

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

Filière d'Ingénieur en Electronique

12/78

Ex

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
THESE DE ~~FIN~~ D'ETUDES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

SIMULATION D'UN PROCESSUS
DE COMMANDE REGIS PAR DES
EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES
DU TYPE HYPERBOLIQUE

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
المهندسية
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

1978

Proposée par :

M. BOUSSEKSOU

Etudiée par :

B. HEMIDI

A. Ali BENAMARA

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

Filière d'Ingénieur en Electronique

THESE DE FIN D'ETUDES

EXCLU DU PRÊT

**SIMULATION D'UN PROCESSUS
DE COMMANDE REGIS PAR DES
EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES
DU TYPE HYPERBOLIQUE**

Proposée par :

M. BOUSSEKSOU

Etudiée par :

B. HEMIDI

A. Ali BENAMARA

A mes Parents

A mon Frère Mohamed

A mes Frères et Soeurs

ALI- BENAMARA



A mes Parents.

HAMIDI BOUDJELTHIA

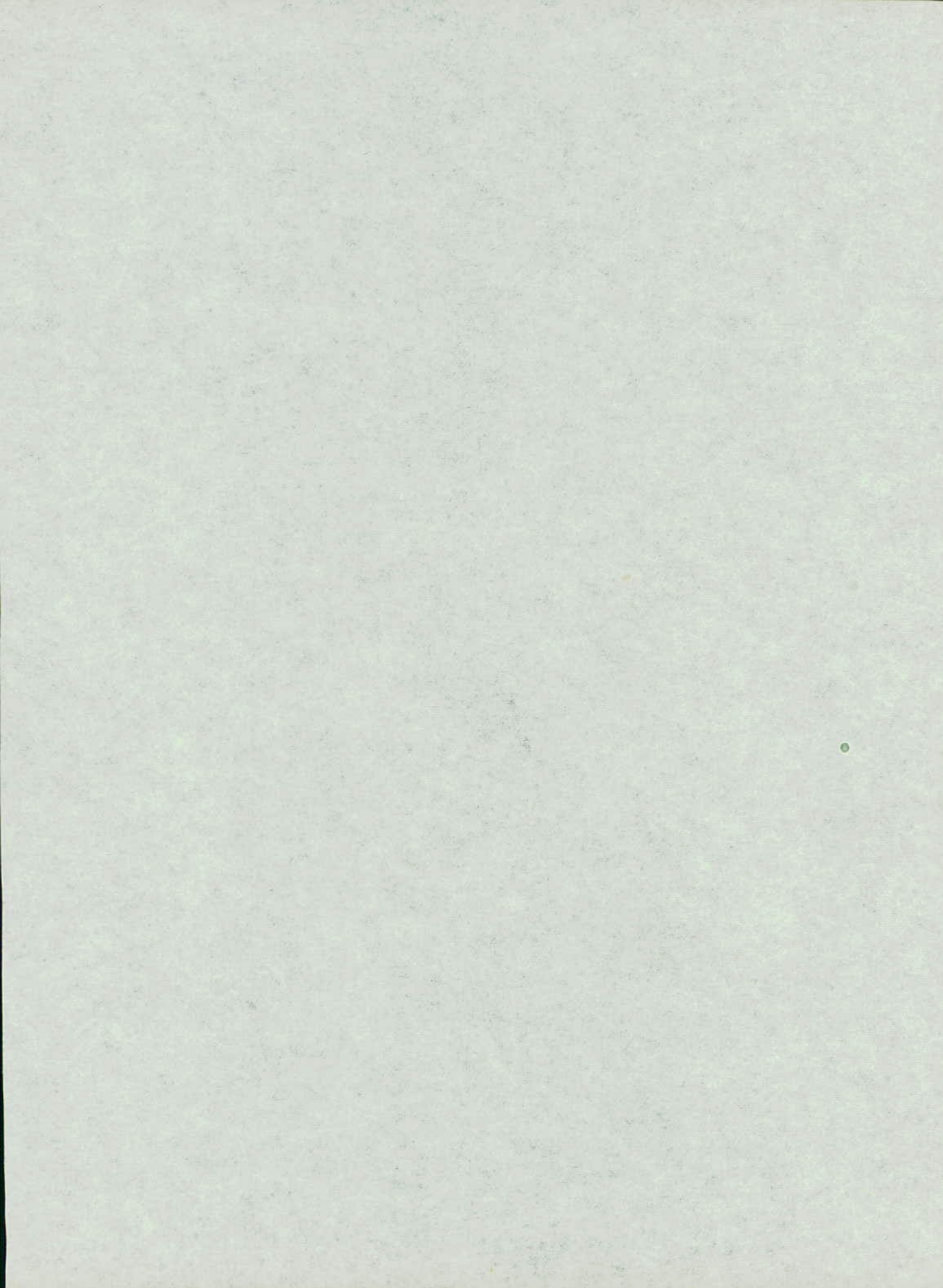
--O--R E M E R C I E M E N T S--O--

-----ooooOOoooo-----

Nous remercions vivement Monsieur BOUSSEKSOU de nous avoir proposé ce sujet et de nous avoir guidé tout au long de notre projet.

Nous tenions à remercier également tous les Professeurs de l'Ecole Nationale Polytechnique qui ont contribué à notre formation.

Nous remercions également toutes les personnes qui nous ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.



-o-o- S O M M A I R E -o-o-
-o-o-o-o-o-o-o-

I N T R O D U C T I O N

I. GENERALITES

- 1 - Problemes Généraux et devoir
- 2 - Notion de système, constantes localisées, constantes réparties paramétrées, exemples .
- 3 - Principe de base et théorèmes; Application aux systèmes à constantes réparties.
- 4 - Nature des équations aux dérivées partielles, exemples
- 5 - Conditions initiales et conditions aux limites .

II METHODES DE RESOLUTIONS ANALYTIQUES, exemples .

III DISCRETISATION

IV METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE .

V METHODES DE RESOLUTIONS ANALOGIQUE .

VI MODELE DU PROCESSUS A SIMULER .

C O N C L U S I O N

I N T R O D U C T I O N

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle considérable en physique. On les rencontre à propos de nombreux problèmes de petits mouvements, de Vibration, de Propagation, de Potentiels etc....

Elles méritent donc une étude spéciale :

En général, il n'est pas possible d'intégrer ces équations. Cependant il existe des méthodes qui, dans certains cas simples, permettent d'exprimer l'intégrale la plus générale d'une façon explicite à l'aide de fonctions arbitraires.

Mais les équations justifiables de ces méthode sont assez exceptionnelles et donc ne présentent pas un intérêt pratique.

En outre, même lorsqu'on a écrit la solution générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, le résultat est loin d'être obtenu, car il reste essentiellement à tenir compte des conditions initiales et aux limites, et des conditions plus compliquées, et la forme de la solution générale ne s'adapte pas toujours facilement à ces conditions.

De sorte que la plupart du temps, on cherche plutôt, à utiliser soit des méthodes numériques, soit des méthodes analogiques. La simulation analogique est un des moyens utilisés pour l'évaluation des systèmes.

Si un système peut se décrire mathématiquement, il existe un système de nature différente, système analogique, et que régissent les mêmes équations.

Il revient au même d'étudier le problème sur le modèle à l'échelle, sur le modèle mathématique ou le modèle analogique électronique.

L'avantage avec le modèle analogique est qu'il permet de substituer au calcul sur des nombres, une opération physique donnant lieu à des mesures sur des grandeurs (tensions ou courants) et aussi qu'il permet une facilité de mise en oeuvre, une souplesse d'emploi, une étude approfondie sur l'influence des principaux paramètres du système, une répétitivité et aussi un coût modéré vis-à-vis de la richesse des informations obtenues.

On peut dire, en empruntant cette définition aux auteurs de SIMOLA que :

"LA SIMULATION, C'EST L'ART DE FAIRE DES EXPERIENCES SUR UN MODELE, DE FACON A EN TIRER DES CONCLUSIONS SUR LA REALITE".

GENERALITES

- 1) Problemes généraux et devoir
- 2) Notion de système , constantes localisées, constantes réparties paramètres , exemples
- 3) Principe de base et théorèmes fondamentaux applicables à la mise en équation des systèmes à constantes réparties. Application
- 4) Nature des équations aux dérivées partielles:
 - Equations elliptiques
 - Equations paraboliques
 - Equations hyperboliques. Expressions analytiques. et domaines de la physique régis par des équations hyperboliques.
- 5) Conditions initiales et conditions aux limites:
 - Conditions de DIRICHLET
 - Conditions de NEUMANN
 - Conditions de FOURRIER.

CHAPITRE I

GENERALITES

1. PROBLEMS GENERAUX

L'art de l'Ingénieur s'applique, de façon pratique à l'étude des phénomènes physiques, ou, plus précisément des systèmes physiques. un système physique est une entité plus ou moins complexe qu'il est possible de définir sans ambiguïté et dont le comportement peut être étudié au moyen de mesures physiques.

A cette entité, il est possible d'appliquer un certain nombre de perturbations ou " excitations " et de recueillir les " réponses " du dit système à de telles excitations. Les excitations prennent généralement la forme d'énergie appliquée au système, alors que les réponses représentent l'énergie apparaissant à l'intérieur du système et à ses limites du fait des excitations ainsi imposées.

A partir de ces définitions trois types de problèmes se posent alors, à savoir :

- a) - Instrumentation
- b) - L'analyse
- c) - La synthèse

a) - INSTRUMENTATION :

Ce problème consiste, à partir de la connaissance du système et de la réponse à déterminer l'excitation. Ce type de problème est essentiellement basé sur l'expérimentation.

b) - L'analyse :

C'est le problème le plus important. Il consiste, à partir de la connaissance du système et de l'excitation à déterminer la réponse du système à ces excitations.

c) - SYNTHESE :

Cette troisième catégorie de problème correspondant à la détermination du système physique alors que sont connues les excitations et les réponses.

Ces quelques considérations sur la nature des problèmes rencontrés lors de l'étude d'un système mettent en évidence la nécessité d'être en mesure d'analyser le comportement des systèmes physiques.

On effet, pour analyser un système quelconque, on devra dans une première étape, traduire le comportement du dit système sous forme mathématique. En général, le comportement des systèmes physiques est représenté, soit par des systèmes équations différentielles ordinaires, soit par des équations aux dérivées partielles.

Les systèmes à constantes localisées, de façon systématique, sont représentés par des équations ou des systèmes d'équations différentielles du second ordre, alors que les systèmes à constantes réparties sont représentés, soit par des équations aux dérivées partielles du type elliptique, soit par des équations aux dérivées partielles du type parabolique, soit par des équations aux dérivées du type hyperbolique .

La seconde étape sera la résolution de ces équations et l'interprétation physique des résultats en ne perdant pas de vue que le but de l'analyse d'un phénomène quelconque par l'ingénieur n'est pas d'obtenir une description mathématique, mais d'aboutir à un résultat très localisé (solution spécifique exprimée sous forme numérique) avec une précision donnée, et ceci, dans les meilleures conditions de prix et de délais, avec généralement le minimum d'équipement, et avec certaines conditions initiales et des conditions aux limites .

DEVOIR :/

Le projet de fin d'étude que nous nous proposons d'exposer a pour thème " SIMULATION ANALOGIQUE D'UN PROCESSUS DU TYPE HYPERBOLIQUE ", ce processus étant le problème de la corde vibrante.

Pour effectuer ce travail, nous avons jugé utile, avant d'aborder l'étude pratique de nous pencher sur quelques parties théoriques nécessaires à la compréhension de notre sujet. Nous aborderons ensuite les différentes méthodes de résolution: analytiques, numériques, analogiques et la notion fondamentale de discrétisation.

Ensuite, nous appliquerons à notre processus une méthode analogique (qui nous a été imposée)

2. NOTIONS DE SYSTEMES A CONSTANTES LOCALISEES ET SYSTEMES A CONSTANTES

REPARTIES.

Au cours de la formulation mathématique du comportement d'un système; le rôle des différents paramètres intervenant dans le fonctionnement du système, la connaissance de lois aussi générales que les principes de conservation et de continuité, l'étude précise des variables dépendantes et des variables indépendantes, ainsi les conditions initiales et les conditions aux limites permettent d'aboutir très simplement aux équations générales régissant le comportement de celui-ci.

Pour qu'un système fournisse une réponse à une excitation donnée, il convient que l'excitation soit d'une nature physique décelable par le système considéré. Cette remarque conduit à préciser le fait que toute excitation doit donc apparaître sous une forme énergétique capable d'être détectés par le système physique utilisé, et que celui-ci répondra à cette excitation, soit sous la même forme énergétique, soit après transformation.

Tout système peut être défini à partir de ses éléments ou paramètres constitutifs ces derniers étant de 2 natures différentes.

constantes

-Soit du type à ~~réparties~~ localisées : si leur comportement c'est-à-dire l'utilisation ~~de~~ qu'ils font de l'énergie circulant à travers les liaisons qui les connectent aux autres éléments du système est complètement défini en fonction de la relation "excitation-réponse" existant entre leurs extrémités.

constantes

-Soit du type à ~~réparties~~ réparties : si les relations "excitation-réponse" doivent être considérées non pas pour l'ensemble de l'élément, mais pour chacun des constituants unitaires de cet élément.

De ce fait, la caractéristique essentielle d'un ~~objet~~ ^{système} à ~~constantes~~ ^{constantes} réparties est que les dimensions spatiale jouent un rôle fondamental dans la formulation et dans la solution du problème; La représentation mathématique comportera donc plusieurs variables indépendantes (variables d'espace ~~et variables d'espaces~~ et variable temporelle) et le comportement du système physique nécessitera, pour sa représentation, l'introduction de dérivées partielles.

Du point de vue mathématique, la localisation des constantes est souhaitable, du fait que dans ce cas, les équations caractérisant le comportement du système deviennent des équations "différentielles ordinaires" c'est-à-dire des équations ne comportant qu'une seule variable indépendante.

DEFINITION DES VARIABLES DEPENDANTES ET VARIABLES INDEPENDANTES :

On appelle variables dépendantes des variables dont l'évolution est fonction d'une ou de plusieurs autres variables.

On appelle variables indépendantes les grandeurs par rapport auxquelles évoluent les variables dépendantes.

Dans le cas des systèmes à constantes réparties, les variables indépendantes seront de façon très générale, les trois variables d'espace et la variable temporelle.

Les variables dépendantes apparaissent sous autant de formes physiques que le nécessite la nature du système à étudier.

Elles peuvent, néanmoins être classés en deux grandes catégories ;

- LES VARIABLES REFERENCERS OU DE "DIFFERENCE".

Les variables rapportent un certain état physique d'un point du système à l'état physique d'un point du système, ou à un point arbitraire de référence.

Exemples : La température ^{du point} référencée, soit au zéro absolu, soit au point de congélation de l'eau, est la variable référencée dans un système de transfert de chaleur.

La pression pour la mécanique des fluides.

La tension électrique ou potentiel pour l'électrostatique.

- Les variables non référencées :

De telles variables sont mesurées de façon absolue et n'impliquent pas la définition d'une référence, c'est-à-dire que leur mesure n'implique pas la localisation de deux points de mesure ; elles représentent, en fait, la mesure du flux traversant une section élémentaire du champs.

Exemples : Flux thermique en thermodynamique.

Débit en Mécanique des fluides

Densité de courant en Electrodynamique.

PARAMETRES OU ELEMENTS DE SYSTEMES A CONSTANTES REPARTIES :

Les paramètres ou éléments d'un système physique peuvent être caractérisés par la façon dont ils utilisent l'énergie qui leur est appliquée. Il est possible de les classer en trois catégories à savoir :

- Dissipateurs d'énergie :
- Accumulateurs d'énergie potentielle
- Accumulateurs d'énergie cinétique

Exemples de domaines particuliers de la physique dont l'étude peut être abondée en tant que systèmes à côtés réparties :

Eléments dissipateurs d'énergie

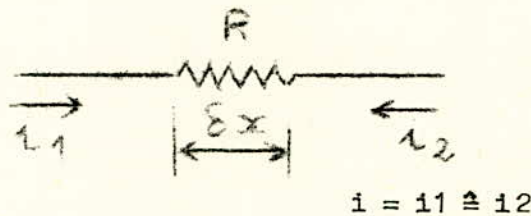
A) En électrodynamique :

La résistance R est l'élément dissipateur d'énergie

La variable référencée de potentiel est la tension électrique V

La variable non référencée de flux f est le courant électrique I

Considérons un conducteur de résistance électrique constante $R \Omega$ par unité de longueur et soit un élément δx de ce conducteur.



La chute de potentiel aux bornes de cet élément est de la forme ;

$$-\delta v = iR \cdot \delta x.$$

Lorsque la longueur de l'élément $\delta x \rightarrow 0$ cette équation tend vers la forme différentielles

$$\frac{dv}{dx} = -Ri = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta v}{\delta x}$$

Cas d'un conducteur très-dimensionnel.

On obtient l'expression du courant à travers une surface σ

$$i = \frac{1}{R} \iint_{\sigma} \text{grad } v \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$$

\vec{n} représentant le vecteur unitaire normal à σ

B) EN MAGNETISME

La reluctances \mathcal{R} est l'élément dissipateur, elle relie la variable référencée de potentiel magnétique (v) à la variable non-référencée de flux magnétique \mathcal{F} au moyen de la relation

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\mathcal{R}} \iint_{\sigma} \text{grad } v \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$$

C) EN MECANIQUE DES FLUIDES :

La viscosité (ν) est l'élément d'énergie dissipateur et relie la variable référencée de pression p à la variable non-référencée de débit D_v par la relation

$$D_v = -\frac{1}{\nu} \iint_{\sigma} \text{grad } p \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$$

Dans tout système physique, D est l'élément ou paramètre dissipateur d'énergie. D peut être défini de façon générale par une relation de la forme

Dissipateur X variable non référencée = - $\iint_{\sigma} \text{grad } (\text{variable référencée}) \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$

$$\text{Soit } \iint_{\sigma} \text{grad } \varphi \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = -D \cdot f$$

Eléments accumulateurs d'énergie potentielle

L'énergie potentielle est définie comme l'énergie que possède un système physique en vertu de la position ou des caractéristiques statiques de ses éléments

Les Paramètres d'un système susceptible d'accumuler de l'énergie potentielle ont pour action de s'opposer à toute variation de la variable référencée de potentiel ϕ . Ils sont définis par ce fait par l'expression générale:

$$\iint_{\sigma} \text{grad } \phi \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \frac{1}{E_p} \int_0^t f \cdot dt.$$

Eléments accumulateurs d'énergie cinétique

L'énergie cinétique peut être définie comme l'énergie que possède un système physique en vertu du mouvement ou des caractéristiques dynamiques de ses constituants.

Les éléments d'un système susceptibles d'accumuler de l'énergie cinétique ont pour action de chercher à s'opposer à toute variation de la variable référencée de flux. Ils sont définis par la relation :

$$\iint_{\sigma} \text{grad } \phi \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = - E_c \cdot \frac{\delta f}{\delta t}$$

3. PRINCIPES DE BASE ET THEOREMES FONDAMENTAUX APPLICABLES A LA MISE EN EQUATION DES SYSTEMES A CONSTANTES REPARTIES

Il est possible de mettre en équation tout système physique quelque soit sa nature, en utilisant les deux seuls principes de conservation et de continuité:

PRINCIPE DE CONSERVATION:

Le principe de conservation exprime que " lorsqu'une quantité physique est appliquée à un système, la valeur totale de cette quantité existant, à partir de cet instant, à l'intérieur est égale à la somme des quantité ainsi ajoutée (ou soustraite) et de la quantité initialement présente à l'intérieur du système."

Ce principe de conservation doit être complété de la connaissance de la nature de la grandeur physique à laquelle ce principe est appliqué.

PRINCIPE DE CONTINUITÉ:

Le principe de continuité complémentaire au précédent, doit être appliqué aux variables non référencées et s'énonce comme suit:

"Dans tout système physique la variable non référencée est continue et doit provenir d'une source d'énergie (excitation intérieure ou extérieure au système) et retourner à la même source d'énergie ou à toute source de même nature.

APPLICATIONS AUX SYSTEMES A CONSTANTES REPARTIES :

- Les équations elliptiques seront de la forme:

$$\text{div} \left(\frac{1}{K} \text{grad } \varphi \right) = \lambda \varphi + \lambda'$$

- Les équations paraboliques seront de la forme:

$$\text{div} \left(\frac{1}{K} \text{grad } \varphi \right) = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda_1 \varphi + \lambda'$$

- Les équations hyperboliques seront de la forme :

$$\text{div} \left(\frac{1}{K} \text{grad } \varphi \right) = \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda_2 \varphi + \lambda'$$

Expressions dans lesquelles les $\lambda, \lambda', \lambda_1, \lambda_2$ ne sont fonction que des variables d'espace.

La nature des Equations aux dérivées partielles (elliptiques, paraboliques, hyperboliques) ne dépend que de la nature des éléments ou paramètre intervenant dans le système physique étudié.

a) EQUATIONS ELLIPTIQUES .

Le comportement de tout système physique constitué d'éléments ou paramètres d'un seul type est régi par une équation du type elliptique c'est-à-dire que tous les systèmes dont les éléments constitutif sont :

- soit des dissipateurs d'énergie
- soit des accumulateurs d'énergie potentielle
- soit des accumulateurs d'énergie cinétique

peuvent être représentés par des équations dérivées partielles du type elliptique ceci traduit le fait que dans de tels systèmes, le temps n'est pas une variable indépendante.

Lorsque les éléments d'un système ne sont pas fonctions des variables indépendantes d'espace, les équations elliptiques correspondantes sont :

- Soit de la forme de LAPLACE:

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\varphi = K_1 \quad \text{avec} \quad \Delta = \text{Laplacien}$$

Nous sommes conduits à l'étude de cette équation lorsque nous abordons les problèmes posés par les champs électriques et magnétiques, l'état stationnaire de la chaleur l'hydrodynamique, la diffusion, etc... C'est l'équation du type elliptique la plus simple.

- Soit de la forme de Poisson :

$$\Delta\varphi = K_1\varphi + K_2$$

Dans le cas où les paramètres sont fonctions des variables d'espace, les équations s'écrivent :

$$\text{div} \left[\frac{1}{\kappa} \vec{g} \text{grad} \varphi \right] = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div} \left[\frac{1}{\kappa} \vec{g} \text{grad} \varphi \right] = K_1$$

$$\text{div} \left[\frac{1}{\kappa} \vec{g} \text{grad} \varphi \right] = K_1\varphi + K_2$$

Rappel des relations fondamentales du calcul vectoriel :

$$\Delta\varphi = \text{div}(\vec{g} \text{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\text{div} \left(\frac{1}{\kappa} \vec{g} \text{grad} \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

b) EQUATIONS PARABOLIQUES :

Les équations paraboliques sont représentatives du comportement des systèmes physiques contenant deux types de paramètres :

- D'une part, des dissipateurs d'énergie;
- D'autre part; soit des accumulateurs d'énergie potentielle, soit des accumulateurs d'énergie cinétique.

Dans de tels systèmes, le temps est la variable indépendante la forme générale d'une telle équation est

$$\text{div} \left(\frac{1}{\kappa} \vec{g} \text{grad} \varphi \right) = K_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + K_2 \varphi + K_3$$

Dans le cas où les paramètres ne sont pas fonctions des variables indépendantes d'espace, l'expression se simplifie et prend la forme :

$$\Delta\varphi = K_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + K_2 \varphi + K_3$$

Δ étant le LAPLACIEN.

L'équation du type parabolique la plus simple est l'équation :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Nous sommes conduits à l'étude de cette équation, une fois mis en présence de problèmes posés par les processus de diffusion de la chaleur, de filtration de liquides ou de gaz dans un milieu poreux (par ex.: la filtration du pétrole et des gaz dans les grès sous couverture) de certains problèmes de la théorie des probabilités.

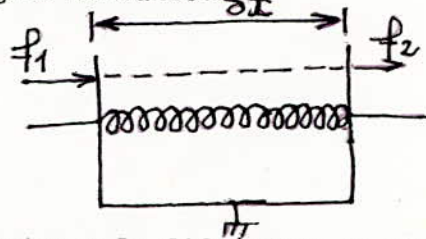
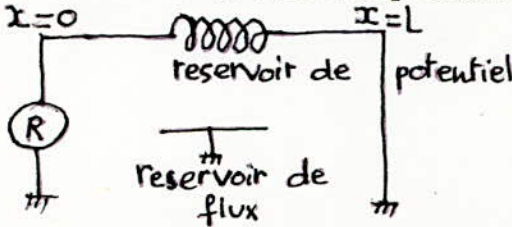
c) EQUATIONS HYPERBOLIQUES

La troisième équation fondamentale représentative du comportement de systèmes physiques à constantes réparties (généralement appelée "équation d'onde") décrit les phénomènes familiers de mouvement des ondes.

Les systèmes physiques dont le comportement est représenté par des équations hyperboliques sont caractérisés par :

- La présence simultanée de deux types d'éléments accumulateurs d'énergie potentielle et cinétique.
- Le fait que le temps est une variable indépendante.
- La réponse à toute excitation se présente sous forme oscillatoire.
- Dans le cas de présence de dissipateur d'énergie thermique, la réponse oscillatoire est du type "amorti".

Considérons l'élément unidimensionnel constitué d'un réservoir de flux, E_f et d'un réservoir de potentiel E_p schématisé par la figure suivante:



Appliquant le principe de conservation spécifiant que la différence de flux aux deux extrémités de l'élément Δx est stockée dans le réservoir de potentiel correspondant, la variation de flux en fonction du déplacement est exprimé par l'équation: -

- $\frac{\partial f}{\partial x} = E_p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ dans laquelle E_p caractérise le réservoir de potentiel par unité de longueur. De façon similaire le gradient de potentiel est régi par l'équation - $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_f \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$

Ces deux équations correspondent aux expressions familières dans la théorie des circuits électriques:

$$i = C \frac{dv}{dt}, \quad e = L \frac{di}{dt}$$

Considérons les équations :

- $\frac{\partial f}{\partial x} = E_p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et - $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_f \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ c'est à dire - $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{E_f} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

Différencions ces deux équations par rapport au temps et à x :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = E_p \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ - $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{1}{E_f} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

En combinant ces deux équations, nous obtenons l'équation dérivées partielles:

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = E_p \cdot E_f \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ qui correspond à l'équation d'onde ~~xx~~ à une dimension.

LES EQUATIONS HYPERBOLIQUES se rencontrent sous la forme générale suivante:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Cette expression correspondant au cas où le paramètre K est le produit de deux types de réservoirs d'énergie, cinétique et potentielle, figurant dans le système, et ceci tout particulièrement dans le cas où les paramètres correspondants sont linéaires et uniformes à l'intérieur du champ considéré,

Dans le cas où un paramètre de dissipation d'énergie thermique apparaît, il y a apparition de la dérivée première de la variable ~~référentielle~~ dépendante par rapport au temps t, ainsi que la variable dépendante elle-même :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = K_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + K_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + K_3 \varphi \text{ ou } K_1, K_2, K_3 \text{ sont des grandeurs}$$

fonction des paramètres du champ.

Lorsque les paramètres du système sont fonction des coordonnées d'espace x, y, z, une équation hyperbolique s'écrit sous la forme :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{E_F(x,y,z)} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \varphi \right) = E_p(x,y,z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \text{ avec } E_F \text{ et } E_p \text{ correspondant}$$

à la réserve de flux et au réservoir de potentiel à l'intérieur du milieu.

Toutes ces expressions correspondent aux formes analytiques le plus généralement utilisées pour représenter le comportement de champs physiques dans lesquels interviennent à la fois les dissipateurs d'énergie thermique et les accumulateurs d'énergie potentielle et d'énergie cinétique.

Parfois il est avantageux de mettre ces équations sous une forme dite "normale" en les ramenant à des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Ex: soit l'équation
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = K \frac{\partial \varphi}{\partial t^2}$$

Cette expression peut être écrite sous la forme d'un système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= K \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= K \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

φ étant une deuxième variable dépendante introduite pour les besoins de la formulation mathématique.

DOMAINES DE LA PHYSIQUE REGIS PAR DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES.:

Les équations hyperboliques étant définies, nous allons voir les différents domaines de la physique régis par ces équations.

Les équations hyperboliques sont associées aux phénomènes de vibration et aux phénomènes de mouvement ondulatoire.

Mathématiquement, on peut dire que les domaines de la physique régis par des équations hyperboliques correspondent à des champs dont la divergence est proportionnelle à la dérivée seconde de la fonction par rapport au temps.

En effet, sous la forme la plus générale, l'équation hyperbolique peut s'écrire :

$$\operatorname{Div} \left(\frac{1}{E_F} \vec{\operatorname{grad}} \varphi \right) = E_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

En faisant, d'autre part, intervenir les paramètres du système physique à étudier on peut dire que les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique caractérise les champs physiques qui sont constitués à la fois d'éléments accumulateurs d'énergie potentielle et d'éléments accumulateurs d'énergie cinétique; la présence d'éléments dissipateurs d'énergie ne modifiant pas la structure de l'équation aux dérivées partielles représentatives du comportement d'un champ. Dans le cas où le paramètre dissipateur d'énergie ~~non~~ n'existe pas dans le champ, la réponse de tels systèmes est oscillatoire, et les variables dépendantes en chaque point de celui-ci sont soumises à des variations transitoires harmoniques dues à l'échange d'énergie entre le réservoir de potentiel et le réservoir de flux. Si un paramètre de dissipation est présent, l'énergie initiale appliquée au champ est graduellement dissipée, et les conditions de repos sont approchées de façon asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini.

8 Les domaines de la physique régis par de telles équations sont principalement les suivants:

- Electrodynamique supersonique
- Mécanique quantique
- Accoustique, et plus généralement propagation d'ondes dans les milieux compressifs.
- Propagation des signaux électriques dans les lignes.
- Propagation des ondes électromagnétiques à travers l'espace et dans les guides d'ondes.
- Comprtement des membranes élastiques.

Parmi les problèmes régis par des équations hyperboliques, deux grandes catégories doivent être distinguées:

- Les problèmes transitoires: dans lesquels doivent être déterminés le potentiel et le flux du système, en fonction du temps en certains points donnés du domaine.
- Les problèmes conduisant à l'aboutissement du régime permanent périodique, dans lesquels il est seulement nécessaire de déterminer certaines caractéristiques de fréquences

5°) CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS INITIALES

Les conditions aux limites peuvent être de trois types :

- Conditions de DIRICHLET: les valeurs du potentiel sont connues en chacun des points du contour. Cette condition s'écrit:

$$\Psi_B(x,y,z) = g_1(x,y,z,t)$$

- Conditions de NEUMANN: valeur du gradient du potentiel connue en chaque point du contour:

$$\frac{\partial \Psi_B(x,y,z)}{\partial n} = g_2(x,y,z,t) \quad , \quad n \text{ représentant la direction normale au contour.}$$

- Conditions de FOURRIER : Connaissance, en chaque point du contour d'une relation linéaire entre la variable dépendante et la dérivée normale de celle-ci .

En ce qui concerne les conditions initiales il conviendra de préciser la valeur du potentiel et de la dérivée de celui-ci par rapport au temps:

$$\Psi(x,y,z,0) = f_1(x,y,z)$$

$$\frac{\partial \Psi(x,y,z,0)}{\partial t} = f_2(x,y,z)$$

-o- C H A P I T R E - II -o-

METHODES ANALYTIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS
AUX DERIVEES PARTIELLES

1°) Problèmes linéaires

- Séparation des variables
 - Changement de variables
- Exemples

2°) Problèmes non linéaires

METHODES ANALYTIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Les equations aux dérivées partielles forment un des plus importants chapitres des mathématiques. Elles sont le sujet, actuellement, d'études théoriques délicates telles que celles de LERAY, SCHWARTZ et de leurs élèves, etc;...

Le but de ce chapitre est de présenter un exposé des techniques les plus courantes de résolution analytique des équations aux dérivées partielles.

- Problème linéaires :

Pour les équations dérivées partielles linéaires, la plus part de ces méthodes ont pour point commun le souci de séparer les variables indépendantes. La méthode de SEPARATION DES VARIABLES ou méthode de FOURRIER que nous allons considérer est typique pour la résolution de nombreux problèmes de la physique mathématique. Cette méthode consiste à remplacer la fonction inconnue $\varphi(x, y)$ par l'expression

$$\varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Par exemple une fonction à deux variables indépendante x et y.

exemple de résolution :

Soit trouver la solution de l'équation .

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(0, t) = 0 \\ \varphi(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = u(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = v(x) \end{array} \right.$$

Nous chercherons une solution de l'équation () satisfaisant aux conditions citées sous forme de produit de deux fonctions $f(x)$ et $g(t)$ dont la première ne dépend que de x et la seconde que de t :

$$\varphi(x, t) = f(x) \cdot g(t)$$

Effectuant cette substitution dans l'équation (), nous obtenons :

$$f''(x) \cdot g(t) = a^2 f(x) \cdot g''(t)$$

$$\boxed{\frac{f''}{a^2 f} = \frac{g''}{g}}$$

Le premier membre de cette égalité est une fonction qui ne dépend pas de x, et le second une fonction qui ne dépend pas de t. Cette égalité ne peut avoir lieu que dans le cas où le premier comme le second membre ne dépendent ni de x ni de t, autrement dit sont égaux à un nombre constant égal à $-\lambda^2$

$$\frac{f''}{a^2 f} = \frac{g''}{g} = -\lambda^2$$

Nous obtenons de ces égalités deux équations :

$$\begin{aligned} f'' + a^2 \lambda^2 f &= 0 \\ g'' + \lambda^2 g &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions générales de ces équations sont:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cos a \lambda x + B \sin a \lambda x \\ g(t) &= C \cos \lambda t + D \sin \lambda t \end{aligned}$$

ou A, B, C, D sont des constantes arbitraires qui seront choisies de telle sorte que soient vérifiées les conditions initiales et les conditions aux limites.

En portant les expressions de f(x) et de g(t) dans l'égalité :

$$\Psi(x, t) = f(x) \cdot g(t), \text{ nous obtenons:}$$

$$\Psi(x, t) = (A \cos a \lambda x + B \sin (a \lambda x)) (C \cos \lambda t + D \sin \lambda t)$$

Autre méthode pour résoudre l'équation d'onde: changement de variables

$$\text{Soit à résoudre l'équation} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Il est facile de ramener cette équation par un changement de variables à l'étude de l'équation suivante: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = 0$, U et V étant les nouvelles variables.

Cette équation admet comme solution générale évidente une solution de la forme:

$$\Phi(U, V) = F(U) + G(V)$$

Posant:

$$\begin{cases} U = x - ct \\ V = x + ct \end{cases}$$

$$\Psi(x, t) \text{ devient } \Phi(U, V)$$

de plus

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial U} + \frac{\partial \Phi}{\partial V}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = -c \frac{\partial \Phi}{\partial U} + c \frac{\partial \Phi}{\partial V}$$

et de même

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial V} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial V} + c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2}$$

L'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{autrement dit} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Devient ainsi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial U^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial V} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2} - \frac{1}{c^2} (c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial V} + c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2}) = 0$$

$$4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial V} = 0$$

ce qui montre que la solution générale de l'équation en Ψ est $\Psi(x, t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ qui dépend de 2 fonctions arbitraires f(u) et g(v).

-Problèmes non linéaires

La résolution des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles non linéaire a été l'étude des très nombreux travaux les étapes de base dans la résolution de ces problèmes sont :

- a) l'obtention d'estimations a priori (choix de l'espace fonctionnel où l'on va essayer de résoudre le problème)
- b) L'utilisation de ces estimations (choix de la méthode d'approximation.
- c) Passage à la limite.

Il n'y a pour l'instant aucune méthode générale d'obtention d'estimation a priori. Les estimations à priori les plus simples proviennent de l'origine physique des problèmes .

Le choix du cadre fonctionnel où l'on va essayer de résoudre le problème est absolument crucial.

Une fois choisi le cadre fonctionnel, on utilise les estimations pour la résolution du problème. Il existe plusieurs méthodes:-

- Méthode de compacité: Méthode de Galerkin, Méthode FAEDO-Galerkin.
- Méthode de Monotonie
- Méthode de régularisation
- Méthodes itératives d'approximation.

et naturellement, l'utilisation simultanée, dans un problème, de plusieurs de ces méthodes.

Ces méthodes indiquées sont susceptibles de fournir l'existence de solutions. L'unicité de la solution relève de Techniques assez spéciales.

-o- C H A P I T R E III -o-

DISCRETISATION

INTRODUCTION ..

- 1°) Définition de l'opérateur de différence
- 2°) Reformulation mathématique
- 3°) Opérateur de différence dans le système cartésien
- 4°) Considérations permettant la sélection des formules d'approximation.

DISCRETISATION

Introduction:

Dans toutes les méthodes pratiques de résolution d'équations aux dérivées partielles sur calculateur électronique, aussi bien qu'arithmétique qu'analogique intervient la notion de discrétisation, c'est à dire la recherche de la solution du problème en un nombre limité de points du domaine régi. par l'équation aux dérivées partielles considérée. Ceci conduit donc à remplacer les domaines de variation des variables indépendantes continues : x, y, z, t par un ensemble de valeur discrètes de points appelés noeuds du système et correspondant aux noeuds du maillage Géométrique ainsi obtenu.

1°- Définition de l'Opérateur de différence:

Le remplacement du domaine de variation par un maillage Géométrique implique donc la nécessité de remplacer les différents opérateurs différentiels par des opérateurs élémentaires dits "Opérateurs de différence".

Dans ces opérateurs, l'accroissement de variable indépendante de différentiation conserve une valeur finie non nulle, au lieu de tendre vers zéro.

En effet la dérivée d'une fonction $f(x)$ par rapport à x est définie comme suit:

$$f'(x_0) = \frac{d f(x)}{d x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

c'est à dire que la dérivée est la limite si elle existe, du rapport de l'accroissement de la fonction $f(x)$ à l'accroissement de la variable x , lorsque celui-ci tend vers zéro.

L'opérateur du défférence est défini comme suit:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{où } x_1 - x_0 = h = \text{valeur finie non nulle}$$

C'est à dire que l'opérateur de différence est le rapport de l'accroissement de la fonction $f(x)$ à l'accroissement de la variable x , mais ici cet accroissement ne tend pas vers zéro.

L'interprétation Géométrique de la défférence entre ces deux opérations est mise en évidence par la figure

L'opérateur de dérivation première permet d'obtenir la valeur, au point M_0 , de la pente de la courbe représentative de $f(x)$ alors que l'opérateur de différence permet d'obtenir la valeur de la droite $M_0 M_1$ soit:

$$\frac{df(x)}{d x} = \text{tg } \alpha \qquad \frac{\delta f(x)}{\delta x} = \text{tg } \beta$$

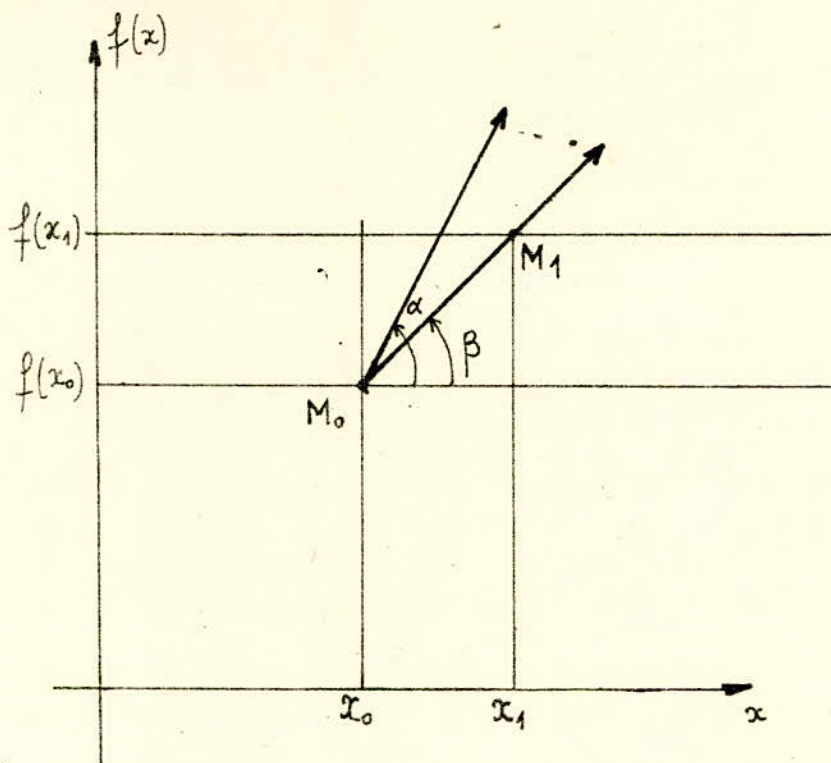


fig 1c

Interpretation géométrique de la différence entre l'opérateur de différentiation et l'opérateur de différence.

$$\frac{df(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x} = \operatorname{tg} \beta$$

2° Reformulation Mathématique

La reformulation mathématique nécessaire au traitement sur calculateur électronique des équations aux dérivées partielles va, de ce fait, consister à faire l'approximation mise en évidence par les équations cette approximation étant d'autant meilleure que x_1 est plus voisin de x_0 . Pour faire intervenir de tels opérateurs, il conviendra donc de remplacer l'étude du champs physique en tout point du domaine le concernant par l'étude de ce champs en un nombre fini de points, c'est à dire qu'il faudra superposer au domaine considéré un maillage Géométrique, et calculer la valeur des variables dépendantes en chaque noeud de ce maillage.

La figure 1a concrétise le processus ainsi énoncé:

Au domaine (D) à l'intérieur duquel doit être étudié un champs $\varphi(x, y)$ régi par une équation aux dérivées partielles, on superpose un maillage Géométrique (M) et l'étude du champs est limitée à la détermination des valeurs de φ aux noeuds M_i du maillage, étant bien entendu que plus le maillage sera "serré" plus la détermination du champs sera meilleurs.

Le remplacement de l'opérateur de différenciation par l'opérateur de différence' conduit à la formule d'approximation donnée par la formule de TAYLOR

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_0 + \dots + \frac{(x_1 - x_0)^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_0$$

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \varepsilon(n) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \varepsilon(n)$$

3° Opérateur de différence dans le système Cartésien:

Pour pouvoir résoudre l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique sur calculateur électronique, on doit définir les approximations des dérivées premières et secondes de la fonction par rapport aux différentes variables indépendantes.

On considère alors deux étapes:

a) La première étape consiste à la définition d'un maillage Géométrique l'obtention des formules d'approximation est plus facilitée s'il est supposé que les points adjacents dans les directions x, t (dans le cas où la fonction dépend des deux variables indépendantes x et t) sont à des distances égales les unes des autres et séparées par des intervalles δx et δt (figure 1b)

b) La Deuxième étape consiste à choisir parmi les différentes formules d'approximation permettant de remplacer les opérateurs aux dérivées partielles par des opérateurs de différence', les formules les plus adaptées à la résolution du problème donné.

-Formules d'approximation de la dérivée première de $\varphi(x, t)$ par-rapport à x , et t :

-Considérons la variable dépendante $\varphi(x, t)$ fonction des variables x et t . L'utilisation de la formule de développement en série de TAYLOR de la fonction $\varphi(x, t)$ par rapport à la variable x nous permet d'écrire:

$$\varphi(x + \delta x, t) = \varphi(x, t) + \delta x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dots + \frac{\delta x^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$$

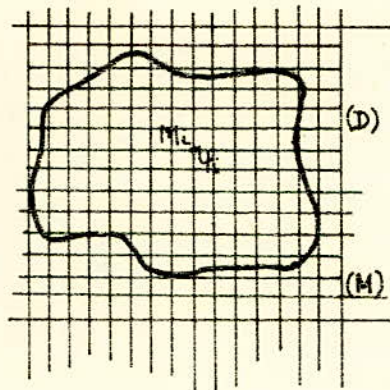
d'où l'on tire:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{\varphi(x + \delta x, t) - \varphi(x, t)}{\delta x} + \varepsilon$$

La dérivée première de la fonction $\varphi(x, t)$ par-rapport à x peut être donc approximée par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{\varphi(x + \delta x, t) - \varphi(x, t)}{\delta x}$$

en commettant une erreur ε .



(D): domaine de variation
 (M): maillage

fig 1 a

Definition d'un maillage géométrique.

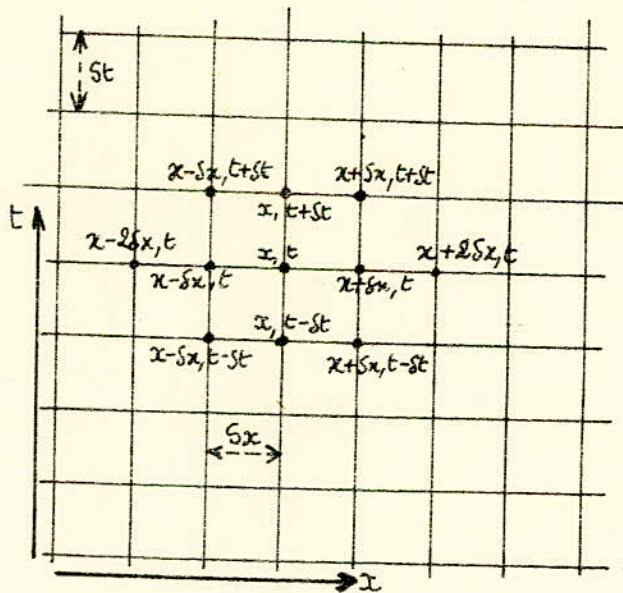


fig 1 b

choix du maillage géométrique pour
 la définition de l'opérateur de différence.

ON peut facilement montrer que la dérivée première de la fonction $\varphi(x, t)$ par rapport à x peut être aussi approximée par la formule:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x - \delta x, t)}{\delta x}$$

avec une certaine erreur ε' .
En faisant la moyenne arithmétique entre les deux expressions de $\varphi(x, t)$, on obtient une nouvelle formule d'approximation plus précise dans ce cas:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{\varphi(x + \delta x, t) - \varphi(x - \delta x, t)}{2 \delta x}$$

Remarquons qu'on utilise le potentiel en deux points symétriques par rapport au point considéré.

Remarque:

On obtient de la même façon les formules d'approximation de la dérivée première de la fonction $\varphi(x, t)$ par rapport à t .

-Formules d'approximation des dérivées partielles du second ordre:

Soient les formules de développement en série de TAYLOR dans les directions plus et moins de variation de x de la fonction $\varphi(x, t)$:

$$\varphi(x + \delta x, t) = \varphi(x, t) + \delta x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \dots + \frac{\delta x^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right)$$

$$\varphi(x - \delta x, t) = \varphi(x, t) - \delta x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \dots + (-1)^n \frac{\delta x^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right)$$

En effectuant la somme membre à membre des deux égalités, on obtient:

$$\varphi(x + \delta x, t) + \varphi(x - \delta x, t) = 2\varphi(x, t) + \delta x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dots + 2 \frac{\delta x^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^{2n}}$$

d'où l'on tire:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\varphi(x + \delta x, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x - \delta x, t)}{\delta x^2} + \varepsilon$$

La dérivée partielle du second ordre de la fonction $\varphi(x, t)$ par rapport à x peut donc être approximée par l'expression:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi(x + \delta x, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x - \delta x, t)}{\delta x^2} \quad \text{avec une certaine erreur } \varepsilon$$

On peut aussi facilement montrer que l'on peut obtenir une approximation supérieure en utilisant, non pas un point de part et d'autre du point considéré, mais: deux points de part et d'autre de ce point. Cependant du fait même de l'introduction du potentiel en cinq points, cela implique une complication du calcul.

Par contre, dans le cas où δx est suffisamment faible, on préfère utiliser la formule précédente.

On utilise parfois la moyenne pondérée de la dérivée seconde pour deux valeurs de t , pour obtenir une approximation de celle-ci:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{x, t + \theta t} = \frac{\theta}{\delta x^2} [\varphi_{x + \delta x, t + \theta t} - 2\varphi_{x, t + \theta t} + \varphi_{x - \delta x, t + \theta t}] + \frac{1 - \theta}{\delta x^2} [\varphi_{x + \delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x - \delta x, t}] \quad (\text{III}_1)$$

avec θ constante et $0 \leq \theta \leq 1$.

Remarque:

On obtient la formule d'approximation de la dérivée seconde de la fonction $\varphi(x, t)$ par rapport à la variable temporelle:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\varphi(x, t + \Delta t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

4° Considérations permettant la sélection des formules d'approximation:

Enr. : général, on utilise la formule d'approximation suivante:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{x,t} = \frac{\theta}{\Delta x^2} [\varphi_{x+\Delta x, t+\Delta t} - 2\varphi_{x,t+\Delta t} + \varphi_{x-\Delta x, t+\Delta t}] + \frac{1-\theta}{\Delta x^2} [\varphi_{x+\Delta x, t} - 2\varphi_{x,t} + \varphi_{x-\Delta x, t}]$$

Le choix de θ se fait en tenant compte des trois notions fondamentales suivantes:

a) Facilité d'emploi

b) Erreurs:

On a deux types d'erreurs:

- Erreur d'arrondi: Différence entre la solution fournie par le calculateur en un point et la solution exacte du système d'équations aux différences finies en ce point.

- Erreurs de troncature: Erreurs introduites lors de la transformation de l'équation aux dérivées partielles en un système aux différences finies.

Ces deux types d'erreurs combinés et introduites à chaque pas de calcul d'où certaines difficultés pratiques. Il apparaît donc le besoin de tenir compte d'un paramètre de stabilité.

c) Stabilité de calcul:

La notion de stabilité peut être définie comme suit:

- Une méthode de calcul est dite instable lorsque l'erreur introduite au cours d'un pas de calcul est appelée à augmenter au cours du pas de calcul suivant jusqu'à ce que la solution générale devienne incorrecte.

- Une méthode de calcul est dite stable lorsque l'effet d'une erreur introduite lors du calcul du potentiel en un point du maillage tend à s'amortir jusqu'à devenir nulle au cours du calcul des potentiels aux points suivants.

-o- C H A P I T R E IV -o-

METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS
AUX DERIVEES PARTIELLES DU TYPE HYPERBOLIQUE



INTRODUCTION

- 1) Formulation matricielle et methode de résolution analytique
- 2) Erreurs et stabilité
- 3) Traitement des équations hyperboliques sur calculateur numérique:
 - Methode explicite
 - Methode implicite

Résolution des équations hyperboliques par
la méthode numérique.

Introduction:

La résolution sur calculateur numérique d'équations hyperboliques utilise les différences finies et implique donc la définition d'un maillage. La solution est alors donnée sous forme numérique en chaque nœud du maillage. On distingue deux méthodes de résolution:

- les méthodes explicites
- les méthodes implicites

Ces deux méthodes sont caractérisées par les points suivants:

-dans la méthode explicite:

Une équation est écrite en chaque point du champ, de telle sorte que les variables dépendantes inconnues pour ce point sont explicitées entièrement, en fonction des variables précédemment déterminées ou connues.

-dans la méthode implicite:

La variable dépendante inconnue est exprimée en fonction de variables connues et de variables inconnues, de sorte qu'un système d'équations simultanées doit être résolu pour chaque pas temporel de calcul. On est donc amené à étudier une méthode de résolution analytique de ce système.

1) Formulation matricielle et méthode de résolution analytique:

Soit le système d'équations: $A \{ \psi_i \} = \{ K_i \}$ (IV 1)

où A est une matrice carrée particulière: elle est soit tridiagonale soit pentadiagonale.

ψ_i vecteur colonne (inconnu)
 K_i vecteur colonne (connu)

Le problème est résolu lorsque la matrice inverse A^{-1} de A est déterminée.

En effet, dans ce cas on aura: $\{ \psi_i \} = A^{-1} \{ K_i \}$

Les composantes du vecteur ψ_i seront alors déterminées.

Exemple:

Dans le cas où la matrice A est tridiagonale, le système peut s'écrire:

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & A_n & B_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{vmatrix}$$

Les composantes ψ_1 et ψ_n sont connues. Elles sont données par les conditions aux limites.

Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} B_1 \varphi_1 + C_1 \varphi_2 &= D_1 \\ A_2 \varphi_1 + B_2 \varphi_2 + C_2 \varphi_3 &= D_2 \\ A_3 \varphi_2 + B_3 \varphi_3 + C_3 \varphi_4 &= D_3 \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots A_i \varphi_{i-1} + B_i \varphi_i + C_i \varphi_{i+1} = D_i \quad (\text{IV}_2)$$

$$A_n \varphi_{n-1} + B_n \varphi_n + C_n \varphi_{n+1} = D_n$$

Posons : $\varphi_i = a_i - b_i \varphi_{i+1} \Rightarrow \varphi_{i-1} = a_{i-1} - b_{i-1} \varphi_i \quad (\text{IV}_3)$

l'équation générale s'écrit dans :

$$\begin{aligned} A_i (a_{i-1} - b_{i-1} \varphi_i) + B_i \varphi_i + C_i \varphi_{i+1} &= D_i \\ \varphi_i (B_i - A_i b_{i-1}) &= D_i - C_i \varphi_{i+1} - A_i a_{i-1} \\ \varphi_i &= \frac{D_i - A_i a_{i-1}}{B_i - A_i b_{i-1}} - \frac{C_i}{B_i - A_i b_{i-1}} \varphi_{i+1} \quad (\text{IV}_4) \end{aligned}$$

avec $a_0 = b_0 = 0$

Compte tenu des équations (IV_3) et (IV_4) on déduit que :

$$a_i = \frac{D_i - A_i a_{i-1}}{B_i - A_i b_{i-1}} \quad \text{et} \quad b_i = \frac{C_i}{B_i - A_i b_{i-1}}$$

avec $i = 1, 2, \dots, n-1$

La résolution du système s'effectue alors comme suit :

- on détermine tous les facteurs a_i, b_i , de $i = 1$ à $i = n-1$
- puis on détermine les inconnues φ_i en utilisant la formule en partant de φ_{n-1} (φ_n connu) jusqu'à φ_1 .

2) Erreurs et stabilité :

On démontre que l'erreur introduite à un pas donné devient après un nombre suffisamment élevé de pas de la forme :

$$E \approx \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^n$$

Où α est l'erreur introduite à chaque pas de calcul et que cette erreur produit une erreur αE au cours du calcul au pas suivant. Cette formule est prise dans le cas le moins favorable.

Vu l'importance que prend la notion de stabilité dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, on est amené à classer les méthodes en trois catégories :

- Méthode Systématiquement stable.
- Méthode systématiquement instable.
- Méthodes Stables sous réserve de conditions à remplir.

Exemple :

Dans le cas de la résolution de l'équation hyperbolique suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

En appliquant les formules d'approximation, on a :

$$\theta [\varphi_{x+\delta x, t+\delta t} - 2\varphi_{x, t+\delta t} + \varphi_{x-\delta x, t+\delta t}] + (1-\theta) [\varphi_{x+\delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\delta x, t} + \varphi_{x-\delta x, t}] = \frac{\delta x^2}{c^2 \delta t^2} [\varphi_{x, t+\delta t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x, t-\delta t}]$$

Cette Methode est inconditionnellement stable si : $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$,
 stable pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ avec la condition : $\delta t^2 \leq \frac{\delta x^2}{2c^2(1-\theta)}$

Dans le cas où $\theta = 0$, la méthode est stable pour : $\delta t^2 \leq \frac{\delta x^2}{2c^2}$

Ceci nous permet de constater que δx étant choisi suffisamment faible pour minimiser les erreurs de troncature, la valeur de δt risque d'être choisie beaucoup plus faible que ne l'exige le souci de maintenir les erreurs de troncature dans les limites acceptables, ceci pour remplir les conditions de stabilité.

De ce fait, le nombre de cycles sera plus élevé et donc le temps de calcul plus long.

Si l'on considère le problème du point de vue temps de calcul, pour minimiser ce temps, il faudra augmenter les variables incrémentales δx et δt mais cela entraîne une augmentation des erreurs de troncature.

Il apparaît donc que les deux impératifs, celui de minimiser le temps de calcul d'une part, et celui de minimiser les erreurs de troncature d'autre part, sont contradictoires et donc que le choix d'un compromis s'impose.

Ce compromis s'avère difficile à trouver vu que l'on ne dispose d'aucune information sur l'amplitude des dérivées intervenant dans la détermination des erreurs de troncature. Il est donc difficile d'estimer la qualité d'une solution numérique.

Cependant, dans la plupart des problèmes, on cherche à estimer la valeur des dérivées ne figurant pas dans la formule d'approximation des différences finies et de déterminer la valeur de l'incrément δt en tenant compte de la nature des problèmes physiques.

3) Traitement des équations hyperboliques sur calculateur numérique:

Exemple :

Soit l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Pour traiter cette équation, on dispose de deux méthodes :

a) METHODE EXPLICITE :

En réécrivant l'équation (III₁), avec $\theta = 0$ et en tenant compte des erreurs de troncature, on a :

$$\frac{1}{\delta x^2} (\varphi_{x+\delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\delta x, t}) + \varepsilon = \frac{1}{c^2 \delta t^2} (\varphi_{x, t+\delta t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x, t-\delta t}) + \varepsilon' \times \frac{1}{c^2}$$

En posant $\delta = \frac{c^2 \delta t^2}{\delta x^2}$ l'équation devient :

$$\varphi_{x, t+\delta t} = \delta \varphi_{x+\delta x, t} + \delta \varphi_{x-\delta x, t} + 2(1-\delta) \varphi_{x, t} - \varphi_{x, t-\delta t} + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{c^2}\right) c^2 \delta t^2$$

Calculons les erreurs de troncature :

$$E = \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{c^2}\right) c^2 \delta t^2$$

(IV₅)

Avec :
$$\varepsilon = -\frac{\delta x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right) - \frac{\delta x^4}{360} \left(\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} \right) - \dots$$

$$\varepsilon' = -\frac{\delta t^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \right) - \frac{\delta t^4}{360} \left(\frac{\partial^6 \varphi}{\partial t^6} \right) - \dots$$

D'autre part, sachant que :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{1}{c^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} ; \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} = \frac{1}{c^6} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial t^6}$$

L'erreur E s'écrit alors :

$$E = \left(\frac{\delta t^4}{12} - \frac{\delta t^2 \cdot \delta x^2}{12c^2} \right) \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \right) + \left(\frac{\delta t^6}{360} - \frac{\delta t^2 \cdot \delta x^4}{360c^2} \right) \left(\frac{\partial^6 \varphi}{\partial t^6} \right) + \dots$$

Si la valeur δt^2 est choisie telle que : $\delta t^2 = \frac{\delta x^2}{c^2}$ alors l'erreur de troncature E devient nulle.

La remarque suivante importante pourra alors être faite :

Pour $\delta t^2 = \frac{\delta x^2}{c^2}$ l'erreur de troncature s'annule sans qu'on ait la stabilité de calcul. Cette stabilité est obtenue pour la valeur $\delta t^2 = \frac{\delta x^2}{2c^2}$ qui entraîne une erreur de troncature.

Ceci montre que parfois, il y a incompatibilité entre le fait de minimiser les erreurs de troncature et de satisfaire en même temps la condition de stabilité. La condition de stabilité s'écrit : $\delta t^2 \leq \frac{\delta x^2}{2c^2}$

Diagramme de résolutions :

Dans la formule (IV 5) la seule inconnue est le potentiel $\varphi_{x,t+\delta t}$ au temps $t + \delta t$.

La formule (IV 5) peut être écrite sous la forme suivante en ; négligent les erreurs de troncature :

$$\varphi_{I,J+1} = \lambda \varphi_{I+1,J} + \lambda \varphi_{I-1,J} + 2(1-\lambda) \varphi_{I,J} - \varphi_{I,J-1}$$

Ceci pour facilité la programmation.

Notons que pour le premier cycle de calcul, on utilise la formule suivante

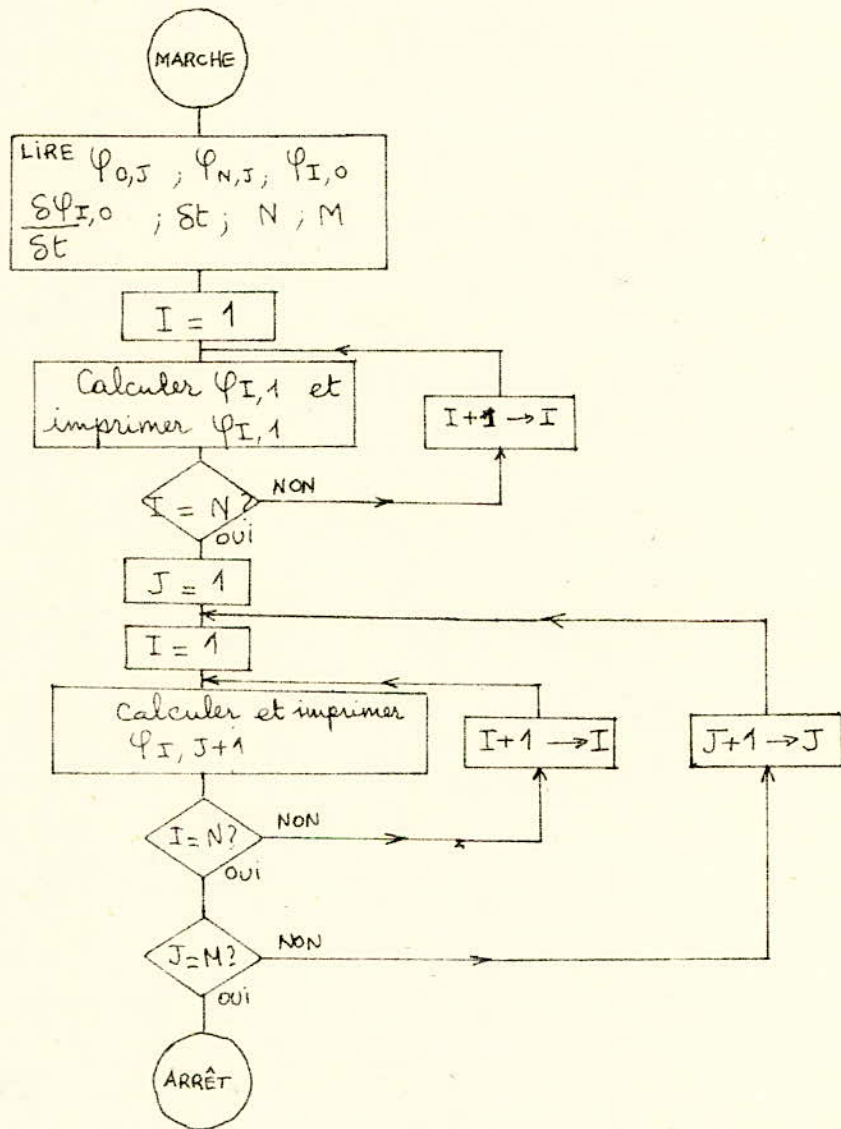
(ceci du fait que la formule (III 3) implique la connaissance en deux point du potentiel précédent le point considéré.)

$$\varphi_{x,t} = \varphi_{x,0} + \delta t \cdot \frac{\partial \varphi_{x,0}}{\partial t}$$

Qui s'écrit :

$$\varphi_{I,1} = \varphi_{I,0} + \delta t \cdot \frac{\partial \varphi_{I,0}}{\partial t}$$

A partir de ces deux équations, le bloc diagramme de résolution du problème hyperbolique considéré est donné par la figure (2)



TRAITEMENT DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES
 SUR CALCULATEUR ELECTRONIQUE ARITHMETIQUE : Methodes explicites

fig 2

b) Méthode implicite:

La méthode implicite est inconditionnellement stable. Mais cette méthode introduit une complication du calcul.

En effet, on est amené à résoudre un système d'équation à chaque pas de calcul.

On utilise généralement la formule suivante:

$$\frac{1}{2+\theta} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} [(\varphi_{x+\Delta x, t+\Delta t} - 2\varphi_{x, t+\Delta t} + \varphi_{x-\Delta x, t+\Delta t}) + \theta(\varphi_{x+\Delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\Delta x, t}) + (\varphi_{x+\Delta x, t-\Delta t} - 2\varphi_{x, t-\Delta t} + \varphi_{x-\Delta x, t-\Delta t})]$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} (\varphi_{x, t+\Delta t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x, t-\Delta t})$$

Cette formule peut s'écrire en posant: $r = \frac{2+\theta}{c^2 \Delta t^2} \cdot \Delta x^2$

$$\varphi_{x+\Delta x, t+\Delta t} - (2+r)\varphi_{x, t+\Delta t} + \varphi_{x-\Delta x, t+\Delta t} = -\theta\varphi_{x+\Delta x, t} + 2(\theta+r)\varphi_{x, t} - \theta\varphi_{x-\Delta x, t} - \varphi_{x+\Delta x, t-\Delta t} + (2+r)\varphi_{x, t-\Delta t} - \varphi_{x-\Delta x, t-\Delta t} \quad (IV_6)$$

équation qui contient trois inconnus: $\varphi_{x+\Delta x, t+\Delta t}$, $\varphi_{x, t+\Delta t}$, $\varphi_{x-\Delta x, t+\Delta t}$

pour pouvoir résoudre le système obtenu, on utilise la méthode analytique présentée au début de ce chapitre.

En remarquant que l'équation (IV₆) est semblable à l'équation (IV₂) c'est à dire l'équation:

$$C_i \varphi_{i+1} + B_i \varphi_i + A_i \varphi_{i-1} = D_i \text{ avec } i = 1, \dots, n-1$$

avec les relations suivantes:

$$A_i = 1$$

$$B_i = -(2+r), \quad C_i = 1$$

$$D_i = -\theta\varphi_{x+\Delta x, t} + 2(\theta+r)\varphi_{x, t} - \theta\varphi_{x-\Delta x, t} - \varphi_{x+\Delta x, t-\Delta t} + (2+r)\varphi_{x, t-\Delta t} - \varphi_{x-\Delta x, t-\Delta t}$$

Pour la résolution d'un tel système, il faut déterminer (en sachant que $a(0) = b(0) = 0$)

$$a_i = \frac{D_i - A_i a_{i-1}}{B_i - A_i b_{i-1}} = - \frac{D_i - a_{i-1}}{2+r+b_{i-1}} \text{ avec } i = 1, \dots, n-1$$

$$b_i = \frac{C_i}{B_i - A_i b_{i-1}} = - \frac{1}{2+r+b_{i-1}}$$

Pour simplifier la programmation, D_i peut s'écrire sous la forme;

$$D(I) = -\theta\varphi_{I+1, J} + 2(\theta+r)\varphi_{I, J} - \theta\varphi_{I-1, J} - \varphi_{I+1, J-1} + (2+r)\varphi_{I, J-1} - \varphi_{I-1, J}$$

On déduit alors :

$$\varphi_i = \frac{D_i - A_i a_{i-1}}{B_i - A_i b_{i-1}} = \frac{C_i}{B_i - A_i b_{i-1}} \cdot \varphi_{i+1} = - \frac{D_i - a_{i-1}}{2+r+b_{i-1}} + \frac{1}{2+r+b_{i-1}} \varphi_{i+1}$$

le potentiel s'écrit alors :

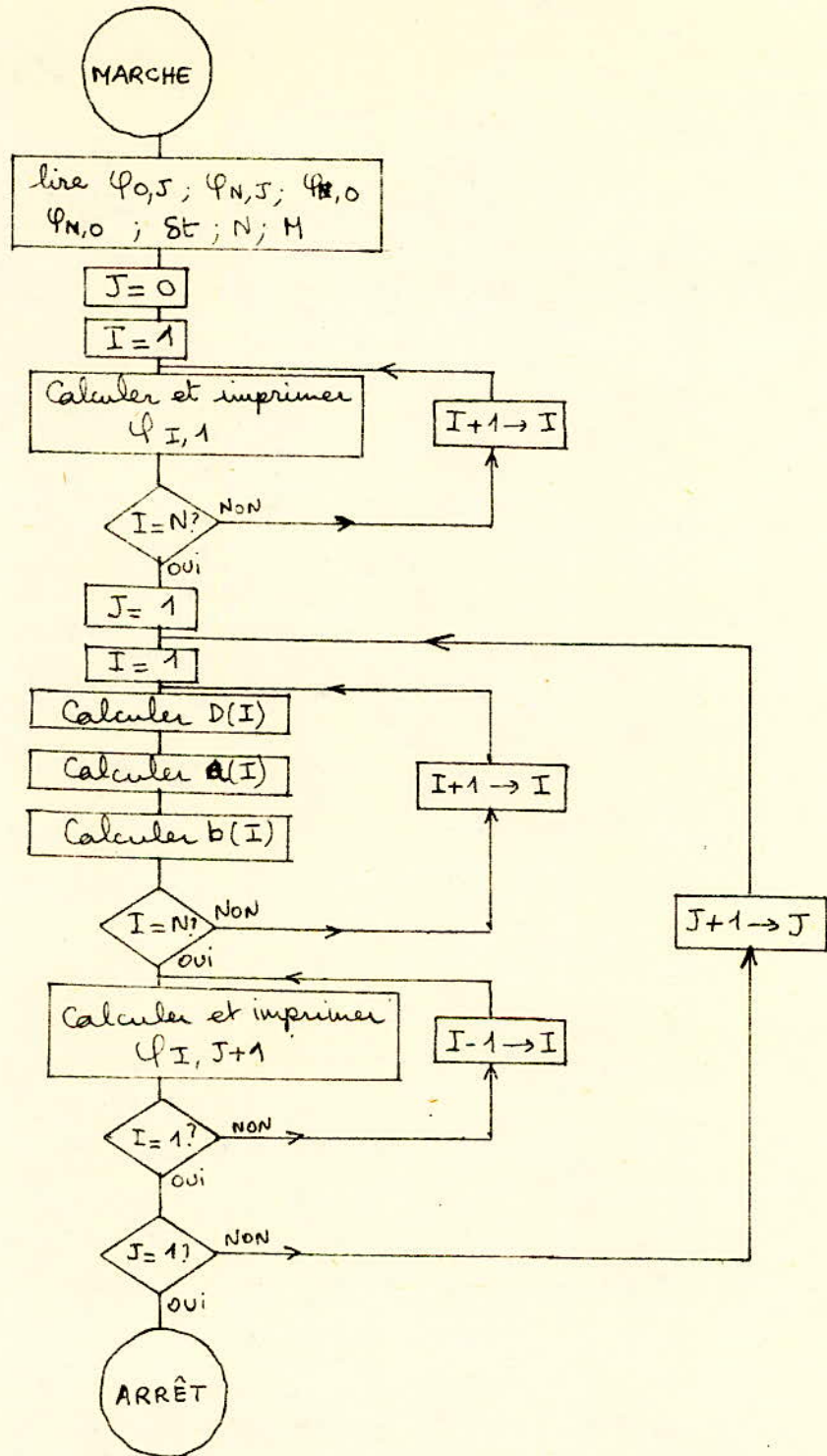
$$\varphi_{I, J+1} = - \frac{D(I) - a(I-1)}{2+r+b(I-1)} + \frac{1}{2+r+b(I-1)} \cdot \varphi_{I+1, J+1}$$

On commence évidemment par calculer: $\psi_{N-1, J+1}$ vu que $\psi_{N, J+1}$
est connu par les conditions aux limites.

Notons que pour le premier cycle on utilise la formule de:

$$\psi_{I, 0} = \psi_{I, J} + \delta t \cdot \frac{\partial \psi_{I, 0}}{\partial t}$$

Le bloc diagramme permettant de résoudre implicitement ce problème est donné par la figure (3).



TRAITEMENT DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES
SUR CALCULATEUR ELECTRONIQUE ARITHMETIQUES. Méthodes implicites

fig 3

-o- C H A P I T R E V -o-

METHODES ANALOGIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS
AUX DERIVEES PARTIELLES DU TYPE HYPERBOLIQUE

INTRODUCTION

- 1) Calcul analogique parcourants continus
- 2) Amplificateur operationnel
- 3) Methode utilisant des operateurs de difference sur les variables d'espace et sur les variables temporelles
- 4) Methode utilisant des operateurs de difference sur les variables d'espace et d'operateurs de differentiation sur la variable temporelle
- 5) Echelles

RESOLUTION ANALOGIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES:
PARTIELLES DU TYPE HYPERBOLIQUE:

-I N T R O D U C T I O N:

L'étude du traitement des equations Hyperbolique sur calculateur Electronique Aréthmétique met en évidence les difficultés pratiques de résolution de ces équations, et ceci particulièrement lorsque les conditions aux limites présentent une certaine complexité.

Dans certains cas particuliers, des méthodes analogiques peuvent être utilisées avec profit pour fournir une première solution approximative du problème. Deux grandes possibilités sont offertes par deux telles méthodes, en raison même des possibilités d'interprétation directe qui résultent de leur application. Tous particulièrement les possibilités de discussion paramétrique sont un grand avantage de ces méthodes, en dépit de leur relative imprécision.

Les méthodes de résolution analogique des équations aux dérivées partielles peuvent être classées en deux groupes correspondant successivement aux:

1° Méthodes comportant l'utilisation d'opérateurs de différence sur les variables d'espace et sur la variable temporelle.

2° Méthodes comportant l'utilisation d'opérateurs de différence sur les variables d'espace et d'opérateurs de différenciation sur la variable temporelle

Ces deux méthodes faisant parties de la méthode des réseaux Maillés.

La méthode des réseaux maillé est une transposition directe de la technique d'utilisation des opérateurs de différence.

Elle consiste, en faite, à remplacer l'étude d'un problème à constantes réparties, dans le comportement est représenté par une équation aux dérivées partielles, par un système à constantes localisées dans le comportement est représenté par un système d'équations ALGÈBRE LIÉES Linéaires.

Ceci revient, en faite, à remplacer l'étude d'un champs physique en tous point du domaine considéré par l'étude de ce champs en un nombre discret de points correspondant aux noeuds du maillage Géométrique superposé au domaine à étudier, étant bien entendu que la valeur dépendante étudiée en chacun des noeuds de ce maillage est remplacé par l'étude d'une tension électrique mesurée aux bornes d'une résistance constituant un circuit électrique à constantes localisées.

Nous utilisons pour cette méthode le calcul analogique parcourants continus

1°- Calcul Analogique par Courants continus:

Le calcul analogique par courants continus consiste à réaliser un circuit dans lequel les tensions, prises par-rapport à la masse, en des points bien choisis, sont proportionnelles aux inconnues du problème.

Les Simulateurs analogiques ont pour rôle de simuler électriquement des grandeurs et des variables Physiques qui sont représentées sous forme de tensions variable dans le temps proportionnellement aux grandeurs qu'elles simulent.

Les amplificateurs continus utilisés dans ces simulateurs permettent d'effectuer la plupart des opérations habituelles (Addition, Soustraction,

Multiplication, Division, intégration, Dérivation, Etc.....)

Pour cette raison, ils sont appelés amplificateurs opérationnels. L'amplificateur opérationnel est la cellule de base du calcul analogique.

Nous allons donner un bref aperçu sur l'amplificateur opérationnel.

2° Amplificateur Opérationnel:

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur continu dont les caractéristiques générales sont les suivantes:

- Gain très élevé
- Impédance d'entrée très élevée
- Tension de sortie nulle pour une tension d'entrée nulle
- Linéarité aussi grande que possible, dans le domaine d'utilisation
- Réponse en fréquence couvrant une bande passante aussi large que possible
- Niveau de bruit négligeable.

Il existe plusieurs montages fondamentaux d'un amplificateur opérationnel.

Avec des amplificateurs opérationnels bouclés, nous pouvons obtenir le schéma d'un:

- Amplificateur inverseur (fig 4a)
- Amplificateur non inverseur
- Sommateur inverseur (fig 4b)
- Sommateur non inverseur
- Intégrateur (fig 4c) , Sommateur intégrateur fig 4d
- Dérivateur
- Comparateur

D'autres montages un peu plus complexes, peuvent être réalisés avec des amplificateurs opérationnels tels que le multiplicateur, le diviseur, et la Mémoire Analogique (fig 4e)

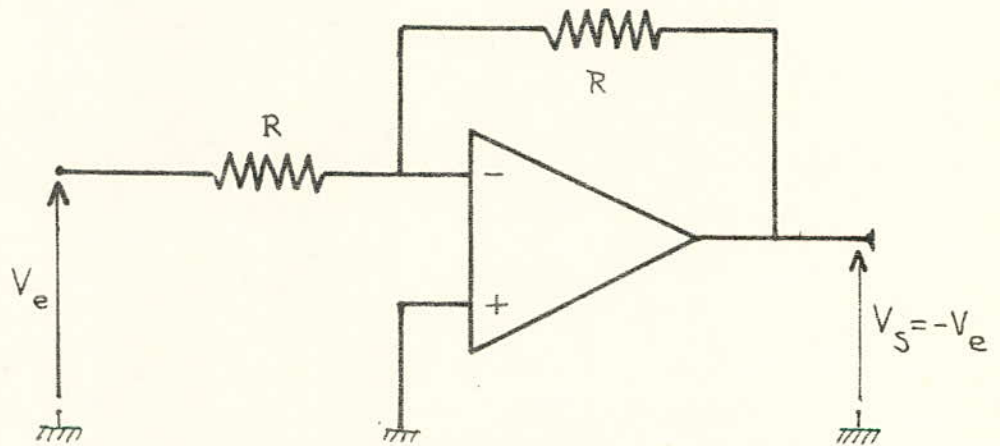


Fig 4 a Montage inverseur

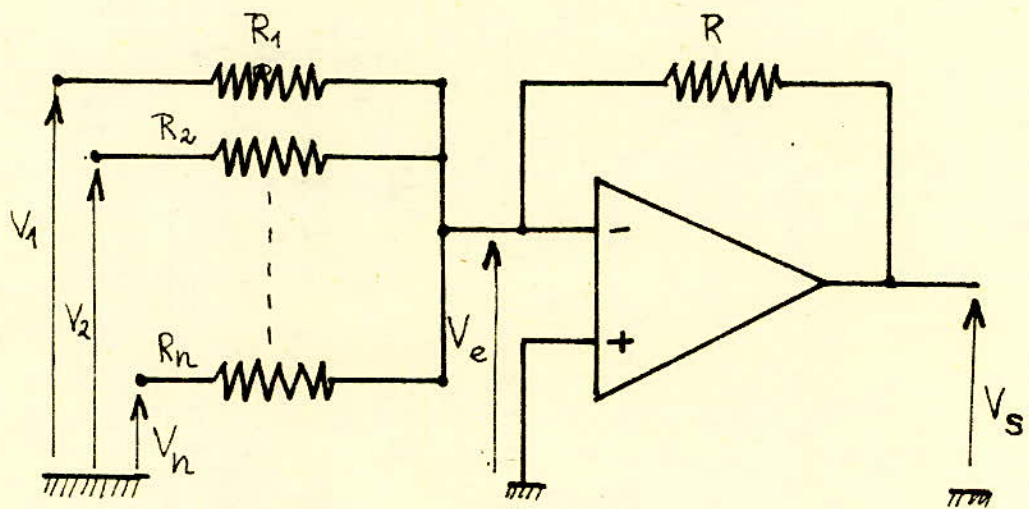


Fig 4 b Opérateur linéaire

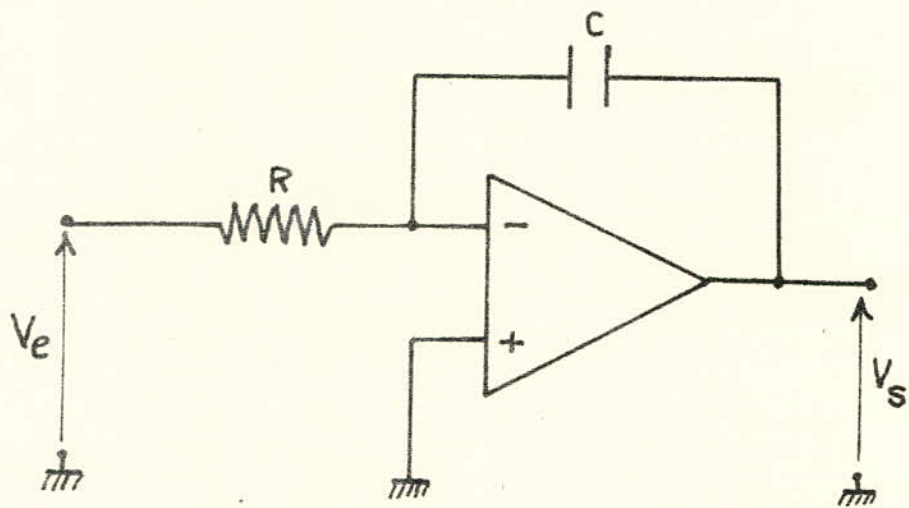


fig 4c Montage intégrateur

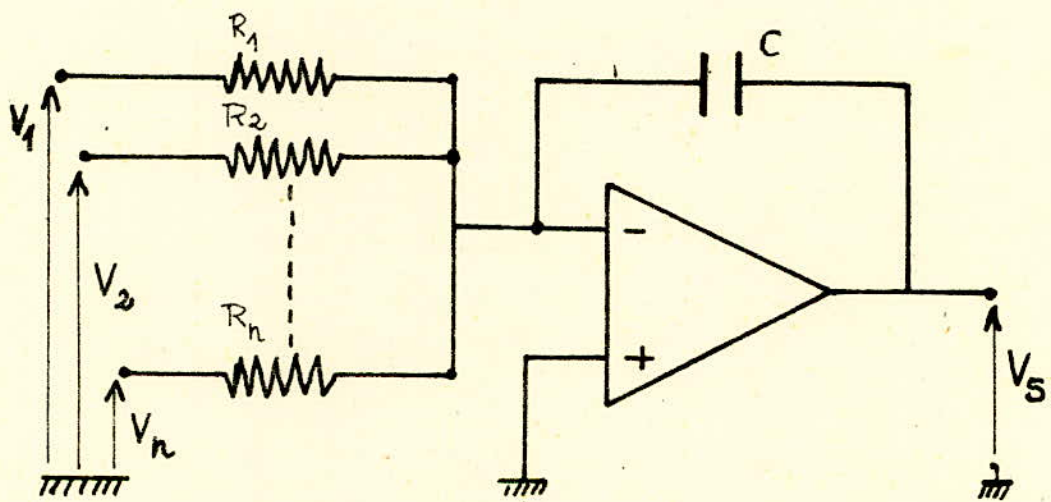


fig 4 d Montage Sommateur intégrateur.

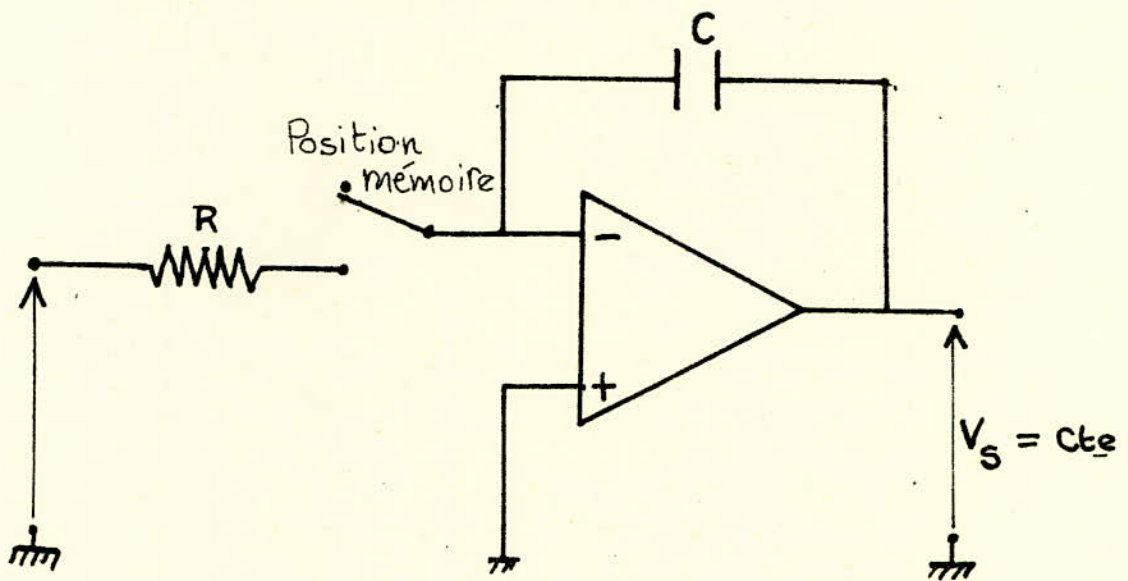


fig 4 e Mise en mémoire

Après ces généralités, nous allons étudier chacune des méthodes analogiques citées ci-dessus.

3°)- Méthode utilisant des opérateurs de différence sur les variables d'espace et sur la variable temporelle.

Soit à résoudre l'équation d'onde à une dimension:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

On a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{(\varphi_{x+\delta x, t+\delta t} - 2\varphi_{x, t+\delta t} + \varphi_{x-\delta x, t+\delta t}) + \theta(\varphi_{x+\delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\delta x, t}) + (\varphi_{x+\delta x, t-\delta t} - 2\varphi_{x, t-\delta t} + \varphi_{x-\delta x, t-\delta t})}{(2+\theta)\delta x^2}$$

avec $\theta \geq 0$

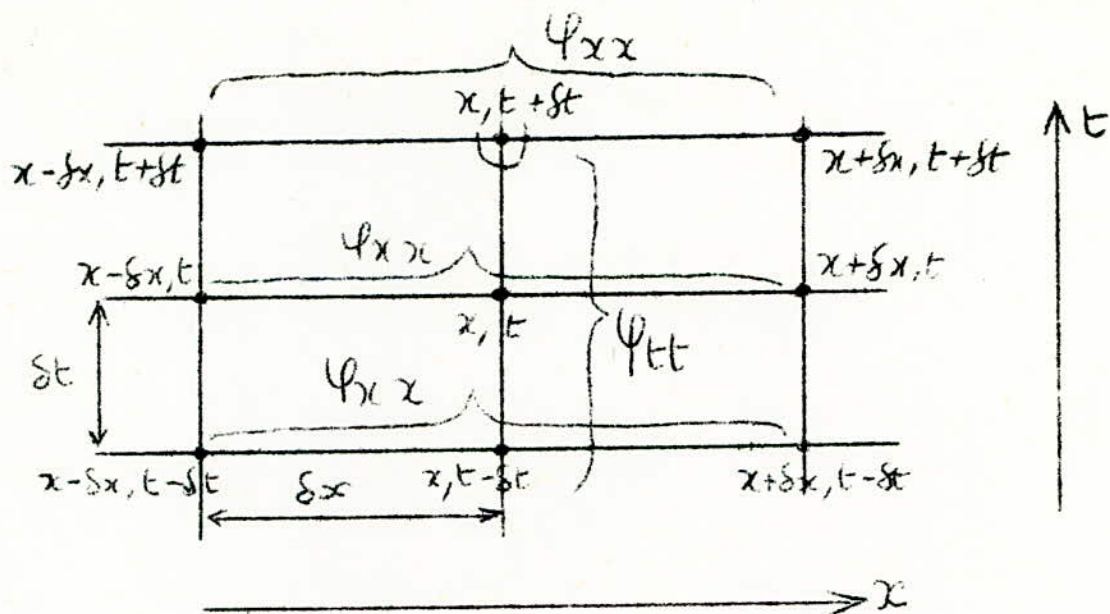
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{(\varphi_{x, t+\delta t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x, t-\delta t})}{\delta t^2}$$

En utilisant ces opérateurs de différence finie, on arrive à l'équation algébrique suivante:

$$\frac{1}{(2+\theta)\delta x^2} [(\varphi_{x+\delta x, t+\delta t} - 2\varphi_{x, t+\delta t} + \varphi_{x-\delta x, t+\delta t}) + \theta(\varphi_{x+\delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\delta x, t}) + (\varphi_{x+\delta x, t-\delta t} - 2\varphi_{x, t-\delta t} + \varphi_{x-\delta x, t-\delta t})]$$

$$= \frac{1}{\delta t^2} (\varphi_{x, t+\delta t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x, t-\delta t}) \quad (I_1)$$

qui est symbolisée par le schéma suivant:



Comme les potentiels à l'instant $t - \delta t$ et t sont, soit des conditions initiales, soit correspondent à des potentiels précédemment calculés (au cours des étapes de calcul précédentes), l'équation $\nabla^2 \psi$ contient trois valeurs inconnues:

$$\psi_{x+\delta x, t+\delta t} ; \psi_{x, t+\delta t} \quad \text{et} \quad \psi_{x-\delta x, t+\delta t}$$

En transformant l'équation (), on obtient:

$$\begin{aligned} & (\psi_{x+\delta x, t+\delta t} - 2\psi_{x, t+\delta t} + \psi_{x-\delta x, t+\delta t}) + \theta (\psi_{x+\delta x, t} - 2\psi_{x, t} + \\ & \psi_{x-\delta x, t}) + (\psi_{x+\delta x, t-\delta t} - 2\psi_{x, t-\delta t} + \psi_{x-\delta x, t-\delta t}) = \end{aligned}$$

$$\frac{(2+\theta)\delta x^2}{c^2 \delta t^2} (\psi_{x, t+\delta t} - 2\psi_{x, t} + \psi_{x, t-\delta t}).$$

On pose $s = \frac{(2+\theta)\delta x^2}{c^2 \delta t^2}$, l'équation devient:

$$\begin{aligned} & \psi_{x+\delta x, t+\delta t} - (2+s)\psi_{x, t+\delta t} + \psi_{x-\delta x, t+\delta t} = -\theta \psi_{x+\delta x, t} \\ & + 2(\theta-s)\psi_{x, t} - \theta \psi_{x-\delta x, t} - \psi_{x+\delta x, t-\delta t} + (2+s)\psi_{x, t-\delta t} \\ & + \psi_{x-\delta x, t-\delta t}. \end{aligned}$$

On aboutit donc à une équation du type :

$$\begin{aligned}
 & - (2+s) \varphi_{x,t+st} = -\varphi_{x+sx,t+st} - \varphi_{x-sx,t+st} \\
 & - \theta \varphi_{x+sx,t} + 2(\theta-s) \varphi_{x,t} - \theta \varphi_{x-sx,t} \\
 & - \varphi_{x+sx,t-st} + (2+s) \varphi_{x,t-st} + \varphi_{x-sx,t-st}
 \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
 -\varphi_{x,t+st} &= -\frac{1}{2+s} \varphi_{x+sx,t+st} - \frac{1}{2+s} \varphi_{x-sx,t} \\
 + \frac{\theta}{2+s} \varphi_{x+sx,t} &+ \frac{2(\theta-s)}{2+s} \varphi_{x,t} - \frac{\theta}{2+s} \varphi_{x-sx,t} \\
 - \frac{1}{2+s} \varphi_{x+sx,t-st} &+ \varphi_{x,t-st} + \frac{1}{2+s} \varphi_{x-sx,t-st}.
 \end{aligned}$$

sont :

$$\begin{aligned}
 -\varphi_{x,t+st} &= \alpha_1 \varphi_{x+sx,t+st} + \alpha_2 \varphi_{x-sx,t+st} \\
 & + \alpha_3 \varphi_{x+sx,t} + \alpha_4 \varphi_{x,t} + \alpha_5 \varphi_{x-sx,t} \\
 & + \alpha_6 \varphi_{x+sx,t-st} + \alpha_7 \varphi_{x,t-st} \\
 & + \alpha_8 \cdot \varphi_{x-sx,t-st}.
 \end{aligned}$$

Dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ sont des constantes positives ou négatives.
 Une équation de ce type est écrite en chacun des points du domaine.

En écrivant en chacun des nœuds une équation de ce genre et en utilisant des amplificateurs opérationnels, nous pouvons résoudre simultanément le système trouvé, et d'obtenir ainsi en chacun des points du maillage, la réponse du système physique aux perturbations représentées par les conditions initiales ou les conditions aux limites.

Il conviendra donc de réaliser en chacun des nœuds un circuit électronique donné par la figure (5a).

Si certains coefficients α_i de l'équation (5a) sont négatifs, on précèdera l'entrée du sommateur de la figure (5a) par un changeur de signe (inverseur).

En étudiant le schéma de la figure (5a), nous pouvons dire que deux types de tension sont appliqués sur ce sommateur :

- d'une part, les tensions correspondants aux inconnues

$$\varphi_{x+\delta x, t+\delta t} \quad \text{et} \quad \varphi_{x-\delta x, t+\delta t}$$

qui sont obtenues à la sortie des opérateurs fonctionnels de sommation correspondant aux nœuds d'abscisse $x+\delta x$ et $x-\delta x$.

- d'autre part, six tensions qui sont obtenues à la sortie de mémoires analogiques permettant leur stockage après le calcul effectué au cours du pas précédent t et du pas $t-\delta t$.

En pratique, la validité de cette méthode analogique reposera essentiellement sur les caractéristiques des mémoires utilisées pour stocker les résultats correspondants aux deux pas de calcul précédant le pas considéré.

Pour réaliser un système analogique complet, on interconnectera comme l'indique la figure (5b), plusieurs circuits du type de la figure (5a). Ceci correspondra à la simulation d'un système uni dimensionnel.

Dans le schéma de la figure (5b), les tensions de référence V_{fi} sont de la forme:

$$\begin{aligned} V_{fi} = & \alpha_3 \varphi_{x+\delta x, t} + \alpha_4 \varphi_{x, t} + \alpha_5 \varphi_{x-\delta x, t} + \\ & \alpha_6 \varphi_{x+\delta x, t-\delta t} + \alpha_7 \varphi_{x, t-\delta t} + \alpha_8 \varphi_{x-\delta x, t-\delta t} \end{aligned}$$

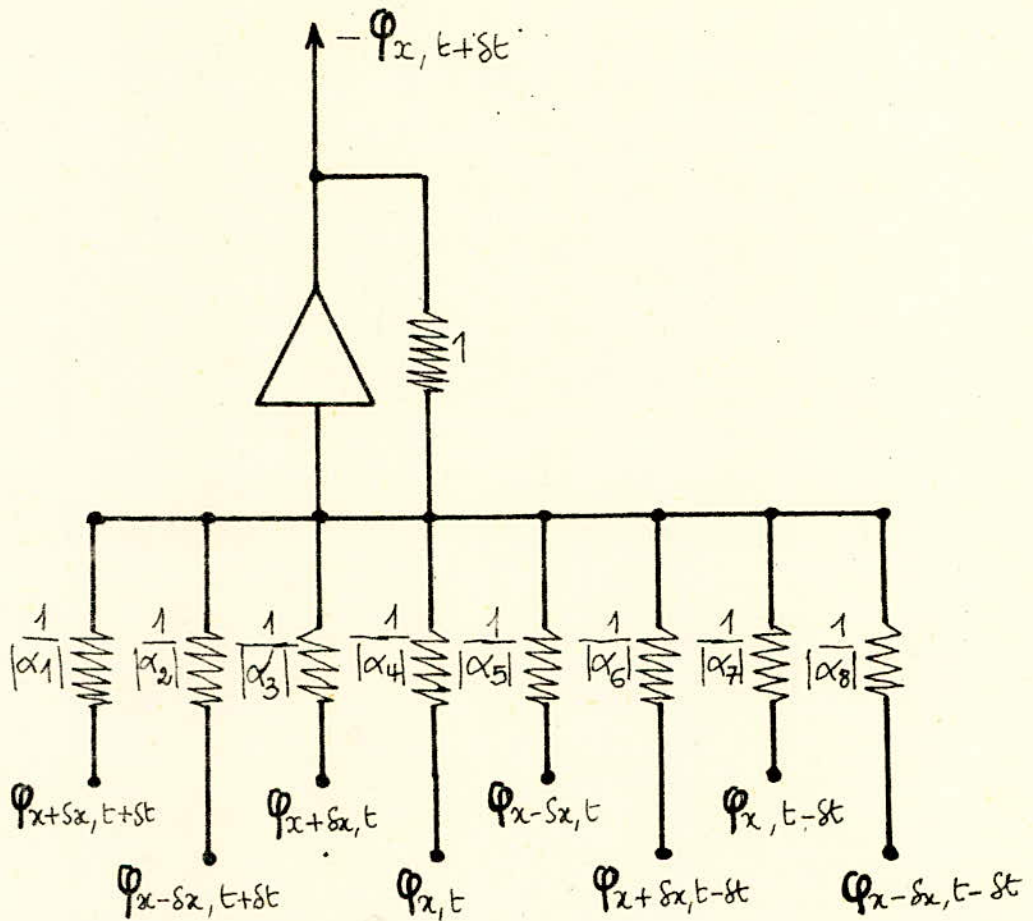
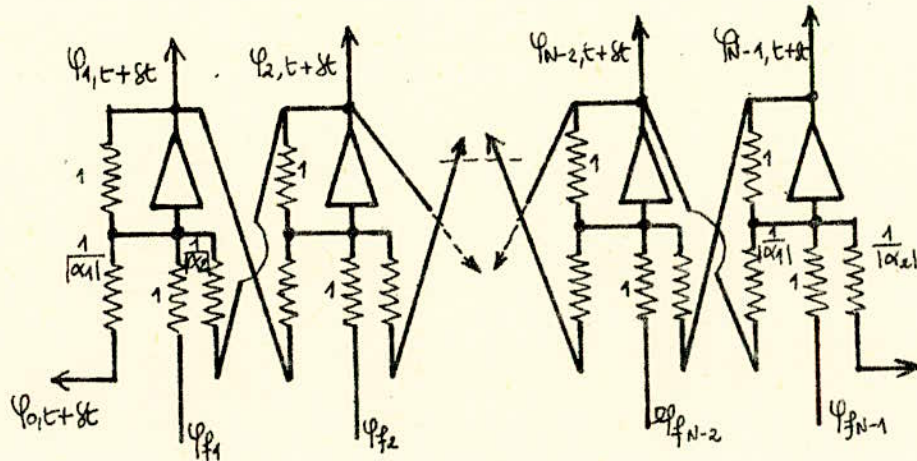


fig 5 a

Element de circuit servant à la
 résolution de l'équation $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$
 par la méthode utilisant des opérateurs de
 différence sur la variable d'espace et sur la
 variable temporelle.

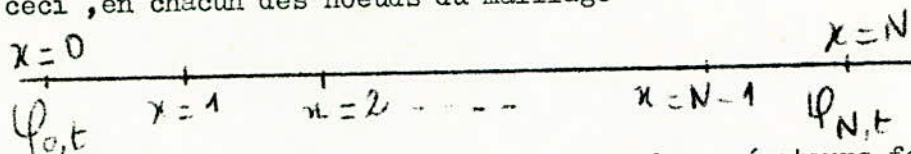
Fig 5b



Resolution analogique

: Methode comportant l'utilisation d'operateurs de difference sur la variable d'espace x et sur la variable temporelle t .

et ceci , en chacun des noeuds du maillage



On remarque aussi que la sortie de chacun des opérateurs fonctionnels est appliquée à l'entrée des opérateurs fonctionnels correspondants aux deux noeuds directement adjacents.

De ce fait , les opérations de programmation par application de la méthode ainsi décrite sont les suivantes :

1^o- Deux tensions électriques continues sont proportionnelles au potentiel aux deux extrémités du champ , et dans ce cas particulier , aux deux extrémités $x = 0$ et $x = N$, sont appliquées à l'instant $t + \delta t$.

2^o- les générateurs de tension permettant d'introduire les grandeurs φ_{f_i} en chacun des noeuds sont placés aux valeurs déterminées, soit par les conditions initiales , soit par la solution du pas de calcul précédent.

3^o- Les tensions apparaissant à la sortie de chacun des opérateurs fonctionnels sont mesurées et enregistrées. Elles sont proportionnelles au potentiel inconnu en chacun des noeuds à l'instant $t + \delta t$.

4^o- les générateurs de conditions aux limites sont réglés de façon à fournir de nouvelles valeurs correspondant aux limites pour le pas de calcul suivant .

5^o- les tensions d'alimentation φ_{f_i} sont alors remplacées par les valeurs obtenues en 3.

6^o- un nouveau système de solutions est recueilli en mesurant la tension à la sortie de chacun des opérateurs fonctionnels de sommation et sont à nouveau enregistrées .

7^o- ce processus est répété jusqu'à ce que la totalité du domaine de variation de la variable temporelle ait été recouvert.

Cette méthode peut-être appliquée à des problèmes bi- ou tri-dimensionnels, sous réserve de disposer d'un appareillage suffisant tant en ce qui concerne le nombre d'opérateurs fonctionnels qu'en ce qui concerne les organes de mémorisation.

4^e)- Méthode utilisant des opérateurs de différences sur les variables d'espace et d'opérateurs de différentiation sur la variable temporelle.

L'utilisation des opérateurs de différence sur toutes les variables aussi bien que les variables d'espace que la variable temporelle, conduit à une méthode analogique très voisine des méthodes mathématiques, qu'elles soient explicites ou implicites.

Par contre, en conservant à l'une des variables indépendantes sa forme continue, c'est à dire en utilisant par exemple sur la variable temporelle, des opérateurs de différentiation et non des opérateurs de différence, on aboutit à des méthodes d'une structure technologique plus élégante.

De plus, à cet avantage technologique, on peut adjoindre deux autres avantages:

- l'élimination des erreurs de troncature sur la variable temporelle.
- la possibilité d'obtenir rapidement la solution en chacun des ~~points~~ noeuds du maillage, cette solution apparaissant sous la forme d'une variation, en fonction du temps, du potentiel électrique recueilli en chacun des noeuds

Application de cette méthode:

soit à résoudre l'équation : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{x+\Delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\Delta x, t}}{\Delta x^2}$$

l'équation devient :

$$\frac{\varphi_{x+\Delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\Delta x, t}}{\Delta x^2} = K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{K \Delta x^2} (\varphi_{x+\Delta x, t} - 2\varphi_{x, t} + \varphi_{x-\Delta x, t}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

d'où le circuit électronique permettant la résolution analogique de ce problème donné par la figure (6).

En considérant l'équation (), ceci revient à réécrire en chacun des noeuds l'équation :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

sous forme :

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{K \delta x^2} \int_0^t \int_0^t [\varphi_{x+\delta x}(t) + \varphi_{x-\delta x}(t) - 2\varphi_x(t)] dt \cdot dt$$

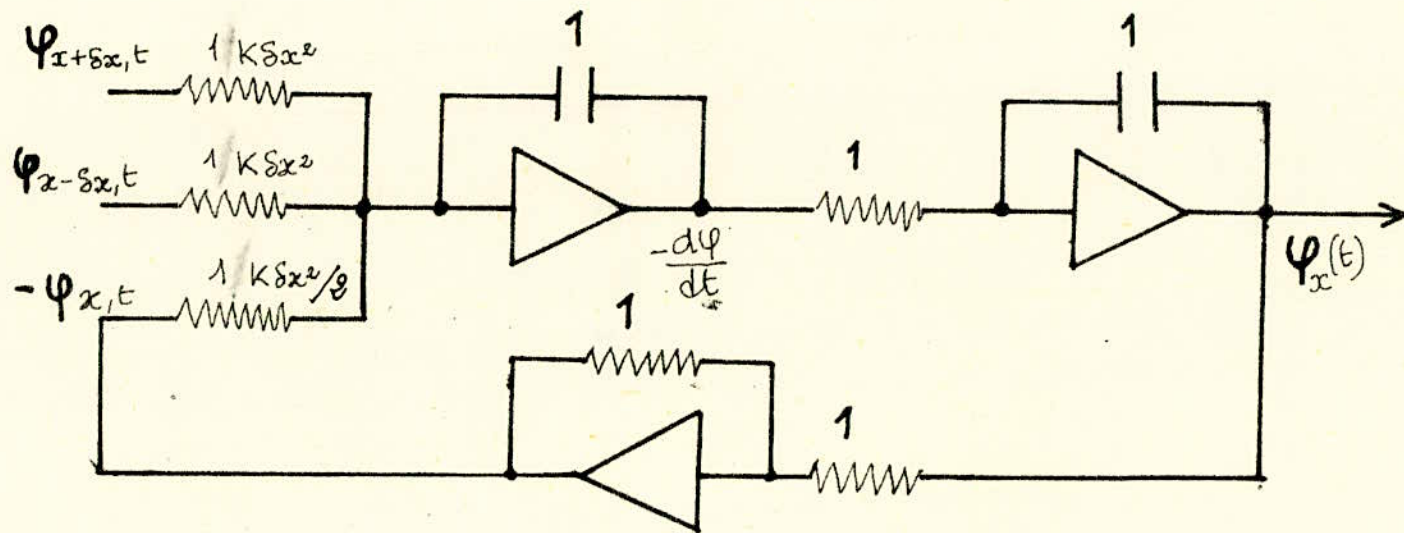


fig 6

Resolution Analogique: Methode utilisant des operateurs de difference sur la variable d'espace uniquement.

5°)- Echelles

Nous savons que le calcul analogique ~~SUBSTITUE~~ substitue au calcul sur des nombres, une opération physique donnant lieu à des mesures sur des grandeurs : tensions ou courants.

Ceci entraîne donc la nécessité de choisir des échelles d'amplitude et de temps. Pour ce choix d'échelles, il faut tenir compte de deux impératifs :

- d'une part, il faut que le choix des échelles rende impossible une surcharge des éléments des circuits .

- d'autre part, il faut satisfaire à la condition que le niveau maximum de tension dans les réseaux analogiques soit le plus près possible de la tension adoptée pour base .

a) echelles d'amplitude :

Nous avons à notre disposition deux méthodes :

- la première méthode exprime le fait que les sorties des composants du circuit sont considérées comme des tensions .

- la deuxième méthode exprime le fait que les sorties des composants du circuit sont considérées comme des nombres sans dimensions.

Dans le cas de la première méthode, la variable machine (tension de sortie des amplificateurs) varie dans un domaine ($-E_M$, $+E_M$) tandis que la variable analogue du système physique varie dans le domaine (x_m , x_M)

Ière Méthode:

Soit E_{max} l'amplitude maximum en valeur absolue de la variable machine en sortie . Les variables d'entrées sont alors exprimées par rapport à cette valeur soit E_i/E_M . Les variables d'entrées varient dans le domaine $-1 < x < +1$.

On peut alors exprimer l'analogie si :

$$\frac{x}{x_{max}} = \frac{e}{E_M}$$

ou x est la variable du système physique
 e est la variable du circuit analogique.

IIème Méthode:

La variable du système physique x est reliée à la variable machine e par la relation $e = K.x$, K étant le facteur d'échelle.

Généralement, pour déterminer le facteur d'échelle K on utilise, la relation

$$V_{\max} = K \cdot x_{\max} \qquad K = \frac{V_{\max}}{x_{\max}}$$

où x_{\max} est la valeur maximum de la variable du système,
 V_{\max} est la tension maximum à la sortie .

b)- Echelle de temps:

La mise à l'échelle des temps vise à étirer ou à accélérer l'évolution du phénomène étudié de façon à satisfaire les conditions imposées par l'équipement utilisé et par la facilité de sa résolution .

On peut appliquer l'une des deux méthodes suivantes:

Ière Méthode:

On fait un changement de variable indépendant.

Soit T le temps machine et t le temps réel :

$$T = \alpha t$$

on en déduit:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(T/\alpha)} = \alpha \frac{d}{dT} \qquad \frac{d^n}{dt^n} = \alpha^n \frac{d^n}{dT^n}$$

Si $\alpha > 1$, le phénomène de résolution est ralenti , par contre si $\alpha < 1$ il est accéléré .

Cette méthode mélange les deux opérations de mise à l'échelle . On préfère utiliser la deuxième méthode .

IIème Méthode:

On transforme le circuit de résolution de façon à multiplier toutes les constantes de temps par un facteur adéquat.

Dans le cas d'un intégrateur, il accomplit l'opération :

$$e_o = - \frac{1}{RC} \int_0^{t_1} e_i \cdot dt + E_o$$

$$\text{or } T = \alpha t$$

$$\text{donc } e_o = - \frac{1}{RC\alpha} \int_0^{t_1} e_i dT + E_o$$

Cette méthode est généralement plus utilisée car elle conciste en une opération purement mécanique.

En effet, il suffit de changer les constantes de temps des intégrateurs en modifiant la résistance d'entrée, et par suite du gain de l'intégrateur . Pour changer donc l'échelle des temps, il suffit de modifier, dans un même rapport, les gains de tous les intégrateurs.

-o- C H A P I T R E VI -o-

SIMULATION ANALOGIQUE DE L'EQUATION DES CORDES
VIBRANTES

- 1) Etablissement de l'équation des cordes vibrantes
- 2) Application de la méthode de simulation analogique utilisant des opérateurs de différence sur la variable d'espace uniquement.

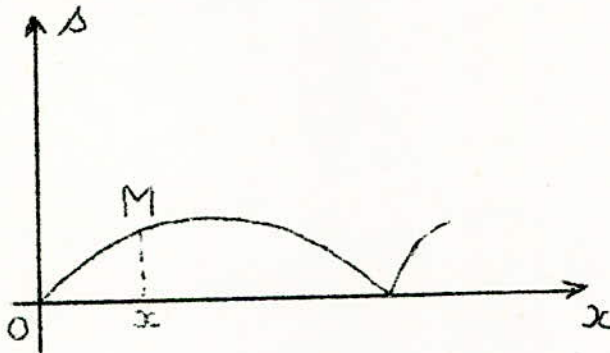
SIMULATION DE L'EQUATION DES CORDES
VIBRANTES

1°- Etablissement de l'équation des cordes vibrantes :

On entend par corde un fil flexible et élastique.

Pour établir l'équation, considérons un fil de longueur l fixé à ses extrémités aux points $x = 0$ et $x = l$.

Soit le schéma suivant:

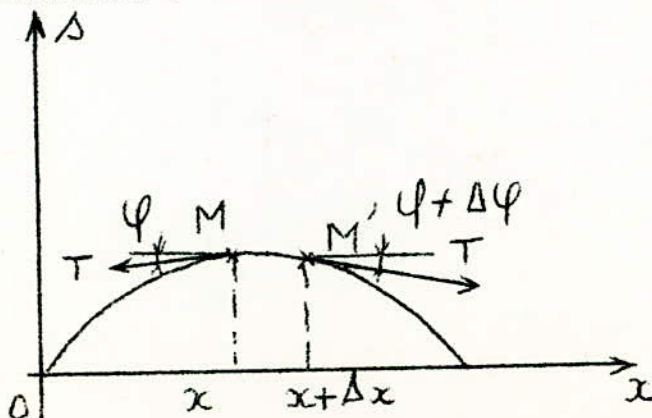


Si l'on écarte la corde de sa position d'équilibre et puis on la relâche, alors les points de la corde sont animés d'un certain mouvement, on dit que la corde vibre.

Le problème consiste alors à déterminer la forme de la corde pour tout instant et à déterminer la loi du mouvement de chacun de ses points en fonction du temps.

On considère que les points de la corde font de petits écarts par rapport à leur position d'équilibre. On admet donc que le mouvement des points de la corde s'effectue perpendiculairement à l'axe Ox et dans un même plan. Le mouvement de la corde est alors décrit par la fonction $s(x,t)$.

Considérons le schéma :



Puisqu'on considère de petits écarts, on peut supposer que la longueur de l'élément $\widehat{MM'}$ est égale à sa projection sur l'axe Ox soit Δx . On suppose aussi que la tension T est la même pour tous les points de la corde.

Considérons l'élément $\widehat{MM'}$ de la corde. Aux extrémités de cet élément agissent les forces T suivant la tangente à la corde. Soient les angles φ et $\varphi + \Delta\varphi$ angles formés par les tangentes à la corde aux points M et M' avec l'axe des x .

La projection sur l'axe Ox des forces agissant sur l'élément $\widehat{MM'}$ sera :

$$F = T \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin\varphi$$

Comme φ est petit, on peut assimiler le sinus de l'angle φ à la tangente de cet angle.

On a alors :

$$F = T \cdot \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg}\varphi$$

or la tangente à la corde en un point est la pente c'est à dire la dérivée de la fonction $s(x, t)$ par rapport à x soit :

$$F = T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg}\varphi = T \left(\frac{\partial s(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \right)$$

$$\text{or } \frac{\partial s(x + \Delta x, t)}{\partial x} = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} + \Delta x \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} + \varepsilon$$

d'où :

$$\frac{\partial s(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} = \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2}$$

$$F = T \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

D'autre part :
Avec $m = \rho \Delta x$

$F = m \gamma$
(ρ densité linéique de l'élément $\widehat{MM'}$
 Δx longueur de l'élément $\widehat{MM'}$)

$$\gamma = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\text{donc } F = \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\text{d'où : } \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

en posant : $\beta/T = C^2$

$$\text{On a donc : } \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

L'équation des cordes vibrantes étant établie, nous allons la simuler en utilisant la deuxième méthode de résolution analogique (méthode utilisant des opérations de différences uniquement sur la variable d'espace).

2° - Application de la méthode de simulation analogique utilisant des opérateurs de différence sur la variable d'espace uniquement.

$$\text{Nous avons donc l'équation : } \frac{\partial^2 \Delta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta(x,t)}{\partial t^2}$$

en utilisant les opérateurs de différence sur la variable x nous avons :

$$\frac{\Delta_{x+\delta x,t} - 2\Delta_{x,t} + \Delta_{x-\delta x,t}}{\delta x^2} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

$$\frac{C^2}{\delta x^2} \left(\Delta_{x+\delta x,t} - 2\Delta_{x,t} + \Delta_{x-\delta x,t} \right) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

En cherchant la solution de ce problème en quatre points, nous obtenons le système suivant :

$$\frac{C^2}{\delta x^2} \left(\Delta_{2,t} - 2\Delta_{1,t} + \Delta_{0,t} \right) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

$$\frac{C^2}{\delta x^2} \left(\Delta_{3,t} - 2\Delta_{2,t} + \Delta_{1,t} \right) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

$$\frac{C^2}{\delta x^2} \left(\Delta_{4,t} - 2\Delta_{3,t} + \Delta_{2,t} \right) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

Nous aurons alors :

$$R(\Delta_2 - 2\Delta_1 + \Delta_0) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

$$R(\Delta_3 - 2\Delta_2 + \Delta_1) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

$$R(\Delta_4 - 2\Delta_3 + \Delta_2) = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

$$\text{avec } k = \frac{C^2}{\delta x^2}$$

Nous obtenons alors le circuit électrique qui nous permet de simuler le problème de la corde vibrante (figure 7).

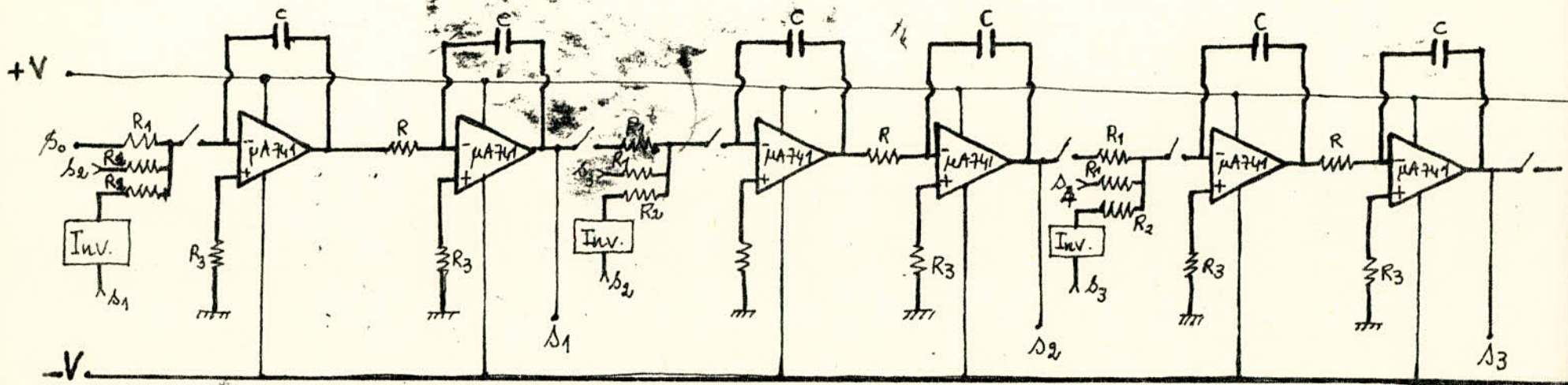


fig 7 simulation de l'équation des cordes vibrantes

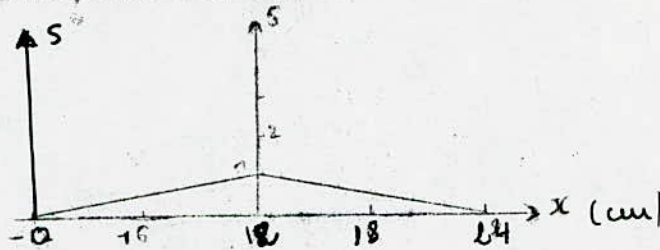
Inv étant un inverseur.

$\pm V$ } alimentation

$V = 15$ volts

Précisions sur le schéma de montage

Soit $L = 24$ cm la longueur de la corde en étudiant la variation en trois points différents, comme l'indique le schéma suivant.



On aura $x = 6$ cm

1 Conditions initiales ($0 \leq x \leq 24$)

$$S(0, t) = 0 \quad (\text{extrémités de la corde fixés})$$

$$S(L, t) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x, 0) = 0$$

$$S(x, 0) = \begin{cases} ax + b & \text{Si } x \leq 12 \\ -ax + b & \text{Si } x > 12 \end{cases} \quad \text{avec } a = \frac{1}{12}; \quad b = 0$$

En prenant un fil de masse linéique $\rho = 5$ g/m et en appliquant une force T de 1N.

$$\text{On détermine } c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{1}{5} \times 10^3 = 200 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

2 Echelle d'amplitude:

$$S_{\text{Max}} = d \times V_{\text{Max}} \quad S_{\text{Max}} = 1 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Max}} = 10 \text{ v}$$

d'où le facteur d'échelle $d = 0,1 \text{ cm/v}$

3 Détermination des résistances et des capacités

Les valeurs des résistances et des condensateurs sont telles que:

$$k = \frac{1}{R_1 R C C'}$$

$$\text{Or } k = \frac{c^2}{8x^2} = \frac{1}{k} = \frac{8x^2}{c^2} = \frac{36 \times 10^{-4}}{200} = 18 \times 10^{-6}$$

$$R_1 R C C' = 18 \times 10^{-6}$$

On prenant: $R_1 = R \quad C = C'$

On peut donner les valeurs suivantes:

$$R_1 = R = 4,2 \text{ k}\Omega \quad C = C' = 1 \mu\text{F} \quad R_2 = \frac{R_1}{2} = 2,1 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 1 \text{ k}\Omega$$

Le schéma de calcul se compose de plusieurs intégrations .
Nous utilisons comme amplificateur opérationnel le μA 741 dont
les caractéristiques sont les suivantes :

- Gain en boucle ouverte 10^5
- Impédance d'entrée $1\text{ M}\Omega$
- Impédance de sortie 75Ω
- Tension d'alimentation ± 5 à $\pm 22\text{V}$
- Aucune compensation en fréquences.
- Sortie protégée contre les courts - circuits.

Nous plaçons plusieurs contacts qui permettent d'isoler
chaque étage sommateur intégrateur des autres. Ceci nous permet aussi
de faire la mise en mémoire des tensions affichées et permettre de
faire des mesures. On utilisera pour cela un interrupteur qui,
commandera tous les contacts d'un relais.

L'alimentation de ce montage est donnée par la figure 8
comme la mode est à l'intégration, nous utiliserons une alimentation
intégrée.

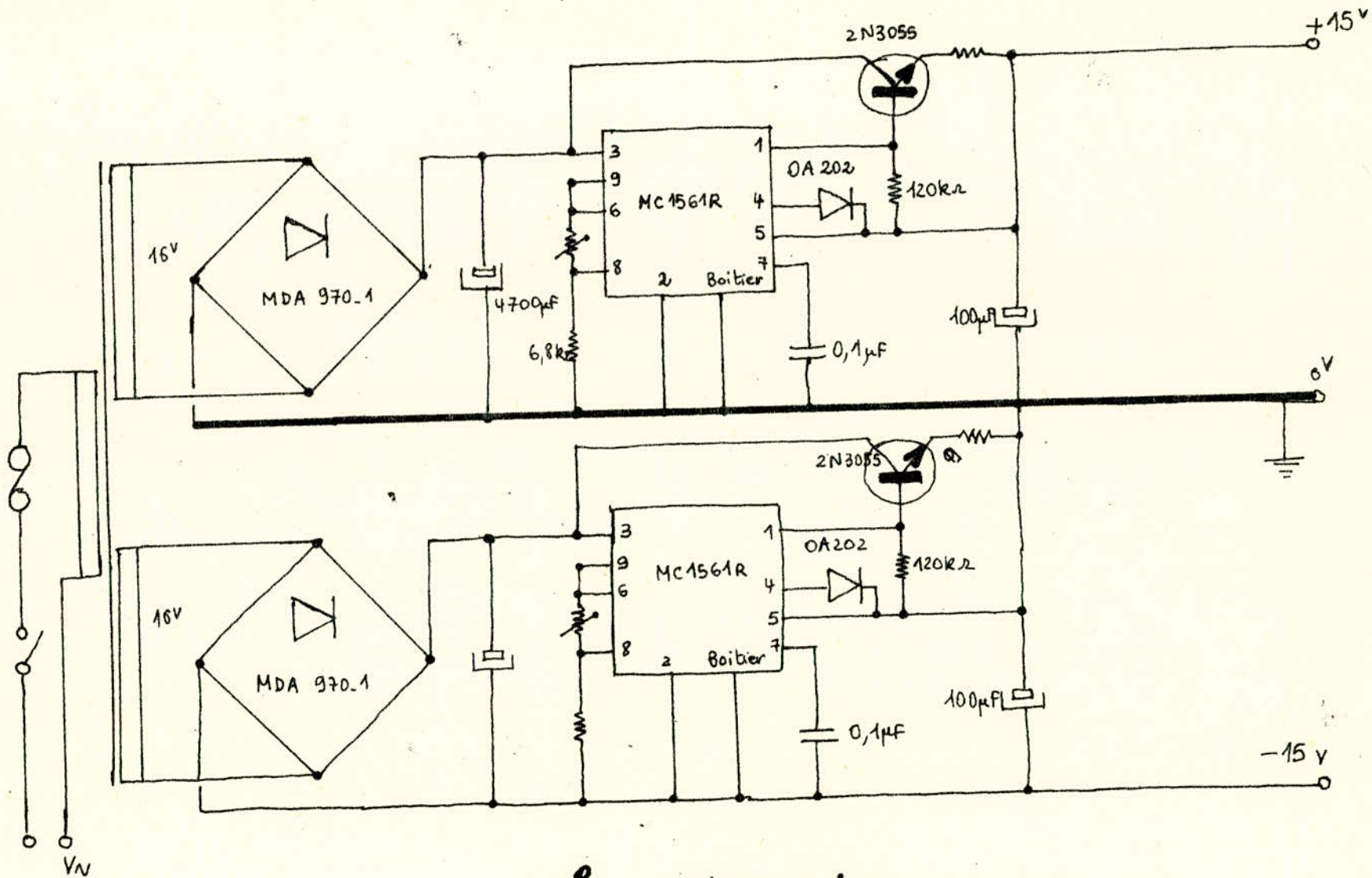


fig 8

ALIMENTATION

-o- C O N C L U S I O N -o-

---ooOoo---

L'étude, que nous venons de faire est, à plus d'un titre, intéressante.

Elle nous a permis d'aborder le problème de la simulation analogique en général et aussi d'avoir un aperçu sur les différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles. La simulation analogique peut se prêter à plusieurs autres études .

Pour notre problème, l'application de la méthode comportant l'utilisation d'opérateurs de différence sur les variables d'espace uniquement se révèle beaucoup plus fructueuse que la méthode utilisant des opérateurs de différence sur les variables d'espace et sur la variable temporelle. (matériel nécessaire mis en oeuvre très important pour la deuxième méthode).

Nous espérons avoir accompli notre tâche bien que la réalisation pratique n'a pas pu être faite. Mais nous souhaitons que d'autres étudiants continuent ce travail car la résolution des équations aux dérivées partielles est toujours à l'état de recherches.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

--O--B I B L I O G R A P H I E--O--
=====

J. GIRBERD & W.J. KARPLUS

Traitement des équations
différentielles sur calculateurs
électroniques

A. RALSTON & H.S . WILF

Méthodes mathématiques
pour calculateurs arithmétiques

J .L. LIONS

Quelques méthodes de résolution
des problèmes aux limites non linéaires

M. DANLOUX. DUMESNILS.

Le calcul analogique par
courants continus.

J. LEGRAS

Techniques de résolution des
équations aux dérivées partielles.