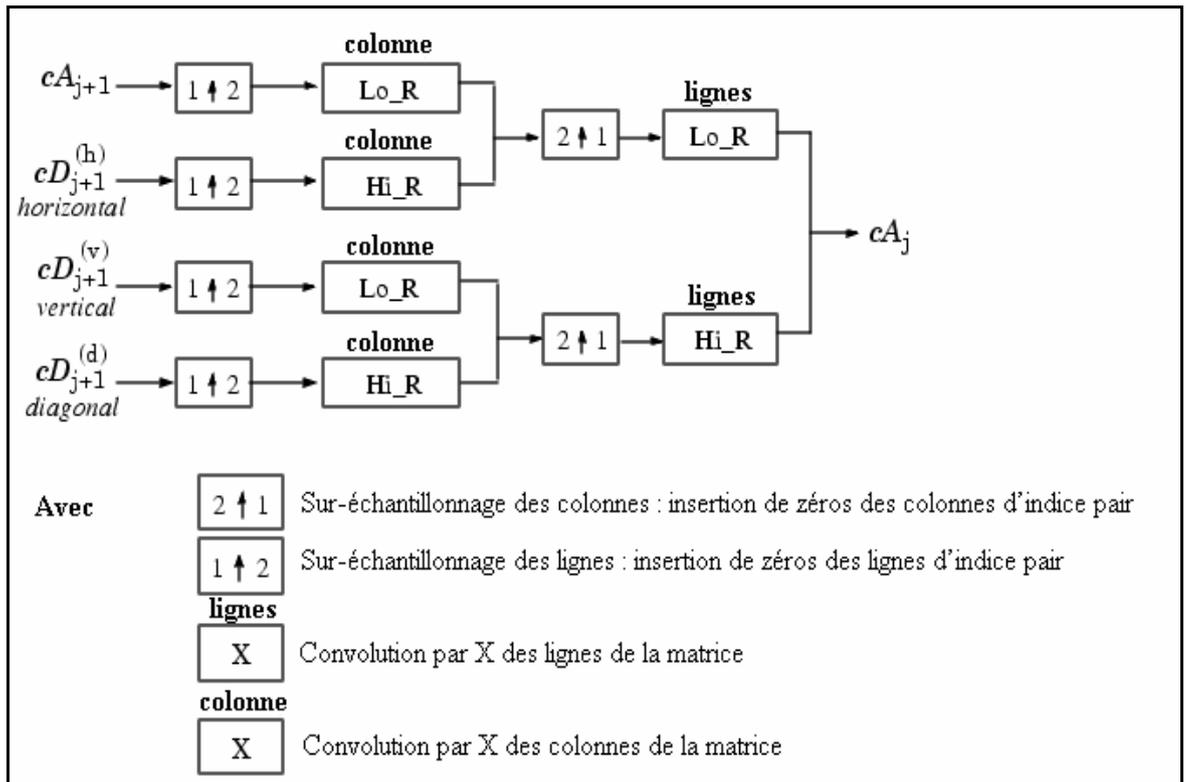


Figure 3.17: étape de base pour la reconstruction en ondelettes pour des images IDWT2.

Un exemple Pour $J = 2$ de la DWT à 2 dimensions :

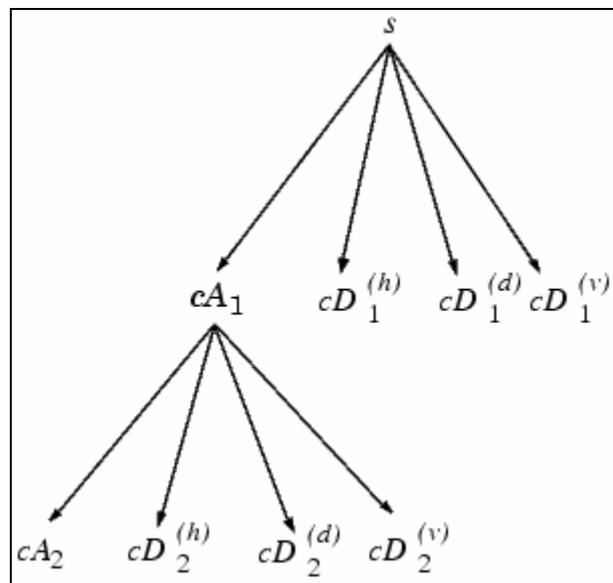


Figure 3.18: représentation de la DWT2 pour $j= 2$.

III.3.2. Le lifting Scheme

Le lifting scheme a été introduit en 1994 par Wim Sweldens. Cette méthode d'implantation de la transformée en ondelettes s'affranchit totalement de la notion de dilatation et de translation, et ne repose donc plus sur la transformée de Fourier.

III.3.2.1. Principe de lifting Scheme

L'idée de base du lifting scheme est très simple [31][32][33]. La fonction de départ est une ondelette basique, nommée lazy wavelet, qui possède les caractéristiques d'une ondelette, mais dont le principal rôle consiste uniquement à séparer le signal d'entrée en deux sous-signaux, on peut donc la considérer comme un sous-échantillonnage du signal d'entrée. Ensuite, le lifting schème construit progressivement une nouvelle ondelette possédant de meilleures caractéristiques en rajoutant de nouvelles fonctions de bases. C'est ce principe d'ajout progressif des fonctions qui vaut son nom au lifting scheme.

Considérons la fonction $f(t)$ dont la distance d'échantillonnage est de 1, les échantillons sont alors régulièrement espacés. Les échantillons originaux sont notés $\lambda_{0,k} = f(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Nous voulons décorréliser ce signal, ou, en d'autres termes, représenter ce signal avec un nombre d'échantillons moins élevé. La méthode la plus simple est de sous-échantillonner le signal et de ne conserver que les échantillons d'indice pair :

$$\lambda_{-1,k} = \lambda_{0,2k} \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \quad (3.38)$$

Ce sous-échantillonnage amenant une perte d'information, nous désirons connaître l'information nécessaire à la reconstruction du signal. On peut considérer que l'information perdue est contenue dans les coefficients d'indice impair :

$$\gamma_{-1,k} = \lambda_{0,2k+1} \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \quad (3.39)$$

Cette manière de procéder correspond à l'ondelette lazy wavelet citée plus haut : celle-ci ne fait donc rien d'autre que séparer le signal à analyser en deux sous-signaux.

Afin d'améliorer la méthode permettant de retrouver le signal d'origine $\lambda_{0,k}$ à partir de sa transformée $\lambda_{-1,k}$, on peut prédire l'échantillon impair $\lambda_{0,2k+1}$ à partir de ses voisins d'indice pair $\lambda_{-1,k}$ (soit $\lambda_{0,2k}$) et $\lambda_{-1,k+1}$ (soit $\lambda_{0,2k+2}$). Le coefficient d'ondelette $\gamma_{-1,k}$ codera la différence entre la valeur réelle de l'échantillon et sa valeur prédite :

$$\gamma_{-1,k} = \lambda_{0,2k+1} - \frac{1}{2}(\lambda_{-1,k} + \lambda_{-1,k+1}) \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \quad (3.40)$$

Ainsi, si le signal est corrélé, la majorité des coefficients d'ondelettes seront très petits. En seuillant ces coefficients, on pourra éventuellement représenter le signal de manière plus compacte, en perdant un minimum d'information.

On a donc rajouté une fonction de prédiction qui vient améliorer l'ondelette mise en œuvre ici :

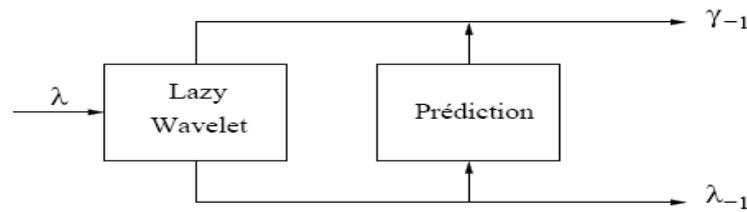


Figure 3.19: L'ajout de la prédiction.

Cependant, les $\lambda_{-1,k}$ obtenus ne nous satisfont pas pour la raison suivante : si le signal d'entrée est composé de $2n + 1$ échantillons $\{\lambda_{0,k} \mid 0 \leq k \leq 2^n\}$, et que l'on applique cette procédure n fois, nous obtiendrons les coefficients d'ondelettes $\{\gamma_{j,k} \mid -n \leq j \leq -1, 0 \leq k \leq 2^{n+1}\}$, ainsi que deux coefficients $\lambda_{-n,0}$ et $\lambda_{-n,1}$ correspondant au premier ($\lambda_{-n,0} = \lambda_{0,0}$) et au dernier ($\lambda_{-n,1} = \lambda_{0,2n}$) échantillons originaux, ce qui introduit un lissage considérable.

Il serait préférable que la valeur moyenne des $\lambda_{j,k}$ soit la même à toutes les résolutions :

$$\sum_k \lambda_{-1,k} = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_{0,k} \quad (3.41)$$

Ceci pourra être obtenu en rajoutant une nouvelle phase à la construction de l'ondelette, qui consistera à mettre à jour les $\lambda_{-1,k}$ à l'aide des coefficients d'ondelettes $\gamma_{-1,k}$ précédemment calculés :

$$\lambda_{0,k} = \lambda_{-1,k} + \frac{1}{4}(\gamma_{-1,k-1} + \gamma_{-1,k}) \quad (3.42)$$

La transformée en ondelettes ainsi implémentée consiste alors en deux étapes en plus de la phase de séparation du signal d'entrée :

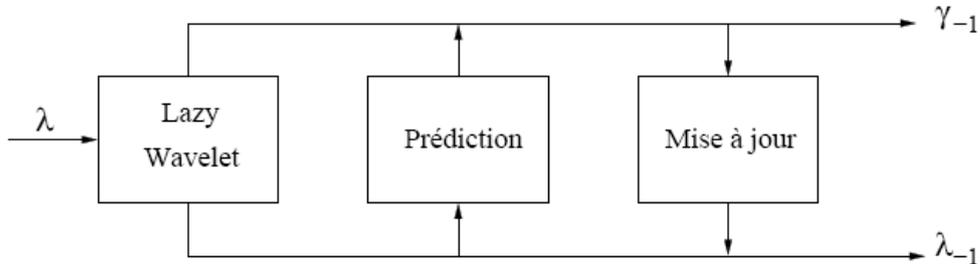


Figure 3.20: L'ajout de la mise à jour.

En partant de l'ondelette la plus simple qui soit, on a donc construit une ondelette élaborée par ajouts successifs de fonctions de bases. Notons que l'ondelette qui a été construite ici correspond à l'ondelette bi-orthogonale. Nous démontrons ci-dessous comment retrouver les filtres d'ondelettes équivalents à partir des étapes du lifting scheme.

III.3.2.2. Filtres d'analyse équivalents pour la transformée

a) prédiction :

$$d_k = x_{2k+1} - \frac{(x_{2k} + x_{2k+2})}{2} \quad (3.43)$$

Elle nous donne le filtre passe-haut équivalent : $\left[-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2}\right]$

b) mise à jour :

$$\begin{aligned} S_k &= x_{2k} + \frac{1}{4}(d_{k-1} + d_k) \\ &= x_{2k} + \frac{1}{4}\left(x_{2k-1} - \frac{(x_{2k-2} + x_{2k})}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(x_{2k+1} - \frac{(x_{2k} + x_{2k+2})}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}x_{2k} - \frac{1}{8}(x_{2k-2} + x_{2k+2}) + \frac{1}{4}(x_{2k-1} + x_{2k+1}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Elle nous donne le filtre passe-bas équivalent : $\left[-\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8}\right]$

III.3.2.3. Filtres de synthèse équivalents pour la transformée inverse

a) annulation de la mise à jour :

$$x_{2k} = s_k - \frac{1}{2}(d_{k-1} + d_k) \quad (3.45)$$

b) annulation de la prédiction :

$$x_{2k+1} = d_k + \frac{(x_{2k} + x_{2k+2})}{2} \quad (3.46)$$

Pour récupérer le filtre passe-haut équivalent, on force d_1 à un et tous les autres d_k et s_k à zéro, puis on calcule la transformée inverse :

$$d_1 = 1$$

Après la phase (a) nous avons :

$$x_{21} = -\frac{1}{4}$$

$$x_{21+2} = -\frac{1}{4}$$

Après la phase (b) nous avons :

$$x_{21+1} = 1 + \frac{(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4})}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x_{21-1} = 0 + \frac{(-\frac{1}{4})}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$x_{21+3} = -\frac{1}{8}$$

Ce qui nous donne le filtre passe-haut équivalent : $[-\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8}]$

Ensuite, on retrouve le filtre passe-bas en forçant s_1 à un et tous les autres à zéro, ce qui nous donne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

III.4. Intérêt en Traitement d'Image

L'emploi de l'analyse multi-résolution dans le traitement d'images fournit un certain nombre d'avantages selon l'application envisagée :

Compression : le taux de compression de l'image pourra facilement être adapté à la qualité désirée. En effet, en éliminant les détails contenus dans certains niveaux de résolution, jugés peu importants, on pourra fortement augmenter le taux de compression, en conservant uniquement l'information nécessaire. Si l'on désire conserver une bonne qualité d'image, il suffira alors de conserver tous les détails ;

Détection de contours : la détection de contours est une tâche ardue lorsque les images traitées présentent des variations brusques dans des zones inintéressantes : en pratique, on voudrait pouvoir ignorer certains contours et ne conserver que les plus représentatifs. L'analyse d'un arbre par exemple présente des contours principaux, ceux de l'arbre lui même, ainsi que des contours plus précis (ceux du feuillage). En fonction de l'application, on voudrait pouvoir conserver uniquement les contours principaux (l'arbre), ou bien conserver l'aspect de texture (le feuillage). Ce type d'analyse est permis par la multi-résolution. En analysant l'image à une résolution grossière, après avoir éliminé les détails, les informations sur le feuillage auront disparu. A contrario, l'analyse à une résolution plus précise nous donnera tous les contours présents dans l'image.

Détection/Reconnaissance de texture : l'analyse multi-résolution apporte un avantage considérable dans le domaine de la reconnaissance de texture, puisque l'échelle est prise en compte en plus des paramètres habituels de détection comme les motifs.

Bien évidemment, la transformée en ondelettes ne se limite pas aux applications mentionnées ci-dessus. On peut également citer la reconnaissance de visage, la détection de mouvements, et d'une manière générale la plupart des applications reposant sur l'analyse d'images.

D'autre part, un avantage non négligeable de la transformée en ondelettes est qu'elle n'est pas liée à une fonction prédéfinie comme l'est la transformée de Fourier qui utilise les fonctions sinus et cosinus exclusivement. Ainsi, le choix de l'ondelette utilisée pour l'analyse pourra dépendre de l'application envisagée, voire même du type de donnée traitée.

III.5. conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que la transformée en ondelettes présente de nombreux avantages dans le domaine du traitement du signal et de l'image. C'est un outil puissant de transformation du signal qui permet d'adapter celui-ci à un traitement ultérieur dont le principal intérêt est de «préparer» le signal dans le but de faciliter le traitement envisagé. Ainsi, elle permet de réduire la redondance pour améliorer la compression d'une image ; elle peut également extraire les informations importantes (texture, contours, etc.) contenues dans une image. Le tableau 3.5 résume les différences entre les différentes transformées présentées: transformée de Fourier, transformée de Fourier à fenêtre (transformée de Gabor) et Transformée en ondelettes.

	Transformée de Fourier	Transformée de Gabor	Transformée en Ondelettes
Fonction utilisées	Sinus, cosinus	Sinus, cosinus, gaussienne	ondelettes
Paramétrable	non	en partie	oui
Précision	aucune	fixe	variable

Tab 3.5: Comparaison entre la transformée de Fourier, la transformée de Gabor (Fourier à fenêtre), et la transformée en Ondelettes.

Chapitre 4

LA TRANSFORMEE EN ONDELETES ET LA SR.

IV.1 Introduction

La super-résolution est l'ensemble des opérations et des techniques qui corrigent les images et reconstruisent un signal de bonne qualité à partir d'un signal de médiocre qualité. On distingue deux grandeurs principales souvent adoptées comme des techniques de super-résolution comme la reconstruction dans le cas de suréchantillonnage qui est nécessaire à chaque fois que l'on doit augmenter la résolution des images pour extraire des informations approximatives souvent absentes dans les images réelles ; ou encore la suppression des bruits (débruitage), qui reste un des sujets délicats du traitement des images.

Ce chapitre tente d'expliquer comment intervient la transformée en ondelettes dans ces deux grandeurs de la super-résolution (suréchantillonnage et débruitage).

IV.2. Super résolution à l'aide de la transformée en ondelettes TO.

IV.2.1. Transformation en ondelettes et analyse multirésolution

La transformation en ondelettes continue d'une fonction $f(x)$ avec une ondelette $\psi(x)$ est définie par l'expression :

$$W[f(x)](a, b) = w(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (4.1)$$

a désigne l'échelle et b la position. Elle est caractérisée par trois propriétés :

- Linéarité : $W[f_1 + f_2] = W[f_1] + W[f_2]$ et $W[\beta f] = \beta W[f]$.
- Invariance par translation : $W[f(x - x_0)](a, b) = W[f(x)](a, b - x_0)$.
- Invariance par dilatation : $W[f(sx)](a, b) = s^{-1} W[f(x)](sa, sb)$.

Le passage à la transformation en ondelettes discrète a conduit à de nombreux travaux qui se sont rapidement focalisés sur l'Analyse Multirésolution développée en particulier par Mallat.

Cette analyse est basée sur une construction d'une suite emboîtée de sous espaces fermés de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

$$v_0 \supset v_1 \supset \dots \supset v_i \supset \dots$$

Les données initiales $c(0,k)$ sont les produits scalaires de la fonction $f(x)$ avec une fonction d'échelle $\phi(x)$ tradatée au point k :

$$c(0,k) = \langle f(x), \phi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x-k)dx \quad (4.2)$$

L'échantillonnage ne correspond donc pas à la valeur de $f(x)$ au point k , mais à la valeur de $f(x)$ pondérée avec $(x-k)$. Ceci correspond à une projection dans le sous-espace v_0 . Donc on obtient un emboîtement des sous-espaces engendrés par les produits scalaires de $f(x)$ avec la fonction d'échelle à l'échelle 2, 4, ..., . Nous avons ainsi:

$$c(i+1,k) = \langle f(x), \frac{1}{2^i} \phi\left(\frac{x}{2^i} - k\right) \rangle \quad (4.3)$$

Les données sont réduites d'un facteur 2 (décimation) d'une échelle à l'autre dans cette analyse dite dyadique. On obtient ainsi une pyramide de signaux de résolution de plus en plus réduite comprenant $2N$ données à partir de N valeurs initiales.

IV.2.2. Interpolation avec la transformée en Ondelettes (Algorithme à trous)

Introduit dans [34], l'algorithme à trous est similaire à celui de la transformée orthogonale en ondelettes, mais on ne fait pas de décimation lors des convolutions discrètes, on garde le même nombre de coefficients à toutes les échelles. De plus les filtres changent, puisque, comme on va le voir, il faut les suréchantillonner à chaque échelle.

L'algorithme à trous :

On évite de décimer la pyramide des signaux aux différentes résolutions. On obtient ainsi à une échelle donnée un ensemble d'approximations entrelacées, qui permet de calculer les coefficients en ondelettes en effectuant des convolutions discrètes avec un pas entre les points égal à l'échelle, pour tenir compte de l'absence de décimation. La complexité, comme le nombre de données, sont en $N \log N$. L'invariance par translation est assurée par l'absence de décimation.

L'algorithme à trous nous est apparu en général comme le plus pertinent dans le cas de la super résolution pour les raisons suivantes :

- On travaille dans l'espace direct, évitant ainsi les artéfacts introduits par la périodisation.
- Le temps de calcul reste raisonnable.
- La taille en mémoire est faible.
- L'algorithme est aisé à programmer.
- A deux dimensions, on peut obtenir aisément une transformation quasi-isotrope.
- On peut opérer avec des fonctions d'échelle régulières et compactes.
- L'algorithme de restauration peut être très simple.
- La transformée est connue en tout point, ce qui permet d'assurer une détection au pixel près, sans interpolation.
- On peut suivre l'évolution de la transformée d'une échelle à la suivante.
- Les propriétés d'invariance par translation et de séparation des échelles sont parfaitement respectées.

Nous allons d'abord exposer une vue générale de l'algorithme à trous. Puis, nous montrerons comment adopté cet algorithme (Algorithme à Trous) pour l'interpolation des signaux (images), grasse à ces propriétés (Suite d'approximation des signaux, Lissages successifs).

IV.2.2. 1. Suite d'approximations

Comme pour l'analyse multirésolution, on suppose que les données échantillonnées $\{c(0, k)\}$ sont les produits scalaires aux points k d'un signal $f(x)$ avec une fonction d'échelle $\phi(x)$ correspondant à un filtre passe-bas .

$$c(0, k) = \langle f(x), \phi(x - k) \rangle \quad (4.5)$$

Les coefficients permettent de reconstruire un signal $f_0(x)$ par l'expression :

$$f_0(x) = \sum c(0, k), \tilde{\phi}(x - k) \quad (4.6)$$

Où $\tilde{\phi}(x)$ désigne la fonction d'échelle duale de $\phi(x)$. Nous avons :

$$\tilde{\phi}(v) = \frac{\hat{\phi}(v)}{D(v)} \quad (4.7)$$

Où:

$$D(v) = \sum_n |\hat{\phi}(v+n)|^2 \quad (4.8)$$

$D(v)$ est une fonction périodique qui ne doit pas s'annuler sur $[0, 1]$.

Le passage de $f(x)$ à $f_0(x)$ est une projection dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. $f_0(x)$ appartient au sous-espace v_0 de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions translées $\hat{\phi}(x-k)$. Dans l'analyse multirésolution, $f_0(x)$ correspond à l'approximation à l'échelle 1 de la fonction $f(x)$ dans v_0 . On considère alors la suite des approximations $f_i(x)$ obtenues aux échelles 2, 4, . . . , 2^i , Si la fonction d'échelle $\phi(x)$ vérifie l'équation de dilatation, la suite d'approximations correspond à une suite de projections dans des sous-espaces emboîtés v_i de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ engendrés par les fonctions translées $\frac{1}{2^i} \phi\left(\frac{x}{2^i} - k\right)$. Le pas entre échantillons est 2^i , conduisant à une pyramide d'approximations de la fonction $f(x)$.

Dans l'algorithme à trous, pour éviter la décimation des échantillons dans la suite d'approximations, on va considérer des approximations entrelacées. Par exemple à l'échelle 2, pour l'analyse multirésolution, nous n'obtenons les valeurs de $c(1,k)$ qu'aux indices pairs. Pour avoir les indices impairs, il suffit de translater les coefficients $c(0,k)$ d'un point et d'effectuer la même opération. Pour l'échelle 4 on ne doit pas alors tenir compte des points entrelacés, ce qui conduit à avoir un pas de 2 dans les convolutions. A cette échelle on a alors 4 approximations entrelacées. A l'échelle 8, les convolutions s'effectuent avec un pas de 4, et nous avons 8 approximations entrelacées.

L'espace v_0 est ainsi décomposé de deux manières :

$$v_0 = v_1 \oplus w_1 = v_1' \oplus w_1' \quad (4.9)$$

où la première décomposition correspond aux points pairs, alors que la seconde est relative aux points impairs.

La relation 4.9 se doit d'être précisée analytiquement. Pour cela nous considérons les coefficients :

$$c(i, k) = \left\langle f(x), \frac{1}{2^i} \phi\left(\frac{x-k}{2^i}\right) \right\rangle \quad (4.10)$$

Nous avons :

$$c(i+1, k) = \langle f(x), \frac{1}{2^{i+1}} \phi\left(\frac{x-k}{2^{i+1}}\right) \rangle \quad (4.11)$$

En utilisant l'équation de dilatation nous obtenons :

$$\frac{1}{2^{i+1}} \phi\left(\frac{x-k}{2^{i+1}}\right) = \sum_n h(n) \frac{1}{2^i} \phi\left(\frac{x-k}{2^i} - n\right) \quad (4.12)$$

D'où la récurrence :

$$c(i+1, k) = \sum_n h(n) c(i, k + n2^i) \quad (4.13)$$

Cette relation explicite le saut entre les points dans les convolutions ayant donné son nom à l'algorithme, résultant de l'entrelacement des approximations.

IV.2.2. 2. Lissages successifs

Dans le cadre de l'analyse multirésolution, la suite des approximations correspond à une suite de projections. Dans le cadre de l'analyse à trous nous disposons à l'échelle 2^i d'autant d'approximations, donc de projections. Mais chacune d'entre elles ne correspond pas au même sous-espace de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Posons :

$$\phi_i(x) = \frac{1}{2^i} \phi\left(\frac{x}{2^i}\right) \quad (4.15)$$

Les coefficients $c(i, k)$ sont les produits scalaires de $f(x)$ avec les translatées de $\phi_i(x)$ aux points k . On est donc amené à introduire la fonction duale de $\phi_i(x)$. Mais cela n'est possible que si :

$$D_i(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(2^i(v+n))|^2 \neq 0$$

Si cette condition est vérifiée, la relation entre $f(x)$ et son approximation à l'échelle i est une opération de projection. Nous avons choisi la fonction $\phi(x)$ de manière à avoir $D(v) \neq 0 \forall v$, mais $D_i(v)$ peut être nul pour d'autres échelles. C'est d'ailleurs le cas pour les fonctions d'échelle considérées ultérieurement. Ainsi, l'algorithme à trous se distingue fortement de l'analyse multirésolution basée sur l'emboîtement des sous-espaces engendrés par la fonction d'échelle aux différentes échelles.

Nous partons donc des coefficients $\{c(0, k)\}$ correspondant à une projection de $f(x)$ dans V_0 , puis nous obtenons une suite $\{c(i, k)\}$ de coefficients. Les approximations correspondantes $f_i(x)$ restent des éléments de V_0 , mais l'opérateur entre $f(x)$ et $f_i(x)$ n'est pas un opérateur de projection. On ne peut donc pas introduire la transformation en ondelettes discrète à trous par une décomposition de V_0 à partir des projections, et des sous-espaces complémentaires W_i .

La fonction $f_i(x)$ est définie comme l'approximation de la fonction $f(x)$ à l'échelle 2^i par la relation :

$$f_i(x) = \sum_k c(i, k) \tilde{\phi}(x - k) \quad (4.16)$$

à partir de la récurrence :

$$f_{i+1}(x) = \sum_k \sum_n h(n) c(i, k + n2^i) \tilde{\phi}(x - k) \quad (4.17)$$

Nous obtenons :

$$f_{i+1}(x) = \sum_n h(n) f_i(x + n2^i) \quad (4.18)$$

$f_{i+1}(x)$ est tout simplement un lissage de $f_i(x)$. Par récurrence $f_i(x)$ est un lissage de $f_0(x)$, projection de $f(x)$ dans v_0 .

Si $\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de v_0 , alors un calcul simple montre que :

$$f_0(x) = \sum_k c(0, k) \phi(x - k) \quad (4.19)$$

Entraîne

$$f_i(x) = \sum_k c(0, k) 2^i \phi\left(\frac{x - k}{2^i}\right) \quad (4.20)$$

On constate que :

$$\sum_k 2^i \phi\left(\frac{x - k}{2^i}\right) = 1$$

ainsi f_i réalise un lissage à l'échelle 2^i des données brutes fournies par les $c(0, k)$.

On peut résumer l'algorithme de la transformation à trous par les étapes suivantes :

1. On initialise i à zéro et on part des données (i, k) .
2. On incrémente i et dans le cas linéaire, par exemple, on effectue la convolution discrète des données $c(i, k)$ par le filtre $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. La distance entre le pixel central et celui adjacent est 2^{i-1} , dans le cas linéaire.
3. La différence entre $c(i, k)$ et $c(i-1, k)$ donne le coefficient d'ondelette $w(i, k)$.
4. si i est égal au nombre N_p d'échelles que l'on désire obtenir, on arrête, sinon retour à l'étape 2.

Pour traiter les bords on considère généralement que $c(i, k+N) = c(i, N-k)$ (effet miroir).

Mais d'autres prolongements peuvent être utilisés telle que la périodicité

$$(c(i, k+N) = c(i, k)) \text{ où la continuité } (c(i, k+N) = c(i, N)).$$

La reconstruction du signal à partir des différences d'ondelettes se fait par simple sommation du dernier plan lissé et des coefficients de chaque échelle.

$$c(0, k) = c(N_p, k) + \sum_{i=1}^{N_p} w(i, k) \quad (4.22)$$

IV.2.2. 3. Extension à deux dimensions :

L'algorithme à trous peut être très facilement étendu à deux dimensions $\phi_2(x, y)$. On considère une fonction d'échelle telle que :

$$\frac{1}{4} \phi_2\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \sum h(n, m) \phi_2(x-n, y-m) \quad (4.23)$$

Les données initiales $c(0, k, l)$ sont les produits scalaires de la fonction image $f(x, y)$ avec la fonction d'échelle décalée :

$$c(0, k, l) = \langle f(x, y), \phi_2(x-n, y-m) \rangle \quad (4.24)$$

Ceci correspond à une projection de $f(x, y)$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$, à condition que :

$$D(u, v) = \sum_{n, m} |\tilde{\phi}_2(u+n, v+m)|^2 \neq 0, \quad \forall u, v.$$

La suite des approximations successives de l'image est calculée avec la récurrence :

$$c(i+1, k, l) = \sum_{n,m} h(n, m) c(i, k + n2^i, +m 2^i) \quad (4.25)$$

On choisit une fonction ondelette engendrée par la fonction d'échelle, soit:

$$\frac{1}{4} \psi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \sum g(n, m) \phi_2(x - n, y - m) \quad (4.26)$$

La suite des images en ondelettes s'obtient avec la recurrence :

$$w(i+1, k, l) = \sum_{n,m} g(n, m) c(i, k + n2^i, +m 2^i) \quad (4.27)$$

Dans la pratique, on choisit une fonction d'échelle à variables séparées :

$$\phi_2(x, y) = \phi_2(x) \phi_2(y)$$

Ceci permet d'obtenir la suite des approximations par convolution ligne par ligne et colonne par colonne. L'algorithme est très rapide et nécessite peu de mémoire. On utilise pour $\phi(x)$ les fonctions d'échelle utilisées à une dimension.

On choisit également la fonction ondelette résultant de la différence entre deux approximations successives. L'algorithme est très similaire au cas unidimensionnel.

Il est très intéressant de pouvoir réaliser une analyse aussi isotrope que possible. La fonction d'échelle doit être choisie en conséquence. Il n'existe pas de fonction compacte isotrope satisfaisant l'équation de dilatation à deux dimensions. En outre, la seule fonction isotrope qui est séparable correspond à la gaussienne, qui ne satisfait pas l'équation de dilatation.

IV. 3. Principe de débruitage par Ondelettes

Le débruitage consiste à restaurer un signal utile à partir d'observations corrompues par un bruit additif.

Le modèle statique le plus simple du débruitage est le suivant :

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

Où f est une fonction inconnue, les variables Y_t sont observées et ε_t est un bruit blanc gaussien inobservable, il sagit alors, de reconstruire le signal $f(t)$ ou d'estimer la fonction f .

L'algorithme de base du débruitage à l'aide de la TO est simple et procède en trois phases :

1. décomposition.
2. sélection ou seuillage des coefficients.

3. reconstruction.

Partant du signal, on le décompose d'abord sur une base orthogonale d'ondelettes au moyen de la transformée discrète. Ensuite, on sélectionne une partie de coefficients par seuillage, en conservant intacts les coefficients d'approximation de niveau convenablement choisi. Enfin, en utilisant les coefficients seuillés, on reconstruit un signal en leur appliquant la transformée discrète inverse. Le signal ainsi obtenu est le signal débruité.

IV. 3.1. Méthode de débruitage**IV.3.1. 1. Débruitage avec un estimateur**

La décomposition du signal par ondelettes étant additive, l'analyse de Y est égale à la somme des analyses du signal f et du bruit ε

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1, \dots, n$$

Les coefficients s'écrivent alors :

$$d_i = \theta_i + w_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

Avec un lien qui peut s'exprimer par le biais d'une matrice orthogonale W associée à la transformée en ondelettes discrète : $d = WY$, $\theta = Wf$, $w = W\varepsilon$.

Les bruits (ε) ont les mêmes propriétés probabilistes. En effet, comme $w = W\varepsilon$, w hérite du caractère gaussien et centre de ε . et :

$$\text{cov}(w, w) = Ew^T w = E\varepsilon^T W^T W \varepsilon = E\varepsilon^T \varepsilon = \text{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = \sigma^2 I \quad (4.30)$$

On cherche un estimateur \hat{f} de f minimisant le risque défini par l'erreur quadratique moyenne :

$$R(f, \hat{f}) = E \left(\|f - \hat{f}\|^2 \right) = E(\Sigma(f - \hat{f})^2).$$

IV.3.1.2. Débruitage par seuillage des coefficients d'Ondelettes**Principe général**

Pour effectuer le débruitage, nous ne gardons que les coefficients des détails les plus grands et nous mettons les autres à zéro puis on reconstruit l'image. Le bruit correspond en général à

des détails faibles donc il est éliminé par ce seuillage des coefficients d'ondelettes. Nous obtenons alors une image plus "lisse" donc débruitée.

Il existe plusieurs types d'estimateurs par seuillage. Nous pouvons d'abord distinguer les seuillage dur et seuillage doux.

IV.3.1.2.1. Seuillage dur ou "hard thresholding"

Le seuillage dur est celui qui est le plus "intuitif". Nous fixons un seuil $T > 0$. Nous ne conservons que les coefficients d'ondelettes supérieurs à T et les autres sont mis à zéro, comme suit :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < T \\ x & \text{si } |x| > T \end{cases}$$

Nous obtenons donc le seuillage représenté comme suit :

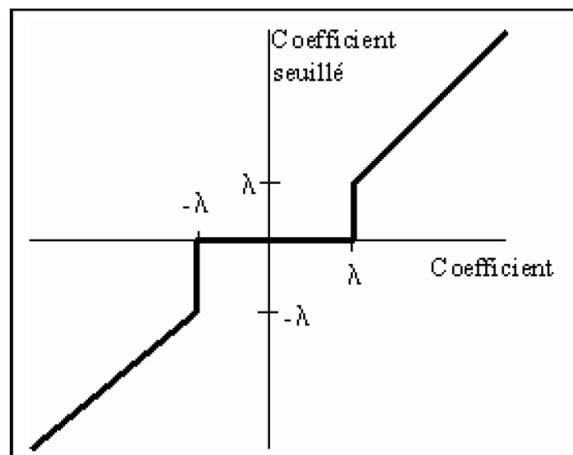


Figure 4.1: Seuillage dur des coefficients.

IV.3.1.2.2. Seuillage "doux" ou "soft thresholding"

Dans le cas du seuillage doux, on met toujours à zéro les coefficients inférieurs à un seuil T . Par contre, pour ceux supérieurs à T , on atténue l'amplitude des coefficients par la valeur du seuil afin de s'assurer d'avoir enlevé l'effet du bruit même pour les forts coefficients, ceci se fait comme suit :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < T \\ x - \text{sign}(x)T & \text{si } |x| > T \end{cases}$$

Dans ce cas, la fonction de seuillage q est continue, elle est représentée par la figure 4.2 :

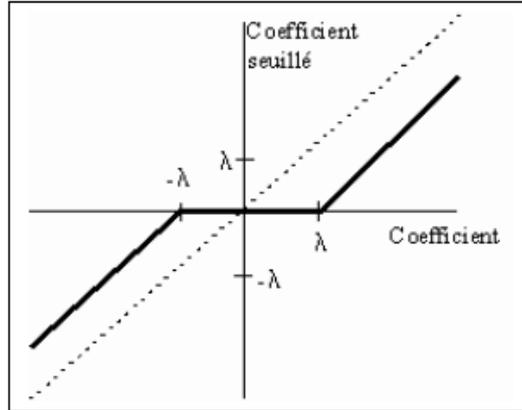


Figure 4.2: Seuillage doux des coefficients.

Le coefficient de seuillage sera donc plus faible que le coefficient du signal. Ce type de seuillage garantit que le signal obtenu sera toujours plus régulier que le signal original.

IV.3.1.2.2.1. Choix du seuil

Le seuillage, comme nous venons de le voir, est une technique d'estimation d'un signal ou d'une image. En général il n'est pas possible de calculer l'estimateur qui minimise le risque d'écart au signal, en le recherchant parmi tous les estimateurs possibles. Dans un premier temps, le choix le plus classique était de se limiter aux opérateurs linéaires. Il y a à peine une dizaine d'années, Donoho et Johnstone ont fait une percée fondamentale en montrant que des estimateurs par seuillage avaient un risque proche de la borne inférieure.

Théorème de Donoho-Johnstone

Nous nous mettons dans le cas de l'hypothèse disant que le bruit est un bruit blanc Gaussien de variance σ^2 . Donoho et Johnstone ont alors démontré que le risque induit par un seuillage (dur ou doux) sur les coefficients d'ondelettes pouvait être encadré par des valeurs proches de la borne inférieure obtenue avec des estimateurs d'oracle.

Notons :

$$r_p(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_b(m)|^2, \sigma^2) \quad (4.31)$$

Le risque obtenu avec un estimateur d'oracle (c'est à dire un estimateur construit connaissant le signal recherché). $r_p(f)$ est le risque obtenu par un seuillage de seuil T . N étant la taille du signal.

Théorème :

Soit $T = \sigma\sqrt{2 \log(N)}$, le risque $r_t(f)$ d'un seuillage dur ou doux vérifie pour tout N supérieur ou égal à 4 :

$$r_p(f) \leq r_t(f) \leq (2 \log(N))(\sigma^2 + r_p(f))$$

Le facteur $2 \log(N)$ est optimal parmi les estimateurs diagonaux dans la base d'ondelettes B . Le problème réside alors dans la détermination de la variance σ^2 du bruit.

On pourrait également montrer que le maximum de l'amplitude du bruit a une très forte probabilité d'être juste en dessous de $T = \sigma\sqrt{2 \log(N)}$ ce qui explique pourquoi le théorème choisit cette valeur. D'autre part, le fait que le seuil augmente avec la taille du signal est dû à la distribution gaussienne qui crée des coefficients de bruits de plus en plus grands lorsque le nombre de coefficients augmente. Ce seuil n'est cependant pas optimal et en pratique on peut utiliser des seuils bien plus faibles pour réduire le risque. Un seuillage doux avec ce seuil produit d'ailleurs souvent un risque plus grand qu'un seuillage dur.

IV.3.1.2.2. 2. Estimation de la variance du bruit

Lorsque l'on souhaite utiliser le seuil $= \sigma\sqrt{2 \log(N)}$, il est nécessaire d'avoir une estimation de la variance σ^2 du bruit. Pour l'estimer à partir des données $X[n]$, il faut supprimer l'influence de $f[n]$. Lorsque f est régulier par morceaux, on obtient un estimateur robuste à partir de la médiane des coefficients d'ondelettes à l'échelle la plus fine.

N étant la taille du signal observé X , celui-ci possède $N/2$ coefficients d'ondelettes à l'échelle la plus fine $2^1 = 2N^1$. Le coefficient $|\langle f, \psi_{1,m} \rangle|$ est faible lorsque f est régulière et donc $\langle f, \psi_{1,m} \rangle \simeq \langle W, \psi_{1,m} \rangle$, est élevé si f varie brusquement sur le support de $\psi_{1,m}$. Un signal qui est régulier par morceaux génère donc peu de grands coefficients relativement aux $N/2$. A l'échelle la plus fine, la composante du signal n'influence donc qu'un petit nombre de coefficients $\langle X, \psi_{1,m} \rangle$ de grande amplitude. Les autres sont donc égaux à $\langle W, \psi_{1,m} \rangle$ de variance σ^2 . Un estimateur robuste de σ est donc obtenu à partir de la valeur médiane des valeurs absolues de ces coefficients.

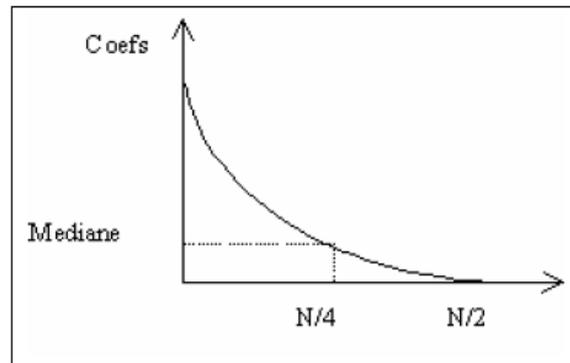


Figure 4.3: Seuillage par l'estimation de la variance du bruit.

Si M est la valeur médiane de $\{ |\langle W, \psi_{1,m} \rangle|, 0 \leq m \leq \frac{N}{2} \}$ alors on peut montrer que $E\{m\} = 0,6745\sigma$. On peut donc estimer σ par $\hat{\sigma} = \frac{m}{0,6745}$.

Pour les images, on procède à une évaluation de la médiane sur les trois carrés de l'image correspondant aux coefficients d'ondelettes, puis on calcule la moyenne avant d'obtenir une estimation de σ par la formule précédente.

IV.4. Conclusion

Nous avons tenté d'expliquer à travers ce chapitre la manière dont on a fait intervenir la transformée en ondelettes pour la réalisation des deux grandeurs de la super-résolution, à savoir : le sur échantillonnage et le débruitage. Nous avons montré aussi que cet outil repose sur des critères bien définis permettant l'extraction de l'information apportée par l'image originale, au lieu de choisir des fonctions interpolatrices pour l'augmentation de la résolution des images ou encore l'utilisation de filtres avec des paramètres arbitraires pour la réalisation du débruitage des images.

Chapitre V

IMPLEMENTATION DE LA SUPER-RESOLUTION, RESULTATS ET INTERPRETATIONS.

V .1. Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents l'utilité de la transformée en ondelettes dans l'analyse des signaux, ainsi que les différents types de la transformée en ondelettes appliqués aux signaux numériques bidimensionnels tels que les images numériques.

Ces algorithmes sont classés en deux catégories : les algorithmes de super résolution mono-frame et les algorithmes de super résolution multi-frame.

Dans ce chapitre, nous allons présenter notre application qui consiste en l'implémentation des différents algorithmes étudiés dans les chapitres précédents, nous permettant de les exploiter, de les analyser, de les optimiser et de comparer leurs résultats.

Notre travail consiste à réaliser un outil informatique d'analyse et de traitement d'images médicales de type dicom. Cet outil est présenté sous forme d'une interface graphique développée sous MATLAB 7.5, dans un environnement Windows.

La fonction principale de cette application est l'extraction des diamètres internes des images médicales de type Dicom, spécialement les images qui concernent les anévrismes et les artères, afin de fabriquer un stent pour diminuer la pression du flux sanguin au niveau de la poche évitant ainsi la rupture de l'anévrisme.

Cette interface a été baptisée AnéSup (Ané: pour anévrisme, Sup : pour super- résolution)

V.2 Présentation générale de l'application AnéSup

V.2.1. Les différentes fonctions réalisées par AnéSup

AnéSup a été conçue pour réaliser une très bonne détection des diamètres internes des anévrismes et des artères pour résoudre un problème d'ordre médical. Il offre la possibilité:

- de visualiser des images de type dicom,
- d'ébruiter les images,
- d'affaiblir ou d'augmenter la résolution des images,
- d'effectuer une série de traitements sur une chaîne d'images et d'extraire les caractéristiques principales qui nous intéressent (diamètre moyen).

- Reconstruire des images de haute résolution à partir des images de basse résolution et les stocker sous forme d'images Dicom .
- D'effectuer le traitement pour d'autres types images (jpg, ...) .

V.2.2. Présentation des interfaces de AnéSup

Elle est constituée de trois interfaces graphiques :

- l'interface graphique 1 ou principale permet de choisir le type de traitement (débruitage, super résolution), ainsi que d'introduire les paramètres d'analyse nécessaires pour visualiser et traiter les images.
- L'interface 2 conçue pour l'affaibli de la résolution des images (down sampling).
- L'interface 3 réalise le traitement des images de différents types dans le but d'augmenter leur résolution.

V .2.2.1. L'interface graphique 1 ou principale

Elle est présentée sous forme d'un menu déroulant et de plusieurs fenêtres (figure 5.1). Elle permet de choisir le type de traitement (débruitage ou super résolution) et les paramètres nécessaires pour chaque type de traitement, ainsi que la visualisation des images.

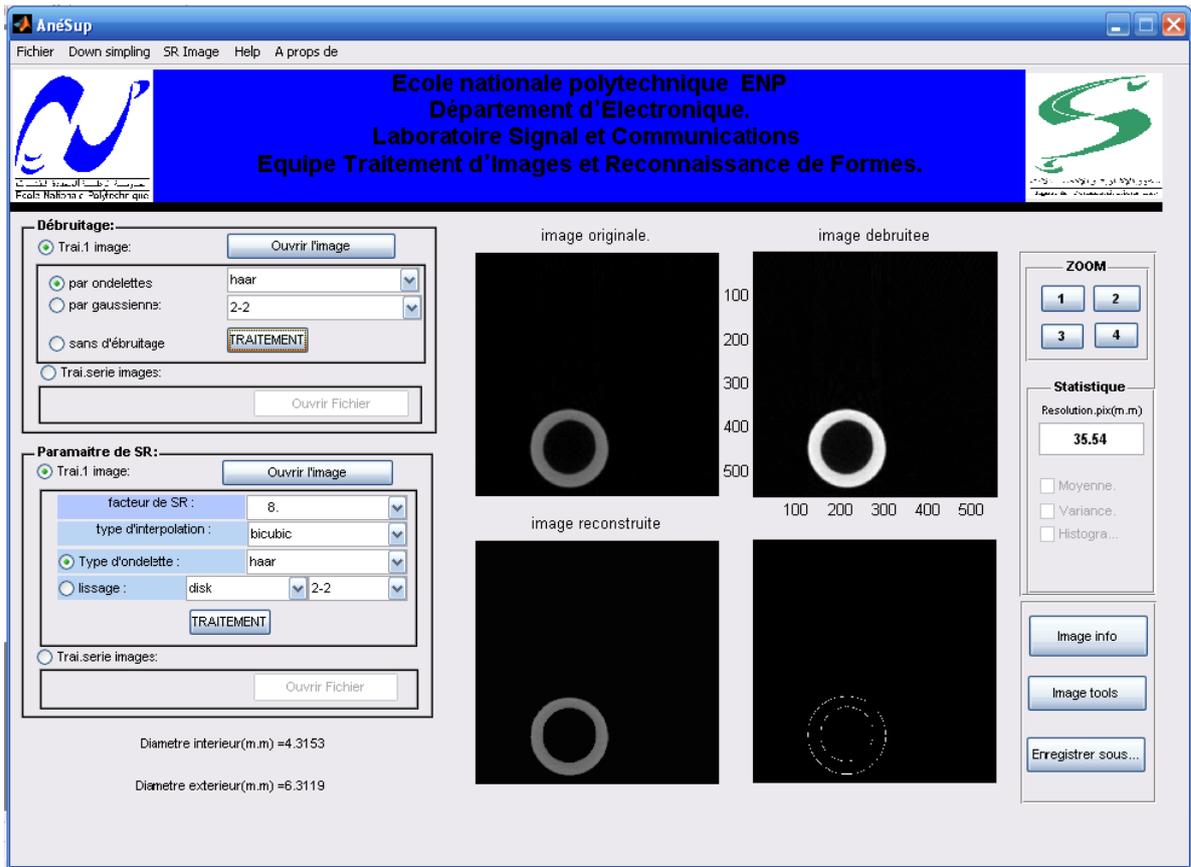


Figure 5.1(a) : l'interface principale.

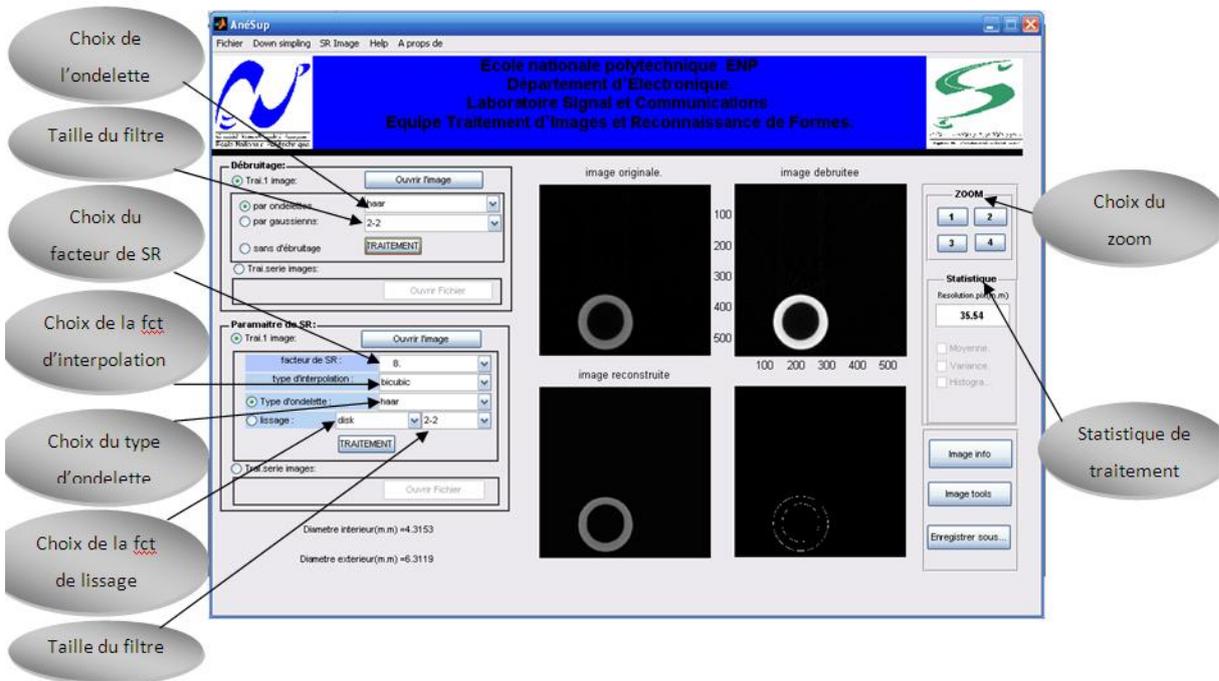


Figure 5.1(b) : des différentes fonctionnalités de l'interface principale.

Cette interface est munie d'un menu déroulant (figure 5.2)

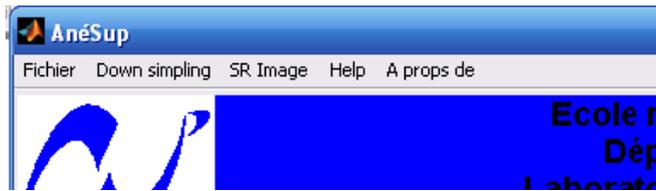


Figure 5.2: le menu de l'interface principale.

Elle est constituée des fonctions suivantes :

Fichier :

- **ouvrir** : pour ouvrir et visualiser une image avec la détection de son contour
- **quitter** : pour fermer l'application AnéSup.

DownSimpling: elle fait un appel à la l'interface 2 dans le but d'affaiblir la résolution des images.

- **DownSimplingDICOM** : elle a été conçue pour le traitement des images au format DICOM
- **DownSimplingJPG** : conçue pour le traitement des images au format :jpg,...

SR Image : fait appel à l'interface 3 dans le but d'augmenter la résolution des images au format jpg .

Help : est un fichier .doc contenant des informations sur l'utilisation de l'application.

Les fenêtres (figure 5.3) : Les fenêtres sont actionnées par un clic. Elles permettent la saisie des paramètres nécessaires au traitement. Elles sont réparties en deux groupes principaux, suivant le traitement désiré (débruitage ou super résolution) ; la partie supérieure concerne le débruitage, la seconde concerne la super résolution.

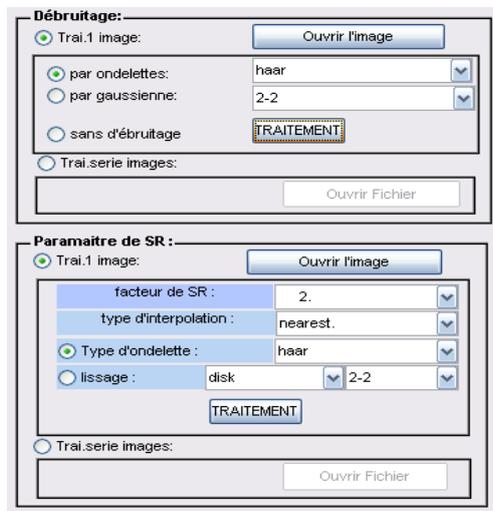


Figure 5.3: présentation de la fenêtre du traitement.

Sur chaque groupe on peut distinguer deux types de traitement, soit traitement d'une seule image, soit traitement d'une série d'images stockées dans un emplacement spécifique. Une fois que l'utilisateur choisit un traitement d'une série d'images, une nouvelle fenêtre de dialogue s'ouvre pour cibler le fichier des images à traiter, puis une autre fenêtre apparaît pour spécifier l'emplacement de l'enregistrement des nouvelles images (HR) reconstruites.

Pour débruiter les images, l'utilisateur peut choisir l'un des traitements suivants :

- Débruitage par ondelettes où le choix d'ondelettes est possible,
- Débruitage par un filtre gaussien en spécifiant la taille du masque,
- Extraction des diamètres des artères directement sur les images sans faire un pré-traitement.

Si l'utilisateur choisit d'augmenter la résolution des images, il n'a qu'à introduire le type de la super résolution (soit par ondelettes, soit par des fonctions polynomiales : plus proche voisin, bilinéaire, bicubique), ainsi que l'introduction du facteur de super résolution

La fenêtre d'affichage (figure 5.4) : Cette fenêtre est consacrée à l'affichage des images, à gauche la représentation des images originales sans traitement, à droite la représentation des images reconstruites après le traitement désiré.

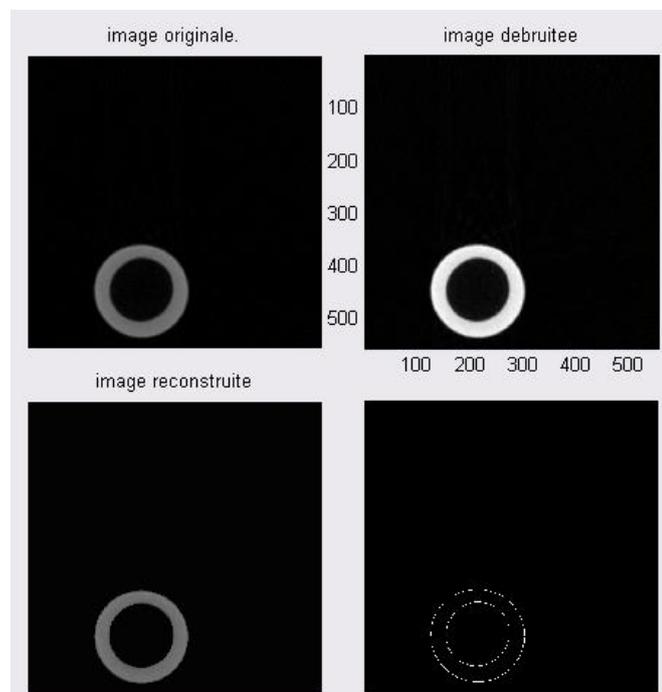


Figure 5.4: présentation de la fenêtre d'affichage.

La fenêtre de droite (figure 5.5) est dotée de plusieurs fonctionnalités

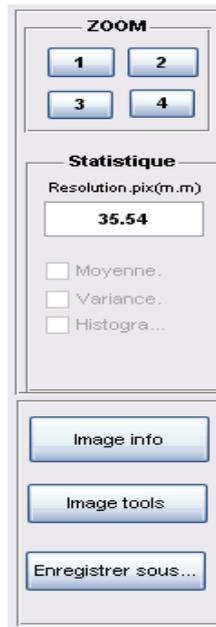


Figure 5.5: présentation de la fenêtre supplémentaire.

Zoom : cette fonction nous permet d'afficher l'image sur une autre fenêtre en bénéficiant des fonctionnalités que Matlab 7.5 contient.

Statistiques : elle nous permet d'introduire la résolution pixelique, et d'afficher les statistiques des résultats (diamètre moyen, variance, histogramme) du traitement quand il s'agit du traitement d'une série d'images.

Image info : elle sert à afficher les informations médicales concernant le patient, stockées avec les images dicom.

Image tools: elle nous permet de visualiser simultanément les 4 images de l'interface 1 tout en bénéficiant des fonctionnalités que nous offre Matlab 7.5.

Enregistrer sous : elle nous permet d'enregistrer l'image reconstruite.

V.2.2.2. L'interface graphique 2

Elle a pour fonction d'affaiblir la résolution d'une ou plusieurs image(s), en introduisant le facteur de diminution (2, 4, 8, 16), ainsi que d'enregistrer les images dans les emplacements souhaités (figure 5.6).

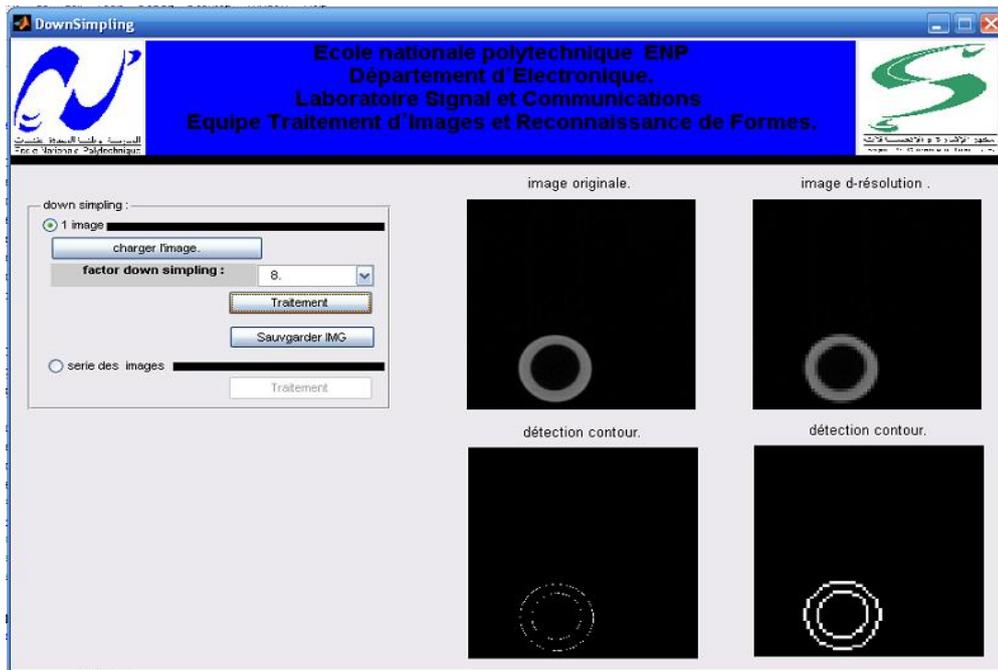


Figure 5.6: présentation de l'interface graphique 2.

V.2.2.3. L'interface graphique 3

Elle est conçue spécialement pour réaliser la super résolution des images de différents formats (figure 5.7), en outre, elle est dotée des mêmes fonctionnalités de traitement que l'interface graphique 1

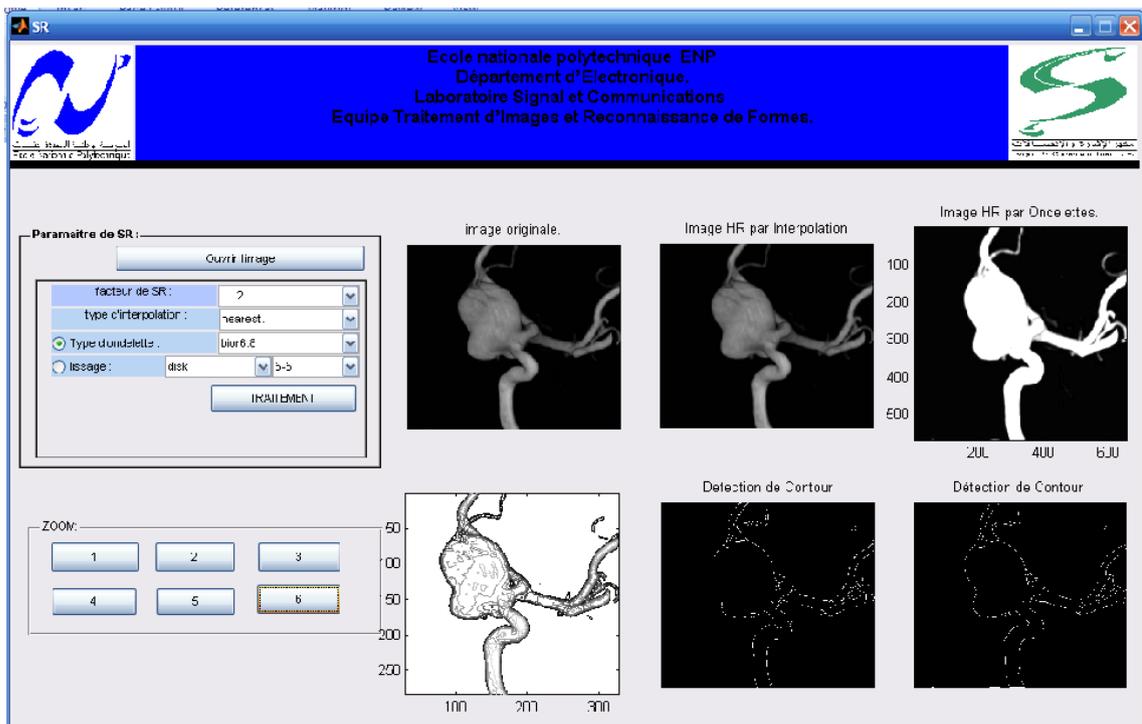


Figure 5.7: présentation de l'interface graphique 3.

V.3. Implémentation et Résultats

V.3.1. Acquisition des images :

Afin d'étudier, de comparer et d'optimiser les algorithmes de superrésolution vus précédemment, nous avons utilisé des images de format dicom. Ces images permettent la construction d'une base de données ; elles sont obtenues en scannant deux modèles en silicone d'anévrismes avec un scanner flat panel de Philips (Alura FD20) : le modèle 11 simule un anévrisme d'un diamètre normal (2.5 fois le diamètre de l'artère), et le modèle 12 simule un anévrisme géant (d'un diamètre 5 fois plus grand que le diamètre de l'artère).

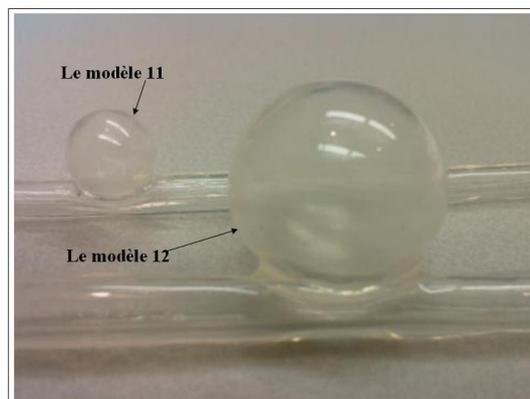


Figure 5.8: représentation de deux modèles d'anévrismes.

Les images Dicom de la base de données sont des coupes en niveaux de gris de dimension 556x556 pixels dont la surface de la zone d'intérêt ne peut occuper plus de la moitié de la surface de l'image.

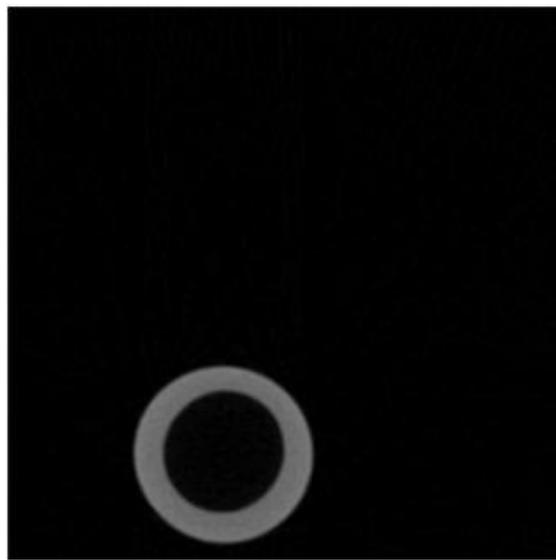


Figure 5.9 : Echantillon de la base de données des images Dicom.

V.3.2. Implémentation de l'application AnéSup

Dans cette partie, nous allons exposer les deux parties essentielles à notre application (AnéSup) qui sont le débruitage et la super-résolution.

V.3.2.1. Implémentation du débruitage (par seuillage)

Cette partie, s'occupe de l'extraction du diamètre à partir des images débruitées avec TO, elle se décompose en trois étapes :

- ✓ Débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes.
- ✓ Calcul du diamètre interne pour chaque image.
- ✓ Calcul du diamètre moyen de l'artère étudiée en cas d'un traitement d'une série d'images.

1^{ère} étape:

La suppression de bruits est l'un des problèmes les plus délicats en traitement d'images. De nombreuses méthodes lui ont été consacrées et parmi les approches les plus répandues en traitement d'image on trouve le **seuillage des coefficients d'ondelettes** ; Cette étape s'occupe de la décomposition de l'image (DWT2) par la transformée en ondelette en quatre coefficients comme on a vu au chapitre 3.

Considérons l'image suivante:

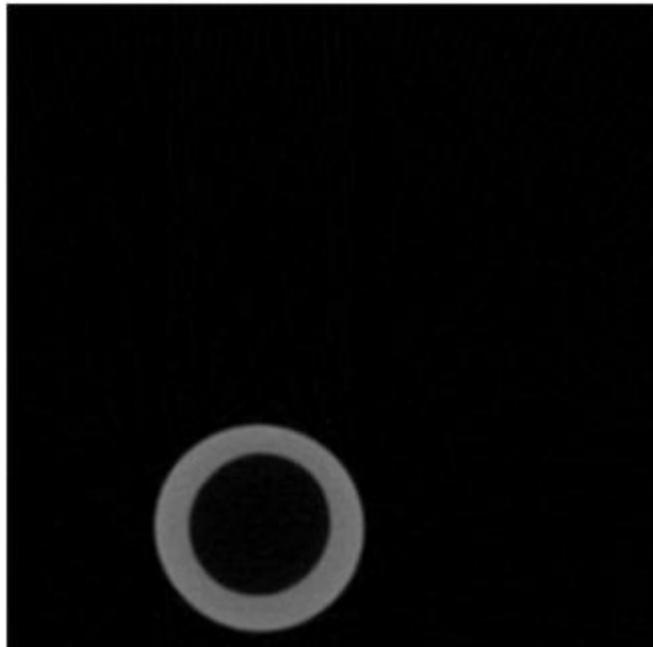


Figure 5.10 : Image d'un modèle d'anévrisme.

Après la décomposition en ondelettes on obtient les coefficients d'approximation et des détails (horizontal, vertical et diagonal) (voir la figure 5.11).

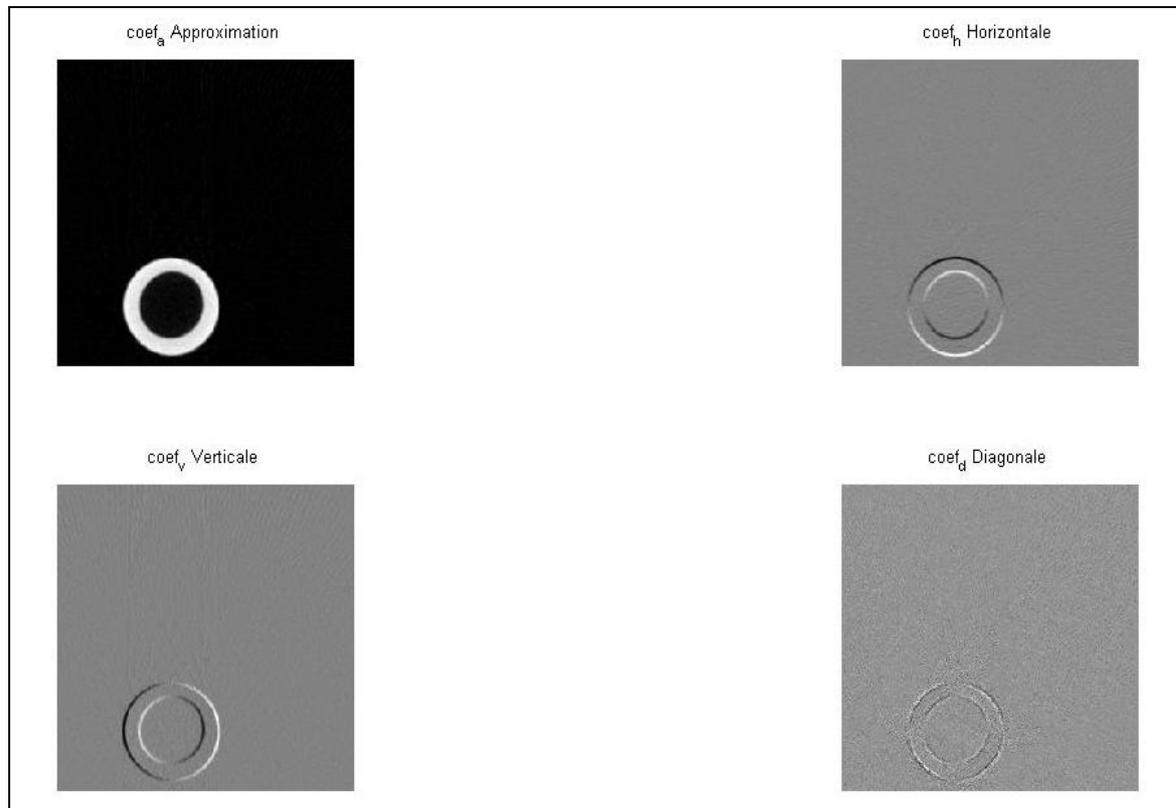


Figure 5.11: Décomposition de l'image à l'aide de la Transformée en Ondelettes.

2^{ème} étape:

Pour effectuer le débruitage, nous ne gardons que les coefficients des détails les plus grands et nous mettons les autres à zéro puis nous reconstruisons l'image. Le bruit correspond en général à des détails faibles donc on a une élimination, par le seuillage des coefficients d'ondelettes. Nous obtenons alors une image plus "lisse" donc débruitée (voir figure 5.12).

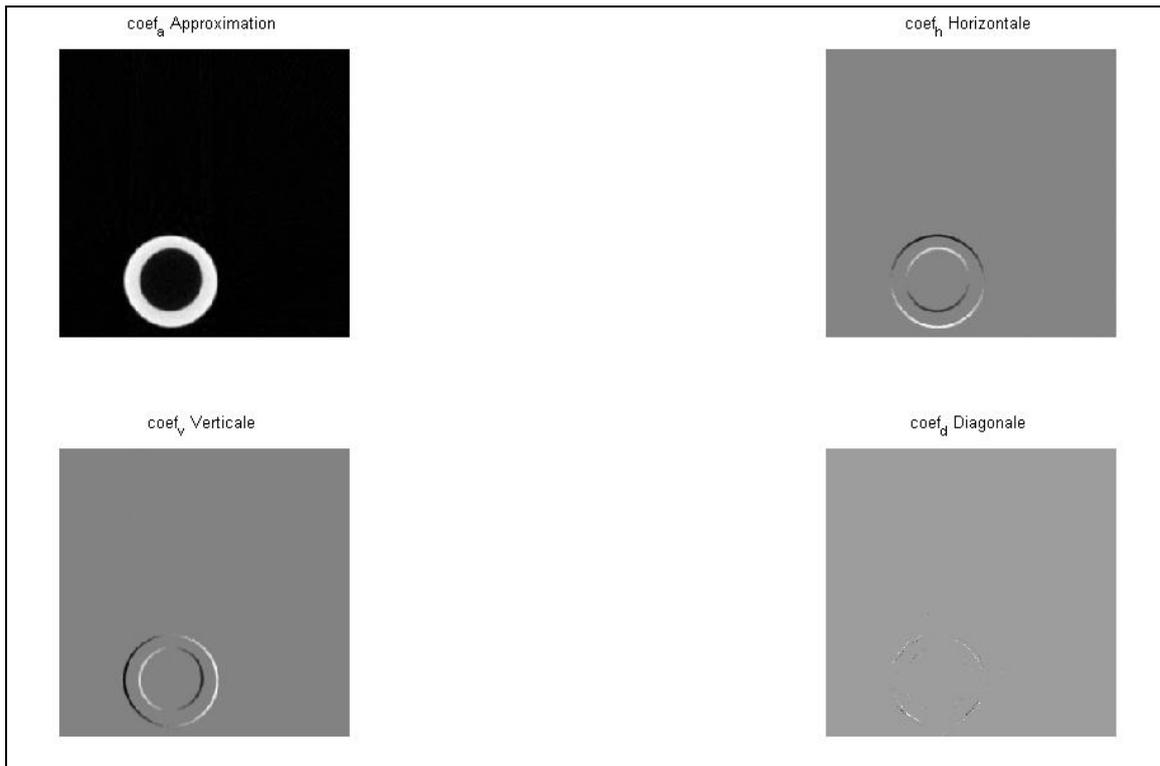


Figure 5.12: Représentation des coefficients de l'image après le seuillage.

3^{ème} étape:

Cette étape consiste en la Reconstruction de l'image débruitée, à partir des coefficients d'approximation (inchangés) et des coefficients de détails modifiés. L'image reconstruite est la suivante :

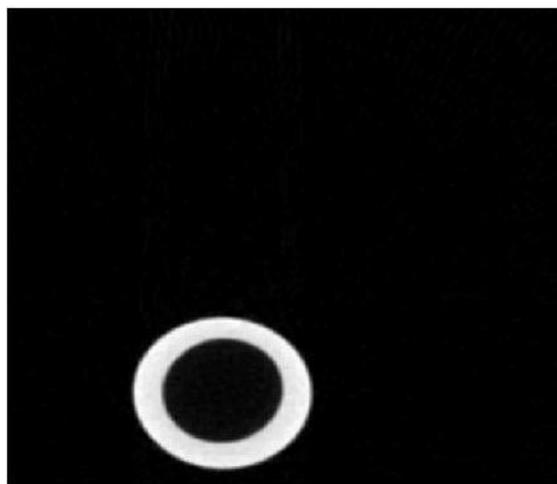


Figure 5.13: Représentation de l'image reconstruite par la transformée en ondelettes.

Une fois que l'image est complètement débruitée l'application AnéSup fournit une autre image reconstruite basée sur le diamètre intérieur et extérieur de l'images débruitée par les ondelettes .

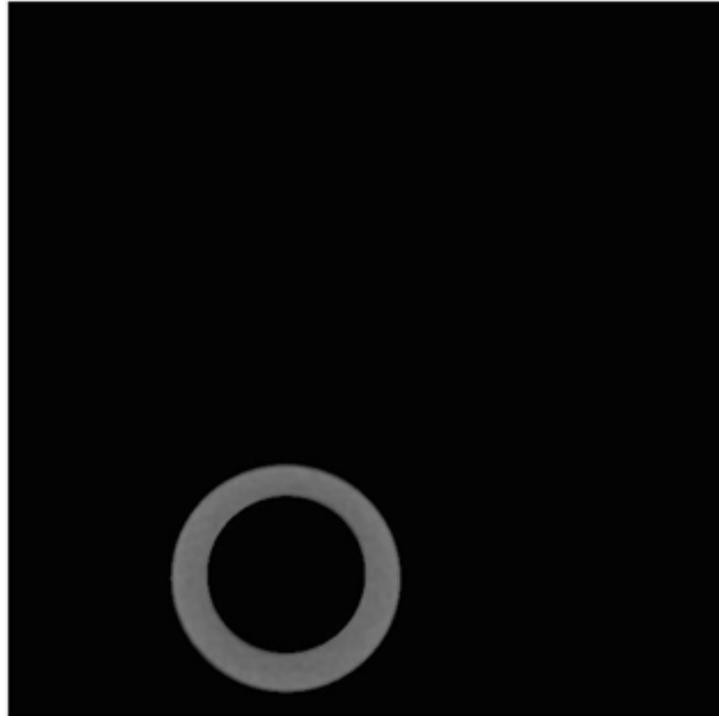


Figure5.14 : Représentation de l'image reconstruite par AnéSup.

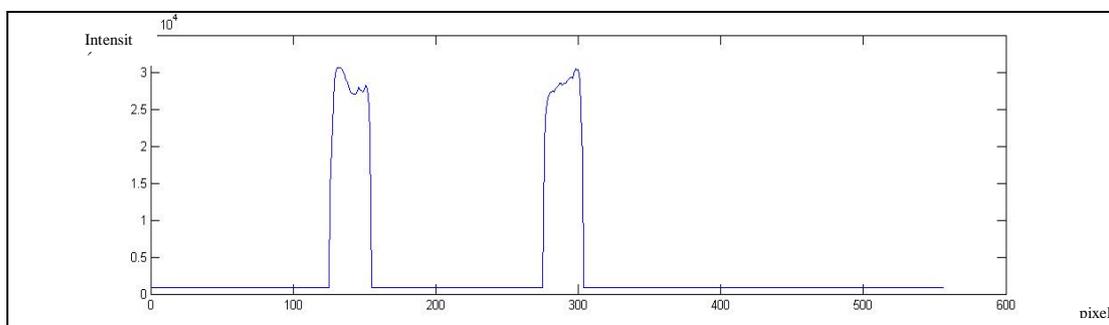


Figure5.15: Représentation 1D de l'image reconstruite par AnéSup.

Résultats obtenus:

Dans cette partie, nous allons exposer les résultats de débruitage obtenus avec un filtre gaussien de différentes fenêtres ainsi que le débruitage à l'aide des ondelettes, décrit dans le chapitre 4, afin de montrer lequel est le plus performant.

Les critères de comparaison seront successivement basés sur la qualité des filtrages en tant que prétraitement pour la détection des contours, et sur l'influence de cette étape de prétraitement sur l'information apportée par l'image.

La représentation théorique des images, dans le cas d'absence de parasites, conduit à une structure bien définie qui ressemble à la réalité des images. Pour bien comprendre l'intérêt de cette étude, on peut regarder ce qui se passe en 1D :

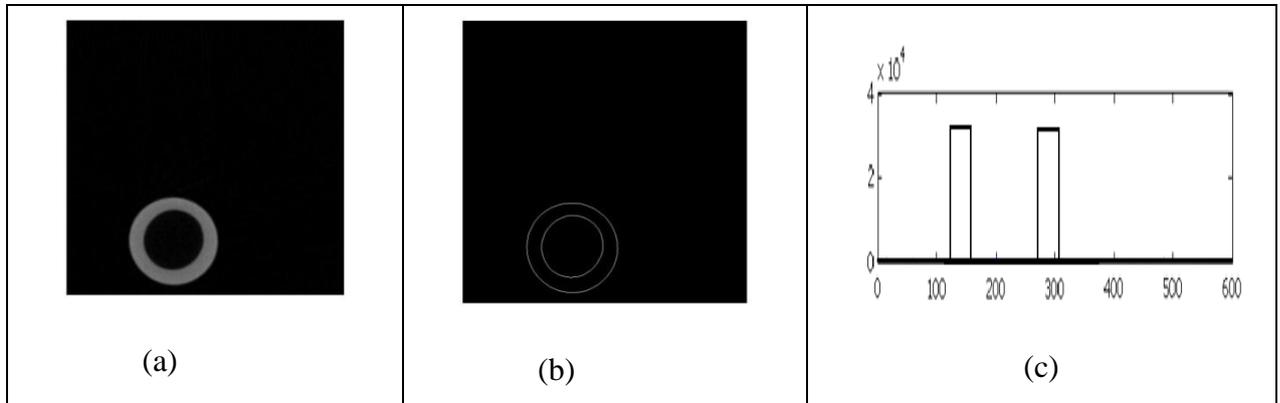


Figure 5.16: (a) image reconstruite et débruitée avec TO, (b) détection de contour de l'image débruitée, (c) représentation théorique de l'image en 1D.

Nous considérons l'image présentée dans la figure 5.16. Les figures 5.17(a), figure 5.17(b) et figure 5.17(c) présentent les résultats de débruitage obtenus avec un filtre gaussien à plusieurs fenêtres [2 2], [5 5] et [10 10]. La figure 5.18 représente les résultats de débruitage à l'aide de la transformée en ondelettes.

La table 5.1 montre l'influence de différents types de débruitage sur l'information apportée par l'image (calcul des diamètres de l'image traitée).

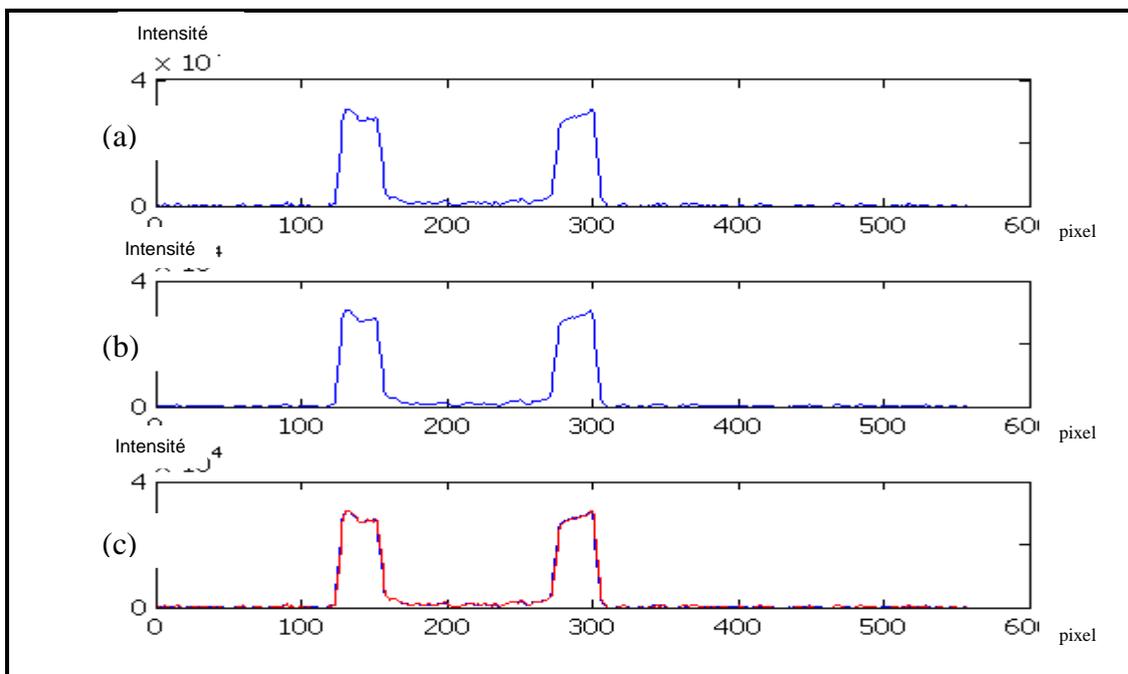


Figure 5.17(a) : Représentation 1D de : (a) image originale, (b) filtrage gaussien 2x2, (c) superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.

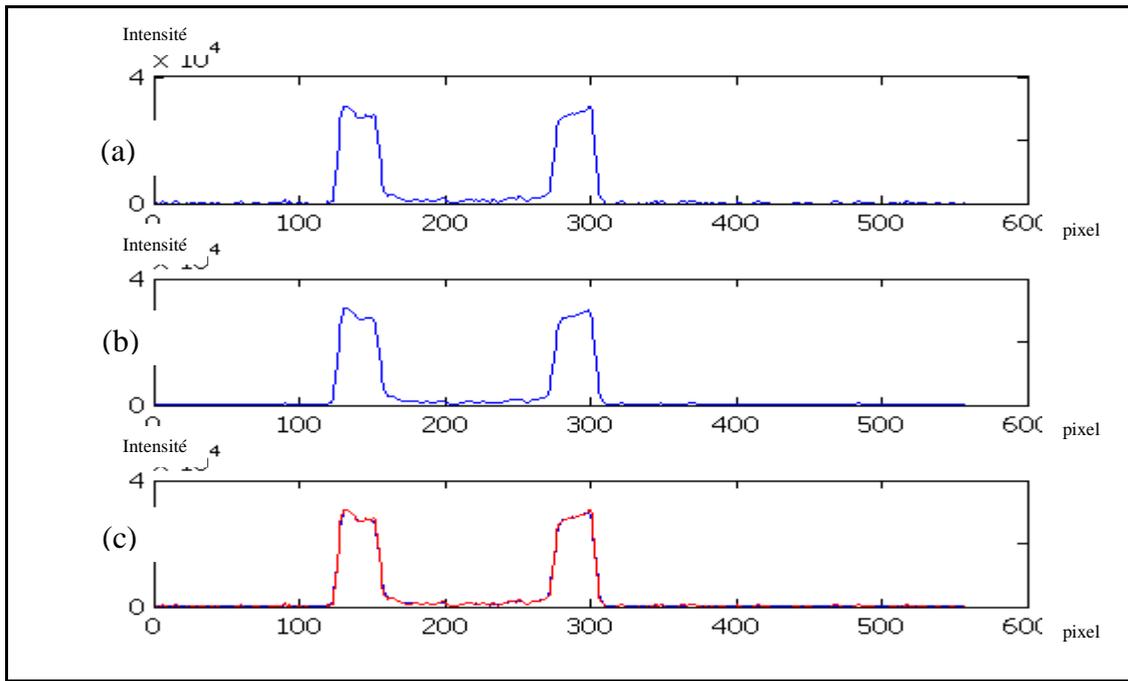


Figure 5.17(b): Représentation 1D de : (a) l'image originale, (b) filtrage gaussien [5x5], (c) superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.

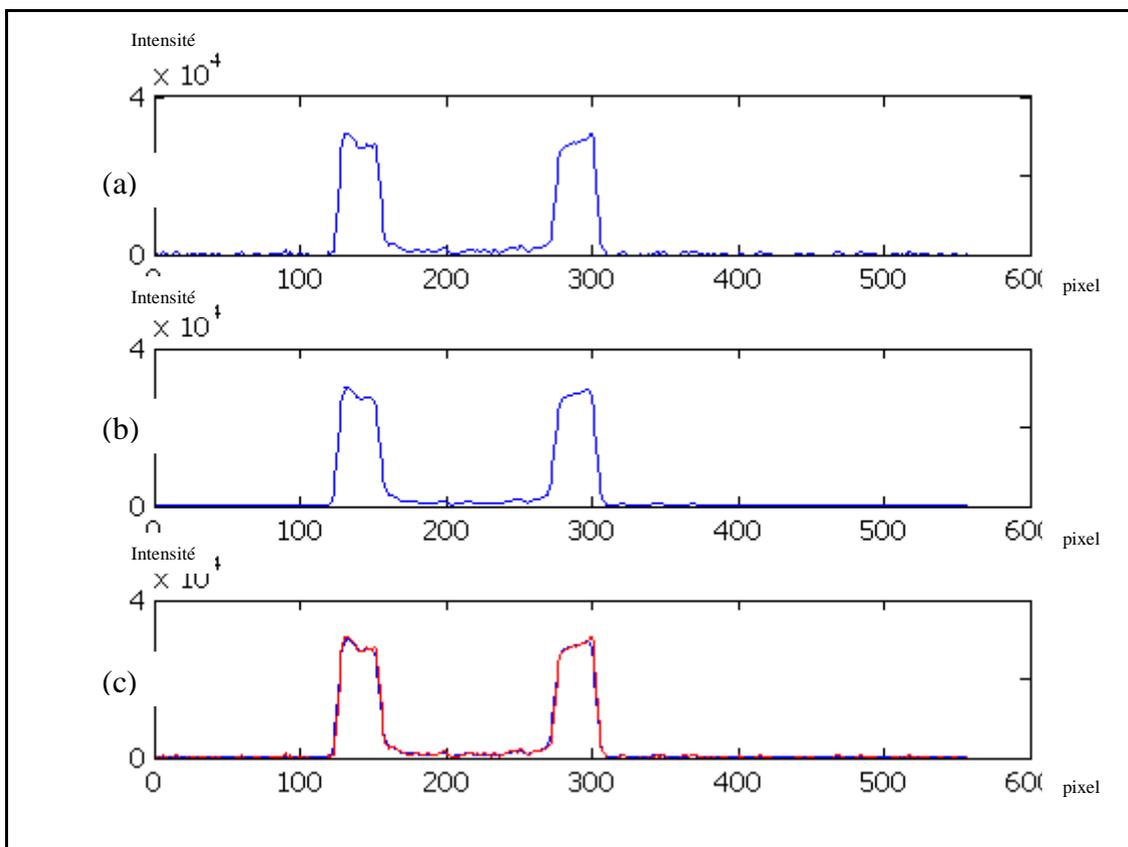


Figure 5.17(c) : Représentation 1D de : (a) l'image originale, (b) filtrage gaussien [10 10], (c) superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.

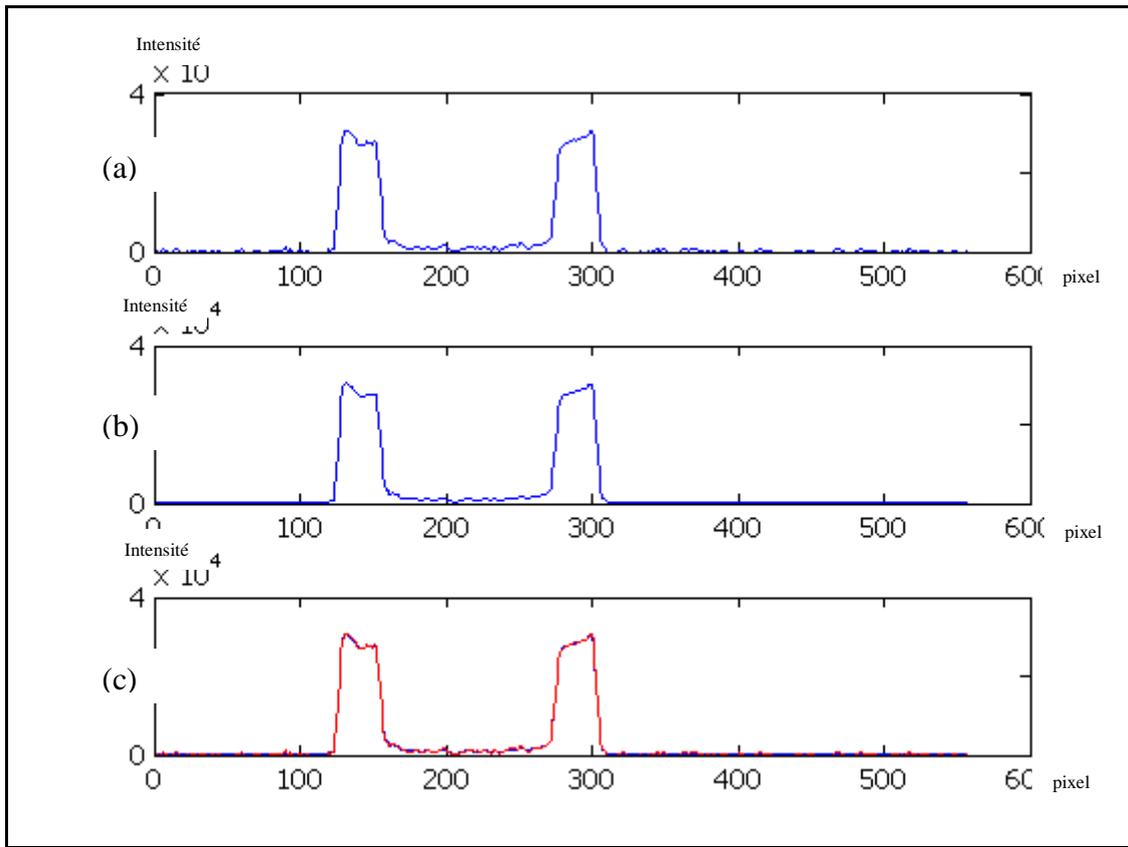


Figure 5.18: Représentation 1D de : (a) l'image originale, (b) filtrage avec la TO (c), superposition de la représentation de l'image originale et l'image débruitée.

	Sans Filtrage	Gauss [2 2]	Gauss [5 5]	Gauss [10 10]	Haar	bior
Diamètre int	4.3181	4.3192	4.3166	3.3160	4.3181	4.3181
Diamètre ext	6.3100	6.3114	6.3138	6.3147	6.3107	6.3107

Tab.5.1: représente les diamètres pour chaque type de débruitage.

Interprétations :

- La figure 5.17(a) et la figure 5.17(b) montrent la présence de bruit après le prétraitement des images à l'aide d'un filtre de gauss [2 2] et [5 5].
- La figure 5.17(c) montre l'absence majoritaire de bruit mais nous remarquons que nous avons perdu un peu de détails sur l'image avec ce filtre, voir la figure 5.19 :

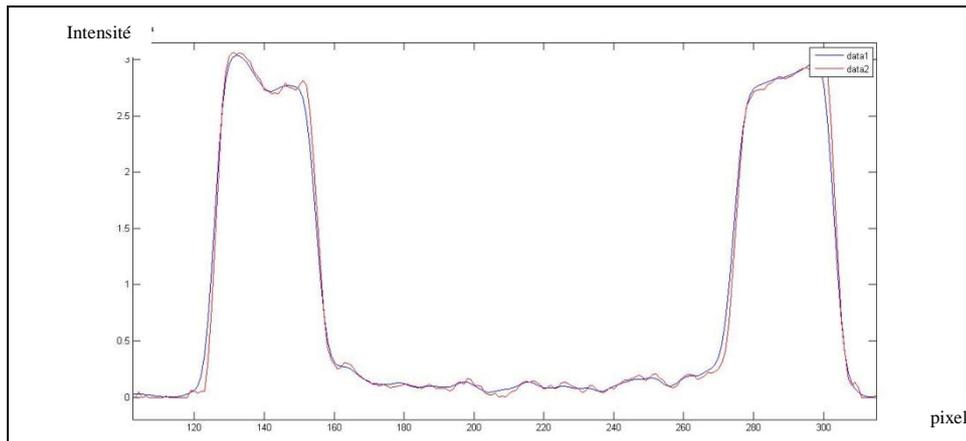


Figure 5.19: Représentation de l'influence du filtre de gauss sur l'image.

Généralement le bruit n'affecte pas les approches frontières, mais quand on utilise le filtre gaussien, il affecte l'information apportée par l'image notamment aux frontières.

- La figure 5.18 montre que la transformée en ondelettes a éliminé l'effet du bruit en gardant l'information contenue dans l'image. (voir figure 5.20)

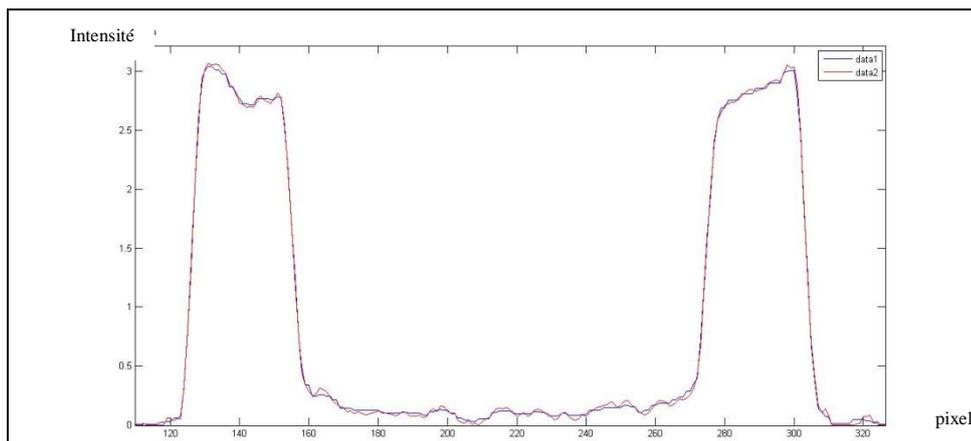


Figure 5.20: Représentation de l'influence de TO sur l'image.

V.3.2.2. Implémentation de La super résolution :

Le principe général de la SR mono image est toujours basé sur les techniques de ré-échantillonnage des images (interpolation). Ce dernier a pour rôle l'introduction des échantillons intermédiaires entre deux ou plusieurs échantillons connus. Cette opération est nécessaire chaque fois que l'on doit transformer une image dans une géométrie prédéfinie.

Cette deuxième partie, résume une méthode utilisant la transformée en ondelettes pour résoudre le problème de la super résolution d'images à partir des images de basse résolution. Elle se décompose en quatre étapes :

- ✓ Suréchantillonnage des images .

- ✓ Lissage des images suréchantillonnées.
- ✓ Calcul du diamètre interne de l'artère.
- ✓ Reconstruction finale de l'image de haute résolution.

1^{ère} étape:

Nous considérons que l'image d'origine vérifie le théorème de Shannon et on reconstruit le signal contenu dans cette image discrète, puis cette image contenue est filtrée de façon à donner une image dont le spectre est compatible avec le nouvel échantillonnage que l'on souhaite réaliser. Enfin on échantillonne cette image aux points que l'on désire connaître.

Mais ce principe se heurte à des contraintes de mise en œuvre matérielles très difficiles qui nécessitent que l'on trouve des solutions de remplacement.

Cela se fait en combinant la reconstruction et le filtrage en un seul filtrage. Cela se fait également très souvent en remplaçant les fonctions canoniques de reconstruction par des fonctions plus compactes, souvent polynomiales, permettant d'effectuer des sommations finies et non finies.

Considérons l'image suivante (figure 5.21) :

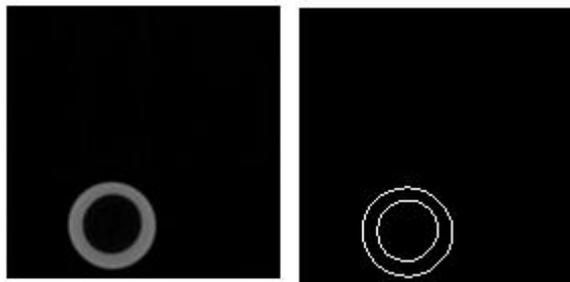


Figure 5.21: Représentation d'une image basse résolution.

Après l'augmentation de la résolution de l'image précédente avec l'une des fonctions polynomiales on obtient l'image présentée en figure 5.22.

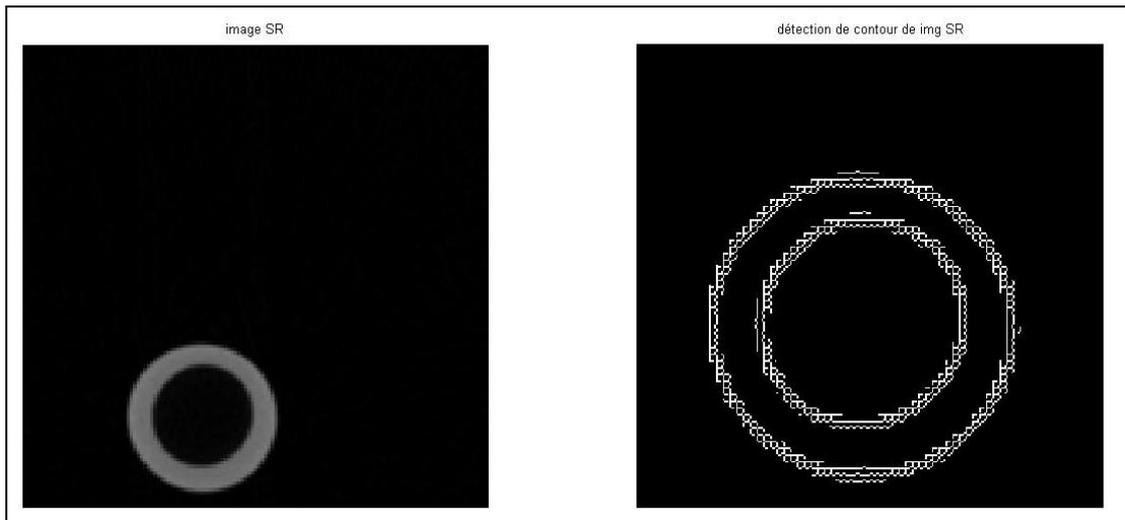


Figure 5.22: Représentation d'une image haute résolution avec un facteur SR=8.

2^{ème} étape:

Une fois qu'on obtient une image de haute résolution avec les différents filtres polynomiaux, les détails des images suivent les caractéristiques de la fonction interpolatrice. L'idée consiste à utiliser l'analyse multi résolution à l'aide des ondelettes stationnaires SWT pour faire l'interpolation avec un lissage des images haute résolution et rassembler les détails qui suivent les caractéristiques de l'image originale.

D'une manière très simpliste, à la première échelle la transformation en ondelettes va extraire les détails les plus fins. A la deuxième échelle, les détails seront un peu plus grossiers et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une image complètement lisse. A l'échelle 1 on obtient le résultat présenté en figure 5.23.

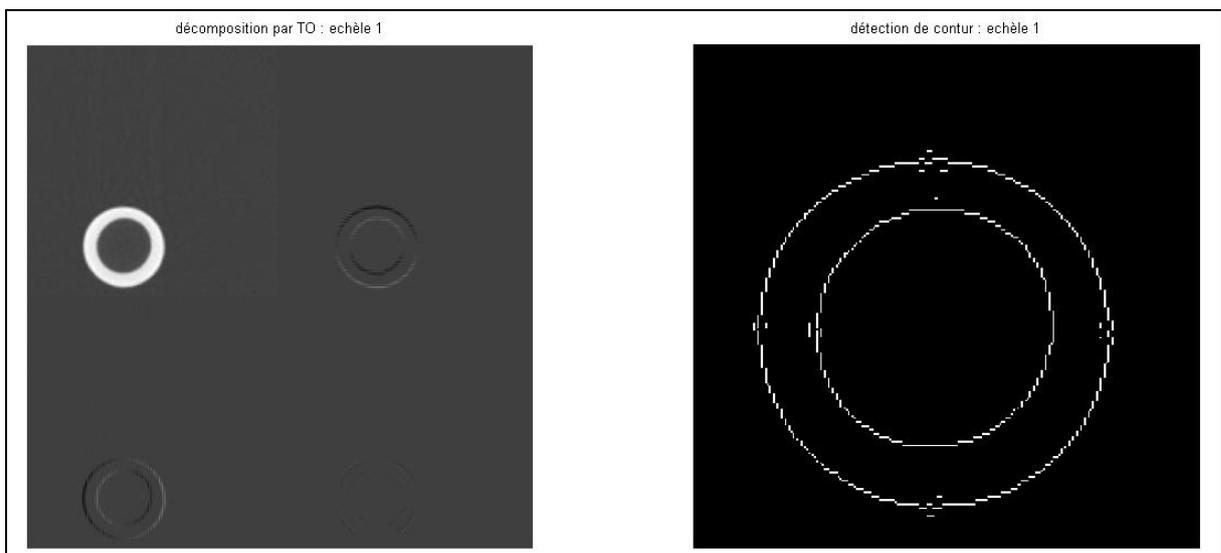


Figure 5.23: Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 1.

A l'échelle 2 on obtient les résultats présentés en figure 5.24.

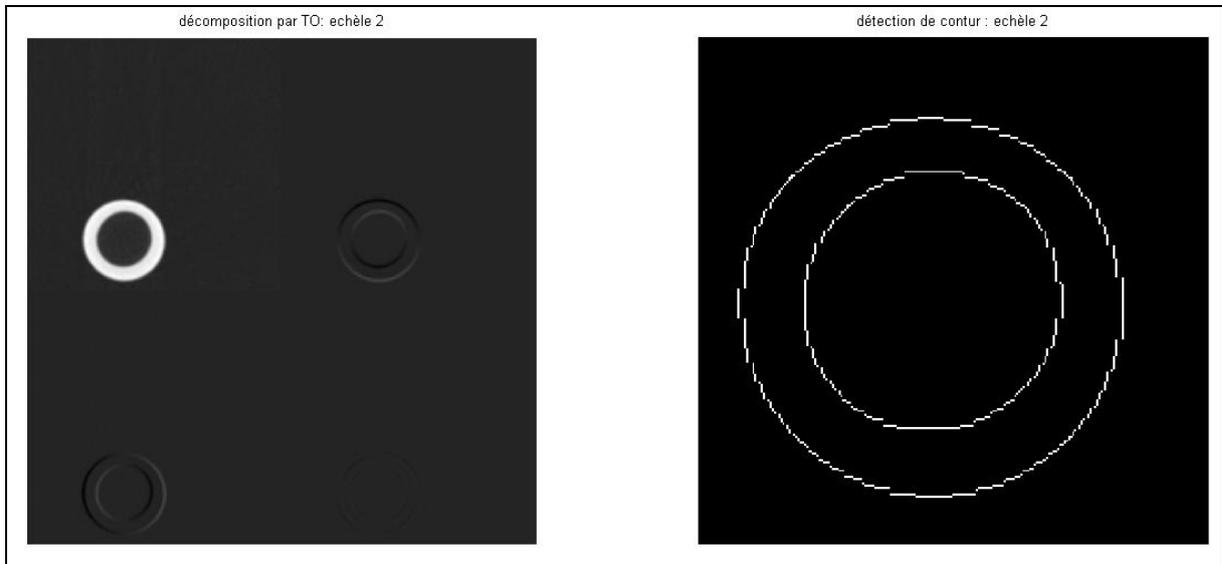


Figure 5.24: Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 2.

A l'échelle 3 on obtient celui de la figure 5.25.

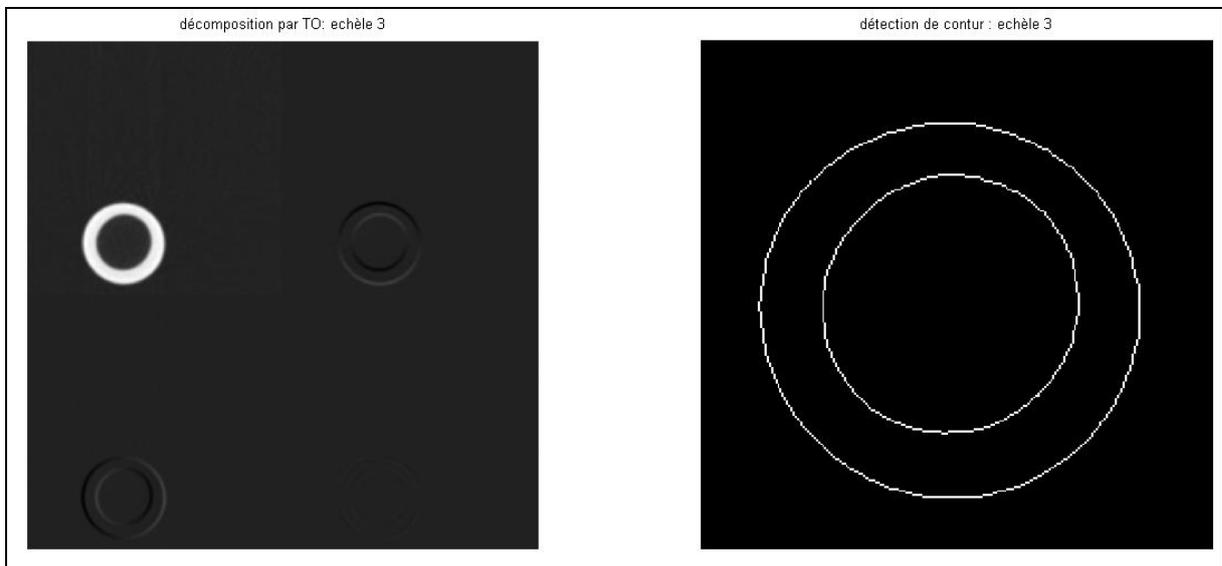


Figure 5.25: Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 3.

A l'échelle 4, on obtient une représentation complètement lisse (figure 5.26) :

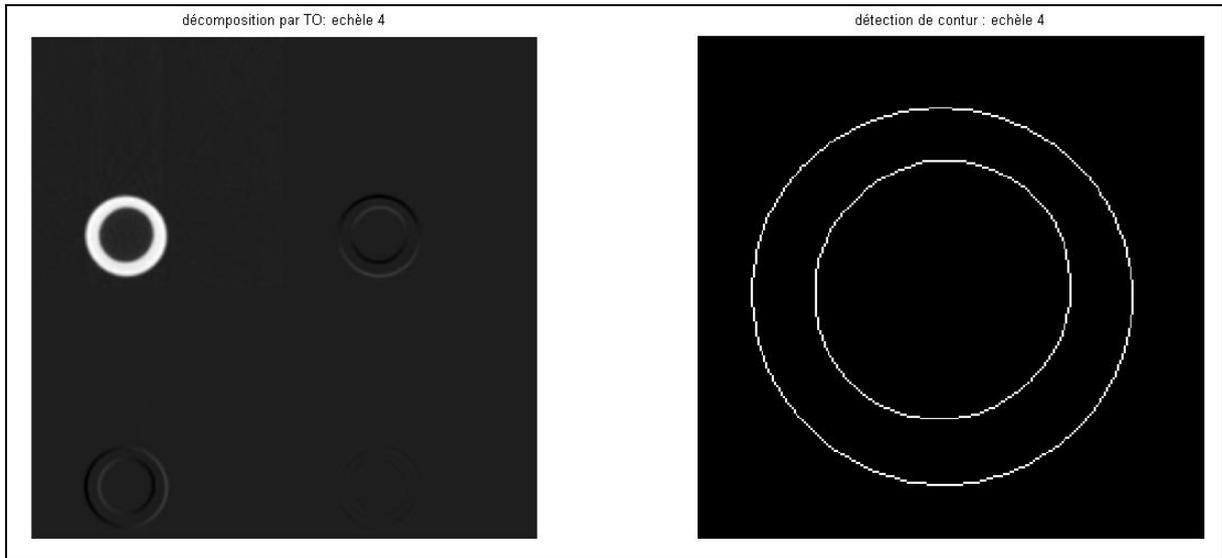


Figure 5.26: Représentation de l'image traitée par SWT à l'échelle 4.

3^{ème} étape:

Une fois avoir obtenu une image complètement lisse après plusieurs itérations on peut calculer les deux diamètres pour reconstruire une image finale ayant les caractéristiques géométriques désirées (voir figure5.27).

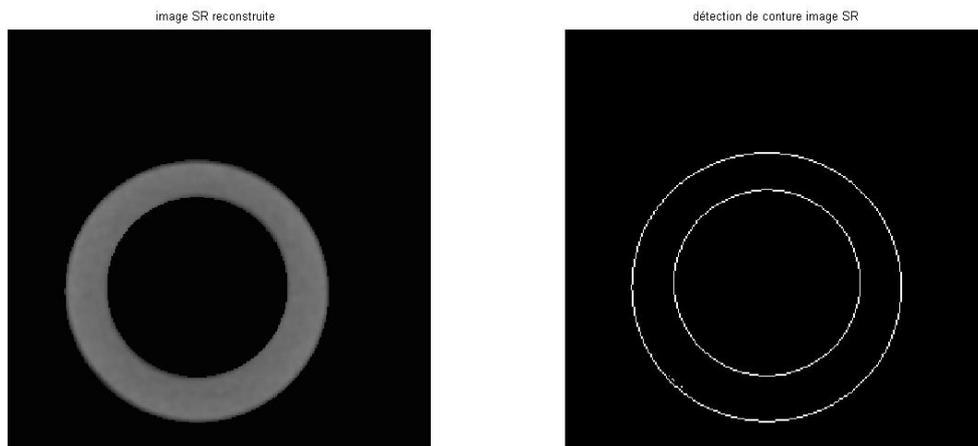


Figure 5.27: Représentation de l'image reconstruite par AnéSup.

Résultats obtenus :

Pour bien comprendre l'efficacité de notre algorithme de super résolution, les images originales débruitées avec la TO sont devenues des images de référence de comparaison et on propose d'affaiblir la résolution des ces images avec différents facteurs (voir figure 5.28).

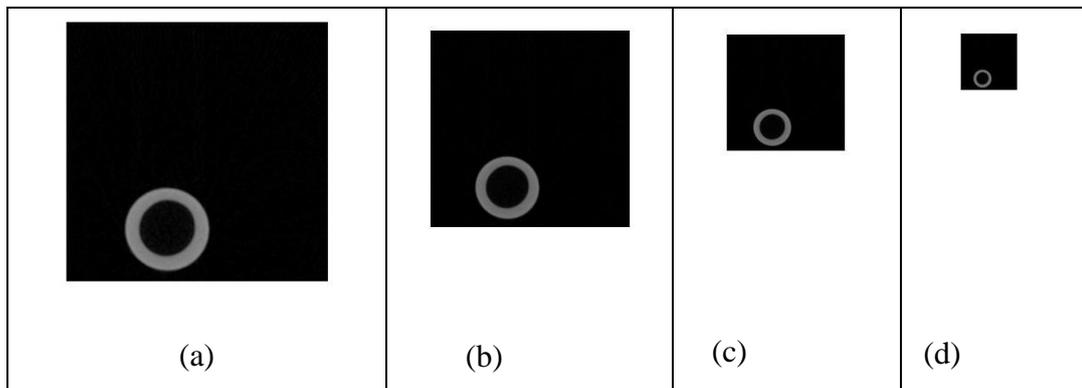


Figure 5.28:(a) Image originale de taille 556x556 pixels et de diamètre interne $d=4.315$ mm, (b) image de basse résolution de taille 278x278 pixels ($f=2$), (c) image de basse résolution de taille 139x139 pixels ($f=4$), (d) image de basse résolution de taille 70x70 pixels ($f=8$).

les résultats que l'algorithme de super résolution à l'aide des ondelettes sur les images précédentes sont représentées en figure 5.29 .

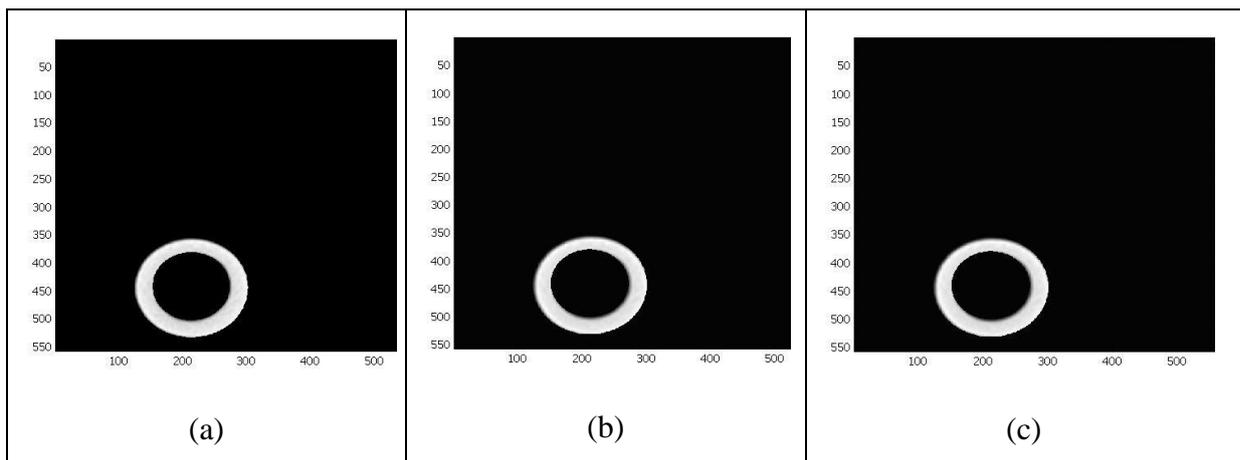


Figure 5.29: (a) image reconstruite de haute résolution et de taille 556x556 pixels ($f=2$) et de diamètre interne $d=4.312$ mm, (b) image reconstruite de haute résolution et de taille 556x556 pixels ($f=4$) et de diamètre interne $d=4.307$ mm, (c) image reconstruite de haute résolution et de taille 556x556 pixels ($f=8$) et de diamètre interne $d=4.312$ mm

Les résultats de la super résolution à l'aide des ondelettes sur une série de 20 images de basse résolution avec différents facteurs de super résolution sont présentés dans le tableau 5.2

Facteur de SR	SR par ondelettes de Haar				SR par fct bilinéaire & lissage circulaire				SR par fct bi-cubique & lissage circulaire			
	D_moy(mm)	Ecartype	erreur	accurecy	D_moy(mm)	Ecartype	erreur	accurecy	D_moy(mm)	Ecartype	erreur	accurecy
2	4.311	0.002	0.005	0.06	4.313	0.002	0.005	0.045	4.312	0.002	0.005	0.03
4	4.305	0.002	0.004	0.19	4.308	0.002	0.005	0.150	4.308	0.002	0.005	0.13
8	4.308	0.014	0.034	0.12	4.325	0.002	0.005	0.243	4.326	0.001	0.003	0.28

Tab.5.2 : Résultats de la SR par ondelettes, SR par des fonctions bilinéaire, bi-cubique avec un lissage circulaire.

On rappelle que :

- D_{moy} : diamètre moyen de 20 images.
- Ecartype : l'Ecartype de 20 images.
- Erreur = $2.35 * \text{Ecartype}$.
- Accuracy = $\left(\frac{D_n - D_{\text{moy}}}{D_n}\right) * 100$.
- D_n : diamètre nominal (4.315 mm)
- Err_n : l'erreur de 20 images originales (0.005 mm).

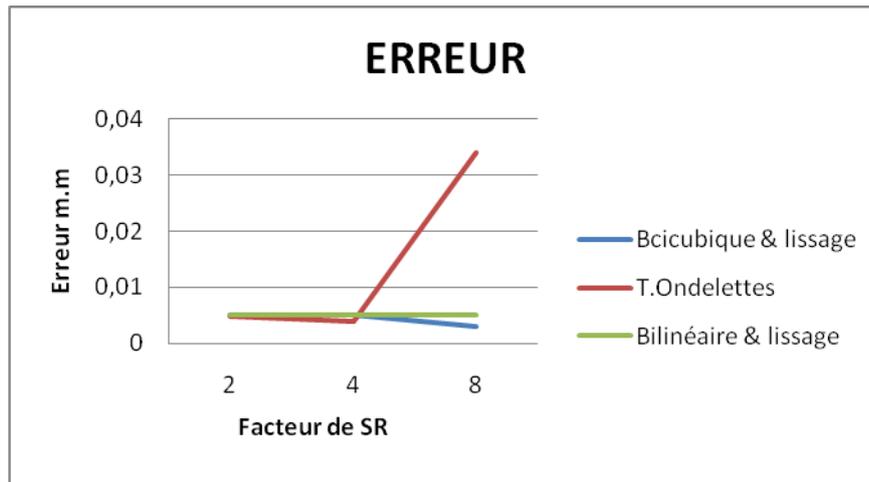


Figure 5.30 (a):taux d'erreur obtenue en appliquant les différentes techniques de SR

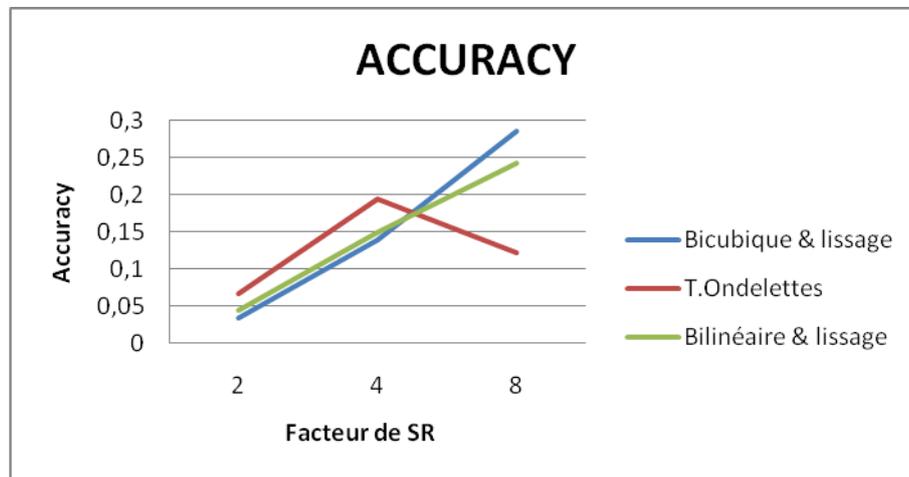


Figure 5.30 (b): Accuracy obtenue en appliquant les différentes techniques de SR.

D'après les figures 5.30(a) et (b), nous remarquons pour des facteurs de super résolution 2 et 4, l'erreur reste stable pour les 3 méthodes de super résolution et aux environs de 0.005 mm, qui correspond à l'erreur des images originales ; en terme d'accuracy, on remarque que les méthodes polynomiales avec un lissage circulaire donnent des résultats qui s'approchent mieux des images originales que ceux obtenus par la transformée en ondelettes.

Et pour un facteur de super résolution $SR=8$, on remarque que l'erreur pour les méthodes polynomiales avec un lissage circulaire reste stable, par contre l'erreur fournie par la transformée en ondelettes est plus grande et atteint la valeur 0.034 mm. En terme d'accuracy on remarque que la méthode qui utilise la transformée en ondelettes approche mieux les images originales que les méthodes polynomiales avec un lissage circulaire,

En général, on remarque que les résultats avec une interpolation polynomiale et un lissage circulaire sont meilleurs que ceux obtenu par la transformée en ondelettes pour des facteurs de

super résolution 2 et 4; mais ces résultats ne sont pas justifiées et le choix de la fonction d'interpolation et du filtre de lissage et reste toujours arbitraire (voir figure 5.31).

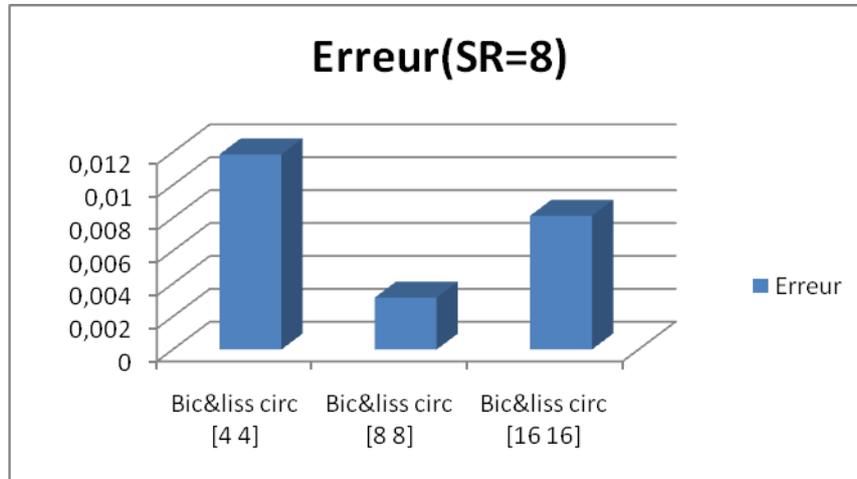


Figure 5.31 (a): Erreur obtenue en appliquant les différentes tailles du filtre de lissage

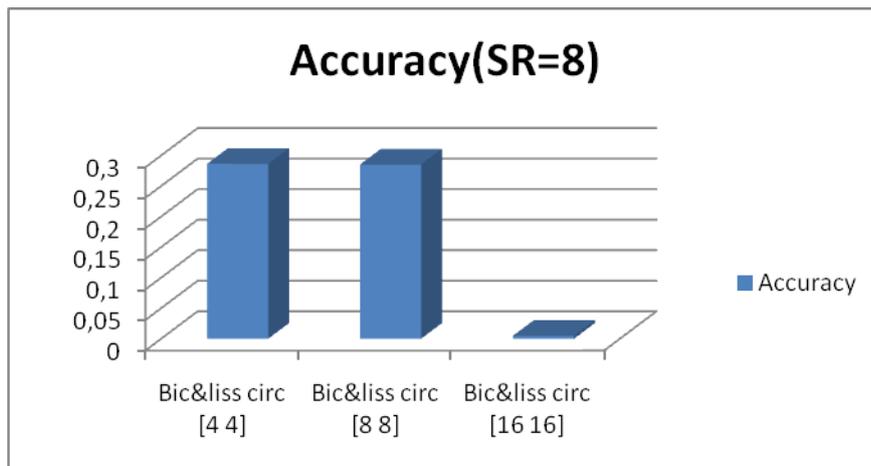


Figure 5.31 (b): Accuracy en appliquant les différentes tailles du filtre de lissage

D'après les figures 5.31(a) et (b), on peut noter l'impact de la taille du filtre de lissage sur les résultats, Tel que ceux ci suivent les tailles de la fonction de lissage. Donc pour une structure peu complexe, ces méthodes sont inutiles pour localiser les frontières, par contre la super résolution à l'aide de la transformée en ondelettes offre les avantages de la bonne localisation des frontières.

Exemple d'anévrisme réel :

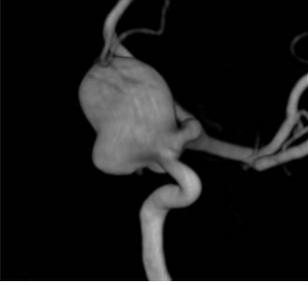
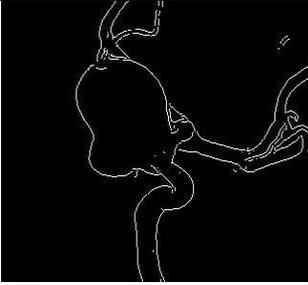
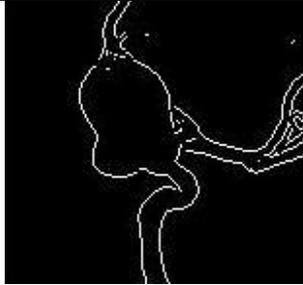
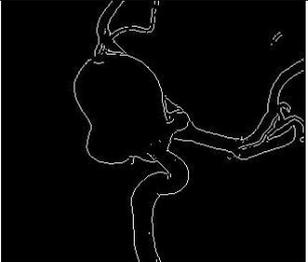
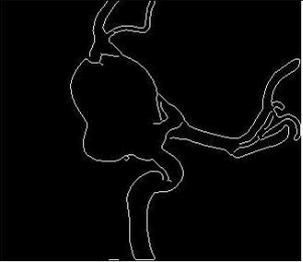
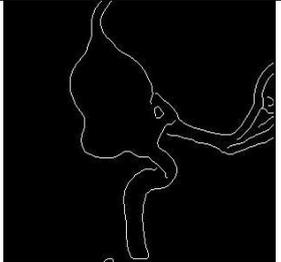
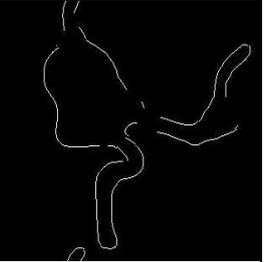
			
Image originale [328x284]	Image basse résolution [164x142] avec un facteur 2	Image basse résolution [82x71] avec un facteur 4	Image basse résolution [41x35] avec un facteur 8
			
Détection de contour de l'image originale	Détection de contour de l'image basse résolution (k=2)	Détection de contour de l'image basse résolution (k=4)	Détection de contour de l'image basse résolution (k=8)
			
Détection de contour de l'image originale	Détection de contour de l'image haute résolution par TO avec un facteur SR=2	Détection de contour de l'image haute résolution par TO avec un facteur SR=4	Détection de contour de l'image haute résolution par TO avec un facteur SR=8

Figure 5.31: Super résolution d'un anévrisme réel à l'aide des ondelettes avec différents facteurs de SR.

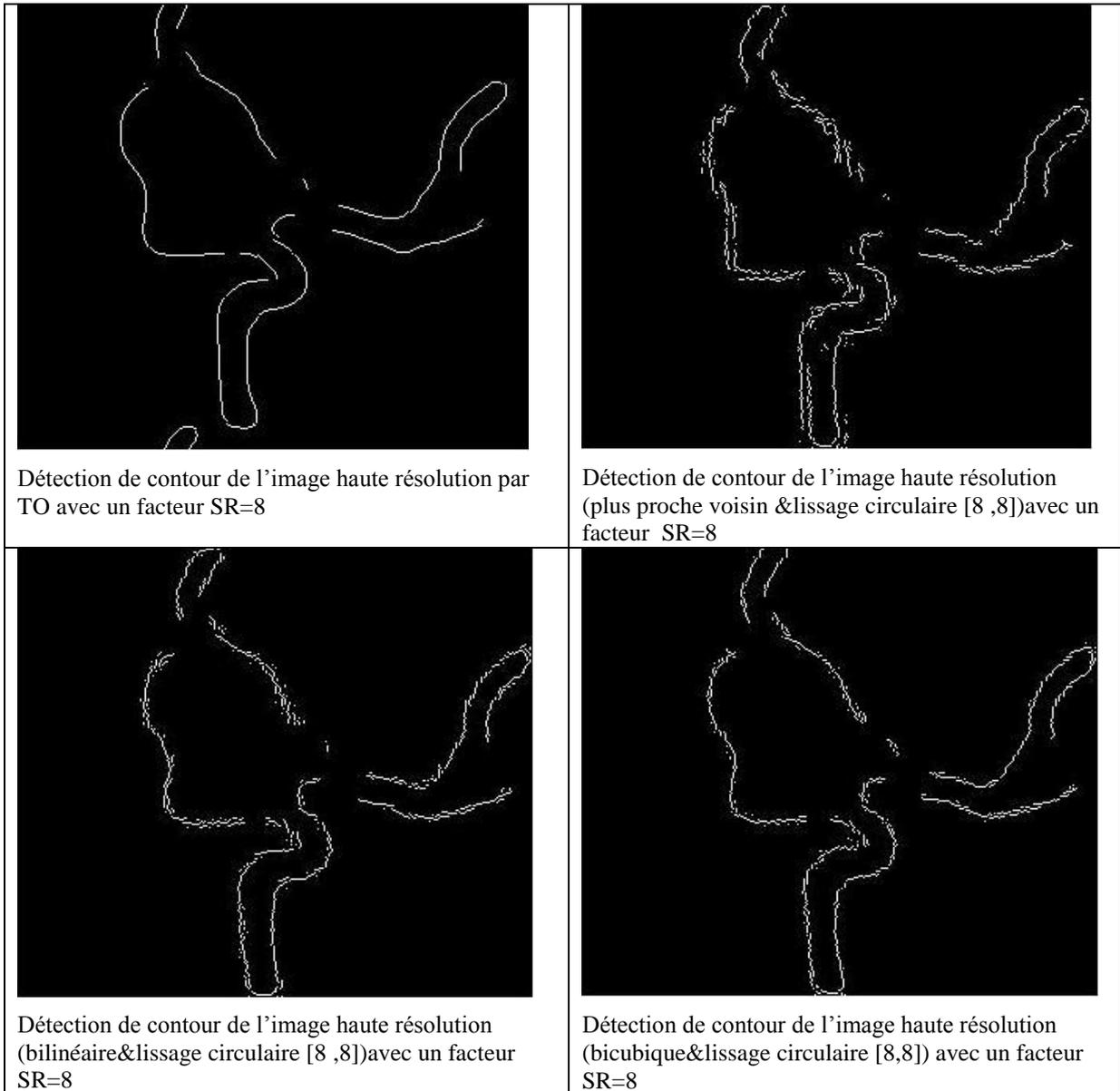


Figure 5.32: Influence de la fonction d'interpolation sur les résultats de la SR.

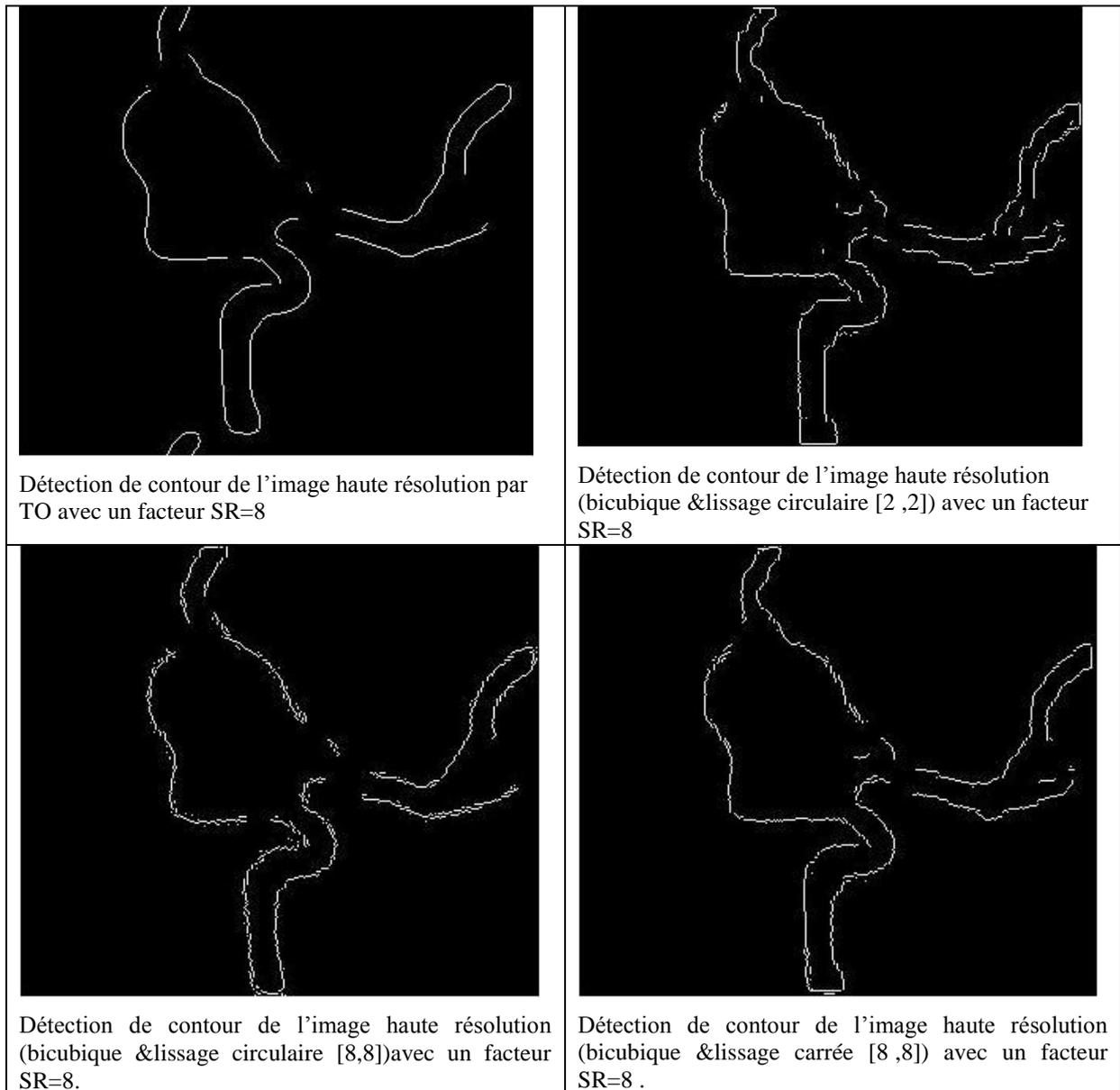


Figure 5.33: Influence du paramètre de la fonction de lissage sur les résultats de la SR.

La figure 5.32 et 5.33 représentent l'influence des paramètres de la Super Résolution sur les résultats obtenus, où les détails de ces images haute résolution par des fonctions polynomiales suivent les caractéristiques de la fonction interpolatrice, ainsi la fonction de lissage. Mais par contre on remarque que la super résolution à l'aide de la transformée en ondelettes, permettant de rassembler les détails de l'image haute résolution qui suivent les caractéristiques de l'image originale, afin de reconstruire une image la plus proche de la réalité.

V.4. Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, l'interface graphique développée à cet effet afin de pouvoir exploiter les techniques de superrésolution présentées dans les chapitres précédents.

En comparant les différents résultats de l'application des techniques de super résolution sur les images médicale, nous avons montré les mérites de l'utilisation de la transformée en ondelettes à la super résolution, ou cet outil permet de conserver l'information apporter par l'image en tant que faire un prétraitement (Débruitage) pour la détection des contours, ainsi reconstruire des images de haute résolution à partir des images basse résolution qui soit la plus proche de la réalité(super résolution).

CONCLUSION GENERALE.

A travers ce travail de magister, nous nous sommes intéressés à la super résolution des images, appliquée aux images médicales dans le but de contribuer à la résolution d'un problème spécifique. Celui-ci consiste en la détection de structures bien définies et avec précision sur des images d'anévrismes.

La super résolution est un problème délicat en traitement d'images. Elle est définie comme étant l'ensemble des opérations et des techniques qui corrigent les images et reconstruit une image de bonne qualité à partir d'une image de qualité médiocre. On distingue deux grandeurs qui sont toujours adoptées et considérées comme principales en super résolution, il s'agit de la reconstruction dans le cas de sur échantillonnage et du débruitage pour la suppression des bruits.

En premier lieu, nous nous sommes intéressés au problème de débruitage des images. Nous avons essayé de montrer le rôle important des ondelettes dans le débruitage des images médicales en tant que prétraitement pour la détection des contours. Nous avons insisté aussi sur le fait que cet outil repose sur des critères bien définis et non pas sur le choix de filtres et de paramètres arbitraires, comme c'est généralement le cas, pour réaliser le débruitage des images.

Une étude comparative entre la super résolution basée sur la transformée en ondelettes et les différents algorithmes de super résolution utilisant des fonctions polynomiales, a montré que la super résolution utilisant la transformée en ondelettes présentait de meilleurs résultats pour lesquels nous avons constaté que les caractéristiques de l'image haute résolution suivait celles de l'image originale basse résolution. Par contre, dans le cas de la super résolution utilisant les fonctions polynomiales, l'image haute résolution suit les caractéristiques de la fonction interpolatrice et du filtre de lissage.

Grâce à ces études, nous avons pu élaborer notre propre algorithme de super résolution à l'aide des ondelettes permettant la reconstruction d'une image de haute résolution à partir d'une image basse résolution qui soit la plus proche de la réalité.

Nous pouvons dire enfin que ce travail nous a permis d'acquérir les notions de base et les principes fondamentaux nécessaires pour l'approfondissement de nos recherches dans le

domaine de la superrésolution en espérant pouvoir développer d'autres algorithmes plus fiables et plus efficaces exploitables sur des images colorées.

Bibliographie

- [1] DODGSON N., « Quadratic interpolation for image resampling », *IEEE Trans. on Image Processing*. Vol. 6, n9, p. 1322-1326, septembre 1997.
- [2] MAELAND E., « On the comparison of interpolation methods », *IEEE Trans. on medical Imaging*, vol. 7, n3, p. 213-217, 1988.
- [3] Unser, M., Aldroubi, A., et Eden, M. (1993a). B-spline signal processing - Part i. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(2) :821–833.
- [4] UNSER M., « Splines. A perfect fit for signal and image processing », *IEEE signal processing magazine*, vol.n6, p.22-38, 1999.
- [5] CHALMOND B., *Eléments de modélisation pour l'Analyse d'Images*, vol. 33, Springer Verlag, Mathématiques et Applications. 2000.
- [6] Unser, M., Aldroubi, A., et Eden, M. (1993b). B-spline signal processing - Part II. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 41(2) :834–848.
- [7] Goshtasby, A., Cheng, F., et Barsky, B. A. (1990). B-spline curves and surfaces viewed as digital filters. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 52 :264–275.
- [8] Karabassis, E. et Spetsakis, M. (1995). An analysis of image interpolation, differentiation and reduction using local polynomial fits. *Graphical Models and Image Processing*, 57(3):183–196.
- [9] Calle, D. et Montanvert, A. (1998). Super-résolution inducing of an image. In *IEEE ICIP'98 - Int. Conf. on Image Processing*, volume III, pages 232–236.
- [10] R.Y.Tsai, T.S. Huang.-advances in Computer Vision and Image Processing , Chap. Multiframe Image Restoration and Registration, pp.317-339.-JAI Press Inc., 1984, vol, 1.
- [11] S. P. kim, N. K. Bose.- Recursive reconstruction of high – resolution image from noisy undersampled multiframe. *IEEE Transaction on Aconstics. Speech and Signal Processing*, 38(6):1013-1027, juin 1990.
- [12] S. P. Kim, W. Su.- Recursive high- resolution reconstruction of blurred multiframe image. *IEEE Transaction on image Processing*, 2(4):534-539, octobre 1993.
- [13] S. Rhee, M. G. Kang.-Discrete cosine transform based regularized high-resolution image reconstruction algorithm. *Optical Engineering*, 38(8):1348-1356, aout 1999.
- [14] W. Y. Su, S. P. Kim.- High-resolution restoration of dynamic image sequences. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 5(4): 330-339, 1994.
- [15] Athanasios Papoulis.-Generalized sampling expansion. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 24(11):652-654, nonembre 1977.
- [16] Hanoch Ur, Daniel Gross.- Improved resolution from subpixed shifted pictures. *CVGIP: Graphical models and image processing*, 54(2):181-186, mars 1992.

- [17] J. L. Brown.- Multi-channel sampling of low-pass signals. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 28(2): 101-106, 1981.
- [18] H. Shekarforoush, R. Chellappa.-Data- driven multichannel superresolution with application to video sequences. *Journal of Optical society of America A*, 16(3):481-492, mars 1999.
- [19] S. Yeh, H. Stark.-Iterative and one-step reconstruction from nonuniform samples by convex projection. *Journal of Optical Society of America*, 7(3):491-499, mars 1990.
- [20] K.D.Sauer, J. P. Allebach.- Iterative reconstruction of band limited images from nonuniformly spaced samples, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34(12):1497-1506, décembre 1987.
- [21] D. Granrath, J. Lersch.-Fusion of images on affine sampling grids. *Journal of the Optical Society of America A*,15(4):791-801, avril 1998.
- [22] A. M. Tekalp, M. K. Ozkan, M. I. Sezan.- High-resolution image reconstruction from lower-resolution image sequences and space varying image restoration.- *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp.169-172, San Francisco, mars 1992.
- [23] M.-C.Chiang, T. E. Bonlt.- Efficient super-resolution via image warping. *Image and Vision Computing*, 18:761-771, 2000.
- [24] N.Nguyen, P. Milanfar.- An efficient wavelet- based algorithm for image Superresolution.- *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing, ICIP, Vancouver,2000*.
- [25] Stéphane G. Mallat. « A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : TheWavelet Representation ». *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence*, 11(7), 1989.
- [26] A. Cohen. « *Ondelettes et Traitement Numérique du Signal* ». Masson, 1992. ISBN 2-225-83954-9.
- [27] Jaideva C. Goswami et Andrew K. Chan. « *Fundamentals of Wavelets : Theory, Algorithms,and Applications* ». Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley Interscience, 1999. ISBN 0-471-19748-3.
- [28] Gilbert Strang et Truong Nguyen. « *Wavelets and Filter Banks* ». Wellesley-Cambridge Press, 1996. ISBN 0-9614088-7-1.
- [29] B. B. Hubbard. « *Ondes et Ondelettes* ». Collection Sciences d’Avenir. Pour la Science, diff. Belin, Paris, 1995. ISBN 2-9029-1890-9.
- [30] Marc Antonini. « *Transformée en Ondelettes et Compression Numérique des Images* ». Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 1991.

- [31] W. Sweldens. « The Lifting Scheme : A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions ». In A. F. Laine et M. Unser, editors, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, pages 68–79. Proc. SPIE 2569, 1995.
- [32] W. Sweldens. « Wavelets and the lifting scheme : A 5 minute tour ». *Z. Angew. Math. Mech.*, 76 (Suppl. 2) :41–44, 1996.
- [33] W. Sweldens et P. Schröder. « Building your own wavelets at home ». In *Wavelets in Computer Graphics*, pages 15–87. ACM SIGGRAPH Course notes, 1996.
- [34] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, P. Tchamitchian *Wavelets, Time-Frequency Methods, and Phase Space*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- C.Diou, Contribution à l'intégration sur silicium de la transformée en ondelettes, application au traitement d'images, thèse de doctorat, l'université Montpellier II, 2000 .

ANNEXE

Les ondelettes de Daubechies : dbN

Cette famille d'ondelettes est la première permettant de manipuler des ondelettes orthogonales à support compact de régularité, on dira que N est l'ordre de l'ondelette dbN.

Cette famille contient l'ondelette Haar, db1, qui est la plus simple et certainement la plus ancienne des ondelettes. Elle est discontinue, ressemble à un échelon

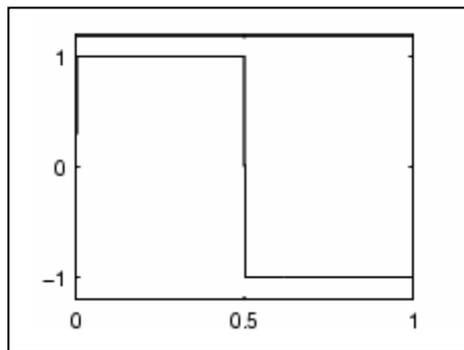


Figure I.1 : L'ondelette Haar

L'ondelette de Haar est définie par :

$\psi(x) = 1,$	Si	$x \in [0, 0.5[$
$\psi(x) = -1,$	Si	$x \in [0.5, 1[$
$\psi(x) = 0,$	si	$x \notin [0, 1[$

La fonction d'échelle associée est la fonction échelon :

$\phi(x) = 1,$	Si	$x \in [0, 1]$
$\phi(x) = 0,$	Si	$x \notin [0, 1]$

Les ondelettes de cette famille pour les ordres de 2 à 10 sont présentées dans la figure I.2. De plus, pour deux d'entre elle (db4 et db8), on trouve dans la figure I.3 en plus de l'ondelette, la fonction d'échelle et les quatre filtres associés (deux pour la décomposition, deux pour la reconstruction).

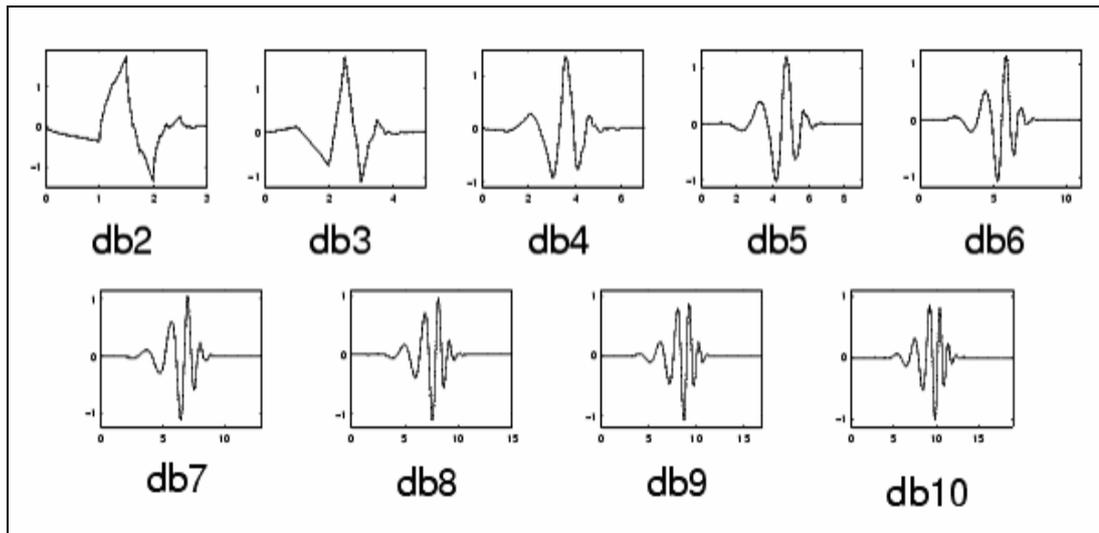


Figure I.2. Les ondelettes de Daubechies : dbN

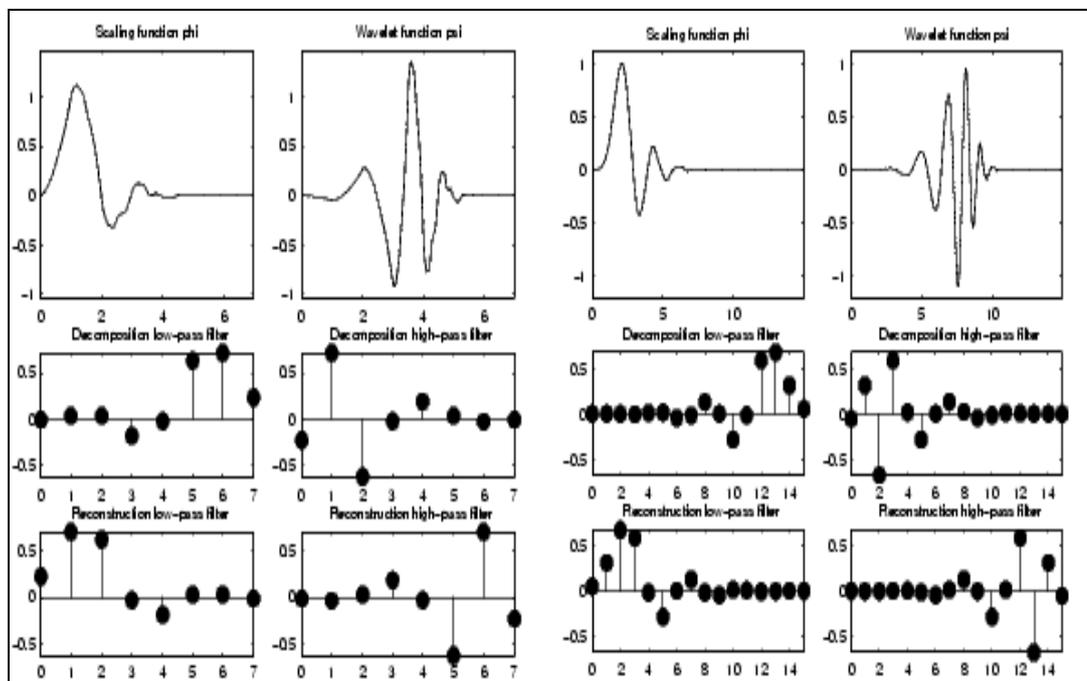


Figure I.3. Deux ondelettes de Daubechies : db4 (à gauche) et db8 (à droite).

Les Symlets : symN

Les symlets constituent une famille d'ondelettes presque symétriques, proposée par I. Daubechies en modifiant la construction de dbN. A part la symétrie, les autres propriétés des deux familles sont similaires. Les symlets d'ordre 2 à 8 (sym1 est simplement l'ondelette de Haar) sont présentées dans la figure II.1

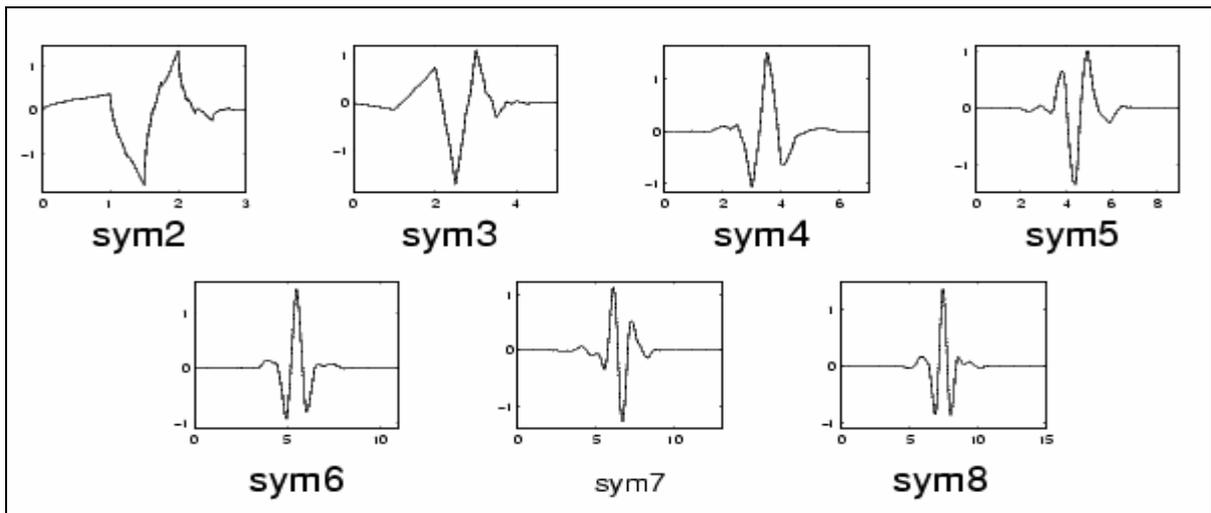


Figure II.1. Les symlets : symN.

Pour deux d'entre elles (sym4 et sym8), on trouve dans la figure II.2 l'ondelette, la fonction d'échelle et les quatre filtres associés.

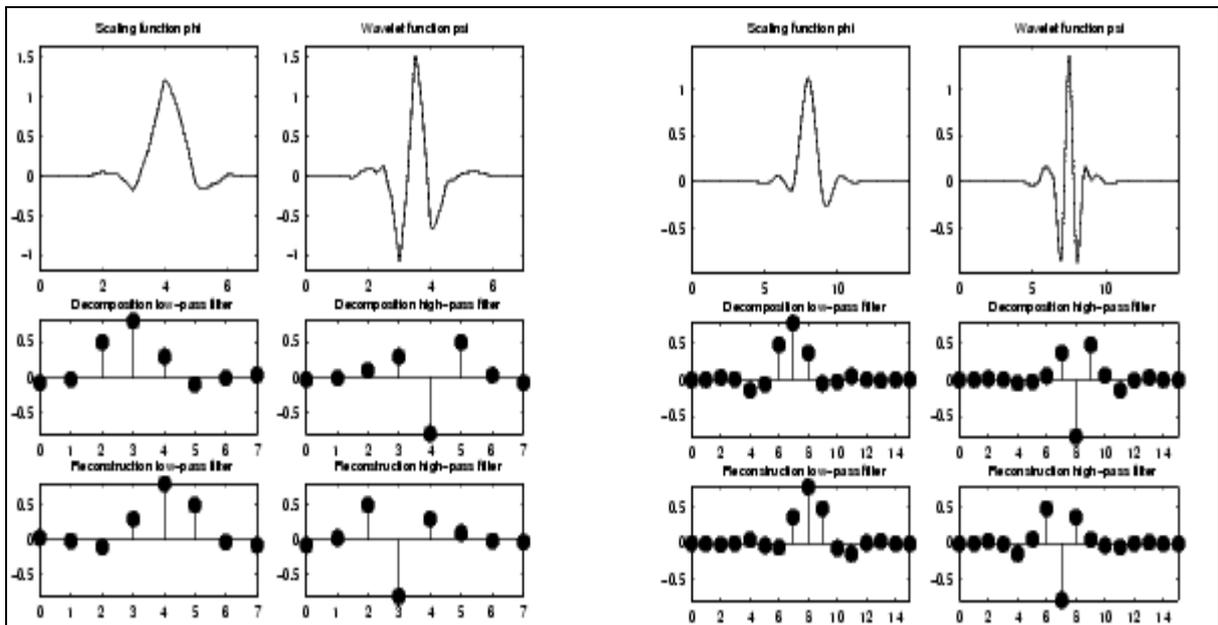


Figure II.2. Deux symlets : sym4 (à gauche) et sym8 (à droite)

Les Coiflets : coifN

Construites par I. Daubechies sur la demande de R. Coifman, les coiflets constituent une famille d'ondelettes possédant une propriété inhabituelle. Non seulement, comme pour les

deux familles précédentes, l'ondelette ψ associée à coifN a $2N$ moments nuls, mais en plus la fonction d'échelle ϕ , qui est intégrale 1, a $2N - 1$ moments nuls. Les coiflets d'ordre 1 à 5 sont représentés en figure III.1

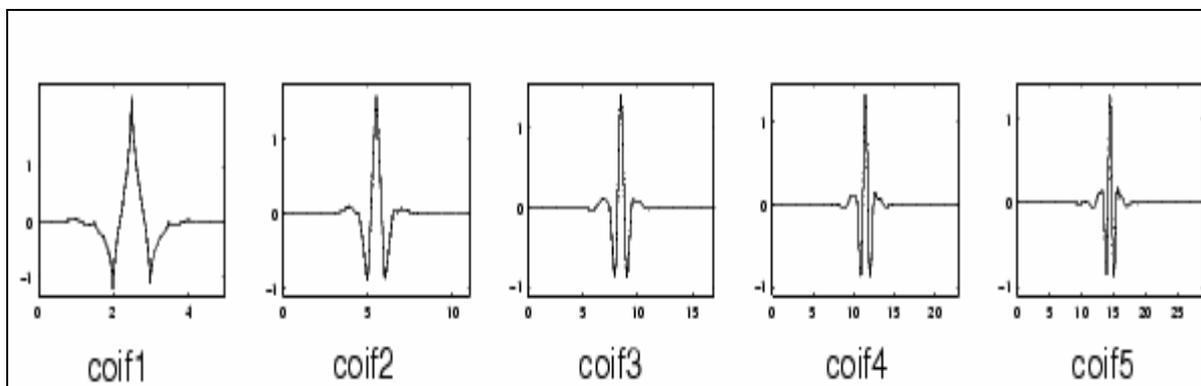


Figure III.1 Les coiflets : coifN

Pour deux d'entre elles (coif3 et coif5), on trouve dans la figure III.2 l'ondelette, la fonction d'échelle et les quatre filtres associés.

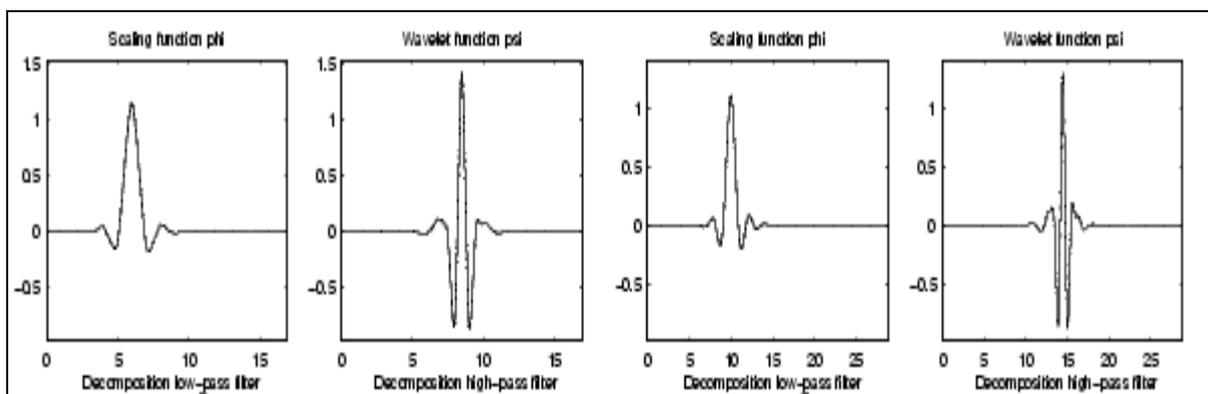


Figure III.2. Deux coiflets : coif3 (à gauche) et coif5 (à droite).

Ondelettes biorthogonales : biorNr.Nd

Les ondelettes biorthogonales étendent les familles d'ondelettes orthogonales. Il est bien connu dans la communauté du filtrage que symétrie et reconstruction parfaite sont incompatibles (excepté pour l'ondelette de Haar) lorsque les mêmes filtres RIF sont utilisés pour la décomposition et la reconstruction. Pour contourner cette difficulté, deux ondelettes au lieu d'une sont introduites :

- La première, $\tilde{\Psi}$, est utilisée pour l'analyse et les coefficients d'un signal s sont

$$\tilde{c}_{j,k} = \int s(x) \tilde{\psi}_{j,k}(x) dx$$

- L'autre, Ψ , est utilisée pour la synthèse:

$$s = \sum_{j,k} \tilde{c}_{j,k} \psi_{j,k}$$

Les ondelettes Ψ et $\tilde{\Psi}$ sont reliées par des relations de dualité:

$$\begin{aligned} \bullet \int \tilde{\psi}_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) dx &= 0 && \text{pour } j \neq j' \text{ ou } k \neq k' \\ \bullet \int \tilde{\phi}_{0,k}(x) \phi_{0,k'}(x) dx &= 0 && \text{pour } k \neq k' \end{aligned}$$

Pour ce biais, il est ainsi possible de concentrer les propriétés souhaitables pour l'analyse (nombre de moments nuls par exemple) dans l'ondelette $\tilde{\psi}$ tandis que les propriétés intéressantes pour la synthèse (régularité, symétrie) peuvent être concentrées dans ψ .

La figure IV.1 présente les ondelettes biorthogonales construites par Daubechies. Pour chacune d'elles, on trouve les graphes des fonctions ψ et $\tilde{\psi}$.

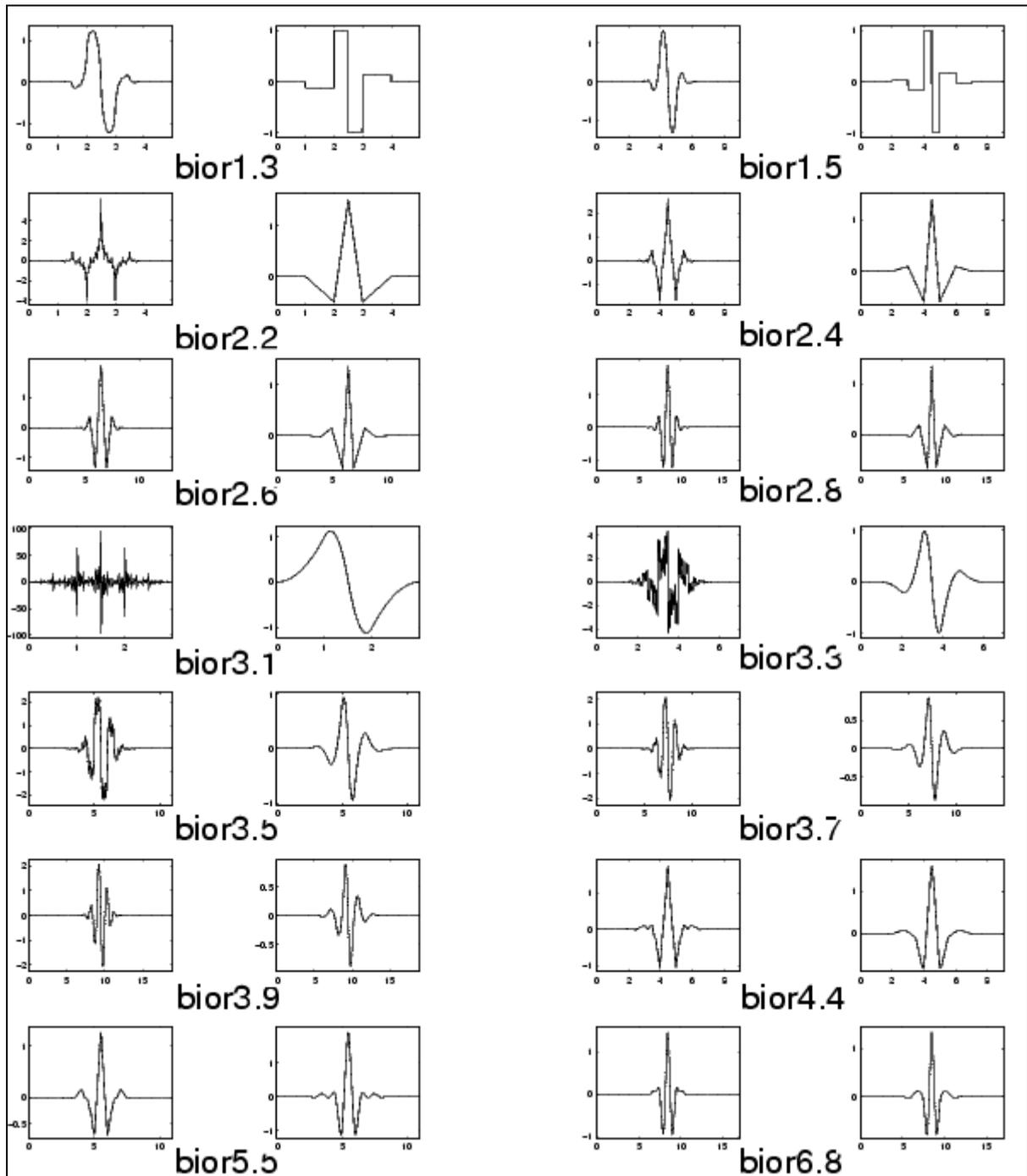


Figure IV.1. Ondelettes biorthogonales: biorNr.Nd

L'ondelette de Meyer : meyr

L'ondelette meyr est l'une des premières ondelettes. Elle a été construite par Y. Meyer au milieu des années 1980.

Il s'agit d'une ondelette orthogonale indéfiniment dérivable mais elle n'est pas à support compact. Les graphes des fonctions ψ et ϕ sont représentés en figure V.1

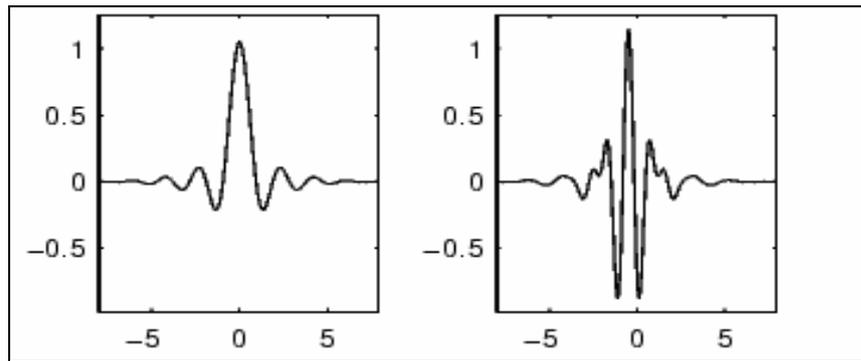


Figure V.1. Ondelette de Meyer : fonction d'échelle (à gauche) et ondelette (à droite)

Les fonctions ψ et φ sont toutes deux définies dans le domaine des fréquences en partants d'une fonction auxiliaire notée v :

L'ondelette de Meyer et la fonction d'échelle sont définies dans le domaine fréquentiel par :

- $\hat{\psi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} e^{i\omega/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right) \quad \text{if} \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}$

- $\hat{\psi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} e^{i\omega/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right) \quad \text{if} \quad \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}$

- et

$$\hat{\psi}(\omega) = 0 \quad \text{if} \quad |\omega| \notin \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

- avec

$$v(a) = a^4(35 - 84a + 70a^2 - 20a^3), \quad a \in [0,1]$$

- $\hat{\phi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \quad \text{if} \quad |\omega| \leq \frac{2\pi}{3}$

- $\hat{\phi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right) \quad \text{if} \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}$

- $\hat{\phi}(\omega) = 0 \quad \text{if} \quad |\omega| > \frac{4\pi}{3}$

En changeant la fonction auxiliaire v , on obtient une famille de fonctions qui, sous des conditions sur v , engendrent une analyse orthogonale.

La fonction ψ n'est pas à support compact, mais converge vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$ plus rapidement que tout inverse de polynôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists C_N \text{ Tel que } |\Psi(\mathbf{x})| \leq C_N (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-n}$$

De plus ψ est indéfiniment dérivable et la même propriété de décroissance vaut aussi pour chacune des dérivées. La fonction ψ est donc à décroissance rapide.

Une approximation de l'ondelette de Meyer : dmey

Comme la fonction ψ n'est pas à support compact, il est difficile de l'utiliser en pratique car elle requiert l'utilisation de filtres à réponse impulsionnelle infinie. Il existe néanmoins des approximations RIF de cette ondelette permettant une décomposition rapide.

On trouve dans la figure V, en plus de l'ondelette, la fonction d'échelle et les quatre filtres associés.

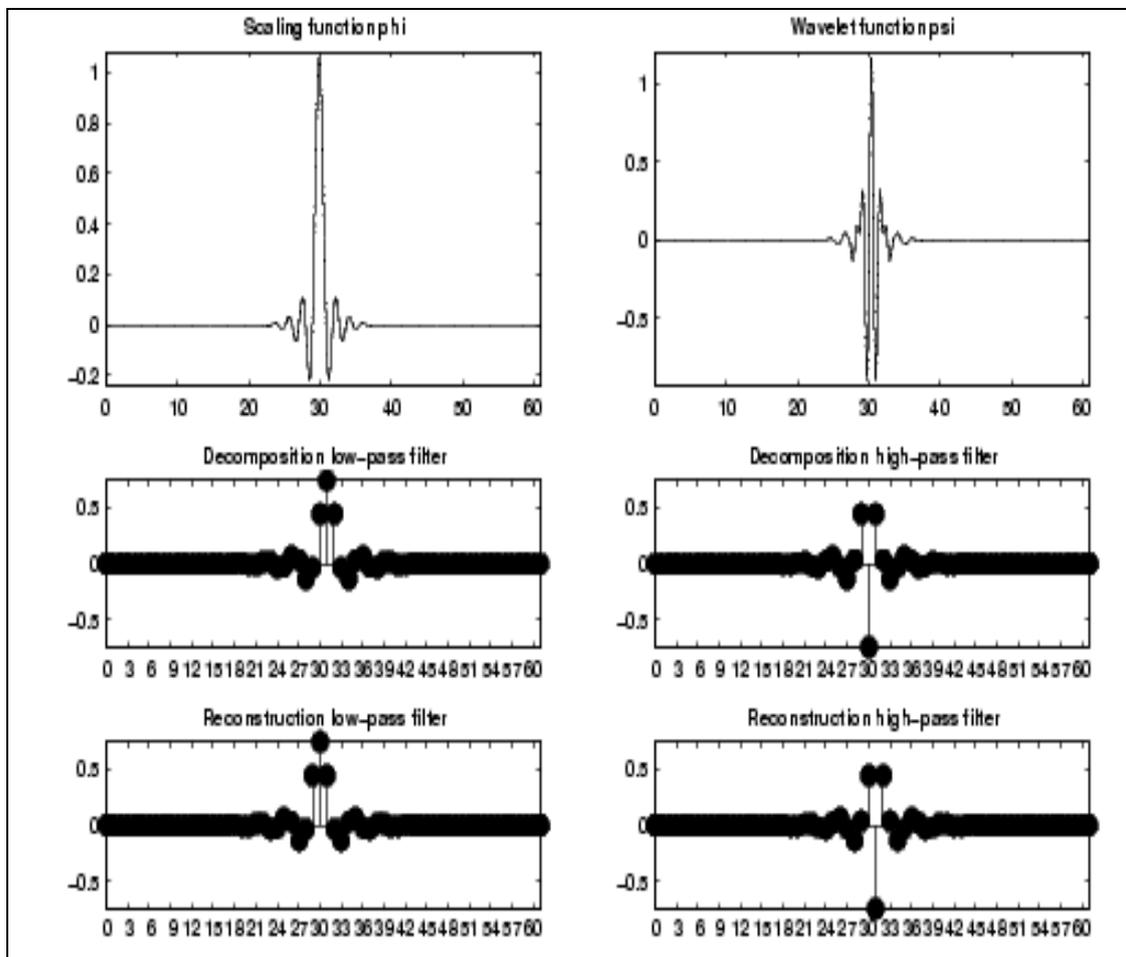


Figure V. Approximation à RIF de l'ondelette de Meyer.

Le chapeau mexicain : mexh

C'est une fonction qui est proportionnelle à la dérivée seconde de la fonction de densité de probabilité gaussienne :

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}\right)(1-x^2)e^{-x^2/2}$$

Elle oscille très peu comme on peut le voir sur son graphe représenté dans la figure VI.

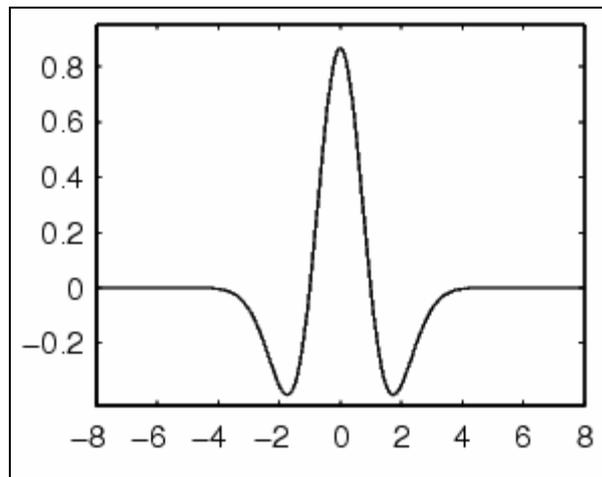


Figure VI. Chapeau mexicain : mexh

L'ondelette de Morlet : morl

Cette fonction ne vérifie qu'approximativement la condition d'admissibilité, elle est pourtant classique et est définie par :

$$\psi(x) = Ce^{-x^2/2} \cos(5x)$$

Où C est une constante de normalisation pour la reconstruction.

Son graphe est représenté dans la figure VII. Elle oscille beaucoup plus que le chapeau mexicain.

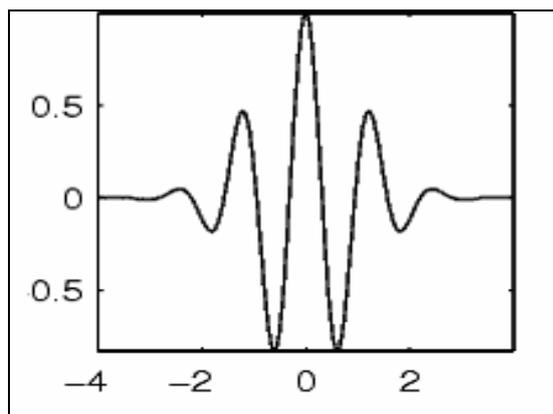


Figure VII. Ondelette de Morlet : morl

Propriétés des familles d'ondelettes

Propriétés	morl	mexh	meyr	haar	dbN	symN	coifN	biorNr.Nd
Seulement admissible	•	•						
Régularité infinie	•	•	•					
Régularité arbitraire					•	•	•	•
Orthogonale à support compact				•	•	•	•	
Biorthogonale à support compact								•
Symétrie	•	•	•	•				•
Asymétrie					•			
Presque symétrie						•	•	
Nombre arbitraire de moments nuls					•	•	•	•
moments nuls pour ϕ							•	
Existence de ψ			•	•	•	•	•	•
Analyse orthogonale			•	•	•	•	•	
Analyse biorthogonale			•	•	•	•	•	•
Reconstruction exacte	≈	•	•	•	•	•	•	•
Filtres à RIF				•	•	•	•	•
Transformation Continue	•	•	•	•	•	•	•	•
Transformation Discrète			•	•	•	•	•	•
Algorithme rapide				•	•	•	•	•
Expression explicite	•	•		•				*

Propriétés	rbioNr.Nd	gaus	dmey	cgau	cmor	fbsp	shan
Seulement admissible		•		•	•	•	•
Régularité infinie		•		•	•	•	•
Régularité arbitraire	•						
Orthogonale à support compact							
Biorthogonale à support compact	•						
Symétrie	•	•	•	•	•	•	•
Asymétrie							
Presque symétrie							
Nombre arbitraire de moments nuls	•						
moments nuls pour ϕ							
Existence de ϕ	•						
Analyse orthogonale							
Analyse biorthogonale	•						
Reconstruction exacte	•	•	≈	•	•	•	•
Filtres à RIF	•		•				
Transformation Continue	•	•					
Transformation Discrète	•		•				
Algorithme rapide	•		•				
Expression explicite	*	•		•	•	•	•
Ondelette complexe				•	•	•	•
Transformation continue complexe				•	•	•	•
Approximation a RIF			•				

≈ Reconstruction presque exacte

* Expression explicite pour les splines

RIF : Réponse impulsionnelle finie

Bancs de filtres et reconstruction parfaite

Nous présentons ici les conditions de parfaite reconstruction des bancs de filtres. Ceci implique que les bancs de filtres soient bi-orthogonaux. Le banc de synthèse g, h et $\uparrow 2$ est l'inverse du banc d'analyse. Les matrices inverses impliquent automatiquement la bi-orthogonalité.

La reconstruction parfaite est une propriété cruciale des bancs de filtres. Si les opérateurs $\downarrow 2$ et $\uparrow 2$ sont absents, une reconstruction sans retard s'exprime $\tilde{g}g + h\tilde{h} = I$. Une reconstruction parfaite avec n retards s'exprime : $\tilde{g}(z)g(z) + \tilde{h}(z)h(z) = z^{-n}$

Lorsque l'on introduit les opérateurs de sous- et sur-échantillonnage, on introduit également de l'*aliasing*. Ainsi, la condition pour obtenir une reconstruction parfaite sans aliasing devient la suivante:

$$\tilde{g}(-z)g(z) + \tilde{h}(-z)h(z) = 0 \text{ Supprime l'aliasing}$$

$$\tilde{g}(z)g(z) + \tilde{h}(z)h(z) = 2z^{-n} \text{ Supprime la distorsion}$$

Ainsi, lorsque l'on veut définir 4 filtres \tilde{g}, g, \tilde{h} et h , ils devront satisfaire les deux conditions ci-dessus. En prenant $g(z) = \tilde{h}(-z)$ et $h(z) = -\tilde{g}(-z)$, on satisfait automatiquement la première condition. Cette relation entre les filtres produit l'alternance des signes entre les filtres comme décrit par la figure

Pour répondre à la seconde contrainte, définissons le produit des filtres passe-bas $G(z) = \tilde{g}(z)g(z)$,

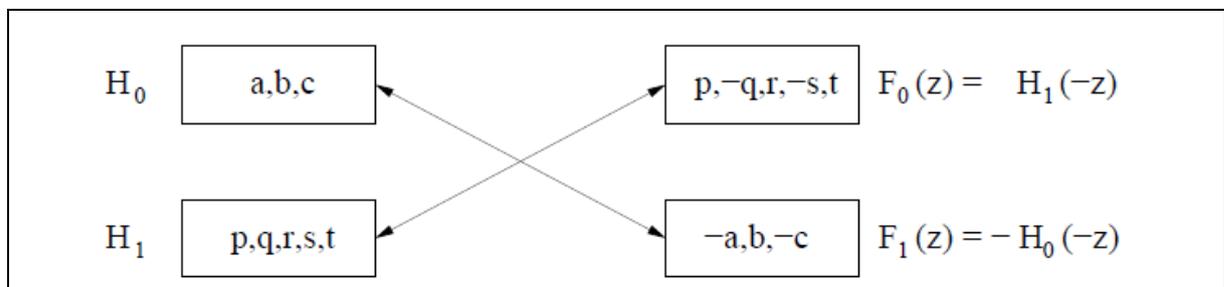


Figure VIII: Filtres d'analyse et de synthèse biorthogonaux.

qui est également un filtre passe-bas. Le produit des filtres passe-haut est également un passe-haut et est décrit par $H(z) = \tilde{h}(z)h(z)$. Les produits $G(z)$ et $H(z)$ sont exactement les termes de la seconde contrainte. Si l'on remplace $g(z)$ par $\tilde{h}(-z)$, et $h(z)$ par $-\tilde{g}(-z)$, on obtient la relation entre $G(z)$ et $H(z)$ suivante : $H(z) = -G(-z)$.

Ainsi, l'équation de reconstruction parfaite se réduit à $G(z) - G(-z) = 2z^{-n}$, et la conception d'un filtre à reconstruction parfaite se réduit à deux étapes :

1. conception d'un filtre passe-bas qui satisfasse $G(z) - G(-z) = 2z^{-n}$;

2. factorisation de $H(z)$ en $\tilde{g}g$. Ensuite, trouver \tilde{h} et h à partir de $g(z) = \tilde{h}(-z)$ et $-\tilde{g}(-z)$,

Si l'on pose $P(z) = z^l G(z)$ alors la reconstruction parfaite est assurée si $P(z)$ est un filtre demi bande : $P(z) + P(-z) = 2$, ce qui signifie que toutes les puissances paires dans $P(z)$ sont nulles, à l'exception du terme constant qui est égal à 1.

