

وزارة التعليم والبحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

1 et

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

ETUDE DE PHENOMENES DE
VORTEX _ METHODE OPTIQUE
EXPERIMENTALE DE CALCUL
DE LA CIRCULATION AUTOUR
D'UN VORTEX

Proposé par :

Mr. M. Bouache

Etudié par :

A. Serradj

Dirigé par :

Mr. M. Bouache

PROMOTION : SEPTEMBRE 86

REMERCIEMENTS

Au terme de cette modeste thèse, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Monsieur Bouache, mon promoteur, Pour sa contribution à l'élaboration de ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur Khettab chef de département d'hydraulique, et à tous Les Professeurs qui ont contribué à ma formation.

SYMBOLES ET UNITES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Grandeurs	Symboles	Dimensions
- célérité de la lumière dans le vide	c	$m \cdot s^{-1}$
- diamètre de la tache	d	m
- Diamètres des Orifices	D_1, D_2	cm
- résultante de toutes les forces extérieures	F	N
- composantes de la force par unité de masse suivant les directions des coordonnées cylindriques	F_r, F_θ, F_z	N
- accélération de la pesanteur	g	$m \cdot s^{-2}$
- abaissement, profondeur d'un point	h	m
- hauteur d'eau	H	m
- constantes	k, k'	sans dim.

- indices de réfraction n_1, n_2 sans dim
- vecteur de la normale
à la surface de coefficients
directeurs α', β' et γ' $\vec{N}[\alpha', \beta', \gamma']$
- trièdre de référence OXYZ
- pression; pression motrice P, P_0 $N \cdot m^{-2}$
- pression atmosphérique P_a $N \cdot m^{-2}$
- débit volumique Q $m^3 \cdot s^{-1}$
- débit volumique moyen Q_m $m^3 \cdot s^{-1}$
- coordonnée cylindrique r (avec z et θ) m
- coefficient de corrélation r_c sans dim.
- rayon de la tache
sur le radier R m
- temps t s

- composante de la vitesse
suivant l'axe Ox

u

- composante de la vitesse
suivant l'axe Oy

v

- vitesses de propagation
de la lumière dans un
milieu quelconque

V_1, V_2

$m \cdot s^{-1}$

- vecteur vitesse et composantes
cartésiennes u, v, w

$\vec{V} = [u; v; w]$

- volume

V

m^3

- vitesse, accélération tangentielle V_θ, V'_θ

$m \cdot s^{-1}, m \cdot s^{-2}$

- vitesse, accélération radiale

V_r, V'_r

$m \cdot s^{-1}, m \cdot s^{-2}$

- vitesse, accélération axiale

V_z, V'_z

$m \cdot s^{-1}, m \cdot s^{-2}$

- composante de la vitesse
suivant l'axe Oz

w

- cotes d'un point

$z_i; z_o$

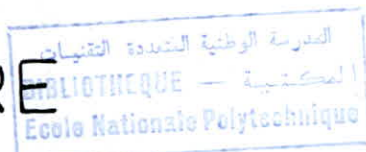
m

- Coordonnée cylindrique

z (avec r et θ)

- angle de réflexion	α	rd
- cosinus directeur de la normale \vec{N}	α' (avec β' et γ')	
- angle d'incidence	β	rd
- circulation du vecteur vitesse	Γ	$m^2 \cdot s^{-1}$
- angle de refraction	γ	rd
- angle d'inclinaison du Miroir	ε	rd
- Composante du Vecteur tourbillon	ζ (comme ξ et η)	
- Coordonnée cylindrique	θ (avec r et z)	rd
- Viscosité cinématique	ν	$m^2 \cdot s^{-1}$
- poids spécifique	$\bar{\omega}$	$kg \cdot m^{-4} \cdot s^{-2}$
- Masse volumique	ρ	$kg \cdot m^{-3}$
- tension superficielle	σ	$N \cdot m^{-1}$
- taux de rotation ou Vitesse angulaire	ω	s^{-1}

SOMMAIRE



	Pages
INTRODUCTION	1
CHAP. I - METHODES (OPTIQUES ET LEUR APPLICATION)	10
I.1. Introduction	
I.2. Photographie de l'entonnoir du vortex.	
I.3. Méthode Chronophotographique du déplacement des particules	11
I.4. Méthode des rayons réfléchis	14
4.1. Principe	
4.2. Construction Théorique	15
I.5. Méthode des rayons réfractés	24
5.1. Principe	
CHAP. II - ETUDE THEORIQUE	29
II.1. Introduction	
II.2. Tourbillon et Circulation des vitesses	30
2.1. Définition du tourbillon.	
2.2. Détermination de la Circulation des vitesses.	32
II.3. Détermination des vitesses	35
II.4. Composition réelle d'un vortex	45
II.5. EQUATION DE la surface caustique et celle de la partie convexe de l'entonnoir du vortex.	54
5.1. Equation de la partie convexe de l'entonnoir du vortex	56
5.2. Equation de la surface caustique.	60
5.2.1. Les Lois de la réflexion.	
5.2.2. Les Lois de la réfraction	62
5.2.3. Les indices de réfraction	63

5.2.4. Les Formules de Descartes65
5.2.5. Equation de La Caustique68
CHAP. III _ ETUDE EXPERIMENTALE.75
III.1. Description du dispositif Expérimental.76
1.1. Description du Banc d'essai d'Hydraulique.	
1.2. Description de La chambre Expérimentale.78
1.3. Description du dispositif Optique.80
III.2. Procédure Expérimentale.80
III.3. Aspect du vortex de vidange83
CHAP. IV _ MESURES ET ANALYSE DES RESULTATS.88
IV.1. Mesures expérimentales et présentation des résultats.	
IV.2. Analyse et Discussion des Résultats	103
CONCLUSION.	108
ANNEXE Calcul d'erreurs sur Les mesures.	109

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Dans de nombreux ouvrages hydrauliques, Le passage de l'eau d'un état d'écoulement à surface libre à un écoulement en charge est souvent accompagné de la formation de mouvements tourbillonnaires d'ensemble de la masse fluide.

En outre, d'autres anomalies (torches tourbillonnaires notamment) sont quelquefois observées au sein même d'écoulement en charge. Dans le cas d'une surface libre, les tourbillons peuvent s'amplifier créant ainsi une sorte d'entonnoir ou VORTEX.

Le cas échéant ; un entraînement d'air se produit également dans la dépression centrale : C'est le vortex aéré.

Une augmentation très rapide des vitesses est alors notée au fur et à mesure que l'on se rapproche du centre du tourbillon.

Ce phénomène se rencontre ordinairement lors de l'écoulement par des orifices, Par exemple dans la vidange de réservoirs, d'écluses,

dans les entrées de galerie en charge, dans les prises d'eau en rivière, pendant l'écoulement sous une vanne, ou encore dans les stations de pompage quelle que soit la disposition de l'orifice d'aspiration. Dans ce dernier cas, le caractère fugace du vortex a un effet très nocif sur toute l'installation notamment par les fluctuations de vitesses qui en résultent et qui peuvent être en partie à l'origine de différents effets tels que : baisse du rendement, vibrations des supports, ainsi que de divers éléments de la pompe, une tendance à favoriser le seuil de cavitation, usures anormales etc. . . .

Aussi lors d'une aspiration verticale descendante (vidange gravitaire) par un orifice centré, le vortex cause une diminution non négligeable du coefficient du débit, en plus des dangers d'aspiration de corps flottants et des bruits sporadiques intenses.

Quelle est l'origine du phénomène? . Peut-on expliquer le caractère parfois explosif de son apparition, existe-t-il des moyens de l'éviter? . Des recherches approfondies dans ce domaine ont déjà été abordées par plusieurs auteurs

Cependant dans toutes les théories émises à ce jour, il n'a pas été trouvé de calcul quantitatif précis sur l'hydrodynamique des vortex à proprement parler.

Le phénomène de la concentration du moment cinétique étant bien connu et signalé, il est rare semble-t-il que les chercheurs aient été jusqu'à donner des formules simples permettant des applications numériques traduisant concrètement ce phénomène.

Citons, cependant, la théorie du vortex élémentaire en fluide parfait définie par F. Biézel [cf. 4] :

Dérivant du principe de la conservation du moment cinétique dans toute la zone du vortex; cette théorie ne pouvait être retenue, car même dans le cas d'une circulation initiale extrêmement petite, elle conduit nécessairement à obtenir des vitesses de rotation infinies au centre de la dépression; ce qui est physiquement impossible et en contradiction totale avec l'expérience.

De plus, elle ne fournit aucune indication

quant aux voies et moyens de supprimer le vortex si ce n'est l'élimination du moindre indice de circulation si faible soit-il.

Or, ceci reste toujours impossible à réaliser dans des chambres de mise en charge ou dans des stations de pompage aux formes entièrement irrégulières même si la masse d'eau est absolument calme au début de la vidange.

De la même façon, comme tous les réservoirs en cause développent une certaine circulation à l'origine, il convient, pour parvenir à la solution recherchée, de se servir d'une théorie plus complète de ce type d'écoulement.

L'introduction de l'étude générale des phénomènes de vortex en fluide réel (cf. 12) se révèle donc la seule méthode pouvant apporter des indications intéressantes, seulement celle-ci se heurte à l'extrême complexité des équations de Naviers-Stokes dont la résolution est pratiquement impossible dans le cas général. Ce qui a conduit certains auteurs à étayer leurs calculs de diverses hypothèses simplificatrices

se différenciant par leur nombre et leur importance.

Toutefois, le cas particulièrement étudié — et qui reste néanmoins très théorique — est celui du vortex de vidange gravitaire, stable, permanent créé par l'aspiration dans l'orifice axial d'une cuve cylindrique [Orifice pour lequel la valeur initiale de la circulation à l'entrée de la cuve est un paramètre fixé à l'avance], ayant préalablement admis que les vitesses d'entraînement du fluide dans l'orifice de suction sont négligeables devant ses vitesses de rotation.

De ce fait, il est fort probable que les critères obtenus peuvent différer des critères réels de similitude pour la grande majorité des installations rencontrées en pratique où il n'existe aucune symétrie d'écoulement.

Il en est nécessairement de même pour toutes les autres installations et surtout pour celles où l'aspiration est effectuée par l'intermédiaire d'un tuyau plongeant au sein de la masse fluide et dans lesquelles l'apparition du vortex constitue un fait très embarrassant.

Aussi, la difficulté pratique réside dans le fait que le phénomène formé n'est pas absolument permanent : lieu et fréquence de

Formation, durée d'existence et d'aération, chemin parcouru sur la surface libre par le vortex sont grandement variables et les hypothèses simplificatrices des études théoriques ne permettent pas d'en tenir compte; hypothèses dans lesquelles les caractéristiques du milieu surmontant le fluide tel que : la pression, la température, et la valeur de la tension superficielle entre les deux fluides ont été négligées; ce qui ne peut être toléré sachant la grande influence que revêtent ces variables sur l'intensité du vortex.

Une fois encore, l'expérience montre bien que, si c'est là un phénomène éminemment capricieux, c'est aussi un phénomène particulièrement tenace auquel il est très difficile de s'opposer.

En l'absence d'une théorie générale satisfaisante, le procédé expérimental reste donc le seul moyen possible permettant une étude approfondie du phénomène afin d'en dégager les principales conditions de formation et de similitude suivant les

caractéristiques géométriques et hydrauliques [hauteur d'eau H , débit Q] de l'installation. Ces conditions sont déterminées à partir de l'examen de la formation du vortex sur des modèles semblables mais d'échelles linéaires différentes. Elles sont d'ailleurs indispensables à connaître pour les comparaisons modèle - prototype permettant de vérifier la valeur des dispositifs anti - vortex proposés. Espérant susciter peut-être les expériences qui pourraient confirmer ou infirmer certaines de nos conclusions, facilitant la poursuite de recherches plus approfondies, nous nous sommes attachés dans la mesure du possible à envisager le problème sous son aspect pratique et à faire part des réflexions et remarques que nous a suggérées notre présente étude dans ce domaine. En fait, celle-ci consiste à calculer certaines caractéristiques du phénomène parmi lesquelles nous citons :

- La circulation (Γ) autour du vortex, caractérisant son amplitude.
- La détermination d'un champ de vitesses.

Les difficultés essentielles résidant encore dans

L'instabilité du vortex ; les procédés habituels d'expérimentation utilisant des méthodes directes de relevé du profil de l'entonnoir et des valeurs de la circulation [tels que pointes limnimétriques, micromoulinets, prises de pression etc...] ne peuvent être retenues en raison des déplacements incessants du vortex sur la surface libre dans la majorité des installations, et des modifications que l'utilisation de tels instruments même miniaturisés apportent à l'écoulements, modifications qui sont surtout à craindre au voisinage des limites air-eau de l'entonnoir du vortex.

Pour toutes ces raisons, et dans le souci de pallier à ces aléas, seules des méthodes optiques peuvent être envisagées.

Notre travail consiste à expérimenter précisément la méthode dite des "rayons réfractés" dans le cas d'une aspiration verticale descendante, et d'en dégager les principaux résultats.

L'étude porte particulièrement sur l'influence de certains paramètres hydrauliques (débit-Hauteur) et énergétiques. L'importance relative de la viscosité, de la tension superficielle, et des forces d'inerties a été négligée.

METHODES OPTIQUES
ET LEUR APPLICATION

METHODES OPTIQUES ET LEUR APPLICATION

1 - INTRODUCTION

Les procédés de visualisation applicables soit en surface libre, soit dans la masse fluide, et qui peuvent par analogie représenter des écoulements compressibles sont basées sur des phénomènes optiques grâce à des ondes d'interférence.

Parmi ceux-ci deux méthodes seulement seront retenues : La première utilisant les propriétés des rayons réfléchis, et la seconde les propriétés des rayons réfractés. De ce fait seront exclues les méthodes de visualisation par traceurs liquides et solides [sauf le procédé de chronophotographie du déplacement des particules.]

2 - PHOTOGRAPHIE DE L'ENTONNOIR DU VORTEX

Le moyen expérimental le plus évident consiste à prendre des épreuves photographiques du profil de l'entonnoir du vortex, dans le cas où la chambre d'expérimentation possède des parois transparentes.

Bien que très utilisé en dernier recours, cette méthode ne peut avoir en réalité qu'un domaine d'utilisation fort restreint. Elle est peu précise en raison du grand rapport d'agrandissement que doit posséder le cliché. Elle devient inacceptable dans le cas de petits entonnoirs en raison de l'erreur importante introduite lorsque l'on désire déterminer la forme et la longueur du vortex.

3-METHODE CHRONOPHOTOGRAPHIQUE DU DEPLACEMENT DES PARTICULES

Celle-ci consiste en la visualisation des lignes de courant par la mise en suspension d'éléments traçants de nature solide tel que: (confettis, poudre d'aluminium, poudre de Balsa ou polystyrène) ayant la même densité que l'eau: chaque particule solide du traceur suivant le filet liquide auquel il est incorporé; il est en effet possible d'obtenir à la fois le spectre de l'écoulement puis les vitesses aux différents points de la surface libre, et ceci à l'aide d'une mesure d'enregistrement chronographique du déplacement des particules.

En toute logique, cette méthode n'est pas une méthode optique. Nous la mentionnons seulement ici, car elle fait le plus souvent appel à des procédés optiques pour la détermination finale de la vitesse.

Notons que ces procédés deviennent assez complexes dans le cas de déplacements tridimensionnels des particules.

Il est nécessaire en outre de rappeler que ce procédé nécessite d'admettre les hypothèses suivantes:

- L'écoulement n'est pas modifié par la mise en suspension de flotteurs.
- Les trajectoires des particules sont confondues avec les lignes de courant.

Or, l'expérience et le calcul permettent de montrer que ces hypothèses sont rarement vérifiées.

En effet, en raison de l'existence des forces de tension superficielle et de capillarités, la trajectoire des particules est le plus souvent différente de la trajectoire des filets liquides; et suivant le cas, des déviations très importantes des traceurs variant de 15 à 50 pour cent en moyenne après une rotation de 60° avaient été observées sur le modèle.

De tels écarts interdisent l'utilisation de ces particules solides. De plus, si le vortex n'est pas permanent, le mouvement de l'élément traçant devient alors incohérent et peut indifféremment être aspiré ou rejeté. Les particules attirées vers le centre du mouvement tourbillonnaire gênent ou modifient les possibilités de formation de l'entonnoir du vortex, notamment sur les petits modèles. En outre, suivant la nature de la particule utilisée, suivant les conditions initiales de lancement, et suivant enfin les variations de la valeur de la circulation, la particule peut être rejetée vers la périphérie du vortex. En définitive, et de ce fait cette méthode ne pouvait être retenue.

Pour plus de précisions, nous recommandons l'examen de l'article de J. FAURE [cf 13].

Des mesures seront par contre assez précises si elles utilisent les phénomènes optiques de déviation des rayons lumineux par la surface courbe de l'entonnoir du vortex. Il suffit alors de relier la déviation du rayon lumineux à la forme de la surface provoquant cette déviation.



4. METHODE DES RAYONS REFLECHIS

Celle-ci est semblable à celle dite du "ciel étoilé", utilisée quelquefois dans l'étude de la houle sur les modèles réduits de ports maritimes.

Cette méthode [cf.5] est d'un important secours, car elle permet de déterminer sur un ouvrage n'ayant aucune visibilité latérale, la valeur de la circulation du vortex qui prend naissance en fonction des conditions hydrauliques d'exploitation.

4.1 - PRINCIPE

Le principe de cette méthode consiste à disposer au dessus de la zone de grande agitation de la surface libre où se forme le vortex, un quadrillage de petites lampes électriques et à photographier, avec un temps de pose assez long l'image réfléchie de cette série de points lumineux en perpétuelle agitation dans le plan d'eau.

En l'absence de dépression sur la surface libre, l'image de chaque point lumineux est un point fixe. Dès qu'une dépression commence à se former et, au fur et à mesure de l'augmentation de

Profondeur de l'entonnoir du vortex, on note la formation de différentes figures géométriques dans le déplacement des images d'un certain nombre de points lumineux.

A chaque forme différente d'entonnoirs du vortex [obtenue pour des couples particuliers des valeurs des conditions hydrauliques initiales tels que hauteurs d'eau, débit d'aspiration, circulation à l'entrée de la chambre] correspond une figure différente dont il est possible d'obtenir un enregistrement par des méthodes photographiques ou cinématographiques.

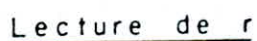
Ainsi, et à chaque instant, un vortex peut être caractérisé par un réseau de points lumineux dont la disposition dépend du profil de son entonnoir.

4.2 - CONSTRUCTION THEORIQUE

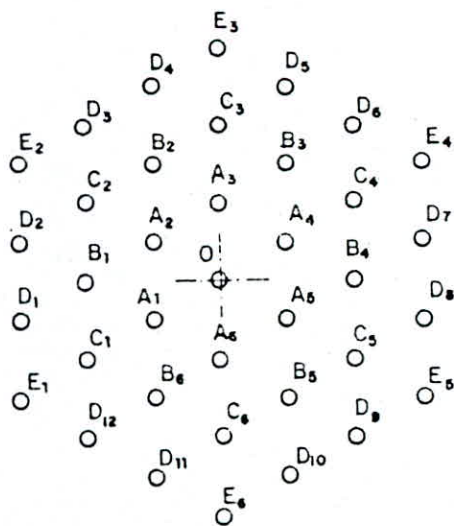
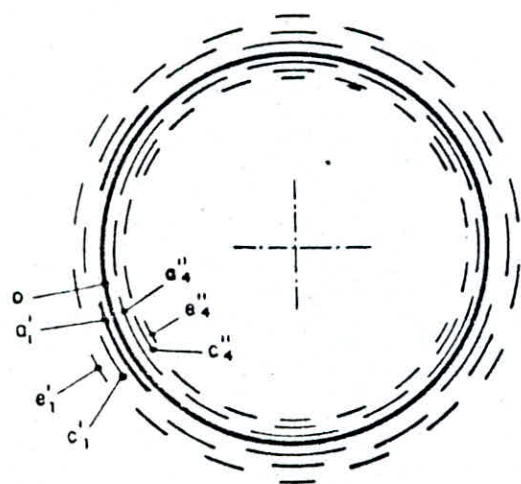
Désignons par: [Figure.1]

- Une lettre majuscule une source lumineuse (Pour chaque lettre, le nom et l'indice permettent de caractériser sa position par rapport à la position de la source de référence O);
- La lettre minuscule correspondante, l'endroit de la réflexion de cette source sur la surface libre.

EN L'ABSENCE DE VORTEX



Lecture. de x



-fig 1 - PRINCIPE DE CONSTRUCTION THEORIQUE

En l'absence de vortex,

- Les deux même lettres minuscules, mais affectées de l'indice prime et seconde, les deux réflexions de cette même source lumineuse, mais en présence de vortex, et de même par;
- F: La position de l'appareil photographique;
- H: La distance du réseau de sources lumineuses à la surface libre;
- h: La distance de l'appareil photographique, à la surface libre;
- x: La distance d'une source lumineuse quelconque à la source de référence 0;
- y: Dans le plan vertical passant par l'appareil photographique et la source lumineuse considérée et en l'absence de vortex, la distance sur la normale à la surface libre élevée au point de réflexion [et par rapport à cette surface libre] de l'intersection de cette normale avec la droite joignant la source considérée à l'appareil photographique.
- r': En l'absence de vortex, la distance sur la surface libre du point de réflexion d'une source lumineuse quelconque par rapport au point de réflexion 0 de la source lumineuse de référence 0. Le point 0 sera d'ailleurs le centre ultérieur du vortex.

Le calcul dans le cas général, de la relation entre la disposition des points lumineux en présence de vortex et la valeur de la circulation Γ , est assez complexe. Toutefois, dans le cas particulier où les hauteurs h et H , peu différentes par ailleurs l'une de l'autre, sont importantes comparativement à l'amplitude du vortex (r et z négligeables devant h et H) une expression approchée, mais assez simple, de cette relation peut être calculée.

Il suffit tout d'abord (fig. 1.a) de déterminer en l'absence de vortex les expressions de r' et y . En calculant ensuite (fig. 1.b) la valeur de l'angle (α) pour la partie hyperbolique du vortex correspondant à de faibles inclinaisons du plan tangent.

- d'une part en fonction des relations géométriques,
- d'autre part en fonction de la circulation autour du vortex, on obtient l'expression de la circulation

$$\Gamma = 2\pi r \sqrt{r \cdot g \left[\frac{r \cdot (H+h) \pm z \cdot h}{2 \cdot h \cdot H} \right]}$$

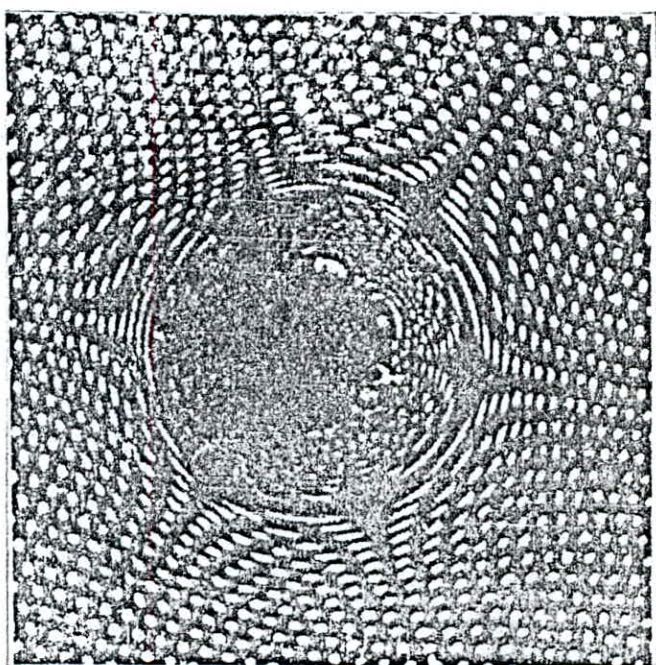
Le signe (\pm) traduit ici le fait qu'une même source lumineuse, E , par exemple, peut donner lieu à deux réflexions (e'_1 et e''_1) pour lesquelles les valeurs du rayon r du point de réflexion sont différents. Précisons que le signe négatif correspond à la réflexion située du même côté de la source

lumineuse, par rapport à l'axe du vortex et le signe positif à la réflexion située du côté opposé. L'expression précédente permet ainsi de calculer r en fonction de (x, r) dont les grandeurs sont déterminées à partir des épreuves photographiques de la déformation du réseau de points lumineux. Elle se simplifie dans le cas particulier où l'appareil photographique peut être centré sur l'axe du vortex, si ce dernier occupe une position fixe [cas de l'étude d'un vortex de vidange centré sur l'axe d'une cuve cylindrique]. En outre sur le modèle, les sources lumineuses sont constituées par les trous d'une grille en tôle perforée, éclairée sur la face opposée au vortex. La perforation de la grille étant réalisée de manière que les trous se trouvent aux sommets de triangles équilatéraux. Dans les figures obtenues, deux zones sont alors distinguées, des zones de calme et des zones d'agitation maximum. La direction prédominante de la turbulence en chaque point est également observée. L'ordonnance du mouvement d'ensemble des points lumineux dans l'une des figures la plus caractéristique à la forme d'une rosace à « 6 pétales » intérieures au centre d'hyperboloïdes

à 6 branches, [Fig. 2].

Les déformations parasites observées sur le côté de cette figure proviennent de l'agitation d'ensemble de la surface libre dans le cas particulier où l'expérimentation a été effectuée. Un cercle lumineux continu (ligne 0 correspondant à la réflexion de la source 0) sépare théoriquement les rosaces intérieures des hyperboloïdes lorsque l'appareil est centré sur l'axe du vortex ou lorsque une source lumineuse coïncide exactement avec l'axe du vortex. En pratique, il est le plus souvent impossible d'obtenir complètement un tel cercle, dans le premier cas, car l'appareil photographique dissimule la source coïncidant avec l'axe du vortex; Dans le second cas, car la probabilité de prise de vue au moment où l'axe du vortex coïncide exactement avec l'axe d'une source lumineuse est assez faible en raison de l'écartement de ces sources. Deux axes consécutifs de symétrie de la grille délimitant sur elle-même deux portions d'angle au centre opposés par le sommet, la déformation du réseau de points lumineux de la première portion engendre les hyperboles extérieures et celle de la deuxième portion les "rosaces" centrales (Fig. 1c)





**_Fig 2_ DEFORMATION DU RESEAU DE POINTS LUMINEUX
SUR LA SURFACE LIBRE**

Aussi la formule fournit une relation entre les trois quantités $[\Gamma - r - \alpha]$.

Une vérification expérimentale de cette formule pourrait consister en construisant théoriquement la déviation du réseau de points lumineux, à la même échelle et dans les mêmes conditions que l'épreuve photographique. La comparaison resterait cependant délicate et peu précise.

Elle serait par contre beaucoup plus rigoureuse en comparant avec une même valeur Γ de la circulation :

- La relation $r = f(\alpha)$ obtenue à partir de la formule théorique.

- La relation $r = f(\alpha)$ obtenue à partir de l'épreuve photographique.

La concordance des résultats obtenus par application de cette méthode est assez bonne dans l'ensemble. Cependant un certain nombre de difficultés subsistent :

- La plus importante provient, par la mesure de (r) , du manque de précision dans la détermination du centre du vortex.

Malgré les différents recouvrements possibles dans cette recherche (points d'intersection théoriquement confondus des trois axes ou des trois

a asymptotes des hyperboles extérieures, centre des grands arcs de cercle lumineux...) La précision reste faible, notamment pour des valeurs élevées de la circulation.

- Les comparaisons des résultats théoriques et expérimentaux doivent être limitées à l'examen de la déviation des points lumineux produite par la partie supérieure de l'hyperbole de l'entonnoir du vortex.

En effet la formule théorique déterminée précédemment a été établie dans ce cas, et il n'a pas été tenu compte également, de ce fait, des phénomènes de viscosité qui restent en effet négligeables sur la partie supérieure de l'hyperbole du vortex.

Par contre, dans la partie inférieure de l'hyperbole zone transitoire entre les parties hyperboliques et la parabole théorique du fond du vortex, la viscosité n'est plus négligeable et la formule obtenue n'est plus valable. L'entonnoir du vortex doit être alors beaucoup moins creusé que prévu et la concentration des points lumineux beaucoup moins importante de ce fait, ce que permet de mettre en évidence l'examen de l'épreuve photographique.



5. METHODE DES RAYONS REFRACTES

Cette méthode a été imaginée et mise au point au centre de CHATOU en 1960 pour l'étude de la similitude des phénomènes de vortex dans le cas général où ceux-ci présentent une double instabilité spatiale et temporelle.

Par conséquent, elle a été prévue plus spécialement pour notre étude en vue de son expérimentation.

Ceci parce qu'elle offre l'avantage d'être assez précise et d'un dépouillement plus rapide que la méthode mentionnée dans le paragraphe précédent ; surtout en laboratoire où des parois vitrées peuvent faciliter l'examen de la tache de l'entonnoir du vortex sur le radier de la cuve.

Appelé aussi « méthode des ombres », elle utilise la réfraction de la lumière à la surface libre d'un liquide.

5.1 - PRINCIPE

Le principe du procédé des rayons réfractés repose sur l'utilisation de phénomènes optiques de formation d'une surface caustique, résultant de la déviation de rayons lumineux, issus d'une source placée au dessus de la surface libre, au passage de la surface dioptrique de séparation air-eau de la partie hyperbolique

hyperbolique de l'entonnoir du vortex.

Dans un but de simplification ; la lumière incidente située au dessus de la surface libre est dirigée suivant la normale à cette surface ; de façon à obtenir une surface caustique réelle possédant un axe de révolution vertical et présentant une zone centrale sombre à l'intérieur d'une zone d'accumulation de lumière.

La visualisation de cette surface a été réalisée sur modèle réduit.

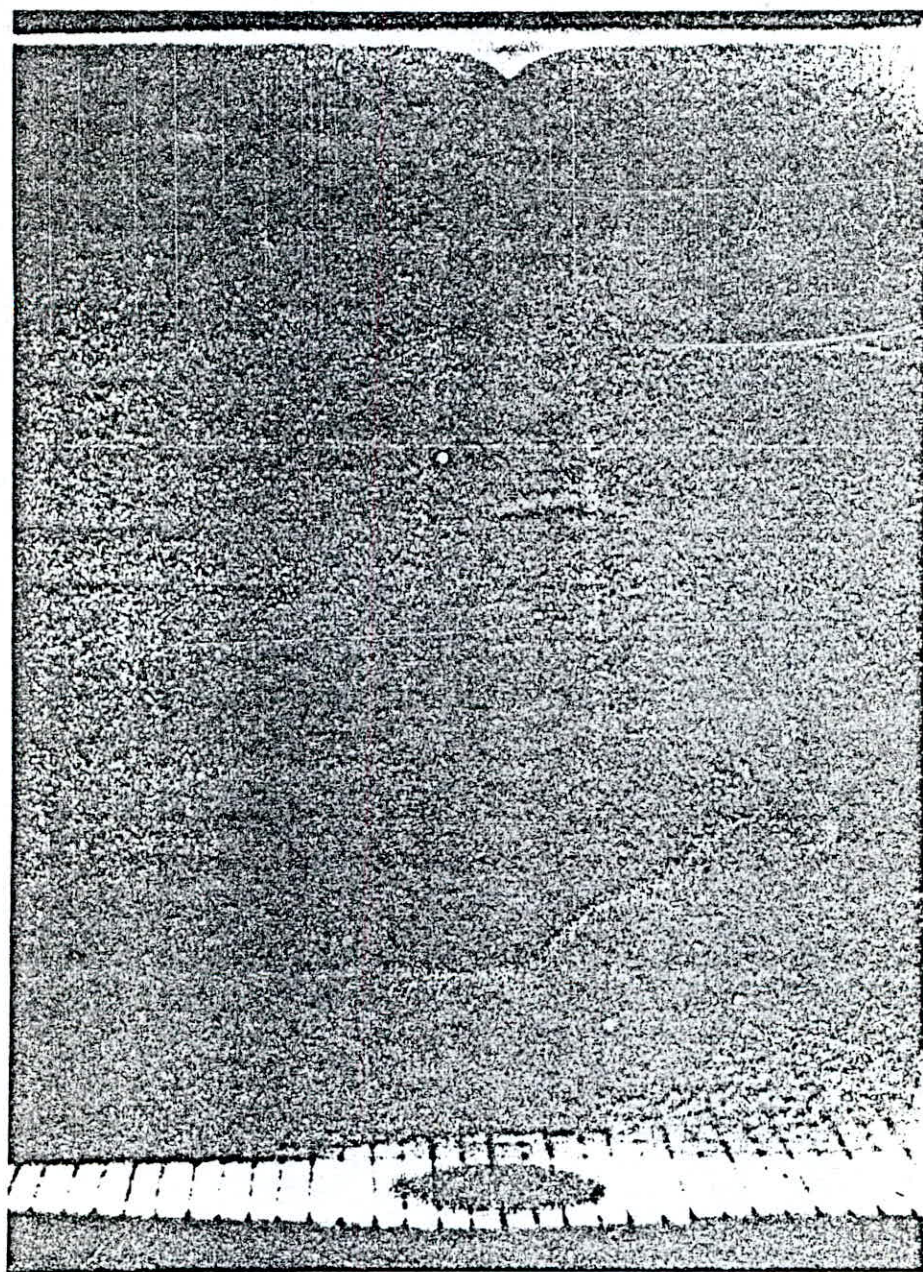
Dans l'obscurité, un pinceau lumineux issu d'une fente étroite placée dans un plan diamétral au vortex (fig 3), a permis la visualisation de la concentration des rayons lumineux.

L'intensité de la lumière qui atteint une plaque sensible dépend de la courbure de la surface libre du liquide, donc de la dérivée seconde de l'équation de la surface libre.

En coordonnées bidimensionnelles, si la surface libre a pour équation $z = f(r)$;

- Pour $\frac{d^2 z}{dr^2} < 0$ (surface concave vers le haut);
il y a réduction de l'intensité lumineuse :
les rayons sont divergents.

En outre, l'intersection de la surface caustique par un plan normal à la direction de la lumière



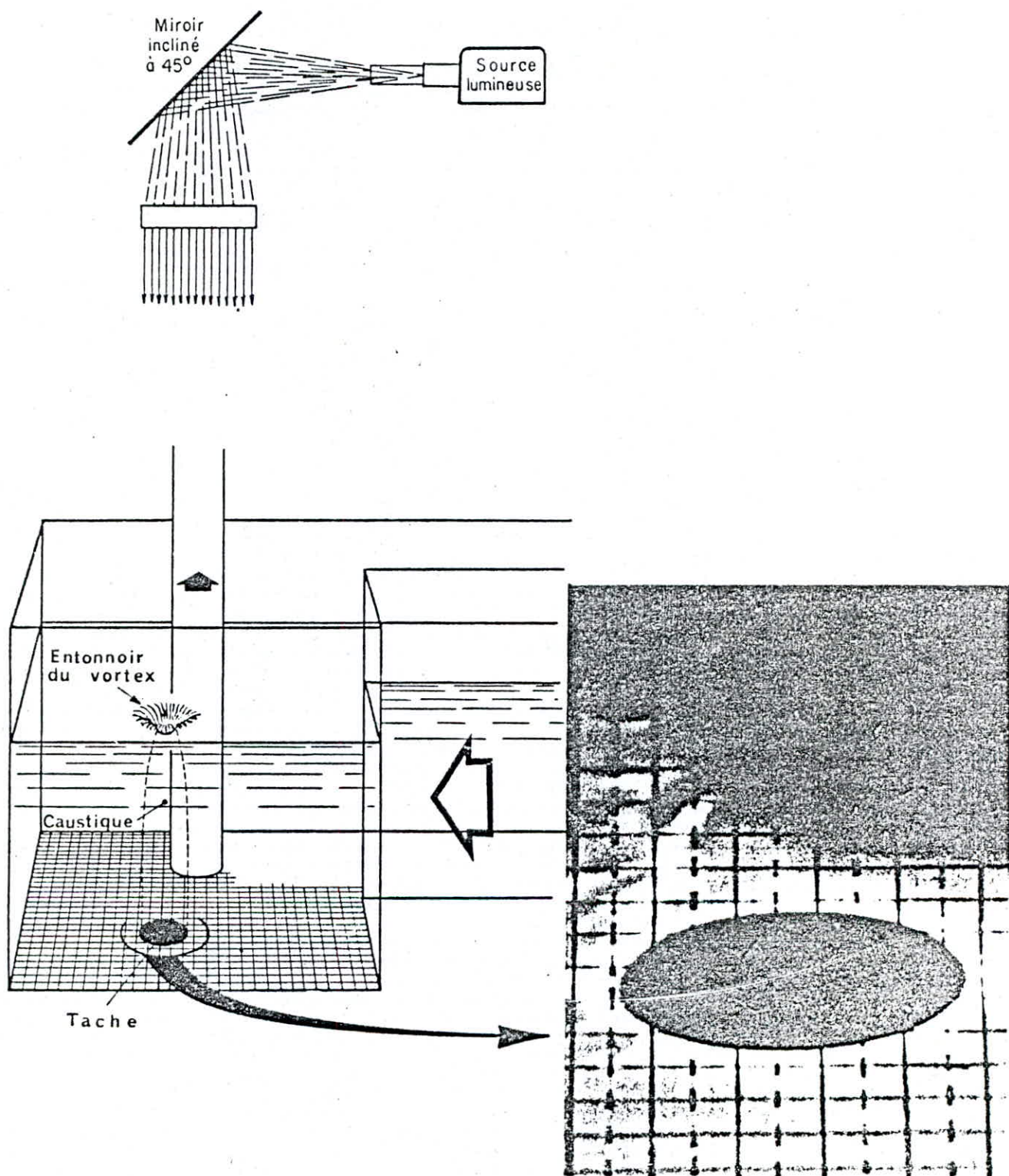
-Fig 3- VISUALISATION DE LA SURFACE CAUSTIQUE

incidente se présente sous la forme d'une tache circulaire sombre.

En pratique, le plan normal d'intersection est le radier de la chambre (fig 4), où des graduations permettent d'évaluer le diamètre de cette tache.

Il est de ce fait possible par la mesure du diamètre de cette tache et pour une hauteur donnée du plan d'eau dans la chambre, de caractériser la surface caustique ainsi que la forme de l'entonnoir du vortex qui lui a donné naissance.

De telles mesures sont effectuées à partir de méthodes photographiques ou cinématographiques d'enregistrement.



-Fig.4- TACHE CARACTERISANT L'EVOLUTION D'UN VORTEX

ETUDE
THEORIQUE

ETUDE THEORIQUE

1- INTRODUCTION

L'aspect théorique de ce problème a été abordé par plusieurs auteurs. Dans le cas présent, nous disposons des résultats des expériences sur le vortex d'Einstein et Huon-Li : ces auteurs ont établi des équations permettant le calcul des conditions d'écoulement dans n'importe quel cas pratique.

Par conséquent, nous jugeons utile de reproduire, du point de vue théorique, l'une des parties caractéristique de leur étude et de rechercher la possibilité de l'appliquer au cas du vortex de vidange qui fait l'objet de notre étude.

De ce fait, afin de résoudre le problème à trois dimensions, en réalité très complexe, les hypothèses simplificatrices suivantes seront adoptées:

- Le vortex est stable;
- L'axe du vortex est supposé coïncider avec l'axe (OZ) d'un système de coordonnées cartésien;
- Le réseau d'écoulement est supposé symétrique par rapport à l'axe du vortex (OZ);
- Les composantes de la vitesse moyenne selon l'axe OZ sont supposées négligeables.

- Les vitesses d'entraînement du fluide dans l'orifice sont négligeables devant les vitesses de rotation.

2. TOURBILLON ET CIRCULATION DES VITESSES

2.1. DEFINITION DU TOURBILLON

Le tourbillon d'un fluide est une quantité Vectorielle de même nature d'une vitesse angulaire. Elle est définie par :

$$\text{Tourbillon } \vec{\omega} = \text{rot } \vec{V} = \Delta \vec{V}$$

$$\text{ou bien } \text{rot } \vec{V} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}$$

ξ , η et ζ sont les composantes du vecteur tourbillon $\vec{\omega}$, tel que :

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

u , v , W sont les composantes du vecteur vitesse \vec{V} par rapport aux axes fixes $Oxyz$.

La signification physique du tourbillon se comprend mieux en imaginant la congélation brusque d'une petite sphère du fluide. Si l'élément solide qui en résulte possède une rotation; le fluide est tourbillonnaire au point considéré.

Le vecteur $\vec{\omega}$ est appelé le vecteur tourbillon ; sa valeur numérique est égale à la moitié du rotationnel de la sphère solide tel que :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$$

Une ligne de tourbillon est définie comme étant une courbe tracée dans le fluide, de telle sorte que la tangente en chacun de ses points ait la même direction que le vecteur tourbillon au point considéré.

Les lignes de tourbillon passant par chacun des points d'une petite courbe fermée, forment un tube de tourbillon.

Pour un tube de tourbillon de faible section, on montre que le produit de la grandeur du tourbillon par la section droite du tube, doit rester constante tout le long de ce dernier. Le vecteur tourbillon est donc le vecteur de la rotation instantanée que prendrait la particule fluide considérée si, à cet instant, elle était brusquement solidifiée, la masse de liquide qui l'entoure étant anéantie.

Dans un écoulement quelconque, l'échange d'énergie entre les particules liquides nécessite l'existence de forces excentrées (frottements ou forces



d'inertie) ; simultanément , de telles forces provoqueront une rotation élémentaire des particules . Celle-ci caractérisée par le vecteur $\vec{\omega}$ se rencontrera donc chaque fois que l'écoulement considéré entraîne une dissipation d'énergie , ou une transformation de l'énergie de la veine liquide en énergie mécanique ou inversement [turbines, hélices pompes] .

2.2 - DETERMINATION DE LA CIRCULATION " Γ "

On appelle circulation (Γ) du vecteur vitesse \vec{V} le long d'un contour fermé quelconque (L) tracé dans le fluide dont l'élément d'arc est \vec{ds} , l'intégral curviligne du produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{ds}$ tel que :

$$\Gamma = \oint_L \vec{V} \cdot \vec{ds} \quad (1) \quad \text{ou encore ;}$$

$$\Gamma = \oint_L (u dx + v dy + w dz)$$

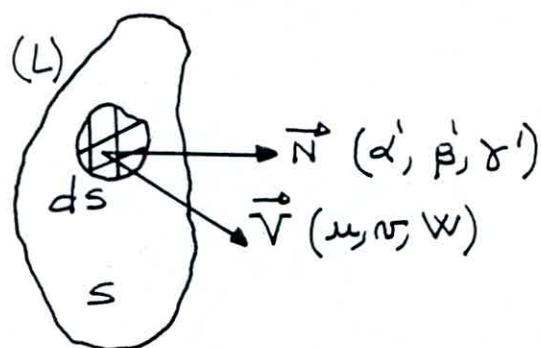
La circulation Γ varie avec le chemin suivi , mais si l'expression $u dx + v dy + w dz$ est une différentielle totale exacte , Γ ne dépend plus que des points extrêmes et non du chemin suivi entre ceux-ci . Dans ce cas , la circulation le long d'un contour fermé est nulle .



Le théorème de Stokes permet d'écrire, le long d'un contour fermé (L) limitant une surface (S) sur laquelle u, v, w ont partout des dérivées continues en x, y, z :

$$\oint_L (u dx + v dy + w dz) = \iint_S \left[\alpha' \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \beta' \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma' \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dS.$$

α', β' et γ' représentant les cosinus directeurs de la normale \vec{N} à l'élément de surface dS découpé sur la surface (S) limitant le contour (L):



-fig. 6 -

Compte tenu des expressions des composantes ξ, η, ζ de la vitesse \vec{w} ; La formule de Stokes s'écrit encore:

$$\Gamma = 2 \iint_S (\alpha' \xi + \beta' \eta + \gamma' \zeta) dS = \int_S \text{rot} \vec{V} \cdot \vec{N} dS$$

En d'autres termes la circulation des vitesses le long d'un contour fermé est égale au double du flux du vecteur tourbillon à travers toute surface ouverte (S) limitée par la courbe (L).

Supposons maintenant que dans un plan d'écoulement à deux dimensions OX et OZ , les lignes de courant sont des cercles concentriques de centre O (Fig. 7), la vitesse en un point ne dépendant que de la distance (r) de ce point au centre O .

Considérons donc dans ce plan une particule animée de la seule vitesse circonférentielle $\vec{V} = V_\theta$ sur un élément de courbe (ds) de la circonférence considérée de rayon (r) autour de l'axe du vortex (OZ).

D'après l'équation (1) on a

$$\Gamma = \oint V_\theta \cdot ds$$

$$ds = r \cdot d\theta$$

ds étant un élément de courbe de la trajectoire considérée ; la circulation totale autour d'une circonférence concentrique de longueur égale à 2π est :

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_\theta r \cdot d\theta = V_\theta r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot r \cdot V_\theta$$

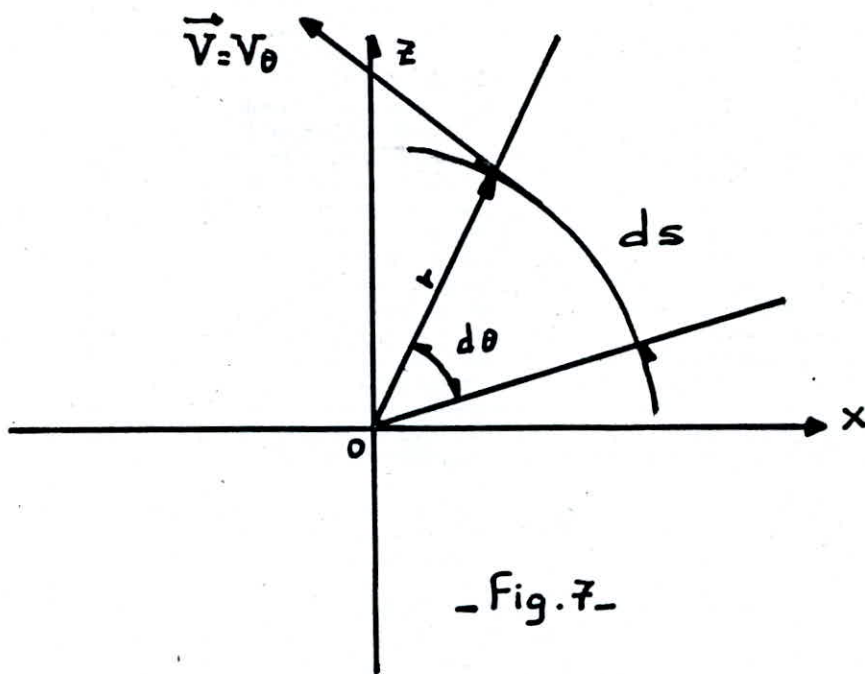
Comme la vitesse circonférentielle V_θ reste constante le long d'une même courbe de rayon (r) entourant l'axe de rotation ;

la circulation est aussi constante, et prend la

forme suivante :

$$\Gamma = 2\pi \cdot r \cdot V_\theta = 2\pi k = \text{constante}$$

$$\text{avec } k = r \cdot V_\theta$$



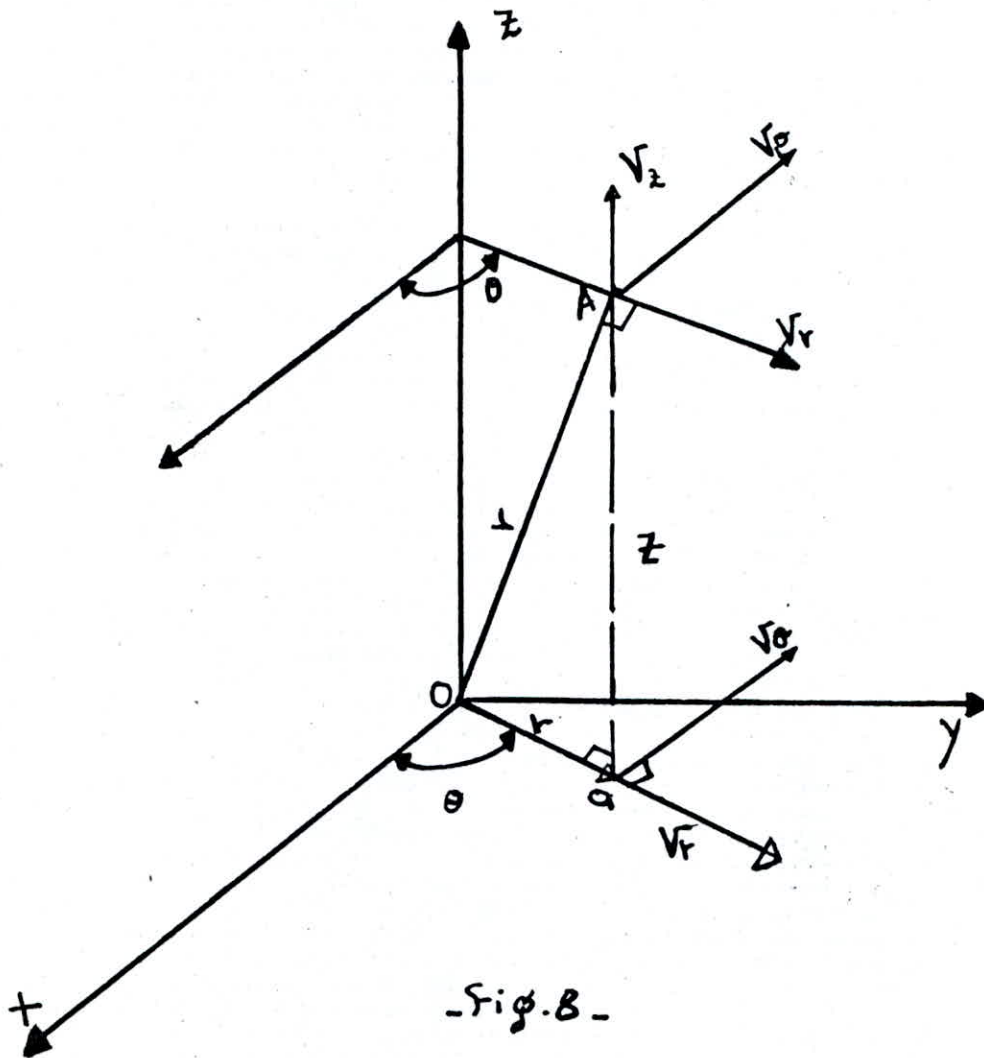
- Fig. 7 -

3- DETERMINATION DES VITESSES

Le mouvement de rotation considéré étant à symétrie de révolution, nous utiliserons donc des coordonnées cylindriques que nous commencerons tout d'abord par définir :

- Considérons un point quelconque A de l'écoulement déterminé par ces coordonnées (r, θ, z) [voir Fig. 8].





- z = distance prise parallèlement à l'axe de rotation du vortex,

- r et θ = coordonnées polaires dans le plan de côté z ,

les composantes de la vitesse \vec{V} en ce point sont alors :

- $\vec{V}_z = \frac{dz}{dt}$; vitesse dans la direction (Oz) ,

- $\vec{V}_\theta = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$ vitesse suivant la perpendiculaire au plan méridien de A, c'est-à-dire suivant la

tangente ou parallèle de A.

$\vec{V}_r = \frac{dr}{dt}$, vitesse selon la direction du rayon vecteur du point A.

Enfin les composantes de l'accélération sont :

$$\frac{dV_r}{dt} = V_r' ; \frac{dV_\theta}{dt} = V_\theta' ; \frac{dV_z}{dt} = V_z'.$$

Avec ces notations, introduisons les équations de Naviers-Stokes qui s'écrivent comme suit :

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = F_r - V_r' + \frac{V_\theta'}{r} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] \right]$$

$$A \left[\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} = F_\theta - V_\theta' + \frac{V_r V_\theta}{r} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] \right]$$

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = F_z - V_z' + \nu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \right]$$

En mettant en jeu les opérateurs suivants :

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} & (2) \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases}$$

Ce dernier opérateur est le "Laplacien".

Le système d'équations (A) se simplifie comme suit:

$$\left[\begin{aligned} V_r' - \frac{V_0^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (P + \bar{\omega} h) + \nu \left[\Delta V_r - \left(\frac{V_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} \right) \right] \\ V_0' + V_r \frac{V_0}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (P + \bar{\omega} h) + \nu \left[\Delta V_0 - \left(\frac{V_0}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \right] \\ V_z' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (P + \bar{\omega} h) + \nu [\Delta V_z] . \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont générales, elles définissent le mouvement d'un liquide réel.

D'autre part, introduisons la loi de conservation de la masse pour un fluide continu: celle-ci s'exprime par la relation suivante:

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot V_0) + r \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot V_z) = 0$$

Pour le mouvement permanent d'un fluide incompressible, la masse spécifique (ρ) est constante; l'équation de continuité devient donc:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r) + \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + r \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

ou:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Dans les calculs qui suivent, ces équations seront résolues pour diverses combinaisons d'hypothèses et de conditions aux limites.

En ce qui concerne la composante radiale $[V_r]$ de la vitesse, l'hypothèse supplémentaire suivante

sera admise :

- La variation de profondeur consécutive à l'abaissement de la surface libre lorsque le rayon vecteur (r) décroît, est petite vis-à-vis de la profondeur totale, et peut donc être négligée dans le calcul de la composante $[V_r]$.
 - Le fluide est supposé parfait ; sa viscosité cinématique (ν) est nulle.
 - L'écoulement est plan ; la composante V_z de la vitesse suivant l'axe de rotation est négligée.
 - Les composantes radiale $[V_r]$ et tangentielle $[V_\theta]$ sont fonction du rayon $[r]$ seulement.
- D'après toutes ces considérations, les équations de Navier-Stokes se résument comme suit :

$$\left[\begin{array}{l} V_r' - \frac{V_\theta^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \bar{\omega} h)}{\partial r} \\ V_\theta' + \frac{V_r}{r} V_\theta = - \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \bar{\omega} h)}{\partial \theta} \\ V_z' = 0 \end{array} \right.$$

De même, l'équation de continuité devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

En éliminant toutes les dérivées par rapport au temps t ; θ et z - ce qui correspond à un

écoulement permanent défini par les limites d'application précédentes →

Nous obtenons le système suivant :

$$(B) \left[\begin{array}{l} V_r' - \frac{V_0^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \bar{w}h)}{\partial r} \\ V_0' + \frac{V_r}{r} V_0 = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r) = 0 ; \text{ où ; } \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r) = 0 \end{array} \right]$$

d'après l'équation (2)

$$\left[\begin{array}{l} V_r' = \frac{D}{Dt} V_r = V_r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_r^2}{2} \right) \\ V_0' = \frac{D}{Dt} V_0 = V_r \cdot \frac{\partial V_0}{\partial r} \end{array} \right]$$

En remplaçant ces deux valeurs dans le système (B), il vient :

$$(c) \left[\begin{array}{l} -V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_0^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + \bar{w}h)}{\partial r} \quad (a) \\ V_r \frac{\partial V_0}{\partial r} + \frac{V_r V_0}{r} = 0 \\ \frac{\partial (r \cdot V_r)}{\partial r} = 0 \end{array} \right]$$

Par intégration des 2 dernières équations du système (c), on obtient :

$$r \cdot V_0 = \text{constante} \quad (3)$$

De la même façon, l'équation $\frac{\partial (r V_r)}{\partial r}$ donne :

$$r \cdot V_r = \text{constante}$$

Cette dernière équation coïncide avec l'hypothèse d'un débit constant à travers toutes les surfaces cylindriques concentriques. Elle montre aussi que la totalité du débit radial passe à travers toutes les surfaces cylindriques concentriques successives.

Dans tous les cas où $K \neq 0$, l'équation (3) fournit les vitesses de rotation V_θ en fonction du rayon (r) et l'équation (4) du système (4) peut servir à prévoir la forme de la surface libre.

$d/dr (P + \rho gh)$ est la pente de la surface libre en direction du rayon vecteur r .

L'équation (3) peut s'écrire :

$$r \cdot V_\theta = K.$$

Elle caractérise une constante appelée "constante giratoire".

De ce fait les composantes de la vitesse deviennent :

$$V_\theta = \frac{K}{r} \quad \text{et} \quad V_r = \frac{K}{r}.$$

Remarquons que ces deux vitesses sont indépendantes de l'angle θ , ce qui caractérise un écoulement giratoire. La vitesse méridienne \vec{V}_m est la composante de \vec{V} située dans le plan méridien, elle est donc définie par l'égalité vectorielle $\vec{V}_m = \vec{V}_r + \vec{V}_z$, celle-ci est aussi

indépendante de (θ) .

Un tel écoulement est réalisé entre des parois de révolution présentant les mêmes propriétés dans tous les plans méridiens passant par l'axe de révolution.

Les particules qui, à un instant donné, se trouvent sur un même parallèle (c'est-à-dire ayant les mêmes coordonnées r et z) restent pendant tout leur mouvement sur une même surface de révolution qui ne dépend ni de (k) , ni de (V_0) .

D'autre part comme la vitesse tangentielle en un point est inversement proportionnelle à la distance r de ce point à l'axe, on en déduit que :

Loin de l'axe où $(r = \infty)$, cette vitesse est nulle.

Sur l'axe où $(r = 0)$, elle devient théoriquement infinie, ce qui est physiquement impossible.

Dans ce cas, l'axe (OZ) du mouvement constitue une ligne singulière de l'écoulement puisque la vitesse y est indéterminée; c'est un tube de tourbillon.

Une interprétation plus détaillée de ce paradoxe sera examinée ultérieurement.

- Supposons maintenant, l'écoulement stationnaire.

Le Liquide considéré étant non visqueux,
l'équation de "Lagrange" s'écrit:

$$H = z + \frac{P}{\bar{w}} + \frac{V^2}{2g}$$

L'équation fondamentale de la statique des fluides:

$$\frac{1}{\bar{w}} dP = X dx + Y dy + Z dz \quad (4)$$

permet d'écrire pour un fluide soumis à:

La seule action de la pesanteur (fig. 8),

suivant un axe oz vertical orienté

positivement vers le haut [les directions

suivant les axes (ox) et (oy) étant nulles]:

$$\frac{1}{\bar{w}} dP = z dz.$$

Comme $z = -g$; l'équation [4] devient :

$$\frac{1}{\bar{w}} dP = -g \cdot dz \quad \text{d'où :}$$

$$dP = -\bar{w} dz$$

Si \bar{w} est le poids volumique du fluide

tel que: $\bar{w} = \rho g$;

dans ce cas: $dP + \bar{w} dz = 0$

par intégration: $P + \bar{w} z = \text{constante.}$

$$\text{Posons } P + \bar{w} z = P_0$$

P_0 est la pression motrice, elle tient

compte de la pression proprement dite,

et de l'influence du poids du liquide.

Très loin de l'axe oz , là où V_0 est nulle,

la pression motrice (fig. 9) est donnée par

$$P_0 = P_\infty,$$

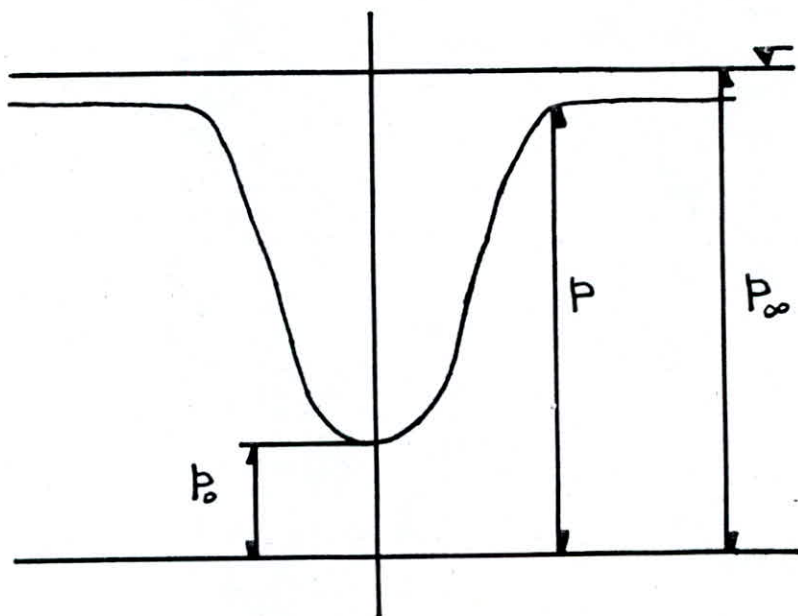
d'où, en remplaçant dans l'équation de Lagrange,
avec $V = V_\theta = \frac{k}{r}$;

l'énergie mécanique totale ou charge devient :

$$H = z + \frac{P_0 - \bar{\omega} z}{\bar{\omega}} + \frac{V_\theta^2}{2g}$$

$$\text{d'où } H = \frac{P_0}{\bar{\omega}} + \frac{V_\theta^2}{2g} = \frac{P_\infty}{\bar{\omega}}$$

$$\text{Soit } P_0 = P_\infty - \frac{\bar{\omega} V_\theta^2}{2g}$$



- Fig. 9 -

En définitive, la relation entre la pression et la distance à l'axe r , s'établit comme suit :

$$P_0 = P_\infty - \frac{\rho k^2}{2r^2}$$

Deux cas se présentent alors

- 1^{er} cas :

Pour une certaine quantité décroissante de (r) ,

appartenant au domaine $]0, +\infty[$, cette pression va diminuer jusqu'à s'annuler pour une valeur limite de r égale à :

$$r \sqrt{\frac{\rho}{2 \cdot P_0}} = r.$$

- 2^{ème} cas :

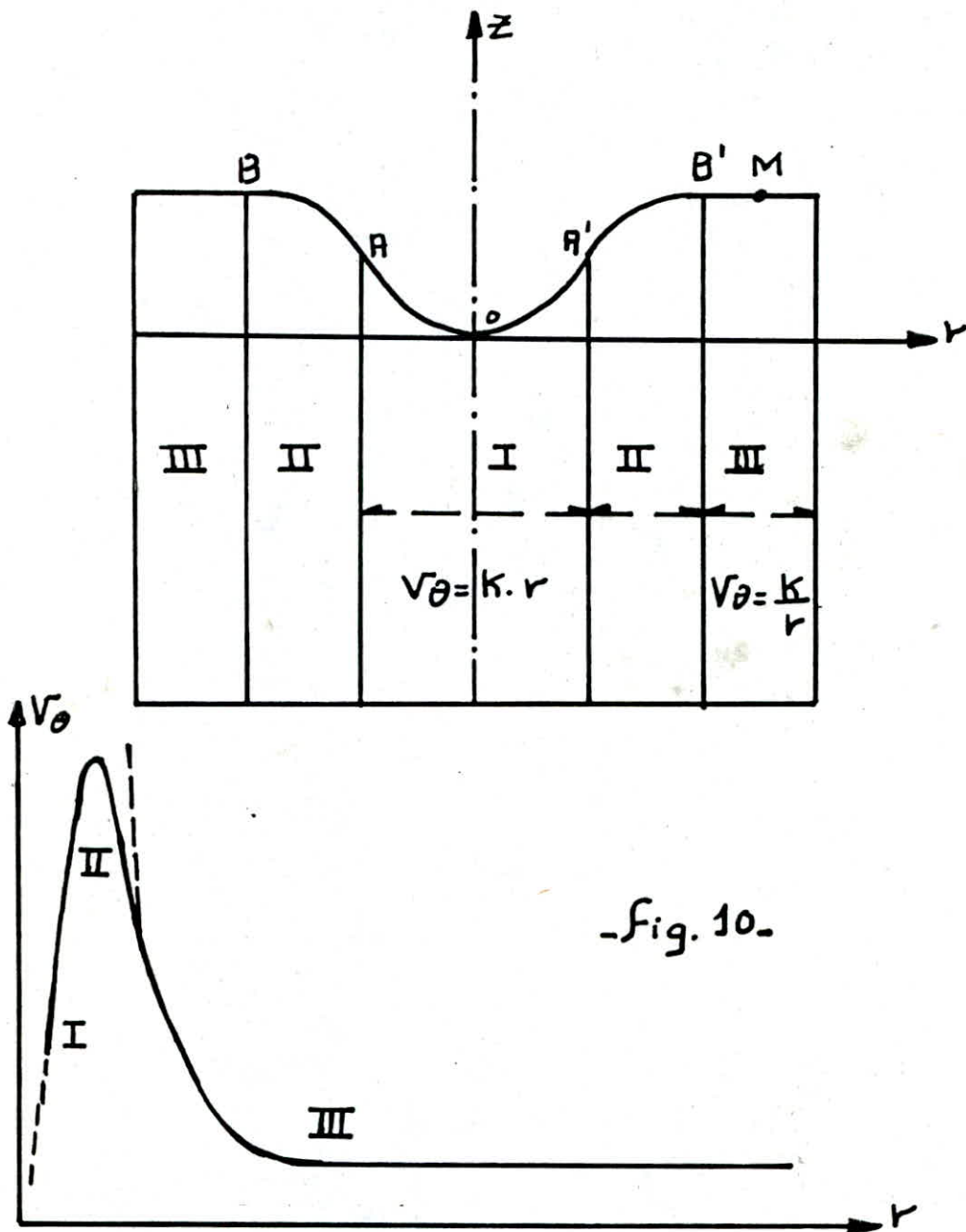
Lorsque le point considéré se rapproche indéfiniment de l'axe, la pression devient infiniment petite et négative.

Or la pression dans un liquide étant, sauf précautions exceptionnelles, toujours positive, nous nous trouvons encore ici devant une impossibilité physique, dont nous allons donner une interprétation réelle basée sur des résultats expérimentaux.

4- COMPOSITION REELLE D'UN VORTEX

Supposons le cas d'une vidange gravitaire d'un liquide contenu dans un réservoir [de dimensions relativement petites à l'égard de la hauteur d'eau]; dont le fond horizontal est percé d'un orifice centré. Créons un mouvement giratoire d'axe vertical: l'étude de la distribution de la vitesse tangentielle V_θ en fonction de (r) ,

ainsi que l'évaluation du processus de déformation de la surface libre grâce à la méthode de chronophotographie d'éléments traçants en suspension; ont permis de distinguer trois domaines différents dans le fluide en rotation [Fig.10].



-Fig. 10-

-Figure de répartition de la vitesse tangentielle en fonction du rayon r -

a. D'après l'analyse des grandeurs liées à la rotation et à la déformation d'une particule au cours de son mouvement, la distribution des vitesses du fluide dans une rotation au voisinage d'un point en un mouvement continu correspondant à un mouvement de solide de l'ensemble des segments fluides, et par suite, le taux de rotation dans le domaine (III) est donné par la formule suivante :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$$

Or dans cette zone, la plus éloignée de l'axe $\text{rot } \vec{V} = 0$; ce qui indique que le vecteur tourbillon $\vec{\omega}$ est nul en tout point sauf à l'origine 0; c'est à dire en tout point de l'écoulement non situé sur l'axe z .

Il s'agit d'un écoulement irrotationnel autour d'une axe Oz constituant une singularité.

La vitesse tangentielle est inversement proportionnelle à la distance r de l'axe tel que :

$$r \cdot V_{\theta} = k.$$

La pression totale est constante et, est donnée par l'expression :

$$z + \frac{P}{\bar{\omega}} + \frac{V_{\theta}^2}{2g} = E = \text{constante}$$

Elle indique que toutes les particules possèdent

La même quantité d'énergie.

Si un tel vortex libre est superposé à un écoulement axial avec une vitesse uniforme, l'équation précédente montre, soit qu'aucune énergie n'est transmise au liquide, soit que l'énergie lui est transmise de manière constante. Ceci justifie le fait que : l'écoulement irrotationnel est un écoulement conservatif c'est-à-dire le long duquel l'énergie se conserve.

Un tourbillon libre est en fait un cas particulier du mouvement irrotationnel.

Une petite particule sphérique de fluide, par exemple, qui se trouve "gelée" tout-à-coup, ne sera pas animée d'un mouvement de rotation autour de son propre axe.

Des exemples pratiques de tourbillons libres se rencontrent avec le remous de l'eau, il en est de même de façon très approchée pour la partie externe de l'écoulement d'un mélangeur, ou l'écoulement dans la volute d'une pompe centrifuge ou d'un dépoussiéreur cyclone.

b - Dans le domaine (I) le plus rapproché de l'axe, $\text{rot } \vec{V}$ est différent de zéro, ce qui implique l'existence d'un vecteur tourbillon égal à la moitié du rotationnel tel que :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} \quad \text{ou} \quad \text{rot } \vec{V} \neq 0$$

Par ailleurs la viscosité du liquide provoque dans la partie axiale de l'écoulement où le gradient radial des vitesses est élevé, la production d'un noyau à axe vertical tournant en bloc, c'est-à-dire qu'à une distance r de l'axe la vitesse est $V_0 = k.r$.

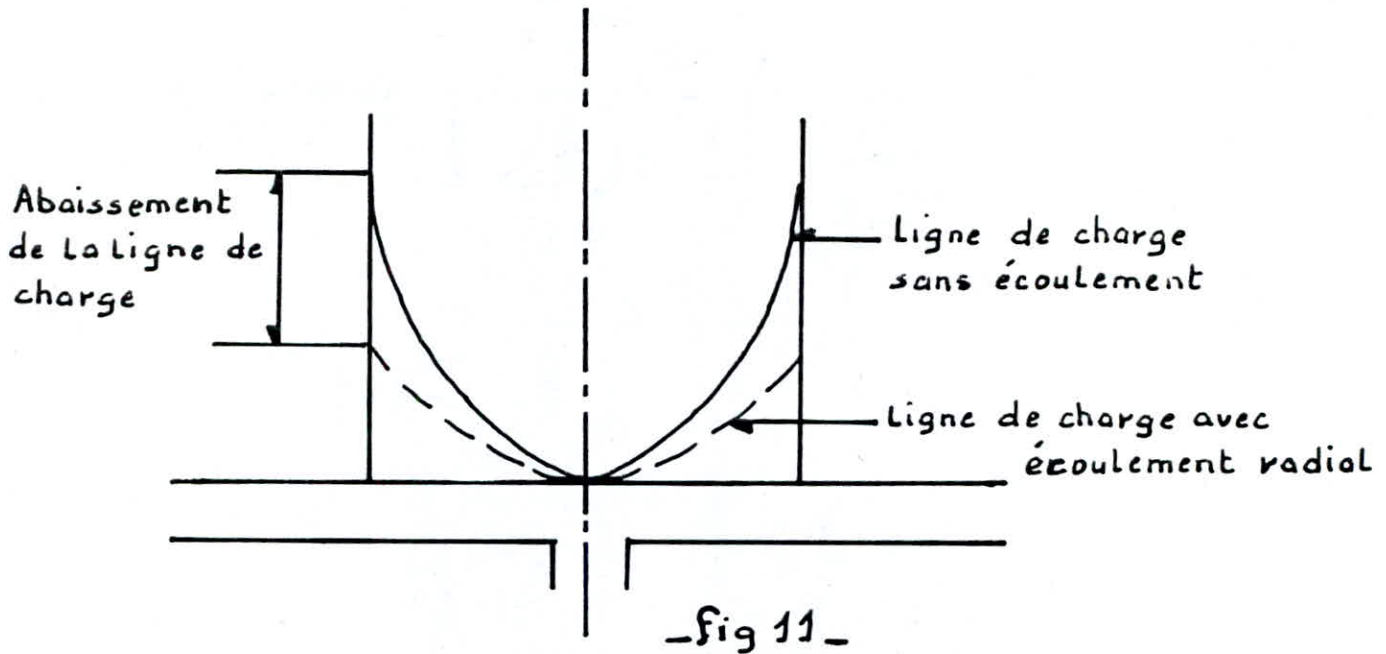
Dans cette zone centrale donc, l'écoulement est rotationnel et non plus girotoire.

Le tourbillon créé dans ce premier domaine est parfois appelé "vortex forcé"; c'est un cas limite de l'écoulement rotationnel.

La vitesse angulaire ω , est constante, ce qui signifie que le liquide tourne comme un solide. Aussi, le mouvement du vortex forcé peut-être superposé à un écoulement radial divergent.

Le mouvement résultant est un vortex forcé en spirale. On trouve une telle allure d'écoulement dans les pompes centrifuges.

En négligeant les pertes, les particules de la périphérie possèdent la totalité de l'énergie fournie au liquide. Pour qu'un écoulement radial divergent soit possible vers des pressions plus élevées, la ligne de charge doit être en dessous du paraboloïde de pression du vortex [fig. 11]



Ce dernier représente un état d'équilibre statique pour un vortex forcé de la même façon qu'un plan horizontal le fait pour un liquide au repos. Pour que l'écoulement se produise, l'altitude de la ligne de charge doit diminuer dans la direction du courant en dessous de sa valeur à débit nul.

D'autre part, si un vortex forcé est superposé à un écoulement axial uniforme dans une canalisation cylindrique ; on obtient un vortex forcé axial en hélice.

Ce type de mouvement existe dans les pompes à écoulement axial. En outre, il ne peut ni prendre naissance, ni survivre de lui-même.

Sous l'action de la turbulence, et de la viscosité, l'énergie mécanique ou pression totale aura tendance

à se régulariser le long de l'écoulement.
Des exemples pratiques de tourbillon forcé se rencontrent fréquemment; on peut citer par exemple l'écoulement dans l'aube d'une pompe centrifuge opérant en circuit fermé [dont la vanne de sortie est obturée], ou encore le mouvement qui a lieu dans la partie centrale d'un mélangeur. D'après la condition hydrostatique classique et par différenciation de l'équation de Bernoulli, la répartition de pression est donnée par :

$$\frac{P}{\bar{w}} + \frac{V_0^2}{2g} + z = \frac{P_0}{\bar{w}} + \frac{\bar{\omega}^2 r^2}{g} + z_0.$$

La pression totale croît, par conséquent avec le rayon (r), et est maximale à la périphérie. De plus un tourbillon forcé doit, comme son nom l'indique, être créé et entretenu artificiellement. La forme de la méridienne de la surface libre est une parabole, calculée en appliquant les lois de la statique des fluides en un point quelconque situé sur l'axe de l'écoulement [Lois de l'équilibre relatif].

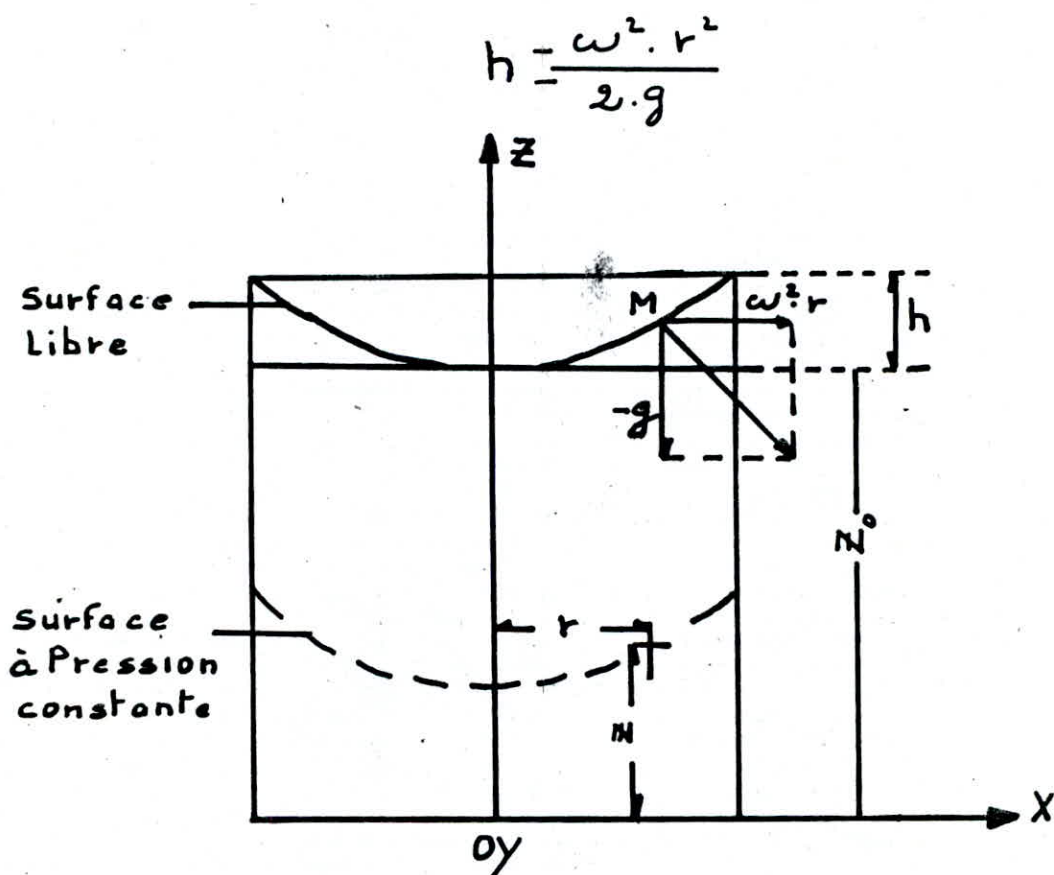
Les surfaces de niveau, y compris la surface libre sont caractérisées par une pression constante; ce sont donc des surfaces d'égale pression ayant la forme de paraboloides de

révolution d'axe (OZ) et de coordonnées (r, θ, h);
[Figure. 12].

L'ordonnée (h) d'un point quelconque de la surface libre rapportée au plan horizontal passant par le sommet d'un paraboloïde est donnée par l'équation:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

qui peut s'écrire, en remarquant que $v_0 = \omega \cdot r$:



- Fig. 12 -

c. Dans le domaine intermédiaire (II), la variation de la vitesse tangentielle V_θ en fonction de (r) présente un extrémum positif et la forme de la surface libre est un arc de parabole qui croît en changeant de sens, présentant ainsi un point d'inflexion.

Les résultats obtenus sont la conséquence de certaines justifications expérimentales et théoriques.

En effet, l'action tangentielle entre les particules du fluide provoque des rotations, ce sont celles-ci qui donnent naissance à un gradient de vitesses égal à $\frac{dV_\theta}{dr}$.

Les forces de viscosité se manifestent et prennent de l'importance aux environs de l'axe, où s'établissent les grandes vitesses ainsi que les forts gradients de vitesses [Domaine II], à la limite desquels l'écoulement cesse d'être irrotationnel.

Loin de l'axe, ce gradient est encore assez faible, ce qui implique une viscosité nulle, et un écoulement irrotationnel [Domaine III].

Aussi, le taux de rotation ω augmente de plus en plus dans ce domaine jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur maximale qu'il conservera alors dans le domaine (I).

Nous pouvons donc, conclure que le domaine (I) se substitue à l'axe du vortex.

La zone (II) constitue un domaine de transition dans lequel s'effectue, d'une manière progressive le passage du mouvement rotationnel au mouvement irrotationnel.

Ce transfert à la limite, s'opère en conservant la même valeur finie de la circulation le long d'une courbe fermée.

Dans les vortex de grandes dimensions au centre desquels se forme un tube d'air, la surface libre se creuse de plus en plus à mesure que l'on s'approche de l'axe donnant ainsi un profil infiniment bas; le mouvement est alors irrotationnel dans toute la masse du liquide en mouvement.

5. EQUATIONS DE LA SURFACE CAUSTIQUE ET DE LA PARTIE CONVEXE DE L'ENTONNOIR DU VORTEX

Le diamètre de la tache sur le radier dépend non seulement de la forme de la surface dioptrique de séparation air-eau de l'entonnoir du vortex, mais également de la hauteur d'eau dans la chambre.

Nous nous proposons donc de chercher la relation entre le diamètre de la tache, la forme de la partie hyperbolique du vortex, et le débit d'aspiration (Q), soit en définitif la valeur de la circulation (Γ) autour du vortex.

Cette relation se détermine à partir de l'équation de la caustique qui peut-être obtenue mathématiquement si l'équation du profil du vortex est connue. Dans le cas général, l'équation de tout le profil est inconnue.

Remarquons cependant que seule la partie supérieure convexe de l'entonnoir contribue à la formation de la caustique.

L'équation de cette partie du profil est donc la seule qu'il est nécessaire de connaître.

Or, d'après la constitution réelle du vortex, nous savons que dans cette zone située loin de l'axe de rotation OZ - l'écoulement est irrotationnel, et l'influence de la viscosité est négligeable. L'équation du profil de la partie convexe du vortex sera donc obtenue à partir de la relation de Bernoulli, puis l'équation de la caustique.

Des vérifications ultérieures ont justifié la validité des hypothèses et des calculs.

EQUATION DE LA PARTIE CONVE XE DE L'ENTONNOIR DU VORTEX

Pour un fluide parfait et un mouvement permanent soumis à la seule action de la pesanteur ; le théorème de Bernoulli est applicable. Toutes les particules liquides décrivant des cercles de même rayon forment des cylindres de courant. Les particules d'un même cylindre de courant se déplacent avec la même vitesse tangentielle et angulaire. La variation de ces deux vitesses détermine la répartition de pression le long du rayon ou la forme de la surface libre.

Considérons donc un élément de fluide en mouvement permanent sur l'une des circonférences, située dans un plan horizontal; d'après la loi fondamentale de l'hydrostatique ; le gradient de pression à l'équilibre le long d'un rayon est donné par :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} = \vec{F} \cdot \vec{\partial s} \quad (5)$$

En désignant par $\vec{\partial s}$, un déplacement élémentaire suivant le rayon (r).
 \vec{F} étant la résultante de toutes les forces extérieures par unité de masse est égale à la force centrifuge tel que :



$$F = \omega^2 r$$

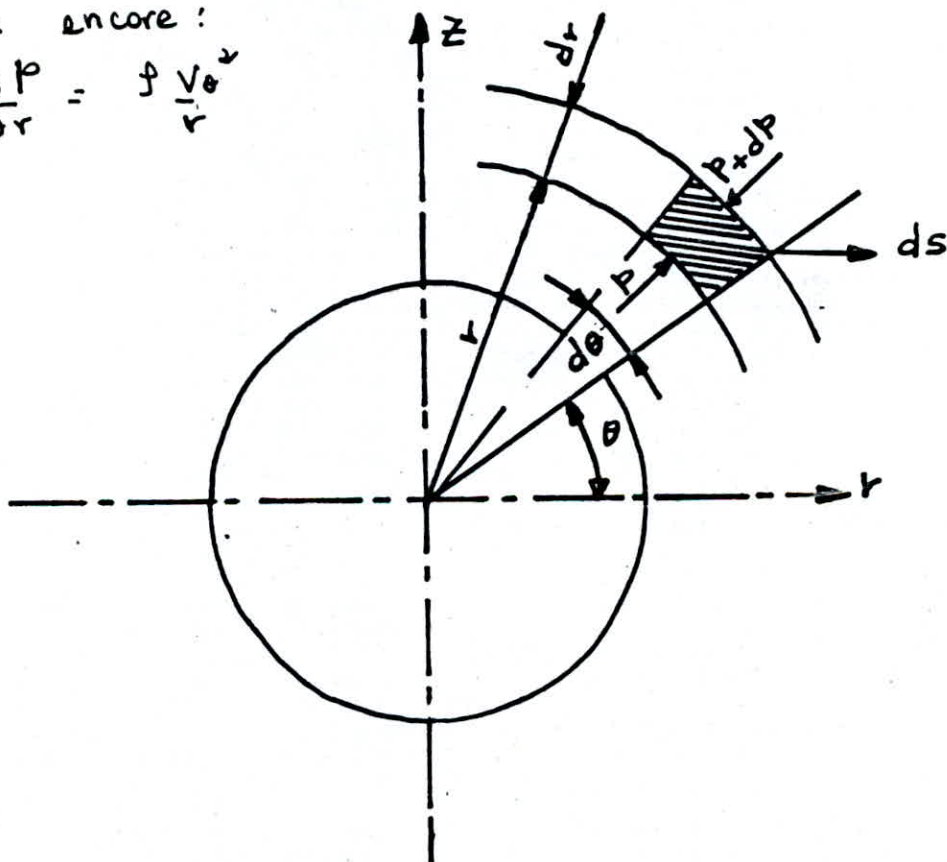
Par projection de l'équation (5) sur la normale principale \vec{r} à la trajectoire au point considéré, normale orientée positivement vers le centre de la courbure [fig. 13], la condition d'équilibre, donc s'exprime pour chaque particule par l'égalité de la force centrifuge et de la pression ou colonne statique de liquide au même point:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\bar{\omega} V_0^2}{g \cdot r} = \frac{\bar{\omega}}{g} r \omega^2 = f r \omega^2$$

$$\text{Soit: } \frac{1}{f} \frac{dP}{dr} = \frac{\omega^2}{r} = \frac{V_0^2}{r}$$

ou encore:

$$\frac{dP}{dr} = f \frac{V_0^2}{r}$$



- fig. 13 -

Sachant que dans le cas d'un vortex libre la vitesse est inversement proportionnelle au rayon tel que :

$$V_0 = \frac{k}{r} ;$$

On peut donc calculer le gradient radial de pression soit :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{k^2}{r^3}$$

D'autre part, en exprimant que l'élément considéré est en équilibre dans le plan vertical, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g.$$

qui est la condition classique en Statique des Fluides.

En intégrant ces dernières relations, on obtient la distribution de pression dans un tourbillon libre :

$$\frac{P - P_0}{\rho} = g(z_0 - z) - \frac{k^2}{2r^2}$$

z et z_0 étant respectivement les côtes en 2 points, l'un (M) situé à une distance r de l'axe de rotation, l'autre (N) très éloigné pour lequel la vitesse est nulle et où la pression est égale à la pression atmosphérique P_a .

D'après le théorème de Bernoulli et par définition, la pression totale, constante dans la partie convexe

du vortex est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{P}{\bar{w}} + \frac{V_0^2}{2g} + z = \frac{P_a}{\bar{w}} + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{k^2}{2gr^2} + z_0 = \frac{P_a}{\bar{w}} + z_0$$

Elle est donc égale à la pression totale de la surface libre à une grande distance du centre du tourbillon.

Compte tenu de l'expression de la vitesse, l'équation d'une courbe d'égale pression et, en particulier celle de la surface libre, s'écrit en rapportant l'origine des côtes à la surface libre, de la manière suivante :

$$z = z_0 - \frac{k^2}{2g \cdot r^2}$$

$$\text{ou encore } z_0 - z = \frac{k^2}{2gr^2}$$

Ce qui démontre que la surface libre s'abaisse quand on se rapproche de l'axe.

$$\text{En posant } k' = \frac{k^2}{2g} ;$$

Cet abaissement $h = z_0 - z$ devient :

$$h = \frac{k'}{r^2}$$

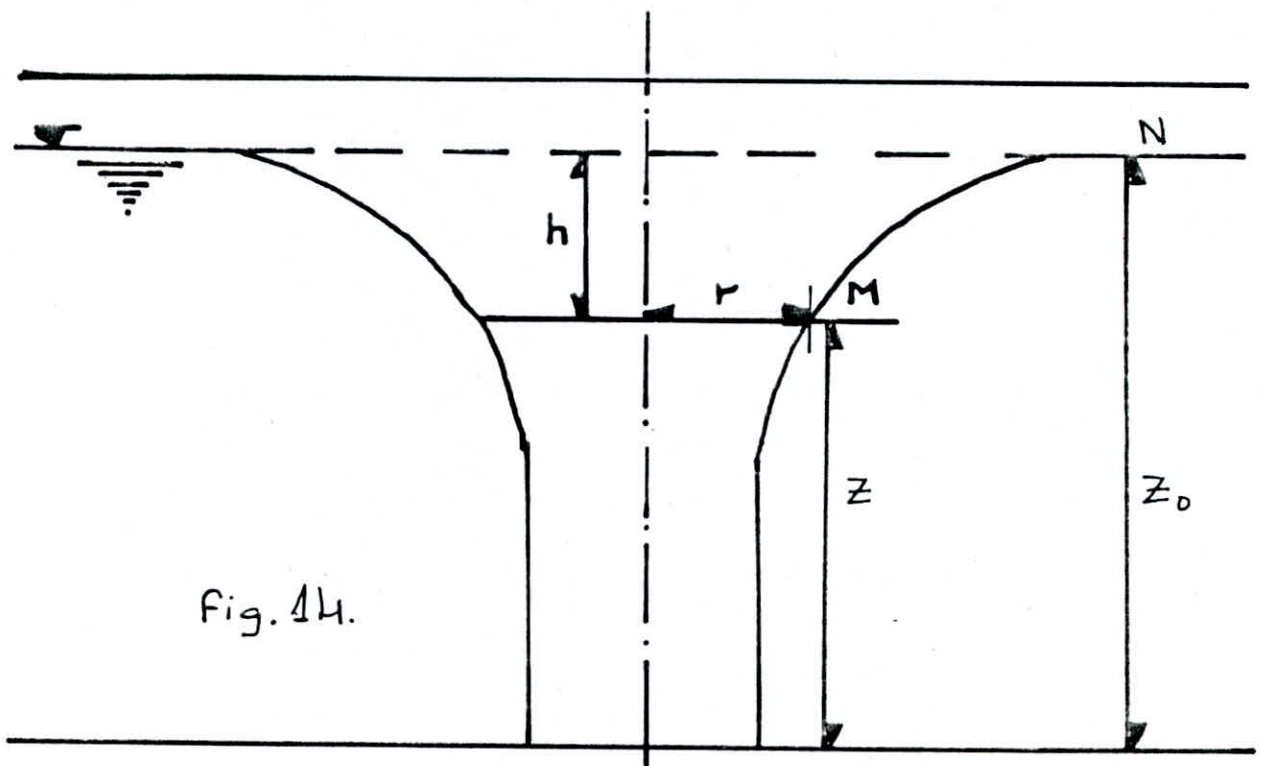
En désignant par Γ la circulation dans la zone irrotationnelle tel que :

$\Gamma = 2k\pi$, on obtient en définitive, l'équation du profil de la partie convexe de l'entonnoir du vortex :



$$h = \frac{\Gamma}{8\pi^2 g r^2}$$

Avec nos hypothèses, cette équation est celle d'une courbe hyperbolique dont la forme à l'allure indiquée ci-dessous:



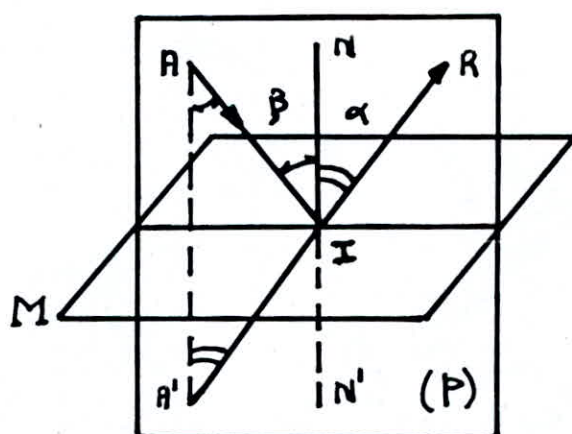
5.2 - EQUATION DE LA SURFACE CAUSTIQUE

Afin d'établir cette équation, rappelons d'abord certaines lois fondamentales de l'optique géométrique.

5.2.1 - Lois de la réflexion

Considérons une surface réfléchissante plane M , sur laquelle tombe un rayon incident AI [fig. 15]. Ce rayon rencontre le miroir au point d'incidence I . Soit IN la perpendiculaire en I au plan du miroir M ; Le plan d'incidence (P) est défini par le rayon incident

AI et la normale IN ; l'angle d'incidence (β) est l'angle que fait le rayon incident AI avec la normale IN . La connaissance du plan (P) et de l'angle (β) détermine le rayon incident. Le prolongement du rayon réfléchi IR passe par A' symétrique de A par rapport au miroir. Comme A' est dans le plan d'incidence (P), il en est de même du rayon réfléchi IR ; cela conduit à la 1^{ère} loi de la réflexion
 - Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.



- Fig. 15.

D'autre part, le rayon réfléchi IR fait avec la normale IN un angle de réflexion (α).

Comme AA' est parallèle à IN , on a:

$$\beta = \hat{A} \text{ comme alternes-internes.}$$

$$\alpha = \hat{A'} \text{ comme correspondants.}$$

Or le triangle AIA' est isocèle, puisque A et A' sont symétriques par rapport à M , il en résulte que : $\hat{A'} = \hat{A}$, d'où : $\alpha = \beta$

La deuxième loi s'énonce donc :

L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Ces deux lois déterminent complètement le rayon réfléchi.

5.2.2 - Lois de la réfraction :

Ces lois dont le premier énoncé correct a été établi par Descartes déterminent la direction du rayon réfracté correspondant à un rayon incident donné : ELLES ne s'appliquent en toute rigueur qu'à de la lumière monochromatique, toutefois des expériences d'assez bonne précision peuvent être faites avec de la lumière blanche.

Précisons d'abord quelques définitions analogues à celles qui ont été données à propos de la réflexion.

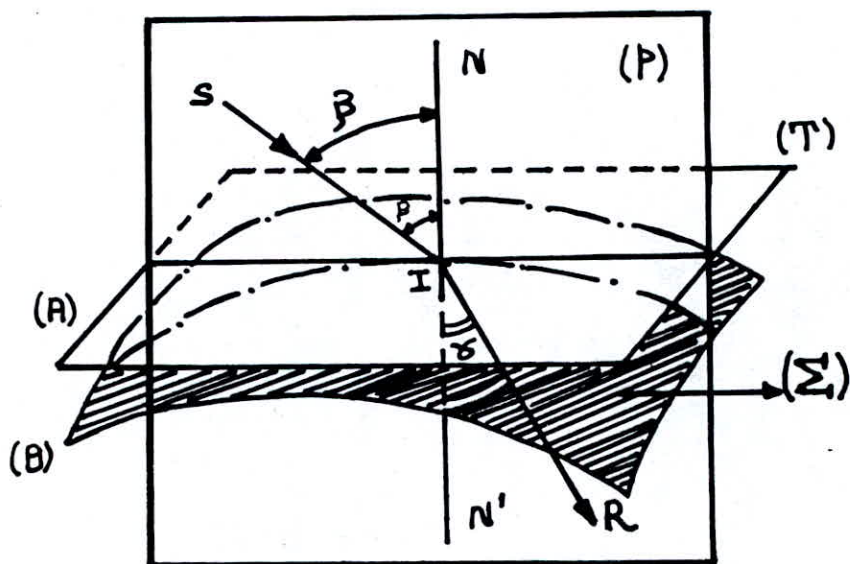
Soit (Σ) la surface séparant deux milieux (A) et (B) transparents, homogènes et isotropes. Le rayon incident SI, qui se propage dans le milieu (A) et rencontre la surface (Σ) au point d'incidence (I), est déterminé par le plan d'incidence (P), défini par (SI) et la normale IN, et par l'angle d'incidence que SI fait avec IN. Dans le milieu (B), le rayon réfracté IR fait avec la normale l'angle de réfraction (r) [Fig. 16].

A ce propos les lois de Descartes s'énoncent comme suit :

- 1^{ère} loi : Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence ;

- 2^{ème} loi : Il existe un rapport constant entre les sinus des angles d'incidence β , et de réfraction δ tel que :

$$\frac{\sin \beta}{\sin \delta} = \text{constant}$$



- Fig. 16 -

5.2.3 - Les indices de réfraction :

Les théories de la lumière établissent que le changement de direction de la propagation de la lumière lorsqu'elle passe d'un milieu dans un autre, est lié à la variation de la vitesse de propagation ; d'une manière plus précise le rapport

des sinus des angles d'incidence et de réfraction est égal au rapport des vitesses de la lumière V_1 et V_2 dans les deux milieux tel que :

$$\frac{\sin \theta}{\sin r} = \frac{V_1}{V_2}$$

D'autre part du point de vue optique, il est commode de caractériser un milieu par son indice de réfraction (n) défini comme étant le quotient de la célérité (c) de la lumière dans le vide par la célérité dans le milieu considéré :

$$n = \frac{c}{v} ; \quad c = 300.000 \text{ (km/s)} = 3 \cdot 10^8 \text{ (m/s)}$$

Dans un milieu matériel transparent, la vitesse de propagation v est plus petite que la célérité (c). Il résulte donc de la définition précédente que l'indice du vide est égal à un, ceux de tous les corps transparents sont des nombres supérieurs à l'unité.

Une substance est d'autant plus réfringente que son indice est plus grand. L'eau a un indice valant $4/3$.

L'air atmosphérique est un milieu très légèrement réfringent dont l'indice vaut 1,0003 ;

sauf dans des cas exceptionnels, on prend un comme valeur de cet indice.



5.2.4- Formules de Descartes.

Si on introduit les indices de deux milieux séparés tel que : $n_1 = \frac{c}{V_1}$ et $n_2 = \frac{c}{V_2}$

La formule qui donne le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction s'écrit :

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1} = m$$

La seconde loi de la réfraction se traduit donc par la formule :

$$n_1 \sin \beta = n_2 \sin \gamma$$

Elle traduit le fait que lors d'une réfraction, le produit de l'indice par le sinus de l'angle que le rayon lumineux fait avec la normale conserve la même valeur pour les deux milieux considérés.

Donc à la base de tous ces éclaircissements et dans le but de pouvoir visualiser aisément la surface caustique réelle possédant un axe de révolution vertical; la lumière incidente, si tuée au dessus de la surface libre, doit être dirigée suivant la normale à cette surface.

Dans le but de satisfaire à cette condition, l'utilisation des propriétés d'un miroir plan s'impose.

Une partie des rayons incidents interceptée par le miroir sera réfléchi et les rayons vont diverger dans toutes les directions.



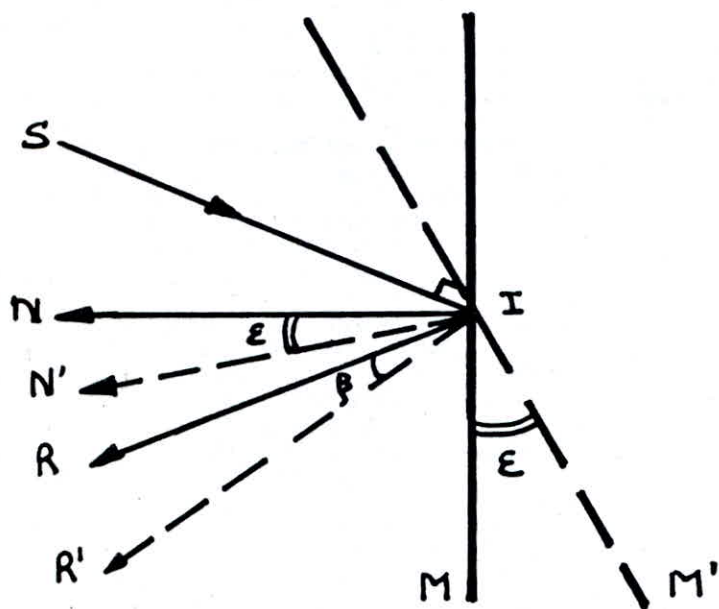
Donc, pour pallier à cette difficulté, et afin de conduire les rayons réfléchis éblouissant le miroir à converger en un point de la surface libre, nous devons procéder à la rotation du faisceau de lumière réfléchi.

Pour cela cherchons donc la meilleure inclinaison à donner au miroir réfléchissant nous permettant ainsi de réaliser cette condition suffisante et nécessaire.

Mais, avant de procéder à cette recherche, voyons d'abord dans quel rapport varient l'angle du rayon réfléchi avec celui du miroir plan.

Ce rapport est déterminé grâce à la démonstration suivante :

Faisons tomber un pinceau incident fixe SI perpendiculairement sur le miroir plan tournant autour d'un axe parallèle à ce plan et passant par le point d'incidence I. Puis on cherche ce que fait le pinceau réfléchi lorsque le miroir tourne. Nous schématiserons les pinceaux par des rayons et nous ne considérerons que le cas où l'axe de rotation est perpendiculaire au plan d'incidence, Voir [fig.17]



- Fig. 17.

lorsque le miroir est en M , le rayon incident SI se réfléchit suivant IR ; quand le miroir prend la position M' , ayant tourné de l'angle E , le rayon réfléchi devient IR' , il a pivoté, dans le même sens que le miroir d'un angle :

$$\beta = \widehat{SIR'} - \widehat{SIR}$$

Or la normale IN est venue en IN' après avoir tourné de l'angle (E) ; on a donc

$$\beta = 2 \widehat{SIN'} - 2 \widehat{SIN} = 2 \widehat{NIN'}$$

$$\text{ou encore } \beta = 2E.$$

Donc le rayon incident restant fixe, si le miroir tourne d'un angle (E) , le rayon réfléchi tourne dans le même sens d'un angle valant $2E$.

Dans notre cas, puisque, le pinceau réfléchi par le miroir doit être dirigé perpendiculairement à la surface libre de l'eau, donc l'angle β doit

Former un angle droit ($\beta = 90^\circ$)

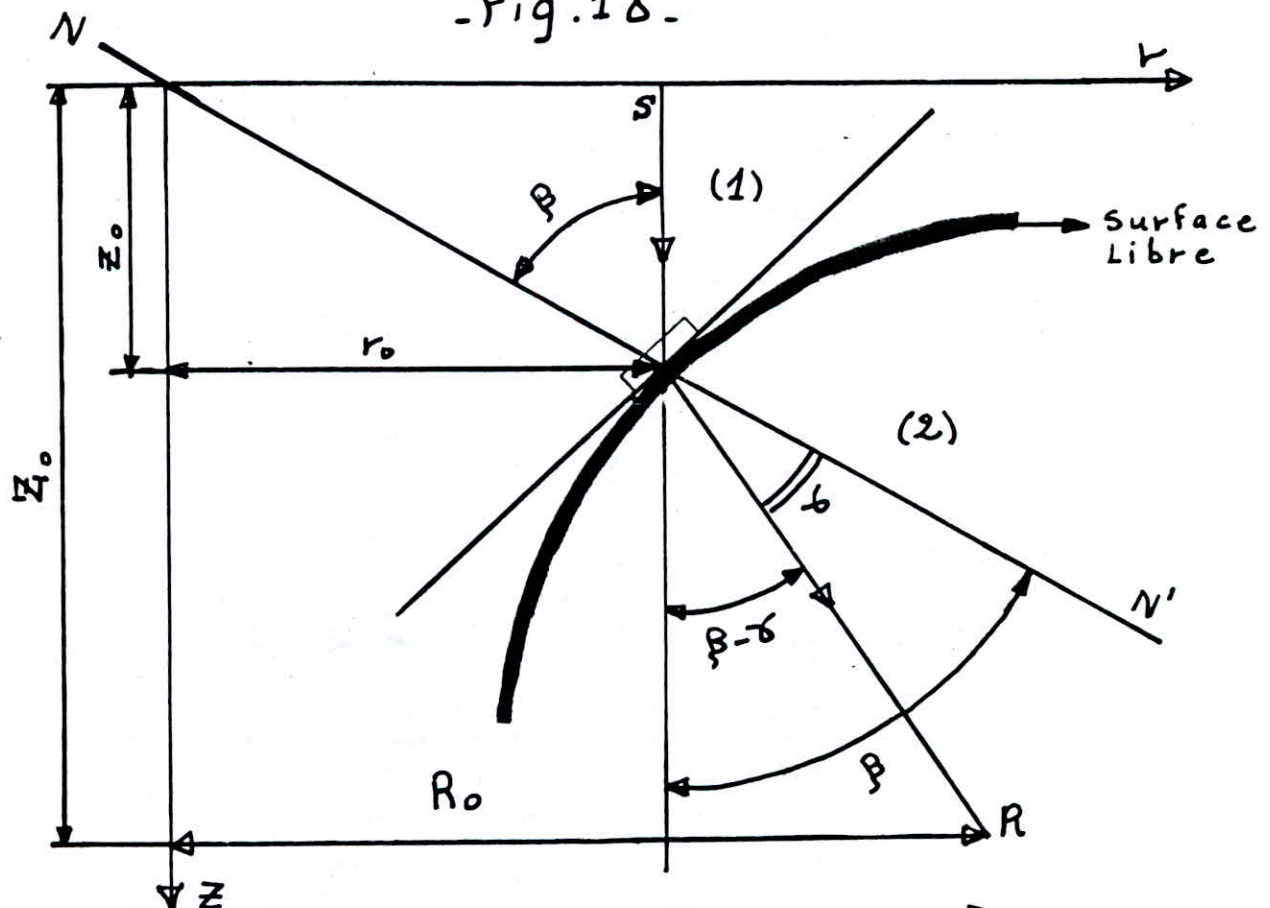
$$\alpha' = \beta = 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 45^\circ$$

C'est donc une inclinaison de 45° , qu'il faudra donner au miroir plan pour obtenir une lumière incidente normale à la surface libre.

5.2.5- Equation de la caustique

Eclairons la surface libre du plan d'eau au moyen d'un faisceau cylindrique de rayons parallèles fixe d'axe commun vertical tombant dans un plan incident perpendiculaire à l'axe du miroir incliné, [Voir. Fig. 18].

- Fig. 18 -



Adoptons pour ce calcul les notations suivantes:

- (r_0, z_0) coordonnées du point considéré de la surface hyperbolique du vortex;
- R_0 Distance à l'axe du rayon réfracté dans un plan horizontal de cote z_0 ;
- m : rapport des indices relatif de réfraction des 2 milieux.

On peut donc écrire le système d'équation suivant:

- 1. D'après l'équation des courbes d'égale pression, la cote du point considéré de la surface hyperbolique du vortex situé assez loin de l'axe de rotation s'exprime par:

$$z_0 = \frac{k'}{r_0^2} \quad \text{avec} \quad k' = \frac{k^2}{2 \cdot g}$$

- 2. Géométriquement, l'inclinaison de cette surface par rapport au plan horizontal est donnée par:

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{R_0 - r_0}{z_0 - z_0} = \frac{R_0 - r_0}{z_0 - \frac{k'}{r_0^2}} \quad (6)$$

- 3 - Le coefficient angulaire de la droite, tangente à la surface hyperbolique est égal au taux d'accroissement infiniment petit de la cote z par rapport au rayon r .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k'}{r^2} \right) = - \frac{2k'}{r^3}.$$



Pour $r = r_0$ et en prenant la valeur absolue, la formule ci-dessus devient :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2k'}{r_0^3}$$

4. D'après la loi de Descartes

$$\sin \beta = m \sin \gamma$$

Cette expression qui traduit le phénomène de réfraction, peut être remplacée dans le cas présent, puisque l'angle d'incidence est toujours très faible par l'expression suivante :

$$\operatorname{tg} \beta = m \operatorname{tg} \gamma \quad \text{où} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{m}$$

5. D'après les relations trigonométriques :

$$\operatorname{tg} (\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} \quad (7)$$

En égalant les équations (6) et (7) :

$$\frac{R_0 - r_0}{z_0 - z_0} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{tg} (\beta - \gamma)$$

Sachant que :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2k'}{r_0^3} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2k'}{m r_0^3}, \quad \text{il vient :}$$

$$\frac{R_0 - r_0}{z_0 - z_0} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{2k'}{r_0^3} - \frac{2k'}{m r_0^3}}{1 + 2 \frac{k'}{r_0^3} \cdot \frac{2k'}{m r_0^3}}$$

$$= \frac{\frac{2k'}{m r_0^3} (m-1)}{m + \left(\frac{2k'}{r_0^3} \right)^2} = \frac{2k' (m-1) r_0^3}{m r_0^6 + 4k'^2}$$

En définitif, il résulte que :

$$\frac{2k'(m-1)}{mr_0^3} = \frac{R_0 - r_0}{Z_0 - Z_0} = \frac{R_0 - r_0}{Z_0 - \frac{k'}{r_0^2}} \quad (8)$$

En négligeant, dans un but de simplification des calculs, $4k'^2$ devant mr_0^6 , ainsi que l'ordre de grandeur des valeurs numériques permet de le faire.

En dérivant par rapport à r_0 , cette dernière équation, on a :

$$-1 = \left(\frac{2k'}{r_0^3} \right) \left[\frac{2k'(m-1)}{mr_0^3} \right] + \left[\frac{2k'(m-1)}{m} \right] \left[\frac{-3}{r_0^4} \right] \left[Z_0 - \frac{k'}{r_0^2} \right]$$

où :

$$\frac{4k'^2(m-1)}{mr_0^6} - \left[\frac{6k'(m-1)}{mr_0^4} \right] \left[Z_0 - \frac{k'}{r_0^2} \right] = -1$$

$$\left(Z_0 - \frac{k'}{r_0^2} \right) \left[\frac{6k'(m-1)}{mr_0^4} \right] = \frac{4k'^2(m-1) + mr_0^6}{mr_0^6}$$

$$Z_0 = \frac{k'}{r_0^2} + \frac{[4k'^2(m-1) + mr_0^6] m \cdot r_0^4}{mr_0^6 \cdot 6k'(m-1)}$$

$$Z_0 = \frac{k'}{r_0^2} + \frac{4k'^2(m-1) + mr_0^6}{6k'(m-1) \cdot r_0^2}$$

En éliminant Z_0 dans la formule (8) :

$$R_0 - r_0 = \frac{2k'(m-1)}{m \cdot r_0^3} \left(Z_0 - \frac{k'}{r_0^2} \right).$$

$$R_0 - r_0 = \frac{2 k' (m-1)}{m r_0^3} \left[\frac{m r_0^6 + 4 k'^2 (m-1)}{6 k' (m-1) r_0^4} \right]$$

$$R_0 - r_0 = \frac{m r_0^6 + 4 k'^2 (m-1)}{3 m \cdot r_0^5}$$

$$\text{d'où } R_0 = r_0 + \frac{m r_0^6 + 4 k'^2 (m-1)}{3 m r_0^5}$$

$$\text{ou encore } R_0 = r_0 + \frac{m r_0^6}{3 m r_0^5} \quad (9)$$

En définitif, les équations paramétriques de la caustique sont les suivantes :

$$\frac{4 k'^2 (m-1)}{m \cdot r_0^6} - \left[\frac{6 k' (m-1)}{m \cdot r_0^4} \right] \left(Z_0 - \frac{k'}{r_0^2} \right) = -1$$

$$\left(Z_0 - \frac{k'}{r_0^2} \right) \left[\frac{6 k' (m-1)}{m r_0^4} \right] = \frac{4 k'^2 (m-1) + m r_0^6}{m r_0^6}$$

$$Z_0 = \frac{k'}{r_0^2} + \frac{4 k'^2 (m-1) + m r_0^6}{6 k' (m-1) r_0^4}$$

$$R_0 = r_0 + \frac{m r_0^6 + 4 k'^2 (m-1)}{3 m r_0^5}$$

En tenant compte que dans les conditions des essais :

- Z_0 est la hauteur du plan d'eau H au dessus du radier
- R_0 est le rayon sur le radier de la tache de diamètre d .

Les équations paramétriques simplifiées, avec les mêmes hypothèses que précédemment, s'écrivent en fonction de H et d :

$$H = \frac{k'}{r_0^2} + \frac{r_0^4 \cdot m}{6k'(m-1)} = \frac{m \cdot r_0^4}{6k'(m-1)}$$

Sachant que $d = 2R_0$, en remplaçant dans l'équation (9),

$$\text{Soit } 2R_0 = 2r_0 + \frac{2mr_0^6}{3mr_0^5} \Rightarrow d = \frac{8}{3}r_0.$$

L'indice de réfraction (m) des deux milieux air-eau étant égal à $m = \frac{4}{3}$, les formules simplifiées s'écrivent :

$$H = \frac{2r_0^4}{3k'} \quad \text{et} \quad d = \frac{8}{3}r_0.$$

A la base de tous ces résultats, Etablissons maintenant la relation donnant l'amplitude et la vitesse dans la zone hyperbolique du vortex.

D'après les hypothèses suivantes :

$$k' = \frac{k}{2g} \Rightarrow k = \sqrt{2gk'}$$

$$\Gamma = 2\pi k = 2\pi \sqrt{2gk'} \quad (10)$$

$$z_0 = \frac{k'}{r_0^2} \quad \text{où} \quad r_0^2 = \frac{k'}{z_0}$$

$$H = \frac{2}{3k'} r_0^4 \quad \text{d'où} \quad k' = \frac{2r_0^4}{3H} \quad (11)$$

en éliminant k' entre les équations (10) et (11) on obtient la circulation Γ tel que :

$$\Gamma = 4\pi r_0^2 \sqrt{\frac{g}{3H}}$$

$$\text{avec } r_0 = \frac{3}{8}d$$

$$\text{d'où} \quad \Gamma = \frac{3}{16} \pi d^2 \sqrt{\frac{3g}{H}} \quad (12)$$

Enfin ; avec $d = 2 R$

$$\Gamma = 4,081 R^2 g^{1/2} H^{-1/2}$$

D'autre part $\Gamma = 2\pi r V_\theta$

Par égalisation des deux derniers résultats, on obtient la relation donnant la vitesse (V_θ) telle:

$$V_\theta = \frac{3\pi}{16} d^2 \sqrt{\frac{3g}{H}} \frac{1}{2\pi r}$$

Comme $d = 2 R$

$$V_\theta = \frac{3\pi}{16} \frac{4R^2}{2\pi r} \sqrt{\frac{3g}{H}}$$

$$\text{d'où } V_\theta = \frac{3}{8} \frac{R^2}{r} \sqrt{\frac{3g}{H}}$$

ou encore

$$V_\theta = 0,649 \frac{R^2}{r} H^{-1/2} \cdot g^{1/2}$$



ETUDE
EXPERIMENTALE

ETUDE EXPERIMENTALE

Pour déterminer théoriquement l'équation de la méridienne de la surface caustique, nous avons été conduits à faire deux hypothèses Principales :

- La première est relative au fluide que nous avons supposé non visqueux dans la zone périphérique du vortex, région du vortex libre.

- La seconde concerne l'angle d'incidence. Supposé petit, des rayons lumineux avec la dépression de l'entonnoir du vortex, permettant de confondre la valeur de la tangente à celle du sinus.

Il serait cependant intéressant de pouvoir vérifier ces hypothèses.

La formule (12) déduite est une formule théorique exacte.

Servant comme support de comparaison avec les résultats expérimentaux, elle permet ainsi d'apprécier le degré de précision de la méthode des rayons réfractés.

Une vérification expérimentale de cette formule consiste à mesurer la dimension du diamètre de la tache sur le radier du modèle, puis d'effectuer une comparaison rigoureuse.

- Pour une même valeur de la hauteur d'eau -
entre les quantités suivantes :

- La relation $\Gamma = f(d^2)$ obtenue à partir
de la formule théorique.

- La relation $\Gamma = f(d^2)$ obtenue à partir
de l'épreuve photographique.

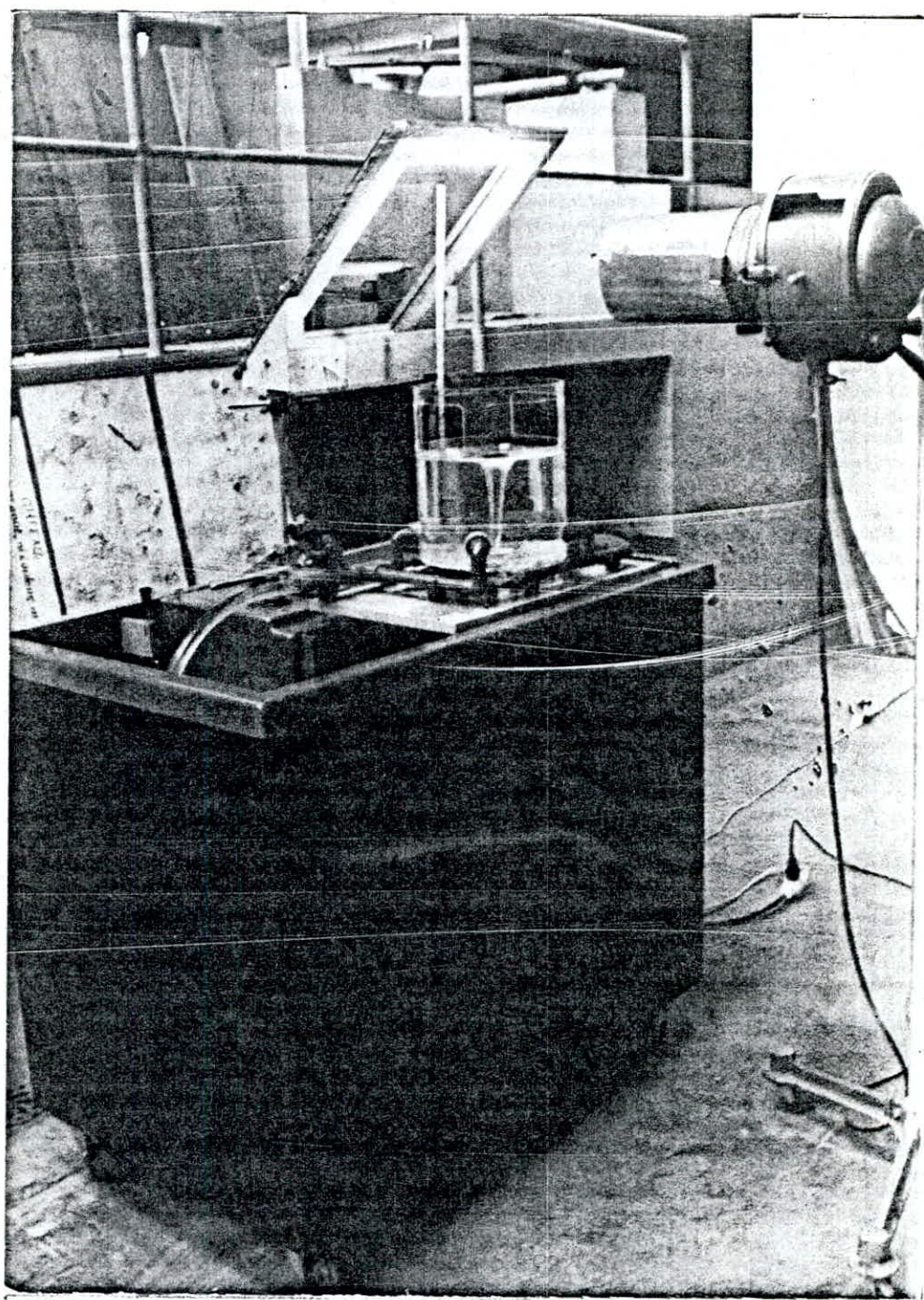
Les essais seront conduits sur un
petit modèle de 18 cm. de hauteur d'eau et
dont les conditions de débit de vidange
pourraient permettre d'obtenir un vortex
suffisamment important de façon que les
perturbations parasites apportées à l'écoulement
près du vortex soient les plus faibles possibles.

1- DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

L'ensemble expérimental comporte un banc
d'essai hydraulique sur lequel est disposé
une cuve cylindrique, et un dispositif optique.
La figure 19 montre une vue globale du montage

11- DESCRIPTION DU DISPOSITIF D'ESSAI. - BANC D'HYDRAULIQUE -

Le banc d'essai est constitué de deux
demi-coques légères en plastique moulé
anti-corrosion coloré dans la masse.
Des roulettes assurent un déplacement aisé de



-Fig. 19- VUE DU MONTAGE EXPERIMENTAL

l'ensemble.

La demi-coque supérieure comporte un canal ouvert et un réservoir de mesure volumétrique ainsi qu'un système pour disposer les divers accessoires conçus pour être montés sur le banc.

L'eau est stockée dans un réservoir situé dans la demi-coque inférieure équipée d'un couvercle pour réduire au maximum l'introduction de corps étrangers.

Une pompe centrifuge auto-amorcée aspire l'eau du réservoir jusqu'à un raccord mâle situé dans le fond du canal et auquel sont branchés les divers accessoires à étudier.

Le débit est contrôlé à l'aide d'une vanne.

Les accessoires utilisés avec le banc lui sont branchés par l'intermédiaire de raccords simples et rapides.

Après utilisation, l'eau est recueillie dans un réservoir de mesure volumétrique.

Celui-ci est à deux niveaux et permet des mesures de débits lents et rapides.

Il comporte un tranquilisateur et une jauge de niveau graduée appelée jauge volumétrique, donnant une indication dynamique du niveau volumique.

L'échelle de cette dernière est divisée en deux parties pour faciliter la mesure des petits débits ou des débits plus importants, en utilisant respectivement les parties correspondantes du réservoir de mesure à double niveau.

En outre, une bonde de vidange dans le fond du réservoir volumétrique assure le retour de l'eau dans le réservoir de stockage.

1.2. DESCRIPTION DE LA CHAMBRE EXPERIMENTALE [Fig. 20].

L'appareil expérimental est constitué d'une chambre cylindrique réalisée en plexiglass disposée sur un socle, connectée à l'aide d'une canalisation, puis d'un tuyau flexible à un raccord mâle situé au fond du canal composant la demi-coque supérieure du banc.

En outre, la canalisation comporte deux conduites terminées à leurs extrémités par deux emboûts perforés débouchant symétriquement de part et d'autre de la paroi latérale et déversant directement dans la cuve, lui assurant ainsi son alimentation.

Le raccord mâle coudé rejoint un débitmètre

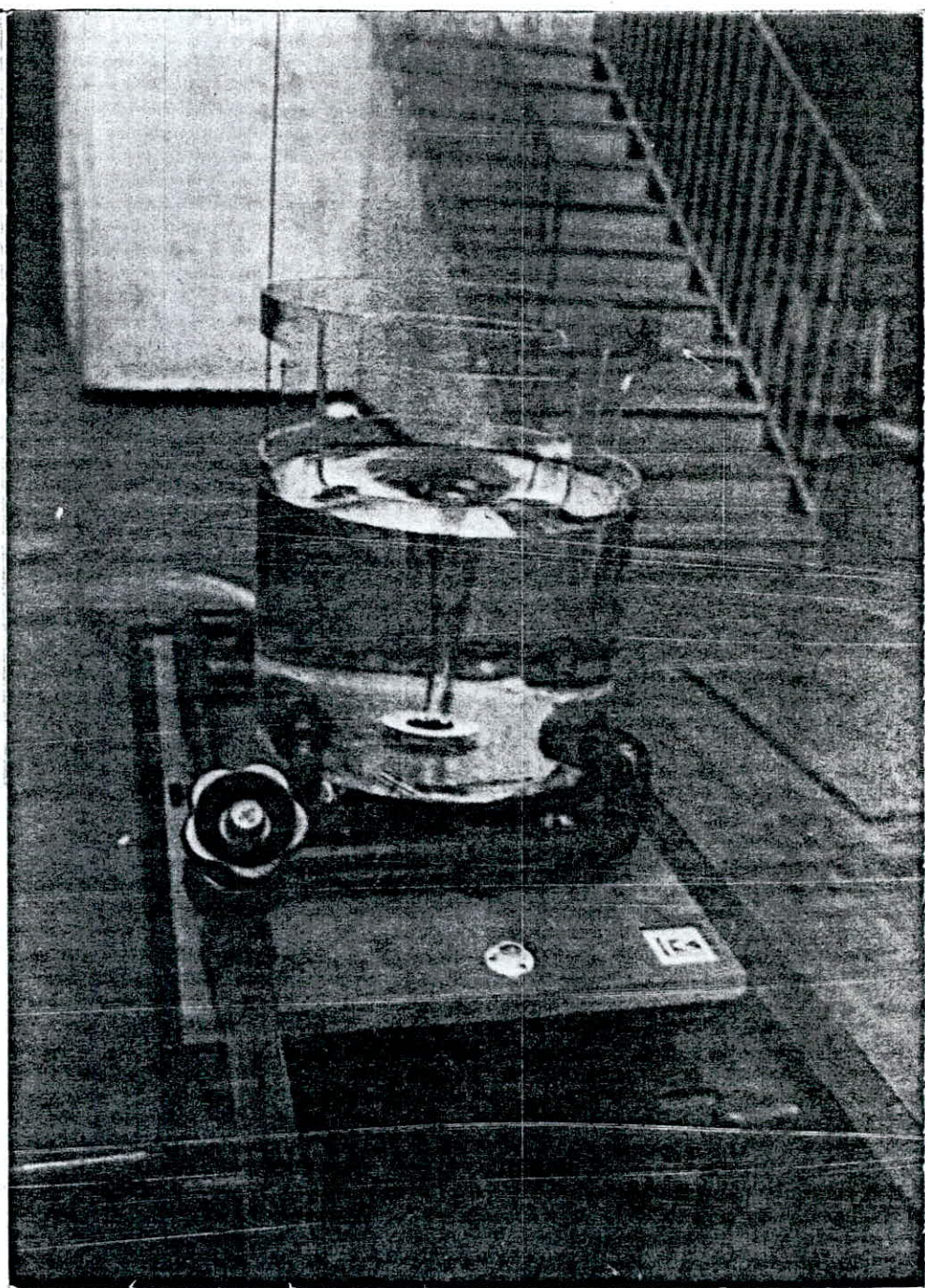


fig.20 VUE DU MODELE REDUIT

sur le parcours duquel est placée une vanne pour le contrôle du débit d'alimentation. Cette dernière est solidaire de la demi-coque inférieure du banc et, est raccordée au réservoir de stockage par l'intermédiaire de la pompe centrifuge aspirante.

La vidange du puisard [chambre d'expérimentation] est assurée grâce à deux orifices diamétralement opposés percés très bas dans la paroi latérale.

L'eau s'écoulant par ces ouvertures passe à travers deux autres conduites rejoignant à leurs extrémités inférieures une vanne pour le contrôle du débit de vidange.

La vanne est ensuite prolongée par un tuyau flexible accédant directement dans le réservoir volumétrique, recueillant enfin l'eau de vidange.

La base circulaire de la chambre de diamètre égal à (24 cm) et de (18 cm) de hauteur est percée en son centre d'un orifice axial où deux ajutages de décharge de diamètres différents peuvent s'y adapter. Les coordonnées du profil du vortex sont mesurées à l'aide d'une jauge



de profondeur montée au dessus du puisard.
Une règle graduée, maintenue en position verticale contre la paroi de ce dernier permet la lecture de la hauteur d'eau.

1.3- DESCRIPTION DU DISPOSITIF OPTIQUE

Celui-ci se compose d'un projecteur situé à une certaine distance au dessus de la cuve cylindrique et émettant une source de lumière blanche, ainsi que d'un miroir plan considéré comme étant une surface réfléchissante de dimensions relativement moyennes, incliné sous un angle de 45° par rapport à la surface libre de l'eau dans la cuve.

La source lumineuse est placé assez loin du miroir, de façon à obtenir un faisceau cylindrique de rayons parallèles, tombant directement dans un plan incident perpendiculaire à l'axe du miroir plan réfléchissant.

2- PROCEDURE EXPERIMENTALE

Après avoir choisi le diamètre de l'orifice de succion, on fait passer différents débits d'arrivée en ouvrant la vanne d'alimentation.

[L'vanne de vidange étant fermée].

Les débits sont mesurés par la méthode volumétrique. Ils sont déterminés comme étant le quotient de la valeur du volume d'eau (V) lu sur la jauge volumétrique graduée pendant un temps donné (t) de remplissage [Afin de minimiser l'erreur, chaque opération est renouvelée trois fois de suite].

La réalisation du régime permanent est établie par ouverture de la vanne de vidange, en ajustant le débit sortant de manière à maintenir une hauteur d'eau constante dans la cuve.

Après la stabilisation du niveau d'eau dans la chambre, une fois que la surface libre reste exempte de toute dépression, on fait varier le débit tout en maintenant la même hauteur d'eau.

Pour différentes valeurs du débit allant dans le sens croissant, on suit simultanément l'évolution et le diamètre des taches de l'entonnoir du vortex dès l'apparition de la dépression initiale sur la surface libre jusqu'à son aération totale.

A ce niveau, le dispositif optique projetant la tache circulaire sombre sur le radier du puisard nous permet de la visualiser en la photographiant à l'aide d'un appareil adéquat de prises de vues centré sur l'axe du vortex. Le diamètre de la tache est ensuite enregistré grâce aux graduations recouvrant le fond de la cuve. Ainsi, avec une hauteur d'eau constante pour chaque étape observée, les mesures consistent à relever les valeurs des couples débit-diamètre de la tache caractérisant la surface caustique; et cela pour les deux orifices de décharge considérés.

D'autre part, à l'aide de la jauge de profondeur, on mesure le profil de l'entonnoir du vortex, c'est-à-dire les coordonnées (r, z) d'un point situé dans la masse du tourbillon, à une distance (r) de l'axe de rotation (Oz) du vortex.

Cette manipulation est renouvelée pour une série de quatre hauteurs, permettant de contrôler le diamètre de la tache à différents débits variables et offre ainsi un moyen de vérification des mesures.

Pendant son évolution dans la chambre expérimentale, on constate que le phénomène n'est pas absolument stable.

En effet, deux vortex successifs n'ont pas toujours la même intensité et leur axe de rotation est en perpétuelle agitation autour de l'orifice de décharge.

De ce fait, le diamètre de la tache varie continuellement, bien que hauteur d'eau et débit restent inchangés. Cependant, il existe à un instant quelconque une valeur maximale que peut atteindre le diamètre de cette tache. C'est cette valeur maximale du diamètre dont la connaissance est seule utile qui sera retenue par la suite pour l'établissement de la relation entre les quantités Γ - d - H soit, en définitive des caractéristiques H - Φ - Γ prises deux-à-deux.

3- ASPECT DES VORTEX DE VIDANGE

Au cours de nos expériences, nous avons observé la formation de vortex permanents caractérisés en majorité par une grande vitesse de rotation et aspirant avec eux un certain débit d'air dans l'orifice de vidange.

Sur la surface plane du liquide, en un point fixe de celle-ci, l'apparition de mouvements tourbillonnaires se creusant et s'amplifiant instantanément donne naissance à une sorte d'entonnoir centré sur l'axe de la cuve cylindrique, de diamètre diminuant progressivement de haut en bas et aboutissant ainsi à l'orifice de vidange. Quant à l'axe du tourbillon, il part du point considéré puis rejoint l'intérieur de l'orifice de suction, sa forme est parabolique.

Cependant, si le mouvement tourbillonnaire est de faible intensité, le volume d'air s'enfonçant à l'intérieur du vortex rétrograde, et le phénomène disparaît de lui-même.

Mais dès que l'intensité du mouvement est suffisante et que le filet d'air contenu dans l'entonnoir peut approcher l'orifice de vidange, il est aspiré et un vortex aérié est amorcé. Dans la plupart des cas, le vortex s'établit dans le sens trigonométrique, cependant suivant les conditions d'alimentation de la chambre, on a également observé des vortex de sens inverse.

Les différentes étapes préalablement choisies

et déterminées après plusieurs observations et mesures se résument comme suit :

- Première étape :

Pour une hauteur quelconque et un débit minimal, on assiste à la formation d'un cône de dépression assez profond, et un filament tourbillonnaire très fin apparaît. Celui-ci s'étire jusqu'à l'entrée de l'orifice de vidange ; ce qui provoque un entraînement intermittent d'air sans toutefois occasionner un vortex aéré. Le phénomène est stable, permanent avec axe vertical rectiligne, voir la figure [22].

Malgré sa faible intensité, ce vortex constitue un seuil critique à éviter pouvant créer des perturbations importantes au niveau des stations de pompage.

- Deuxième étape :

Tandis que le débit tend vers des valeurs maximales, les déformations deviennent plus prononcées, on assiste alors à une aération constante du vortex ; son axe est alors incurvé.

Le cône de dépression profondément enfoncé dans l'orifice de décharge est largement ouvert, aspirant continuellement de l'air,



-fig 22- Vortexe aspirant de l'air par intermittence
Diamètre de l'orifice de vidange $D_1 = 0.75\text{cm}$

Ce qui réduit sensiblement le débit aspiré. De plus, si on examine l'aspect de la coupe en long du phénomène, on constate qu'il présente un aspect vrillé [Figure 21.a]. Caractérisé par un mouvement rotatif à grande vitesse et une forte instabilité, le vortex ainsi créé constitue l'étape ultime pouvant engendrer la destruction totale des grandes installations.

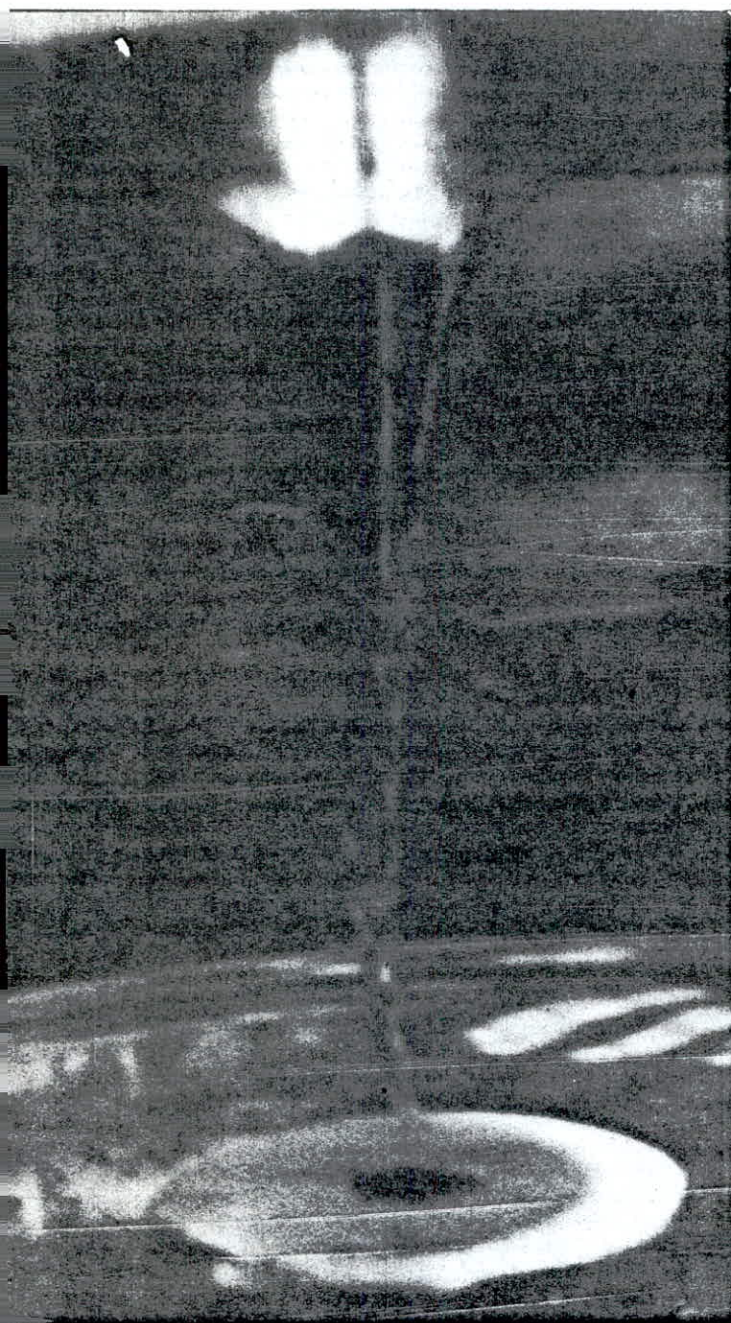
Troisième et Quatrième étape:

Pour des valeurs intermédiaires du débit, oscillant entre les valeurs extrêmes, et pour une hauteur d'eau quelconque, les déformations sont partiellement instables, on assiste à une aération intermittente du vortex d'axe parfois rectiligne.

Les dépressions sont prononcées, leurs cônes est étiré en un filament tourbillonnaire assez épais.

- REMARQUE

Concernant le grand diamètre D_2 de l'orifice de vidange, l'aspect du vortex s'identifie partiellement à la première étape précédente. Il est stable, avec axe rectiligne s'enfonçant complètement dans l'orifice de vidange [fig 21.b]. A ce stade, on assiste à une aération totale du vortex. Aussi, pour une valeur maximale



-a- Vortex aéré

Diamètre de l'orifice
de vidange $D_1 = 0.75\text{cm}$



-b- Vortex aéré

Diamètre de l'orifice
de vidange $D_2 = 2.4\text{cm}$

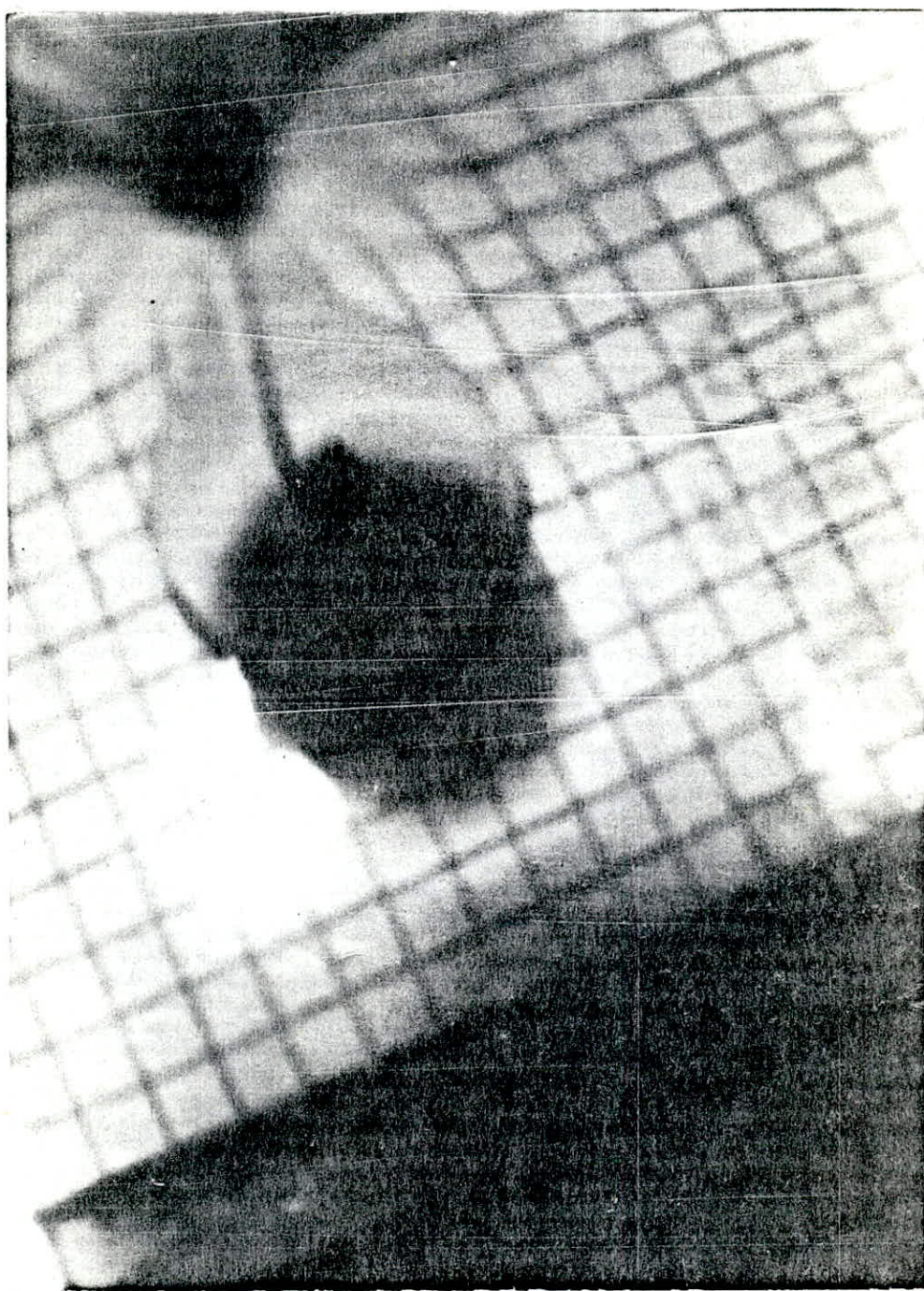


Fig.23-TACHE CARACTERISANT
L'ENTONNOIR DU VORTEX

du diamètre de la tache, déterminée
après plusieurs enregistrements, correspond
la forme la plus évasée de l'entonnoir
du vortex qu'il est alors possible d'obtenir
dans ces même conditions.

MESURES ET ANALYSE
DES
RESULTATS

MESURES ET ANALYSE DES RESULTATS

1- Mesures Experimentales et Présentation des Résultats:

Les essais comportent huit séries de mesures relatives à deux orifices de vidange de diamètres respectivement égaux à D_1 et D_2 .

Première Série:

- Hauteur d'eau dans la chambre: $H=18\text{cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange: $D_1=0.75\text{cm}$

Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau suivant:

Volume V (l)	Temps t (sec)	Débit Q (l/s)	Débit moyen Q_m (l/s)	Diamètre d (cm)	Diamètre maximal d_{\max} (cm)	Circulation Γ_{rh} ($\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$)
6.0	95.0	0.06	0.06	3.5	4.0	12.05
6.0	93.0	0.06		4.0		
6.0	95.0	0.06				
6.0	31.5	0.19	0.18	4.0	4.6	15.94
6.0	32.7	0.18		4.6		
6.0	33.0	0.18				
25.0	90.1	0.28	0.28	4.7	5.0	18.83
25.0	92.4	0.27		5.0		
25.0	89.2	0.28				
25.0	63.1	0.39	0.38	5.3	5.5	22.78
25.0	66.2	0.38		5.5		
25.0	65.6	0.38				

Deuxième Série:

- Hauteur d'eau dans la chambre : $H = 15 \text{ cm}$

- Diamètre de l'orifice de vidange : $D_1 = 0.75 \text{ cm}$

Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau suivant.

Volume V (l)	Temps t (sec)	Débit Q (l/s)	Débit moyen Q_m (l/s)	Diamètre d (cm)	Diamètre maximal d_{max} (cm)	Circula- tion. Γ_{th} ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
6.0	34.5	0.17	0.17	2.5	4.3	15.26
6.0	34.9	0.17				
6.0	34.6	0.17				
6.0	24.8	0.24	0.25	3.0	4.7	18.69
6.0	24.0	0.25				
6.0	23.3	0.26				
25.0	75.0	0.33	0.33	3.5	5.0	20.63
25.0	73.1	0.34				
25.0	76.1	0.33				
25.0	56.7	0.44	0.44	4.0	5.5	24.96
25.0	56.7	0.44				
25.0	56.6	0.44				

Quatrième Série:

- Hauteur d'eau dans la chambre: $H=8.0\text{cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange: $D_1=0.75\text{cm}$

Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous

Volume V (l)	Temps t (sec)	Débit Q (l/s)	Débit moyen Q_m (l/s)	Diamètre d (cm)	Diamètre maximal d_n (cm)	Circula- tion Γ (cm ² .s ⁻¹)
6.0	46.2	0.13	0.13	2.1 2.5	2.5	7.06
6.0	46.0	0.13				
6.0	46.9	0.13				
6.0	30.0	0.20	0.20	2.7 3.0	3.0	10.17
6.0	30.1	0.20				
6.0	30.0	0.20				
30.0	90.1	0.33	0.33	3.2 3.5	3.5	13.84
30.0	90.1	0.33				
30.0	90.2	0.33				
30.0	70.0	0.43	0.43	3.7 4.0	4.0	18.08
30.0	69.5	0.43				
30.0	70.0	0.43				

Cinquième Série:

- Hauteur d'eau dans la chambre : $H=18\text{cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange: $D_2=2.4\text{cm}$

Les résultats sont les suivants :

Volume V (l)	Temps t (sec)	Débit Q (l/s)	Débit moyen Q (l/s)	Diamètre d (cm)	Diamètre maximal d_{max} (cm)	Circula- tion Γ_{th} (cm^2s^{-1})
6.0	27.2	0.22	0.21	7.5	7.7	44.66
6.0	28.0	0.21				
6.0	28.6	0.21				
6.0	20.1	0.29	0.30	7.9	8.8	58.33
6.0	19.8	0.30				
6.0	19.6	0.31				
20.0	49.0	0.40	0.39	9.5	9.9	73.82
20.0	52.1	0.38				
20.0	54.0	0.37				
20.0	45.2	0.44	0.44	10.0	10.5	83.04
20.0	46.5	0.43				
20.0	44.4	0.45				

Sixième Série:

→ Hauteur d'eau dans la chambre $H = 15\text{ cm}$

→ Diamètre de l'orifice de vidange $D_2 = 2.4$

Les résultats sont groupés dans le tableau suivant

Volume V (ℓ)	Temps t (sec)	Débit Q (ℓ/s)	Débit moyen Q (ℓ/s)	Diamètre d (cm)	Diamètre maximal d_{\max} (cm)	Circula- tion Γ_{th} ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
6.0	25.2	0.24	0.25	7.0	7.5	46.41
6.0	24.9	0.24		7.5		
6.0	23.0	0.26				
20.0	58.2	0.34	0.34	8.2	8.5	59.61
20.0	59.0	0.34		8.5		
20.0	58.6	0.34				
20.0	44.5	0.45	0.44	9.5	9.7	77.63
20.0	46.1	0.43		9.7		
20.0	45.0	0.44				
20.0	42.0	0.48	0.47	10.0	10.2	85.84
20.0	42.2	0.47		10.2		
20.0	42.6	0.47				

Septième Série:

- Hauteur d'eau dans la chambre: $H = 12 \text{ cm}$

- Diamètre de l'orifice de vidange: $D_2 = 2.4 \text{ cm}$

Résultats des Mesures

Volume V (l)	Temps t (sec)	Débit Q (l/s)	Débit moyen Q (l/s)	Diamètre d (cm)	Diamètre maximal d_{max} (cm)	Circula- tion Γ_{rh} ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
6.0	30.2	0.19	0.19	5.7	6.2	35.46
6.0	32.4	0.18				
6.0	33.0	0.18				
20.0	95.0	0.21	0.21	6.0	6.5	38.97
20.0	96.0	0.21				
20.0	95.5	0.21				
20.0	69.2	0.29	0.28	6.8	7.1	46.50
20.0	70.4	0.28				
20.0	70.4	0.28				
20.0	60.0	0.33	0.32	7.2	7.5	51.89
20.0	65.2	0.31				
20.0	64.5	0.31				

Huitième Série:

— Hauteur d'eau dans la chambre: $H=10\text{ cm}$

— Diamètre de l'orifice de vidange: $D_2=2.4\text{ cm}$

Les résultats des essais sont rassemblés dans le tableau suivant.

Volume $V\text{ (l)}$	Temps $t\text{ (sec)}$	Débit $Q\text{ (l/s)}$	Débit moyen $Q_m\text{ (l/s)}$	Diamètre $d\text{ (cm)}$	Diamètre maximal $d_{\text{max}}\text{ (cm)}$	Circula- tion $\Gamma_{\text{th}}\text{ (cm}^3\text{ s}^{-1}\text{)}$
6.0	25.1	0.24	0.24	5.5	6.1	37.60
6.0	25.5	0.24				
6.0	25.8	0.23				
20.0	66.5	0.30	0.30	6.0	6.6	44.02
20.0	65.7	0.30				
20.0	65.5	0.30				
20.0	54.5	0.37	0.37	6.9	7.0	49.52
20.0	53.0	0.38				
20.0	52.5	0.38				
20.0	46.9	0.43	0.43	7.0	7.3	53.85
20.0	47.0	0.43				
20.0	47.3	0.42				

a - A partir des points expérimentaux rassemblés dans les tableaux précédents, il est alors possible de tracer l'enveloppe la plus probable des diamètres "maxima" des taches pour une hauteur d'eau donnée à différentes valeurs du débit. [Précisons que le processus même de essais nécessite de ne considérer que l'enveloppe extérieure des points expérimentaux].

En définitive, on obtient les réseaux de courbes :

$$Q = f(d_{\max}) \quad \text{pour} \quad H = \text{constante}$$

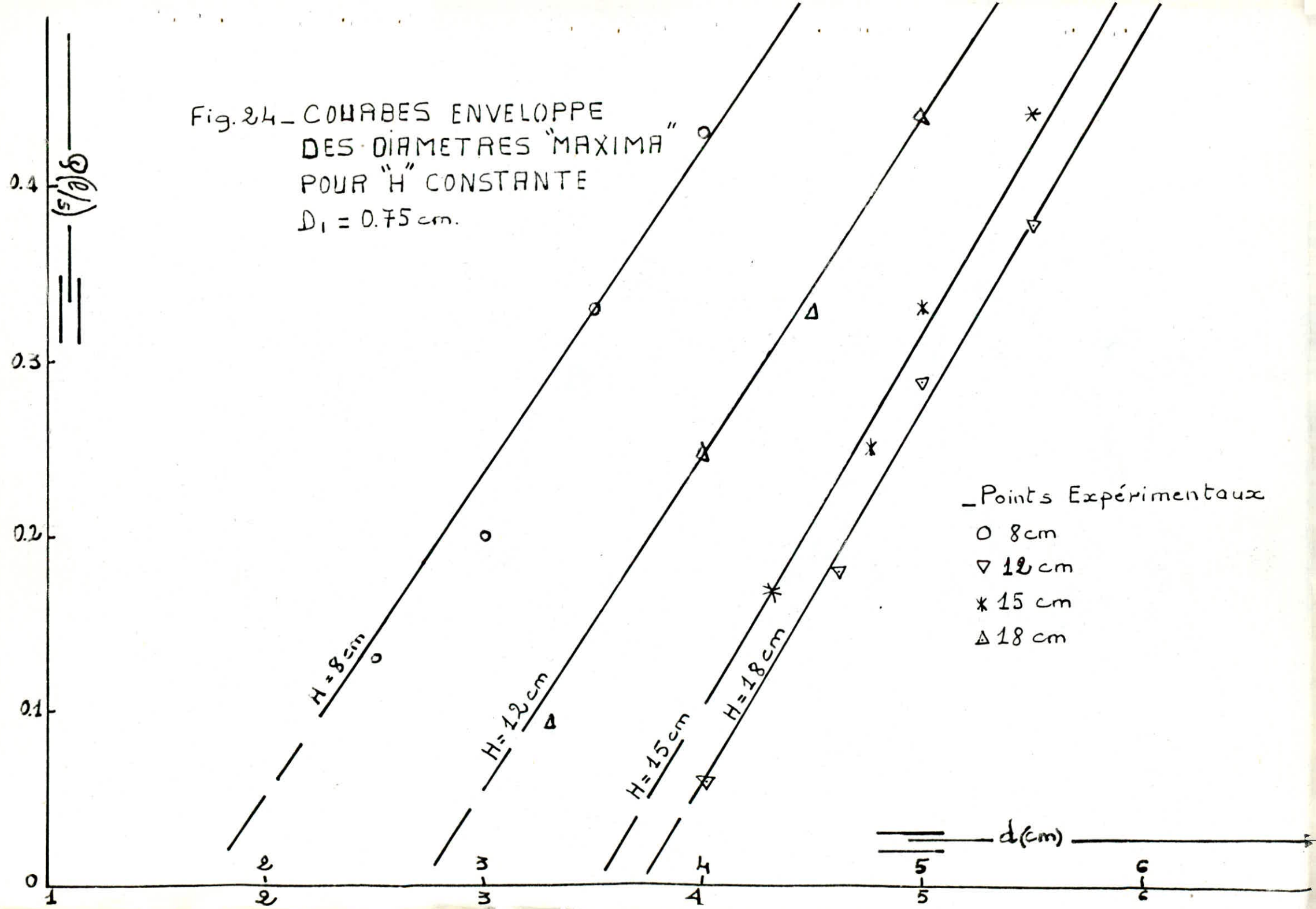
Les figures (24) et (25) traduisent cette relation pour les diamètres D_1 et D_2 des deux orifices utilisés.

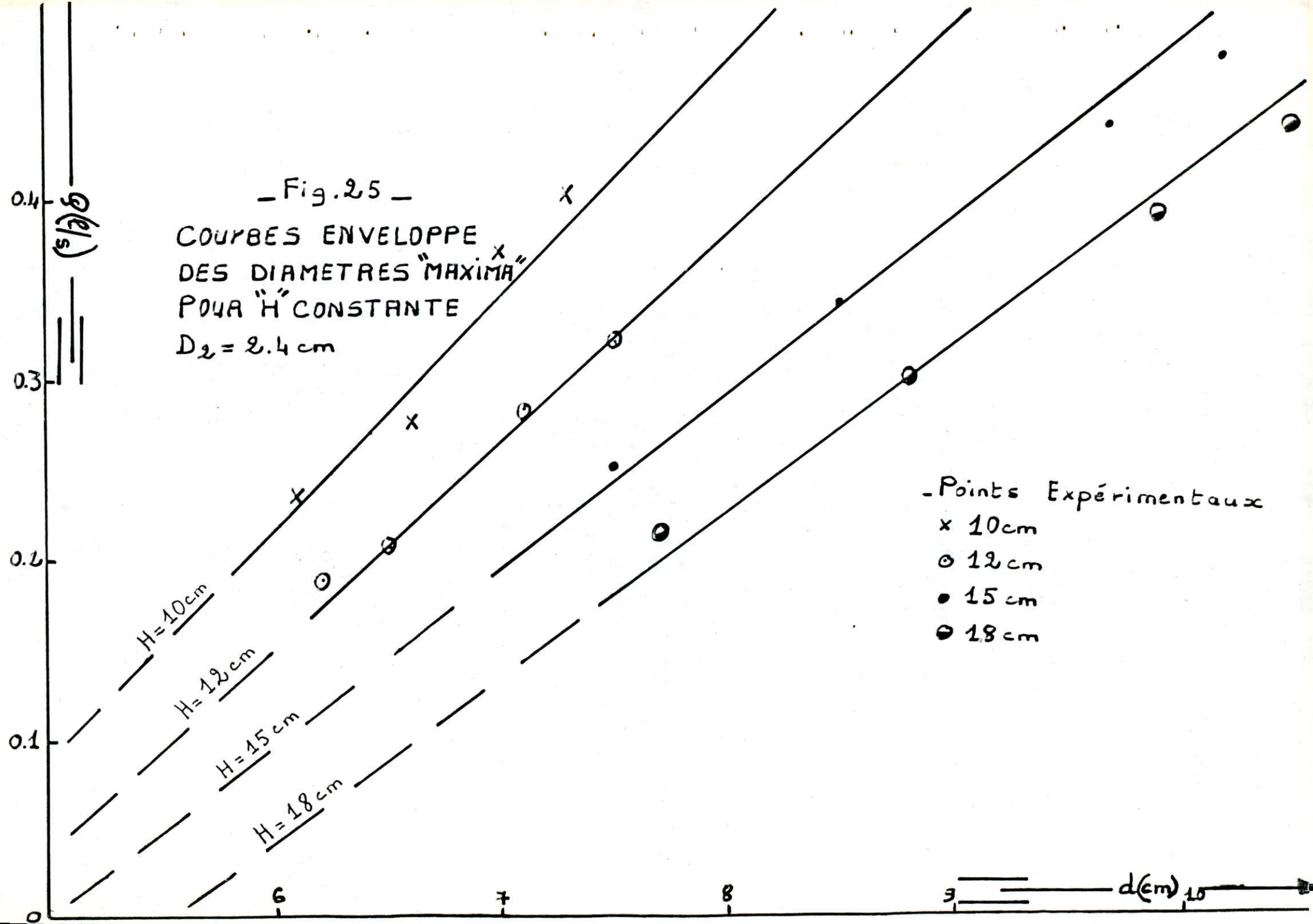
b - La méthode des rayons réfractés ayant permis d'obtenir, d'une part, la caractéristique principale " Γ " d'un vortex, par l'intermédiaire d'un paramètre facilement mesurable " d "; c'est-à-dire la forme plus ou moins évasée de sa partie hyperbolique à laquelle la circulation " Γ " est directement reliée tel que :

$$\Gamma = \frac{3\pi}{16} d^2 \sqrt{\frac{3g}{H}}$$

$$\text{ou ; } C = \frac{3\pi}{16} \sqrt{\frac{3g}{H}} = \text{Constante}$$

Fig. 24 - COURBES ENVELOPPE
DES DIAMETRES "MAXIMA"
POUR "H" CONSTATE
 $D_1 = 0.75 \text{ cm.}$





La constante "C" est déterminée pour chaque valeur différente de la hauteur d'eau. Les précédents réseaux de courbes peuvent ainsi être transformés en réseaux équivalents :

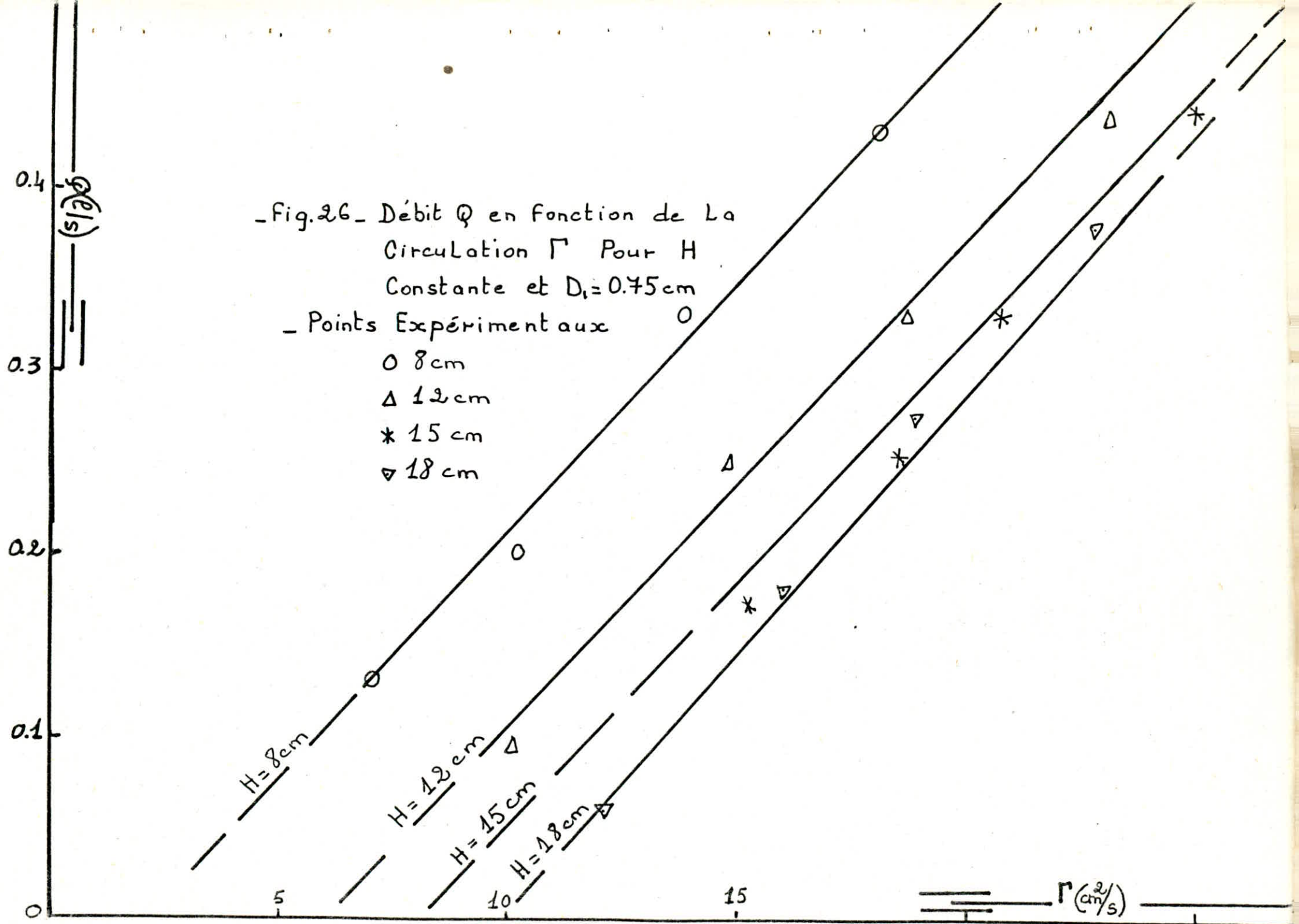
$$Q = f(\Gamma) \text{ pour } H = \text{constante}$$

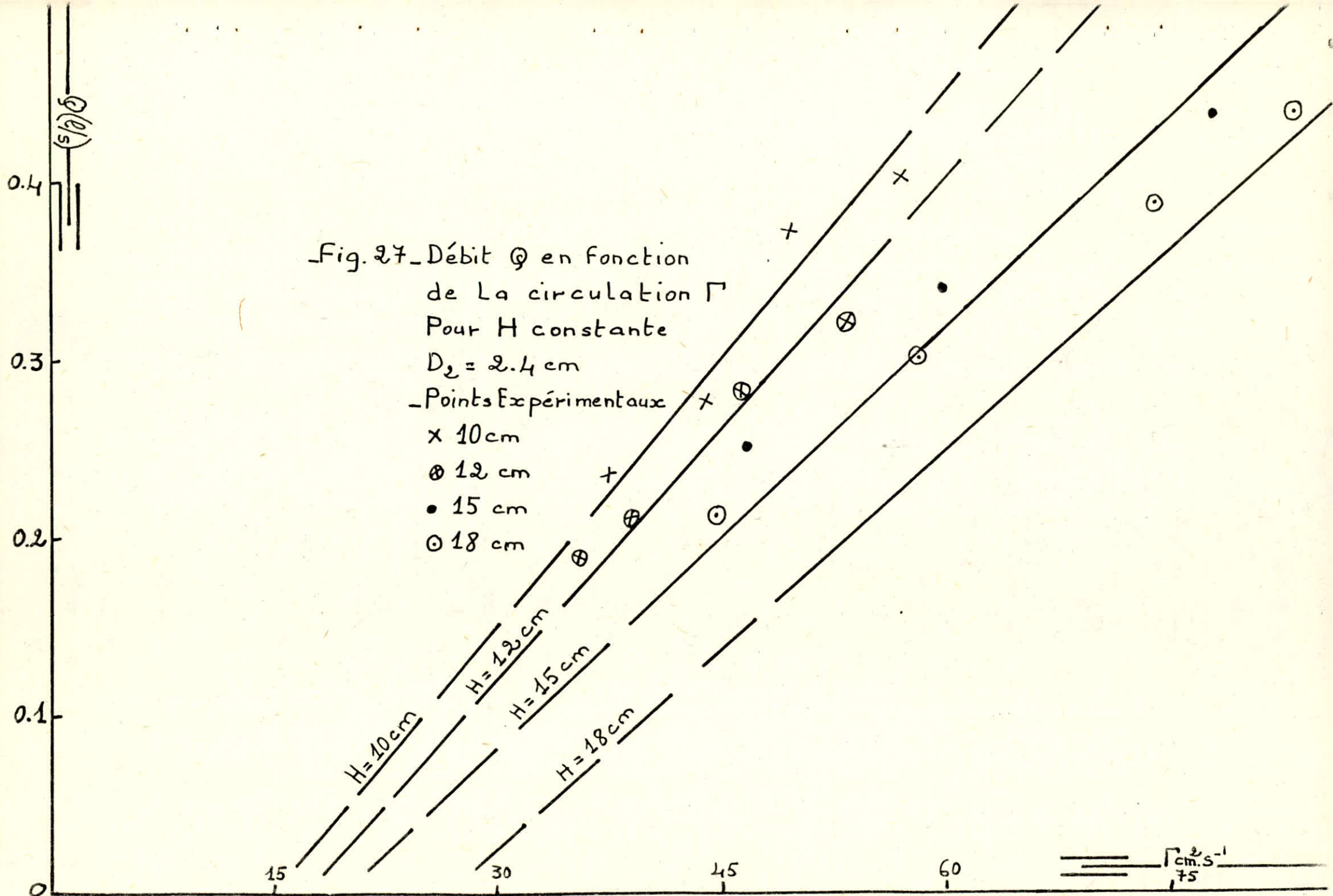
Les résultats correspondants aux deux orifices de vidange D_1 et D_2 sont représentés respectivement par les figures (26) et (27)

c - Enfin, et par simple transposition du réseau précédent, on peut également en déduire le réseau :

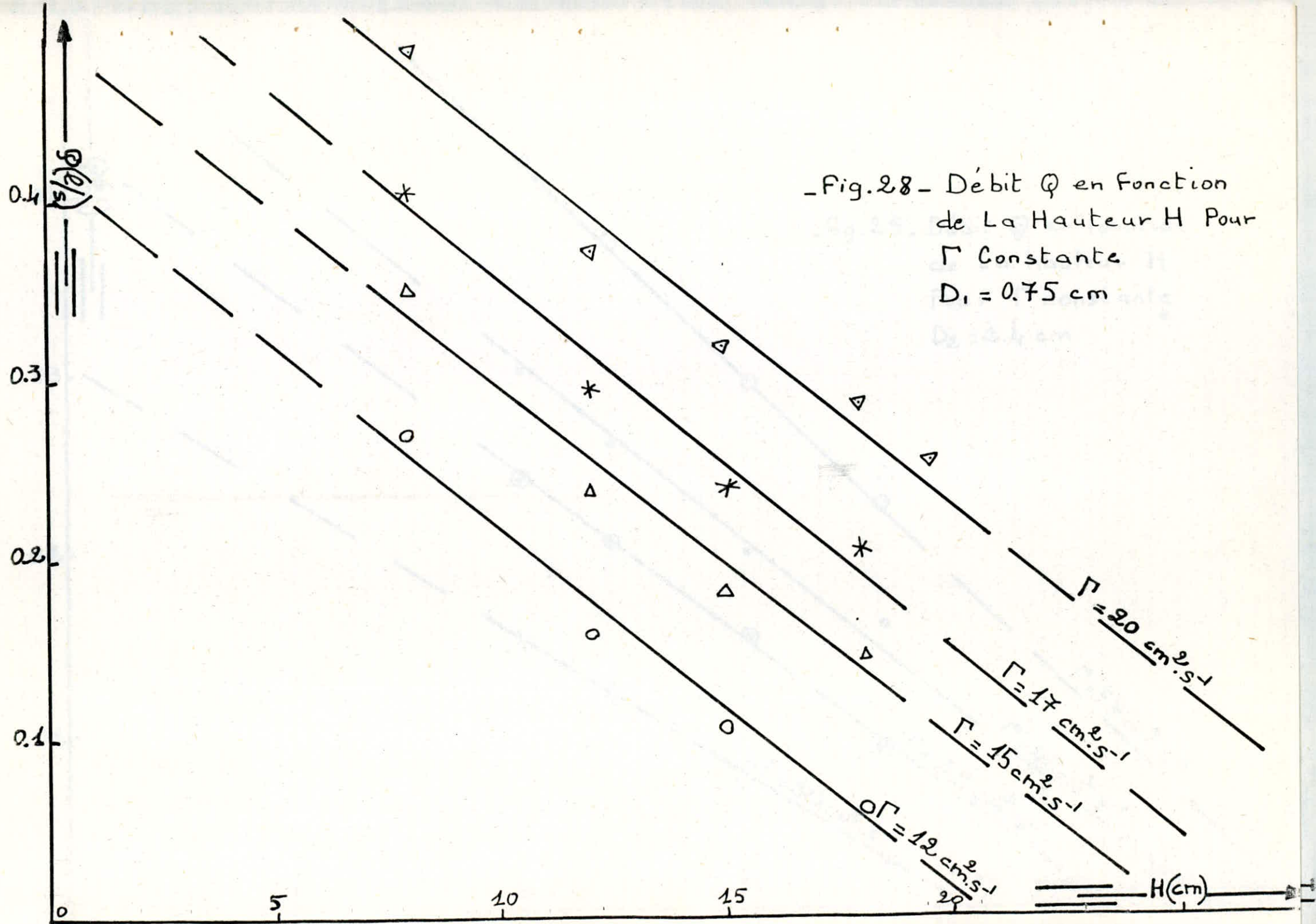
$$Q = f(H) \text{ pour } \Gamma = \text{constante.}$$

Les résultats sont indiqués par les points expérimentaux des figures (28) et (29) respectivement pour les diamètres D_1 et D_2 .





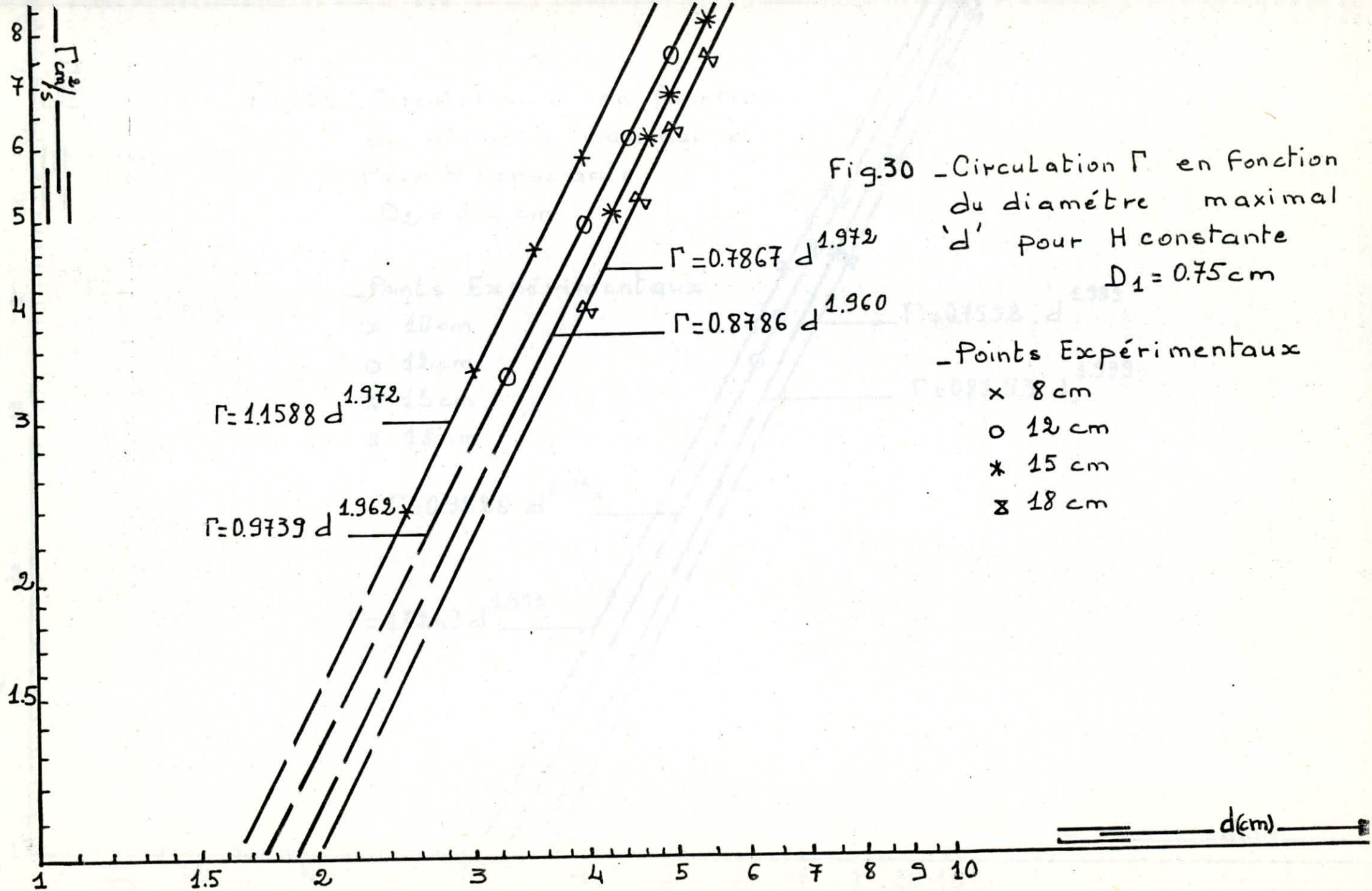
- Fig. 28 - Débit Q en Fonction
de La Hauteur H Pour
 Γ Constante
 $D_1 = 0.75 \text{ cm}$



d - D'autre part, sachant que le paramètre "d_{max}" est un facteur déterminant pour l'étude de l'influence de la circulation autour du vortex, nous avons donc représenté la relation traduisant les variations de "Γ" en fonction de "d_{max}". Les résultats sont illustrés graphiquement aux figures (30) et (31) relativement aux deux diamètres D₁ et D₂.

Les graphiques obtenus sont des droites; et leurs équations sont déterminées dans chaque cas. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

		Coefficient de corrélation	Equation: $\Gamma = a d^b$
D ₁ = 0.75 cm	H = 18 cm	0.9877	$\Gamma = 0.7867 d^{1.972}$
	H = 15 cm	0.9997	$\Gamma = 0.8786 d^{1.960}$
	H = 12 cm	0.9839	$\Gamma = 0.9739 d^{1.962}$
	H = 8 cm	0.9909	$\Gamma = 1.1588 d^{1.972}$
D ₂ = 2.4 cm	H = 18 cm	0.9998	$\Gamma = 0.7532 d^{1.999}$
	H = 15 cm	0.9783	$\Gamma = 0.8253 d^{1.999}$
	H = 12 cm	0.9999	$\Gamma = 0.9226 d^{1.999}$
	H = 10 cm	0.9819	$\Gamma = 1.0243 d^{1.993}$



Les équations précédentes sont obtenues en appliquant La méthode des moindres carrés. En effet, La relation $\Gamma = f(d^2)$ est de La forme $\Gamma = C d^2$; Dans ces conditions, avec l'ensemble des Points (Γ_i, d_i) , on cherche l'équation de La courbe adéquate.

$\Gamma = a d^b$ étant une fonction puissance, on est amené à effectuer un ajustement Puissance.

Cependant, il serait plus commode de linéariser cette fonction en introduisant Le Logarithme népérien tel que :

$$\text{Log } Q = \text{Log } a + b \cdot \text{Log } d$$

En posant : $\text{Log } Q = y$ et $\text{Log } d = x$; l'équation devient : $y = \text{Log } a + b \cdot x$

Les coefficients a et b sont calculés Par Les formules ci-dessous, obtenues en appliquant La méthode des moindres carrés :

$$b = \frac{N \sum_{i=1}^4 x_i y_i - \sum_{i=1}^4 x_i \sum_{i=1}^4 y_i}{N \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^2}$$

$$a = \text{Exp} \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^4 y_i - b \sum_{i=1}^4 x_i \right)$$

N étant Le nombre de points ($N=4$)
 i est compris entre $1 \leq i \leq 4$

Le degré de perfectionnement de l'ajustement Logarithmique est donné par le coefficient de corrélation " r_c " :

$$r_c = \frac{N \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\left[\left(N \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(N \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right) \right]^{1/2}}$$

2- Vérification des résultats

A- Une vérification des résultats obtenus s'avère nécessaire en vue de valider la méthode expérimentée. Elle consiste à comparer pour une même valeur de la hauteur d'eau dans la chambre, la relation $\Gamma = f(d^2)$ obtenue à partir de considérations théoriques, avec celle obtenue à partir de l'épreuve photographique [Méthode des rayons réfractés] .

La confrontation entre les valeurs calculées et expérimentales de la vitesse tangentielle V_θ , a été également examinée.

Les résultats sont résumés dans les tableaux ci-après :

- Hauteur d'eau dans la chambre $H=18\text{ cm}$

Diamètre de l'orifice de vidange $D_1=0.75\text{ cm}$

Diamètre maximal d_{\max}	Circulation. Γ valeur calculée	Vitesse tangentielle. V_θ calculée	Circulation. Γ valeur expérimentale	Vitesse V_θ valeur expérimentale	Erreur relative à Γ	Erreur relative à V_θ
cm	cm^2/s	cm/s	cm^2/s	cm/s	%	%
4.0	12.05	0.96	12.11	0.96	0.48	0.0
4.6	15.94	1.10	15.95	1.10	0.06	0.0
5.0	18.83	1.20	18.80	1.19	0.16	0.26
5.5	22.78	1.32	22.69	1.31	0.40	0.52

- Hauteur d'eau dans la chambre $H=15\text{ cm}$

Diamètre de l'orifice de vidange $D_1=0.75\text{ cm}$

d_{\max} (cm)	Γ valeur calculée	V_θ calculée cm/s	Γ valeur expérimentale	Vitesse V_θ expérimentale	Erreur relative à Γ %	Erreur relative à V_θ %
4.3	15.26	1.13	15.32	1.13	0.43	0.0
4.8	18.69	1.25	18.70	1.24	0.07	0.81
5.0	20.63	1.31	20.60	1.31	0.14	0.0
5.5	24.96	1.44	24.83	1.44	0.54	0.0

- Hauteur d'eau dans la chambre $H=12\text{ cm}$
 Diamètre de l'orifice de vidange $D_i=0.75\text{ cm}$

d_{\max} (cm)	Γ valeur calculée (cm^2/s)	V_θ valeur calculée (cm/s)	Γ valeur expéri- mentale (cm^2/s)	V_θ valeur Expéri- mentale (cm/s)	Erreur relative à Γ (%)	Erreur relative à V_θ (%)
3.3	10.05	0.97	10.13	0.98	0.80	1.02
4.0	14.76	1.17	14.78	1.18	0.14	0.85
4.5	18.68	1.32	18.62	1.32	0.32	0.0
5.0	23.06	1.47	22.90	1.46	0.68	0.68

- Hauteur d'eau dans la chambre $H=8\text{ cm}$
 Diamètre de l'orifice de vidange $D_i=0.75\text{ cm}$

d_{\max} (cm)	Γ valeur calculée (cm^2/s)	V_θ valeur calculée (cm/s)	Γ valeur expéri- mentale	V_θ valeur expéri- mentale	Erreur relative à Γ (%)	Erreur relative à V_θ (%)
2.5	7.06	0.89	7.06	0.90	0.0	1.11
3.0	10.17	1.08	10.11	1.07	0.59	0.93
3.5	13.84	1.26	13.70	1.24	0.97	1.61
4.0	18.08	1.44	17.83	1.42	1.36	1.41

- Hauteur d'eau dans la chambre $H=18\text{ cm}$
Diamètre de l'orifice de vidange $D_2=2.4\text{ cm}$

d_{\max} (cm)	Γ valeur calculée (cm^2/s)	$\sqrt{\theta}$ valeur calculée (cm/s)	Γ valeur expéri- mentale (cm^2/s)	$\sqrt{\theta}$ valeur expéri- mentale (cm/s)	Erreur relative à Γ (%)	Erreur relative à $\sqrt{\theta}$ (%)
7.7	44.66	1.85	44.57	1.84	0.20	0.54
8.8	58.33	2.11	58.20	2.10	0.53	0.48
9.9	73.82	2.37	73.65	2.37	0.23	0.0
10.5	83.04	2.52	82.85	2.51	0.98	0.40

- Hauteur d'eau dans la chambre $H=15\text{ cm}$
Diamètre de l'orifice de vidange $D_2=2.4\text{ cm}$

d_{\max} (cm)	Γ valeur calculée (cm^2/s)	$\sqrt{\theta}$ valeur calculée (cm/s)	Γ expéri- mentale (cm^2/s)	$\sqrt{\theta}$ expé- rimentale (cm/s)	Erreur relative à Γ (%)	Erreur relative à $\sqrt{\theta}$ (%)
7.5	46.41	1.97	46.33	1.97	0.17	0.0
8.5	59.61	2.23	59.50	2.23	0.19	0.0
9.7	77.63	2.55	77.48	2.54	0.20	0.40
10.2	85.84	2.68	85.66	2.67	0.21	0.40

- Hauteur d'eau dans la chambre $H = 12 \text{ cm}$
Diamètre de l'orifice de vidange $D_2 = 2.4 \text{ cm}$

d_{\max} (cm)	Γ valeur calculée (cm^2/s)	V_0 valeur calculée (cm/s)	Γ valeur expérim- entale	V_0 valeur expéri- mentale	Erreur relative à Γ (%)	Erreur relative à V_0 (%)
6.2	35.46	1.82	35.40	1.82	0.17	0.0
6.5	38.97	1.91	38.90	1.90	0.16	0.52
7.1	46.50	2.08	46.42	2.08	0.17	0.0
7.5	51.89	2.20	51.79	2.19	0.19	0.46

- Hauteur d'eau dans la chambre $H = 10 \text{ cm}$
Diamètre de l'orifice de vidange $D_2 = 2.4 \text{ cm}$

d_{\max} (cm)	Γ valeur calculée (cm^2/s)	V_0 valeur calculée (cm/s)	Γ expéri- mentale	V_0 expé- rimenta- le	Erreur relative à Γ (%)	Erreur relative à V_0 (%)
6.1	37.60	1.96	37.63	1.96	0.08	0.0
6.6	44.02	2.12	44.03	2.12	0.02	0.0
7.0	49.52	2.25	49.51	2.25	0.02	0.0
7.3	53.85	2.35	53.83	2.35	0.02	0.0

En vue de l'erreur relative maximale relevée, de l'ordre de (0.98) pour D_1 et (1.36) pour D_2 ; ces résultats sont appréciables dans l'ensemble.

Ils permettent de valider ainsi les hypothèses et approximations du calcul réalisées dans la méthode des rayons réfractés.

b. La mesure des dimensions du profil de l'entonnoir du vortex, nous a permis de mettre en évidence le rôle joué par la circulation Γ dans le processus de formation du vortex par le biais des coordonnées r et z d'un point situé dans la masse du tourbillon tel que :

$$K = r \sqrt{2g \cdot z} \quad \left[\begin{array}{l} \text{d'après l'équation de la partie} \\ \text{Convexe de l'entonnoir du vortex} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \Gamma &= 2\pi r \sqrt{2g \cdot z} \\ \text{ou bien : } \Gamma &= 27.83 \cdot r \cdot z^{1/2} \end{aligned}$$

En effet ; la variation de la circulation Γ - Outre le diamètre d - dépend aussi des coordonnées r et z ; ceci nous conduit donc à confronter les valeurs de celle-ci (obtenues par la méthode des rayons réfractés), et celle déduite, grâce à la méthode de mesure du profil de l'entonnoir du vortex.

Les comparaisons ont été effectuées uniquement Pour un diamètre de l'orifice de vidange $D_2 = 2.4 \text{ m}$

Les résultats sont les suivants:

Hauteur d'eau dans la chambre : $H = 18 \text{ cm}$.

Méthode des rayons réfractés			Méthode de la mesure des coordonnées du profil de l'entonnoir du vortex.					
Diamètre maximal d_{\max}	Circulation Γ valeur calculée	Vitesse V_θ valeur calculée	Abscisse r	Ordonnée z	Γ Valeur Expérimentale	V_θ Valeur Expérimentale	Erreur relative Γ	Erreur relative V_θ
cm	cm^2/s	cm/s	cm	cm	cm^2/s	cm/s	%	%
7.7	44.66	1.85	0.6	8.5	48.28	2.0	7.5	7.5
8.8	58.33	2.11	0.8	8.5	63.06	2.28	7.5	7.4
9.9	73.82	2.37	1.0	8.5	78.95	2.54	6.5	7.0
10.5	83.04	2.52	1.1	8.5	88.81	2.69	6.5	6.3

- Hauteur d'eau dans la chambre $H = 15$ cm

Méthode des rayons réfractés			Méthode de la mesure des coordonnées du profil de l'entonnoir du vortex					
Diamètre maximal	Circulation Γ valeur calculée	Vitesse V_θ valeur calculée	Abscisse r	Ordonnée z	Γ valeur Expérimentale	V_θ valeur Expérimentale	Erreur relative à Γ	Erreur relative à V_θ
cm	cm ² /s	cm/s	cm	cm	cm ² /s	cm/s	%	%
7.5	46.41	1.97	0.7	6.0	47.86	2.03	3.0	3.0
8.5	59.61	2.23	0.9	6.0	63.42	2.40	6.0	7.1
9.7	77.63	2.55	1.2	6.0	79.62	2.61	2.5	2.3
10.2	85.84	2.68	1.3	6.0	87.59	2.73	2.0	2.0

- Hauteur d'eau dans la chambre $H = 12 \text{ cm}$

Méthode des rayons réfractés			Méthode de la mesure des coordonnées du profil de l'entonnoir du vortex.					
Diamètre maximal d_{\max}	Circulation Γ valeur calculée	Vitesse V_θ valeur calculée	Abscisse r	Ordonnée z	Γ valeur Expérimentale	V_θ valeur Expérimentale	Erreur relative à Γ	Erreur relative à V_θ
cm	cm^2/s	cm/s	cm	cm	cm^2/s	cm/s	%	%
6.2	35.46	1.82	0.7	4.0	38.96	2.0	9.0	9.0
6.5	38.97	1.91	0.8	4.0	42.30	2.07	8.0	8.0
7.1	46.50	2.08	0.9	4.0	50.65	2.27	8.2	8.4
7.5	51.89	2.20	1.00	4.0	55.66	2.36	7.0	7.0

- Hauteur d'eau dans la chambre $H = 10 \text{ cm}$

Méthode des rayons réfractés			Méthode de la mesure des coordonnées du profil de l'entonnoir du vortex.					
Diamètre maximal d_{max}	Circulation Γ valeur calculée	Vitesse V_θ valeur calculée	Abscisse r	Ordonnée z	Γ valeur Expérimentale	V_θ valeur Expérimentale	Erreur relative Γ	Erreur relative à V_θ
cm	cm^2/s	cm/s	cm	cm	cm^2/s	cm/s	%	%
6.1	37.60	1.96	0.9	2.5	41.36	2.16	9.1	9.3
6.6	44.02	2.12	1.1	2.5	47.96	2.31	8.2	8.2
7.0	49.52	2.25	1.2	2.5	52.80	2.4	6.2	6.2
7.3	53.85	2.35	1.3	2.5	57.20	2.5	6.0	6.0

C- Le tableau suivant résume les résultats de la comparaison entre la formule théorique de la circulation Γ et celle obtenue par les mesures du profil de l'entonnoir du vortex [Γ expérimentale]

Tableau. A -

		$\Gamma_{\text{expérimentale}}$	$\Gamma_{\text{théorique}}$	Ecart relatif %
Diamètre de l'orifice de vidange $D_2 = 2.4 \text{ cm}$	$H_1 = 18 \text{ cm}$	48.28	44.57	1.9
		63.06	58.20	7.7
		78.95	73.65	6.7
		88.81	82.85	6.7
	$H_2 = 15 \text{ cm}$	47.86	46.33	3.2
		63.42	59.50	6.2
		79.62	77.48	2.7
		87.59	85.66	2.2
	$H_3 = 12 \text{ cm}$	38.96	35.40	9.1
		42.30	38.90	8.0
		50.65	46.42	8.3
		55.66	51.79	6.9
	$H_4 = 10 \text{ cm}$	41.36	37.63	9.0
		47.96	44.03	8.2
		52.80	49.51	6.2
		57.20	53.83	5.9

2' - Analyse et Discussion des résultats

- $Q = f(d)$ pour $H = \text{constante}$

Pour chaque hauteur du plan d'eau, nous avons représenté la courbe enveloppe des diamètres maximums mesurés sur le radier de la cuve, en fonction du débit Q , [cette représentation découle de la procédure envisagée, et nous donne l'avantage de contrôler l'intensité du vortex.]

Ainsi pour un débit constant, le diamètre des taches augmente proportionnellement avec la hauteur d'eau. Pour le petit diamètre de l'orifice D_1 (fig. 24), nous remarquons que les droites obtenues ont une allure similaire parallèle ; ce qui signifie que le vortex est stable.

Par ailleurs, on note pour le réseau de droites figurant sur la figure (25) une divergence accusée donnant lieu à des valeurs très élevées du débit et du diamètre ; il s'ensuit une augmentation de la région des vortex dangereux (aérés) à partir d'un certain seuil de divergence.

- $Q = f(\Gamma)$ pour $H = \text{constante}$

Ce réseau de courbes découle de la transformation du réseau précédent. En effet puisque fondamentalement la circulation Γ dépend du diamètre de la tache, les droites obtenues ont la même allure que celles représentant les variations $Q = f(d)$.

En outre, pour un débit constant quelconque,

La circulation augmente avec la hauteur d'eau H , par contre pour une stagnation des valeurs de Γ , le débit est inversement proportionnel à H , ce qui diminue l'importance du vortex [par suite de la diminution du diamètre], dans le cas où on fait décroître le débit ou augmenter la hauteur. Les graphes de la figure (27) montre des droites qui, à partir d'un certain seuil, sont divergentes donnant lieu à des valeurs élevées de Q et Γ ; les conditions d'opération sont alors mauvaises. En deçà de ces limites, les droites convergent ce qui tend à amoindrir le phénomène. Aussi, l'extrapolation de ces droites vers la gauche produit leur intersection avec l'axe horizontal, ce qui explique que, pour un débit nul, la présence de cette circulation serait attribuable aux irrégularités qui peuvent prendre naissance dans la masse d'eau où il peut avoir de vorticité résiduelle [zones d'eau mortes].

$$- Q = f(H) \quad \text{pour } \Gamma = \text{constante}$$

Ce graphe découle directement de la transposition du réseau $Q = f(\Gamma)$ pour des valeurs constantes de la hauteur, c'est-à-dire qu'à partir de valeurs choisies pour Γ sur l'axe horizontal, on obtient les différentes hauteurs correspondantes, par intersection d'un axe vertical issu depuis la valeur choisie de Γ , avec le réseau $Q = f(\Gamma)$.

En définitive, on obtient pour chaque Γ , les

Couples (Q_i, H_i) qui justifie les droites illustrées aux figures (28) et (29).

Ainsi pour des valeurs constantes de Γ , la hauteur H et le débit Q varient en sens inverse; C'est-à-dire qu'un vortex sera d'autant plus prononcé que la masse mobilisée, soit la hauteur d'eau comprise entre l'entrée de la vidange et la surface libre est faible. [Surface libre se rapprochant de l'orifice de vidange].

La figure (28) montre des droites parallèles, avec une inclinaison négative mais identiques d'une droite à l'autre, elle traduisent le fait que le vortex est stable.

Concernant D_2 [fig 29], le graphique montre que pour de faibles valeurs de H [Soit dans la zone où les forces de viscosité l'emportent sur celles causant l'écoulement] Les droites divergent alors qu'elles convergent dans le cas contraire.

Ainsi une hauteur d'eau relativement élevée améliore les conditions d'opération [baisse de Γ et Q] et tend à ne laisser subsister qu'un seul type de vortex, donc plus facile à contrôler. Le point de convergence des droites est le même à partir duquel la variation de Γ ou de Q est peu sensible.

$$\Gamma = f(d^2)$$

Ce réseau de courbes est tracé dans un Système de coordonnées Logarithmique.

La variation de Γ en fonction du diamètre nous renseigne sur la caractéristique principale du vortex par l'intermédiaire du paramètre (d)

auquel elle est directement reliée, ainsi son importance relative réduit ou amplifie le vortex. Par ailleurs, on constate que Γ peut rester constante pour des variations de la hauteur d'eau suivies par par celles de 'd' [fig 30] et [fig 31] - Ceci traduit le fait que la circulation n'est pas seule en cause quand aux variations de la forme de l'entonnoir du vortex. En outre lorsque Γ diminue en fonction de h il semble exister une certaine inertie pour la diminution de la longueur du vortex. Autrement dit pour une même valeur de sa longueur, Γ peut augmenter comme elle peut régresser, or, comme le diamètre de la tache varie avec h , il n'est plus nécessaire que Γ augmente de valeur pour que l'aération se réalise par exemple. Une augmentation peut y conduire, mais le contraire est également observé. Le diamètre de la tache ne correspond pas, dans ce cas, nécessairement au diamètre maximal que l'on peut enregistrer au cours de l'augmentation de longueur du filet d'air vers l'orifice de vidange. Cette dernière est donc indépendante de Γ . La valeur du débit est alors primordiale.

Remarque.1.

Nous tenons à signaler ici que Anwar et Amphlett ont obtenus pour la circulation théorique la formule suivante :

$$\Gamma = 0.215 \, g^{1/2} \cdot d^2 \cdot h^{-1/2}$$

et pour la circulation expérimentale, la relation:

$$\Gamma = 0.188 \, g^{1/2} \cdot d^{1.942} \cdot h^{-0.442}$$

Les exposants du diamètre et de la hauteur d'eau, ont été obtenus par l'étude expérimentale de similitude du vortex avec aspiration horizontale. Nous remarquons, que ces résultats ne concordent pas avec les nôtres. La supposition que ces auteurs ont pu négliger le facteur (2π) dans la Définition de (Γ) a été vérifiée, mais sans aboutir à des résultats comparables aux leurs.

Remarque .2.

D'Après le tableau (A), on constate que l'écart relatif entre Γ théorique et expérimentale est assez élevé comparé à celui obtenu par la méthode des rayons réfractés. Ceci est dû au déplacements du vortex et à son instabilité qui conduit à des erreurs de mesure des coordonnées (r, z) du profil de Ventonnoir du vortex.

CONCLUSION

CONCLUSION

Deux méthodes optiques peuvent permettre l'étude expérimentale des phénomènes de vortex dans le cas général.

La première méthode, dite des « rayons réfléchis », consiste à étudier la déformation d'un réseau de points lumineux, dont on photographie l'image dans le plan de l'eau. La seconde méthode, dite « des rayons réfractés », expérimentée dans cette étude, consiste à déterminer la forme de la surface caustique résultant de la déviation des rayons lumineux, au passage de la surface dioptrique de séparation air-eau de l'entonnoir du vortex.

Ceci présente l'avantage de pouvoir établir la relation donnant la valeur de la circulation autour du vortex en fonction de la grandeur du diamètre de la tache sur le radier du puisard, ainsi que la correspondance entre le débit de vidange Q , la hauteur d'eau dans la cuve, et la circulation M ; soit en définitive l'amplitude caractérisant le vortex. A cet effet, la valeur des vitesses V_θ des courants dans la zone hyperbolique du vortex a pu être déterminée. En outre, les facteurs énergétiques analysés ici, soient la valeur de la circulation obtenue par la méthode des rayons réfractés et celle obtenue par la mesure du profil de l'entonnoir du vortex ont fait l'objet d'une étude comparative jugée acceptable dans l'ensemble.

Dans tous les cas, ces méthodes présentent l'intérêt de ne pas modifier par l'introduction d'instruments de mesure dans le fluide les conditions de formation de vortex et d'être applicables dans le cas le plus général de formation de vortex même instables et non permanent. [Ces derniers nécessitent un appareil à enregistrement continu].

ANNEXE

ANNEXE

- CALCUL D'ERREURS

• Précision des Indications:

Quand on attribue la même importance, "La précision des mesures" aux faibles débits ainsi qu'aux grands, on garde la même limite pour l'erreur relative : $\Delta Q/Q$ dans toute l'étendue de mesures de Q_{\min} à Q_{\max} . La valeur limite de l'erreur est alors déterminée par rapport au débit réel Q dans toute l'étendue de mesure de l'appareil.

Sachant que : $Q = \frac{V}{t}$;

L'incertitude relative sera donnée par :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta t}{t}$$

et l'incertitude absolue, relative à chaque

débit est : $\Delta Q_i = \frac{\Delta Q_i}{Q_i} \times Q_i$

$\frac{\Delta t}{t}$ = étant l'erreur commise sur le temps

avec $\Delta t = 2.01 + 0.1 = 0.3$ secondes

[Erreur de lecture + erreur de synchronisation du chronomètre au déclenchement et à l'arrêt lors du remplissage du réservoir]

L'erreur commise sur la lecture du volume est :

$$\Delta V = 0.3 (l)$$

Les valeurs moyennes du débit, du volume, et du temps sont respectivement données par les formules suivantes :

$$Q_{\text{moy}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{3}$$

$$\text{avec } Q_i = \frac{V_i}{t_i} \quad (l/s)$$

$$V_{\text{moy}} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3} \quad (l)$$

$$t_{\text{moy}} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} \quad (sec)$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est donnée par la formule suivante :

$$S_Q \text{ exp } = \frac{\left[\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta Q_i)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^n Q_i} ;$$

$$i = 1; 2; 3 \dots n$$

n = nombre de points de mesures.

Les résultats des calculs sont rassemblés dans les tableaux suivants relativement aux deux diamètres D_1 et D_2 des orifices de vidange

- Hauteur d'eau dans la chambre : $H = 18 \text{ cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange : $D_1 = 0.75 \text{ cm}$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$ (10^{-3})	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q - \frac{\Delta V}{V}}{Q} + \frac{\Delta t}{t}$ (10^{-3})	$\Delta Q_i = \frac{\Delta Q_i}{Q_i} \times Q_i$ (10^{-3})	ΔQ_i^2 (10^{-3})
(l)	—	(sec)	—	(l/s)	—	(l/s)	(l^2/s^2)
6.0	0.050	94.33	3.180	0.06	53.180	3.191	0.010
6.0	0.050	32.40	9.259	0.18	59.259	10.667	0.114
25.0	0.012	90.57	3.312	0.28	15.312	4.287	0.018
25.0	0.012	64.97	4.617	0.38	16.617	6.315	0.040

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 0.90 (\text{l/s})$$

$$\sum_{i=1}^4 (\Delta Q_i)^2 = 0.182 \cdot 10^{-3} (\text{l}^2/\text{s}^2)$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est :

$$\delta_{Q_{\text{exp}}} = 15.010 \cdot 10^{-3}$$

- Hauteur d'eau dans la chambre: $H = 15 \text{ cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange: $D_i = 0.75 \text{ cm}$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta t}{t}$	$\Delta Q_i = \frac{\Delta Q}{Q} \times Q_i$	ΔQ_i^2
(l)	-	(sec)	-	(l/s)	-	(l/s)	(l ² /s ²)
6.0	0.050	34.67	8.653	0.17	58.653	9.971	0.099
6.0	0.050	24.03	12.484	0.25	62.484	15.621	0.244
25.0	0.012	74.73	4.014	0.33	16.014	5.285	0.028
25.0	0.012	56.67	5.294	0.44	17.294	7.609	0.058

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 1.19 \text{ (l/s)}$$

$$\sum_{i=1}^4 (\Delta Q_i)^2 = 0.429 \cdot 10^{-3} \text{ (l}^2\text{/s}^2\text{)}$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est :

$$\delta_{Q_{\text{exp}}} = 17.405 \cdot 10^{-3}$$

- Hauteur d'eau dans la chambre $H = 12 \text{ cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange $D_1 = 0.75 \text{ cm}$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$ 10^{-3}	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q}{Q}$ 10^{-3}	ΔQ_i 10^{-3}	ΔQ_i^2 10^{-3}
ℓ	-	sec	-	ℓ/s	-	ℓ/s	ℓ^2/s^2
6.0	0.050	62.73	4.782	0.095	54.782	5.204	0.027
6.0	0.050	24.17	12.412	0.25	62.412	15.603	0.244
25.0	0.012	76.47	3.923	0.33	15.923	5.255	0.028
25.0	0.012	57.30	5.236	0.44	17.236	7.584	0.058

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 1.115 \quad (\ell/s)$$

$$\sum (\Delta Q_i)^2 = 0.357 \cdot 10^{-3} \quad (\ell^2/s^2)$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est :

$$S_{Q_{\text{exp}}} = 16.946 \cdot 10^{-3}$$

- Hauteur d'eau dans la chambre: $H=8\text{cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange: $D_i=0.75\text{cm}$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$ 10^{-3}	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q}{Q}$ 10^{-3}	ΔQ_i 10^{-3}	ΔQ_i^2 10^{-3}
ℓ	-	sec	-	ℓ/s	-	ℓ/s	ℓ^2/s^2
6.0	0.050	30.03	9.990	0.20	59.990	11.998	0.144
6.0	0.050	46.37	6.470	0.13	56.470	7.341	0.054
30.0	0.010	90.13	3.329	0.33	13.329	4.398	0.019
30.0	0.010	69.83	4.296	0.43	14.296	6.147	0.038

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 1.090 \ell/s$$

$$\sum_{i=1}^4 (\Delta Q_i)^2 = 0.255 \cdot 10^{-3} \ell^2/s^2$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est:

$$S_{Q_{\text{exp}}} = 14.659 \cdot 10^{-3}$$

— Hauteur d'eau dans la chambre: $H = 18 \text{ cm}$
 Diamètre de l'orifice de vidange: $D_2 = 2.4 \text{ cm}$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$ 10^{-3}	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q}{Q}$ 10^{-3}	ΔQ_i 10^{-3}	ΔQ_i^2 10^{-3}
ℓ	—	sec	—	ℓ/s	—	ℓ/s	ℓ^2/s^2
6.0	0.050	27.93	10.741	0.21	60.741	12.756	0.163
6.0	0.050	19.83	15.129	0.30	65.129	19.539	0.382
20.0	0.015	51.70	5.803	0.39	20.803	8.113	0.066
20.0	0.015	45.37	6.612	0.44	21.612	9.509	0.090

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 1.340 \text{ } \ell/s$$

$$\sum_{i=1}^4 (\Delta Q_i)^2 = 0.701 \cdot 10^{-3} \ell^2/s^2$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est la suivante:

$$S_{Q_{\text{exp}}} = 19.759 \cdot 10^{-3}$$

- Hauteur d'eau dans la chambre : $H = 15\text{cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange : $D_2 = 2.4\text{cm}$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$ 10^{-3}	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q}{Q}$ 10^{-3}	ΔQ_i 10^{-3}	ΔQ_i^2 10^{-3}
ℓ	-	sec	-	ℓ/s	-	ℓ/s	ℓ^2/s^2
6.0	0.050	24.37	12.310	0.25	62.310	15.578	0.243
20.0	0.015	58.60	5.119	0.34	35.119	11.940	0.143
20.0	0.015	45.20	6.637	0.44	21.637	9.520	0.091
20.0	0.015	42.27	7.097	0.47	22.097	10.386	0.108

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 1.50. \quad \ell/s$$

$$\sum_{i=1}^4 (\Delta Q_i)^2 = 0.584. 10^{-3} \quad \ell^2/s^2$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est:

$$S_{Q_{\text{exp}}} = 16.108. 10^{-3}$$

- Hauteur d'eau dans la chambre: $H = 12\text{ cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange: $D_2 = 2.1$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$ 10^{-3}	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q}{Q}$ 10^{-3}	ΔQ_i 10^{-3}	ΔQ_i^2 10^{-3}
ℓ	-	sec	-	ℓ/s	-	ℓ/s	ℓ^2/s^2
6.0	0.050	31.87	9.413	0.19	59.413	11.289	0.127
20.0	0.015	95.50	3.141	0.21	33.141	6.960	0.048
20.0	0.015	70.00	4.286	0.28	19.286	5.400	0.029
20.0	0.015	63.23	4.745	0.32	19.745	6.318	0.040

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 1.00 \text{ } \ell/s$$

$$\sum_{i=1}^4 (\Delta Q_i)^2 = 0.244 \cdot 10^{-3} \text{ } \ell^2/s^2$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est telle que:

$$\sigma_{Q_{\text{exp}}} = 15.620 \cdot 10^{-3}$$

- Hauteur dans la chambre, de la masse d'eau : $H = 10 \text{ cm}$
- Diamètre de l'orifice de vidange : $D_2 = 2.4 \text{ cm}$

V_{moy}	$\frac{\Delta V}{V}$	t_{moy}	$\frac{\Delta t}{t}$ 10^{-3}	Q_{moy}	$\frac{\Delta Q}{Q}$ 10^{-3}	ΔQ_i 10^{-3}	ΔQ_i^2 10^{-3}
ℓ	-	sec	-	ℓ/s	-	ℓ/s	ℓ^2/s^2
6.0	0.050	25.47	11.779	0.24	61.779	14.827	0.219
20.0	0.015	65.90	4.552	0.30	19.552	5.866	0.034
20.0	0.015	53.33	5.625	0.37	20.625	7.631	0.058
20.0	0.015	47.07	6.374	0.43	21.374	9.191	0.084

$$\sum_{i=1}^4 Q_i = 1.340 \text{ } \ell/s$$

$$\sum_{i=1}^4 (\Delta Q_i)^2 = 0.397 \cdot 10^{-3} \text{ } \ell^2/s^2$$

La variance relative moyenne des débits mesurés est:

$$S_{Q \text{ exp}} = 14.867 \cdot 10^{-3}$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1- ANWAR - H.O - Prévention of vortices at
intakes - Water power.
Vol 20 - P 393 - 401 - 1968.
- 2- ANWAR - H.O - Flow in a free vortex - Water
power - Vol 17 . p 153 - 161 - 1965.
- 3- AMPHLETT. M.B - Air-entraining vortices at
a Vertically inverted intake.
Report N° 0017.
H.R.S.W Oxford shire England.
- Sep - 1978.
- 4- BIESEL .F - Reflexions sur les vortex de
Vidange -
Lahouille Blanche, N° 4.
Août/Sep 1955.
- 5- BERGE .J.P - Etude des phénomènes de Vortex
dans un liquide à surface libre.
Méthodes optiques expérimentales
d'études - Vol.13 - Bulletin du C.R.E.C.
Oct- 1965.

6-BERGE. J.P - Etude des phénomènes de vortex
dans un liquide à surface libre.
Etude expérimentale des conditions
de similitude.

1^{ère} partie, bulletin du C.A.E.C.

Mai - 1966.

7-BERGE. J.P - Enquête sur la formation
de vortex et autres anomalies
d'écoulement dans une enceinte
avec ou sans surface libre.

La Houille blanche - N° 1.

1966.

8-BERGE. J.P et Labetouille. J -

→ Suppression des vortex dans
les chambres d'aspiration des
pompes de circulation de la
centrale thermique de CREIL-SAINT-LEU
La Houille blanche N° 8.

1958.

~~---~~

9. BRUN. E. A - A. MARTINOT LAGARDE - J. PATHIEU:

- Mécanique des Fluides - Tome II

Chapitre V. Editions Dunod.

1968.

10. CARLIER. M - Hydraulique générale et

appliquée - Chapitre IV et V

Editions Eyrolles.

1980.

11. CASTEX. L - Mesures et essais -

Applications aux études sur
modèles réduits et aux essais
à caractère industriel.

Polycopié Toulouse.

12. EINSTEIN H. A et HUON. L I -

- Le vortex permanent dans un
fluide réel.

La Houille blanche. N° 4.

Août / Sep 1955.

13. FAURE. J - Quelques limitations théoriques
des procédés de visualisation.

~~---~~

14 - KOUGNIMA .T et R. KAHAWITA .

- Etude de formation de vortex au
voisinage de l'aspiration verticale
inversée dans un puit de pompage.
Canadian journal of civil engineering.
Vol 10 - Pages 369 - 383.

1983.

15 - KAY .J.M - Introduction à la M.D.F et la
transmission de la chaleur.
P 24 - 28.

16 - LEVI .E - Experiments of unstable vortices.
Vol 98 . pages 539 - 559.

June 1972.

PROC - ASCE . Journal of the
engineering mechanics division.

17 - MESBAH .S et M. DJELLOULI

- Etude expérimentale des vortex de
vidange dans une chambre
rectangulaire - Thèse de fin d'étude.
Ecole nationale polytechnique.

Janvier 1986.

18- STEVENS J. C. and R. C. KOLF,

- Vortex flows through horizontal orifices
Vol 83 - P. 1- 22.

Décembre 1957.

PROC. ASCE Journal of the sanitary
engineering division.

19- STEPANOFF. A. J.

- Pompes centrifuges et pompes hélices.
p 13 - 16.

