MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
U. S. T. H. B.

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

VERIFICATION EXPERIMENTALE DE LA THEORIE DU RESSAUT HYDRAULIQUE CAS D'UN CANAL A PROFIL CIRCULAIRE

Proposé par :

Mr. G. LAPRAY
(maître de conférence)

Présenté par :

B. ACHOUR
M. MEZIANE

Juin 1981

Dédicaces

A mon père, à ma mère
à mes frères et soeurs
à toute la famille
à tous mes amis et
ceux qui m'ont aidé.

M. MEZIANE

A la mémoire de mon père,
à ma mère,
à mes frères et soeurs,
à toute la famille,
à tous mes amis et ceux
qui m'ont aidé.

b. ACHOUR

Remerciements

La présente étude a été réalisée sous la direction de Monsieur G. LAPRAY maitre de conférence à l'école nationale poly-technique d'Alger.
Nous nous permettons de lui exprimer toute notre grattitude pour les grands services qu'il nous a rendus et les conseils éclairés qu'il nous a donnés pour mener à bonne fin nos recherches. Qu'il soit assuré de notre sincère amitié et notre profond respect.
Nous remercions vivement ceux qui nous ont aidé et tous les professeurs qui ont contribué à notre formation.

— SOMMAIRE —

Symboles utilisés et leurs unités

D	diamètre	m
D_h	diamètre hydraulique	m
h	profondeur, hauteur piézométrique	m
Δh	différence de hauteurs piézométriques	m
L, l	longueurs	m
a	dimension linéaire quelconque hauteur d'un seuil	m
e	largeur de plan d'eau	m
R	rayon	m
k	profondeur critique	m
H	charge totale	m
ΔH	perte de charge	m
$\bar{h}$	position de centre de gravité	m
ε	rugosité équivalente de NIKURADSÉ	m
φ	demi-angle au centre	rd
Q	débit volumique	$m^3 s^{-1}$
g	accélération de la pesanteur	$m.s^{-2}$
A	aire d'une section	m^2
v	vitesse moyenne	$m.s^{-1}$
V	volume	m^3
ρ	masse volumique	$kg\,m^{-3}$
P	pression ; périmètre mouillé	$N m^{-2}$; m
$\mathcal{P}$	puissance.	W, CV
F	force	N.

J_u	pente géométrique	Sans unité
J_p	pente piezométrique	-"-
J	perte de charge par unité de longueur.	-"-
$\mathbb{F}$	nombre de Froude	-"-
M	nombre de Mach	-"-
$\mathbb{R}$	nombre de Reynolds	-"-
α	facteur de correction de l'energie cinetique	-"-
β	facteur de correction de la quantité de mouvement	-"-
ξ	paramètre de forme d'un profil circulaire partiellement occupé.	-"-
λ	facteur de transition	-"-
Λ	longueur fluidodynamique	m
ν	viscosité cinematique	$m^2 \cdot s^{-1}$
λ	echelle linéaire d'un modele reduit	

Généralités :

La résolution des problèmes d'hydrauliques nécessite parfois le recours à des calculs considérables et inévitables si l'on ne veut pas utiliser les méthodes graphiques non moins longues et d'une précision parfois insuffisante. Lorsque le temps de calcul peut être réduit par l'utilisation d'un calculeur programmable, la méthode de calcul par approximations successives devient incontestablement la plus commode.
Tous les problèmes rencontrés dans la présente étude ont été programmés pour un "calculateur programmable du type TI 59".
De façon générale les programmes établis peuvent être présentés comme suit :
Soient deux variables x et y telles que $y = f(x)$; lorsqu'il s'agit de déterminer y connaissant x, le problème est vite résolu. Dans le cas où l'on cherche x connaissant y, la difficulté est qu'il est souvent difficile voir impossible

Introduction

La théorie présentée dans cet ouvrage et expérimentée dans le cadre de notre projet, a été élaboreé par Monsieur G. LAPRAY maître de conférence à l'école nationale polytechnique d'Alger en complèment au concept de la longueur fluidodynamique qui fût trouvé par le même auteur. Il s'agit de l'étude du ressaut dans une conduite circulaire partiellement mouillé, qui fait partie d'une série de solutions au problème relatif à ce phénomène. Le but de notre travail est la vérification expérimentale de la dite théorie sur un écoulement permanent non uniforme. Les solutions apportées par différents auteurs concernent le plus souvent les écoulements en régime turbulent rugueux correspondant à la zone droite supérieure du diagramme de Moody, et qui ont en effet un interêt pratique considérable.

Cependant, dans notre cas, l'écoulement en régime de transition revet une non moins grande importance, dans les études en laboratoire surtout.

En vue de tenir compte de la particularité de ce régime, l'auteur a délibérément abandonné l'emploi des anciennes formules empiriques encore utilisées par de nombreux hydrauliciens, pour le calcul des écoulements à surface libre, car les dites formules ne tiennent pas compte de l'existence du régime de transition où l'effet de la viscosité ne peut pas être laissé hors considération. Par ailleurs l'indice de la nature de la paroi intervenant dans ces formules donne lieu à beaucoup d'incertitude.

Généralités :

La résolution des problèmes d'hydrauliques nécessite parfois le recours à des calculs considérables et inévitables si l'on ne veut pas utiliser les méthodes graphiques non moins longues et d'une précision parfois insuffisante. Lorsque le temps de calcul peut être réduit par l'utilisation d'un calculeur programmable, la méthode de calcul par approximations successives devient incontestablement la plus commode.

Tous les problèmes rencontrés dans la présente étude ont été programmés pour un "calculateur programmable du type TI 59".

De façon générale les programmes établis peuvent être présentés comme suit :

Soient deux variables x et y telles que $y = f(x)$; lorsqu'il s'agit de déterminer y connaissant x, le problème est vite résolu. Dans le cas où l'on cherche x connaissant y, la difficulté est qu'il est souvent difficile voir impossible

d'exprimer x en fonction de y tant la fonction $f(x)$ est compliquée.
La solution du problème est rendue aisée si le degré de dépendance des deux paramètres est connu, Soit :

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots$$

Le tracé de $y=f(x)$ en cordonnées logarithmiques montre que la pente de la courbe est généralement variable. Nous admettrons en première approximation que la courbe représentée par $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ se comporte comme celle représentée par $y = ax^n$; Ainsi quand y varie de Δy, x doit varier de $\Delta y^{1/n}$; en posant $\vartheta = \frac{1}{n}$, on écrit que pour deux paramètres x_1 et x_2 correspondants à y_1 et y_2, $\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\vartheta}$; donc, connaissant une valeur de x_1 (donc de y_1), x_2 en première approximation sera :

$$x_2 = x_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\vartheta}$$

cette relation permet de déterminer le paramètre x par approximations successives

CHAP I

Rappels sur la théorie de la longueur fluidodynamique.

Il est démontré que chacune des dimensions linéaires du profil d'un fluide en écoulement incompressible, ou pouvant être considéré comme tel en raison d'un faible gradient de pression, passant par une conduite à section constante quelconque, peut être écrite comme le produit de trois facteurs :

- le premier, ayant la dimension d'une longueur, est appelé longueur fluidodynamique et désigné par Λ.
- le second facteur appelé "paramètre de dimension" est un nombre sans dimension qui ne dépend que de la forme du profil fluide. Il est désigné par le même symbole que la dimension prise et distingué par un indice "o".
- le troisième facteur est appelé "facteur de transition" et désigné par le symbole λ, c'est un paramètre sans dimension, fonction de la rugosité re-

lative ε/D_h et du nombre de Reynolds.
l'équation fondamentale de la théorie de la longueur fluidodynamique est:

$$a = \Lambda a_0 \lambda .$$

(a peut representer un diamètre, une profondeur d'eau, la largeur d'un plan d'eau etc...).

La théorie de la longueur fluidodynamique admet comme hypothese que le régime de l'écoulement est turbulent rugueux; elle est baseé sur la formule générale des écoulements permanents uniformes incompressibles, dite de DARCY-WEISSBACH : $J = \frac{f}{D_h} \cdot \frac{V^2}{2g}$ avec $D_h = 4 R_m$

et de la formule de NIKURADSE :

$$f^{-1/2} = 1{,}14 - 0{,}86 \ln \frac{\varepsilon}{D_h}$$

Dans la démonstration de la théorie, l'auteur a eu pour idée de mettre le coefficient de frottement f sous la forme : $f^{-1/2} = \beta D_h^{\vartheta}$.

Les valeurs de ϑ et de β dépendent essentiellement de la rugosité ε de la conduite et varient légèrement en fonction des limites du domaine de D_h considéré.

Si le domaine considéré se réduit à une seule valeur bien déterminée du diamètre hydraulique on tire la valeur de ϑ :

$$\vartheta = \frac{d \log f^{-1/2}}{d \log D_h} = 0{,}86 . f^{1/2}$$

Ceci permet de guider le choix d'une valeur de ϑ : on attribue à ϑ la valeur 0,15 correspondant à sa moyenne

$$\vartheta_{moyen} = 0{,}15$$ Ainsi

$$\beta(\varepsilon, D_h) = \frac{1}{D_h^{0,15} . \sqrt{f}}$$ d'où le

gradient de la perte de charge

$$J = \frac{f}{D_h} . \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g\, D_h^{1,3}} . \frac{Q^2}{A^2 \beta^2}$$ ou bien :

$$Q = 2^{1,8} \sqrt{g}\, A \beta \sqrt{J}\, R_m^{0,65}$$

Définitions :

1) $\mathcal{K} = 2^{1,8}\sqrt{g}\,\beta = \left(10{,}094 - 7{,}6148 \ln \frac{\varepsilon}{D_h}\right)\left(\frac{4}{D_h}\right)^{0,15}$

ainsi $Q = \mathcal{K} A \sqrt{J}\, R_m^{0,65}$

2) $R_{m_o} = \left(\frac{R_m^2}{A}\right)^{1/2,65}$ soit $A = \frac{R_m^2}{R_{m_o}^{2,65}}$

ainsi : $Q = \mathcal{K}\left(\frac{R_m}{R_{m_o}}\right)^{2,65} \cdot \sqrt{J}$

3) $\Lambda = \frac{R_m}{R_{m_o}} = \frac{a}{a_o}$ (a est une dimension géométrique du profil considéré)

ainsi : $Q = \mathcal{K}\,\Lambda^{2,65}\sqrt{J}$ d'où la longueur fluidodynamique :

$$\Lambda = \left(\frac{Q}{\mathcal{K}\sqrt{J}}\right)^{1/2,65}$$

On a donc :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = 2^{1,8}\sqrt{g}\,D_{h_o}^{-0,15}\left(1{,}14 - 0{,}86 \ln \frac{\varepsilon}{D_{h_o}\Lambda}\right)\Lambda^{2,5}$$

Approximations :

On constate que la formule précédente n'est pas independante du profil

En application de la formule précédente il est possible de déterminer la valeur de $\frac{Q}{\sqrt{J}}$ en fonction de ε et de Λ, si D_{h_0} était constant ; or D_{h_0} varie entre 1,4 et 2 selon le type de profil et le niveau de remplissage.

Si l'on admet que $D_{h_0} = 1,67$ qui représente la moyenne géométrique de 1,4 à 2, on obtient une valeur de $\frac{Q}{\sqrt{J}}$ qui sera affectée d'une erreur relative $\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right) = \frac{\Delta(Q/\sqrt{J})}{Q/\sqrt{J}}$;

Cette erreur a été étudiée pour différentes valeurs de la rugosité relative et le maximum est atteint pour $\varepsilon/D_h = 0{,}05$:

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right) = 4{,}85\,\%\ \Delta D_{h_0} \quad \text{avec}$$

$$\Delta D_{h_0} = 2 - 1{,}67 = 0{,}33 .$$

Soit :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right) = 4{,}88\,\%\ \Delta D_{h_0} = 1{,}61\,\%$$

Avec $D_{h_0} = 1{,}67$ on obtient :

$$Q/\sqrt{J} = (15{,}96 - 8{,}681 \ln \varepsilon/\Lambda)\Lambda^{2,5}$$

$$\Lambda = \left[\frac{Q/\sqrt{J}}{15{,}96 - 8{,}681 \ln \frac{\varepsilon}{\Lambda}} \right]^{1/2{,}5} \quad \text{ou bien}$$

$$\Lambda = 0{,}15907\, \varepsilon \,.\, \mathrm{EXP}\left(+ \frac{Q/\sqrt{J}}{8{,}681\, \Lambda^{2{,}5}} \right)$$

on tire :

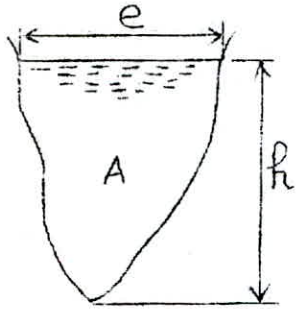
$$\varepsilon = \frac{\Lambda}{0{,}15907}\, \mathrm{EXP}\left(- \frac{Q/\sqrt{J}}{8{,}681\, \Lambda^{2{,}5}} \right)$$

-Signification physique de la longueur fluido-dynamique-

Il est démontré que la signification physique de la longueur fluidodynamique est donnée par la longueur $\Lambda = h = b$ du côté de la tranche quadratique hachurée (carré "L") découpée dans une section droite quelconque d'un courant

permanent à profondeur constante passant sur un plan incliné indéfiniment large, véhiculant un débit Q passant par le carré "L" soit un débit unitaire $q = \frac{Q}{\Lambda}$.

Paramètres dimensionnels -



La figure ci-contre, représente un profil quelconque de Section mouillée A. Soient P, D_h, e, h respectivement le périmètre mouillé, le diamètre hydraulique, la largeur du plan d'eau et la profondeur d'eau. Désignons par a une dimension linéaire quelconque caractéristique de la Section A etudieé. Par définition, P_1 est le périmètre mouillé pour $a = 1$ et A_1 la Section mouillée pour $a = 1$; quelle que soit la dimension linéaire choisie a, on a :

$$P = a . P_1$$

et $$A = a^2 . A_1$$

La théorie de la longueur fluidodynamique donne le paramètre dimensionnel de a :

$$a_0 = \frac{P_1^{0,65/2,65}}{A_1^{1,65/2,65}} \quad \text{ou} \quad a_0 = \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}}$$

a_o peut représenter les paramètres dimensionnels suivants : h_o, e_o, D_{h_o}, A_o, P_o etc...

A_o, $4/P_o$, D_{h_o} présentent un extremum (maximum) pour une valeur du paramètre de forme du profil considéré.

Calcul des conditions optimales

- $A_o = a_o^2 . A_1 = \dfrac{P_1^{2\times 0{,}65/2{,}65}}{A_1^{2\times 1{,}65/2{,}65}} . A_1 = P_1^{\frac{2\times 0{,}65}{2{,}65}} . A_1^{\frac{2{,}65-2\times 1{,}65}{2{,}65}}$

$$A_o = P_1^{2\times 0{,}65/2{,}65} . A_1^{-0{,}65/2{,}65} \quad \text{soit :}$$

$$A_o = \left(\frac{P_1^2}{A_1}\right)^{\frac{0{,}65}{2{,}65}}$$

soit x un paramètre de forme ; on a :

$\dfrac{d}{dx} A_o = 0$ c'est à dire :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P_1^2}{A_1}\right) = 0$$

- $\dfrac{4}{P_o} = 4\left(\dfrac{P_1^2}{A_1}\right)^{-\frac{1{,}65}{2{,}65}}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{P_o}\right) = 0$ entraine $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{P_1^2}{A_1}\right) = 0$

- $D_{h_o} = 4\dfrac{A_o}{P_o} = 4\left(\dfrac{P_1^2}{A_1}\right)^{\frac{0{,}65}{2{,}65}} . \left(\dfrac{P_1^2}{A_1}\right)^{-1{,}65/2{,}65} = 4\left(\dfrac{P_1^2}{A_1}\right)^{-\frac{1}{2{,}65}}$

$\dfrac{d}{dx} D_{h_o} = 0$ entraine $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{P_1^2}{A_1}\right) = 0$

Le maximum de A_0, $4/P_0$, D_{h_0} est obtenu pour une même valeur du paramètre de forme x.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P_1^2}{A_1}\right) = \frac{2P_1}{A_1}\frac{dP_1}{dx} - \frac{P_1^2}{A_1^2}\frac{dA_1}{dx} = 0$$

Soit :

$$2A_1 \frac{d}{dx} P_1 = P_1 \frac{d}{dx} A_1$$

Produits adimensionnels

Les méthodes d'analyse dimensionnelle entre autres la théorie des Π de VASHY-BUCKINGHAM, ont permi d'établir pour un écoulement de fluide (compressible ou non) des groupes, parmi les dimensions fondamentales intervenant dans un phénomène, appelés paramètres adimensionnels ou produits adimensionnels, les plus importants de ces produits sont les suivants :

a) Le coefficient de pression $C_p = \dfrac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho v^2}$ qui exprime la relation entre les forces dues à la pression et les forces dues à l'inertie. En canaux découverts, la compressibilité ainsi que la tension superficielle n'ont en général qu'une très faible influence sur les conditions d'un écoulement.

b) Le nombre de Reynolds $\mathbb{R} = \dfrac{v D_h}{\nu}$ $\left(\dfrac{\rho v L}{\mu}\right)$ caractérise la relation entre les forces dues à l'inertie et les forces dues à la viscosité.

c) Le nombre de Froude $F = \frac{v^2}{gL}$ exprime la relation entre les forces d'inertie et les forces dues à la pesanteur.

d) Le nombre de Weber $W = \frac{\rho L v^2}{\sigma}$ exprime la relation entre les forces dues à l'inertie et les forces dues à la tension superficielle.

e) Le nombre de MACH $M = \frac{v}{\sqrt{K/\rho}}$ exprime la relation entre les forces dues à l'inertie et les forces dues à l'élasticité. C'est le rapport de la vitesse du fluide à celle du son dans le milieu.

Ecoulement en régime de transition -

Couche limite

Dans le domaine situé au voisinage immédiat de la paroi, le gradient des vitesses est élevé et entraine l'existence d'une épaisseur δ de liquide dans laquelle la vitesse varie très rapidement d'une valeur nulle au contact de la paroi à une valeur finie v qui diffère d'au moins 1% de la vitesse prise dans le corps de l'écoulement ; cette épaisseur est appelée couche limite.

Interprétation -

La transition est essentiellement caractérisée par le fait que la hauteur des aspérités étant de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite laminaire, on voit intervenir simultanément les caractéristiques géométriques de la rugosité ε et le nombre de Reynolds R.

Par conséquent ce régime est caractérisé par le rapport ε/δ.

on classe un régime de transition par un rapport ε/δ situé entre 0,1 et 6.
Lorsque la hauteur des aspérités est très faible, la couche limite empêche son influence sur l'écoulement et le régime est dit Hydrauliquement lisse.

Facteur de transition.

Dans la zone centrale du diagramme de Moody, dite zone de transition, le coefficient de frottement f n'a pas une valeur constante; il est fonction de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de Reynolds : $f = f(\varepsilon/D_h , R)$.
Le facteur de transition λ défini dans la théorie de la longueur fluidodynamique fonction des mêmes variables intervient dans les trois catégories de problèmes suivants :
Le premier se présente lorsque ce sont les dimensions du profil d'une conduite que l'on cherche à déterminer en fonction des autres variables connues. Pour trouver dans ce premier cas, la fonction déterminant le facteur de transition, on

écrit l'équation de CHEZY $v = C\sqrt{R_m J}$, en tenant compte de la continuité, sous la forme :

$$Q = A\sqrt{\frac{2g}{f}}\sqrt{D_h \cdot J}$$

en éliminant les dimensions linéaires et quadratiques entre cette équation et la formule de DARCY-WEISSBACH $J = \frac{f}{D_h}\cdot\frac{v^2}{2g}$ on tire :

$$Q = \lambda^{5/2}\Lambda^{5/2}A_o \cdot f^{-1/2}\sqrt{2g D_{h_o}\cdot J}$$ d'où

$$\lambda.\Lambda = f^{1/5}\left(\frac{Q^2}{2gA_o^2 D_{h_o} J}\right)^{1/5} \quad (*)$$

avec $\lambda\Lambda$ et les paramètres dimensionnels, ne dépendant que de la forme du profil, on a toutes les dimensions de la section recherchée :

$$D_h = \lambda\Lambda D_{h_o} \quad , \quad h = \lambda.\Lambda\, h_o \quad , \quad A = \lambda^2.\Lambda^2.A_o$$

En vue de déterminer λ comparons les dimensions ci-dessus à celles d'un profil, géométriquement semblable au premier, capable de véhiculer le même débit Q du même fluide, moyennant le même gradient J de la perte de charge et pour lequel le coefficient de frottement f garderait sa valeur constante f_r, correspondant au régime turbulent rugueux dans le domaine tout entier des écoulements pour lesquels :

$$3500 \leqslant \mathbb{R} \leqslant \mathbb{R}_{limite}$$

c'est à dire aussi en zone de transition. En appliquant la formule (*) à ce profil hypothétique on tire :

$$\Lambda = f_r^{1/5}\left(\frac{Q^2}{2gA_o^2 D_{h_o} J}\right)^{1/5} (**) \text{ - sachant que } \lambda = 1$$

en régime turbulent rugueux.
En divisant (*) par (**) on tire :

$$\lambda = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5}$$

- dans cette dernière équation le dénominateur f_r ne dépend que de la rugosité relative ε/D_{h_r} de la conduite hypothétique avec $D_{h_r} = \Lambda D_{h_o}$ le diamètre hydraulique.
- Le numérateur f constitue la valeur réelle du coefficient de frottement que l'on obtient par la méthode des approximations successives couramment utilisée

dans les applications du diagramme de Moody pour la détermination de f en zone de transition :
En première approximation on débute avec la rugosité relative du profil hypothétique ε/D_{h_r} déjà déterminée en application de la formule $D_{h_r} = \Lambda D_{h_0}$, en vue de repérer f_r dans le diagramme de Moody. Le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement passant par le profil hypothétique est défini par :

$$\mathbb{R}_r = \frac{v_r D_{hr}}{\nu}$$

avec $A = \Lambda^2 A_0$ et $v_r = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\Lambda^2 A_0}$ on tire :

$$\mathbb{R}_r = \frac{Q D_{h_0}}{\Lambda A_0 \nu}$$ ou encore en considérant que par définition : $D_{h_0} = \frac{4 A_0}{P_0}$
on obtient :

$$\mathbb{R}_r = \frac{Q}{\Lambda} \cdot \frac{4}{P_0} \cdot \frac{1}{\nu}$$

$\mathbb{R}_r$ et ε/D_{h_r} déterminent dans le diagramme de Moody un point dont l'ordonnée $f' \geqslant f_r$ constitue une valeur mieux rapprochée à la réalité du coefficient de frottement, permettant de dé-

-terminer :

- une première valeur approximative du facteur de transition :

$$\lambda' = \left(\frac{f'}{f_r}\right)^{1/5}$$

- et des valeurs mieux rapprochées à la réalité de la rugosité relative :

$$\frac{\varepsilon}{D_h}' = \frac{\varepsilon}{D_{h_r}} \cdot \lambda'^{-1}$$

et du nombre de Reynolds :

$$\mathbb{R}' = \mathbb{R}_r \cdot \lambda'^{-1}.$$

Avec $\mathbb{R}'$ et $\frac{\varepsilon}{D_h}'$ on repère dans le diagramme de Moody une nouvelle valeur f'' encore mieux rapprochée à la réalité du coefficient de frottement permettant de déterminer :

- une valeur mieux rapprochée à la réalité du facteur de transition :

$$\lambda'' = \left(\frac{f''}{f_r}\right)^{1/5}.$$

- et des valeurs encore mieux rapprochées à la réalité de la rugosité relative :

$$\frac{\varepsilon}{D_h}'' = \frac{\varepsilon}{D_{h_r}} \cdot \lambda''^{-1}.$$

et du nombre de Reynolds :

$$\mathbb{R}'' = \mathbb{R}_r \, \lambda''^{-1}.$$

La valeur précise de λ est atteinte si la différence entre f_n et f_{n-1} reste inférieure à 0,001 f_n ; dans tous les cas cette précision est atteinte au bout de trois essais.

La seconde catégorie de problèmes d'écoulement en régime de transition, necessitant une autre définition du facteur de transition, correspond au cas où c'est le débit Q véhiculé par une conduite ayant ses caractéristiques données, que l'on cherche à déterminer, en appliquant l'équation de DARCY-WEISSBACH et l'équation de continuité, le débit réel passant par cette conduite est :

$$Q = A f^{-1/2} \cdot \sqrt{2 g D_h \cdot J} \quad (1)$$

et le débit hypothetique que l'on obtient en supposant que le régime de l'écoulement passant par ce même profil reste turbulent rugueux est :

$$Q_r = A f_r^{-1/2} \cdot \sqrt{2 g D_h \cdot J} \quad (2)$$

en divisant (1) par (2) on tire :

$$Q = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{-1/2} \cdot Q_r \quad (3)$$

Dans cette dernière équation :

- le dénominateur f_r ne dépend que de la rugosité relative ε/D_{h_r} bien déterminée de la conduite, sa valeur peut être repérée dans la zone droite supérieure du diagramme de Moody.

- le numérateur f constitue la valeur réelle du coefficient de frottement que l'on obtient par la méthode des approximations successives couramment utilisée dans les applications du diagramme de Moody pour la détermination de f en zone de transition :

en première approximation on calcule, en application de (2) la valeur Q_r du débit hypothétique et le nombre de Reynolds hypothétique $\mathbb{R}_r$ y correspondant. Avec $\mathbb{R}_r$ et avec la valeur invariable de ε/D_h on repère dans le diagramme de Moody une valeur f' mieux rapprochée à la réalité du coefficient de frottement et on tire en application de (3) :

$$Q' = \left(\frac{f'}{f_r}\right)^{-1/2} \cdot Q_r$$

et : $\mathbb{R}' = \left(\frac{f'}{f_r}\right)^{-1/2} \cdot \mathbb{R}_r$

avec $\mathbb{R}'$ et avec la valeur invariable de la rugosité ε/D_h on repère dans le diagramme de Moody une valeur f'', encore mieux rapprochée à la réalité, du coefficient de frottement et des valeurs encore mieux rapprochées à la réalité du débit et du nombre de Reynolds :

$$Q'' = \left(\frac{f''}{f_r}\right)^{-1/2} \cdot Q_r$$

et $$\mathbb{R}'' = \left(\frac{f''}{f_r}\right)^{-1/2} \cdot \mathbb{R}_r \quad ,$$

la valeur précise de f, Q et $\mathbb{R}$ est atteinte si la différence entre f_n et f_{n-1} reste inférieure à $0{,}001 . f_n$; cette précision est dans tous les cas atteinte au bout de trois essais.

En posant $\lambda_Q^{2,65} = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/2}$ on tire :

$$\lambda_Q = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5,3} \quad ,$$

sachant d'autre part que :

$$\Lambda = \left(\frac{Q_r}{\mathcal{K}\sqrt{J}}\right)^{1/2,65}$$ (voir rappels sur la théorie de la longueur fluidodynamique)

le débit d'un écoulement en régime turbulent rugueux réel ou hypothétique, passant par un profil, ayant sa longueur fluidodynamique Λ, est :

$$Q_r = \Lambda^{2,65} \cdot \mathcal{H}\sqrt{J} \qquad (4)$$

en divisant les dimensions linéaires du profil réel par λ_Q, on obtient un profil hypothétique, géométriquement semblable au premier, mais ayant sa longueur fluidodynamique réduite à Λ/λ_Q. Le débit, hypothétique turbulent rugueux, passant par ce profil réduit est en application de (4) :

$$(\Lambda/\lambda_Q)^{2,65} \cdot \mathcal{H}\sqrt{J} = \lambda_Q^{-2,65} \cdot Q_r = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{-1/2} \cdot Q_r = Q$$

cette dernière équation montre que le débit réel Q, passant par une conduite ayant ses dimensions linéaires D ou h ou e etc... sa longueur fluidodynamique y correspondante $\Lambda = \frac{D}{D_o} = h/h_o = e/e_o$ ... et son coefficient de frottement y correspondant f, est le même que le débit hypothétique Q_r, véhiculé par une conduite hypothétique ayant :

- son profil géométriquement semblable

au profil réel.
- sa rugosité ε identique à celle de la conduite réelle.
- les dimensions linéaires de son profil D/λ_Q , h/λ_Q , etc...
- et la longueur fluidodynamique Λ/λ_Q.

Ainsi le facteur λ_Q peut être considéré comme un facteur de transition, représentant le rapport entre les dimensions linéaires d'un profil réel et un autre hypothétique.

La troisième catégorie de problèmes d'écoulement en régime de transition, necessitant une troisième définition du facteur de transition, correspond au cas où c'est le gradient J de la perte de charge, occasionneé par le passage d'un écoulement en régime de transition, que l'on cherche à déterminer en fonction des autres éléments connus.

Dans ce cas on connait à priori les valeurs réelles de ε de D_h de Q et on peut calculer la valeur réelle $\mathbb{R}$ du nombre de Reynolds. Ainsi on peut repérer dans le diagramme de Moody les valeurs y correspondant de f et de f_r et on peut calculer, en application de l'équation de DARCY – WEISSBACH, la valeur hypothétique J_r et la valeur réelle J du gradient de la perte de charge. ainsi on a :

$$J_r = \frac{f_r}{D_h} \cdot \frac{Q^2}{2gA^2}$$

et

$$J = \frac{f}{D_h} \cdot \frac{Q^2}{2gA^2}$$

d'où : $J = \dfrac{f}{f_r} \cdot J_r$

Sachant que : $\Lambda = \left(\dfrac{Q}{\mathcal{K} \sqrt{J_r}} \right)^{1/2,65}$,

le gradient J_r de la perte de charge nécessaire à véhiculer en régime hypothétique turbulent rugueux un débit Q, passant par un profil, ayant sa longueur fluidodynamique Λ, est :

$$J_r = \frac{Q^2}{\mathcal{K}^2 \Lambda^{5,3}}$$

en posant $\lambda_J = \left(\dfrac{f}{f_r} \right)^{1/5,3}$, on divise les dimensions linéaires du profil par λ_J pour obtenir un profil hypothétique géométriquement semblable au premier et ayant sa longueur fluidodynamique réduite à Λ/λ_J. Le gradient de la perte de charge provoquée par le passage du débit Q par ce profil réduit est :

$$\frac{Q^2}{\mathcal{H}^2 (\Lambda/\lambda_J)^{5,3}} = \lambda_J^{5,3} \cdot J_r = \frac{f}{f_r} \cdot J_r = J$$

cette dernière équation montre que le gradient J de la perte de charge, provoquée par le passage d'un débit Q par un profil, ayant ses dimensions linéaires D, h ou e etc..., sa longueur fluidodynamique $\Lambda = \frac{D}{D_0} = \frac{h}{h_0} = \frac{e}{e_0}$ ... et son coefficient de frottement f, est le même que le gradient de la perte de charge, provoquée par le passage du même débit par une conduite hypothétique, ayant :

- son profil géométriquement semblable au profil réel.
- sa rugosité ε identique à celle de la conduite réelle.
- les dimensions linéaires de son profil : D/λ_J, h/λ_J ...
- et sa longueur fluidodynamique Λ/λ_J.

Ainsi, le facteur λ_J peut être considéré comme un facteur de transition, représentant le rapport entre les dimensions linéaires d'un profil réel et un autre hypothétique.

Dans le régime de transition, le coefficient de frottement f est déterminé en application de la formule de Colebrook

$$f^{-1/2} = -0{,}86 \ln\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{R\sqrt{f}}\right)$$

Similitude et étude des modèles -

En vue de déterminer les dimensions des ouvrages, les conditions de l'écoulement des fluides ne permettent pas toujours d'appliquer directement les formules de la mécanique des fluides en raison des diverses hypothèses simplificatrices qui ont rendu possible leur établissement. Lorsqu'il y a lieu d'etudier un projet, on commence à préciser l'ordre de grandeur de ses dimensions en s'inspirant sur celles des ouvrages déjà existants et en appliquant à l'écoulement considéré les formules théoriques ou empiriques dont on dispose. Cependant les résultats obtenus s'avèrent en général non satisfaisants du fait d'une part de l'approximation plus ou moins bonne assurée par les formules utilisées et d'autre part de la necessité de simplifier le phénomène considéré ou encore de négliger certains paramètres pour pouvoir lui appliquer les dites formules.

Ainsi l'idée de tenter d'étudier en petit un phénomène se produisant en grand vient tout naturellement à l'esprit ; Ceci est le principe des essais sur modèles réduits qui ont connu un développement considérable non seulement en hydraulique mais aussi dans d'autres branches de la mécanique des fluides.
L'interet dont bénéficient ces essais est dû notamment aux facilités qu'offrent les mesures faites au laboratoire, à la plus grande précision obtenue grace aux appareils de mesure utilisés et en outre, les modèles permettent de réaliser aisément un bon nombre d'expériences que l'on peut répéter en cas de nécessité en faisant varier un des paramètres du problème. (étude Systématique du phénomène pour différents débits, différentes profondeurs, différentes pressions etc...) ; La question essentielle qui se pose alors est la Suivante : dans quelle mesure et Suivant quelle loi les résultats obtenus sur le modèle peuvent-ils être transposés dans l'écoulement en vraie grandeur (prototype) ?

Autrement dit si le modèle est géométriquement semblable au prototype, les dimensions linéaires homologues du modèle et du prototype étant dans un rapport λ (échelle du modèle) et si en outre les caractéristiques de l'écoulement dans le modèles (vitesse, débit, pression etc...) sont réduites par rapport à celles du prototype suivants des rapports différents (λ_t, λ_v, λ_Q, λ_F etc...). Pour que les résultats obtenus sur le modèle soient transposables dans la réalité, il faut tout d'abord que les rapports susvisés soient bien déterminés et constants, qu'ils ne changent pas par exemple quand on modifie les conditions de l'écoulement (débit, pression, tirant d'eau etc...); de plus il faut que ces rapports soient connus en fonction de l'échelle λ. Si ces conditions sont réalisées on a dans le modèle un écoulement semblable à celui du prototype. La réalisation de ces conditions résulte de l'application des lois de similitude -

- Similitude géométrique.

Echelle du modèle : c'est le rapport des dimensions linéaires homologues du modèle (L_2) et du prototype (L_1).

Soit : $\lambda = \dfrac{L_2}{L_1}$

- Similitude cinématique.

Elle exige que les vitesses et les accélérations soient dans un rapport défini et constant en tous les points correspondant des deux écoulements.

Soient :

t_1 le temps mis pour parcourir la distance L_1 dans le prototype.

t_2 le temps mis pour parcourir la distance L_2 homologue de L_1 dans le modèle.

λ l'échelle du modèle. $\lambda = \dfrac{L_2}{L_1}$

λ_t l'échelle des temps $\lambda_t = t_2/t_1$

λ_v l'échelle des vitesses $\lambda_v = v_2/v_1$

λ_γ l'échelle des accélérations $\lambda_\gamma = \gamma_2/\gamma_1$

on a, par définition :

$v_1 = \dfrac{L_1}{t_1}$, $v_2 = \dfrac{L_2}{t_2}$ en divisant membre à membre les équations, on tire :

$$\frac{v_2}{v_1} = \lambda_v = \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{t_1}{t_2} = \frac{\lambda}{\lambda_t}$$

de même pour les accélérations on a par définition :

$\gamma_1 = \frac{L_1}{t_1^2}$, $\gamma_2 = \frac{L_2}{t_2^2}$ en divisant membre à membre on tire :

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \lambda_\gamma = \frac{L_2}{L_1} \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda_t^2}$$

On constate donc que le choix de l'échelle des temps λ_t impose celle des vitesses $\lambda_v = \frac{\lambda}{\lambda_t}$ et celle des accélérations $\lambda_\gamma = \frac{\lambda}{\lambda_t^2}$.

Similitude dynamique.

Les mouvements du fluide dans le prototype et dans le modèle sont provoqués par des forces. Pour que les deux systèmes (modèle et prototype) soient dynamiquement semblables, il est necessaire que les forces agissant en des points homologues du modèle et du prototype soient dans un rapport fixe et bien déterminé. Il en découle que l'existence d'une similitude dynamique stricte est conditionnée par l'identité des produits adimensionnels : Nombre de Froude, nombre de Reynolds, nombre de Mach et nombre de Weber dans les points homologues du modèle et du prototype, ce qui est pratiquement impossible de réaliser sauf si le modèle a pour échelle $\lambda = 1$.

Toutefois cette impossibilité ne signifie pas la caducité de l'expérimentation sur les modèles réduits car suivant la nature de l'écoulement les forces y intervenant sont plus ou moins importantes. Ainsi les forces dues à la tension superficielle n'interviennent que dans le cas des écoulements par gouttes ou par petits jets et l'effet des forces dues à l'élasticité n'a pratiquement aucune influence sur l'écoulement permanent franchement subsonique ($M \leq 0,7$) des liquides. Les forces dues à la viscosité peuvent avoir une importance plus ou moins grande par rapport aux forces dues à l'inertie et à la pesanteur suivant le degré de turbulence du régime, c'est à dire suivant la grandeur du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement. Cette circonstance incite à faire une distinction fondamentale en ce qui concerne la similitude dynamique et permet de définire les lois régissant les relations, existant entre les éléments homologues, déterminant les phénomènes physiques ayant lieu dans le prototype et dans le modèle.

Il existe du point de vue pratique deux cas importants de la similitude dynamique.

1) Cas où les forces dues à la viscosité sont négligeables par rapport aux forces dues à l'inertie et à la pesanteur : c'est la similitude de Reech-Froude.

2) Cas où les forces dues à la pesanteur sont négligeables par rapport aux forces dues à l'inertie et à la viscosité : c'est la similitude de Reynolds.

Dans le premier cas l'étude du phénomène a aboutit à la relation :

$$\lambda_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_t} = \sqrt{\lambda}$$

La loi de similitude de Reech-Froude peut s'exprimer d'une autre façon ; en effet la relation ci-dessus peut s'écrire comme suit :

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

L_1 et L_2 représentent les dimensions linéaires homologues dans le prototype et dans le modèle, en élevant au carré les deux membre de l'égalité ci-dessus, on tire :

$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{L_2}{L_1}$ d'où $\frac{v_2^2}{L_2} = \frac{v_1^2}{L_1}$; en divisant les deux membres par g (accélération de la pesanteur qui reste la même aussi bien dans le modèle que dans le prototype) on a :

$$\frac{v_2^2}{gL_2} = \frac{v_1^2}{gL_1} = \mathbb{F}$$

La condition de similitude imposée revient donc à réaliser un écoulement caractérisé par un même nombre de Froude dans le modèle et dans le prototype.

En combinant les similitudes géométriques cinématiques et dynamiques, nous obtenons les rapports de toutes les caractéristiques de l'écoulement dans le modèle et dans le prototype :

- temps $\lambda_t = \sqrt{\lambda}$
- vitesses $\lambda_v = \sqrt{\lambda}$

- débits : $\lambda_Q = \lambda_v \cdot \lambda^2 = \lambda^{5/2}$
- accélération : $\lambda_\gamma = \dfrac{\lambda}{\lambda_t^2} = 1$
- Forces : $\lambda_F = \lambda_m \cdot \lambda_\gamma = \lambda_\rho \cdot \lambda^3$
- Pressions : $\lambda_p = \dfrac{\lambda_F}{\lambda^2} = \lambda_\rho \cdot \lambda$
- Puissances : $\lambda_{\underline{P}} = \lambda_F \cdot \dfrac{\lambda}{\lambda_t} = \lambda_\rho \cdot \lambda^{7/2}$.

Le plus souvent, on utilise le même fluide dans le modèle et dans le prototype alors : $\lambda_\rho = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = 1$

La similitude de Reech-Froude est très fréquemment utilisée dans les études sur modèles réduits, elle intervient notamment pour la plupart des écoulements à surface libre.

Dans le deuxième cas (similitude de Reynolds) on aboutit à :

$$\frac{L_2 v_2}{\nu_2} = \frac{L_1 v_1}{\nu_1} = \mathbb{R}.$$

ce qui revient à dire que le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement doit être le même dans le modèle et dans le prototype ; on tire de l'égalité ci-dessus :

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

or $\dfrac{L_2}{L_1} = \lambda$ et $\nu = \mu/\rho$ ainsi

$$\lambda = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = \lambda_\mu \cdot \lambda_\rho \cdot \lambda_v^{-1}$$

$$\lambda_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}} \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = \lambda_\mu \cdot \lambda^{-1} \cdot \lambda_\rho^{-1}$$

$$\lambda_t = \frac{\lambda}{\lambda_v} = \lambda^2 \cdot \lambda_\mu^{-1} \cdot \lambda_\rho$$

$$\lambda_F = \lambda_\mu \cdot \lambda^2 \cdot \lambda_t^{-1} = \lambda_\mu^2 \cdot \lambda_\rho^{-1}$$

$$\lambda_Q = \lambda_v \cdot \lambda^2 = \lambda \cdot \lambda_\mu \cdot \lambda_\rho^{-1}$$

$$\lambda_\gamma = \lambda \cdot \lambda_t^{-2} = \lambda^{-3} \cdot \lambda_\mu^2 \cdot \lambda_\rho^{-2}$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda_F}{\lambda^2} = \lambda^{-2} \cdot \lambda_\mu \cdot \lambda_\rho^{-1}$$

$$\lambda_P = \lambda_F \cdot \lambda_v = \lambda_\mu^2 \cdot \lambda_\rho^{-1} \lambda_\mu \cdot \lambda^{-1} \cdot \lambda_\rho = \lambda_\mu^3 \cdot \lambda_\rho^{-2} \cdot \lambda^{-1}$$

Incompatibilité des similitudes de Reech-Froude et de Reynolds.

La condition de Reech-Froude impose :

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda}$$

En substituant cette relation à celle exprimant la condition de Reynolds, on tire :

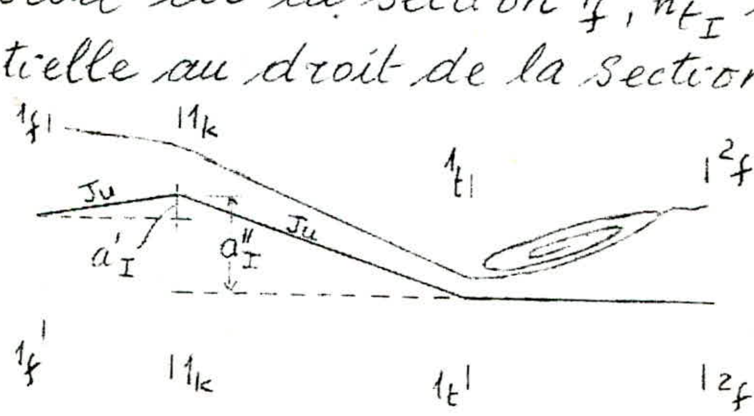
$$\lambda^{3/2} = \lambda_\nu$$

Dans la pratique, on utilise le plus souvent de l'eau et sur le modèle et sur le prototype, c'est à dire on a : $\lambda_\nu = 1$, d'où il résulte que $\lambda = 1$; autrement dit, le modèle doit être réalisé à la même échelle que le prototype. Il est donc pratiquement impossible de réaliser des essais sur modèle réduit permettant de satisfaire simultanément aux conditions de Reech-Froude et de Reynolds.

CHAP II

Ecoulements permanents non Uniformes en Conduite circulaire partiellement mouilleé-

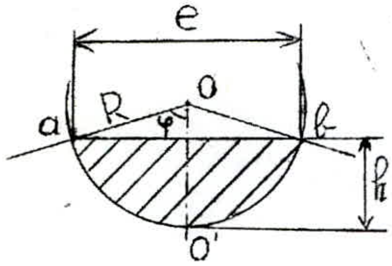
La section sèche circulaire est dans tous les cas réductible à un modèle unique, geometriquement semblable, constitué par le cercle ayant son diamètre D_1 égal à l'unité de longueur. En application des lois de Similitude de Reech-Froude les relations obtenues pour le diamètre D_1 sont extensibles au cas général où la section étudiée a un diamètre quelconque. L'écoulement étudié est celui passant par l'ouvrage constitué d'un assemblage d'éléments à profil circulaire de diamètre D_1 et dont le profil en long est représenté par la figure, où toutes les dimensions et profondeurs sont affectées de l'indice "I" relatif au diamètre D_1. Ainsi h_{f_I} représente la profondeur fluviale au droit de la section 1_f, h_{t_I} la profondeur torrentielle au droit de la section 1_t etc...



Le long de la partie descendante, appelée aussi "rapide", l'écoulement est torrentiel; à l'amont de la section 1_k dite de contrôle, l'écoulement est fluvial avant de devenir critique au droit de cette même section. La partie horizontale est le lieu d'un changement de régime de l'écoulement, de torrentiel dans la section 1_t en fluvial dans la section 2_f. Cette transformation de régime se fait par un ressaut.

Les paramètres affectés de l'indice "I" sont relatifs au diamètre D_1 égal à l'unité de longueur; ainsi Q_I est le débit véhiculé par ce diamètre, h_I représente la profondeur, etc... Notre étude consistera à déterminer d'une part les paramètres du ressaut à savoir : ses hauteurs à l'amont et à l'aval, sa longueur ainsi que la perte de charge qu'il occasionne, et le profil en long de la surface libre de l'écoulement à travers l'ouvrage indiqué d'autre part.

Rappels concernant le profil circulaire -



La figure ci-contre représente un profil circulaire de diamètre D et de Rayon R.

Désignons par: A l'aire du segment circulaire hachuré, sur la figure et ayant pour corde e, pour longueur d'arc l et pour flèche h, A_1 l'aire du secteur circulaire oao'bo et A_2 l'aire du triangle oab - Soit 2φ l'angle au centre, l'aire A s'exprime comme étant la différence de A_1 et A_2 :

$$A = A_1 - A_2 \qquad (1)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} l . R \qquad (2)$$

la longueur de l'arc l s'écrit :

$$l = \frac{2\varphi}{360} . 2\pi R \qquad (3)$$ dans cette relation

φ est exprimé en degrés.

ainsi $A_1 = \frac{1}{2} . \frac{2\varphi}{360} . 2\pi R . R = \frac{\varphi}{180} . \pi R^2$

$$= \frac{D^2}{4} . \frac{\varphi}{180} . \pi \qquad (4)$$

L'aire A_2 s'écrit :

$$A_2 = 2 \times \frac{1}{2} (R - h) \frac{e}{2} = \frac{1}{2} (R - h) e = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} - h \right) e \qquad (5)$$

Pour ce même profil on a :

$$\cos\varphi = \frac{R-h}{R} = 1-\frac{h}{R} = 1-\frac{2h}{D} \quad (6)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\frac{e}{R} = \frac{e}{D} \quad (7)$$

de l'équation (6) on tire la flèche h :

$$h = \frac{D}{2}(1-\cos\varphi) \quad (6')$$

l'équation (7) nous donne la corde e :

$$e = D\sin\varphi \quad (7')$$

L'aire A_2 s'écrit alors :

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{D}{2}-\frac{D}{2}(1-\cos\varphi)\right]D\sin\varphi$$

$$= \frac{D^2}{4}\cos\varphi.\sin\varphi \quad (8)$$

finalement l'aire A s'exprime par :

$$A = A_1 - A_2 = \frac{D^2}{4}\frac{\varphi}{180}.\pi - \frac{D^2}{4}\cos\varphi.\sin\varphi$$

$$= \frac{D^2}{4}\left(\frac{\varphi}{180}.\pi - \cos\varphi.\sin\varphi\right) \quad (9)$$

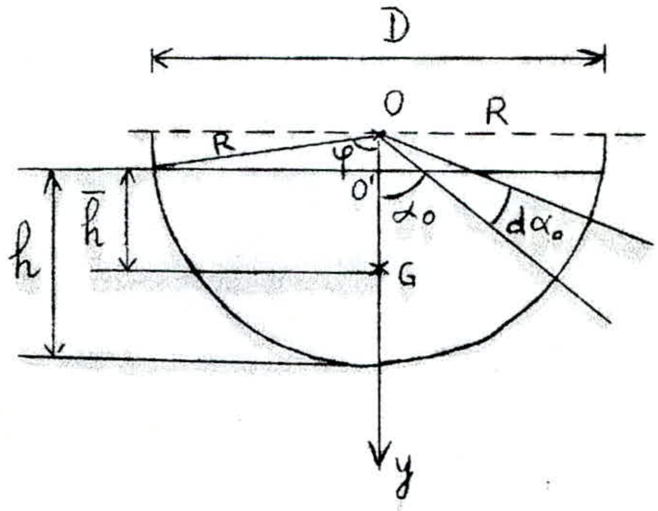
Il est à préciser que dans la relation (9) l'angle φ est exprimé en degrés.

l'aire A peut encore s'écrire :

$$A = \frac{D^2}{4}(\varphi - \cos\varphi.\sin\varphi) \quad (9')$$ où

l'angle φ est exprimé en radians.

-détermination du centre de gravité d'un segment circulaire-



La figure ci-dessus représente un segment circulaire dont G est le centre de gravité. Il s'agit de déterminer la distance verticale $\bar{h}$ qui donne la position de G.

On écrit que : y_G (position de G par rapport au centre O) est égal au moment statique divisé par l'aire du segment.

ainsi : $y_G = \dfrac{\int y\,dA}{A}$

avec :

$$y = R\cos\alpha_0$$
$$dA = 2R\sin\alpha_0 . dy$$
$$dy = R\sin\alpha_0 . d\alpha_0$$

et $A = \dfrac{D^2}{4}(\varphi - \sin\varphi . \cos\varphi)$

finalement : $y_G = \dfrac{\int 2R^3 . \cos\alpha_0 . \sin^2\alpha_0\, d\alpha_0}{A}$

$$= \frac{2}{3A} R^3 \left(\sin^3\alpha_0\right)_0^{\varphi}$$

$$y_G = \frac{2}{3A} R^3 \sin^3\varphi = \frac{D^3}{12A} \cdot \sin^3\varphi$$

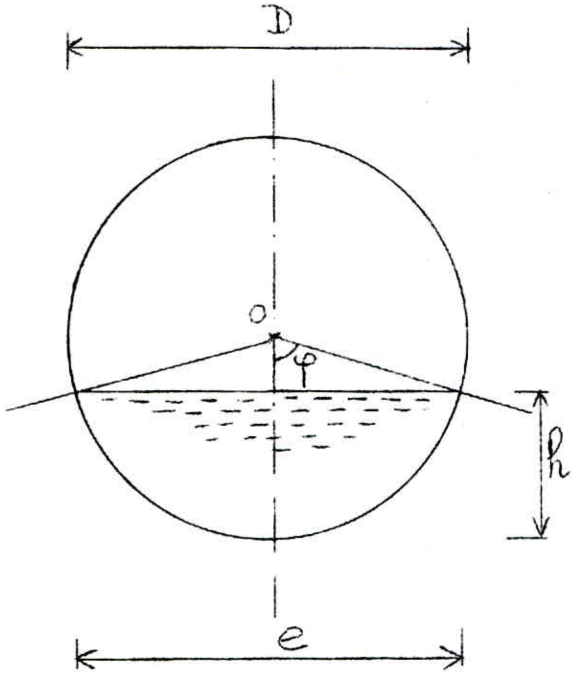
par suite :

$$\bar{h} = y_G - OO' = y_G - R\cos\varphi$$

$$\bar{h} = \frac{D^3}{12A} \sin^3\varphi - R\cos\varphi = \frac{D^3}{12A} \sin^3\varphi - \frac{D}{2} \cos\varphi$$

$$\bar{h} = \frac{D^3}{12A} \sin^3\varphi - \frac{D}{2} \cdot \cos\varphi .$$

Paramètres dimensionnels du profil circulaire.



Le paramètre de forme du profil circulaire est :

$\xi = \frac{h}{D}$ avec

$h = \frac{D}{2}(1 - \cos\varphi)$ ainsi

$\xi = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$ d'où

$\varphi = \arccos(1 - 2\xi)$

le périmètre mouillé est $P = D\varphi$ soit :

$P = D \arccos(1 - 2\xi)$.

la Section mouillée est : $A = \frac{D^2}{4}(\varphi - \sin\varphi . \cos\varphi)$

Si nous choisissons pour dimension linéaire le diamètre D du profil $(a = D)$, le périmètre mouillé P_1 correspondant à $a = 1 = D$ est alors :

$P_1 = \varphi = \arccos(1 - 2\xi)$

la Section mouillée A_1 est :

$A_1 = \frac{1}{4}(\varphi - \sin\varphi . \cos\varphi)$

le paramètre dimensionnel a_o est donné par :

$$a_o = D_o = \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}}$$ soit

$$D_o = \frac{\varphi^{0,245}}{\left(\frac{\varphi - \sin\varphi . \cos\varphi}{4}\right)^{0,623}}$$

<u>Extremum :</u>

. $P_1' = \varphi' = [\arccos(1-2\xi)]'$

$$P_1' = -2 . \frac{-1}{\sqrt{1-(1-2\xi)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4\xi - 4\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\xi - \xi^2}}$$

$$P_1' = \frac{1}{\sqrt{\xi - \xi^2}}$$

. $A_1' = \frac{1}{4}(\varphi - \sin\varphi . \cos\varphi)'$

$$A_1' = \frac{1}{4}\left(\varphi' - \frac{2\varphi' \cos 2\varphi}{2}\right)$$ soit :

$$A_1' = \frac{\varphi'}{4}(1 - \cos 2\varphi)$$

En application de la relation :

$$2 A_1 P_1' = A_1' P_1$$ il vient :

$$2A_1\varphi' = P_1\frac{\varphi'}{4}(1-\cos 2\varphi) \quad \text{soit}$$

$$8A_1 = P_1(1-\cos 2\varphi)$$

En remplaçant dans cette dernière équation A_1 et P_1 par leurs expressions, on obtient :

$$2\varphi - \sin 2\varphi = \varphi(1-\cos 2\varphi)$$

$$\varphi(1+\cos 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

$\varphi = tg\varphi$, il s'ensuit que $\varphi = 0$

c'est à dire : $\arccos(1-2\xi) = 0$

soit : $1-2\xi = 0$ d'où

$\xi_{optimum} = \frac{1}{2}$ correspondant à

$D_{optimum} = 2$ et

$h_{optimum} = 1$.

<u>minimum de D_0</u>

$$D_0 = \frac{P_1^{0,65/2,65}}{A_1^{1,65/2,65}}$$

$$D_0' = \left(\frac{0,65}{2,65}\, P_1^{-\frac{2}{2,65}} . P_1' A_1^{1,65/2,65} - \frac{1,65}{2,65} . A_1^{-\frac{1}{2,65}} . A_1' P_1^{\frac{0,65}{2,65}}\right) A_1^{-\frac{2\times1,65}{2,65}}$$

D_0 présente un minimum qui s'exprime par $D'_0 = 0$ soit :

$$\frac{0,65}{2,65} . P_1^{-\frac{2}{2,65}} . A_1^{\frac{1,65}{2,65}} P'_1 = \frac{1,65}{2,65} . A_1^{-\frac{1}{2,65}} . P_1^{0,65/2,65} . A'_1$$

ou bien : $0,65 . A_1 P'_1 = 1,65 P_1 . A'_1$

$$0,65 \, A_1 \, \varphi' = 1,65 . P_1 \frac{\varphi'}{4} (1 - \cos 2\varphi)$$

$$4 A_1 = \frac{1,65}{0,65} P_1 (1 - \cos 2\varphi)$$

En remplaçant dans cette dernière équation A_1 et P_1 par leurs expressions, on a:

$$\varphi - \sin\varphi . \cos\varphi = \frac{1,65}{0,65} . \varphi (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\frac{\varphi}{0,65} (1,65 - 0,65 - 1,65 . \cos 2\varphi) = - 0,65 \sin\varphi . \cos\varphi$$

$$\varphi (1 - 1,65 . \cos 2\varphi) = - 0,65 . \sin\varphi . \cos\varphi$$

finalement : $\varphi = \dfrac{0,325 . \sin 2\varphi}{1,65 . \cos 2\varphi - 1}$

En résolvant cette équation par approximations successives, on trouve :

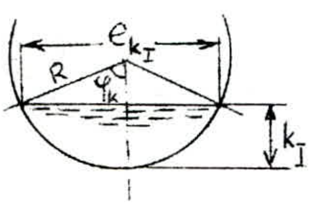
$\varphi = 2,643$ rd par suite le paramètre de forme $\xi = \frac{1}{2} (1 - \cos\varphi)$ vaut :

$$\xi = 0,939$$

Écoulement critique dans une conduite circulaire partiellement mouillée, de diamètre égal à l'unité de longueur

La figure ci-dessous représente un profil circulaire de diamètre égal à l'unité, partiellement mouillé par un courant en régime critique de profondeur k_I et de largeur de plan e_{k_I}. On a pour ce profil.

$$\cos\varphi_k = \frac{0{,}5 - k_I}{0{,}5} = 1 - 2k_I \qquad (1_k)$$



L'aire du segment constituant le profil critique mouillé est :

$$A_{k_I} = \frac{\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k}{4} \qquad (2_k)$$

(voir rappels mathématiques), avec $\varphi_k = \arccos(1-2k_I)$

La corde $e_{k_I} = \sin\varphi_k \qquad (3_k)$

La flèche $k_I = \dfrac{1 - \cos\varphi_k}{2}$

Pour un écoulement en régime critique on a :

$$\frac{Q_I^2 e_{k_I}}{g A_{k_I}^3} = 1 \quad (*) \qquad \text{avec } Q_I^2 = (v_{k_I} \cdot A_{k_I})^2$$

la relation (*) s'écrit après simplification

$$\frac{v_{k_I}^2 e_{k_I}}{g A_{k_I}} = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{v_{k_I}^2}{2g} = \frac{A_{k_I}}{2 e_{k_I}} \qquad (4_k)$$

La quantité $\dfrac{v_{k_I}^2}{2g}$ est la hauteur capable de la vitesse soit : $\dfrac{v_{k_I}^2}{2g} = H_{k_I} - k_I \qquad (5_k)$

en remplaçant A_{k_I} et e_{k_I} par leur expression indiquée ci-dessus, on obtient pour la vitesse critique :

$$v_{k_I} = \sqrt{\frac{g(\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k)}{4}} \qquad (6_k)$$

L'expression du débit est donnée par la relation (*) : $Q_I = \sqrt{g\,\frac{A_{k_I}^3}{e_{k_I}}}$

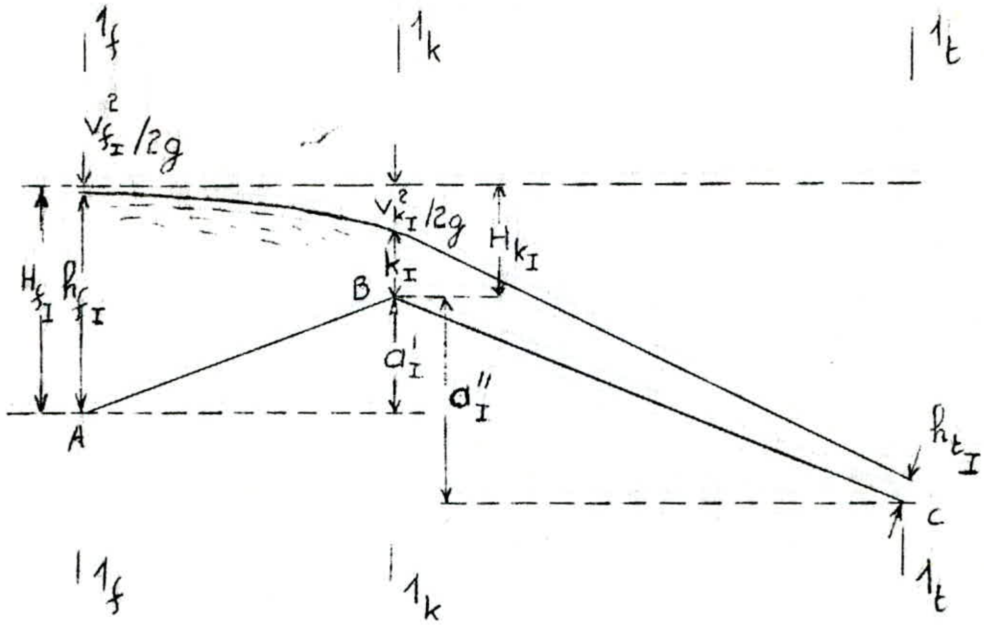
en remplaçant A_{k_I} et e_{k_I} par leur expression déjà indiquée, on écrit :

$$Q_I = \sqrt{\frac{g(\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k)^3}{4 \cdot \sin\varphi_k}} \qquad (7_k)$$

La charge totale $H_{k_I} = \frac{v_{k_I}^2}{2g} + k_I$ s'écrit après substitution des expressions de v_{k_I} et de k_I :

$$H_{k_I} = \frac{\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k}{8 \cdot \sin\varphi_k} + \frac{1 - \cos\varphi_k}{2} \qquad (8_k)$$

Etude du Seuil ABC -



La charge totale au droit de la section 1_f où l'écoulement est fluviale est, comme le montre la figure ci-dessus :

$$H_{f_I} = H_{k_I} + a'_I \qquad (1_f)$$

La section mouillée y est égale à :

$$A_{f_I} = \frac{\varphi_f - \sin\varphi_f \cdot \cos\varphi_f}{4} \quad (2_f) \quad \text{où} \quad \varphi_f = \arccos(1-2h_{f_I})$$

(1_f) peut s'écrire $H_{k_I} = H_{f_I} - a'_I \quad (1'_f)$

La charge totale $H_{f_I} = h_{f_I} + \frac{V_{f_I}^2}{2g} \quad (3_f)$

en vertu de l'équation de continuité la relation (3_f) devient : $H_{f_I} = h_{f_I} + \frac{Q_I^2}{2gA_{f_I}^2} \quad (4_f)$

Ainsi $(1'_f)$ s'écrit : $H_{k_I} = h_{f_I} + \frac{Q_I^2}{2g\,A_{f_I}^2} - a'_I \quad (5_f)$

en éliminant Q_I entre (5_f) et (7_k) on tire :

$$H_{k_I} = h_{f_I} + \frac{(\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k)^3}{128\,A_{f_I}^2 \cdot \sin\varphi_k} - a'_I \qquad (10)$$

Dans la section (1_t) l'écoulement est torrentiel et la profondeur est h_{t_I} ; en négligeant les pertes de charge linéaires sur le tronçon BC, la charge totale H_{t_I} dans la dite section est :

$$H_{t_I} = H_{k_I} + a''_I \qquad (1_t)$$

La section mouillée y est égale à :

$$A_{t_I} = \frac{\varphi_t - \sin\varphi_t \cdot \cos\varphi_t}{4} \qquad (2_t)$$

où $\varphi_t = \arccos(1 - 2h_{t_I})$,

La relation (1_t) peut s'écrire :

$$H_{k_I} = H_{t_I} - a''_I \qquad (1'_t)$$

La charge totale $H_{t_I} = h_{t_I} + \dfrac{v_{t_I}^2}{2g} \qquad (3_t)$

En vertu de l'équation de continuité la relation (3_t) devient :

$$H_{t_I} = h_{t_I} + \frac{Q_I^2}{2g\,A_{t_I}^2} \qquad (4_t)$$

Ainsi $(1'_t)$ s'écrit : $H_{k_I} = h_{t_I} + \dfrac{Q_I^2}{2g\,A_{t_I}^2} - a''_I \qquad (5_t)$

En éliminant Q_I entre (5_t) et (7_k) on tire :

$$H_{k_I} = h_{t_I} + \frac{(\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k)^3}{128\,A_{t_I}^2 \cdot \sin\varphi_k} - a''_I \qquad (11)$$

Un programme, applicable au "calculateur de poche" du type TI 59, et un organigramme ont été établi en application des équations précédentes, l'organigramme montrant les différentes étapes de calcul est le suivant :

(A)

à partir de k_I approximatif, calcule :

$\widehat{Q}_{k_I} = V_{k_I} \cdot A_{k_I}$; $\varphi_k = \arccos(1 - 2k_I)$; $e_{k_I} = \sin\varphi_k$;

$A_{k_I} = \frac{1}{4}\left(\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k\right)$; $V_{k_I} = \sqrt{g A_{k_I}/e_{k_I}}$;

$H_{k_I} = k_I + V_{k_I}^2/2g$.

TESTE $|Q_I - \widehat{Q}_{k_I}|$

$< t$; $> t$; $= t$

corrige la valeur de k_I avec la relation :

$$k_{I_i} = k_{I_{i-1}} \cdot \left(\frac{Q_I}{\widehat{Q}_{k_I\, i-1}}\right)^{0.5}$$

stocke : φ_k, A_{k_I}, V_{k_I}, Q_{k_I}, H_{k_I}, k_I

calcule et stocke :

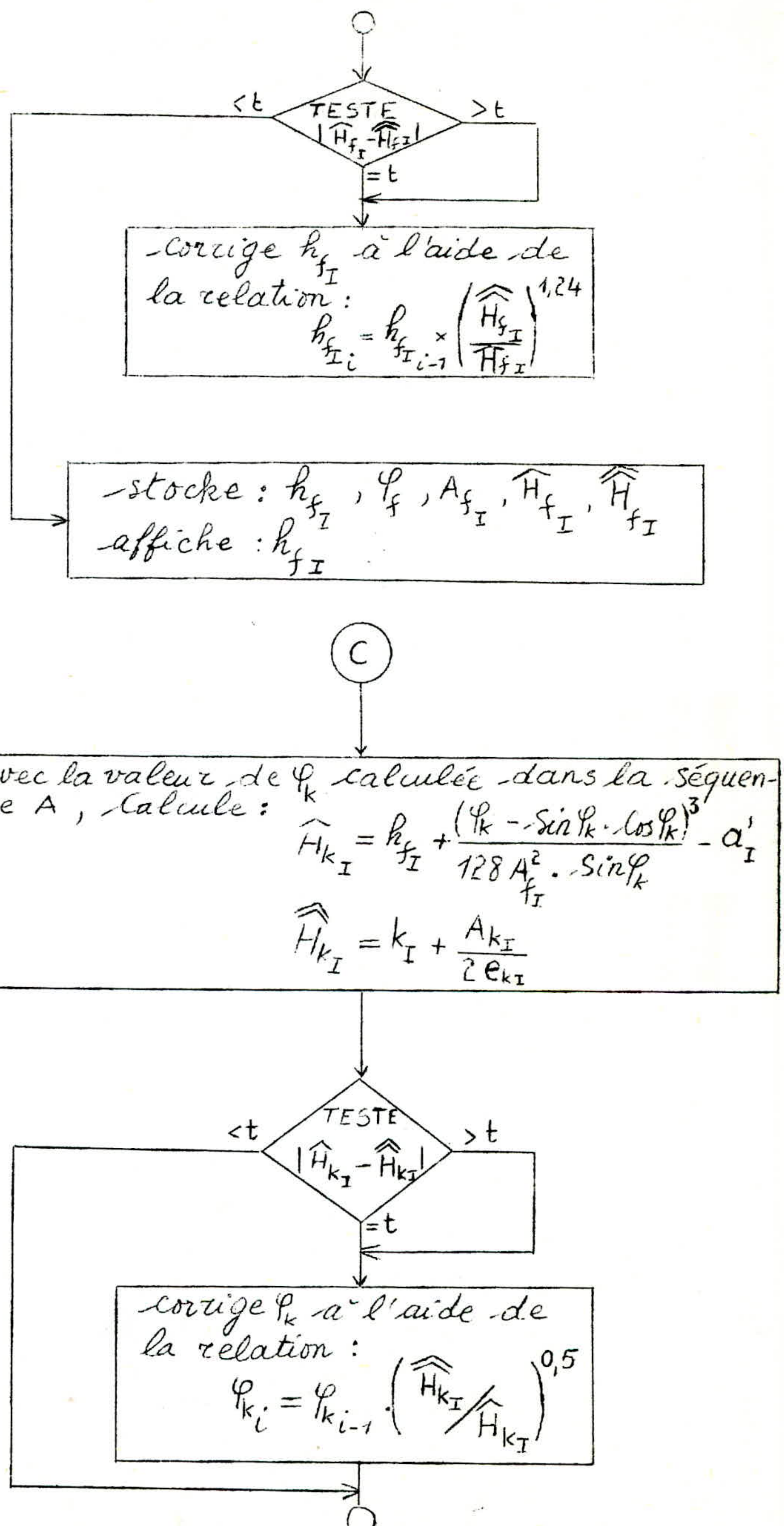
$H_{f_I} = H_{k_I} + a'_I$ et $h_{f_I} \approx H_{f_I}$ affiche k_I

(B)

à partir de h_{f_I} approximatif, calcule :

$\varphi_f = \arccos(1 - 2h_{f_I})$; $\widehat{H}_{f_I} = h_{f_I} + \frac{Q_I^2}{2g A_{f_I}^2}$; $\widehat{H}_{f_I} = H_{k_I} + a'_I$

$A_{f_I} = \frac{1}{4}\left(\varphi_f - \sin\varphi \cdot \cos\varphi_f\right)$



TESTE $|\widehat{H}_{f_I} - \widehat{\widehat{H}}_{f_I}|$
<t
>t
=t
-corrige h_{f_I} à l'aide de la relation : $h_{f_{I_i}} = h_{f_{I_{i-1}}} \times \left(\frac{\widehat{\widehat{H}}_{f_I}}{\widehat{H}_{f_I}} \right)^{1,24}$
-stocke : h_{f_I}, φ_f, A_{f_I}, $\widehat{H}_{f_I}$, $\widehat{\widehat{H}}_{f_I}$
-affiche : h_{f_I}
C
-avec la valeur de φ_k calculée dans la séquence A, Calcule : $\widehat{H}_{k_I} = h_{f_I} + \frac{(\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k)^3}{128 A_{f_I}^2 \cdot \sin\varphi_k} - a'_I$
$\widehat{\widehat{H}}_{k_I} = k_I + \frac{A_{k_I}}{2 e_{k_I}}$
TESTE $|\widehat{H}_{k_I} - \widehat{\widehat{H}}_{k_I}|$
<t
>t
=t
corrige φ_k à l'aide de la relation : $\varphi_{k_i} = \varphi_{k_{i-1}} \cdot \left(\widehat{\widehat{H}}_{k_I} / \widehat{H}_{k_I} \right)^{0,5}$

stocke : $\hat{H}_{k_I}$; $\hat{\hat{H}}_{k_I}$; φ_k . Calcule, stocke et affiche : $\hat{Q}_I = \sqrt{g\, A^3_{k_I}/e_{k_I}}$

D

à partir de h_{t_I} approximé en A, calcule :

$\varphi_t = \arccos(1 - 2h_{t_I})$; $A_{t_I} = \dfrac{\varphi_t - \sin\varphi_t \cdot \cos\varphi_t}{4}$

$\hat{\hat{H}}_{t_I} = h_{t_I} + \dfrac{Q_I^2}{2g \cdot A^2_{t_I}}$; $\hat{H}_{t_I} = H_{k_I} + a''_I$

TESTE $|\hat{H}_{t_I} - \hat{\hat{H}}_{t_I}|$

$<t$; $>t$; $=t$

Corrige h_{t_I} avec la relation :

$$h_{t_i} = h_{t_{i-1}} \times \left(\frac{\hat{\hat{H}}_{t_I}}{\hat{H}_{t_I}}\right)^{0,6}$$

stocke : φ_t ; A_{t_I} ; $\hat{H}_{t_I}$; $\hat{\hat{H}}_{t_I}$; h_{t_I}

affiche : h_{t_I}

Le programme est le suivant :

```
2nd LBL A 2nd RAD 1-2×RCL06 = INV 2nd cos STO 07
- RCL07 2nd sin × RCL07 2nd cos = ÷ 4 = STO 08 ×
9.8 ÷ RCL07 × 2nd sin = √x STO 09 × RCL08 = STO 05
RCL06 + RCL09 x² ÷ 19.6 = STO 00 RCL10 ÷ RCL05 =
y^x .5 × RCL06 = STO 06 ( RCL10 - RCL05 ) 2nd |x| 2nd
x≥t A RCL00 + RCL04 = STO 11 STO 02 RCL06 ÷ 2 =
STO22 RCL06 R/S

2nd LBL B 1-2×RCL02 = INV 2nd cos STO 01 - RCL01
2nd sin × RCL01 2nd cos = ÷ 4 = STO 03 RCL02 +
RCL10 x² ÷ 19.6 ÷ RCL03 x² = STO 12 ÷ RCL 11 = y^x
1.24 +/- × RCL02 = STO 02 RCL 11 - RCL 12 = 2nd |x|
2nd x≥t B RCL02 R/S

2nd LBL C ( RCL02 - RCL04 + ( RCL07 - RCL07 2nd
sin × RCL 07 2nd cos ) y^x 3 ÷ 128 ÷ RCL03 x² ÷
RCL07 2nd sin ) STO 13 (( 1 - RCL07 2nd cos ) ÷ 2
+ ( RCL07 - RCL07 2nd sin × RCL07 2nd cos ) ÷ 8
÷ RCL07 2nd sin ) STO 14 ÷ RCL 13 = 1/x y^x .5 ×
RCL07 = STO 07 RCL 13 - RCL 14 = 2nd |x| 2nd x≥t
C RCL07 - RCL 07 2nd sin × RCL07 2nd cos = y^x 3
× 9.8 ÷ 64 ÷ RCL07 2nd sin = √x STO 10 R/S

2nd LBL D 1 - 2 × RCL 22 = INV 2nd cos STO 21 - RCL21
2nd sin × RCL21 2nd cos = ÷ 4 = STO 23 RCL 22 +
RCL 10 x² ÷ 19.6 ÷ RCL 23 x² = STO 24 RCL 15 + RCL00
= STO 25 ÷ RCL 24 = 1/x y^x .6 × RCL 22 = STO 22
RCL25 - RCL 24 = 2nd |x| 2nd x≥t D RCL 22 R/S
```

Comment utiliser le programme :

stocker : . $Q_I = \frac{Q}{D^{2,5}}$ en mémoire 10

. une valeur approximative de k_I en mémoire 06

. a'_I en mémoire 04

. a''_I -"- -"- 15

. la précision voulue en $x \rightleftarrows t$

Appuyer sur :

A	affiche la valeur exacte de k_I	
RCL 06	affiche	k_I
RCL 00	-"-	H_{k_I}
RCL 11	-"-	$\widehat{H}_{f_I}$
RCL 02	affiche une valeur approximative de h_{f_I}	
RCL 07	affiche	φ_k
RCL 08	-"-	A_{k_I}
RCL 09	-"-	v_{k_I}

Appuyer sur ;

B	affiche la valeur exacte de h_{f_I}	
RCL 02	affiche	h_{f_I}
RCL 01	-"-	φ_f
RCL 03	-"-	A_{f_I}
RCL 12	-"-	H_{f_I}

Appuyer sur :

C affiche Q_I

RCL 10 —"— Q_I

RCL 07 —"— φ_k

RCL 13 —"— H_{k_I} en application de (10)

RCL 14 —"— H_{k_I} en application de (8_k)

Appuyer sur :

D affiche h_{t_I}

RCL 22 affiche h_{t_I}

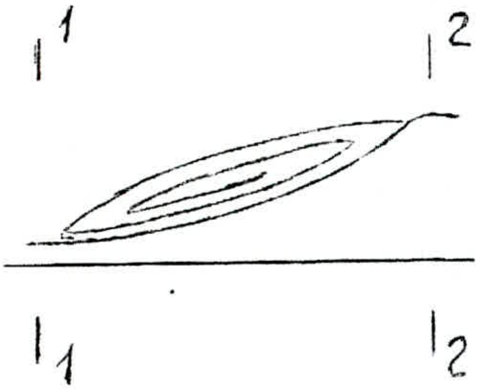
RCL 23 —"— A_{t_I}

RCL 21 —"— φ_t

RCL 24 —"— H_{t_I} en application de (4_t)

RCL 25 —"— H_{t_I} en application de $(1'_t)$

Etude du ressaut -



Le changement de régime, à l'aval de la Section 1-1 de la figure ci-contre, se fait par un ressaut régi par la loi d'équilibre hydrodynamique exprimé par le théorème des quantités de mouvement -

Du fait que le ressaut étudié se produit sur un tronçon horizontal, la composante tangentielle du poids propre de la tranche de liquide qu'il occupe est nulle - Dans l'étude du phénomène nous appliquons l'équation des quantités de mouvement qui exprime l'équilibre dynamique entre toutes les forces extérieures appliquées à la masse liquide, et la résultante des quantités de mouvement entrant et sortant par les Sections initiale et finale du ressaut. Les forces extérieures appliquées sont :

- Le poids de la masse liquide considéré.
- La réaction des parois du canal entre les Sections 1 et 2 -
- La pression totale sur les dites sections -
- La résistance de l'air sur la surface libre -

Par convention les quantités de mouvement sortant sont positives et celles entrant sont négatives

Sous sa forme vectorielle, l'équation des quantités de mouvement s'écrit :

$$\Sigma \vec{F} = \rho Q (\vec{V_2} - \vec{V_1}) \quad (12)$$

en admettant que le facteur de correction de la quantité de mouvement est égal à l'unité

$$(\beta_2 = \beta_1 = 1)$$

Nous ne retiendrons que l'équation scalaire se référant au module de la composante suivant le sens de l'écoulement considéré. La projection horizontale des composantes de la résultante des forces extérieures se limite, dans notre cas, à la somme des forces de pression exercées sur les sections 1 et 2 en admettant que la résistance de l'air sur la surface libre est négligeable. Compte tenu de ces considérations, l'équation (12) devient :

$$\bar{P}_1 . A_1 - \bar{P}_2 . A_2 = \rho Q (V_2 - V_1) \quad \text{où}$$

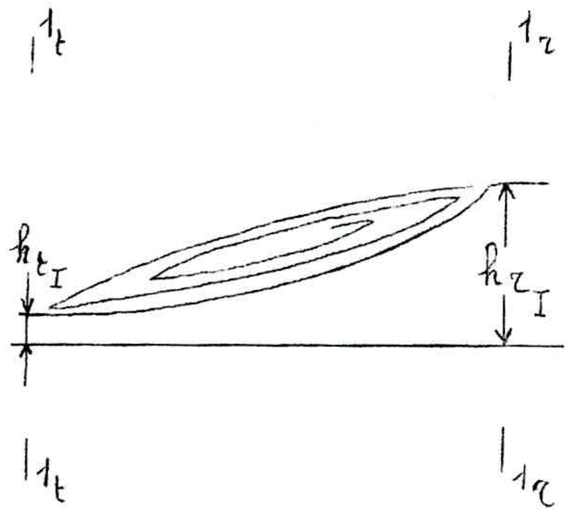
$\bar{P}_1 = \rho g \bar{h}_1$ est la pression agissant au centre de gravité de la section 1.

$\bar{h}_1$ est la position du centre de gravité de la section 1, comptée à partir de la surface libre.

$\bar{P}_2 = \rho g \bar{h}_2$ est la pression agissant au centre de gravité de la section 2.

$\bar{h}_2$ est la position du centre de gravité de la section 2, comptée à partir de la surface libre -

Application au canal circulaire partiellement mouillé de diamètre $D = 1\ m$.



Désignons par A_{t_I} l'aire de la section mouillée au début du ressaut et par A_{r_I} l'aire de la section mouillée à l'aval immediat du ressaut ; comme il a été précisé précédemment, la position des centres de gravités de ces dites sections est donnée par la distance verticale comptée à partir de la surface libre, nous avons respectivement pour A_{t_I} et A_{r_I} :

$$\bar{h}_{t_I} = \frac{\sin^3 \varphi_t}{12\ A_t} - \frac{\cos \varphi_t}{2} \qquad (12_t)$$

$$\bar{h}_{r_I} = \frac{\sin^3 \varphi_r}{12\ A_r} - \frac{\cos \varphi_r}{2} \qquad (12_r)$$

En appliquant le théorème des quantités de mouvement au liquide en écoulement occupant le domaine situé entre les sections 1_t et 1_r, on écrit :

$$\rho g(\bar{h}_{t_I}.A_{t_I}-\bar{h}_{r_I}.A_{r_I})=\rho Q_I^2\left(\frac{1}{A_{r_I}}-\frac{1}{A_{t_I}}\right) \quad \text{soit}$$

$$\bar{h}_{t_I}.A_{t_I}-\bar{h}_{r_I}.A_{r_I}=\frac{Q_I^2}{g}\left(\frac{1}{A_{r_I}}-\frac{1}{A_{t_I}}\right) \quad \text{ou bien}$$

$$\bar{h}_{t_I}.A_{t_I}+\frac{Q_I^2}{gA_{t_I}}=Z=\bar{h}_{r_I}.A_{r_I}+\frac{Q_I^2}{gA_{r_I}} \qquad (13)$$

en éliminant $\bar{h}$ entre $(12_{t,r})$ et (13) on tire :

$$Z=\frac{\sin^3\varphi}{12}-\frac{\varphi-\sin\varphi.\cos\varphi}{8}.\cos\varphi+\frac{4\,Q_I^2}{g(\varphi-\sin\varphi.\cos\varphi)} \qquad (14)$$

cette relation est valable aussi bien pour le régime torrentiel que pour le régime fluvial.
nous rappelons que $\varphi=\arccos(1-2h_I)$ -
Z est donc fonction de la profondeur h_I et du débit Q_I.
En représentant z en fonction de h_I dans un système de coordonnées à divisions logarithmiques (pour un débit Q_I donné) et en posant $x=\log z$ et $y=\log h_I$, on peut déterminer la valeur de la tangente de la courbe représentant $y=f(x)$ (15) dans un point quelconque ayant pour ordonnée une valeur $\log h_I$ arbitrairement choisie, on a :

$$y'=\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{\partial\log h_I}{\partial\varphi}=\frac{\frac{1}{2}.\sin\varphi}{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)\ln 10}=\frac{\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)\ln 10} \qquad (15')$$

$$\text{et} \quad x'=\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial\log z}{\partial\varphi}$$

$$z' = \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{8} \cdot \sin\varphi - \frac{8Q^2}{g} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{(\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi)^2}$$

Ainsi :

$$x' = \frac{\dfrac{\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{8} \cdot \sin\varphi - \dfrac{8Q^2 \sin^2\varphi}{g(\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi)^2}}{\ln 10 \left(-\dfrac{\sin^3\varphi}{12} - \dfrac{\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{8} \cdot \cos\varphi + \dfrac{4Q^2}{g} \cdot \dfrac{1}{\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \right)}$$

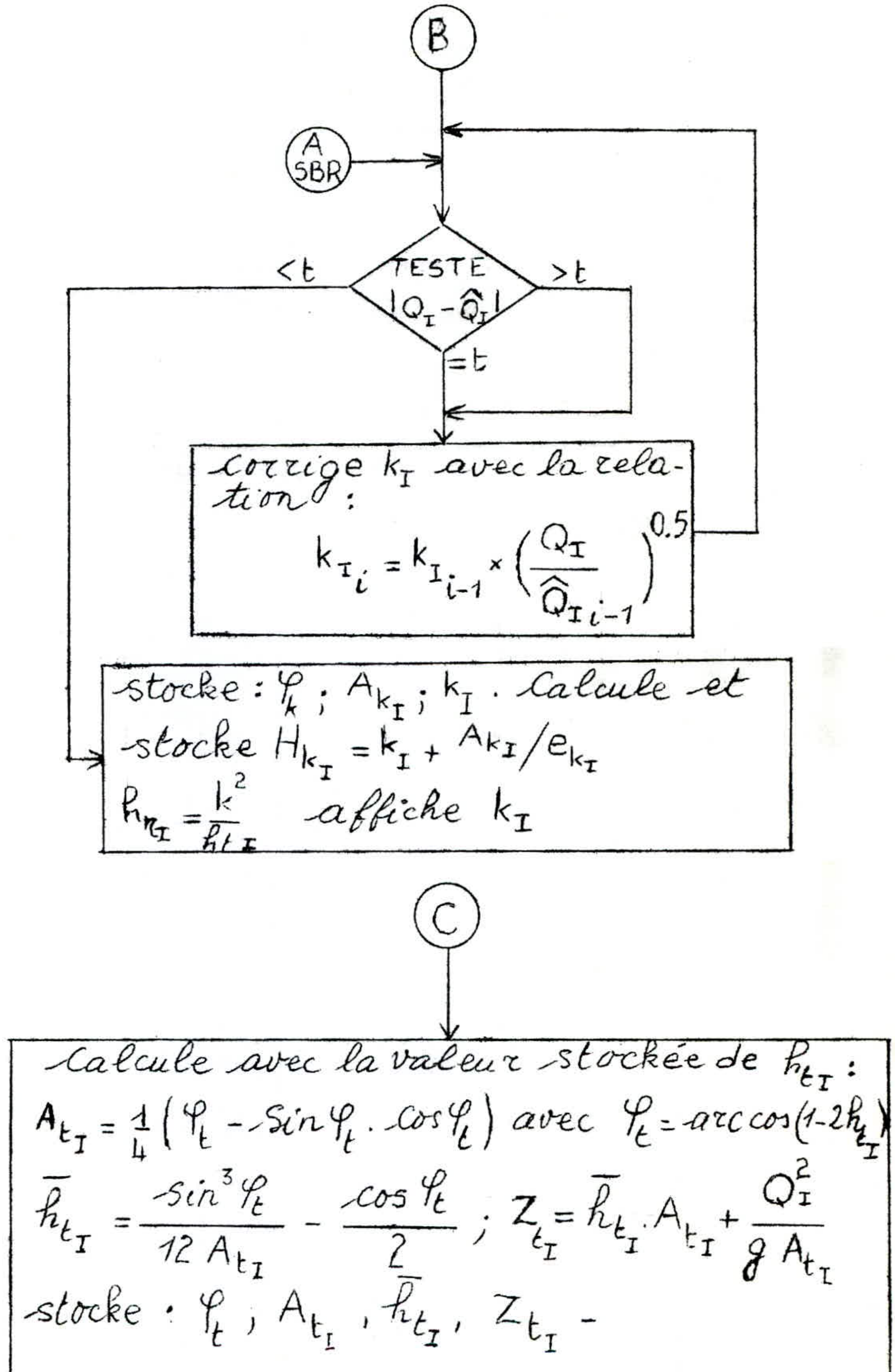
La valeur de la tangente $\vartheta = \frac{y'}{x'}$ ainsi déterminée en fonction de l'ordonnée $\log \frac{h}{I}$ sera introduite dans le programme destiné à la solution de l'équation et par voie de conséquence à la solution du problème du ressaut en conduite circulaire.

Le programme ainsi que l'organigramme montrant les différentes étapes de calcul sont les suivants :

Organigramme :

A

à partir de k_I approximatif, calcule et stocke
$\varphi_k = \arccos(1 - 2k_I)$; $A_{k_I} = \frac{1}{4}(\varphi_k - \sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k)$
$\hat{Q}_I = \sqrt{g A_{k_I}^3 / e_{k_I}}$; $e_{k_I} = \sin\varphi_k$.


B
A SBR
TESTE $|Q_I - \hat{Q}_I|$
$<t$
$>t$
$=t$
corrige k_I avec la relation :
$k_{I_i} = k_{I_{i-1}} \times \left(\frac{Q_I}{\hat{Q}_{I\,i-1}} \right)^{0.5}$
stocke : φ_k ; A_{k_I} ; k_I . Calcule et stocke $H_{k_I} = k_I + A_{k_I}/e_{k_I}$
$h_{n_I} = \frac{k^2}{h_{t_I}}$ affiche k_I
C
Calcule avec la valeur stockée de h_{t_I} :
$A_{t_I} = \frac{1}{4}\left(\varphi_t - \sin\varphi_t \cdot \cos\varphi_t\right)$ avec $\varphi_t = \arccos(1-2h_{t_I})$
$\bar{h}_{t_I} = \frac{\sin^3\varphi_t}{12\,A_{t_I}} - \frac{\cos\varphi_t}{2}$; $Z_{t_I} = \bar{h}_{t_I} \cdot A_{t_I} + \frac{Q_I^2}{g\,A_{t_I}}$
stocke : φ_t , A_{t_I} , $\bar{h}_{t_I}$, Z_{t_I} -

D

avec h_{r_I} approximatif de B
calcule : $\varphi_r = \arccos(1-2h_{r_I})$
$\underline{\vartheta} = f(\varphi_r)$; $A_{r_I} = f(\varphi_r)$;
$\bar{h}_{r_I} = f(\varphi_r)$; $Z_{r_I} = f(\varphi_r, Q_I)$

TESTE $|Z_{t_I} - Z_{r_I}|$

< t

> t

= t

corrige h_{r_I} avec la relation :

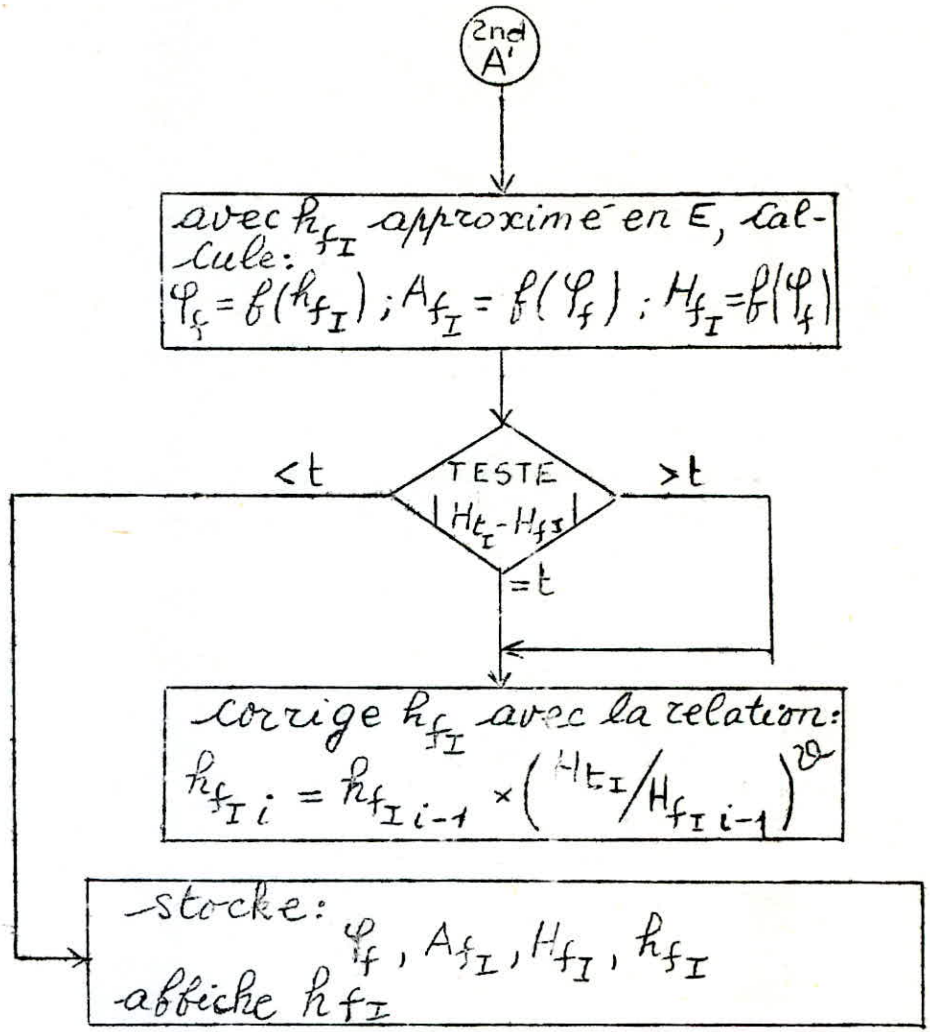
$$h_{r_{I_i}} = h_{r_{I_{i-1}}} \times \left(\frac{Z_{t_I}}{Z_{r_{I_{i-1}}}}\right)^{\vartheta}$$

stocke : φ_r, ϑ, A_{r_I}, $\bar{h}_{r_I}$
Z_{r_I}, h_{r_I}.
affiche h_{r_I}

E

Calcule et stocke :

$H_{r_I} = h_{r_I} + Q_I^2 / 2gA_{r_I}^2$
$H_{t_I} = h_{t_I} + Q_I^2 / 2gA_{t_I}^2$
$\Delta H_I = H_{t_I} - H_{r_I}$
h_{f_I} (approximatif) $= \sqrt{H_{t_I} \times H_{r_I}}$


2nd A'
avec h_{f_I} approximé en E, calcule:
$\varphi_f = f(h_{f_I})$; $A_{f_I} = f(\varphi_f)$; $H_{f_I} = f(\varphi_f)$
TESTE $|H_{t_I} - H_{f_I}|$
$<t$
$>t$
$=t$
corrige h_{f_I} avec la relation:
$h_{f_I i} = h_{f_I i-1} \times \left(H_{t_I} / H_{f_I i-1} \right)^{\vartheta}$
stocke: φ_f, A_{f_I}, H_{f_I}, h_{f_I}
affiche h_{f_I}

Fin -

Programme :

2nd LBL A 2nd Rad (1 - 2 × RCL 06) INV 2nd cos STO 07 ((RCL 07 − RCL 07 2nd Sin × RCL 07 2nd cos) ÷ 4) STO 08 (RCL 08 y^x 3 × 9.8 ÷ RCL 07 2nd Sin) $\sqrt{x}$ STO 05 INV SBR

2nd LBL B A RCL 10 ÷ RCL 05 = $\sqrt{x}$ × RCL 06 = STO 06 RCL 10 − RCL 05 = 2nd |x| 2nd x ≥ t B RCL 06 x^2 ÷ RCL 01 = STO 11 RCL 06 + RCL 08 ÷ 2 ÷ RCL 07 2nd Sin = STO 00 R/S

2nd LBL C 1 − 2 × RCL 01 = INV 2nd cos STO 02 − RCL 02 2nd Sin × RCL 02 2nd cos = ÷ 4 = STO 03 RCL 02 2nd Sin y^x 3 ÷ 12 ÷ RCL 03 − RCL 02 2nd cos ÷ 2 = STO 04 × RCL 03 + RCL 10 x^2 ÷ 9.8 ÷ RCL 03 = STO 15 R/S

2nd LBL D 1 − 2 × RCL 11 = INV cos STO 12 2nd Sin y^x 3 = STO 21 RCL 12 − RCL 12 2nd Sin × RCL 12 2nd cos = STO 22 RCL 12 2nd Sin ÷ (1 − RCL 12 2nd cos) = STO 23 (RCL 21 ÷ 12 − RCL 22 × RCL 12 2nd cos ÷ 8 + 4 × RCL 10 x^2 ÷ 9.8 ÷ RCL 22) STO 24 (RCL 22 × RCL 11 2nd Sin ÷ 8 − 8 × RCL 10 x^2 ÷ 9.8 × RCL 11 2nd Sin x^2 ÷ RCL 22 x^2) STO 25 (RCL 23 × RCL 24 ÷ RCL 25) STO 19 RCL 12 − RCL 12 2nd Sin × RCL 12 2nd cos =

$\div$ 4 = STO 13 RCL 12 2nd Sin y^x 3 $\div$ 12 $\div$ RCL 13
− RCL 12 2nd Cos $\div$ 2 = STO 14 × RCL 13 + RCL 10
x^2 $\div$ 9.8 $\div$ RCL 13 = STO 30 − RCL 15 = $\frac{1}{x}$ y^x RCL
19 × RCL 11 = STO 11 RCL 30 − RCL 15 = 2nd $|x|$
2nd $x \geq t$ D RCL 11 R/S
2nd LBL E RCL 11 + (RCL 10 $\div$ RCL 13) x^2 $\div$ 19.6
= STO 17 RCL 01 + (RCL 10 $\div$ RCL 03) x^2 $\div$ 19.6
= STO 16 − RCL 17 = STO 18 RCL 16 × RCL 17 = $\sqrt{x}$
STO 20 RCL 18 R/S
2nd LBL 2nd A' 1 − 2 × RCL 20 = INV 2nd Cos
STO 28 − RCL 20 2nd Sin × RCL 28 2nd Cos = $\div$
4 = STO 29 (RCL 10 $\div$ RCL 29) x^2 $\div$ 19.6 + RCL 20 =
STO 21 $\div$ RCL 16 = $\frac{1}{x}$ y^x RCL 19 × RCL 20 = STO
20 RCL 16 − RCL 21 = 2nd $|x|$ 2nd $x \geq t$ 2nd A'
RCL 20 R/S

Comment utiliser le programme :

stocker : . h_{t_I} en memoire 01

. une valeur approximative de k_I en mémoire 06

. $Q_I = \frac{Q}{D^{2,5}}$ en mémoire 10

Appuyer sur :

A affiche Q_I calculé en application de (*).

RCL 05	affiche	Q_I
RCL 07	–"–	φ_k
RCL 08	–"–	A_{k_I}

Appuyer sur :

B	affiche	H_{k_I}
RCL 00	–"–	H_{k_I}
RCL 06	–"–	k_I

Appuyer sur :

C	affiche	Z
RCL 15	–"–	Z_{t_I}
RCL 02	–"–	φ_t
RCL 03	–"–	A_{t_I}
RCL 04	–"–	$\bar{h}_{t_I}$

Appuyer sur :

D affiche h_{r_I}

RCL 11 -"- h_{r_I}

RCL 12 -"- φ_r

RCL 19 -"- ϑ

RCL 13 -"- A_{r_I}

RCL 14 -"- $\bar{h}_{r_I}$

Appuyer sur :

E affiche ΔH_I

RCL 18 -"- ΔH_I

RCL16 -"- H_{t_I}

RCL 17 -"- H_{r_I}

Appuyer sur :

2nd A' affiche h_{f_I}

RCL 20 -"- h_{f_I}

RCL 28 -"- φ_f

RCL 29 -"- A_{f_I}

RCL 21 -"- H_{f_I}

Procédé itératif utilisé pour la détermination de la profondeur h_{r_I} conjuguée de h_{t_I}.

Dans l'étude du ressaut, nous avons établi l'equation :

$$\bar{h}_{t_I} \cdot A_{t_I} + \frac{Q_I^2}{g A_{t_I}} = Z = \bar{h}_{r_I} \cdot A_{r_I} + \frac{Q_I^2}{g A_{r_I}}$$

Le tracé de la fonction Z en coordonnées logarithmiques, en posant $y = \log h_I$ et $x = \log Z$, montre que la pente de la courbe est variable, nous avons désigné par ϑ cette pente et son expression a déjà été établi précédemment.

Quand la profondeur h varie de Δh, Z varie de $\Delta h^{1/\vartheta}$; pour deux profondeurs données h_1 et h_2 correspondant à Z_1 et Z_2 on écrit :

$$\frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{\vartheta}.$$

La courbe $h_I = f(Z)$ en coordonnées logarithmiques, montre que pour une même valeur de Z correspondent deux profondeurs qui sont conjuguées; l'une de ces profondeurs est désignée par

h_{t_I} et correspond au régime torrentiel ($h_{t_I} < k_I$), l'autre désignée par h_{r_I} correspond au régime fluvial ($h_{r_I} > k_I$).
l'un des problèmes qui se posent est la détermination de la profondeur h_{r_I} à l'aval du ressaut connaissant la profondeur conjuguée h_{t_I} à l'amont.
Ce problème est résolu par approximations successives dont le procédé est le suivant :

la valeur de h_{t_I} permet le calcul de Z_{t_I} y correspondant par application de la formule ainsi que le calcul d'une première valeur approximative de h_{r_I} par application de la relation : $\frac{k_I}{h_{t_I}} = \frac{h_{r_I}}{k_I}$ qui donne :

$h_{r_I} = \frac{k_I^2}{h_{t_I}}$; soit $(h_{r_I})_1$ cette première valeur approximative de h_{r_I}.

Avec $(h_{r_I})_1$ on détermine $(Z_{r_I})_1$ et la pente ϑ_1 ; ainsi h_{r_I} en deuxième approximation sera :

$$(h_{r_I})_2 = (h_{r_I})_1 \times \left[\frac{Z_{t_I}}{(Z_{r_I})_1}\right]^{\vartheta_1}$$

Avec $(h_{r_I})_2$ on détermine $(Z_{r_I})_2$ ainsi que la pente ϑ_2 : la troisième valeur approximative de h_{r_I} sera alors :

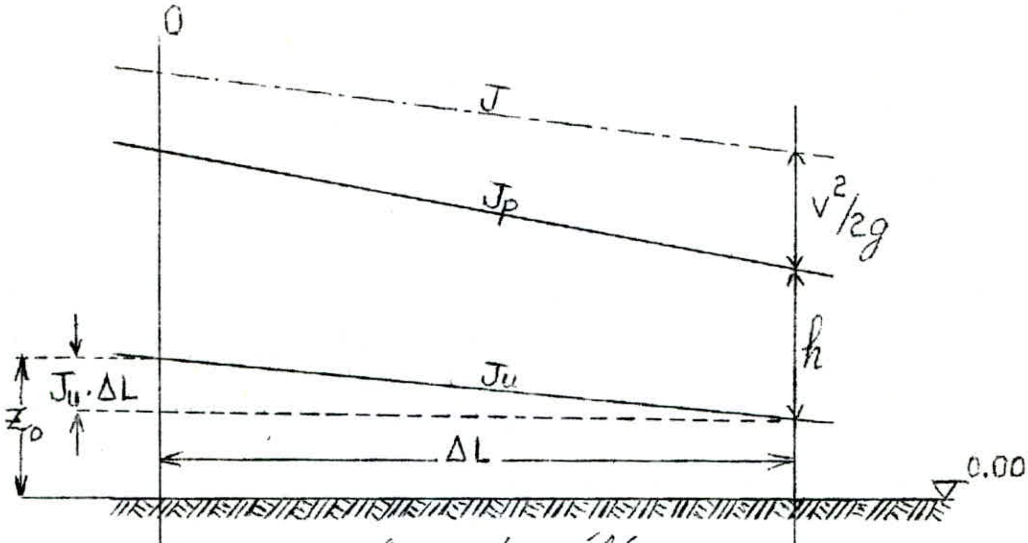
$$(h_{r_I})_3 = (h_{r_I})_2 \times \left[\frac{Z_{t_I}}{(Z_{r_I})_2}\right]^{\vartheta_2}$$

le procédé itératif se poursuit jusqu'à une valeur :

$$(h_{r_I})_i = (h_{r_I})_{i-1} \times \left[\frac{Z_{t_I}}{(Z_{r_I})_{i-1}}\right]^{\vartheta_{i-1}}$$

satisfaisant la relation $Z_{t_I} = Z_{r_I}$

Détermination du profil en long de la surface libre –



plan de référence

L'écoulement étudié étant graduellement non uniforme les pentes J_u du fond de la conduite J_P de la surface libre (pente piézométrique) et J de la ligne de charge totale ne sont pas égales.

On peut déterminer les éléments caractéristiques d'un écoulement non uniforme par la méthode de l'intégration numérique; ce procédé n'est applicable qu'aux écoulements passant par des canaux à profil sec constant et à pente géométrique invariable.

Il est basé sur une équation différentielle établie entre la longueur L et la profondeur h et sur l'intégration consécutive de celle-ci.

En faisant tendre ΔL vers zéro (Voir figure ci-dessus) la variation de la charge totale par unité de longueur se confond avec le gradient J de la perte de charge, c'est à dire :

$$J = -\frac{d}{dL}\left(\frac{V^2}{2g} + Z_0 - J_u.L + h\right) \quad (17)$$

Z_0 désignant la côte du fond du canal dans la section déterminée par $L = 0$.

En exécutant la dérivation, l'équation ci-dessus indiquée devient :

$$J = -\frac{V}{g}\frac{dV}{dL} + J_u - \frac{dh}{dL} \quad (17')$$

En application de l'équation de continuité on a pour un écoulement permanent :

$$V.A = Q = \text{Constante}$$

En dérivant cette dernière équation suivant L on tire :

$\frac{dV}{dL}.A + V.\frac{dA}{dL} = 0$ et en designant par e la largeur du plan d'eau, on écrit :

$dA = e\,dh$ ainsi :

$$\frac{dV}{dL} = -\frac{Ve}{A}.\frac{dh}{dL} = -\frac{Q}{A^2}.\frac{dh}{dL}$$

en éliminant $\frac{dV}{dL}$ entre cette dernière équation et (17') et en exprimant V par l'équation de continuité, on tire :

$$\frac{Q^2 e}{gA^3}.\frac{dh}{dL} + J_u - \frac{dh}{dL} - J$$

en exprimant dL de cette dernière équation on obtient :

$$dL = \frac{1 - Q^2 e / g A^3}{J_u - J} . dh \quad (16)$$

Lorsque le numérateur de la fonction ci-dessus est égal à zéro, l'écoulement devient critique en vertu de l'équation

$$\frac{Q^2 e}{g A^3} = 1$$

et il ne peut pas exister de variation graduelle de la profondeur lors du passage du régime torrentiel en fluvial ; par conséquent les équations ci-dessus exposées doivent être judicieusement appliquées lorsque les profondeurs d'eau sont proches de la profondeur critique k.

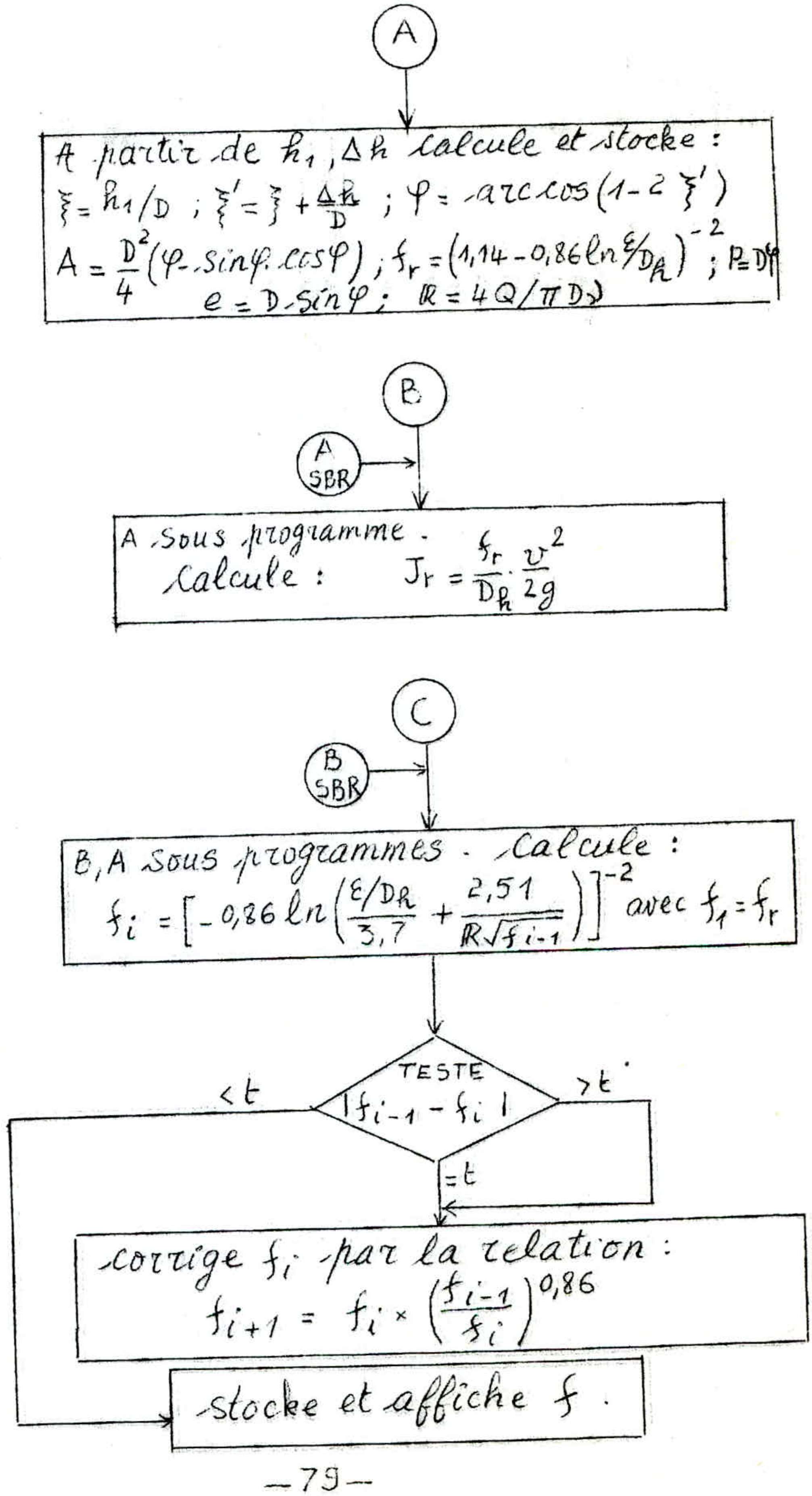
Lorsque le dénominateur de la fonction est égal à zéro, l'écoulement devient uniforme ($J = J_u$).

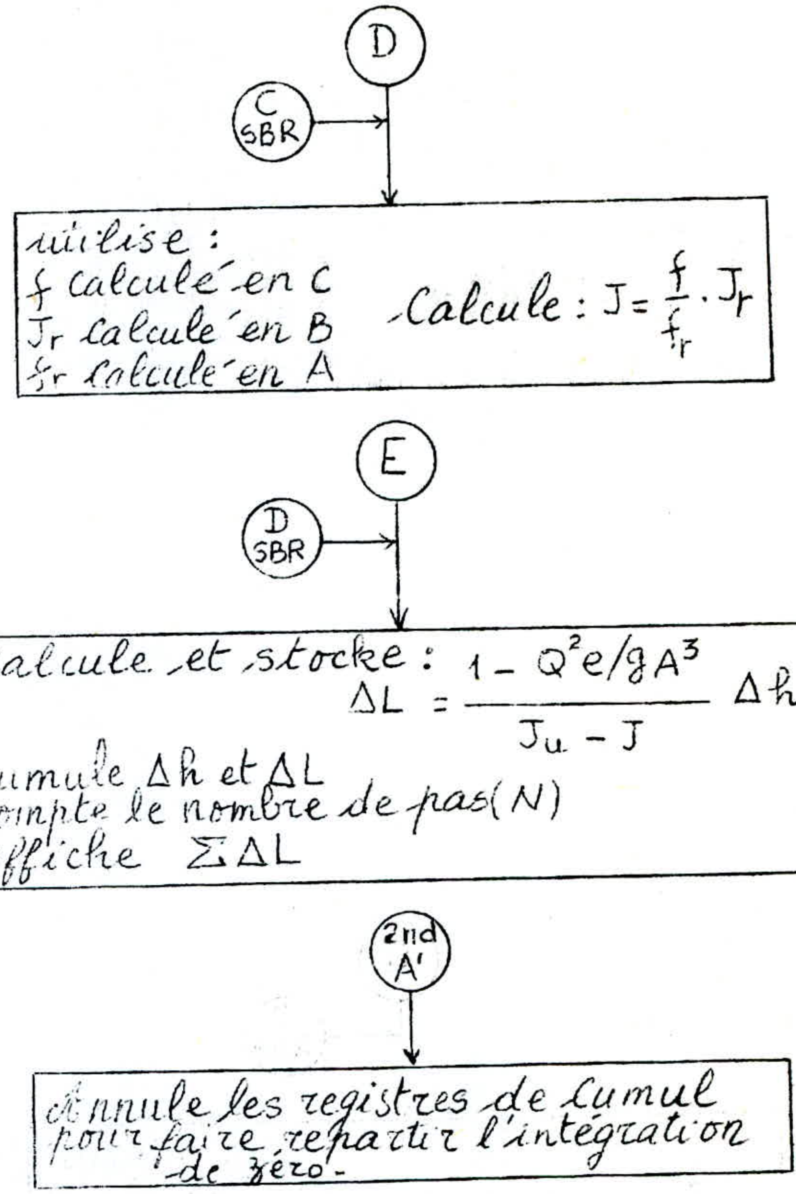
Pour un canal à section droite constante et à pente géométrique invariable, la fonction (16) ne dépend que de la profondeur h.

Un programme (ainsi qu'un organigramme) applicable au calculateur de poche du type TI 59, a été établi ; il permet la détermination du profil en long de la surface libre d'un écoulement en régime de transition (tracé de la courbe de remous).

(voir pages suivantes).

Programme :


A
A partir de h_1, Δh calcule et stocke :
$\xi = h_1/D$; $\xi' = \xi + \frac{\Delta h}{D}$; $\varphi = \arccos(1-2\xi')$
$A = \frac{D^2}{4}(\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi)$; $f_r = (1{,}14 - 0{,}86 \ln \varepsilon/D_h)^{-2}$; $P = D\varphi$
$e = D \sin\varphi$; $R = 4Q/\pi D \nu$
B
A SBR
A sous programme. Calcule : $J_r = \frac{f_r}{D_h} \cdot \frac{v^2}{2g}$
C
B SBR
B, A sous programmes. Calcule :
$f_i = \left[-0{,}86 \ln\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{R\sqrt{f_{i-1}}}\right)\right]^{-2}$ avec $f_1 = f_r$
TESTE $|f_{i-1} - f_i|$
$< t$
$> t$
$= t$
corrige f_i par la relation :
$f_{i+1} = f_i \times \left(\frac{f_{i-1}}{f_i}\right)^{0,86}$
stocke et affiche f.


D
C SBR
utilise :
f calculé en C
J_r calculé en B
f_r calculé en A
Calcule : $J = \frac{f}{f_r} \cdot J_r$
E
D SBR
calcule et stocke : $\Delta L = \frac{1 - Q^2 e / g A^3}{J_u - J} \Delta h$
cumule Δh et ΔL
compte le nombre de pas (N)
affiche $\Sigma \Delta L$
2nd A'
Annule les registres de cumul pour faire repartir l'intégration de zéro.

Programme :

2nd LBL A 2nd Rad (RCL 24 ÷ RCL 03) STO 04
(RCL 14 ÷ RCL 03) STO 20 (RCL 04 + RCL 20 ÷ 2)
STO 22 (1 - 2 × RCL 22) INV 2nd Cos STO 06 ((RCL 06
- RCL 06 2nd Cos × RCL 06 2nd Sin) × RCL 03 x^2)
STO 07 (RCL 03 × RCL 06) STO 08 (RCL 03 × RCL 06
2nd Sin) STO 21 (RCL 07 ÷ RCL 08) STO 09 (RCL 05
÷ RCL 09) STO 10 (4 × RCL 01 ÷ RCL 08 ÷ RCL 00)
STO 15 (RCL 10 ln x × .86 - 1.14) x^2 $\frac{1}{x}$ STO 11
STO 13 INV SBR
2nd LBL B A (RCL 11 ÷ RCL 09 × RCL 01 x^2 ÷ RCL 07
x^2 ÷ 1.225) STO 12 INV SBR
2nd LBL C B ((2.51 ÷ RCL 15 ÷ RCL 11 $\sqrt{x}$ + RCL 10
÷ 3.7) ln x × .86) x^2 $\frac{1}{x}$ STO 17 ((RCL 17 ÷ RCL 11)
y^x .86 × RCL 11) STO 11 (RCL 17 - RCL 11) 2nd |x|
2nd x ≥ t RCL 11 INV SBR
2nd LBL D C (RCL 11 ÷ RCL 13 × RCL 12) STO 19 INV SBR
2nd LBL E D (1 - RCL 01 x^2 ÷ 9.8 × RCL 21 × 64 ÷
RCL 07 y^x 3) ÷ (RCL 02 - RCL 19) × RCL 14 =
SUM 16 1 SUM 18 RCL 14 SUM 24 RCL 20 SUM 22
RCL 16 R/S
2nd LBL 2nd A' 0 STO 16 STO 18 STO 04 RCL 34
STO 24 R/S

- Comment utiliser le programme :

- stocker :	h_1	J_u	D	Δh	ε	ν	Q	précision voulue
en mémoire :	24 et 34	02	03	14	05	00	01	$x \rightleftarrows t$

Appuyer sur : E - affiche $\Sigma \Delta L$

Appuyer sur :	RCL 18	RCL 24	RCL 20	RCL 22	RCL 16
- affiche :	N	h	$\frac{\Delta h}{D}$	ξ	$\Sigma \Delta L$

. Les séquences A, B, C et D sont utilisées en sous programmes

. La séquence 2nd A' fait repartir l'intégration de zéro.

N.B Ne pas oublier d'appuyer sur 2nd A' pour faire repartir l'intégration.

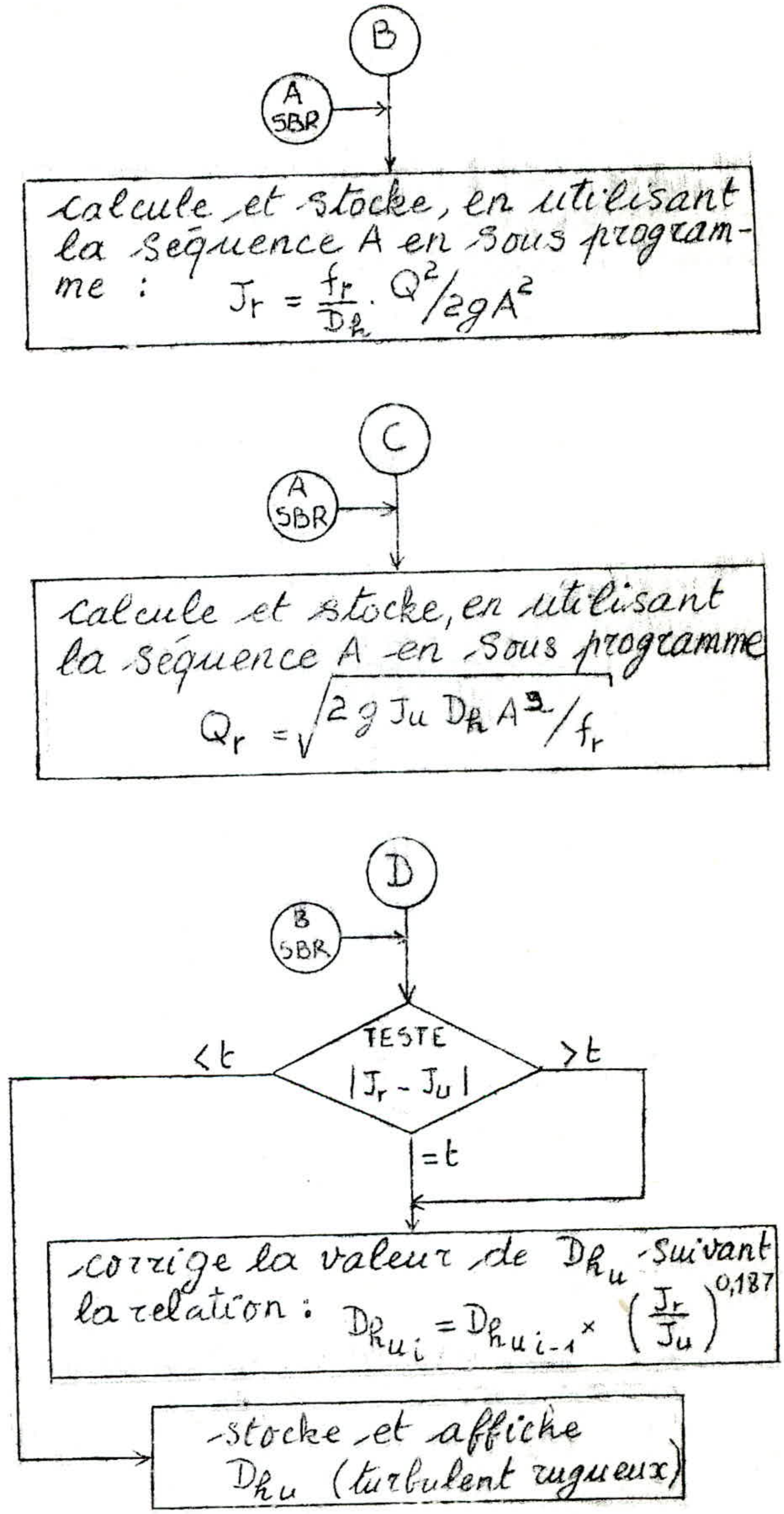
Nous joignons ci-après un programme, applicable au calculateur de poche du type TI 59, permettant la détermination des caractéristiques d'un écoulement (section mouillée, diamètre hydraulique, gradient de la perte de charge, débit etc...), aussi bien en régime turbulent rugueux qu'en régime de transition, se produisant dans une conduite circulaire partiellement mouillée, de diamètre D quelconque.

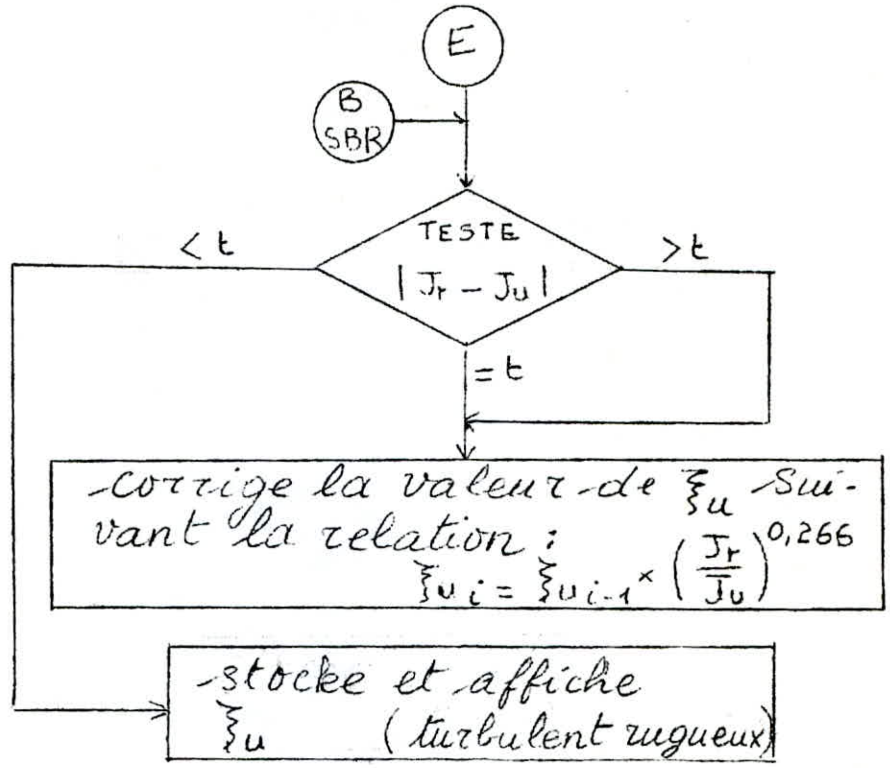
L'organigramme montrant les différentes étapes de calcul est le suivant :

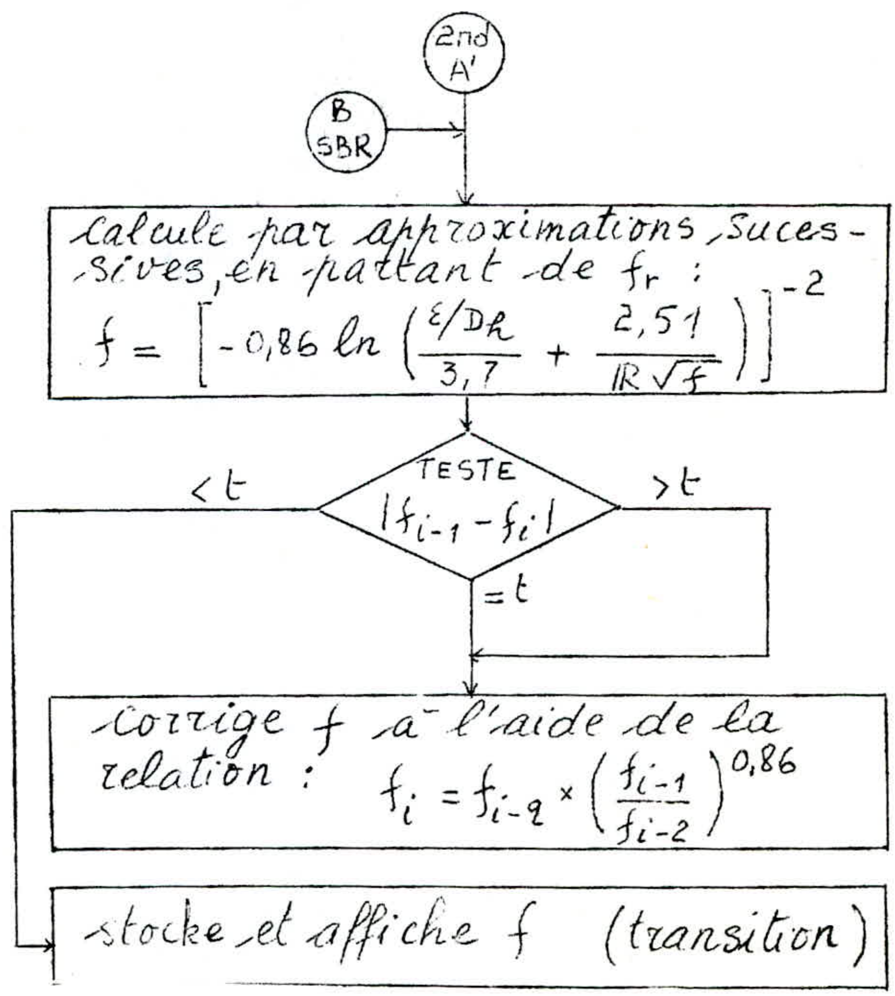
(A)

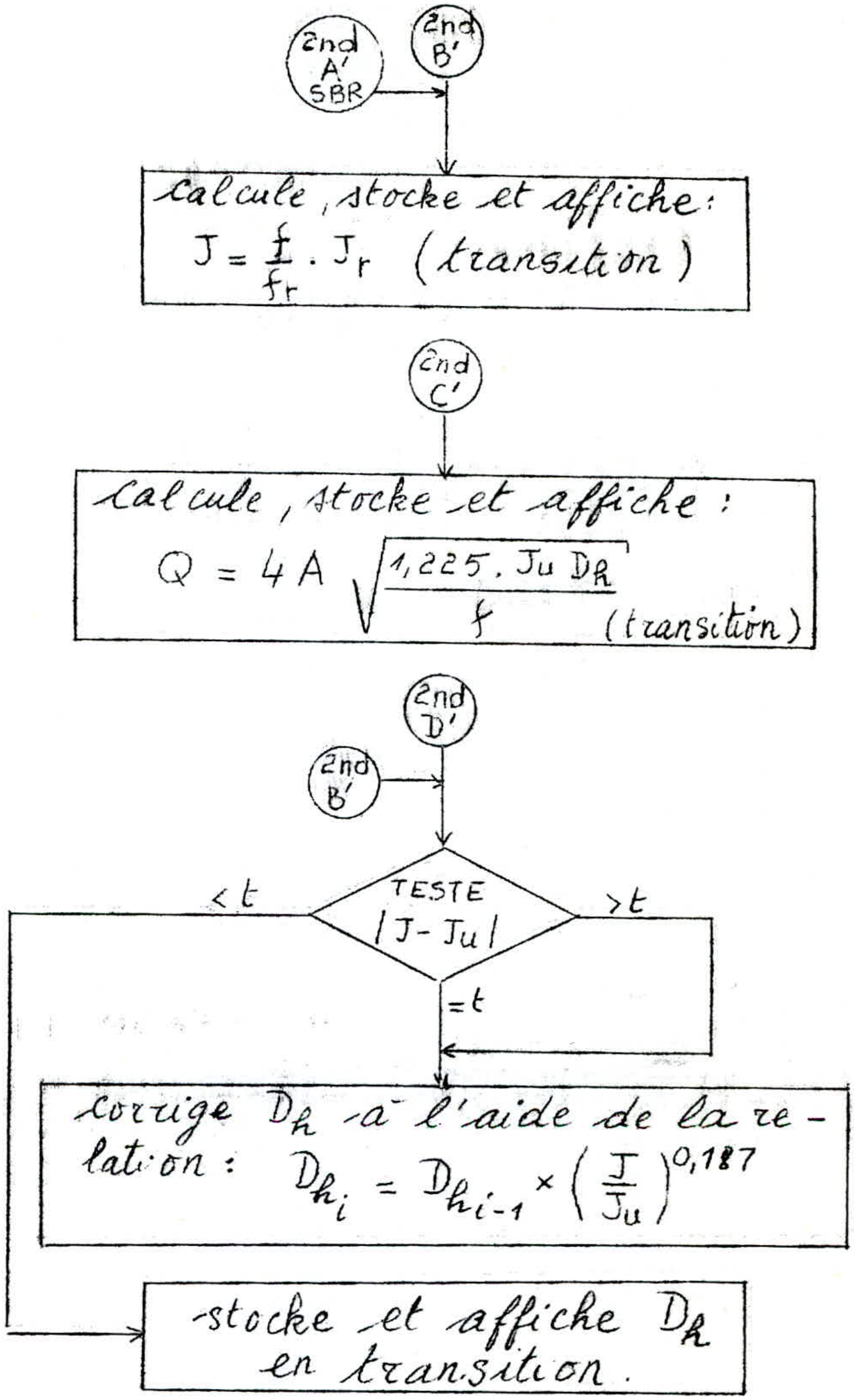
↓

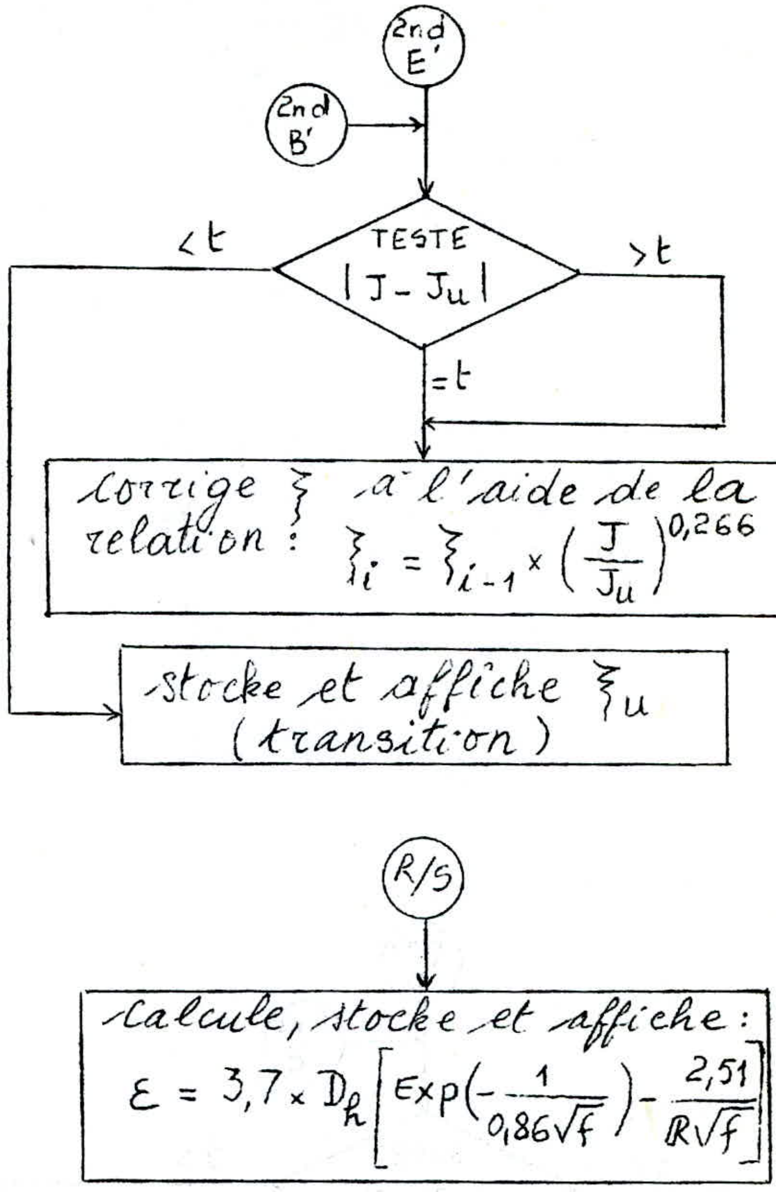
à partir d'une valeur approximative de ξ_u, calcule : $\varphi = \arccos(1-2\xi)$,
$A = \frac{D^2}{4}(\varphi - \sin\varphi.\cos\varphi)$, $P = D.\varphi$, $D_h = 4\frac{A}{P}$
$\mathbb{R} = 4Q/\pi D\nu$, $f_r = \left(1{,}14 - 0{,}86 \ln\frac{\varepsilon}{D_h}\right)^{-2}$


B
A SBR
calcule et stocke, en utilisant la séquence A en sous programme : $J_r = \frac{f_r}{D_h} \cdot Q^2/2gA^2$
C
A SBR
calcule et stocke, en utilisant la séquence A en sous programme $Q_r = \sqrt{2 g J_u D_h A^2/f_r}$
D
B SBR
TESTE $|J_r - J_u|$
<t
>t
=t
corrige la valeur de D_{hu} suivant la relation : $D_{hu_i} = D_{hu_{i-1}} \times \left(\frac{J_r}{J_u}\right)^{0,187}$
stocke et affiche D_{hu} (turbulent rugueux)


E
B SBR
TESTE
$|J_r - J_u|$
< t
> t
= t
corrige la valeur de ξ_u suivant la relation :
$\xi_{u\,i} = \xi_{u\,i-1} \times \left(\frac{J_r}{J_u}\right)^{0,266}$
stocke et affiche
ξ_u (turbulent rugueux)


2nd A'
B SBR
calcule par approximations sucessives, en partant de f_r :
$f = \left[-0,86 \ln\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{\mathbb{R}\sqrt{f}}\right)\right]^{-2}$
TESTE
$|f_{i-1} - f_i|$
< t
> t
= t
corrige f à l'aide de la relation :
$f_i = f_{i-1} \times \left(\frac{f_{i-1}}{f_{i-2}}\right)^{0,86}$
stocke et affiche f (transition)


2nd A' SBR
2nd B'
calcule, stocke et affiche :
$J = \frac{f}{f_r} \cdot J_r$ (transition)
2nd C'
Calcule, stocke et affiche :
$Q = 4A\sqrt{\frac{1{,}225 \cdot J_u D_h}{f}}$ (transition)
2nd D'
2nd B'
TESTE $|J - J_u|$
< t
> t
= t
corrige D_h à l'aide de la relation : $D_{h_i} = D_{h_{i-1}} \times \left(\frac{J}{J_u}\right)^{0{,}187}$
stocke et affiche D_h en transition.


2nd E'
2nd B'
TESTE |J - Ju|
<t
>t
=t
corrige ξ à l'aide de la relation : ξi = ξi-1 x (J/Ju)^0,266
stocke et affiche ξu (transition)
R/S
calcule, stocke et affiche :
ε = 3,7 x Dh [Exp(- 1/(0,86√f)) - 2,51/(R√f)]

Programme

2nd LBL A 2nd Rad (1 - 2 x RCL 24) INV 2nd Cos
STO 06 ((RCL 06 - RCL 06 2nd Cos x RCL 06 2nd Sin)
x RCL 23 x^2) STO 07 (RCL 23 x RCL 06) STO 08
(RCL 07 ÷ RCL 08) STO 09 (RCL 05 ÷ RCL 09) STO 10
(4 x RCL 21 ÷ RCL 08 ÷ RCL 00) STO 15 (RCL 10 ln x
x . 86 - 1.14) $\frac{1}{x}$ x^2 STO 11 STO 13 INV SBR
2nd LBL B A (RCL 11 ÷ RCL 09 x RCL 21 x^2 ÷ RCL 07
x^2 ÷ 1.225) STO 22 INV SBR
2nd LBL C A RCL 02 x RCL 09 x 1.225 ÷ RCL 11 =
$\sqrt{x}$ x RCL 07 = STO 21 R/S
2nd LBL D B RCL 22 ÷ RCL 02 = y^x . 187 x RCL 23
= STO 23 RCL 22 - RCL 02 = 2nd |x| 2nd x ≥ t
E RCL 24 R/S
2nd LBL 2nd A' B 1.14 - RCL 11 $\sqrt{x}$ $\frac{1}{x}$ = ÷ .86
= INV ln x x RCL 09 = STO 25 R/S
((2.51 ÷ RCL 15 ÷ RCL 11 $\sqrt{x}$ + RCL 10 ÷ 3.7) ln x
x .86) x^2 $\frac{1}{x}$ STO 17 ((RCL 17 ÷ RCL 11) y^x .86
x RCL 11) STO 11 (RCL 17 - RCL 11) 2nd |x| 2nd
x ≥ t RCL 11 INV SBR
2nd LBL 2nd B' 2nd A' (RCL 11 ÷ RCL 13 x RCL 22)
STO 32 INV SBR
2nd LBL 2nd C' 2nd A' RCL 02 x RCL 09 x

1.225 ÷ RCL 11 = $\sqrt{x}$ × RCL 07 = STO 31 R/S
2nd LBL 2nd D' 2nd B' RCL 32 ÷ RCL 02 =
y^x .187 × RCL 03 = STO 03 RCL 32 − RCL 02
= 2nd |x| 2nd x ≥ t 2nd D' RCL 03 STO
33 R/S
2nd LBL 2nd E' 2nd B' RCL 32 ÷ RCL 02 =
y^x .266 × RCL 24 = STO 24 RCL 32 − RCL 02
= 2nd |x| 2nd x ≥ t 2nd E' RCL 24 STO
34 RCL 44 STO 24 RCL 34 R/S.
.86 $\frac{1}{x}$ ÷ RCL 11 $\sqrt{x}$ = INV $\ln x$ − 2.51 ÷ RCL 15
÷ RCL 11 $\sqrt{x}$ = × 3.7 × RCL 07 ÷ 4 = STO 35 R/S

utilisation du programme :

stocker :	ν	J_u	D	ε	ξ	Q
en mémoire :	00	02	03 33	05	04 24	01 21

a) Le regime est turbulent rugueux :

appuyer sur :	A	B	C	D	E	R/S
affiche :	f_r	J_r	$\hat{Q}_r$	$\hat{D}_r$	ξ	$\hat{\varepsilon}_r$

on trouve en RCL :

06	07	08	09	10	15
φ	4A	P	D_{h_r}	ε/D_{h_r}	$\mathbb{R}_r$

b) <u>L'écoulement est en régime de transition:</u>

Appuyer sur :	2nd A'	2nd B'	2nd C'	2nd D'
affiche :	f	J	$\hat{Q}$	D_h
Appuyer sur :	2nd E'	R/S		
affiche :	ξ	ε		

On retrouve en RCL :

11	32	31	33	34	35
f	J	$\hat{Q}$	D_h	ξ	ε

CHAP III

ou bien :
$$\frac{P_1 - P_2}{\overline{\omega}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

de l'équation de continuité $A_1V_1 = A_2V_2 = Q$

on tire :
$$V_1^2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 . V_2^2$$ d'où l'on peut écrire que :

$$\frac{P_1 - P_2}{\overline{\omega}} = \frac{V_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$ ainsi :

$$V_2 = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} . \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\overline{\omega}}}$$

Le débit véhiculé par la conduite est :

$Q = A_2 . V_2$; sachant que $\frac{P_1 - P_2}{\overline{\omega}} = \Delta h$

on écrit que :

$$\boxed{Q = A_2 . \sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} . \sqrt{\Delta h}}$$

en posant $C = \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$ la relation

ci-dessus s'écrit :

$$Q = C . A_2 \sqrt{\Delta h}$$

C est donc le coefficient de débit.

Etalonnage du débitmètre.

Le débitmètre à segment dont nous disposons a un diamètre $D_1 = 4{,}2$ cm, l'étalonnage a été effectué en faisant passer différents débits que nous avons déterminés par mesure volumétrique; ainsi le débit est donné par le quotient du volume d'eau recueilli dans une capacité jaugée par le temps nécessaire à l'obtention de ce volume:

$$Q = \frac{V}{t} \;;$$

à chaque débit qui passe dans l'appareil correspond une différence de hauteurs piézométriques Δh que nous lisons sur le piézomètre. Nous disposons ainsi d'une série de valeurs de débits Q et des Δh y correspondants qui nous a permis d'établir la courbe d'étalonnage du débitmètre utilisé. Théoriquement, la courbe du débit Q en fonction de la différence des hauteurs piézométriques Δh a pour équation $Q = a\, \Delta h^{0,5}$ avec :

$$a = A_2 \cdot \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

En disposant des valeurs numériques des Sections A_1 et A_2, le coefficient a serait alors déterminé; cependant dans la pratique, les mesures que l'on effectue sont inévitablement affectées d'une erreur. (erreur systématique...); par voie de conséquence les coefficients, rencontres dans la formule théorique, sont eux aussi affectés; disposant alors d'un ensemble de points $\{(\Delta h_i, Q_i) \quad i = 1,2,\dots,n\}$ déterminés expérimentalement, il s'agit de trouver l'équation de la courbe représentant le débit en fonction de Δh et qui satisfait le mieux les points trouvés; cela revient à effectuer un ajustement puissance puisque la fonction $Q = a\,\Delta h^b$ est une fonction puissance; cependant, il serait commode de linéariser cette équation en appliquant le logarithme à chacun de ses deux membres: on écrit alors:

$$\log Q = b \log \Delta h + \log a \qquad a > 0 .$$

Il suffirait alors d'effectuer un ajustement linéaire.

les coefficients a et b, dits de regression, y sont donnés par les formules (ci-dessous indiquées) obtenues en application de la méthode des moindres carrés -

$$b = \frac{\Sigma(\ln \Delta h_i)(\ln Q_i) - \frac{(\Sigma \ln \Delta h_i)(\Sigma \ln Q_i)}{n}}{\Sigma(\ln \Delta h_i)^2 - \frac{(\Sigma \ln \Delta h_i)^2}{n}}$$

$$a = \mathrm{EXP.}\left(\frac{\Sigma \ln Q_i}{n} - b\,\frac{\Sigma \ln \Delta h_i}{n}\right)$$

le coefficient r, dit de corrélation, est donné par :

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma(\ln \Delta h_i)(\ln Q_i) - (\Sigma \ln \Delta h_i)(\Sigma \ln Q_i)\right]^2}{\left[\Sigma(\ln \Delta h_i)^2 - \frac{(\Sigma \ln \Delta h_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma(\ln Q_i)^2 - \frac{(\Sigma \ln Q_i)^2}{n}\right]}$$

L'application de ces formules, à l'aide d'un calculateur de poche du type "TI 59 programmable" a donné les résultats suivants :

$b = 0{,}5117331006 \simeq 0{,}512$

$a = 0{,}4022004445 \simeq 0{,}402$

$r^2 = 0{,}9999846765$

Ainsi : $\underline{\underline{Q = 0{,}402\,\Delta h^{0{,}512}}}$

Le tableau d'etallonnage du debitmètre est donné à la page suivante.

Pression differentielle	Graduations capacité JAUGEE.	VOLUME correspondant.	TEMPS	DEBITS correspondants.	MOYENNES	
Δh (cm)	(cm)	V (l)	t (sec.)	Q (l/sec.)	Δh (cm)	Q (l/sec.)
	18,50	27,50	10,65	2,601		
39,10	45,50	30,46	11,60	2,625	39,10	2.630
	37,50	29,64	11,20	2,646		
	12,40	27,28	10,30	2,648		
	21,00	27,95	11,90	2,349		
31.70	42,00	30,10	12,90	2,333	31,70	2,352
	18,80	27,73	11,70	2,370		
	33,10	29,19	12,40	2,354		
19,60	17,60	27,60	14,90	1,852		
	44,50	30,35	16,30	1,862	19,72	1,855
19,85	33,00	29,18	15,60	1,870		
	29,60	28,83	15,70	1,836		
8,85	16,40	27,48	22,45	1,224		
	14,70	27,31	22,20	1,230	8,92	1,229
9,00	0,00					
	36,40	29,52	23,90	1,233		
1,65	26,80	28,54	55,60	0,513		
	20,25	27,88	54,40	0,512	1,60	0,512
1,55	25,90	28,45	55,60	0,512		
	28,30	28,70	56,00	0,512		

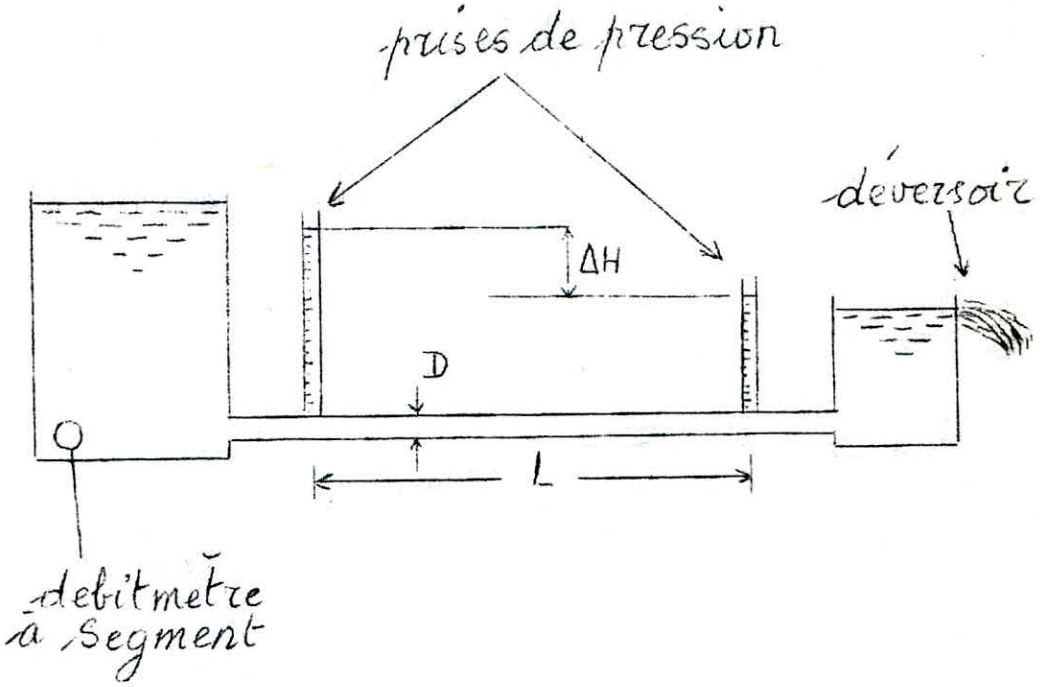
L'application de l'équation (16) necessite la connaissance des paramètres suivants :

- le débit Q.
- la largeur du plan d'eau e.
- la section mouillée A
- la pente géométrique Ju et le gradient de la perte de charge J

Compte tenu du fait que le gradient de la perte de charge J est fonction de la rugosité équivalente des parois du canal, numériquement non disponible, nous avons jugé utile de la déterminer par le biais d'un dispositif simple.

Présentation du dispositif

Il est entièrement conçu en plexiglass dont nous voulons la rugosité ; il est constitué d'un tube horizontal comportant deux prises de pression ; ce tube est alimenté par un réservoir en charge qui à son tour est alimenté par le chateau d'eau du laboratoire. Le débit alimentant le réservoir est contrôlé par un débit-mètre à segment à l'aval du dispositif et par un déversoir triangulaire à l'amont (voir figure ci-dessous):



détermination de la rugosité ε

La dénivellation ΔH lue sur les piezomètres représente la perte de charge linéaire se produisant sur le tronçon de longueur L. Etant donnés le débit Q, le diamètre D du tube considéré l'équation de DARCY-WEISSBACH :

$$J = \frac{\Delta H}{L} = \frac{f}{D_h} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{où}$$

$$D_h = D \quad \text{et} \quad v^2 = \left(\frac{Q}{A}\right)^2 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4} \quad ,$$

nous donne le coefficient de frottement

$$f = \frac{\pi^2 g D^5}{8L} \cdot \frac{\Delta H}{Q^2}$$

Moyennant la formule de COLEBROOK, on tire l'expression de la rugosité ε fonction du nombre de Reynolds et du coefficient de frottement f:

En effet :

$$f^{-1/2} = -0,86 \ln\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}}\right)$$

nous donne :

$$\varepsilon = 3,7 \times D\left[\operatorname{Exp}\left(-\frac{1}{0,86\sqrt{f}}\right) - \frac{2,51}{R\sqrt{f}}\right]$$

Le tableau de la page   regroupe les calculs numériques de la rugosité ε et des paramètres qui ont permi sa détermination ; ces paramètres ont été obtenus expérimentalement, moyennant

des débits variant de 1,00 l/s à 3,11 l/s correspondant à des valeurs du nombre de Reynolds allant de 20693 à 64324
Le diagramme de Moody nous permet de conclure que l'écoulement est en régime de transition, ce qui explique alors l'emploi de la formule de COLEBROOK.

Le tableau de mesures est donné à la page suivante.

$\rho = 999{,}1026\ kg/m^3$

$\nu = 1{,}14 \cdot 10^{-6}\ m^2 s^{-1}$ à $\theta = 15\,°c$

débitmètre à segment : $Q = 0{,}402\,\Delta h^{0{,}512}$		P.d c	tube de diamètre D = 0,054 m			
Δh (cm)	Q (l/s)	ΔH (cm)	v (m/s)	IR	f	ε (mm)
54,50	3,11	6,70	1,36	64324	0,021364	0,016747
49,50	2,96	6,10	1,29	61221	0,021472	0,015605
32,50	2,39	4,20	1,04	49432	0,022677	0,021169
26,20	2,14	3,50	0,93	44261	0,023570	0,028842
25,95	2,13	3,40	0,93	44054	0,023112	0,020580
24,10	2,05	3,15	0,89	42400	0,023117	0,017535
18,20	1,76	2,60	0,77	36816	0,025308	0,048113
17,32	1,73	2,37	0,75	35781	0,024422	0,027586
13,97	1,55	1,98	0,67	32058	0,025417	0,037736
5,90	1,00	0,90	0,43	20683	0,027757	0,040462

Remarque :

Le tableau ainsi constitué montre une certaine divergence dans les valeurs de la rugosité ε ; ceci est dû au fait que la rugosité ε ne peut pas être mesurée avec précision. En effet, des calculs groupés dans le tableau de la page suivante, ont montré que pour une rugosité allant de $\varepsilon_1 = 10^{-6} m$ à $\varepsilon_2 = 10\varepsilon_1 = 10^{-5} m$, l'erreur relative sur le débit n'est que 2 %. Inversement, une erreur relative de 2% sur le débit, entraine une variation du simple au décuple dans la rugosité ε.

$D = 0,054\ m$; $\nu = 1,14.10^{-6}\ m^2.s^{-1}$

	Δh (cm)	Q_1 (l/s) $\varepsilon = 10^{-5}$ m	Q_2 (l/s) $\varepsilon = 10^{-6}$ m	Q mesuré (l/s)	$Q_2 - Q_1$	$(Q_2 - Q_1)^2$
1	6,70	3,15	3,21	3,21	0,06	0,0036
2	6,10	2,99	3,04	3,05	0,05	0,0025
3	4,20	2,43	2,47	2,45	0,04	0,0016
4	3,50	2,20	2,23	2,19	0,03	0,0009
5	3,40	2,16	2,19	2,18	0,03	0,0009
6	3,15	2,07	2,10	2,10	0,03	0,0009
7	2,60	1,86	1,89	1,81	0,03	0,0009
8	2,37	1,77	1,79	1,77	0,02	0,0004
9	1,98	1,60	1,62	1,58	0,02	0,0004
10	1,20	1,21	1,22	1,21	0,01	0,0001
11	0,90	1,03	1,03	1,00	0,00	0,00

$\Sigma\,(Q_2 - Q_1)^2 = 0,0122$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(Q_2 - Q_1)^2}{n-1}} = 0,035$ (avec $n = 11$ le nombre de mesures.)

$Q_{moyen} = 2,06$

$\sigma_{relative} = \dfrac{\sigma}{Q_m} = \dfrac{0,035}{2,06} \# 2\ \%$

Choix de la rugosité moyenne

Parmi les valeurs des rugosités indiquées dans le tableau précédent, celle que nous choisissons pour le matériau utilisé (flexiglass) est celle qui satisfait aux mêmes conditions d'écoulement, aussi bien dans la conduite circulaire partiellement occupée de diamètre D', destinée à notre étude, que dans le dispositif des pertes de charges linéaires, constitué du tube de diamètre D ; les conditions d'écoulement y sont les mêmes quand l'égalité des longueurs fluidodynamiques est satisfaite ; ceci se traduit par la relation :

$$\Lambda = \frac{D_h}{D_{h_0}} = \frac{D}{D_0} \quad \text{d'où l'on tire :}$$

$$D_h = \frac{D}{D_0} \cdot D_{h_0}$$

L'application de la longueur fluidodynamique au nombre de Reynolds conduit à la relation :

$$\mathbb{R} = \frac{4}{P_0} \cdot \frac{Q}{\Lambda} \cdot \frac{1}{\nu}$$

avec $Q = Q_{moyen} = 2{,}00 \ \ell/s$

Avec une profondeur moyenne $h = \frac{k}{2}$ dans la conduite partiellement occupée, on détermine le paramètre de forme $\xi = \frac{h}{D'}$ et par suite les paramètres dimensionnels tels que : D_{h_0}, A_0, $4/P_0$:

$D_{h_0} = 1,75$; $A_0 = 1,7$; $4/P_0 = 1,02$ pour $\xi = \frac{0,026}{0,194} = 0,134$

le paramètre dimensionnel du diamètre D est $D_0 = 1,539$ (le tube étant plein)

Ainsi : $\Lambda = \frac{0,054}{1,539} = 0,0351$

et $D_h = 0,0614$

d'où $\mathbb{R} = 1,02 \times \frac{0,002}{0,0351} \times \frac{10^6}{1,14} = 50922$,

Pour un nombre de Reynolds se rapprochant de la valeur $\mathbb{R} = 50982$, le tableau précédent nous indique une valeur de l'ordre de 0,02 mm pour la rugosité ε.

En déterminant : $\varepsilon/D_h = \frac{0,00002}{0,0614} \approx 0,000326$

et avec la valeur du nombre de Reynolds, soit : $\mathbb{R} = 50\,000$, on vérifie aisément sur le diagramme de Moody que le régime de l'écoulement est transitoire, l'écoulement est animé d'une vitesse moyenne $V = \frac{\mathbb{R} . \nu}{D} = \frac{50.000 \times 1,14 . 10^{-6}}{0,054} = 1,06$ m/s correspondant à un débit : $Q = V . A = 2,42$ l/s.

Etalonnage du deversoir triangulaire :

$Q = 0,006\, h^{2,409}$

hauteur de la lame d'eau au-dessus de la crête	Graduations capacite jaugée.	Volume correspondant	temps	débits	Moyennes	
h (cm)	(cm)	V (l)	t (sec)	Q (l/sec)	h	Q
12,90 12,85	21,70 19,60	28,02 27,81	10,50 10,25	2,669 2,713	12,88	2,691
12,15 12,15	31,50 39,10	29,20 29,80	11,60 11,80	2,517 2,525	12,15	2,521
11,50 11,45	21,00 17,50	27,95 27,60	12,80 12,60	2,218 2,190	11,48	2,204
10,45 10,50	30,40 14,00	28,92 27,24	16,50 15,60	1,753 1,746	10,48	1,750
10,05 10,05	20,10 34,50	27,86 29,33	17,80 18,90	1,565 1,552	10,05	1,559
5,75 5,75	33,75 16,50	29,26 27,50	65,95 62,00	0,444 0,444	5,75	0,444
6,70 6,70	25,90 28,30	28,45 28,70	55,60 56,00	0,512 0,512	6,70	0,512
12,50 12,50	37,50 12,40	29,64 27,28	11,20 10,30	2,646 2,648	12,50	2,630

Loi de variation de la rugosité en fonction du nombre de Reynolds.

Le tracé de la rugosité ε en fonction du nombre de Reynolds $\mathbb{R}$, en posant :

$$X = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y = \varepsilon ,$$

montre que la courbe est une hyperbole du type :

$$X \cdot Y = C = \text{constante},$$

qui rappelle les courbes du diagramme de Moody.
Disposant des valeurs numériques de ε et de $\mathbb{R}$, la constante C prend la valeur :

$$C = 989$$

Ainsi, la loi de variation des dits paramètres est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{989}{\mathbb{R}}$$

Conduite circulaire pleine.

Dans cette partie nous ne donnons qu'un programme, applicable au calculateur de poche du type TI 59, conçu pour la détermination complète des caractéristiques d'un écoulement en charge passant par une conduite circulaire. Ce programme comporte deux parties distinctes suivant que l'écoulement étudié est en régime turbulent rugueux ou en régime de transition.

Pour le passage du régime turbulent rugueux au régime de transition, nous utilisons le coefficient de transition (λ, λ_Q ou λ_J). Le principe de calcul est celui de la resolution des trois principaux problèmes d'hydrauliques à savoir: la recherche d'un des paramètres Q, D et J, connaissant les deux autres.

A

Calcule et stocke : $\mathcal{R} = 4Q/\pi D \nu$

$f_r = (1,14 - 0,86 \ln \varepsilon/D)^{-2}$; $J_r = f_r \times 0,082711 \dfrac{Q^2}{D^5}$

ε/D . affiche J_r (turbulent rugueux)

B

Calcule et stocke : $\mathcal{R}_r = 4Q_r/\pi D \nu$

avec $Q_r = \left(\dfrac{12,0903\, J\, D^5}{f_r}\right)^{1/2}$; affiche Q_r

C

Calcule et stocke :

$$D_r = \left(\frac{J_r}{J}\right)^{0,19} \times D$$ avec :

J_r calculé en A et $J = J_{réel}$.

Calcule D pour $J = J_r$

TESTE $|J_r - J|$

$< t$; $> t$; $= t$

affiche D_r (rugueux)

D

Calcule et stocke :

$$f = 12{,}0903\, J \,\frac{D^5}{Q^2} \; ; \; R = \frac{4Q}{\pi D \nu} \; ; \; \varepsilon_r = D \cdot e^{\frac{1{,}14 - 1/\sqrt{f}}{0{,}86}}$$

E

Calcule et stocke :

$$f = \left[-0{,}86 \ln \left(\frac{\varepsilon / D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{R\sqrt{f}} \right) \right]^{-2}$$

$$f_i = f_{i-1} \times \left(\frac{f_{i-2}}{f_{i-1}} \right)^{0{,}86}$$

Séquence utilisée en sous programme pour le passage en transition.

2nd A'

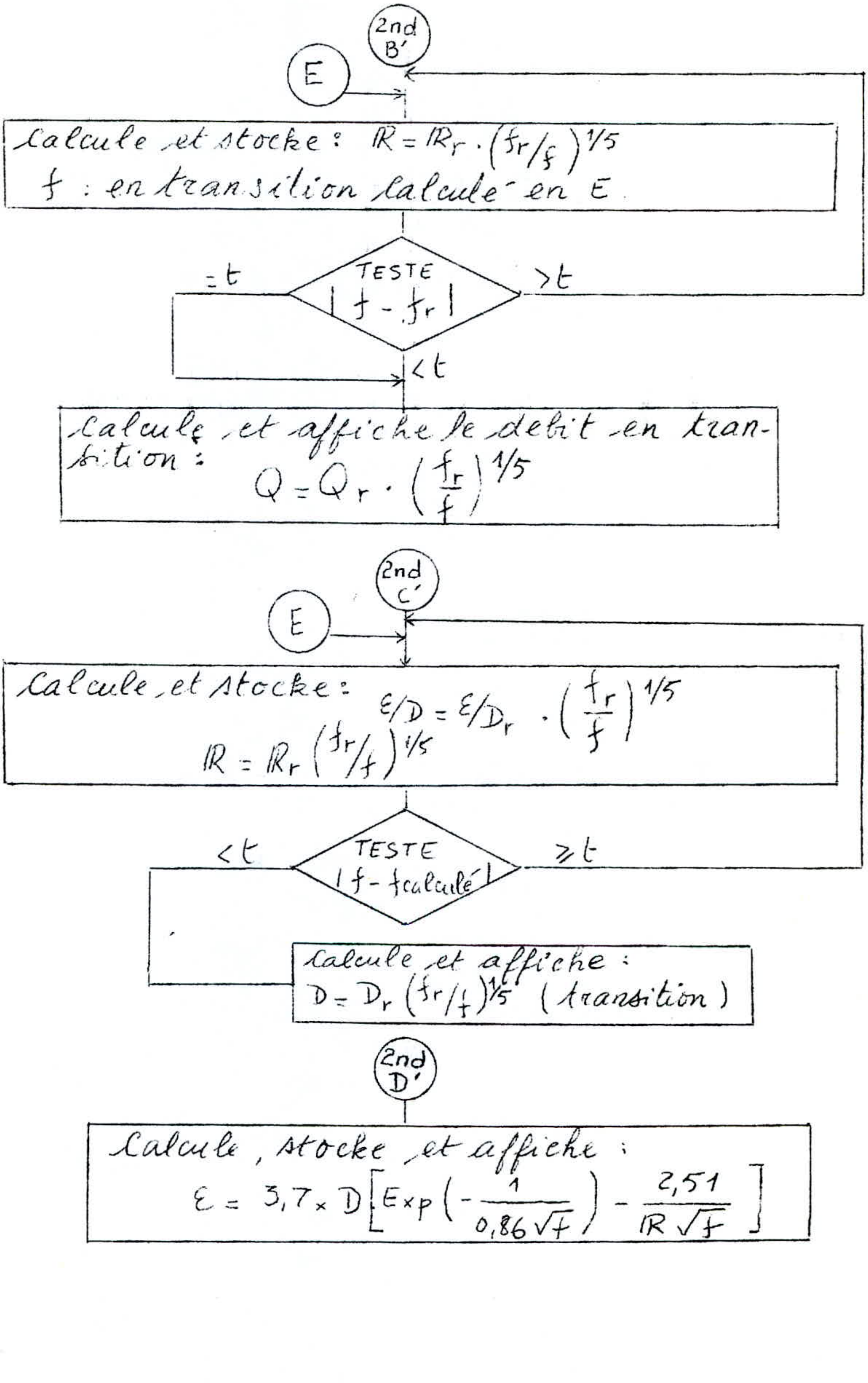
E

TESTE $|f - f_{calculé}|$

$< \varepsilon$; $= \varepsilon$; $> \varepsilon$

Calcule J à l'aide de la relation : $J = J \cdot \frac{f_{n-1}}{f_n}$

affiche J correspondant à f en transition.


2nd B'
E
Calcule et stocke : $\mathbb{R} = \mathbb{R}_r \cdot (f_r/f)^{1/5}$
f : en transition calculé en E
TESTE $|f - f_r|$
=t
>t
<t
Calcule et affiche le debit en transition : $Q = Q_r \cdot \left(\frac{f_r}{f}\right)^{1/5}$
2nd C'
E
Calcule et stocke : $\varepsilon/D = \varepsilon/D_r \cdot \left(\frac{f_r}{f}\right)^{1/5}$
$\mathbb{R} = \mathbb{R}_r \, (f_r/f)^{1/5}$
TESTE $|f - f_{calculé}|$
<t
≥t
calcule et affiche : $D = D_r \, (f_r/f)^{1/5}$ (transition)
2nd D'
Calcule, stocke et affiche : $\varepsilon = 3{,}7 \times D \left[\mathrm{Exp}\left(-\frac{1}{0{,}86\sqrt{f}}\right) - \frac{2{,}51}{\mathbb{R}\sqrt{f}} \right]$

Programme

2nd LBL A $\left(4 \times RCL\,01 \div 2nd\,\pi \div RCL\,03 \div RCL\,00\right)$ STO 04 STO 14 $\left(RCL\,05 \div RCL\,03\right)$ STO 11 STO 13 $\left(RCL\,11\ \ln x \times .86 - 1{,}14\right) x^2\ \frac{1}{x}$ STO 06 STO 07 $\left(RCL\,06 \times .082711 \times RCL\,01\ x^2 \div RCL\,03\ y^x\,5\right)$ STO 09 INV SBR

2nd LBL B A 12.0903 × RCL 02 × RCL 03 y^x 5 ÷ RCL 06 = $\sqrt{x}$ STO 21 × 4 ÷ 2nd π ÷ RCL 03 ÷ RCL 00 = STO 04 STO 14 RCL 21 R/S

2nd LBL C A RCL 09 ÷ RCL 02 = y^x .19 × RCL 03 = STO 03 RCL 09 − RCL 02 = 2nd $|x|$ 2nd $x \geq t$ C RCL 03 STO 23 R/S

2nd LBL D RCL 02 × RCL 03 y^x 5 × 12.0927 ÷ RCL 01 x^2 = STO 06 STO 07 4 × RCL 01 ÷ 2nd π ÷ RCL 03 ÷ RCL 00 = STO 04 STO 14 1.14 − RCL 06 $\sqrt{x}$ $\frac{1}{x}$ = ÷ .86 = INV $\ln x$ × RCL 03 = STO 25 R/S

2nd LBL E $\left(\left(2.51 \div RCL\,04 \div RCL\,06\ \sqrt{x} + RCL\,11 \div 3.7\right) \ln x \times .86\right) x^2\ \frac{1}{x}$ STO 08 $\left(\left(RCL\,08 \div RCL\,06\right) y^x .86 \times RCL\,06\right)$ STO 06 INV SBR

2nd LBL 2nd A' E RCL 08 − RCL 06 = 2nd $|x|$ 2nd $x \geq t$ 2nd A' RCL 06 ÷ RCL 07 = STO 10 × RCL 09 = STO 32 R/S

2nd LBL 2nd B' E RCL 07 ÷ RCL 06 = $\sqrt{x}$ STO 20 × RCL 14 = STO 04 RCL 08 − RCL 06 = 2nd $|x|$ 2nd $x \geq t$ 2nd B' RCL 20 × RCL 21 = STO 31 R/S

2nd LBL 2nd C' E ((RCL 06 ÷ RCL 07) INV y^x 5) STO 30
$\frac{1}{x}$ × RCL 13 = STO 11 RCL 14 ÷ RCL 30 = STO 04 RCL 08
− RCL 06 = 2nd $|x|$ 2nd $x \geq t$ 2nd C' RCL 30 ×
RCL 23 = STO 33 R/S .

2nd LBL 2nd D' .86 $\frac{1}{x}$ ÷ RCL 06 $\sqrt{x}$ = INV $\ln x$ $\frac{1}{x}$
− 2,51 ÷ RCL 04 ÷ RCL 06 = × 3.7 × RCL 03 = STO 35
R/S

— CHAP IV —

Résultats expérimentaux et analyse des résultats

— Quand vous traitez de l'écoulement de l'eau, n'oubliez pas d'invoquer l'expérience puis la raison —

Traité : Del Moto e misura dell'acqua

— Leonard de Vinci —

Rapports de similitude entre le modèle de diamètre D quelconque et le modèle de diamètre D = 1m.

En désignant par D le diamètre de la section circulaire étudiée et par D_1 le diamètre égal à l'unité de longueur, la similitude géométrique se traduit par la relation : $\frac{D}{D_1} = \lambda$

soit $\lambda = D$.

Ainsi, par application des lois de similitude de Reech-Froude, nous obtenons les rapports de toutes les caractéristiques de l'écoulement dans la section de diamètre D quelconque et dans la section de diamètre D_1 :

vitesses : $\lambda_v = \frac{v}{v_I} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{D}$

temps : $\lambda_t = \frac{t}{t_I} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{D}$

débits : $\lambda_Q = \frac{Q}{Q_I} = \lambda^{5/2} = D^{5/2}$

Forces : $\lambda_F = \frac{F}{F_I} = \lambda_\rho \lambda^3 = D^3$ (avec $\lambda_\rho = 1$)

Pressions : $\lambda_p = \frac{p}{p_I} = \lambda_\rho \lambda = D$ (avec $\lambda_\rho = 1$)

puissances $\lambda_P = \frac{P}{P_I} = \lambda_\rho \lambda^{7/2} = D^{7/2}$ (avec $\lambda_\rho = 1$)

Rapports de similitude entre le modèle de diamètre D quelconque et le modèle de diamètre D = 1m.

En désignant par D le diamètre de la section circulaire étudiée et par D_1 le diamètre égal à l'unité de longueur, la similitude géométrique se traduit par la relation : $\frac{D}{D_1} = \lambda$

soit $\lambda = D$.

Ainsi, par application des lois de similitude de Reech-Froude, nous obtenons les rapports de toutes les caractéristiques de l'écoulement dans la section de diamètre D quelconque et dans la section de diamètre D_1 :

vitesses : $\lambda_v = \frac{v}{v_I} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{D}$

temps : $\lambda_t = \frac{t}{t_I} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{D}$

débits : $\lambda_Q = \frac{Q}{Q_I} = \lambda^{5/2} = D^{5/2}$

Forces : $\lambda_F = \frac{F}{F_I} = \lambda_\rho \lambda^3 = D^3$ (avec $\lambda_\rho = 1$)

Pressions : $\lambda_p = \frac{p}{p_I} = \lambda_\rho \lambda = D$ (avec $\lambda_\rho = 1$)

puissances $\lambda_P = \frac{P}{P_I} = \lambda_\rho \lambda^{7/2} = D^{7/2}$ (avec $\lambda_\rho = 1$)

Choix de la Similitude applicable à notre étude -

Dans notre cas et compte tenu des considérations cités précédemment, la similitude applicable est celle de Reech-Froude ; en effet, l'écoulement est à surface libre et notre modèle est considéré comme un ouvrage court tel que les forces dues à la viscosité soient négligeables par rapport à celles dues à l'inertie et à la pesanteur.

Cette loi de similitude est appliqueé de façon particulière car l'échelle du modèle est la dimension même caractérisant ce modèle vu que l'étude théorique du ressaut a été rameneé à un ouvrage de diamètre égal à l'unité de longueur dans le but de simplifier les relations reliants les paramètres hydrauliques recherchés.

Nous pouvons passer du modèle $D = 1m$ au modèle $D = 0{,}194\,m$ (qui est le diamètre du mo. utilisé) en multipliant les caractéristiques déterminées pour $D = 1m$ par l'echelle $\lambda = D = 0{,}194$ pour les dimensions linéaires, par $\lambda^{1/2}$ pour les vitesses etc... en application des formules de passage données à la page précédente.

conception et dimensionnement du Modèle -

Le modèle a été conçu en plexiglass et dimensionné tel que les conditions d'écoulement répondent aux hypothèses de l'étude théorique présentée dans le chapitre II. Un calcul préliminaire pour un débit maximum de 4 l/s a donné les résultats suivants :

$D = 1 m$	$D = 0,134 m$
$k_I = 0,26$ m	$k = 0,05$ m
$H_{k_I} = 0,35$ m	$H_k = 0,068$ m
$h_{t_I} = 0,08$ m	$h_t = 0,015$ m
$h_{r_I} = 0,671$ m	$h_{r_I} = 0,130$ m
$L_I = 4,137$ m	$L = 0,80$ m
	$J_{u_1} = 0,2$
	$J_{u_2} = 0,47$

Remarque : Cependant, lors du montage du modèle les pentes géométriques, ci-dessus indiquées, ont été légèrement modifiées de sorte que :

$J_{u_1} = 0,168$; $J_{u_2} = 0,475$.

Les longueurs de chaque tronçon sont alors : $L_1 \# 67$ cm ; $L_2 = 1,59$ m ; $L_3 = 1,02$ m.

Le modèle est représenté en annexe de l'étude à l'échelle 1/10.

MANIPULATION

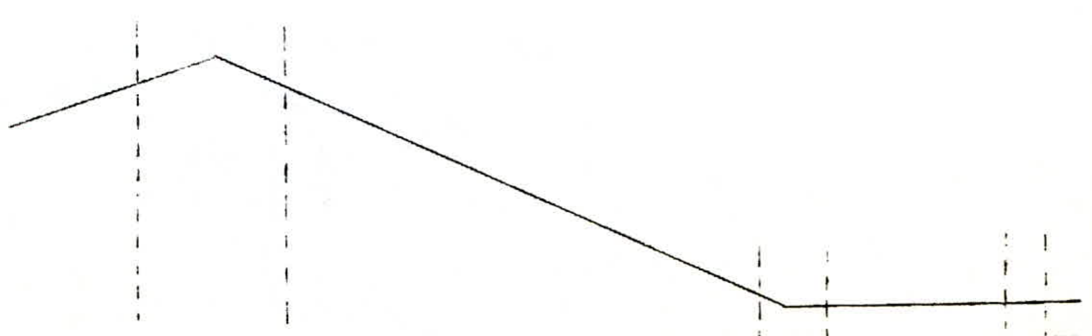
Description de l'installation.

Le dispositif est relié au chateau d'eau du laboratoire par une prise à niveau constant, la charge est environ égale à 4 m.

L'eau arrivant du chateau passe par un convergent placé à l'amont d'un débitmètre à segment; le convergent permet d'augmenter la vitesse de l'eau à l'entrée du débitmètre en vue d'accroitre son énergie cinétique par transformation de l'énergie potentielle. L'eau arrive dans le bassin d'alimentation après passage dans le débitmètre à segment, lequel est relié à un manomètre, pour rejoindre finalement le canal à travers un tranquilisateur.

L'expérience a consisté à mesurer le tirant d'eau le long du canal, particulièrement les profondeurs amont et avale du ressaut, pour un débit déterminé. Du fait que le canal est entièrement fermé, la mesure directe de la charge totale n'a pas été possible; elle a été évaluée par un calcul mené à partir de la valeur du tirant d'eau mesurée, en application de la relation : $H = h + \alpha \frac{v^2}{2g}$ où α est le facteur de correction de l'énergie cinétique, volontairement fixé égal à l'unité; nous avons en effet constaté qu'un écart de 5% sur le coefficient α, n'entraine qu'un écart de 2% sur la charge totale, pour une vitesse de 3 m/s considérée comme la valeur la plus défavorable dans l'écoulement étudié.

Le shéma ci-dessous indiqué, montre les différentes sections choisies de l'écoulement.



Pour chaque section, nous avons utilisé un système simple de prise de pression statique, constitué d'un collecteur relié à un tube piézométrique permettant de mesurer une valeur moyenne du tirant d'eau, à l'aide d'un réglet. (Un shéma de principe en est représenté en Coupe B-B dans l'annexe). Ainsi, nous avons estimé en :

I_a : la valeur de la profondeur fluviale sur le tronçon ascendant (h_f).

II_a : La valeur d'une profondeur torrentielle sur le rapide.

III_a : La profondeur torrentielle à l'amont du ressaut.

III_b et III_c : La profondeur Conjuguée (h_r).

A l'extrémité avale du modèle, nous avons installé un dispositif de fermeture pour pouvoir fixer le niveau du plan d'eau aval du ressaut ; Ceci nous a donné la possibilité de choisir une hauteur de Seuil compatible avec l'existence d'un ressaut pour une Serie de Cinq (5) débits (pris dans le Sens croissant).

A partir de la profondeur mesurée, nous avons déterminé les paramètres hydrauliques

dans chaque section (largeur du plan d'eau, périmètre mouillé, section mouillée, vitesse, charge totale ...)
Les résultats expérimentaux ont été confrontés à ceux obtenus en application de la théorie moyennant les programmes de calcul présentés (détermination du profil en long de la surface libre, calcul du ressaut), résultats que nous consignons dans les tableaux suivants :

profil en long de la Surface libre :

$Q = 2,63\ l/s$; $Q_I = 158,65\ l/s$

$k_I = 0,220672\ m$; $k = 0,042810$; $J_u = 0,475$

$\Sigma \Delta L$ cm	N	h cm	$\Delta h / D$	ξ
0,078	1	3,90	-0,00515	0,198
0,187	2	3,80	—"—	0,193
0,331	3	3,70	—"—	0,188
0,515	4	3,60	—"—	0,183
0,745	5	3,50	—"—	0,177
1,280	6	3,40	—"—	0,172
1,370	7	3,30	—"—	0,167
1,780	8	3,20	—"—	0,162
2,280	9	3,10	—"—	0,157
2,880	10	3,00	—"—	0,152
3,590	11	2,90	—"—	0,147
4,440	12	2,80	—"—	0,141
5,450	13	2,70	—"—	0,136
6,660	14	2,60	—"—	0,131
8,110	15	2,50	—"—	0,126
9,850	16	2,40	—"—	0,121
11,900	17	2,30	—"—	0,116
14,60	18	2,20	—"—	0,110
17,70	19	2,10	—"—	0,105
21,60	20	2,00	—"—	0,100
26,60	21	1,90	—"—	0,095
32,90	22	1,80	—"—	0,090
41,10	23	1,70	—"—	0,085
52,10	24	1,60	—"—	0,0798
67,50	25	1,50	—"—	0,0747
90,00	26	1,40	—"—	0,0695
126,70	27	1,30	—"—	0,0644
156,50	28	1,25	—"—	0,0631
164,00	29	1,24	—"—	0,0636

$\Delta h = 35,35$ cm ; $Q = 2,5$ l/s ; $k = 4,171$ cm

SECTION	I_a	II_a	III_a	III_b	III_c
profondeur calculée (cm)	11,76	1,92	1,24	10,71	10,71
profondeurs mesurées - h (cm)	12,10 12,00 12,15	1,95 1,95 1,90	1,25 1,20 1,25	10,65 10,55 10,60	10,70 10,75 10,65
profondeur moyenne (cm)	12,08	1,93	1,23	10,60	10,70
φ (rd)	1,818	0,641	0,509	1,663	1,674
largeur du plan d'eau e (cm)	18,80	11,61	9,45	19,31	19,29
périmètre mouillé - P (cm)	13,28	12,45	9,87	32,27	32,47
Section mouillée A (cm^2)	193,500	15,267	7,857	165,23	167,161
vitesse v (cm/s)	12,92	163,74	318,18	15,13	14,95
charge totale $H = h + v^2/2g$ (cm)	12,16	15,60	52,88	10,71	10,81
charge totale calculée - (cm)	11,85	15,81	51,67	10,82	10,82

$\Delta H = 42,12$ cm

ΔH (calculée) $= 40,85$ cm

longueur du ressaut :

L (calculée) $= 66,29$ cm

L (mesurée) $= 65,94$ cm.

$\Delta h = 40{,}70$ cm ; $Q = 2{,}63$ l/s ; $k = 4{,}281$ cm .

SECTION	I_a	II_a	III_a	III_b	III_c
profondeur calculée (cm)	12,00	1,98	1,26	11,08	11,08
profondeurs mesurées h (cm)	12,54 12,55 12,55	2,00 1,95 2,05	1,25 1,24 1,25	10,00 9,90 9,95	9,80 9,85 9,75
profondeur moyenne (cm)	12,54	2,00	1,24	9,95	9,80
φ (rd)	1,868	0,653	0,512	1,596	1,581
largeur du plan d'eau e (cm)	18,55	11,79	9,49	19,39	19,39
périmètre mouillé - P (cm)	36,23	12,68	9,91	30,97	30,67
Section mouillée - A (cm^2)	202,106	16,087	7,951	152,645	149,736
vitesse v (cm/s)	13,01	163,48	330,74	17,23	17,56
charge totale $H = h + v^2/2g$ (cm)	12,62	15,63	57,07	10,10	9,95
charge totale calculée (cm)	12,09	16,02	54,49	11,19	11,19

$\Delta H = 47{,}045$ cm

ΔH (calculée) $= 43{,}30$ cm

Longueur du ressaut :

L (calculée) $= 68{,}74$ cm

L (mesurée) $= 60{,}44$ cm

$\Delta h = 42,40$ cm ; $Q = 2,70$ l/s ; $k = 4,339$ cm

SECTION	I_a	II_a	III_a	III_b	III_c
profondeur calculée (cm)	12,36	2,01	1,30	10,90	10,90
profondeurs mesurées - h (cm)	12,60 12,55 12,65	2,00 2,05 2,00	1,30 1,25 1,30	10,85 10,85 10,80	10,80 10,85 10,80
profondeur moyenne (cm)	12,60	2,03	1,28	10,83	10,81
φ (rd)	1,874	0,659	0,520	1,688	1,686
largeur du plan d'eau e (cm)	18,51	11,88	9,64	19,26	19,27
perimètre mouillé - P (cm)	36,36	12,79	10,09	32,74	32,71
section mouillée - A (cm^2)	203,20	16,481	8,366	169,732	169,411
vitesse v (cm/s)	13,28	163,81	322,72	15,90	15,937
charge totale $H = h + v^2/2g$ (cm)	12,69	15,72	54,41	10,96	10,94
charge totale calculée - (cm)	12,45	16,17	52,64	11,02	11,02

$\Delta H = 43,46$ cm

ΔH (calculée) = 41,42 cm

Longueur du ressaut :

L (calculée) = 67,20 cm ; L (mesurée) = 66,78 cm

$\Delta h = 44,25$ cm ; $Q = 2,75$ l/s ; $k = 4,380$ cm

SECTION	I_a	II_a	III_a	III_b	III_c
profondeur calculée (cm)	12,42	3,14	1,33	11,10	11,10
profondeurs mesurées h (cm)	12,65 12,60 12,65	2,95 3,00 2,95	1,30 1,35 1,35	10,95 10,90 10,90	10,95 10,90 10,95
profondeur moyenne (cm)	12,63	2,96	1,33	10,91	10,93
φ (rd)	1,878	0,802	0,523	1,696	1,698
largeur du plan d'eau e (cm)	18,49	13,95	9,70	19,24	19,24
périmètre mouillé P (cm)	36,43	15,57	10,16	32,90	32,94
Section mouillée A (cm^2)	203,823	28,498	8,527	171,209	171,594
vitesse v (cm/s)	13,49	96,49	322,48	16,06	16,02
charge totale $H = h + v^2/2g$ (cm)	12,72	7,71	54,35	11,04	11,06
charge totale calculée (cm)	12,51	7,14	54,35	11,22	11,22

$\Delta H = 43,30$ cm

ΔH (calculée) = 43,13 cm

Longueur du ressaut :

L (calculée) = 68,39 cm ; L (mesurée) = 67,13 cm

$\Delta h = 47{,}10$ cm ; $Q = 2{,}89$ l/s ; $k = 4{,}493$ cm

SECTION	I_a	II_a	III_a	III_b	III_c
profondeur calculée (cm)	12,82	3,26	1,36	11,42	11,42
profondeurs mesurées h (cm)	12,75 12,75 12,80	3,05 3,10 3,10	1,35 1,40 1,40	11,25 11,20 11,25	11,30 11,25 11,30
profondeur moyenne (cm)	12,76	3,08	1,38	11,23	11,28
φ (rd)	1,892	0,819	0,540	1,729	1,734
largeur du plan d'eau e (cm)	18,40	14,18	9,98	19,15	19,14
périmètre mouillé P (cm)	36,71	15,90	10,48	33,55	33,64
Section mouillée A (cm²)	206,283	30,18	9,314	177,418	178,312
vitesse v (cm/s)	14,01	95,73	309,16	16,29	16,20
charge totale $H = h + v^2/2g$ (cm)	12,86	7,75	50,14	11,36	11,41
charge totale calculée (cm)	12,92	7,22	52,63	11,55	11,55

$\Delta H = 38{,}755$ cm

ΔH (calculée) $= 41{,}08$ cm

Longueur du ressaut :

L (calculée) = 70,42 cm ; L (mesurée) = 69,12 cm

Paramètres du ressaut obtenu pour le débit :

$$Q = 0,00263 \ m^3/s \quad (D = 19,4 \ cm)$$

Les paramètres à introduire dans le programme destiné au calcul du ressaut sont :

$$h_{t_I} = \frac{h_t}{D} = \frac{0,0126}{0,194} = 0,0649484 \quad \text{en mémoire } 01.$$

$(k_I) = 0,20$ (valeur approximative) en mémoire 06.

$$Q_I = \frac{Q}{D^{2,5}} = \frac{0,00263}{(0,194)^{2,5}} = 0,158654 \quad \text{en mémoire } 10.$$

0,000001 (précision choisie) dans le registre T en appuyant sur la touche $x \rightleftarrows t$.

Les résultats donnés par le programme sont valable pour le diamètre D = 1m ; par application des lois de similitude de Reech-Froude (cf rapports de similitude) nous déduisons les paramètres relatifs au diamètre utilisé, soit D = 19,4 cm -

Les résultats obtenus sont groupés dans le tableau de la page suivante.

$Q = 0,00263\ m^3/s$; $Q_I = 0,158654\ m^3/s$

$h_t = 0,0126$; $h_{t_I} = 0,0649484$

$k = 0,0428104$; $k_I = 0,22067$

$D = 1\ m$	$D = 0,194\ m$
$H_{k_I} = 0,298240$	$H_k = 0,057858$
$k_I = 0,220672$	$k = 0,0428104$
$Z_{t_I} = 0,119287$	$Z_t = 0,0008709$
$\varphi_{t_I} = 0,515384$	$\varphi_t = 0,515384$
$A_{t_I} = 0,0216343$	$A_t = 0,00081423$
$\bar{h}_{t_I} = 0,0261296$	$\bar{h}_t = 0,00506915$
$h_{r_I} = 0,571032$	$h_r = 0,11078027$
$\varphi_{r_I} = 1,713343$	$\varphi_r = 1,713343$
$\vartheta = 0,4625159$	$\vartheta = 0,4625159$
$A_{r_I} = 0,4634918$	$A_r = 0,037636$
$\bar{h}_{r_I} = 0,2454115$	$\bar{h}_r = 0,0220667$
$H_{t_I} = 2,808792$	$H_t = 0,5449057$
$H_{r_I} = 0,577010$	$H_r = 0,1119400$
$\Delta H_I = 2,2317819$	$\Delta H = 0,4329657$

La longueur des ressauts est

$$L_I \leq 7\,(h_{r_I} - h_{t_I}) = 3,542587$$

$$L = 0,687262\ .$$

Remarques :

a) Le ressaut se manifeste dans tous les cas par un passage d'une profondeur d'eau inférieure à la profondeur critique k à une profondeur supérieure à celle-ci ; autrement dit le ressaut comporte un changement d'un régime d'écoulement torrentiel en régime tranquille (ou fluvial.).

Les profondeurs d'eau conjuguées sont directement liées au nombre de Froude caractérisant l'écoulement à l'amont et à l'aval du ressaut.

$$\mathbb{F}_a = \frac{v_a^2}{g h_a} \quad \text{et} \quad \mathbb{F}_b = \frac{v_b^2}{g h_b}$$

Le nombre de Froude est supérieur à 1 à l'amont du ressaut et inférieur à 1 à l'aval.

Détermination des nombres de Froude pour les ressauts étudiés :

La détermination des nombres de Froude, que nous consignons dans le tableau ci-joint, montre le caractère de l'écoulement à l'amont et à l'aval du ressaut :

DEBIT l/s / SECTION	2,5	2,63	2,70	2,75	2,89
III a	83,89	90,017	83,026	79,786	70,674
III b	0,022	0,0304	0,0238	0,0241	0,0241

[illegible] l'étude peut être faite, du point de vue dissipation d'énergie, suivant la valeur du nombre de Froude caractérisant l'écoulement à l'amont du ressaut ; en effet, pour les quatres premiers débits considérés, l'écoulement à l'amont du ressaut est caractérisé par un nombre de Froude supérieur ou égal à 80 ($\mathbb{F}_{\mathrm{II}_a} \geq 80$), ce qui permet de dire que les ressauts obtenus possèdent un bon rendement ; la dissipation de l'énergie atteint ou dépasse 80 % de la charge totale. Pour le dernier débit considéré, soit $Q = 2{,}89$ l/s, le nombre de Froude se situe dans l'intervalle (20 ; 80) correspondant à l'intervalle des ressauts en bonne condition ; le ressaut est équilibré et son action est efficace.

Dans les tableaux de la page suivante, nous avons consigné le taux de dissipation de l'énergie des différents ressauts étudiés, ainsi que la puissance qu'ils dissipent.

On rappelle que la puissance dissipée est donnée par :

$$P = \frac{10^3 Q . \Delta H}{75} \quad (CV)$$

Q l/s	H (cm)	ΔH (cm)	$\frac{\Delta H}{H}$ %	P (cv)
2,5	52,88	42,12	79.65	140,5
2,63	57,07	47,045	82,43	165
2,70	54,41	43,45	79,85	156,5
2,75	54,35	43,30	79,66	159
2,89	52,63	38,755	73,63	149

b) Une légère différence entre la valeur de la profondeur calculeé et mesurée, entraine un écart appreciable, surtout pour les grandes vitesses, entre les charges totales Correspondantes.

Hystéresis du ressaut :

Indépendemment des mesures faites, concernant la vérification de la théorie, nous avons observé le phénomène de disparition et de réapparition du ressaut dans les conditions suivantes :

- Seuil incliné à l'aval du dispositif, de hauteur $a_1 = 5{,}8\,cm$
- à débit croissant, le ressaut se déplace vers l'aval, acquiert une position instable pour disparaitre enfin, en laissant place à un écoulement torrentiel pour un débit $Q_1 = 1{,}7\ l/s$; le régime de l'écoulement est dit "catastrophique" caractérisé par un brusque accroissement de la vitesse et une importante force tractrice par conséquent.
- partant du régime catastrophique, nous avons fait décroitre le débit et constaté que ce régime persiste ; le ressaut ne se rétablit finalement que pour un débit $Q_2 = 1{,}35\ l/s < Q_1$; le régime redevient alors "naturel", c'est à dire torrentiel à l'amont du ressaut et fluvial à l'aval.

Conclusion :

En réalisant cette expérience nous avons mis en évidence les résultats théoriques de l'étude d'un écoulement non uniforme.

Nous avons montré la possibilité de déterminer le profil en long de la surface libre d'un écoulement en régime de transition, compte tenu des pertes de charge linéaires, que le ressaut entraine une dissipation considérable de l'energie; ceci justifie la présence volontaire de ce phénomène à l'aval des ouvrages d'évacuation de crues. Cependant l'existence du ressaut est conditionnée par la presence d'un écoulement torrentiel à l'amont et fluvial à l'aval (condition pouvant être satisfaite par la mise en place d'un obstacle).

On trouve une application du ressaut dans les "partiteurs à ressaut" pour canaux d'irrigation, dans le module à masque ...

Enfin, en ce qui concerne le vaste domaine de l'expérimentation en laboratoire, il serait interessant, du point de vue scientifique, d'étudier un un autre écoulement, que l'on a pu observer à de très faibles débits : Il s'agit de l'écoulement en régime d'ondes.