Hydraulique

UNIVERSITÉ D'ALGER

9/75

Ecole Polytechnique

3 ex

THÈSE DE FIN D'ÉTUDES

REGULARISATION DES APPORTS NATURELS

Année 1975

ÉTUDIÉE PAR

A. HOCINE

DIRIGÉE PAR

ARSENIEV

À ma mère, a la mémoire de mon père , à tous mes amis et ceux qui m'ont aidé . -

A. H.

-o- REMERCIEMENTS -o-

-=oOo=-

Je viens, confus et ému, avec ces mots qui ne sauraient traduire ma reconnaissance à l'égard de Monsieur ARSENIEV , pour l'aide qu'il m'a apportée et pour m'avoir mis souvent sur la meilleure voie, Monsieur EMERY, pour son cours des eaux souterraines et d'assainissement, et particulièrement Monsieur LAPRAY, pour la rareté de son cours d'Hydraulique Générale qu'il a composé avec Amour, dans lequel il a présenté son ingénieuse " Théorie de la longueur fluidodynamique " qui constitue les trésors de son expérience .

Mes remerciements vont également à tous les professeurs qui ont contribué à ma formation.

H. HOCINE.

-=-=oOo=-=-

-o- ujet E HESE -o-

-=-=-o0oo -=-=-

ONCEPTIONS THEORIQUES DE LA CONCORDANCE DES PARAMETRES PRINCIPAUX D'UN AMENAGEMENT HYDROELECTRIQUE .

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

TUDIE par :

. /OCINE.

IRIGE par :

RSENIEV .

- 1 9 7 5 -

-o- INTRODUCTION -o-

On constate que les aménagements hydroélectriques, d'accumulation par réservoir saisonnier sont les plus répandus parmis tous les aménagements hydroélectriques (A.M.E.).

Pour tels aménagements hydroélectriques la régularisation des apports naturels d'un cours d'eau est réalisé par le stockage de l'eau pendant la saison des forts débits et par l'utilisation de celle-ci en période des faibles débits.

Cet ouvrage contient les principes du calcul mathématique de la concordance des paramètres principaux d'un aménagement hydroélectrique pour avoir ultérieurement la possibilité d'obtenir des recommandations aux opérations des stations hydroélectriques de régler en permanence le fonctionnement des groupes dans les régimes satisfaisant toutes les variations de la consommation de l'énergie par un réseau d'interconnexion.

Autrement dit il s'agit de trouver des expressions permettant de définir l'action réciproque des caractéristiques hydrauliques en fonction d'une allure de la variation de puissance consommée pendant le temps considéré.

Il est aisé de voir que la voie du développement de l'industrie hydroélectrique en Algérie consiste à perfectionner des méthodes d'exploitations des aménagements hydroélectriques déjà construits. Nous entendons par là les études et la réalisation des mesures orientées à faire la bonne adaptation, des ressources hydrauliques naturelles avec les besoins en énergie électrique, c'est à dire à faire la liaison la plus sensible entre les caractéristiques hydrauliques et celle des réseaux de consommation.

En totalité actuellement les aménagements Hydroélectriques d'Algérie portent la charge d'assurer la base des besoins en énergie électrique dans certaines régions, par conséquent les aménagements hydroélectriques doivent fonctionner en régimes constants par la puissance pendant toute l'année et la valeur de cette puissance dépend du volume d'eau stocké en réservoir, c'est ainsi que notre premier problème se pose :

" Comment régler le débit dérivé pour que la puissance d'un aménagement hydroélectrique soit constante pendant le temps de fonctionnement ? ".

Le développement du pays entraine comme pour n'importe quel pays industrialisé la tendance à la diminution de taux de l'énergie électrique produite par les aménagements hydroélectriques.

Actuellement pour l'Algérie ce taux constitue 35 % , U.S.A. 15 % , URSS 18 % , RFA 9 % etc... .

D'où le rôle futur des aménagements hydroélectriques constituera à couvrir les points de charge de la cosommation, ce qui change leur régime de fonctionnement. Dans ce cas la puissance variera aussi bien pendant la journée que pendant les saisons. Et pour adaptér ces nouveaux régimes de fonctionnement le deuxième problème se révèle tel :

" Assurer la régularisation des débits absorbés suivant la variation de la puissance . "

On a intérêt à résoudre deux problèmes posés d'une façon théorique en examinant le processus énergétique réalisé par un Aménagement Hydroélectrique , c'est à dire :

- Définition du processus énergétique
- Paramètres essentiels
- Equation générale .

Il convient de souligner que les formules obtenues peuvent être appliquées comme la base de passage au contrôle continu de la concordance des puissances absorbées aux apports existants du prévus pour que la vidange du réservoir soit justement complet avant son remplissage ultérieur indépendement de l'allure de la variation de la charge électrique imposée par un réseau de consommation.

Il est évidant que la réalisation de tel contrôle demande des équipements des aménagements hydroélectriques qui soient susceptibles de fonctionner en divers régimes avec le bon rendement. Ce sont des turbines (pompes) à hélices, palettes orientalbes qui permettent d'utiliser les vastes zones de variation de charges et de débits, sans changement sensible du rendement.

On peut trouver également les autres types de turbines (pompes) destinées à remplir les buts de l'adaptation aux variations assez considérables des paramètres hydrauliques.

-=-oo0oo=-=-

CHAPITRE I

GENERALITES

En général, les turbo - machines particulièrement les turbines, fonctionnent sous charge très variables d'un moment à l'autr et ceci à vitesse constante . Il faut adapter à chaque instant le couple moteur au couple résistant comme à un instant donné la hauteur de chute est aussi variable : dans notre cas qui est l'objet de cette étude, il faudrait varier H et Q simultanément afin d'avoir une puissance constante puisque son expression est :

$$P(t) = Q\,H\,\varpi\,\eta_T$$

Tout au long de cette étude P (t) sera exprimée comme but, tantôt constante et tantôt variable et c'est pour cette raison que nous allons tenter de déterminer les différents paramètres du processus énergétique .

Définition :

Chaqqe retenue est déterminée par sa section d'eau et sa hauteur, quant au débit passant dans les turbines est défini comme la différence des débits soit :

$q(t)$ le débit d'amenée du cours d'eau et $a(h)\frac{dh}{dt}$ qui est l'expression d'un débit ; en effet si $a(h)$ représente la section d'eau variable avec la hauteur (ou la profondeur d'eau) , dh est la dénivélation élémentaire du haut vers le bas pendant un temps élémentaire dt.

Comme dans chaque ouvrage d'hydraulique les pertes de charge interviennent mais dans ce cas nous allons supposer leur existance sur le plan théorique, donc la hauteur h sera diminuée de DH qui englobe toutes les pertes de charge éventuelles.

EQUATION ENERGETIQUE GENERALE. -

Partons de P (t) = Q H et définissons ces termes un à un

$$Q = q(t) - a(h)\frac{dh}{dt}$$

$$H = h - Z(q) - DH$$

d'où $$\left[q(t) - a(h)\frac{dh}{dt} \right]\left[h - Z(Q) - DH \right] = P(t)$$

q (t) débit du cours d'eau (ou des apports naturels)

a (h) section d'eau de la retenue à l'amont de l'ouvrage .

h profondeur d'eau ; charge potentielle de dénivelation .

Z (Q) Côte du bief aval .

DH pertes de charge globales

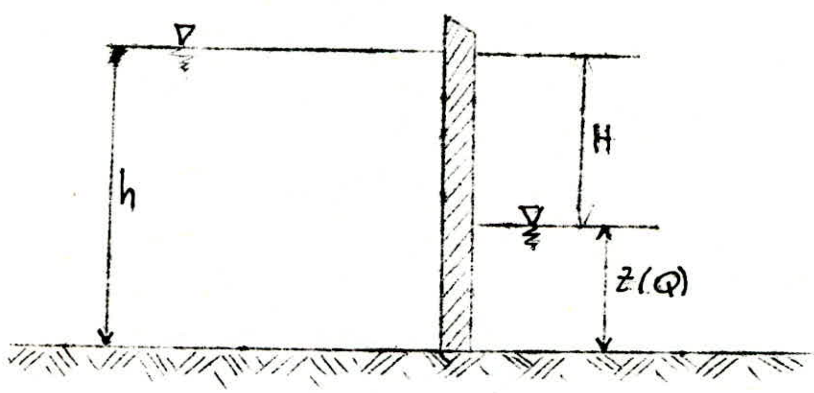
P (t) Puissance d'installation = f (t) (Puissance demandée).

pour les unités le débit sera exprimé en N/s

$$\left[\varpi Q \right] = \left[N/s \right] = Kgf/s$$

P (t) = est exprimée en $\frac{Kgfsn}{s}$

102 Kgf m/s = 1 KW $\Rightarrow$ P (t) = W = N m/s



Définition de a (h) :

La section d'eau a (h) varié suivant la topographie du terrain généralenent varié selon un développement dont les constantes sont relatives pour chaque retenue .

$$a\ (h) = a_o + a_1\ h + a\ 2\ h^2 + \dots + a_h\ h^n + \dots$$

d'où $$a\ (h) = \sum_{i=0}^{i=h} a_i\ h^i$$

Donc a (h) est une surface

$\frac{dh}{dt}$ est la définition d'une vitesse alors :

$$a\ (h)\ \frac{dh}{dt} = V.\ A = \text{débit}\ [\ m3/s\ ]$$

Z (Q) = k Q c'est une proportionnelle au débit passant dans les turbines.

$DH = \beta\ Q^n$ suivant les valeurs données à n on traitera le problème mais souvent d'ordre général.

Ainsi l'équation générale du processus énérgétique à un sens .

REMARQUE :

Dans cette équation q(t) sera étudié séparément, mais sera pris comme constante dans les différents cas particuliers que nous allons étudier.

.../..

CHAPITRE II.

-o- CONSIDERATION HYDROLOGIQUE -o-

REGIME HYDRAULIQUE :

La connaissance des régimes hydrauliques et d'ordre statistique . Pour pouvoir instaurer un service deprévision sur un bassin, il faut commencer par rassembler toutes les données statistiques que l'on possède. Le comportement futur d'un cours d'eau pourra d'autant mieux se prévoir que son comportement dans le passé sera mieux connu.

A cette effet, il existe sur des bassins versants près d'une centaines de station pour la mesure de la pluie tombée à l'aide de pluviomètres et d'autre part pour le jaugeage des débits , ces derniers étant relevés tous les jours .

En partant de ces statistiques, les spécialistes ont établi des lois prévisionnelles basées sur les probabilités et les corrélations afin de prédéterminer si possible quels seront les comportements des cours d'eau, compte - tenu des comportements passés et présents, ce qui apporterait des renseignements précieux à l'exploitation des centrales hydroélectriques.

Prédétermination des courbes de débits :

Pour l'établissement d'une centrale , il est nécessaire comme il est déjà cité de connaître le régime hydraulique du cours d'eau capté.

.../..

Si l'on ne dispose pas immédiatement des relevés statistiques faits à l'emplacement précis de la prise on peut prédéterminer le régime probable par analogie avec des relevés faits dans des conditions analogiques de climats et de situation de terrain.

On conçoit que dans une certaine limite on puisse étendre les statistiques relevées et un point à un autre point de même cours d'eau , ou d'un cours d'eau d'un bassin versant voisin , par simple proportion de la superficie des bassins versants. Les mesures pluviométriques donneront également des indications comparatives intéressantes.

Détermination de q (t) et rappel statistique .

Dans la nature q (t) (apports naturels du cours d'eau) est variable avec le temps comme nous l'avons expliciter plus haut avec les relevées statistiques on est amené à tracer l'hystogramme des débits pour une période d'une année en général.

L'allure des débits en fonction du temps se rapproche des distributions comme la distribution gaussienne etc... ; ainsi on peut définir une variable normée t_i (temps), variable certaine dont on connait la moyenne $\bar{t}$, l'écart type σ_t , on définit une nouvelle variable

$$T = \frac{t_i - \bar{t}}{\sigma_t}$$

T est dite variable normée avec les propriétés suivantes :

- la moyenne arithmétique $\bar{T}$ est nulle .
- L'écart type σ_t est égal à l'unité $\sigma_t = 1$

$$T = \frac{t - E\left\{ t \right\}}{\sigma\left\{ t \right\}}$$

$E\left\{ t \right\}$ = espérance mathématique .

.../..

Rappelons que la loi normale N (m, σ) à une fonction de distribution f (x)

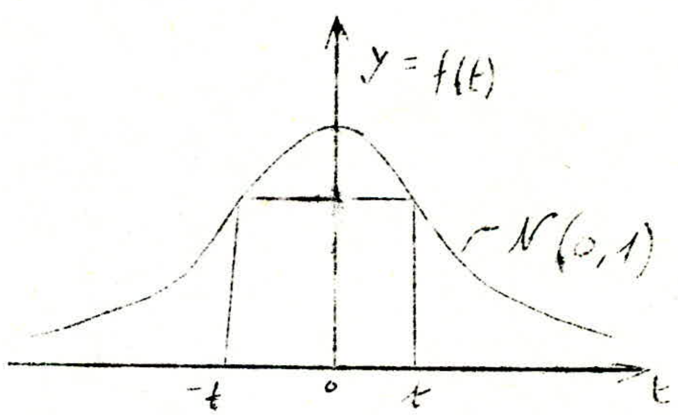
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \text{ expo } \left[- \frac{x - \bar{x}}{2\,\sigma^2} \right]$$

centréen elle devient :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ expo } \left[- \frac{t^2}{2} \right] \text{ avec } t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

<u>REMARQUE</u> :

f (t) = f (- t) cette nouvelle fonction est symétrique

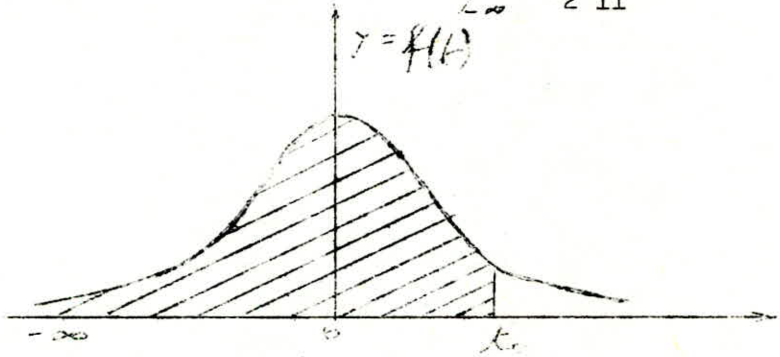


<u>Fonction intégrale</u> Π (t) de la loi N (m, σ) réduite N (0_1)

En intégrant la fonction f(t) , densité de probalités, on définit la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite :

.../..

$$\Pi(t^o) = \int_{-\infty}^{t_o} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{t_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$



On démontre que $\int f(t)\,dt = 1$

L'aire comprise entre la courbe N (0,1) et l'axe des temps t est égale à l'unité .

Alors les probabilité pour un mois donné de l'année (une date donnée) est :

Prob $(T < t_o) = \Pi(t_o)$ ou T est la variable T(0,1)

<u>EXEMPLE</u> :

$$\Pi(0{,}82) = 0{,}7939$$
$$\Rightarrow \Pi(-0{,}82) = 1 - \Pi(0{,}82)$$
$$\Pi(-0{,}82) = 0{,}2061$$

On peut calculer la probabilité associée à un intervalle, en effet la surface $\Pi(t)$, comprise entre ces 2 dates donne la probabilité, pratiquement pour l'hydraulicien il fait des mesures de débits généralement entre 2 dates finies précises alors :

soit: $\boxed{\Pi(t) = \Pi(t_b) - \Pi(t_a)}$

c'est à dire : $\Pi(t) = \text{Prob}\ (t_a \leqslant T \leqslant t_b)$

.../..

EXEMPLE :

$$\left.\begin{array}{l} t_a = -2 \\ t_b = 2 \end{array}\right) \quad \text{Pour} \quad -2 < t < 2$$

Alors la probabilité :

$$\text{Prob } (-2 \leq t < 2) = \Pi(t) = \Pi(2) - \Pi(-2)$$

d'où $\boxed{\Pi(t) = 0{,}9545}$

Soit 95,45 % de la surface totale, le plus souvent nous aurons à faire des ajustements .

Prenons un exemple théorique pour voir comment peut on schématiser la distribution d'un cours d'eau .

TABLEAU :

q (t)	0	4	9	31	75	183	204	157	97	40	12	3	0
t	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3

$$\sum_{i=1}^{i=n} q_i \ t_i = 2123$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} q_i \ t_i^2 = 5556$$

Premièrement, on trace l'histogramme puis on détermine les paramètres de la loi normale qui sont m et σ on estime la moyenne arithmétique, σ'^2 par la quantité s^2 qui est un estimateur convergent et sans biais de ^{2} tel que :

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma'^2$$

.../..

Dans notre exemple , la moyenne empirique est $\bar{t}$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i} = \frac{2123}{815} = 2,604$$

La variance empirique σ'^2 est déterminée

$$\sigma'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{n} q_i} - \bar{t}^2 = \frac{5556}{815} - (2,604)^2$$

$$\sigma'^2 = 0,0364$$

$$\boxed{\sigma' = 0,1908}$$

D'où :
$$s^2 = \frac{n}{n-1}\,\sigma'^2 = \frac{815}{815-1}\,\sigma'^2$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i - 1}\,\sigma'^2 = \frac{815}{815-1}\,(0,0364)$$

$$s^2 = 0,0364 \implies \underline{s = 0,19}$$

Finalement on définit une loi normale avec :

$m = 2,6$; $\sigma = 0,19$ c'est à dire :

$$\boxed{N(m, \sigma) = N(2,6\ ;\ 0,19)}$$

.../..

En manipulant ainsi les données hydraugraphiques du cours d'eau alimentant la retenue pour une période T on estime un $q(t)$ constant qu'on déterminera par ce procédé probabiliste .

Donc l'équation énergétique :

$$\left(q(t) - a(h) \frac{dh}{dt} \right) \left(h - Z(q) - DH \right) = P(t)$$

dont $q(t)$ est un paramètre important sera pris comme constante pour une période de fonctionnement .

$P(t)$ est aussi considéré comme constante puisque c'est notre première hypothèse .

-=-=-ooOoo-=-=-

CHAPITRE = III. -

PROCESSUS ENERGETIQUE AVEC P (t) = CONSTANTE

Si on impose à une centrale hydroélectrique une puissance constante correspondant à la puissance garantie, l'exploitation des réserves des retenues et des apports naturels dépend dans ce cas, des autres paramètres énergétiques à savoir Q, Z (q) ; DH , suivant les différents cas que nous traiterons, nous calculerons le temps de fonctionnement suivant les hyposthèses considérées.

Cas où q (t) est une constante :

A cette hypothèse, nous allons simplifier la complexité de l'équation en considérant $Z(q) = DH = 0$. Ce cas où $q(t) = Cte$ est simplement justifié d'après le premier chapitre, par le calcul des probabilités. En effet, on accorde plus ou moins de chance d'avoir un certain débit du court d'eau selon les saisons plus ou moins humides.

Ainsi l'équation énergétique (1-1) prend la forme :

$$\left(q - a(h) \frac{dh}{dt} \right) h = P \qquad (3\text{-}1)$$

TEMPS DE FONCTIONNEMENT :

Sous cette forme simplifiée, on peut calculer le temps de fonctionnement en procédant à l'intégration de cette équation différentielle.

Multiplions les deux membres de l'équation (3 - 1) par dt; on obtient :

$$h\,q\,dt - h\,a(h)\,dh = P\,dt$$

.../..

mettons les termes dt en facteur :

$$dt\ (hq - P) = h\ a(h)\ dh$$

si $hq - P \neq 0$, on divise les deux membres par $hq - P$

$$dt = \frac{h\ a(h)\ dh}{hq - P}$$

Posons $\frac{P}{q} = hp$; on définit cette hauteur caractéristique de la retenue en fonction de son débit d'alimentation et la puissance installée bien entendu, elle est en réalité variable quant $g(t)$ est variable ou $P(t)$ varie aussi, pour plus de comodité dans les calculs ce paramètre nouveau parait s'imposer mais sous forme constante dans cette étude d'où :

$$\int dt = \int \frac{a(h)\ hdh}{hq - P} = \int \frac{a\ (h)\ hdh}{hq - h_p\ q}$$

$$\int dt = \frac{1}{q} \int \frac{a(h)\ hdh}{h - h_p} \qquad (3-2)$$

Pour la section d'eau nous prendrons la série :

$a\ (h) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i\ h^i$ jusqu'au terme de degré 2 c'est à dire : a loi parabolique

$$a\ (h) = a_o + a_1\ h + a_2\ h^2 \qquad (3-3)$$

d'où :

$$\int dt = \frac{1}{q} \int \frac{(a_o hd_1 h + a_2\ h)\ hdh}{h - h_p}$$

$$q\ t = \int \frac{a_o h\ dh}{h - h_p} + \int \frac{a_1 h^2\ dh}{h - h_p} + \int \frac{a_2\ h^3\ dh}{h - h_p}$$

on calcule les trois intégrales séparément en donnant des indices

.../..

provisoires I_1 ; I_2 et I_3 respectivement :

$$I_1 = \int \frac{a_0\, h\, dh}{h - h_p} \quad ; \quad I_2 = \int \frac{a_1\, h^2\, dh}{h - h_p} \quad ; \quad I_3 = \int \frac{a_2\, h^3\, dh}{h - h_p}$$

Avec un changement de variable en posant : $u = h - h_p$ d'où

$dh = du$, on obtient après intégration :

$$I_1 = a_o (u + \ln u) + c_1$$

$$I_2 = a_1 \left(\frac{u^2}{2} + 2\, u\, h_p + h_p \ln u \right) + c_2$$

$$I_3 = a_2 \left(\frac{u^3}{3} + \frac{3}{2} u^2 h_p + 3 h_p^2 + h_p^3 \ln u \right) + c_3$$

en remplaçant u par sa valeur $h - h_p$ on obtient :

$$q\, t = q_2 \left(\frac{h - h_p)^3}{3} + (a_1 + 3_{q_2} h_p) \left(\frac{h - h_p}{2} \right)^2 \qquad (3 - 4)$$

$$+ (a_o + 2\, a_1 h_p + a_2 h_p^2) (h - h_p) + (a_o + a_1 h_p + a_2 h_p^2) \ln (h - h_p)$$

La constante d'intégration est déterminée aux conditions limités. C'est à dire en intégrant l'équation (3 - 1) entre les bornes :

$$q \int dt = \int \frac{a\,(h)\, hdh}{h - h_p}$$

L'équation (3 - 4) devient finalement avec pour :

$$t = 0 \ ; \quad h = h_o$$

$$t = T \ ; \quad h = h_T$$

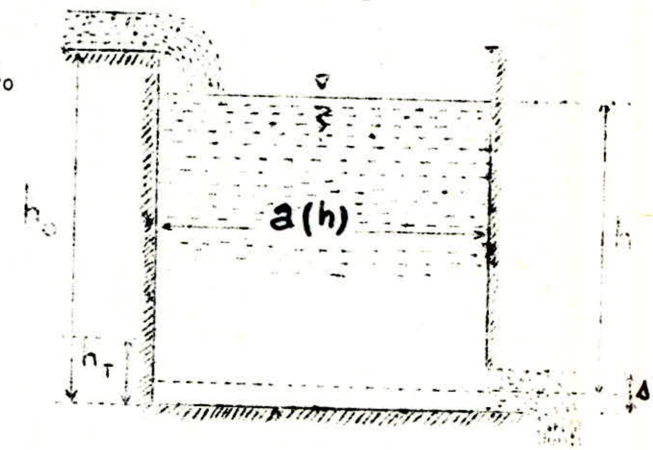
$$qT = a_2 \frac{h_T^3 - h_o^3}{3} + (a_1 + a_2 h_p) \frac{h_T^2 - h_o^2}{2} + (a_o + a_1 h_p + a_2 h_p^2) x (h_T - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_T}{h_p - h_o}) \qquad (4 - 5)$$

q T : volume totale d'eau dépensé .

.../..

EXEMPLE :

Prenons un cas tout à fait théorique réalisable uniquement au laboratoire soit une cuve de section circulaire ou rectangulaire munie d'une vanne de fond et alimentée par un débit q constant :



$$a(h) = a_o$$

d'où :

$$Q = q - a(h) \frac{dh}{dt}$$

$$Q = q - a_o \frac{dh}{dt}$$

léquation (3 - 5) devient :

$$q\,T = a_o \left(h_T - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_T}{h_p - h_o} \right) \qquad (3-6)$$

Si : $h_T = 0$ afin d'obtenir la puissance maxi (3 - 6) devient :

$$q \frac{T}{a_o} = -h_o + h_p \ln \frac{h_p}{h_p - h_o}$$

Définition du coefficient χ, le rapport $\frac{h_p}{h_o} = \frac{P}{q\,h_o} = \chi$ est un nombre sans dimension , d'après le rôle qu'il joue dans cette équation énergétique, on le définit comme doefficient d'intensité d'accumulation (pouvoir d'accumulation de la retenue) .

.../..

L'équation (3 - 6) prend la forme suivante :

$$\frac{qT}{a_o} = -1 + \chi \ln \frac{\chi}{\chi - 1}$$

$$\boxed{\frac{qT}{a_o} + 1 = \chi \ln \frac{\chi}{\chi - 1}} \qquad (3 - 7)$$

Pour chaque retenue, il correspond un coefficient χ telle que cette équation soit vérifiée :

<u>ANALYSE de χ</u> :

- Domaine de définition :

La fonction ln (logarithmes nipériens) n'est définie que pour les réels positif. C'est à dire dans $\mathbb{R}^+$, (R^+) donc $\ln \frac{\chi}{\chi - 1}$ est défini si et seulement si :

$$\frac{\chi}{\chi - 1} \geqslant 0$$

C'est à dire : $\chi (\chi - 1) \geqslant 0$

C'est une inéquation du second dëgré : $\chi \leq 0$; $\chi \geq 1$

Mathématiquement χ appartient à l'intervalle.

$$\chi \in \left]-\infty ; 0\right] \cup \left[1 ; \infty\right[$$

Mais physiquement χ est un coefficient réel, c'est le rapport de deux hauteurs donc, il serait illogique de considérer χ négatif .

La hauteur d'eau idéale $h_p = \frac{P}{q}$ est telle qu'elle soit

.../..

supérieure de la retenue au début du fonctionnement ce qui est logique d'ailleurs, car si l'on dispose d'une chute h_p suffisante équivalente en eau dans la retenue le problème ne serait pas posé.

si $\chi = 1 = \dfrac{h_p}{h_o} = 1$ d'où concordance avec l'analyse mathématique finalement.

$$\chi \in \mathbb{R}^+ \;/\; \chi \in [1 \,;\, +\infty[\qquad (3-8)$$

METHODE CLASSIQUE :

En considérant ici le volume sortant de la vanne ou de l'orifice; le bassin est toujours ~~est~~ constamment alimenté.

Le plus souvent, la question se trouve encore compliquée par le déversement d'un cours d'eau dans le réservoir étudié .

Si nous désignons par q la dépense constante de ce dernier, nous aurons, en conservant la notation précédante :

$$- a_o \, dh = m \; s \sqrt{2gh} \; - q \, dt \qquad (3-9)$$

m : coefficient de contraction

s : Section de l'orifice .

et c'est en partant de cette équation que l'on arrivera au temps.

Prenons comme exemple le réservoir d'eau alimentant une usine. Nous le supposerons de section constante a_o

Le volume d'eau qui disparait pendant le temps dt est égal au volume d'eau écoulé pendant le même temps, moins celui qui est apporté par le cours d'eau ; c'est ce qui exprimé par l'équation (3-9).

.../..

Désignons par h' la charge sur le centre de gravité G, capable de produire dans l'orifice s, une dépense égal à q . Cela revient à poser :

$$\underline{q = m\, s\, \sqrt{2gh'}} \qquad (3-10)$$

et l'équation précédente peut s'écrire :

$$-\, a_o\, dh = m\, s\, \sqrt{2g}\, \left(\sqrt{h} - \sqrt{h'} \right) dt$$

on en tire :

$$dt = \frac{-\, a_o}{m\, s\, \sqrt{2g}} \times \frac{dh}{\sqrt{h} - \sqrt{h'}} \qquad (3-11)$$

posons :

$$\sqrt{h} - \sqrt{h'} = u \; ; \quad \text{d'où} \quad \sqrt{h} = \sqrt{h'} + u$$

on obtient en différentiant :

$$\frac{dh}{2\sqrt{h}} = d\,u$$

d'où : $dh = 2\, d\,u\, \sqrt{h} = 2\, d\,u\, \left(\sqrt{h'} + u \right)$

En substituant dans l'équation (3 - 11) ; il vient :

$$dt = \frac{-\, a_o}{m\, s\, \sqrt{2g}} \times \frac{2\, d\,u\, \left(\sqrt{h'} + u \right)}{u}$$

C'est à dire :

$$dt = \frac{-\, 2\, a_o}{m\, s\, \sqrt{2g}} \times \left(\sqrt{h'} \times \frac{du}{u} + d\,u \right)$$

.../..

Lorsque la charge passe de la valeur h_o à la valeur h_T , on obtient l'intégrale :

$$t = \frac{2\, a_o}{m\, s\, \sqrt{2g}} \int_{h_o}^{h_T} \left(\sqrt{h'} \times \frac{du}{u} + d\,u \right)$$

Interversissons les limites pour avoir une valeur positive , il vient :

$$t = \frac{2\, a_o}{m\, s\, \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h'} \times \ln \frac{h_o}{h_T} + u_o + u_T \right)$$

et en remplaçant u par sa valeur ,

$$t = \frac{2\, a_o}{m\, s\, \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h'} \ln \frac{\sqrt{h_o} - \sqrt{h'}}{\sqrt{h_T} - \sqrt{h'}} + \sqrt{h_o} - \sqrt{h_T} \right) \quad (3\text{-}12)$$

Cette formule permet de calculer pendant combien de temps le récepteur (turbine) pourra marcher à partir d'une hauteur h_o qui correspond au remplissage pendant la nuit, connaissant d'autre part, le minimum de charge h_T , il suffit de porter dans l'expression (3 - 12) la valeur de $\sqrt{h'}$; tirée de la relation (3 - 10).

$$\sqrt{h'} = \frac{q}{m\, s\, \sqrt{2g}}$$

ce qui donne :

$$t = \frac{2\, a_o}{m\, s\, \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_o} - \sqrt{h_T} \right) + \frac{2\, a_o\, q}{m^2\, s^2\, 2g} \ln \frac{m\, s\, \sqrt{2g\, h_o} - q}{m\, s\, \sqrt{2\, g\, h_T} - q} \quad (3\text{-}12)$$

..../..

REMARQUE :

Lorsque la charge variable est devenue h' il est évident que le niveau reste stationnaire, puisque la dépense de l'orifice est égale à celle du déversoir ; c'est donc une limite et la formule (3-12) nous donne bien, pour $h_T = h'$

$$t = \infty$$

EXEMPLE NUMERIQUE :

Une caisse en tôle de un mètre de largeur sur deux mètres de longueur, contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 0,80 m. on peut la vider au moyen d'un orifice en mince paroi pratiqué dans la face inférieure . Sachant que, cet orifice est circulaire et à 40 millimètres de diamètre, on demande au bout de combien de temps la hauteur de l'eau dans le réservoir sera de 0,20 m seulement ?

$$a_o = 2 \times 1 = 2 \text{ m2} \; ; \; m = 0{,}62 \; ; \; s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\overline{0{,}04}^2}{1{,}273}$$

la formule (3 - 12) bis

$$t = \frac{2 \times 2}{0{,}62 \times \frac{\overline{0{,}04}^2}{1{,}273} \sqrt{19{,}62}} (\sqrt{0{,}8} - \sqrt{0{,}2}) =$$

$$t = \frac{1{,}273}{0{,}62 \times 0{,}0004 \times 4{,}43} (0{,}894 - 0{,}447)$$

C'est à dire :

$$t = \frac{1{,}273 \times 0{,}447}{0{,}0011} = 518 \text{ s}$$

$$t = 8\text{mn } 38 \text{ sc.}$$

.../..

La puissance fournie :

$$q = 0 \quad ; \quad - a_o \frac{dh}{dt} h = P$$

d'où :

$$a_o \, hdh = Pdt$$

$$Pt = - a_o \int hdh = \frac{h^2}{2} a_o \Big|_{h_T}^{h_o}$$

$$Pt = \frac{2}{2} \left[(0,8)^2 - (0,2)^2 \right] = 0,6 \text{ m3}$$

$$t = 518 \text{ s} \qquad P = \frac{0,6}{518}$$

$$\underline{P = 1,1583 \; 10^{-3} \text{ N m/s}}$$

-=-ooOoo-=-

.../..

CAS OU Z (Q) EST DIFFERENT DE ZERO :

L'équation (3 - 1) devient :

$$\left[q - a \frac{dh}{dt} \right] \left[h - Z(Q) \right] = P(t)$$

$\left[q - a \frac{dh}{dt} \right] = Q$ alors sa forme devient :

$$Q \left[h - Z(Q) \right] = P$$

Si $Z(q) = k\,Q$ k étant un coefficient quelconque alors (3 - 1) : devient :

$$\left[q - a(h) \frac{dh}{dt} \right] \left[h - k \left(q - a(h) \frac{dh}{dt} \right) \right] = P \qquad (3\text{-}14)$$

d'où avec : $P = h_p\, q$

$$Z = k \left[q - a(h) \frac{dh}{dt} \right] = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4\,kp}}{2}$$

En effet en développant (3 - 14) on constate que c'est une forme d'équation du second degré .

Pour la station hydroélectrique le signe (-) convient tandis que le signe (+) convient pour une station de pompage.

Désignons $kq = Z_q$, c'est à dire que Z_q est la côte du bief aval pour le débit q

$$4\,k\,P = 4\,k\,q \frac{P}{q} = \quad 4\,k\,P = 4\,Z_q\,h_p \;;\quad h_p = \frac{P}{q}$$

d'où après simplification le temps élémentaire dt est :

$$dt = \frac{2\,k\,a(h)\,dh}{2\,Z_q - \left(h \pm \sqrt{h^2 - 4\,Z_q\,h_p} \right.} \qquad (3 - 15)$$

.../..

Pour l'intégration :

$$h \pm \sqrt{h^2-4\,Z_q\,h_p} = 2\,Z$$ pour notre cas ce qui

donne $h = \dfrac{Z^2 + Z_q\,h_p}{Z}$

En différentiant :

$$dh = \frac{Z^2 - Z_q\,h_p}{Z^2}\,d\,Z$$

d'où :

$$t = \int_{Z_o}^{Z} \frac{k\,a(Z)\,(\,Z^2 - Z_q\,h_p\,)}{(\,Z_q - Z\,)\,Z^2}\,dZ \qquad (\,3 - 16\,)$$

en remplacement h dans (3 - 15) par sa valeur en fonction de Z

a (h) il convient aussi de l'exprimer en fonction de Z tel que a (h) = a(Z) pour la forme quadratique des aires .

$$a\,(h) = a_o + a_1 h + a_2\,h^2$$

$$= a\,(Z) = a_o + a_1 \frac{Z^2 + Z_q\,h_p}{Z} + a_2 \left(\frac{Z^2 + Z_q\,h_p}{Z}\right)^2$$

Après l'intégration on obtient une forme :

$$qt = a_o\,D_o + a_1\,D_1 + a_2\,D_2 \qquad (\,3 - 17\,)$$

Avec :

$$D_o = Z_q\,h_p\left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_o}\right) + h_p \ln \frac{Z_o(\,Z - Z_q)}{Z\,(Z_0 - Z_a\,)} - Z_q \ln \frac{Z - Z_q}{Z_o - Z_q}$$

.../..

$$D_1 = k \int \left(\frac{Z^2+Z_q h_p}{Z} \right) \frac{\left(Z^2 - Z_q h_p \right)}{\left(Z_q - Z \right) Z^2} \, dZ$$

$$D_2 = k \int \frac{\left(Z^2 - Z_q h_p\right)}{\left(Z_q - Z\right) Z^2} \times \left(\frac{Z^2 + Z_q h_p}{Z} \right)^2 dZ$$

Nous allons nous arrêter simplement a D_o car nous élaborons au chapitre IV une méthode de simplification de la forme des retenues à tel point d'obtenir une loi des aires constantes pour la retenue fictive. Donc cette anticipation sera justifiée par un exemple numérique .

Donc nous écrivons l'équation (3 -17) sous la forme :

$$\frac{qt}{a_o} = Z_q h_p \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_o}\right) + h_p \ln \frac{Z_o \left(Z - Z_q\right)}{Z \left(Z_o - Z_q\right)} - Z_q \ln \frac{Z_q - Z}{Z_q - Z_o}$$

Posons :

$$P Z_q \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_o} \right) + P \ln \frac{Z_o \left(Z - Z_q \right)}{Z \left(Z_o - Z_q \right)} = \frac{q^2 t}{a_o} + q Z_q \ln \frac{Z_q - Z}{Z_q - Z_o}$$

$$P \left[Z_q \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_o} \right) + \ln \frac{Z_o (Z - Z_q)}{Z \left(Z_o - Z_q \right)} \right] = \frac{q^2 t}{a_o} + Z_q \, q \ln \frac{Z_q - Z}{Z_q - Z_o}$$

On peut déterminer si on pose $\frac{Z_q}{Z_o} = \Psi$ une fonction :

$P = f\,(\Psi)$

Mais : $Z = f(t)$ et $Z/Z_q = f\,(t/T)$

.../..

nous paraissant les fonctions les plus intéressantes.

Pour former la puissance masimum (pour le cas qT= aho avec a = Cte) il suffit de prendre :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dh} = o \\ \frac{d\,h_p}{dh} = o \end{array}\right)$$

les valeurs données par ces dérnières déterminent la puissance maximum .

$$\boxed{P_{Max} = \left\{ \left(\frac{dP}{dh} = o \right) \right\} U \left\{ \left(\frac{dh_p}{dh} = o \right) \right\}}$$

-=-=-ooOoo-=-=-

.../..

CHAPITRE IV.

-=-0-=-

-o- SIMPLIFICATION DE LA FORME DES RETENUES -o-

DETERMINATION DE LA CAPACITE DES RETENUES. -

Le problème à résoudre par les retenues est donc en générale de recevoir un débit variable et de fournir un autre débit variable (Quelquefois recevoir un débit constant et fournir un débit variable : c'est le cas d'une station de pompage).

Dans chaque cas, sa capacité doit être telle qu'elle ne soit jamais ni complètement vide, ni complètement pleine .

Une des méthodes pour calculer la capacité est celle dite des débits classés. Soit, en fonction du temps, figure (1 a) la courbe des débits qui entre Q_e et celui des débits qui sortent Q_s si la retenue a bien joué son rôle toute l'eau arrivée sera sortie au bout du temps fixé pour la régularisation (plusieurs années, un an , un jour ... suivant le cas) . C'est dire que le débit moyen Q_m pendant ce temps T est le même pour les 2 courbes, mais on ne peut rien tirer directement , de la connaissance des surfaces au-dessus et au - dessous de l'horizontale de ce débit moyen .

Mais traçons, figure (1b) les courbes intégrales des débits Q_e et Q_s et Q_m . Cette dernière est une droite suivant l'hypothèse faite de la même de Q_m pour les courbes Q_e et Q_s si les 3 courbes intégrales commencent à l'origine, elles ont la même ordonnées finale au temps T .

Construisons la courbe de ces différences d'ordonnées des deux intégrales de Q_e et Q_s

.../..

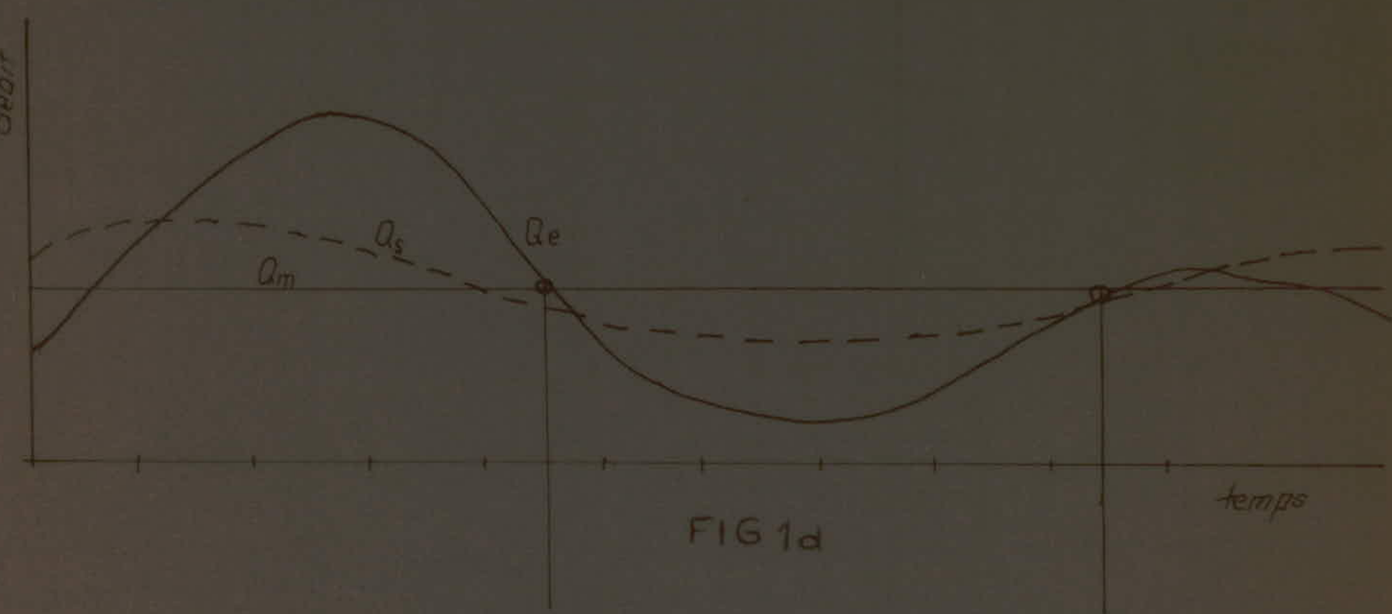


FIG 1d

Capacité des Retenues

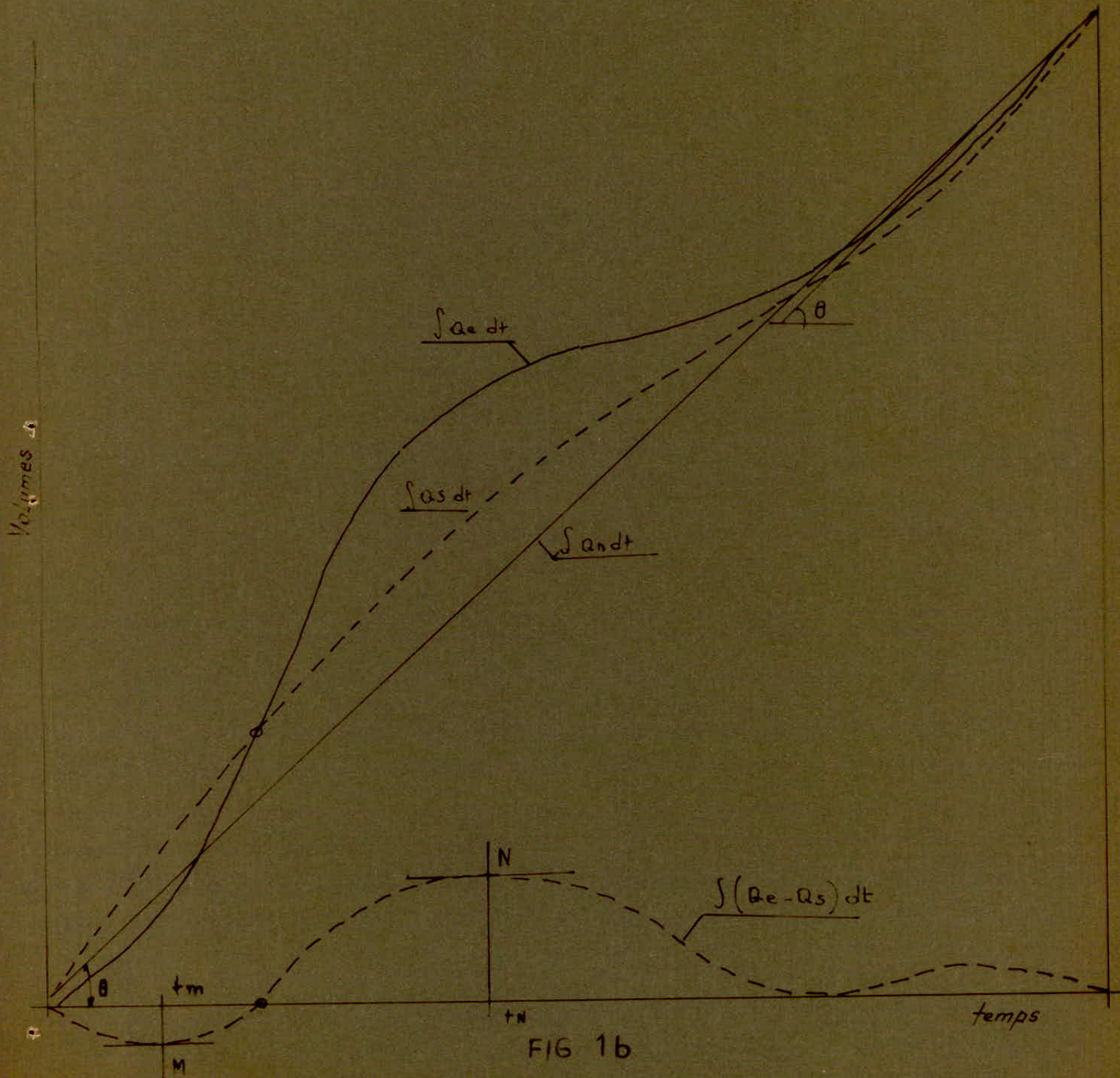


FIG 1b

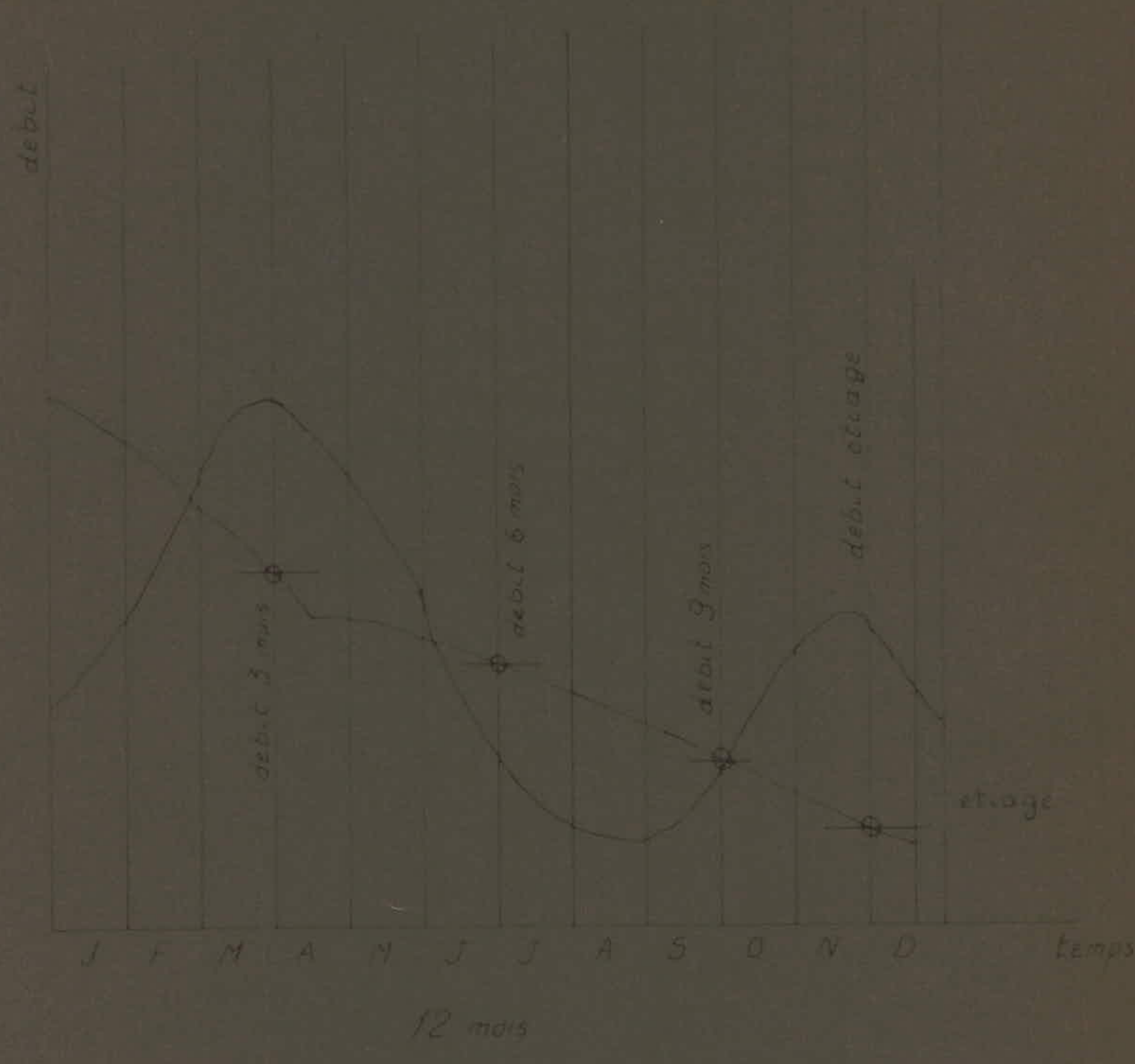


Fig N° 3

COURBE DES DEBITS CLASSES (ou courbe de duree des debits)

$$\int Q_e \, dt - \int Q_s \, dt = \int (Q_e - Q_s) \, dt$$

Les ordonnées de la courbe obtenue donnent le volume fourni à la retenue quand elles sont positives, ou bien quand elles sont négatives. Menons les tangentes horizontales extrêmes à cette courbe, tangentesaux points M et N ; on voit que du temps t_M au temps t_N , la retenue qui était vidée de t_M M se remplit d'abord de cette grandeur puis de t_N N , il faut donc que sa capacité totale V soit :

$$V = t_M M + t_N N$$

REMARQUE :

Lorsque l'une des courbes Q_e et Q_s est l'horizontale Q_m la construction se simplifie ; il est en effet inutile de construire la courbe de la différence des ordonnées car cette courbe existe déjà en ordonnées obliques, l'axes des abscisses étant précisement la droite :

$$\int Q_m \, dt = V, \text{ d'angle } \theta$$

En menant , à la courbe $\int Q_e \, dt$ ou $\int Q_s \, dt$ les tangentes extrêmes parallèles à l'angle θ , la capacité sera encore la somme des ordonnées des 2 points de tangente .

RAPPEL :

$$\left[q\,(t) - a\,(h) \frac{dh}{dt} \right] = Q \text{ passant dans la turbine}$$

$$t \left[q\,(t) - a\,(h) \frac{dh}{dt} \right] = V$$ volume nécessaire pour produire l'énergie (puissance) exigée par la consommation.

.../..

-o- METHODE DE SIMPLIFICATION -o-

INTRODUCTION :

Il serait intéressant de voir comment varie la puissance en remplaçant la loi quadratique des aires ou sections horizontales d'une retenue réelle par une loi linéaire ou constante et cette dernière retenue obtenue par artifice de calcul sera une retenue fictive.

Ce procédé est judicieux pour simplifier le calcul compliqué en analyse que nous avons vu précédement lors du calcul de $qt = V$.

CONDITIONS DE VALIDITE :

Ce remplacement d'une retenue réelle par une autre fictive doit se faire en posant ces deux conditions suivantes.

1°) - La retenue fictive doit contenir le même volume que la retenue réelle.

2°) - La côte du centre de gravité doit être la même aussi bien pour la retenue réelle que fictive.

Ce centre de gravité est en réalité celui de la quantité d'eau contenue dans ces retenues entre 2 côtes bien distinctes qu'on peut appeler côte de fonctionnement ou les limites de la tranche utile.

Cette deuxième condition peut être traduite par l'égalité des moments statiques des volumes de ces dites retenues par rapport au niveau de référence $Z = 0$ au niveau de la mer par exemple.

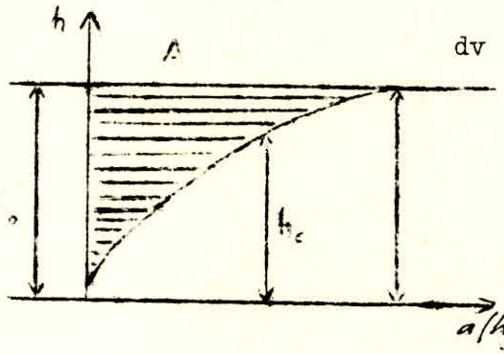
..../...

La demonstration est simple mais d'une utilité très importante .

Le volume d'une retenue dont les sections horizontales suivent une loi parabolique telle que :

$$a\,(h) = a_2\,h^2 \qquad (4-1)$$

volume de la retenue : *simple à determiner*



$$dv = a_2\,h^2\,dh$$

$$V = \int_0^V dv = \int_0^{h_0} a\,(h)\,dh = a_2 \frac{h_o^3}{3}$$

$$\boxed{V = a_2 \frac{h_o^3}{3}} \qquad (4-2)$$

<u>Côte du centre de gravité</u> :

Le centre de gravité d'une telle retenue en réalité d'un tel volume est situé à une côte h_c telle que :

$$\int h\,dv = V h_c$$

or : $\quad V = a_2 \dfrac{h_o^3}{3} \quad ; \quad \displaystyle\int_0^{h_0} h\; a_2\, h^2\, dh = a_2 \frac{h_0^3}{3}\, h_c$

d'où : $\quad a_2 \dfrac{h_o^4}{4} = a_2 \dfrac{h_o^3}{3}\, h_c$

$$\boxed{h_c = \frac{3}{4}\, h_o} \qquad (4-3)$$

.../..

Justification de la première condition . En remplaçant $a\ (h) = a_2\ h^2$ par une loi linéaire par exemple :

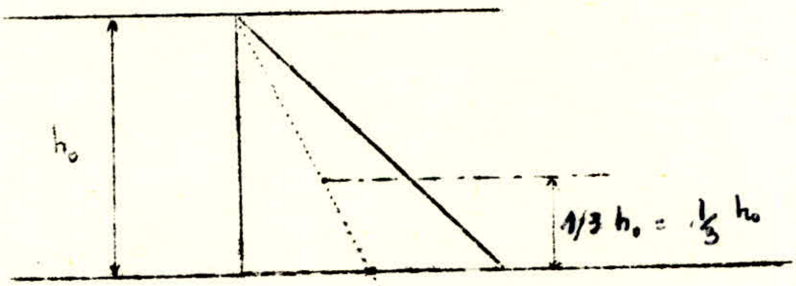
$$\underline{a\ (h) = a_o + a_1\ h}$$

Ce qui impose que le fond de cette retenue fictive soit à une côte h_f .

Cette côte est déterminée par la relation d'expression

$$h_o - h_c = {}^1/_3\ (h_o - h_f)$$

puisque pour un triangle le centre de gravité est situé à $^1/_3$ de sa hauteur en partant de la base. (Voir Figure) .



d'où : $3\ (h_o - h_c) = h_o - h_f$

$$h_f = h_o - 3\ (h_o - h_c)$$

$$\underline{h_f = 3\ h_c - 2\ h_o} \qquad (4 - 4)$$

Comme $h_c = \frac{3}{4}\ h_o$ on obtient :

$$h_f = \frac{3 \cdot 3}{4}\ h_o - 2\ h_o = \frac{9 - 8}{4}\ h_o = \frac{1}{4}\ h_o$$

$$\boxed{h_f = \frac{h_o}{4}} \qquad (4 - 5)$$

.../..

En prenant les deux conditions cités nous aurons deux équations à deux paramètres a_o et a_1 inconnus

$$\int_{h_f}^{h_o} (a_o + a_1 h)\, dh = a_o h \Big|_{h_f}^{h_o} + a_1 \frac{h^2}{2} \Big|_{h_f}^{h_o} = \frac{h_o^3}{3} a_2$$

c'est à dire : $\displaystyle\int_{h_f}^{h_o} (a_o + a_1 h)\, dh = \int_{o}^{h_o} a_2 h^2\, dh$

$$\frac{3}{4} h_o a_o + \frac{15}{32} h_o^2 a_1 = \frac{h_o^3}{3} a_2 = V$$

Egalité des moments statiques :

$$\int_{h_f}^{h_o} (a_o + a_1 h)\, h dh = \int_{o}^{h_o} a_2 h^2\, h dh$$

$$\int_{h_f}^{h_o} h\, (a_o + a_1 h)\, dh = \frac{15}{32} h_o^2 a_o + \frac{21}{64} h_o^3 a_1 = \frac{h_o^4}{4} a_2$$

d'où le système :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{15\, a_o}{32} + \frac{21}{64} h_o a_1 = \frac{h_o^2}{4} a_2 \qquad (4-6) \\ & \frac{3}{4} a_o + \frac{15}{32} h_o a_1 = \frac{1}{3} h_o a_2 \end{aligned} \right.$$

La résolution de ce système est rès facile, on obtient les valeurs respectives des paramètres a_o et a_1 en fonction de a_2 et h_o

$$a_o = f(a_2, h_o) = -\frac{8}{27} a_2 h_o^2 \qquad (4-7)$$

$$a_1 = f(a_2, h_o) = \frac{32}{27} a_2 h_o \qquad (4-8)$$

.../..

Ainsi on établit l'équation de la retenue fictive à loi des aires a (h) linéaire .

$$a(h) = -\frac{8}{27} a_2 h_o^2 + \frac{32}{27} a_2 h_o h$$

$$\boxed{a(h) = \frac{8\, a_2 h_o}{27} \left(4h - h_o \right)} \qquad (4-9)$$

Exemple d'Application :

Trouver la puissance maximale pour une retenue réelle à lai parabolique des aires et remplacer cette retenue par une autre fictive et calculer sa puissance correspondante fictive .

Calculer l'écart existant entre la puissance réelle *reelle* et la puissance fictive :

L'équation des aires $a(h) = a_2 h^2$

$$\text{d'où : } \left(q(t) - a(h) \frac{dh}{dt} \right) h = P(t) \qquad (4-10)$$

nous donne après intégration de cette équation différentielle de l'énergie $q\,T = V$

Admettons que le volume des apports pendant le temps T soit égal au volume de la retenue réelle.

$$dv = a(h)\, dh$$

d'où le volume :

$$V = \int a(h)\, dh \,.$$

.../..

a (h) : étant la section.

dh : élément différentiel de hauteur.

$$V = \int dv = a_2 \frac{h^3}{3} + c$$

$$V \Big/_{o}^{h_o} = V_o = a_2 \frac{h_o^3}{3}$$

$$\boxed{V = a_2 \frac{h_o^3}{3}} \qquad (4 - 11)$$

Comme : $q\,T = V$ Transitivement on déduit que :

$$\boxed{q\,T = a_2 \frac{h_o^3}{3}} \qquad (4 - 12)$$

Remplaçons de nouveau $q\,T$ par l'équation intégrale de l'énergie trouvée au précédent chapitre .

$$q\,T = a_2 \frac{h_T^3 - h_o^3}{3} + (a_1 + a_2 h_p)\frac{h_T^2 - h_o^2}{2} + (a_o + a_1 h_p + a_2 h_p^2) x (h_T - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_T}{h_p - h_o}) \qquad (4 - 13)$$

Mais puisque on intègre entre la côte nulle et h_o alors on pose comme condition d'obtention de puissance maximale $h_T = 0$ ce qui est logique . D'où :

$$q\,T = - a_2 \frac{h_o^3}{3} - (a_1 + a_2 h_p)\frac{h_o^2}{2} + (a_o + a_1 h_p + a_2 h_p^2) x (-h_o + h_p \ln \frac{h_p}{h_p - h_o})$$

comme : $q\,T = a_2 \dfrac{h_o^3}{3}$ alors

$$2\,a_2 \frac{h_o^2}{3} + (a_1 + a_2 h_p)\frac{h_o^2}{2} = (a_o + a_1 h_p + a_2 h_p^2)(- h_o + h_p \ln \frac{h_p}{h_p - h_o})$$

.../..

Nous avons pris dans cette exemple :

$$a(h) = a_2 h^2$$

donc : $a_o = a_1 = 0$

$$\frac{2}{3} + \frac{h_p}{h_o} + \frac{1}{2} = \frac{h_p^2}{h_o^2} \left(\frac{h_p}{h_o} \ln \frac{h_p / h_o}{h_p / h_o - h_o / h_o} \right)$$

Rappelons que nous avons posé : $\frac{h_p}{h_o} = \chi$

D'où :

$$\boxed{2/3 = \chi^2 \left(\chi \ln \frac{\chi}{\chi - 1} - 1 \right) - \frac{\chi}{2}} \quad (4 - 14)$$

$$\boxed{\chi = P / q h_o} \quad (4 - 15)$$

Pour la retenue fictive :

$$a(h) = a_o + a_1 h$$

Pour : $h = h_o$; $a(h) = a_o + a_1 h_o$

En remplaçant a_o , a_1 par leur valeur respective en fonction de : a_2 et h_o on obtient :

$$a(h_o) = -\frac{8}{27} a_2 h_o^2 + \frac{32}{27} h_o^2 a_2$$

Comme : $a_2 = \frac{a}{h_o^2}$; $a(h_o) = 8/9\, a_2 H_o^2 = 8/9\, A$

$$\boxed{A_1 (h_o) = 8/9\, A}$$

.../..

L'équation (14) est résolue suivant la méthode de l'analyse numérique .

Soit la valeur approchée de χ qui vérifie son domaine de validité

$$\chi = 1{,}5795 \qquad (4-16)$$

Calcul de la puissance :

Puisque $\chi = P/q\,h_o$ comme défini .

Ainsi $P(t) = \chi\,q h_o$ exprimé le sens physique de χ tel qu'il représente le coefficient d'intensité d'accumulation de la retenue (pouvoir d'accumulation).

C'est un nombre sans dimension .

$$P(t) = 1{,}5795\; q(t)\; h_o \qquad (4-17)$$

P(t) puissance maximale de la retenue .

Pour la retenue fictive, nous avons démontré que h_f est la côte la plus basse .

Rappelons l'équation (13)

$$qT = a_2 \frac{h_T^3 - h_o^3}{3} + (a_1 + a_2 h_p)\frac{h_T^2 - h_o^2}{2} + (a_2 + a_1 h_p + a_2 h_p^2)(h_T - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_T}{h_p - h_o}$$

Pour la retenue fictive il faut poser : $a(h) = a_o + a_1 h$ d'où l'équation (13) aura la forme :

$$qT = a_1 \frac{h_T^2 - h_o^2}{2} + (a_o + a_1 h_p) (h_T - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_T}{h_p - h_o}$$

.../..

qT = V doit être égal au volume de la retenue réelle c'est à dire

$$qT = a_2 \frac{h_o^3}{3}$$

d'où en remplaçons : a_o et a_1 par leur valeur en fonction de :

$$a_o = f(a_2, h_o)$$

$$a_1 = f(a_2, h_o)$$

c'est à dire que l'expression de :

a (h) deviennent :

$$a = \frac{8\, a_2}{27} h_o (4h - h_o)$$

En intégrant l'équation différentielle on obtient .

$$qT = a_1 \frac{h_T^2 - h_o^2}{2} + (a_o + a_1 h_p)\left(h_T - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_T}{h_p - h_o} \right)$$

Avec : $h_T = \frac{h_o}{4} = h_f$

$$qT = \frac{1}{2} \frac{32}{27} a_2 h_o \left(\frac{h_o^2}{16} - h_o \right) + \left(\frac{32}{27} a_2 h_o h_p - \frac{8}{27} a_2 h_o^2 \right)\left(h_o/4 - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_o/4}{h_p - h_o}\right)$$

$$qT = \frac{h_o^3}{3} = \frac{-15}{27} h_o^3 a_2 + \frac{(32 h_p - 8 h_o)}{27}\left(\frac{h_o}{4} - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_o/4}{h_p - h_o}\right)$$

Division par h_o les membres de l'équation :

$$24 = 8 \left(4 \frac{h_p}{h_o} - 1 \right)\left(\ln \frac{h_p/h_o - 0,5}{h_p/h_o - 1} - 0,75 \right)$$

finalement on obtient avec $X = \frac{h_p}{h_o}$

$$\boxed{(4X - 1)\left(\ln \frac{X - 0,25}{X - 1} - 0,75\right) = 3} \qquad (4-18)$$

.../..

La solution de l'équation (18) voir programme (méthode Newton) .

La valeur de χ est rouvée telle que :

$$\boxed{\chi = 1{,}5706} \qquad (4 - 19)$$

Puissance maximale de la retenue fictive .

$$\boxed{P_{f_m} = 1{,}5706\ q\ h_o}$$

Voyons cependant l'écart entre les puissances :

P_{M_r} et P_{M_f}

$$\frac{P_{f_M}}{P_{r_M}} = \frac{P_r - P_f}{P_r} = \frac{D\chi}{\chi} = \frac{0{,}0089}{1{,}5795}$$

$$D\chi = 1{,}5795 - 1{,}5706 = 0{,}0089$$

$$\frac{D\chi}{\chi} \times 100 = 0{,}56$$

La puissance diminue de : 0,56 %

Nous venons de voir comment on remplace une retenue réelle à loi des aires parabolique par une retenue fictive à loi a(h) linéaire, de nouveau . Cette dernière sera remplacée par une autre retenue fictive d'ordre deux à loi a (h) constante.

Cette nouvelle retenue fictive doit satisfaire aux 2 conditions précedentes étudiées dans le premier cas à savoir l'égalité des volumes et même côte pour le centre de gravité.

.../..

Pour avoir la puissance maximale le fond de cette retenue doit être situé à la côte $h_{f_c} = f\,(h_o)$.

Valeur de h_{f_c} :

Puisque a(h) = constante ; la forme de la retenue est rectangulaire c'est à dire que a(h) est une droite verticale.

Comme $h_c = \frac{3}{4} h_o$, cette condition doit être satisfaite aussi dans le calcul le centre de gravité se trouve à l'intersection des diagonales d'où :

$$\frac{h_o - h_{f_c}}{2} = h_c - h_{f_c}$$

$$h_o - h_{f_c} = 2\,h_c - 2h_{f_c}$$

Avec $h_c = 3/4\ h_o$

$$h_{f_c} = 2\,h_c - h_o = 2\,\frac{3}{4} h_o - h_o = h_o\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{2}\right)$$

$$\boxed{h_{f_c} = \frac{1}{2} h_o} \qquad (4 - 20)$$

Egalité des volumes :

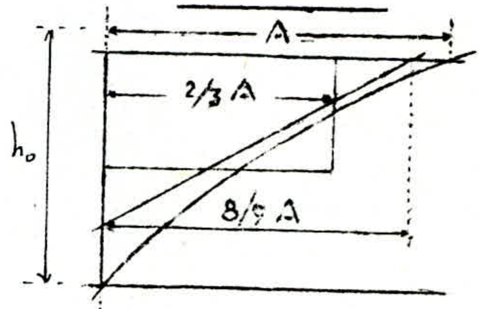
$$V = \int_{\frac{h_o}{2}}^{h_o} a_0\,dh = \int_0^{h_o} a_2\,h^2\,dh = a_2\,\frac{h_o^3}{3}$$

$$a_o\left(h_o - \frac{h_o}{2}\right) = a_o\,\frac{h_o}{2} = a_2\,\frac{h_o^3}{3} \Rightarrow a_o = \frac{2}{3}\,a_2\,h_o^2$$

.../..

Comme : $a_2\, h_o^2 = A$; alors on déduit que $\boxed{a_o = \frac{2}{3}\, A}$

$$a\,(h_o) = \frac{2}{3}\, A \qquad (4-21)$$



Cette dernière équation :

$a_o(h) = \frac{2}{3}\, A = \frac{2}{3}\, a_2\, h_o^2$ traduit que la section de cette retenue fictive constante est équivalente aux deux tiers de l'aire d'une retenue parabolique au niveau le plus supérieur.

La puissance correspondant à cette retenue pendant le fonctionnement à même débit jusqu'au fond ($h_T = \frac{h_o}{2}$) est déterminée par l'équation (13) aménagé à cet égard en (supposant) partant toujours de l'hypothèse que $qT = a2\, \frac{h_o^3}{3}$ égale au volume de la retenue réelle.

$$qT = ao\left(h_T - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_T}{h_p - h_o} \right)$$

Comme : a_o et égal à $\frac{2}{3}\, A$

$$A = a_2\, h_o^2 \qquad qT = a_2\, \frac{h_o^3}{3}$$

d'où !

$$a_2\, \frac{h_o^3}{3} = \frac{2}{3}\, a_2\, h_o^2 \left(\frac{h_o}{2} - h_o + h_p \ln \frac{h_p - h_o/4}{h_p - h_o} \right)$$

.../..

$$h_o = 2 \left(- \frac{h_o}{2} + h_p \ln \frac{h_p - \frac{h_o}{2}}{h_p - h_o} \right)$$

Division par h_o , on obtient :

$$1 = 2 \left(- \frac{1}{2} + \frac{h_p}{h_o} \ln \frac{h_p / h_o - \frac{1}{2}}{h_p / h_o - 1} \right)$$

Après simplification :

$$\boxed{\chi \ln \frac{\chi - 0,5}{\chi - 1} = 1} \qquad (4 - 22)$$

Solution donnant la valeur de : χ (Méthode RAPHSON - NEWTON).

$$\boxed{\chi = 1,5533}$$

La valeur de χ montre que la puissance de cette retenue fictive est inférieure à la puissance correspendant à la retenue réelle :

$$D\chi = 1,5795 - 1,5533 = 0,0262$$

$$\frac{D\chi}{\chi} = \frac{0,0262}{1,5795} = 0,0166 \quad \text{soit : } 1,66 \%$$

Cette erreur de 1,66 % n'altère guère la valeur de la puissance réelle .

Par rapport à celle de la retenue à loi a (h) linéaire

$D\chi = 1,5706 - 1,5533$

$$\underline{D\chi = 0,0173}$$

$$\frac{D\chi}{\chi_2} = \frac{0,0173}{1,5706} = 0,011 \text{ soit : } 1,1 \%$$

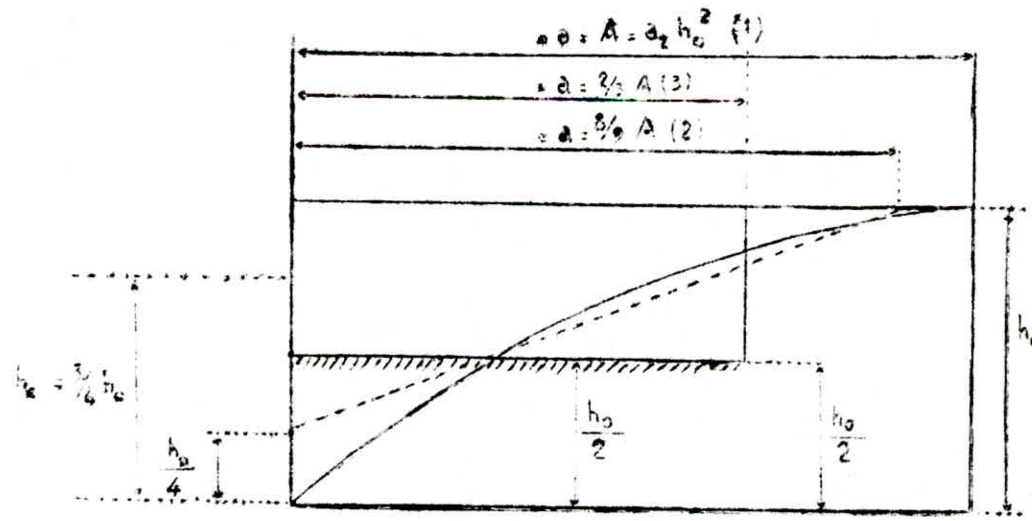
.../..

CONCLUSION :

Cette méthode de simplification apparement trop grossière n'altère guère lå valeur exacte de la puissance. Malheureusement on ne peut pas bien sûr affirmer pour les autres paramètres du processus énergétique comme $Z\ (Q)$ la variation du niveau du bief amont, en effet pour la loi parabolique des aires le niveau du bief amont tombe jusqu'à zéro à la fin du processus , tandis que pour la loi linéaire il n'atteint que la côte $^{h_o}/4$ et $^{h_o}/2$ pourla loi $a\ (h)$ = constante des aires .

Pour suivre graphiquement ce changement regardons les diagrammes des aires des trois types de retenue, représentés ci-dessous.

Ces trois retenues ont les même capacités et possèdent la même position pour les centres de gravité; donc avec ses erreurs d'environ 2 % on conclue qu'elles sont des retenues équivalentes.



1 - $a_1(h) = a_2\ h_o^2 = A$

2 - $a_2(h) = a_o + a_1 h = 8/9\ A$

3 - $a_o(h) = C^{te} = \frac{2}{3}\ A$

-=-=-ooOoo-=-=-

-o- EXEMPLE NUMERIQUE -o-

Nous allons appliquer cette théorie sur exemple afin d'illustrer les différents passages, cette application va se faire sur l'aménagement hydroélectrique de " PERM " (KAMA : URSS), vue que nous n'avons pas pu avoir des données réelles pour des aménagements hydroélectriques d'Algérie.

DONNEES :

1-°) Le temps de fonctionnement des turbines ou de vidange est estimé à 160 jours la puissance du réseau est considérée comme constante . Donc T = 160 jours .

2 -) La retenue a une section à loi a(h) linéaire d'équation :

$$a\,(h) = a_o + a_1 h = -\ 1355{,}75 + 166{,}25\ h$$

3 -) Quant la retenue est pleine sa côte initiale avant le début d u vidange est égale à 108,5 m , on procède à une vidange jusqu'à la côte finale égale à 101,0 m.

4 -) Cette retenue est alimenté par un débit des apports moyen q_m = 300 m3/s.

5 -) A l'aval de l'ouvrage l'eau monte jusqu'à une hauteur de 89,49 m et à partir d'une côte égale à 88,2 m.

CALCUL DES PARAMETRES PRINCIPAUX :

D'après l'équation du processus énergétique :

$$\left(q - a(h)\,\frac{dh}{dt} \right) \left(h - Z(q) \right) = P$$

En premier lieu nous allons prendre Z moyen d'où :

$$Zm = \frac{Z_f + Z_i}{2} = \frac{89{,}49 + 88{,}75}{2} = 89{,}12 \text{ m}$$

$$Zm = 89{,}12 \text{ m}$$

.../..

La loi des aires est linéaire. c'est à dire que l'équation prend la forme :

$$\left(q - (a_o + a_1 h) \frac{dh}{dt} \right) (h - Zm) = P$$

CALCUL DU VOLUME :

$$T = 160 \text{ j soit } T = 13,824\,10^6 \text{ s}$$

d'où le volume d'eau amené

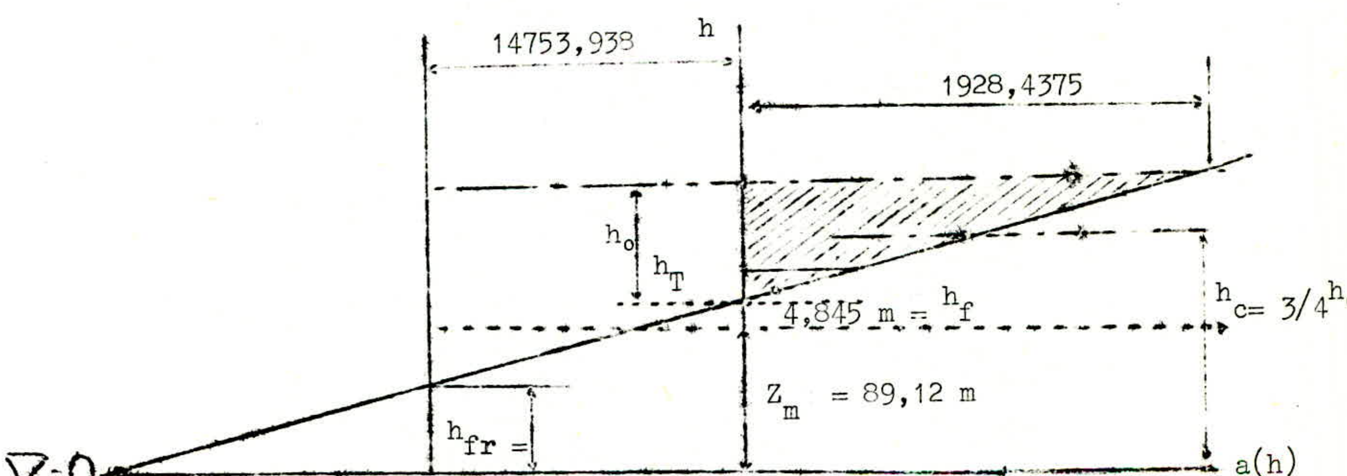
$$V = qT = 300 . 13,824\,10^6 = 41,472\,10^8 \text{ m3}$$

$$\underline{V = 41,472\,10^8 \text{ m3}}$$

$h_o = h_i - Zm = 19,38$ m !
!
$h_T = h_f - Zm = 11,88$!

DETERMINATION DE LA RETENUE :

SCHEMA.



Pour ramener le problème afin qu'on puisse appliquer nos formules établies :

.../..

$a\ (°) = -1355$ m

$a\ (h_o) = -1355 + 166,25x19,75 = 1928,4375\ m^2$

$a\ (h_T) = -1355 + 166,25x11,59 = 558,5375$ m2

$$\underline{a\ (h_o) = 1928,4375 \text{ m2}}$$

$$\underline{a\ (h_T) = 558,5375 \text{ m2}}$$

$$h\ f = 4,845$$

$$h_c = {}^3/4\ h_o = {}^3/4\ \ 19,38 = 14,536\text{m}$$

$$\underline{h_c = 14,536 \text{ m}}$$

$$h_f = \frac{h_o}{4} = 4,8452 \text{ m}$$

Prenons χ correspondant à la retenue ayant la loi des aires linéaire

$$a\ (h) = a_o \cdot a_1 h$$

d'où :

$$\chi = 1,5706$$

ainsi :

$P = \chi\, q h_o$ d'après la méthode

$$P = 1,5706.300.19,38$$

$$\underline{P = 9,13147 \text{ KW}}$$

<u>RETENUE FICTIVE</u> :

Remplaçons cette retenue par une autre fictive de loi des aires A_o = constante .

1) Le centre de gravité doit être le même donc :

$$h_c = \frac{3\ h_o}{4} = 14,536 \text{ m}$$

.../..

2) Egalité des volumes :

$$\int_{h_x}^{h_o} A_o \, dh = \int_{h_x}^{h_o} (a_o + a_1 h) \, dh$$

Mais avant d'intégrer il faut déterminer la côte du fond de cette retenue fictive .

$$h_o - h_c = \frac{h_0 - h_x}{2}$$

$$2h_o - 2h_c - h_o = - h_x$$

$$= h_x = 2h_c + h_o - 2h_o = 2h_c - h_o$$

$$h_x = \tfrac{1}{2} h_o = 9{,}69 \text{ m}$$

Donc le fond est situé à 9,69 m d'altitude /Zm

$$A_o(19{,}38 - 9{,}69) = a_o(19{,}38 - 4{,}845) + \frac{a_1}{2} \left(19{,}38 \right)^2 - (4{,}845)^2)$$

$$A_o \; 9{,}69 = a_o 14{,}535 + \frac{a_1}{2} \left(375{,}58 - 23{,}474 \right)$$

$$A_o = 1355{,}75 \times 14{,}535 =$$

$$= - 19\,705{,}896 + 29\,269{,}177 =$$

$$\underline{A_o = 9563{,}35}$$

$$P = 1{,}5533 \times q \, h_o$$

$$P_t = 9{,}0308 \text{ KW}$$

$$\underline{DP} = 100 \frac{P_r - P_t}{P_r} = \frac{9{,}13147 - 9{,}0308}{9{,}13147} \times 100 =$$

$$\underline{DP = 1{,}103 \%}$$

l'erreur est négligeable.

-=-0-=-

SUPLEMENT (Après le Chap. IV)

-o- EXEMPLE -o-

Dans l'équation (3-1), il est commode de tenir compte de la forme avec $a(h) = Cte$, c'est à dire :

$$q\,\frac{t}{a_o} = h_T - h_o + h_P \ln \frac{h_P - h_T}{h_P - h_o}$$

Puisque : $P = \chi\, q h_o = Cte$

en divisant par h_o tel que $\frac{ht}{h_o} = \alpha$ on obtient :

$$\alpha - 1 + \chi \ln \frac{\chi - \alpha}{\chi - 1} = \frac{q\ t}{a_o h_o} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{h_P}{h_o} = \frac{P}{q h_o}$$

ou bien

$$\alpha + \chi \ln \frac{\chi - \alpha}{\chi - 1} = \frac{qt}{a_o h_o} + 1$$

$$\alpha + \chi \left(\ln (\chi - \alpha) - \ln (\chi - 1) \right) = \frac{qt}{a_o h_o} + 1$$

$$\boxed{\alpha + \chi \ln (\chi - \alpha) = 1 + \frac{qt}{a_o h_o} + \ln (\chi - 1)} \qquad (3 - 13)$$

On peut tracer la courbe $\alpha = f\ (t)$

Si T est le temps de fonctionnement α varie en fonction du rapport $\left(\frac{t}{T} \right)$ d'où $d = T\ (^{t/T})$

$$\alpha = f\ \left(\frac{t}{T} \right)$$

.../..

Pour chaque valeur de χ correspond une courbe $\alpha = T(\frac{t}{T})$

C'est à dire pour :

$$\chi = 1,5795$$

$$\chi = 1,5706$$

$$\chi = 1,6533$$

-o- PROCESSUS ENERGETIQUE -o-

Avec $DH \neq 0$ et $P(t) = $ Constante

Nous avons posé que : $DH = B\,Q^n$ suivant la valeur donnée à M l'équation différentielle

$$\left(q - a\frac{dh}{dt} \right) \left(h - DH \right) = P$$

prend une forme différente :

CAS OU n = 1 .

Avec q = 0 , on arrive à obtenir la forme suivante :

$$- a\frac{dh}{dt} h + B\,a^2 \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = P = C\ te$$

Pour $\frac{dh}{dt} = y'$ d'où $h = y$

1) Résolution sans second membre .

$$- ayy' + B\,a^2\,y'^2 = 0$$

si $y' = \frac{dh}{dt}$ est différent de Zéro on peut diviser cette dernière expression par y'

.../..

d'où $-\cancel{a}y + B\,a^2 y' = 0$; divison par a . C'est à dire

$$Bay' = y \text{ ; posons } Ba = K$$

$$K\,y' = y = K\,\frac{dh}{dt} = h$$

$$K\,\frac{dh}{h} = dt$$ après intégration on obtient :

$$K \int \frac{dh}{h} = \int dt$$

$$t = K \ln n + C$$

pour $t = 0$ $\quad K \ln h_o + C = 0$

$$= C = -K \ln h_o$$

Finalement le temps est :

$$\boxed{t = K \ln \frac{h}{h_o}}$$

Cette solution mathématique représente physiquement le début du régime .

d'où $\frac{h}{h_o} = K_V\,\overline{e^t}$

alors : $\boxed{h = h_o\, e^{t/K}}$

<u>Variation de la constante</u> :

$$dh = \frac{h_o}{K}\, e^{t/K}\, dt$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h_o}{K}\, e^{t/K}$$

.../..

d'où :

$$P = - \frac{h_o}{K} e^{t/K} + B a^2 \left(\frac{h_o}{K} \right)^2 1^{2t/K}$$

$$P = \frac{h_o}{K} 1^{t/K} \left(2 h_o/K \, e^{t/K} - 1 \right)$$

$$\boxed{P = \frac{h_o}{K} e^{t/K} \left(a \frac{h_o}{} e^{t/K} - 1 \right)}$$

$$e^{t/K} = A$$

$$= P = \frac{h_o A}{K} (a h_o A - 1)$$

$$P = \frac{h_o^2 A^2}{K} - \frac{h_o A}{K}$$

$$\boxed{h_o A^2 - A - \frac{KP}{h_o} = 0}$$

On voit que c'est une équation du 2° dégré . On peut ainsi en résolvant cette équation déterminer le temps de fonctionnement.

$$d = b^2 - 4 ac = 1 - 4 h_o \cdot \frac{KP}{h_o}$$

$$\boxed{D = 1 - 4 KP}$$

$$A_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 KP}}{2 h_o}$$

$$e^{t/K} = \frac{1 + (1 - 4 KP)^{\frac{1}{2}}}{2 h_o}$$

.../..

$$t = K \ln \left(\frac{1 + (1 - 4\,KP)^{\frac{1}{2}}}{2\,h_o} \right)$$

$$t = K \ln \left(\frac{1 - (1 - 4\,KP)^{\frac{1}{2}}}{2\,h_o} \right)$$

On prend la valeur positive :

Rappelons que $K = Ba$

Avec la solution particulière

$t = K \ln \frac{h}{h_o}$ prenons la définition de :

$$Q = - a \frac{dh}{dt} = - a \frac{h_o}{K} \, 1^{t/K} dt$$

$$Q\,dt = - a \frac{h_o}{K} e^{t/A} dt$$

$$Qt = - a \frac{h_o}{K} K e^{t/K} + c$$

c, est déterminé aux conditions limites, d'où : $qt = \underline{a\,h_o} \left(1 - e^{t/K} \right)$

$$\boxed{Q = \frac{a}{t} h_o \left(1 - e^{t/K}\right)}$$

$$Q = f(t)$$

-=-=ooOoo-=-=-

CHAPITRE . V -

-=-ooOoo-=-

PROCESSUS ENERGETIQUE AVEC P (t) VARIABLE -o-

Etude du processus énérgétique d'un (A H E) par pompage.

PROCESSUS DE TURBINAGE : (Au fil de l'eau)

Prenons les résultats du précédant chapitre concernant la simplification de la forme des retenues, à savoir , de prendre a (h) constante (1) par contre, la puissance électrique varie linéairement tel que :

$$P = P_o + \pounds t \qquad - \ (5 - 2)$$

P_o est la puissance à l'instant $t = 0$

£ est l'accroissement de la puissance entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = T$

$$\pounds = \frac{P_T - P_o}{T} = \frac{P_1}{T}$$

$$\text{et} \quad Q = \left(q - a \frac{dh}{dt} \right) \qquad (5 - 3)$$

P_1 est donc l'accroissement de la puissance pendant le temps T à partir du temps $t = 0$

Si les pertes de charge sont exprimées comme :

$$DH = \beta Q^n$$

.../..

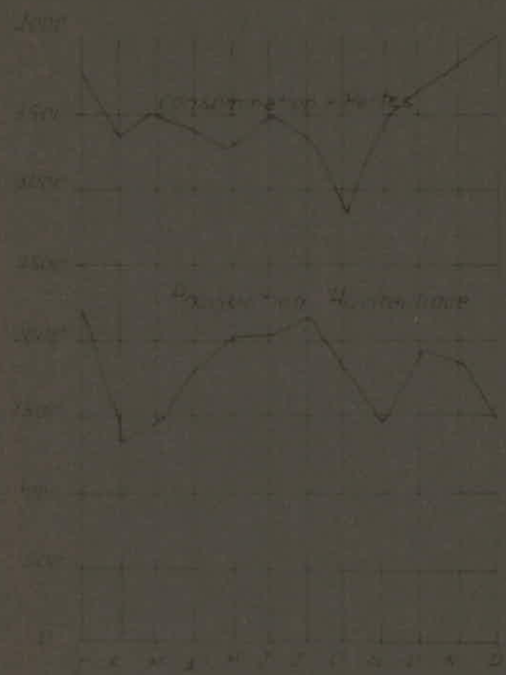


Diagramme annuel

Diagramme journalier de consommation

L'équation énergétique pricipale s'écrit alors :

$$(q - a \frac{dh}{dt}) (h - \beta Q^n) = P_o + \pounds t = P(t) \qquad (5 - 4)$$

En tenant compte de l'équation (5 - 3)

$$Q = (q - a \frac{dh}{dt})$$

on écrit l'équation (5 - 4) sous la forme :

$$Q (h - B Qn) = P_0 + \pounds t \qquad (5 - 5)$$

En écrivant (5 - 5) sous la forme suivante :

$$\pounds t = Qh - \beta Q^{n+1} - P_o \qquad (5 - 6)$$

On voit que t est une fonction de deux paramètres h et Q parconséquant :

$$\underline{\pounds t = Qh - \beta Q^{n+1} - P_o = F (h, Q)} \qquad (5 - 7)$$

La différentielle de cette fonction sera :

$$\pounds dt = \frac{\partial F}{\partial h} dh + \frac{\partial F}{\partial Q} dQ$$ dérivée partielle de $F(h,Q)$

$$\pounds dt = \frac{\partial F}{\partial h} dh = Qdh$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} dQ = hdQ - (n+1) \beta Q^n dQ$$

d'où !

$$\frac{\partial F}{\partial h} dh + \frac{\partial F}{\partial Q} dQ = \pounds dt \left[h - (n+ 1) \beta Q^n \right] dQ + Qdh$$

Mais :

$$q - a \frac{dh}{dt} = Q \qquad (5 - 3)$$

alors $dt = \dfrac{adh}{q - Q}$ ce qui nous donne :

$$\pounds \frac{a\, dh}{q - Q} = Q\, dh + hdQ - (n+1)\, B\, Q^n\, d\, Q = 0$$

et finalement :

$$(\pounds a - Qq + Q^2)\, dh + (Q - q)\, [\, h - B\,(n+1)\, Q^n\,]\, dQ = 0 \qquad (5-8)$$

Les aménagements hydroélectriques d'accumulation par pompage sont caractérisés en général par l'absence du débit des apport $q(t)$ C'est à dire $q(t) = 0$: d'où l'équation (5 - 8) devient :

$$(Q^2 + \pounds\, a)\, dh + [\, Qh - B\,(n+1)\, Q^{n+1}\,]\, dQ = 0 \qquad (5-9)$$

Représentant cette équation sous forme :

$$\mu\, dh + (/\, dQ = 0 \qquad (5-10)$$

Avec

$$\mu = (Q^2 + \pounds a) \qquad (5-11)$$

$$(/ = Qh - \beta\,(n+1)\, Q^{n+1} \qquad (5-12)$$

Pour intégrer cette équation il faut trouver un facteur \$ d'intégration défini tel que :

$$\$ = e^{\int A\, dQ} \qquad (5-13)$$

<u>DEMONSTRATION</u> :

Définition de A

$$A = \frac{\dfrac{\partial (/}{\partial h} - \dfrac{\partial \mu}{\partial Q}}{\mu}$$

$$\frac{\partial (/}{\partial h} = Q \ ; \qquad \frac{\partial \mu}{\partial Q} = 2\, Q \quad \text{d'où :} \qquad A = \frac{-2\, Q + Q}{Q^2 + \pounds a}$$

$$\boxed{A = \frac{-\, Q}{Q^2 + \pounds a}}$$

.../..

$$\boxed{A = \frac{-Q}{Q^2 + \pounds a} = f(Q)}$$

Donc avec ce résultat on peut affirmer que les conditions d'existance de \$ est satisfaite , car A ne dépend que de Q

d' où :

$$\$ = \exp \int \frac{-Q\,d\,Q}{Q^2 + \pounds a}$$

<u>calcul de :</u>

$$\int \frac{-\,QdQ}{Q^2 + \pounds a}$$

Posons : $U = Q^2 + \pounds a \Rightarrow \quad -QdQ = -\frac{1}{2}du$

$$-QdQ = -\tfrac{1}{2}\,d\,(Q^2 + \pounds a)$$

alors :

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{du}{U} = -\tfrac{1}{2}\ln U +$$

$$= \$ = e^{-\frac{1}{2}\ln U}$$

Elle est de la forme $A = e^{\ln c^{-\frac{1}{2}}}$

$$\ln A = \mathrm{Ln}\ c^{-\frac{1}{2}} \times \ln e \text{ , comme } \ln e = 1$$

nous avons :

$$A = c^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\$ = (Q^2 + \pounds a)^{-\frac{1}{2}}} \qquad (5-14)$$

.../..

En multipliant l'équation (5 - 10) par $\$$ on obtient l'équation de forme :

$$M\,dh + N\,dQ = 0 \qquad (5-15)$$

avec : $M = \$\,\mu = (Q^2 + £a)^{\frac{1}{2}} \qquad (5-16)$

$$N = \$\,\nu = \left[Qh - B\,(n+1)\,Q^{n+1} \right] (Q + £a)^{-\frac{1}{2}} \qquad (5-17)$$

La condition d'intégration exige que les dérivées partielles $\frac{\partial M}{\partial Q}$ et $\frac{\partial N}{\partial h}$ soient égales .

<u>DEMONSTRATION</u> :

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = \mu \frac{\partial \$}{\partial Q} + \$ \frac{\partial M}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial \$}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q} \left[e^{\int AdQ} \right] = e^{\int AdQ} \frac{\partial}{\partial Q} \int AdQ$$

$$\frac{\partial \$}{\partial Q} = \$\,A = - \frac{\$Q}{\mu}$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = (Q^2 + £a) - \frac{£Q}{Q^2 + £a} + 2\,£\,Q = \$Q$$

par contre : $\frac{\partial N}{\partial h} = \$ \frac{\partial \nu}{\partial h} + \nu \frac{\partial \$}{\partial h}$

mais $\frac{\partial \$}{\partial h} = 0$; $\$ \frac{\partial \nu}{\partial h} = \$\,Q$

donc : $\boxed{\frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{\partial N}{\partial h}} = \$Q \qquad (5-18)$

.../..

Ces différentielles sont totales.

On peut poser après cette démonstration que :

$$F(h, Q) = \int M dh + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial Q} \int M\, dh \right) dQ = c$$

étant donné que :

$M = (Q^2 + £a)\,\$$ est indépendant de h alors on a :

$$\int M\, dh = Mh \text{ et : } \frac{\partial}{\partial Q}\int Mdh = \frac{\partial}{\partial Q}(Mh) = h\frac{\partial M}{\partial Q} = \$\, h\, Q$$

D'autre part :

$$N - \frac{\partial}{\partial Q}\int Mdh = Q\,(h - B\,(n+1)\,Q^h)\,\$ - \$hQ = -B(n+1)\,Q^{n+1}\$$$

et la fonction cherchée devient après l'intégration :

$$F(h, Q) = Mh - B(n+1)\int Q^{n+1}\$\, dQ = C \qquad (5 - 19)$$

Mais : $\$\, QdQ = dM$

Alors appelons : $J = \int Q^n\, Q\, \$\, d\, Q = \int Q^n dM$

d'où en intégrant par partie on obtient :

$$J = \int Q^n dM = MQ^n - \int MdQ^n = M$$

d'autre part nous avons d'après la définition de M :

$$\int M\, dQ^n = n \int (Q^2 + £a)\, \$\, Q^{h-1}\, dQ\ ,$$

Remplaçons cette dernière expression dans celle de J et on a de nouveau :

$$J = MQ^n - n\int Q\, Q^n\, \$\, d\, Q - n£a \int Q^{n-1\cdot}\, £dQ$$

$$J = MQ^n - n\, J - n\, £a \int Q^{n-1}\, \$\, dQ$$ d'où en mettant J en facteur et après simplification il vient :

$$J = \frac{I}{n+1}\left(n\, Q^n - n£a \int dQ^{n-1}\, dQ \right) \qquad (5 - 20)$$

.../..

En le remplaçant dans l'équation (5 - 19)

$$Mh - B\,(MQ^{n} - n£a \int \$\, Q^{n-1}\, dQ\,) = C$$

$$C = M\,(h - B\,Q^{n}\,) + B\,n\,£a \int \$\, Q^{n-1}\, d\,Q$$

et en éliminant les constantes aléatoires pour t = 0 , lorsque $h = h_o$ et $Q = Q_o$ d'ou $M - M_o$ on obtient finalement l'expression suivante :

$$\underline{M\,(h - B\,Q^{n}) - M_o\,(h_o - B\,Q_o^{n}\,) + B\,n£a \int_{Q_o}^{Q} \$\, Q^{(n-1)} dQ = 0} \quad (5\ -21)$$

Comme $M_o = \$_o\, \mu_o$ est déterminé précédement et $Q = Q_o$ en l'exprimant en fonction de μ et \$ l'équation (5 - 5) prend la forme :

$$Q\,(h - BQ^{n}\,) = P_o + £t = P\,(t) \qquad (\ 5\ -\ 22\ )$$

d'où on a :

$$\boxed{M\,\frac{P}{Q} - M_o\,\frac{P_o}{Q_o} + B\,n£a \int_{Q_o}^{Q} \$\, Q^{(n-1)} dQ = 0} \quad (5\text{-}23)$$

Pour l'instant t = T l'équation devient :

$$M_T\,\frac{P_o + P_1}{Q_T} - M_o\,\frac{P_o}{Q_o} + B\,n\,£a \int_{Q_o}^{Q} \$\, Q^{n-1}\, d\,Q = 0$$

Rappelons que :

$$M = \$\,\mu = (\,Q^{2} = £a\,)^{\frac{1}{2}}$$

On voit que pour obtenir les équations de liaison entre t et h ; (en T et h_T) il faudrait éliminer le débit Q en appliquant l'équation (5 - 3) pour notre cas :

$$Q = q - a\,\frac{dh}{dt}$$

.../..

Avec q = 0 ; il devient que Q soit égal uniquement au débit miroir d'où :

$$Q = a \frac{\frac{h_o - h_T}{T}}{T = t_o - t_T} \qquad (5 - 24)$$

B. - CAS PARTICULIERS :

1) - Les pertes de charge sont considérées négligeables . Avec cette hypothèse il convient de poser : B = 0 ; n = 0 , ainsi l'équation (5 - 2) se transforme en : $Qh = P = P_o + £t$

d'où : $Q = \frac{P}{h}$ et $Q_0 = \frac{P_o}{Q_o}$

L'équation (5 - 21) s'écrit alors :

$$(Q^2 + £a)^{\frac{1}{2}} h - (Q_o^2 + £a)^{\frac{1}{2}} h_o = 0 \text{ oubien :}$$

$$((P/_h)^2 + £q)^{\frac{1}{2}} h = ((P_o/_{h_o})^2 + £q)^{\frac{1}{2}} h_o$$

Après transformation on obtient :

$$\boxed{a \frac{h_o^2 - h_T^2}{2} = P_o t + \frac{£t^2}{2}} \qquad (5 - 25)$$

et encore : $P^2 + £a\, h^2 = Cte$ (5 - 26)

Pour l'instant t = 0 on a $h = h_o$ et $P = P_o$

quand à l'instant t = T

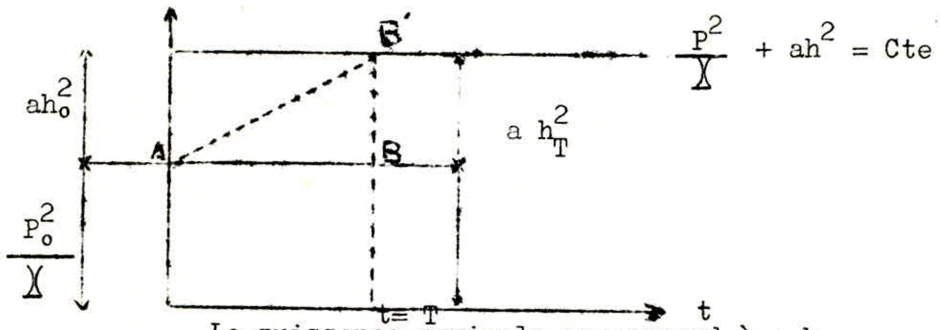
$$h_T^2 = a \frac{h_o^2}{2} - P_o t - \frac{£\, t^2}{2} \quad \text{devient :}$$

$$h_T = \sqrt{h_o^2 - \frac{2\, P_o}{a} T - \frac{£}{a} T^2} \qquad (5 - 27)$$

Mais $P = P_o + £t$ on détermine l'autre expression pour P

$$P_T = \sqrt{P_o^2 + £\,a\,(h_o^2 - h_T^2}$$ (5 - 28)

Cette expression peut être représentée c'est à dire qu'elle détermine d'une façon graphique l'équation (5 ~~6~~ 26)



La puissance maximale correspond à : $h_T = 0$ c'est à dire

$$\boxed{P_{Max} = \sqrt{P_o^2 + £\,a\,h_o^2}}$$

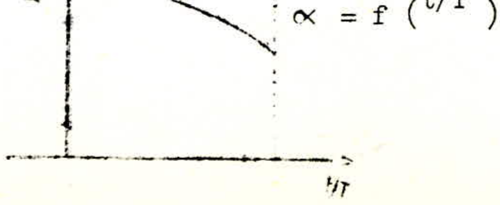
PMax est représentée par la droite AB' , pour tracer la fonction $h = f(t)$ on prend le rapport suivant :

$$\alpha = \frac{h_t}{h_o}$$

L'expression (5-27) en la divisant par h_o prend la forme :

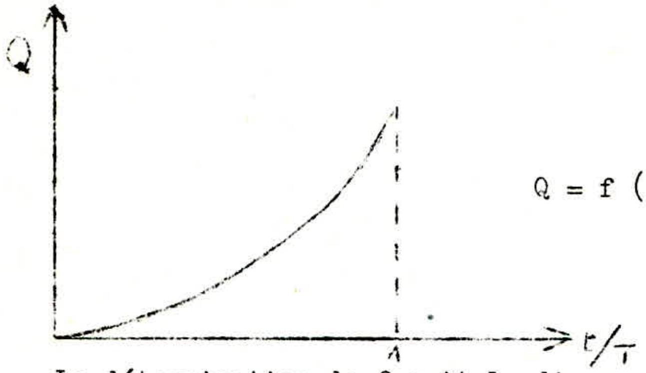
$$\alpha = \sqrt{\frac{2P_o t}{ah_o^2} - \frac{£t^2}{ah_o^2}}$$ (5 - 29)

La fonction $\alpha = f\,({}^{t}/T\ )$ a l'allure suivante



.../..

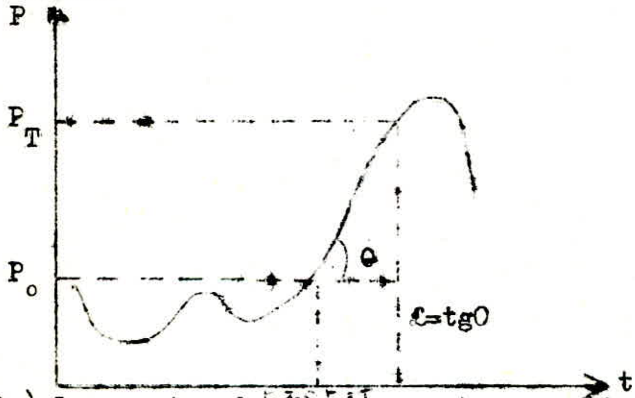
Pour la variation des débits on trace également la courbe $Q = f(^{t}/T)$ qui a cette allure :



La détermination de $\mathcal{E}$ suit le diagramme de charge électrique donnée par le réseau pour la période de turbinage

$$P^r_T = P^r_o + \mathcal{E}T = \mathcal{E} = \frac{P^r_T - P^r_o}{T}$$

L'indice r placé à la hauteur du paramètre , montre le numéro du réseau.



2.) Les pertes de charges sont proportionnelles au carré du débit n = 2

Ainsi au niveau du facteur d'intégration nous aurons

$$S = (Q^2 + \mathcal{E}a)^{-\frac{1}{2}}$$

Puis :

$$M = (Q^2 + \mathcal{E}q)^{\frac{1}{2}}$$

..../..

L'intégrale $\int \$^{n-1} QdQ$ se réduit à :

$$\int \$ QdQ = \int \frac{Q\,d\,Q}{(Q^2 + £a)^{\frac{1}{2}}}$$ d'où si on intégre entre :Q_o et Q_T

on obtient :

$$\int \$ QdQ = (Q_T^2 + £q)^{\frac{1}{2}} - (Q_o^2 + £a)^{\frac{1}{2}} \qquad (5 - 30 =$$

De nouveau nous allons tracer les courbes $Q = f_1(t)$ et $h = f_2(t)$.

Au temps $t = T$ on a $n = M_T \quad (Q_T^2 + £a)^{\frac{1}{2}}$ pour $t = 0$ $M = M_o = (Q_o^2 + £q)^{\frac{1}{2}}$, vue ces valeurs l'équation (5 - 22) avec $n = 2$ prend la forme :

$$M_T \frac{P}{Q_T} - M_o \frac{P_o}{Q_o} + 2\,B\,£a \int_{Q_o}^{Q_T} \$ QdQ = 0 \qquad (5 - 22 \text{ bis})$$

En remplaçant (5 - 30) dans l'équation (5 - 22 bis), on obtient :

$$(Q_T^2+£a)^{\frac{1}{2}}(h-BQ_T^2) + B\,£a\,(Q_T^2+a£)^{\frac{1}{2}} = (Q_o^2 + a£)^{\frac{1}{2}}(h_o-BQ_o^2)+2a\,B£(Q_o^2+a£)^{\frac{1}{2}}$$

Divisons cette expression par M_T c'est à dire par $(Q_T^2+a£)^{\frac{1}{2}}$ pour avoir :

$$h_T - BQ^2 + 2\,a\,B£ = \left(\frac{Q_o^2 + a£}{Q_T^2 + a£}\right)^{\frac{1}{2}} \left(h_o - B\left(Q_o^2 + 2\,a\right)\right)$$

d'où :

$$h_T = \left(\frac{Q_o^2 + a£}{Q_T^2 + a£}\right)^{\frac{1}{2}} \left(h_o - B\left(Q_o^2 + 2a\right)\right) + BQ_T^2 \qquad (5\text{-}31)$$

FIN

-=oOo=-

-o- TABLE DES MATIERES -o-

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

TITRE : Page

Conclusion :

Après ces tentatives d'intégration de l'équation différentielle énergétique dans le processus de turbinage surtout, on s'aperçoit que les démonstrations délicates sont la liaison entre la théorie et l'application, cependant le sens physique des formules demeure capital.

Notre espoir est que cette etude ait une suite, car elle n'est qu'une initiation à l'introduction des mathématiques aux questions particulières des aménagements hydroélectriques

A.H.

[signature]