

وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

المسرة الوطنية للتكنولوجيا  
BIBLIOTHÈQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

ETUDE DE LA DISTRIBUTION  
DES VITESSES DANS UN RESSAUT  
HYDRAULIQUE POUR  
DIFFERENTS DEBITS

Proposé par :  
Mr PIMENOV

Etudié par :  
Melle BENKRID  
(Houaria)

Dirigé par :  
Mr PIMENOV  
Melle BENMAMAR

PROMOTION : juin - 87

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسَبْحَانِكَ يَا عَلِيمُ يَا بَارِئُ يَا عَلِيمُ يَا عَلِيمُ يَا عَلِيمُ

يَا بَارِئُ يَا بَارِئُ يَا بَارِئُ يَا بَارِئُ يَا بَارِئُ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dedie ce modeste mémoire à :

- mes très chers parents.
- mes frères et sœurs, en particulier :  
Hakim, Khaled, Safia et Saléha
- mes belle-sœurs et beau-frères
- mes neveux et nièces :  
Ojamel, Samira, Zoubir, Amel, Wassila, Sarah  
Brahim, Meriem, Farout et Bilal.
- Arbia et Karima que j'aime beaucoup  
et enfin à tous mes amis (es)

Hourig

# REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

J'adresse mes remerciements

à M<sup>r</sup> PINENOV, mon promoteur

à Melle BENMAMAR, copromotrice qui a  
contribué par tous ses moyens pour  
la réalisation de ce mémoire

à M<sup>r</sup> ABDERAHIM chef de département

à tous les professeurs qui ont contribué à ma  
formation

à Naima la secrétaire du département.

# SOMMAIRE



## ETUDE THEORIQUE INTRODUCTION

1

### CHAP I

I. Généralité . . . . .

3

I.1 Définition du ressaut . . . . .

3

I.2 Utilisation du ressaut . . . . .

4

I.3 caractéristiques du ressaut . . . . .

4

I.4 Différents types de ressaut . . . . .

6

### CHAP II

II EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT DANS LE RESSAUT HYDRAULIQUE

II.1 Rappel . . . . .

9

II.2 Équation de NAVIER-STOKES . . . . .

10

II.3 Cas du problème bidimensionnel . . . . .

11

II.4 Étude adimensionnelle . . . . .

14

II.5 Résolution du problème par la MDF . . . . .

20

### CHAP III . . . . . RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION

III.1 Résolution analytique . . . . .

23

III.2 Solution numérique . . . . .

46

III.3 conclusion sur les résultats théoriques . . . . .

63

## ETUDE EXPERIMENTALE

I Généralité . . . . .

65

II Manipulation et résultats de mesure . . . . .

70

III Interprétation des graphes . . . . .

86

IV Conclusion générale . . . . .

87

Bibliographie

## INTRODUCTION

Le phénomène du ressaut hydraulique a fait l'objet de nombreuses études depuis qu'il fut introduit, pour la première fois par BIDONE en 1818, puis par BELANGER en 1828.

Il serait trop long de vouloir citer ici tous les auteurs qui se sont intéressés à ce phénomène, on pourra, par exemple référer à [2]

La plupart des ouvrages théoriques et expérimentaux se sont consacrés sur les études des caractéristiques, moyennes du ressaut, mais en pratique, il est important pour l'ingénieur d'étudier les paramètres locaux du ressaut qui influent sur le bon fonctionnement des ouvrages hydrotechniques tels que : les barrages deverseurs, les évacuateurs de crues, les différents régulateurs de débit ect....

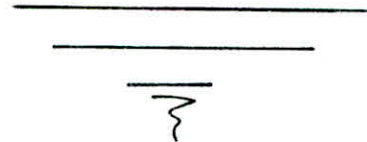
Nous pouvons citer certains paramètres locaux importants vitesse (cinématique) et forces (dynamique) ainsi que les caractéristiques de la turbulence.

Le manque de données sur les paramètres indiqués conduit à une mauvaise élaboration des projets hydrotechniques d'où bien sur une mauvaise construction.

Le manque de connaissance sur la structure du ressaut peut amener l'affaiblissement des talus et des radiers du canal ; d'où risque de destruction complète des ouvrages hydrotechniques.

Par conséquent, l'étude de la structure cinématique et dynamique du ressaut hydraulique est un des problèmes importants dans la théorie d'écoulement en ouvrages hydrotechniques.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique







Partie

Theorique

# CHAPITRE I

## GENERALITE

### I.1 Definition

Le ressaut est un phénomène hydraulique turbulent, il se produit quand l'écoulement passe brusquement du régime torrentiel (supercritique :  $Fr > 1$ ) au régime fluvial (subcritique :  $Fr < 1$ )

Au sein du ressaut une partie de l'énergie cinétique de l'écoulement amont est transformée en énergie potentielle ce qui entraîne une discontinuité dont l'élevation du niveau d'eau.

Cette discontinuité s'accompagne d'un rouleau qui est responsable de très fort niveau de turbulence et de l'entraînement de certaines quantités d'air par la nappe liquide.

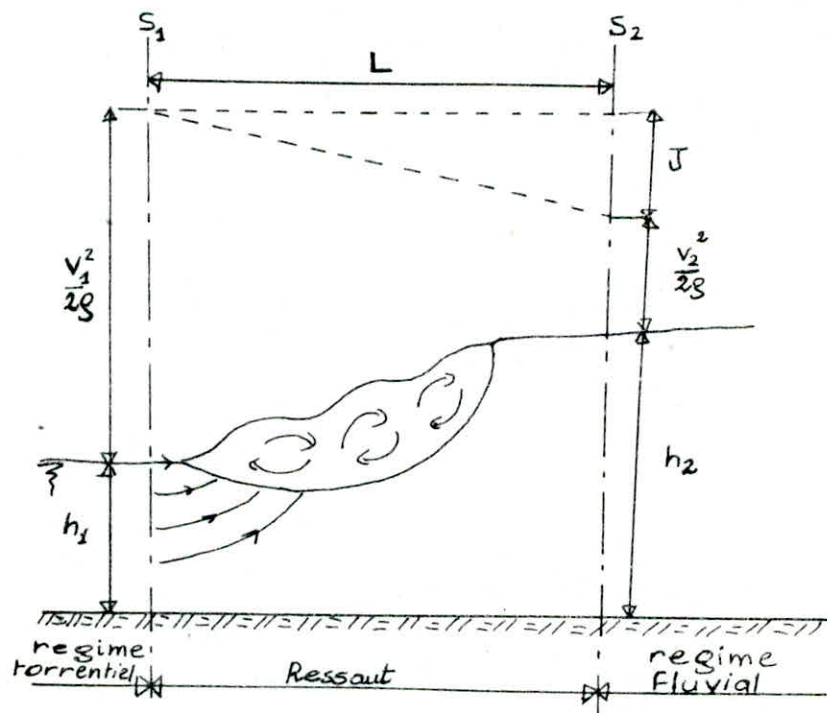
Les vitesses à l'aval du ressaut sont inférieures à celles à l'amont, d'où une diminution de l'énergie cinétique ces propriétés font utiliser le ressaut comme un dissipateur d'énergie.

## I.2 Utilisation

Ce phénomène hydraulique est employé pour :

- dissiper l'énergie dans un écoulement d'eau après les barrages, deversoirs ou autres constructions.
- aérer l'eau pour l'alimentation des villes en eau.
- mélanger les produits chimiques liquides.

## I.3 Caractéristiques du ressaut



(Fig - 1-)

### I.31 Profondeur conjuguée

Les profondeurs conjuguées du ressaut sont :  $h_1$  et  $h_2$  montrées par le schéma ci-dessus.

la détermination de ces profondeurs est donnée par la formule de BELANGER [cf:4 ]

Formule de BELANGER:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8q^2 / gh_1^3} - 1 \right]$$

### I.3.2 Hauteur du ressaut

La hauteur du ressaut est définie comme la différence entre les deux profondeurs conjuguées:

$$H = h_2 - h_1$$

### I.3.3 Longueur du ressaut

La longueur du ressaut est la distance  $L$  (voir fig. 1.) la valeur de cette longueur est estimée entre 4 et 7 fois la hauteur du ressaut.

Il existe des formules empiriques qui expriment la longueur du ressaut:

a. la formule de SMETANA:

$$\frac{L}{h_2 - h_1} = 6$$

b. la formule de SAFRANEZ:

$$L = 4,5 h_2 = 6 h_1 Fr$$

c. la formule de LUDIA :

$$\frac{h_2 - h_1}{L} = \frac{1}{4,5} - \frac{1}{6Fr}$$

d. la formule de WOYCICKI :

$$\frac{L}{h_2 - h_1} = 8 - 0,05 \frac{h_2}{h_1}$$

### I.3.4 Emplacement du ressaut

La position du ressaut étant peu stable, il convient en général de fixer le ressaut par des ouvrages appropriés.

Pour déterminer cette position il est donc nécessaire de connaître les lignes d'eau à l'amont et à l'aval le ressaut se placera de telle façon que les sections limitées aient des profondeurs conjuguées c'est-à-dire elles vérifient les relations classiques des profondeurs conjuguées.

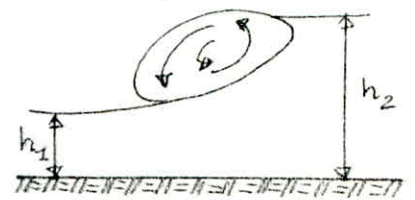
### I.4 Les différents types de ressaut

#### 1. ressaut parfait :

Soit  $H = h_2 - h_1$

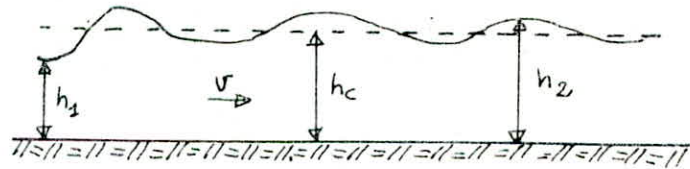
pour que le ressaut soit parfait

il faut que  $H > h_1$



(fig-2-)

## 2. ressaut ondulé :

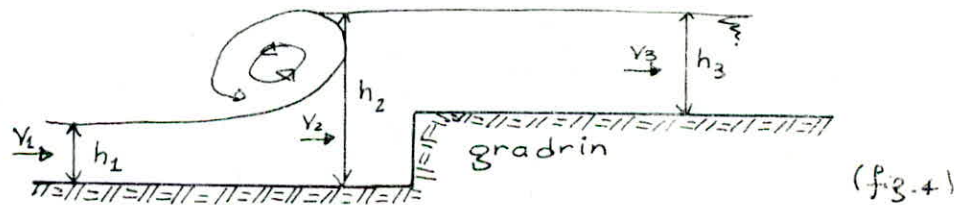


c'est une forme dégénérée du ressaut (fig - 3.)

que l'on observe fréquemment sur les cours d'eau et qui se produit lorsque les profondeurs conjuguées sont voisines de la profondeur critique.

les ondulations de la surface s'amortissent progressivement à l'aval, elles résultent de l'instabilité du régime critique.

## 3. ressaut à remous :



se produit à la présence d'un obstacle (gradin)

on a :

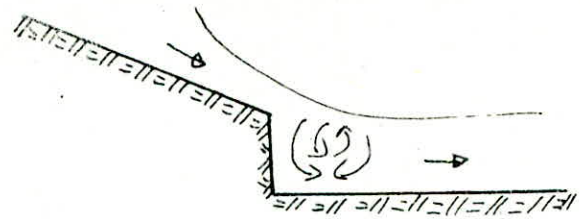
$$\left( \frac{h_3}{h_2} \right)^2 = 2 F_r^2 \left( 1 - \frac{1}{h_3/h_2} \right) + \frac{h}{h_2} \left( \frac{h}{h_1} - \sqrt{1 + 8 F_r^2 + 1} \right)$$

[cf - 4 - ]

## 4. ressaut non noyé :

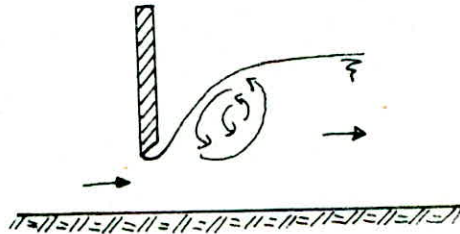
Ce type de ressaut est observé lorsque la nappe

s'écoule d'un barrage, d'un gradim special.



(fig - 5 -)

5. ressaut noyé :



(fig - 6 -)

l'eau tourbillonnante qui recouvre le ressaut produit à l'aval d'une vanne, vient en contact avec cette vanne provoquant ainsi le ressaut noyé.



## CHAPITRE II

### EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT DANS LE RESSAUT HYDRAULIQUE

#### II.1 Rappel

##### valeur moyenne

Dans un mouvement turbulent composé de tourbillons transportés par un mouvement d'ensemble, on peut représenter le mouvement désordonné en un point fixe de l'espace par la somme de deux mouvements, le premier représente le mouvement d'ensemble et le second le mouvement fluctuant.

le premier mouvement est définie comme un mouvement fictif que BAZIN (1887) appelait mouvement moyen.

les composantes de la vitesse ( $u, v, w$ ) et pression en un point seront remplacées par leurs équivalents, c'est-à-dire :

$$u = \bar{u} + u' \quad ; \quad v = \bar{v} + v' \quad ; \quad w = \bar{w} + w'$$
$$P = \bar{P} + P'$$

$\bar{u}$  : composante de la vitesse moyenne.

$\bar{P}$  : pression moyenne.

$u', P'$  : les fluctuations.



on a :

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int u dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$$

où  $T$  est un intervalle de temps suffisamment grand  
ce qui nous montre que le mouvement moyen est  
un mouvement permanent.

## II.2 Equation de Navier - Stokes

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U \\ \frac{dV}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V \\ \frac{dW}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta W \end{cases}$$

le système (I) peut s'écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = X_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

pour obtenir l'équation du mouvement moyen du fluide  
on remplacera chaque élément de l'équation (1) par  
sa valeur équivalente, c'est-à-dire valeur moyenne  
et valeur fluctuante.

on aura donc :

$$P = \bar{P} + P' ; \quad \begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u_i')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u_j')(u_j + u_j')}{\partial x_j} = X_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_j} + \frac{\partial^2(\bar{u}_j + u_j')}{\partial x_j \partial x_j}$$

En fin on aboutira à : [cf. 6]

$$\bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = X_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i' u_j'}{\partial x_j}$$

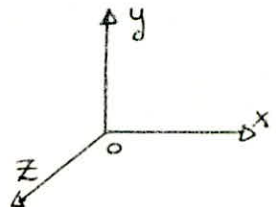
ou encore :

$$(II) \begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \left( \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}' u'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial z} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} - \left( \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}' w'}{\partial z} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} - \left( \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}' w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right) \end{cases}$$

le système ci-dessus (II) est appelé système d'équation de REYNOLDS.

### II. 3 Cas du problème bidimensionnel

L'écoulement bidimensionnel s'effectuera dans le plan  $oxy$ , donc on élimine les composantes suivant  $oz$ , d'où  $w=0$



Le problème qui se pose, est de résoudre les équations données dans le système (II)

On fera donc quelques hypothèses :

1°/ Les forces extérieures qui interviennent se sont les forces massiques, leurs composantes suivant  $ox$  et  $Oz$  sont nulles (l'écoulement se fait dans un canal horizontal)

on a :  $\gamma = -g$

2°/ l'écoulement est supposé stationnaire.

Le système (II) devient donc :

$$(III) \begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \left[ \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \right] \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} - \left[ \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'u'}{\partial x} \right] \end{cases}$$

Ajoutons l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

Nous avons donc 3 équations à 6 inconnues ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, u', v', \bar{u}'v'$ )

ce qui est impossible à résoudre ;

Pour cela il faudra faire des suppositions supplémentaires.

Supposons alors que :

1)  $\bar{v} \ll \bar{u}$

$$2^{\circ} \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} \ll \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} = 0 \\ (\bar{u}'^2 \text{ et } \bar{u}'v' \text{ sont de m\^eme ordre} \\ \text{de grandeur.}) \\ \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} \gg \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$3^{\circ} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \neq 0$$

on aura donc :

$$\begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{u}'v') \dots (1) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} - \frac{1}{\rho} (\rho \bar{v}'^2) \dots (2) \end{cases}$$

remarque : l'equation (2) nous permet de determiner la pression

d'où le système (IV)

$$(IV) \begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{v}'\bar{u}') \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le terme  $-\rho \bar{u}'v' = \tau$

$\tau$  : étant tension de REYNOLDS cf [1]

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{u}'v') = -\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\text{Aussi } \tau = \varepsilon_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

où  $\varepsilon_T$  : est le coefficient de turbulence cf [1]

Nous avons donc :

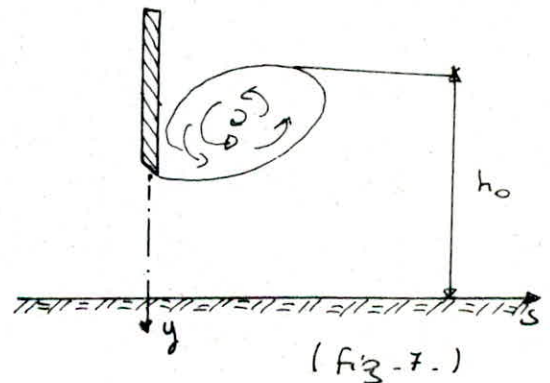
$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho \Delta \bar{u} + \epsilon_T \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

\* Par commodité d'écriture enlevons les barres au-dessus de  $u$  et de  $v$ , tout en sachant qu'on travaille toujours avec les valeurs moyennes.

## II.4 Etude adimensionnelle

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{u}{u_0} \dots (1) \\ v_1 = \frac{v}{u_0} \dots (2) \\ P_1 = \frac{p}{p_0} = \frac{p}{\rho u_0^2} \dots (3) \\ t = \frac{x}{h_0} \dots (4) \\ z = \frac{y}{h_0} \dots (5) \end{array} \right.$$



où :  $u_1, v_1, P_1, t, z$  : sont des variables adimensionnelles.

$u_0, h_0, p_0$  : sont respectivement ; vitesse moyenne, Profondeur du courant et Pression dynamique dans la section où la distribution des vitesses est régulière.

Remplaçons  $u, v, p, x, y$  par leurs nouvelles valeurs dans le système (V).

Nous aurons donc :

$$(VI) \begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = - \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\epsilon_T}{h_0 u_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

designons par  $\frac{\epsilon_T}{h_0 u_0} = \frac{1}{R_T} \Rightarrow R_T = \frac{h_0 u_0}{\epsilon_T}$

$R_T$  : est le nombre de REYNOLDS turbulent, c'est une constante qu'on peut déterminer soit expérimentalement ou par la théorie de PRANDTL cf [1]

$$(VII) \begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = - \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{1}{R_T} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

le système ci-dessus (VII) n'est pas fermé ; on a 2 équations à 3 inconnues ( $u, v, R_T$ )

Pour le résoudre il faudra le simplifier encore,

Pour cela :

Introduisons la variable "S" dans le système telle

que :

$$S = \int_0^t \frac{dt}{R_T} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{R_T}$$

l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial u_1}{\partial t} \Rightarrow u_1 = \int_0^z \frac{\partial u_1}{\partial t} dz$$

$$\Rightarrow u_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^z u_1 dz$$

or  $t$  est une fonction de  $s$  ( $t = f(s)$ )

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{1}{R_T}$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_T} \cdot u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^z u_1 dz \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{R_T} \frac{\partial P_1}{\partial s} + \frac{1}{R_T} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ \frac{1}{R_T} \frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \int_0^z u_1 dz \right] = 0 \end{cases}$$

Supposons que :

$$\hat{v}_1 = -\frac{\partial}{\partial s} \int_0^z u_1 dz$$

après simplifications le système précédent s'écrit

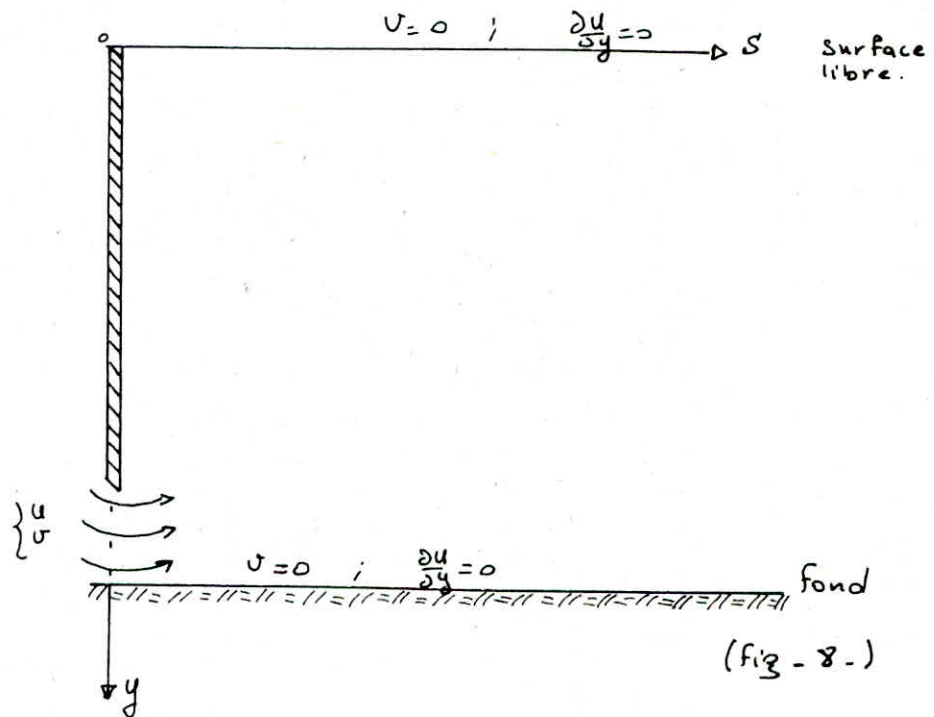
$$(VIII) \begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \hat{v}_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial P_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Posons  $y = z$

$$d'où \quad IX \begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \hat{v}_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial P_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \dots (a) \\ \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y} = 0 \dots (b) \end{cases}$$

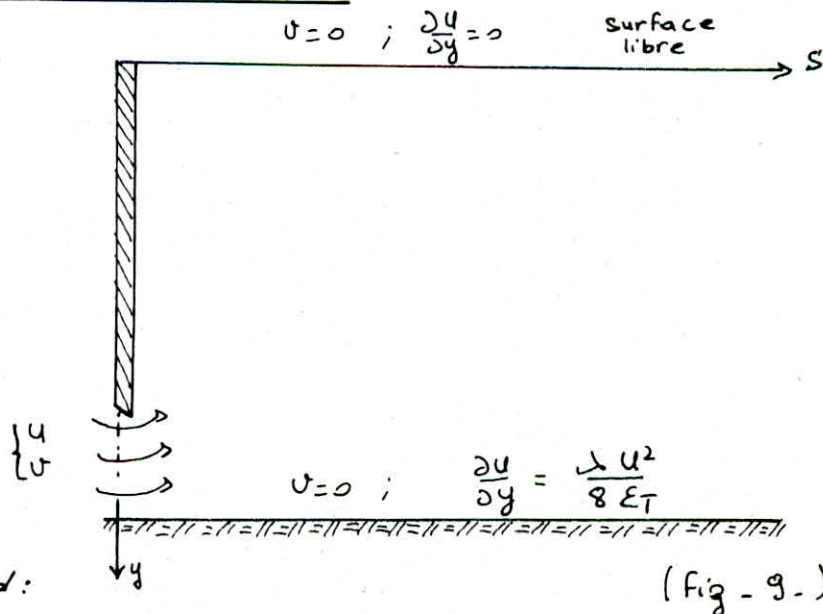
Pour résoudre ce problème, il est nécessaire d'introduire les conditions aux limites.

1. cas sans frottement : (sur la surface libre, et sur le fond)



$$\tau = \epsilon_T \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_T \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

2. cas avec frottement : (sur le fond)



sur le fond :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\lambda u^2}{8 \epsilon_T}; \quad \tau = \epsilon_T \frac{\partial u}{\partial y} = \epsilon_T \frac{\lambda u^2}{8 \epsilon_T} = \frac{\lambda u^2}{8}$$



On aboutira donc aux conditions aux limites :

$$\begin{array}{l} \text{1<sup>er</sup> cas} \\ \text{Sans frottement} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{à } s=0 \quad ; \quad u, v \text{ données.} \\ \text{à } y=0 \quad ; \quad v=0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}=0 \\ \text{à } y=1 \quad ; \quad v=0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{2<sup>ème</sup> cas} \\ \text{avec frottement} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{à } y=0 \quad ; \quad v=0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}=0 \\ \text{à } y=1 \quad ; \quad v=0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\lambda}{8\epsilon_T} u^2 \end{array} \right.$$

les équations du système  $\text{IX}$  sont non linéaires  
pour faciliter la résolution ; linéairisons les équations,  
prenons donc quelques suppositions :

1<sup>ère</sup> supposition :

La composante verticale de la vitesse est très petite devant  
la composante horizontale

c'est-à-dire  $v \ll u$

d'où on néglige le terme  $v \frac{\partial u}{\partial y}$

2<sup>ème</sup> supposition :

La variation de la pression le long de l'axe  $os$  est  
constante :

$$\frac{\partial P}{\partial s} = B = \text{cte}$$

### 3<sup>ème</sup> supposition :

Pour différentes sections du courant, l'équation de continuité peut s'écrire comme suit :

$$Q = U_0 \cdot h_0 \cdot L = \int_0^{h_0} U \cdot L \cdot dy \quad \text{avec } h_0 L = \text{surface.}$$

d'où

$$\int_0^{h_0} \frac{U}{U_0} \cdot \frac{dy}{h_0} = 1$$

or :

$$\int_0^{h_0} U dy = U_0 h_0 \int_0^{h_0} U_1 dz$$

$$\Rightarrow \int_0^{h_0} \frac{U}{U_0} \cdot \frac{dy}{h_0} = \int_0^{h_0} U_1 dz$$

$$\text{ou } \int_0^{h_0} \frac{U}{U_0} \frac{dy}{h_0} = 1 \Rightarrow \int_0^{h_0} U_1 dz = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 U_1 dy = 1$$

$U_1$  } sont adim-  
y } -ensionels.

donc le système  $\text{IX}$  deviendra

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B \dots (a) \\ \int_0^1 U_1 dy = 1 \dots (b) \end{cases}$$

avec  $U_1 = \frac{U}{U_0}$

La solution de (a) a un sens physique si

le coefficient de  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  est positif

Soit donc

$$\hat{U} = \begin{cases} U & \text{si } U > 1 \\ 1 & \text{si } U \leq 1 \end{cases}$$

d'où on mettra le système  $\text{IX}$  sous la forme suivante :

$$(IX') \begin{cases} \hat{u} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - B \\ \int_0^1 u_1 dy = 1 \end{cases}$$

## II.5 Resolution du problème par la méthode des différences finies

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\Delta u_n}{\Delta s} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta s}$$

alors l'équation [VIII, (a)] s'écrira :

$$\hat{u} \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta s} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - B$$

avec  $n$  le nombre de couches

(voir fig. 10.)

Posons :

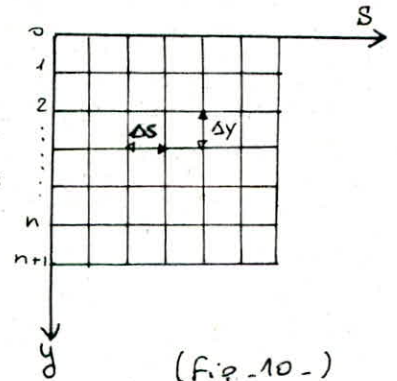
$$\begin{cases} u_n = e \\ u = u_{n+1} \\ k = \frac{1}{\Delta s} \end{cases}$$

d'où on aura :

$$\hat{u} (u - e) k = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \hat{u} k u = -e \hat{u} k + B \dots (a')$$

la solution de cette équation peut être représentée comme la somme de deux solutions des équations suivantes :



(fig. 10.)

$$\begin{cases} u_1'' - \hat{u} k u_1 = -\hat{u} \cdot k \cdot e \dots (a'_1) \\ u_2'' - \hat{u} k u_2 = B \dots (a'_2) \end{cases}$$

c'est-à-dire si  $u_1$  est solution de  $(a'_1)$  et  $u_2$  est solution de  $(a'_2)$  alors  $u = u_1 + u_2$  est solution de  $(a')$

Si on considère l'équation  $(a'_2)$

$$u_2 = Bz \quad B = \text{constante} \neq 0$$

$$\Rightarrow u_2'' = Bz''$$

d'où l'équation  $(a'_2)$  devient:

$$Bz'' - \hat{u} k z B = B$$

$$\Rightarrow z'' - \hat{u} k z = 1 \dots (a'_3)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = u_1 + u_2 \\ u_2 = Bz \end{array} \right\} \Rightarrow u = u_1 + Bz \dots (I)$$

Si on intègre  $u$  par rapport à  $y$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  on aura:

$$\int_0^1 u dy = \int_0^1 u_1 dy + \int_0^1 Bz dy$$

$$\text{or } \int_0^1 u dy = 1 \quad (\text{voir la 3ème supposition de (II.4)})$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_1 dy + B \int_0^1 z dy = 1$$

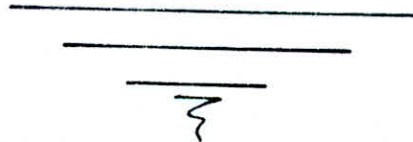
$$\Rightarrow B = \frac{1 - \int_0^1 u_1 dy}{\int_0^1 z dy} \dots (II)$$

d'où on aboutit à un nouveau système de 4 équations.

$$\mathcal{S} \begin{cases} u_1'' - \hat{u} k u_1 = -k \hat{u} e \\ z'' - k \hat{u} z = 1 \\ u = u_1 + Bz \\ B = \frac{1 - \int_0^1 u_1 dy}{\int_0^1 z dy} \end{cases}$$

Pour la résolution de ce système ( $\mathcal{S}$ ) on se propose deux solutions :

1. la solution analytique pour  $S=0$  c'est-à-dire au voisinage de la vanne.
2. la solution numérique à l'aide de la méthode des différences finies.

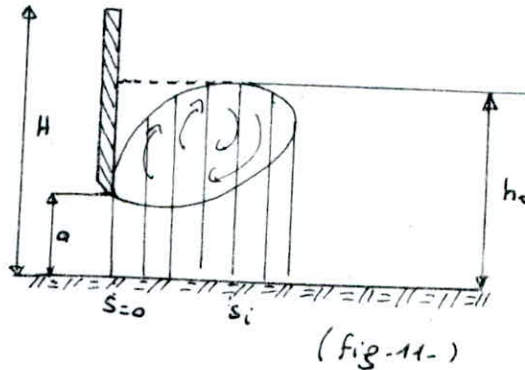


# CHAPITRE III

## RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

### III.1 Resolution analytique

Le rouleau constitue la région la plus importante du ressaut hydraulique où la plus grande partie d'énergie est créée et dissipée ; il est donc nécessaire d'étudier la distribution des vitesses dans cette région.



On a donc recours à faire plusieurs sections (voir fig-11-) afin de trouver la distribution exacte des vitesses.

En premier lieu, on se situe au voisinage de la vanne ( $\bar{s}=0$ )

Pour cela soit le système  $\text{XI}$  à résoudre analytiquement :

$$\text{(XI)} \begin{cases} U'' - \hat{U} K U = -K \hat{U} C + B \dots (A) \\ Z'' - \hat{U} K Z = 1 \dots (B) \end{cases}$$

## a résolution de l'équation (A)

Au cours des études précédentes cf [4, 12], on a pu observer la distribution des vitesses pour une ouverture de la vanne  $a = \frac{1}{7} h_0$ , avec  $h_0$  : hauteur à l'aval du ressaut dans la région où la distribution des vitesses est régulière.

Alors que dans l'étude présente, l'ouverture de la vanne sera à :

$$a = \frac{1}{2} h_0; \frac{1}{3} h_0; \frac{1}{4} h_0; \frac{1}{5} h_0; \frac{1}{6} h_0; \frac{1}{8} h_0; \frac{1}{9} h_0; \frac{1}{10} h_0; \frac{1}{15} h_0$$

on développera les calculs pour  $a = \frac{1}{9} h_0$  ;  $\frac{1}{4} h_0$  et pour les autres cas, on donnera les résultats sous forme de tableau.

### 1. résolution pour: $U/U_0 = 9$

dans l'addimensionnel on a :

$$a_0 = \frac{a}{h_0} = \frac{1}{9} \frac{h_0}{h_0}$$

de l'équation de continuité on a :

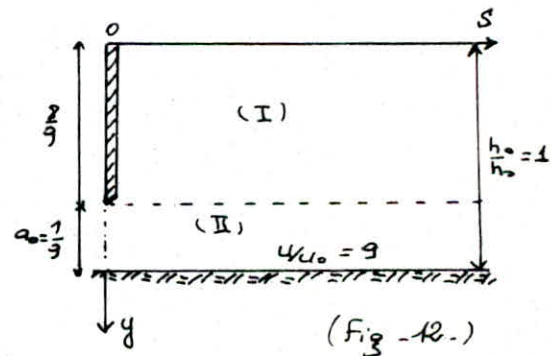
$$Q = U \cdot a = U_0 h_0$$

$$\Rightarrow U = \frac{U_0 h_0}{a}$$

$$U = \frac{U_0 h_0}{\frac{1}{9} h_0} = 9 U_0$$

$$\Rightarrow U/U_0 = 9$$

$U_0$  : est dans la section où la distribution des vitesses est régulière.



divisons notre domaine en deux parties telles que:

domaine I

$$0 \leq y \leq \frac{8}{9} \Rightarrow \begin{cases} \hat{u} = 1 \\ \mathcal{C} = 0 \end{cases}$$

domaine II

$$\frac{8}{9} \leq y \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \hat{u} = 9 \\ \mathcal{C} = 9 \end{cases}$$

d'où l'équation (A)

pour  $0 \leq y \leq \frac{8}{9}$

$$\Rightarrow u'' - 1 \cdot k \cdot u = -k \cdot 1 \cdot 0 + B$$

$$\Rightarrow u'' - ku = B \dots \dots (A_1)$$

pour  $\frac{8}{9} \leq y \leq 1$

$$\Rightarrow u'' - 9 \cdot k \cdot u = 9 \cdot k \cdot 9 + B$$

$$\Rightarrow u'' - 9ku = 81k + B \dots \dots (A_2)$$

a. solution de (A<sub>1</sub>) :

La solution de cette équation est la somme des solutions de l'équation déterminée (U<sub>1</sub>) et de l'équation indéterminée (U<sub>2</sub>)

$$\text{d'où } U_I = U_1 + U_2$$

i) résolution de l'équation déterminée :

$u'' - ku = 0 \rightarrow$  équation homogène du 2<sup>ème</sup> ordre, elle a pour solution U<sub>1</sub>



$$u_1 = c_1 e^{\lambda y} + c_2 e^{-\lambda y}$$

$\lambda$ : constante à déterminer.

$$u = e^{\lambda y} \Rightarrow u'' = \lambda^2 e^{\lambda y}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda y} - k e^{\lambda y} = e^{\lambda y} (\lambda^2 - k) = 0$$

$$e^{\lambda y} \neq 0 \quad \forall y \Rightarrow \lambda^2 = k \Rightarrow \lambda = \sqrt{k}$$

d'où :

$$u_1 = c_1 e^{\sqrt{k} y} + c_2 e^{-\sqrt{k} y}$$

ii) résolution de l'équation indéterminée :

$$u'' - k u = B$$

la solution est une constante.

$$u_2 = C \quad u_2'' = 0$$

$$\Rightarrow 0 - k.C = B \Rightarrow C = -\frac{B}{k}$$

d'où la solution de l'équation (A<sub>1</sub>)

$$\boxed{u_I = c_1 e^{y\sqrt{k}} + c_2 e^{-y\sqrt{k}} - \frac{B}{k}} \quad \dots (A'_1)$$

$0 \leq y \leq \frac{8}{3}$

b. solution de (A<sub>2</sub>)

$$\frac{8}{3} \leq y \leq 1$$

$$u'' - 9ku = -81k + B$$

de même, cette équation a pour solution  $u_{II} = u_1 + u_2$

avec  $u_1$ : solution de l'équation déterminée

$u_2$ : solution de l'équation indéterminée.

$$i) u'' - gku = 0$$

$$u_1 = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y} \quad \lambda = \text{constante}$$

$$u = e^{\lambda y} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda y} - gk e^{\lambda y} = 0$$

$$u'' = \lambda^2 e^{\lambda y} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda^2 - gk = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{gk}$$

$$u_1 = C_3 e^{\sqrt{gk} y} + C_4 e^{-\sqrt{gk} y}$$

$$ii) u'' - gku = -81K + B$$

$$u_2 = \text{constante} = C$$

$$u'' = 0 \Rightarrow gkc = -81K + B$$

$$c = \frac{-81K + B}{-gk} = g - \frac{B}{gk}$$

d'où :

$$u_{II} = C_3 e^{\sqrt{gk} y} + C_4 e^{-\sqrt{gk} y} + g - \frac{B}{gk} \quad \dots (A_2)$$

$\frac{8}{9} \leq y \leq 1$

Determination des constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4, B$

Pour cela, utilisons les conditions aux limites et les conditions initiales:

$$1^o) y = 0 \rightarrow \frac{du_I}{dy} = 0 \quad (\text{Pas de frottements sur la surface libre})$$

l'équation  $A_1$  devient après dérivation:

$$\frac{du_I}{dy} = C_1 \sqrt{k} e^{y\sqrt{k}} - C_2 \sqrt{k} e^{-y\sqrt{k}}$$

$$y=0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = C_2} \dots (*_1)$$

2°/  $y=1 \rightarrow \frac{dU_{II}}{dy} = 0$  ( absence de frottement sur le fond du canal )

$$\frac{dU_{II}}{dy} = C_3 \sqrt{gk} e^{y\sqrt{gk}} - C_4 \sqrt{gk} e^{-y\sqrt{gk}}$$

$$y=1 \Rightarrow C_3 \sqrt{gk} e^{\sqrt{gk}} - C_4 \sqrt{gk} e^{-\sqrt{gk}} = 0$$

$$\Rightarrow C_3 e^{\sqrt{gk}} - C_4 e^{-\sqrt{gk}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_3 = C_4 e^{-2\sqrt{gk}}} \dots\dots (*_2)$$

3°/  $y = \frac{8}{9} \Rightarrow U_I = U_{II}$

les equations  $A'_1$  et  $A'_2$  sont egales

$$y = \frac{8}{9} \Rightarrow C_1 e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} + C_2 e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} - \frac{B}{k} = C_3 e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} + C_4 e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} + 9 - \frac{B}{9k}$$

or  $C_1 = C_2$  et  $C_3 = C_4 e^{-2\sqrt{gk}}$

$$C_1 e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} + C_1 e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} - \frac{B}{k} = C_4 e^{-2\sqrt{gk}} e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} + C_4 e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} + 9 - \frac{B}{9k}$$

$$2C_1 \left( \frac{e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}}}{2} \right) = C_4 \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{gk}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} \right) + \frac{8}{9} \frac{B}{k} + 9$$

$$\boxed{2C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{8}{9}\sqrt{gk}\right) = C_4 \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{gk}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} \right) + \frac{8}{9} \frac{B}{k} + 9} \dots\dots (*_3)$$

4°/  $y = \frac{8}{9} \rightarrow \frac{dU_I}{dy} = \frac{dU_{II}}{dy}$

$$\Rightarrow C_1 \sqrt{k} e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} - C_2 \sqrt{k} e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} = C_3 \sqrt{gk} e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} - C_4 \sqrt{gk} e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}}$$

$$2C_1 \sqrt{k} \left( \frac{e^{\frac{8}{9}\sqrt{gk}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}}}{2} \right) = C_4 \sqrt{gk} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{gk}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{gk}} \right)$$

$$2c_1 \sqrt{k} \operatorname{sh} \left( \frac{8}{9} \sqrt{k} \right) = C_4 \sqrt{9k} \left( e^{-\frac{10}{9} \sqrt{9k}} - e^{-\frac{8}{9} \sqrt{9k}} \right) \quad (*4)$$

$$5^\circ \int_0^1 u \, dy = 1 = I = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{8}{9}} u_I \, dy + \int_{\frac{8}{9}}^1 u_{II} \, dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{8}{9}} \left[ 2c_1 \operatorname{ch}(y\sqrt{k}) - \frac{B}{k} \right] dy + \int_{\frac{8}{9}}^1 \left[ C_4 (e^{-2y\sqrt{9k}} e^{y\sqrt{9k}} + e^{-y\sqrt{9k}} - \frac{B}{9k} + 9) \right] dy = 1$$

$$I_1 \Rightarrow 2c_1 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}(y\sqrt{k}) - \frac{B}{k} y \Big|_0^{\frac{8}{9}} = 2c_1 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} \left( \frac{8}{9} \sqrt{k} \right) - \frac{8}{9} \frac{B}{k}$$

$$I_2 \Rightarrow C_4 \left[ e^{-2y\sqrt{9k}} \frac{1}{\sqrt{9k}} e^{y\sqrt{9k}} - \frac{1}{\sqrt{9k}} e^{-y\sqrt{9k}} \right] - \frac{B}{9k} y + 9y \Big|_{\frac{8}{9}}^1$$

$$\Rightarrow C_4 \frac{1}{\sqrt{9k}} \left[ e^{-\frac{8}{9} \sqrt{9k}} - e^{-\frac{10}{9} \sqrt{9k}} \right] + \frac{8}{9} \left( -\frac{B}{9k} + 9 \right)$$

finalement, on aboutit à :  $I = I_1 + I_2$

$$2c_1 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} \left( \frac{8}{9} \sqrt{k} \right) + C_4 \frac{1}{\sqrt{9k}} \left( e^{-\frac{8}{9} \sqrt{9k}} - e^{-\frac{10}{9} \sqrt{9k}} \right) - \frac{73}{81} \frac{B}{k} = 0$$

(\*5)

En fin nous obtiendrons un système d'équation trois-trois (3-3) les inconnues sont  $C_1, C_4, B$  avec  $C_1 = C_2, C_3 = C_4 e^{-2\sqrt{9k}}$

$$\begin{cases}
 (1) \left\{ 2c_1 \operatorname{ch}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) = c_4 \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) + \frac{8}{9}\frac{B}{k} + 9 \right. \\
 (2) \left\{ 2c_1 \sqrt{k} \operatorname{sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) = c_4 \sqrt{9k} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) \right. \\
 (3) \left\{ 2c_1 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) + c_4 \frac{1}{\sqrt{9k}} \left( e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} \right) - \frac{73}{81}\frac{B}{k} = 0 \right.
 \end{cases}$$

multiplions (1) par  $\frac{73}{9}$  et (3) par 8 et faisons la différence entre (1) et (3)

nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
 2c_1 \left[ \left( \frac{73}{9} \operatorname{ch}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) - \frac{8}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) \right) - c_4 \left[ \frac{73}{9} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) + \frac{8}{\sqrt{9k}} \left( e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} + e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} \right) \right] \right] = 73 \dots (3')
 \end{aligned}$$

de l'équation (2) on tire  $c_1$

$$c_1 = \frac{c_4 \sqrt{9k} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right)}{2\sqrt{k} \operatorname{sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right)} \dots (2')$$

remplaçons  $c_1$  par sa valeur (2') dans (3')

on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 c_4 = \frac{73}{\sqrt{9} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) \left( \frac{73}{9} \operatorname{coth}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) - \frac{8}{\sqrt{k}} \right) - \frac{73}{9} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) + \frac{8}{\sqrt{9k}} \left( e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} \right)}
 \end{aligned}$$

posons  $\Delta S = 0,01 \Rightarrow k = \frac{1}{\Delta S} = 100$

$$C_4 = \frac{73}{3(e^{-\frac{100}{3}} - e^{-\frac{80}{3}}) \left( \frac{73}{9} \operatorname{ch}\left(\frac{80}{9}\right) - \frac{8}{10} \right) - \frac{73}{9} (e^{-\frac{100}{3}} + e^{-\frac{80}{3}}) + \frac{8}{30} (e^{-\frac{100}{3}} - e^{-\frac{80}{3}})}$$

$$C_4 = -9,3529 \cdot 10^{11}$$

de l'équation (\*)

$$C_3 = C_4 e^{-2\sqrt{9k}} = C_4 e^{-2\sqrt{900}} = -8,1898 \cdot 10^{-15}$$

$$C_3 \approx 0$$

de l'équation (2) on a :

$$C_1 = C_2 = \frac{3C_4 (e^{-\frac{10}{9}\sqrt{900}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{900}})}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{80}{9}\right)}$$

$$C_1 = C_2 = 1,009 \cdot 10^{-3}$$

de l'équation (1) on a :

$$\frac{8B}{900} = 2C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{80}{9}\right) - C_4 (e^{-\frac{10}{9}\sqrt{900}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{900}}) - 9$$

$$B = \frac{900}{8} [2C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{80}{9}\right)] - C_4 (e^{-\frac{100}{3}} + e^{-\frac{80}{3}}) - 9$$

$$B = 86,916$$

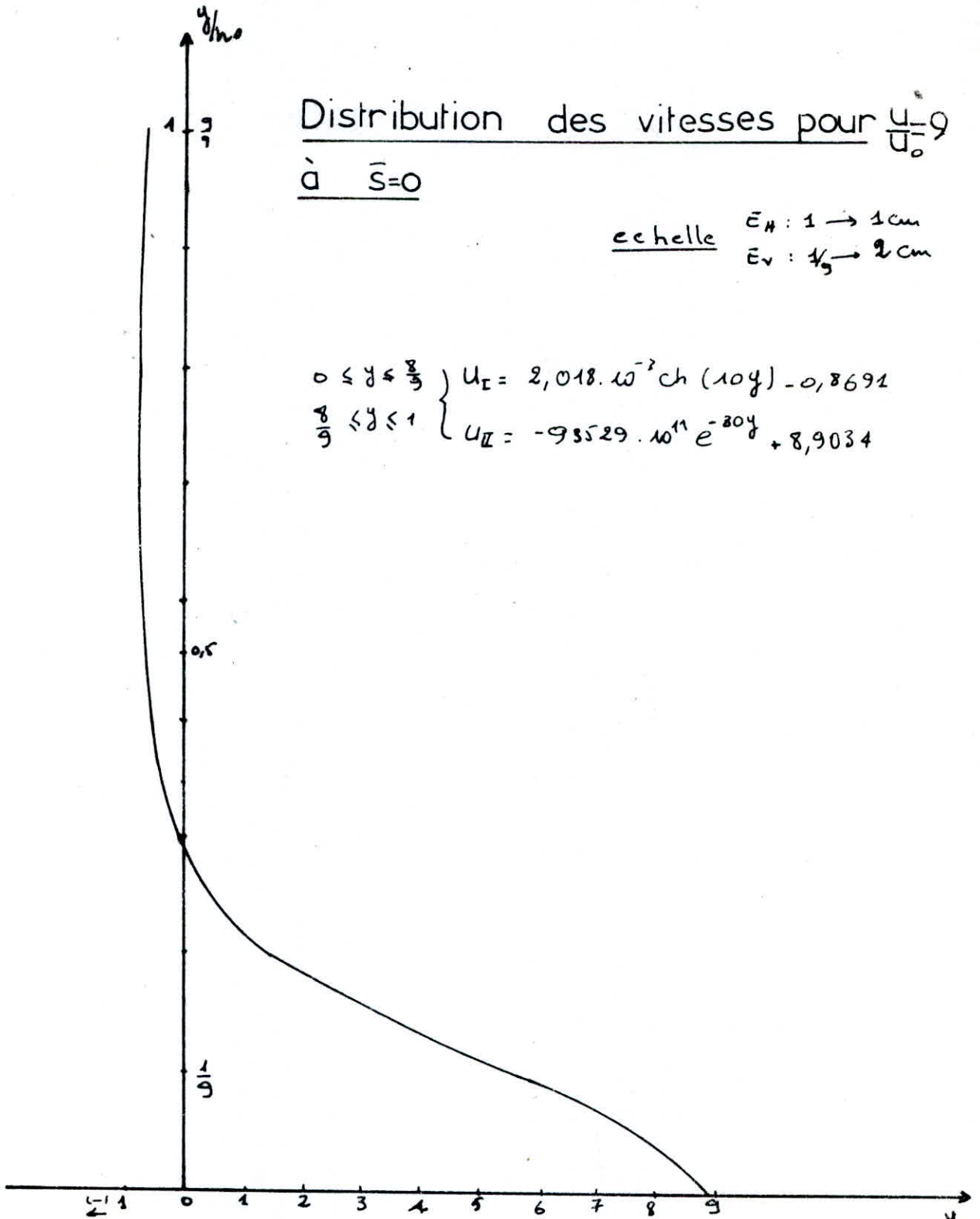
d'où les équations de l'écoulement :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{8}{9} & U_I = 1,009 \cdot 10^{-3} (e^{10y} + e^{-10y}) - 0,8691 \\ \frac{8}{9} \leq y \leq 1 & U_{II} = -9,3529 \cdot 10^{11} e^{-30y} + 8,9034 \end{cases}$$

Distribution des vitesses pour  $\frac{u}{u_0} = 9$   
à  $\bar{s} = 0$

echelle  $E_H : 1 \rightarrow 1 \text{ cm}$   
 $E_V : \frac{1}{9} \rightarrow 2 \text{ cm}$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{8}{9} & U_I = 2,018 \cdot 10^{-2} \text{ch}(10y) - 0,8692 \\ \frac{8}{9} \leq y \leq 1 & U_{II} = -93529 \cdot 10^{11} e^{-20y} + 8,9034 \end{cases}$$



(fig 13-)

## b. resolution de l'equation (B)

$$Z'' - \hat{U} K Z = 1$$

on a les mêmes conditions que  $U_I$  et  $U_{II}$

1. pour  $U/U_0 = 9$

$$0 \leq y \leq \frac{8}{9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{U} = 1 \\ \mathcal{E} = 0 \end{array} \right. : \text{domaine I}$$

$$\frac{8}{9} \leq y \leq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{U} = 9 \\ \mathcal{E} = 9 \end{array} \right. : \text{domaine II}$$

domaine I:

$$Z'' - K Z = 1$$

$$\Rightarrow Z_I = C_5 e^{y\sqrt{K}} + C_6 e^{-y\sqrt{K}} - \frac{1}{K}$$

domaine II:

$$Z'' - 9K Z = 1$$

$$\Rightarrow Z_{II} = C_7 e^{y\sqrt{9K}} + C_8 e^{-y\sqrt{9K}} - \frac{1}{9K}$$

determination des constantes:  $C_5, C_6, C_7, C_8$

on a les mêmes conditions aux limites que pour la résolution de l'equation (A)

$$1^{\circ} \quad y=0 \rightarrow \frac{dZ_I}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow C_5 = C_6$$

$$2^{\circ} \quad y=1 \rightarrow \frac{dZ_{II}}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow C_7 = C_8 e^{-2\sqrt{9K}}$$



$$3^{\circ} / y = \frac{8}{9} \rightarrow z_I = z_{II}$$

$$\Rightarrow 2c_5 \operatorname{ch}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) = c_8 \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) + \frac{8}{9k}$$

$$4^{\circ} / y = \frac{8}{9} \rightarrow \frac{dz_I}{dy} = \frac{dz_{II}}{dy}$$

$$\Rightarrow 2c_5 \sqrt{k} \operatorname{Sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) = c_8 \sqrt{9k} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right)$$

$$5^{\circ} / \int_0^1 z dy = 1 = I = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{8}{9}} z_I dy + \int_{\frac{8}{9}}^1 z_{II} dy = 1$$

$$\int_0^{\frac{8}{9}} \left[ 2c_5 \operatorname{ch}(y\sqrt{k}) - \frac{1}{k} \right] dy + \int_{\frac{8}{9}}^1 \left[ c_8 \left( e^{-2\sqrt{9k}} e^{y\sqrt{9k}} + e^{-y\sqrt{9k}} \right) - \frac{1}{9k} \right] dy = 1$$

$$I_1 = 2c_5 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{Sh}(y\sqrt{k}) - \frac{1}{k} y \Big|_0^{\frac{8}{9}} = 2c_5 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{Sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) - \frac{8}{9k}$$

$$I_2 = c_8 \left[ e^{-2\sqrt{9k}} \frac{1}{\sqrt{9k}} e^{y\sqrt{9k}} - \frac{1}{\sqrt{9k}} e^{-y\sqrt{9k}} \Big|_{\frac{8}{9}}^1 - \frac{1}{9k} y \Big|_{\frac{8}{9}}^1 \right]$$

$$\Rightarrow c_8 \frac{1}{\sqrt{9k}} \left[ e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} \right] - \frac{1}{81k}$$

on aboutit à  $I = I_1 + I_2$

$$\Rightarrow 2c_5 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{Sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) + c_8 \frac{1}{\sqrt{9k}} \left( e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} \right) - \frac{71}{81k} = 1$$

En fin nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} 2c_5 \operatorname{ch}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) = c_8 \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} + e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) + \frac{8}{9k} \\ 2c_5 \operatorname{sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) = c_8 \sqrt{9k} \left( e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} \right) \\ 2c_5 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{8}{9}\sqrt{k}\right) + \frac{c_7}{\sqrt{9k}} \left( e^{-\frac{8}{9}\sqrt{9k}} - e^{-\frac{10}{9}\sqrt{9k}} \right) - \frac{71}{81k} = 1 \end{cases}$$

après résolution du système avec  $k=100$

on aura :

$$c_8 = -1,0957 \cdot 10^8$$

$$c_7 = -9,5945 \cdot 10^{-19} \approx 0$$

$$c_7 \approx 0$$

$$c_5 = c_6 = 9,0249 \cdot 10^{-14}$$

$$\begin{cases} z_{\text{I}} = 9,0249 \cdot 10^{-14} (e^{10y} + e^{-10y}) - \frac{1}{100} \dots 0 \leq y \leq \frac{8}{9} \\ z_{\text{II}} = -1,0957 \cdot 10^8 e^{-20y} - \frac{1}{300} \dots \frac{8}{9} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

## 2 Résolution pour: $U/U_0 = 4$

$$a_0 = \frac{1}{4} h_0 = \frac{1}{4}$$

domaine (I)

$$0 \leq y \leq \frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} \hat{U} = 1 \\ e = 0 \end{cases}$$

l'équation (A) devient:

$$U'' - KU = B \dots (A_1)$$

domaine (II)

$$\frac{3}{4} \leq y \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \hat{U} = 4 \\ e = 4 \end{cases}$$

l'équation (A) devient:

$$U'' - 4KU = -4K4 + B$$

$$U'' - 4KU = -16K + B \dots (A_2)$$

a. résolution de (A<sub>1</sub>) :

$$U_I = U_1 + U_2$$

$U_1$ : solution de l'équation déterminée:  $U'' - KU = 0$

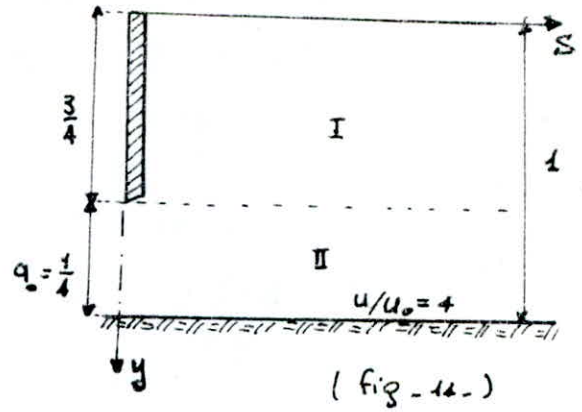
$U_2$ : solution de l'équation indéterminée:  $U'' - KU = B$

de la même manière, que pour  $U/U_0 = 9$

on aboutit à la solution  $U_I$ :

$$U_I = c_1 e^{y\sqrt{K}} + c_2 e^{-y\sqrt{K}} - \frac{B}{K} \dots (A'_1)$$

$0 \leq y \leq \frac{3}{4}$



b. résolution de (A<sub>2</sub>) :

$$\frac{3}{4} \leq y \leq 1$$

$$u'' - 4Ku = 16K + B$$

de la même manière que pour  $u_{\max} = 9$ , la solution sera :

$$u_{II} = c_3 e^{\sqrt{4K} y} + c_4 e^{-\sqrt{4K} y} + 4 - \frac{B}{4K} \dots \dots (A'_2)$$

$\frac{3}{4} \leq y \leq 1$

c. Détermination des constantes : c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, c<sub>3</sub>, c<sub>4</sub>, B

1°  $y=0 \rightarrow \frac{du_I}{dy} = 0$  (absence des frottements sur la surface libre)

$$\frac{du_I}{dy} = c_1 \sqrt{K} e^{y\sqrt{K}} - c_2 \sqrt{K} e^{-y\sqrt{K}}$$

$$y=0 \Rightarrow \boxed{c_1 = c_2} \dots \dots (*_1)$$

2°  $y=1 \rightarrow \frac{du_{II}}{dy} = 0$  (absence des frottements sur le fond du canal)

$$\frac{du_{II}}{dy} = c_3 \sqrt{4K} e^{y\sqrt{4K}} - c_4 \sqrt{4K} e^{-y\sqrt{4K}}$$

$$y=1 \Rightarrow c_3 \sqrt{4K} e^{\sqrt{4K}} - c_4 \sqrt{4K} e^{-\sqrt{4K}} = 0$$

$$\boxed{c_3 = c_4 e^{-2\sqrt{4K}}} \dots \dots (*_2)$$

3°  $y = \frac{3}{4} \rightarrow u_I = u_{II}$

$$c_1 e^{\frac{3}{4}\sqrt{K}} + c_2 e^{-\frac{3}{4}\sqrt{K}} - \frac{B}{K} = c_3 e^{\frac{3}{4}\sqrt{4K}} + c_4 e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4K}} + 4 - \frac{B}{4K}$$

$$c_1 = c_2 \quad \text{et} \quad c_3 = c_4 e^{-2\sqrt{4K}}$$

$$c_2 e^{\frac{3}{4}\sqrt{k}} + c_1 e^{-\frac{3}{4}\sqrt{k}} - \frac{B}{k} = c_4 e^{-2\sqrt{4k}} e^{\frac{3}{4}\sqrt{4k}} + c_4 e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} + 4 - \frac{B}{4k}$$

$$2c_1 \frac{(e^{\frac{3}{4}\sqrt{k}} + e^{-\frac{3}{4}\sqrt{k}})}{2} = c_4 (e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} + e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}}) + \frac{3}{4} \frac{B}{k} + 4$$

$$\boxed{2c_1 \operatorname{Ch}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) = c_4 (e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} + e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}}) + \frac{3}{4} \frac{B}{k} + 4 \dots (x_3)}$$

$$4^\circ / y = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{du_I}{dy} = \frac{du_{II}}{dy}$$

$$c_1 \sqrt{k} e^{\frac{3}{4}\sqrt{k}} - c_2 \sqrt{k} e^{-\frac{3}{4}\sqrt{k}} = c_3 \sqrt{4k} e^{\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - c_4 \sqrt{4k} e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}}$$

$$2c_1 \sqrt{k} \left( \frac{e^{\frac{3}{4}\sqrt{k}} - e^{-\frac{3}{4}\sqrt{k}}}{2} \right) = c_4 \sqrt{4k} (e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}})$$

$$\boxed{2c_1 \sqrt{k} \operatorname{Sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) = c_4 \sqrt{4k} (e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}})}$$

$$5^\circ / \int_0^1 u \, dy = 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{3}{4}} u_I \, dy + \int_{\frac{3}{4}}^1 u_{II} \, dy = 1$$

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \left[ 2c_1 \operatorname{Ch}(y\sqrt{k}) - \frac{B}{k} \right] dy = I_1$$

$$\int_{\frac{3}{4}}^1 \left[ c_4 (e^{-2\sqrt{4k}} e^{y\sqrt{4k}} + e^{-y\sqrt{4k}} - \frac{B}{4k} + 4) \right] dy = I_2$$

$$I_1 = 2c_1 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{Sh}(y\sqrt{k}) - \frac{B}{k} y \Big|_0^{\frac{3}{4}} = 2c_1 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{Sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) - \frac{3}{4} \frac{B}{k}$$

$$I_2 = c_4 \left[ e^{-2\sqrt{4k}} \frac{1}{\sqrt{4k}} e^{y\sqrt{4k}} - \frac{1}{\sqrt{4k}} e^{-y\sqrt{4k}} \Big|_{\frac{3}{4}}^1 - \frac{B}{4k} \cdot y + 4y \Big|_{\frac{3}{4}}^1 \right]$$

$$I_2 = C_4 \frac{1}{\sqrt{4k}} \left[ e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} \right] + \frac{3}{4} \left( -\frac{B}{4k} + 4 \right)$$

finalemment on aboutit à  $I = I_1 + I_2$

$$I = 2C_2 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) + C_4 \frac{1}{\sqrt{4k}} \left( e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} \right) - \frac{13B}{16k} + 1 = 1$$

$$\boxed{2C_2 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) + C_4 \frac{1}{\sqrt{4k}} \left( e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} \right) - \frac{13B}{16k} = 0} \quad (*5)$$

En fin on a un système d'équations (3-3)

les inconnues sont  $C_1, C_4, B$

avec:  $C_1 = C_2$  et  $C_3 = C_4 e^{-2\sqrt{4k}}$

$$(1) \left\{ 2C_2 \operatorname{ch}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) = C_4 \left( e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} + e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} \right) + \frac{3}{4} \frac{B}{k} + 4 \right.$$

$$(2) \left\{ 2C_2 \sqrt{k} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) = C_4 \sqrt{4k} \left( e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} \right) \right.$$

$$(3) \left\{ 2C_2 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) + C_4 \frac{1}{\sqrt{4k}} \left( e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} \right) - \frac{13B}{16k} = 0 \right.$$

multiplions (1) par  $\frac{13}{4}$  et (3) par 3

on aboutit à  $C_4$

$$C_4 = \frac{13}{\sqrt{4} \left( e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} \right) \left( \frac{13}{4} \operatorname{coth}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) - \frac{3}{\sqrt{k}} \right) - \frac{13}{4} \left( e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} + e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} \right) + \frac{3}{\sqrt{4k}} \left( e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} \right)}$$

$$\Delta S = 0,01 \rightarrow k = 100$$

$$C_4 = \frac{13}{2(e^{-5/4\sqrt{400}} - e^{-3/4\sqrt{400}}) \left( \frac{13}{4} \coth\left(\frac{30}{4}\right) - \frac{3}{10} \right) - \frac{13}{4} (e^{-5/4\sqrt{400}} + e^{-3/4\sqrt{400}}) + \frac{3}{\sqrt{400}} (e^{-3/4\sqrt{400}} - e^{-5/4\sqrt{400}})}$$

après calcul on aura:

$$C_4 = -0,00472 \cdot 10^9$$

$$C_3 = C_4 e^{-2\sqrt{400}} = -1,9748 \cdot 10^{-11}$$

$$C_3 \simeq 0$$

$$C_2 = \frac{C_4 (e^{-5/4\sqrt{400}} - e^{-3/4\sqrt{400}})}{\text{Sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{100}\right)}$$

$$C_1 = C_2 = 1,597 \cdot 10^{-3}$$

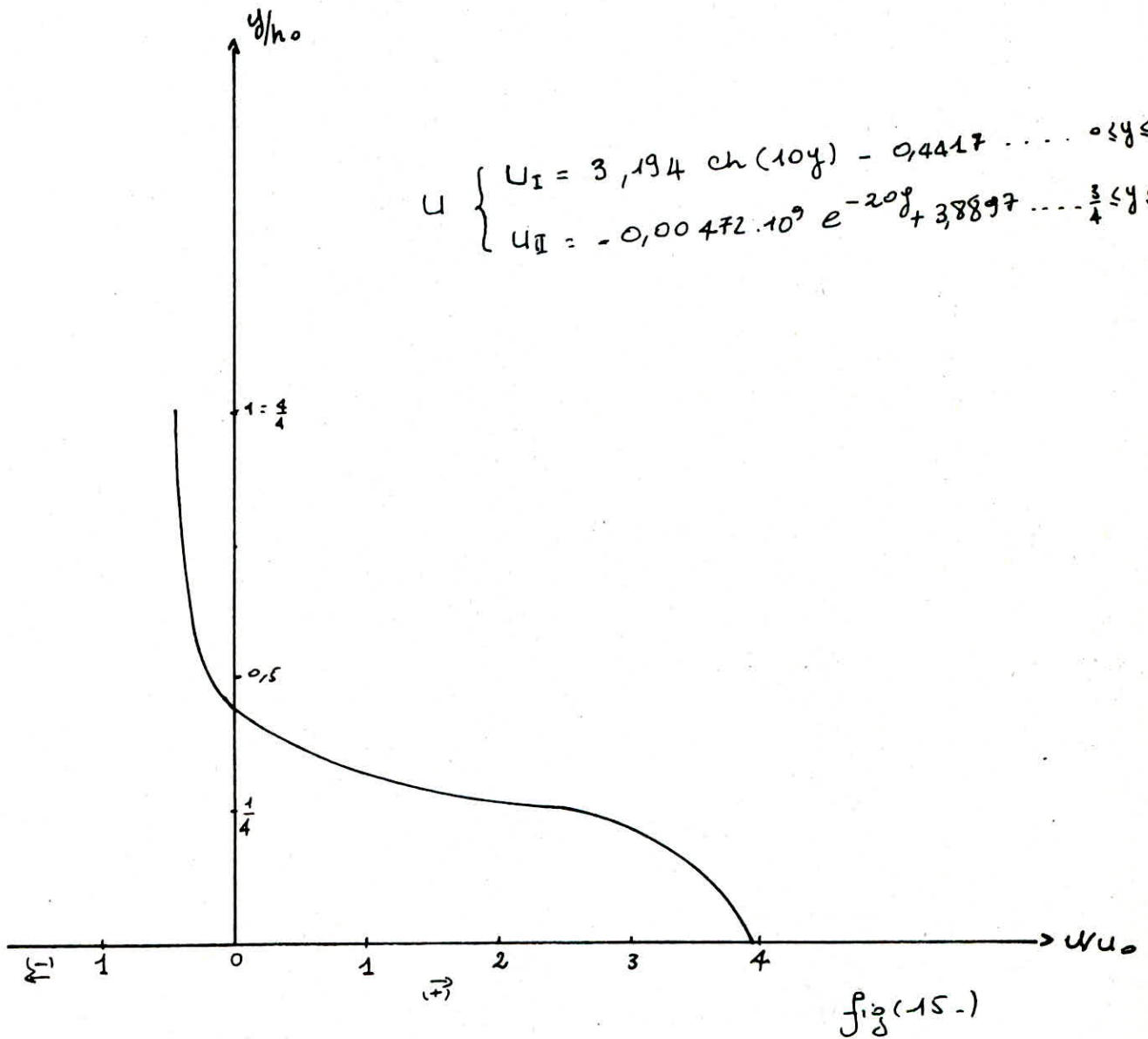
$$\frac{3}{4} \frac{B}{100} = 2C_2 \text{Ch}\left(\frac{3}{4}\sqrt{100}\right) - C_4 (e^{-5/4\sqrt{400}} + e^{-3/4\sqrt{400}}) - 4$$

$$B = 44,172$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{3}{4} & U_I = 1,597 \cdot 10^{-3} (e^{10y} + e^{-10y}) - 0,4417 \\ \frac{3}{4} \leq y \leq 1 & U_{II} = -0,00472 \cdot 10^9 e^{-20y} + 3,8897 \end{cases}$$

Distribution des vitesses pour  $\frac{U}{U_0} = 4$   
à  $\bar{s} = 0$

E<sub>x</sub>: 1 → 20cm  
echelle: E<sub>y</sub>: 1 → 20cm





résolution de l'équation (B) pour:  $u/u_0=4$

$$z'' - \hat{u} k z = 1$$

domaine I

$$0 \leq y \leq \frac{3}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \hat{u} = 1 \\ e = 0 \end{array} \right\}$$

$$z'' - k z = 1$$

$$\Rightarrow z_I = C_5 e^{y\sqrt{k}} + C_6 e^{-y\sqrt{k}} - \frac{1}{k}$$

domaine II

$$\frac{3}{4} \leq y \leq 1 \quad \left. \begin{array}{l} \hat{u} = 4 \\ e = 4 \end{array} \right\}$$

$$z'' - 4k z = 1$$

$$\Rightarrow z_{II} = C_7 e^{y\sqrt{4k}} + C_8 e^{-y\sqrt{4k}} - \frac{1}{4k}$$

détermination des constantes:  $C_5, C_6, C_7, C_8$

$$1^\circ/ y=0 \rightarrow \frac{dz_I}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow C_5 = C_6$$

$$2^\circ/ y=1 \rightarrow \frac{dz_{II}}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow C_7 = C_8 e^{-2\sqrt{4k}}$$

$$3^\circ/ y = \frac{3}{4} \rightarrow z_I = z_{II}$$

$$\Rightarrow 2C_5 \operatorname{ch}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) = C_8 \left( e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} + e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} \right) + \frac{3}{4k} \quad (*)_6$$

$$4^\circ/ y = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{dz_I}{dy} = \frac{dz_{II}}{dy}$$

$$\Rightarrow 2C_5 \sqrt{k} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) = C_8 \sqrt{4k} \left( e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} \right) \quad (*)_7$$

$$5^\circ/ \int_0^1 z dy = 1 = I = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int_0^{3/4} z_I dy$$

$$I_2 = \int_{3/4}^1 z_{II} dy$$

$$I_1 = \int_0^{3/4} \left[ 2c_5 \operatorname{ch}(y\sqrt{k}) - \frac{1}{k} \right] dy = 2c_5 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}(y\sqrt{k}) - \frac{1}{k} y \Big|_0^{3/4}$$

$$= 2c_5 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) - \frac{3}{4k}$$

$$I_2 = \int_{3/4}^1 \left[ c_8 (e^{-2\sqrt{4k}} e^{y\sqrt{4k}} + e^{-y\sqrt{4k}}) \right] dy$$

$$= c_8 \left[ e^{-2\sqrt{4k}} \frac{1}{\sqrt{4k}} e^{y\sqrt{4k}} - \frac{1}{\sqrt{4k}} e^{-y\sqrt{4k}} \Big|_{3/4}^1 - \frac{1}{4k} y \Big|_{3/4}^1 \right]$$

$$\Rightarrow c_8 \frac{1}{\sqrt{4k}} \left[ e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} \right] - \frac{1}{16k}$$

$$I = I_1 + I_2 = 1$$

$$\Rightarrow 2c_5 \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\sqrt{k}\right) + c_8 \frac{1}{\sqrt{4k}} \left( e^{-\frac{3}{4}\sqrt{4k}} - e^{-\frac{5}{4}\sqrt{4k}} \right) - \frac{11}{16k} = 1 \quad (*_8)$$

En dernier nous résolvons le système d'équations (\*<sub>6</sub>)

(\*<sub>7</sub>) et (\*<sub>8</sub>)

nous obtenons avec  $k=100$

$$c_8 = -1167,56$$

$$c_7 = -4,9602 \cdot 10^{-15} \approx 0$$

$$c_5 = c_6 = 8,748 \cdot 10^{-9}$$

$$\begin{cases} Z_I = 8,748 \cdot 10^{-9} (e^{10y} + e^{-10y}) - 0,01 & \dots \dots 0 \leq y \leq \frac{3}{4} \\ Z_{II} = -1167,56 e^{-20y} - \frac{1}{400} & \dots \dots \frac{3}{4} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Tableau donnant les coefficients d'integration

$U_{max}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$(10^3)$ $C_1$	8,423	2,608	1,597	1,255	1,113	1,024	1,018	1,009	1,021	1,148
$(10^3)$ $C_2$	8,423	2,608	1,597	1,255	1,113	1,024	1,018	1,009	1,021	1,148
$C_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$C_4$	-1037,67	$-1,2258 \cdot 10^3$	$-0,00472 \cdot 10^9$	$-0,09853 \cdot 10^7$	$-1,386 \cdot 10^9$	$-1,4438 \cdot 10^{10}$	$-1,2743 \cdot 10^{11}$	$-9,3529 \cdot 10^{11}$	$-6,013 \cdot 10^{12}$	$-1,6856 \cdot 10^{14}$
B	26,26	35,10	44,172	52,34	62,65	52,38	80,16	86,91	100,10	129,250

Pour  $U = x$  les equations analytiques sont sous la forme suivante:

$$0 \leq y \leq \frac{x-1}{x}$$

$$u_I = C_1 (e^{10y} + e^{-10y}) - \frac{B}{100}$$

$$\frac{x-1}{x} \leq y \leq 1$$

$$u_{II} = C_4 e^{-\sqrt{100x}} + x - \frac{B}{100 \cdot x}$$

Tableau donnant les coefficients d'integration de 'Z'

U	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$C_5$	$1,591 \cdot 10^{-5}$	$2,436 \cdot 10^{-7}$	$8,710 \cdot 10^{-9}$	$5,215 \cdot 10^{-10}$	$4,370 \cdot 10^{-10}$	$4,679 \cdot 10^{-11}$	$6,036 \cdot 10^{-13}$	$9,0249 \cdot 10^{-14}$	$1,520 \cdot 10^{-14}$	0
$C_6$	$1,591 \cdot 10^{-5}$	$2,436 \cdot 10^{-7}$	$8,710 \cdot 10^{-9}$	$5,215 \cdot 10^{-10}$	$4,370 \cdot 10^{-10}$	$4,679 \cdot 10^{-12}$	$6,036 \cdot 10^{-13}$	$9,0249 \cdot 10^{-14}$	$1,520 \cdot 10^{-14}$	0
$C_7$	$-2,020 \cdot 10^{-13}$	$-3,401 \cdot 10^{-14}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$C_8$	$-38,99 \cdot 10^{-2}$	-37,670	-1167,56	-20144,46	-240340,7	-2205351,3	-16804484	$-1,0957 \cdot 10^3$	$-6,3385 \cdot 10^2$	$-1,1811 \cdot 10^2$

45

Pour  $u=x$  les équations analytiques sont sous la forme suivante:

$$0 \leq y \leq \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{x-1}{x} \leq y \leq 1$$

$$\begin{cases} Z_I = 2C_5 \operatorname{ch}(10y) - \frac{1}{100} \\ Z_{II} = C_8 e^{-y\sqrt{100x}} + C_7 e^{y\sqrt{100x}} - \frac{1}{100 \cdot x} \end{cases}$$

## III.2 Solution numérique

On utilisera comme méthode, la méthode des différences finies.

### III.2.1 Rappel sur la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une méthode approchée de résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles, très utilisée dans les problèmes de mécanique des fluides.

Nous estimons que lorsque la solution analytique n'est pas assez simple, l'application de la MDF constitue un instrument de calcul particulièrement utile et efficace

#### a. principe

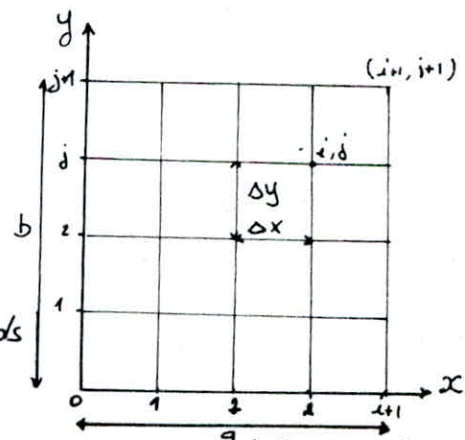
Soit un rectangle de côtés  $a$  et  $b$ , découpons ce rectangle en  $N$  petits rectangles de côté

$$\Delta x = \frac{a}{N} \quad \text{et} \quad \Delta y = \frac{b}{N}$$

Nous cherchons la solution aux nœuds du maillage (la grille).

Soit la solution approchée  $u_{i,j} = u(x, y)$  (Fig-16)

$$\Delta x = \Delta s = ih ; \quad \Delta y = jl$$



avec  $h$  et  $l$  le pas suivant respectivement l'axe  $ox$  et l'axe  $oy$ .

$$u(x+h, y+l) = u_{i+1, j+1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{h} \left[ \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h} \right] \\ &= \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h^2}$$

de la même manière on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i, j} = \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i, j} = \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{l^2}$$

### III.2.2 Recherche de l'algorithme

L'équation est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tilde{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = B$$

si on trace les courbes  $f(u)$  et  $g(u - Bx)$

$$\text{avec} \quad u = u_I + u_{II}$$

$$z = z_I + z_{II}$$

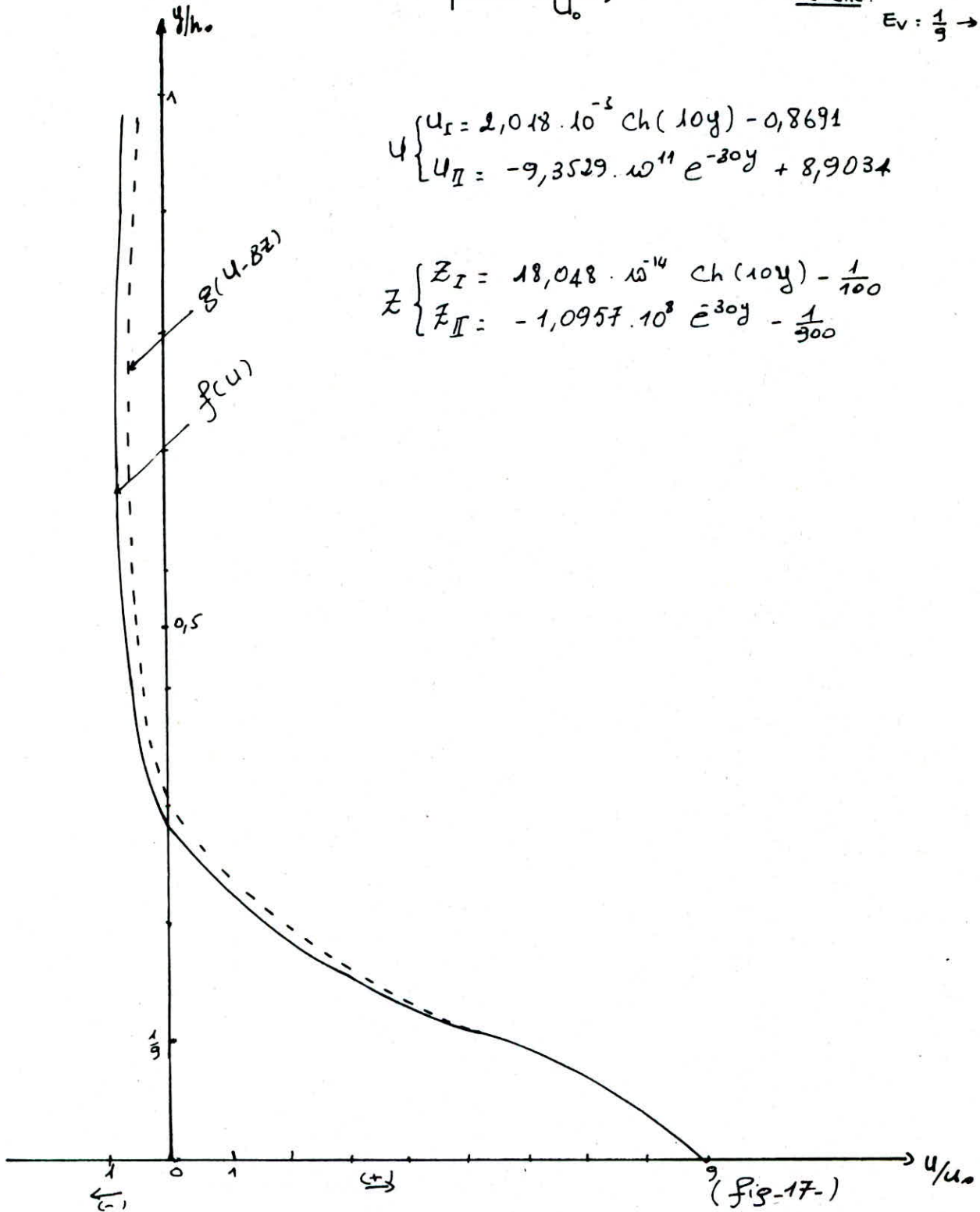
Pour  $u/u_0 = 3$  et  $u/u_0 = 4$  (voir Fig 17 et Fig 18)

pour:  $\frac{u}{u_0} = 9$

echelle:  $E_H: 1 \rightarrow 1\text{cm}$   
 $E_V: \frac{1}{9} \rightarrow 2\text{cm}$

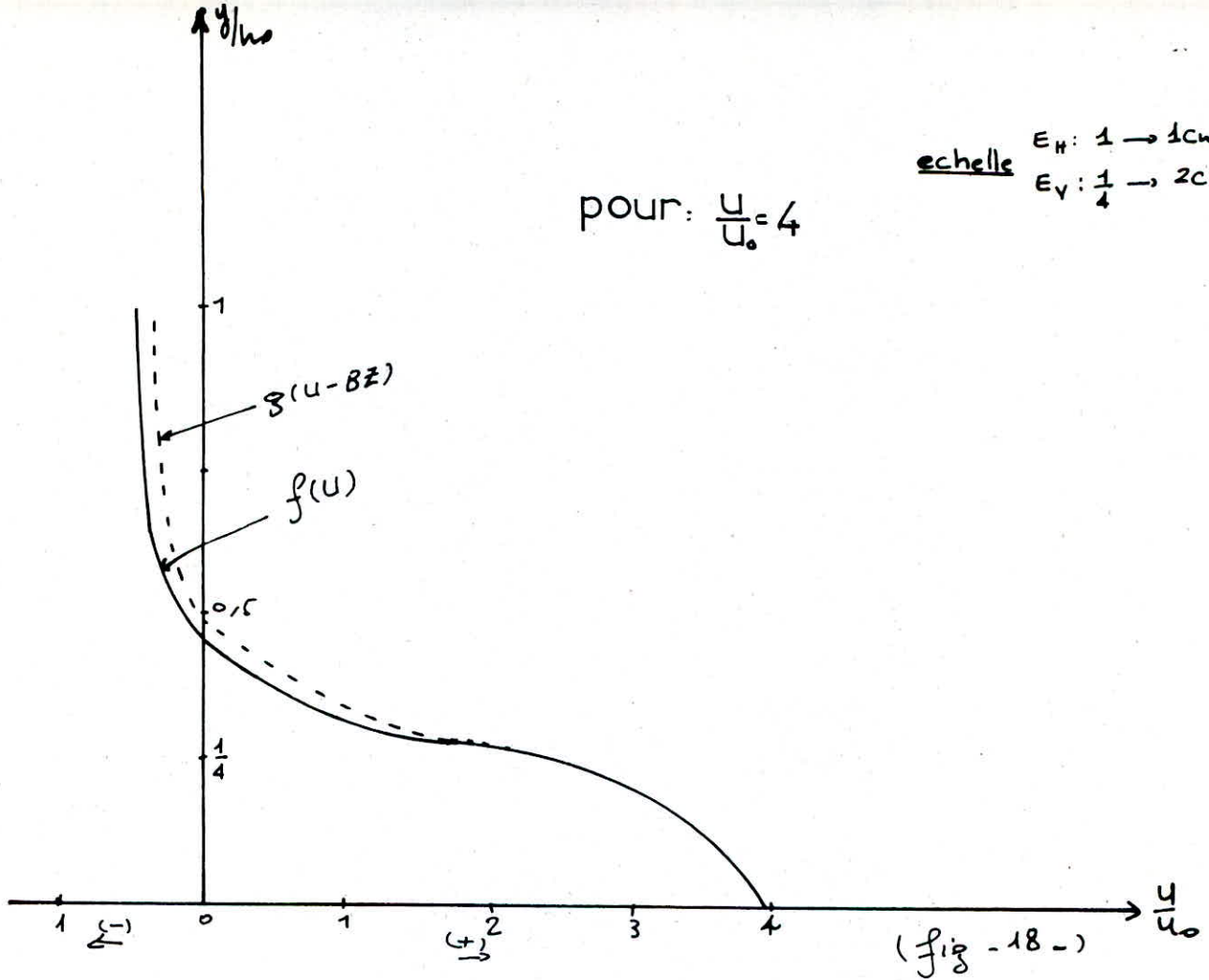
$$u \begin{cases} u_I = 2,018 \cdot 10^{-5} \text{ch}(10y) - 0,8691 \\ u_{II} = -9,3529 \cdot 10^{11} e^{-30y} + 8,9034 \end{cases}$$

$$z \begin{cases} z_I = 18,048 \cdot 10^{-14} \text{ch}(10y) - \frac{1}{100} \\ z_{II} = -1,0957 \cdot 10^8 e^{-30y} - \frac{1}{300} \end{cases}$$



echelle  $E_H: 1 \rightarrow 1\text{cm}$   
 $E_V: \frac{1}{4} \rightarrow 2\text{cm}$

pour:  $\frac{U}{U_0} = 4$



$$U \begin{cases} U_I = 3,194 \cdot 10^{-3} \operatorname{ch}(10y) - 0,441 \\ U_{II} = -0,00472 \cdot 10^9 e^{-20y} + 3,8897 \end{cases}$$

$$Z \begin{cases} Z_I = 1,748 \cdot 10^{-8} \operatorname{ch}(10y) - \frac{1}{100} \\ Z_{II} = -1167,56 e^{-20y} - \frac{1}{400} \end{cases}$$



## commentaire sur les courbes des : fig 17, 18

Les courbes en trait continu représentent la fonction  $f(u)$  et les courbes en pointsillés représentent la fonction  $g(u - Bz)$

On remarque que ces deux courbes ont même allure et se coïncident à partir d'un certain point ; donc on peut faire une identité entre les deux fonctions et admettre que :

$$f(u) \equiv g(u - Bz)$$

C'est-à-dire que le terme  $Bz$  peut être négligeable.

$f(u)$  : est la fonction représentant la vitesse  $u$  en fonction de  $y$  la profondeur.

$u$  : est déduite de l'équation (A) du système  
II.

$$B = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{cte}$$

$B$  : représente le gradient de pression

$z$  : est déduite de l'équation (B).

on constate que les deux courbes ont la même allure et qu'elles se coïncident à partir d'un certain point.

d'où on négligera le terme  $\frac{\partial P}{\partial x} = B$  et on aura l'équation suivante à résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \hat{U} \frac{\partial u}{\partial x}$$

cette équation aura un sens physique si  $\hat{U}$  est positif.

posons alors  $\hat{U} = b^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

on pose :

$$\frac{1}{b^2} = a^2$$

il existe un sens physique si  $a \neq 0$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$a^2 \left( u_{i,j+1} - \frac{2u_{i,j}}{\ell^2} + u_{i,j-1} \right) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$u_{i+1,j} = \frac{a^2 h}{\ell^2} \left( u_{i,j+1} + u_{i,j-1} \right) + \left( 1 - \frac{2ha^2}{\ell^2} \right) u_{i,j}$$

cette équation a une solution si  $1 - \frac{2ha^2}{\ell^2} \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{2ha^2}{\ell^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow h \leq \frac{\ell^2}{2a^2}$$

le pas est choisi,  $\ell = \Delta y$ ;  $1 - \frac{2a^2 h}{\ell^2} = 0 \rightarrow$  si  $h = \frac{\ell^2}{2a^2}$

$$U_{i+1,j} = \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{2}$$

ou bien

$$U_{i,j} = \frac{U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}}{2}$$

C'est l'algorithme qu'on utilisera pour notre programme.

\* Pour  $U_{i-1}$  on prendra la solution analytique

### III.23 Méthode de calcul :

Soit un vecteur  $U(I, J-1)$

$I = 0, \dots, 350$  représentant la section

1° Pour  $I = 0$

et  $J-1 \equiv y$

Par exemple pour  $U/U_0 = 9$

$y$  : varie de 0 à  $\frac{\pi}{9} = 0,88$

$$J-1 = 100 \times y$$

$$\Rightarrow J-1 = 0, \dots, 88$$

$$\Rightarrow J = 1, \dots, 89$$

pour  $J = 1, \dots, 89$  on utilisera l'équation  $U_I$

$$U_I = 2,018 \cdot 10^{-3} \operatorname{ch}(10y) - 0,8691$$

pour  $J = 90, \dots, 101$

$$U_{II} = -9,3529 \cdot 10^{-11} e^{-30y} + 8,9034$$

on aura en tout 100 valeurs

$$2^{\circ} I = 1, 350$$

Pour le calcul de  $U(I, J)$  on utilisera l'algorithme déjà trouvé.

$$U(I, J) = \frac{U(I-1, J-1) + U(I-1, J+1)}{2}$$

la valeur  $U(I-1, J-1)$  et  $U(I-1, J+1)$  pour  $I=1$  est la valeur trouvée en première étape de calcul c'est-à-dire pour  $I=0$

Conditions aux limites :

On distingue deux cas :

1) Cas sans frottement :

Sur la surface libre et sur le fond

$$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{U(I, J+1) - U(I, J)}{\ell} = 0$$

$$\Rightarrow U(I, J+1) = U(I, J)$$

on aura donc :

$$U(I, 0) = U(I, 1)$$

$$\text{et } U(I, 99) = U(I, 100)$$

2) Cas avec frottement :

sur la surface libre  $U(I, J+1) = U(I, J)$

sur le fond  $\frac{\Delta u}{\Delta y} = -\frac{U(I, J)}{8 \varepsilon_T}$

$$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{u(I, \delta+1) - u(I, \delta)}{e}$$

$$\Rightarrow u(I, \delta+1) = u(I, \delta) \left[ 1 - \frac{\Delta u(I, \delta) \cdot e}{8 \varepsilon_T} \right]$$

avec  $\varepsilon_T$ : coefficient de turbulence = 0,03

$\lambda$ : coefficient de Perte de charge = 0,03

on aura donc avec  $\rho = 1$

$$u(I, \delta+1) = u(I, \delta) \left[ 1 - \frac{u(I, \delta)}{8} \right]$$

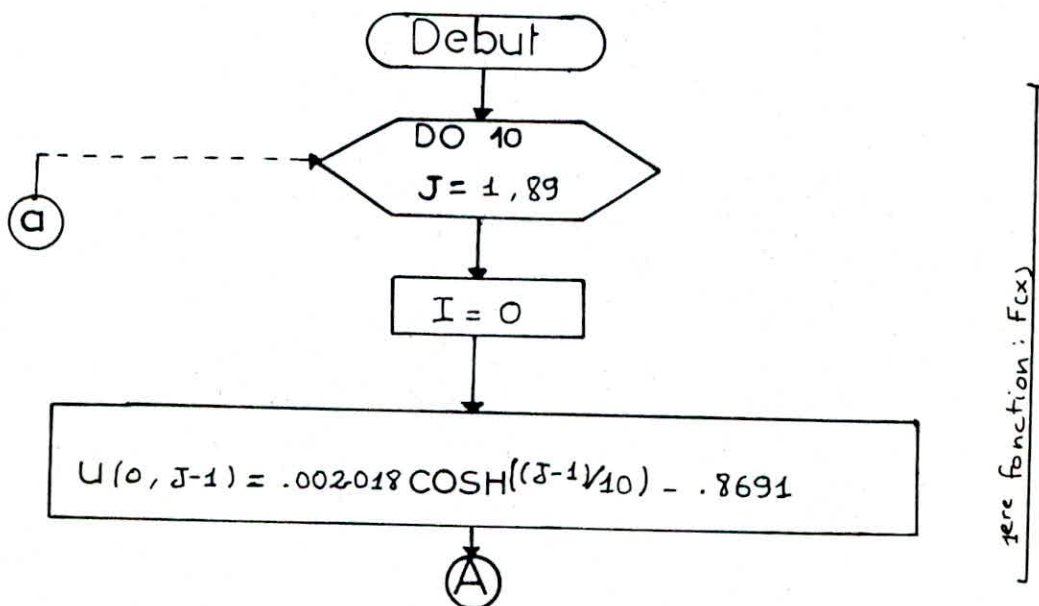
on a donc :

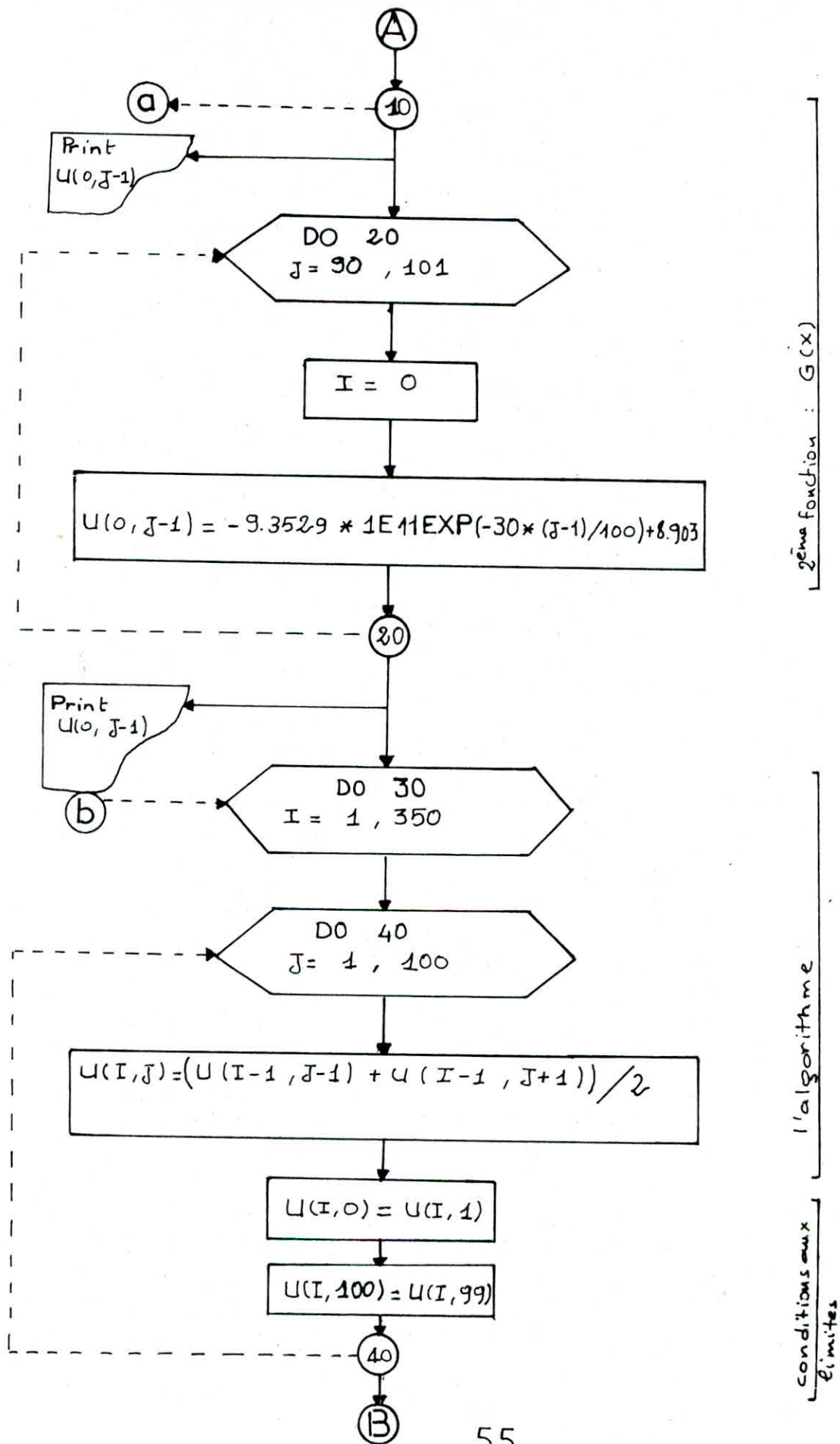
$$u(I, 0) = u(I, 1)$$

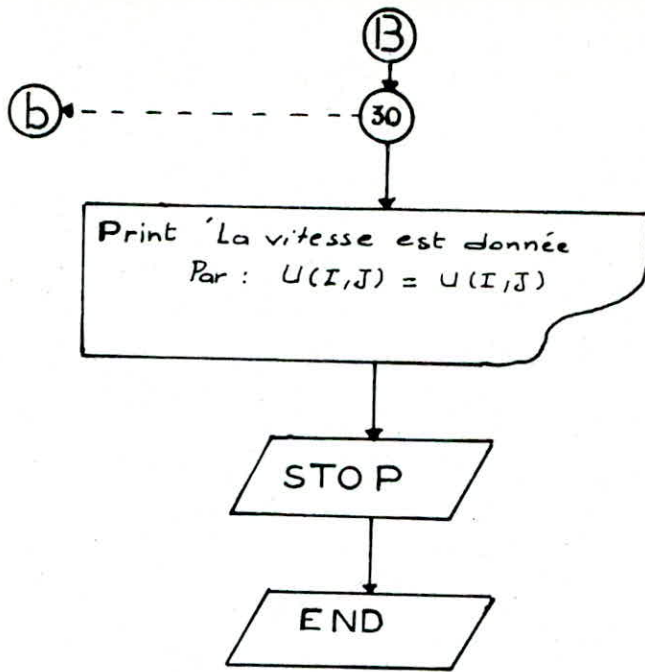
$$\text{et } u(I, 100) = u(I, 99) \left[ 1 - \frac{u(I, 99)}{8} \right]$$

organigramme :

a. Sans frottement :

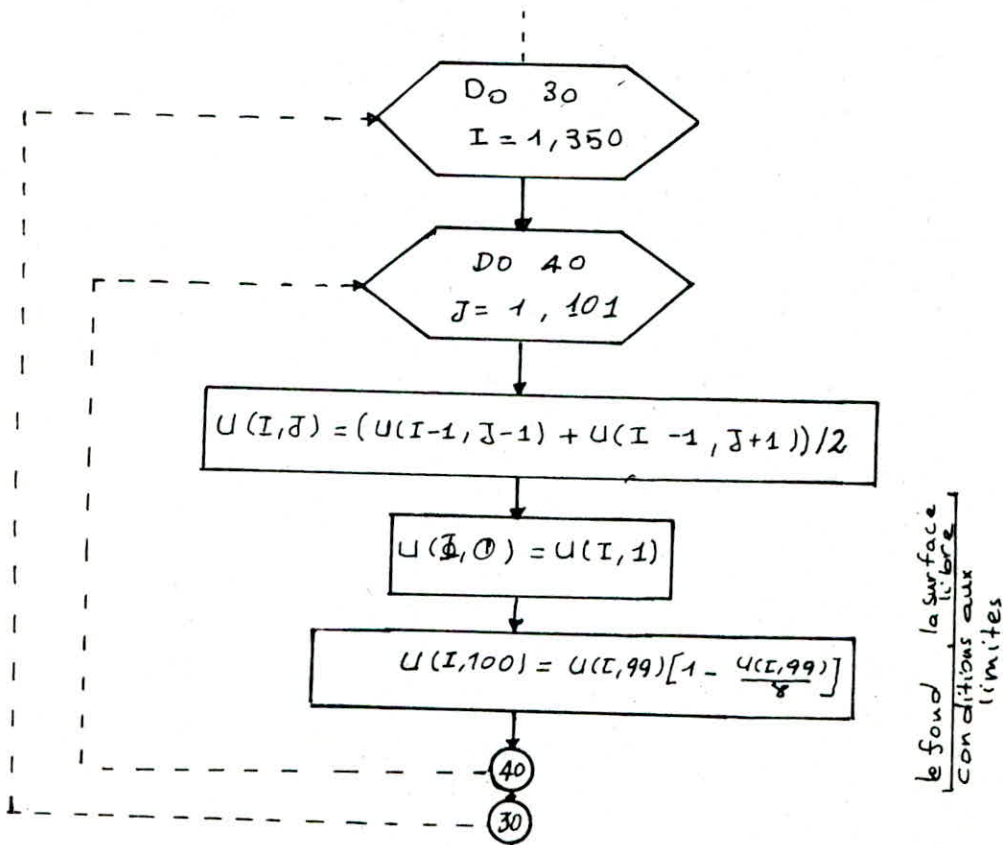




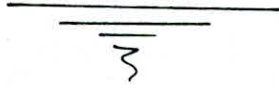


b. Avec frottement:

Idem Pour le cas avec frottement, avec changement des conditions aux limites.

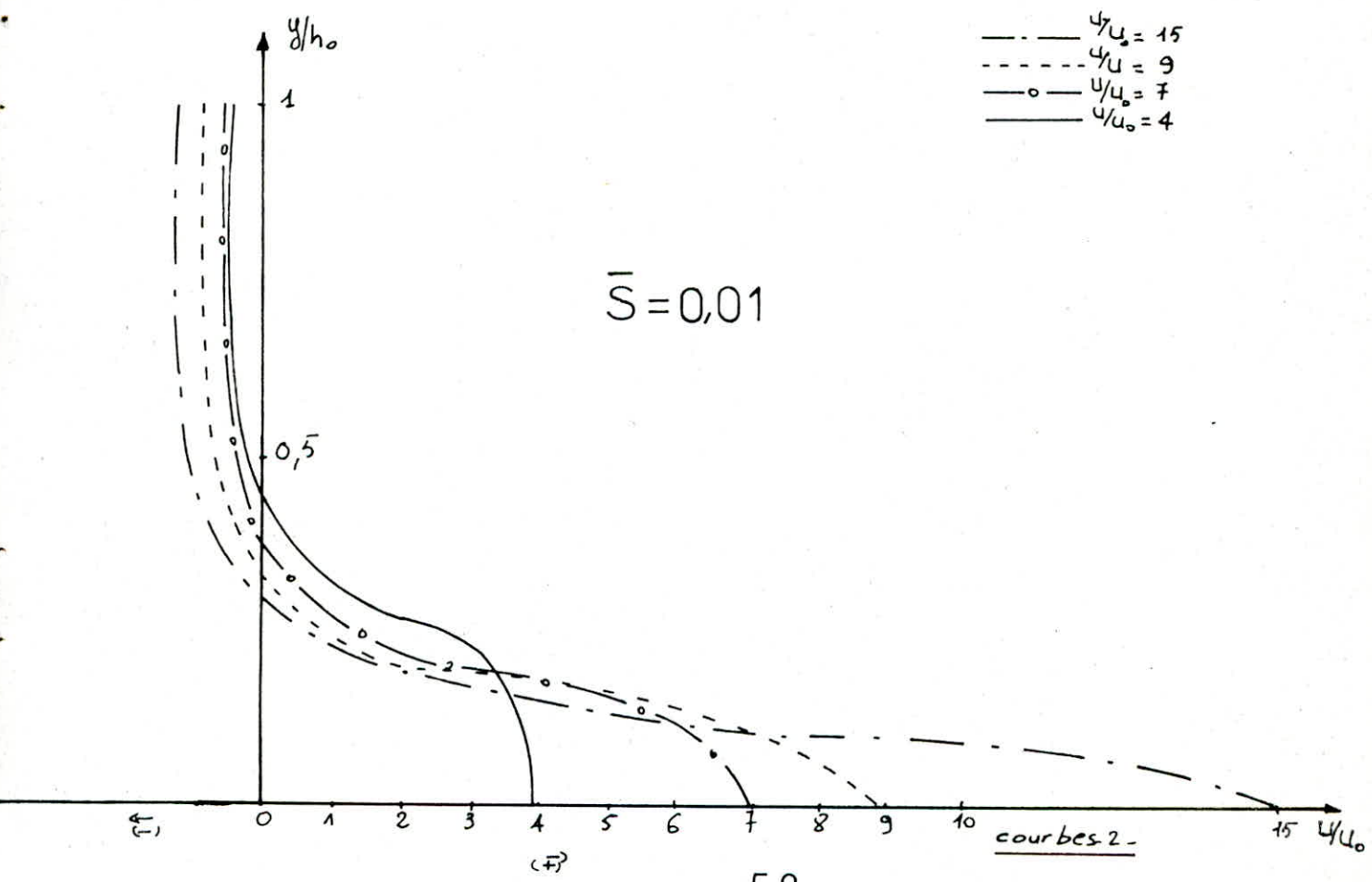
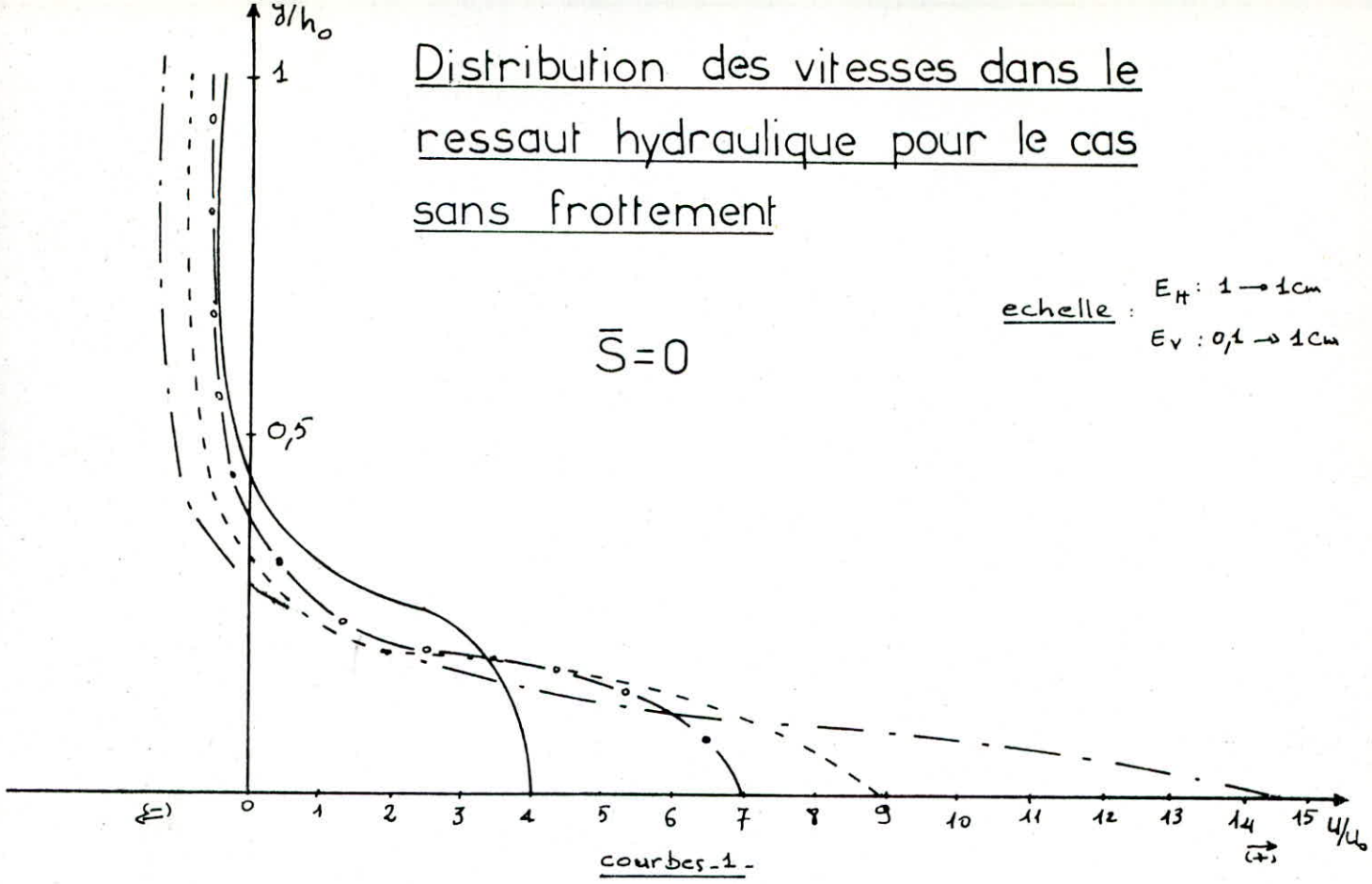


le programme a été composé en langage fortran  
et a été utilisé sur le mini-ordinateur Vax: VT102  
et VT 220 du centre de calcul de l'école.





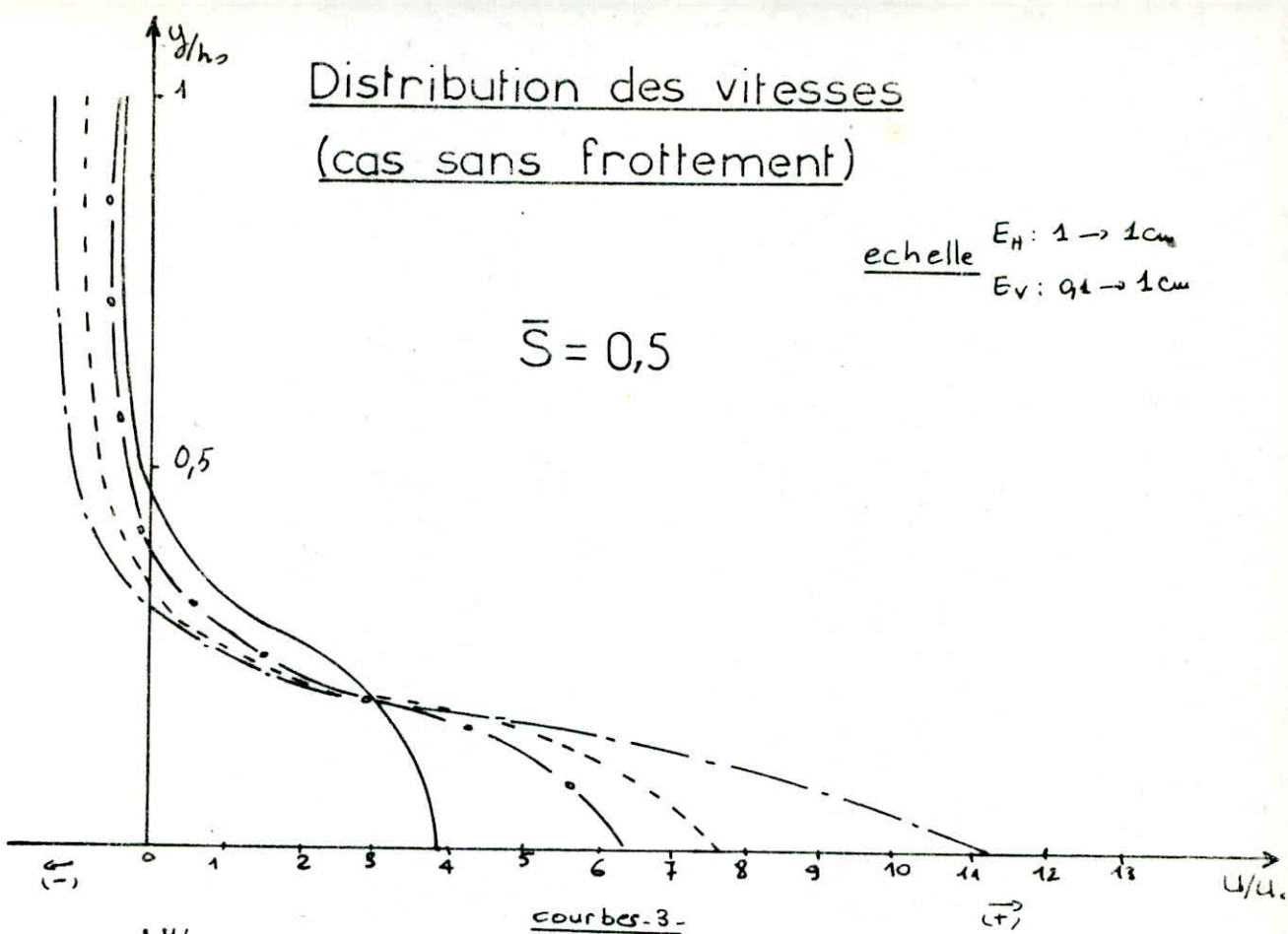
# Distribution des vitesses dans le ressaut hydraulique pour le cas sans frottement



# Distribution des vitesses (cas sans frottement)

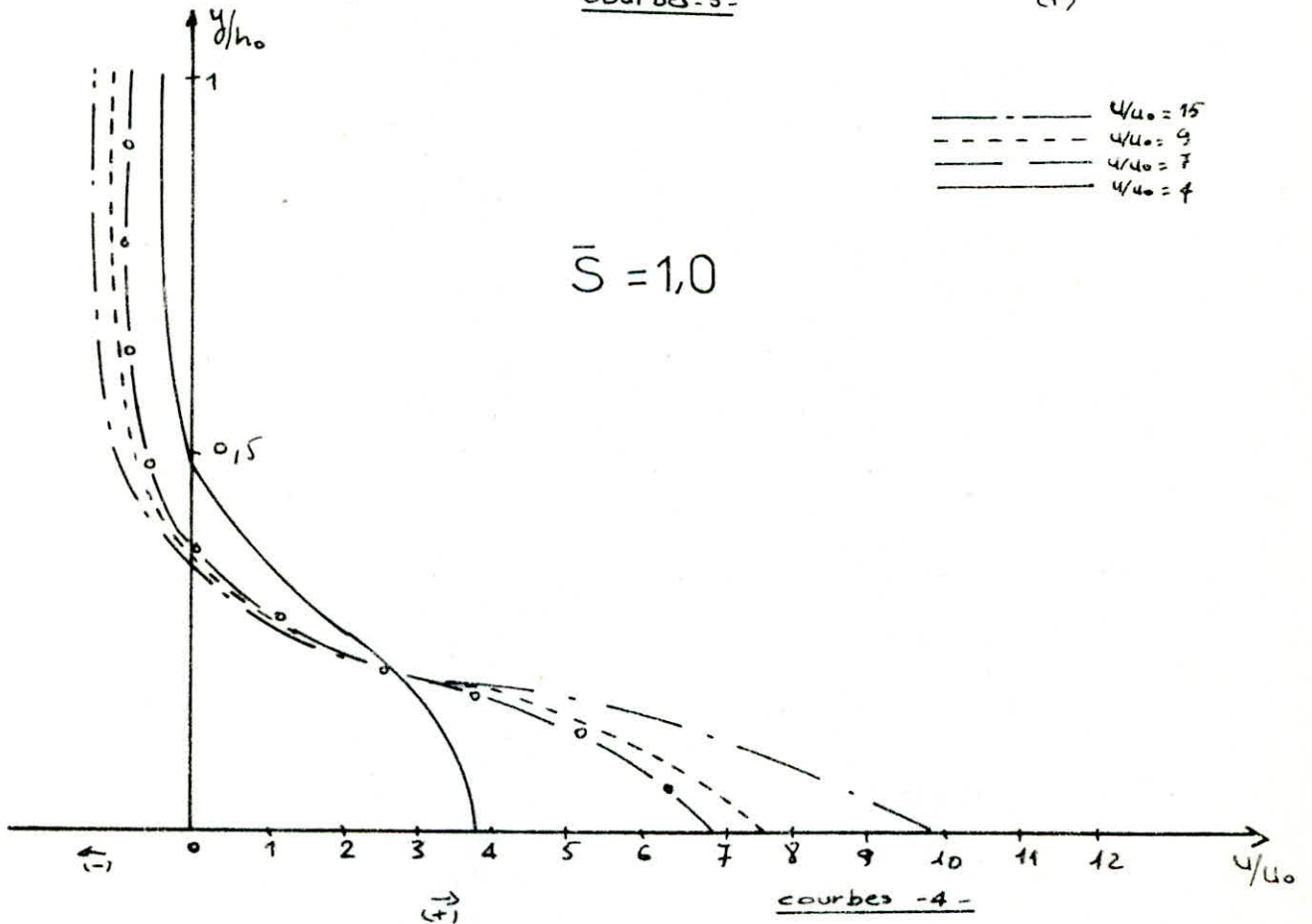
echelle  $E_H: 1 \rightarrow 1cm$   
 $E_V: 9t \rightarrow 1cm$

$\bar{S} = 0,5$



$\bar{S} = 1,0$

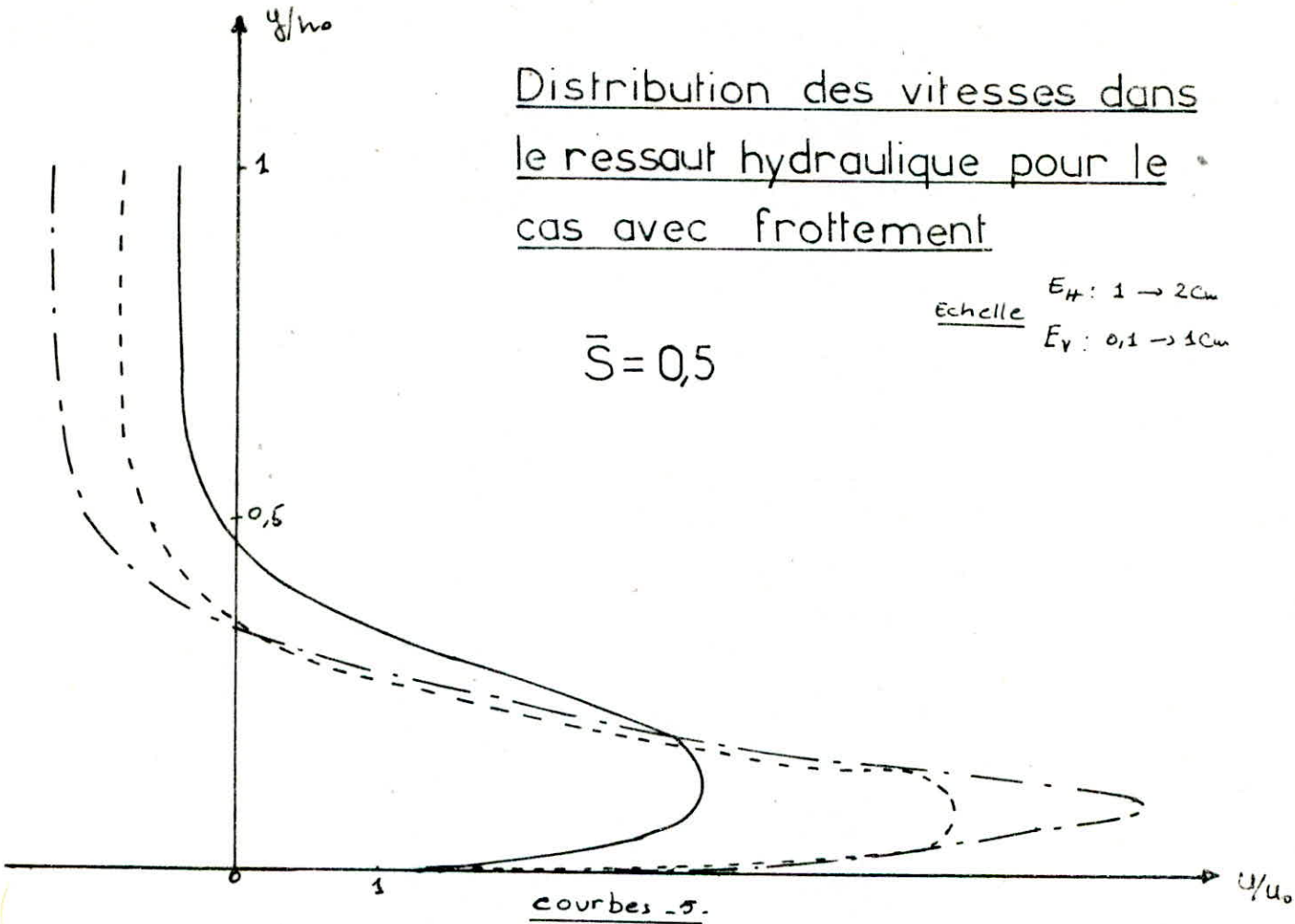
-----  $u/u_0 = 15$   
 - - - - -  $u/u_0 = 9$   
 - - - - -  $u/u_0 = 7$   
 -----  $u/u_0 = 4$



Distribution des vitesses dans le ressaut hydraulique pour le cas avec frottement

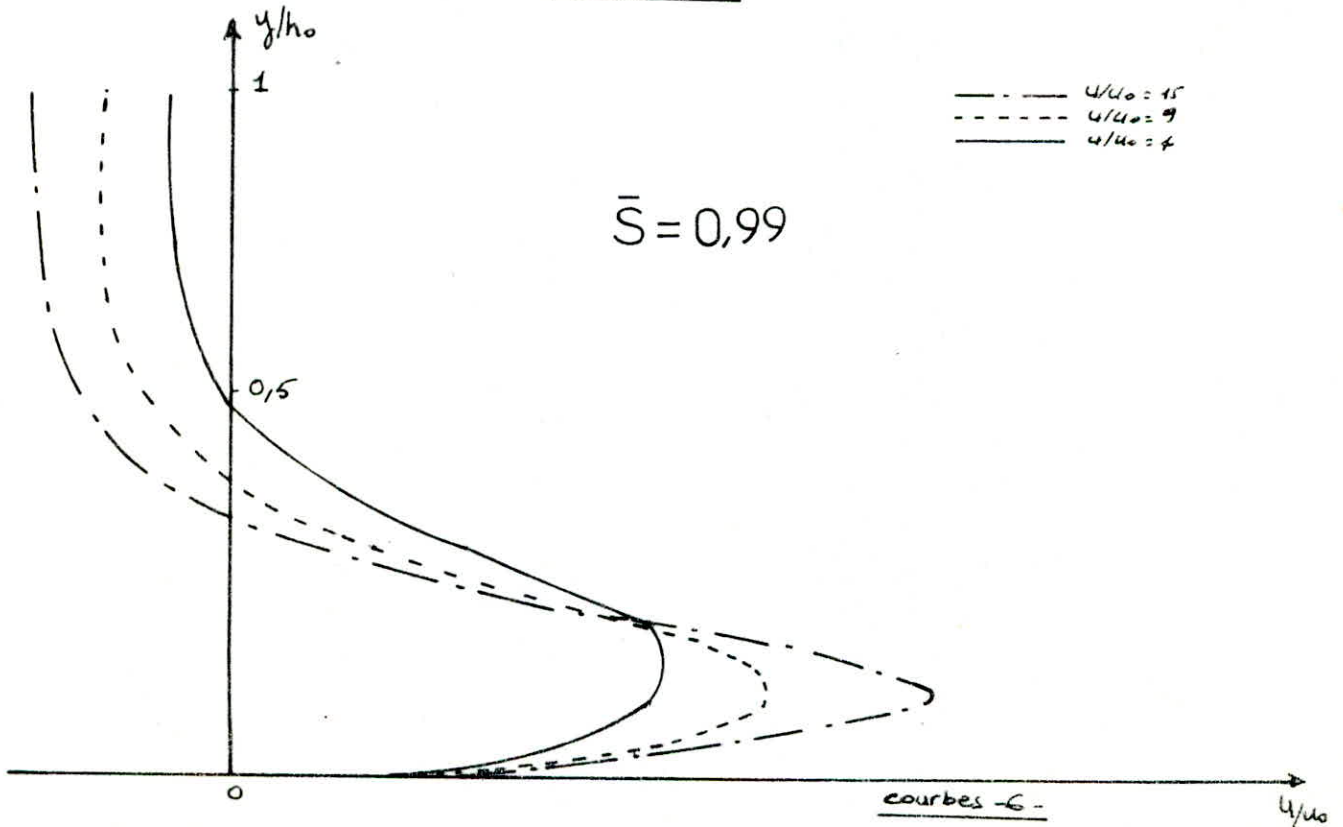
$\bar{S} = 0,5$

Echelle  $E_H: 1 \rightarrow 20m$   
 $E_V: 0,1 \rightarrow 10m$



$\bar{S} = 0,99$

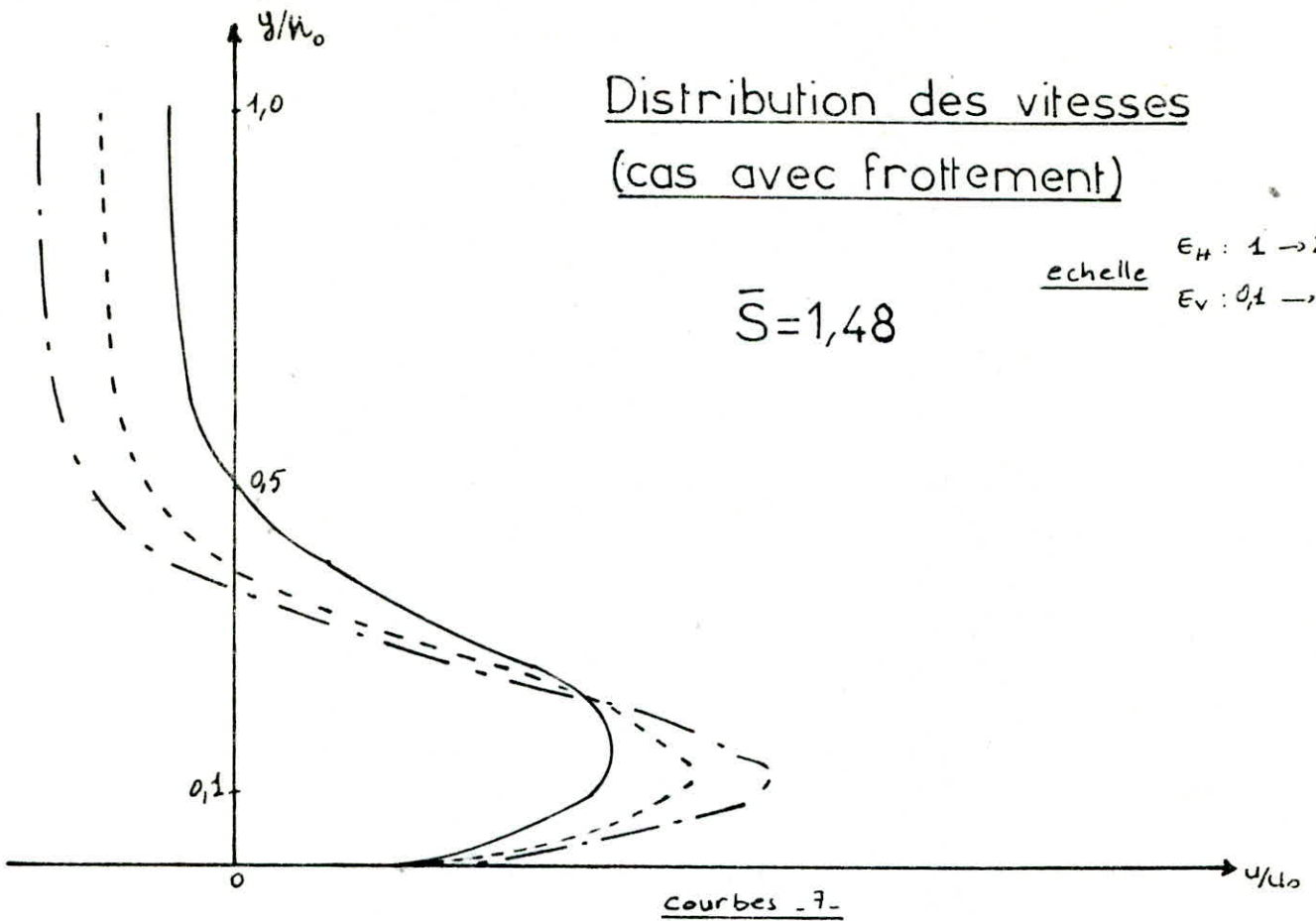
---  $u/u_0 = 15$   
 - - -  $u/u_0 = 9$   
 — — —  $u/u_0 = 4$



# Distribution des vitesses (cas avec frottement)

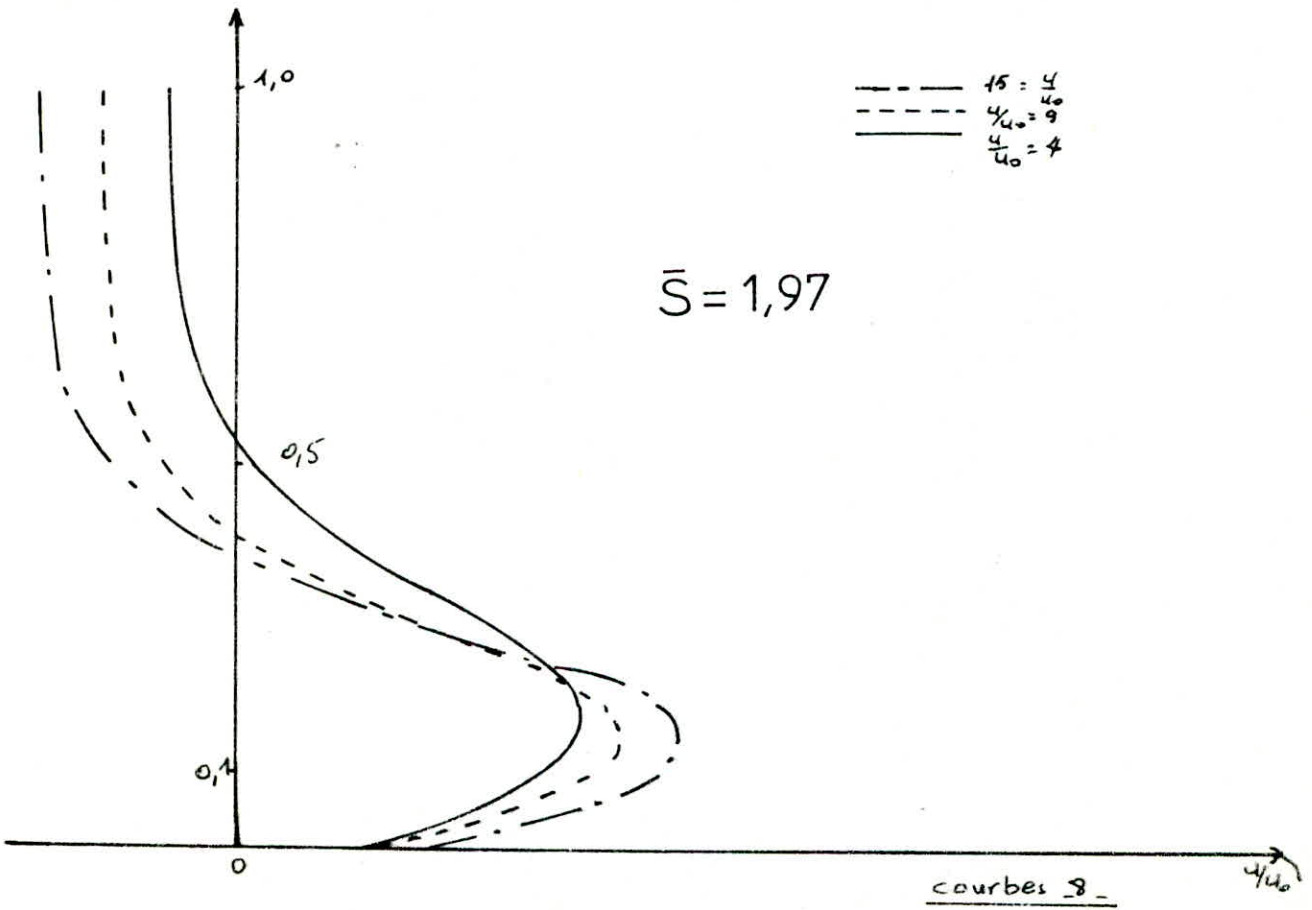
echelle  $E_H: 1 \rightarrow 2\text{cm}$   
 $E_V: 0,1 \rightarrow 1\text{cm}$

$$\bar{S} = 1,48$$



---  $\frac{15}{u_0} = \frac{4}{9}$   
- - -  $\frac{15}{u_0} = \frac{9}{9}$   
— — —  $\frac{15}{u_0} = \frac{4}{4}$

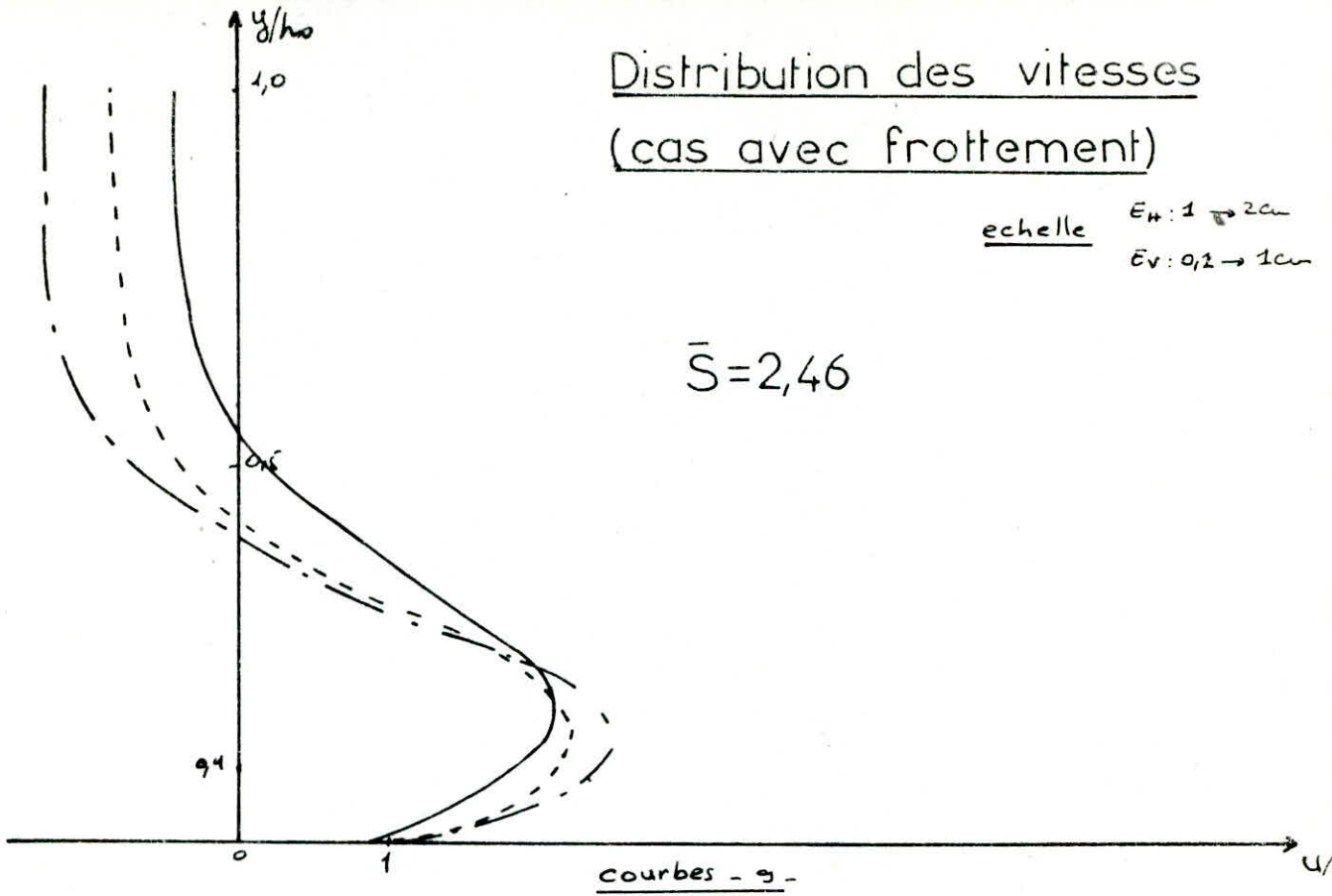
$$\bar{S} = 1,97$$



# Distribution des vitesses (cas avec frottement)

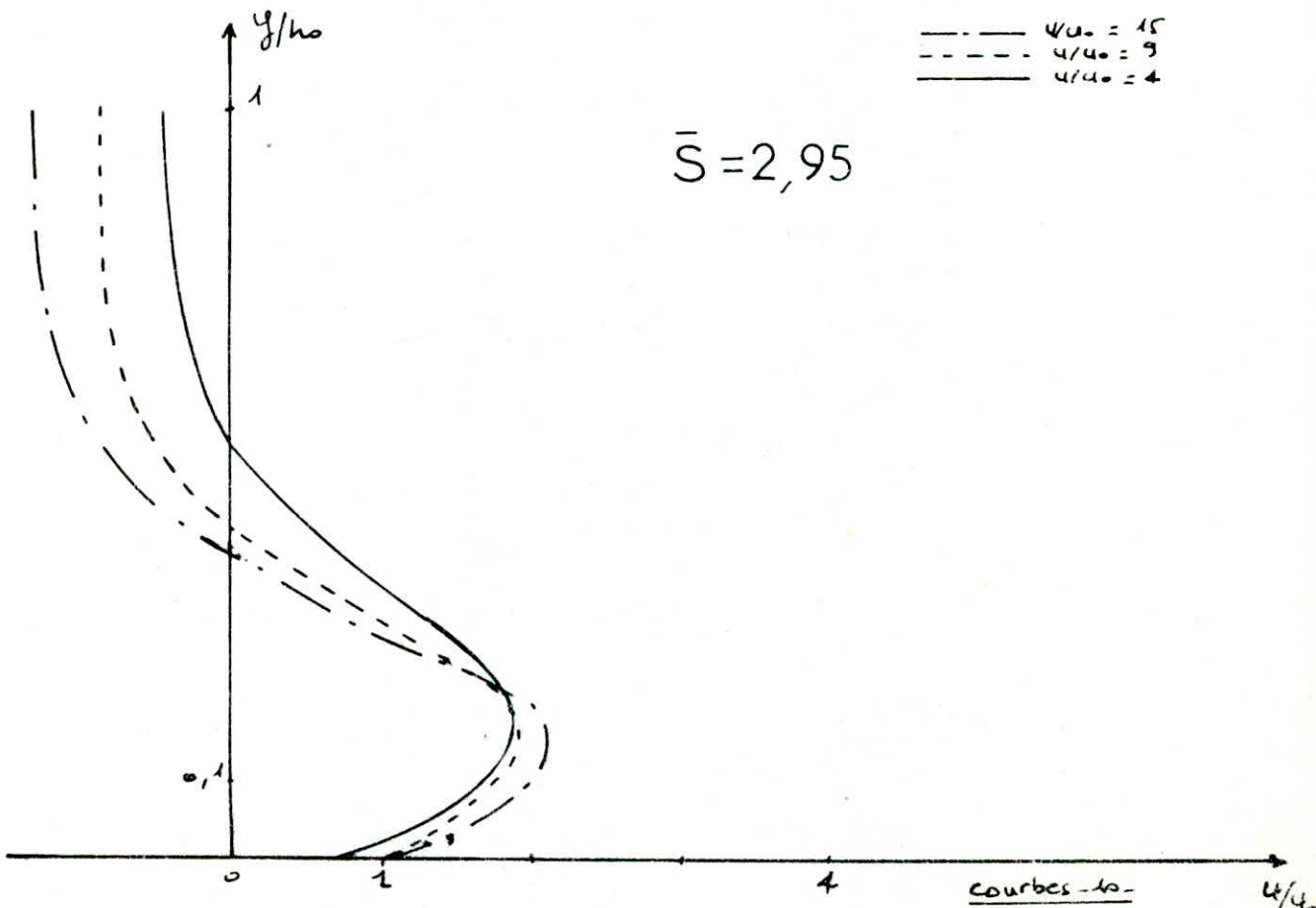
echelle  $E_H: 1 \rightarrow 2cm$   
 $E_V: 0,2 \rightarrow 1cm$

$$\bar{S} = 2,46$$



$$\bar{S} = 2,95$$

---  $u/u_0 = 15$   
 - - -  $u/u_0 = 9$   
 - - -  $u/u_0 = 4$



### III.3 CONCLUS SUR LES RESULTATS THEORIQUES

Pour l'ensemble des diagrammes tracés pour le cas sans frottement (courbes : 1, 2, 3, 4) et pour le cas avec frottement (courbes : 5, 6, 7, 8, 9, 10) nous remarquons que : du fond jusqu'à une profondeur proche de  $\frac{1}{2} \frac{H}{h_0}$ , la vitesse est positive, au-delà de cette valeur, les vitesses deviennent négatives. Pour le cas sans frottement, les vitesses varient légèrement, mais pour le cas avec frottement, elles varient progressivement. Les vitesses dans les deux cas sont fortes (elles atteignent leurs valeurs maximales) au niveau de la vanne ( $\bar{S}=0$ ) au fur à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci, elles diminuent; ce qui conduit à une diminution de l'énergie cinétique. Par conséquent, nous pouvons dire que le ressant est un dissipateur d'énergie.

Nous constatons que toutes les courbes (1, 2, 3, ..., 10) ont la même allure, ce qui explique que notre théorie peut être généralisée pour différentes vitesses.

Pour pouvoir déterminer la longueur du ressant, nous avons établi un programme;

Le tracé du profil des vitesses, nous permet de déterminer la longueur  $L$  (elle correspond à  $I$  dans le programme).

à partir de cette valeur  $L$ , le régime fluvial est atteint.

cas sans frottement.

$U_{max}$	4	9	15
$L \approx I$	1701	2601	2901

cas avec frottement.

$U_{max}$	4	9	15
$L \approx I$	2101		

partie

Experiment a-  
le



# I GENERALITES

## I.1 Canal

Les écoulements dans les canaux découverts sont ceux pour lesquels il existe une surface libre soumise généralement à la pression atmosphérique.

L'écoulement a lieu sous l'action des forces de gravité. Les canaux peuvent être constitués aussi bien par les fleuves, rivières, et les canaux artificiels qui comportent généralement une section de forme géométrique simple.

## I.2 Deversoir

Une partie de l'ouvrage endiguant un courant à surface libre par lequel l'eau s'écoule sous l'effet de la gravité s'appelle "deversoir".

Les deversoirs sont largement utilisés sous la forme de barrage, d'ouvrage de tête, de jaugeurs.....

La théorie des deversoirs permet de calculer les parties des ouvrages de passage et de vidange d'eau.

Le tronçon de l'ouvrage par lequel se produit l'écoulement s'appelle "seuil du deversoir".

On distingue deux types de deversoirs :

- deversoir à seuil épais
- deversoir à mince paroi

Ce dernier, on le trouve sous forme triangulaire, il est destiné à mesurer les faibles débits dans les canaux de laboratoire.

### I.3 Micro-moulinet

C'est un système de palette ou d'hélice monté sur un axe vertical ou horizontal.

Il est constitué par un rotor dont la vitesse est en fonction de la vitesse locale du fluide dans lequel est plongé; la relation entre la vitesse et le nombre de tours est obtenue au moyen d'essai préalable d'étalonnage, appelée courbe caractéristique du moulinet :

$$V = a + nb$$

avec :  
 $V$  : la vitesse  
 $n$  : nombre de tours  
 $a, b$  : coefficients dépendants du type d'appareil.

### I.4 Anémomètre à fil chaud & à film chaud

L'anémomètre à fil chaud ou à film chaud est pour l'instant, l'instrument le plus employé et le mieux adapté aux mesures d'intensités de turbulence dans

les écoulements gazeux ou liquides.

L'anémomètre à fil chaud est un fil en platine ou en tungstène très fin (quelques millimètres de diamètre) chauffé par un courant électrique et placé dans le courant du fluide; le signal de sortie des fils chauds peut être examiné soit sur l'écran d'un oscilloscope, soit sur un papier sensible après enregistrement par méthode optique. Aussi la méthode de mesure pour l'anémomètre à film chaud consiste principalement à digitaliser le signal turbulent et d'étudier au moyen d'un programme d'ordinateur permettant de séparer les points appartenant à la phase gazeuse.

### I.5 Tube de Pitot

C'est un appareil pour mesurer la vitesse locale des eaux courantes, inventé par Henri Pitot (1732)

#### Principe:

le tube de Pitot est constitué essentiellement par deux prises de pression, l'une A d'axe perpendiculaire à l'écoulement et l'autre B parallèle à l'écoulement. (voir fig -19-)

la première prise de pression (A) mesure la pression statique, la deuxième (B) donne la pression totale.

$P_A$  : la pression statique

$P_B$  : la pression totale

la pression dynamique et la différence entre la pression totale et la pression statique.

$$P_B - P_A = \frac{P}{\rho} + \frac{\rho V^2}{2} - \frac{P}{\rho} = \frac{\rho V^2}{2}$$

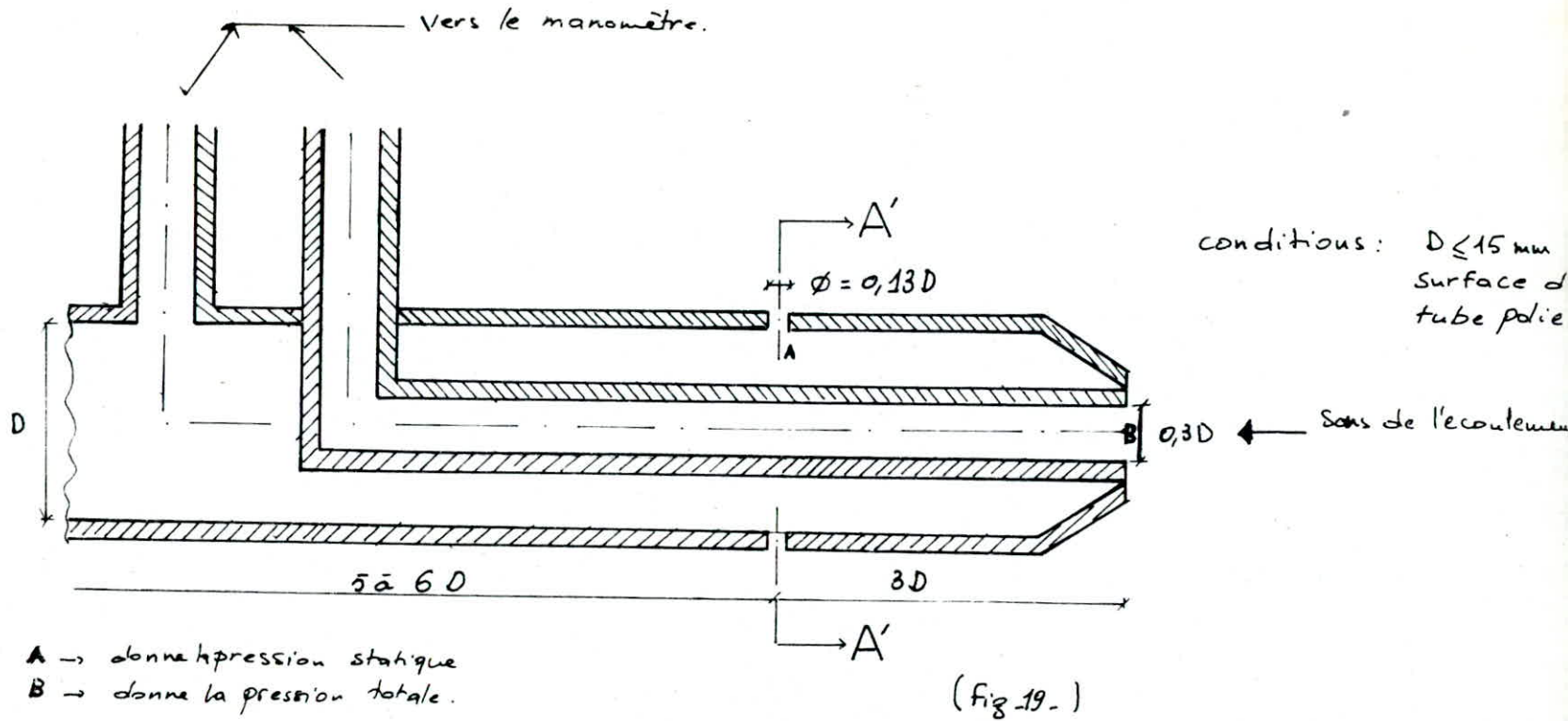
on pourra donc déduire la vitesse  $V$  connaissant la valeur de la masse volumique  $\rho$ .

on réalise facilement un tube de Pitot à l'aide de deux tubes en verres ; l'un coudé à l'une de ses extrémités dont l'orifice est placé au point d'arrêt qui nous permet de mesurer la pression totale, et l'autre tube permet de mesurer la pression statique.

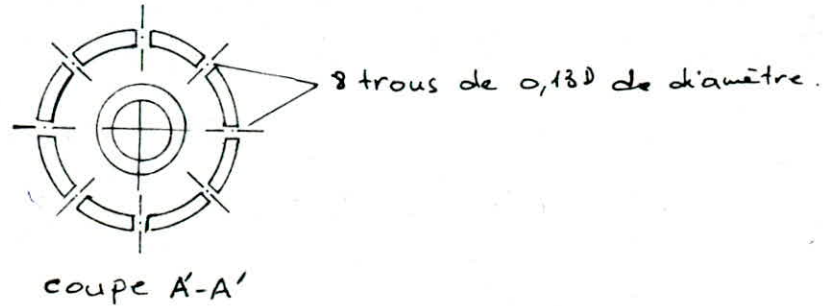
---

?

69



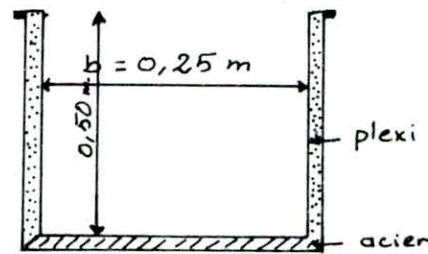
tube de Pitot



## II MANIPULATION ET RESULTATS DE MESURES

### II.1 Dispositif experimental canal ouvert :

L'expérience a été faite dans un canal vitré en plexi, ouvert et horizontal, de fond en acier, la section du canal est rectangulaire ( largeur = 0,25 m ; longueur = 10 m ; profondeur = 0,50 m ) ( voir Fig. 20. )



( fig. 20. )

### appareillage de mesure

- Un limnimètre sur rails pour la mesure des charges à l'amont et à l'aval dans le canal.
- une vanne de fond fabriquée en plexi
- Un tube de Pitot fabriqué et un autre Standard
- Une vanne persienne réglable.
- Un manomètre différentiel pour la mesure des pressions
- un deversoir triangulaire d'un angle  $2\alpha = 53^\circ$
- un limnimètre pour déterminer le débit à l'aval.

Pour  $u/u_0 = 4$ , on a utilisé le tube fabriqué  
qu'on n'a pas pu l'utilisé pour  $u/u_0 = 7, 9$   
pour des raisons de dimensions, pour cela  
on a été obligé d'utiliser le tube standard.

# II.2. Tableaux des résultats

$$a = 2 \text{ cm}; \psi/U_0 = 4$$

Tableau N° 1

$\bar{S} = \frac{x}{h_{av}}$	$y_{cm}$	$y/h_0$	$P_T (mm)$	$P_S (mm)$	$P - P_{S_{(mm)}}$	$U^2 (m^2/s^2)$	$U (m/s)$	$\psi/U_0$
$X = 6 \text{ cm}; \bar{S} = 0,5$	0,5	0,08	82,5	60	22,50	0,441	0,664	3,02
	0,6	0,10	83,0	60	23,00	0,451	0,672	3,05
	1,2	0,20	67,0	52	15,00	0,294	0,542	2,46
	1,8	0,30	58,5	46	12,50	0,245	0,495	2,25
	2,4	0,40	41,5	41	0,50	0,040	0,099	0,45
	3,0	0,50	33,0	33	0	0	0	0
	3,6	0,60	27,5	29	-1,5	—	—	—
$X = 8 \text{ cm}; \bar{S} = 1$	0,6	0,10	72,5	60,0	12,5	0,245	0,495	2,25
	1,2	0,20	63,0	53,0	10,0	0,196	0,443	2,01
	1,8	0,30	56,5	48,0	8,5	0,167	0,408	1,86
	2,4	0,40	43,0	41,0	2,0	0,039	0,198	0,90
	3,0	0,50	34,5	34,5	0	0	0	0
	3,6	0,60	27,5	28,0	-0,5	—	—	—
$X = 12 \text{ cm}; \bar{S} = 1,5$	0,65	0,1	83,5	65,0	18,5	0,363	0,602	2,74
	1,30	0,2	74,5	59,0	15,5	0,304	0,551	2,51
	1,95	0,3	57,0	54,0	3,0	0,059	0,243	1,10
	2,60	0,4	48,0	47,0	1,0	0,020	0,140	0,64
	3,25	0,5	30,0	30,0	0	0	0	0
	3,90	0,6	25,5	26,0	-0,5	—	—	—



suite du tableau N° 1

$S = \frac{x}{h_{av}}$	$Y_{cm}$	$Y/h_0$	$P_t (mm)$	$P_s (mm)$	$P_t - P_s (mm)$	$u^2 (m^2/s^2)$	$u (m/s)$	$\psi u_0$
$X = 16 \text{ cm} ; h_0 = 7 \text{ cm}$ $S = 2$	0,7	0,1	76,5	70,0	6,5	0,128	0,357	1,62
	1,4	0,2	75,0	64,0	9,0	0,177	0,420	1,91
	2,1	0,3	61,0	57,0	4,0	0,078	0,280	1,27
	2,8	0,4	51,0	49,0	2,0	0,039	0,198	0,90
	3,5	0,5	42,0	41,5	0,5	0,010	0,099	0,45
	4,2	0,6	33,5	34,0	-0,5	—	—	—

$a$  : l'ouverture de la vanne = 2

$h_{ref}$  : hauteur de référence = 4 cm

$h'$  : hauteur lue à l'aval du ressaut = 12 cm

$h_{av}$  : hauteur réelle à l'aval du ressaut

$$h_{av} = h' - h_{ref} = 12 - 4 = 8 \text{ cm.}$$

$H_{ref}$  : hauteur de référence dans le bassin = 13,58 cm

$H'$  : hauteur lue dans le bassin = 26,83 cm

$H_0$  : hauteur réelle d'eau dans le bassin

$$H_0 = H' - H_{ref} = 26,83 - 13,58 = 13,25 \text{ cm.}$$

$$H_0 = 132,5 \text{ mm} \Rightarrow Q = 4,42 \text{ l/s}$$

le débit  $Q$  est déduit par le tableau donnant le débit en fonction de la hauteur pour un déversoir triangulaire [4]

$$u_0 = \frac{Q}{b h_{av}} ; b = 25 \text{ cm} ; h_{av} = 8 \text{ cm}$$

$$u_0 = \frac{Q}{b h_{av}} = \frac{4,42 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,22 \text{ m/s}$$

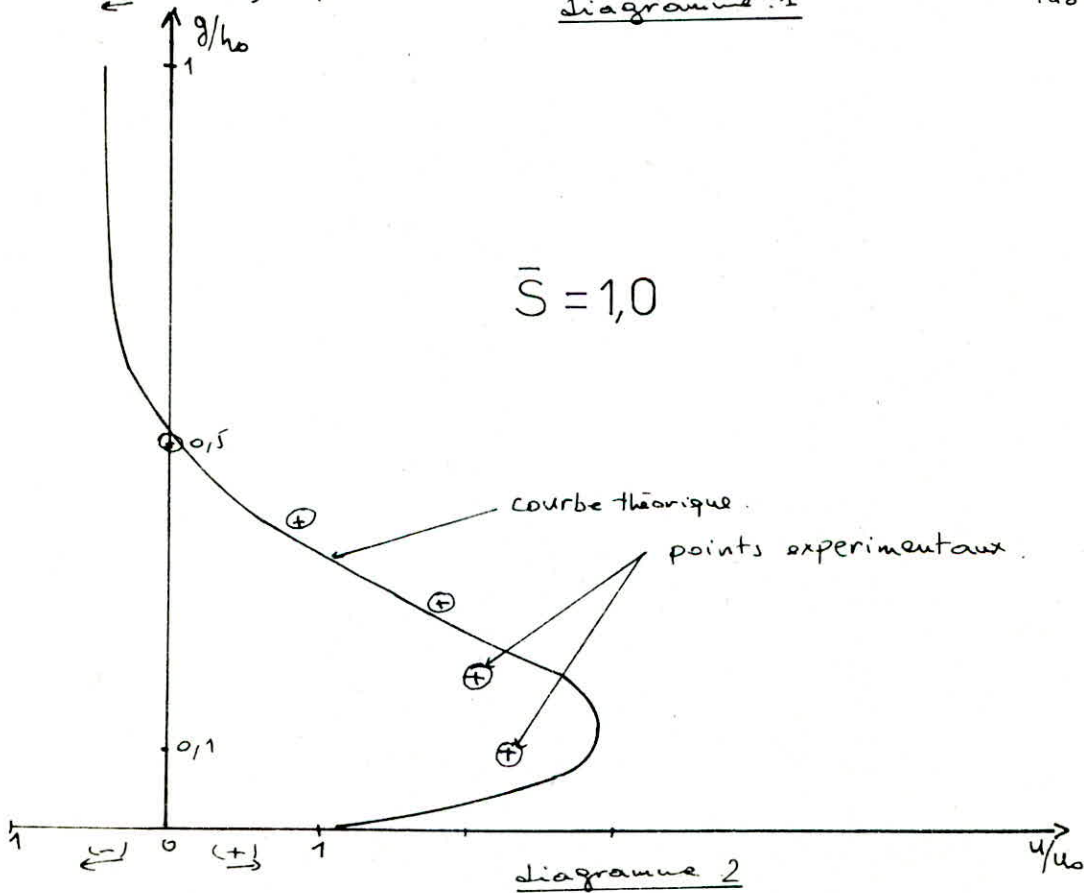
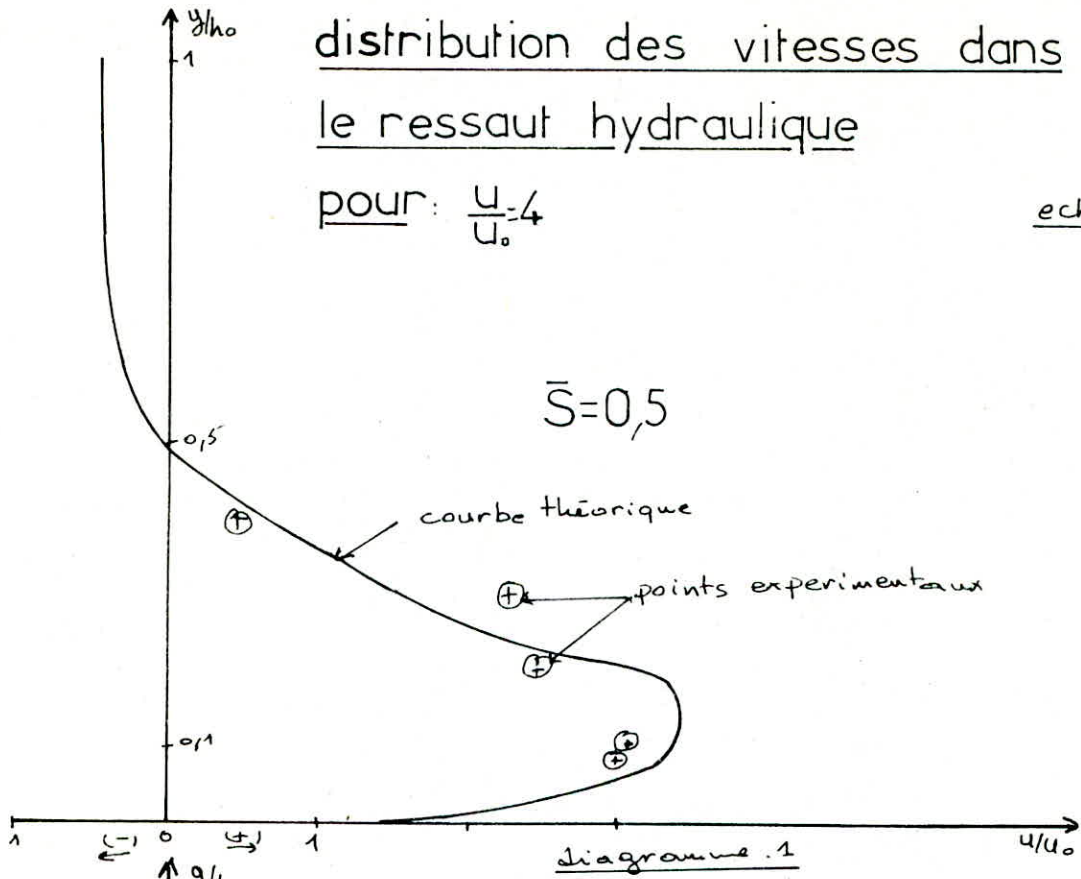
$u_0$ : étant la vitesse moyenne dans la section où la distribution des vitesses est régulière.

Voir les diagrammes: ( 1, 2, 3, 4 ) donnant la distribution des vitesses pour différentes sections du ressaut hydraulique

# distribution des vitesses dans le ressaut hydraulique

pour:  $\frac{u}{u_0} = 4$

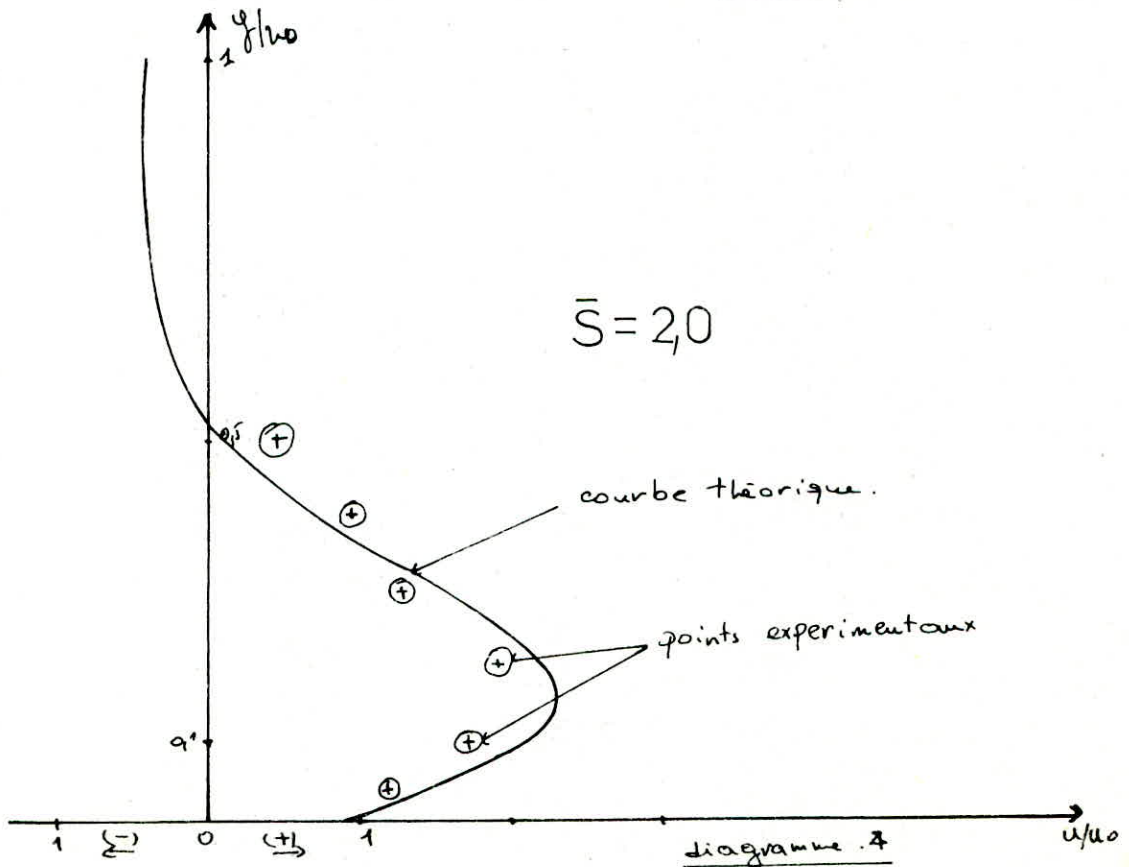
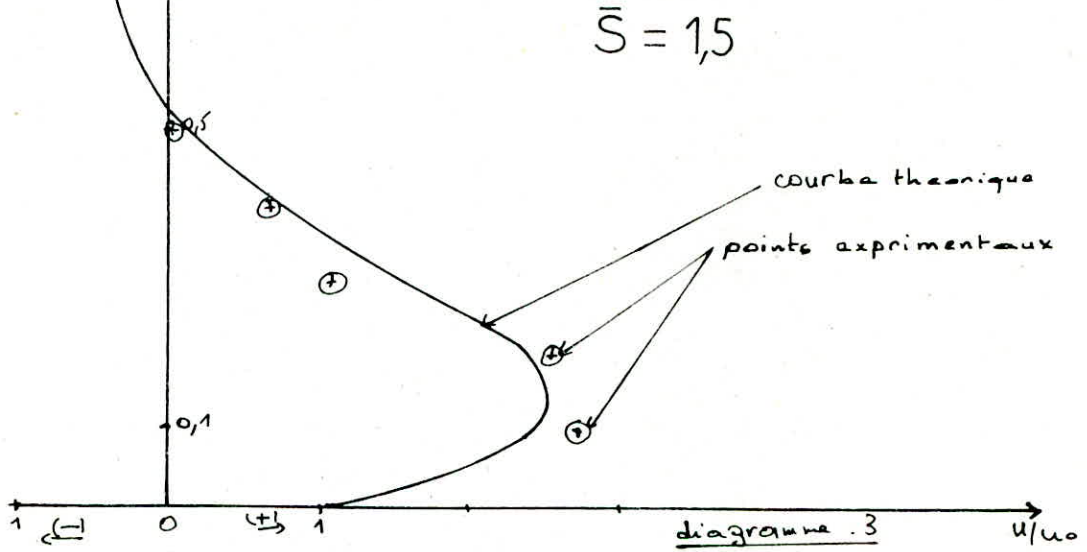
echelle  $E_H: 1 \rightarrow 2\text{cm}$   
 $E_V: 0,1 \rightarrow 1\text{cm}$



# distribution des vitesses

pour:  $\frac{u}{u_0} = 4$

echelle:  $E_H \ 1 \rightarrow 2cm$   
 $E_V \ 0,1 \rightarrow 1cm$



$$a = 2 \text{ cm} ; (u/u_0) = 7$$

Tableau N° 2

$\bar{S} = \frac{x}{h_{av}}$	$y_{\text{cm}}$	$y/h_0$	$P_f$ (mm)	$P_s$ (mm)	$P_f - P_s$ (mm)	$u^2$ (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$u$ (m/s)	$u/u_0$
$X = 7 \text{ cm}$ $h_0 = 10 \text{ cm}$ $\bar{S} = 0,5$	0,5	0,05	126	106	20,0	0,392	0,626	3,060
	1,0	0,10	148	98	50,0	0,581	0,990	4,830
	2,0	0,20	97,5	85	12,5	0,245	0,495	2,420
	3,0	0,30	78,5	78	0,5	0,10	0,099	0,483
	4,0	0,40	67	67,0	0	0	0	0
	5,0	0,50	57	57,5	-0,5	—	—	—
	6,0	0,60	44,5	45,0	-0,5	—	—	—
$X = 14 \text{ cm}$ $h_0 = 10 \text{ cm}$ $\bar{S} = 1$	0,5	0,05	124,0	106,0	18,0	0,353	0,594	2,900
	1,0	0,10	115,5	96,0	19,5	0,383	0,619	3,020
	2,0	0,20	100,0	88,0	12,0	0,235	0,485	2,370
	3,0	0,30	83,5	79,5	4,0	0,078	0,280	1,370
	4,0	0,40	68,5	68,0	0,5	0,01	0,099	0,483
	5,0	0,50	58,5	58,5	0	0	0	0
	6,0	0,60	49,0	50	-0,5	—	—	—
$X = 21 \text{ cm}$ $h_0 = 11,5 \text{ cm}$ $\bar{S} = 1,5$	0,5	0,04	124,0	120,0	4,0	0,078	0,280	1,37
	1,15	0,10	121,0	104,5	16,5	0,324	0,569	2,78
	2,30	0,20	99,0	90,0	9,0	0,177	0,420	2,05
	3,45	0,30	79,5	78,0	1,5	0,029	0,172	0,84
	4,60	0,40	69,5	69,5	0	0	0	0
	5,75	0,50	56,0	57,0	-1,0	—	—	—

suite du tableau N° 2

$S = \frac{x}{h_{av}}$	$y_{cm}$	$y/h_0$	$P_T (mm)$	$P_S (mm)$	$P_T - P_S$ <sup>(mm)</sup>	$U^2$ <sub>(m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>)</sub>	$U$ <sub>(m/s)</sub>	$U/U_0$
$h_0 = 11,5 \text{ cm}$	0,50	0,04	118,0	115,0	3,5	0,069	0,262	1,28
	1,15	0,10	119,5	104,0	15,5	0,304	0,551	2,69
	2,30	0,20	102,0	94,0	8,0	0,157	0,396	1,93
$X = 28 \text{ cm}$ $S = 2$	3,45	0,30	85,5	82,0	3,5	0,069	0,262	1,28
	4,60	0,40	67,0	67,0	0	0	0	0
	5,75	0,50	51,0	52,0	-1,0	-	-	-

$$h_{ref} = 4 \text{ cm} \quad a = 2 \text{ cm}$$

$$h' = 18 \text{ cm}$$

$$h_{av} = h' - h_{ref} = 18 - 4 = 14 \text{ cm}$$

$$H_{ref} = 13,58 \text{ cm}$$

$$H' = 29,70 \text{ cm}$$

$$H_0 = H' - H_{ref} = 29,70 - 13,58 = 16,12 \text{ cm}$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$H_0 = 161,2 \text{ mm} \Rightarrow Q = 7,19 \text{ l/s} \Rightarrow U_0 = \frac{Q}{bh_{av}} = \frac{7,19 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 14 \cdot 10^{-4}}$$

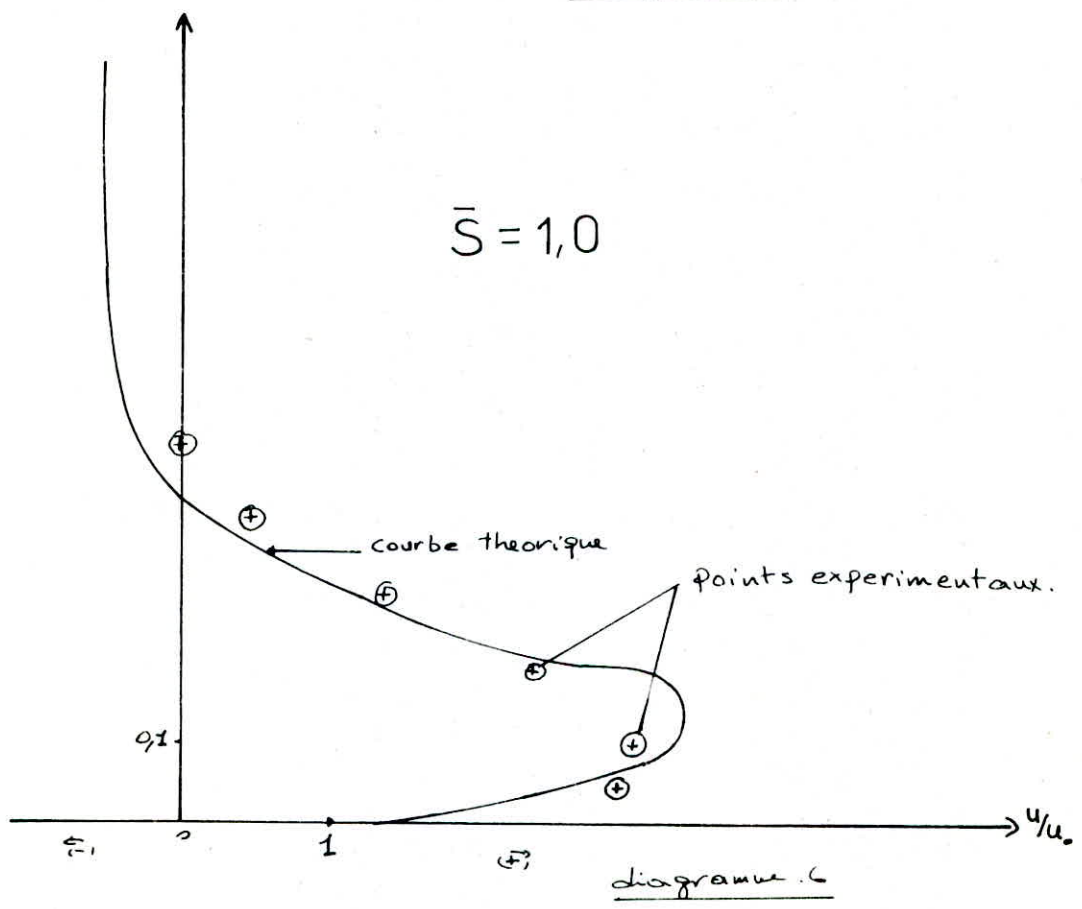
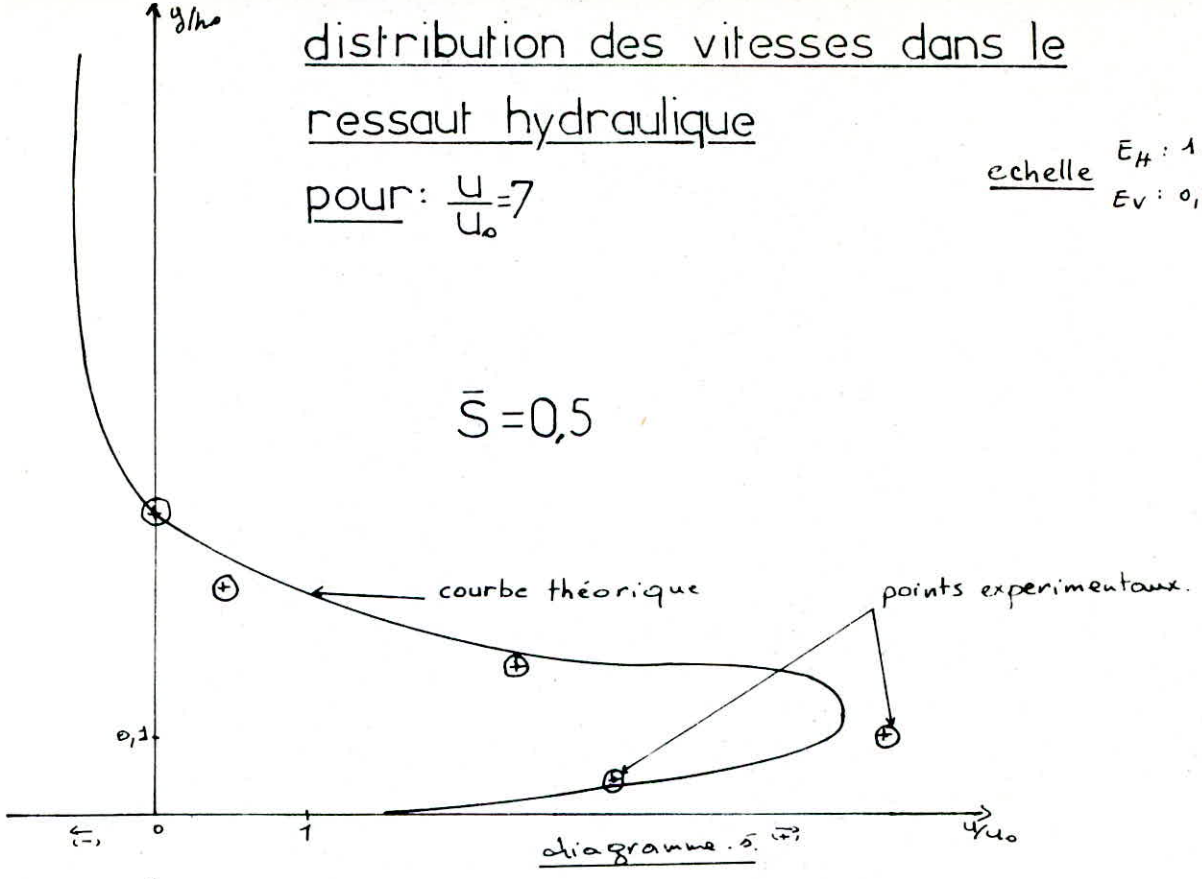
$$U_0 = 0,205 \text{ m/s}$$

Voir diagrammes : 5, 6, 7, 8

distribution des vitesses dans le  
ressaut hydraulique

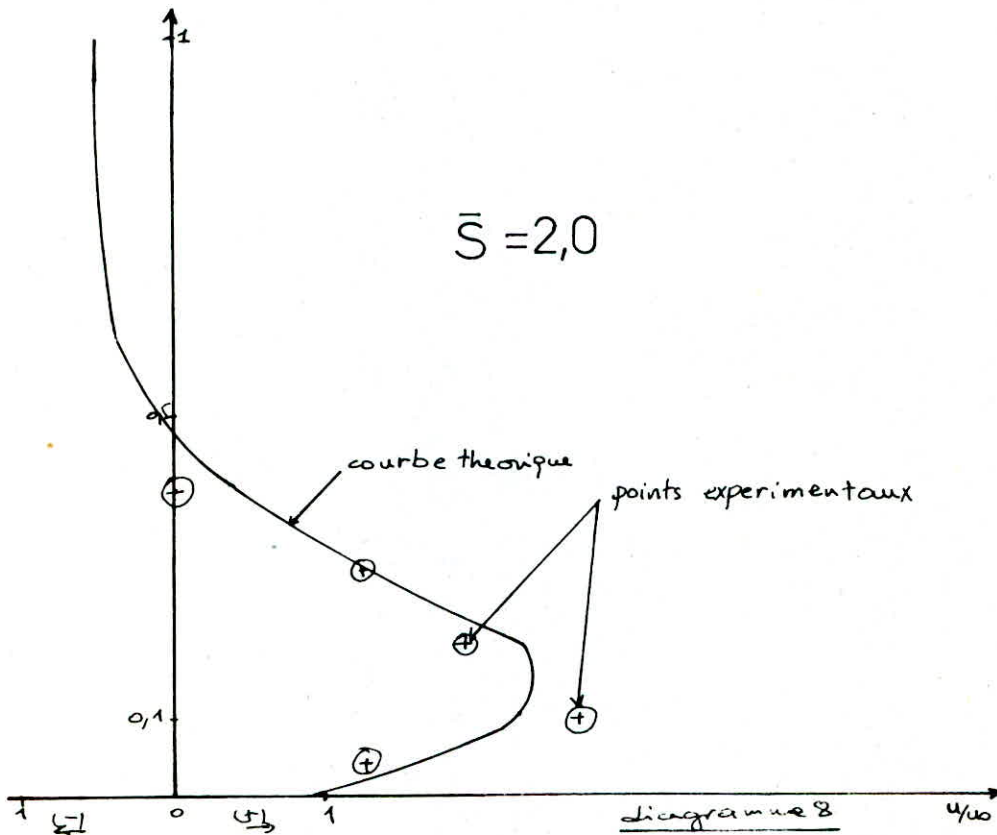
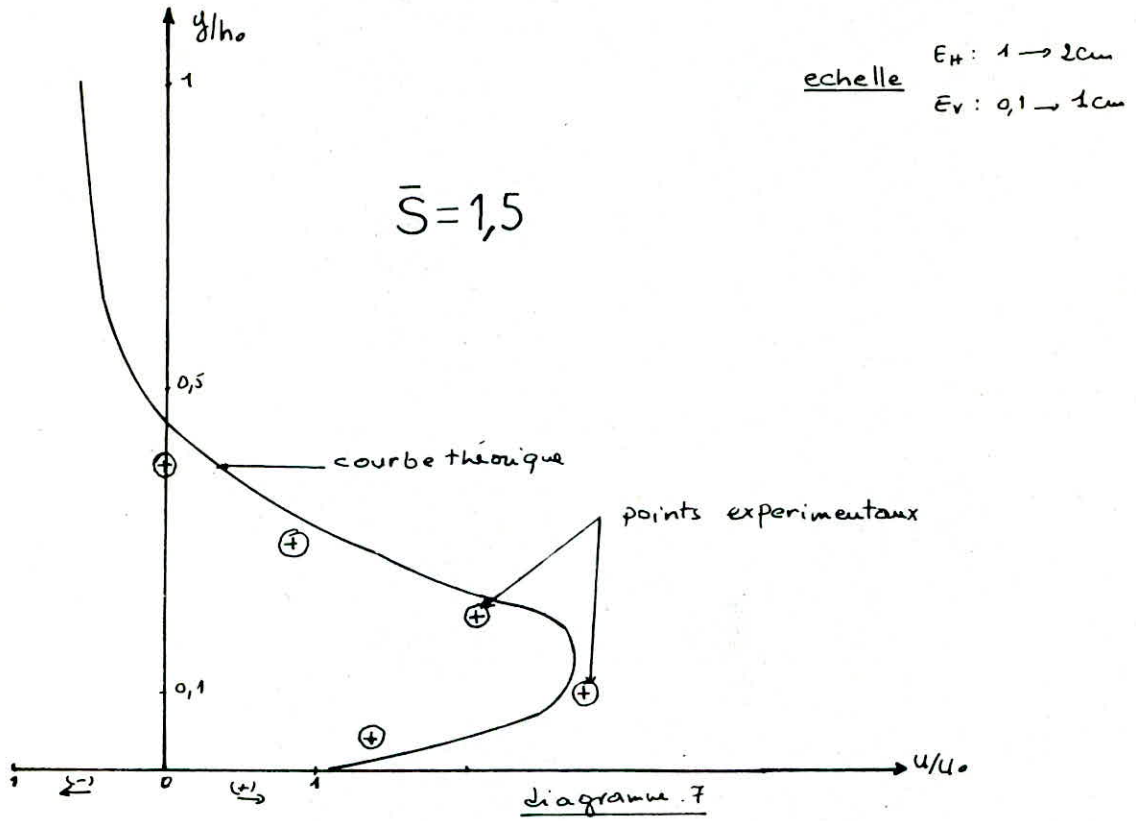
pour:  $\frac{u}{u_0} = 7$

echelle  $E_H: 1 \rightarrow 2cm$   
 $E_V: 0,1 \rightarrow 1cm$



# distribution des vitesses

pour  $\frac{u}{u_0} = 7$





$$a = 2 \text{ cm}; \quad \psi/U_0 = 9$$

Tableau N°3

$\bar{S} = \frac{x}{h_0}$	$y_{(cm)}$	$y/h_0$	$P_t (mm)$	$P_s (mm)$	$P_t - P_s$	$U^2 (m^2/s^2)$	$U (m/s)$	$\psi/U_0$
$h_0 = 15$	$\bar{S} = 0,5$	0,6	190,0	150,0	40,0	0,785	0,886	3,71
		1,5	203,0	134,5	68,5	1,343	1,159	4,85
		3,0	145,0	125,0	20,0	0,392	0,626	2,62
		4,5	107,5	107,0	0,5	0,010	0,099	0,41
		6,0	90,0	90,0	0	0	0	0
		7,5	76,5	77,0	-0,5	-	-	-
		9,0	61,0	62,0	-1,0	-	-	-
		10,5	44,5	46,0	-1,5	-	-	-
		12,0	31,0	32,5	-1,5	-	-	-
		13,5	16,0	17,5	-1,5	-	-	-
$h_0 = 15$	$\bar{S} = 1$	0,6	163,5	150,0	13,5	0,265	0,514	2,15
		1,5	167,8	136,0	31,8	0,624	0,790	3,30
		3,0	137,0	120,5	16,5	0,324	0,569	2,38
		4,5	117,5	116,0	1,5	0,029	0,172	0,72
		6,0	98,0	98,0	0	0	0	0
		7,5	83,5	84,0	-0,5	-	-	-
		9,0	64,0	65,0	-1,0	-	-	-
		10,5	49,0	50,5	-1,5	-	-	-
		12,0	33,0	35,0	-2,0	-	-	-
		13,5	15,0	18,5	-3,5	-	-	-
$h_0 = 18$	$\bar{S} = 1$	0,6	163,5	150,0	13,5	0,265	0,514	2,15
		1,5	167,8	136,0	31,8	0,624	0,790	3,30
		3,0	137,0	120,5	16,5	0,324	0,569	2,38
		4,5	117,5	116,0	1,5	0,029	0,172	0,72
		6,0	98,0	98,0	0	0	0	0
		7,5	83,5	84,0	-0,5	-	-	-
		9,0	64,0	65,0	-1,0	-	-	-
		10,5	49,0	50,5	-1,5	-	-	-
		12,0	33,0	35,0	-2,0	-	-	-
		13,5	15,0	18,5	-3,5	-	-	-

suite du tableau N°3

$\bar{S} = \frac{x}{h_0}$	$Y_{cm}$	$Y/h_0$	$P_f$ (mm)	$P_s$ (mm)	$P_f - P_s$ (mm)	$u^2$ (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$u$ (m/s)	$u/u_0$
$h_0 = 16 \text{ cm}$ $\bar{S} = 1,5$ $X = 27 \text{ cm}$	0,5	0,03	167,0	160,0	7	0,137	0,370	1,55
	1,6	0,10	170,0	148,0	22	0,432	0,657	2,75
	3,2	0,20	149,0	134,0	15	0,294	0,542	2,27
	4,8	0,30	118,5	116,0	2,5	0,049	0,221	0,93
	6,4	0,40	100,0	100,0	0	0	0	0
	8,0	0,50	83,5	84,0	-0,5	—	—	—
	9,6	0,60	64,0	65,0	-1,0	—	—	—
	11,2	0,70	49,5	51,0	-1,5	—	—	—
	12,8	0,80	33,0	35,0	-2,0	—	—	—
	14,4	0,90	15,0	17,0	-2,0	—	—	—
$h_0 = 16 \text{ cm}$ $\bar{S} = 2$ $X = 36 \text{ cm}$	0,5	0,03	165,0	160,0	5,0	0,098	0,313	1,31
	1,6	0,10	169,0	143,0	17,0	0,333	0,578	2,41
	3,2	0,20	143,0	130,0	13,0	0,255	0,505	2,11
	4,8	0,30	117,5	115,0	2,5	0,049	0,221	0,93
	6,4	0,40	102,0	102,0	0	0	0	0
	8,0	0,50	82,5	83,0	-0,5	—	—	—
	9,6	0,60	67,0	68,0	-1,0	—	—	—
	11,2	0,70	50,0	52,0	-2,0	—	—	—
	12,8	0,80	32,5	34,5	-2,0	—	—	—
	14,4	0,90	15,0	17,0	-2,0	—	—	—

$$D = 2 \text{ cm}$$

$$h_{\text{ref}} = 4 \text{ cm}$$

$$h' = 22 \text{ cm}$$

$$h_{\text{av}} = h' - h_{\text{ref}} = 22 - 4 = 18 \text{ cm.}$$

} dans le canal

$$H_{\text{ref}} = 13,58 \text{ cm}$$

$$H' = 32,5 \text{ cm}$$

$$H_0 = 32,5 - 13,58 = 18,92 \text{ cm}$$

} dans le bassin

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$\circ \quad H_0 = 189,2 \text{ mm} \Rightarrow Q = 10,75 \text{ l/s}$$

$$U_0 = \frac{Q}{bh_{\text{av}}} = \frac{10,75 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 18 \cdot 10^{-4}} = 0,239 \text{ m/s}$$

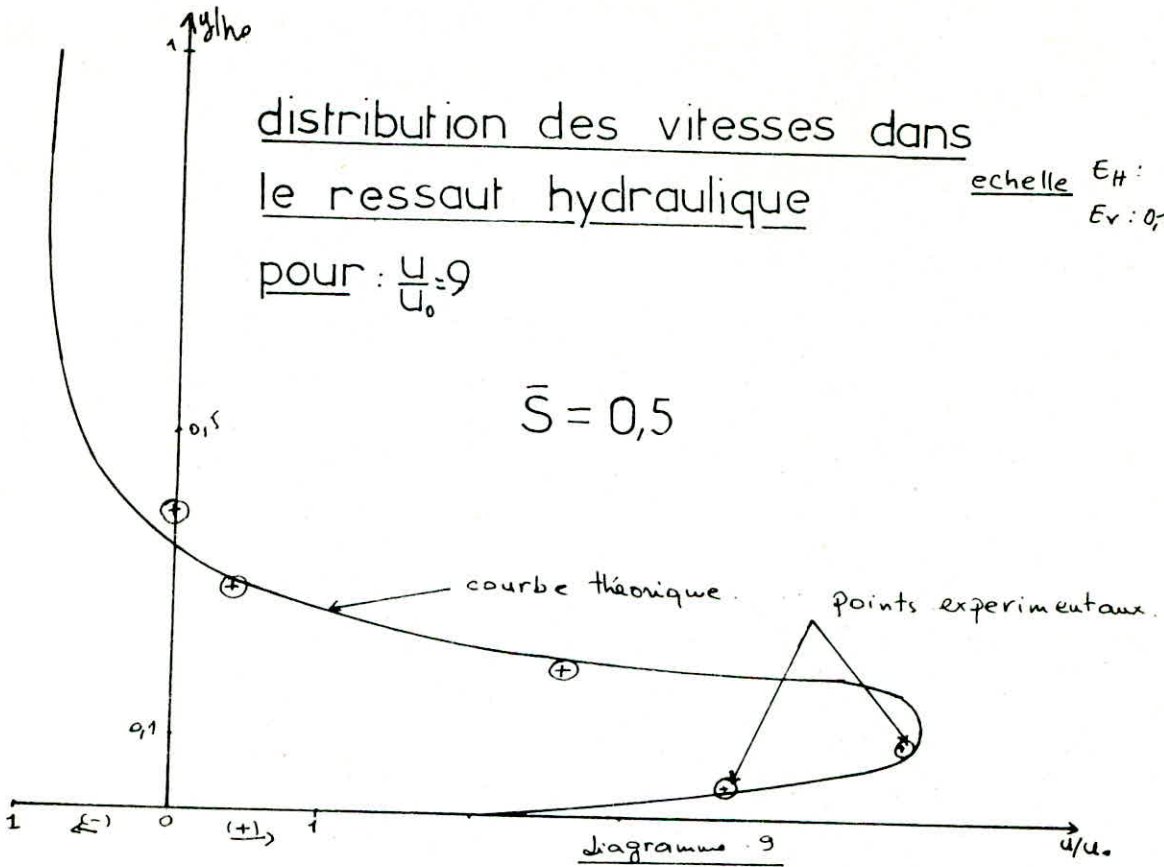
Voir diagrammes, 9, 10, 11, 12

distribution des vitesses dans le ressaut hydraulique

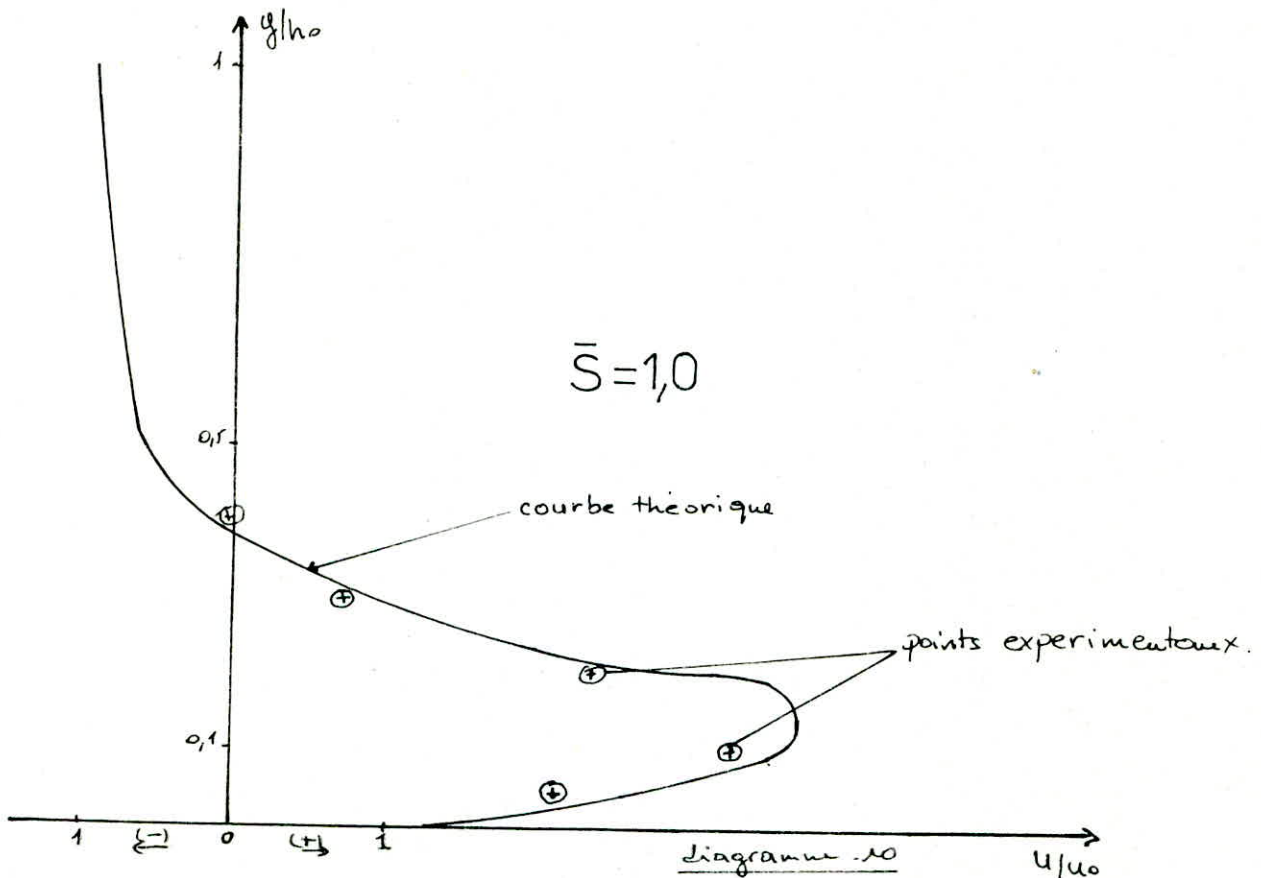
échelle  $E_H: 1 \rightarrow 2\text{cm}$   
 $E_v: 0,1 \rightarrow 1\text{cm}$

pour:  $\frac{U}{U_0} = 9$

$\bar{S} = 0,5$



$\bar{S} = 1,0$

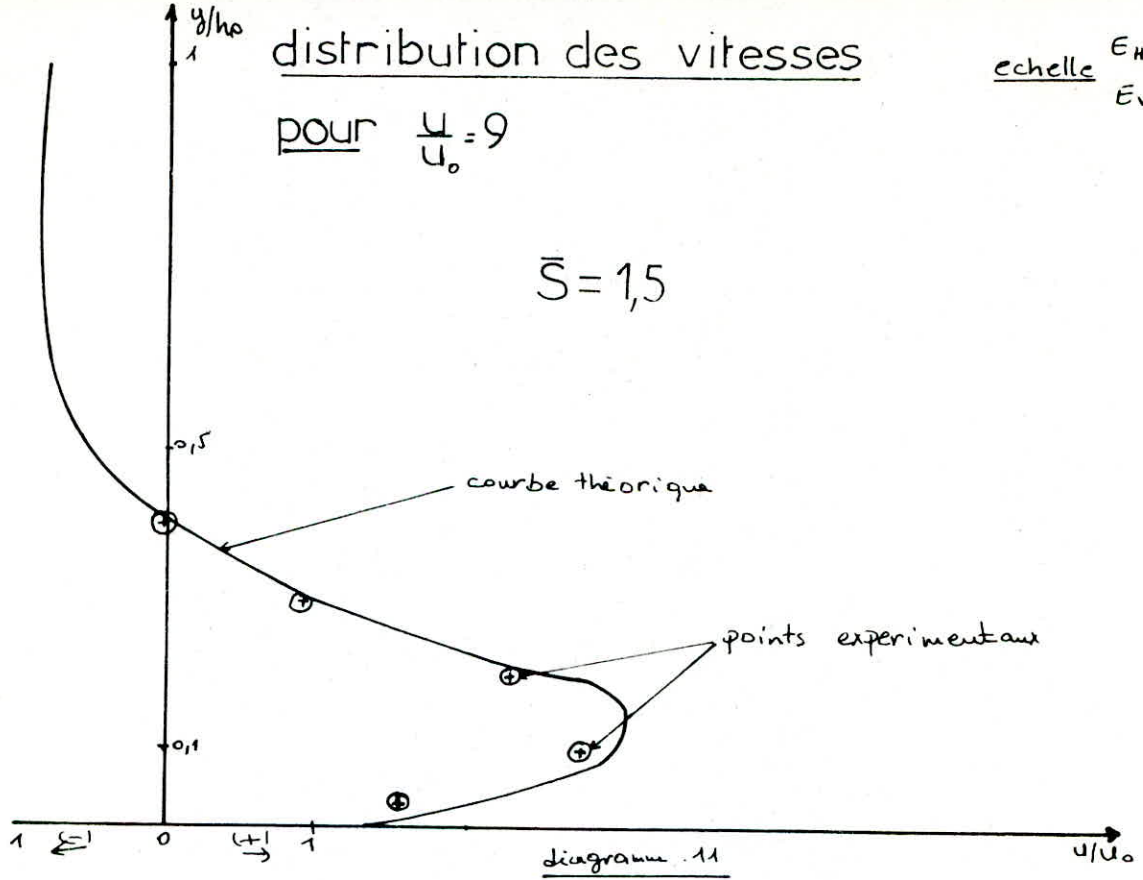


# distribution des vitesses

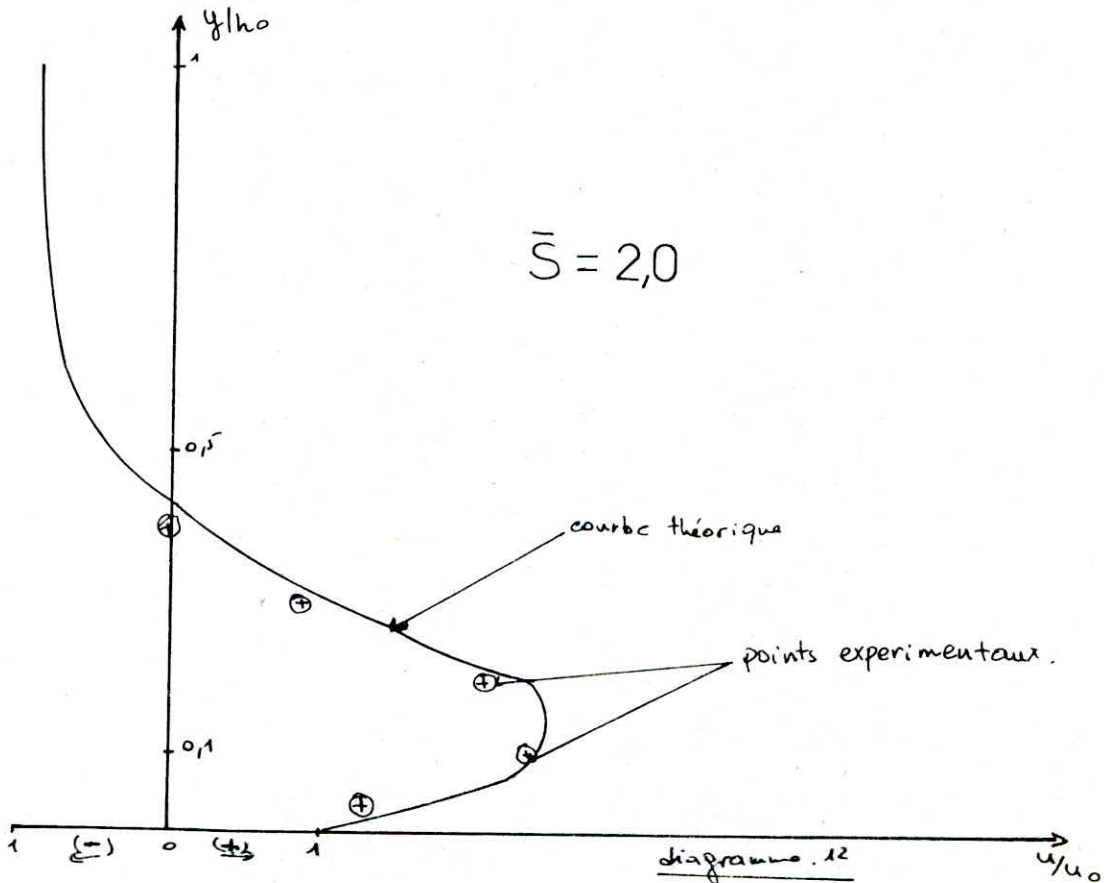
echelle  $E_H : 1 \rightarrow 20$   
 $E_V : 0,1 \rightarrow 10$

pour  $\frac{u}{u_0} = 9$

$\bar{S} = 1,5$



$\bar{S} = 2,0$



### III. INTERPRETATION DES GRAPHES

D'après les graphes (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) pour les différents débits à savoir ( $U_{max} = 4, 7, 9$ ) et en superposant les résultats théoriques avec ceux de l'expérience, nous constatons que la théorie est en bon accord avec l'expérience.

Dans la région du rouleau, où la pression statique, serait supérieure à la pression totale, par ailleurs la pression dynamique serait négative, ce pendant, la vitesse serait théoriquement négative, mais nous n'avons pas pu la calculer car elle est déduite de la formule

$$P_t - P_s = \frac{\rho U^2}{2}$$

$$\text{alors si } (P_t - P_s) < 0 \Rightarrow U^2 < 0$$

C'est-à-dire que le sens des vitesses s'est inversé.

Et pour le cas  $\frac{U}{U_0} = U_{max} = 15$ , nous n'avons pas pu faire des mesures : le canal est petit, la vanne de fond l'est aussi.

## CONCLUSION GENERALE

Cette étude consiste la continuation de l'étude précédente cf [4], qui avait révélé une certaine théorie pour le calcul des Profils des vitesses Pour un seul débit ( $U_{max} = 7$ ), dans ce présent travail, nous avons appliqué cette théorie sur différents débits à savoir ( $U_{max} = 4, 9, 15 \dots$ ) avec le même programme ; nous avons constaté que l'allure de profil de vitesses reste la même pour les différents débits, cependant, nous pouvons généralisé cette théorie, et qu'elle pourrait être applicable Pour n'importe quel débit.

notre système d'équation a été simplifié, en négligeant le terme  $\frac{\partial P}{\partial x}$  (le gradient de <sup>Pression</sup> vitesse) et pour une bonne précision, nous proposons une étude où on ne négligera pas ce terme et faire une expérience avec un canal plus long, afin d'aboutir à de meilleurs résultats.

le coefficient de turbulence a été pris approximativement  $\epsilon_T = 0,03$ , mais en réalité nous devons le mesurer à l'aide d'un anémomètre à laser et puisque nous <sup>ne</sup> disposons pas de ce matériel nous l'avons pris arbitrairement.

# NOTATION

$F_r$	nombre de Froude
$h_1, h_2$	Profondeurs conjuguées
$q$	débit massique
$H$	hauteur du ressaut
$L$	Longueur du ressaut
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	composantes de la vitesse moyenne dans les axes $x, y, z$
$\bar{p}$	pression moyenne
$u', v', w', p'$	les fluctuations
$X, Y, Z$	composantes de la force extérieure (force massique)
$\rho$	masse volumique
$g$	accélération de la pesanteur
$\nu$	viscosité cinématique
$\Delta$	Laplacien = $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\tau$	tension de Reynolds
$\epsilon_T$	coefficient de turbulence
$R_T$	nombre de Reynolds turbulent.
$\lambda$	coefficient de Perte de charge.
$Q$	débit



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARLIER .M : Hydraulique générale et appliquée : EyROLLES 1980
- [2] CHOW :
- [3] COMOLET .R : Mécanique expérimentale des fluides (T:2): Masson Ed. 1979
- [4] HASSAD .M : Mémoire : Etude de structure cinématique et dynamique  
d'un ressaut hydraulique noyé : Janv. 87
- [5] HOUILLE - BLANCHE : (Revue) Années 1970 - 1983 - 1984 - 1985
- [6] HUG .M : Mécanique des fluides appliquée :
- [7] JAEBER .C : Hydraulique technique : Dunod - 1960.
- [8] LANCASTRE .A : Manuel d'hydraulique générale : EyROLLES 1961
- [9] LANDAU : Mécanique des fluides
- [10] NOWAKOWSKI .C : Méthode de calcul numérique (T:2) EDT: PSI 84
- [11] OUZIAUX .R : Mécanique des fluides appliquée : DUNOD : 1978
- [12] { SEKKOUTI .B : Mémoire : Etude de la distribution des vitesses  
SENOUCI .A dans un ressaut hydraulique : Juin 1986
- [13] SEYMOUR - LIPSCHUTZ : Programmation en Fortran : EDT SCHAUM
- [14] TISON - L.T : cours d'hydraulique (T:2) : DUNOD : 1959

