

2195

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

pour obtenir

**LE TITRE DE DOCTEUR D'ETAT
EN GENIE ELECTRIQUE
OPTION: AUTOMATIQUE**

par

Ali BELMEHDI

Docteur - Ingénieur INP- Grenoble

CONTRIBUTION A L'ANALYSE ET A LA SYNTHESE DES SYSTEMES STRUCTURES MULTIVARIABLES

Soutenue en Mai 1995 devant la Commission d'Examen

JURY

Président	: D. AISSANI	Professeur à l'Université de Béjaïa
Rapporteur	: L. ZEBROWKI	Professeur à l'Université de Wroclaw, Pologne
Examineur	: A. KHELLADI	Professeur à l'U.S.T.H.B de Bab Ezzouar
Examineur	: F. BOUDJEMAA	Maître de conférence à l'ENP d'Alger
Examineur	: N. LOUAM	Maître de conférence à l'ENP d'Alger
Invité	: B. DERRAS	Maître de conférence à l'ENP d'Alger
Invité	: H. BESSALAH	PhD - Maître de Recherche au CDTA

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous les membres du Jury de cette thèse.

- Monsieur le Professeur D. AISSANI du Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS) de l'Université de Béjaïa, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et pour avoir accepté la présidence du jury de cette thèse.

- Monsieur le Professeur L.ZEBROWSKY de l'Institut de Cybernétique Technique, Polytechnique de Wroclaw, (Pologne) qui a été mon Directeur de thèse au début à l'ENP d'Alger et qui m'a laissé voler de mes propres ailes depuis son retour en Pologne. J'ai beaucoup apprécié la confiance qu'il m'a accordée ainsi que les conseils et encouragements permanents qu'il m'a prodigué ici en Algérie ou à distance.

- Monsieur le Professeur A. KHELLADI, de l'Institut de Mathématiques de l'Université Scientifique et Technique Houari Boumédiène (USTHB) de Bab-Ezzouar qui est un spécialiste de la théorie des graphes. Je le remercie pour l'intérêt qu'il porte à ce travail, pour avoir accepté de le juger et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer au jury.

- Monsieur N. LOUAM, Maître de Conférences à l'ENP d'Alger, qui a eu déjà une idée sur mon travail sur le structuré pour avoir présidé une des thèses de Magister sur les systèmes structurés que j'ai dirigé à l'ENP d'Alger et qui me fait l'honneur d'examiner ce travail.

- Monsieur F. BOUDJEMAA, Maître de Conférences au Département de Génie Electrique de l'ENP d'Alger qui connaît également le travail pour avoir déjà participé au jury d'une autre thèse de magister encadrée à l'ENP d'Alger. Je le remercie pour avoir accepté de juger ce travail et pour sa participation au jury de cette thèse.

- Messieurs H. BESSALAH, Maître de recherche en Cybernétique, Directeur du Centre de Développement des Technologies Avancées (CDTA) et B. DERRAS, Maître de Conférences à l'ENP d'Alger qui me font l'honneur de participer en tant qu'invités au Jury. Je les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

- Je tiens à remercier tout particulièrement Messieurs J.M. DION, Directeur du Laboratoire d'Automatique de Grenoble et C. Commault, Professeur, qui étaient mes anciens directeurs de thèse au L.A.G (84-87), pour m'avoir initié à la recherche et dont j'apprécie beaucoup la méthode de travail. Je tiens à les remercier également pour leur coopération quasi-permanente et le temps qu'ils m'ont consacré depuis (lors de mes différents séjours à titre individuel au LAG), ceci malgré leur emploi du temps très chargé.

Que A. BENHALLA, enseignant au Département d'Automatique de l'INH de Boumerdes, trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mon amitié.

Je ne saurais oublier ma mère, ma femme et mes deux enfants Elias et Dania, qui m'ont tout le temps encouragé afin de terminer ce travail et m'occuper un peu plus d'eux. Ils méritent bien cela.

Enfin, pour m'avoir permis d'activer la frappe de ce mémoire et de mes différents articles dont certains accompagnent cette thèse, je tiens à accorder un hommage à mon vieux compagnon, mon PC Amstrad.

TABLE DES MATIERES

	Pages
AVERTISSEMENT	1
1- INTRODUCTION	
1.0- Abréviations et notations utilisées	
1.1- Historique et motivations	
1.2- Plan du mémoire	
2- INVARIANTS STRUCTURELS POUR LA COMMANDE	
2.1- Introduction	10
2.2- Zéros d'un système linéaire	10
A- Forme de Smith Mac Millan d'une matrice de transfert	11
B- Factorisations polynômiales d'une matrice de transfert	13
C- Structure à l'infini d'une matrice de transfert	14
2.3- Ordres essentiels d'une matrice de transfert	17
2.4- Notion de mode fixe	20
2.5- Conclusion	21
3- REPRESENTATIONS ET ANALYSE DES SYSTEMES STRUCTURES	
3.1- Introduction	22
3.2- Représentation d'état d'un système structuré	22
A- Matrice et système structurés	23
B- Caractérisation par graphes	25

3.3- Représentation transfert d'un système structuré	28
A- Factorisation à l'infini et système structuré	28
B- Caractérisation par graphes	30
3.4- Commandabilité et observabilité des systèmes structurés	32
A- Préliminaires	32
B- Sous-espaces commandable, observable et modes fixes	34
3.5- Interprétation par graphes du rang d'un transfert	39
3.6- Interprétation par graphes de propriétés structurelles	40
A- Caractérisation par graphes des zéros à l'infini	41
B- Caractérisation par graphes des ordres essentiels	41
C- Interprétation par graphes de ligne et colonne propres	43
D- Caractérisation par graphes des modes s-fixes	46
3.7- Conclusion	48
4- ASPECTS STRUCTURELS DE PROBLEMES DE COMMANDE	
4.1- Introduction	50
4.2- Découplage régulier des systèmes structurés	50
A- Préliminaires sur le découplage par retour d'état	51
B- Découplage structurel par blocs	54
C- Découplage structurel par précompensateur	62
4.3- Rejet de perturbation dans les systèmes structurés	65
A- Rejet de perturbation par retour d'état	65
B- Rejet de perturbation par retour de sorties mesurées	67
4.4- Commande décentralisée des systèmes structurés	75
4.5- Conclusion	80

5- APPROCHE STRUCTURELLE POUR LA SYNTHESE DE STRUCTURES DE COMMANDE	
5.1- Introduction	82
5.2- Modélisation structurelle de procédé d'absorption	83
5.3- Recherche des structures de régulation possibles	86
5.4- Conclusion	92
6- CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	93
REFERENCES	96
ANNEXES	109

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Ce présent mémoire comporte trois parties, essentiellement liées par le concept de systèmes structurés.

-La première partie, la plus importante, concerne l'étude de problèmes classiques de commande par l'approche transfert dont les solutions se basent sur la structure à l'infini. Ces travaux ont pour base commune la thèse de Doctorat d'Ingénieur effectuée au laboratoire d'Automatique de Grenoble (I.N.P G, 1987).

-La deuxième partie porte sur la commande décentralisée des systèmes structurés.

-La troisième partie est une application de propriétés structurelles à la synthèse de structures de commande sur un procédé réel.

Ces parties peuvent être lues indépendamment.

Ce mémoire a été rédigé avec le souci de présenter l'essentiel dans le corps du texte. Des exemples d'illustration ont été introduits afin d'aider à la compréhension des résultats présentés. Les démonstrations de théorèmes et propositions se trouvent dans les articles annexés constituant la base de cette thèse.

Les articles présentés en annexe sont ceux parus ou à paraître dans des revues internationales spécialisées. Ce sont:

1- C. COMMAULT, J.M.DION, A. BELMEHDI (1987)

"Structured Systems Within the Transfer Matrix Approach", Systems and Control Letters, Vol. 9 pp. 335-339, October.

2- A. BELMEHDI, L. ZEBROWSKI (1991)

"Structural Decoupling of Composite Systems", Advances in Modeling and Simulation, AMSE Press, Vol. 23 N° 3, pp. 1-11.

3- A. BELMEHDI (1993)

"On the Generic Structure at Infinity Within the Transfer Matrix Approach", à paraître dans Int. J. of Systems Science (accepté).

4- A. BELMEHDI (1994)

"Transfer Matrix Approach to the Structural Block Diagonal Decoupling Problem", Int. J. of Control, Vol. 60, n°6, pp. 1381-1391.

5- A. BELMEHDI, R. MANSOURI (1994)

"Structural Disturbance Decoupling by Output Measurement Feedback: the Transfer Matrix Approach", Soumis à Int. Journal of Control.

6- A. BELMEHDI, D. BOUKHETALA (1994)

"A method to eliminate structural fixed modes in decentralized control systems", Soumis à International Journal of Control.

CHAPITRE I
INTRODUCTION

OU TROUVER LES PRINCIPAUX RESULTATS

	Pages
<u>Def-2.1:</u> Pôles et zéros finis d'après la forme de S.M.M	12
<u>Def-2.2:</u> Zéros pôles à l'infini d'une matrice de transfert	14
<u>Def-2.3:</u> Ordres essentiels à partir de l'interacteur	17
<u>Def-2.4:</u> Ordres essentiels à partir des zéros à l'infini	17
<u>Def-3.1:</u> Matrice réelle structurée	23
<u>Def-3.2:</u> Système structuré en représentation d'état	24
<u>Def-3.3:</u> Graphe orienté	25
<u>Def-3.4:</u> Système structuré en représentation transfert	29
<u>Def-3.5:</u> Commandabilité et observabilité structurelle d'un système décentralisé (cas de deux stations)	35
<u>Def-3.6:</u> Matrice de transfert à ligne et colonne propre	44
<u>Prop-2.1:</u> Forme de Smith Mac Millan (S.M.M)	11
<u>Prop-2.2:</u> Pôles et zéros finis à partir des factorisations à droite et à gauche de Wolovich	13
<u>Prop-2.3:</u> Forme de S.M.M à l'infini	15
<u>Prop-2.4:</u> Zéros à l'infini à partir des mineurs de la matrice de transfert	16
<u>Prop-2.5:</u> Forme d'Hermité d'une matrice de transfert	16
<u>Prop-3.1:</u> Interprétation par graphes des zéros à l'infini	41
<u>Prop-3.2:</u> Interprétation par graphes des ordres essentiels	42

	Pages
<u>Prop-3.3:</u> Interprétation par graphes de ligne et colonne propre	45
<u>Prop-4.1:</u> CNS de rejet structurel par retour de sortie mesurée (cas où $G(s)$ ou $N(s)$ est découplable)	72
<u>Theo-3.1:</u> C.N.S de commandabilité et d'observabilité structurelle de sous-espaces atteignables	34
<u>Theo-3.2:</u> C.N.S de commandabilité structurelle par une station d'un système décentralisé à deux stations.	35
<u>Theo-3.3:</u> C.N.S d'existence d'un mode s-fixe en décentralisé (cas de 2 stations de commande)	36
<u>Theo-3.4:</u> Interprétation par graphes du rang structurel	39
<u>Theo-3.5:</u> Interprétation par graphes du mode s-fixe	46
<u>Theo-4.1:</u> C.N.S (en termes de graphes) de découplage par retour d'état statique régulier	53
<u>Theo-4.2:</u> C.N.S de découplage par blocs par retour d'état statique régulier	55
<u>Theo-4.3:</u> C.N.S (en termes de graphes) de découplage par blocs par retour d'état statique régulier	57
<u>Theo-4.4:</u> C.N.S de rejet structurel lorsque $G(s,\lambda)$ est ligne propre et $N(s,\lambda)$ colonne propre	69
<u>Theo-4.5:</u> C.N (en termes de graphes) de rejet structurel lorsque $G(s)$ et $N(s)$ sont carrées inversibles	74
<u>Theo-4.6:</u> C.N.S d'existence de modes s-fixes en décentralisé (cas de plusieurs stations de commande)	76
<u>Theo-4.7:</u> C.N.S d'élimination de modes s-fixes	77

1.0- ABREVIATIONS ET NOTATIONS UTILISEES

A, B, C : matrices réelles de dynamique, d'entrée et de sortie

A^*, B^*, C^* : matrices booléennes de dynamique, d'entrée et de sortie

$A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$: matrices structurées de dynamique, d'entrée et de sortie

X, U, Y : vecteurs d'état, de commande et de sortie

C.E.A : complexe d'engrais azotés

Det.(.) : déterminant d'une matrice

Diag.(.): diagonale d'une matrice

$\epsilon(s), d(s)$: polynômes normés numérateurs et dénominateurs

E/S : entrées-sorties

$\mathcal{G}(X,A)$: graphe orienté d'ensembles de sommets X et d'arcs A

$\mathcal{G}(M), \mathcal{G}(\Sigma)$: graphe associé à la matrice M (au système Σ)

$\mathcal{G}(\Sigma_T)$: graphe associé au système Σ de MFT $T(s)$ sans perturbations

$\mathcal{G}(\Sigma_{TP})$: graphe associé au système σ de MFT $T(s)$ avec perturbations

$\mathcal{G}'(\Sigma')$: graphe obtenu de $\mathcal{G}(\Sigma)$ en faisant apparaître la structure

$\xi_i^r (H_i^r)$: ordre du zéro infini de la i-ème ligne de $G(s)$ (de $H(s)$)

K : matrice de retour de sortie,

$K_I, (K_I^*)$: sous-espace de commandabilité par la station I (élargi)

K_I^h : vecteur de commandabilité par chaque entrée de la station I

k_I^k : k-ème élément du vecteur K_I

$L_I, (L_I^*)$: espace commandable et observable par station I (élargi)

L_k, L_p, L_{p-1}^i : somme minimale des longueurs de chemins E/S disjoints

$L_S, (L_S^*)$: vecteur de caractérisation du mode s-fixe (élargi)

l_S^{k*} : k-ème élément nul dans le vecteur de caractérisation L_S^*

λ_i : paramètres inconnus ou indéterminés

Λ : ensemble de paramètres λ ou produit logique

M_I^l : vecteur d'observabilité par chaque sortie de la station I
 \bar{m}_j^k : k-ème élément du vecteur M_j associé à la station J
 M, M^* : matrice structurée, matrice booléenne
M.R.A.C : Model Reference Adaptive Control
n, m, p: dimensions des espaces d'état, d'entrée et de sortie
 n_i (n_i^r) : ordre du i-ème zéro infini (de la ligne i) du transfert
 n_i^e : ordre essentiel de la i-ème ligne de la matrice de transfert
P.G.C.D: plus grand commun diviseur
P.P.C.M: plus petit commun multiple
 $QNO_2, (QNO)$: débit de dioxyde d'azote (monoxyde d'azote)
 $QHNO_3$: débit d'acide nitrique
R: corps des réels
r, (R.g.C.), R.s.C.), R.t.C.): rang (générique, structurel, terme)
 R_i (\bar{R}_i) : bloc à éléments non nuls (matrice des blocs R_i)
 $(R)_i$: indice rang pour la matrice R_i
 Ru_I : sous-espace d'atteignabilité des états par les entrées U_I
 ru_I : nombre de "un" contenus dans Ru_I
 Ry_I : sous-espace d'atteignabilité des sorties Y_I par les états
 ry_I : nombre de "un" contenus dans Ry_I
 $\Sigma, (\Sigma\Lambda)$: système dynamique, (structuré à paramètres dans Λ)
 $\Sigma p, \Sigma p\Lambda$: système à p sorties ou avec perturbations (cas structuré)
s-(.): structurellement (ex. s-fixe signifie structurellement fixe)
S.M.M: Forme de Smith Mac Millan
 $U_I, (Y_I)$: entrées (sorties) de la station de commande I
V : somme logique ou variété algébrique
 \otimes : produit tensoriel
 $T(s), (T(s,\lambda))$: matrice de transfert, (d'un système structuré)

1.1- HISTORIQUE ET MOTIVATIONS

Au cours des vingt dernières années, les études structurelles sur les systèmes linéaires multivariables stationnaires à paramètres connus se sont beaucoup développées (voir l'article de synthèse de Mac Farlane et Karkanias [49] qui regroupe plus de trois cent références ainsi que les articles [24] [33] [39] [50] [54] [68]). Ces études ont permis de mettre en évidence le rôle fondamental de certaines structures intrinsèques des systèmes dynamiques vis à vis de la résolution de problèmes de commande. Parmi elles, certaines structures sont invariantes sous l'action de transformations régulières (retour d'état, retour de sortie, injection de sortie,...). Ces invariants dits structurels ont été caractérisés dans différents contextes (fréquentiel, géométrique, polynômial) et ont eu comme premières applications les problèmes du découplage [29] [34] [42] , du rejet de perturbations [15] [20] [71] et de la poursuite de modèle [50] [33] . Le concept de zéros d'un système multivariable (principalement les zéros à l'infini et les zéros finis instables) [39] [70], s'est avéré un élément clé dans la résolution de ces problèmes [21]. Il existe de multiples façons (qui ne sont pas toutes équivalentes) de définir les zéros d'un système suivant que l'on se limite à l'examen de sa matrice de transfert ou que l'on prenne en compte une réalisation particulière, en géométrique, ou par le biais de la matrice système, en polynômial [49] [62]. Ainsi en fréquentiel, le zéro fini qui est une fréquence qui fait chuter le rang de la matrice de transfert est appelé zéro de transmission. Son rôle dans la synthèse des

régulateurs multivariables est montré dans [39]. En géométrie, cette notion est intimement liée à la situation physique dans laquelle un système produit une sortie identiquement nulle alors que l'entrée et l'état sont non nuls [50] [80]. Les zéros qui se simplifient avec des modes non commandables et/ou non observables sont respectivement appelés zéros de découplage en entrée et/ou en sortie, [49]. Ce type de zéros se retrouve également dans le cadre de la matrice système de Rosenbrock [62] (approche polynômiale). L'influence et l'intérêt de la structure des zéros à l'infini dans la résolution de problèmes de commande ont été largement montrés dans la littérature (voir [21] [29] [33] [34] [44] [50] [51] [56] [58] [71]). La structure à l'infini possède un sens physique. En continu, les ordres des zéros à l'infini correspondent, à une unité près, aux ordres maximaux des dérivées nulles à l'origine des entrées vues des sorties. En discret, le plus grand ordre des zéros à l'infini correspond au nombre maximum de pas d'échantillonnage pendant lequel on peut maintenir nulles les sorties du système, autrement dit le retard maximal possible introduit sur les sorties par toutes les entrées possibles. Ce concept a été considéré dans [71] en relation avec le comportement asymptotique du lieu des racines pour les systèmes multivariables et son importance dans la solution du problème de découplage a été considérée dans [29][70]. Un autre invariant déterminant dans la commande décentralisée, est celui de mode fixe [27], [72]. Ce type de commande a atteint son apogée dans les années soixante dix lorsqu'il a été montré par Wang et Davison [72] que la solution au problème de la stabilisation des systèmes décentralisés dépendait

de ces modes fixes. La présence de ces modes, qui sont invariants sous des commandes par retour de sortie décentralisés, est gênante dans la synthèse de la commande. Ceci a constitué la contribution la plus importante dans la théorie algébrique de la commande décentralisée. Depuis, de nombreux auteurs se sont intéressés à la caractérisation des modes fixes par différentes techniques algébriques (algèbre linéaire, algèbre Boole) et graphiques [1] [2] [27] [52] [60] [82]. D'autres se sont intéressés à la façon de les éliminer dans le but de résoudre le problème de la stabilisation [4] [77] [78]. Une synthèse bibliographique des différentes méthodes de caractérisation des modes fixes est présentée dans [17].

L'utilisation de toutes ces informations structurelles ne s'est pas limitée à l'étude des systèmes à paramètres connus mais elle a également été étendue au cas de modèles dont les paramètres sont peu ou mal connus, ce qui est plus proche de la réalité physique [9] [66] [73]. Il est vrai qu'en pratique, le modèle est souvent complexe et ses paramètres ne sont jamais obtenus d'une façon précise, ne serait-ce qu'à cause des erreurs de mesures, inévitables lors d'une identification. Pour obtenir des modèles plus réalistes dans le but d'une analyse plus fine des propriétés intrinsèques telles que la commandabilité et l'observabilité, le concept de modèle structuré a été introduit par Lin [47] et discuté par beaucoup d'autres auteurs [55] [61] [65] [76]. La question principale est de savoir si des propriétés du système sont génériques relativement aux paramètres ou si elles sont uniquement vraies pour des valeurs exceptionnelles de ces paramètres. Dans les articles cités, les valeurs non nulles des

paramètres sont supposées variables alors que les valeurs nulles sont fixes. Cette structure est supposée valable pour des modèles de systèmes physiques puisque, comme il a été mentionné auparavant les valeurs des paramètres ne sont jamais connues d'une façon exacte, à l'exception de celles qui sont nulles et qui expriment l'absence d'interactions ou de connexions. La commandabilité fonctionnelle ou de sortie des systèmes structurés a été définie et utilisée dans la synthèse de structures de régulation possibles sur des procédés réels [6], [41], [53]. Une revue complète des critères de commandabilité et d'observabilité structurelles est présentée dans [50]. Cet aspect de genericité a été aussi étendu à la solution de problèmes de commande tels que le découplage diagonal par retour d'état [35] [48], le rejet de perturbations [26] [61], la commande décentralisée [52] et le placement de pôles [63]. L'ensemble de ces problèmes a été étudié dans le cadre de l'approche d'état.

Les systèmes structurés se schématisent bien par des graphes orientés [14], ce qui rend aisé l'examen de leurs propriétés [47] [55] [61]. Cet outil "précieux" dans la modélisation des systèmes réels est aussi largement utilisé dans l'analyse et la décomposition des systèmes complexes [6] [53]. Il a également été utilisé dans l'étude de systèmes non linéaires, fournissant des algorithmes de calcul rapide de lois de commande. Des solutions de problèmes de commande et des études de propriétés génériques tant en linéaire qu'en non linéaire sont ramenées à des algorithmes très connus de la théorie des graphes (problème du plus court chemin, problème du flot maximum) [14] [26] [35] [48]. A ce propos l'appro-

che par la théorie des graphes de problèmes de commande et de propriétés structurelles des systèmes dynamiques constitue déjà le titre de quelques ouvrages [55] [61].

Dans la pratique, les modèles structurés tels qu'introduits par Lin [47] ne sont pas aussi réalistes que l'on pense. En effet, et comme l'a souligné Willems dans [76], cette façon de voir ne correspond pas à la réalité puisque d'une part, les valeurs nulles des paramètres ne doivent pas être considérées comme fixes car un paramètre nul peut aussi être le résultat d'une soustraction des valeurs numériques de deux paramètres. Dans ce cas, une telle différence doit être prise comme variable si les deux paramètres modélisent différentes quantités physiques. D'autre part les paramètres nuls ne doivent pas être tous considérés comme variables. Plus important encore, certains paramètres peuvent dépendre l'un de l'autre. En effet, ils peuvent être reliés au même phénomène physique ou engendrés par le même paramètre physique à l'aide d'un changement de variables. Ainsi, l'hypothèse que tous les paramètres varient indépendamment n'est pas réaliste. D'autres inconvénients de la représentation d'état des systèmes structurés non moins importants existent tel que la dimension de l'état qui doit être connue et fixée une fois pour toute. De plus, si cette dimension est grande, le graphe associé au système structuré devient complexe. C'est pourquoi les systèmes structurés ont été formulés différemment en transfert [9] [23] sur la base d'hypothèses physiquement plus réalistes. En effet, la seule connaissance exigée sur le système est celle des zéros à l'infini des éléments de la

matrice de transfert (différence des degrés entre dénominateur et numérateur). Les avantages d'une telle représentation sont très nombreux. Ainsi par exemple, lorsqu'on part d'un système dont on connaît la structure physique, le passage au graphe est relativement aisé. Ce dernier exhibera les invariants du système et les interconnexions. Par ailleurs, toute variation des transferts qui ne change ni l'ordre des zéros à l'infini, ni les interconnexions ne change pas le graphe et par suite la solubilité du problème considéré. Notons que cette classe de perturbations (structurelles) est beaucoup plus vaste que celle considérée dans le cadre de la représentation d'état où l'ordre est fixé une fois pour toutes. Dans le cadre de cette nouvelle approche des systèmes structurés, seul le problème du découplage ligne par ligne par retour d'état statique régulier des systèmes carrés interconnectés a été étudié dans la littérature et résolu dans un travail antérieur [8].

Dans le présent mémoire, on se propose d'étudier, conjointement par l'approche transfert et la théorie des graphes, certaines propriétés structurelles et problèmes de commande dont les solutions sont essentiellement liées à la structure à l'infini ou d'une façon plus générale, à la connaissance et à la comparaison de listes d'invariants structurels. Les propriétés intrinsèques examinées sont celles relatives à la structure à l'infini telles que les zéros à l'infini, les ordres essentiels et les notions de ligne et colonne propres d'une matrice de transfert. L'interprétation par les graphes de ces invariants constituera une de nos

contributions à l'étude des systèmes structurés. Parmi les problèmes classiques de commande étudiés conjointement par l'approche transfert et la théorie des graphes figurent le découplage par retour d'état par blocs et par précompensateur et le rejet de perturbations par retour de sorties mesurées. Le problème de la commande décentralisée des systèmes structurés et celui de la synthèse de structures de commande seront abordés quant à eux par l'approche d'état car ils font intervenir les notions de non commandabilité et de non observabilité qui sont propres à la représentation d'état et qui peuvent traduire l'existence d'un mode fixe.

1.2. PRESENTATION DES CHAPITRES

Le présent mémoire est organisé comme suit:

Le chapitre 1 est relatif à l'introduction.

Dans le chapitre 2, sont présentés quelques rappels sur les invariants structurels des systèmes linéaires multivariables qui seront utilisés tout au long du travail. Ainsi, nous rappelons d'abord les notions de zéros finis et infinis d'un système donné par sa matrice de transfert et ce, à travers les formes les plus connues (formes de Smith Mac Millan [32] [62], factorisations de Wolovich [79]). Les ordres essentiels [22] [28] sont ensuite présentés par le biais de la matrice de transfert et de sa forme d'Hermite (en réalité, à travers l'inverse de la forme d'Hermite appelée interacteur [21] [36]). Ces notions sont illustrées à l'aide d'un exemple simple. dans ce même chapitre, nous rappelons

également la notion de mode fixe qui apparaît dans la commande décentralisée.

Au chapitre 3, nous procédons à l'analyse des systèmes structurés dans le cadre des représentations d'état et transfert. Les systèmes structurés sont d'abord présentés dans l'approche d'état et caractérisés à l'aide de graphes orientés (biparti [14] et de Coates [18]). Ensuite, nous donnons la représentation transfert d'un système structuré introduite à partir des factorisations à l'infini des fonctions de transfert des sous-systèmes monovariabiles formant le système global. Un ensemble d'arcs pondérés par les zéros et les gains à l'infini de chaque transfert monovariabiles formera le graphe associé au système global. Toujours dans ce même chapitre 3, les notions de commandabilité et d'observabilité des systèmes structurés seront étudiées à l'aide de l'algèbre de Boole [52], ce qui permettra de localiser facilement les modes fixes. Le mode fixe étant lié à des sous-espaces de commandabilité et d'observabilité, nous présenterons la procédure d'obtention de ces espaces à travers un exemple simple.

L'apport personnel dans ce chapitre réside dans l'interprétation par les graphes de certaines propriétés structurelles telles que les zéros à l'infini, les ordres essentiels et les notions de ligne et de colonne propres. Ces résultats sont synthétisés dans un article (voir annexe 3) accepté pour publication dans *International Journal of Systems Science*.

Dans ce chapitre, nous donnons également l'interprétation par graphe du rang d'une matrice de transfert [69] ainsi que celle des

modes fixes [60].

Le chapitre 4 est consacré aux aspects structurels de problèmes de commande où l'on étudiera le découplage régulier par retour d'état des systèmes structurés, le rejet de perturbations et la commande décentralisée. On réunit dans ce chapitre, la plupart des résultats originaux obtenus dans le cadre de cette thèse.

Dans une première partie relative au découplage régulier, les résultats antérieurs sont brièvement rappelés. Ensuite, le découplage par blocs diagonaux qui englobe les systèmes non carrés, lorsque le découplage ligne par ligne n'est pas possible, est résolu. Les résultats de ce paragraphe sont publiés dans un article paru dans *International Journal of Control* (annexe 4). Un autre problème étudié et relatif au découplage (publié dans la revue de l'AMSE, voir annexe 2) est celui de l'utilisation d'un précompensateur qui permet de rendre le système global structurellement découplable ligne par ligne à l'aide d'un retour d'état statique. Un algorithme de recherche du précompensateur d'ordre minimal et sa liaison avec la commande adaptative à modèle de référence développée dans [5] y est proposé.

Dans la seconde partie de ce chapitre, le problème du rejet de perturbations par retour de sorties mesurées y est étudié. Après un bref rappel des résultats existants par retour d'état, le cas du retour de sortie y est examiné sous toutes ses variantes. Notons que ce travail a fait l'objet d'un développement dans une thèse de magistère encadrée à l'ENP d'Alger (1993).

La troisième partie concerne la commande décentralisée des systèmes structurés. Nous proposons dans cette partie une méthode d'élimination des modes structurellement fixes basée sur un échange minimum d'informations entre les différentes stations de commande. Un algorithme regroupant l'ensemble des phases de recherche des modes fixes tant en centralisé qu'en décentralisé et leur élimination est présenté. Notons également que les résultats obtenus dans cette partie ont fait l'objet d'une thèse de magistère encadrée à l'ENP d'Alger (1993).

Enfin dans le chapitre 5, nous montrons l'intérêt et la nécessité de l'approche structurelle dans l'étude des systèmes complexes. Nous reprenons une méthodologie de recherche de toutes les structures de commande faisables sur un procédé réel, développée dans les années quatre vingts par Morari [53], que nous appliquerons sur un procédé de fabrication d'acide nitrique (section d'absorption) du Complexe Engrais Azotés (CEA) d'Arzew.

CHAPITRE 2

INVARIANTS STRUCTURELS POUR LA COMMANDE

2.1- INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats bien connus sur la structure des systèmes linéaires multivariés. On s'intéresse particulièrement à des invariants structurels tels que les zéros finis, les zéros à l'infini et les ordres essentiels d'un système multivariable ainsi que les modes fixes apparaissant dans un système décentralisée. Nous ne détaillerons pas ici les différentes définitions ni leurs liens (voir les articles de synthèse [17] et [49]). Nous rappellerons uniquement, puisque c'est l'approche que nous privilégions dans ce mémoire, la définition transfert des zéros (finis et infinis) et des ordres essentiels. Quant au mode fixe, il sera donné par sa définition algébrique classique dans le cadre de l'approche d'état.

2.2- ZEROS D'UN SYSTEME LINEAIRE

Le concept de zéro fini est intimement lié à la situation physique dans laquelle un système, de matrice de transfert $T(s)$ ou de représentation d'état (A,B,C) , produit une sortie identiquement nulle alors que l'entrée et l'état sont non nuls. En transfert, le zéro fini est une fréquence qui fait chuter le rang de la matrice $T(s)$. On peut l'obtenir à partir de la forme de Smith Mac Millan (S.M.M) de $T(s)$ [49] [62].

A- FORME DE S.M.M D'UNE MATRICE DE TRANSFERT

La forme de Smith Mac Millan est la généralisation aux matrices rationnelles de la forme de Smith bien connue des matrices polynômiales. Elle est donnée par la proposition qui suit: [62]

Proposition 2.1:

Soit $T(s)$ une matrice ($p \times m$) rationnelle, $T(s)$ peut s'écrire:

$$T(s) = U_1(s) \cdot M(s) \cdot U_2(s)$$

où: ● $U_1(s)$, $U_2(s)$ sont des matrices unimodulaires de dimensions respectives ($p \times p$) et ($m \times m$) (une unimodulaire $U(s)$ est une matrice polynômiale carrée d'inverse polynômiale caractérisée par $\det(U(s))$ égal à une constante non nulle).

$$● M(s) = \text{diag.} \left[\frac{\varepsilon_1(s)}{d_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{d_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{d_r(s)}, \dots, 0 \right]$$

où:

$r = \text{rang } T(s)$

$\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_r(s)$: polynômes normés tels que $\varepsilon_i(s)$ divise $\varepsilon_{i+1}(s)$,

$d_1(s), \dots, d_r(s)$: polynômes normés tels que $d_{i+1}(s)$ divise $d_i(s)$.

De plus, $M(s)$ est définie d'une façon unique et est appelée forme de Smith Mac Millan de $T(s)$.

Définition 2.1 [62]:

Les racines des polynômes numérateurs $\epsilon_i(s)$ de la forme de SMM de $T(s)$ sont appelées zéros finis (ou de transmission) de $T(s)$, tandis que celles des polynômes dénominateurs $d_i(s)$ sont appelées pôles de $T(s)$ (pôles et zéros finis sont donnés avec leur multiplicité).

La somme des multiplicités des pôles, soit $n = \sum_{i=1}^r \text{deg.}(d_i(s))$ est appelée degré de Mac Millan de $T(s)$.

□

La forme de S.M.M s'obtient de la manière suivante:

soit $d(s)$ le PPCM des dénominateurs des éléments de $T(s)$, alors:

$$T(s) = (1/d(s)).N(s)$$

où $N(s)$ est une matrice polynômiale qui peut s'écrire:

$N(s) = U_1(s).S(s).U_2(s)$ où $S(s)$ est sa forme de Smith, on a alors:

$$T(s) = U_1(s) \cdot \left[S(s)/d(s) \right] \cdot U_2(s).$$

En effectuant les simplifications nécessaires de $S(s)/d(s)$, on a la forme requise.

B- FACTORISATIONS POLYNOMIALES D'UNE MATRICE DE TRANSFERT

Ces factorisations introduites par Wolovich [79] ont pour idée de base la représentation d'une matrice rationnelle $T(s)$ par deux matrices polynômiales comme on représente une fraction rationnelle par un rapport de deux polynômes. En raison de la non-commutativité du produit matriciel, on définit les factorisations à droite $N_d(s).D_d^{-1}(s)$ et à gauche $D_g^{-1}(s).N_g(s)$. Par rapport aux réalisations (représentations d'état) du système de matrice de transfert $T(s)$, la première factorisation correspond à une réalisation canonique de type commandabilité tandis que la seconde correspond avec une réalisation canonique de type observabilité. Ces factorisations peuvent être également, respectivement, observable et commandable si elles sont premières à droite et à gauche, autrement dit si leur PGCD à droite et à gauche respectivement, est une matrice unimodulaire.

Lorsqu'une factorisation est première, les zéros finis et les pôles sont donnés par la proposition suivante: [79]

Proposition 2.2:

Soit $T(s)$ une matrice rationnelle et $N_d(s).D_d^{-1}(s)$ (resp. $D_g^{-1}(s).N_g(s)$) une factorisation à droite (resp. à gauche) de $T(s)$

- i) les zéros finis de $T(s)$ sont donnés par la forme de Smith de $N_d(s)$ (resp. de $N_g(s)$),
- ii) les pôles de $T(s)$ sont donnés par les racines de $\det(D_d(s))$ (resp. de $\det(D_g(s))$).

■

C- STRUCTURE À L'INFINI D'UNE MATRICE DE TRANSFERT

La structure à l'infini d'un système est liée aux pôles et zéros à l'infini comptés avec leur ordre de multiplicité. Contrairement à ce qui se passe pour la structure finie, la structure à l'infini d'un système ne dépend que de sa matrice de transfert (elle est la même pour toutes les réalisations possibles sous forme d'état, qu'elles soient minimales ou pas) [19] [24]. En transfert, la définition classique de la structure à l'infini est la suivante: [62]

Définition 2.2:

Un système de matrice de transfert $T(s)$ possède un zéro (resp. pôle) à l'infini d'ordre k quand $T(1/\omega)$ a un zéro (resp. pôle) fini d'ordre k en $\omega = 0$.

□

On peut également utiliser la forme de S.M.M à l'infini qu'on peut obtenir, par exemple, par pré et post multiplication de $T(s)$ par des matrices rationnelles carrées $B(s)$ appelées bicausales et caractérisées par: $\det.[B(s)] \neq 0$.

$$s \rightarrow \infty$$

Cette forme est donnée par la proposition suivante: [32]

Proposition 2.3:

Soit $T(s)$ une matrice $(p \times m)$ rationnelle propre, $T(s)$ peut s'écrire:

$$T(s) = B_1(s) \cdot \Lambda(s) \cdot B_2(s)$$

où: ● $B_1(s)$ et $B_2(s)$ sont des matrices bicausales de dimensions respectives $(p \times p)$ et $(m \times m)$,

$$\bullet \Lambda(s) = \text{diag.} \left[s^{-n_1}, s^{-n_2}, \dots, s^{-n_r}, \dots, 0 \right]$$

où:

$$r = \text{rang } T(s)$$

n_1, n_2, \dots, n_r sont des entiers positifs ou nuls ordonnés $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

De plus, $\Lambda(s)$ est définie d'une façon unique et est appelée la forme de Smith Mac Milan à l'infini.

■

La structure à l'infini de la matrice de transfert $T(s)$ est donnée par les r zéros à l'infini d'ordre n_1, n_2, \dots, n_r de sa forme de S.M.M à l'infini $\Lambda(s)$.

La structure à l'infini (zéros infinis) d'un système peut être également déterminée à partir des déterminants des différents mineurs de sa matrice de transfert $T(s)$. Cette méthode est donnée par la proposition suivante [35].

Proposition 2.4:

Soit $T(s)$ une matrice $(p \times m)$ rationnelle propre. Les ordres n_1, n_2, \dots, n_r des zéros à l'infini de $T(s)$ se calculent comme suit:

- n_1 = ordre minimal des zéros infinis des mineurs d'ordre 1 de $T(s)$
- n_2 = ordre minimal des zéros infinis des déterminants des mineurs d'ordre 2 de $T(s) - n_1$,
- n_r = ordre minimal des zéros infinis des déterminants des mineurs d'ordre r de $T(s) - \sum_{i=1}^{r-1} n_i$.

■

Un autre moyen de calculer la structure à l'infini de $T(s)$ est sa forme d'Hermite [21]. En se limitant au cas des systèmes carrés la forme d'Hermite est donnée par la proposition suivante:

Proposition 2.5:

Soit $T(s)$ une matrice $(m \times m)$ rationnelle propre non singulière. $T(s)$ peut être factorisée en $T(s) = H(s).B(s)$ où $B(s)$ est une matrice bicausale et $H(s)$ une matrice rationnelle propre triangulaire inférieure qui s'écrit:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ h_{ij} & & \frac{1}{s^{n_m}} \end{bmatrix}$$

où: $h_{ij} = \frac{\gamma}{s^{n_{ij}}}$, $n_{ij} < n_i, n_j$ et n_i entiers, γ polynôme.

La forme de Hermite ainsi définie est unique.

■

Lorsque $H(s)$ est diagonale, les ordres des zéros à l'infini de $T(s)$ sont les n_i ($i=1, \dots, m$) de la diagonale. Dans le cas contraire, ils sont contenus dans les transferts h_{ij} .

L'inverse de la forme d'Hermite est une matrice polynômiale $I(s)$ appelée "interacteur". Ce dernier joue un rôle important dans la commande adaptative des systèmes multivariables [5] [36].

2.3- ORDRES ESSENTIELS D'UNE MATRICE DE TRANSFERT

La notion d'essentialité a été introduite par Cremer [28] dans le cadre de la recherche d'un précompensateur d'ordre minimal qui découple un système multivariable donné. Elle caractérise le degré d'indépendance d'une ligne d'une matrice par rapport aux autres lignes. Les ordres d'essentialité s'obtiennent de plusieurs façons, nous en donnons ici deux en approche transfert [22].

Définition 2.3:

Les ordres essentiels n_i^e par ligne d'une matrice de transfert $T(s)$ correspondent aux ordres les plus grands de chaque colonne de l'interacteur $I(s)$ de $T(s)$.

□

Définition 2.4:

L'ordre essentiel n_i^e de la i -ème ligne de $T(s)$ est donné par:

$$n_i^e = \sum_{i=1}^p n_i - \sum_{j=1}^{p-1} n_j$$

où :

- $\sum_{i=1}^p n_i$ représente la somme des zéros à l'infini de $T(s)$
- $\sum_{j=1}^{p-1} n_j$ représente la somme des zéros à l'infini des mineurs d'ordre j de la matrice de transfert obtenue à partir de $T(s)$ en supprimant la i -ème ligne.

□

Exemple 2.1

Considérons la matrice de transfert $T(s)$ avec ses factorisations à gauche $(Dg^{-1}(s).Ng(s))$ et à droite $(Nd(s).Dd^{-1}(s))$, ses formes de S.M.M finie $M(s)$ et infinie $\Lambda(s)$ et sa forme d'Hermite $H(s)$.

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & s^{-2} \\ s^{-2}(s+1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & -s^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -(s+1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s^2 \\ s^2 & -s^3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= U_1(s).M(s).U_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & -s^{-2}(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(s) = B_1(s).\Lambda(s).B_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s^{-1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= H(s).B(s) = I^{-1}(s).B(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ s^{-1} & s^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s^{-1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Structure finie:

La forme de S.M.M $M(s)$ donne un pôle en 0 de multiplicité 4 et un zéro fini stable en -1. Ces pôles et zéro finis s'obtiennent aussi à partir de:

$$\det.(Dd(s)) = \det.(Dg(s)) = -s^4$$

et de la forme de Smith de $N_g(s)$ ou de $N_d(s)$ (égale ici à $N(s)$).

b) Zéros à l'infini:

La forme de S.M.M à l'infini $\Lambda(s)$ donne un zéro infini d'ordre 1 ($n_1 = 1$) et un zéro infini d'ordre 2 ($n_2 = 2$). D'après la proposition 2.4, on obtient également $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$.

Les zéros infinis par ligne de $T(s)$ sont: $n_1^r = 1$ et $n_2^r = 1$.

c) Ordres essentiels:

Connaissant les ordres des zéros infinis du système et ceux par ligne de $T(s)$, on obtient d'après la définition 2.4:

$$n_1^e = \sum n_i - n_2^r = 2 \text{ et } n_2^e = \sum n_i - n_1^r = 2$$

Nous pouvons également obtenir ces ordres essentiels à partir de la définition 2.3 donnant la forme d'Hermite et dont l'inverse (l'interacteur) $I(s) = H^{-1}(s)$ est égal à:

$$I(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

2.4- NOTION DE MODE FIXE

Le concept de mode fixe a été introduit dans [72] en étudiant le problème de la stabilisation des systèmes décentralisés. Il est ensuite généralisé à tout retour de sortie du type $\underline{u} = K.y$ où \underline{u} et y sont respectivement les vecteurs d'entrées et de sorties et K une matrice constante. Le mode fixe est un pôle du système qui reste invariant sous le retour de sortie K [1]. Lorsque la matrice K est pleine, la commande est dite centralisée et les modes fixes coïncident avec les pôles non commandables et/ou non observables qui se simplifient avec des zéros dits de découplage [62]. Lorsque des contraintes structurelles sont introduites sur K , la commande est dite décentralisée et d'autres modes fixes sont possibles [22]. La détermination d'un mode fixe tant en commande centralisée qu'en décentralisée peut être faite par des méthodes algébriques [1] [2] [82] et graphiques [60]. Une revue de quelques méthodes est présentée dans l'article [17].

Exemple 2.2:

Soit un système (A,B,C) bouclé par un retour de sortie K avec:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Les pôles du système en boucle ouverte sont: -1, 1 et -2.

Les pôles du système bouclé par le retour de sortie K , soit les valeurs propres de la matrice $A^* = A + BKC$ sont: $-1+k_1$, 1 et $-2+k_2$. Le pôle $s = 1$ est donc un mode fixe.

2.5- CONCLUSION

Dans ce chapitre assez dense, nous n'avons pas voulu donner l'ensemble des détails sur la structure des systèmes, mais seulement amener le lecteur rapidement, à la lecture de la suite en se remémorant les différentes définitions et factorisations utiles. Nous avons illustré ces différentes notions à l'aide d'exemples simples, ce qui rend la compréhension facile.

Une étude détaillée des zéros finis, infinis et des différentes factorisations, en approche transfert, peut être trouvée dans les livres de Rosenbrock [62], de Wolovich [79] et de Kailath [46]. Pour le lecteur s'intéressant à l'approche par variables d'état de la structure des systèmes, il pourra consulter le livre de Wonham [80] ou les articles [49] [81] [74] [75]. L'étude géométrique de la structure finie et infinie et des ordres essentiels est présentée dans [24], [25] [51]. Concernant le mode fixe qui joue un rôle important dans la commande décentralisée, une synthèse des différentes caractérisations est présentée dans [17].

CHAPITRE 3

REPRESENTATIONS ET ANALYSE DES SYSTEMES STRUCTURES

3.1- INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons la description et les propriétés des systèmes structurés dans les approches par variables d'état et matrice de transfert. Les modèles de systèmes structurés ont été introduit respectivement dans [47] pour la représentation d'état et dans [23] pour la représentation transfert. La structure de chacun de ces modèles peut être exprimée à l'aide de graphes orientés dont l'analyse permet de donner des propriétés génériques des systèmes qu'ils modélisent. Nous rappellerons, par conséquent, la caractérisation par graphes des systèmes structurés puis nous donnerons quelques propriétés génériques de ces systèmes telles que le rang terme d'une matrice booléenne, le rang structurel d'une matrice de transfert et les notions de commandabilité et d'observabilité structurelles. Ces différentes propriétés constituent la base des chapitres qui vont suivre. Une interprétation par les graphes de certains invariants et propriétés à l'infini des systèmes multivariables sera également donnée.

3.2- REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME STRUCTURE

Nous présentons dans ce paragraphe la description classique d'un système structuré et sa caractérisation à l'aide de graphes orientés. Un même exemple est traité pour les différents graphes considérés.

A- MATRICE ET SYSTEME STRUCTURÉS

Considérons le système dynamique linéaire Σ décrit par:

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x \end{cases} \quad (3.1)$$

où:

- $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, $y \in \mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$
- A,B,C sont des matrices réelles de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(p \times n)$.

Rappelons tout d'abord ce qu'est une matrice structurée. Une définition plus appropriée d'un point de vue mathématique est la suivante: [48]

Définition 3.1:

Soit Λ un ouvert inclus dans \mathbb{R}^k , $S: \Lambda \longrightarrow M_{n \times m}$ une application de Λ dans l'ensemble des matrices $(n \times m)$, S est appelée matrice structurée à paramètres dans Λ s'il existe un sous-ensemble N inclus dans $(n \times m)$ et une bijection $Z: N \longrightarrow k$ tels que pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda$:

$$S_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \notin N \\ \lambda_{z(i,j)} & \text{si } (i,j) \in N \end{cases}$$

□

En d'autres termes, une matrice structurée est une matrice où certains éléments sont des zéros, les autres des paramètres réels appartenant à un ouvert de \mathbb{R}^k .

Nous dirons qu'une propriété est structurelle si elle est vraie pour tout $\lambda \in \Lambda$ sauf éventuellement sur son intersection avec V , une variété algébrique propre de \mathbb{R}^k . On peut traduire ceci par une propriété vraie pour "presque tout" $\lambda \in \Lambda$ et que si la propriété n'est pas vraie pour λ_0 , il existe un $\lambda_0 + \varepsilon \in \Lambda$ "proche" de λ_0 pour lequel la propriété est vraie.

Après ce préalable, la définition d'un système structuré est:

Definition 3.2: [48]

Le système décrit par les équations (3.1) est dit structuré si les matrices A, B, C sont structurées et mutuellement indépendantes, autrement dit si l'espace des paramètres Λ formé par les éléments non nuls λ_i ($i = 1, \dots, k$) des matrices A, B, C est un ouvert de \mathbb{R}^k et la matrice élargie:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} : \Lambda \longrightarrow M_{n+p, m+n} \text{ est structurée.}$$

□

Exemple 3.1:

Reprenons le système de l'exemple 2.2 et remplaçons les coefficients non nuls des matrices A, B et C par des paramètres λ_i .

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} ; B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_6 \end{bmatrix} ; C_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_7 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix}$$

Si l'ensemble des paramètres λ_i ($i=1, \dots, 9$) appartient à un ouvert de \mathbb{R}^9 , le système (A, B, C) est structuré.

B- CARACTÉRISATION PAR GRAPHES:

Avant d'associer un graphe à un système structuré décrit par des équations de type (3.1), nous rappelons d'abord la définition d'un graphe orienté, [14] [18].

Définition 3.3:

Un graphe orienté $\mathcal{G}(S,A)$ est défini par les ensembles de sommets S et d'arcs A , et deux applications I et $T: A \rightarrow S$ qui font correspondre à chaque arc, respectivement, son extrémité initiale et son extrémité terminale.

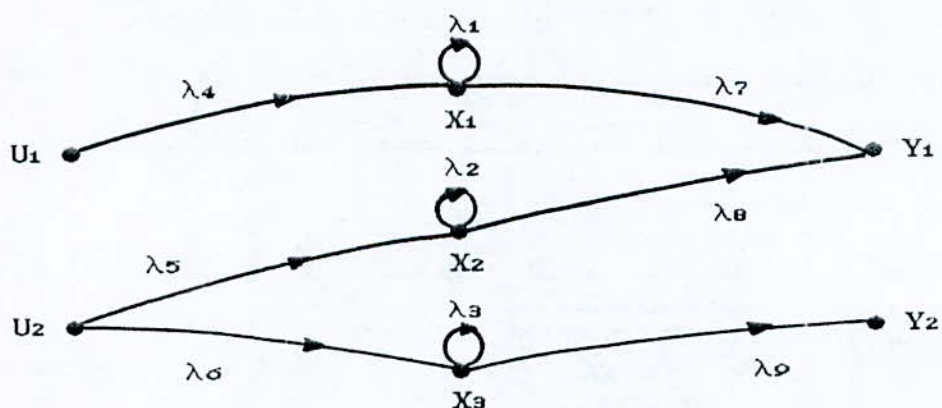
□

On peut associer au système (3.1) un graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma)$ dont l'ensemble des sommets est donné par les m entrées, p sorties et n états et dont l'ensemble des arcs correspond aux connexions physiques entre les sommets. Un arc représente un élément non nul dans les matrices A, B, C du système, il est pondéré par un poids égal au paramètre non nul. Ce type de graphe sera dit direct.

Dans un graphe direct orienté, un chemin entrée-sortie est une séquence d'arcs dont l'extrémité initiale appartient à l'ensemble des entrées et l'extrémité terminale à l'ensemble des sorties. La longueur de ce chemin est égale au nombre d'arcs qui le composent. Un plus court chemin est un chemin de longueur minimale.

Dans un graphe orienté associé à un système structuré, une notion importante pour la solvabilité de problèmes de commande est celle d'un couplage entrée-sortie (E/S) élémentaire. On définit un couplage E/S élémentaire comme un ensemble de m chemins reliant toutes les entrées à toutes les sorties tels que chacun d'entre eux soit un chemin de longueur minimale entre l'ensemble des entrées et la sortie considérée, [48] [7]. Une définition équivalente, donnée dans [35], utilise un ensemble de m plus courts chemins E/S à sommets disjoints.

A l'exemple précédent correspond le graphe direct suivant:



Il existe dans ce graphe, un couplage E/S élémentaire:

$$\left\{ (U_1 X_1) (X_1 Y_1); (U_2 X_3) (X_3 Y_2) \right\}$$

Un autre type de graphe, dit de Coates, est associé à une matrice carrée [18] [61]. L'information totale sur le système est résumée dans une matrice structurée carrée de dimension (qxq) avec

$q = n+m+p$ de la forme suivante:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le graphe de Coates $\mathcal{G}(M)$ associé à la matrice M consistera en un ensemble S_M de q sommets et un ensemble A_M de μ arcs orientés et pondérés, défini par:

$$A_M = \left\{ (S_j, S_i) \mid m_{ij} \neq 0 \right\}$$

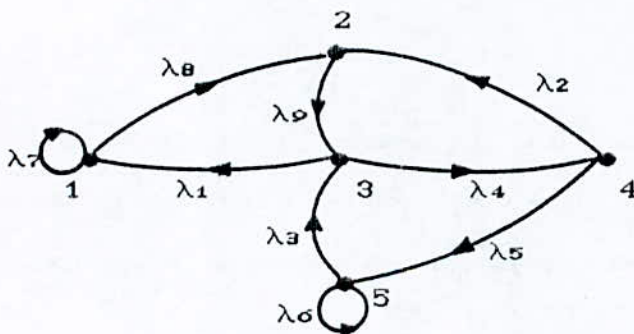
où m_{ij} désigne la valeur nominale de l'élément ij de la matrice M . De plus, si (S_j, S_i) est un arc du graphe $\mathcal{G}(M)$, alors il est pondéré par un poids non nul m_{ij} .

Dans ce type de graphe, on utilise la notion de cycle qui est un chemin fermé (l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale). Un ensemble de cycles à sommets disjoints est appelé une famille de cycles. Une famille de cycles couvrant les q sommets du graphe $\mathcal{G}(M)$ est dite de largeur q .

Au même exemple 3.1, on peut associer un graphe de Coates. Puisque $m = p$, on utilisera la matrice carrée:

$$M_1 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}$$

Le graphe associé est le suivant:



3.3- REPRESENTATION TRANSFERT D'UN SYSTEME STRUCTURE

L'approche d'état des systèmes structurés présente quelques faiblesses entre autres la difficulté d'obtenir une représentation d'état réellement structurée à partir d'un système physique, [9], l'ordre du système du système est en général inconnu et si le système est complexe, on travaille sur des graphes de dimension très grande. Dans la représentation transfert, la structure bien connue du système est constituée des interconnexions entre sous-systèmes simples (en général mono-entrée mono-sortie) et du zéro à l'infini pour chaque sous-système. L'ensemble de paramètres pour notre représentation structurée est donné par celui des gains à l'infini des transferts des sous-systèmes. Ainsi, la condition de validité des résultats est que les sous-systèmes doivent être "indépendants" (pas de structure cachée). L'idée développée dans [23] était d'associer à un système un graphe où n'apparaissent que les interconnexions et les zéros à l'infini des sous-systèmes.

A- FACTORISATION À L'INFINI ET SYSTEME STRUCTURÉ

Considérons un système monovariante de fonction de transfert $t(s)$ strictement propre, dont les paramètres sont inconnus. $t(s)$ peut être factorisé à l'infini comme suit: [9] [23]

$$t(s) = s^{-n} \lambda \left[\frac{s^k + b_{k-1} s^{k-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right] = \lambda s^{-n} h(s) \quad (3.2)$$

où: λ est le gain à l'infini, n l'ordre du zéro à l'infini et $h(s)$ une fonction de transfert bipropre.

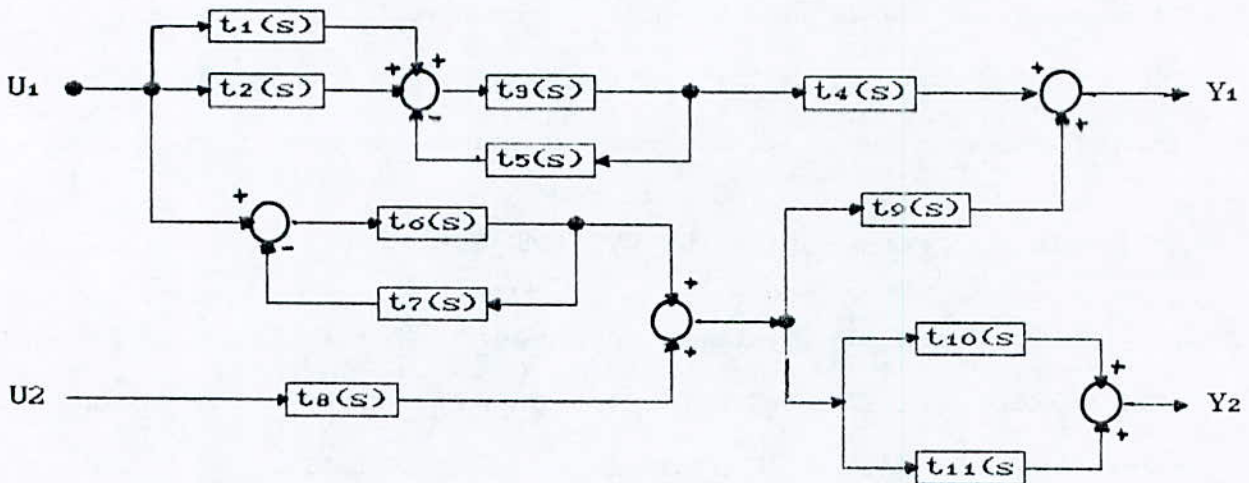
Définition 3.4:

Un système formé par interconnexions série, parallèle et/ou feedback de transferts monovariabiles $t_i(s)$ ($i=1,\dots,k$) donnés par leurs factorisations à l'infini (3.2) et dont les gains à l'infini λ_i sont indépendants est dit structuré.

□

Pour un système multivariable, chaque élément $T_{ij}(s)$ peut être une combinaison de sous-systèmes interconnectés et factorisés à l'infini comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple 3.2:



Ce système multivariable est structuré si les gains à l'infini λ_i des $t_i(s)$, ($i=1,\dots,11$) appartiennent à un ouvert de \mathbb{R}^{11} .

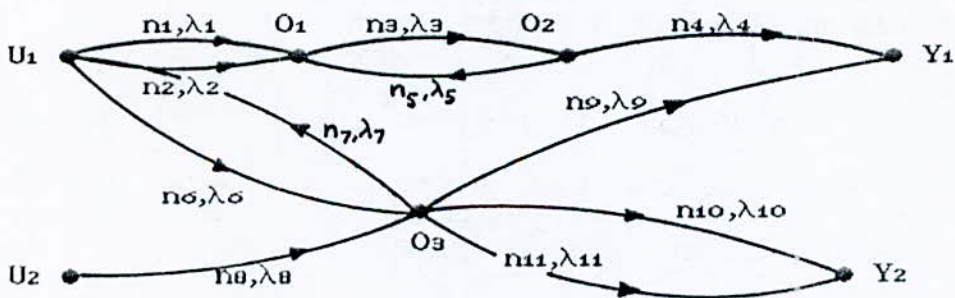
B- CARACTÉRISATION PAR GRAPHES:

A un transfert monovarié factorisé à l'infini, on associe un arc de longueur n égale à l'ordre de son zéro à l'infini et de poids λ égal à son gain à l'infini (les longueurs sont des entiers connus, les poids sont des paramètres inconnus mais indépendants).

Remarque:

Les mêmes propriétés des graphes données dans l'approche d'état restent vraies en approche transfert. Une différence existe cependant au niveau des longueurs de chemins où l'on ne compte plus le nombre d'arcs mais les ordres des zéros à l'infini de chaque sous-système représenté par un arc [7].

Le graphe associé au schéma de l'exemple 3.2 est le suivant:



Notons qu'un graphe contenant des arcs en parallèle et/ou en feedback peut être simplifié de la manière suivante:[9]

- Pour les arcs en parallèle, celui qui possède le plus petit zéro à l'infini l'emporte,
- Pour le feedback, les arcs se trouvant dans la contre réaction sont ignorés car le feedback ne change pas la structure à l'infini si le système est strictement propre [68].

Pour un système multivariable structuré de matrice de transfert $T(s,\lambda)$, le transfert $T_{ij}(s,\lambda)$ est la somme des transferts qui correspondent aux chemins allant de l'entrée U_j à la sortie Y_i . Puisque la longueur d'un chemin est égale à la somme des longueurs des arcs qui le composent et son poids est égal au produit des poids des arcs qui le composent, il apparaît que: [9]

- $T_{ij}(s,\lambda)$ étant factorisé à l'infini, l'ordre n_{ij} de son zéro infini est égal à la longueur minimale des chemins allant de U_j à Y_i . De même, son gain à l'infini λ_{ij} est égale à la somme des poids des chemins de longueur minimale allant de U_j à Y_i .

- L'ordre du zéro à l'infini de la i -ème ligne $T_i(s,\lambda)$ est égal à la longueur minimale des chemins allant de l'ensemble des entrées U_1, \dots, U_m à la sortie Y_i . Le gain à l'infini de $T_i(s,\lambda)$ est égal à:

$$B_{0i} = \lim_{\lambda_i \rightarrow \infty} s^{n_i} \cdot T_i(s,\lambda)$$

où l'élément k de B_{0i} est égal à la somme des poids des chemins de longueur n_i entre U_k et Y_i s'il en existe et zéro sinon.

3.4- COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE DES SYSTEMES STRUCTURES

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux propriétés de commandabilité et d'observabilité des systèmes structurés. Nous utiliserons quelques fois dans le texte, les dénominations de commandabilité structurelle ou s-commandabilité et d'observabilité structurelle ou s-observabilité. Ces notions qui ont été introduites dans différentes approches algébriques (algèbre linéaire et de Boole) [1] [52] et graphiques [57] [61] permettent de caractériser les modes fixes dans les systèmes structurés. Ces derniers sont appelés des modes "structurellement" fixes ou s-fixes [64].

Nous nous limitons, pour notre cas, à la caractérisation par l'algèbre de Boole qui permet de connaître la position du mode fixe dans la matrice d'état du système décentralisé étudié.

A- PRÉLIMINAIRES

Considérons un système (A,B,C) bouclé par une matrice de retour de sortie K . La forme booléenne du système, soit (A^*,B^*,C^*) est obtenue en remplaçant les coefficients non nuls des matrices A , B et C par des "un" logiques et les coefficients nuls par des "zéro" logiques. Cette écriture booléenne apparaît comme un outil mathématique pertinent pour représenter un système à l'aide de graphes orientés. Puisque nous allons nous intéresser à la commande décentralisée, il est utile d'en rappeler le principe.

L'équation du système est:

$$X = A.X + \sum_{i=1}^N B_i U_i \quad (3.3)$$

$$Y = C_i.X$$

avec $i=1,2,\dots,N$ et N le nombre de stations de commande regroupant chacune un certain nombre d'entrées et de sorties.

Une commande par retour de sortie de la forme: $U_i = K_{ii}.Y_i$ est appliquée à chaque sous-système i où K_{ii} est un bloc diagonal de K

La s -commandabilité et la s -observabilité sont données par deux conditions: celle d'atteignabilité des états par les entrées et des sorties par les états et celle du rang terme. On rappelle que le rang terme d'une matrice booléenne M^* est le nombre de "un" contenus dans sa matrice de permutation. Celle-ci s'obtient à partir de M^* en prenant un seul "un" par ligne et par colonne.

A chaque station de commande i ($i = 1,2,\dots,N$) est associé un sous-espace Ru_i d'atteignabilité des états par les entrées u_i de la station et un sous-espace Ry_i d'atteignabilité des sorties y_i de la station par les états du système. Ces vecteurs de dimensions n (le nombre d'états), s'obtiennent très simplement par visualisation du graphe associé. Nous pouvons également les déterminer à l'aide d'opérations logiques sur les matrices booléennes de dynamique A , de commande B et d'observation C , [52].

B- SOUS-ESPACES COMMANDABLES, OBSERVABLES ET LES MODES FIXES

A chaque station I, on associe aussi un sous-espace commandable K_I et un sous-espace observable M_I obtenus en considérant le rang terme de matrices booléennes augmentées. Introduisons les matrices suivantes Au_I et Ay_I obtenues en mettant à zéro tous les éléments de la j-ème ligne et j-ème colonne de la matrice booléenne d'état A^* correspondant au j-ème élément nul dans Ru_I et Ry_I respectivement. En notant $R.t(.)$ le rang terme d'une matrice booléenne et ru_I, ry_I le nombre de "un", contenus respectivement dans Ru_I et Ry_I , les sous-espaces de commandabilité et d'observabilité sont donnés par le théorème suivant: [52]

Théorème 3.1:

Le sous-espace d'atteignabilité Ru_I est commandable par la station I si et seulement si: $R.t \begin{bmatrix} Au_I & B_I^* \end{bmatrix} = ru_I$

Le sous-espace d'atteignabilité Ry_I est observable par la station I si et seulement si: $R.t \begin{bmatrix} Ay_I & C_I^* \end{bmatrix} = ry_I$.

Si la condition de rang terme n'est pas vérifiée, le sous-espace commandable K_I correspondant (ou observable M_I) n'est pas unique et pourra être élargi jusqu'à combler la déficience du rang. En se limitant à un système avec deux stations de commande, la s-commandabilité et la s-observabilité sont définies comme suit:

Définition 3.5: [52]

On dit qu'un système est *s*-commandable (resp. *s*-observable) par deux stations en combinaison si les sous-espaces commandables (resp. observables) sont tels que:

$${}^i K_1 \vee {}^j K_2 = \text{vecteur unité (resp. } {}^i M_1 \vee {}^j M_2 = \text{vecteur unité).$$

où le symbole \vee désigne la somme logique.

□

La condition nécessaire et suffisante pour la *s*-commandabilité d'un système décentralisé par la station I est donnée par:

Théorème 3.2: [52]

Un système décentralisé à deux stations de commande, de dimension d'état *n* est *s*-commandable par la station I si et seulement si:

$$R u_I \wedge R y_I^T \neq 0 \text{ et } R.t \begin{bmatrix} A^* & B_I^* \\ C_J^* & 0 \end{bmatrix} \geq n \quad I = 1,2 ; J = 1,2 \text{ et } I \neq J$$

où le symbole \wedge désigne le produit logique.

■

Puisque les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont duales, le résultat ci-dessus équivaut à la *s*-observabilité du système par la station J.

En notant par L_I le sous-espace commandable et observable par la station I et par L_I^* le sous-espace élargi par l'effet des retours de sorties, nous avons:

$$L_I = K_I \wedge M_I^T \text{ et } L_I^* = K_I^* \wedge M_I^{*T}$$

où K_I^* et M_I^* sont respectivement le sous-espace commandable et observable élargi de la station I.

Le théorème qui suit caractérise le mode structurellement fixe dans un système de commande décentralisée [52].

Théorème 3.3:

Un système décentralisé à deux stations de commande ne possède pas de modes s-fixes si et seulement si il est s-commandable et s-observable sous la structure de commande décentralisée, c'est à dire que:

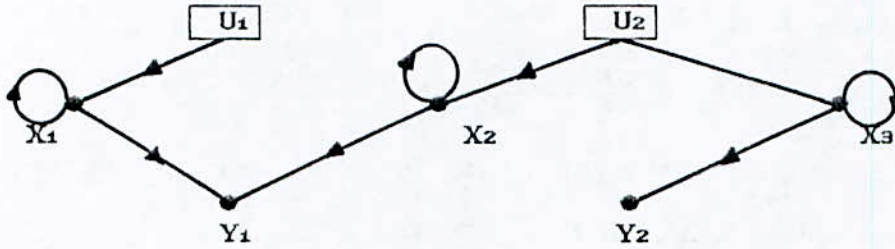
$$L_1^* \vee L_2^* = \text{vecteur unité.}$$

■

Exemple 3.3

Reprenons le système structuré de l'exemple 3.1 et remplaçons les paramètres λ_i par des "un" logiques. Considérons deux stations de commande u_1 et u_2 avec les sorties respectives y_1 et y_2 et une contrainte de décentralisation $K = \text{diag.} \left\{ k_{11}, k_{22} \right\}$.

Le graphe associé au système bouclé est représenté ci-dessous:



A partir de ce graphe, les vecteurs d'atteignabilité sont:

$$Ru_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, Ru_2 = [0 \ 1 \ 1]^T, Ry_1 = [1 \ 1 \ 0], Ry_2 = [0 \ 0 \ 1]$$

d'où: $ru_1 = ry_2 = 1$ et $ru_2 = ry_1 = 2$.

Le sous-espace atteignable par la station 1 est commandable car:

$$R.t [Au_1 \ B_1^*] = R.t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 = ru_1.$$

Le sous-espace atteignable par la station 2 est commandable car:

$$R.t [Au_2 \ B_2^*] = R.t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 = ru_2.$$

Le sous-espace atteignant la sortie 1 est observable car:

$$R.t \begin{bmatrix} Ay_1 \\ C_1^* \end{bmatrix} = R.t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = ry_1$$

Le sous-espace atteignant la sortie 2 est observable car:

$$R.t \begin{bmatrix} Ay_2 \\ C_2^* \end{bmatrix} = R.t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 = ry_2$$

Les sous-espaces K_1 , K_2 commandables respectivement par les stations 1 et 2 sont égaux respectivement aux sous-espaces d'atteignabilité en entrée Ru_1 et Ru_2 . Pour les sous-espaces observables respectivement par les stations 1 et 2, on a:

$$M_1 = Ry_1 \text{ et } M_2 = Ry_2.$$

Le système global est s-commandable par les deux stations à la fois car $K_1 \vee K_2 = Ru_1 \vee Ru_2 =$ vecteur unité. Il en est de même pour l'observabilité structurelle par les deux stations à la fois car:

$$M_1 \vee M_2 = Ry_1 \vee Ry_2 = \text{vecteur unité.}$$

Le système décentralisé est s-commandable par la station 2 car le théorème 3.1 est vérifié. En effet, on a:

$$Ru_2 \wedge Ry_1^T = [0 \quad 1 \quad 0]^T \neq 0$$

et R.t $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 > 3.$

Par dualité, le système est s-observable par la station 1.

Par ailleurs, le système n'est pas s-commandable par la station 1 car $Ru_1 \wedge Ry_2^T = 0$, par conséquent il n'est pas s-observable par la station 2.

Le sous-espace commun à la s-commandabilité et à la s-observabilité par la station 1 est: $L_1 = K_1 \wedge M_1^T = [1 \quad 0 \quad 0]^T$
 et celui relatif à la station 2 est: $L_2 = K_2 \wedge M_2^T = [0 \quad 0 \quad 1]^T$.
 On obtient ainsi: $L = L_1 \vee L_2 = [1 \quad 0 \quad 1]^T$.

On remarque donc l'existence d'un mode s-fixe dans le système décentralisé qui correspond à la deuxième valeur propre de la matrice A de dynamique.

3.5- INTERPRETATION PAR GRAPHES DU RANG D'UNE MATRICE DE TRANSFERT

Comme nous venons de le montrer dans la section précédente, la notion de rang joue un rôle important dans l'étude de la dynamique d'un système. Elle intervient aussi dans la plupart des problèmes de synthèse tels que le placement de pôles [63], le découplage [37], le rejet de perturbations [15]. Lorsque le système est structuré, on utilise le rang structurel défini comme étant le rang maximal qui peut être atteint sur l'ensemble des paramètres non nuls λ_i ($i=1,2,\dots,k$) du système [55] [69]. Pour une matrice de transfert structurée $T(s,\lambda)$, le rang r est donné par:

$$r = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^k} \left\{ \text{rang } T(s,\lambda) \right\}$$

L'interprétation, à l'aide de graphes, du rang structurel est donnée par le théorème suivant: [69]

Théorème 3.4:

Soit Σ un système structuré $(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda)$ de matrice de transfert $T(s,\lambda) = C_\lambda (sI - A_\lambda)^{-1} B_\lambda$ et $\mathcal{G}(\Sigma)$ le graphe direct associé. Le nombre maximal de chemins E/S à sommets disjoints dans $\mathcal{G}(\Sigma)$ est égal au rang structurel de $T(s,\lambda)$, noté $R.s(\cdot)$.

Notons également une utilisation fréquente du terme plus général de "rang générique", noté $R.g(.)$ et utilisé pour des matrices paramétrées qui ne sont pas forcément structurées. Pour le lien avec le rang terme, il est montré dans [55], qu'en général $R.g(.) \leq R.t(.)$. L'égalité est obtenue lorsque chaque paramètre de la matrice M est une indéterminée en elle-même.

Exemple 3.4:

En considérant de nouveau le graphe direct associé au système structuré de l'exemple 3.1, on remarque l'existence d'un ensemble de deux chemins E/S à sommets disjoints qui sont:

$$\{(U_1X_1), (X_1Y_1)\} \text{ et } \{(U_2X_3), (X_3Y_2)\}.$$

Par conséquent, le rang structurel est égal à 2.

3.6- CARACTERISATION PAR GRAPHES DE PROPRIETES STRUCTURELLES

Nous donnons dans ce paragraphe, sans démonstration, la caractérisation par les graphes des zéros à l'infini, des ordres essentiels et des notions de ligne et colonne propre d'une matrice de transfert (le détail se trouve dans l'article [11], annexe 3). Nous présentons aussi la caractérisation par graphes de Coates des modes s-fixes apparaissant dans la commande décentralisée [61].

A- CARACTÉRISATION PAR GRAPHES DES ZÉROS À L'INFINI

Dans le cadre de la représentation d'état, une caractérisation par graphes des zéros infinis est donnée dans [26]. Nous proposons ici une représentation similaire par l'approche transfert en utilisant la proposition 2.4 relative au calcul des zéros infinis.

Proposition 3.1:

Soit $T(s,\lambda)$ la matrice de transfert (pxm) d'un système structuré et $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ le graphe associé. Le nombre de zéros à l'infini est égal au rang générique de $T(s,\lambda)$ et leurs ordres sont:

$$n_1 = L_1$$

$$n_2 = L_2 - L_1$$

·
·
·

$$n_k = L_k - \sum_{k=2}^r L_{k-1}, \quad k = 2, \dots, r$$

où L_k est la somme minimale des longueurs de chemins E/S disjoints dans $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$.

B- CARACTÉRISATION PAR GRAPHES DES ORDRES ESSENTIELS

En utilisant la définition 2.4, une interprétation graphique des ordres essentiels est la suivante:

Proposition 3.2:

Soit un système structuré Σ de matrice de transfert $T(s,\lambda)$ ($p \times m$) et de graphe associé $\mathcal{G}(\Sigma)$. Soit $\mathcal{G}(\Sigma_i)$ le sous-graphe partiel associé à $T(s,\lambda)$ diminuée de la i -ème ligne. Alors les ordres essentiels de $T(s,\lambda)$ s'expriment comme suit:

$$n_i^e = L_p - L_{p-1}^i$$

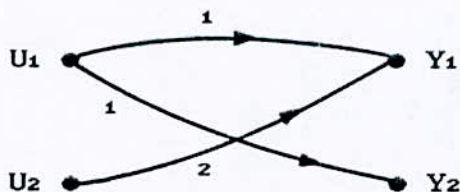
où L_p et L_{p-1}^i sont respectivement la somme minimale des longueurs de p chemins E/S disjoints dans le graphe $\mathcal{G}(\Sigma)$ et la somme minimale des longueurs de $p-1$ chemins E/S disjoints dans le graphe $\mathcal{G}(\Sigma_i)$ associé à la matrice $T(s,\lambda)$ dépourvue de la i -ème ligne.

■

Exemple 3.5

Considérons la matrice de transfert $T(s)$ de l'exemple 2.1 et supposons qu'elle soit structurée au sens où les gains à l'infini de chacun de ses éléments factorisés à l'infini sont indépendants.

Le graphe biparti associé est le suivant:



Il existe dans le graphe deux chemins E/S à sommets disjoints U_1Y_2 et U_2Y_1 , La matrice de transfert $T(s)$ a donc un rang générique égal à 2, d'où deux zéros à l'infini. La longueur minimale de chacun des chemins E/S est $L_1 = 1$ tandis que la longueur des deux chemins E/S à sommets disjoints est $L_2 = 3$. Par conséquent:

$$n_1 = L_1 = 1 \text{ et } n_2 = L_2 - L_1 = 2.$$

Pour les ordres essentiels, nous avons:

$$n_1^e = L_2 - L_1^1 = 2 \text{ et } n_2^e = L_2 - L_1^2 = 2$$

où L_1^i ($i = 1, 2$) est la longueur du plus court chemin allant de toutes les entrées vers la sortie i .

C-INTERPRÉTATION PAR GRAPHES DES NOTIONS DE LIGNE ET COLONNE PROPRE

Les notions de ligne propre et de colonne propre sont des propriétés qu'ont certaines matrices de transfert. Avant de les définir pour des systèmes structurés, nous allons les rappeler dans le cas classique en introduisant la notation suivante:

$$\text{Soit } t_i^r = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n_i^r} T_i^r(s) \text{ if } T_i^r(\infty) \neq 0,$$

$$= 0 \text{ sinon}$$

n_i^r correspond à la plus petite différence des degrés dénominateur numérateur de chaque élément de la ligne $T_i^r(s)$ d'une matrice de transfert $T(s)$, autrement dit c'est le zéro infini par ligne de $T(s)$.

t_i^c est défini de la même manière relativement à la colonne $T_i^c(s)$ de la matrice de transfert $T(s)$.

La définition classique de ces notions est la suivante:

Définition 3.6 [46]

Soit $T(s)$ une matrice de transfert propre ($p \times m$) avec un rang plein en ligne (resp. rang plein en colonne). $T(s)$ est dite ligne propre (resp. colonne propre) si:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} t_{1}^r & \dots & t_{p}^r \end{bmatrix}^T = p, \text{ (resp. rang} \begin{bmatrix} t_{1}^c & \dots & t_{m}^c \end{bmatrix} = m \text{)}$$

□

Lorsque le système est structuré, les t_{i}^r et t_{i}^c sont respectivement les gains à l'infini par ligne et par colonne. Avant de donner la caractérisation par graphes des propriétés de ligne et colonne propres d'une matrice de transfert structurée $T(s, \lambda)$, nous introduisons les notions de transfert structurellement propre et de rang structurel par ligne et par colonne. Nous dirons:

- a) qu'une matrice de transfert $T(s, \lambda)$ ($p \times m$) est structurellement propre si chaque arc de son graphe associé $\mathcal{G}(\Sigma)$ est de longueur supérieure ou égale à zéro,
- b) que $T(s, \lambda)$ a un rang structurel plein en ligne (resp. plein en colonne), si le nombre de chemins E/S à sommets disjoints dans $\mathcal{G}(\Sigma)$ est égal au nombre de sorties p (resp. nombre d'entrées m).

Nous sommes maintenant en mesure de donner la proposition relative à l'interprétation par graphes des notions de ligne et de colonne propre d'une matrice de transfert.

Proposition 3.3

Soit Σ un système structuré, de graphe associé $\mathcal{G}(\Sigma)$. Supposons que la matrice de transfert $T(s,\lambda)$ de Σ soit de rang structurel plein en ligne (resp. plein en colonne), alors $T(s,\lambda)$ est structurellement ligne propre (resp. structurellement colonne propre) si et seulement si il existe dans $\mathcal{G}(\Sigma)$, un ensemble de p plus courts chemins E/S à sommets disjoints (resp. un ensemble de m chemins).

■

Pour illustrer ces notions, considérons les trois configurations de systèmes structurés présentées dans l'exemple qui suit:

Exemple 3.6:

Soient $\mathcal{G}(\Sigma_1)$, $\mathcal{G}(\Sigma_2)$ et $\mathcal{G}(\Sigma_3)$ les graphes associés aux systèmes structurés Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 représentés respectivement sur les figures a, b, et c suivantes:

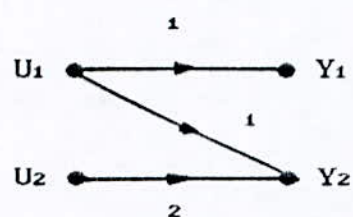


fig.a: $\mathcal{G}(\Sigma_1)$

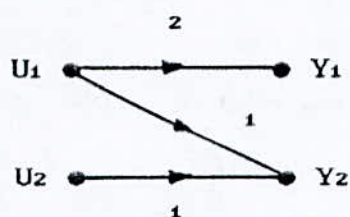


fig.b: $\mathcal{G}(\Sigma_2)$

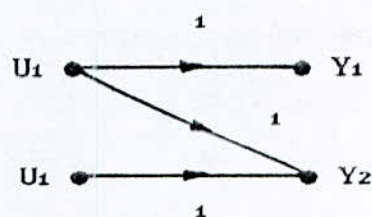


fig.c: $\mathcal{G}(\Sigma_3)$

Pour ces trois systèmes, les rangs structurels en colonne et en ligne sont tous égaux à 2 (existence d'un ensemble de chemins E/S à sommets disjoints, soit $\{(U_1Y_1), (U_2Y_2)\}$).

Le système structuré Σ_1 dont le graphe $\mathcal{G}(\Sigma_1)$ est colonne propre mais n'est pas ligne propre. Si l'on permute les longueurs des arcs U_1Y_1 et U_2Y_2 (fig.b), le système Σ_2 est ligne propre mais n'est plus colonne propre. Si les longueurs de tous les arcs sont égales à 1, (fig.c), le système Σ_3 est à la fois ligne propre et colonne propre.

D- CARACTÉRISATION PAR GRAPHES DES MODES STRUCTURELLEMENT FIXES

L'approche booléenne présentée précédemment convient à la représentation d'un système par des graphes. Le fait de manipuler des "un" et des "zéro" logiques facilite, du point de vue numérique, l'étude de propriétés de systèmes dynamiques. C'est donc un outil mathématique intéressant pour la caractérisation de modes s-fixes. Ce type de mode peut être également interprété en termes d'existence de familles de cycles dans le graphe de Coates associé au système.

Le résultat suivant caractérise le mode s-fixe en $s = 0$ [61].

Théorème 3.5:

Un système décentralisé défini par la matrice structurée:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A & B \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a des modes s-fixes en $s = 0$ si et seulement si dans le graphe de

Coates associé $\mathcal{G}(M)$, une des deux conditions est au moins vérifiée:

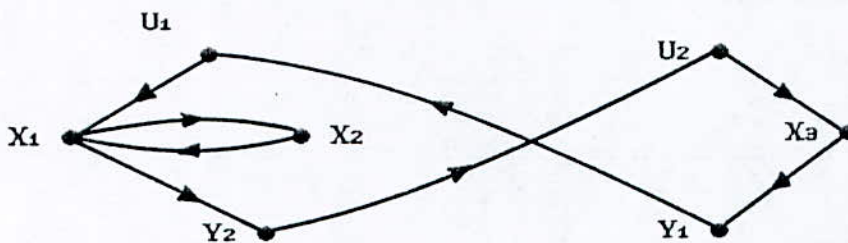
- i) Il n'existe pas d'arc (Y_i, U_j) pour au moins un sommet d'état X tel qu'il y ait à la fois un chemin de U_j à X et de X à Y_i .
- ii) Il n'existe pas de famille de cycles de largeur n , (n étant le nombre d'états du système).

Exemple 3.7:

On considère un système structuré décentralisé (A, B, C) avec la contrainte de décentralisation K où:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}^T, C_2 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, K = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

Le graphe de Coates associé est:



Ce graphe contient seulement une famille de cycles de largeur 2, par conséquent, il existe un mode s-fixe en $s = 0$.

Les cycles sont $\left\{ (U_1 X_1), (X_1 Y_2), (Y_2 U_2), (U_2 X_3), (X_3 Y_1), (Y_1 U_1) \right\}$ et $\left\{ (X_1 X_2), (X_2 X_1) \right\}$.

Remarque:

Si la matrice de retour est $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}$ (on supprime dans le graphe précédent les arcs Y_2U_2 et Y_1U_1 et on ajoute un arc Y_1U_1), le mode s-fixe disparaît car on introduit dans le nouveau graphe une famille de cycles de largeur $n = 3$.

Ces cycles sont $\{(Y_1U_2), (U_2X_3), (X_3Y_1)\}$ et $\{(X_1X_2), (X_2X_1)\}$.

3.7- CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les systèmes structurés dans deux approches: état et transfert avec leurs caractérisations par des graphes orientés. Nous avons montré l'utilité de la représentation par graphes des systèmes structurés pour l'analyse et l'étude de la généricité de certaines de leurs propriétés. Nous avons justifié, par ailleurs, le choix de l'approche transfert de ces systèmes à celle d'état en s'appuyant sur les avantages qu'elle offre, principalement pour l'étude des systèmes complexes. Un autre avantage de l'approche transfert des systèmes structurés est la classe plus vaste des perturbations agissant sur le système [9]. En effet, toutes variations qui ne changent ni l'ordre des zéros à l'infini, ni les interconnexions, ne changent pas le graphe représentant le système. Notons aussi que dans la représentation d'état, l'ordre du système est fixé définitivement.

Concernant le mode structurellement fixe, nous l'avons explicité par l'approche "algèbre de Boole" qui se prête très bien à la description de systèmes structurés et de leurs propriétés (commandabilité et observabilité tant en centralisé qu'en décentralisé). Un autre avantage et non des moindres, est le traitement aisé et précis à l'aide d'un ordinateur (on manipule ici des "un" et des "zéro" uniquement).

Enfin, nous précisons notre contribution principale dans ce chapitre. Elle se situe essentiellement dans l'interprétation par les graphes des zéros à l'infini, des ordres essentiels et des notions de ligne propre et de colonne propre d'une matrice de transfert. Ces différentes caractéristiques jouent un rôle important dans la solubilité des problèmes de découplage et de rejet de perturbations des systèmes structurés qui seront étudiés dans le prochain chapitre. Les démonstrations des propositions peuvent être trouvées dans l'article [11] présenté en annexe 3.

CHAPITRE 4

ASPECTS STRUCTURELS DE PROBLEMES DE COMMANDE

4.1- INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions l'aspect générique de certains problèmes de commande appliqués aux systèmes structurés. Il s'agit du découplage régulier par blocs et par précompensateur, du rejet de perturbations par retour de sorties mesurées et de la commande décentralisée. Les deux premiers problèmes, dont la solvabilité est liée à la structure à l'infini du système à commander, sont abordés par l'approche transfert. Pour le découplage, nous nous intéressons principalement aux cas des systèmes non carrés ou non découplables par retour d'état statique. Le cas du découplage régulier ligne par ligne des systèmes carrés a déjà fait l'objet d'un travail antérieur [9]. Dans la partie relative à la commande décentralisée, nous proposons une technique d'élimination du mode s -fixe dont la méthode de détermination est présentée dans le chapitre précédent.

4.2- DECOUPLAGE REGULIER DES SYSTEMES STRUCTURES

Dans l'approche d'état, le problème du découplage (ligne par ligne) par retour d'état statique régulier des systèmes carrés structurés a été résolu en termes d'existence de couplage entrées sorties (E/S) élémentaire dans le graphe direct associé [48]. Une généralisation aux systèmes non carrés a été donnée dans [35]. En représentation transfert, une solution similaire, basée sur la

structure à l'infini du système à découpler, est donnée dans [9] pour des systèmes carrés. Nous poursuivons ici la même démarche qu'en [9], pour la résolution du découplage par blocs à l'aide d'un retour d'état des systèmes structurés non carrés et du découplage par précompensateur lorsque le système n'est pas structurellement découplable par retour d'état statique.

Dans le but d'alléger l'écriture et de faciliter la lecture, nous employerons souvent les termes de découplage structurel ou de s-découplage et rappelons au préalable quelques résultats de base développés dans [9] et synthétisés dans l'article [23] annexé à ce présent mémoire (annexe 1).

A- PRÉLIMINAIRES SUR LE DÉCOUPLAGE PAR RETOUR D'ÉTAT

Le problème du découplage ligne par ligne par retour d'état statique d'un système carré à paramètres connus a été résolu, en approche transfert, en termes d'égalité de structure à l'infini [29] ou de conditions de rang à l'infini [42]. Le transfert $T(s)$ peut être factorisé comme suit:

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-n_m} \end{bmatrix} \cdot B(s) \quad (4.1)$$

où les n_i sont les ordres des zéros infinis des lignes $T_i(s)$ de $T(s)$; $B(s)$ est une matrice de transfert $(m \times m)$ propre.

Par construction, les lignes $B_i(s)$ de $B(s)$ satisfont:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (B_i(s)) = B_{0i} \neq 0$$

La matrice $B_0 = \left[B_{01}^T, \dots, B_{0m}^T \right]^T$ joue un rôle important dans la résolution du découplage [42] [37]. Le système sera découplable par retour d'état statique $u = Fx + Gv$, G régulière, sur n'importe quelle réalisation de $T(s)$ si et seulement si B_0 est inversible.

Considérons maintenant le cas où le système est structuré et soit $T(s, \lambda)$ la matrice de transfert de ce système. En factorisant le transfert $T(s, \lambda)$ comme précédemment (éq. 4.1), la matrice $B_0 \lambda$ dépendra des paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ supposés indépendants entre eux. Plus exactement, les éléments non nuls de $B_0 \lambda$ sont des polynômes en un certain nombre de paramètres indépendants. Une telle matrice correspond à la matrice des gains à l'infini par ligne de $T(s, \lambda)$.

Ainsi, l'étude du découplage par retour d'état statique d'un système structuré se ramène à celle du rang générique de $B_0 \lambda$ qui peut être interprété à l'aide du graphe associé au système.

Le résultat principal obtenu dans [9], fondé sur la notion de couplage entrées sorties définie dans le chapitre précédent est donné par le théorème suivant:

Théorème 4.1:

Soit un système structuré Σ de matrice de transfert $T(s,\lambda)$, $(m \times m)$. Ce système est découplable par retour d'état statique sur n'importe quelle réalisation minimale de $T(s,\lambda)$ si et seulement si il existe un couplage entrées sorties élémentaire dans le graphe associé $\mathcal{G}(\Sigma)$.

■

Pour illustrer ceci, considérons l'exemple suivant:

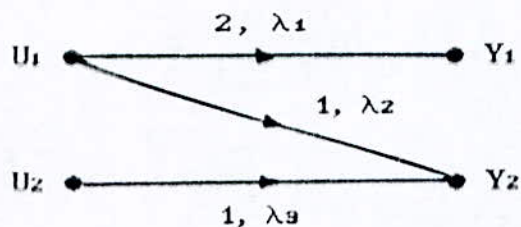
Exemple 4.1:

Soit un système structuré $T(s,\lambda)$ factorisé comme en (4.1),

$$T(s,\lambda) = \begin{bmatrix} s^{-2} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

La matrice $B_0\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

est génériquement de rang plein et le système sera découplable par retour d'état statique. Cette affirmation se vérifie également sur le graphe associé représenté ci-après:



Il existe en effet un couplage entrées sorties élémentaire, soit :

$$\{(U_1 Y_1), (U_2 Y_2)\}.$$

Si la longueur de l'arc $(U_2 Y_2)$ était de 2, le système ne serait plus s -découplable.

Remarque;

Le résultat sur le découplage par retour d'état statique basé sur l'égalité des structures à l'infini globale et par ligne du système à découpler (introduit dans [35] pour le cas non structuré), se traduit facilement en termes de graphes en utilisant la caractérisation par graphes de la structure à l'infini. Il constitue la base du paragraphe qui suit :

B- DÉCOUPLAGE STRUCTUREL PAR BLOCS

Le problème du découplage par blocs se formule comme suit: [34]
 Soient $T(s, \lambda)$ une matrice rationnelle propre $(p \times m)$ et (p_1, \dots, p_k) un ensemble d'entiers positifs non nuls satisfaisant $\sum p_i = p$.
 Le système de matrice de transfert $T(s, \lambda)$ est dit blocs découplé

relativement à la partition p_i si il existe un ensemble d'entiers non nuls (m_1, \dots, m_k) satisfaisant $\sum m_i = m$ tel que $T(s, \lambda)$ ait la forme diagonale par blocs suivante:

$$T(s, \lambda) = \begin{bmatrix} T_{11}(s, \lambda) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & T_{kk}(s, \lambda) \end{bmatrix}$$

où: $T_{ii}(s, \lambda) \in \mathbb{R}^{p_i \times m_i}$ et $T_{ij}(s, \lambda) = 0$ pour $i \neq j$.

□

Lorsque la matrice de transfert est décomposée relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) , c'est à dire:

$$T(s, \lambda) = \left[T_1(s, \lambda), \dots, T_k(s, \lambda) \right]^T$$

une condition de découplage par blocs est donnée, dans le cas classique, par le théorème suivant: [33] [34]

Théorème 4.2:

Soient $T(s)$ une matrice de transfert propre $(p \times m)$ et (p_1, \dots, p_k) un ensemble donné d'entiers positifs non nuls satisfaisant $\sum_{i=1}^k p_i = p$. Le système décrit par $T(s)$ est découplable par blocs relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) par retour d'état statique $u = Fx + Gv$ (G régulière) si et seulement si la somme des zéros à l'infini de $T(s)$ est égale à la somme des zéros à l'infini des $T_i(s)$, ($i = 1, \dots, k$).

Lorsque le système est structuré, nous nous intéressons à la solution générique de ce problème. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ (Λ = ensemble des paramètres), le théorème précédent reste valable. En utilisant la caractérisation par graphes des zéros à l'infini du système, pour presque toutes les valeurs de λ , on obtient le corollaire suivant:

Corollaire:

Soit Σ_p un système structuré à p sorties composés des sous-systèmes structurés Σ_{p_k} à p_k sorties relativement à la partition (p_1, \dots, p_k) . Σ_p est s -découplable par blocs à l'aide d'un retour d'état statique $u = Fx + Gv$ (G régulière) si et seulement si la structure à l'infini de Σ_p est donnée par la somme des zéros à l'infini des Σ_{p_k} .

En termes de graphes, la solution au découplage structurel par blocs est donnée par le théorème suivant:

Théorème 4.3:

Soient un système structuré Σ_p à p sorties, dont le graphe associé est $\mathcal{G}(\Sigma_p)$, et p_1, \dots, p_k un ensemble d'entiers non nuls satisfaisant $\sum p_i = p$. Soit Σ_{p_i} le sous-système structuré à p_i sorties et $\mathcal{G}(\Sigma_{p_i})$ son graphe associé. Alors, Σ_p est s -découplable

par blocs diagonaux à l'aide d'un retour d'état statique régulier $u = Fx + Gv$ relativement à la partition p_1, \dots, p_k si et seulement si:

$$L_p = \sum_{i=1}^k L_{p_i}$$

où: L_p et L_{p_i} sont respectivement la somme minimale des longueurs d'un ensemble de p chemins E/S disjoints dans $\mathcal{G}(\Sigma_p)$ et la somme minimale des longueurs d'un ensemble de p_i chemins E/S disjoints dans $\mathcal{G}(\Sigma_{p_i})$.

■

Preuve:

De l'interprétation graphique des zéros à l'infini on a:

$$\sum_{i=1}^p n_i = L_p$$

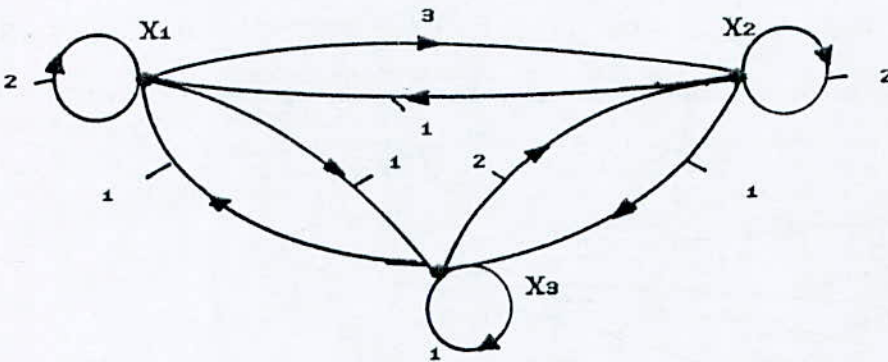
En appliquant cette même caractérisation aux sous-systèmes définis par la partition p_1, \dots, p_k et sachant que $\sum p_i = p$, on obtient la condition du théorème. Par conséquent, le système Σ_p est découplable.

Remarque:

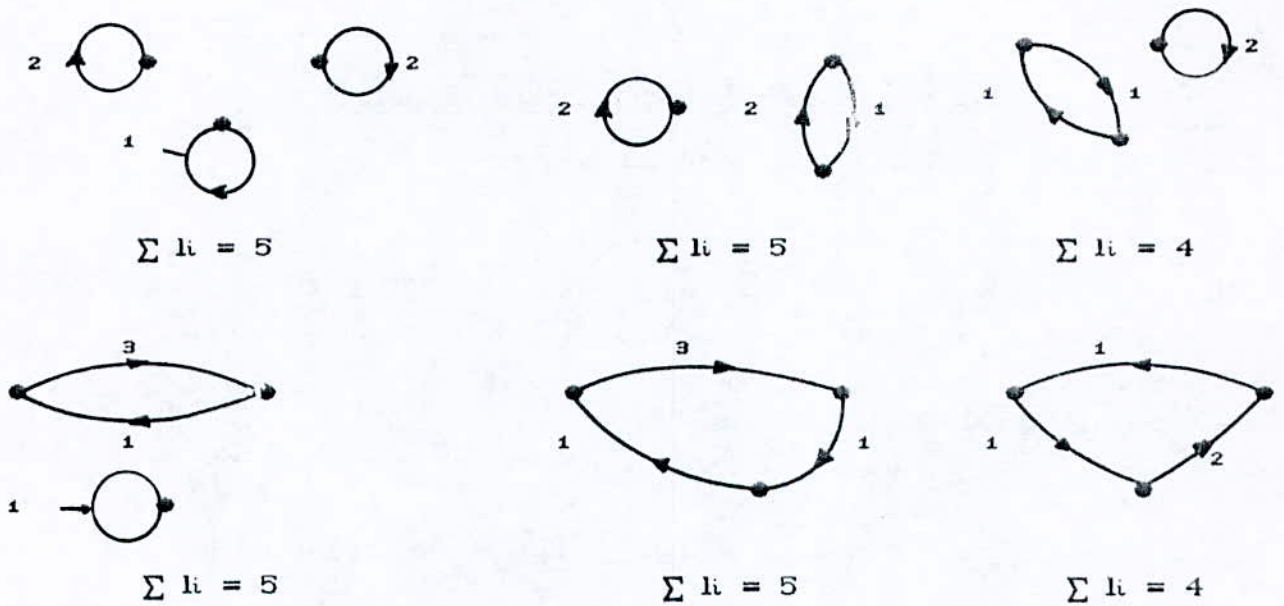
Si la partition est telle que $p_1 = \dots = p_k$ (découplage ligne par ligne), le résultat donné dans [35], en représentation d'état reste valable dans l'approche transfert.

Le rang structurel de $T(s,\lambda)$ étant égal à 3 (il existe un ensemble de 3 chemins E/S à sommets disjoints, soit par exemple, U_1Y_1 , U_2Y_2 et U_3Y_3), le système a donc 3 zéros à l'infini d'ordres respectifs 1, 1 et 2. Ceci peut être vérifié sur le sous-graphe partiel obtenu en supprimant le sommet U_1 et tous les arcs partant de ce sommet. Pour mieux expliciter la recherche des chemins E/S à sommets disjoints, nous utiliserons le graphe de Coates associé à ce sous-graphe partiel et déterminerons des familles de cycles de largeur maximale ainsi que leurs longueurs (somme des longueurs des arcs de la famille).

Le graphe de Coates est obtenu en "repliant" la sortie i ($i=1,2,3$) sur l'entrée i , soit confondues en le sommet X_i . On a:



L'ensemble des familles de largeur 3 données avec leur longueur respective est illustré ci-après:



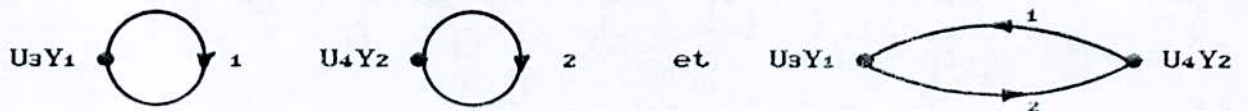
La longueur minimale de ces familles de cycles est $L_p = 4$.

Effectuons maintenant la même opération sur les sous-graphes $\mathcal{G}(\Sigma p_1)$ et $\mathcal{G}(\Sigma p_2)$ associés respectivement à $T_1(s, \lambda)$ et $T_2(s, \lambda)$.

Le graphe de Coates associé au sous-système Σp_1 et qui traduit un ensemble de 2 chemins à sommets disjoints (dans le graphe direct correspondant à Σp_1) dont la longueur totale est égale à 6, est:



Les familles de cycles (au nombre de 2) sont:



La longueur minimale de ces deux familles de cycles est $L_{p1} = 3$.

Les graphes de Coates associé aux différents mineurs de $Tz(s,\lambda)$ dont le zéro à l'infini est minimal sont:



et leur longueur minimale est $Lp_2 = 1$.

Ainsi, nous avons $Lp = Lp_1 + Lp_2 = 4$. Le système Σ est donc structurellement découplable par blocs relativement à la partition $(2, 1)$ à l'aide d'un retour d'état statique.

Remarque:

Nous avons vu la complexité du graphe direct et la difficulté de trouver le nombre de chemins et de plus courts chemins E/S à sommets disjoints, bien que des algorithmes de théorie des graphes existent. Nous avons donc travaillé sur des graphes de Coates sur lesquels nous pouvons déterminer à l'avance le nombre de familles de cycles, donné par le "permanent" de la matrice correspondante. Le permanent est défini exactement comme le déterminant sauf que tous les termes sont pris avec un signe positif [18]. Dans ce problème de découplage, le graphe de Coates est donc plus intéressant que le graphe direct du point de vue algorithmique.

C- DÉCOUPLAGE STRUCTUREL PAR PRÉCOMPENSATEUR

Ce problème a été abordé dans [9] [10], et considéré comme un cas particulier du découplage structurel des systèmes carrés en cascade. La question qui se pose est la suivante: existe-t-il un précompensateur qui rend s-découplable un système qui ne l'est pas par retour d'état statique? Il a été montré qu'un tel compensateur doit être lui-même s-découplable et qu'il suffit de retarder les entrées du système à découpler [9]. Dans le présent paragraphe, nous utiliserons les ordres essentiels pour calculer les valeurs minimales à affecter aux retards sur les entrées. Nous montrerons également l'équivalence de notre résultat avec celui de la commande adaptative par modèle de référence développé dans [5].

Une question importante dans le découplage par précompensateur, problème toujours solvable dans le cas non structuré, est la recherche d'une dimension minimale pour le précompensateur, autrement dit qui donne un transfert global découplé avec un degré de Mac Millan minimal. Puisque les ordres essentiels donnent la structure à l'infini minimale qui peut être atteinte pour un système découplé [28], le retard minimal sur une entrée sera donc égal à la différence entre l'ordre essentiel et le zéro infini correspondant de $T(s)$.

Les travaux dans le domaine de l'adaptatif multivariable ont montré que les seuls systèmes qui peuvent être commandés par la

technique MRAC (Model Reference Adaptive Control) sont ceux dont l'interacteur est diagonal, autrement dit, découplable par retour d'état) [36]. Cette limitation a été levée en utilisant un précompensateur $C(s)$ diagonal de façon à obtenir un interacteur diagonal pour le système global $T(s).C(s)$ sur lequel pourra être appliquée la commande MRAC [30]. Ce résultat a été repris par une approche purement graphique qui permet d'avoir un précompensateur optimal [5]. L'algorithme qui a été développé dans [5] améliore certes les résultats déjà existants mais ne s'applique qu'aux matrices de transfert dont les éléments sont simples (non interconnectés) et décrits par une seule fonction de transfert. Nous noterons la similitude de ce résultat avec le notre basé sur la seule connaissance de la structure à l'infini. Nous donnons ci-dessous un algorithme plus simple et performant applicable à des systèmes interconnectés. Cet algorithme se prête à un traitement algébrique ou graphique.

ALGORITHME 1:

Etape 0: Initialisation (introduire le nombre d'entrées m , de sorties p et la matrice des gains à l'infini Λ).

Associer un graphe $\mathcal{G}(\Sigma\Lambda)$.

Etape 1: Test du rang de Λ (existence d'un ensemble de p chemins E/S à sommets disjoints); si rang $\Lambda \neq p$, aller à 5.

Etape 2: Calcul des p zéros à l'infini n_i ($i=1,\dots,p$) (d'après les propositions 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 ou la proposition 3.1).

Etape 3: Calcul des p ordres essentiels n_i^e ($i=1,\dots,p$) (d'après la proposition 3.2 ou les définitions 2.3 et 2.4).

Etape 4: Calcul et affectation des retards

Calculer la différence $d = \sum n_i^e - \sum n_i$ et l'affecter aux entrées du système qui correspondent aux mineurs qui ont donné naissance au zéro infini n_i .

Etape 5: Fin

Exemple 4.3:

Considérons le système structuré donné à l'exemple 3.5.

Les ordres infinis du système sont $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$ et ceux par ligne sont $n_1^r = n_2^r = 1$. Par conséquent, le système n'est pas s-découplable par retour d'état statique.

On vérifie aisément sur le graphe biparti associé, l'absence d'un ensemble de deux plus courts chemins E/S à sommets disjoints (tous les plus courts chemins E/S allant vers les sorties Y_1 et Y_2 proviennent de l'entrée U_1).

Les ordres essentiels étant $n_1^e = n_2^e = 2$, les retards sur les entrées seront 1 et 0. La valeur 1 sera affectée à l'entrée U_1 car le zéro à l'infini n_1 est issu des transferts relatifs à l'entrée U_1 , soient les mineurs de $T(s)$: $Y_1(s)/U_1(s)$ et/ou $Y_2(s)/U_1(s)$.

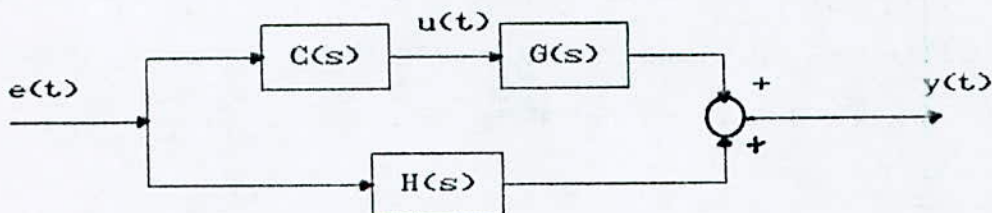
4.3- REJET DE PERTURBATIONS DANS LES SYSTEMES STRUCTURES

Le problème du rejet de perturbations a été résolu, dans le cas non structuré, par différentes approches et dans toutes ses variantes (retour d'état et retour de sorties mesurées) [15] [19]. Dans le cas structuré, seul le rejet par retour d'état a été étudié par l'approche d'état [26]. Notons que ce problème a été également étudié dans [62] en utilisant le graphe de Coates. Nous considérons ici, l'approche transfert du rejet de perturbations dans les systèmes structurés, principalement par retour de sorties mesurées. Pour alléger l'écriture, nous utiliserons aussi l'abréviation "rejet structurel par R.S.M". Tous les résultats sont donnés sans démonstration (détail dans [13] ou annexe 5).

Nous rappelons, au préalable, la formulation du problème et quelques résultats préliminaires sur le rejet par retour d'état .

A- REJET DE PERTURBATION PAR RETOUR D'ÉTAT

Soit un système $G(s)$ perturbé par un signal externe $e(s)$ à travers un canal $H(s)$ (figure ci-dessous)



Le problème consiste à trouver un compensateur $C(s)$ tel que la perturbation $e(t)$ n'ait aucune influence, à travers $H(s)$, sur la sortie $y(t)$. Lorsque $e(t)$ est mesurable, le problème se ramène à la résolution de l'équation: $G(s).C(s) = - H(s)$.

Une condition d'existence d'une solution par retour d'état est la suivante: (lemme de verghese) [15]

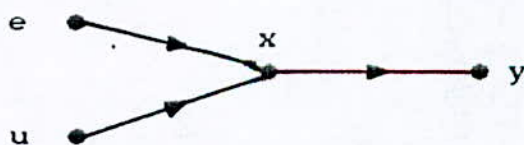
- i) $G(s)$ et $[G(s),H(s)]$ ont le même rang
- ii) $G(s)$ et $[G(s),H(s)]$ ont même somme des ordres des zéros infinis

■

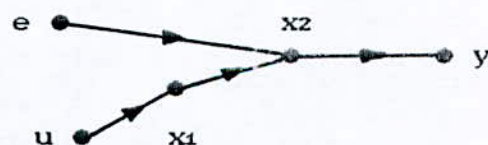
En structuré, le rejet sera possible si et seulement si les graphes associés respectivement au système global $\mathcal{G}(\Sigma p \Lambda)$ et au système sans perturbations $\mathcal{G}(\Sigma \Lambda)$ ont:

- même nombre maximal r de chemins E/S disjoints
- même nombre minimal de sommets d'état touchés par un ensemble de r chemins E/S disjoints [26].

exemple 4.4:



a) Rejet possible



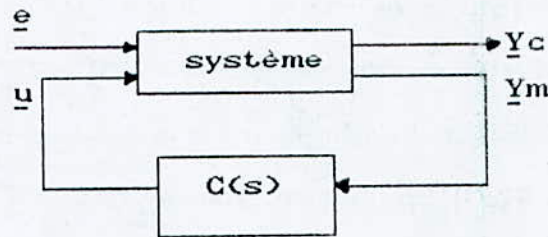
b) Rejet impossible

Lorsque la perturbation e n'est pas mesurable, la condition de Verghese devient: [15]

$s^{-1}G(s)$ et $[s^{-1}G(s),H(s)]$ ont même somme des zéros infinis.

B- REJET DE PERTURBATIONS PAR RETOUR DE SORTIES MESURÉES (R.S.M)

C'est le cas le plus complexe où l'information dont on dispose sur le système est obtenue à travers une sortie mesurée y_m (figure ci-dessous).



Les vecteurs \underline{e} ($dx1$), \underline{u} ($mx1$), \underline{y}_c ($px1$) et \underline{y}_m ($lx1$) représentent respectivement, les entrées de perturbations, les entrées de commande, les sorties commandées et les sorties mesurées.

Le système est décrit par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} Y_c \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & H(s) \\ M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix} = T(s) \cdot \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où $G(s)$, $H(s)$, $N(s)$ sont des matrices de transfert propres et $M(s)$ strictement propre, de dimensions appropriées. $T(s)$ est la matrice de transfert globale du système.

La commande étant du type $U(s) = C(s).Y_m(s)$ avec $C(s)$ propre, on désire que le transfert $Y_c(s)/E(s)$ soit nul, soit:

$$G(s).C(s) \left[I - M(s).C(s) \right]^{-1} . N(s) + H(s) = 0$$

ou bien:

$$G(s).X(s).N(s) = - H(s) \text{ avec } X(s) = C(s).[I - M(s)C(s)]^{-1} .$$

Il a été montré dans [15] [20], pour le cas non structuré, que le problème est solvable si on vérifie des conditions faisant intervenir la structure à l'infini du produit tensoriel des matrices $G(s)$ et $N(s)$, soit les mêmes zéros à l'infini pour les matrices:

$$\left[N^T(s) \otimes 0(s) , h(s) \right] \text{ et } \left[N^T(s) \otimes G(s) , 0 \right]$$

où:

$$h(s) = \text{colonne} \left[H_1^c(s), H_2^c(s), \dots, H_d^c(s) \right]$$

Notons que d'autres conditions nécessaires et/ou suffisantes sont données dans la littérature [15].

Afin d'étudier le rejet par R.S.M dans les systèmes structurés, nous supposerons la matrice $T(s)$ structurée, par conséquent les sous-matrices $G(s)$, $N(s)$, $H(s)$ et $M(s)$ le sont également et chacun de leurs éléments est factorisé à l'infini. Différents cas se présentent selon que $G(s)$ est ligne propre et/ou $N(s)$ colonne propre ou lorsque $H(s)$ est régulière. Les détails se trouvent dans l'article [13] (annexe 5).

1) Cas de $G(s)$ ligne propre et $N(s)$ colonne propre

On rappelle que la notion de ligne propre est relative à la découplabilité par retour d'état et que celle de colonne propre est relative à la découplabilité par injection de sortie [20].

Dans ce cas, la condition de rejet structurel est donnée par:

Théorème 4.4:

Soit $\Sigma_{p\Lambda}$ le système structuré de matrice de transfert $T(s,\lambda)$ et $\mathcal{G}(\Sigma_{p\Lambda})$ son graphe associé. Lorsque $G(s,\lambda)$ est à ligne propre et $N(s,\lambda)$ à colonne propre, le rejet de perturbations par R.S.M dans les systèmes structurés est solvable si et seulement si:

i) Lorsqu'il existe un chemin entre un sommet de perturbations e_j et un sommet de sortie y_{ci} , il est nécessaire d'avoir au moins un autre chemin entre ce même sommet e_j et tous les sommets de sortie mesurée y_m et un chemin entre au moins un sommet d'entrée u et le sommet de sortie y_{ci} .

ii) La longueur du plus court chemin entre la perturbation e_j ($j=1,\dots,d$) et la sortie y_{ci} , ($i=1,\dots,p$) est supérieure ou égale à la somme des longueurs du plus court chemin reliant le sommet e_j aux sommets de sorties mesurées y_m et le plus court chemin reliant les sommets d'entrées u au sommet y_{ci} .

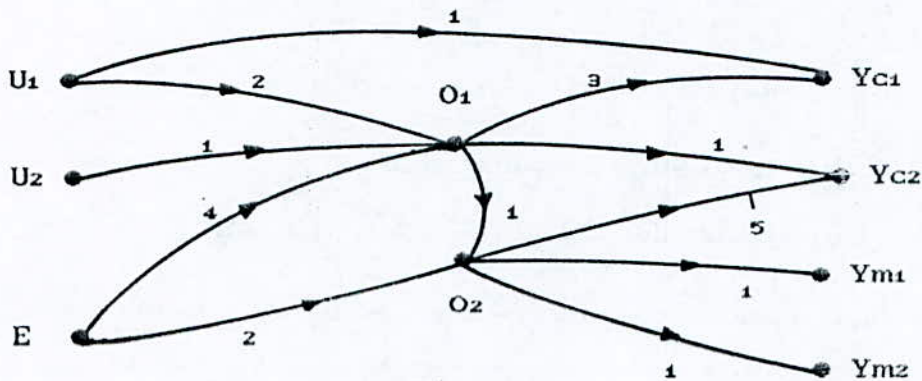
■

Remarque:

Dans le cas où la matrice $H(s,\lambda)$ est génériquement de rang plein ($r = d$), une condition nécessaire de rejet avec retour de mesures est que la longueur minimale totale d'un ensemble de p chemins E/S disjoints dans $\mathcal{G}(\Sigma_H)$ doit être supérieure ou égale à la somme des longueurs minimales totales d'un ensemble de p chemins E/S disjoints respectivement dans $\mathcal{G}(\Sigma_G)$ et $\mathcal{G}(\Sigma_N)$.

Exemple 4.5:

Soit le graphe $\mathcal{G}(\Sigma p\lambda)$ ci-dessous associé au système structuré interconnecté de matrice de transfert $T(s,\lambda)$. Le système possède deux commandes U_1 et U_2 (soit $m = 2$), deux sorties régulées Y_{c1} et Y_{c2} (soit $p = 2$), une perturbation E (soit $d = 1$) et deux sorties mesurées Y_{m1} et Y_{m2} (soit $l = 2$).



- Le transfert $G(s,\lambda)$ entre les entrées U_i et Y_{ci} ($i = 1, 2$) est ligne propre puisqu'il existe dans le graphe correspondant (obtenu du graphe précédent en supprimant les sommets E , Y_{m1} et Y_{m2} et les arcs qui leurs sont incidents), un couplage entrées sorties élémentaire $\{(U_1Y_{c1}) \text{ et } (U_2O_1), (O_1Y_{c2})\}$. Sa longueur totale vaut 3.

- Le transfert $N(s,\lambda)$ entre la perturbation E et les sorties mesurées Y_{m1} et Y_{m2} est colonne propre puisque dans son graphe associé, il existe un plus court chemin allant de E à Y_{m1} ou Y_{m2} , soit $\{(EO_2), (O_2Y_{m1})\}$ ou $\{(EO_2), (O_2Y_{m2})\}$. Chacun de ces chemins a une longueur égale à 3.

L'application du théorème 4.4 nécessite la connaissance des longueurs des plus courts chemins (s'il en existe) entre les différentes entrées de perturbation et de commande et les différentes sorties régulées et mesurées.

- Pour la sortie Y_{c1} , la longueur du plus court chemin reliant E à Y_{c1} vaut 7, soit celle du chemin $\{(E0_1), (O_1Y_1)\}$. De plus, le plus court chemin reliant E à Y_{mi} ($i=1,2$) est de longueur 3 (par exemple $\{(E0_1), (O_1Y_{m1})\}$) et celui reliant U_j ($j=1,2$) à Y_{c1} est de longueur 1, soit $\{U_1Y_1\}$. Leur somme est donc inférieure à 7.

- Pour la sortie Y_{c2} , la longueur du plus court chemin reliant E à Y_{c2} est égale à 5, soit celle du chemin $\{(E0_1), (O_1Y_{c2})\}$. La somme des longueurs des plus courts chemins allant respectivement de E à Y_{mi} ($i=1,2$) et de U_j ($j=1,2$) à Y_{c2} vaut également 5, soit celles, par exemple, des chemins $\{(E0_2), (O_2Y_{m1})\}$ et $\{(U_1O_1), (O_1Y_{c2})\}$.

Le théorème 4.4 étant vérifié, le rejet structurel par retour de sorties mesurées est donc possible.

2) Cas où seul $G(s)$ ou $N(s)$ est découplable

Les problèmes de rejet de perturbations par RSM lorsque seul $G(s)$ est ligne propre ou seul $N(s)$ est colonne propre étant duaux, nous allons seulement considérer le cas où $G(s)$ est ligne propre. Lorsque le système étudié n'est pas structuré, la solution de ce problème est donnée par le lemme suivant: [15] [20]

Lemme:

Soit le système (4.2) de matrice de transfert $T(s)$ avec $G(s)$ ligne propre. Le rejet de perturbations par R.S.M est solvable si et seulement si les matrices:

$$\left[N(s), s^{\xi_1^r} \cdot H_1^r(s), \dots, s^{\xi_p^r} \cdot H_p^r(s) \right]^T \quad \text{et} \quad \left[N(s), 0 \right]^T$$

ont les mêmes zéros à l'infini.

où: ξ_i^r : ordre du zéro infini de la i -ème ligne de $G(s)$

H_i^r : i -ème ligne de $H(s)$ ($i = 1, 2, \dots, p$)

■

Dans le cas où $T(s)$ est structurée, les conditions du lemme restent valides et s'interprètent à l'aide de graphes comme suit:

Proposition 4.1:

Soient le système structuré de matrice de transfert $T(s, \lambda)$ dont le graphe associé est $\mathcal{G}(\Sigma_T)$ et $G(s, \lambda)$ une sous-matrice à ligne propre. Soit $\mathcal{G}(\Sigma'_T)$ le graphe obtenu de $\mathcal{G}(\Sigma_T)$ en faisant apparaître la structure à l'infini par ligne de $G(s, \lambda)$ et $\mathcal{G}(\Sigma_{Tp})$ le graphe sans les sommets de sorties régulées Y_c . Alors, le rejet structurel par R.S.M est solvable si et seulement si:

- i) le nombre maximal de r chemins E/S disjoints dans $\mathcal{G}(\Sigma'_T)$ est le même que dans $\mathcal{G}(\Sigma_{Tp})$
- ii) la somme minimale des longueurs de ces r chemins E/S disjoints est la même dans les graphes $\mathcal{G}(\Sigma'_T)$ et $\mathcal{G}(\Sigma_{Tp})$.

■

3) Cas général (G(s) et N(s) ne sont pas découplables)

Nous présentons ici deux approches pour résoudre ce problème. La première consiste à considérer le compensateur C(s) comme deux sous-systèmes en série sans modifier sa structure à l'infini, soit $C(s,\lambda) = C_1(s,\lambda).C^*(s,\lambda).C_2(s,\lambda)$, de façon à se ramener au cas 1. Nous obtenons ainsi: $N^*(s,\lambda) = C_1(s,\lambda).N(s,\lambda)$ colonne propre et $G^*(s,\lambda) = C_2(s,\lambda).G(s,\lambda)$ ligne propre. Ceci est possible en considérant $C_1(s,\lambda)$ et $C_2(s,\lambda)$ comme des précompensateurs et en appliquant les résultats développés dans le paragraphe précédent 4.2.C. La seconde approche utilise le produit tensoriel: [40]

$$\left[N^T(s,\lambda) \otimes G(s,\lambda) \right].c(s,\lambda) = - h(s,\lambda)$$

où: $c(s,\lambda) = \text{col} (C_1^c, C_2^c, \dots, C_l^c)$ et $h(s,\lambda) = \text{col}(H_1^c, H_2^c, \dots, H_d^c)$.

Cette seconde méthode n'est pas générale dans le sens où le résultat du produit tensoriel de deux matrices structurées n'est pas forcément une matrice structurée. Seules des conditions nécessaires peuvent être obtenues lorsque $G(s,\lambda)$ et $N(s,\lambda)$ sont carrées et inversibles. Dans cette hypothèse, le rang du produit tensoriel de $G(s,\lambda) \otimes N(s,\lambda)$ est égal à $n.m$ si $G(s,\lambda)$ et $N(s,\lambda)$ ont pour dimensions respectives $(n \times n)$ et $(m \times m)$ [40].

Une condition nécessaire de rejet structurel par R.S.M est donnée par le théorème suivant:

Théorème 4.5:

Une condition nécessaire de rejet des perturbations par R.S.M lorsque $G(s,\lambda)$ et $N(s,\lambda)$ sont carrées régulières est que le nombre maximal de chemins E/S à sommets disjoints dans les graphes $\mathcal{G}_K(\Sigma_{\Lambda p})$ et $\mathcal{G}_K(\Sigma_{\Lambda})$ doit être le même.

$\mathcal{G}_K(\Sigma_{\Lambda p})$ est le graphe associé à $\left[N^T(s,\lambda) \otimes G(s,\lambda), h(s,\lambda) \right]$.

■

Remarque:

La condition du théorème 4.5 est une condition de préservation de rang du lemme de Verghese [71] qui reste valable en structuré. Si les transferts $N(s,\lambda)$ et $G(s,\lambda)$ ne sont pas carrés mais de rang plein, le rang du produit tensoriel $N^T(s,\lambda) \otimes G(s,\lambda)$ n'est pas toujours plein. Ceci est illustré par le contre exemple suivant:

Contre-exemple:

Soient $G(s,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ et $N(s,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$. Si l'on suppose les λ_i ($i = 1, \dots, 4$) indépendants, la matrice $\begin{bmatrix} G(s,\lambda) & N(s,\lambda) \end{bmatrix}$ est structurée alors que $N^T(\lambda) \otimes G(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_3 & \lambda_1\lambda_4 \\ \lambda_2\lambda_3 & \lambda_2\lambda_4 \end{bmatrix}$ ne l'est pas puisque le déterminant est nul pour tout λ_i .

4.4- COMMANDE DECENTRALISEE DES SYSTEMES STRUCTURES

La commande décentralisée est une approche utilisée pour la conduite et la stabilisation des systèmes complexes mais certains modes qui restent invariants sous la contrainte de décentralisation gênent beaucoup la commande. Des travaux de recherche ont été consacrés à la caractérisation de ces modes [1] [2] [61] mais également à leur élimination [4] [77]. Il a été montré dans [78] que l'apparition de ces modes est due, soit à une dépendance entre les paramètres du système, soit à la structure même du système. Dans le premier cas, de faibles variations sur les paramètres peuvent faire disparaître le mode fixe. Le second cas, le plus intéressant, a suscité un grand nombre de travaux [64] [72] [71]. Le mode dit s-fixe a été caractérisé à la fois à l'aide de l'algèbre linéaire [1], l'algèbre de Boole [52] et la théorie des graphes [57] [64].

Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode d'élimination de ce type de mode en utilisant conjointement l'algèbre de Boole et un échange minimum d'information entre les stations de commande. La méthode de détermination des modes s-fixes par la technique de l'algèbre de Boole a été présentée dans le chapitre précédent pour le cas de deux stations de commande. Nous présentons ci-dessous la généralisation à plusieurs stations [52].

Théorème 4.6:

Un système décentralisé est s -commandable et s -observable sous une structure de commande décentralisée si et seulement si il ne possède pas de modes s -fixes décentralisés et que le vecteur booléen L_I^* (commun à la commandabilité et l'observabilité structurale) associé à chaque station de commande I ($I = 1, 2, \dots, N$) est un vecteur unité.

Le vecteur L_I^* est obtenu par l'intersection de sous-espaces élargis s -commandable K_I^* et s -observable M_I^* relatifs à la station de commande I en coopération avec toutes les autres stations. ■

Sachant que dans un système de commande décentralisée, il est associé à chaque sous-système, une matrice de retour K_{ii} appartenant aux blocs diagonaux de K , l'élimination d'un mode fixe qui apparait comme une conséquence de la structure de K peut être obtenue par modification de ce retour de sortie et ce, en ajoutant des liaisons d'échange réduit d'informations entre les sous-systèmes à travers les retours de sorties K_{ii} . Cette idée a été introduite dans [4] pour les systèmes non structurés et utilise la notion de dominance diagonale par blocs de la matrice de dynamique du système bouclé, soit de $A+BK$. L'approche que nous développons ici consiste d'abord à définir les stations de commande entre lesquelles la liaison d'échange doit être ajoutée (bloc K_{ij}) puis de minimiser cet échange d'information lorsque les sous-systèmes sont multivariables.

Le résultat est donné par le théorème suivant:

Théorème 4.7:

Soit un système décentralisé à N stations de commande. Un mode s -fixe est éliminé par échange d'information entre les N stations de commande si et seulement si: il existe au moins, un I et un J pour lesquels le bloc K_{IJ} ne contenant pas d'éléments nuls, est ajouté à la matrice de retour K . Les indices I et J doivent être tels que:

$$k_{I_s}^{*} = 0, \quad k_{k_I}^{-} = 1 \quad \text{et} \quad k_{m_J}^{-} = 1$$

$I \neq J$; $I, J \in (1, 2, \dots, N)$ et $k \in (1, 2, \dots, n$: $n =$ nombre d'états).

$k_{k_I}^{-}$ et $k_{m_J}^{-}$ représentent les k -èmes éléments des vecteurs K_I et M_J .

$k_{I_s}^{*}$ est le k -ème élément nul dans le vecteur L_S^{*} de caractérisation du mode s -fixe décentralisé ($L_S^{*} = V L_I^{*}$).

■

En considérant qu'une station de commande I a r_I entrées et p_I sorties, l'algorithme ci-dessous résume les différentes étapes de recherche et d'élimination du mode structurellement fixe.

ALGORITHME 2:

Partie A: Commande centralisée:

Etape 1: Tester la s -commandabilité et la s -observabilité en centralisé. Si le système est s -commandable et s -observable passer à l'étape 2. Sinon, Stop puisqu'il existe un mode s -fixe en centralisé.

Partie B: Commande décentralisée:

Etape 2: Calculer pour chaque station I de commande, les vecteurs de commandabilité par chaque entrée K_I^h ($h = 1, 2, \dots, r_I$) et d'observabilité $M_I^l T$ ($l = 1, 2, \dots, p_I$).

Etape 3: Calcul des vecteurs K_I et M_I^T lorsque les stations sont multi-entrées multi-sorties.

$$K_I = V K_I^h \text{ et } M_I^T = V M_I^l T$$

$$I = 1, 2, \dots, N ; h = 1, 2, \dots, r_I ; l = 1, 2, \dots, p_I$$

Etape 4: Calcul du vecteur de caractérisation du mode s -fixe L_S^* en décentralisé. $L_S^* = V L_I^*$, $I = 1, 2, \dots, N$

Etape 5: Si L_S^* contient un élément nul, il existe un mode s -fixe Sinon Stop (pas de mode s -fixe en décentralisé).

Partie C: Elimination:

Etape 6: Soit ${}^k l_s^*$ l'élément nul de L_s^* , ($k = 1, 2, \dots, N$). Trouver les indices I et J pour lesquels les composantes des vecteurs K_I et M_J^T sont égales à 1 (${}^k \bar{k}_I = 1$ et ${}^k \bar{m}_J = 1$).

Etape 7: Ajouter dans la matrice de retour K, le bloc plein K_{IJ} .

Etape 8: Pour avoir un échange minimum, rechercher dans la station I l'entrée U_I^h pour laquelle ${}^k \bar{k}_I^h = 1$ et dans la station J, la sortie Y_J^l pour laquelle ${}^k \bar{m}_J^l = 1$ puis mettre tous les éléments de K_{IJ} à zéro sauf l'élément k_{hl}^{IJ} qui assure un échange d'information entre les stations I et J. Stop.

Etape 9: Fin

■

Exemple 4.5:

Reprenons le système décentralisé de l'exemple 3.3 pour lequel nous avons déjà montré qu'il existe un mode s-fixe décentralisé correspondant au deuxième mode d'après le vecteur de caractérisation $L_s^* = [1 \quad 0 \quad 1]$. Pour l'éliminer, nous appliquons l'algorithme à partir de l'étape 6. Les vecteurs de s-commandabilité K_I et s-observabilité M_J^T par chaque station sont:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les indices I, J vérifiant la condition de l'étape 6 sont $I=2, J=1$. Le bloc qu'il faut ajouter dans la matrice de retour K (ici un scalaire car les stations sont mono-entrée, mono-sortie) est l'élément K_{21} , autrement dit il faut ajouter une liaison entre la sortie Y_1 et l'entrée U_2 . On élimine ainsi le mode s -fixe en créant une famille de cycles de largeur $n = 3$.

Pour un échange minimum entre les stations, on peut supprimer les retours K_{11} et K_{22} et laisser seulement l'élément K_{21} .

La matrice de retour de sortie qui rend le système de commande décentralisée s -commandable et s -observable sera:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}.$$

4.5- CONCLUSION

Ce chapitre constitue la contribution la plus importante dans ce mémoire et regroupe les principaux résultats originaux que nous avons développé. Notre approche transfère des systèmes structurés a permis une interprétation en termes de graphes pour un ensemble d'invariants et de problèmes classiques de commande. Les solutions

de ces problèmes appliqués aux systèmes linéaires à paramètres connus et basées sur la structure à l'infini de ces systèmes, font maintenant partie du jargon de l'automaticien.

D'autres invariants comme les ordres essentiels par blocs introduits dans [25] peuvent être exploités pour trouver les compensateurs d'ordres minimaux qui découplent par blocs. Ces différents aspects structurels peuvent être aussi appliqués au problème du découplage non régulier ligne par ligne ou par blocs, tant en représentation transfert [67] [25], qu'en représentation d'état [30] [31]. Les notions d'espaces presque-invariants introduites par Willems [74] [75], permettent aussi d'interpréter la structure à l'infini [51]; elles peuvent donc être exploitées pour la résolution des problèmes du rejet de perturbations et du découplage des systèmes structurés. Notons aussi l'utilisation récente des presque-invariants dans la résolution du problème de la commande décentralisée [43].

CHAPITRE 5

APPROCHE STRUCTURELLE POUR LA SYNTHESE DE STRUCTURES DE REGULATION

5.1- INTRODUCTION

Dans cette partie, on s'intéresse à l'obtention de toutes les boucles de régulation possibles sur de grands systèmes tels que les procédés chimiques. Bien que la plupart de ces systèmes sont de nature multivariable, les boucles de régulation monovariabiles restent encore valables pour la plupart des cas à condition qu'elles soient bien conçues. Des techniques éprouvées sont donc nécessaires pour le développement de schémas de commande monovariabiles, principalement lorsque les modèles des systèmes sont peu ou mal connus. Une méthodologie de synthèse de ces boucles à partir de la connaissance de la matrice structurée du système (donnée sous forme d'état (3.1)) est présentée dans [53]. Elle est basée sur la propriété de commandabilité structurelle en sortie. Si le nombre d'états, d'entrées et de sorties du système est respectivement n , m et p , cette propriété est vérifiée si:

- chaque variable d'état est accessible par au moins une entrée,
- le rang générique de la matrice structurée

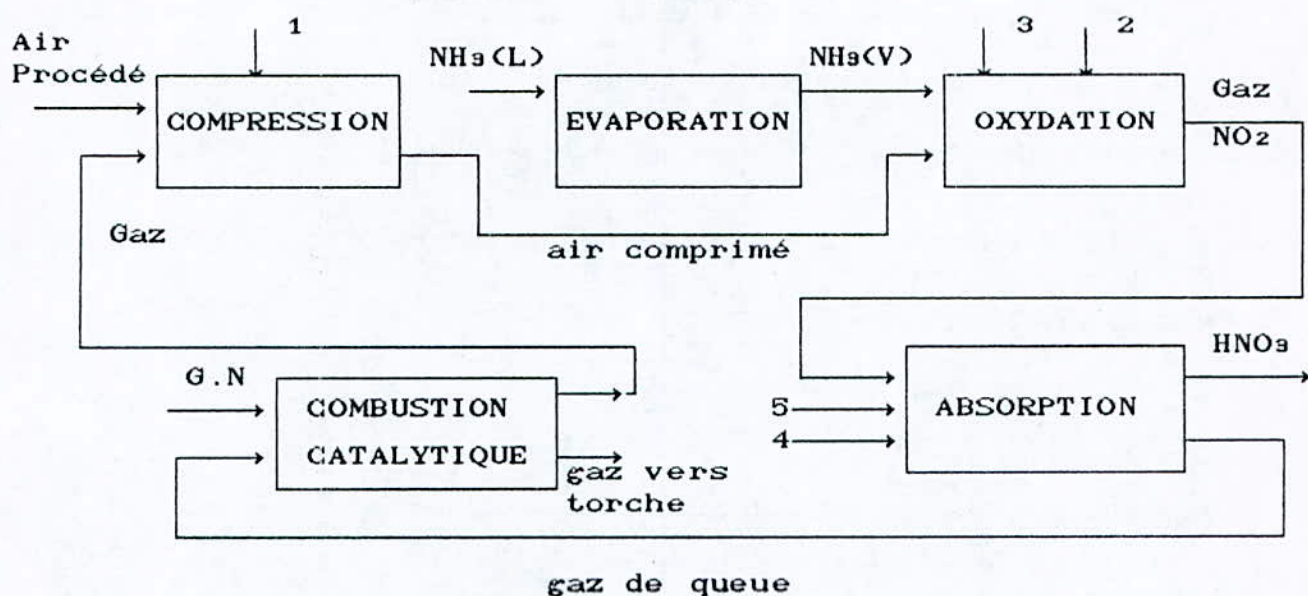
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \text{ est } n + p.$$

L'application de cette méthode au procédé de fabrication d'acide nitrique (section d'absorption du complexe CEA d'Arzew), nécessite la connaissance du modèle structurel du procédé. Ce dernier est obtenu à partir de l'analyse des phénomènes physico-chimiques se déroulant dans le processus.

5.2- MODELISATION STRUCTURELLE DU PROCÉDE D'ABSORPTION

L'unité de production d'acide nitrique HNO_3 peut être décomposée en cinq sous-systèmes (voir figure 5.1): compression d'air, évaporation d'ammoniac, oxydation d'ammoniac, absorption du dioxyde d'azote NO_2 et combustion du gaz de queue. La section d'absorption, schématisée par un seul bloc, constitue l'ultime opération du processus. Elle est, en réalité, constituée d'un condenseur, d'une colonne d'absorption et d'un échangeur. Le condenseur reçoit le gaz riche en NO_2 provenant de la section d'oxydation pour être séparé en deux phases: une phase liquide (acide faible HNO_3 à 40%) et une phase vapeur (gaz riche en NO). Ces deux composants sont respectivement envoyés au milieu et au bas de la colonne d'absorption où le gaz NO est oxydé en NO_2 , puis absorbé par une eau refroidie pour former finalement l'acide nitrique à 57%. Ce dernier est envoyé vers le stockage alors que les gaz formés en tête de colonne (gaz de queue) sont évacués à travers un échangeur vers la section de combustion. De l'air de blanchiment est envoyé au bas de la colonne pour enlever les oxydes dissous et donner une coloration à l'acide.

Le choix des états de ce sous-système est motivé par des considérations techniques telles que la qualité du produit et les mesures de sécurité. On désire dans notre cas obtenir un acide avec une concentration de 57%.



- 1- Eau de refroidissement 2- Eau de chaudière 3- Gaz de queue
 4- Air de blanchiment, 5- Eau traitée, L: liquide, V: vapeur,
 G.N: gaz naturel

Figure 5.1: Décomposition de l'unité acide

Une analyse détaillée du processus d'absorption montre que les états du système peuvent être choisis comme étant: [6]

- la concentration X_c d'acide nitrique (HNO_3) au fond de la colonne, qui dépend de la quantité de NO_2 ,
- la température T dans la zone d'absorption,
- la quantité Q_{NO} du gaz monoxyde d'azote sortant du condenseur,
- le niveau N d'acide nitrique formé au fond de la colonne.

Les grandeurs qui influent sur ces états et qui peuvent être choisies comme commandes sont:

- la quantité d'eau traitée Q_{et} , injectée en haut de la colonne,
- le débit d'eau de refroidissement Q_{ef1} dans la zone d'absorption

- le débit Q_{NO_2} de dioxyde d'azote qui entre dans le condenseur,
- le débit d'eau de refroidissement Q_{ef2} sortant du condenseur,
- le débit Q_{HNO_3} d'acide nitrique à la sortie de la colonne.

Les évolutions de ces états sont décrites par les relations:

$$\dot{N} = f_1 (X_c, T, Q_{ef}, Q_{NO}, Q_{HNO_3})$$

$$\dot{X}_c = f_2 (Q_{ef}, Q_{NO}, T)$$

$$\dot{T} = f_3 (Q_{NO}, Q_{ef}, Q_{ef1})$$

$$\dot{Q}_{NO} = f_4 (X_c, T, Q_{ef2}, Q_{NO2})$$

La matrice structurée (A,B) décrivant les liens des états entre eux et avec les entrées est:

	N	X _c	T	Q _{NO}	Q _{ef}	Q _{ef1}	Q _{ef2}	Q _{HNO₃}	Q _{NO₂}
\dot{N}	0	X	X	X	X	0	0	X	0
\dot{X}_c	0	0	X	X	X	0	0	0	0
\dot{T}	0	0	0	X	X	X	0	0	0
\dot{Q}_{NO}	0	X	X	0	0	0	X	0	X

Le choix des grandeurs de sorties (à régler) est fait sur la base d'exigences techniques tout en garantissant l'observabilité structurelle (dual de la s-commandabilité) de la paire (A^T, C^T) . La concentration est un paramètre important et facilement mesurable, elle est donc choisie en premier lieu comme une grandeur à régler. Mais, comme on peut le voir sur le graphe associé à A^T , fig.(5.2), l'état N (niveau) n'est pas accessible. Par conséquent, la matrice d'observation C du système sera élargie à N. On fera d'ailleurs remarquer que le niveau est la seule grandeur de sortie régulée sur le procédé réel.

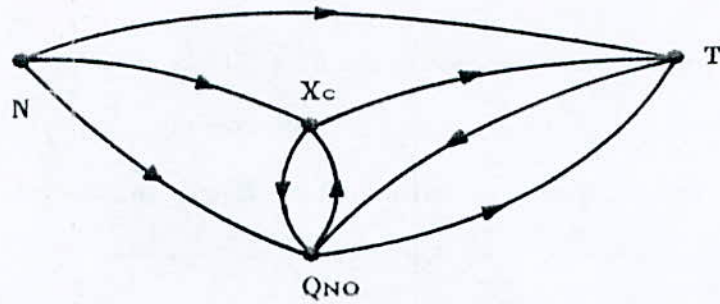


Figure 5.2: Graphe associé à A^T

5.3- RECHERCHE DES STRUCTURES DE REGULATION POSSIBLES

Nous allons considérer deux configurations: la première est relative à un système mono-sortie (niveau) tandis que la deuxième concerne un système multi-sorties (concentration et niveau). Nous voulons obtenir, pour les deux cas, les combinaisons d'entrées ou de couples d'entrées nécessaires à la régulation des grandeurs de sorties choisies.

a) Cas mono-sortie

Le vecteur de sortie correspondant au niveau est $C = [X \ 0 \ 0 \ 0]$.

La matrice structurée M associée au système (A,B,C) devient donc:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \cdot \\ N \\ \cdot \\ X_c \\ \cdot \\ T \\ \cdot \\ Q_{No} \\ \cdot \\ N \end{matrix} \begin{matrix} N & X_c & T & Q_{No} & Q_{e1} & Q_{e1} & Q_{e2} & Q_{HNO} & Q_{No} & Q_{No} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & X & X & X & X & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X \\ \hline X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

La méthodologie de synthèse donnée dans [53] est basée sur un algorithme qui consiste à mettre la matrice M sous une forme triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont des blocs R_i de dimensions $(n_i \times m_i)$ qui ne contiennent aucun élément nul. Pour cela, on utilisera la matrice \bar{R}_i définie par:

$$\bar{R}_i = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ x & R_2 & & 0 \\ x & x & R_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & R_i \end{bmatrix}$$

pour $i = 1, 2, \dots, \omega$ (ω étant le nombre de blocs R_i dans la matrice M réordonnée). On définit également un indice rang $(RI)_i$ pour la matrice R_i égal à $\sum_{k=1}^i (m_k - n_k)$ où m_k et n_k sont respectivement le nombre de colonnes et de lignes du bloc \bar{R}_i .

Les différentes étapes de l'algorithme sont les suivantes:

- pas 1: $i = 0, j = 0,$
- pas 2: Trouver la ligne de M ayant le minimum d'éléments non nuls, soit k ce nombre,
- pas 3: $i \rightarrow i+1$, associer à cette ligne l'indice i et l'effacer,
- pas 4: associer à la colonne ayant des éléments non nuls dans cette ligne l'indice $j+1, \dots, j+k$ et les effacer. $j \rightarrow j+k$
- pas 5: s'il existe d'autres lignes, aller au pas 2, sinon fin de l'algorithme.

La matrice est ensuite réordonnée selon les indices croissants (de haut en bas pour les lignes et de gauche à droite pour les colonnes) afin d'obtenir les blocs non nuls R_i .

Le nombre de commandes qu'on peut éliminer sans toucher au rang générique de la matrice M représentant le système, est égal au rang maximal des blocs Ri.

Pour notre exemple, la matrice réordonnée est:

$$\begin{array}{c}
 \cdot \\
 X_c \\
 \cdot \\
 T \\
 \cdot \\
 N \\
 \cdot \\
 QNO
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 & T & QNO & Qet & Qef_1 & X_c & QHNO_9 & Qef_2 & QNO_2 \\
 \boxed{X} & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & X & X & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 X & X & X & 0 & \boxed{X} & X & 0 & 0 & 0 \\
 X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & \boxed{X} & X & 0
 \end{bmatrix}$$

Notons la suppression de la ligne qui a le nombre minimal de coefficients non nuls et des colonnes comprenant ces mêmes coefficients (elles sont affectées des indices $i=j=0$). Les différents blocs Ri encadrés ont respectivement les indices de rang suivants: $(RI)_1 = 2$, $(RI)_2 = 2$, $(RI)_3 = 3$, $(RI)_4 = 4$.

On peut donc éliminer jusqu'à quatre entrées sans diminuer le rang générique plein de la matrice M (égal à 5). En tenant compte de la dépendance des deux dernières colonnes, l'arbre d'élimination des entrées est donné sur la figure 5.3.

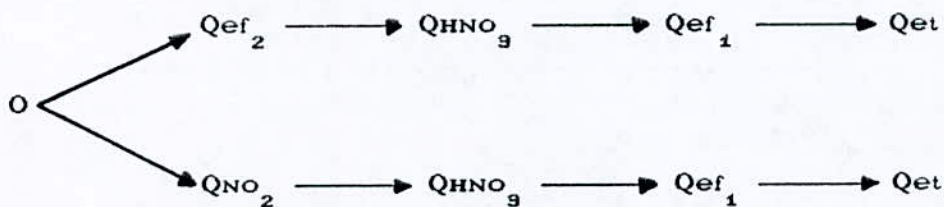


Figure 5.3: Arbre d'élimination de commandes (cas mono-sortie)

Par conséquent, le niveau N peut être réglé soit par Q_{ef2} , soit par le débit de NO_2 . En analysant la vitesse d'action de ces deux grandeurs sur le niveau, celle de Q_{NO_2} est relativement faible. De plus, Q_{NO_2} étant un paramètre intimement lié à la charge NH_3 , sa variation dépend de cette dernière. Ce débit est souvent maintenu constant. La régulation du niveau N par le débit d'eau de refroidissement Q_{ef2} est donc celle qui convient le mieux.

b) Cas multi-sorties

Nous devons rechercher dans ce cas toutes les paires d'entrées qui peuvent réguler le niveau et la concentration. La matrice C de

sortie est: $C = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice M associée au système sera:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \begin{matrix} N & X_c & T & Q_{NO} & Q_{ef} & Q_{ef1} & Q_{ef2} & Q_{HNO_3} & Q_{NO_2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & X & X & X & X & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X \\ \hline X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'application de l'algorithme précédent donne une forme réorganisée de la matrice de M diminuée des lignes et des colonnes (N, Xc) car elles ont le nombre minimal de coefficients non nuls. Cette forme présente quatre blocs RI dont les indices rang sont: $(RI)_1 = 2, (RI)_2 = 2, (RI)_3 = 2, (RI)_4 = 3$.

	T	QNo	Qet	QHNO ₃	Qef ₁	Qef ₂	QNO ₂
Xc	X	X	X	0	0	0	0
N	X	X	X	X	0	0	0
T	0	X	X	0	X	0	0
QNo	X	0	0	0	0	X	X

Par conséquent, on peut éliminer jusqu'à trois entrées sans changer le rang générique plein de M qui est égal à six. En remarquant la dépendance des dernières colonnes, on peut éliminer l'une d'entre elles. On obtient ainsi l'arbre d'élimination de la figure (5.4) suivante:

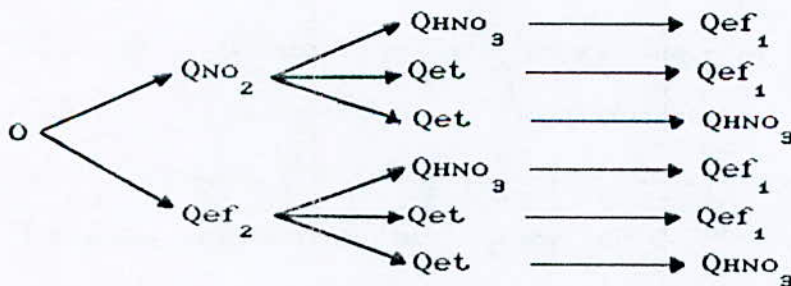


Figure 5.4: arbre d'élimination de commandes (cas multi-sorties)

On en déduit six paires d'entrées qui peuvent être utilisées pour la régulation du niveau et de la concentration. Ce sont:

(Q_{ef_2}, Q_{et}) ; (Q_{ef_2}, Q_{HNO_3}) ; (Q_{ef_2}, Q_{ef_1}) ; (Q_{NO_2}, Q_{et}) ; (Q_{NO_2}, Q_{HNO_3})
et (Q_{NO_2}, Q_{ef_1}) .

Ces six paires vérifient la commandabilité en sortie. S'il y a un choix à faire entre elles, il doit se faire sur la base de l'influence des éléments formant la paire de commande sur l'évolution du processus. Une analyse détaillée permet de sélectionner la paire de commande (Q_{NO_2}, Q_{HNO_3}) , [6]. Les autres paires, qui font toutes intervenir un débit d'eau (Q_{et} , Q_{ef_1} et/ou Q_{ef_2}), ont certes un impact sur le processus d'absorption mais agissent beaucoup plus pour une température basse dans la zone d'absorption que sur la concentration et le niveau.

Le débit de NO_2 est la grandeur de sortie de la section d'oxydation d'ammoniac qui précède celle d'absorption. Il constitue par conséquent, la matière première pour le processus d'absorption et agit d'une façon indirecte sur la concentration d'acide. Quant au débit d'acide nitrique HNO_3 à la sortie de la colonne, il agit sur le niveau indépendamment des autres paramètres. Ainsi, les deux boucles de régulation à réaliser sont celles de la concentration C régulée par le débit de NO_2 et du niveau régulé par le débit d'acide nitrique HNO_3 .

5.4- CONCLUSION

Par ce dernier chapitre, nous avons voulu montrer l'intérêt et la nécessité de l'approche structurelle dans l'étude des systèmes complexes afin d'éviter des procédures purement empiriques ou par "tatouement". Ainsi, pour ce qui est de la synthèse de structures de commande, l'apport de l'étude structurelle a été montré à travers un exemple de procédé physique complexe. L'approche est systématique et a permis d'avoir toutes les boucles de régulation possibles. Signalons aussi l'utilisation avec succès de cette méthode sur d'autres procédés physiques (voir article [41]).

Lorsque le nombre de sorties à réguler est supérieur à celui des entrées, il est nécessaire, pour la conception de boucles monovariables, d'en éliminer un certain nombre tout en gardant la s -commandabilité fonctionnelle du système. Ce problème dual a été étudié dans [45].

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire concerne l'étude des systèmes structurés linéaires multivariables, principalement par l'approche transfert. Les solutions des problèmes abordés ont été obtenues en utilisant conjointement la théorie des graphes et quelques invariants et propriétés structurels comme les zéros à l'infini, les ordres d'essentialité, les notions de ligne et de colonne propre et les modes fixes. Ainsi, après un rappel de ces notions et du rôle fondamental qu'elles jouent dans la solubilité de problèmes de commande, nous les avons caractérisé à l'aide de graphes. En exploitant les résultats existants dans le cas non structuré, basés pour la plupart sur la structure à l'infini, nous avons étendu différents théorèmes au cas des systèmes structurés. Cette extension peut paraître évidente à première vue mais il n'en est rien puisque il faut toujours satisfaire à la condition d'indépendance algébrique des paramètres. Ceci a été d'ailleurs rappelé chaque fois que le problème s'est posé comme ce fût le cas pour le rejet de perturbations par retour de sorties mesurées (cas général). Nous avons également montré que l'approche structurelle (en transfert) se prêtait mieux à la recherche de compensateurs découplants qui sont fréquemment utilisés dans la commande adaptative multivariable par modèle de référence. Un algorithme simple basé sur le calcul de la structure à l'infini (zéro à l'infini et ordres essentiels) a été proposé.

Le problème de la commande décentralisée a été étudié par l'approche d'état et le mode s-fixe s'est avéré crucial pour ce type de commande. Nous avons choisi pour ce mode, la caractérisation par l'algèbre de Boole qui, associée au principe d'une méthode d'élimination du mode fixe existante en non structuré, a permis d'aboutir à un algorithme d'élimination des modes s-fixes apparaissant en commande décentralisée. Si l'ensemble de ces résultats peut être regroupé dans l'aspect analyse, nous avons également montré à travers un exemple réel de système complexe, que l'approche structurelle peut aussi constituer un élément de la synthèse.

Les systèmes structurés constituent actuellement un domaine de recherche très actif. Tous les résultats existants dans le cas classique peuvent être, en principe, étendus au cas structuré à condition de satisfaire la propriété d'indépendance des paramètres non nuls. Ceci n'est pas toujours possible pour des systèmes décrits par des équations d'état en raison de la difficulté d'obtenir un système structuré à partir d'un système réel. L'approche transfert exploitée dans ce mémoire a permis d'aborder le cas des systèmes complexes interconnectés. Nous pensons qu'elle constitue un très bon moyen d'approcher la question de la robustesse. Les travaux relatifs à la description d'invariants de systèmes décrits par l'approche polynomiale peuvent également

constituer une voie pour l'étude des systèmes structurés (certains résultats existent déjà dans la littérature, [38]). Les problèmes qui restent ouverts dans le cadre de l'approche transfert sont nombreux. Nous citerons ceux qui nous intéressent le plus comme le découplage non régulier avec toutes ses variantes et la poursuite parfaite de modèle. L'aspect stabilité des problèmes de découplage, de rejet de perturbations et de poursuite de modèle est également un axe de recherche intéressant qui nécessite néanmoins, une reformulation de la définition d'un système structuré dans l'approche transfert. Celle-ci doit prendre en compte la structure finie instable du système. Dans ce cadre, la commande décentralisée pourra alors être étudiée par l'approche transfert et contribuer à la résolution des problèmes de commande de systèmes complexes. Un autre aspect non négligeable qui reste ouvert est celui du développement d'algorithmes de commande sur la base de résultats de la théorie des graphes, principalement, ceux relatifs à l'optimisation dans les réseaux.

REFERENCES

[1] ANDERSON, B.D.O and CLEMENT, D. (1981)

Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control
Automatica, Vol. 17, N° 5, pp. 703-712.

[2] ANDERSON, B.D.O (1982)

Transfer Function Matrix Description of Decentralized Fixed Modes
IEEE Trans. on Auto. Control., Vol AC-27, N° 6, pp. 1176-1182.

[3] ANDREI, N. and SVARICEK, F. (1991)

"DACS - An Interactive Package for the Qualitative Analysis of
Large-Scale Control Systems", 5th IFAC/IMACS Symposium on Computer
Aided Design in Control Systems, July, Swansea, U.K.

[4] ARMENTANO, V.A and SINGH, M.G (1982)

"A Procedure to Eliminate Decentralized Fixed Modes", IEEE Trans.
on Auto. Control, Vol AC-27, pp. 258-260.

[5] ASANO, T., YOSHIKAWA, K. and SUZUKI, S. (1990)

The Design of a Precompensator for Multivariable Adaptive Control:
A Network-theoretic Approach, IEEE Trans. on Auto. Control, Vol.
AC-35, N° 6, pp. 706-710.

[6] BACHOUICHE, R., OUDJAOU, C. and BELMEHDI, A. (1990)

"Approche Structurelle pour la Synthèse de Structures de Commande-
Application à des Procédés Pétrochimiques", MFE, INH - Boumerdes.

[7] BELMEHDI, A. (1986)

"Représentation par Graphes des Systèmes Structurés" Colloque Σ_{∞} sur les propriétés structurelles des systèmes multivariables - Application à des problèmes de commande, C.N.R.S - Paris (juin)

[8] BELMEHDI, A., COMMAULT, G. and DION, J.M. (1986)

"Découplage des Systèmes Structurés Interconnectés - Approche Transfert" In Lectures Notes in Control and Informations Sciences, Springer Verlag, pp. 368-379.

[9] BELMEHDI, A. (1987)

"Sur la Stabilisation et le Découplage Structurel des Systèmes Linéaires", Thèse de Doctorat d'Ingénieur, INP.Grenoble

[10] BELMEHDI, A. and ZEBROWSKY, L. (1991)

"Structural Decoupling of Composite Systems", Advances in Modeling and Simulation, AMSE Press, Vol 23, N° 4, pp. 1-11

[11] BELMEHDI, A. (1994)

"On the Generic Structure at Infinity Within the Transfer Matrix Form", to appear in Int. J. of Syst. Sciences (accepted paper)

[12] BELMEHDI, A.(1994)

"Transfer Matrix Approach to the Structural Block Diagonal Decoupling Problem", Int. J. of Control, Vol.60, n°6, pp. 1383-1391.

- [13] BELMEHDI, A. and MANSOURI, R. (1994)
"Structural Disturbance Decoupling by Output Measurement Feedback: the Transfer Matrix Approach", Submitted to Int. J. of Control
- [14] BERGE, C. (1970)
"Graphes et Hypergraphes", Ed. Dunod, Paris
- [15] BHATTACHARYYA, S.P. (1982)
"Transfer Functions Conditions for Output Feedback Disturbance rejection", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol AC-27, pp. 974-977.
- [16] BOUKHETALA, D. and BELMEHDI, A. (1992)
"Commande Décentralisée des Systèmes Structurés", Séminaire S.S.A Blida, 13-15 Décembre.
- [17] BOUKHETALA, D. and BELMEHDI, A. (1993)
"Caractérisation des Modes Fixes dans la Commande Décentralisée des Grands Systèmes", Colloque COMAEI-93, Djelfa, 11-13 Mai.
- [18] COATES, C.L. (1959)
"Flow-Graph Solutions of Linear Algebraic Equations", IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-6, June.
- [19] COMMAULT, G. (1983)
"Quelques Aspects Structurels des Systèmes Multivariables", Thèse de Doctorat d'Etat, INP Grenoble.

- [20] COMMAULT, C., DION, J.M. and PERES, A (1984)
"Transfer Matrix Approach to the Disturbance Decoupling Problem",
Proc 9th IFAC World Congress, Budapest, Vol. 8, pp. 130-133.
- [21] COMMAULT,C., DESCUSSE,J., DION,J.M, LAFAY,J.F,MALABRE,M.(1986)
"Influence de la Structure à l'Infini des Systèmes Linéaires sur
la Solution des Problèmes de Commande", APII, Vol. 20, pp. 207-252
- [22] COMMAULT,C ,DESCUSSE,J, DION,J.M, LAFAY,J.F, MALABRE,M (1986)
"About new Decoupling Invariants: the Essential Ordres", Int.J. of
Control, Vol. 44, N° 3, pp. 689-700.
- [23] COMMAULT, C., DION, J.M and BELMEHDI, A. (1987)
"Structured Systems within the Transfer Matrix Approach", Systems
and Control Letters, Vol. 9, pp. 335-339
- [24] COMMAULT, C., LAFAY, J.F and MALABRE, M. (1989)
"Structure of Linear Systems: Geometric and Transfer Matrix Appro-
aches", IFAC Workshop on Systems Structure, Prague, pp. 179-185.
- [25] COMMAULT, C., DESCUSSE, J., DION, J.M and TORRES, J.A. (1989)
"Block Decoupling Invariants: Geometric and Transfer Matrix Carac-
terizations, IFAC Workshop on Systems Structure, Prague, September
pp. 187-192.

-
- [26] COMMAULT, C., DION, J.M. and PEREZ, A. (1991)
"Disturbance Rejection for Structured Systems", IEEE Trans. on
Auto. Control, Vol AC-37, N° 7, pp. 884-887.
- [27] CORFMAT, J.P. and MORSE, A.S. (1976)
Decentralized Control of Linear Multivariable Systems, Automatica
Vol 12, pp. 479-495.
- [28] CREMER, H. (1971)
"A precompensator of Minimal Order for decoupling a Linear Multi-
variable System", Int. J. of Control, Vol 14, N°6, pp. 1089-1103.
- [29] DESCUSSE, J. and DION, J.M. (1982)
On the Structure at Infinity of Linear Square Decouplable Systems,
IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 971-974.
- [30] DESCUSSE, J., LAFAY, J.F and MALABRE, M. (1988)
"Solution to Morgan's Problem", IEEE Trans. On Auto. Control, Vol.
33, N°5, August, pp. 732-739.
- [31] DESCUSSE, J. (1991)
Block Non-Interacting Control (Non) Regular Static State Feedback:
A Complete Solution", Automatica, Vol. 27, N°5, pp. 883-886.

[32] DION, J.M. and COMMAULT, C. (1982)

"Smith Mac Millan Factorizations at Infinity of Rational Matrix Functions and Their Control Interpretation", Syst. and Cont. Letters Vol 1, N° 5, pp. 321-320.

[33] DION, J.M. (1983)

"Sur la Structure à l'Infini des Systèmes Linéaires", Thèse de Doctorat d'Etat, INP Grenoble.

[34] DION, J.M. (1983)

Feedback Block Decoupling and Infinite Structure of Linear Systems Int. J. of Control, Vol 37, N° 3, pp. 521-539.

[35] DION, J.M. and COMMAULT, C. (1991)

"Feedback Decoupling of Structured Systems", ECC-91, European Control Conference, Grenoble, July 2-5, pp. 1789-1793.

[36] DUGARD, L. (1984)

"Commande Adaptative des Systèmes Linéaires Multivariables", Thèse d'Etat, INP.Grenoble.

[37] FALB, P.L. and WOLOWICH, W.A. (1967)

"Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-12, pp. 651-659.

- [38] FANTI, M.P., MAIONE, B. and TURCHIANO, B. (1988)
"Structural Fixed Modes of Systems Described by Rosenbrock's Polynomial Matrices", Int. J. Control, Vol 48, N° 5, pp. 1947-1965.
- [39] FRANCIS, B.A. and WONHAM, W.M. (1976)
The Role of Transmission Zeros in Linear Multivariable Regulators, Int. J. Control, Vol 22, N° 5, pp. 657-681.
- [40] GANTMACHER, F.R. (1966)
"Théorie des Matrices", Ed. Dunod.
- [41] HAMOUCHE, M.S. and BELMEHDI, A. (1992)
"Synthèse de structures de régulation: application à un générateur de vapeur", Séminaire S.S.A-92, Blida, 13-15 Décembre.
- [42] HAUTUS, M.L.J. and HEYMANN, M. (1983)
"Linear Feedback Decoupling: Transfer Function Analysis", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol AC-28, pp. 823-832.
- [43] HAYAKAWA, Y. and SILJAK, D.D. (1988)
"On Almost Invariant Subspaces of Structured Systems and Decentralized Control", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. 33, pp.931-939.
- [44] ISODORI, A. (1983)
"Formal Infinite Zeros of Non Linear Systems", Proc. IEEE CDC.

[45] JOHNSTON, R.D. and BARTON, W. (1984)

"Control Objective Reduction in Single-input Single-output Control Schemes", Int. J. Control, Vol 40, N° 2, pp. 265-270.

[46] KAILATH, T. (1980)

"Linear Systems", Prentice Hall, N.J

[47] LIN, C.T. (1974)

"Structural Controllability", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-19, pp. 201-208.

[48] LINNEMANN, A. (1981)

"Decoupling of Structured Systems", Systems & Control Letters, Vol N°1, pp.71-86 .

[49] MAC FARLANE, A.G.J. and KARKANIAS, N. (1976)

"Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems: A Survey of the Algebraic, Geometric and Complex Variable Theory", Int. J. of Control, Vol. 24, pp. 33-74.

[50] MALABRE, M. (1982)

"Structure à l'Infini des Triplets Invariants: Application à la Poursuite Parfaite de Modèle", Lectures Notes on Control and Information Sciences, Vol 44 - Springer Verlag, pp. 43-53.

- [51] MALABRE, M. (1985)
Sur le Role de la Structure à l'Infini et des Sous-Espaces presque Invariants dans la Résolution des Problèmes de Commande, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Nantes.
- [52] MOMENS, S. and EVANS, F.J. (1983)
"Structural Fixed Modes in Decentralized Control", IEE Proc. Vol 130 Pt. D, N° 6, November. (Parts 1 and 2).
- [53] MORARI, M. and STEPHANOPOULOS, G. (1980)
"Structural Aspects and Synthesis of Alternative Feasible Control Schemes", Part I, AICHE Journal, Vol 26, N° 2, pp. 232-245.
- [54] MORSE, A.S. (1973)
"Structural Invariants of Linear Multivariable Systems", S.I.A.M Journal of Control, Vol. 11, N°3, August, pp. 446-465.
- [55] MUROTA, K. (1987)
"Systems Analysis by Graph and Matroids: Structural Solvability and Controllability", Springer Verlag.
- [56] NIJMEIJER, H. and SCHUMACHER, J.M (1985)
"Zeros at Infinity for Affine Nonlinear Control Systems", IEEE Trans on Auto. Control, Vol AC-30, pp.566-573.

[57] PICHAJ, V., SEZER, M.E. and SILJAK, J.J (1984)

"A graph Theoretic Characterization of Structurally Fixed Modes",
Automatica, Vol 20, NO 2, pp. 247-250.

[58] PIERIDES, S. (1987)

"Sur la Commande Optimale Presque Singulière", Thèse de Doctorat,
INP.Grenoble (France).

[59] RECH, C. (1988)

"Commandabilité et Observabilité Structurelles des Systèmes Inter-
connectés", Thèse de Doctorat, U.S.T de Lille.

[60] REINSCHKE, K. (1984)

"Graph Theoretic Characterization of Fixed Modes in Centralized
and Decentralized Control", Int. Journal of Control, Vol 39, N°4,
pp. 715-729.

[61] REINSCHKE, K. (1988)

Multivariable Control: A graph-theoretic Approach, Springer Verlag

[62] ROSENBROCK, H.H. (1970)

"State Space and Multivariable Theory", Nelson, London

[63] SEFIK, A. and SEZER, M.E. (1991)

"Pole Placement: a Structural Investigation", Int. J. of Control,
Vol 54, N° 4, pp. 973-998.

[64] SEZER, M.E. and SILJAK, D.D. (1981)

"Structurally Fixed Modes", Syst. & Cont. Letters, Vol 1, p. 60-64

[65] SHIELDS, R.W. and PEARSON, J.B. (1976)

"Structural Controllability of Multi-Input Linear Systems", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol AC 21, pp. 203-212.

[66] SVARICEK, F. (1991)

"Computation of the Generic Structure at Infinity of Linear Systems: A Toeplitz Matrix Approach", 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, July, Dublin, Ireland.

[67] TORRES MUNOZ, J.A. (1990)

"Contribution à l'Etude du Découplage des Systèmes linéaires Multivariables", Thèse de Doctorat de L'INP Grenoble.

[68] VAN DER WEIDEN, A.J.J. (1983)

"The use of Structural Properties in Linear Multivariable Control System Design", Phd Dissertation, Delf University of Technology.

[69] VAN DER WOUDE (1991)

"A graph-theoretic Characterization for the Rank of the Transfer Matrix of a Structured System", Math. Cont. Signals. Sys., Vol 4, pp.33-40.

[70] VARDULAKIS, A.I.G. (1980)

"On Infinite Zeros", Int. J. of Control, Vol 32, pp. 849-866.

[71] VERGHESE, G.C. (1978)

"Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems",
PhD Thesis, Stanford University, USA.

[72] WANG, S.H. and DAVISON, E.J. (1973)

"On Stabilization of Decentralized Control Systems", IEEE Trans.
on Auto. Control, Vol AC-18, N° 5, pp. 473-478.

[73] WARREN, M.E. and MITTER, S.K. (1975)

"Generic Solvability of Morgan's Problem", IEEE Trans. on Auto.
Control, Vol AC-20, pp. 268-269.

[74] WILLEMS, J.C. (1981)

"Almost Invariant Subspaces, Part I", IEEE Trans. on Auto. Control
Vol. AC-26, pp. 235-252.

[75] WILLEMS, J.C (1982)

"Almost Invariants Subspaces, Part II", IEEE Trans. on Auto. Cont.
Vol AC-27, pp. 1071-1085.

[76] WILLEMS, J.L (1986)

"Structural Controllability and Observability", Systems & Control
Letters, Vol. 8, pp. 5-12.

[77] WILLEMS, J.L. (1988)

"Elimination of Fixed Modes in Decentralized Systems by Means of Sampling", *Systems & Control Letters*, Vol 10, pp. 1-8.

[78] WILLEMS, J.L (1989)

"Time-Varying Feedback for the Stabilization of Fixed Modes in Decentralized Control Systems", *Automatica*, Vol. 25, pp. 127-131.

[79] WOLOVICH, W.A. (1974)

"Linear Multivariable Systems", Springer Verlag

[80] WONHAM, W.M. (1974)

Linear Multivariable Control-A Geometric Approach, Springer Verlag

[81] WONHAM, W.M. (1979)

"Geometric State-Space Theory in Linear Multivariable Control: A Status Report", *Automatica*, Vol. 15, pp. 5-13

[82] XU, X.M., XI, Y.G. and ZHANG, Z.Y. (1988)

"A Generalized MFD Criterion for Fixed Modes", *IEEE Trans. on Auto Control*, Vol. 33, N°10, October, pp. 986-988.

[83] KASINSKI, A., LEVINE, J. (1983)

"A Fast Graph-theoretic Algorithm for the Feedback Decoupling of Non-linear Systems", *Lecture Notes in Control*, Springer, pp.550-562

A N N E X E 1

COMMAULT. C, DION. J.M., AND BELMEHDI, A.

"STRUCTURED SYSTEMS WITHIN THE TRANSFER MATRIX APPROACH",

In *Systems & Control Letters*, Vol. N°9, pp. 335-339, October 1987.

Structured systems within the transfer matrix approach: Application to decoupling

C. COMMAULT, J.M. DION,
A. BELMEHDI

Laboratoire d'Automatique de Grenoble, C.N.R.S. U.A. 228 -
I.N.P.G. E.N.S.I.E.G., B.P. 46, 38402 Saint-Martin d'Hères,
France

Received 25 October 1986

Abstract: We consider a new approach to structured systems within the transfer matrix framework. We associate with such a structured system a graph which concentrates both knowledge on structural properties of independent subsystems and on their interconnections. The analysis of this associated graph allows to conclude on the decouplability of structured systems.

Keywords: Structured systems, Transfer matrix approach, Decoupling, Graph theory.

1. Introduction

Up to now structured systems were defined in a state space framework and were introduced by Lin in [1]. A linear multivariable system represented by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x \in R^n, u \in R^m, \\ y &= Cx, & y \in R^m, \end{aligned}$$

is said to be structured if the entries of A , B , C are mutually independent parameters or identically zero.

In this framework Linnemann [2] gave an elegant graph theoretic characterization of structured systems which can be decoupled by state feedback. A similar approach has been used in [3,4] for the study of non-linear systems decoupling.

This (state space) approach suffers of some drawbacks, e.g.:

- The basic assumption concerning the independence of the A , B , C entries seems not very physically realistic. In effect, starting with a 'physically' structured system it is difficult to give

it a state space representation which is structured in the above sense.

- The state space dimension (n) must be known and is given once for all.

- The associated graph is complex when n is large which induces some difficulties in using classical graph theoretic algorithms.

In this paper we consider a new approach in a transfer matrix setting to the structured systems. This approach allows to remedy these drawbacks. In our approach a structured system is roughly speaking an interconnection (cascade, parallel, feedback) of single input, single output independent subsystems. For each such subsystem the prior knowledge is reduced to its infinite zero order, which is the input output delay in the discrete time case.

We will associate with such a structured system a graph where the arcs represent subsystems and the nodes the interconnections.

The analysis of this graph allows us, as in [2], to give necessary and sufficient conditions for generic decoupling of structured systems.

In Section 2 we will define more precisely structured systems and their graph characterization. Application to decoupling is presented in Section 3. Some concluding remarks in Section 4 end the paper.

2. Structured systems

2.1. Basic definitions

Let $t(s)$ be a strictly proper rational transfer function. $t(s)$ can be factorized as follows:

$$t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = s^{-p} \lambda \frac{s^k + b_{k-1}s^{k-1} + \dots + b_0}{s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \dots + a_0}$$

where λ and a_i , b_i , $i = 0, \dots, k-1$, are real numbers; $p = \deg(d(s)) - \deg(n(s))$ is the infinite zero

order of $t(s)$; λ is called the gain at infinity of $t(s)$.

In the following we will assume that $\lambda, k, a_i, b_i, i = 0, \dots, k - 1$ are poorly known, only p is assumed to be known precisely. These fairly weak assumptions are generally met in practical cases.

A structured system Σ is a cascade, parallel and/or feedback interconnection of single input, single output transfer functions $t_1(s), \dots, t_N(s)$ whose infinite zero orders p_1, \dots, p_N are given and whose gains at infinity $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ are parameters such that the parameter space Λ is open, $\Lambda \subset R^N$.

A property of a structured system is said to be verified if it is satisfied generically, i.e. for any $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$ in Λ from a proper algebraic variety $V \subset \Lambda$.

As an example we will study in Section 3 decoupling of structured systems, i.e. the generic decoupling of systems having the same structure and parameters in Λ .

As an illustration consider the two following examples.

Example 1. The single input, single output system given in Figure 1 with parameter set R^4 is structured.

Example 2. The system given in Figure 2 with parameter set R^5 is structured.

2.2. Single input, single output systems interconnection

* Parallel composition of $t_1(s)$ and $t_2(s)$, where $t_i(s)$ has infinite zero order p_i and gain at infinity λ_i , leads to

$$t(s) = t_1(s) + t_2(s)$$

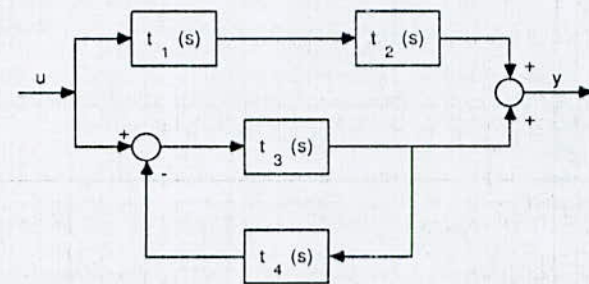


Fig. 1.

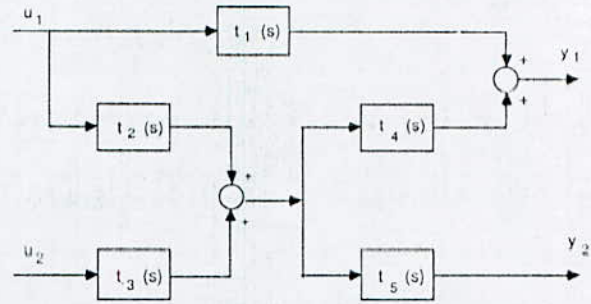


Fig. 2.

whose infinite zero order is $\min(p_1, p_2)$.

The gain at infinity of $t(s)$ is equal to

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 & \text{ if } p_1 = p_2, \\ \lambda_1 & \text{ if } p_1 < p_2, \\ \lambda_2 & \text{ if } p_2 < p_1. \end{aligned}$$

* Cascade composition of $t_1(s)$ and $t_2(s)$ leads to

$$t(s) = t_1(s)t_2(s)$$

whose infinite zero order is $p_1 + p_2$ and gain at infinity $\lambda_1\lambda_2$.

* Feedback composition of $t_1(s)$ and $t_2(s)$ as in Figure 3 leads to

$$t(s) = t_1(s)(1 + t_1(s)t_2(s))^{-1}$$

whose infinity zero order is p_1 and gain at infinity λ_1 .

2.3. Structured systems and associated graphs

We will give a graph representation of structured systems. This graph will exhibit the internal structure (i.e. structural properties of subsystems and interconnections) of structured systems.

Let $t(s)$ be a single input, single output strictly proper transfer function with infinite zero order p and gain at infinity λ . We associate with $t(s)$ an arc of length p and weight λ .

Consider the structured system of Figure 3 with parameter set R^2 . This feedback system has the same infinite zero order and gain at infinity as $t_1(s)$. We can then associate with this feedback system only one arc of length p_1 and weight λ_1 . This amounts to say that in the interconnection scheme we can simply ignore the feedback loops.

Then the graph associated with Example 1 is as shown in Figure 4.

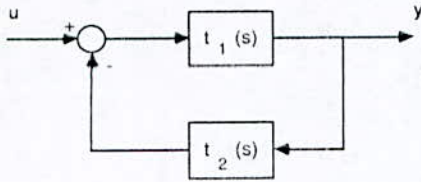


Fig. 3.

Similarly the graph associated with Example 2 is as in Figure 5.

In this way we associate with a structured system Σ after discarding the feedback loops a directed graph denoted G_Σ whose node set is the union of the input set the output set and the interconnection points set. Each arc corresponds to a single input, single output system.

In this graph we define the *length* of a path as the sum of the lengths of the composing arcs. The *weight* of a path is defined as the product of the weights of the composing arcs.

These definitions are in accordance with transfer composition laws. In effect the path length (resp. weight) is precisely the infinite zero order (resp. gain at infinity) of the transfer function associated with the path.

Consider a structured system of transfer matrix $T(s)$, from the parallel composition rule it appears that the infinite zero order of $T_{ij}(s)$ is equal to the minimal length of all paths from u_j to y_i . Similarly the infinite gain of $T_{ij}(s)$ is equal to the sum of the weights of the shortest paths from u_j to y_i .

It appears also that the infinite zero order n_i of $T_i(s)$, the i -th row of $T(s)$, is the minimal length of paths from all inputs to y_i . The infinite gain of $T_i(s)$ is then

$$B_{0i} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n_i} T_i(s)$$

where the k -th element of B_{0i} is equal to the sum of the paths weights of length n_i from u_k to y_i if

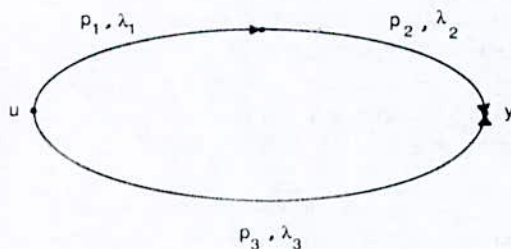


Fig. 4.

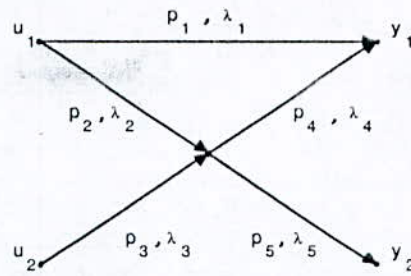


Fig. 5.

there exists such paths and zero if not. The so constructed graph contains all the relevant information for solving the decoupling of structured systems.

The particularization to structured systems which associated graphs are bipartite is treated in [7].

3. Decoupling of structured systems

Let $T(s)$ be an $m \times m$ strictly proper rational transfer matrix. $T(s)$ can be factorized as

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^{-n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-n_m} \end{bmatrix} B(s)$$

where the n_i 's are the rows infinite zero orders. $B(s)$ is an $m \times m$ proper rational transfer matrix. The rows $B_i(s)$ of $B(s)$ satisfy

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (B_i(s)) = B_{0i} \neq 0.$$

Define

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_{01} \\ \vdots \\ B_{0m} \end{bmatrix}.$$

B_0 plays a key role in solving the feedback decoupling problem [5,6]. More precisely the system of transfer matrix $T(s)$ will be state feedback decouplable if and only if B_0 is invertible.

Consider now the case of structured systems. We will denote by $T_\lambda(s)$ the transfer matrix of such a system with $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^t \in \Lambda$.

Following the above mentioned arguments $B_{0\lambda}$ will depend on the parameters $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. More precisely the non identically zero entries of $B_{0\lambda}$

are polynomials in the parameters.

Then a structured system of transfer matrix $T_\lambda(s)$ will be state feedback decouplable if and only if $\det(B_{0\lambda})$ is not identically zero.

In order to study the decoupling of structured systems we will use the associated graph G_Σ introduced in Section 2 and the graph theoretic tools and results developed by Linnemann in [2].

Recall first the concept of input/output matching (i/o matching) [2].

A sequence $M = (P_1, \dots, P_m)$ of paths P_i in G_Σ is called an *i/o matching* in G_Σ if the following conditions are satisfied:

- there exists a permutation π of $(1, \dots, m)$ such that for $i \in 1, \dots, m$, P_i is a path from $u_{\pi(i)}$ to y_i .

- P_i is a shortest path between (u_1, \dots, u_m) and y_i .

Notice that in general in our graph the length of an arc is not equal to one as in [2]. In an i/o matching the length of P_i is n_i as defined in Section 2.

An i/o matching is called *elementary* if no node in G_Σ is incident with two different paths of M .

The sign of M , $\pi(M)$, is defined to be the sign of π .

One has the following result:

Theorem. Consider the structured system Σ of transfer matrix $T_\lambda(s)$. This system is state feedback decouplable on any minimal realization of $T_\lambda(s)$ if and only if there exists an elementary i/o matching in the associated graph G_Σ .

Proof. Although our graph differs from the one given in [2], the decouplability condition is the same. The proof follows closely the one given in [2] and will be sketchy.

As seen above Σ is state feedback decouplable if and only if $\det(B_{0\lambda}) \neq 0$.

One has

$$\det(B_{0\lambda}) = \sum_{\pi \in S_m} \sigma(\pi) \prod_{i=1}^m B_{0\lambda}(i, \pi(i))$$

where S_m is the symmetric group of order m .

$B_{0\lambda}(i, \pi(i))$ can be evaluated on the associated graph G_Σ , namely $B_{0\lambda}(i, \pi(i))$ is equal to the sum of the paths weights $f(P_i)$ of length n_i from $u_{\pi(i)}$

to y_i . Then

$$B_{0\lambda}(i, \pi(i)) = \sum_{P_i \in \mathcal{P}_{i, \pi(i)}(n_i)} f(P_i)$$

where $\mathcal{P}_{i, \pi(i)}(n_i)$ is the set of all paths of length n_i from $u_{\pi(i)}$ to y_i . Then

$$\det(B_{0\lambda}) = \sum_{\pi \in S_m} \sigma(\pi) \prod_{i=1}^m \sum_{P_i \in \mathcal{P}_{i, \pi(i)}(n_i)} f(P_i).$$

From this point the proof follows [2], Lemma 3; then

$$\det(B_{0\lambda}) = \sum_{M=(P_1, \dots, P_m) \in \mathcal{M}_e} \sigma(M) \prod_{i=1}^m f(P_i)$$

where \mathcal{M}_e is the set of all elementary i/o matchings in G_Σ . As in [2] the existence of an elementary i/o matching is a necessary and sufficient condition for $\det(B_{0\lambda})$ to be not identically zero. \square

4. Concluding remarks

We now summarize the main features of the transfer approach to structured systems.

- The associated graph exhibits the fundamental invariants of the system and displays its internal structure (interconnections).

- The complexity of the associated graph is much less than in the state variable context.

- The prior knowledge is fairly weak, i.e. infinite zero orders of subsystems and interconnection scheme.

- Only the essential information for our purpose is apparent in the graph. The system order, the poles and zeros locations which are irrelevant here may vary arbitrarily without affecting the graph G_Σ .

A problem now arises: how to translate in practice a complex and badly known system into a structured system formulation?

Roughly speaking this simply amounts to represent the system as an interconnection decomposition of mutually independent subsystems, i.e. with no dynamics in common. This is a sufficient condition for the independence of gains at infinity.

In the authors' opinion this approach could be used for solving other control problems such as disturbance decoupling, model following, etc.

References

- [1] C.T. Lin, Structural controllability, *IEEE Trans. Automat. Control* **19** (1974) 201–208.
- [2] A. Linnemann, Decoupling of structured systems, *Systems Control Lett.* **1** (1981) 79–86.
- [3] A. Kasinski and J. Levine, A fast graph theoretic algorithm for the feedback decoupling problem of nonlinear systems, *Lecture Notes in Control* No. 58 (Springer, Berlin, 1983) pp. 550–562.
- [4] B. D'Andrea and J. Levine, C.A.O. pour les problèmes D, RP et LD des systèmes non-linéaires, in: M. Fliess, M. Hazewinkel, Eds., *Algebraic and Geometric Methods in Non-linear Control Theory* (Reidel, Dordrecht, 1986).
- [5] P.L. Falb and W.A. Wolovich, Decoupling in the design and synthesis of multivariable control, *IEEE Trans. Automat. Control* **12** (1967) 651–659.
- [6] M.L.J. Hautus and M. Heymann, Linear feedback decoupling – Transfer function analysis, *IEEE Trans. Automat. Control* **28** (1983) 823–832.
- [7] A. Belmehdi, C. Commault, J.M. Dion, Découplage des systèmes structurés interconnectés – Approche transfert, *Inria Conference*, Antibes (Springer, Berlin–New York, June 1986) pp. 368–379.

A N N E X E 2

BELMEHDI, A.

"STRUCTURAL DECOUPLING OF COMPOSITE SYSTEMS",

In Proceedings of the International Conference "Signals & Systems"

Rabat, Morocco, April 9-11, 1990.

Also, in Advances in Modeling and Simulation, AMSE Press,

Vol. N°3,pp. 1-11, 1991.

STRUCTURAL DECOUPLING OF COMPOSITE SYSTEMS

A. BELMEHDI

Dpt d'Automatique INH - Boumerdes, Algerie

ABSTRACT:

In this paper the static state feedback decoupling problem of cascade square structured systems is solved. The problem can be viewed as structural decoupling by post-compensation and/or by pre-compensation.

The usefulness of the first approach is showed and some conditions to decouple structurally by pre-compensation are given.

The problem is considered within the transfer matrix approach and graph characterization. Some illustrative examples and remarks end the paper.

KEYWORDS:

structured systems, pre and post-compensation, graph theory, decoupling.

1. INTRODUCTION

In a recent paper, structured systems have been introduced within the transfer matrix approach [4]. Furthermore, necessary and sufficient conditions for their generic static feedback decoupling are obtained. These conditions follow closely those stated by Linnemann [5]; i.e. in connection with the existence of an elementary I/O matching in the associated graph $G(\Sigma)$ to the system Σ under study. If such a matching exists, Σ is said to be structurally decouplable (S.D. for short).

Now, a problem arises: what are the feasible alternatives which make structurally decouplable a system Σ which is not S.D. by static state feedback? One can remove this difficulty, by adding some sets of nodes and arcs which are adjacent to the set of inputs of the system or adjacent from the set of its outputs. These two alternatives are related to the pre and post-compensation problems, respectively.

This paper deals with these two questions. The contribution of the second alternative will be shown useless to the structural decoupling. Then, the first approach is mainly studied.

In order to make problem setting and relevant expansions more accessible and uniform, the two approaches are considered as a particular case of structural decouplability of composite systems.

The paper is organized as follows: in section 2, a background and some essential earlier results are given. Section 3 deals with fundamental results, in other words, the post-compensation and pre-compensation approaches for the structural decouplability are examined. Some illustrative examples and remarks end the paper.

2. PRELIMINARIES AND EARLIER RESULTS

Consider a single input single output (SISO) system given by a strictly proper rational transfer function $t(s)$.

$t(s)$ can be factorized as follows:

$$t(s) = s^{-q} \lambda h_{\lambda}(s)$$

where q is the infinite zero order of $t(s)$, λ is the gain at infinity of $t(s)$ and $h_{\lambda}(s)$ is a biproper transfer function with unknown coefficients.

The knowledge on the system is reduced to its infinite zero order value and its gain at infinity as a parameter. Such a factorization is called a "factorization at infinity" [2].

2.1 STRUCTURED SYSTEMS

Definition 1: [4]

A structured system is a cascade, parallel and/or feedback interconnection of SISO transfer functions $t_1(s), \dots, t_k(s)$ given by their factorizations at infinity, where the set of parameters $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ is an open $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$.

To illustrate structured multivariable systems, consider the following two examples.

Example 1:

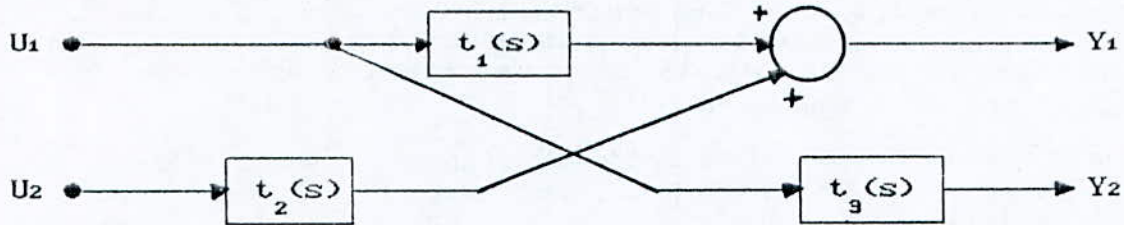


Fig. 1: A structured system (particular case)

The system given in fig. 1 with parameter set \mathbb{R}^3 is structured.

Example 2:

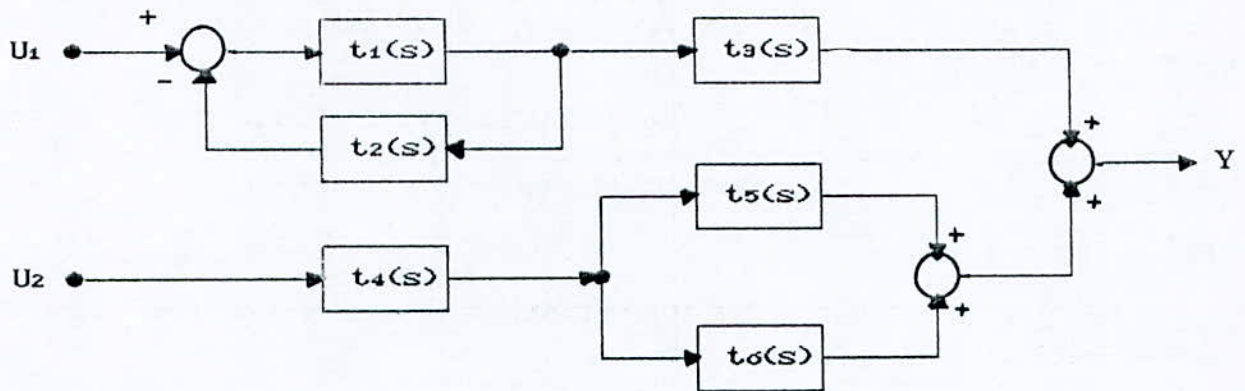


Fig. 2: A structured system (the general case)

The system given in fig.2 with parameter set \mathbb{R}^6 is structured.

Remark:

The previous examples emphasize the following structures. In the first one, each entry of the corresponding transfer matrix is reduced to a SISO subsystem. In example 2, there are several subsystems for at least one entry. In order to distinguish between these two features, they are related to particular and general case, respectively.

2.2 ASSOCIATED GRAPHS AND STRUCTURAL DECOUPLABILITY [2]

Recall first the graph characterization of a structured system. A directed graph denoted $G(\Sigma)$, is associated with such a system. The node set is the union of the inputs set $U = u_1, \dots, u_m$, the outputs set $Y = y_1, \dots, y_m$ and the interconnection points set $V = v_{p1}, \dots, v_{pk}$. Each arc corresponds to a single input single output system. Each arc is level-headed by a length and a weight. The length is the infinite zero order q of the corresponding transfer function $t(s)$. The weight is the gain at infinity λ of $t(s)$. The same approach is done with paths, i.e. the length of a path is the sum of lengths of the composite arcs and the weight of a path is the product of weights of the composing arcs.

A shortest path is one which has a minimum length.

An input output (I/O) path in the associated graph $G(\Sigma)$ is a set of arcs of the following form:

$$P = \left\{ (u_i, v_{p1}), (v_{p1}, v_{p2}), \dots, (v_{pk-1}, v_{pk}), (v_{pk}, y_j) \right\}$$

Now, in order to study the decoupling of structured systems, the associated graph $G(\Sigma)$ is used and the concept of an I/O matching is first recalled [5].

A set $M = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ of m I/O paths is an I/O matching in

$G(\Sigma)$ if P_i is a shortest path between U and $y_i \in Y$ ($i=1, \dots, m$) and furthermore, no pair of these I/O paths share a node in $U \cup Y$.

An elementary I/O matching is one in which no pair of I/O paths share a node at all.

Then, the structural decouplability by a static state feedback of a square invertible system Σ is feasible iff an elementary I/O matching exists in the associated graph $G(\Sigma)$ [1],[3].

Example 3:

Let a structured multivariable system with the following associated graph.

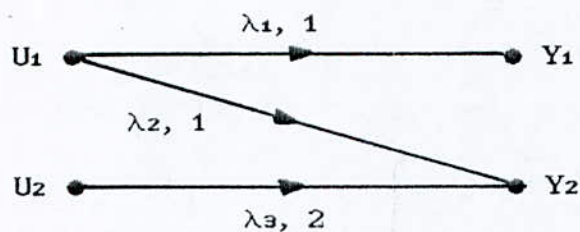


Fig. 3: Associated bipartite graph

This system is not structurally decouplable because there is no elementary I/O in the graph.

Example 4:

Consider now, the general case of a structured multivariable system with its associated graph given in figure 4.

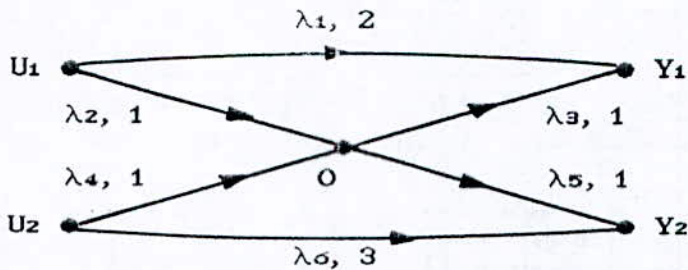


Fig. 4: Associated graph $G(\Sigma)$

The shortest paths from $U = u_1, u_2$ to y_1 are:

$(u_1 y_1)$; $((u_1 0), (0 y_1))$; $((u_2 0), (0 y_1))$

The shortest paths from $U = u_1, u_2$ to y_2 are:

$((u_1 0), (0 y_2))$ and $((u_2 0), (0 y_2))$

There are three feasible I/O matching in the graph:

$\{(u_1 y_1); ((u_2 0), (0 y_2))\}$, $\{((u_1 0), (0 y_1)); ((u_2 0), (0 y_2))\}$ and

$\{((u_1 0), (0 y_2)); ((u_2 0), (0 y_1))\}$.

Only one is elementary, say $\{(u_1 y_1); ((u_2 0), (0 y_2))\}$. Then, the

system is structurally decouplable by state feedback. If the length of the arc $(u_1 y_1)$ equals 3, the previous system is not structurally decouplable.

Remark:

Graphs of figures 3 and 4 are associated with thematrices of gains at infinity which are obtained from the transfer matrices of the structured systems [2]. The gain matrix at infinity denoted (Λ) plays a key role in the structural decoupling problem. Indeed, a necessary condition for the existence of an I/O matching in the associated graph is the full rank at infinity of the gain matrix.

3. STRUCTURAL DECOUPLING OF CASCADE SYSTEMS

3.1 PROBLEM STATEMENT AND SOME CONSIDERATIONS

It is assumed that the whole system is composed of two square structured system with the same number m of inputs and outputs.

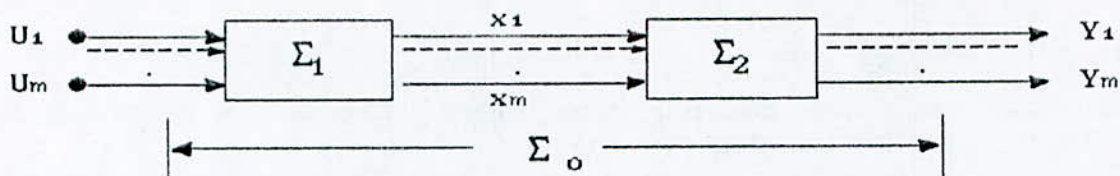


Fig. 5: Cascade structured systems

The structural decouplability of the whole system Σ_0 depends on the s-decouplability of its subsystems Σ_1 and Σ_2 . It appears three main cases:

- Both Σ_1 and Σ_2 are structurally decouplable
- None of them is structurally decouplable
- Only one of them is structurally decouplable.

case 1: Σ_1 and Σ_2 are S.D

As illustrated by the following example, the structural decouplability of Σ_0 is not always obtained.

Example 5:

Let $G(\Sigma_1)$ and $G(\Sigma_2)$ be the associated graphs of S.D subsystems Σ_1 and Σ_2 , respectively. Their cascade connection gives the whole graph $G(\Sigma_0)$.

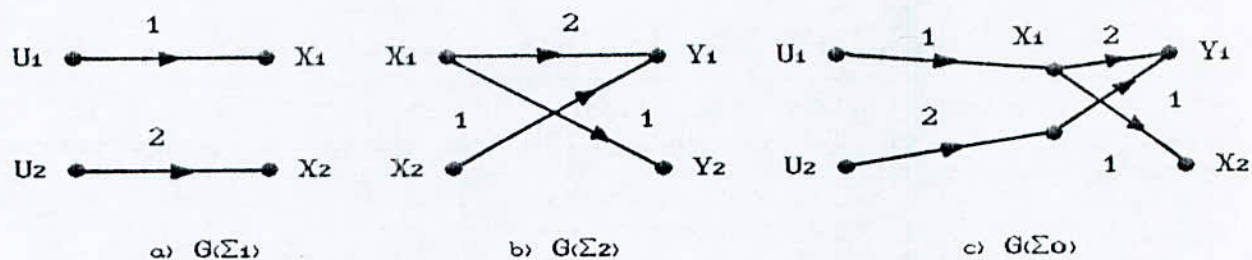


Fig. 6: Cascade connection of subgraphs

The elementary I/O matchings in $G(\Sigma_1)$ and $G(\Sigma_2)$ are respectively:

$$\{(u_1 \ x_1) ; (u_2 \ x_2)\} \text{ and } \{(x_2 \ y_1) ; (x_1 \ y_2)\}.$$

Also, an elementary I/O matching exists in $G(\Sigma_0)$:

$$\{((u_2 \ x_2), (x_2 \ y_1)) ; ((u_1 \ x_1), (x_1 \ y_2))\};$$

Then the whole system Σ_0 is S.D.

Now, if the length of the arc $(u_2 \ x_2)$ in $G(\Sigma_1)$ is ≥ 3 , then Σ_1 and Σ_2 remain S.D but the whole system Σ_0 is not (all shortest paths come from u_1).

Case 2: Σ_1 and Σ_2 are not S.D

In this case, it is obvious to see that Σ_0 could never be structurally decouplable because of the non existing of an I/O matching in the associated graphs to the subsystems. By the way, a necessary condition for structural decouplability of Σ_0 is that of the upstream subsystem.

Case 3: Only Σ_1 or Σ_2 is S.D

This case can be viewed as a pre or postcompensation structural decoupling according to whether Σ_2 or Σ_1 is not structurally decouplable. Eventhough, the post-compensation problem does not contribute towards the structural decouplability of the whole system. Its analysis justifies the preceding remark concerning the necessity of the upstream subsystem to be S.D (Σ_1 , in our case).

3.2 POST-COMPENSATION APPROACH

The problem can be stated as follows:

let Σ_1 be a not S.D system by static state feedback, in other words, there is no elementary I/O matching in $G(\Sigma_1)$. Then, one seeks on a structured system Σ_2 which makes S.D the whole system Σ_0 .

The answer is given by the following proposition:

Proposition 1:

Let Σ_1 be a $(m \times m)$ square structured system. If Σ_1 is not SD by static state feedback, then there is no $(m \times m)$ square post-compensator Σ_2 which makes Σ_0 S.D.

Proof:

Let $G(\Sigma_k)$, ($k = 1,2$) be the associated graph to the structured system Σ_k with has a transfer matrix $T_k(s,\lambda)$. Suppose the existence of an elementary I/O matching in $G(\Sigma_0)$. By definition, there exist paths of minimal lengths C_{uy_i} going from the inputs set U to the output y_i ($i=1,\dots,m$). Let now a restriction to Σ_1 with outputs x_j ($j=1,\dots,m$). Portions of paths of C_{uy_i} (i.e C_{ux_j}) located between the set U and x_j touch all x_j nodes. They are also portions of an elementary I/O matching in the partial subgraph $G(\Sigma_1)$. Consequently, one has inevitably an elementary I/O matching in $G(\Sigma_1)$. Indeed, in the one hand, the m paths between sets U and X can't intersect because of the "elementarity" of I/O matching between U and Y , in the other hand these portions C_{ux_j} are of minimal lengths. Othwise, if shorter paths \bar{C}_{ux_j} than C_{ux_j} exist from U to x_j , the linking of $\bar{C}_{ux_j}, C_{x_j y_i}$ will give shorter paths than C_{ux_i} , which is impossible [5].

This implies the structural decouplability of Σ_1 which is contradictory with the problem hypothesis; consequently, the whole system Σ_0 can't be maked S.D by postcompensation.

If the system Σ_0 is SD, then the subsystem Σ_1 is also SD. This last observation allows us to express the following corollary:

Corollary 1:

A system Σ_0 composed of two cascade subsystems ($\Sigma_0 = \Sigma_1 \Sigma_2$) is structurally decouplable only if the upstream one (Σ_1) is.

3.2 PRECOMPENSATOR APPROACH

The problem is the following: let Σ_2 be a system which is not S.D by static state feedback. One seeks for a precompensator Σ_1 which decouple structurally the whole system Σ_0 . As a consequence of the corollary stated above, this precompensator Σ_1 must be S.D. We can always satisfy this by adding delays to the inputs of the system Σ_2 [3].

Now, when is the whole system Σ_0 structurally decouplable? To answer this question, a deep analysis of the associated graph $G(\Sigma_2)$ reveals twomain reasons of its non S.D.

- a) An I/O matching but not elementary exists in $G(\Sigma_2)$
- b) No I/O matching at all in $G(\Sigma_2)$

In the first case, there's no chance to make the whole system Σ_0 S.D because of, on the one hand, an I/O matching exists (then all the nodes x_i and y_i are saturated), on the other hand, the m paths of this I/O are not elementary. Then, the shortest path in G_0 (from U to y_i) contains inevitably a path of this nonelementary I/O matching in $G(\Sigma_2)$ (see example 6).

An alternative exists in the second case providing the full rank at infinity of $T_2(s,\lambda)$ (the transfer matrix of Σ_2). This condition guaranties the existence in $G(\Sigma_2)$ of a set \mathcal{P} of m paths linking inputs X to all outputs Y such that each of them is a path of minimal length between one input and one output. This avoids the first case, i.e. existence of a non-elementary I/O matching in $G(\Sigma_2)$. This condition is more stronger than the full generic rank of $T_2(s,\lambda)$. However, these properties are equivalent if $G(\Sigma_2)$ is a bipartite graph.

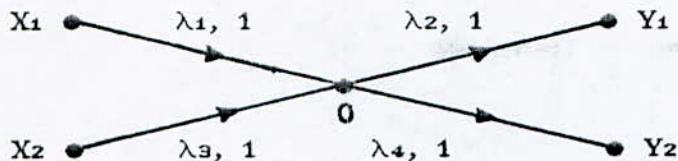
Example 6:

Let $T_2(s,\lambda)$ be the structured transfer matrix of Σ_2 :

$$T_2(s,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 s^{-2} & \lambda_3 \lambda_2 s^{-2} \\ \lambda_1 \lambda_4 s^{-2} & \lambda_3 \lambda_4 s^{-2} + \lambda_5 s^{-9} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_3 \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_4 & \lambda_3 \lambda_4 \end{bmatrix}$$

In spite of the full generic rank of $T_2(s,\lambda)$, this rank falls at infinity. Indeed, the rank of the gain matrix at infinity is one.

This reduction in the rank is due to the singularity shown by the following partial subgraph of $G(\Sigma_2)$.

Fig. 7: Associated partial subgraph to $G(\Sigma_2)$

There are two I/O matching which are not elementary:

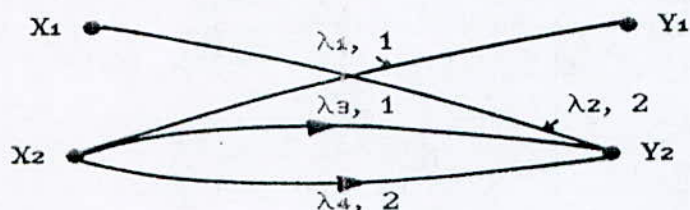
$$\left\{ ((x_1 0), (0 y_2)); ((x_2 0), (0 y_1)) \right\} \text{ and } \left\{ ((x_1 0), (0 y_1)); ((x_2 0), (0 y_2)) \right\}$$

Example 7:

Let $T_2(s, \lambda)$ be the transfer matrix of Σ_2 with a full rank.

$$T_2(s, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 s^{-1} \\ \lambda_2 s^{-2} (s+1)/(s+2) & \lambda_3 s^{-1} + \lambda_4 s^{-2} \end{bmatrix}$$

The associated graph $G(\Sigma_2)$ is:

Fig. 8: Associated graph to Σ_2

This graph is bipartite and the transfer matrix $T_2(s, \lambda)$ is also of full generic rank at infinity.

4. CONCLUDING REMARKS

We now summarize the main features of the structural decoupling of cascade systems in the transfer matrix approach.

- The associated graph displays the internal structure of the system and its complexity is much less than in the state variable context.
- Only essential information for our purpose is apparent in the graphs.
- The upstream structured subsystem must be S.D for decoupling the whole system.
- The structural decouplability by a precompensator of a non S.D system Σ requires full rank at infinity for the transfer matrix.
- If the whole system is SD and the downstream system is not SD, an elementary I/O matching in the graph associated can be always conceived.

Acknowledgements: *The work reported herein in a development of some results obtained while the author was under grant at Laboratoire d'Automatique de Grenoble. The author expresses his gratitude to his supervisors, Prof. C. Commault and J.M. Dion.*

5. REFERENCES

- [1] A. BELMEHDI, C. COMMAULT, J.M DION
"Découplage des systèmes structurés interconnectés", Conférence Internationale sur l'Analyse et l'Optimisation des Systèmes, INRIA Antibes, Juin 1986. Also in Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, pp. 368-379.
- [2] A. BELMEHDI
"Représentation par graphes des systèmes structurés"- Colloque \sum^{∞} Propriétés structurelles des systèmes multivariables- Application à des problèmes de commande, CNRS Paris, Juin 1986.
- [3] A. BELMEHDI
"Sur la stabilisation et le découplage structurel des systèmes linéaires", Thèse de Doctorat d'Ingénieur, INP Grenoble, Mars 1987
- [4] C. COMMAULT, J.M DION, A. BELMEHDI
"Structured systems within the transfer matrix approach - Application to decoupling", Systems and Control Letters, Vol.9, pp. 335-339, October 1987.
- [5] A. LINNEMANN
"Decoupling of structured systems", Systems and Control Letters, Vol. 1, pp. 71-86, August 1981.

A N N E X E 3

BELMEHDI. A.

"ON THE GENERIC STRUCTURE AT INFINITY
WITHIN THE TRANSFER MATRIX APPROACH",

A paraitre dans International Journal of Systems Science.

ON THE GENERIC STRUCTURE AT INFINITY
WITHIN THE TRANSFER MATRIX FORM

A. BELMEHDI

Département d'Automatisation
Institut National des Hydrocarbures
Boumerdes, 35000 - ALGERIA

ABSTRACT:

The present paper deals with a graph characterization of some structural properties at infinity for structured systems within the transfer matrix approach. The main properties covered are infinite zeros, essential orders and row and column properness of a transfer matrix. These structural informations are easily expressed in terms of input-output paths on a digraph associated with the structured system.

Keywords:

Structured systems, transfer matrix approach, infinite structure, graph theory

1- INTRODUCTION:

During the last two decades, structural properties of linear multivariable systems have been developed in different approaches. A review of some structural invariants is given in Commault et Al (1989). The structure at infinity of a system turns out to be relevant in solving control problems such as decoupling, Descusse and Dion (1982), disturbance decoupling, Commault et Al (1984) and model matching, Malabre and Kuçera (1984). At present, these structural invariants are used in the solution to control problems for structured systems which are a class of parametrized linear systems. In the transfer matrix context, these systems have a good graphical representation on which all relevant informations of the infinite structure are available, Belmehdi (1987). Infinite zero orders have been characterized, in the state space representation, in terms of input-output paths lengths on the associated graph with the structured system, Commault et Al (1991).

In this paper, we present a graph-theoretic characterization of infinite zero and essential orders structure within the transfer matrix approach. Also, some specific properties at infinity, i.e. the row and column properness of a transfer matrix are studied using the graph approach.

2- PRELIMINARIES

Let $T(s)$ be a $(p \times m)$ proper transfer matrix of a multivariable system. Each entry $T_{ij}(s)$ of $T(s)$ is assumed to be a composition of single input, single output subsystems with transfer functions $t_k(s)$, $(k=1,2,\dots)$. $t(s)$ can be factorized at infinity as follows:

$$t(s) = s^{-n_k \lambda_k} \frac{s^r + b_k s^{r-1} + \dots + b_0}{s^r + a_k s^{r-1} + \dots + a_0} = s^{-n_k \lambda_k} h(s) \quad (2.1)$$

where n_k is the infinite zero order of $t_k(s)$ and λ_k , a_k , b_k are unknown real parameters (λ_k is the infinite gain of $t_k(s)$).

In the transfer matrix approach, the definition of a structured system is the following: Belmehdi (1987), Commault et Al (1987).

Definition 1:

A structured system Σ is a cascade, parallel and/or feedback interconnection of single input, single output transfer functions $t_1(s), \dots, t_k(s)$ whose infinite zero orders n_1, \dots, n_k are given and whose gains at infinity $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ are parameters such that the parameter space Λ is open, $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$.

□

Before quoting the definition of row and column properness, introduce the following notation. Let

$$t_i^r = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n_i^r} T_i^r(s) \text{ if } T_i^r(\infty) \neq 0 \quad (2.2)$$

$$= 0 \quad \text{else}$$

where n_i^r represents the infinite zero order of the i th row $T_i^r(s)$. t_j^c is defined similarly (relatively to column $T_j^c(s)$).

Definition 2:

Let $T(s)$ be a $(p \times m)$ proper transfer matrix with a full row rank (resp. a full column rank). $T(s)$ is said to be row proper (resp. column proper) if:

$$\text{rank} [t_1^r, \dots, t_p^r]^T = p \quad (\text{resp. } \text{rank} [t_1^c, \dots, t_m^c]^T = m).$$

□

Note that when the system is structured, t_i^r (resp. t_j^c) represents the gain at infinity by row, viz. λ_i^r (resp. by column, viz. λ_j^c).

Recall now the computation of infinite zeros and essential orders structure, Commault *et Al* (1989).

Definition 3:

Let $T(s)$ be a $(p \times m)$ proper transfer matrix. The infinite zero orders of $T(s)$ are computed as follows:

$$n_1 = \text{least infinite zero order of the entries } T_{ij}(s) \text{ of } T(s)$$

$$n_2 = (\text{least infinite zero order of the 2-order minors of } T(s)) - n_1$$

$$n_k = (\text{least infinite zero order of the k-order minors of } T(s)) - \sum_{j=1}^k n_j$$

□

The essential orders which correspond to the minimal infinite structure which can be achieved for a decoupled system are defined as follows:

Definition 4:

Let $T(s)$ be a $(p \times m)$ proper transfer matrix of full row rank. The essential orders of $T(s)$ are computed as follows:

$$n_e^i = \sum_{k=1}^p n_k - \sum_{j=1}^{p-1} n_j^i \quad (2.3)$$

where n_e^i represents the i -th row essential order, n_k the infinite zero order of k -order minors of $T(s)$ and n_j^i the infinite zero order of j -order minors of the transfer matrix obtained from $T(s)$ by striking out the i -th row.

3- GRAPH CHARACTERIZATION OF THE GENERIC INFINITE STRUCTURE

In the transfer matrix approach, the graph associated with a structured system exhibits the fundamental insights of the system, Belmehdi (1987). In this section, these features are investigated using the graph-theoretic approach.

3.1- Graph representation of a structured system

We associate with a structured system Σ a digraph $G(\Sigma) = (N, E)$ whose node set N is the union of input set, output set and interconnection points set. Each edge of the set E corresponds to a single input, single output system. The length of an edge (resp. weight) is the infinite zero order (resp. gain at infinity) of the transfer function associated with the edge. Similarly, the length of a path is the sum of lengths of the composing edges and its weight, the product of weights of the composing edges. It turns out that a shortest path in $G(\Sigma)$ is a path which has the minimum length and a shortest input/output path is a path connecting one input and one output which is of minimum length.

For a structured transfer matrix $T(s, \lambda)$ associated with a graph $G(\Sigma)$, it appears that: Belmehdi (1987)

- The infinite zero order n_{ij} of $T_{ij}(s, \lambda)$ is equal to the minimal length of all paths from u_j to y_i . Similarly, the gain at infinity λ_{ij} of $T_{ij}(s, \lambda)$ is equal to the sum of the weights of the shortest paths from u_j to y_i .
- The infinite zero order n_i^r of $T_i^r(s, \lambda)$, the i -th row of $T(s, \lambda)$ is the minimal length of paths from all inputs u_j to the output y_i . The gain at infinity by row of $T(s, \lambda)$ is the λ_i^r defined in the previous section (see eq.(2.2). Note that the k -th element of λ_i^r is equal to the sum of weights of paths connecting u_j and y_i and has n_i^r as a length if such paths exist and zero otherwise.
- The infinite zero order n_j^c (resp. gain at infinity λ_j^c) of column $T_j^c(s, \lambda)$ is similarly defined by considering the minimal length (resp weight) of paths connecting an input u_j to all outputs.

3.2- Graph characterization of the column and row properness

Recall first the graph-theoretic characterization for the rank of structured transfer matrix, Van Der Woude (1991).

Definition 5:

The maximal number of input output node disjoint paths in $G(\Sigma)$ is equal to the structural rank r of $T(s,\lambda)$. $T(s,\lambda)$ is said to have a full row structural rank (resp. column structural rank) if $r = p$ (resp. m).

Theorem 1:

Let Σ be a structured system with a transfer matrix $T(s,\lambda)$ and the associated graph $G(\Sigma)$. If $T(s,\lambda)$ has a full structural column rank (resp. full structural row rank), then $T(s,\lambda)$ is structurally column proper (resp. structurally row proper) if and only if there exists a set of m (resp. a set of p) node-disjoint shortest input-output paths in $G(\Sigma)$.

Proof: For the first part of the theorem, recall that the full structural row rank is a decouplability condition, Descusse and Dion (1982). This condition is equivalent to the existence of a set of shortest node disjoint paths from U to Y , Commault et Al (1991). Note that a path of the set is a shortest path from all the inputs to the output y_i , ($i=1,\dots,p$). The second part of the theorem deals with the minimality condition which can be attained by a proper left decoupler. This is proved in Ohta and Kodama (1985).

3.3- Graph characterization of infinite zeros

The following proposition characterizes directly the structure at infinity of a structured system on the associated graph $G(\Sigma)$ in terms of node-disjoint input-output paths. It is a translation to the transfer matrix approach of a result given in the state space form, Commault et Al (1991).

Proposition 1:

Let $T(s,\lambda)$ be a $(p \times m)$ proper transfer matrix of a structured system and $G(\Sigma)$ the associated graph. A graph characterization of the infinite zero orders of $T(s,\lambda)$ is as follows:

$$\begin{aligned} n_1 &= L_1 \\ n_2 &= L_2 - L_1 \\ &\vdots \\ n_k &= L_k - L_{k-1} \quad (k = 2, \dots, r) \end{aligned} \tag{3.1}$$

where L_k is the minimal sum of k node-disjoint input-output paths lengths and r , the structural rank of $T(s,\lambda)$.

This proposition follows directly from definition 3.

3.4- Graph characterization of essential orders

This new set of feedback invariants plays a key role in solving control problems, Commault *et Al* (1989). A graph interpretation of essential orders is given by the following proposition:

Proposition 2:

Let Σ be a structured system with a transfer matrix $T(s,\lambda)$ of full row rank and $G(\Sigma)$ the associated graph. Then, a graph characterization of essential orders is as follows:

$$n_e^i = L_p - L_{p-1}^i \quad (3.2)$$

where L_p is the minimal sum of p node disjoint paths lengths on the graph $G(\Sigma)$ and L_{p-1}^i is the minimal sum of $p - 1$ node disjoint paths lengths on the graph $G(\Sigma_i)$ associated with the transfer matrix $T(s,\lambda)$ when the i -th row is removed.

The proof of this proposition derived easily from proposition 1 and definition 4.

4. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

The example to be considered herein summarizes the computation of the structural properties at infinity investigated previously.

Let Σ be a structured system with a transfer matrix $T(s,\lambda)$ and an associated graph $G(\Sigma)$ as shown in fig.(1).

$$T(s,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 s^{-1} & 0 & \lambda_2 s^{-9} \\ \lambda_3 s^{-2} & \lambda_4 s^{-9} & 0 \\ 0 & \lambda_5 s^{-2} & \lambda_6 s^{-5} \end{bmatrix}$$

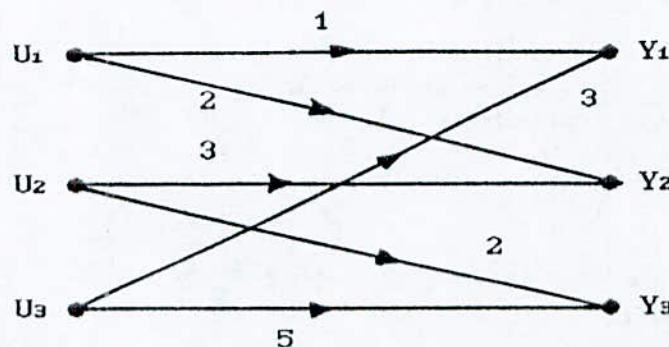


fig.1 The graph $G(\Sigma)$

The maximal number of node disjoint paths in $G(\Sigma)$ from U to Y is equal to 3. These sets of paths are:

$$\{(U_1Y_1), (U_2Y_2), (U_3Y_3)\} \text{ and } \{(U_1Y_2), (U_2Y_3), (U_3Y_1)\}$$

as shown in fig.(2). Hence the structural rank of $T(s,\lambda)$ is equal to 3. A well, this rank is equal to the number of inputs and the number of outputs ($m = p = 3$). Consequently, both the row and column structural ranks equal 3.

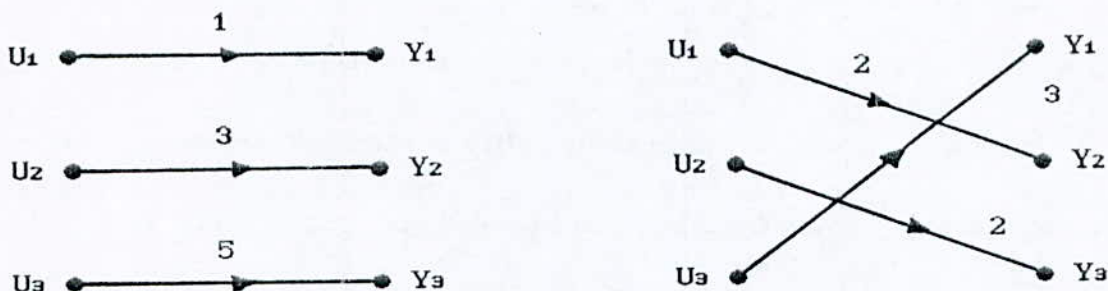


fig. 2 The sets of 3-nodes disjoint paths of $G(\Sigma)$

1) Computation of infinite zero orders:

It requires the examination of minors of all orders.

- A minor of order one of $T(s,\lambda)$ corresponds to an edge joining one input node to one output node in $G(\Sigma)$. The minimum infinite zero order n_1 of $T(s,\lambda)$ equals the minimum length L_1 in $G(\Sigma)$. We get: $n_1 = L_1 = 1$

- A minor of order 2 of $T(s,\lambda)$ corresponds to a subgraph which has two-node disjoint paths. The subgraphs are given in fig. (3).

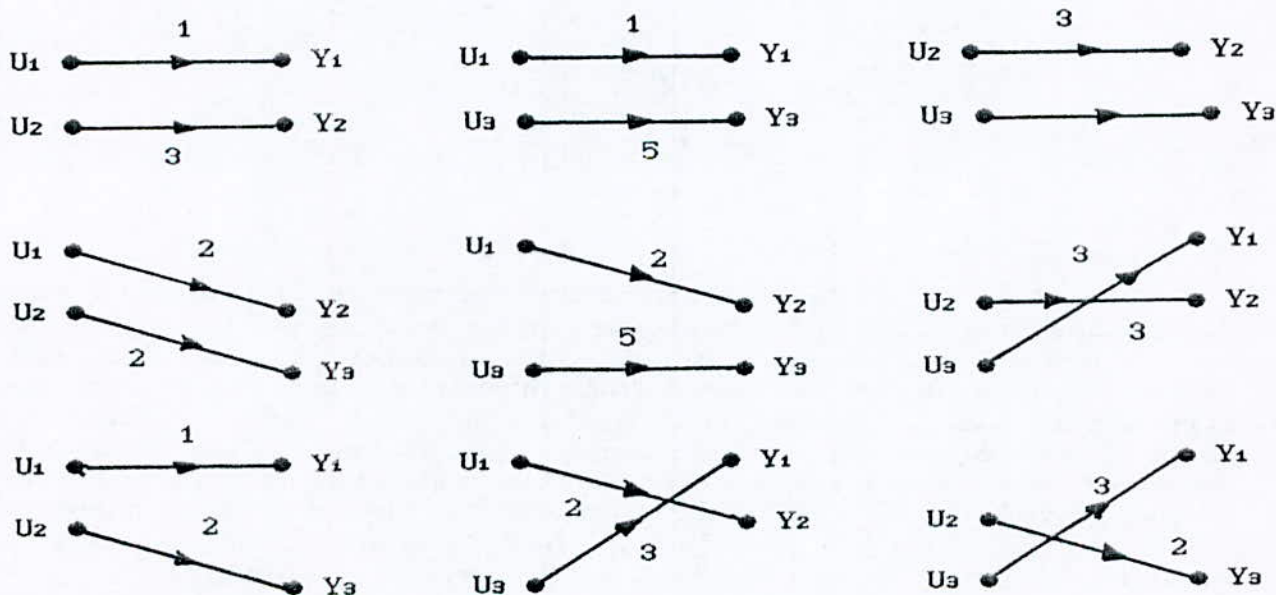


fig. 3 The sets of 2-nodes disjoint paths of $G(\Sigma)$

The subgraph of minimum length $L_2 = 3$ is $\{(U_1 Y_1), (U_2 Y_3)\}$.

Hence, $n_2 = L_2 - L_1 = 2$.

- The minor of order 3 of $T(s, \lambda)$ corresponds to the subgraphs of fig.(2). The minimal length is $L_3 = 7$, whence: $n_3 = L_3 - L_2 = 4$

2) Computation of essential orders:

Using fig. (1) and eq. (3.2), we get:

$$n_e^1 = L_3 - L_2^1 = 3 ; \quad n_e^2 = L_3 - L_2^2 = 4 ; \quad n_e^3 = L_3 - L_2^3 = 3.$$

where L_2^1 , L_2^2 and L_2^3 are respectively the minimum length of two-nodes disjoint paths in fig. (4 a, b, c). This figure represents subgraphs obtained from $G(\Sigma)$ by striking out the i -th row. We get:

$$L_2^1 = 4, \quad L_2^2 = 3 \text{ and } L_2^3 = 4.$$

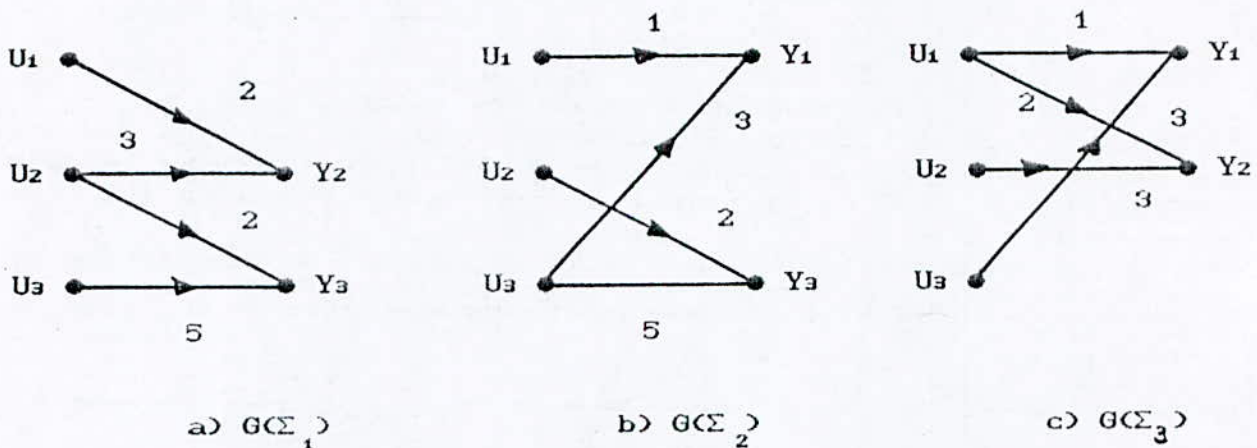


fig. 4 The subgraphs $G(\Sigma_i)$ of $G(\Sigma)$ with Y_i ($i=1,2,3$) removed

3) Graph-Theoretic checking of the row and column properness:

For the row properness, we take one by one the outputs y_i in fig.(1) and look for the shortest paths from U to y_i . We obtain the subgraph of fig.(5a) where the maximal number of node disjoint paths is equal to 2. This number is less than the row structural rank, whence the system is not structurally row proper. The column properness can be approached by the same way. We take the transpose of $T(s, \lambda)$, i.e, permutating input u_i and output y_i in graph $G(\Sigma)$. The subgraph of the shortest paths is given in fig.(5b). As previously, the structural column rank is equal to 2, whence Σ is not structurally column proper.

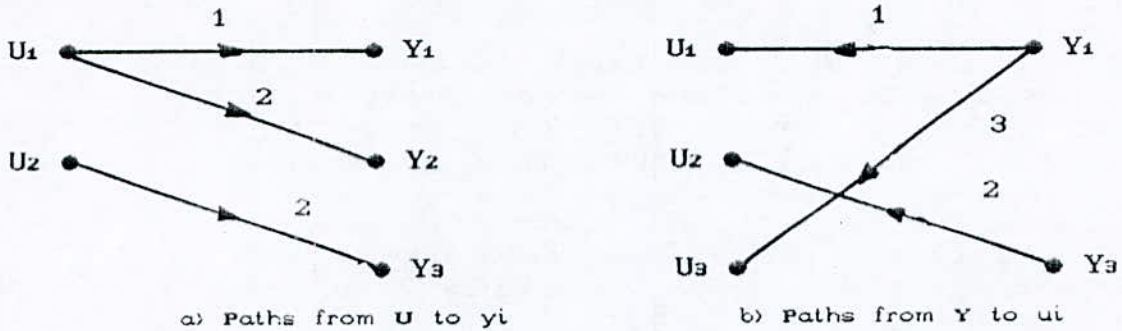


fig. 5 The sets of shortest node disjoint paths of $G(\Sigma)$

4. CONCLUSION

Commault and Dion (1991) gave a graph-theoretic characterization for infinite zero orders in the state space form. If the number of states is large, the search for node disjoint paths is hard to do by hand because of the complexity of the graph. In the transfer approach to structured systems, the associated graph is much less complicated than in the state variable context.

Our results on the graph characterization of infinite zero orders, essential orders and row (column) properness of a transfer matrix permit to tackle interconnected and large systems and make easier the investigation of solutions to control problems, Belmehti (1993), Commault et Al (1987). In the author's opinion, the characterization by a Coates graph, Coates (1959), is preferable for large scale systems. This graph is obtained from the one used in the preceding example by gathering together the input u_i and output y_i . It is intentionally omitted in this paper.

At last, note the existence in the literature of some graph-theoretic algorithms for the computation of the zeros at infinity, Reinschke (1988), Svariček (1990).

ACKNOWLEDGEMENTS: I express my thanks to Mrs Commault and Dion from L.A.Grenoble (France) for their profitable advices.

5- REFERENCES

- BELMEHDI, A., 1987, *Ph.D Dissertation* (I.N.P.Grenoble, France).
 BELMEHDI, A, and MANSOURI, R., 1993, submitted to *Int. J. Control*
 COATES, C.L., 1959, *IRE Transactions on Circuit Theory*, 170.
 COMMAULT, C., DION, J.M., and PERRES, A., 1984, *9th IFAC World Congress*, 130.
 COMMAULT, C., DION, J.M., and BELMEHDI, A., 1987, *Systems and Control Letters*, 9, 335.

- COMMAULT, C., DION, J.M., and PEREZ, A., 1991, *IEEE Trans. Autom. Control*, 7, 884.
- COMMAULT, C., LAFAY, M., and MALABRE, M., 1989, *IFAC workshop on System Structure and control*, (Prague), 179.
- DESCUSSE, J., and DION, J.M., 1982, *IEEE Trans. Autom. Control*, 971
- DION, J.M., and COMMAULT, C., 1991, *European Control Conference*, (Grenoble), 1789.
- LIN, C.T., 1974, *IEEE Trans. Autom. Control*, 19, 201.
- LINNEMANN, A., 1981, *Systems and Control Letters*, 2, 71.
- MALABRE, M., and KUCERA, V., 1984, *IEEE Trans. Autom. Control*, Control, 29, 266.
- OHTA, Y., and KODAMA, S., 1985, *IEEE Trans. Autom. Control*, 30, 818
- REINSCHKE, K.J., 1988, *Lectures Notes in Control and Information Sciences* (Springer Verlag).
- SVARICEK, F., 1990, *29th Conference on Decision & Control* (Honolulu- Hawaii), 2923.
- VAN DER WOUDE, J.W., 1991, *Math. Control Signals Systems*, 4, 33.

ANNEXE 4

BELMEHDI, A.

"TRANSFER MATRIX APPROACH TO THE STRUCTURAL
BLOCK DIAGONAL DECOUPLING PROBLEM",

International Journal of Control, Vol. 60, N°6, pp. 1383-1391

**TRANSFER MATRIX APPROACH TO THE STRUCTURAL
BLOCK DIAGONAL DECOUPLING PROBLEM**

A. BELMEHDI

Department of Control Engineering
I.N.H - Boumerdes, 35000 - ALGERIA

ABSTRACT:

In this paper, the block diagonal decoupling problem for structured systems is treated using the transfer matrix approach.

An associated graph which displays the internal structure of the system (invariant and interconnection) is used to establish necessary and sufficient conditions for the solution of the problem. These conditions are expressed in the graph in terms of shortest input output (I/O) paths which are related to the infinite structure of the system.

Keywords:

Structured system, transfer matrix, graph theory, block decoupling, infinite structure.

1- INTRODUCTION

During the last two decades, the decoupling problem of linear multivariable systems has been extensively studied (Falb and Wolovich (1967), Hautus and Heymann (1983) and Morse and Wonham (1973)). The results obtained on the structure at infinity for linear systems led to easy interpretations of the decoupling solutions (Descusse and Dion, 1982). The generic solvability of such control problem was first considered by Warren and Mitter (1975). It is similar in solving a decoupling of a system with unknown parameters. When these parameters are independent, the system is called "structured", Lin (1974). Structural properties (i.e. which are true for almost all values of the parameters) can be easily interpreted within a system graph characterization (see Reinschke, 1988).

Structured systems were also introduced within the transfer matrix framework, Commault *et al* (1987). In this approach, a structured system is seen as an interconnection (cascade, parallel, feedback) of single input, single output independent subsystems where the prior knowledge of each subsystem is reduced to its infinite structure.

Diagonal decoupling of square structured systems was also studied within the transfer matrix approach, Belmehdi(1987). Necessary and sufficient conditions follow closely those stated by Linnemann (1981) in the state space form. Recently, an equivalent result (always in the state space form) which is easily achievable when using classical graph theoretical algorithms was given in Commault and Dion (1991). It takes the non-squariness of the system into account.

The present paper deals with two main problems:

- 1) translation of results developed in Commault and Dion (1991) to the transfer matrix approach and,
- 2) their extension to the block diagonal decoupling.

2- PRELIMINARIES

Consider a single-input, single-output system described by a strictly proper rational transfer function $t(s)$. Factorization at infinity given in Belmehdi *et al* (1986) yields:

$$t(s) = s^{-n} \lambda B(s, \lambda) \quad (1)$$

Where n is the infinite zero order of $t(s)$ (i.e., the difference between degrees of the denominator and numerator of $t(s)$), λ the gain at infinity of $t(s)$ and $B(s, \lambda)$ a biproper transfer function with unknown coefficients.

Definition 1:

A structured system Σ_{Λ} is a cascade, parallel and/or feedback interconnection of SISO transfer functions $t_1(s), t_2(s), \dots, t_N(s)$ given by their factorizations at infinity of the form (1), where the set of parameters $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ is an open set Λ included in R^N , Commaut et Al (1987).

A property of a structured system is said to be verified if it is satisfied for any $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$ in Λ and out of a proper algebraic variety $V \subset \Lambda$. A proper algebraic variety, in R^N , is defined to be the set $V = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$ of common zeros of a finite number of non trivial polynomials in λ_i with real coefficients.

For SISO interconnected systems one has: (see Belmehdi et Al, 1986)
A parallel composition of $t_1(s)$ and $t_2(s)$, where $t_i(s)$ has infinite zero order n_i and gain at infinity λ_i , leads to:

$$t(s) = t_1(s) + t_2(s) \tag{2}$$

whose infinite zero order is $\min(n_1, n_2)$ and gain at infinity equals to $\lambda_1 + \lambda_2$ if $n_1 = n_2$, λ_1 if $n_1 < n_2$ or λ_2 if $n_2 < n_1$.
A cascade composition of $t_1(s)$ and $t_2(s)$ leads to:

$$t(s) = t_1(s) \cdot t_2(s) \tag{3}$$

whose infinite zero order is $n_1 + n_2$ and gain at infinity $\lambda_1 \lambda_2$.
A feedback composition of $t_1(s)$ and $t_2(s)$ leads to:

$$t(s) = t_1(s) \cdot [1 + t_1(s) \cdot t_2(s)]^{-1} \tag{4}$$

whose infinite zero order is n_1 and gain at infinity λ_1 .

Example 1:

The example given in figure 1 illustrates a structured system and interconnection properties.

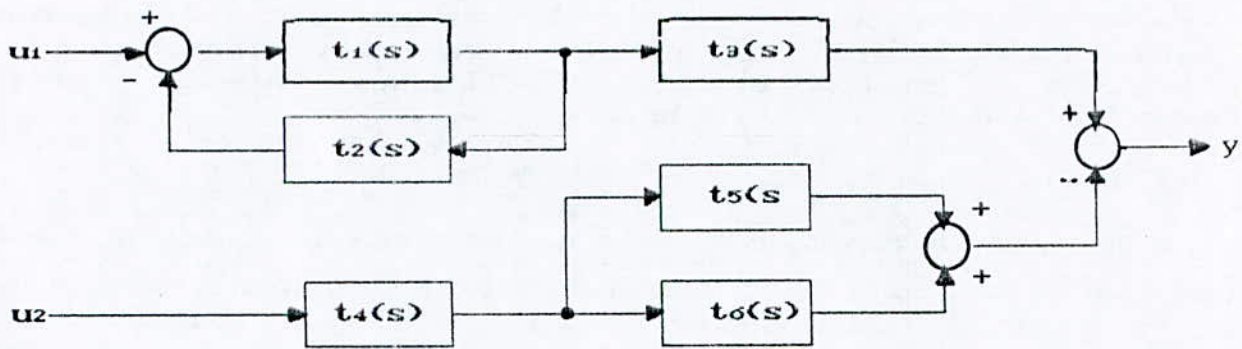


Fig.1: A structured system and SISO interconnections

3- GENERIC INFINITE STRUCTURE AND ASSOCIATED GRAPHS

It is associated with such structured system, a directed graph $G(\Sigma) = (N, E)$ where the node set N is the union of the input/output and interconnection sets. Each edge corresponds to a single input single output system. The length of an edge is the infinite zero order n of the corresponding SISO transfer function and its weight the gain at infinity. The same approach is done with paths, i.e., the length of a path is the sum of lengths of the composing arcs and the weight of a path is the product of weights of the composing arcs. It turns out that a shortest path is the one which has the minimum length, and a shortest input output path in $G(\Sigma)$ is a path joining one input and one output which is of minimum length.

For a structured transfer matrix $T(s, \lambda)$ characterized by a graph $G(\Sigma)$, one has:

- The infinite zero order n_{ij} of $T_{ij}(s)$ is equal to the minimum length of all paths with initial nodes at u_j and terminal nodes at y_i . The gain at infinity λ_{ij} is equal to the sum of weights of shortest paths from u_j to y_i .
- The infinite zero order n_i of $T_i(s, \lambda)$, the i th row of $T(s, \lambda)$, is the minimal length of paths from all inputs to y_i . The infinite gain of $T_i(s, \lambda)$ is then:

$$B_{0i}(\lambda) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n_i} \cdot T_i(s, \lambda) \quad (5)$$

Where the k -th element of $B_{0i}(\lambda)$ is equal to the sum of path weights with length n_i from u_j to y_i if there exist such paths and zero if not.

Example 2:

The following example illustrates a structured transfer matrix (i.e whose elements are factorized at infinity).

$$T(s,\lambda) \begin{bmatrix} \lambda_2 \lambda_9 s^{-2} + \lambda_1 s^{-3} + \lambda_9 \lambda_4 \lambda_5 s^{-4} & \lambda_9 \lambda_5 \lambda_6 s^{-9} \\ \lambda_4 \lambda_5 \lambda_7 s^{-5} + \lambda_2 \lambda_7 s^{-9} & (\lambda_8 + \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7) s^{-4} \end{bmatrix}$$

The graph associated with the above structured transfer matrix is shown in figure 2. It characterizes the structure at infinity of the system and then contains all relevant informations to solve the structural decoupling.

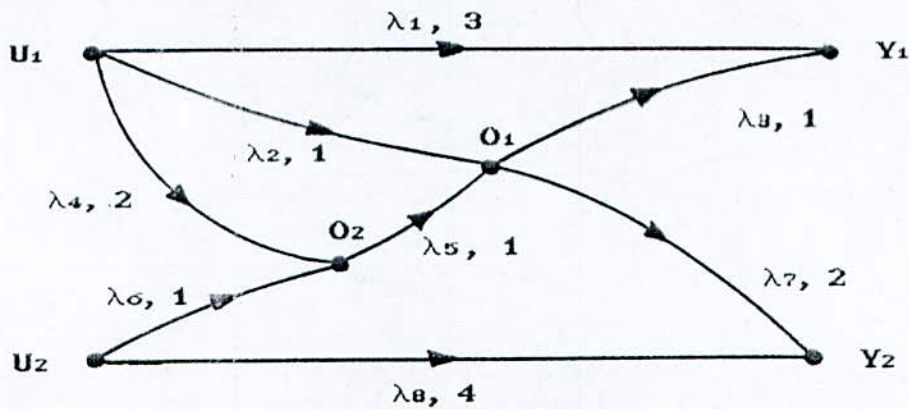


Fig.2: The graph $G(\Sigma)$

Proposition 1:

Consider a structured system Σ with a transfer matrix $T(s,\lambda)$ and an associated graph $G(\Sigma)$. One has the following:

- i) the structural rank which is the number of infinite zero order of $T(s,\lambda)$ is equal to the maximal number of I/O disjoint paths.
- ii) the infinite zero orders are characterized on $G(\Sigma)$ as follows

$$\begin{aligned} n_1 &= L_1 \\ n_k &= L_k - L_{k-1} \quad (k = 2, \dots, r) \end{aligned} \tag{6}$$

where L_k is the minimal sum of k disjoint I/O path lengths. This result is close in relationships with the one given in the state space approach, (Commault and Dion, 1991). However, it differs in the graph characterization of the infinite zero orders.

The proof of ii) follows directly from the definition of infinite structure of a transfer matrix, (Dion and Commault , 1982) .The point i) is a well known result demonstrated in Commault and Dion (1991) using the Rosenbrock system matrix . However, the proof given below follows directly from the Coates graph, (Coates, 1959) associated with a transfer matrix. This latter is obtained by:

- Considering the subgraph of $G(\Sigma)$ when the input nodes are removed (resp. the output nodes) which are not j_1, \dots, j_k (resp. i_1, \dots, i_k).
- Folding the input node u_i and the output node y_i in a one node.

Remark:

The obtained Coates graph has k input / output nodes and q interconnection nodes.

As illustrated in figure 3, the Coates graph for example 2 is:

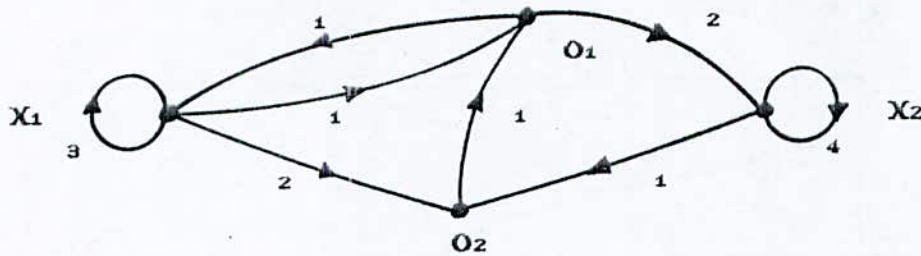


Fig.3: The Coates graph $G_c(\Sigma)$

Proof of i):

Recall that for any matrix, the rank is the maximal order minors with determinant different from zero (i.e, a one-factor exists in the Coates subgraph associated to the minor). Then for a

minor of order k of a transfer matrix $T(s)$, say $T_{1, \dots, k}^{1, \dots, k}$, the rank

is given by the largest Coates subgraph where there exists at least a one-factor. When a suchspanning subgraph exists, the structural rank is equal to the number of input output nodes spanned by the one-factor. Since a one-factor is equivalent to a set of input/output disjoint paths, then a one-factor spanning a maximal number of input/output nodes leads to the maximal order minors.

4- STRUCTURAL BLOCK DIAGONAL DECOUPLING

Recall first the problem formulation of block decoupling and a simple decoupling condition expressed in terms of the infinite structure of the transfer matrix $T(s)$ given in Dion (1983).

Let $T(s)$ be a $(p \times m)$ proper rational matrix. The problem of block decoupling can be stated as follows:

Let (p_1, \dots, p_k) be a given set of non zero positive integers satisfying $\sum p_i = p$. The system with transfer matrix $T(s)$ is said to be block decoupled relatively to the partition p_i if there exist non zero integers (m_1, \dots, m_k) satisfying $\sum m_i = m$ such that $T(s)$ has the block diagonal form:

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & & & \\ & T_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{kk}(s) \end{bmatrix} = \text{diag} [T_{11}(s), \dots, T_{kk}(s)]$$

with $T_{ii}(s) \in R_p^{p_i \times m_i}(s)$ and $T_{ij}(s) = 0$ for $i \neq j$. $T(s)$ is called non degenerate if $T_{ii}(s)$ is different from zero for any i .

When $T(s)$ is decomposed as previously according to the partition (p_1, \dots, p_k) , i.e:

$$T(s) = [T_1(s), \dots, T_k(s)]^T$$

the decoupling condition using the infinite structure is given by the following theorem:

Theorem 1:

Let $T(s)$ be a $(p \times m)$ proper transfer matrix and (p_1, \dots, p_k) a given set of non zero positive integers satisfying $\sum_{i=1}^k p_i = p$. A system with a transfer matrix $T(s)$ can be block decoupled relatively to the partition (p_1, \dots, p_k) with static state feedback $u = Fx + Gv$ (G regular) if and only if the infinite structure of $T(s)$ is equal to the union of the infinite structures of the $T_i(s)$'s.

When the system is structured, we are looking for structural solvability of the feedback block decoupling problem. For any $\lambda \in \Lambda$ the above theorem is valid. Applying proposition 1, which characterizes the infinite structure of the system Σ for almost all $\lambda \in \Lambda$, one has:

Corollary 1:

Let Σ_p be a p output structured system and Σ_{pk} be a p_k output structured subsystem relatively to the partition (p_1, \dots, p_k) .

Σ_p is structurally feedback block decouplable by $u = Fx + Gv$, G non singular, if and only if the infinite structure of Σ_p is given by the union of the infinite structure of subsystems Σ_{pk} .

Commault and Dion (1991), gave a new necessary and sufficient condition for the feedback diagonal decoupling. This condition which holds in the case of block decoupling problem is given by the following theorem:

Theorem 2:

Let $T(s)$ be a $(p \times m)$ proper rational matrix decomposed according to the partition p_1, \dots, p_k as $T(s) = [T_1(s), \dots, T_k(s)]^T$, where $T_j(s)$ is a proper rational matrix of dimension $(p_j \times m)$. Denote n_i ($i = 1, \dots, p$) the infinite zero orders of $T(s)$ and n_{pj} the infinite zero orders of $T_j(s)$ (for $j = 1, \dots, k$). Then, a system with a transfer matrix $T(s)$ is block decouplable by static state feedback $u = Fx + Gv$ (G non singular), according to the partition p_1, \dots, p_k if and only if:

$$\sum_{i=1}^p n_i = \sum_{j=1}^k n_{pj} \quad (7)$$

Now, the main result of the diagonal block decoupling for structured systems is given by the following theorem:

Theorem 3:

Let Σ_p be a p output structured system and p_1, \dots, p_k a set of non zero integers satisfying $\sum p_i = p$. Let Σ_{p_i} be the p_i output structured systems.

Then, Σ_p is structurally block decouplable by static state feedback $u = Fx + Gv$, G non singular, relatively to the partition p_1, \dots, p_k if and only if:

$$L_p = \sum_{i=1}^{pk} L_{p_i} \quad (8)$$

Where L_p and L_{p_i} are respectively the minimal sum of p vertex disjoint input output path lengths in $G(\Sigma_p)$ and the minimal sum of p_i vertex disjoint input output path lengths in $G(\Sigma_{p_i})$.

Proof:

From proposition 1, one has $\sum_{i=1}^p n_i = L_p$.

Applying the same proposition to the block subsystems defined by the partition p_1, \dots, p_k , and the fact that $\sum p_i = p$, the previous condition derived. Then, by theorem 3, the structured system is block decouplable by static feedback.

Example 3:

Consider the following structured transfer matrix $T(s,\lambda)$.

$$T(s,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}.s^{-3} & \lambda_{12}.s^{-2} & \lambda_{13}.s^{-1} & \lambda_{14}.s^{-1} & B_{14}(s) \\ \lambda_{21}.s^{-3} & \lambda_{22}.s^{-3} & \lambda_{23}.s^{-2} & \lambda_{24}.s^{-2} & B_{24}(s) \\ \lambda_{31}.s^{-2} & \lambda_{32}.s^{-1} & \lambda_{33}.s^{-1} & \lambda_{34}.s^{-1} & B_{34}(s) \end{bmatrix}$$

Where:

$$B_{14}(s)=B_{24}(s)=B_{34}(s)=\frac{s^4}{(s^4+1)} \text{ and } B_{32}(s)=B_{33}(s)=\frac{(s^2+s+1)}{s^2}$$

We are interested in the structural block decouplability of $T(s,\lambda)$ according to the partition (2,1).

The associated graph $G(\Sigma_p)$ is given in figure 4:

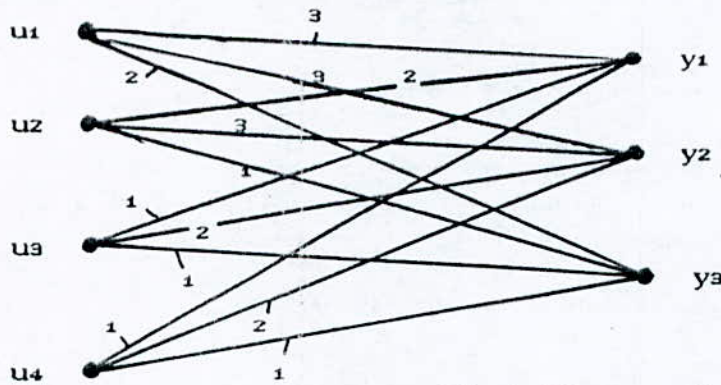


Fig.4: The graph $G(\Sigma_p)$

The structural rank of $T(s,\lambda)$ being 3, the transfer matrix has 3 infinite zeros of order (1, 1 and 2). This can be checked on the partial subgraph $(u_2, u_3, u_4 \text{ and } y_1, y_2, y_3)$ corresponding to the minor of order 3 which has the minimum infinite zero order.

The associated Coates graph is the following (figure 5):

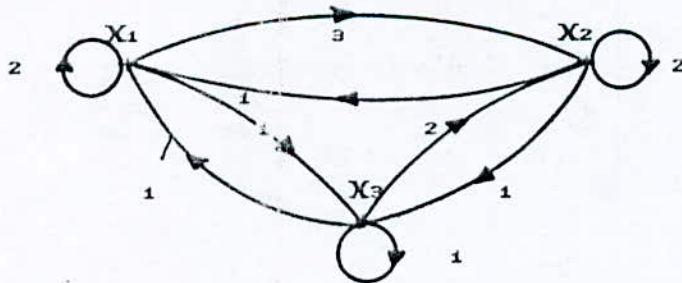


Fig.5: The Coates graph $G_c(\Sigma_p)$

where X_1 , X_2 and X_3 are respectively the gathering of nodes u_2 and y_1 , u_4 and y_2 , u_3 and y_3 .

The set of one-factors of the Coates graph is given below in figure 6 with their corresponding lengths. Thus, the minimum length of the one-factors is $L_p = 4$.

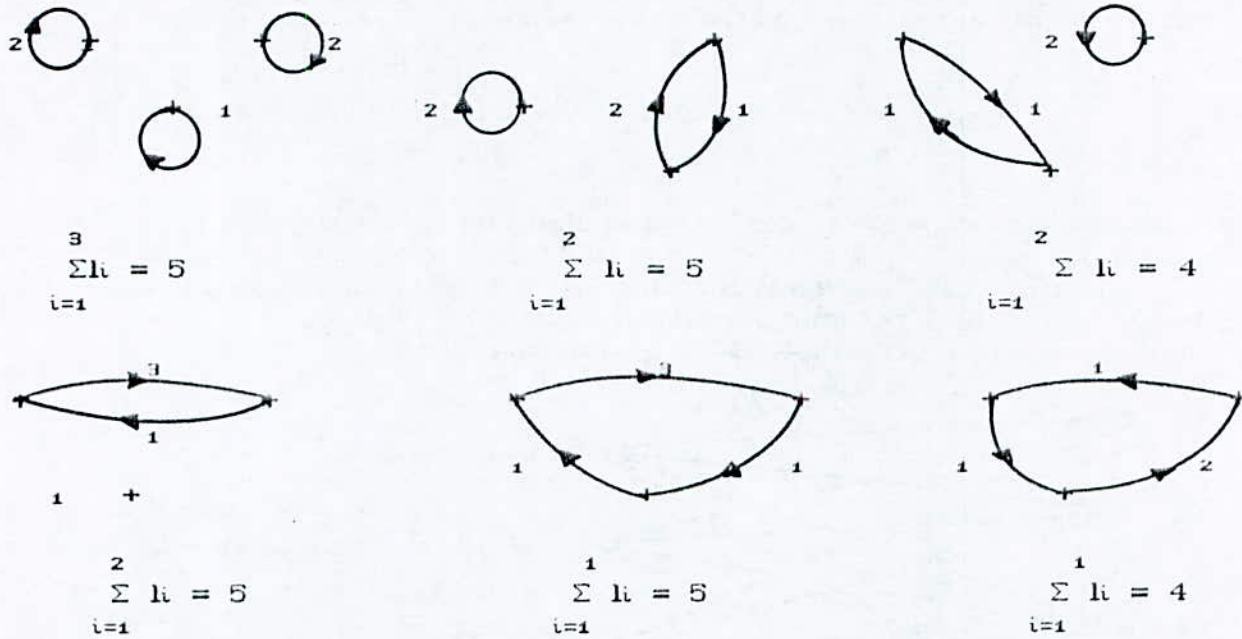


Fig.6: The set of one-factors of $G_c(\Sigma_p)$

Now, the same thing is done with partial subgraphs $G(\Sigma_{p1})$ and $G(\Sigma_{p2})$ associated with $T_1(s, \lambda)$ and $T_2(s, \lambda)$, respectively. $G(\Sigma_{p1})$ and $G(\Sigma_{p2})$ are both given in figure 7:

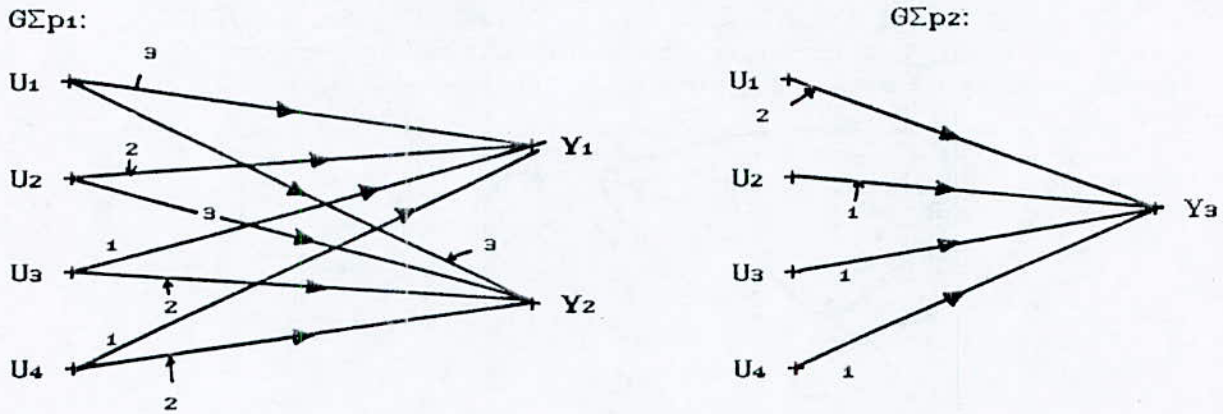


Fig.7: Partial subgraphs $G(\Sigma_{p1})$, (a) and $G(\Sigma_{p2})$, (b)

The Coates partial subgraphs and one-factors are represented in figure 8.

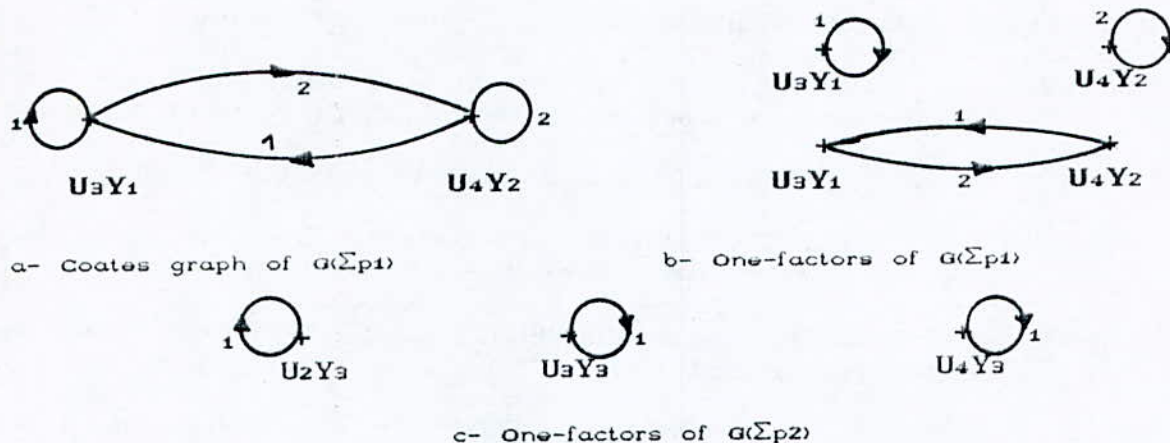


Fig.8: Coates subgraphs $G_c(\Sigma_{p1})$, $G_c(\Sigma_{p2})$ and their one-factors

The minimum length for the two one-factors of $G(\Sigma_{p1})$ is $L_{p1} = 3$, and the minimum length for the three one-factors of $G(\Sigma_{p2})$ equals to one ($L_{p2} = 1$). Then, we have $L_p = L_{p1} + L_{p2} = 4$ and the system is structurally block decouplable.

5- CONCLUDING REMARKS

If the partition (p_1, \dots, p_k) is such that $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1$, (i.e, one has a row by row decoupling), the result given in Commault and Dion (1991) remains valid in our approach.

The directed graph approach provides an effective solution to the decoupling problem. However, its effectiveness depends upon the efficiency with which the input output disjoint paths are generated. Since, for a complicated graph, this number is usually large, it is preferred to use a Coates graph on which one can determine in advance the number of one-factors. It is given by the so-called "permanent" of the corresponding matrix defined exactly as the determinant except that all terms are taken with positive signs. The coates graph is then more interesting than a digraph in an algorithmic point of view.

Acknowledgements: I express my thanks to Mrs Commault and Dion from LAG (France) for their fruitful advices and the review of a first version.

6-REFERENCES

- BELMEHDI, A.,1987, Ph.D dissertation, INP Grenoble (France).
- BELMEHDI, A., COMMAULT, C., and DION, J.M.,1986, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag,pp.368.
- COATES, C.L.,1959, IRE. Trans. on Circuit theory, June, pp.170.
- COMMAULT, C. and DION, J.M.,1991, Proceeding of the ECC, European Control Conference, Grenoble, France, pp 1789.
- COMMAULT,C., DION,J.M., and BELMEHDI,A.,1987, Systems and Control Letters,9, pp 335.
- DESCUSSE, J.,and DION, J.M.,1982, IEEE. Transactions on Automatic Control,28, 823.
- DION, J.M.,1983, International Journal of Control, 37, 521.
- DION,J.M.,and COMMAULT,C.,1982,Systems and Control Letters,1,312.
- FALB,P.L.,and WOLOVICH, W.A.,1967, IEEE Transactions on Automatic Control,12, 651.
- HAUTUS,M.L.J.,and HEYMANN,M.,1983, IEEE Transactions on Automatic Control,28, 823.
- LIN, C.T.,1974, IEEE Transactions on Automatic Control ,19, 201.
- LINNEMANN, A.,1981, Systems and Control Letters, 2, 71.
- MORSE, A.S.,and WONHAM, W.M.,1973, IEEE Transactions on Automatic Control,16, 568.
- REINSCHKE, K.J., 1988, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag.
- WARREN,M.E.,and MITTER,S.K.,1975, IEEE. Transactions on Automatic Control, 20, 268.

A N N E X E 5

BELMEHDI, A. AND MANSOURI, R.

"STRUCTURAL DISTURBANCE DECOUPLING BY OUTPUT MEASUREMENT FEEDBACK:
THE TRANSFER MATRIX APPROACH",

Soumis à International Journal of Control,

**STRUCTURAL DISTURBANCE DECOUPLING BY OUTPUT MEASUREMENT FEEDBACK:
THE TRANSFER MATRIX APPROACH**

A. BELMEHDI⁺ - R. MANSOURI⁺⁺

+ Département d'Automatique. INH, 35000 Boumerdes - DZ

++ Département de Génie Electrique. ENP, 16000 Alger-DZ

ABSTRACT:

This paper deals with the disturbance rejection problem for structured systems via measured output feedback. The problem is considered within the transfer matrix approach which turns out to be relevant for this purpose.

An associated graph which exhibits the infinite structure of the system and displays its internal structure is used to make easier the interpretation of necessary and sufficient output feedback disturbance rejection conditions for structured systems. These conditions are expressed in terms of shortest input output paths in the associated graph.

KEYWORDS:

Structured systems, transfer matrix form, graph, infinite structure, output measurement feedback disturbance rejection.

1. INTRODUCTION:

Structured systems have been extensively and mainly studied during the last fifteen years in the state space form. The typical features are without any doubt, a "proximity" of these systems to the physical reality and a good graphical representation. Consequently, structural properties and solutions to control problems can be graphically interpreted.

This concept of structure has been introduced by Lin (1974). He gave structural conditions for some fundamental properties in the state space form such as controllability. The generalization to the multivariable case was given by Shield and Pearson (1976). Always in this framework, many control problems have been also considered for this class of systems such as state feedback decoupling, Linnemann (1981), Dion and Commault (1991), state feedback disturbance rejection, Commault et Al (1991), decentralization control, Evans and Larsen (1984) and pole placement, Reinschke (1988), Sefik and Sezer (1989).

Moreover, the transfer matrix approach for structured systems has been introduced, Commault et Al (1987). It presents several advantages regarding to the state space representation. Structural conditions to the state feedback decoupling problem have been obtained in this framework, Belmehdi (1987), (1993).

In this paper, the structural solvability of the disturbance decoupling problem is investigated. We first interest in the general case when the information about the system is given from a measured output. We then deduce some particular cases for disturbance rejection problems.

The contribution takes place especially in the graph interpretation and the extension to structured systems of results given in the classical form (Bhattacharyya, 1982), Commault et Al (1984)

The paper is organized as follows:

In section 2, we first recall some basic concepts and then we formulate the problem. Graph interpretation of some properties at infinity which are crucial in solving the disturbance rejection problem is given in section 3. Section 4 is consecrated to the structural disturbance decoupling by measured output feedback. Some particular cases derived from the main result end the paper.

2. PRELIMINARIES AND PROBLEM FORMULATION

Throughout the paper, we denote by $R_p(s)$ the ring of proper rational functions and $R_p^{p \times m}(s)$ the set of proper rational $p \times m$ transfer matrices. The units (invertible elements) of the ring $R_p^{m \times m}(s)$ are called bicausal matrices and are characterized by the property that $B(s)$ is a bicausal matrix if and only if:

$$\det \left(\lim_{s \rightarrow \infty} B(s) \right) \neq 0$$

2.1 Basic concepts

Consider a transfer function $t_k(s) \in R_p(s)$ which is factorized at infinity, Belmehdi (1987). One has:

$$t_k(s) = s^{-n_k} \lambda_k \cdot \frac{s^r + b_k s^{r-1} + \dots + b_0}{s^r + a_k s^{r-1} + \dots + a_0} = s^{-n_k} \lambda_k h_{\lambda}(s) \quad (1)$$

where n_k and λ_k are respectively the infinite zero order and the gain at infinity of $t_k(s)$. Coefficients λ_k, a_k, b_k are unknown real parameters and $h_{\lambda}(s)$ is a unit of $R_p(s)$.

Definition 1: (Commault et Al, 1987)

A structured system Σ_{Λ} is a cascade, parallel and/or feedback interconnection of SISO transfer functions given by their factorization at infinity of the form (1) where the gains λ_k are independent free parameters.

This definition remains valid in the multivariable case when the entries of the transfer matrix of the system are independent structured subsystems.

Definition 2: (Kailath, 1980)

Let $T(s)$ be a $p \times m$ proper transfer matrix with full row rank (resp. full column rank). $T(s)$ is said to be row proper (resp. column proper) if $\text{rank} [t_1^r \dots t_p^r]^T = p$ (resp. $\text{rank} [t_1^c \dots t_m^c] = m$), where

$$t_i^r = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n_i^r} T_i^r(s) \quad \text{if } T_i^r(\infty) \neq 0 \quad (2)$$

$$= 0 \text{ else}$$

n_i^r is the infinite zero order of the i th row $T_i^r(s)$.

t_j^c is defined similarly (relatively to the column $T_j^c(s)$).

Notice that when the system is structured, t_i^r and t_j^c are the infinite gains by row and by column, respectively.

Example 1:

Consider the following structured transfer matrix

$$T(s, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 s^{-1} & \lambda_2 s^{-2} & \lambda_3 s^{-1} \\ \lambda_4 s^{-2} & \lambda_5 s^{-3} & \lambda_6 s^{-2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

One has: $t_1^r = \lambda_1^r = [\lambda_1 \ 0 \ \lambda_9]$ and $t_2^r = \lambda_2^r = [\lambda_4 \ 0 \ \lambda_\sigma]$, hence $T(s, \lambda)$ is generically row proper except when $\lambda_1 \lambda_\sigma - \lambda_9 \lambda_4 = 0$ and $T(s, \lambda)$ is not generically column proper since $m > p$.

2.2 Problem formulation

Consider a linear multivariable system represented by:

$$\begin{bmatrix} y_c(s) \\ u_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & H(s) \\ M(s) & N(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_c(s) \\ e(s) \end{bmatrix} = T(s) \cdot \begin{bmatrix} u_c(s) \\ e(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

where $e \in R$ is the disturbance input, $u_c \in R$ is the control input, $y_c \in R^p$ is the output to be regulated and $y_m \in R^l$ is the measured output. $G(s)$, $H(s)$ and $N(s)$ are proper transfer matrices of appropriate dimensions and $M(s)$ is a $(l \times m)$ strictly proper transfer matrix.

In the classical form, the disturbance decoupling problem (D.D.P) by output measurement feedback is the problem of finding a proper compensator $C(s)$ represented by $U_c(s) = C(s) Y_m(s)$ so that the transfer matrix relating $e(s)$ to $y_c(s)$ is identically zero, Commault et Al (1984), Bhattacharyya (1982), i.e.,

$$G(s) \cdot C(s) \begin{bmatrix} I - M(s) \cdot C(s) \end{bmatrix}^{-1} \cdot N(s) + H(s) = 0 \quad (5)$$

which comes down to:

$$G(s) X(s) N(s) = -H(s) \quad (6)$$

where:

$$X(s) = C(s) \begin{bmatrix} I - M(s) C(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

Remark:

The assumption of strict properness of $M(s)$ guarantees the properness of $C(s)$ and $X(s)$.

Using the factorization at infinity (1), the problem will be equivalent in finding some solvability conditions at infinity. This follows from the fact that the transfer matrix $M(s)$ does not occur at infinity ($M(s)$ appears in the feedback channel), Belmehdi (1987). The structure of the system is shown in figure 1.

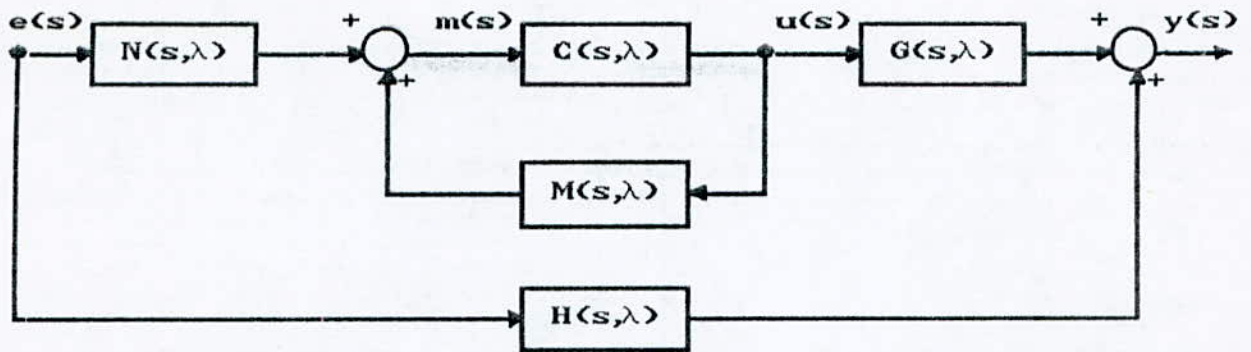


Fig. 1: The general structure for DDP by output measurement

3. GRAPH INTERPRETATION OF COLUMN AND ROW PROPERNESS

Recall first the graph terminology used for structured systems. A digraph $G(\Sigma)$ is associated to the system. The node set is the union of sets of inputs, outputs and interconnections. Each edge in the graph represents a single input single output system which is labelled by a length (infinite zero order) and a weight (gain at infinity). A path is a sequence of edges e_1, \dots, e_k such that the initial node of e_{i+1} is the terminal node of e_i ($i = 1, \dots, k$). The length of a path is the sum of lengths of the composing arcs and the weight of a path is the product of weights of the composing arcs. A shortest path is one which has the minimum length. A shortest input-output path in $G(\Sigma)$ is a path joining one input and one output and which is of minimum length.

For a structured multivariable system with a transfer matrix $T(s, \lambda)$, one has the following: (Belmehdi, 1987)

- the infinite zero order of $T_{ij}(s, \lambda)$ is equal to the minimal length of all paths from u_j to y_i . Similarly the infinite gain of $T_{ij}(s, \lambda)$ is equal to the sum of weights of the shortest paths from u_j to y_i .
- the infinite zero order n_i^r of the row $T_i^r(s, \lambda)$ is the minimal length of paths from all inputs to the output y_i . The infinite gain of this row is the λ_i^r defined in the previous section. Note that the k -th element of λ_i^r is equal to the sum of weights of the path of length n_i^r from u_j to y_i if it exists and zero if not.

We can define similarly the infinite zero order n_i^c and the gain at infinity λ_i^c of the column $T_i^c(s, \lambda)$.

We will generalize now the notions of row rank and column rank to a structured transfer matrix $T(s, \lambda)$. We say that $T(s, \lambda)$ has a full structural row rank (resp. structural column rank) if the number of input-output node disjoint paths in $G(\Sigma)$ is equal to the number of outputs p (resp. the number of rows m).

Proposition 1:

Let Σ be a structured system and $G(\Sigma)$ its associated graph. Suppose that the transfer matrix $T(s,\lambda)$ of Σ is of full structural column rank (resp. full structural row rank), then, $T(s,\lambda)$ is structurally column proper (resp. structurally row proper) if and only if there exists a set of m (resp. a set of p) node-disjoint shortest paths in $G(\Sigma)$.

Proof:

For the first part of the theorem, recall that the full structural row rank is a decouplability condition (Descusse et al, 1982) which is itself equivalent to the existence of a set of p input-output node-disjoint paths in the associated graph (Commault et al, 1991). The other part of the theorem concerns the minimality condition which can be reached by a proper left decoupler. This is proved by Ohta and Kodama, 1985.

Example 2:

Consider the following structured systems Σ_1 , Σ_2 and Σ_3 given by their associated graphs as shown in figure 2.

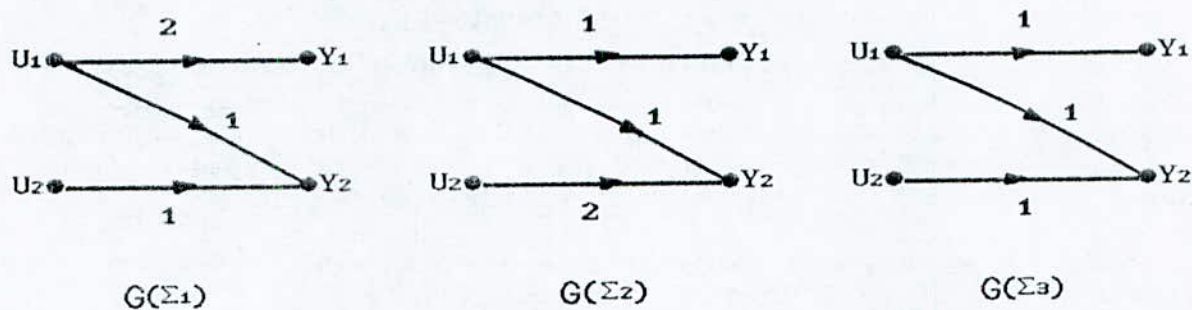


Fig. 2: Associated graphs to systems Σ_1 , Σ_2 and Σ_3

Both structural row and column ranks equal two since there exist input-output node disjoint paths (u_1y_1 , u_2y_2) in each graph. Then:

- The transfer matrix of Σ_1 is row proper but not column proper.
- The transfer matrix of Σ_2 is column proper but not row proper.
- The transfer matrix of Σ_3 is both row proper and column proper

4. STRUCTURAL D.D.P WITH MEASUREMENT OUTPUT FEEDBACK

In the classical form, many ways to solve the problem are presented in the literature. In Commault et al (1984) equation (6) is reduced to the Kronecker product:

$$\left[N^T(s) \otimes G(s) \right] x(s) = -h(s) \quad (8)$$

where:

$x(s)$ and $h(s)$ are column vectors i.e. $x(s) = \text{col} \left[X_1^c(s), \dots, X_l^c(s) \right]$

and $h(s) = \text{col} \left[H_1^c(s), \dots, H_l^c(s) \right]$.

Graphical interpretation of this tensorial product is feasible but it can't be used, in general, for our purpose since the parameters are dependent. A particular case will be given in the conclusion. To go round this problem, one uses the solvability conditions for the DDP stated by Bhattacharyya (1984), for non-structured systems when $G(s,\lambda)$ and/or $N(s,\lambda)$ are row and column proper. We first recall his result.

Theorem 1:

Consider the system of equation (6). A necessary condition for the existence of a proper rational matrix $X(s)$ is:

- i) If $H_{ij}(s) \neq 0$ then $N_j^c(s) \neq 0$ and $G_i^r(s) \neq 0$
- ii) $n_{ij}(H) \geq n_i^r(G) + n_j^c(N)$ for $i \in (1, \dots, p)$; $j \in (1, \dots, d)$ (9)

Notice that when $G(s)$ and $N(s)$ are respectively row and column proper, conditions i) and ii) are also sufficient.

In the case of structured systems, the following result is a translation of theorem 1 when $G(s,\lambda)$ and $N(s,\lambda)$ are respectively row proper and column proper.

Theorem 2:

Let the structured transfer matrix $T(s,\lambda)$ of equation (4) and its associated graph $T(\Sigma)$. Suppose that $G(s,\lambda)$ is row proper and $N(s,\lambda)$ column proper. Then, the DDP with measured output feedback is structurally solvable if and only if the following holds:

- i) If a path exists from a disturbance input node e_j ($j=1, \dots, d$) to a regulated output node y_i ($i=1, \dots, p$), then a path from node e_j to a measured output node m_k ($k=1, \dots, l$) and from a control input node u_f ($f=1, \dots, m$) to node y_i is required.
- ii) The length of the shortest direct path from e_j to y_i is greater or equal to the sum of lengths of the shortest paths through e_j to m_k and u_f to y_i .

Proof:

Theorem 1 sets necessary and sufficient conditions for the existence of a proper compensator when $G(s)$ and $N(s)$ are respectively row proper and column proper. Theorem 2 is a graphical interpretation of theorem 1. Then we need only to show that conditions of theorem 1 hold in the case of structured systems. By hypothesis, the transfer matrix $T(s)$ of eq. (4) is structured. Moreover, conditions of theorem 1 do not depend on parameter values of $G(s,\lambda)$, $H(s,\lambda)$ and $N(s,\lambda)$ and the infinite zeros have a graphical interpretation. Then, conditions of theorem 1 are valid and theorem 2 follows.

Example 3:

Consider the next directed graph of the figure 3.

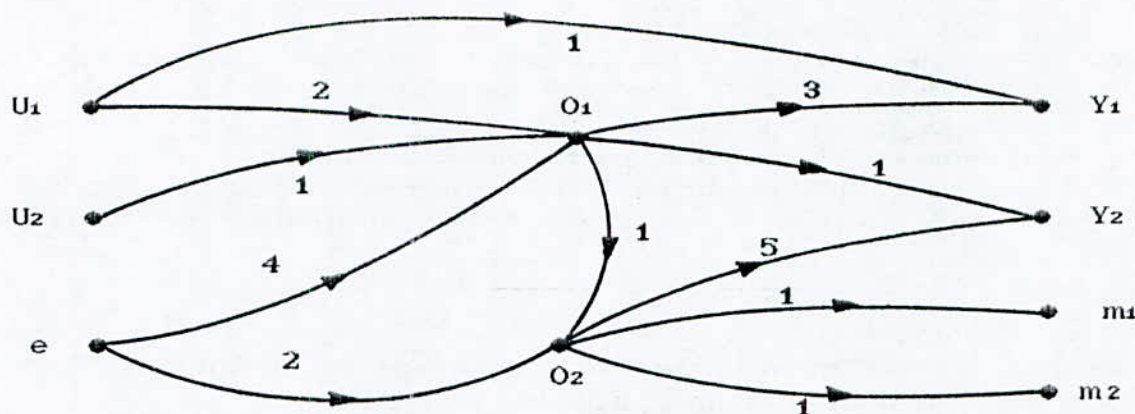


Fig. 3: Illustrative graph with $G(s,\lambda)$ and $N(s,\lambda)$ decouplable

$G(s,\lambda)$ and $N(s,\lambda)$ are respectively row and column proper since their associated graphs contain node disjoint shortest input output paths. One has:

a) The direct shortest path from e to Y_1 is of length 7. The shortest path from e to Y_1 through e to $m_{1,2}$ and $U_{1,2}$ to Y is of length 4 which is less than 7.

b) The direct shortest path's length from e to Y_2 and the sum of shortest path lengths linking e and Y_2 through e to $m_{1,2}$ and $U_{1,2}$ to Y_2 are both equal to 5.

Therefore, the structural disturbance rejection is feasible.

Consider now the general case when neither $G(s,\lambda)$ nor $N(s,\lambda)$ are respectively row proper and column proper. It is possible to decompose the compensator $C(s,\lambda)$ in three structured sub-systems without modifying its structure at infinity. To do this, we choose $C_1(s,\lambda)$ such that $N^*(s,\lambda) = C_1(s,\lambda).N(s,\lambda)$ is column proper and $C_2(s,\lambda)$ such that $G^*(s,\lambda) = G(s,\lambda).C_2(s,\lambda)$ is row proper. By this way, the structural solvability of the measured output feedback disturbance rejection problem is given by the same theorem 2 but one deals in this case, with another graph $G^*(\Sigma_p\Lambda)$.

The graph $G^*(\Sigma_p\Lambda)$ is obtained from $G(\Sigma_p\Lambda)$ by adding edges downstream from measured output nodes to make $N(s,\lambda)$ column proper and upstream from control nodes to make $G(s,\lambda)$ row proper.

Remark:

Notice that according to the previous decomposition, the compensator $C(s,\lambda)$ is written as $C_2(s,\lambda).C^*(s,\lambda).C_1(s,\lambda)$ and the problem amounts to solve the following equation:

$$G(s,\lambda).C_2(s,\lambda).C^*(s,\lambda).C_1(s,\lambda).N(s,\lambda) + H(s,\lambda) = 0 \quad (10)$$

where $G(s,\lambda).C_2(s,\lambda)$ is row proper and $C_1(s,\lambda).N(s,\lambda)$ is column proper. Then the problem consists of finding a proper compensator $C^*(s,\lambda)$. If such a compensator exists and $C_1(s,\lambda)$, $C_2(s,\lambda)$ are imposed to be proper, then $C(s,\lambda)$ is also proper and theorem 2 gives necessary and sufficient conditions for the existence of a proper compensator $C^*(s,\lambda)$.

To illustrate this general case, consider the following example:

Example 4:

Let the structured system given by its associated graph (fig.4).

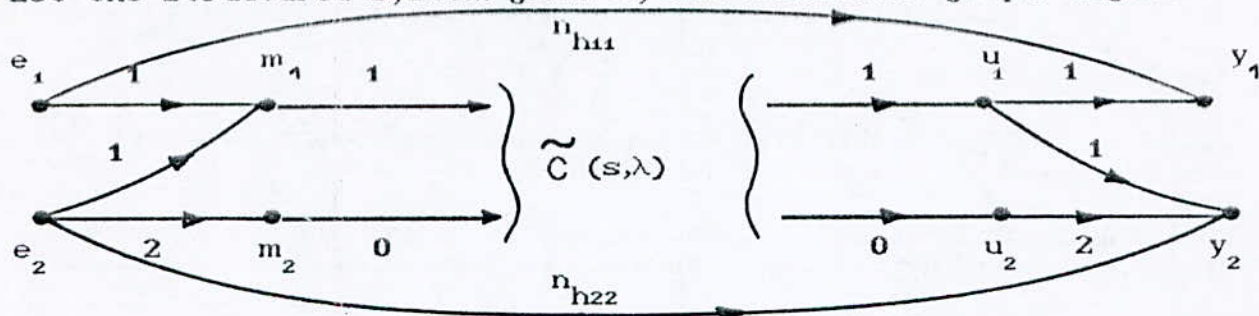


Fig. 4: Illustrative graph for the general case

Neither $G(s, \lambda)$ is row proper nor $N(s, \lambda)$ is column proper. To make $N(s, \lambda)$ column proper, one adds an edge of length one to m_1 and an edge of length zero to m_2 . To make $G(s, \lambda)$ row proper, one adds an edge of length one to u_1 and an edge of length zero to u_2 . Since there is a direct path from e_1 to y_1 of length n_{h11} , we must join nodes $m_{1,2}$ and $u_{1,2}$ such that the path from this link has a length less or equal than n_{h11} . One has $n_{h11} \geq 4 + n_{c11}^*$. We do the same with e_2 and y_2 , through m_2 to u_2 such that $n_{h22} \geq 4 + n_{c22}^*$.

n_{h11} , n_{h22} are lengths of paths through the direct channel $H(s, \lambda)$ and n_{c11} , n_{c22} are lengths in the graph associated to the compensator $C^*(s, \lambda)$.

5. CONCLUDING REMARKS

We conclude this paper by considering some particular cases.

a) When $G(s, \lambda)$ is row proper and $N(s, \lambda)$ is not column proper, we carry out the same decomposition as in the general case but only to make $N(s, \lambda)$ column proper. The same is valid when we are interested in the $G(s, \lambda)$'s row properness when $N(s, \lambda)$ is column proper and $G(s, \lambda)$ is not row proper. Then, we can easily translate the lemma given in the case of non-structured systems (Battacharya, 1984) to structured system.

b) A different approach to solve the D.D.P with measurement output feedback is the use of the kronecker product. In the case of non-structured systems the solution is given in Commault et Al (1984) which is relative to the equality of infinite structure of

$$\begin{bmatrix} N^T(s) \otimes G(s) & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} N^T(s) \otimes G(s) & h(s) \end{bmatrix}.$$

In the case of structured systems, a necessary condition when $G(s, \lambda)$ and $N(s, \lambda)$ are square full rank of dimensions $n \times n$ and $m \times m$ respectively is the equality of the maximal number of node disjoint input-output paths both in $G_k(\Sigma_p \Lambda)$ and $G_k(\Sigma \Lambda)$. Notice that $N^T(s, \lambda) \otimes G(s, \lambda)$ is square and its maximal rank is nm .

$G_k(\Sigma_p \Lambda)$ is the graph associated to $\begin{bmatrix} N^T(s, \lambda) \otimes G(s, \lambda) & h(s, \lambda) \end{bmatrix}$
and $G_k(\Sigma \Lambda)$ the graph associated to $\begin{bmatrix} N^T(s, \lambda) \otimes G(s, \lambda) & 0 \end{bmatrix}$.

6. REFERENCES

- BHATTACHARYYA, S.P., 1982, Transfer function conditions for output feedback disturbance rejection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27, NO. 4, 974-977.
- BELMEHDI, A., 1987, Stabilization and structural decoupling of linear systems. *Ph.D dissertation*, INP Grenoble (France).
- BELMEHDI, A., 1993, Transfer matrix approach to the structural block diagonal decoupling problem. *Submitted to Inter. Journal of Control*
- COMMAULT, C., DION, J.M. and PEREZ, A., 1991, Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 NO. 7, July, 884-887.
- COMMAULT, C., DION, J.M. and PERES, S., 1984, Transfer matrix approach to the disturbance decoupling problem, *Proceedings of the 9th IFAC Congress, Budapest, July*, 130-133.
- COMMAULT, C. and DION, J.M., 1991, Feedback decoupling of structured systems. *Proceedings of the ECC 91, European Control Conference, Grenoble, France*, 1789-1793.
- COMMAULT, C., DION, J.M. and BELMEHDI, A., 1987, Structured systems within the transfer matrix approach. *Systems and Control Letters*, 9, 335-339.
- DESCUSSE, J. and DION, J.M., 1982, On the structure at infinity of linear decouplable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 28, 823-832.
- EVANS, F.J. and LARSEN, P.M., 1984, Structural design of control systems. *System Research Report*, University of Technology, Helsinki
- LIN, C.T., 1974, Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19, 201-208.
- LINNEMANN, A., 1981, Decoupling of structured systems. *Systems and Control Letters*, 2, 71-76.
- OHTA, Y. and KODAMA, S., 1985, Structural invertibility of transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30, NO.8, 818-819
- REINSCHKE, K.J., 1988, Multivariable control: a graph theoretical approach. *Lectures Notes in control and Information Sciences*, Springer Verlag.
- SEFIK, A. and SEZER, M.E., 1989, A structural investigation of pole assignment and stabilization problems. *IFAC Workshop on System Structure and Control*, Prague, 179-185.
- SHIELDS, R.W. and PEARSON, J.B., 1976, Structural controllability of multi-input linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 21, 203-212.

A N N E X E 6

BELMEHDI, A. AND BOUKHETALA D.

"A Method to Eliminate Structurally Fixed Modes
in Decentralized Control Systems"

Soumis à International Journal of Control

A METHOD TO ELIMINATE STRUCTURAL FIXED MODES IN DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

A. BELMEHDI* and D. BOUKHETALA**

*- Departement d'Automatique, INH.
Institut National des Hydrocarbures
Avenue de l'Indépendance, Boumerdes,
35 000, Algeria

** - Departement de Génie Electrique, ENP,
Ecole Nationale Polytechnique,
10 Avenue Pasteur, El Harrach, Alger
16 000, Algeria

Abstract:

This paper deals with the problem of eliminating structurally fixed modes occurring in decentralized control systems. The Boole Algebra characterization of fixed modes is used conjointly with the idea of a minimum exchange of information between the control stations to express necessary and sufficient conditions for the elimination of decentralized structurally fixed modes.

Also, an algorithm which gathers together the Boolean characterization of structural fixed modes and their elimination is presented.

Keywords:

Decentralized system, structured systems, fixed modes, Boolean approach.

1. INTRODUCTION

The concept of structural fixed modes (s-fixed modes or SFM) in decentralized control systems has been introduced in [9]. S-fixed modes have been characterized within the state-space framework [7], the Rosenbrock's polynomial matrix description [5] and the Boole algebra approach [6]. As mentioned in [15] s-fixed modes may either depend on the parameter variations or due to a particular system structure. In the first case, these output feedback invariants can be eliminated by a slight modification of the system parameters. The second kind of s-fixed modes which are independent on the parameter variations bothers seriously decentralized control systems and their stabilization [11] [12].

To remedy this drawback, many interests in the literature have been devoted to the elimination of fixed modes [2] [10] [14] [15]. Also, the contribution herein deals with this last problem.

The paper is organized as follows:

In section 2, some preliminaries relating to s-fixed modes are first presented. Afterwards, the Boolean characterization of SFM is recalled. Section 3 is devoted to the main results.

2- DECENTRALIZED S-FIXED MODES AND THEIR BOOLEAN CHARACTERIZATION

2.1- Preliminaries:

Consider the linear time invariant system Σ with N control stations:

$$\dot{x} = A.x + \sum_{i=1}^N B_i.u_i ; y_i = C_i.x \quad (i = 1,2,\dots,N) \quad (1)$$

where $x(t) \in R^n$ denotes the state of Σ , $u_i(t) \in R^{m_i}$ is the input and $y_i(t) \in R^{p_i}$ is the output of the i -th control station. A , B_i and C_i are real matrices of appropriate dimensions.

Let K be an $(m \times p)$ matrix with a number of arbitrary non-zero entries less than $m.p$. Applying the constant output feedback : $u_i = K_i.y_i$ to Σ results in a closed loop system:

$$\dot{x} = (A + \sum_{i=1}^N B_i.K_i.C_i).x \quad (2)$$

The fixed modes of the closed loop system (2) are said to be those eigenvalues of $A + \sum_{i=1}^N B_i K_i C_i$ which are independent of the numerical values of the non-vanishing entries of K . [11]

Different algebraic and graphical techniques have been used to characterize decentralized fixed modes [3] [6] [12]. The Boolean approach developed in [6] appears to be relevant in representing a system with directed graphs and includes the case of structured systems. This technique is repeated herein and illustrated by an example before stating the main results.

2.2- The Boolean characterization of s-fixed modes

The Boolean form of Σ , that is Σ^* , is obtained by replacing the non-zero entries of A , B and C of Σ with logical "1" and the zero entries with logical "0". Thus, one obtains triplets (A^*, B^*, C^*) of Boolean matrices which represent system Σ^* . In this frame, structural controllability (or s-controllability) and structural observability (or s-observability) of system Σ^* are given by two conditions: the input-state reachability and the term rank (denoted TR.) of the Boolean matrix associated with the system. Recall that the term rank of a Boolean matrix M^* is equal to the number of "1" contained in a maximal permutation matrix P . The latter is obtained from M^* by taking one "1" by row and column, [4]. It is associated with each control station I ($I=1,2,\dots,N$) an input (resp. output) reachability vector Ru_I (resp. Ry_I). These vectors of dimension n (the order of the total system) can be directly obtained from the digraph associated with Σ^* . Also, controllable and observable subspaces K_I and M_I are associated with each control station I .

Before quoting an interesting result relating to these internal properties [6], recall first the following notation:

Let Au_I and Ay_I denote the system matrices for the reachable subspaces associated with control station I . Au_I (resp. Ay_I) is obtained from A^* by striking out all the elements of the j -th row and j -th column corresponding to the j -th zero-element of Ru_I (resp. Ry_I). As well, denote by ru_I (resp. ry_I) the number of "1" or states contained in Ru_I (resp. Ry_I). It has been shown in [4] that the reachable subspace Ru_I (resp. Ry_I) is controllable (resp. observable) if and only if ru_I (resp. ry_I) is equal to the term rank of the augmented matrix $\begin{bmatrix} Au_I & B_I^* \end{bmatrix}$ (resp. $\begin{bmatrix} Ay_I & C_I^* \end{bmatrix}^T$).

Remark 1: If the term rank is less than ru_I (resp. ry_I), the controllable (resp. observable) subspace can be chosen in several ways [4].

Now, if the number of control stations is restricted to two, (i.e. I and J), the system Σ will be completely s-controllable (resp. s-observable) from the two stations in combination if the controllable subspaces K_i , $i=1,2$, (resp. observable subspace M_i) satisfy:

$$K_1 \vee K_2 = \text{unit vector (resp. } M_1 \vee M_2 = \text{unit vector)} \quad (3)$$

where \vee denotes the Boolean addition.

The necessary and sufficient condition for the s-controllability from control station I, using decentralized output feedback is given by the following proposition: [4] [6]

Proposition 1: Let Σ be a decentralized system with two control stations I and J, and n as the dimension of Σ . Then, the system is s-controllable from the station I if and only if:

$$Ru_I \wedge Ry_J^T \neq 0 \text{ and } \text{TR} \begin{bmatrix} A^* & B_I^* \\ C_J^* & 0 \end{bmatrix} \geq n \quad (4)$$

$I = 1, 2$; $J = 1, 2$ and $I \neq J$
where \wedge denotes the Boolean product.

Remark 2: Due to the duality of the controllability and observability properties, the preceding result means that system Σ is also s-observable from control station J.

If we denote L_I (resp. L_I^*) the common controllable and observable subspace of station I without output feedback in the others stations (resp. enlarged common subspace), we have:

$$L_I = K_I \wedge M_I^T \text{ and } L_I^* = K_I^* \wedge M_I^{*T} \quad (5)$$

where K_I^* (resp. M_I^*) is the enlarged controllable subspace for the station I (resp. observable subspace of control station I).

The following statement has been given in [4].

Any two station I, J is s-controllable and s-observable from either station using decentralized output feedback if and only if

$$Ru_1 \wedge Ry_2^T \neq 0, Ru_2 \wedge Ry_1^T \neq 0 \text{ and } L_1^* \vee L_2^* = \text{unit vector.} \quad (6)$$

Finally, the result relating to the presence or not of decentralized s-fixed modes is given by the following theorem:

Theorem 1: Let a decentralized system Σ with two control stations. Then, in any two station system no s-fixed modes exists if and only if system Σ is s-controllable under decentralized feedback.

2.3- Illustrative example:

Consider the following structured system (A^*, B^*, C^*) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

where the "1" denote non-zero entries.

Consider two control stations u_1 and u_2 with respective output y_1, y_2 and the decentralized constraint: $K = \text{diag.} \{K_{11}, K_{22}\}$. The

graph $\mathcal{G}(\Sigma)$ associated with the closed-loop system is given in Fig.(1). It yields:

$$Ru_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad Ru_2 = [0 \ 1 \ 1]^T, \quad Ry_1 = [1 \ 1 \ 0], \quad Ry_2 = [0 \ 0 \ 1]$$

whence: $ru_1 = ry_2 = 1$ and $ru_2 = ry_1 = 2$

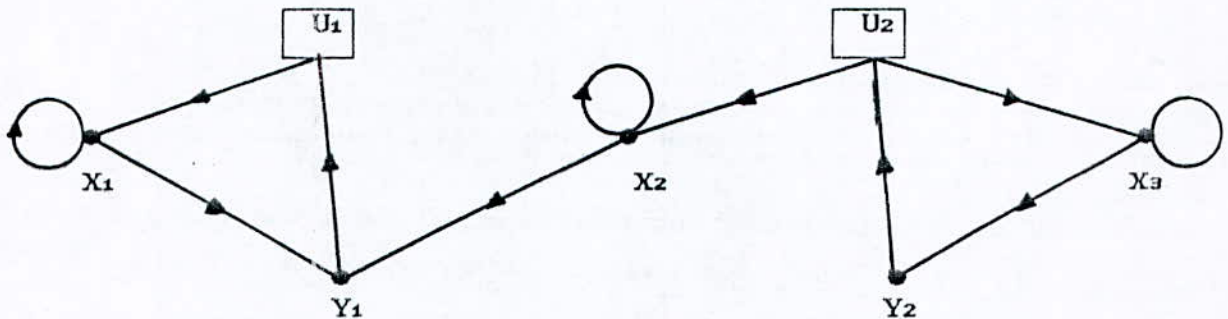


Fig. (1): Graph $\mathcal{G}(\Sigma)$ associated with the closed loop system

The input reachable subspace Ru_1 is controllable since:

$$\text{TR} \begin{bmatrix} Au_1 & B_1^* \end{bmatrix} = \text{TR} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 = ru_1$$

The input reachable subspace Ru_2 is controllable since:

$$\text{TR} \begin{bmatrix} Au_2 & B_2^* \end{bmatrix} = \text{TR} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 = ru_2$$

The output subspace which reaches output y_1 is observable since:

$$\text{TR} \begin{bmatrix} Ay_1 \\ C_1^* \end{bmatrix} = \text{TR} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = ry_1$$

The output subspace which reaches output y_2 is observable since:

$$\text{TR} \begin{bmatrix} Ay_2 \\ C_2^* \end{bmatrix} = \text{TR} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 = ryu_2$$

Consequently, controllable subspaces K_1 and K_2 from stations 1 and 2, are respectively equal to the reachable subspaces Ru_1 and Ru_2 . Similarly, we obtain for the observable subspaces M_1 and M_2 , respectively $M_1 = Ry_1$ and $M_2 = Ry_2$.

Then the whole system Σ is completely s-controllable from the two control stations combined since: $K_1 \vee K_2 = Ru_1 \vee Ru_2 = \text{unit vector}$.

The same procedure leads to a complete s-observability of Σ since $M_1 \vee M_2 = Ry_1 \vee Ry_2 = 1$.

Also, the whole system can be controlled from station 2 since:

$$Ru_2 \wedge Ry_1^T = [0 \ 1 \ 0]^T \neq 0 \text{ and R.t. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 > 3$$

By duality, the system is observable from station 1. On the other hand, the system can not be controlled from station 1 since $Ru_1 \wedge Ry_2 = 0$. Consequently, the system can not be observable from station 2.

The shared controllable and observable subspace from station 1 is

$$L_1 = K_1 \wedge M_1^T = [1 \ 0 \ 0]^T \text{ and that relating to station 2 is:}$$

$$L_2 = K_2 \wedge M_2^T = [0 \ 0 \ 1]^T. \text{ Finally, we get: } L = L_1 \vee L_2 = [1 \ 0 \ 1]^T.$$

It may be seen from L that a decentralized SFM exists. It is localized at the second eigenvalue of A .

3- ELIMINATION OF DECENTRALIZED S-FIXED MODES

The method of eliminating decentralized s-fixed modes developed herein uses conjointly the preceding characterization and the idea of minimal exchange of information between the control stations [2]. We first recall a generalized result of the Boolean characterization of SFM (i.e. when the number of control stations is greater than two), [6].

Theorem 2: A decentralized system Σ with N control stations ($N > 2$) is s-controllable and s-observable if and only if there is no decentralized s-fixed mode in Σ and the common enlarged vector L_I^* associated with the control station I ($I=1, \dots, N$) is a unit vector

Remark 3: The vector L_I^* is obtained by the intersection of enlarged controllable subspace K_I^* and observable subspace M_I^* relating to station I in cooperation with the other stations.

The elimination of a decentralized SFM can be reached by modifying the structure of the output feedback matrix K . This can be materialized by including a reduced connection of information exchange between the subsystems. This idea has been introduced in [2] for non-structured systems and uses the notion of block diagonal dominance of the dynamical closed system matrix, (i.e., $A+BKCC$). The approach developed herein consists firstly, in defining the control stations where the connection must be added (i.e. the k_{ij} block) and secondly, in minimizing this exchange of information when the subsystems are multi-input, multi-output.

Now, our main result is given by the following theorem:

Theorem 3: Let a decentralized system Σ with N control stations. A structural fixed mode X_k of Σ (if there exists) is eliminated by exchange of information through the N control stations if and only if there exists at least, stations I and J for which a full block output feedback K can be added to matrix K and the indices I and J must be such that:

$${}^k l_s^* = 0 ; \quad {}^k \bar{k}_I = 1 \text{ and } {}^k \bar{m}_J = 1 \quad (7)$$

where $I \neq J$; $I, J \in (1, 2, \dots, N)$ and $k \in (1, 2, \dots, n)$,

${}^k \bar{k}_I$ (resp. ${}^k \bar{m}_J$) represents the k -th element of K_I (resp. M_J^T),

${}^k l_s^*$ is the k -th zero-element of L_s^* , where $L_s^* = V L_I^*$.

Proof: Assume that a full block K_{IJ} is included in the output feedback K . This means that a feedback connection exists between all the outputs of subsystem J and all the inputs of subsystem I . Knowing that a necessary condition relating to the non-existence of a decentralized s -fixed mode X_k is that of s -controllability and s -observability of system Σ , it follows that Σ must fulfil the last condition. In other words, the union of K_I (resp. M_I) must equal a unit vector, for any $I = 1, 2, \dots, N$. Since ${}^k l_s^* = 0$, mode X_k is fixed. Also, X_k is s -controllable from at least one station I (since ${}^k \bar{k}_I = 1$) and s -observable from at least one station J (since ${}^k \bar{m}_J = 1$). Then block K_{IJ} introduces a link through the outputs of subsystem J and the inputs of subsystem I , which makes X_k non-fixed.

Conversely, if $K_{IJ} = 0$ the output feedback matrix K contains only blocks on the diagonal which characterize the local feedback. Knowing that the s -fixed mode X_k is s -controllable from a station and s -observable from the other one, it remains fixed as long as there is no feedback connection between the two stations.

Consider now the case of the minimum exchange of information through the control stations, especially when subsystems I and J are multi-input, multi-output (MIMO). Let p_I (resp. m_J) denotes the number of inputs of station I (resp. of outputs of station J). In this case, the condition of eliminating a decentralized SFM is given by the following corollary:

Corollary: Let a decentralized system Σ with N control stations. A necessary and sufficient condition for eliminating a s-fixed mode of Σ with a minimum exchange of information between the control stations is that, at the most, there exists a non-zero

entry K_{hl}^{IJ} as a member of K_{IJ} with h and l satisfying:

$$k_{I_s}^* = 0, \quad k_{K_I}^{-h} = 1 \text{ and } k_{m_J}^{-l} = 1, \quad I \neq J; \quad I, J = (1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

$$k = (1, 2, \dots, n), \quad h = (1, 2, \dots, p_I), \quad l = (1, 2, \dots, m_J)$$

where $k_{K_I}^{-h}$ (resp. $k_{m_J}^{-l}$) represents the k-th element of K_I^h (resp. M_J^{lT})

Proof: Take only an element $k_{hl}^{IJ} \neq 0$ which characterizes the link between output y_J^l and input u_I^h and fulfils conditions (8). This means that an output feedbacklink exists through y_J and u_I . Since the s-fixed mode X_k is s-controllable (resp. s-observable) from the given input (resp. output), the included feedback link allows the elimination of X_k . Conversely, assume that no link exists through input u_I^h and output y_J^l . The fact that the preceding input and output do not belong to the same stations shows that the local feedback links do not act on mode X_k . Therefore, the mode remains fixed.

The steps of working out and eliminating s-fixed modes are summarized in the following algorithm.

ALGORITHM:

Step 1: Test the s-controllability and s-observability for system Σ when the output feedback K has full entries, (i.e., m, p). If Σ is s-controllable and s-observable, then go to step 2. Else, stop (there exists a centralized SFM).

Step 2: Considering the station I, compute the controllable subspaces for each input K_I^h ($h = 1, 2, \dots, r$) and the observable subspaces M_J^{lT} ($l = 1, 2, \dots, p$).

Step 3: Compute vectors K_I^h and M_I^{lT} when the stations are MIMO.

$$K_I = \bigvee K_I^h \text{ and } M_J^T = \bigvee M_J^{lT}, \quad I=1, 2, \dots, N; \quad h=1, 2, \dots, r_I; \quad l=1, 2, \dots, p_I$$

Step 4: Compute the characterization vector L_s^* of decentralized s-fixed mode: $L_s^* = \bigvee L_I^*$, $I = 1, 2, \dots, N$

Step 5: If L_S^* contains a zero-entry, then there exists a decentralized SFM. Else, stop (no decentralized SFM exist).

Step 6: Let ${}^k l_S^*$ be the non-zero entry of L_S^* ($k = 1, 2, \dots, N$). Find indices I and J for which the entries of vectors ${}^k \bar{m}_I$ and M^T are equal to 1 (i.e. ${}^k \bar{m}_I = 1$ and ${}^k \bar{m}_J = 1$).

Step 7: Add the block K_{IJ} to output feedback matrix K,

Step 8: To reach the elimination of a SFM with a minimum exchange of informations, first look for the input u_I^h for which ${}^k \bar{m}_I = 1$ in station I, and for the output y_J^h for which ${}^k \bar{m}_J = 1$ in station J. Then, put to zero all the entries of K_{IJ} except entry ${}^k \bar{m}_{IJ}^{IJ}$ which gives a minimum exchange of information between stations I and J.

Step 9: End

Illustrative example (continued):

Recall that a decentralized SFM is observed from the vector $L_S^* = [1 \ 0 \ 1]^T$. To eliminate it we apply the algorithm from step 6. We obtain from L_S^* and ${}^k l_S^*$, the index row $k = 2$. Knowing that:

$$K_1 = Ru_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; K_2 = Ru_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \textcircled{1} \\ 1 \end{bmatrix}; M_1^T = Ry_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \textcircled{1} \\ 0 \end{bmatrix}; M_2^T = Ry_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

We get: $I = 2$ and $J = 1$, (see the surrounded "1"). Therefore, the block K_{IJ} to be added to K is K_{21} . In other words, one has to connect output y_1 to input u_2 . Thus, the decentralized s-fixed mode is eliminated by creating a cycle family of width 3, [8].

To obtain a minimum exchange of information through the control stations, we must remove blocks K_{11} and K_{22} . Hence, the output feedback matrix K which makes the decentralized system completely s-controllable and s-observable, (i.e., without decentralized

$$\text{SFM}), \text{ is } K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}.$$

5- CONCLUSION

The main purpose of this paper is to present a procedure of eliminating structural fixed modes occurring in a decentralized control system. The method used the Boolean characterization of s-fixed mode which is an efficient mathematical tool to represent a system within a graphical description. Also, this technique is suitable for computer languages such as APL which allow an easy manipulation of the "structure" [4]. Then, the proposed algorithm can be implemented in an APL program.

In the author's opinion, the method of eliminating decentralized SFM given herein opens up a way to the solution to the pole assignment problem while keeping in mind that even if a fixed mode does not exist the system may still not be pole assignable (this last remark is pointed up in [4]).

REFERENCES

- [1] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, Time-varying feedback laws for decentralized control, *IEEE Trans. Automat. Control* 26 (1981)
- [2] V.A. Armentano and M.G. Singh, A procedure to eliminate decentralized fixed modes, *IEEE Trans. Automat. Control* 27 (1982) 258-260.
- [3] E.J. Davison and U. Özgüler, Characterization of DFM for interconnected systems, *Automatica*, 5 (1983) 741-744.
- [4] F.J. Evans and P.M. Larsen, Structural design of control systems, *Lecture notes, Electric Power Engineering Department, Technical University of Denmark*, (1983).
- [5] M.P.Fanti, B. Maione and B. Turchiano, Structurally fixed modes of systems described by Rosenbrock's polynomial matrices, *Internat. J. Control* 48 (1988) 1947-1965.
- [6] S. Momens and F.J. Evans, Structurally fixed modes in decentralized systems, Pt.1: Two control stations, Pt.2: General case, *Proc. IEE, Pt. D* 130 (1983) 312-327.
- [7] V. Pichai, M.E. Sezer and D.D. Siljak, A graph-theoretic characterization of structurally fixed modes, *Automatica* 20 (1984) 247-250.
- [8] K.Reinschke, *Multivariable control: a graph-theoretic approach* (Springer Verlag, Berlin, 1988).
- [9] M.E. Sezer and D.D. Siljak, Structurally fixed modes, *Systems Control Lett.* 1 (1981) 60-64.
- [10] L. Travé, A.M. Tarras and A. Titli, An application of vibrational control to cancel unstable decentralized fixed modes, *IEEE Trans. Automat. Control* 30 (1985) 283-286.
- [11] S.H.Wang and E.J. Davison, On the stabilization of decentralized control systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 18 (1973) 473-478.
- [12] S.H. Wang, Stabilization of decentralized systems via time-varying controller, *IEEE Trans. Control* 27 (1982) 741-744.
- [13] J.L. Willems, Structurally controllability and observability *Systems Control Lett.* 7 (1986) 5-12.
- [14] J.L. Willems, Elimination of fixed modes in decentralized systems by means of sampling, *Systems Control Lett.* 10 (1988) 1-8
- [15] J.L. Willems, Time-varying feedback for the stabilization of fixed modes in decentralized control systems, *Automatica* 25 (1989) 127-131.

R E S U M E

Le travail présenté dans cette thèse porte sur l'étude des systèmes structurés multivariables qui sont une classe de systèmes paramétrés. Certaines propriétés structurelles des systèmes linéaires stationnaires jouent un rôle important dans la solubilité de problèmes de commande tels que le découplage, le rejet de perturbation et la commande décentralisée. Ces propriétés sont utilisées conjointement avec la théorie des graphes pour donner des solutions génériques à ces problèmes.

La résolution des problèmes de découplage par blocs, de découplage par précompensateur et de rejet de perturbation par retour de sortie est abordée dans le cadre de la représentation transfert. Ceci permet de représenter un système à partir de la connaissance de sa structure à l'infini uniquement.

La commande décentralisée des systèmes structurés (basée essentiellement sur la connaissance du modes fixe) est étudiée dans le cadre de la représentation d'état où le mode fixe est bien défini.

Nous montrons également, à travers l'étude d'un exemple de procédé réel (unité de production d'acide nitrique), comment l'information structurelle peut être exploitée pour déterminer toutes les structures de commande possibles sur un procédé.

MOTS CLÉS:

Systèmes structurés, Multivariable, Invariants, Théorie des graphes, Découplage, Rejet de perturbation, Commande décentralisée

A B S T R A C T

In this thesis, we study structured multivariable systems which are a class of parametrized systems. Structural properties of a linear invariant multivariable system play a key role in the solvability of some control problems such as decoupling, disturbance decoupling and decentralized control. They are used conjointly with the graph theory to establish generic solutions for the above problems.

The solvability of structural block diagonal decoupling, structural decoupling by precompensator and structural disturbance rejection are examined within the transfer matrix framework where the graph associated with the structured system exhibits the system's structure at infinity.

The decentralized control for structured systems which is essentially based on the knowledge of fixed modes, is studied within the state space frame where fixed modes are well-defined.

Also, it is shown, through the study of a practical process of nitric acid production, how structural informations can be effectively used in the synthesis of alternative feasible control schemes.

KEYWORDS:

Multivariable systems, Structured systems, Invariants, Graph theory, Decoupling, Disturbance rejection, Decentralized Control.