

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

**THESE**

présentée par :

**IDIR ACHOUR, Ingénieur E.N.P.**

pour obtenir le Diplôme de

**MAGISTER EN GENIE CIVIL**

**THÈME**

**CALCUL ELASTO-PLASTIQUE  
DES OSSATURES DE BETON ARME  
PAR RIGIDITES SECANTES**

Soutenu le 27 OCT 1987

Devant le **JURY d'Examen :**

Président .....	<b>B. TILIOUINE</b>	Professeur
Rapporteur .....	<b>M.S. BARAKA</b>	Chargé de Cours
Examineurs	<b>A. CHAKER</b>	Maitre de Conférences
	<b>A. CHARIF</b>	Maitre de Conférences
	<b>D. CUONG</b>	Professeur
Invité	<b>M. BELAZOUGUI</b>	Chargé de Cours, Directeur C.G.S.

ANNÉE 1987

**Ministère de l'Enseignement Supérieur**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

# **THESE**

présentée par :

**IDIR ACHOUR, Ingénieur E.N.P.**

pour obtenir le Diplôme de

**MAGISTER EN GENIE CIVIL**

## **THÈME**

**CALCUL ELASTO-PLASTIQUE  
DES OSSATURES DE BETON ARME  
PAR RIGIDITES SECANTES**

27 OCT 1987

Soutenue le \_\_\_\_\_

**Devant le JURY d'Examen :**

Président .....	<b>B. TILIOUINE</b>	Professeur
Rapporteur .....	<b>M.S. BARAKA</b>	Chargé de Cours
Examineurs	<b>A. CHAKER</b>	Maitre de Conférences
	<b>A. CHARIF</b>	Maitre de Conférences
	<b>D. CUONG</b>	Professeur
Invité	<b>M. BELAZOUGUI</b>	Chargé de Cours, Directeur C.G.S.

**ANNÉE 1987**

DEDICACES

=====

Je dédie ce modeste travail :

- A ma femme
- A mes enfants : KAHINA , OMAR et SMAIL
- A mes parents et à toute ma famille

## REMERCIEMENTS

=====

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail .

Mr M.S.BARAKA , Chargé de cours à l'ENPA a dirigé mon travail de recherche . Par sa disponibilité , son expérience et ses précieux conseils , il m'a permis d'acquérir de nombreuses connaissances . Je lui exprime toute ma sympathie et ma reconnaissance .

Mes remerciements s'adressent également à Mr B.TILIOUINE , Professeur à l'ENPA pour avoir bien voulu accepter d'assurer la présidence du jury d'examen .

Je remercie également MM. :

- A.CHAKER , Maitre de conférences
- A.CHARIF , Maitre de conférences
- D.CUONG , Professeur

pour l'intérêt constant qu'il ont porté à mon travail et pour m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury d'examen .

Mr M.BELAZOUGUI , Chargé de cours et Directeur du C.G.S. a bien voulu accepter d'être invité à participer à ce jury . Je l'en remercie vivement .

J'adresse aussi mes remerciements à :

- Tout le Personnel de l'INES de GENIE CIVIL de TIZI OUZOU pour toute la comprehension qu'ils ont manifesté au cours de l'élaboration de ce travail .

-Mr DEMRI et Mr BACHATENE Mustapha pour m'avoir facilité l'accès au centre de calcul de l'INES Informatique de TIZI OUZOU.

-Mr SAOUDI Amrane , Mr BOUDJEDAIMI et Mr ABDERRAHMANI Ali pour avoir assuré tout le travail de reprographie de cette thèse .

-Mr HAMDAD Rachid , Enseignant à l'INES DE GENIE CIVIL de TIZI OUZOU pour l'aide qu'il m'a apportée .

TABLE DES MATIERES

=====

	Page
Notations	1
CHAPITRE I: INTRODUCTION =====	7
CHAPITRE II: CALCUL DU BETON ARME A L'ETAT ===== LIMITE DE SERVICE	10
II-1: METHODE UTILISEE	10
II-1-1: Hypothèses	
II-1-2: Principe de l'algorithme	
II-2: VERIFICATION D'UNE SECTION FISSUREE	13
II-3: DETERMINATION DES SECTIONS D'ARMATURES	24
II-4: EXEMPLES	34
II-5: INTERPRETATION DES RESULTATS	43
II-6: RIGIDITES REGLEMENTAIRES	52
II-7: CALCUL DES FLECHES - FLECHES REGLEMENTAIRES	55
CHAPITRE III: STRUCTURES PREFABRIQUEES =====	60
III-1: GENERALITES ET CONSIDERATIONS PRATIQUES	60
III-2: SIMULATION DE L'ELASTICITE D'UNE LIAISON INFLUENCE SUR LA MATRICE DE RIGIDITE	63
CHAPITRE IV: CALCUL EN PLASTICITE DES STRUCTURES ===== EN BETON ARME	70
IV-1: LOIS DE COMPORTEMENT PONCTUELLES ET CRITERES DE RUPTURE	70
IV-1-1: Lois expérimentales du béton et de l'acier	
IV-1-2: Lois de comportement réglementaires	
IV-1-3: Critères de plasticité du béton	
IV-2: ETUDE DE LA SECTION EN ETAT PLASTIQUE	81
IV-2-1: La rotule plastique en béton armé	
IV-2-2: Critères - Courbes d'interaction	
IV-2-3: Calcul du moment et de l'effort normal ultimes	
IV-3: EXEMPLES	
IV-4: VERIFICATION A L'ETAT LIMITE	
IV-5: REGLEMENTS	
IV-6: EXEMPLES	

IV-3: ETUDE D'UN ELEMENT EN ETAT PLASTIQUE	97
IV-3-1:Description de la méthode	
IV-3-2:Analogie avec un élément relaxé	
IV-4: ASSEMBLAGES-RESOLUTION-EXEMPLES	102
IV-4-1:Méthodes actuelles	
IV-4-2:Résolution	
IV-4-3:Exemples	
IV-4-4:conclusion	
CHAPITRE V: PROPOSITIONS POUR DES RECHERCHES FUTURES	127
=====	
CHAPITRE VI: CONCLUSION GENERALE	128
=====	
BIBLIOGRAPHIE	130
=====	
ANNEXE I: EXEMPLE DE CALCUL PAR LA METHODE DES RIGIDITES	
===== SECANTES	133
ANNEXE II: CALCUL ELASTIQUE DES EFFORTS	
===== DESCRIPTION DU PROGRAMME UTILISE	143
ANNEXE III: MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT-BARRE	151
=====	

LISTE DES FIGURES

---

- Figure II-1: Loi de comportement du béton
- " II-2: " " " de l'acier
- " II-3: Notations section rectangulaire en béton armé
- " II-4: Section béton armé partiellement comprimée
- " II-5: " " " : vérification des contraintes
- " II-6: " " " : détermination des aciers
- " II-7: Poutre isostatique : Exemple A1
- " II-8: Poutre continue : Exemple A2
- " II-9: Poutre isostatique : Exemple B1
- " II-10: Poutre continue : Exemple B2
- " II-11: Portique simple encastéré : Exemple B3
- " III-1: Élément-barre sollicité en flexion
- " III-2: Assemblage Nœuds-Élément
- " IV-1: Loi de comportement expérimentale du béton
- " IV-2: " " " " de l'acier doux
- " IV-3: " " " " des aciers spéciaux
- " IV-4: Diagramme Parabole-Rectangle
- " IV-5: Diagramme réglementaire des aciers
- " IV-6: Critères de VON MISES et de TRESCA
- " IV-7: Section quelconque
- " IV-8: Comportement élastique parfaitement plastique
- " IV-9: Différents stades de comportement au niveau section
- " IV-10: Diagramme moment-courbure théorique pour une section rectangulaire
- " IV-11: Rotule plastique en section homogène

Figure IV-12: Rotule plastique en béton armé

- " IV-13: Section homogène en état de plastification totale
- " IV-14: Domaine de résistance en section homogène
- " IV-15: Diagramme des trois pivots
- " IV-16: Diagramme d'interaction M-N en béton armé
- " IV-17: Section entièrement tendue (Domaine 1a)
- " IV-18: Section partiellement tendue (Domaines 1b et 2)
- " IV-19: Section entièrement comprimée (Domaine 3)
- " IV-20: Processus de calcul des méthodes globales
- " IV-21: Méthodes Pas-à-pas
- " IV-22: Méthodes sécantes
- " IV-23: Poutre bi-encastree (Exemple C1)
- " IV-24: Portique bi-encastree (Exemple C2)
- " IV-25: Exemple D1 (Poutre bi-encastree)
- " IV-26: Exemple D2 (Portique bi-encastree)
- " IV-27: Poutre continue (Exemple D3)
- " IV-28: Poutre continue (Exemple E1)
- " IV-29: Portique bi-articulé (Exemple E2)

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU I : Resultats Exemple A1

" II : Resultats Exemple A2

" III : Resultats Exemple B1

" IV : Resultats Exemple B2

" V : Resultats Exemple B3

" VI : Ecart s rigidités proposées et rigidités brutes

" VII : Rigidités selon la norme DIN 1045

" VIII : Ecart s rigidités proposées et rigidités DIN 1045

" IX : Ecart s flèches CCBA 68 et flèches proposées

" X : " " ACI " " "

" XI : " " CEB/FIP " " "

" XII : Caractéristiques géométriques exemple D2

" XIII : " " " " D3

LISTE DES GRAPHES

Graphe IV-1: Courbes charges-flèches pour les exemples C1 et D1

" IV-2: " " " " l'Exemple D2

" IV-3: " " " " " D3

" IV-4: " " " " " E1

" IV-5: " " " " " E2

NOTATIONS UTILISEES

=====

- $\sigma_s$  : Contrainte de traction dans les aciers
- $\sigma_{s1}$  : " " " " " " " supérieurs
- $\sigma_{s2}$  : " " " " " " " inférieurs
- $\sigma_s'$  : Contrainte de compression dans les aciers
- $\sigma_{s1}'$  : " " " " " " " supérieurs
- $\sigma_{s2}'$  : " " " " " " " inférieurs
- $\epsilon_s$  : dilatation relative dans les aciers
- $\epsilon_{s1}$  : " " " " " " " supérieurs
- $\epsilon_{s2}$  : " " " " " " " inférieurs
- $\epsilon_s'$  : raccourcissement relatif dans les aciers
- $\epsilon_{s1}'$  : " " " " " " " supérieurs
- $\epsilon_{s2}'$  : " " " " " " " inférieurs
- $\epsilon_b'$  : raccourcissement relatif dans les fibres de béton
- $\epsilon_{b1}'$  : " " " " " la fibre supérieure extrême
- $\epsilon_{b2}'$  : " " " " " inférieure "
- $M$  : moment statique
- $S$  : section homogène réduite
- $v$  : distance du centre de gravité au parement supérieur section
- $v'$  : " " " " " " " inférieur "
- $A$  : Section d'armatures tendues (ou armatures inférieures)
- $A'$  : " " " comprimées (ou armatures supérieures)
- $I_0$  : Inertie de la section brute
- $I$  : Inertie section homogène réduite
- $y_1$  : hauteur de la zone comprimée
- $x$  : " " " " " " " à l'état limite ultime

$d'$  : enrobage supérieur  
 $d$  : " inférieur  
 $h$  : hauteur utile de la section  
 $Ht$  : hauteur totale  
 $b$  : largeur de la section  
 $l$  : portée (ou excentricité de l'effort normal par rapport à A)  
 $M$  : moment flechissant  
 $N$  : effort normal  
 $T$  : " tranchant  
 $M_u, N_u$  : moment et effort normal ultimes  
 $M_p$  : moment plastique  
 $N_p$  : effort normal plastique  
 $B', B'_3$  : section de béton comprimée  
 $\sigma_m$  : contrainte moyenne de compression dans le béton  
 $E_b$  : module de déformation longitudinale du béton  
 $E_s$  : " " " " de l'acier  
 $M_f$  : moment de fissuration  
 $\sigma_n$  : contrainte nominale de l'acier  
 $\bar{\sigma}_a$  : contrainte admissible en traction et en compression acier  
 $\bar{\sigma}_b$  : contrainte admissible de compression du béton  
 $\bar{\sigma}_b$  : contrainte de traction de référence  
 $W_o$  : pourcentage d'armatures tendues  
 $W_o'$  : " " comprimées  
 $M_1, M_g$  : moment fléchissant à la 1ere extrémité d'un élément  
 $M_2, M_d$  : " " " " 2eme " " "  
 $\theta_1, \theta_2$  : rotations aux extrémités 1 et 2 d'un élément-barre

$\alpha_1$  ,  $\alpha_2$  : coefficients de relaxation respectivement aux extrémités  
1 et 2 d'un élément-barre

$\sigma_e$  : limite élastique de l'acier

$\sigma_I$  ,  $\sigma_{II}$  ,  $\sigma_{III}$  : contraintes principales

$\epsilon_e$  : déformation relative de l'acier en phase élastique

$\epsilon_l$  : déformation relative limite de l'acier

$\chi_e$  ,  $\chi_l$  : courbure élastique et courbure limite

$f_c$  : contrainte caractéristique du béton

$f_e$  : contrainte de calcul adoptée pour les aciers

Dans le calcul des efforts dans une structure en béton armé, on utilise habituellement des méthodes prenant en compte les inerties des sections brutes des éléments et le module de déformation longitudinale du béton. Les déformations qui en résultent ne reflètent pas convenablement la réalité ; ce qui amena différents règlements à définir la valeur des inerties à prendre en compte dans le calcul des flèches. En fait, dans ce type de méthodes classiques plusieurs incertitudes règnent sur :

- la valeur du module d'élasticité longitudinale du béton qui est fonction de la durée du chargement (problème de fluage) ;
- les moments d'inertie à prendre en compte : en effet, le moment d'inertie au niveau d'un élément n'est pas constant car toutes les sections de cet élément ne sont pas fissurées et les armatures n'ont pas la même section le long de cet élément (problème d'inertie et de fissuration) ;
- la participation du béton entre les fissures ;
- l'influence des grands déplacements ;
- les liaisons entre les éléments de la structure considérée.

Le premier aspect de cette étude est de proposer une méthode prenant en compte l'effet de la fissuration sur le calcul exact des efforts et des déformations dans une structure en béton armé. Cette méthode est basée sur un processus d'approximations successives (matrices sécantes).

Le deuxième aspect de cette recherche concerne le comportement plastique des structures en béton armé .

Pour étudier ce comportement , on dispose actuellement de deux types de méthodes :

-les méthodes globales : elles utilisent les théorèmes de la plasticité et leur résolution se fait généralement par la programmation linéaire . Elle ne renseigne le projecteur que sur l'état de la structure au moment de la ruine par formation d'un mécanisme . A cet effet , il est à signaler les travaux effectués en Charpente Métallique (CTICM) par NGUYEN DANG et W.G.SAXE [24], et Y.LESCOUARC'H [25] et les travaux de C.K.WANG [40] et M.D.HANGAN [38] .

-les méthodes pas-à-pas : Dans ce type de méthode , on suit pas-à-pas le comportement de la structure et de ses éléments et on connaît l'état de la structure à tout instant du chargement . Le calcul y est envisagé comme une succession de calculs élastiques et le chargement de la structure s'effectue progressivement jusqu'à la ruine . Les variantes les plus importantes sont :

\*les méthodes utilisant les matrices tangentes des éléments; [25,26,27]

\*les méthodes de type contraintes initiales (travaux de ZIENKIEWICZ ,VALLIAPAN et KING en 1969 )

En béton armé , plusieurs méthodes non-linéaires ont été proposées [20,30,37] . Les non-linéarités prises en compte proviennent généralement des lois constitutives des matériaux

acier et béton , de la fissuration et des effets du second ordre.

Nous utilisons une méthode pas-à-pas basée sur les matrices sécantes des éléments pour déterminer la charge de ruine de la structure . Cette méthode permet de tenir compte , en plus, de la fissuration , du comportement élasto-plastique des éléments. Pour notre cas , nous utilisons des lois de comportement réglementaires pour les matériaux acier et béton .

La méthode proposée présente un intérêt certain puisque , d'une part elle peut être utilisée pour toute loi de comportement (avec branche concave ) et d'autre part , moyennant une analogie avec les calculs habituels de structures à noeuds relaxés , elle permet l'utilisation des programmes classiques avec des relaxations nodales fictives .

Nous nous sommes fixés comme objectifs de développer cette méthode sur un micro-ordinateur type compatible IBM en langage BASIC , simple de façon à ce qu'il soit possible de faire la transposition sur des machines de plus faible capacité .

CHAPITRE II

CALCUL DU BETON ARME A L'ETAT LIMITE DE SERVICE

II-1: Méthode utilisée

II-1-1: Hypothèses:

- On suppose que la loi de comportement du béton en compression est linéaire (voir figure II-1). La résistance à la traction du béton est négligée .
- on suppose que la loi de comportement des aciers est linéaire (acier tendu et acier comprimé)..
- les sections restent planes après application des efforts. (possibilité d'établir des relations de similitude entre les déformations des fibres de béton et des aciers).
- il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton.
- les armatures sont supposées concentrées en leur centre de gravité.

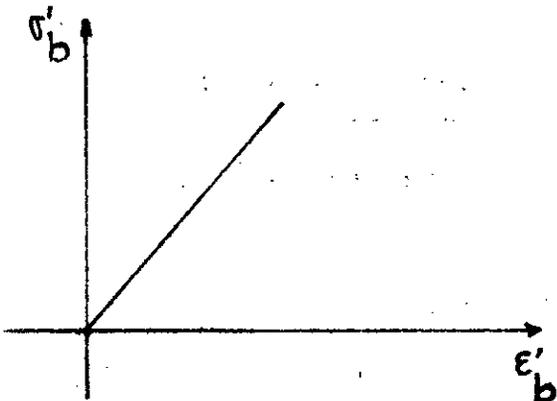


Figure II-1

(loi de comportement du béton)

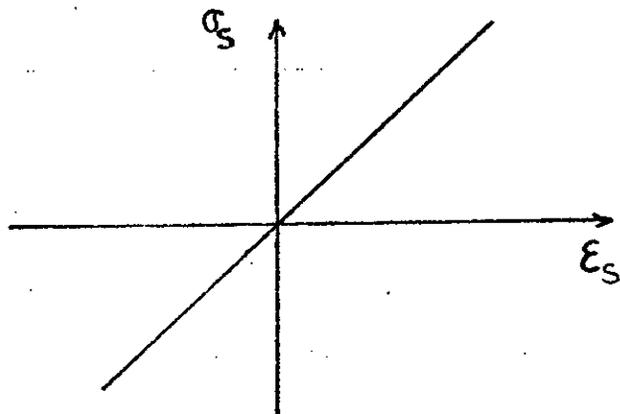


Figure II-2

(loi de comportement des aciers)

II-1-2: Principe de l'ALGORITHME:

---

La méthode utilisée pour étudier les variations de la rigidité des structures en béton armé est basée sur un processus itératif.

Un premier calcul consiste à prendre comme inertie initiale  $I_0$ , l'inertie des sections brutes des éléments, et comme module  $E$ , le module de déformation longitudinale du béton. Les efforts ainsi déterminés sont : le moment fléchissant à chaque extrémité de l'élément considéré et l'effort normal; le programme de calcul utilisé étant basé sur la méthode des déplacements (Voir en Annexe II).

Sous l'action de ces efforts, on détermine la position d'axe neutre et on calcule les armatures dans la section la plus sollicitée de l'élément en utilisant les différentes équations d'équilibre des sections en béton armé.

On calcule ensuite dans une deuxième étape de nouvelles rigidités en utilisant le même module  $E$  (supposé constant) et le moment d'inertie de la section homogénéisée (béton tendu négligé, une armature de section  $A$  ou  $A'$  étant considérée équivalente à un élément de béton d'aire  $n.A$  ou  $n.A'$ ;  $n$ : coefficient d'équivalence)

Avec ces nouvelles rigidités, de nouveaux efforts sont obtenus. Avec ces nouveaux efforts, on calcule d'autres rigidités comme à l'étape précédente; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il y ait convergence des efforts en fonction

.../...

des rigidités correspondantes .

Une itération correspond donc à un calcul de la structure en adoptant comme rigidité des éléments de cette structure celle qui correspond aux efforts déterminés au cours de l'itération précédente . .

Il est clair que la structure étudiée est considérée comme un assemblage d'éléments-barres liés entre eux suivant certaines règles et satisfaisant à des conditions d'appuis données .

Du fait de la variation de l'inertie  $I$  au cours des différentes étapes d'ue :

- A la nouvelle position de l'axe neutre sous l'action extérieure ,
- Aux nouvelles sections d'armatures (dans le cas d'un problème de détermination) ,
- Au changement de rigidité d'un élément à un autre ,

Nous pouvons considérer ce type de problème comme non-linéaire. Cette non-linéarité n'est pas physique mais d'aspect géométrique ( modification de l'inertie  $I$  , elle-même liée à la rotation ) bien que les effets du second ordre ne soient pas pris en considération .

II-2: VERIFICATION D'UNE SECTION FISSUREE :

BUT: Etant donnée une section en béton armé parfaitement déterminée en dimensions et armatures , déterminer les contraintes dans le béton et les aciers , et vérifier que ces contraintes sont inférieures aux valeurs admissibles.

Cette étude portera sur des sections de forme rectangulaires [ 4 , 5 ] .

II-2-a: Cas de la flexion composée :

II-2-a-1: Recherche du centre de gravité G' de la section homogène:

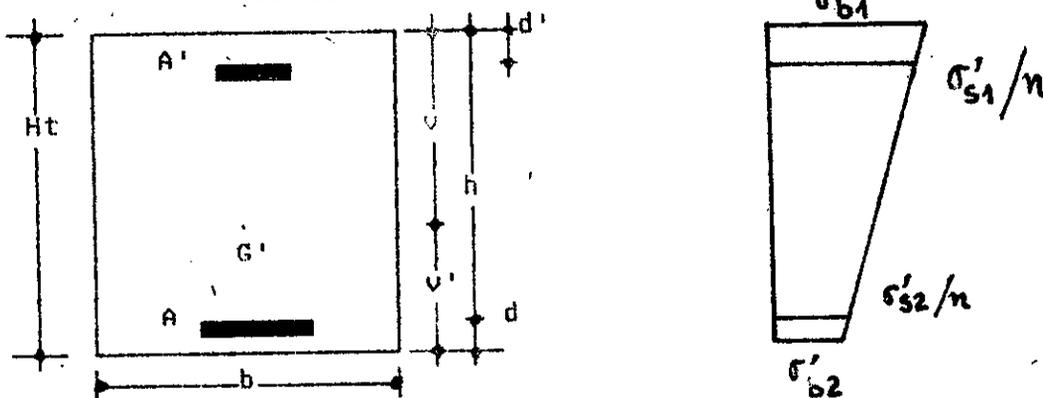


Figure II-3: Section béton armé

Le centre de gravité G' est repéré par v et v' respectivement distance au parement supérieur (le plus comprimé) et au parement inférieur de la section .

On a la relation :

$$v = \frac{m}{S}$$

m: moment statique  
S: section homogène réduite

.../...

$$m = \int_0^{Ht} b \cdot y \cdot dy + 15 \cdot (A' \cdot d' + A \cdot h) = b \cdot Ht^2 / 2 + 15 \cdot (A' \cdot d' + A \cdot h)$$

$$S = b \cdot Ht + 15 \cdot (A + A')$$

Le moment d'inertie I de la section par rapport à la fibre supérieure vaut :

$$I = \int_0^{Ht} b \cdot y^2 \cdot dy + 15 \cdot (A' \cdot d'^2 + A \cdot h^2) - S \cdot v^2$$

$$I = b \cdot Ht^3 / 3 + 15 \cdot (A' \cdot d'^2 + A \cdot h^2) - S \cdot v^2$$

Il s'agit maintenant de savoir si, sous l'action extérieure, la section est entièrement ou partiellement comprimée.

Elle est entièrement tendue si l'effort normal est une traction et est appliqué entre les armatures A' et A. L'axe neutre se trouvera alors en dehors de la section.

Dans le cas d'une section rectangulaire brute, celle-ci est entièrement comprimée si la résultante de l'effort extérieur de compression N est dans le tiers central de la hauteur Ht (excentricité inférieure à Ht/6); la présence des aciers loin du centre de gravité va augmenter la valeur de cette excentricité.

Il suffit donc de trouver l'excentricité limite e', par rapport au centre de gravité G' de la section homogène, qui corresponde à une contrainte nulle au niveau de la fibre inférieure.

On a la relation:  $\sigma_b = N/S + M \cdot v' / I = 0$

Or  $M = -N \cdot e'$

Donc  $N/S - N \cdot e' \cdot v'/I = 0 \implies e' = I/S \cdot v'$

Les efforts M et N étant déterminés par rapport au centre de gravité de la section brute, l'excentricité par rapport au nouveau centre de gravité G' sera :

$e = e' - (Ht/2 - v) = e' + v - Ht/2$

Si  $e \leq e'$  la section est entièrement comprimée.

Si  $e > e'$  la section est partiellement comprimée.

II-2-a-2: Cas de la section entièrement comprimée :

---

Les contraintes valent :

$\sigma'_{b1} = N/S + N \cdot e' \cdot v'/I$

$\sigma'_{b2} = N/S - N \cdot e' \cdot v'/I$

$\sigma'_{s1} = 15(N/S + Ne(v-d'))/I$

$\sigma'_{s2} = 15(N/S - Ne(h-v))/I$

II-2-a-3 : Cas de la section partiellement comprimée :

---

(Voir figure II-4)

La Résultante de l'effort normal extérieur est en dehors du noyau central de la section.

Déterminons les équations d'équilibre :

SOIENT:

Fc : résultante des forces de compression dans le béton

mb : moment statique du béton comprimé par rapport à l'axe neutre.

$y_1$  : hauteur de la zone de béton comprimée

Un élément comprimé de béton d'aire  $(b.dy)$  situé à la cote  $y$  est soumis à une force :

$$dF_c = b \cdot \sigma'_y \cdot dy \quad ; \text{Or } \sigma'_y = \sigma'_{bf} \cdot y / y_1$$

$$\text{d'où } F_c = \sigma'_{bf} \cdot m_b / y_1$$

Un calcul analogue peut être mené pour :

-L'acier tendu :

$$F_s = \sigma'_{bf} \cdot m_s / y_1$$

avec :

$F_s$  : résultante de traction des aciers

$m_s$  : moment statique des aciers tendus par rapport à l'axe neutre .

-L'acier comprimé :

$$F'_s = \sigma'_{bf} \cdot m'_s / y_1$$

avec :

$F'_s$  : résultante de compression des aciers

$m'_s$  : moment statique des aciers comprimés par rapport à l'axe neutre .

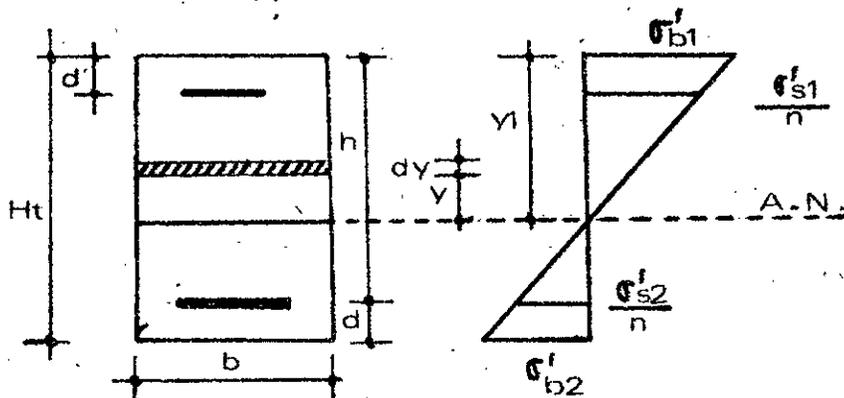


Figure II-4: section partiellement comprimée

L'équilibre des forces horizontales nous donne :

$$F_c + F_s + F_{s'} = N$$

$$(m_b + m_{s'} - m_s) \cdot \sigma'_{b_1} / y_1 = N$$

ou bien :

$$m_t \cdot \sigma'_{b_1} / y_1 = N \quad (1)$$

avec :

$$m_t = m_b + m_{s'} - m_s$$

D'autre part , le moment de la force  $dF_c$  par rapport à l'axe neutre vaut :

$$dM_c = y \cdot dF_c = (b/y_1) \cdot \sigma'_{b_1} \cdot y^2 \cdot dy$$

d'où :

$$M_c = (b/y_1) \cdot \sigma'_{b_1} \cdot I_c$$

$I_c$  : Moment d'inertie du béton comprimé par rapport à l'axe neutre .

Le même raisonnement est mené pour les aciers et on obtient les relations suivantes :

$$M_s = \sigma'_s \cdot I_s / y_1 \quad ; \quad M_{s'} = \sigma'_{s'} \cdot I_{s'} / y_1$$

$M_s$  : moment de la force  $F_s$  par rapport à l'axe neutre .

$M_{s'}$  : moment de la force  $F_{s'}$  par rapport à l'axe neutre .

$I_s$  : moment d'inertie des aciers tendus par rapport à l'axe neutre .

$I_{s'}$  : moment d'inertie des aciers comprimés par rapport à l'axe neutre .

A l'équilibre nous avons :

$$\text{Avec : } M = M_c + M_s + M_{s'} \quad M = \sigma'_{b_1} \cdot I / y_1$$

$$\text{et } I = I_c + I_s + I_{s'}$$

$$N \cdot (e'_1 + y_1 - v) = \sigma'_{b_1} \cdot I / y_1$$

.../...

ou bien :

$$N \cdot y_1 \cdot (e'_1 + y_1 - v) = \sigma'_1 \cdot I_{b1} \quad (2)$$

$e'_1$  : excentricité de l'effort N par rapport à l'axe neutre.  
 Nous obtenons ainsi un système de deux équations (1) et (2) à deux inconnues  $y_1$  et  $\sigma'_1$ .

Dans le cas d'un problème de vérification des contraintes, on calculera le moment de toutes les forces intérieures par rapport au point d'application D de l'effort extérieur N (Voir figure II-5).

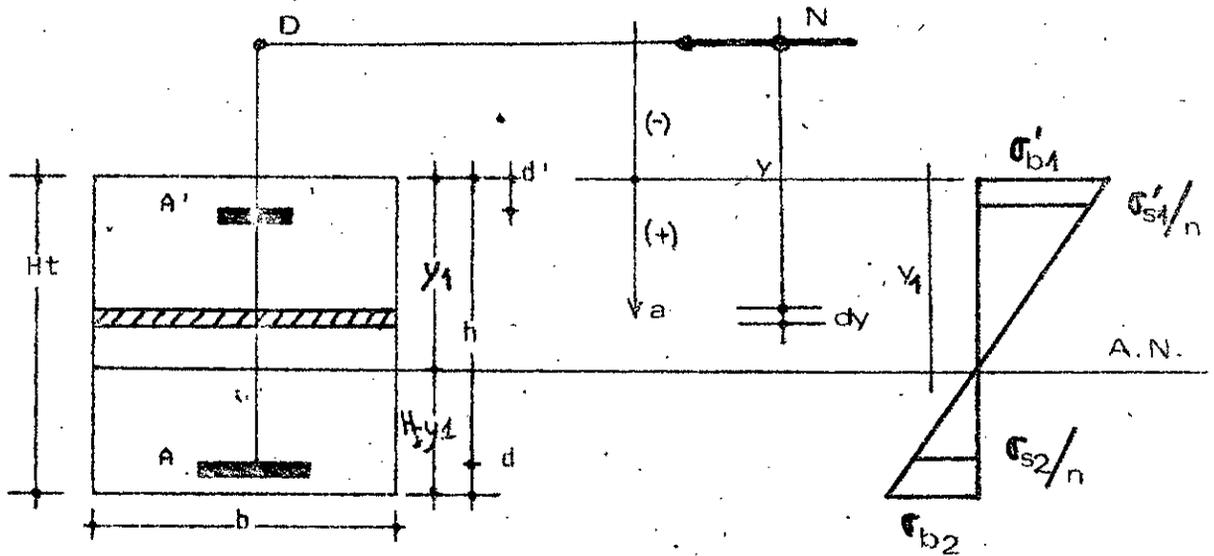


Figure II-5: section béton armé; vérification des contraintes

Pour chaque résultante  $F_c$ ,  $F_s$ ,  $F_s'$ , nous aurons :

$$M_c = \int_{-a}^{y_1-a} y \cdot dF_c = \int_{-a}^{y_1-a} (b/y_1) \cdot \sigma'_1 \cdot (y_1 - a - y) \cdot y \cdot dy$$

$$M_s = (15/y_1) \cdot \sigma'_1 \cdot A \cdot (y_1 - h) \cdot (h - a)$$

$$M_s' = (15/y_1) \cdot \sigma'_1 \cdot A' \cdot (y_1 - d') \cdot (d' - a)$$

.../...

A l'équilibre, la somme des moments par rapport au point D est nulle :

$$\left(\frac{\sigma'_1}{b_1}\right) \left[ \int_{-a}^{y_1-a} b(y_1-a-y) y dy + 15A(y_1-h)(h-a) + 15A'(y_1-d')(d'-a) \right] = 0$$

Après transformation, on obtient une équation du troisième degré en  $y_1$  :

$$y_1^3 - 3ay_1^2 + (90/b) [A'(d'-a) + A(h-a)] y_1 - (90/b) [A'd'(d'-a) + Ah(h-a)] = 0$$

Pour la résolution de cette équation on utilise une méthode utilisant les fonctions trigonométriques (basée sur la formule de CARDAN). Parmi les racines de cette équation celle physiquement admissible est comprise entre 0 et h.

La hauteur de la zone comprimée  $y_1$  étant obtenue, nous pouvons calculer les différentes contraintes par les relations suivantes :

-Contrainte de compression dans le béton :

$$\sigma'_1 = y_1 \cdot N / mt \quad \text{avec } mt = \int_{-a}^{y_1-a} b(y_1-a-y) dy + 15A(y_1-h) + 15A'(x-d')$$

-Contrainte de traction dans les aciers A :

$$\sigma_2 = 15 \frac{\sigma'_1 (y_1-h)}{b_1}$$

-Contrainte de compression dans les aciers A' :

$$\sigma'_{s1} = 15 \frac{\sigma'_1 (y_1-d')}{b_1}$$

II-2-b : Cas de la flexion simple :

.../...

Pour déterminer la hauteur de la zone comprimée  $y_1$ , on passera dans ce cas par la résolution d'une équation du second degré. On remarque que la position de la fibre neutre ne dépend que des aciers utilisés et non de l'effort extérieur.

Les contraintes valent alors :

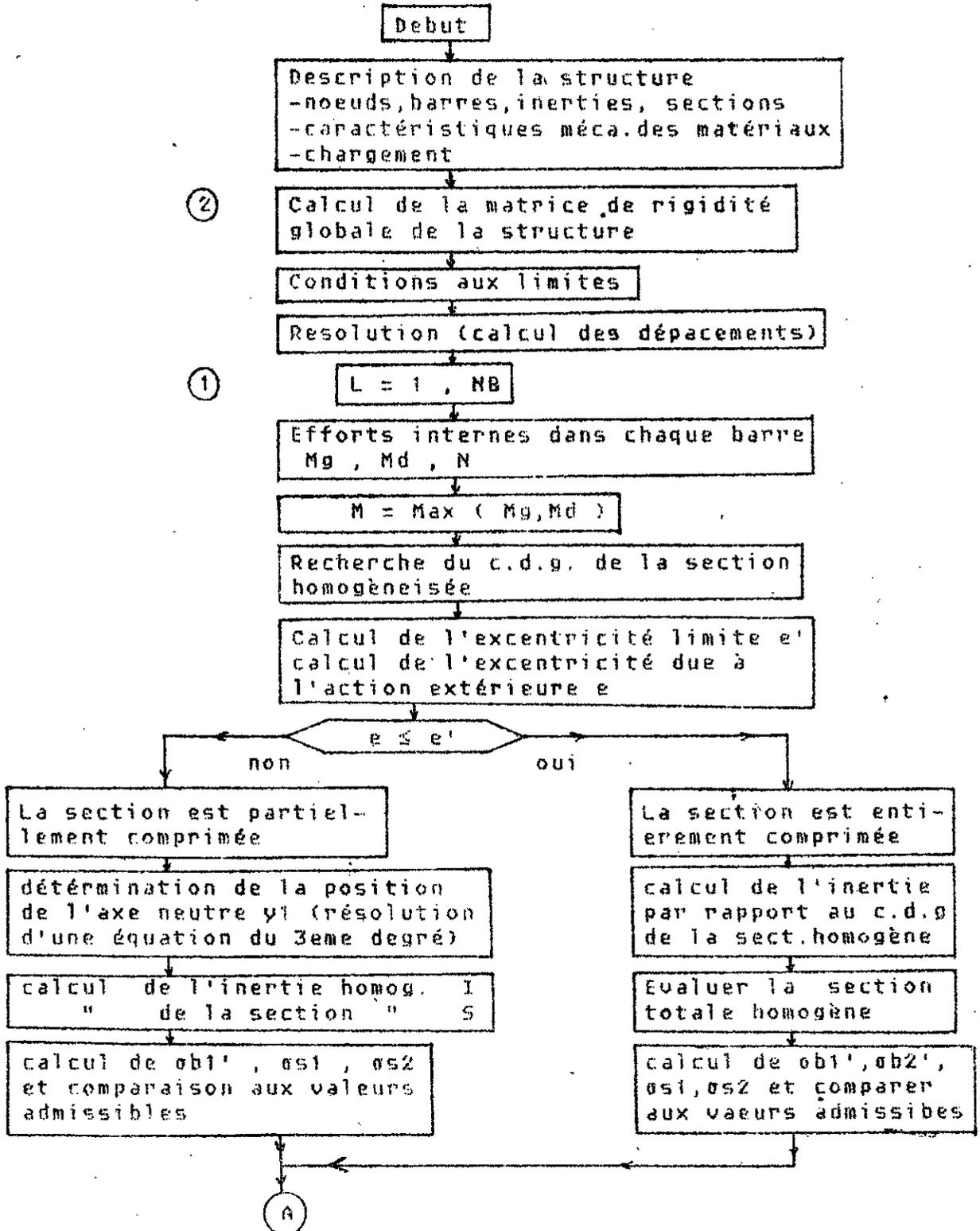
$$\sigma'_{b_1} = My_1/I$$

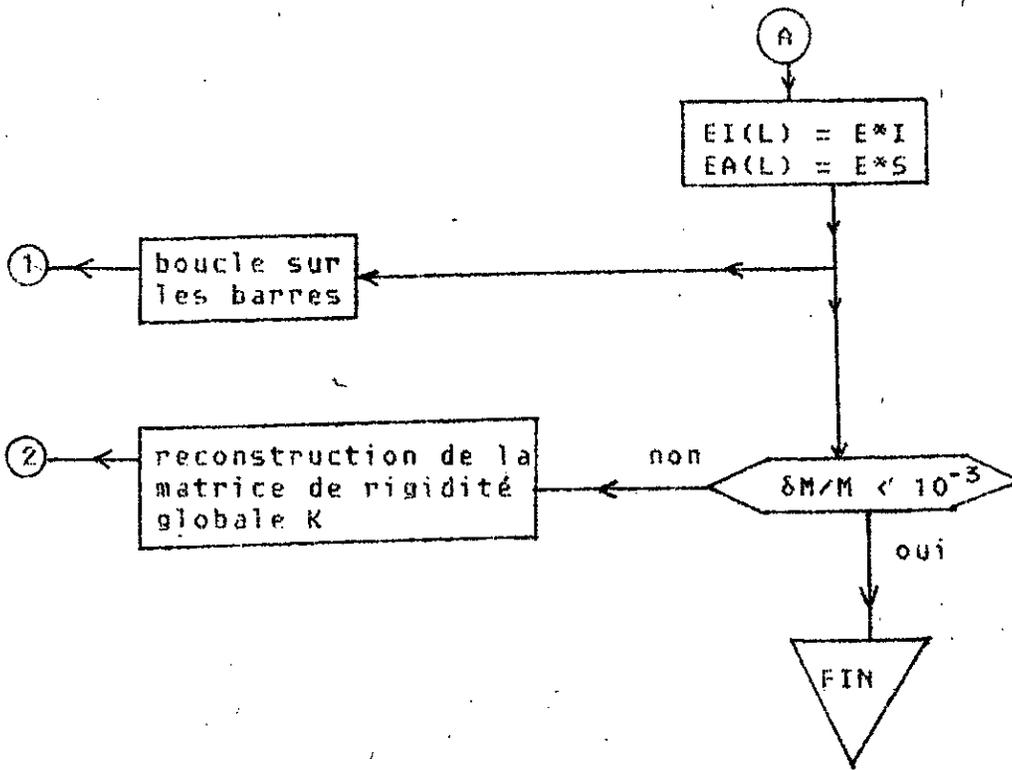
$$\sigma'_{s_1} = 15M(y_1 - d')/I$$

$$\sigma'_{s_2} = 15M(h - y_1)/I$$

$$\text{Avec } I = by_1^3/3 + 15A'(y_1 - d')^2 + 15A(h - y_1)^2$$

Organigramme méthode utilisée pour vérification d'une section en B.A.





Notations	Correspondances dans le programme UER
σa	CAA
σb'	CAB
n (coéf. d'équivalence)	CE
d (enrobage inférieur)	E1
d' ( " supérieur)	E2
A (acier tendu)	AT(L)
A' ( " comprimé)	AC(L)
Mg	T(1,2)
Md	T(2,2)
N	T(3,2)
M = Max(Mg, Md)	T1
I (inertie homogène)	E(L)
S (section homogène)	F(L)
EI = E.I (rigidité flexi.)	EI(L)
EA = E.S ( " eff.N)	EA(L)
e' (excentricité limite)	E3
e ( " ext.)	E4
σb'	CB(L)
σb1'	CB1
σb2'	CB2
σs1	CAS1
σs2	CAS2
y1	A1
b, h, ht	respectivement BA, H, HT

### II-3 : DETERMINATION DES SECTIONS D'ARMATURES :

La méthode utilisée consiste en l'établissement d'expressions adimensionnelles à partir des équations d'équilibre des sections en béton armé [ 5 , 6 ] .

Par cette méthode , il est possible de caractériser toute section en béton armé par trois zones de comportement, que ce soit en flexion simple ou composée avec armatures de compression ou non .

En effet soit la section d'une pièce en béton armé représentée par la figure II-6 :

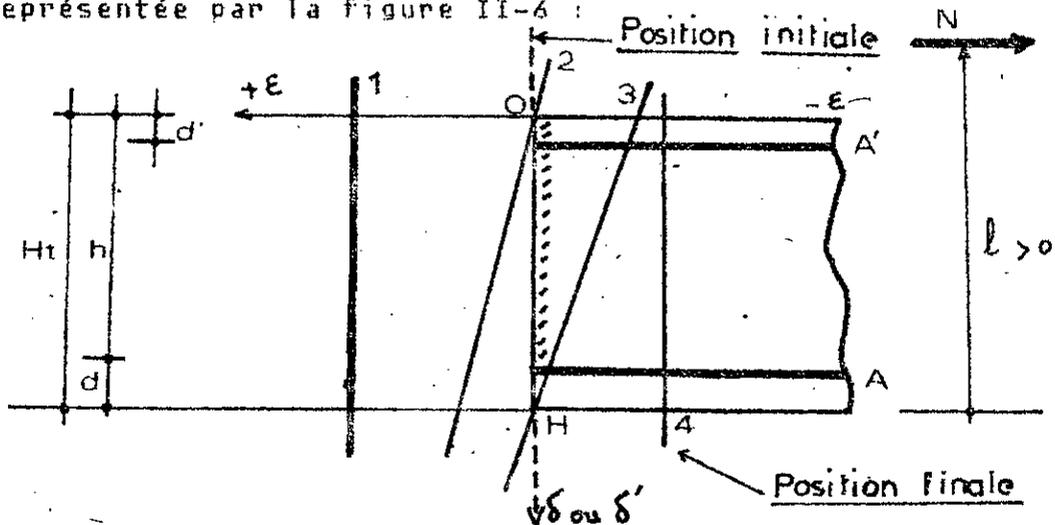


FIGURE II-6: section béton armé; détermination des aciers

La position  $OH$  est la position initiale de la section .A cette position ,soit l'axe  $o\delta$  (orienté vers le bas) et gradué suivant la variable sans dimension  $\delta = y1/h$  .

La fibre supérieure de la section correspond à  $\delta = 0$  et la position des armatures tendues  $A$  correspond à  $\delta = 1$  .

Suivant la position que peut prendre la section sous

.../...

l'action extérieure, et l'ordonnée de son intersection avec l'axe des  $\delta$ , on distingue les trois zones suivantes :

ZONE I :

Elle correspond aux positions de la section entre 1 et 2 de la figure II-6 :

$$-\infty < \delta < 0$$

La section est entièrement tendue ; le matériau béton n'intervient pas. L'effort de traction  $N$  est appliqué entre  $A$  et  $A'$ . Les équations d'équilibre sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} N &= A \sigma_2 + A' \sigma_1 s_1 \\ N.l &= A' \sigma_1 (h-d') \end{aligned} \right] \quad (1)$$

Par les relations de similitude, on peut exprimer  $\sigma_2$  en fonction de  $\sigma_1$  :

$$\frac{1}{(d/h - \delta)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \text{pour } \delta \leq 0$$

position 1 :  $\sigma_2 = \sigma_1$

position 2 :  $\delta = 0$  donc  $\sigma_2 = (d'/h) \cdot \sigma_1$

ZONE II :

Elle correspond aux positions de la section entre 2 et 3 de la figure II-6 :

$$0 \leq \delta \leq (Ht/h)$$

La section est partiellement comprimée. En présence d'armatures comprimées et tendues, on a les équations d'équilibre suivantes :

$$\left. \begin{aligned} N &= A \sigma_2 + A' \sigma_1 + B' \sigma_1' \\ N.l &= A' \sigma_1 (h-d') + B' \sigma_1' h(1-g\delta) \end{aligned} \right] \quad (2)$$

Les relations de similitude nous permettent d'écrire :

$$\frac{1-\delta}{(\delta-d'/h)} = - \frac{\epsilon s_2}{\epsilon' s_1} \quad \text{avec } \delta > 0$$

$$\text{et } \delta = \frac{-\epsilon' b_1}{(\epsilon s_2 \epsilon' b_1)} = \frac{1}{1 + \Gamma} \quad \text{avec } \Gamma = - \frac{\epsilon s_2}{\epsilon' s_1}$$

Le système (2) peut se mettre sous forme adimensionnelle de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \rho\delta} = \frac{(N - A\sigma_s - A'\sigma_{s1}) \cdot h}{(N \cdot l) - A'\sigma_{s1} (h-d')}$$

Pour des formes de sections usuelles (sections rectangulaires, triangulaires, circulaires), la section de béton comprimée  $B'$  peut s'exprimer comme un produit de deux fonctions  $B'_1$  et  $B'_2$  :

$$B' = B'_1(\delta) \cdot B'_2(d, b, h, \dots)$$

$B'_1$  uniquement fonction de  $\delta$

$B'_2$  " " " de  $b, d, h$

Les équations (2) peuvent ainsi s'écrire :

$$B = \frac{1}{(1 - \rho\delta) \cdot B'_1(\delta)} = \frac{h \cdot B'_2(b, d, h, \dots)}{N \cdot l - A'\sigma_{s1} (h-d')} \cdot \frac{\sigma'_{bm}}{b m}$$

ZONE III :

Elle correspond aux positions de la section entre 3 et 4 de la figure II-6 :

$$(Ht/h) \leq \delta \leq + \infty$$

La section est entièrement comprimée

Pour éviter de manipuler dans les calculs de trop grandes valeurs de  $\delta$ , on pose :

$$\delta' = \frac{Ht}{\delta \cdot h} \quad \text{et} \quad g' = \frac{g \cdot y1}{Ht}$$

On aura ainsi les équations d'équilibre suivantes :

$$\left. \begin{aligned} N &= A \cdot \sigma_{s2}' + A' \sigma_{s1}' + B_3' \sigma_{bm}' \\ N \cdot l &= A' \sigma_{s1}' (h - d') + B_3' \sigma_{bm}' (h - g' \cdot Ht) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Relations de similitude :

$$\epsilon_{b1}' \cdot \frac{\delta'}{Ht} = \frac{\epsilon_{sA}' \cdot \delta'}{Ht - d' \cdot \delta'} = \frac{\epsilon_{s2}' \cdot \delta'}{Ht - h \cdot \delta'} = \frac{\epsilon_{b2}' \cdot \delta'}{Ht \cdot (1 - \delta')} \quad (4)$$

Remarque :

----- Pour notre cas de section rectangulaire, et de comportement élastique des deux matériaux acier et béton, nous aurons :

-pour la zone I : les équations (1) sont directement applicables

-pour la zone II :

$$g = 1/3 \quad ; \quad \sigma_{bm}' = \frac{\sigma_{s2}'}{b1} \quad \cdot \quad (\text{répartition triangulaire des contraintes})$$

$$\Gamma = \frac{1}{\delta} - 1 = - \frac{\sigma_{s2}'}{n \cdot \sigma_{s1}' \cdot b1} = - \frac{\sigma_{s2}'}{2n \cdot \sigma_{s1}' \cdot bm}$$

$$B_1' = \delta \cdot b \cdot h \quad \text{donc} \quad B_1' = \delta \quad \text{et} \quad B_2' = b \cdot h$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \delta/3} = \frac{(N - A \cdot \sigma_{s2}' - A' \sigma_{s1}') h}{(N \cdot l) - A' \sigma_{s1}' (h - d')}$$

$$B = \frac{1}{(1 - \delta/3) \delta} = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{s1}'}{(N \cdot l) - A' \sigma_{s1}' (h - d')}$$

Si on se fixe  $\sigma_{s2}$  au lieu de  $\sigma_{bm}$ , on a :

$$\beta' = \frac{2 \cdot (1-\delta)}{(1-\delta/3)\delta^2} = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{s2}}{n \cdot [N \cdot l - A' \cdot \sigma_{s1} \cdot (h-d')]}$$

Cas particulier important : flexion sans armatures comprimées

N nul à l'infini

$$(N \cdot l) = M \leq 0$$

$$\alpha = \frac{n \cdot A}{\beta' \cdot b \cdot h}$$

(k est caractéristique du pourcentage d'armatures)

-pour la zone III :

$$g' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma'_{b1} + 2 \cdot \sigma'_{b2})}{2}$$

(répartition trapézoïdale des contraintes)

$$\sigma'_{bm} = \frac{\sigma'_{b1} + \sigma'_{b2}}{2}$$

Ces valeurs de g' et de  $\sigma'_{bm}$  sont à prendre en compte dans le système d'équations (3).

CONCLUSIONS :

1°- Soit une section en béton armé comportant des armatures A et A'. La zone I sera caractérisée par des tractions dont le point d'application est situé entre ces armatures A et A'. La zone III par des compressions situées à l'intérieur du noyau central de la section. Le reste du plan de la section est la zone II.

2°- Dans le cas de la zone II, l'existence de l'armature A' n'est théoriquement nécessaire que lorsque l'armature A et le béton n'équilibrent pas l'effort extérieur N dans des conditions de sécurité suffisantes.

3°- Etant donné le nombre élevé d'inconnues dans le

calcul d'une section en béton armé, les valeurs à donner aux paramètres choisis comme fixes dépendent du projeteur. Un calcul économique serait celui permettant d'utiliser les matériaux à leur taux de travail maximal ; [ 5 , 6 ] .

4°- Par cette méthode, la détermination de la contrainte de compression du béton  $\sigma'_b$  et de la section d'armatures A passe par les opérations suivantes :

- a-déterminer le coefficient  $\beta'$
- b-trouver la valeur de  $\delta$  en résolvant une équation du 3eme degré .
- c-calculer  $\sigma'_{bm}$  par l'intermédiaire de  $\Gamma$  .
- d-calculer la section d'armatures A en utilisant l'expression de  $\alpha$  .

Dans le cas où il existe des aciers comprimés A', on doit d'abord déterminer la valeur de  $\sigma'_{s1}$  (une façon d'opérer consiste à choisir une valeur approchée de  $\sigma'_{s1}$  en fonction de  $\sigma'_{b1}$  ou des relations de similitude et itérer jusqu'à stabilisation de  $\sigma'_{s1}$ ) .

La détermination de A et A' passe alors par la résolution du système d'équations (2) .

5°- Connaissant la valeur du coefficient  $\delta$ , on peut connaître la position de l'axe neutre. La détermination du moment d'inertie de la section homogène réduite est alors aisée .

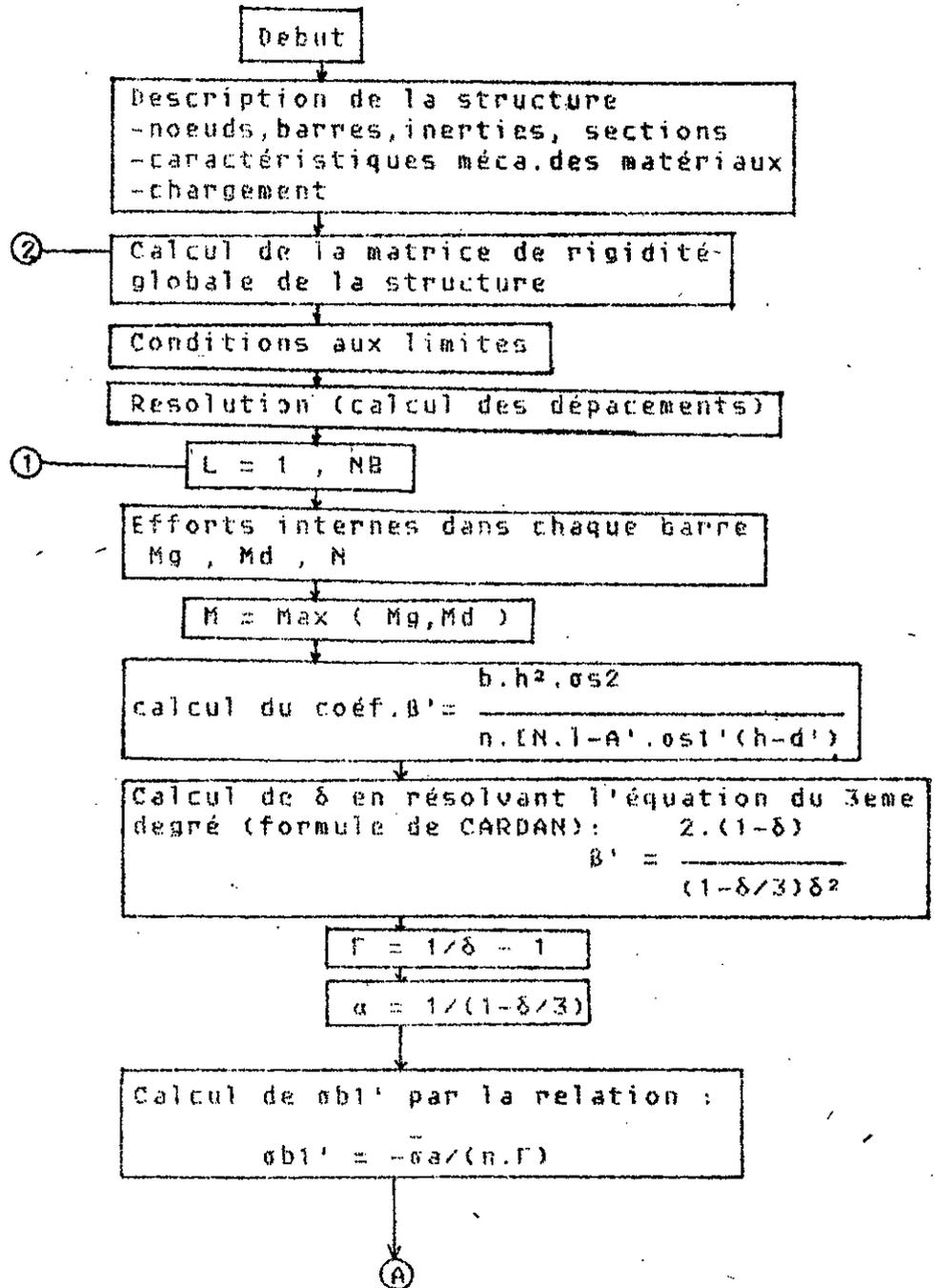
6°- Dans la cas de flexion simple sans armatures

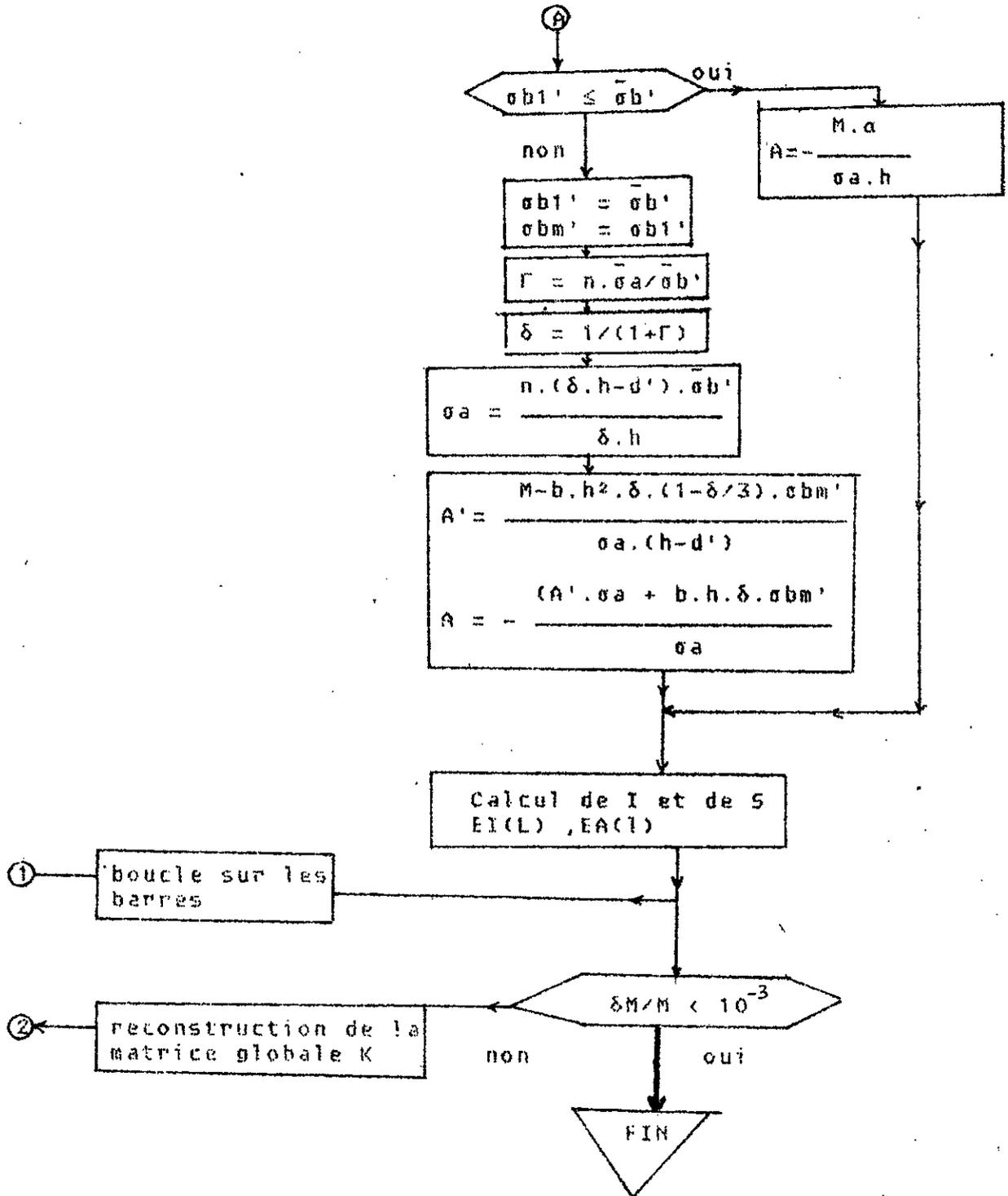
comprimées , il a été possible de trouver une expression simple de ce moment d'inertie en fonction des paramètres adimensionnels définis plus haut . On trouve :

$$I = \frac{b \cdot h^3}{\beta'} \Gamma \cdot \delta$$

Le terme  $\frac{\Gamma \cdot \delta}{\beta'}$  remplace le facteur diviseur 12 de l'expression du moment d'inertie de la section brute .

Organigramme de la méthode utilisée pour la détermination des aciers dans une section en béton armé (cas de la flexion simple avec ou sans armatures comprimées)





Notations

Correspondances dans prog. RESOLB

$\beta$

D1

$\delta$

A1

$\Gamma$

B2

$\alpha$

C2

$\sigma b'$

CB(L)

$\sigma'bm$

CBM(L)

$\sigma a$

CAS(L)

II-4 : EXEMPLES :

=====

Trois structures type ont été choisies :

- une poutre sur deux appuis isostatique (uniformément chargée) .
- une poutre continue à trois travées égales (uniformément chargée) .
- un portique simple encastéré en pieds (traverse uniformément chargée) .

On distingue ainsi deux types d'exemples :

-EXEMPLES DU TYPE A : Traités en problème de détermination de section d'armature .

\*Exemple A1 : poutre isostatique

\*Exemple A2 : poutre continue

-EXEMPLES DU TYPE B : Traités en problème de vérification

\*Exemple B1 : poutre isostatique

\*Exemple B2 : poutre continue

\*Exemple B3 : portique simple encastéré

Chaque structure a été calculée comme un assemblage d'éléments-barres dont les dimensions sont suffisamment petites pour supposer les sections d'armatures constantes .

Les caractéristiques mécaniques des matériaux suivantes ont été choisies .:

- contrainte admissible des aciers en traction et en compression :

$$\bar{\sigma}_a = 2.8 \times 10^4 \text{ tf/m}^2$$

- résistance à la compression du béton :  $\bar{\sigma}_b' = 165 \times 10^4 \text{ tf/m}^2$
- module de déformation longitudinale du béton :  
 $E_b = 385.56 \times 10^4 \text{ tf/m}^2$
- coefficient d'équivalence :  $n=15$
- enrobages :  $d = d' = 0.03 \text{ m}$

II-4-1 : EXEMPLES A  
=====

II-4-1-1 : Exemple A1 :

$q = 2.9 \text{ t/m}$

$H_t = 0.40 \text{ m}$   
 $b = 0.30 \text{ m}$   
 $E_{I_0} = 6168.96 \text{ kg/m}^2$

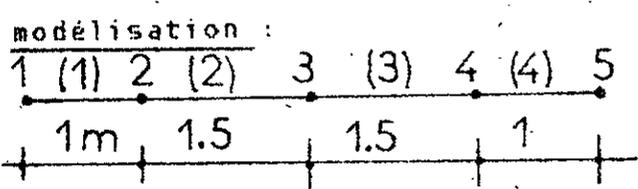
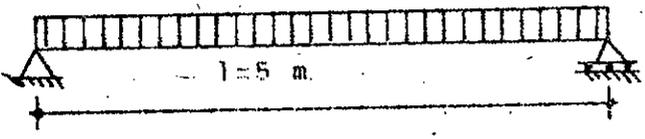


FIGURE II-7: Poutre isostatique ; Exemple A1  
-----

Cette poutre est calculée comme un assemblage de 04 éléments-barres tels que représentés sur la figure II-7. ON détermine pour chaque élément :

- les moments fléchissants aux extrémités ,
  - la section extrême la plus sollicitée pour laquelle on calcule la section d'armatures et l'inertie suivant la méthode décrite en paragraphe II-3 .
- On procède ensuite suivant l'algorithme décrit au paragraphe II-1-2 .

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau I suivant :

barre	iterat.	Mmax(tm)	rigidite(tm <sup>2</sup> )	A(cm <sup>2</sup> )	depl. verti.	
					n. gau.	n. dro
1	0		6168.96			
	1	5.8	2771.07	6.4	0	2.27
	2	5.8	2771.074	6.4	0	3.96
	3	5.8	2771.07	6.4	0	3.96
2	0		6168.96			
	1	9.06	3715.85	10.35	2.27	3.82
	2	9.06	3715.85	10.35	2.27	6.54
	3	9.06	3715.85	10.35	2.27	6.54

N.B: symétrie pour les éléments 3 et 4 .

TABLEAU I

II-4-1-2: Exemple A2 :

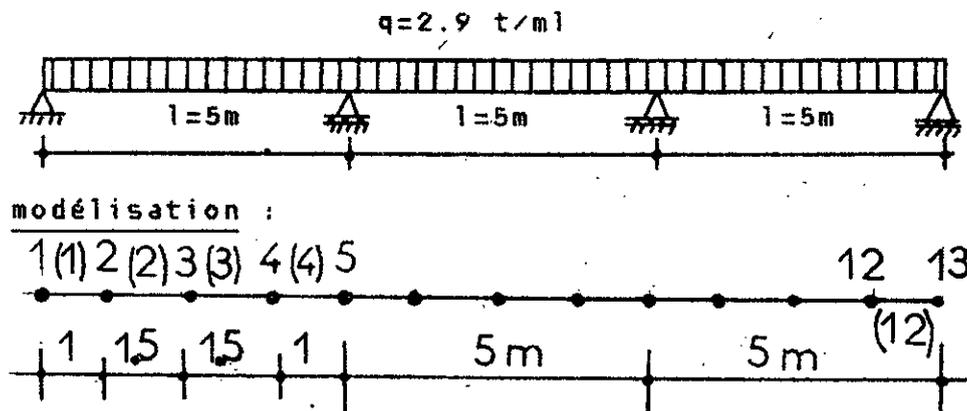


Figure II-8: Poutre continue ; Exemple A2

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau II .

barr.	iter.	Mmax(tm) en val. absolue	Rigidité (tm <sup>2</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	depl. verti. (mm)	
					n. gauche	n. droi.
1	0		8783.44			
	1	4.35	2684.02	4.09	0	0.93
	2	4.25	2633.18	3.99	0	2.53
	3	4.23	2625.01	3.98	0	2.6
	4	4.229	2623.85	3.97	0	2.615
	5	4.229	2623.67	3.97	0	2.616
	6	4.228	2623.65	3.97	0	2.617
	7	4.228	2623.44	3.97	0	2.617
2	0		8783.44			
	1	5.44	3199.72	5.18	0.93	1.4
	2	5.18	3082.67	4.92	2.53	3.67
	3	5.14	3063.74	4.88	2.6	3.78
	4	5.135	3061.01	4.87	2.615	3.8
	5	5.134	3060.61	4.87	2.616	3.8
	6	5.134	3060.55	4.87	2.617	3.8
	7	5.134	3060.54	4.87	2.617	3.8
3	0		8783.44			
	1	5.44	3199.72	5.18	1.4	0.61
	2	5.18	3082.67	4.92	3.67	1.55
	3	5.14	3063.74	4.88	3.78	1.6
	4	5.135	3061.01	4.87	3.8	1.61
	5	5.134	3060.61	4.87	3.8	1.61
	6	5.134	3060.55	4.87	3.8	1.61
	7	5.134	3060.54	4.87	3.8	1.61
4	0		8783.44			
	1	7.25	3965.97	7.03	0.61	0
	2	7.76	4162.92	7.56	1.55	0
	3	7.84	4193.67	7.65	1.6	0
	4	7.85	4198.07	7.66	1.61	0
	5	7.86	4198.73	7.66	1.61	0
	6	7.86	4198.82	7.66	1.61	0
	7	7.86	4198.84	7.66	1.61	0
5	0		8783.44			
	1	7.25	3965.97	7.03	0	-0.055
	2	7.76	4162.92	7.56	0	-0.2
	3	7.84	4193.67	7.65	0	-0.3
	4	7.85	4198.07	7.66	0	-0.318
	5	7.86	4198.73	7.66	0	-0.32
	6	7.86	4198.82	7.66	0	-0.321
	7	7.86	4198.84	7.66	0	-0.321

TABLEAU II

barr.	iter.	Mmax(tm) en val. absolue	Rigidite (tm <sup>2</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	depl. verti. (mm)	
					n. gauche	n. droi.
6	0		9783.44			
	1	1.81	1276.25	1.64	-0.055	0.1
	2	1.96	1368	1.78	-0.2	0.46
	3	2.04	1417.96	1.86	-0.3	0.25
	4	2.05	1425.09	1.87	-0.318	0.2
	5	2.05	1426.14	1.87	-0.32	0.202
	6	2.05	1426.3	1.87	-0.32	0.2
	7	2.05	1426.3	1.87	-0.32	0.2

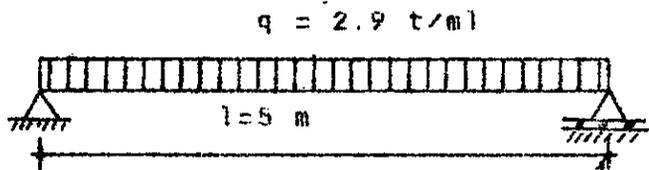
N.B.: Symétrie pour les barres 7 à 12

TABLEAU II (Suite)

II-4-2 : EXEMPLES B :

=====

II-4-2-1: Exemple B1:



Ht = 0.40 m  
 b = 0.30 m  
 EIo = 6168.96 t/m<sup>2</sup>

modélisation :

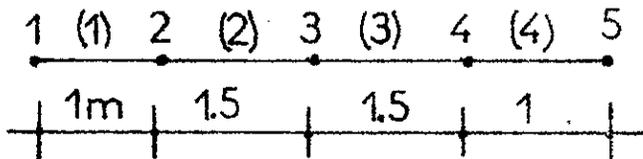


Figure II-9: Exemple B1

RESULTATS : VOIR TABLEAU III

-----

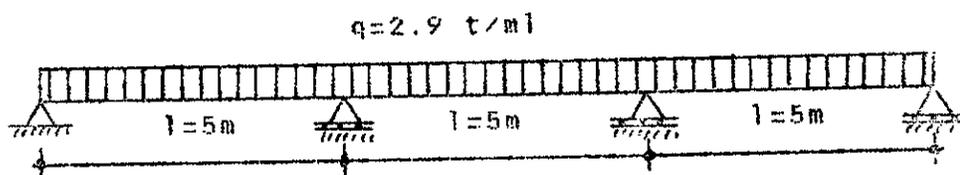
.../...

barr.	iter.	Mmax(tm) en val. absolue	Rigidite (tm <sup>2</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	depl. verti. (mm)	
					n. gauche	n. droi.
1	0		6168.96			
	1	5.8	3111.72	6.8	0	2.27
	2	5.8	3111.72	6.8	0	3.53
2	0		6168.96			
	1	9.06	4170.41	10.25	2.27	3.82
	2	9.06	4170.41	10.25	3.53	5.83

N.B.: Symétrie pour les barres 3 et 4 .

TABLEAU III

II-4-2-2: Exemple B2:



modélisation identique à celle de l'exemple A2 .

Caractéristiques géométriques :

elem.	dim.transv.(cm)	A (cm <sup>2</sup> )
1	30/45	4.62
2	"	4.62
3	"	5.5
4	"	5.5
5	"	7.69
6	"	2.35

Figure II-10: Exemple B2

RESULTATS : Voir tableau IV

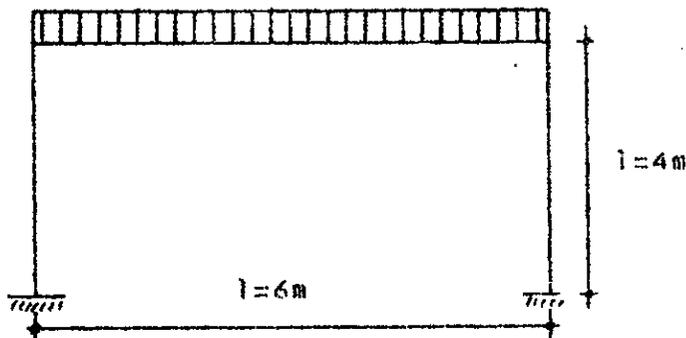
barr.	iter.	Mmax(tm) en val. absolue	Rigidite (tm <sup>2</sup> )	% A	depl. verti. (mm) n. gauche   n. droit.	
1	0		8783.442	0.34		
	1	4.35	3070.393		0	0.94
	2	4.245	3070.393		0	2.28
2	0		8783.442	0.34		
	1	5.44	3520.52		0.94	1.4
	2	5.175	3520.52		2.28	3.32
3	0		8783.442	0.41		
	1	5.44	3520.52		1.4	0.6
	2	5.175	4520.52		3.32	1.41
4	0		8783.442	0.41		
	1	7.25	4538.78		0.6	0
	2	7.78	4538.78		1.41	0
5	0		8783.44	0.57		
	1	7.25	4538.78		0	-0.055
	2	7.78	4538.78		0	-0.23
6	0		4198.07	0.175		
	1	1.81	4198.73		-0.055	0.11
	2	1.98	4198.82		-0.23	0.24

N.B.: Symétrie pour les barres 7 à 12 .

TABLEAU IV

II-4-2-3: Exemple B3:

$q=6t/ml$



.../...

modélisation :

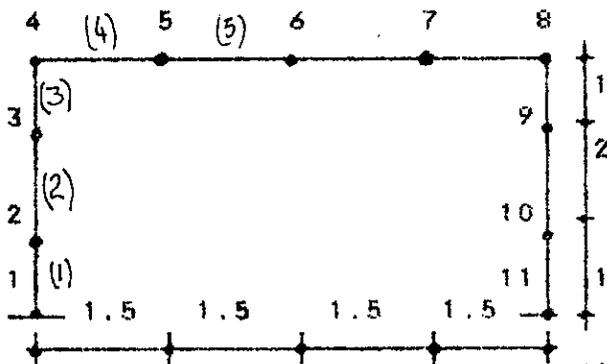


Figure II-11: Exemple B3

Caractéristiques géométriques des éléments du portique B3:

elem.	dim.transv.(cm)	A (cm <sup>2</sup> )	A' (cm <sup>2</sup> )
1	30/40	4	2
2	"	6	3
3	"	9	4
4	30/55	10	4
5	"	18	9

Les résultats sont consignés dans le tableau U

barr.	iter.	Mmax(tm) en val. absolue	Rigidite (tm <sup>2</sup> )	Aciers (%)	depl.verti.(mm)	
					n.gauche	n.droi.
1	0		6168.96	A=.34%		
	1	4.79	2920.041	A'=.17%	0	0.004
	2	3.68	3786.234		0	0.008
	3	4.145	3309.251		0	0.007
	4	3.887	3544.942		0	0.007
	5	4.02	3416.029		0	0.007
	6	3.948	3483.809		0	0.007
	7	3.986	3447.275		0	0.007
	8	3.96	3466.72		0	0.007
	9	3.976	3456.3		0	0.007
	10	3.971	3461.86		0	0.007

TABLEAU U

barr.	iter.	Mmax(tm) en val. absolue	Rigidite (tm <sup>2</sup> )	Aciers (%)	depl. verti. (mm)	
					n. gauche	n. droi.
2	0		6168.96	A=.5% A'=.25%		
	1	6.02	3585.942		0.004	0.117
	2	5.293	3813.805		0.008	0.226
	3	5.366	3785.538		0.007	0.21
	4	5.367	3785.177		0.007	0.21
	5	5.361	3787.387		0.007	0.21
	6	5.366	3785.853		0.007	0.21
	7	5.364	3786.71		0.007	0.21
	8	5.365	3786.231		0.007	0.21
	9	5.364	3786.49		0.007	0.21
	10	5.364	3786.36		0.007	0.21
3	0		6168.96	A=.75% A'=.34%		
	1	9.625	4373.488		0.117	0.156
	2	8.284	4486.79		0.226	0.293
	3	8.537	4461.45		0.21	0.275
	4	8.452	4469.747		0.215	0.28
	5	8.489	4466.163		0.213	0.278
	6	8.47	4467.993		0.214	0.279
	7	8.48	4467.04		0.213	0.279
	8	8.475	4467.55		0.214	0.279
	9	8.477	4467.27		0.214	0.279
	10	8.476	4467.42		0.213	0.279
4	0		16036.6			
	1	10.625	9468.46		0.156	2.628
	2	11.964	9450.276		0.293	3.473
	3	11.713	9454.03		0.275	3.39
	4	11.79	9452.34		0.28	3.42
	5	11.76	9453.13		0.278	3.4
	6	11.78	9452.7		0.279	3.41
	7	11.77	9452.95		0.279	3.41
	8	11.775	9452.83		0.279	3.41
	9	11.77	9452.88		0.279	3.41
	10	11.774	9452.83		0.279	3.41
5	0		16036.6			
	1	17.375	15265.9		2.628	3.768
	2	18.716	15254.71		3.473	4.77
	3	18.463	15257.23		3.39	4.67
	4	18.548	15256.01		3.42	4.7
	5	18.51	15256.6		3.4	4.69
	6	18.53	15256.34		3.41	4.69
	7	18.52	15256.44		3.41	4.69
	8	18.52	15256.37		3.41	4.69
	9	18.52	15256.4		3.41	4.69
	10	18.52	15256.37		3.41	4.69

N.B: Symétrie pour les barres 6 à 10

TABLEAU U (Suite)

II-5 : INTERPRETATION DES RESULTATS :  
=====

II-5-1: Problème de détermination:  
-----

II-5-1-1: Exemple A1:  
-----

Il s'en dégage les remarques suivantes:

a- A la première itération , la rigidité de chaque élément chute fortement :

-de 6168.96 tm<sup>2</sup> à 2771.073 tm<sup>2</sup> pour l'élément (1) soit une diminution de 55.09 % .

-de 6168.96 tm<sup>2</sup> à 3715.85 tm<sup>2</sup> pour l'élément (2) soit une diminution de 39.8 % .

b- Cette chute de rigidité n'affecte pas la valeur du moment fléchissant calculé dans la section la plus sollicitée de chaque élément .

c- La convergence est obtenue à la deuxième itération . Cette rapidité de convergence est due au caractère faiblement non-linéaire du problème (flexion simple , isostaticité ) .

d- La rigidité , initialement constante sur toute la poutre, varie d'un élément à un autre après application de la méthode :

-de l'élément (1) à l'élément (2) , il y a augmentation de la rigidité de 34.1 % .

e- La valeur de la section d'acier dans la section la plus sollicitée de chaque élément demeure pratiquement constante au cours des itérations .

.../...

II-5-1-2:Exemple A2:

On relève les points suivants :

a- A la première itération , il y a aussi forte chute de la rigidité de chaque élément après application de la méthode :

-de 8783.44  $\text{tm}^2$  à 2684.02  $\text{tm}^2$  pour l'élément (1) soit une diminution de 69.44 % .

-de 8783.44  $\text{tm}^2$  à 3199.72  $\text{tm}^2$  pour les éléments (2) et (3) soit une diminution de 69.44 % .

-de 8786.44  $\text{tm}^2$  à 3965.97  $\text{tm}^2$  pour les éléments (4) et (5) soit une diminution de 54.85 % .

-de 8783.44  $\text{tm}^2$  à 1276.25  $\text{tm}^2$  pour l'élément (6) soit une diminution de 85.47 % .

b-A l'inverse de l'exemple A1 , la valeur du moment fléchissant dans chaque élément est affectée par ces chutes de rigidité . Il y a une légère augmentation des moments aux appuis intermédiaires et à la travée centrale , et une diminution des moments fléchissants aux travées de rive (+8.4 % à l'appui 5 , +13.5 % en travée centrale , -5.6 % en travée de rive ) .

c- Il s'ensuit de cette variation d'efforts , une augmentation de la section d'acier aux appuis intermédiaires et en travée centrale et une diminution en travées de rive.

d- La rigidité , initialement constante sur toute la poutre ,

.../...

varie d'un élément à un autre après application de la méthode .

Ainsi pour la première travée :

-de l'élément (1) à l'élément (2) , il y a augmentation de la rigidité de 16.65 % .

-de l'élément (3) à l'élément (4) , il y a augmentation de la rigidité de 37.2 % .

Pour la travée centrale :

-de l'élément (5) à l'élément (6) , il y a diminution de la rigidité de 66.03 % .

e- On obtient la convergence en rigidité au bout d'un nombre plus élevé d'itérations que pour l'exemple A1 . Ceci s'explique par le fait que l'hyperstaticité augmente le caractère non-linéaire du problème .

## II-5-2: PROBLEME DE VERIFICATION :

=====

### II-5-2-1: Exemple B1:

-----

On constate que :

a- Les chutes de rigidité sont du même ordre de grandeur que pour l'exemple A1 , et ce à la première itération :

.....

-de 6168.93 tm<sup>2</sup> à 3111.72 tm<sup>2</sup> soit -49.56 % pour l'élément (1).

-de 6168.93 tm<sup>2</sup> à 4170.41 tm<sup>2</sup> soit -32.4 % pour l'élément (2)

b- La convergence est atteinte à la première itération dans ce cas de vérification des contraintes . Cela est dû au fait que la position de l'axe neutre ne dépend pas du moment fléchissant dans ce cas de flexion simple. Elle ne dépend que du pourcentage d'armatures , des dimensions de la section et du coefficient d'équivalence n .

c- La chute de rigidité par rapport à la rigidité initiale n'affecte pas la valeur du moment fléchissant .

d- D'un élément à un autre , la rigidité varie notablement après application de la méthode (+34 % de l'élément (1) à l'élément (2) ).

#### II-5-2-2: Exemple B2:

##### ----- Constatations et commentaires :

On observe d'importantes chutes de rigidité à la première itération (du même ordre de grandeur que pour l'exemple A2):

-de 8783.44 tm<sup>2</sup> à 3070.39 tm<sup>2</sup> soit -65 % pour l'élément (1);

-de 8783.44 tm<sup>2</sup> à 3520.52 tm<sup>2</sup> soit -59.9 % pour les éléments (2) et (3) ;

-de 8783.44 tm<sup>2</sup> à 4538.78 tm<sup>2</sup> soit -48.3 % pour les éléments (4) et (5) ;

-de 8783.44 tm<sup>2</sup> à 1760.92 tm<sup>2</sup> soit -80 % pour l'élément (6).

b- On a convergence à la première itération et ceci pour la même raison que pour la poutre B1.

c- Comme pour l'exemple A2, la chute de rigidité provoque un changement dans la valeur des moments fléchissants.

d- D'un élément à un autre, on observe une variation notable de rigidité :

Pour la première travée:

-de l'élément (1) à l'élément (2) il y a augmentation de EI de 14.66 %.

-de l'élément (3) à l'élément (4) EI augmente de 28.9 %.

Pour la 2eme travée, EI diminue de 61.2 %.

II-5-2-3: Exemple B3:

-----  
Nous sommes en présence d'un cas de flexion composée:

a- On observe qu'à la première itération la chute de rigidité dans chaque élément est importante :

-pour (1), de 6168.96 tm<sup>2</sup> à 2920.04 tm<sup>2</sup> soit -52.66 % ;

-pour (2), de 6168.96 tm<sup>2</sup> à 3585.94 tm<sup>2</sup> soit -41.87 % ;

-pour (3), de 6168.96 tm<sup>2</sup> à 4373.49 tm<sup>2</sup> soit -29.1 % ;

-pour (4), de 16036.6 tm<sup>2</sup> à 9468.46 tm<sup>2</sup> soit -41 % ;

-pour (5), de 16036.6 tm<sup>2</sup> à 15265.9 tm<sup>2</sup> soit -4.8 % .

b- Les variations des efforts suite aux chutes de rigidité dans chaque élément (à la convergence) sont les suivantes :

- Du fait de la symétrie, l'effort normal reste constant au cours des itérations.

- Moments fléchissants dans les montants du portique :

\*élément (1), diminution de M de 17.1 % (de 4.79 tm à 3.97tm)

\*élément (2), diminution de M de 10.9 % (de 6.02 tm à 5.36tm)

\*élément (3), diminution de M de 11.9 % (de 9.62 tm à 8.47tm)

Nous pouvons donc dire que dans la cas des poteaux la variation de M due à la diminution de la rigidité va dans la sens de la sécurité. On remarque de plus que la diminution du moment fléchissant est plus accentuée à la base du poteau du portique qu'en partie supérieure.

- Moments fléchissants dans la traverse :

\*élément (4), augmentation de M de 10.8 % (de 10.62 tm à 11.77 tm) ;

\*élément (5), augmentation de M de 6.6 % ( de 17.37 tm à 18.54 tm ) .

Dans la cas de la traverse, la variation de M ne va pas dans la sens de la sécurité.

c- Variation de la rigidité d'un élément à un autre à la convergence :

- augmentation de EI de 35 % de (1) à (2) ;

- augmentation de EI de 58 % de (2) à (3) ;

- augmentation de EI de 30 % de (4) à (5) .

d- Convergence en rigidité au bout d'un nombre plus élevé d'itérations .

II-5-3 : CONCLUSIONS :

Par cette méthode , nous avons mis en évidence les points suivants :

1°- Dans une structure en béton armé , les rigidités calculées en négligeant le béton tendu chutent fortement par rapport à celles obtenues en considérant les inerties des sections brutes de béton . Ces chutes peuvent atteindre 80 % par rapport aux valeurs initiales dans un même élément ; le tableau VI donne les différents ratios pour chaque exemple traité . Cependant , les variations de rigidité d'un élément à un autre sont moins marquées , de sorte que les efforts sont moins affectés .

2°- Calculer une structure en béton armé par la méthode proposée revient à considérer cette structure à inertie variable d'un élément à un autre .

Les écarts entre rigidités de deux éléments adjacents varient dans le même sens que le moment fléchissant agissant dans les deux sections les plus sollicitées de ces deux éléments . Ces écarts peuvent être de 65 % .

3°- La méthode proposée permet de représenter au mieux le comportement d'une structure en béton armé tel qu'il doit être envisagé dans la pratique des calculs de projets par l'ingénieur .

4°- Les chutes de rigidités par rapport aux valeurs brutes

affectent les valeurs des moments fléchissants dans les éléments de la structure , notamment lorsque celle-ci est hyperstatique . Cette variation ne va pas toujours dans le sens de la sécurité : on a observé l'augmentation des moments sur appuis dans le cas de la poutre continue ou en travée dans le cas de l'exemple B3 .

5°- Sur les exemples traités , le processus itératif a été rapidement convergent (2eme itération dans la cas de la poutre isostatique , un maximum de 8 iterations dans le cas de l'exemple B3 ) .

6°- Une conséquence des conclusions (1) et (2) : les différentes chutes de rigidités constatées dans les exemples étudiés , nous amène à définir , dans le cas d'une section rectangulaire , une hauteur équivalente de section  $H_e$  pour chaque élément d'une structure donnée . Cette hauteur  $H_e$  sera par exemple comparée à la hauteur totale  $H_t$  , elle-même donnée par un prédimensionnement ou par des exigences de cahier des charges ou architecturales .

En calcul de structures , cette hauteur équivalente s'avère très utile puisqu'elle permet de calculer la rigidité réelle dans la structure , et par voie de conséquence les efforts réels et les déformations instantanées correspondantes .

Cette hauteur équivalente présente aussi un aspect réglementaire : pour un type de structure donné , il est

.../...

possible d'établir un catalogue de coefficients par lesquels il faut multiplier la hauteur totale  $H_t$  pour avoir la hauteur équivalente  $H_e$  ; l'inertie à introduire alors dans le calcul des efforts sera :

$$I_e = b.(H_e^3)/12$$

Ces coefficients auront la même signification que ceux donnés par la méthode forfaitaire des règles CCBA 68.

On obtient  $H_e$  de la manière suivante :

$I$  étant l'inertie obtenue dans chaque élément à la convergence, on a :

$$H_e = \sqrt[3]{12.I/b}$$

type de problem	exempl	elem.	RIGIDITES (tm <sup>2</sup> )		ecarts (%)
			val. initiale	v. proposee	
D E T E R M I N A	A1	1	6168.96	2771.01	-55
		2	"	3715.85	-35.8
	A2	1	8783.44	2623.64	-70.15
		2	"	3060.54	-65.15
		3	"	3060.54	-65.15
		4	"	4198.94	-52.2
5	"	4198.94	-52.2		
6	"	1426.23	-83.76		
V E R I F I C A T I O N	B1	1	6168.96	3111.72	-49.56
		2	"	4170.41	-32.4
	B2	1	8783.44	3070.39	-65.04
		2	"	3520.52	-59.9
		3	"	3520.52	-59.9
		4	"	4538.8	-48.32
		5	"	4538.8	-48.32
		6	"	1760.92	-80
	B3	1	6168.96	3461.86	-43.9
		2	"	3786.36	-38.6
		3	"	4467.42	-27.6
		4	16036.6	9452.83	-41
5		"	15256.37	-23.6	

TABLEAU VI

II-6: RIGIDITES REGLEMENTAIRES: [ 7 , 8 ]  
-----

Selon que l'on effectue un calcul de déformations ou que l'on recherche la distribution des sollicitations dans une structure, les différents règlements donnent une expression différente de la rigidité.

Ainsi, pour la détermination des efforts dans les structures, toutes les normes admettent des méthodes d'analyse prenant en considération les inerties des sections brutes, notamment dans le cas des sollicitations de service.

Toutefois, certains règlements permettent l'adoption par le projeteur de toute hypothèse raisonnable, à la condition qu'elle soit conservée tout au long du calcul.

C'est le cas du règlement britannique CP 110 qui admet l'une des hypothèses suivantes :

- "la section est la section nette de béton seule (armatures négligées) "
- "la section est la section homogène totale brute (armatures incluses) "
- "la section est la section homogène réduite (béton tendu négligé) "

Le règlement américain donne un libre choix pour toute méthode approchée.

La norme allemande DIN 1045 donne aussi un libre choix de la méthode. Elle impose cependant une vérification de la stabilité d'ensemble des structures à noeuds déplaçables.

Ainsi, pour estimer la rigidité des éléments d'une structure, cette norme donne les valeurs moyennes du rapport  $EI/EIo$  pour :

-les sections rectangulaires et dans le cas des sollicitations de service ;

-les sections en T telles que :  $b/b_0 < 2$

les valeurs de ces rapports figurent dans le tableau suivant (tableau VII) :

Cas considéré	$EI/EIo$
flexion avec compression (armature sensiblement symétrique)	$0.6 + 15(W_0 + W_0')$
flexion avec armature d'un seul côté (sections d'encastrement)	$0.6 + 10W_0$
flexion avec traction (armature sensiblement symétrique)	$0.2 + 15(W_0 + W_0')$

$W_0$  et  $W_0'$  : pourcentages géométriques des armatures respectivement tendues et comprimées.

TABLEAU VII

Dans le tableau VIII, nous établissons une comparaison des valeurs de  $EI/EIo$  données par la norme DIN 1045 aux valeurs données par la méthode proposée.

Toutes les normes s'accordent pour prendre constant le module de deformation longitudinale du beton en l'etat limite de service .

type de problem	exempl	elem.	EI/EIo (DIN 1045)	EI/EIo (propose)	ecarts (%)
DETERM.	A1	2	0.686	0.603	-12
	A2	2	0.604	0.348	-42.4
		4	0.657	0.48	-65.15
VERIFI.	B1	2	0.685	0.676	-1.3
	B2	2	0.64	0.4	-37.5
		4	0.66	0.52	-21.2
	B3	1	0.675	0.56	-17
		2	0.72	0.614	-14.7
		3	0.76	0.72	-5.3
		4	0.727	0.59	-18.8
		5	0.845	0.76	-10

TABLEAU VIII

Les valeurs de EI/EIo sont en fait des valeurs moyennes de EI/EIo pour les différents elements de la structure. Les valeurs de EI/EIo sont en fait des valeurs moyennes de EI/EIo pour les différents elements de la structure.

type de problem	exempl	elem.	EI/EIo (DIN 1045)	EI/EIo (propose)	ecarts (%)
DETERM.	A1	2	0.686	0.603	-12
	A2	2	0.604	0.348	-42.4
		4	0.657	0.48	-65.15
VERIFI.	B1	2	0.685	0.676	-1.3
	B2	2	0.64	0.4	-37.5
		4	0.66	0.52	-21.2
	B3	1	0.675	0.56	-17
		2	0.72	0.614	-14.7
		3	0.76	0.72	-5.3
		4	0.727	0.59	-18.8
		5	0.845	0.76	-10

II-7: CALCUL DES FLECHES

-----  
COMPARAISON AUX FLECHES REGLEMENTAIRES : [ 7 , 8 , 9 ]  
-----

Pour le calcul des déformations , la rigidité est perçue différemment par les normes .

II-7-1:Réglement Français CCBA 68:

-----  
Ces règles permettent de tenir compte de l'existence de fissures éventuelles dans les zones tendues de la section (stade fissuré) . Ainsi , dans le calcul des flèches , on substitue au moment d'inertie  $I_t$  de la section totale rendue homogène , le moment d'inertie  $I_f$  donné par la formule suivante :

$$I_f = \frac{I_t}{1 + \alpha \cdot \mu}$$

Où:

$$\alpha = \alpha_i = \frac{\sigma_b}{72(2 + (3b_0/b))W_0} \quad \text{pour les charges de courte durée}$$

$$\alpha = \alpha_v = \frac{\sigma_b}{180(2 + (3b_0/b))W_0} \quad \text{pour les charges permanentes .}$$

et

$$\mu = 1 - \frac{5 \cdot \sigma_b}{4 \cdot W_0 \cdot \sigma_a + 3 \sigma_b} \quad \text{si } \mu > 0$$

$$\mu = 0 \quad \text{si } \mu < 0$$

La flèche est alors égale à :

$$f_c = \frac{M \cdot l^2}{10 \cdot E_i \cdot I_{f_i}} \quad \text{sous charges de courte durée}$$

$I_{f_i}$ : valeur de  $I_f$  obtenue en utilisant  $\alpha_i$

$$f_c = \frac{M \cdot l^2}{10 \cdot E_v \cdot I_{f_v}} \quad \text{sous charges de longue durée .}$$

$I_{f_v}$  correspondant à  $\alpha_v$  .

.../...

Avec -  $E_i = 21000 \sqrt{\sigma_j}$

$E_v = E_i/3$

II-7-2: Normes américaines ACI:

L'American Concrete Institute utilise pour le calcul des déformations à l'état de service, les formules empiriques suivantes:

-pour les poteaux:

$$EI = (0.2E_b \cdot I_b + E_a \cdot I_a) \frac{1}{1 + \beta}$$

-pour les poutres:

$$EI = E_b \cdot I_b (M_f/M)^3 + [1 - (M_f/M)^3] I \cdot E_i \cdot I_f$$

avec:

$I_b$ : moment d'inertie de la section totale de béton, sans tenir compte des armatures.

$E_a$ : module d'élasticité de l'acier.

$I_a$ : moment d'inertie des armatures pris par rapport à l'axe neutre de la section totale.

$\beta$ : coefficient dépendant du fluage; rapport de la charge permanente à la charge totale ( $0 \leq \beta \leq 1$ )

$I_f$ : moment d'inertie de la section de béton fissurée.

$$I_f = \frac{M_f}{\sigma_b} \nu^3$$

$M_f$ : moment de fissuration tel que:  $M_f = \frac{\sigma_b \cdot I_b}{\nu}$

$\sigma_b$ : contrainte de traction de référence.

$\nu$ : distance de l'axe neutre à la fibre la plus tendue.

II-7-3: Recommandations du CEB/FIP 1972:

Le comité euro-international du béton a adopté la méthode classique de double intégration de la courbure le long de l'axe de la pièce pour le calcul des déformations dues à la flexion. Dans ce règlement, on tient compte de la rigidité réelle de chaque élément :

-si  $M < M_f$  alors  $EI = EI_t$

$I_t$ : moment d'inertie de la section totale homogénéisée

-si  $M > M_f$  alors  $EI = EI_f$

$I_f$ : moment d'inertie de la section fissurée.

#### II-7-4: Comparaisons effectuées:

On compare les résultats obtenus en utilisant la méthode proposée aux résultats donnés par la méthode classique de double intégration de la courbure (inerties brutes) et les différentes réglementations (CCBA 68, US, CEB/FIP); la méthode proposée utilise les caractéristiques des matériaux données par le règlement CCBA 68.

On trouvera ces différentes comparaisons dans les tableaux IX à XI.

Methode		Regles CCBA 68		Meth. proposee		Meth. classiqu	
Exemple	elemen	rigid. (tm <sup>2</sup> )	fleche max(mm)	rigidi.	fleche max.	rigid.	flech. max.
B1	1	2451.9	4.88	3111.72	3.53	6168.9	2.27
	2	2956.1	8.13	4170.41	5.83	"	3.82
B2	1	3192.4	2.5	3070.39	2.28	8783.4	0.94
	2	3146.3	3.7	3520.52	3.32	"	1.39
	3	3146.3	3.7	3520.52	3.32	"	1.39
	4	3555.3	0	4538.8	0	"	0
	5	3555.3	0	4538.8	0	"	0
	6	975	0.87	1760.8	0.24	"	0.11
B3	1	3369.8		3459.93		6168.9	
	2	3089.7		3786.4		"	
	3	3145.5		4467.37		"	
	4	7725.5	4.45	9452.84	3.41	16037	2.63
	5	11156	6.2	15256.4	4.69	"	3.77

Tableau IX

Methode		Regles US (ACI)		Meth. proposee		Meth. classiqu	
Exemple	elemen	rigid. (tm <sup>2</sup> )	fleche max(mm)	rigidi.	fleche max.	rigid.	flech. max.
B1	1	2239.5	5.23	3111.72	3.53	6168.9	2.27
	2	2774.7	8.68	4170.41	5.83	"	3.82
B2	1	3756.6	2.57	3070.39	2.28	8783.4	0.94
	2	3139.4	3.9	3520.52	3.32	"	1.39
	3	3139.4	3.9	3520.52	3.32	"	1.39
	4	3262.3	0	4538.8	0	"	0
	5	3262.3	0	4538.8	0	"	0
	6	5774.1	.003	1760.8	0.24	"	0.11
B3	1	811.09		3459.93		6168.9	
	2	811.09		3786.4		"	
	3	811.09		4467.37		"	
	4	6681.3	6.93	9452.84	3.41	16037	2.63
	5	10048	9.4	15256.4	4.69	"	3.77

Tableau X

Methode		Regles CEB/FIP		Meth. proposee		Meth. classiqu	
Exemple	elemen	rigid. (tm <sup>2</sup> )	fleche max(mm)	rigidi.	fleche max.	rigid.	flech. max.
B1	1	2510.8	4.37	3111.72	3.53	6168.9	2.27
	2	3364.9	7.22	4170.41	5.83	"	3.82
B2	1	2477.4	2.87	3070.39	2.28	8783.4	0.94
	2	2889.6	4.21	3520.52	3.32	"	1.39
	3	2880.6	4.21	3520.52	3.32	"	1.39
	4	3662	0	4538.8	0	"	0
	5	3662	0	4538.8	0	"	0
	6	7493.8	0.26	1760.8	0.24	"	0.11
B3	1	2356.1		3459.93		6168.9	
	2	2893.4		3786.4		"	
	3	3528.8		4467.37		"	
	4	7639.7	4.9	9452.84	3.41	16037	2.63
	5	12318	5.91	15256.4	4.69	"	3.77

Tableau XI

Les tableaux IX à XI indiquent que les flèches obtenues par la méthode proposée sont plus proches des flèches réglementaires .

Dans les exemples étudiés , les flèches proposées sont plus proches des valeurs données par les règles du CEB/FIP . Les valeurs obtenues en utilisant la méthode prenant en compte les inerties des sections brutes demeurent nettement plus faibles comparées aux valeurs réglementaires et aux valeurs proposées .

CHAPITRE III :

STRUCTURES PREFABRIQUEES

III-1: Généralités et considérations pratiques:

La détermination des efforts dans les structures formées de barres est généralement faite en considérant les barres liées entre elles par des noeuds parfaits (encastresments parfaits).

En fait , dans la pratique des projets et dans plusieurs domaines de la construction , la réalité est toute autre .

C'est le cas par exemple en charpente métallique ; les ossatures métalliques sont constituées d'assemblages boulonnés ou rivés . ainsi , les attaches des barres aux noeuds ou des poteaux aux fondations sont réalisés avec des éléments déformables : platines , cornières , rivets , boulons etc... Dans ce domaine , de nombreuses recherches ont été effectuées sur le comportement de ces noeuds déformables et sur leur influence sur le comportement général de la structure . En référence [ 10 ] , l'auteur réalise une console par découpage d'un espace infini élastique . La continuité parfaite entre l'espace semi-infini et la console n'empêche pas l'existence au point d'encastrement d'une rotation non nulle de la fibre moyenne de cette console , provoquée par la déformation de l'espace

élastique autour de l'encastrement . Après une généralisation de la définition du degré d'encastrement à tous les degrés de liberté , l'auteur établit la matrice de rigidité d'une barre élastiquement encastree .

De la même manière , en référence [ 11 ] , il est exposé une méthode de calcul de la matrice de rigidité d'une poutre droite travaillant en flexion tenant compte des imperfections de liaisons . Les auteurs montrent que l'élasticité de certaines liaisons peut avoir une influence déterminante sur le comportement d'une structure . On a constaté que pour un portique simple , plus les liaisons au sol deviennent souples , plus les déplacements des points du portique deviennent importantes . Avec un critère de ruine basé sur l'amplitude des déplacements , la charge de ruine varie de manière appréciable avec le degré d'encastrement .

De la même façon , en béton armé , [12], le noeud parfait n'existe pas . Certaines dispositions réglementaires recommandent même de placer des coutures dans le noeud (cadres et étriers dans les deux sens) .

Comme dans le cas de la charpente métallique , les causes de mauvais encastrements sont nombreuses :

1°- Les contraintes de cisaillement provoquent des déformations de fluage nettement supérieures à celles provoquées par les contraintes normales (en état de

.../...

contrainte tridimensionnel , l'expérience a montré que le fluage dû au deviateur des contraintes est beaucoup plus grand que celui dû au tenseur sphérique) . Or les zones d'appuis sont le siège de contraintes de cisaillement importantes .

2°- Toujours du point de vue fluage , on constate qu'il se développe des déformations plus fortes que celles prévues par la résistance des matériaux classique . Ces déformations indiquent souvent une diminution du module de déformation longitudinale  $E$  aux appuis (zones à fortes contraintes) .

3°- Les aciers freinent le fluage mais sont en contrepartie plus sollicités . Les zones d'appuis étant déjà sur-ferraillées , ceci provoque une fissuration plus importante

4°- Aspect préfabrication: [12 , 13]

De nombreux procédés de préfabrication pratiquent un coulage en deuxième phase (en place) des zones d'about et des noeuds (préfabrication par panneaux lourds, systèmes poteaux-poutres ...) . Etant donné que le béton de chantier est généralement de qualité amoindrie , les ages du béton préfabriqué et du béton coulé en place sont différents , les zones d'interface sont affaiblies , l'adhérence acier-béton est plus faible , les zones nodales deviennent vulnérables . Une façon de tenir compte de toutes ces imperfections de liaison est de diminuer le degré d'encastrement .

.../...

D'un point de vue sécurité , le fait de diminuer le degré d'encastrement provoque une diminution d'effort au niveau du noeud et une augmentation d'effort en travée . Dans le cas d'un dimensionnement en travée , la sécurité est mieux assurée en prenant en compte les degrés d'encastresments réels .

Ainsi , calculer une structure sans tenir compte des déplacements relatifs des noeuds revient à sous-dimensionner les éléments de cette structure . d'où la nécessité , pour une meilleure tenue des ouvrages , de tenir compte des encastresments élastiques .

### III-2: Simulation de l'élasticité d'une liaison

#### ----- Influence sur la matrice de rigidité : [111] -----

Au vu de toutes les considérations précédentes , il est possible de tenir compte de ces "imperfections" de liaisons (entre éléments de la structure et aux points d'appuis) .

Pour cela , supposons que :

- les noeuds de la structure soient assimilés à des noyaux rigides ;
- les éléments de la structure étudiée ne soient le siège que de phénomènes élastiques ;
- au niveau des liaisons noeuds-éléments , des écoulements plastiques ou d'autres phénomènes complexes peuvent se

développer ;

-les déformations sont petites .

-l'effort normal n'a aucune influence sur les déformations de flexion .

Soit donc un élément soumis en ses extrémités aux efforts,  $M_1, M_2, N$  (figure III-1 )

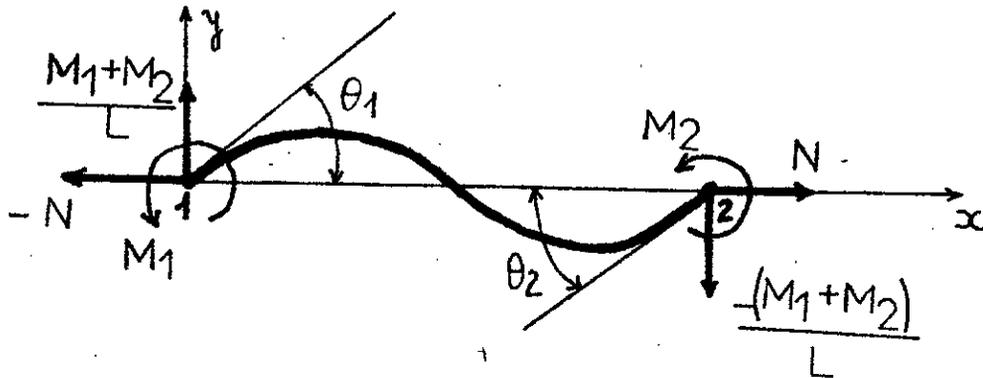


Figure III-1: Elément-barre sollicité en flexion

Aux efforts  $M_1, M_2, N$  correspondent respectivement la rotation  $\theta_1$  à l'extrémité 1, la rotation  $\theta_2$  à l'extrémité 2 et l'allongement  $\delta_1$  de l'élément .

En appliquant les formules de BRESSE , on obtient les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{EI} (k_1.M_1 - k_2.M_2) \\ \theta_2 &= \frac{1}{EI} (-k_2.M_1 + k_1.M_2) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

avec  $k_1 = 1/3$  et  $k_2 = 1/6$

Inversement , le système d'équations (I) donne :

$$\left. \begin{aligned} M1 &= \frac{EI}{l} (L.\theta1 + K.\theta2) \\ M2 &= \frac{EI}{l} (K.\theta1 + L.\theta1) \end{aligned} \right\} \text{(I')}$$

Où: K et L sont des coefficients tels que :

$$L = \frac{k1}{k1^2 - k2^2} \quad \text{et} \quad K = \frac{k2}{k1^2 - k2^2}$$

\* les coefficients L et K se reduisent à L=4 et K=2 .

On aboutit alors à la relation déjà utilisée en 1ere partie :

$$\begin{bmatrix} M1 \\ M2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta1 \\ \theta2 \end{bmatrix}$$

de la forme [M] = [ke].[θ]

Examinons maintenant la liaison d'un noeud (supposé rigide) avec un élément . Si on suppose l'élasticité de cette liaison , la rotation du noeud par rapport à un repère lié à l'élément est envisagée comme le montre la figure (III-2) ; soient θ'1 pour le noeud 1 et θ'2 pour le noeud 2 ces rotations (θ'1 = θ'2 = 0 au debut du chargement)

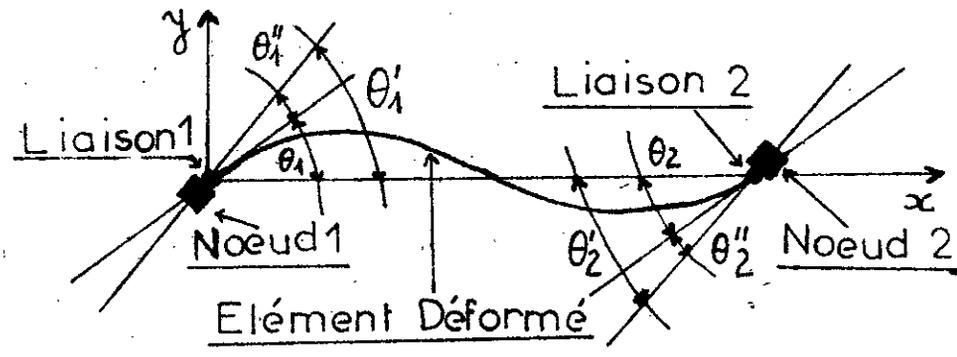


Figure III-2: Assemblage Noeud-Elément

la rotation de la liaison Noeud 1-élément est  $\theta''1 = \theta'1 - \theta1$

la rotation de la liaison Noeud 2-élément est  $\theta''2 = \theta'2 - \theta2$

les rotations  $\theta1$  et  $\theta2$  sont données par les équations (I) précédentes .

Supposons , pour ces liaisons 1 et 2 un comportement élastique parfaitement plastique . Il est alors possible d'exprimer  $\theta''1$  et  $\theta''2$  en fonction de  $M1$  et  $M2$  .

On a , pour des accroissements petits :

$$\begin{cases} \delta M1 = \Omega1 . \delta \theta''1 \\ \delta M2 = \Omega2 . \delta \theta''2 \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} \delta \theta''1 = \delta \theta'1 - \delta \theta1 \\ \delta \theta''2 = \delta \theta'2 - \delta \theta2 \end{cases}$$

D'autre part , les déformations étant petites , les équations (I) peuvent être écrites de la manière suivante :

$$\begin{cases} \delta \theta1 = \frac{1}{EI} (k1 . \delta M1 - k2 . \delta M2) \\ \delta \theta2 = \frac{1}{EI} (-k2 . \delta M1 + k1 . \delta M2) \end{cases}$$

On a alors pour  $\delta \theta'1$  et  $\delta \theta'2$  les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \delta \theta'1 &= \delta \theta''1 + \delta \theta1 = \frac{1}{EI} (k1' . \delta M1 - k2 . \delta M2) \\ \delta \theta'2 &= \delta \theta''2 + \delta \theta2 = \frac{1}{EI} (-k2 . \delta M1 + k2' . \delta M2) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II)}$$

Avec :

$$* \quad k1' = k1 + \frac{EI}{l . \Omega1}$$

$$* \quad k2' = k1 + \frac{EI}{l . \Omega2}$$

.../...

\*  $k_1$  et  $k_2$  sont définis par les relations (I)

Inversement, on peut définir  $\delta M_1$  et  $\delta M_2$  en fonction de  $\delta \theta_1$  et de  $\delta \theta_2$  :

$$\left. \begin{aligned} \delta M_1 &= \frac{EI}{1} (L'1 \cdot \delta \theta_1 + K' \cdot \delta \theta_2) \\ \delta M_2 &= \frac{EI}{1} (K' \cdot \delta \theta_1 + L'2 \cdot \delta \theta_2) \end{aligned} \right\} \text{(II')}$$

Où  $L'1$ ,  $L'2$ ,  $K'$  sont des coefficients tels que :

$$* \quad L'1 = \frac{k_2'}{k_1' \cdot k_2' - k_2^2}$$

$$* \quad L'2 = \frac{k_1'}{k_1' \cdot k_2' - k_2^2}$$

$$* \quad K' = \frac{k_2}{k_1' \cdot k_2' - k_2^2}$$

Posons :  $\Omega_1 = \frac{EI}{1} \cdot \frac{3 \cdot a_1}{1 - a_1}$  et  $\Omega_2 = \frac{EI}{1} \cdot \frac{3 \cdot a_2}{1 - a_2}$

Il s'ensuit que :

$$k_1' = k_1 + \frac{1 - a_1}{3 \cdot a_1} = \frac{1}{3} + \frac{1 - a_1}{3 \cdot a_1} = \frac{1}{3 \cdot a_1}$$

et par un calcul analogue :  $k_2' = \frac{1}{3 \cdot a_2}$

D'où :

$$\left[ \begin{aligned} L'1 &= \frac{12 \cdot a_1}{4 - a_1 \cdot a_2} \\ L'2 &= \frac{12 \cdot a_2}{4 - a_1 \cdot a_2} \\ K' &= \frac{6 \cdot a_1 \cdot a_2}{4 - a_1 \cdot a_2} \end{aligned} \right.$$

Les relations (II') s'écrivent alors :

$$\delta M_1 = \frac{EI}{1} \left( \frac{12 \cdot a_1}{4 - a_1 \cdot a_2} \delta \theta'1 + \frac{6 \cdot a_1 \cdot a_2}{4 - a_1 \cdot a_2} \delta \theta'2 \right)$$

$$\delta M_2 = \frac{EI}{1} \left( \frac{6 \cdot a_1 \cdot a_2}{4 - a_1 \cdot a_2} \delta \theta'1 + \frac{12 \cdot a_2}{4 - a_1 \cdot a_2} \delta \theta'2 \right)$$

ou en notations condensées :

$$\begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \end{bmatrix} = [k_e'] \times \begin{bmatrix} \delta \theta'1 \\ \delta \theta'2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[k_e'] = \begin{bmatrix} L'1 \cdot \frac{EI}{1} & K' \frac{EI}{1} \\ K' \cdot \frac{EI}{1} & L'2 \cdot \frac{EI}{1} \end{bmatrix}$$

Dans tous nos programmes , nous avons utilisé cette matrice  $[k_e']$  , notamment pour représenter les liaisons usuelles :

- Pour des liaisons rigides aux extrémités 1 et 2 de l'élément :

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{matrix} L'1 = 4 \\ L'2 = 4 \\ K' = 2 \end{matrix}$$

-Pour un encastrement en 1 et une articulation en 2 :

$$a_1 = 1 ; a_2 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{matrix} L'1 = 3 \\ L'2 = 0 \\ K' = 0 \end{matrix}$$

-Pour une articulation en 1 et un encastrement en 2 :

$$a_1 = 0 ; a_2 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{matrix} L'1 = 0 \\ L'2 = 3 \\ K' = 0 \end{matrix}$$

....

-Pour des articulations en 1 et 2 :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$L'1 = L'2 = K' = 0$$

On trouve de même , dans une contribution de P.BOTIZAN [ 101 ] , une méthode de calcul de la matrice de rigidité d'un élément tenant compte des imperfections de liaisons . Cette méthode , permet de tenir compte des degrés d'encastrement dans toutes les directions ; la matrice de rigidité étant écrite dans le repère global . Nous avons effectué des calculs numériques avec cette méthode pour le cas des structures planes . Les résultats obtenus sont les mêmes que ceux donnés par la méthode précédente , malgré la différence de formulation .

CHAPITRE IV  
=====

CALCUL EN PLASTICITE DES STRUCTURES  
EN BETON ARME

IV-1: Lois de comportement ponctuelles et critères de  
=====

ruptures :

=====

IV-1-1: Lois experimentales du béton et de l'acier

IV-1-1-a: Béton :

Les nombreux essais effectués sur des éprouvettes en béton ont montré que , quelle que soit la qualité du béton , les diagrammes contraintes-déformations de ce matériau présentaient l'allure donnée par la figure

IV-1 .

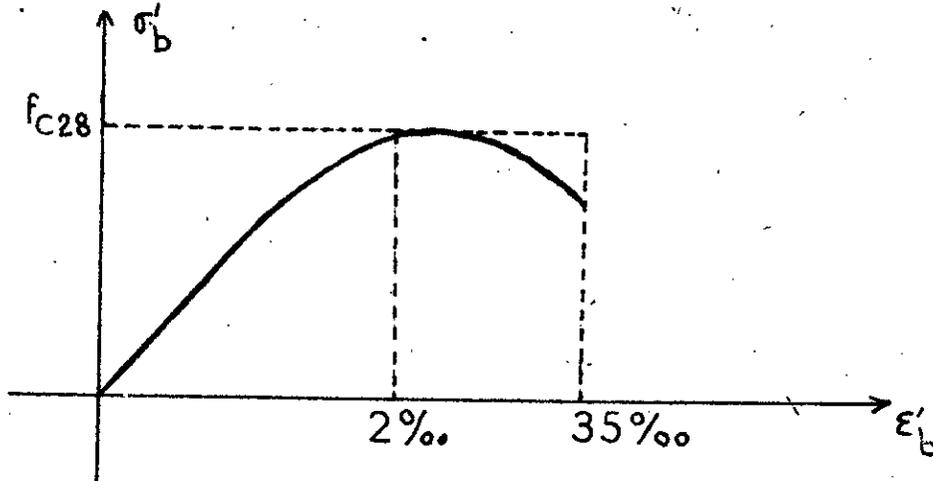


Figure IV-1: Diagramme contraintes-déformations du béton

On observe généralement un maximum de contrainte pour une valeur de la déformation relative généralement supérieure à  $2\text{‰}$ . Au-delà de cette valeur , la contrainte décroît

.../...

légèrement pour arriver à la rupture pour une déformation de l'ordre de 3.5 % .

IV-1-1-b: Acier:

Les aciers utilisés en béton armé sont caractérisés par leur courbe d'essai à la traction . Selon la nuance (doux ou dur) , les déformations permanentes apparaissent de manière soudaine (figure IV-2) ou progressive (figure IV-3) .

La norme française AFNOR , par exemple , fixe comme limite d'élasticité conventionnelle , la valeur de  $f_e$  pour laquelle la déformation permanente , mesurée après un chargement de 10 secondes et un déchargement , est égale au  $1/500^e$  de la longueur de la barre essayée ( parallèle à la droite de HOOKE d'abscisse à l'origine 2% ) .

Pour les aciers spéciaux (durs , mi-durs et extra-durs), on utilise les propriétés d'écroutissage de certains métaux lorsqu'ils sont soumis à des contraintes dépassant leur limite élastique .

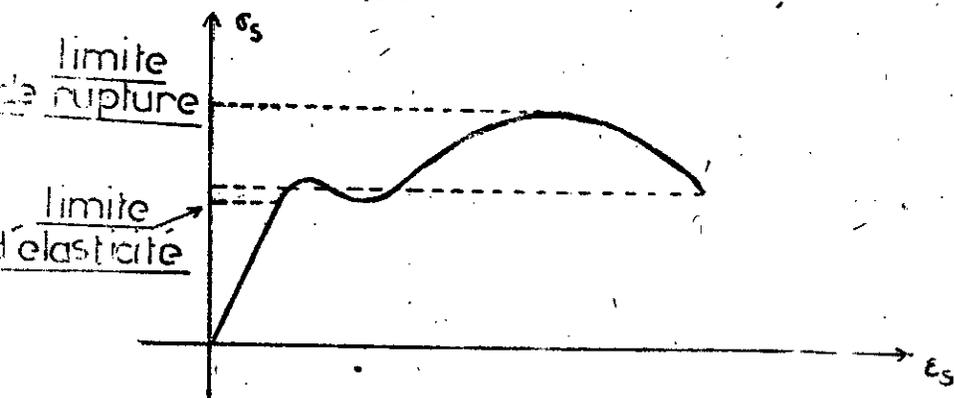


figure IV-2 : Diagramme  $\sigma$ - $\epsilon$  de l'acier doux

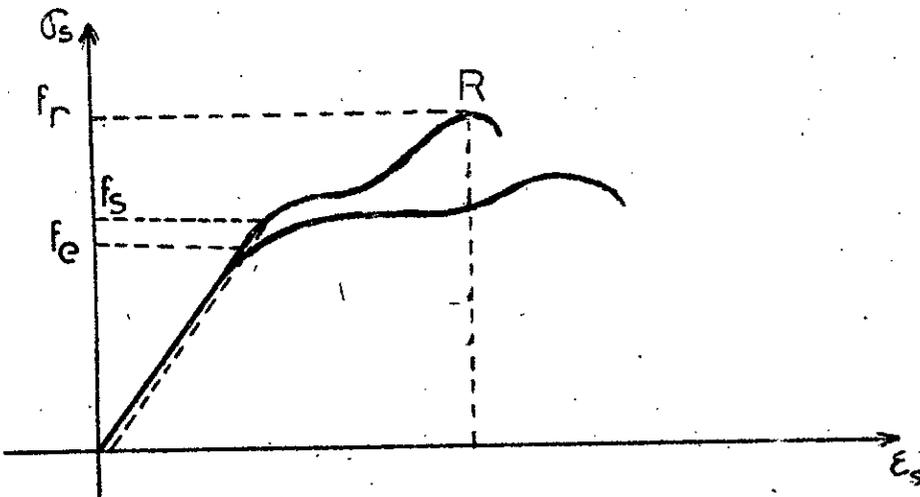


figure IV-3: Diagramme  $\sigma$ - $\epsilon$  des aciers spéciaux

IV-1-2: Lois de comportement réglementaires :

IV-1-2-a: Béton:

On admet que pour les vérifications à l'état limite ultime, le diagramme réel est remplacé par un diagramme de calcul. Ainsi, les Règles BAEL 80 définissent un diagramme constitué par un arc de parabole jusqu'à un raccourcissement  $\epsilon'_{b} = 2\text{‰}$ , prolongé par un segment horizontal jusqu'à un raccourcissement  $\epsilon'_{b} = 3.5\text{‰}$  (figure IV-4).

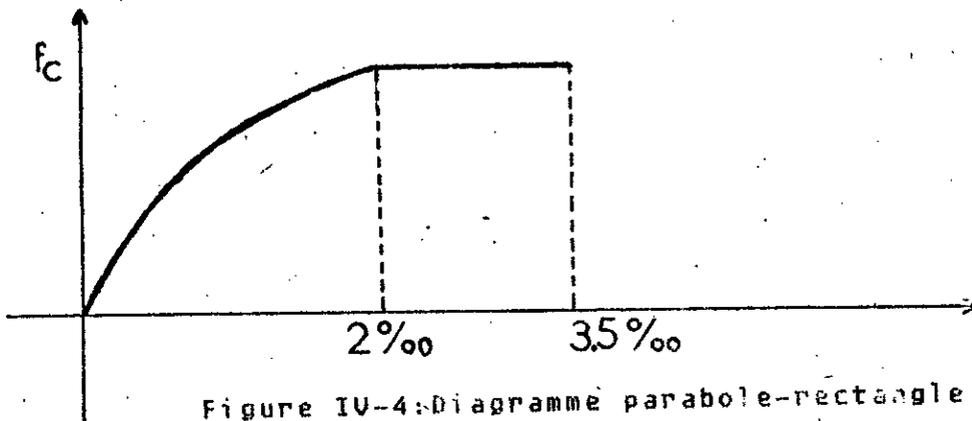


Figure IV-4: Diagramme parabole-rectangle

L'ordonnée maximale est la résistance caractéristique du béton à la compression :

$$f_c = .85 \cdot f_{c28} / \Gamma_b$$

\* le coefficient minorateur .85 permet de tenir compte de la moindre résistance du béton à des chargements de longue durée :

\*  $\Gamma_b = 1.5$  dans le cas général

\*  $\Gamma_b = 1.15$  dans le cas de combinaisons accidentelles .

IV-1-2-b: Acier :

-----  
La contrainte , base des justifications , est la limite élastique  $f_e$  . Selon la nuance de l'acier utilisé , différentes relations contraintes-déformations ont été données par les règlements . Dans notre étude , nous considérerons un comportement élastique parfaitement plastique (BAEL 80) : voir figure IV-5 ;

$$\text{si } \epsilon_s < f_e / (\Gamma_s \cdot E_s) \text{ alors } \sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$$

$$\text{si } \epsilon_s > f_e / (\Gamma_s \cdot E_s) \text{ alors } \sigma_s = f_e / \Gamma_s$$

$\epsilon_s$  : déformation relative de l'acier

$\Gamma_s = 1.15$  dans le cas général

$\Gamma_s = 1$  dans le cas de combinaisons accidentelles

$E_s$  : module d'élasticité longitudinale de l'acier

$f_e$  : limite élastique

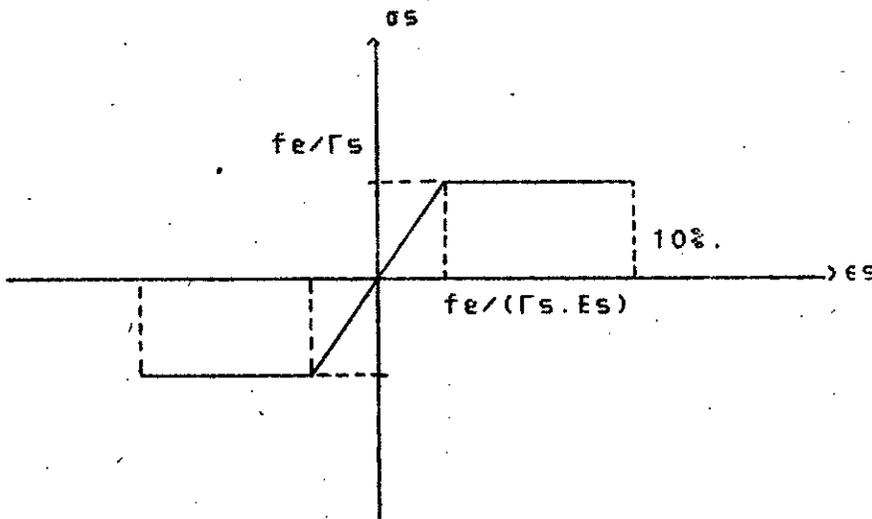


FIGURE IV-5: Diagramme os-es de l'acier

IV-1-3: Critères de plasticité du béton (solicitations multiaxiales) :

Des expériences sur plusieurs matériaux isotropes ont montré l'existence d'une surface frontière qui limite un domaine appelé domaine d'élasticité. Dans ce domaine, les contraintes sont proportionnelles aux déformations :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{e\}$$

Où  $\{\sigma\}$  : Vecteur Contrainte

$[D]$  : Matrice d'élasticité

$\{e\}$  : Vecteur Déplacement

IV-1-3-1: Critères de plasticité :

Ce domaine élastique est

limité par une fonction scalaire :

$$F(\sigma_{ij}) = 0$$

.../...

qui , dans le cas d'un milieu isotrope peut s'exprimer en fonction des contraintes principales  $\sigma I$  ,  $\sigma II$  ,  $\sigma III$  :

$$F(\sigma I, \sigma II, \sigma III) = 0$$

Cette fonction détermine les différents comportements suivants :

- si  $F(\sigma_{ij}) < 0$  alors le comportement est élastique ;
- si  $F(\sigma_{ij}) = 0$  comportement plastique ;
- si  $F(\sigma_{ij}) > 0$  domaine impossible .

Les critères couramment utilisés sont :

IV-1-3-1-a: le critère de TRESCA : (ou de la contrainte tangentielle maximum)

Introduit pour la première fois par TRESCA en 1865 , il postule que les déformations notables apparaissent par glissement relatif des couches l'une sur l'autre , c'est à dire lorsque la contrainte tangentielle est maximum ; il s'écrit :

$$\sigma I - \sigma III - \sigma_e = 0 \quad \sigma_e : \text{limite d'élasticité}$$

Dans le cas particulier d'un état plan de contrainte , ce critère se réduit , à la plastification , à :

$$\sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma_e^2 = 0$$

Dans l'espace des contraintes principales , le domaine d'élasticité est limité par un cylindre ayant pour base un hexagone régulier , prisme dont les génératrices sont parallèles à la trissectrice du repère  $(\sigma I, \sigma II, \sigma III)$  ; à noter que pour ce critère la contrainte principale intermédiaire n'intervient pas : voir figure IV-6.

IV-1-3-1-b: Critère de VON MISES :

----- Ce critère s'écrit :

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 2\sigma_e^2 = 0$$

Dans le cas particulier de l'état plan de contrainte, cette expression se réduit à :

$$\sigma^2 + 3\tau^2 - \sigma_e^2 = 0$$

Dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité est limité par un cylindre (circonscrit au prisme de TRESCA) : voir figure IV-6 .

Critère de VON MISES

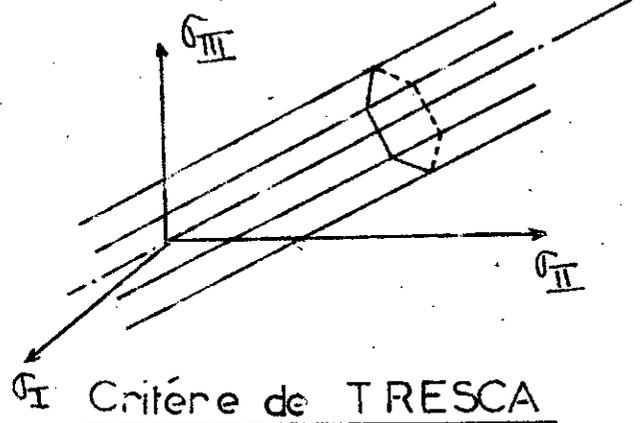
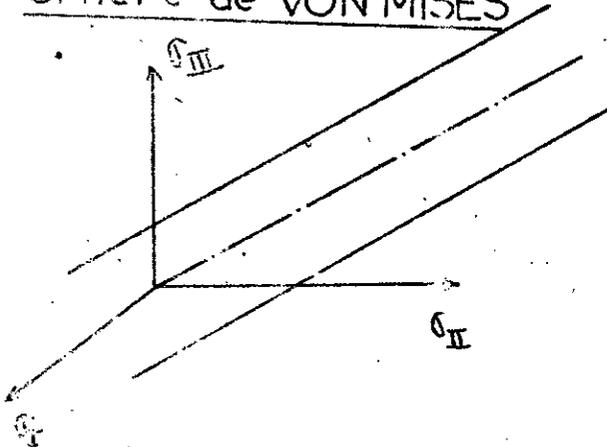


figure IV-6 : Critères de TRESCA et de VON MISES

IV-1-3-1-c: Critère du type courbe intrinsèque :

-----  
Pour ce type de critère, on considère que la rupture se produit par glissement dans le plan de contrainte. Il constitue donc une généralisation du critère de TRESCA. Le domaine élastique est limité par une surface de révolution ayant pour axe la normale au plan de contrainte ; la méridienne de cette surface est appelée courbe intrinsèque .

Elle constitue l'enveloppe des cercles de MOHR limites .

Pour chacun des cercles de rupture , soit :

$$p = \frac{\sigma I + \sigma III}{2} \quad \text{l'abscisse du centre ;}$$

$$\text{et } r = \frac{\sigma I - \sigma III}{2} \quad \text{le rayon .}$$

L'equation de la famille de courbes peut s'ecrire :

$$(\sigma - p)^2 + r^2 = r^2$$

Pour le beton , Albert CAQUOT propose la relation :

$$(p + H)^2 = r^2 + r^3/K$$

H et K sont 2 paramètres definis en fonction de  $\sigma_c$  et  $\sigma_t$  respectivement resistance du béton à la compression simple et à la traction simple ; on a :

$$K = \frac{\sigma_c^2 - \sigma_t^2}{8H(\sigma_c' + \sigma_t)} \quad \text{et } H \approx \sigma_t$$

Nous trouverons en reference [14] , une contribution quant au tracé de cette courbe intrinsèque dans le cas du béton . Pour le béton , ces critères de type courbe intrinsèque sont les plus adaptés puisque dans les constructions faites d'un tel matériau , nous sommes en présence de sollicitations complexes (biaxiales dans le cas de poutres aplan moyen sollicitées dans leur plan ou triaxiales dans le cas des dalles fléchies) .

Les essais effectués sur plusieurs matériaux ont montré la propriété suivante pour la courbe intrinsèque :

- pour les matériaux ductiles , cette courbe se rapproche de 2 droites parallèles à l'axe des compressions .

-pour les matériaux fragiles , elle est très ouverte et son sommet se rapproche de l'origine 0 du repère (σ,τ) .

IV-1-3-1-d: Le critère parabolique :

-----  
Ce critère est une généralisation du critère de VON MISES pour des matériaux sensibles à la pression moyenne (cas du béton) .

Il est défini par les 2 paramètres de résistance à la traction σ<sub>t</sub> et à la compression σ<sub>c</sub> :

$$I = (\sigma I - \sigma II)^2 + (\sigma II - \sigma III)^2 + (\sigma III - \sigma I)^2 - 2(\sigma'c - \sigma t)(\sigma I + \sigma II + \sigma III) - 2\sigma t \cdot \sigma'c$$

Cette fonction est un paraboloides ayant pour axe la trissectrice du (σI, σII, σIII).

Tous ces critères ponctuels décrits précédemment , peuvent être reformulés pour la section entière en fonction des contraintes généralisées .

Par exemple , pour les critères de type TRESCA/VON MISES

$$\sigma^2 + k\tau^2 + \sigma\epsilon^2 = 0$$

et dans le cas d'une section quelconque , on trouve un domaine de résistance tel que : (figure IV-7)

$$M_x = -\sigma_c \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\lambda(y-\delta) \cdot b(y) \cdot y \, dy}{\sqrt{1 + \lambda^2 (y-\nu)^2}} ; \quad N = \sigma_c \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\lambda(y-\delta) b(y)}{\sqrt{1 + \lambda^2 (y-\nu)^2}} \, dy$$

$$T = \pm \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{b(y) \, dy}{\sqrt{1 + \lambda^2 (y-\nu)^2}} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \nu \text{ sont des paramètres (voir [9] pour formules analogues)}$$

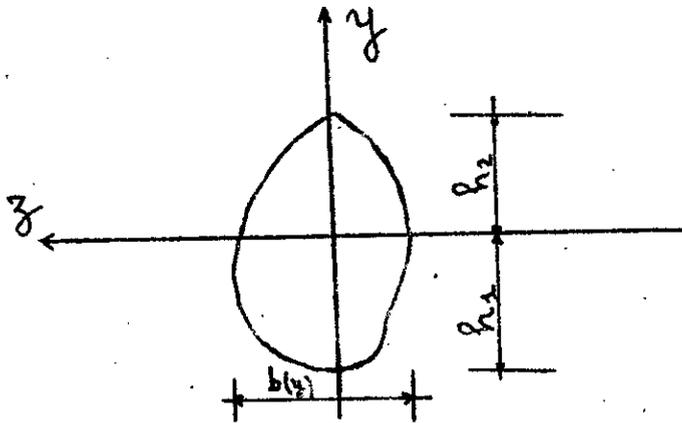


Figure IV-7: Notations section quelconque

Le même travail pourrait probablement être effectué pour le critère de CAQUOT et le critère parabolique avec cependant de plus grandes difficultés. Mais ceci est en fait sans intérêt en béton armé du fait de la difficulté de tenir compte de la contribution des aciers.

Habituellement, on suppose que pour des éléments armés, les critères de VON MISES et de TRESCA sont plus adaptés.

IV-1-3-2: Loi d'écoulement

Il y a augmentation de déformation plastique si :

$F(\sigma_{ij}) = 0$ , et on est en état de charge active.

C'est à dire :

\*  $d\epsilon_{ij} = 0$  si  $F(\sigma_{ij}) < 0$  ou  $F(\sigma_{ij}) = 0$   $dF \leq 0$   
 (chargement neutre ou décharge)

\*  $d\epsilon_{ij} = 0$  si  $F(\sigma_{ij}) = 0$  et  $dF > 0$

Dans l'hypothèse de travail maximal, on sait que  $F$  est potentiel plastique et donc on peut écrire :

$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$  où  $d\lambda$  : variable indéterminée en plasticité parfaite

.../...

Cette hypothèse de travail maximal peut être faite si les courbures sont raisonnables .

En effet , si on prend un critère de VON MISES , la loi précédente se réduit aux équations de PRANDTL-REUSS :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^P + d\epsilon_{ij}^E$$

$$d\epsilon_{ij}^P = (\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \sigma_{kk}) \cdot d\lambda$$

$$d\epsilon_{ij}^E = [D]^{-1} \cdot d\sigma_{ij}$$

Avec :

[D]: Matrice d'élasticité

dε<sup>P</sup>: incrément de déformation plastique

dε<sup>E</sup>: incrément de déformation élastique

δ<sub>ij</sub> : symbole de KRONECKER ; δ<sub>ij</sub> = 1 si i = j  
= 0 si i ≠ j

i, j, k variant de 1 a 3

Le changement de volume plastique est alors tel que :

$$d\epsilon_{11}^P + d\epsilon_{22}^P + d\epsilon_{33}^P = 0 \quad (\text{incompressibilité plastique})$$

Cette incompressibilité plastique est vérifiée dans le cas des hypothèses de la résistance des matériaux et pour une section homogène avec un diagramme de contraintes symétrique . Dans ce cas , on a :

$$\epsilon_y = 0 , \sigma_x = 0 \text{ et } N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (h: \text{hauteur de la section})$$

En section hétérogène (avec diagramme de contraintes non symétrique) , ceci est légèrement erroné puisque l'axe neutre ne coïncide pas avec le centre de gravité de la section . On admettra cependant que ceci est vrai pourvu que les courbures soient limitées .

.../...

Au niveau de la section, la loi de comportement s'écrit en fonction des variables généralisées (voir paragraphe IV-2-2).

IV-2: ETUDE DE LA SECTION EN ETAT PLASTIQUE

IV-2-1: La rotule plastique en béton armé:

IV-2-1-a: Rotule plastique en section homogène:

Considérons le cas d'une section rectangulaire de poutre faite d'un matériau élastique parfaitement plastique. Supposons qu'on soit en état de flexion pure. Le diagramme contraintes-déformations est donné par la figure IV-8 :

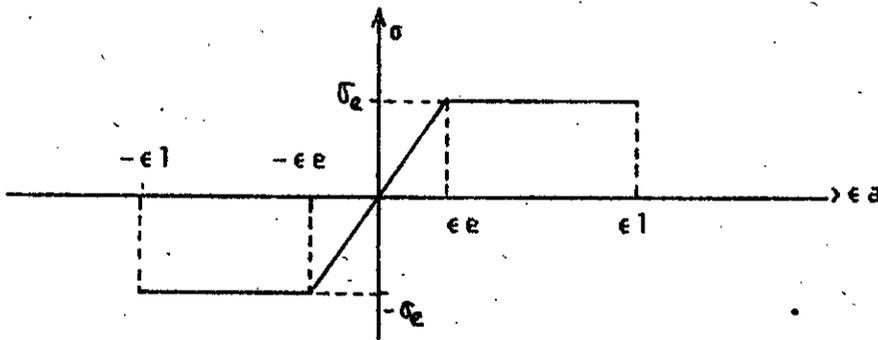


FIGURE IV-8: comportement élastique parfaitement plastique

Lorsque le moment fléchissant augmente, le diagramme des contraintes passe par trois stades (figure IV-9):

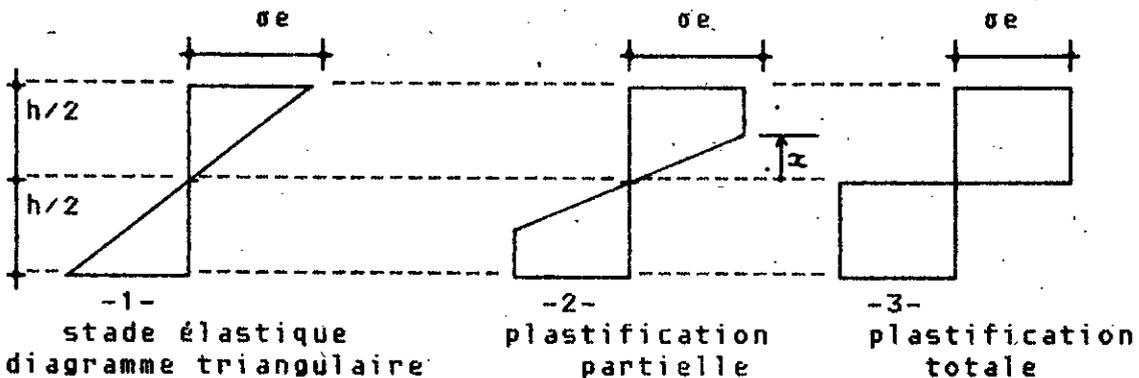


Figure IV-9: stades de comportement

Envisageons le stade -2- de la figure précédente et appelons  $x$  l'ordonnée limite du diagramme triangulaire. Le moment des contraintes internes vaut :

$$M = 2/3 \cdot b \cdot x^2 \cdot \sigma_e + b(h^2/4 - x^2)\sigma_e$$

$$M = \left( \frac{b \cdot h^2}{4} - \frac{b \cdot x^2}{3} \right) \sigma_e = \frac{bh^2}{4} \cdot \sigma_e \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right)$$

-pour  $x=h/2$  (stade 1) ;  $M = M_e = (bh^2/6)\sigma_e$

-pour  $x=0$  (stade 3) ;  $M = M_p = (bh^2/4)\sigma_e$

On a alors :  $M_p = 3/2 M_e$

Et  $M = 3/2 M_e \left( 1 - 1/3 (2x/h)^2 \right) = M_e \left( 3/2 - 1/2 (2x/h)^2 \right)$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{h} \right)^2$$

Or :

$$2x/h = \epsilon e / \epsilon l \quad (\text{figure IV-8})$$

$$M/M_e = 3/2 - 1/2 (\epsilon e / \epsilon l)^2 \quad \rightarrow \quad (\epsilon e / \epsilon l)^2 = 2(3/2 - M/M_e)$$

$$\epsilon e / \epsilon l = \sqrt{3 - 2M/M_e} \quad ; \text{mais } \epsilon e / \epsilon l = X / X_e$$

$X$  : courbure

donc :  $X = X_e \sqrt{3 - 2M/M_e}$

Lorsque  $M = M_e$  on a  $X = X_e$  (courbure élastique)

"  $M = M_p$  la courbure de la poutre augmente indéfiniment

Dans un repère  $(M/M_e, X)$ , la courbe  $M/M_e = f(X)$  est asymptotique à la droite d'équation  $M/M_e = 1.5$  (figure IV-10).

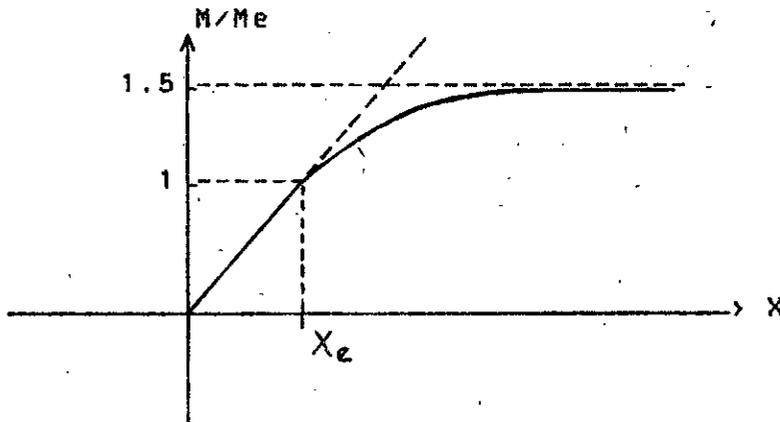


figure IV-10: Diagramme Moment-Courbure théorique  
----- en section rectangulaire

Supposons que la poutre considérée soit isostatique et soumise en son milieu à l'action d'une force concentrée  $P$ . Lorsque la valeur de  $M = Pl/4$  se rapproche du moment plastique  $M_p$ , des déformations importantes apparaissent au point d'application de  $P$ . Il se crée une brisure au milieu de la poutre. La poutre est alors composée de 2 tronçons déformés élastiquement, séparés par une zone fortement déformée plastiquement. Tout se passe comme si ces 2 tronçons déformés élastiquement sont reliés par une rotule qui se met à tourner lorsque le moment fléchissant atteint la valeur  $M_p$ . Cette rotule à frottement porte le nom de ROTULE PLASTIQUE.

En fait, la longueur de cette zone de rotule plastique dépend de la forme de la section droite de la poutre considérée. Dans le cas de la section rectangulaire, elle vaut  $l_p = l/3$ ;  $l$ : longueur de la poutre. (voir figure IV-11)

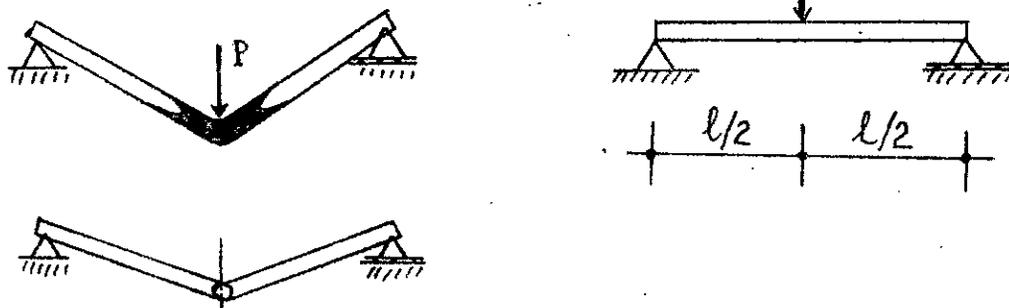


figure IV-11: Rotule plastique en section homogène

IV-2-1-b: Rotule plastique en béton armé:

Dans le cas du béton armé , l'évolution de la fissuration au niveau de l'élément considéré , fait que cette zone plastique devient importante . Les fissures deviennent de plus en plus rapprochées à mesure que le moment fléchissant augmente .

C'est ainsi que le calcul du moment plastique  $M_p$  présente beaucoup d'incertitudes (plastification du béton , plastification des aciers , ou des aciers et du béton), et la définition de rotule plastique dans le cas du béton armé devient une idéalisation . Certains auteurs parlent de "pseudo-rotule" [21] ; cependant , dans notre étude , dans un souci de simplification , on supposera que ces rotules sont concentrées au point ou le moment plastique  $M_p$  est atteint .

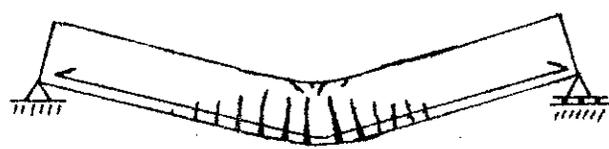


Figure IV-12 : Rotule plastique en béton armé

IV-2-2: Critères - Courbes d'interaction :

Le cas de la flexion pure évoqué en section homogène (IV-2-1-a) peut facilement être généralisé à la flexion composée. Il s'agit alors de trouver une condition de plasticité globale ; c'est à dire une relation entre M et N lorsque la section est entièrement plastifiée ; dans ce cas, l'axe neutre ne passe pas par le centre de gravité de la section (figure IV-13)

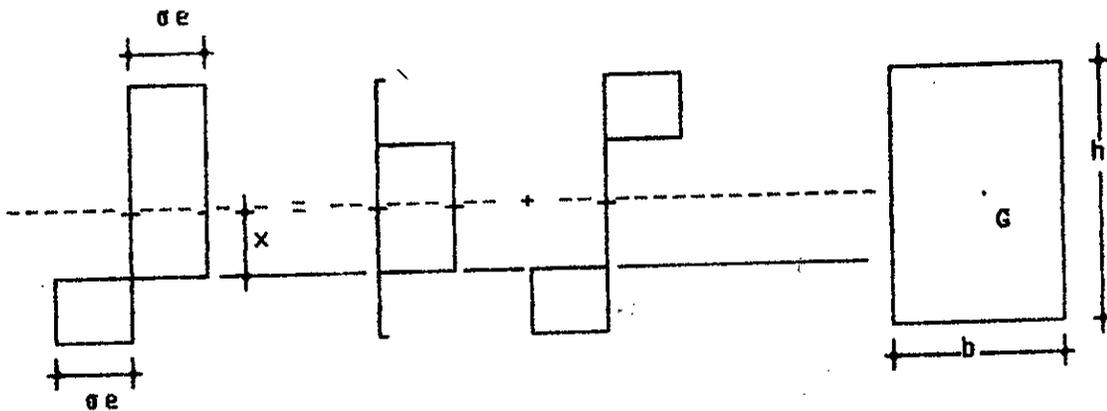


Figure IV-13: Section homogène en état de plastification totale

Soit  $x$  la distance de l'axe neutre au centre de gravité de la section. Le moment des contraintes internes vaut :

$$M = b(h/2-x) \cdot \sigma_e \cdot (x + 1/2(h/2-x)) = b((h/2)^2 - x^2) \cdot \sigma_e$$

et  $N$  vaut :  $N = 2 \cdot b \cdot x \cdot \sigma_e$

A la plastification, on a :  $M_p = (bh^2/4)\sigma_e$   
 $N_p = b \cdot h \cdot \sigma_e$

Ainsi :  $M/M_p = 1 - (2x/h)^2$  et  $N/N_p = 2x/h$

D'où :  $M/M_p = 1 - (N/N_p)^2$

Cette relation entre  $M, N, M_p, N_p$  montre que le domaine de rigidité de la section est limité par deux arcs de parabole (voir figure IV-14) . Elle constitue une condition de plasticité .

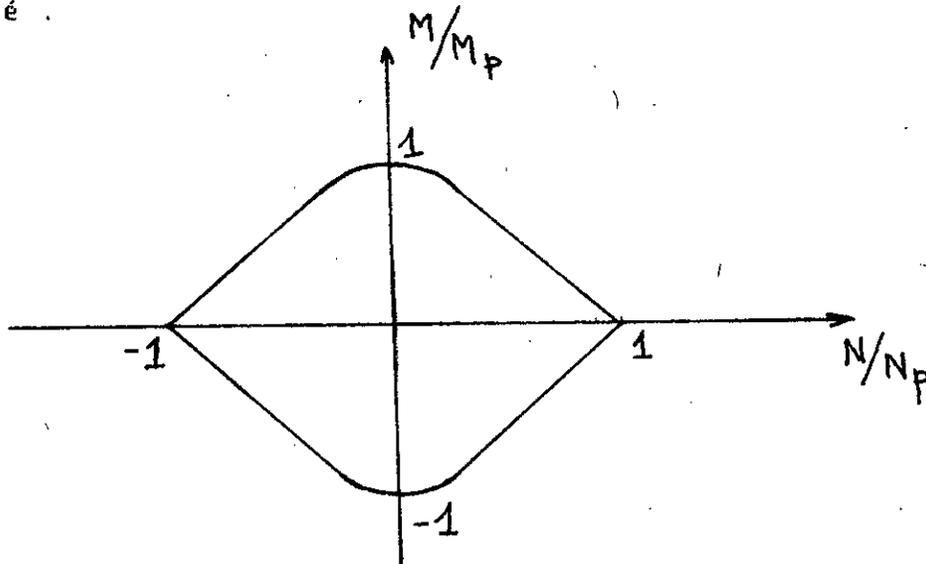


FIGURE IV-14: Domaine de résistance en section homogène

En présence d'effort tranchant  $T$ , J. COURBON [ 19 ] effectue des calculs similaires dans le cas du Critère de TRESCA et du Critère de VON MISES . Le domaine de rigidité de la section est alors voisin de l'ellipse d'équation :

$$(M/M_p)^2 = 1 - (T/T_p)^2$$

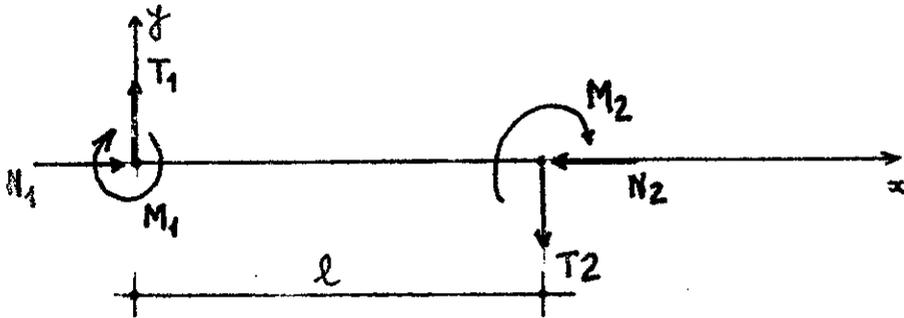
$T_p$  : effort tranchant plastique /

Dans notre cas , on suppose qu'il n'y a pas de rupture par effort tranchant . De plus l'effet de  $T$  est négligeable devant celui de  $M$  et  $N$  .

En effet , considérons un élément-barre soumis uniquement aux efforts  $M_1, N_1, T_1$  au 1er noeud et  $M_2, N_2, T_2$  au

.....

2eme noeud comme indiqué sur la figure suivante .



L'effort tranchant vaut  $T(x) = (M_1 + M_2)/l$

On a  $T/T_p = (M_1+M_2)/l \cdot T_p \leq 2 \cdot M_p/l \cdot T_p$

Or , dans le cas d'une section rectangulaire d'aire A ,

$T_p = \sigma_e \cdot A_t / \sqrt{3}$  ( $A_t$ : section où  $T \neq 0$  ;  $A_t = \frac{5}{6} \cdot A$ )

$M_p = \sigma_e \cdot A \cdot h/4$

Donc :  $T/T_p \leq 0,6 \cdot h \cdot \sqrt{3}/l$

et pour des poutres d'elancement supérieur à 10 , nous

aurons :  $T/T_p < 0,06 \cdot \sqrt{3} = 0,11$

Pour cet ordre de grandeur , les courbes d'intéraction relative à chaque cas sont pratiquement confondues. De plus, l'erreur commise en prenant  $T=0$  est inférieure à 1.5 % .

Au niveau de la section , la loi de comportement s'écrit en fonction des variables généralisées . Si l'on prend en consideration le critère précédemment établi (cas de la section rectangulaire homogène) , on peut montrer que cette loi peut s'écrire :

$$\dot{\epsilon}_p = 2\lambda \cdot \frac{N}{N_p^2}$$

$\dot{\epsilon}_p$ : vitesse de déformation axiale

$$\dot{\theta}_p = \lambda \cdot \frac{1}{M_p}$$

$\dot{\theta}_p$ : vitesse de rotation

.../...

Les sollicitations M,N,T combinées augmentent ainsi la complexité du problème .

En béton armé , en plus des incertitudes qui règnent sur le calcul du moment plastique  $M_p$  , survient la difficulté de formuler un critère d'état limite . Le critère généralement admis consiste à supposer qu'il y a d'abord plastification des aciers puis rupture des zones comprimées de béton . De plus , dans la détermination de tout critère , la sollicitation considérée joue un rôle prépondérant . d'autre part , en béton armé , lorsque les aciers tendus ont atteint leur limite élastique , le comportement global du béton comprimé demeure linéaire . Ainsi , lorsque la flèche augmente , la section continue de tourner .

Au vu de toutes ces considérations , il sera adopté un point de vue réglementaire .

Lorsqu'on adopte la loi de déformation parabole-rectangle du béton (Règlement BAEL 80) et une loi de déformation des aciers celle des aciers naturels (élastique parfaitement plastique ; limitée par un allongement de 10 %.), on définit le domaine de résistance d'une section de façon conventionnelle par la règle dite des 3 pivots [15,16,21,22]

Cette règle stipule que la résistance ultime d'une section est atteinte, soit par épuisement de l'armature tendue ( $\epsilon_a=10\%$ .) , soit par épuisement du béton comprimé ( $\epsilon_{b'}=3,5\%$ . en flexion ou  $\epsilon_{b'}=2\%$ . en compression simple) .

.../...

Pour tout état limite d'une section en flexion , traction ou compression , la déformation est représentée par une droite passant par l'un des 3 points A , B , C (appelés pivots) de la figure IV-15 .

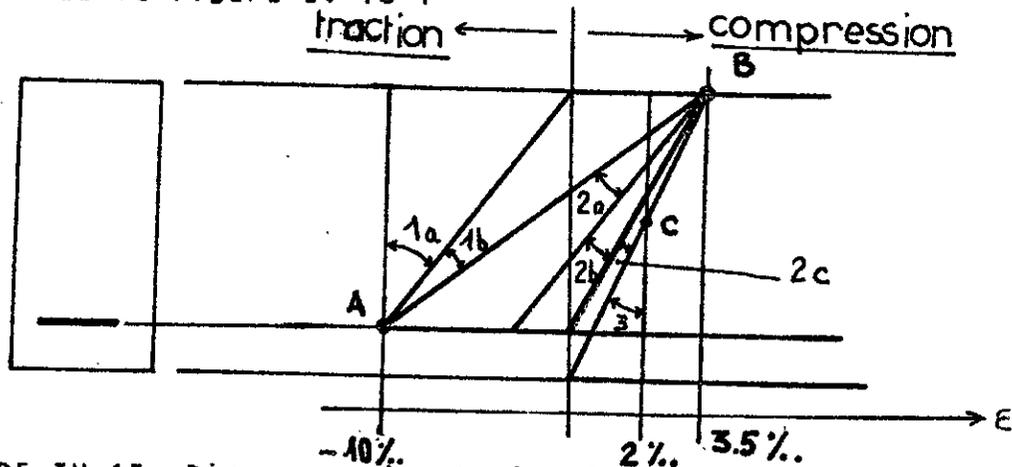


FIGURE IV-15: Diagramme des trois pivots

\* PIVOT A :

===== Il comporte deux domaines :

-Domaine 1a: Représente la traction simple ou la flexion composée avec traction dans laquelle toute la section est tendue ; les droites de déformation passent par le point A et le béton tendu n'intervient pas .

-Domaine 1b: Représente la flexion simple ou la flexion composée avec axe neutre à l'intérieur de la section ; les droites des déformations passent par le point A et la résistance du béton n'est pas épuisée .

\* PIVOT B :

===== Il comporte trois domaines et les droites des

.../...

déformations passent par le point B  
(raccourcissement ultime du béton atteint).

-Domaine 2a : la limite élastique de l'acier est atteinte  
ou dépassée.

-Domaine 2b : les aciers tendus sont sollicités à une  
contrainte inférieure à leur limite  
élastique.

-Domaine 2c : les aciers sont comprimés et les fibres  
extrêmes de la section sont encore tendues.

\* PIVOT C : (Domaine 3)

Il correspond à une flexion composée avec  
compression dans laquelle toute la section est comprimée ;  
la droite des déformations pivote autour du point C.

Ces trois familles de droites peuvent ne dépendre que  
d'un seul paramètre ; par exemple l'ordonnée de l'axe neutre  
de la section.

Pour une section donnée , chaque état de sollicitation  
ultime peut être représenté par l'une des droites évoquées  
précédemment ; et il est aisé de connaître la valeur du  
moment fléchissant et de l'effort normal ultimes  
correspondant à cet état .

Pour les trois familles de droites , le lieu des points  
de coordonnées ( Mui , Nui ) décrit une courbe qui délimite  
le domaine de résistance de la section . L'équilibre de la

.../...

section est assuré pour tout point intérieur à ce domaine .

En fonction de la section d'armatures tendues et comprimées , de leur position et pour un contour de section donné , il en résulte une famille de courbes qui définissent le DIAGRAMME D'INTERACTION M,N relatif à cette section (voir figure IV-16)

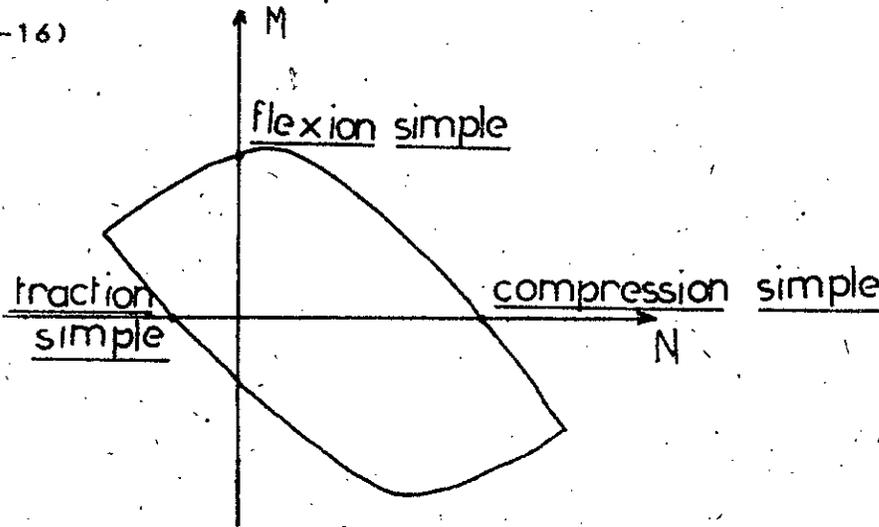


Figure IV-16: Diagramme d'interaction M-N en béton armé

IV-2-3: Calcul du moment et de l'effort normal ultimes dans le cas de la section rectangulaire:

IV-2-3-a: Section entièrement tendue (Domaine 1a):

Le contour de la section n'intervient pas

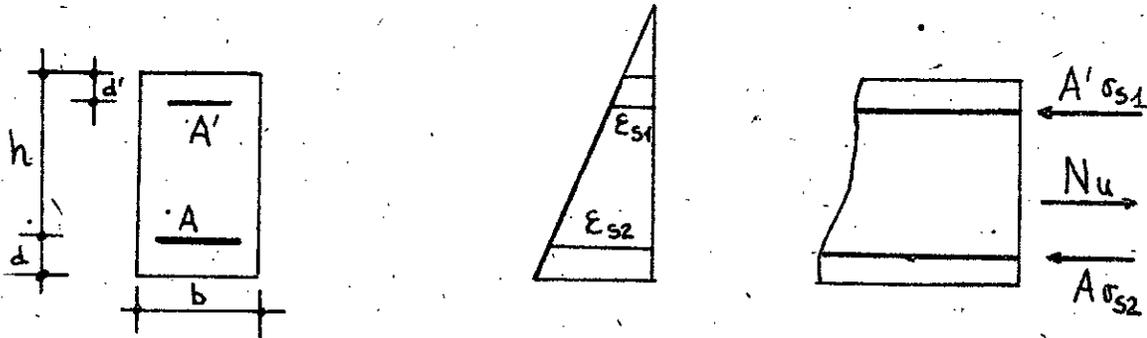


Figure IV-17: section entièrement tendue

$\epsilon_s = 10^{-3}$  ;  $\sigma_s$  est la contrainte correspondant à cet allongement . On a les équations suivantes : (voir figure IV-17)

$$\left. \begin{aligned} N_u &= A \cdot \sigma_s + A' \sigma_s' \\ N_u \cdot e &= A' \sigma_s' (h-d') \end{aligned} \right\}$$

$e$  : excentricité de l'effort ultime  $N_u$  par rapport à l'armature la plus tendue . Il est commode de ramener le moment ultime ( $N_u \cdot e$ ) au centre de gravité de la section .

IV-2-3-b: Section partiellement tendue : (Domaines 1b et 2)

---

Soient :

$x$  : l'ordonnée de l'axe neutre par rapport à la fibre la plus comprimée (figure IV-18) .

$a$  : distance de la résultante de compression du béton à la fibre la plus comprimée .

$\alpha$  : coefficient de remplissage :

$$\alpha = \frac{b \int_0^x \sigma_c \cdot dx}{b \cdot x \cdot f_c}$$

$\sigma_c$  : contrainte dans la fibre la plus comprimée de béton .

$f_c$  : contrainte caractéristique du béton en compression .

$$f_c = 0.85 F_{c28}/1.5$$

$F_{c28}$  : contrainte de compression du béton à 28 jours .

On aura les équations d'équilibre suivantes :

$$\left. \begin{aligned} N_u &= \alpha \cdot b \cdot x \cdot f_c + A' \sigma_s' - A \cdot \sigma_s \\ N_u &= \alpha \cdot b \cdot x \cdot f_c (h-a) + A' \cdot \sigma_s' (h-d') \end{aligned} \right\}$$

Le moment  $M_u$  est exprimé par rapport aux aciers tendus .

L'équation de compatibilité des déformations s'écrit :

$$\epsilon_c(h-x) = \epsilon_s \cdot x$$

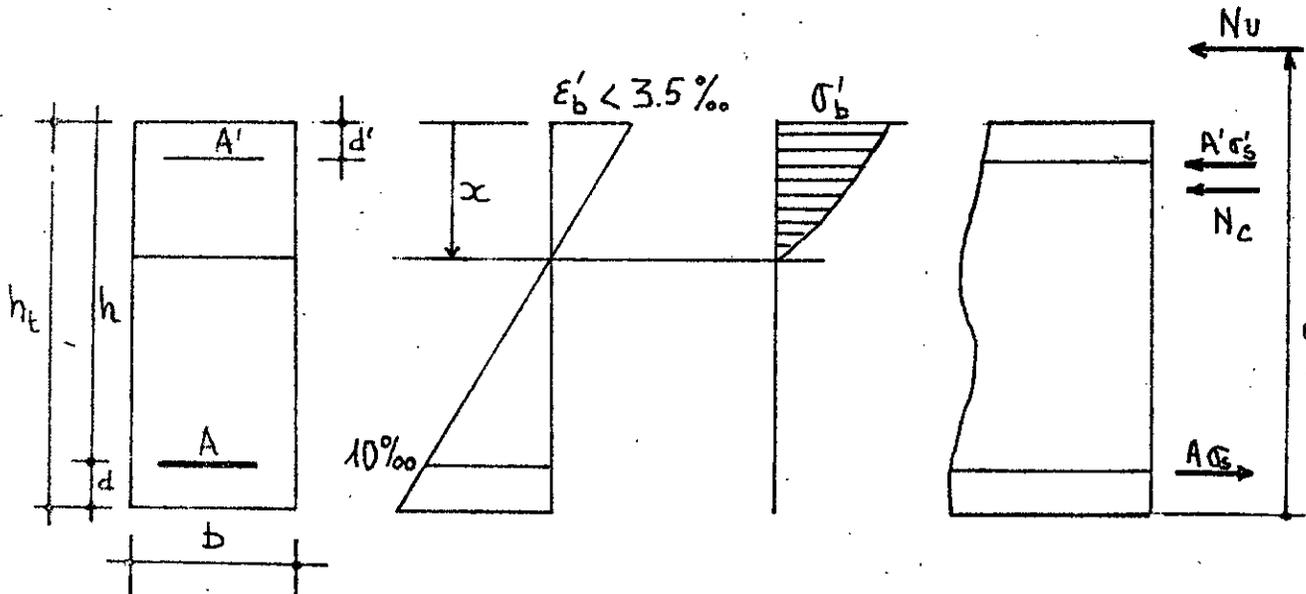


Figure IV-18: SECTION partiellement tendue

\* Domaine 1b :  $\epsilon_s = 10 \text{ ‰}$  , on peut donc déduire  $\epsilon_s'$  et  $\epsilon_c$   
 la frontière des domaines 1b et 2a est  
 donnée par la relation :

$$x/h = 7/27$$

\* Domaines 2a, 2b, 2c:

$$\begin{aligned} x &> 7d/27 \\ \epsilon_c &= 3.5 \text{ ‰} \\ \epsilon_s &< 10 \text{ ‰} \\ \alpha &= 0.8095 \\ a &= 0.416x \end{aligned}$$

La déformation de l'acier tendu  $\epsilon_s$  est donnée par :

$$\epsilon_s = 0.0035(h-x)/x$$

Et celle de l'acier comprimé  $\epsilon_s'$  par :

$$\epsilon_s' = 0.0035(x-d')/x$$

IV-2-3-c: Section entièrement comprimée (Domaine 3):

.../...

L'axe neutre se trouve à une distance  $x$  supérieure à la hauteur totale  $H_t$  (voir figure IV-19).

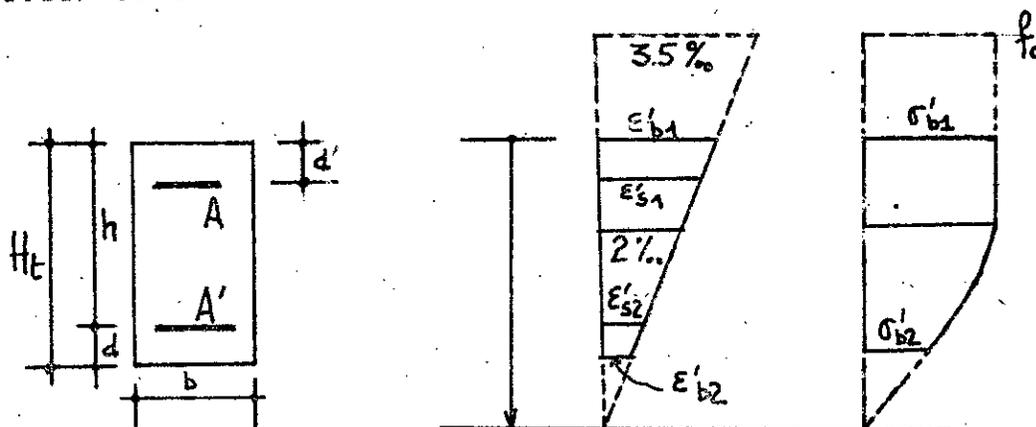


figure IV-19: Section entièrement comprimée

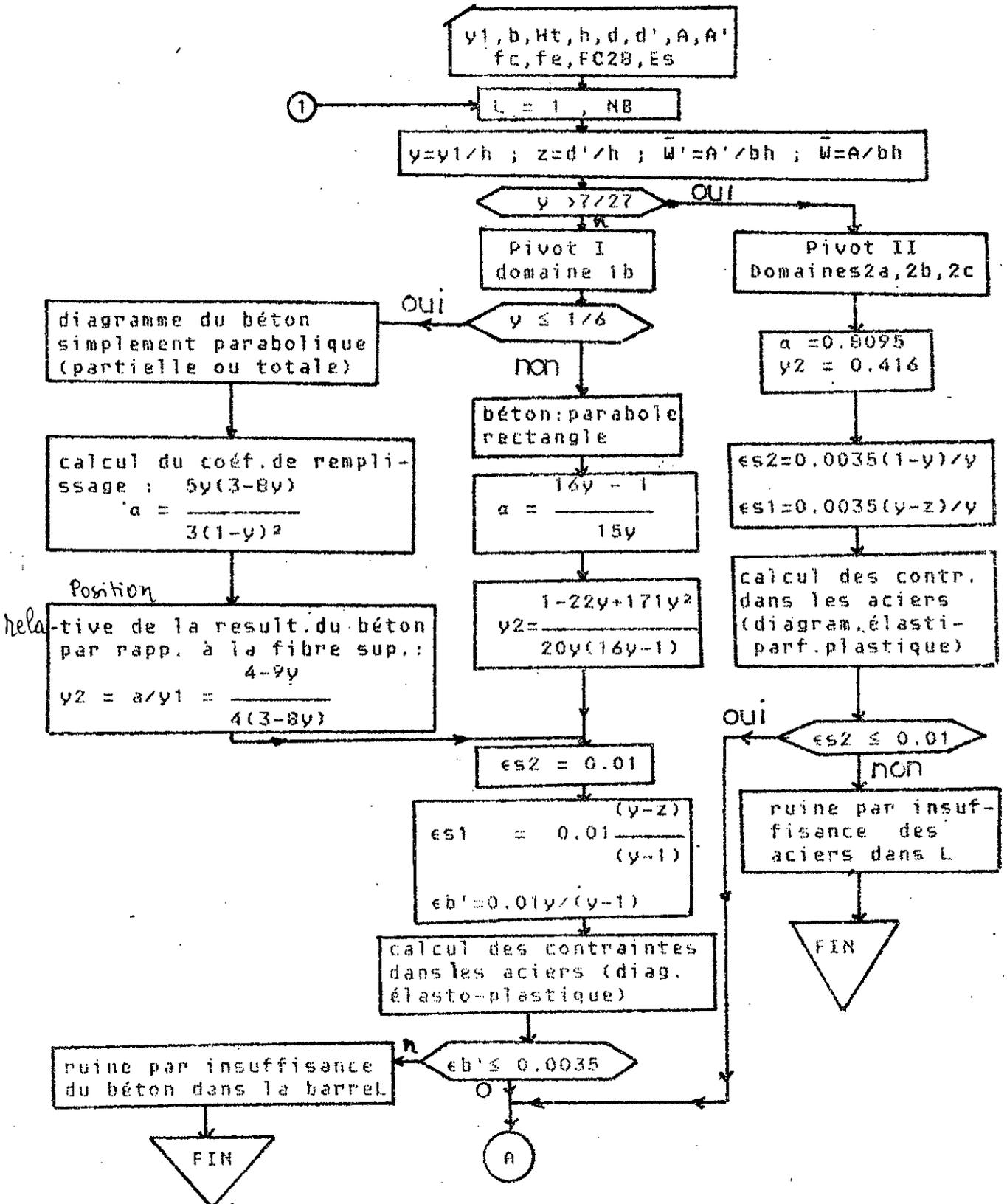
Soient:  $\alpha_1$  : coefficient de remplissage .

$a_1$  : position de la résultante du béton comprimé par rapport à la fibre la plus comprimée .

Les équations d'équilibre s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} N_u &= \alpha_1 \cdot b \cdot H_t \cdot f_c + A' \sigma_s' + A \sigma_s \\ N_u \cdot e &= \alpha_1 \cdot b \cdot H_t \cdot f_c \cdot (h - a_1) + A' \sigma_s' (h - d') \end{aligned} \right\}$$

Organigramme de calcul du moment et de l'effort normal ultimes  
 Mu et Nu (cas de la section partiellement comprimée):



A

Calcu des moments réduits  $A = Nu/bhfc$   
et  $B = Mu/bh^2fc$  par rapport à la fibre  
la plus comprimée

$$A = \alpha y + \bar{W}'\sigma s1'/fc - \bar{W}\sigma s2'/fc$$
$$B = \alpha y(1-y^2) + \bar{W}'\sigma s1'/(1-z)fc$$
$$Nu = Abhfc$$
$$Mu = Bbh^2fc - Nu(Ht/2 - d)$$

① boucle sur  
les barres

FIN

IV-3: ETUDE D'UN ELEMENT EN ETAT PLASTIQUE :

IV-3-1: Description de la méthode:

La méthode utilisée prend en considération les matrices sécantes des différents éléments composant la structure .

Le calcul plastique de la structure est envisagé comme une succession de calculs élastiques ; celle-ci étant chargée progressivement jusqu'à la ruine .

Pour un élément donné , on définit sa matrice sécante comme une combinaison de 3 matrices Ke , Kt1 et Kt2 :

$$Ks = \mu_e . Ke + (\mu_{t1} - \mu_e) . Kt1 + (\mu_{t2} - \mu_{t1}) . Kt2$$

Avec Ke : matrice d'élasticité définie dans un repère lié à l'élément .

$$Ke = \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l & 0 \\ 2EI/l & 4EI/l & 0 \\ 0 & 0 & EA/l \end{bmatrix}$$

Kt1 : matrice d'élasticité d'un élément articulé encastré

\*pour un élément articulé à la première extrémité :

$$Kt1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/l & 0 \\ 0 & 0 & EA/l \end{bmatrix}$$

\*pour un élément articulé à la 2ème extrémité :

$$Kt1 = \begin{bmatrix} 3EI/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA/l \end{bmatrix}$$

.../...

Kt2 : matrice d'élasticité d'un élément bi-articulé

$$Kt2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA/l \end{bmatrix}$$

\* Les coefficients  $\mu_e$ ,  $\mu_{t1}$  et  $\mu_{t2}$  dépendent de l'état de chargement de la structure. ILS seront définis ci-dessous.

On a la relation :  $[F] = [Ks].[D]$  ; avec :  $[F] = \begin{bmatrix} M1 \\ M2 \\ N \end{bmatrix}$

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta 1 \\ \delta 2 \\ \delta 3 \end{bmatrix}$$

$$Ks = \begin{bmatrix} 4\mu_e.EI/l & 2\mu_e EI/l & 0 \\ 2\mu_e.EI/l & (\mu_e+3\mu_{t1})EI/l & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{t2}.EA/l \end{bmatrix}$$

(dans le cas articulé à la première extrémité pour Kt1).

En utilisant un programme de calcul élastique (§II), des efforts fictifs  $M1'$ ,  $M2'$ ,  $N'$  sont déterminés en résolvant le système :

$$[F'] = [Ke].[D] ; Ke : matrice d'élasticité$$

A chaque étape du calcul, nous avons donc une relation entre les efforts réels  $[F]$  et les efforts fictifs  $[F']$  :

$$[F] = [Ks].[Ke]^{-1}.[F'] = \begin{bmatrix} \mu_e & 0 & 0 \\ (\mu_e-\mu_{t1})/2 & \mu_{t1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{t2} \end{bmatrix}.[F']$$

supposons que  $|M1'| > |M2'|$  ; plusieurs cas peuvent se présenter :

-Si  $|M1'| < Mp$  ( $Mp$  : moment plastique) alors le comportement au niveau de l'élément est élastique.

$$\mu_e = \mu_{t1} = \mu_{t2} = 1 \quad \text{et} \quad M1 = M1' ; M2 = M2' ; N = N'$$

-Si  $|M1'| \geq Mp$ , il y a apparition d'une rotule plastique à

l'extrémité 1 de l'élément. On cherche alors à diminuer  $M_1'$  jusqu'à atteindre  $M_p$ , l'excédent de moment  $|M_1' - M_p|$  étant redistribué par itération et par rééquilibrage aux autres noeuds de la structure. A chaque itération, on utilise les relations suivantes :

$$\mu_e(i) = \frac{M_p}{M_1'} \cdot \mu_e(i-1) \quad \text{avec } \mu_e(0) = 1$$

si  $-3.M_p \leq (2.M_2' - M_1') \cdot \text{signe de } M_1' \leq 3.M_p$  alors  $\mu_{t1} = 1$

sinon :

$$\mu_{t1} = \frac{3.M_p}{|2.M_2' - M_p|}$$

- l'effet de N n'étant pas pris en compte, on a toujours  $\mu_{t2} = 1$

Un raisonnement similaire peut être mené si  $|M_2'| > |M_1'|$ .

#### IV-3-2: Analogie avec un élément relaxé :

La matrice sécante  $[K_s]$  peut être avantageusement simulée par une matrice d'élément relaxé.

Pour cela, soient  $I', a_1', a_2'$  l'inertie et les coefficients d'encastrement d'un élément fictif dont la matrice est :

$$[K_e'] = \begin{bmatrix} \frac{12.a_1'.EI'}{4-a_1'.a_2' \cdot 1} & \frac{6.a_1'.a_2'.EI'}{4-a_1'.a_2' \cdot 1} & 0 \\ \frac{6.a_1'.a_2'.EI'}{4-a_1'.a_2' \cdot 1} & \frac{12.a_2'.EI'}{4-a_1'.a_2' \cdot 1} & 0 \\ 0 & 0 & EA/l \end{bmatrix}$$

Or  $[K_s]$  vaut :

$$[Ks] = \begin{bmatrix} 4\mu_e \cdot EI/l & 2\mu_e EI/l & 0 \\ 2\mu_e \cdot EI/l & (\mu_e + 3\mu t_1)EI/l & 0 \\ 0 & 0 & \mu t_2 \cdot EA/l \end{bmatrix}$$

(dans le cas articulé à la première extrémité pour  $Kt_1$ )

En procédant par identification, on a :

$$\begin{aligned} 12 \cdot a_1' \cdot I' / (4 - a_1' \cdot a_2') &= 4 \cdot \mu_e \cdot I \\ 12 \cdot a_2' \cdot I' / (4 - a_1' \cdot a_2') &= (\mu_e + 3 \cdot \mu t_1) \cdot I \\ 6 \cdot a_1' \cdot a_2' / (4 - a_1' \cdot a_2') &= 2 \cdot \mu_e \cdot I \end{aligned}$$

La résolution de ce système donne :

$$\begin{aligned} I' &= \mu t_1 \cdot I \\ a_1' &= 4 \cdot \mu_e / (\mu_e + 3 \cdot \mu t_1) \\ a_2' &= 1 \end{aligned}$$

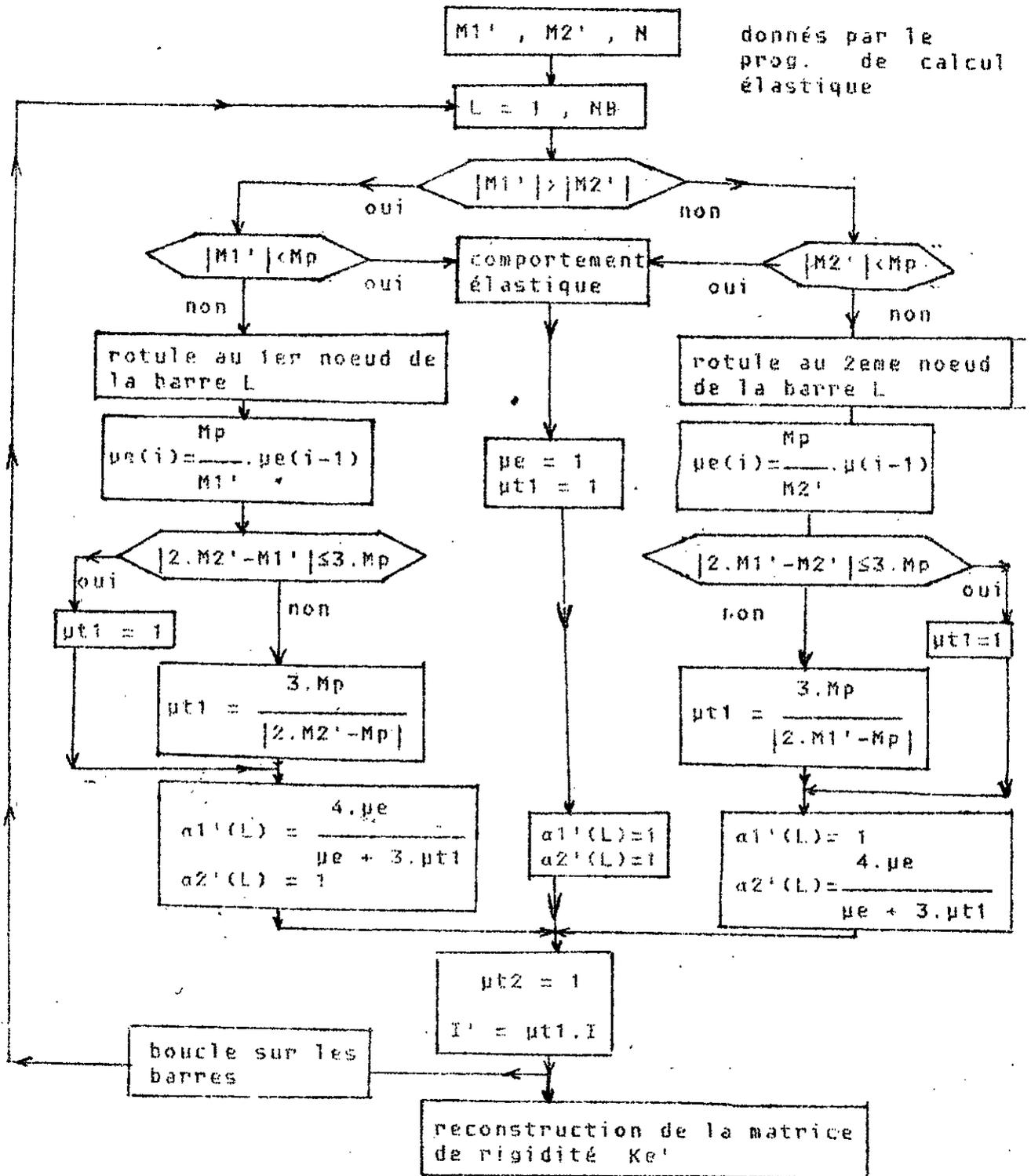
un calcul identique pour une rotule à l'extrémité 2 donnerait :

$$\begin{aligned} I' &= \mu t_1 \cdot I \\ a_1' &= 1 \\ a_2' &= 4 \cdot \mu_e / (\mu_e + 3 \cdot \mu t_1) \end{aligned}$$

Par cette analogie, la méthode consistera alors à :

- 1°- Résoudre un système d'équations :  $[F'] = [Ke'] \cdot [D]$
- 2°- Déterminer les coefficients  $\mu_e$ ,  $\mu t_1$  et  $\mu t_2$  (en utilisant le procédé décrit ci-dessus) pour évaluer  $a_1'$ ,  $a_2'$  et  $I'$  ensuite construire  $[Ke']$ . Il est à remarquer que cette deuxième étape n'implique que des calculs élémentaires ; de sorte que n'importe quel programme de calcul ayant la possibilité de relaxation nodale peut être utilisé.

Organigramme de calcul des coef.  $\mu_e, \mu_{t1}, \mu_{t2}$  de la matr. sécante  $K_s$



IV-4 : ASSEMBLAGES-RESOLUTIONS ET EXEMPLES :

IV-4-1:Methodes Actuelles :

En calcul de structures , les récents progrès effectués en plasticité ont montré qu'on dispose actuellement de deux types de méthodes (on remarquera notamment les travaux effectués en charpente métallique au Centre Technique et Industriel de Charpente Métallique)

Ainsi , on distingue :

IV-4-1-1:Les méthodes globales :

Elles utilisent les théorèmes de la plasticité (théorème statique , cinématique ou combiné ) et leur résolution se fait généralement par la programmation linéaire [24],[25] . Ces méthodes , basées sur le schéma rigide-plastique ne renseignent le projeteur que sur l'état de la structure au moment de la ruine par formation d'un mécanisme ; or la ruine d'une structure peut avoir lieu avant formation de ce mécanisme (phénomène de ruine partielle ou mise hors d'état de service par déformation excessive) .

IV-4-1-2:Les méthodes pas-à-pas :

Dans ce type de méthodes , on suit pas-à-pas le comportement de la structure et de ses éléments de façon à connaître l'état de la structure à tout instant du chargement [23],[11] .

Le calcul de la structure y est envisagé comme une

succession de calculs élastiques , et le chargement s'effectue progressivement jusqu'à la ruine .

Ces méthodes nécessitent des calculs complexes et longs dans le cas des grandes structures ; ce qui oblige à avoir recours à l'ordinateur .

On distingue plusieurs variantes de ce type de méthodes :

\* Les méthodes pas-à-pas utilisant les matrices tangentes

-----  
des éléments (les variations de la charge sont petites de façon à suivre le comportement réel de la structure [25]) , et au premier ordre (les déplacements des noeuds sont très petits vis-à-vis des dimensions de la structure [3],[4]). Ces méthodes présentent un volume de calcul important pour les grandes structures .

En référence [26] et [27] deux programmes de calcul utilisant ces méthodes sont décrits .

Les méthodes de ce type s'apparentent au processus itératif de NEWTON (voir figure IV-20) .Elles nécessitent la connaissance de la loi de comportement et ne convergent pas toujours à branche descendante (cas de la loi réelle du béton ) , [34] .

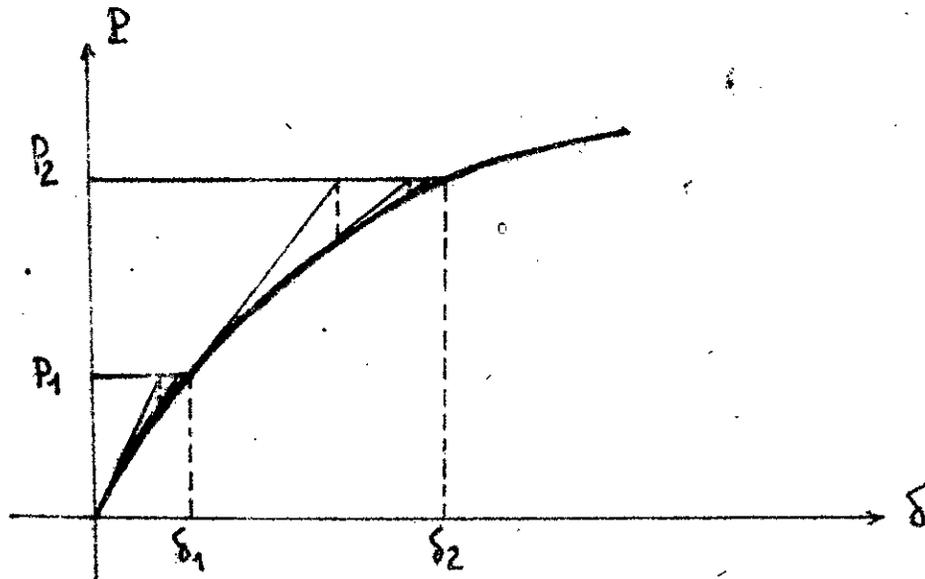


Figure IV-20: Méthodes à matrices tangentes  
----- (NEWTON-RAPHSON)

\* Les méthodes pas-à-pas du type contraintes initiales :

-----  
On effectue des itérations à chaque pas de chargement (voir figure IV-21). Elles s'apparentent au processus de NEWTON modifié à chaque pas de chargement, sans nécessairement changer de rigidité, elles ne convergent pas toujours à branche descendante.

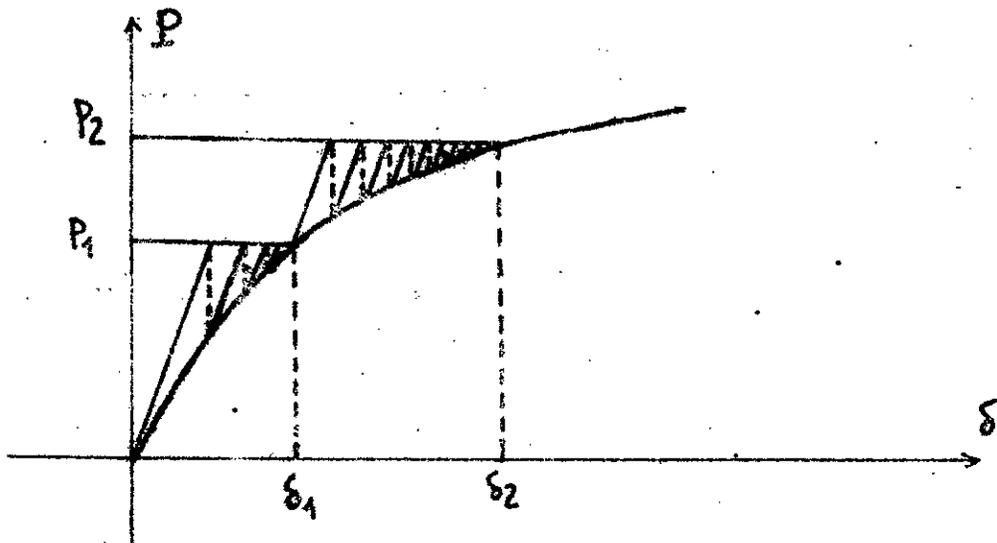


Figure IV-21: Méthodes des contraintes initiales  
----- (NEWTON modifié)

IV-4-1-3 : En plus des deux types de méthodes décrites précédemment , on utilise souvent en élasticité non-linéaire la méthode des matrices sécantes . Cette méthode est dérivée de la méthode des approximations successives directe .

Elle nécessite un traitement numérique sophistiqué lorsque la loi de comportement est à branche descendante (rigidité croissante) , mais est en revanche valable quelle que soit la loi de comportement décrite en variables entières (figure IV-22) .

Cependant , la convergence de cette méthode est en général médiocre comparée aux méthodes à matrices tangentes.

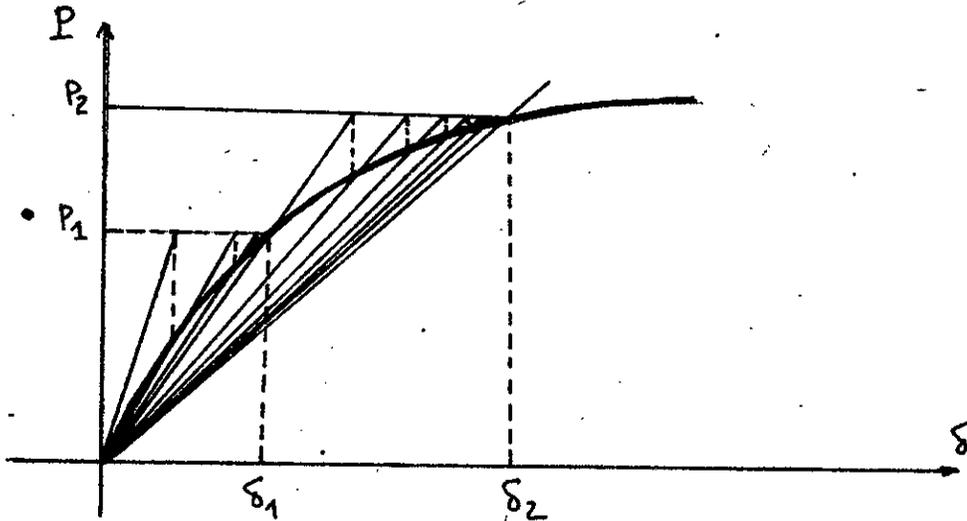


Figure IV-22: Méthodes sécantes

IV-4-1-4: Applications au béton armé :

En béton armé , de nombreux essais ont montré que la répartition réelle des sollicitations peut s'écarter de façon notable de la répartition résultant du calcul

.../...

élastique à partir des sections brutes ; de plus pour les structures hyperstatiques ; la fissuration et par conséquent la diminution de la rigidité engendrent une redistribution des efforts [20], [30] .

Nous trouverons en référence [37], l'exposé de deux méthodes de calcul tenant compte du comportement non-linéaire de la structure ; les non-linéarités proviennent des lois constitutives des matériaux béton et acier , et des effets du second ordre . Ces méthodes sont :

-une méthode simplifiée qui est une extension des méthodes élasto-plastiques décrites précédemment : la ductilité réelle du matériau est prise en compte (comportement bilinéaire et formulation simplifiée des effets du second ordre) .

-une méthode générale qui est basée sur la méthode des déplacements dans un procédé à rigidité tangente .

#### IV-4-2 : RESOLUTION :

Dans ce paragraphe , on présente un programme de calcul basé sur la méthode des rigidités sécantes . Après description des différentes étapes , plusieurs exemples de structures ont été traités .

##### IV-4-2-1:Notations utilisées:

$\pi$  . : paramètre de chargement

II : indice de l'itération

- L : numéro de la barre dans la structure étudiée .
- NB : nombre de barres
- Mg : moment fléchissant au premier noeud de la barre L
- Md : moment fléchissant au 2eme noeud de la barre L
- M =Max (Mg , Md)
- Mu : Moment ultime
- N : effort normal
- Nu : effort normal ultime
- x : hauteur de la zone de béton comprimée
- $\mu_e$  ,  $\mu_{t1}$  ,  $\mu_{t2}$  : coefficients qui apparaissent dans l'expression de la matrice de rigidité sécante de l'élément (ils sont définis au paragraphe IV-3)
- $\alpha_1(L)$  : Relaxation (degré d'encastrement) au 1er noeud de L
- $\alpha_2(L)$  : " " " " 2eme " " "
- EI(L) : Rigidité dans la barre L
- a : Pas de chargement
- IV-4-2-2: description du programme de calcul:

-----  
Ce programme est basé sur la méthode exposée au paragraphe IV-3 (méthode de relaxation nodale) et utilise la méthode classique d'intégration de la courbure décrite en 1ere partie pour déterminer les efforts dans chaque élément de la structure compte tenu de la fissuration , des armatures et de la position de l'axe neutre .

a- Pour une valeur donnée du paramètre de chargement  $\pi$  , on effectue des itérations pour tenir compte des variations de

la rigidité . Ces variations , comme il a été souligné antérieurement , peuvent provenir :

- de la variation de la position de l'axe neutre au cours des itérations (donc de  $\mu$  et de  $\nu$ ) ;
- du caractère non-linéaire des lois de comportement ;
- des relaxations  $\alpha_1(L)$  et  $\alpha_2(L)$  , elles-mêmes fonctions des coefficients de la matrice de rigidité sécante de chaque élément .

La matrice de rigidité globale de la structure est reconstituée à chaque itération .

Lorsque le moment fléchissant  $M$  atteint la valeur ultime  $\mu$  , on considère qu'il y a formation d'une rotule plastique . On modifie alors la valeur du coefficient de relaxation [ $\alpha_1(L)$  ou  $\alpha_2(L)$ ] selon que le moment  $\mu$  soit atteint au 1er ou au 2eme noeud de la barre  $L$  ] suivant le procédé décrit en IV-3-1 .

Par le fait de diminuer le degré d'encastrement à l'extrémité où est atteint  $\mu$  , initialement encastree , on permet une rotation du noeud , de façon à simuler une rotule à frottement (le degré d'encastrement diminue progressivement au cours des itérations jusqu'à atteindre des valeurs parfois très faibles à la ruine) .

Si  $M < \mu$  , le comportement au niveau de l'élément est élastique .

Ce processus itératif se termine dès que la précision sur

.../...

le moment  $M$  s'avère suffisamment acceptable . Dans ce programme , on arrête les itérations dès que la variation relative  $\delta M/M$  est inférieure à 1 % , d'une itération à une autre ; ce qui constitue une précision suffisante .

Dès que l'effort normal atteint la valeur ultime  $N_u$  , on considère qu'il y a ruine partielle de la structure .

D'autre part , en plus de ces critères basés sur la résistance pure , il est nécessaire de vérifier que les sections n'ont pas atteint le seuil de fragilité . A chaque itération on vérifiera par conséquent la plastification actuelle ; mais aussi :

- le non-épuisement des rotules déjà formées ; dans notre cas , on vérifiera que  $e_s \leq 10 \%$  pour le pivot 2 et  $e_b \leq 3.5 \%$  pour le pivot 1 ;

- la limitation des déplacements d'ensemble excessifs ;

- les mécanismes de poutre .

b- La structure est chargée progressivement jusqu'à la ruine. Plus la valeur du pas de chargement est petite , mieux le comportement de la structure est représenté .

Le critère de ruine retenu dans les exemples traités est basé sur le nombre de rotules plastiques formées . Si le nombre de rotules est égal à  $n+1$  ( $n$ :degré d'hyperstaticité de la structure étudiée) , il y a ruine de la structure qui devient alors un mécanisme .

En fait , dans cette méthode , il n'est pas nécessaire

.../...

de connaître exactement la rotulation (loi de comportement générale) ; il faut alors un critère de ruine basé sur l'amplitude des déplacements .

c- Etant donné le caractère non-linéaire du problème , il peut arriver qu'on n'ait convergence en moment ou en rigidité qu'au bout d'un nombre élevé d'itération (40 ou même 50 itérations) . Ceci augmente un tant soit peu le temps de calcul , ajouté au fait de prendre des pas de chargement assez petits pour représenter correctement le comportement . Ce qui nous a amené , dans les exemples étudiés , à limiter le nombre d'itérations par pas de chargement à 25 (la variation relative  $\delta M/M$  est telle que :  $1 \% \leq \delta M/M \leq 2 \%$  ) . Une autre possibilité de réduire le temps de calcul consiste à accélérer le processus de convergence (utiliser le processus de convergence d'AITKEN par exemple ) .

Afin de suivre correctement le comportement de la structure , nous avons souligné qu'il s'avère nécessaire de prendre des pas de chargement faibles . Les rotules plastiques dans la structure apparaissent alors une à une et on évite le plus souvent l'apparition de 2 ou plusieurs rotules pour un pas de chargement donné ; la convergence en efforts est alors rapide .

Les longueurs des éléments adoptées dans la modélisation de la structure jouent aussi un rôle très important dans la

.../...

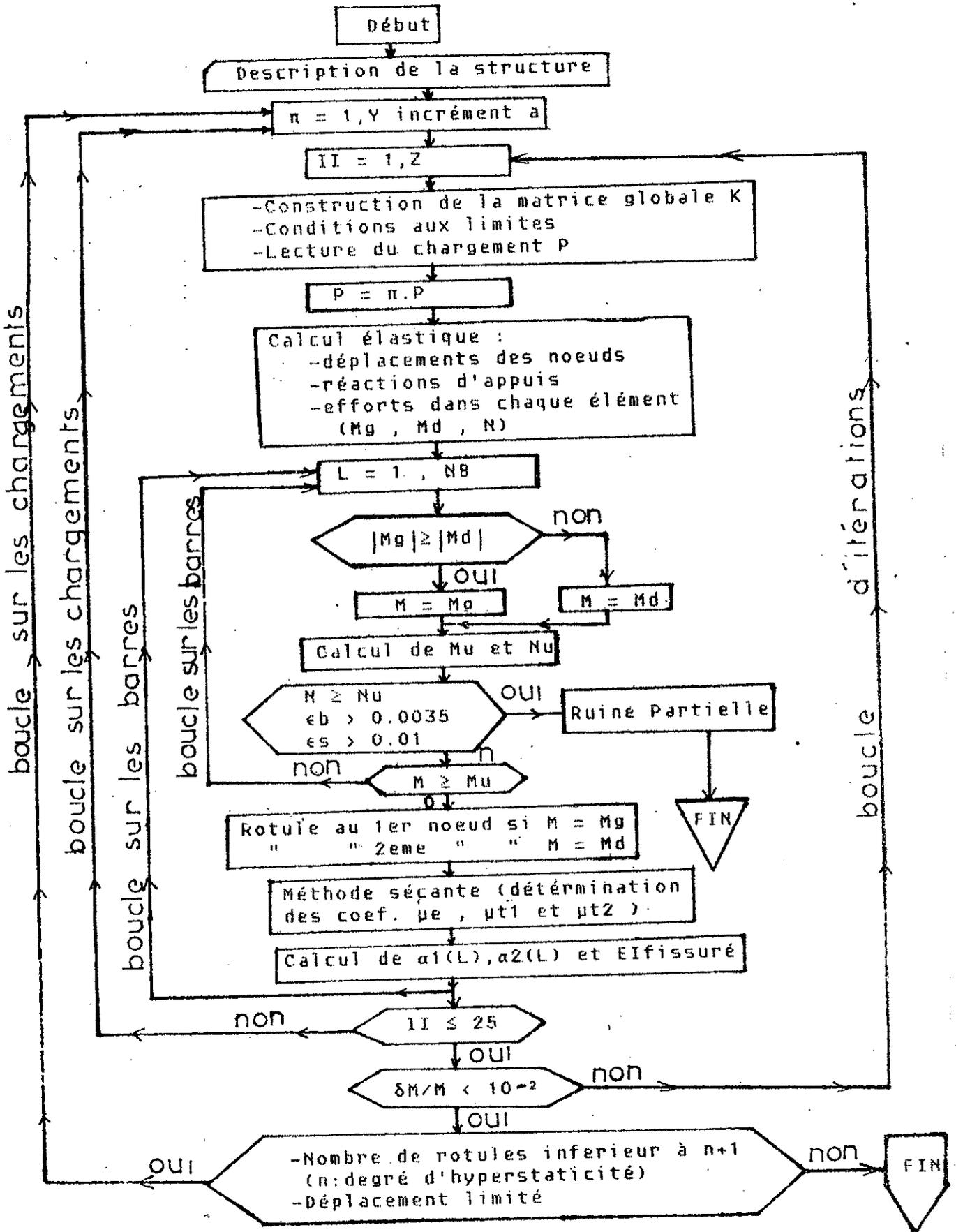
détermination du mécanisme de ruine , et par conséquent du facteur de charge limite . Il s'agit en fait de considérer des éléments suffisamment petits pour éviter d'atteindre  $M_u$  (ou  $M_p$ ) aux deux extrémités de l'élément ; ce qui risque de cacher une éventuelle rupture prématurée par formation d'un mécanisme de poutre .

Au cours du processus itératif décrit en a- , il est possible qu'à l'endroit d'une rotule plastique , le moment  $M$  devienne inférieur à  $M_u$  (ou  $M_p$ ) . Cette petite difficulté sera contournée dans nos exemples en acceptant une légère approximation sur  $M_u$  (ou  $M_p$ ) : on fait alors le test sur  $(M_u - 0.001M_u)$  . Ceci est essentiellement dû aux faibles valeurs qu'atteignent les coefficients de relaxation  $\alpha_1(L)$  et  $\alpha_2(L)$  pour des niveaux de chargement élevés .

Cette méthode de matrices sécantes peut être utilisée en calcul de structures en béton armé comme une méthode de vérification . L'effet de l'effort normal est pris en compte par le biais du diagramme d'interaction de la section comme décrit en paragraphe IV-3-2 .

IV-4-2-3: Organigramme de la méthode sécante : voir org.

---



Notations

correspondances dans prog.PULTC

$\pi$ (paramètre de chargement)	PC
II (itération)	MC
Mp	PM(L)
Np	PN(L)
$\mu_e$ (coef. de la matrice Ks)	CF0(L,N4) pour la 1ere extr. CF0(L,N5) " " 2eme "
$\mu_{t1}$ ( " " " " )	CF1(L,N4) pour 1ere extr. CF1(L,N5) " 2eme "
$\alpha_1(L)$	VE(L,1)
$\alpha_2(L)$	VE(L,2)
Min ( $\delta M/M$ )	G1 pour 1ere extr. G2 " 2eme "

\*\*\*\*\*  
\*  
\* EXEMPLES CHAPITRE IV \*  
\*  
\*\*\*\*\*

IV-4-3 : EXEMPLES :

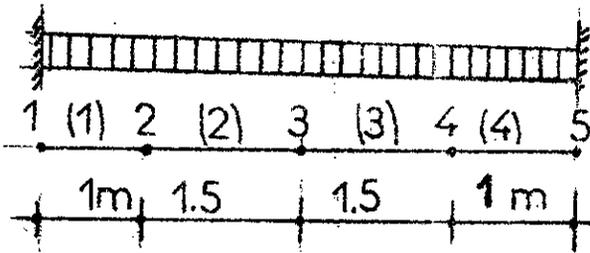
IV-4-3-1: Exemples en section homogène: (exemples du type C)

Deux exemples de structures en section homogène ont été traités par la méthode sécante. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats théoriques (donnés par l'analyse limite). La valeur de la charge limite donnée par la méthode est en très bonne concordance avec la valeur théorique.

IV-4-3-1-a: Exemple C1:

C'est une poutre biencastée uniformément chargée

(voir graphe IV-1)



$l = 5 \text{ m}$

$q = 3 \text{ t/m}$

section 30/40

$E = 3802820 \text{ t/m}^2$

$M_p = 17.34 \text{ tm}$

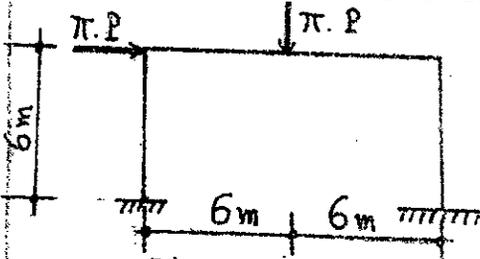
Figure IV-23: Exemple C1

La valeur théorique du facteur de chargement est  $\pi = \frac{16M_p}{q l^2} = 3.7$

La méthode utilisée donne  $\pi = 3.68$

IV-4-3-1-b: Exemple C2 : Portique simple encasté en pied

dont les dimensions transversales traverse et montants : 30/70



$P = 20 \text{ t}$

$M_p = 53.1 \text{ tm}$

$E = 3802820 \text{ t/m}^2$

Valeur théorique :  $\pi = \frac{6M_p}{P l} = 1.33$

Valeur donnée par la méthode  $\pi = 1.375$

Figure IV-24

10-4-3-2: Exemples en béton armé:

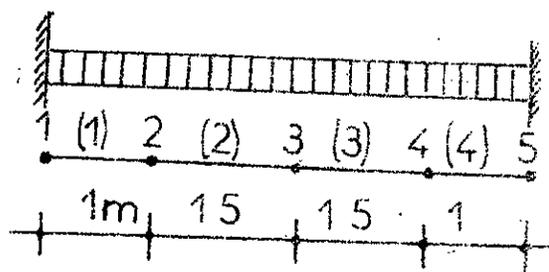
Deux types d'exemples ont été choisis.

- Dans les exemples du type D, on traite par la méthode proposée trois structures en béton armé dont le ferrailage est déterminé par un calcul élastique. Les résultats sont comparés à ceux obtenus en considérant les sections brutes. L'exemple D3 a été traité en référence [38], où l'auteur donne directement la valeur de  $M_p$  dans les différentes sections critiques de la structure.

- Les résultats des exemples du type E sont comparés à des résultats d'essais effectués par A. MATTOCK [37], ou à ceux réalisés en Grande Bretagne par W.B. CRANSTON, [37] et [39].

10-4-3-2-a: Exemple D1: (voir graphe 10-1)

On reprend l'exemple C1 en utilisant le ferrailage suivant:



éléments 1 et 4 :  $A = 6.58 \text{ cm}^2$

" 2 et 3 :  $A = 3.17 \text{ cm}^2$

$E = 3802820 \text{ tf/m}^2$

$f_{c28} = 25 \text{ MPa} = 2550 \text{ tf/m}^2$

$f_c = .85 f_{c28} / 1.5 = 1445 \text{ tf/m}^2$

$f_e = 400 \text{ MPa} = 4.08 \times 10^4 \text{ tf/m}^2$

$f_{ec} = f_e / 1.15 = 35478.26 \text{ tf/m}^2$

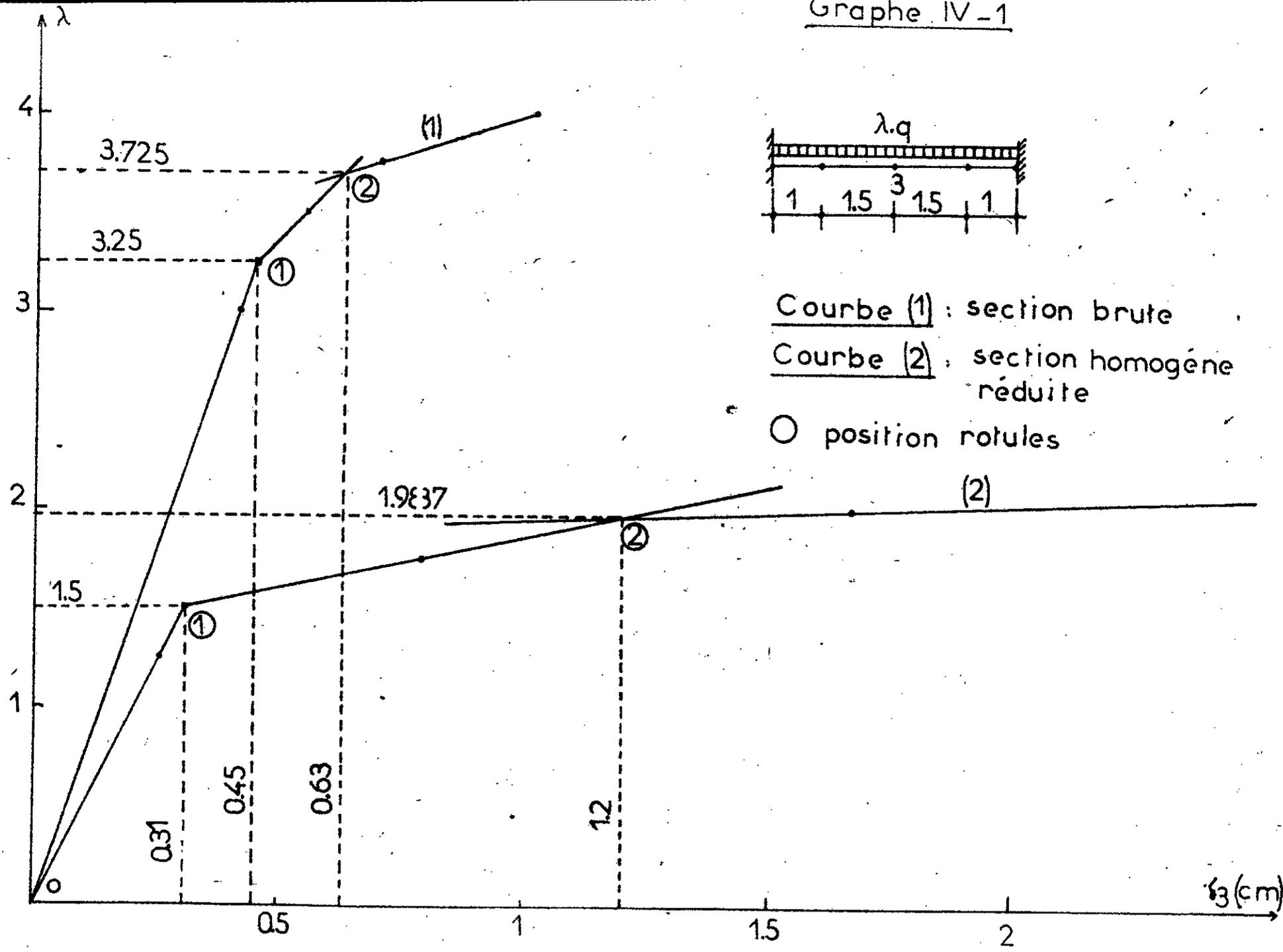
Figure 10-25: Exemple D1

Facteur de charge limite obtenu :  $\pi = 2$

Moments ultimes dans les différents éléments :

$M_{D1} = M_{D4} = 10.5 \text{ tm}$

$M_{D2} = M_{D3} = 7.17 \text{ tm}$



IV-4-3-2-b: Exemple D2: Voir graphe IV-2

Portique simple encastré en pied dont la traverse est uniformément chargée (voir figure IV-26).

Caractéristiques des matériaux:  $E = 3802820 \text{ t/m}^2$

$f_e = 400 \text{ MPa}$

$FC28 = 2550 \text{ t/m}^2$

$f_c = 1445 \text{ t/m}^2$

Caractéristiques géométriques: voir tableau XII

Element	dim.trans.	A (cm <sup>2</sup> )	A' (cm <sup>2</sup> )	Mp (tm)	Np (t)	Mu (tm)	Nu (t)
1	30/40	4.0	2.0	17.34	143.4	-	-
2	"	6.0	3.0	"	"	-	-
3	"	9.0	4.0	"	"	15.6	42.9
4	30/55	10.0	4.0	32.78	238.4	-	-
5	"	18.0	9.0	"	"	37.24	41.2

Tableau XII

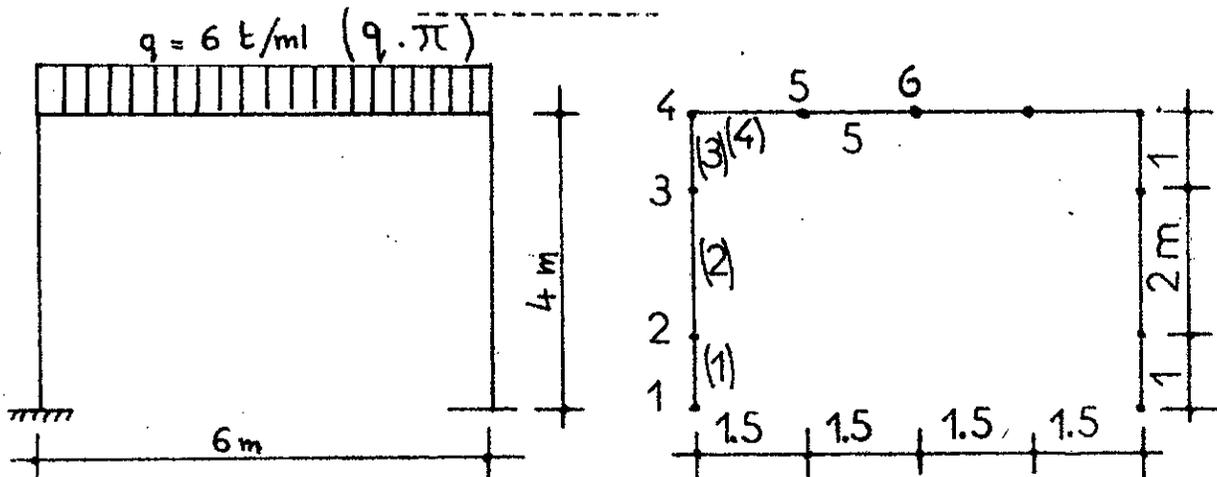
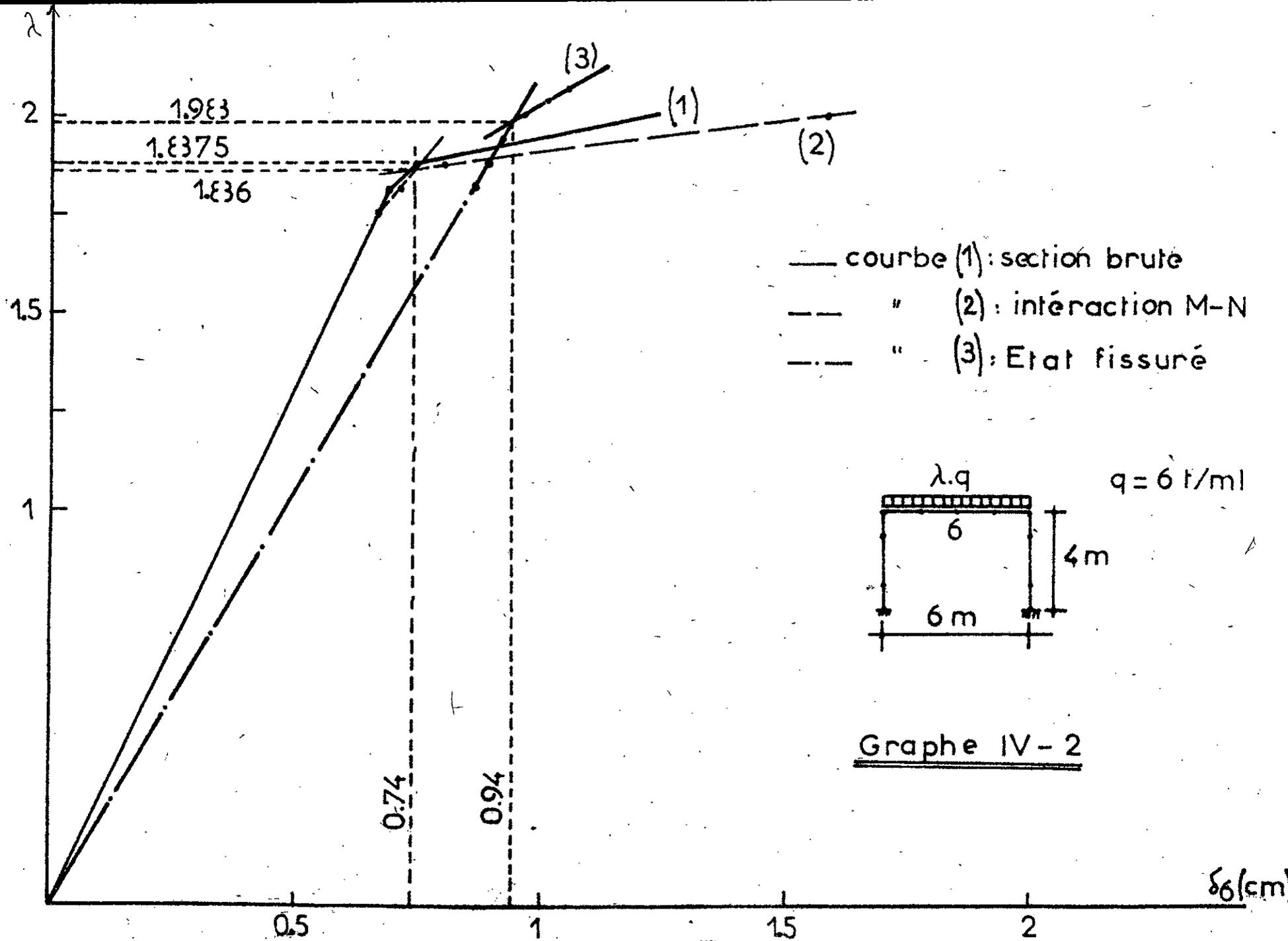


figure IV-26: Exemple D2

Par la méthode utilisée, on trouve  $\pi = 2$ ; en utilisant les inerties des sections brutes, on obtient  $\pi = 1.94$ .

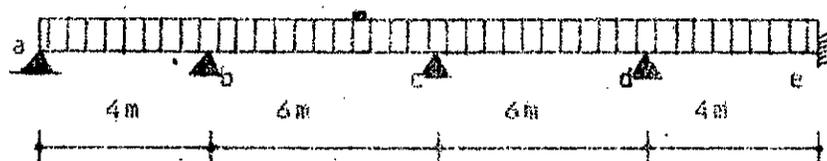


Si on tient compte de l'effort normal (utilisation de la courbe d'interaction d'équation  $(M/M_p) = 1 - (N/N_p)^2$ ,  $N$  étant un facteur correctif sans effet du 2eme ordre), on trouve  $\eta = 1.87$

IV-4-3-2-c: Exemple D3 : Voir graphe IV-3

Cet exemple a été traité par le professeur M.D.HANGAN [38] par une méthode d'approximations successives. Il s'agit de la poutre continue représentée sur la figure IV-27 ; cette poutre, d'inertie constante est uniformément chargée sur toute sa longueur ( $q=3t/m$ ).

$E=3802820t/m^2$   
 $f_e=40800t/m^2$   
 $f_{C28}=2550t/m^2$   
 $f_c=1445t/m^2$



Modélisation: nombre d'éléments dans la modélisation : 14

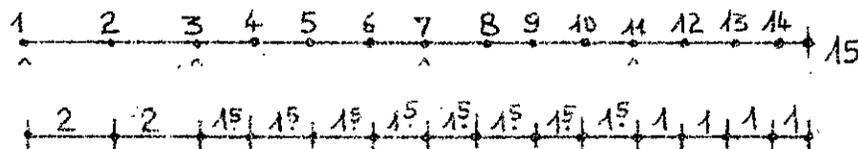
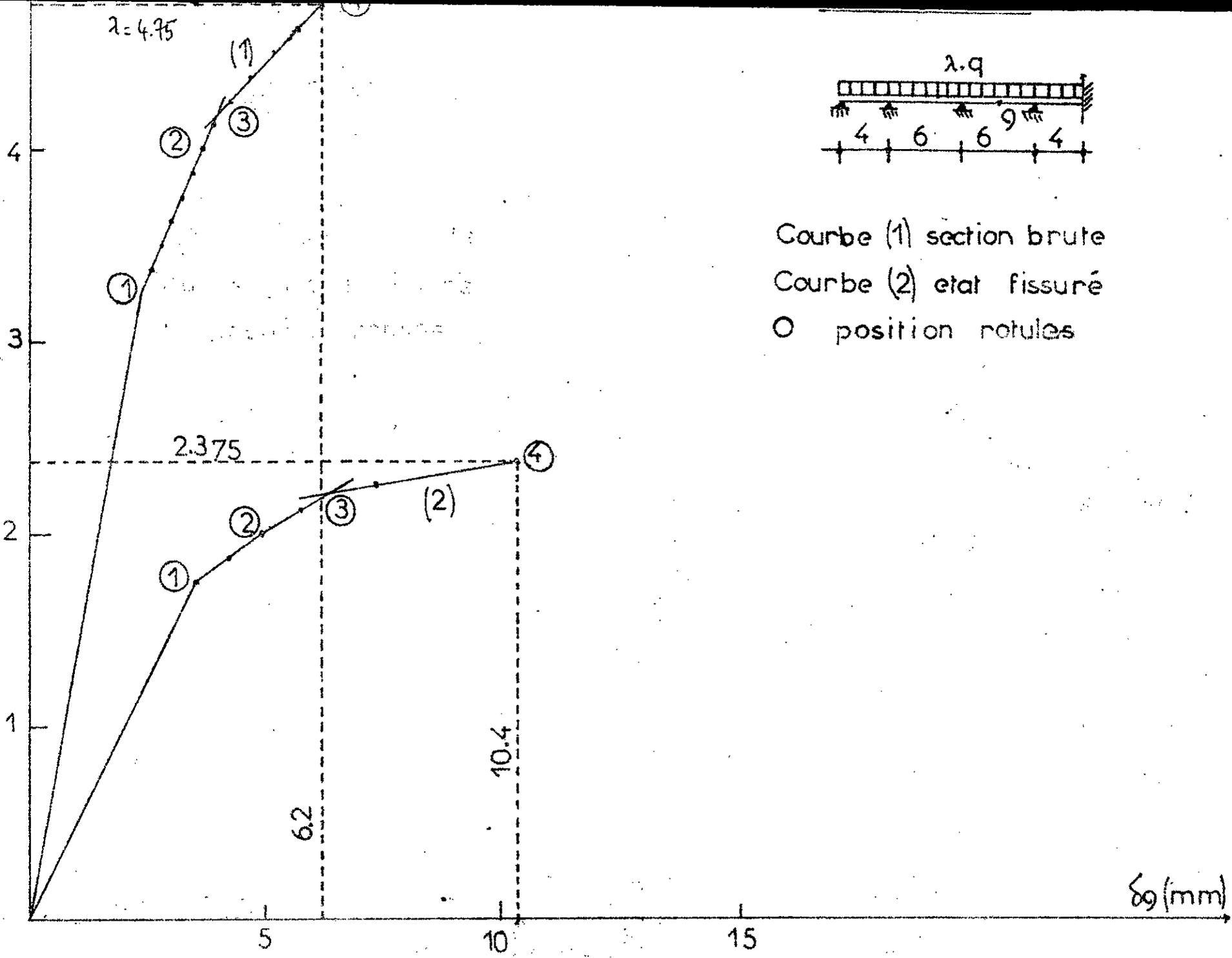


Figure IV-27: Poutre continue ; Exemple D3

Les caractéristiques géométriques des sections sont consignées dans le tableau XIII suivant :



Element	dim.trans.	A (cm <sup>2</sup> )	A' (cm <sup>2</sup> )	Mp (tm)	Np (t)	Mu (tm)	Nu (t)
1	25/60	2.26	0	17.34	143.4	-	-
2	"	6.03	0	"	"	-	-
3	"	6.03	0	"	"	15.6	42.9
4	"	3.8	0	"	"	-	-
5	"	3.8	0	"	"	-	-
6	"	7.5	0	"	"	-	-
7	"	7.5	0	"	"	15.6	42.9
8	"	3.8	0	"	"	-	-
9	"	3.8	0	"	"	-	-
10	"	6.03	0	"	"	-	-
11	"	6.03	0	"	"	15.6	42.9
12	"	2.26	0	"	"	-	-
13	"	2.26	0	"	"	37.24	41.2
14	"	2.26	0	"	"	37.24	41.2

Tableau XIII

On aboutit ainsi à un facteur de charge limite  $\pi=2.375$

L'application de la methode classique donne  $\pi=4.75$

En reference [38] , l'auteur obtient  $\pi=2.71$  , en prenant comme moments dans les sections critiques (sections d'appuis) les moments plastiques suivants :

$$M_b = 18 \text{ tm} \quad ; \quad M_d = 19.5 \text{ tm}$$

$$M_c = 19.5 \text{ tm} \quad ; \quad M_e = 6.5 \text{ tm}$$

IV-4-3-2-d: Exemple E1: Poutre continue (citée en [37])

Elle fait partie d'une série d'essais effectués par A.MATTOCK qui obtient une charge ultime  $P_u = 7.57 \text{ tf}$  en prenant un pourcentage d'armatures tendues identique dans les sections B et C ( $p = 1.34 \%$ ) et en adoptant une contrainte de compression du béton  $\sigma_j' = 2958 \text{ tf/m}^2$  , comme limite elastique des aciers  $\sigma_e = 39780 \text{ tf/m}^2$  . Nous

obtenons , avec les mêmes hypothèses et en utilisant la méthode des matrices sécantes , une charge ultime  $P_u = 7.34$  tf .

Le graphe IV-4 donne les déplacements du point B à chaque étape du chargement .

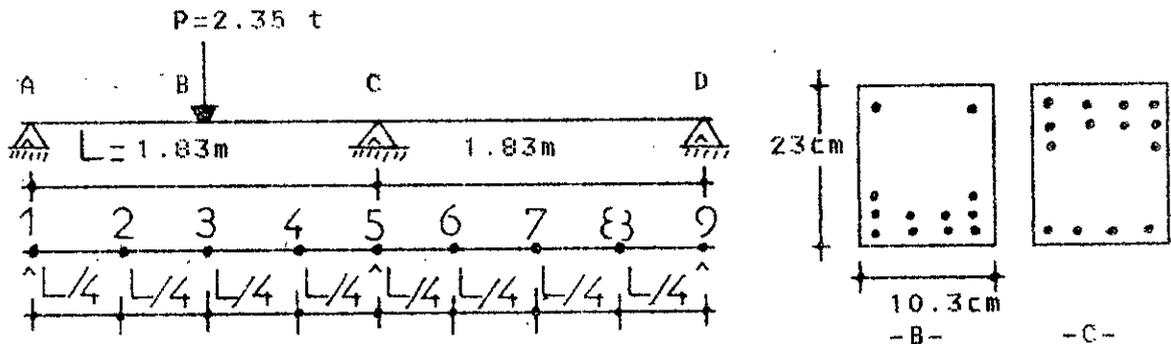


Figure IV-28: Poutre continue sous charge concentrée au milieu de la première travée.

IV-4-3-2-e: Exemple E2 : Portique bi-articulé (cité en [391])

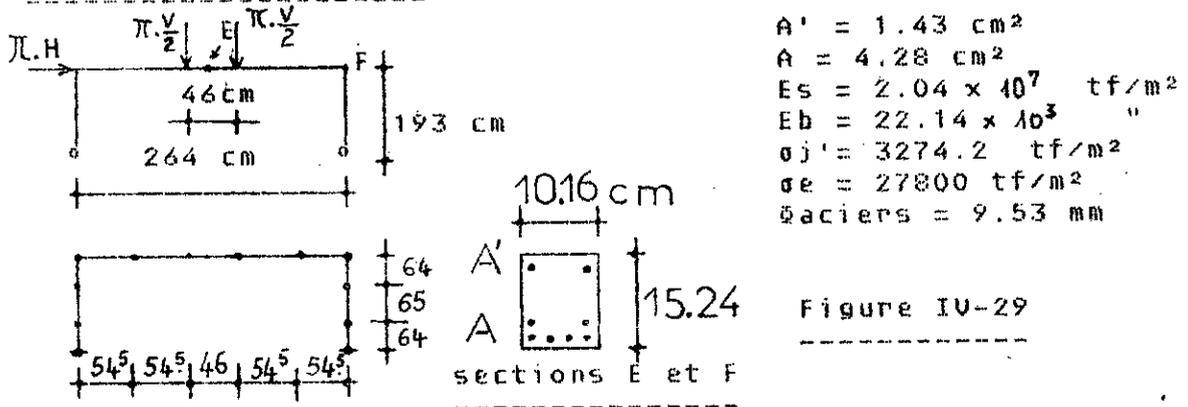
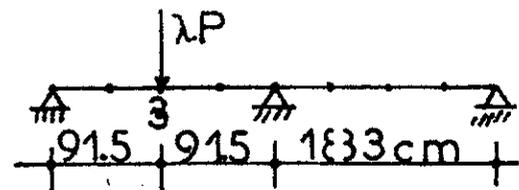
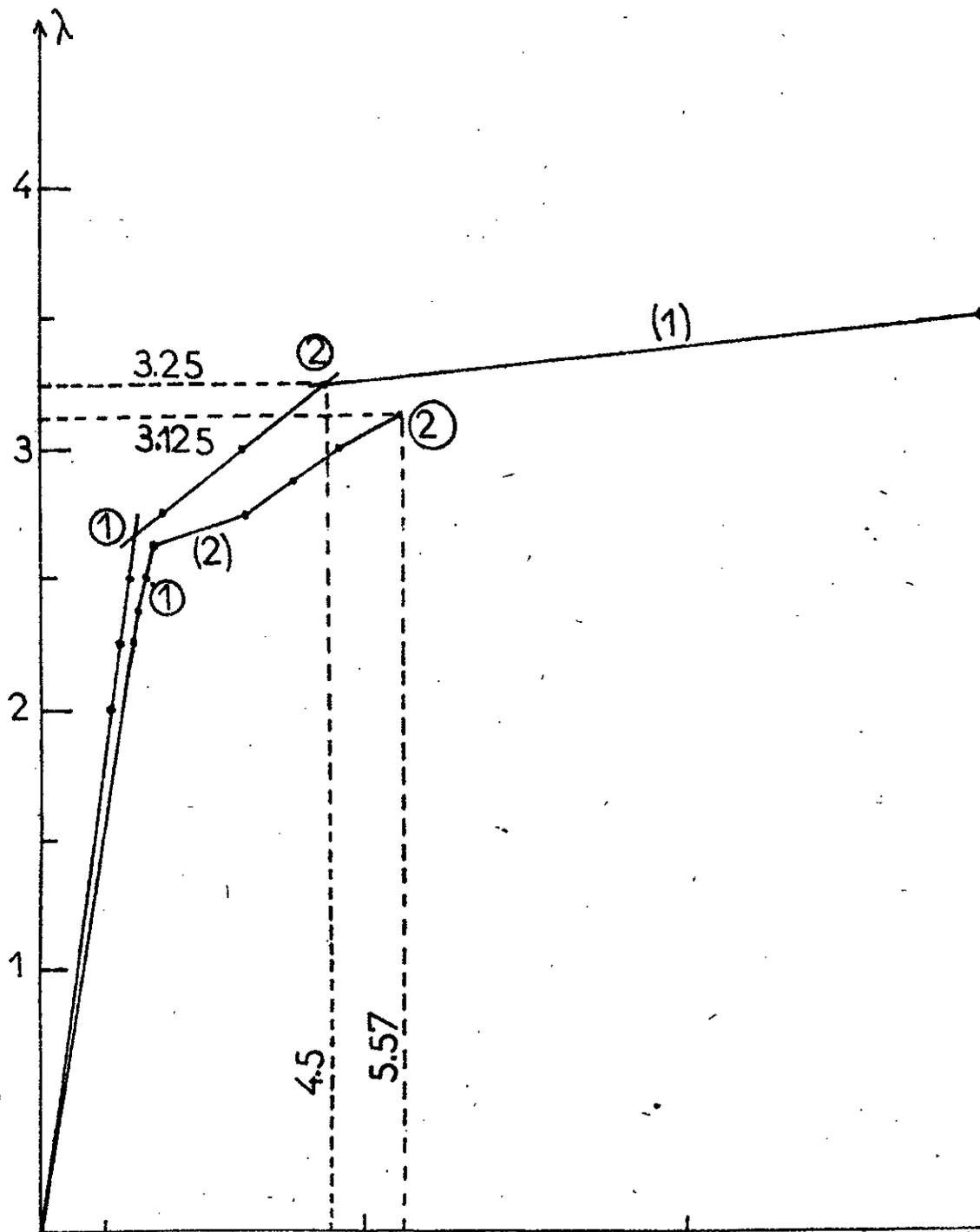


Figure IV-29

Les essais de W.B.CRANSTON effectués en Grande Bretagne donnent une charge ultime  $U_u = 4.448\text{ tf}$  . Avec la méthode des rigidités sécantes , et en adoptant les mêmes hypothèses nous obtenons  $U_u = 4.124\text{ tf}$  .



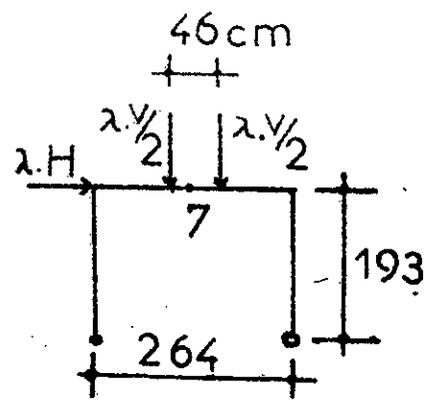
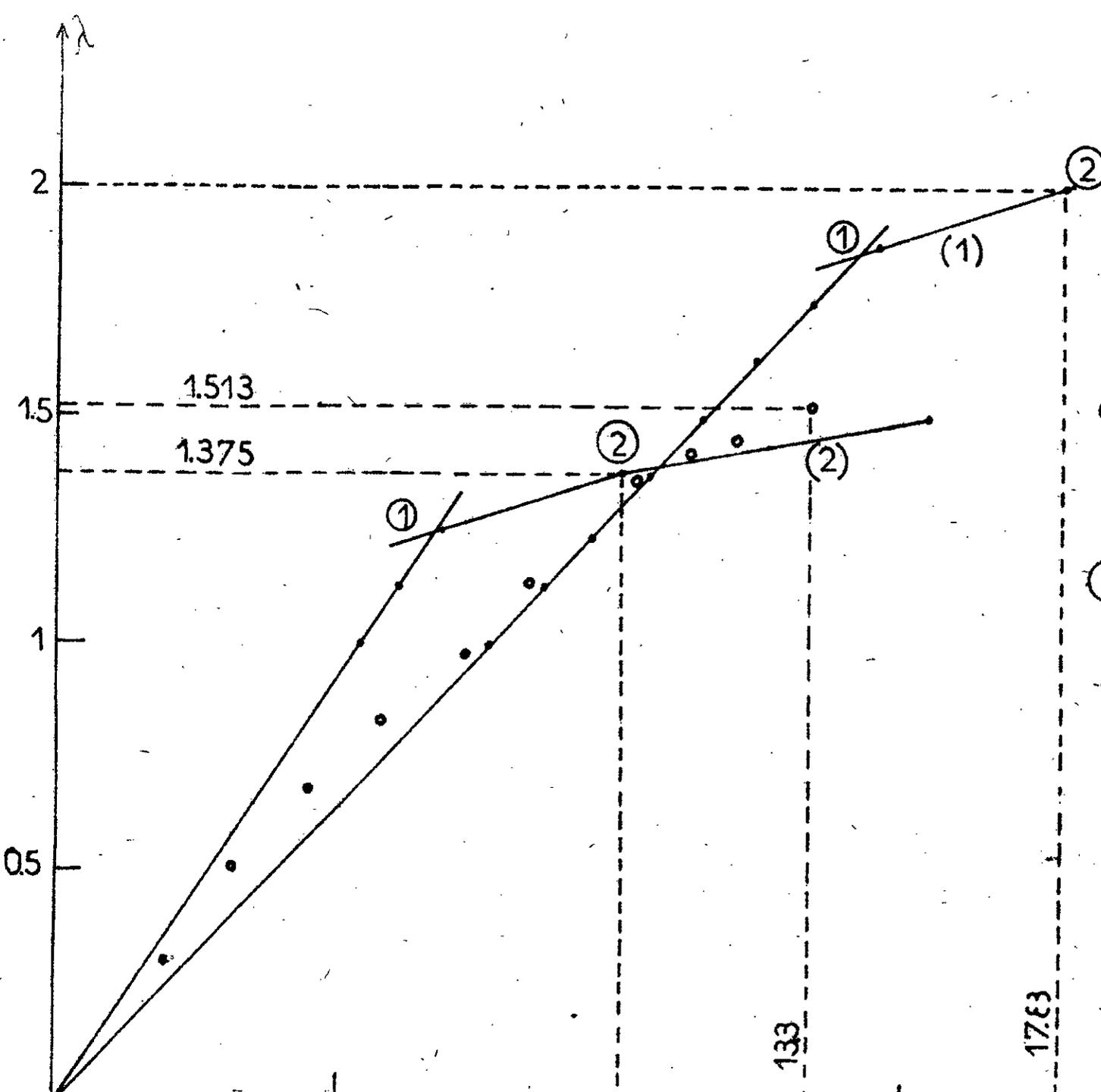
$P = 2.35 \text{ t}$

Courbe (1) : section brute

(2) : etat fissuré

o : position rotules

Graphe IV-4



$v = 3t ; H = 0.3t$

Courbe (1) sect. brute

(2) etat fissuré

• : points experimentaux

○ : position rotules

Graphe IV-5

IV-4-4: Conclusion

---

Par les exemples étudiés, on voit que la charge de ruine obtenue en utilisant la méthode des matrices sécantes est très proche des valeurs théoriques ou expérimentales. Etant donné le processus de calcul utilisé dans cette méthode toute loi de comportement à branche concave peut être adoptée. De plus cette méthode pourrait être appliquée en utilisant les programmes de calculs classiques et en faisant de simples calculs annexes.

V- PROPOSITIONS POUR DES RECHERCHES FUTURES

=====  
Nos propositions pour des recherches futures peuvent s'orienter vers les points suivants :

-Pour une meilleure représentation du comportement des structures en béton armé , il serait souhaitable de prendre en compte :

\*les effets du second ordre ,

\*le fluage et le retrait .

• -Des études expérimentales au niveau des zones nodales des ossatures en béton armé permettraient de prendre en compte des degrés d'encastrement plus réels dans la détermination des efforts .

-Par ailleurs , il serait souhaitable d'étudier l'effet des chargements non monotones et éventuellement les effets de choc sur la rigidité . En effet , la dégradation de rigidité fait qu'à chaque cycle de charge et décharge , on se trouve en présence d'une autre structure . Les effets combinés de la plasticité et des grands déplacements s'en trouvent d'autant plus soulignés .

VI - CONCLUSION GENERALE :

=====

A l'état de service et , dès l'apparition des premières fissures , les rigidités sont fortement affectées et il est nécessaire de tenir compte des inerties des sections homogènes réduites pour déterminer les efforts et les déformations dans les ossatures en béton armé . On obtient alors des résultats proches de ceux donnés par les essais et règlements en ce qui concerne les déformations . Par ailleurs , on constate que la redistribution des efforts obtenue ne va pas toujours dans le sens de la sécurité . Un processus d'approximations successives direct est suffisant pour ces calculs ; la non-linéarité étant faible .

Dans le calcul élasto-plastique des structures en béton armé , on constate que la prise en compte simultanée de la fissuration et de la plastification réelle tenant compte des diagrammes d'interaction permet d'obtenir des charges ultimes et des déformations beaucoup plus réalistes que celles données par les calculs plastiques classiques . L'algorithme de calcul utilisé est basé sur la méthode des matrices sécantes (approximations successives) , moyennant l'hypothèse de non-retour élastique des rotules plastiques . Par ailleurs , il est possible de simuler le comportement par analogie à une structure à noeuds relaxés ; ce qui permet d'utiliser des programmes classiques , à compléter par de simples calculs annexes .

....

Le programme de calcul ainsi écrit permet de suivre tout le comportement d'une ossature en béton armé jusqu'à la ruine en donnant des résultats très réalistes pour autant que les autres non-linéarités (fluage , non-linéarités géométriques ) soient faibles .

BIBLIOGRAPHIE

=====

- 1- Ch.MASSONNET , G.DÉPREZ , R.MAQUOI , R.MULLER , G.FONDER  
"Calcul des structures sur ordinateur" Tomes I et II  
EYROLLES 1972
- 2- J.F.AUBOIN  
"Calcul des structures et informatique"  
EYROLLES 1983
- 3- PIN CHUN WANG  
"Calcul des structures par les méthodes numériques et  
matricielles"  
DUNOD 1969
- 4- R.LACROIX , A.FUENTES , H.THONIER  
"Traité de béton armé"  
EYROLLES 1982
- 5- C.CASADJIAN , A.DOUSTENS et M.LAQUERBE  
"Résolutions des sections rectangulaires de béton armé  
soumises à une flexion non déviée et dont le béton est  
partiellement comprimé"  
ANNALES de l'ITBTP N°451 Janvier 1987
- 6- J.M.ARIBERT et C.WATTECHAMPS  
"Méthode pratique commune de calcul élastique et aux états  
limites des sections en béton armé en flexion simple ,  
composée et déviée"  
ANNALES de l'ITBTP N°374 Juillet-Aout 1979
- 7- J.PERCHAT  
"Réglements étrangers de béton armé"  
EYROLLES 1982
- 8- DOCUMENT TECHNIQUE UNIFIE  
"Règles techniques de conception et de calcul des  
constructions en béton armé ;CCBA 68"  
EYROLLES 1976
- 9- Comité Mixte International sur la Conception et l'Etude des  
Immeubles de Grande Hauteur-Structure en Béton et Maçonnerie  
"Rigidité et limitation de la fissuration"  
Vol III-24 1973
- 10- P.BOTIZAN  
"Etablissement de la matrice de rigidité d'un élément-barre  
avec liaisons imparfaites aux noeuds"  
REVUE Construction Métallique (CTICM) N°1 1978

- 11- J.M.ARIBERT et P.JOUVE  
"Simulation du comportement élasto-plastique d'une ossature en flexion plane"  
REVUE Construction Metallique (CTICM) N°3 1972
- 12- M.KAVYRCHINE  
"Les assemblages dans les structures en Béton"  
EYROLLES 1984
- 13- Comite Mixte International sur la Conception et l'Etude des Immeubles de Grande Hauteur-Structure en Beton et Maconnerie  
"Calcul en élasticité-Resistance des éléments et des assemblages"  
Vol III-21 1973
- 14- A.GUERRIN  
"Traité de béton armé" Tome I  
DUNOD 1973
- 15- REGLES BAEL 80  
EYROLLES
- 16- Seminaire Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
"Reglementation du béton armé aux états limites"  
ALGER du 17 au 21 Mai 1980
- 17- SALENSON  
"Le comportement Plastique", Dans "Evolution et theories modernes en élasticité et plasticité"  
Editeur SEBTP Collection FNB 1979
- 18- M.SAVE  
"Analyse et dimensionnement plastique". Dans "Evolution et theories modernes en élasticité et plasticité"  
Editeur SEBTP Collection FNB 1979
- 19- J.COURBON  
"Resistance des matériaux" Tome II  
DUNOD 1971
- 20- Ch.MASSONNET et M.SAVE  
"Calcul plastique des constructions"  
VOL I Structures dépendant d'un paramètre  
Editeur NELISSEN B. 1976
- 21- J.PERA  
"Contribution au calcul aux états limites des structures en béton armé"  
These de DOCTORAT d'ETAT 1979

- 22- Comité Mixte International sur la conception et l'étude des Immeubles de Grandes Hauteur-Structures en béton et maçonnerie: "Calcul aux états limites"  
VOL III-26 1973
- 23- Comité Mixte International sur la conception et l'étude des Immeubles de Grandes Hauteur-Structures en béton et maçonnerie: "Comportement non-linéaire et calcul elasto-plastique"  
VOL III-22 1973
- 24- NGUYEN DANG HUNG et W.G.SAXGE  
"Analyse et dimensionnement plastique des structures à barres dans les conditions de stabilité"  
REVUE Construction Metallique N°3 1981
- 25- Y.LESCOUARC'H  
"Développement des méthodes de calcul en plasticité des structures à barres"  
ANNALES de l'ITBTP N°326 Mars 1975
- 26- Y.GALEA  
"Programme d'analyse elasto-plastique des structures planes"  
REVUE Construction Metallique (CTICM) N°4 1978
- 27-Y.GALEA , A.COLSON , P.PILVIN  
"Programme d'analyse des structures planes à barres avec liaisons semi-rigides à comportement non-linéaire"  
REVUE Construction Metallique N°3 1986
- 28-P.PILVIN  
"Modèle de comportement statique des liaisons de structures à barres"  
REVUE Construction Metallique (CTICM) N°2 1984
- 29-J.M.ARIBERT , P.JOUVE  
"Etude du comportement non-linéaire des ossatures à plan moyen"  
REVUE Construction Metallique (CTICM) N°2 1974
- 30- M.TICHY et J.RAKOSNIK  
"Calcul plastique des ossatures en béton"  
EYROLLES 1975
- 31- A.FUENTES  
"Le béton armé après fissuration"  
EYROLLES 1980

- 32- M. Wladyslaw KUCZYNSKI  
"Nouvelle théorie des variations de la rigidité des poutres  
en béton armé" . Dans "Evolution et théories modernes en  
élasticité et plasticité"  
Editeur SEBTP Collection FNB 1979
- 33- ANNEXES aux recommandations internationales pour le calcul et  
l'exécution des ouvrages en béton Tome 3 CEB 1976
- 34- M. VIRLOGIEUX et A. M'RAD  
"Etude d'une section de poutre en élasticité non-linéaire -  
application au béton armé"  
ANNALES de l'ITBTP N°444 Mai 1986
- 35- J. FERRY BORGES  
"Exemples d'application des méthodes de calcul non-linéaire"  
Dans "Evolution et théories modernes en élasticité et  
plasticité"  
Editeur SEBTP Collection FNB 1979
- 36- A. GRELAT et EL KAFRAWY  
"Méthodes d'analyse non-linéaire des ossatures en béton armé"  
Dans "Evolution et théories modernes en élasticité et  
plasticité"  
Editeur SEBTP Collection FNB 1979
- 37- A. GRELAT  
"Comportement non-linéaire et stabilité des ossatures en  
béton armé"  
ANNALES de l'ITBTP N°366 Novembre 1978
- 38- M. D. HANGAN  
"Le calcul des structures hyperstatiques dans le domaine  
plastique"  
ANNALES de l'ITBTP Nos 183-184 Mars-Avril 1963
- 39- A. L. LAZANO et R. ROWLAND  
"Full-Range analysis of concrete frames"  
ASCE Journal of the Structural Division VOL. 99 ST8 Aout 1973
- 40- C. K. WANG  
"General computer programme for limit analysis"  
ASCE Journal of the Structural Division VOL. 89 ST6 Dec. 1963
- 41- H. B. HARRISON  
"Structural Analysis and Design"  
( Extrait non daté )

ANNEXE I: EXEMPLE DE CALCUL PAR LA METHODE DES RIGIDITES .  
===== SECANTES

Dans cette annexe , nous allons décrire sommairement le processus d'utilisation de la méthode des rigidités sécantes .

Pour cela , considérons la poutre représentée sur la figure suivante (figure A-1):

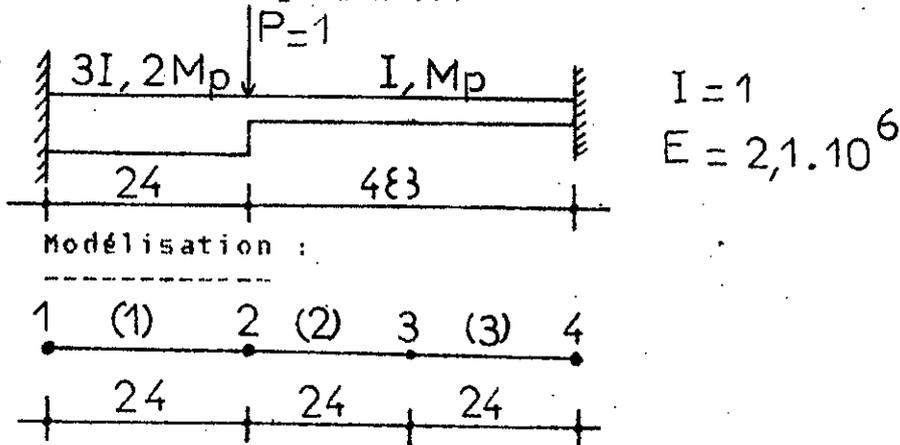
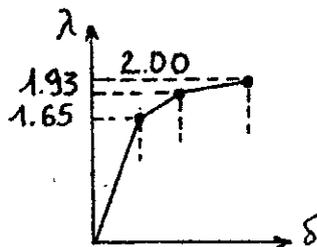


Figure A-1: Exemple d'utilisation de la méthode sécante

On se propose de déterminer la charge de ruine de cette poutre lorsque le moment plastique vaut  $M_p = 12$  . Un calcul exact , mené en [41] donne une charge de ruine  $P_l = 2$  (facteur de charge limite  $\lambda_l = 2$ ) et l'ordre d'apparition des rotules est représenté sur la graphe ci-dessous (graphe A-1):



Graphe A-1: Courbe charge-déplacement vert. du point 2 selon [41]

Appliquons la méthode des rigidités sécantes . Le

chargement de la structure est effectué par incréments  $\Delta\lambda = 0.0625$ , et supposons que la convergence en moments soit atteinte lorsque pour 2 itérations successives et au niveau d'un même noeud le rapport  $\delta M/M$  soit inférieur à  $10^{-3}$ . Intéressons nous par exemple au déplacement vertical du point 2 à chaque pas de chargement :

Pour  $P1 = 1.625$ , nous obtenons les efforts suivants :

Barre	Mg	Md	N
1	23.6	8.33	0
2	-8.33	1.273	0
3	-1.273	-5.786	0

En tous les points de la structure les moments sont inférieurs à  $M_p$ ; le comportement y est donc élastique, et les coefficients d'encastrement  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  respectivement à la 1ère et à la 2ème extrémité de chaque barre sont égaux à 1. Le déplacement vertical du point d'application de la charge est alors :

$$\delta_2 = 5.92 \times 10^{-4}$$

Nous obtenons un point de la courbe charge-déplacement :

$$A ( 5.92 \times 10^{-4}, 1.625 )$$

Pour  $P2 = 1.6825$ , les efforts sont :

Barre	Mg	Md	N
1	24.52	8.65	0
2	-8.65	1.32	0
3	-1.32	-6	0

Nous remarquons qu'au 1er noeud de la barre 1,  $2M_p$  est

atteint et dépassé . Il y a donc eu apparition d'une rotule plastique en ce noeud .

Il est à préciser que les moments déterminés plus haut proviennent d'un calcul élastique et correspondent aux moments fictifs évoqués au paragraphe IV-3 . Donc :  $M1'=24.52$  ,  $M2'=8.33$   
Evaluons les coefficients  $\mu_e$  ,  $\mu_{t1}$  ,  $\mu_{t2}$  de la matrice de rigidité sécante :

On a :  $M1' > M2'$  et  $M1' > Mp$

1ère itération :

$$\mu_e(1) = \frac{Mp}{M1'} \cdot \mu_e(0) = \frac{24}{24.52} \cdot 1 = 0.979$$

$$|2 \cdot M2' - M1'| = 7.86 < 3 \cdot Mp \text{ donc } \mu_{t1} = 1$$

$$\mu_{t2} = 1$$

Pour la barre 1 :  $\alpha_1(1) = \frac{4 \cdot \mu_e}{\mu_e + 3 \cdot \mu_{t1}} = \frac{4 \cdot (0.979)}{0.979 + 3 \cdot 1} = 0.984$

$$\alpha_2(1) = 1$$

2ème itération :

----- On effectue un calcul élastique mais en prenant :

pour la barre 1 :  $\alpha_1(1) = 0.984$  ,  $\alpha_2(1) = 1$

" " " 2 :  $\alpha_1(2) = 1$  ,  $\alpha_2(2) = 1$

" " " 3 :  $\alpha_1(3) = 1$  ,  $\alpha_2(3) = 1$

Il en résulte les efforts suivants :

Barre	Mg	Md	N
1	24.39	8.72	0
2	-8.72	1.33	0
3	-1.33	-6.06	0

Nous constatons à nouveau qu'au niveau de la barre 1 :  $M1' > Mp$  .

Cependant , M1' correspondant à cette 2ème itération est inférieur à celui correspondant à l'itération précédente .

Les coefficients  $\mu_e$  ,  $\mu_{t1}$  ,  $\mu_{t2}$  valent :

$$\mu_e(2) = \frac{M_p}{M1'} \cdot \mu_e(1) = \frac{24}{24.39} \cdot 0.979 = 0.963$$

$$\mu_{t1} = 1 \text{ et } \mu_{t2} = 1$$

Aux autres noeuds de la structure les moments fictifs sont tous inférieurs à  $M_p$  . Il n'y a donc pas de nouvelles rotules .

9ème itération :

----- Les efforts fictifs obtenus en utilisant les coefficients d'encastrement déterminés à la 8ème itération sont :

Barre	Mg	Md	N
1	24.054	8.895	0
2	-8.895	1.345	0
3	-1.345	-6.2	0

Les coefficients de la nouvelle matrice sécante valent :

$$\mu_e(9) = 0.922 \quad , \quad \mu_{t1} = 1 \text{ et } \mu_{t2} = 1$$

pour la barre 1 :  $\alpha_1(1) = 0.94$  ,  $\alpha_2(1) = 1$  .

Les coefficients d'encastrement pour les autres barres sont égaux à 1 .

10ème itération :

----- On obtient les efforts suivants :

Barre	Mg	Md	N
1	24.04	8.9	0
2	-8.9	1.346	0
3	-1.346	-6.21	0

On remarque qu'entre la 9<sup>ème</sup> et la 10<sup>ème</sup> itération les variations relatives des moments en chaque noeud  $\delta M/M$  sont toutes inférieures à  $10^{-3}$ . On considère donc qu'il y a convergence en moments. A noter que le moment au 1<sup>er</sup> noeud de la barre 1 est très proche de 24 ; Un test de convergence plus sévère et un plus grand nombre d'itérations donnerait exactement 24 (2.Mp).

Le déplacement vertical du point d'application de la charge vaut alors :  $\delta z = 6.44 \times 10^{-4}$ .

On obtient un 2<sup>ème</sup> point de la courbe charge-déplacement :

$$B ( 6.44 \times 10^{-4}, 1.6825 )$$

Le même processus est suivi jusqu'à convergence en moments à chaque pas de chargement. C'est ainsi que pour P3 = 1.75, P4 = 1.8125, P5 = 1.875 il n'apparaît pas de nouvelle rotule.

On obtient les points suivants :

$$C ( 7.19 \times 10^{-4}, 1.75 )$$

$$D ( 7.96 \times 10^{-4}, 1.8125 )$$

$$E ( 8.73 \times 10^{-4}, 1.875 )$$

Pour P6 = 1.9375, On a les efforts suivants :

Barre	Mg	Md	N
1	24.82	11.68	0
2	-11.68	1.69	0
3	-1.69	-8.3	0

On voit qu'il n'y a pas de nouvelle rotule ; mais à la 10<sup>ème</sup> itération, les efforts suivants sont obtenus :

Barre	Mg	Md	N
1	24.184	12.01	0
2	-12.01	1.72	0
3	-1.72	-8.58	0

Il y a apparition d'une 2ème rotule au 1er noeud de la barre 2 .  
 Les coefficients de la matrice de rigidité sécante deviennent alors :

- pour la barre 1 :  $\mu e(10) = 0.584$  ,  $\mu t1 = 1$  et  $\mu t2 = 1$
- pour la barre 2 :  $\mu e(1) = 0.998$  ,  $\mu t1 = 1$  et  $\mu t2 = 1$
- pour la barre 3 :  $\mu e = 1$  ,  $\mu t1 = 1$  et  $\mu t2 = 1$

et les coefficients d'encastrement pour chaque barre sont :

- $\alpha 1(1) = 0.652$  ,  $\alpha 2(1) = 1$
- $\alpha 1(2) = 0.998$  ,  $\alpha 2(2) = 1$
- $\alpha 1(3) = 1$  ,  $\alpha 2(3) = 1$

Le nombre d'itérations étant limité à 26 , on a les efforts suivants : (  $\delta M/M$  vaut alors  $2 \cdot 10^{-3}$  )

Barre	Mg	Md	N
1	24.056	12.056	0
2	-12.056	1.69	0
3	-1.69	-8.72	0

Les coefficients de la matrice de rigidité sécante sont :

- pour la barre 1 :  $\mu e(26) = 0.557$  ,  $\mu t1 = 1$  et  $\mu t2 = 1$
- pour la barre 2 :  $\mu e(17) = 0.919$  ,  $\mu t1 = 1$  et  $\mu t2 = 1$
- pour la barre 3 :  $\mu e = 1$  ,  $\mu t1 = 1$  et  $\mu t2 = 1$

et les coefficients d'encastrement pour chaque barre sont :

- $\alpha 1(1) = 0.626$  ,  $\alpha 2(1) = 1$

....

$$\alpha_1(2) = 0.938 \quad , \quad \alpha_2(2) = 1$$

$$\alpha_1(3) = 1 \quad , \quad \alpha_2(3) = 1$$

On obtient un nouveau point de la courbe charge-déplacement :

$$F ( 9.84 \times 10^{-4}, 1.9375 )$$

Pour  $P_7 = 2$  , il n'y a pas de nouvelle rotule . A la convergence, les nouveaux efforts et coefficients suivants sont obtenus :

Barre	Mg	Md	N
1	24.404	12.31	0
2	-12.31	1.025	0
3	-1.025	-10.26	0

Les coefficients de la matrice de rigidité sécante sont :

pour la barre 1 :  $\mu_e(26) = 0.365$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

pour la barre 2 :  $\mu_e(26) = 0.462$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

pour la barre 3 :  $\mu_e = 1$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

et les coefficients d'encastrement pour chaque barre sont :

$$\alpha_1(1) = 0.434 \quad , \quad \alpha_2(1) = 1$$

$$\alpha_1(2) = 0.534 \quad , \quad \alpha_2(2) = 1$$

$$\alpha_1(3) = 1 \quad , \quad \alpha_2(3) = 1$$

On obtient le point G (  $1.5 \times 10^{-3}, 2$  )

Pour  $P_8 = 2.0625$  , les efforts et les différents coefficients à la 1ère itération sont les suivants :

Barre	Mg	Md	N
1	25.15	12.68	0
2	-12.68	1.019	0
3	-1.019	-10.64	0

.../...

Les coefficients de la matrice de rigidité sécante sont :

pour la barre 1 :  $\mu_e(1) = 0.954$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

pour la barre 2 :  $\mu_e(1) = 0.946$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

pour la barre 3 :  $\mu_e = 1$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

et les coefficients d'encastrement pour chaque barre sont :

$\alpha_1(1) = 0.965$  ,  $\alpha_2(1) = 1$

$\alpha_1(2) = 0.959$  ,  $\alpha_2(2) = 1$

$\alpha_1(3) = 1$  ,  $\alpha_2(3) = 1$

A la 23ème itération les efforts et coefficients deviennent :

Barre	Mg	Md	N
1	24.737	12.498	0
2	-12.498	0.233	0
3	-0.233	-12.03	0

Les coefficients de la matrice de rigidité sécante sont :

pour la barre 1 :  $\mu_e(23) = 0.259$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

pour la barre 2 :  $\mu_e(23) = 0.289$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

pour la barre 3 :  $\mu_e(1) = 0.997$  ,  $\mu_{t1} = 1$  et  $\mu_{t2} = 1$

et les coefficients d'encastrement pour chaque barre sont :

$\alpha_1(1) = 0.318$  ,  $\alpha_2(1) = 1$

$\alpha_1(2) = 0.352$  ,  $\alpha_2(2) = 1$

$\alpha_1(3) = 1$  ,  $\alpha_2(3) = 0.998$

Nous voyons que la troisième rotule est apparue au 2ème noeud de la barre 3 . Le degré d'encastrement de la poutre étant de 2 , la ruine est atteinte .

A la 26ème itération , nous obtenons le point H ( $2.37 \times 10^{-3}$ , 2.0625)

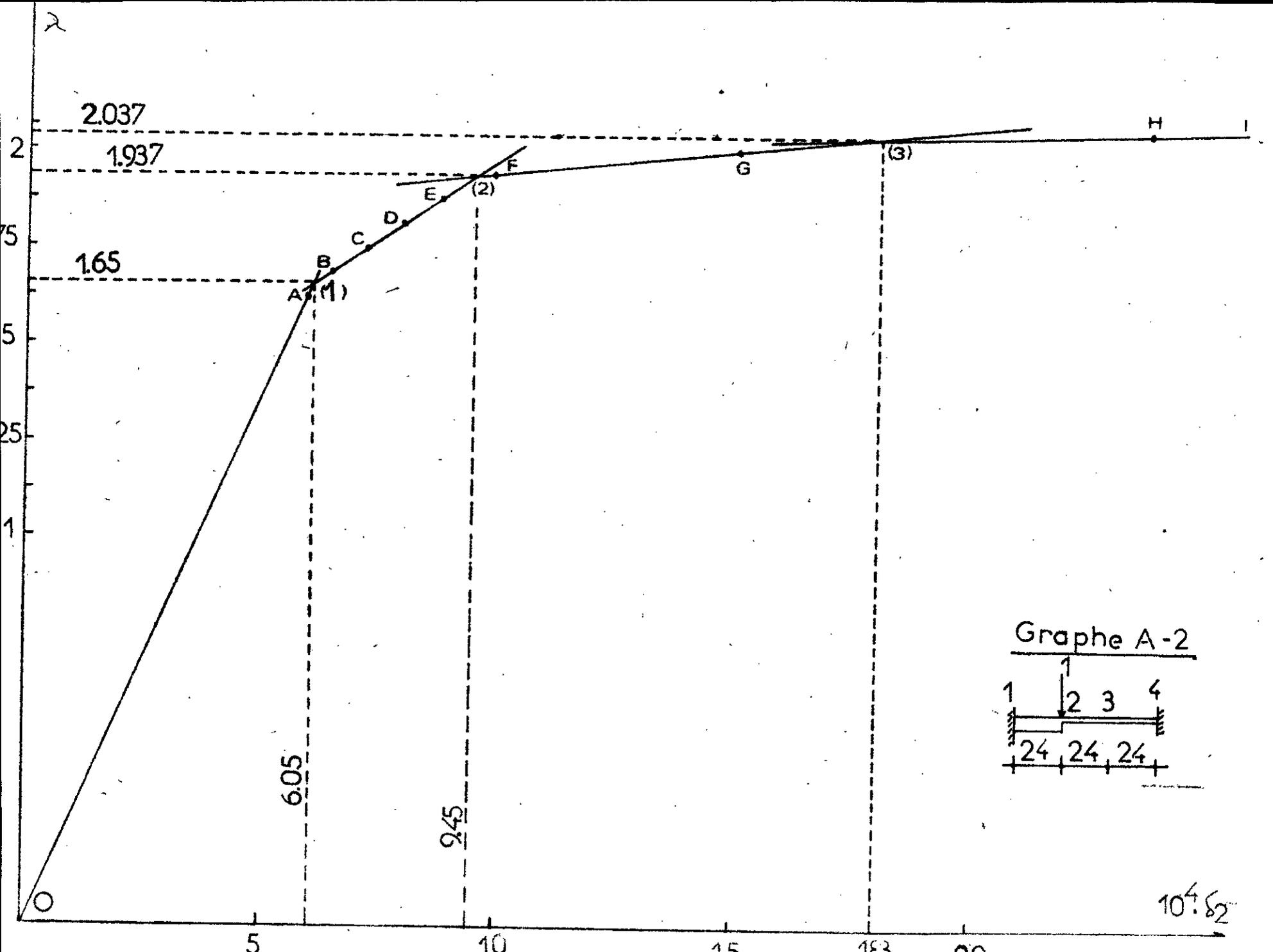
....

Pour  $P_9 = 2.125$  , on a , à la convergence , le point I ( $4.06 \times 10^{-3}$ ,  
2.125)

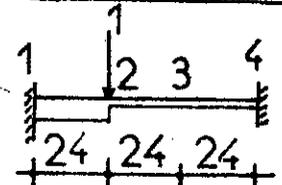
Le graphe A-2 donne la courbe charge-déplacement obtenue .

Quelques remarques concernant cet exemple :

- 
- 1°- On voit que la charge de ruine obtenue est très voisine de la valeur théorique (erreur relative de 1.85 %)
  - 2°- Cette légère différence s'explique par le fait que nous avons pris un critère de convergence en moments  $\delta M/M \leq 10^{-5}$  , avec un maximum de 25 itérations par pas de chargement . Ce qui fait qu'aux derniers chargements le moment dans la rotule plastique dépasse  $M_p$  à la 26ème itération (24.18 pour  $P=1.9375$  ; 24.4 pour  $P=2$  par exemple) . En utilisant un processus d'accélération de la convergence le nombre d'itérations (donc le volume de calcul) serait réduit et  $M_p$  serait plus exactement atteint ; on obtiendrait alors une valeur plus précise de la charge ultime .
  - 3°- Pour avoir les charges correspondant aux différentes rotulations , il suffit de prolonger :
    - pour la 1ère rotule (au 1er noeud de la barre 1): les droites OA et BE (voir le graphe A-2) ; celles-ci se coupent en 1 point correspondant à  $P=1.65$  .
    - pour la 2ème rotule (au 1er noeud de la barre 2): les droites BE et FG ; celles-ci se coupent en 1 point correspondant à  $P=1.937$  .
    - pour la 3ème rotule (au 2ème noeud de la barre 3): les droites FG et HI ; celles-ci se coupent en 1 point correspondant à  $P=2.037$  .



Graphe A-2



104.82

ANNEXE II

=====

CALCUL ELASTIQUE DES EFFORTS

=====

DESCRIPTION DU PROGRAMME UTILISE

=====

Le programme de calcul utilisé est basé sur la méthode matricielle des déplacements . Il permet de calculer toute structure plane sollicitée dans son plan et constituée de barres de sections invariables .

Cette méthode consiste essentiellement à résoudre un système d'équations linéaires de la forme :

$$[K].[U] = [F]$$

avec [K] : matrice de rigidité de la structure étudiée .

[U] : vecteur déplacements généralisés des différents noeuds de la structure (déplacements et rotations) ; ces déplacements vont constituer les inconnues du problème .

[F] : vecteur forces généralisées ( forces et moments ) agissant sur les noeuds de la structure .

Les principales étapes sont les suivantes :

1°- Description de la structure : On introduit :

-----  
-le nombre de noeuds , leurs coordonnées dans un repère lié à la structure .

-la différence maximale de numérotation entre 2 noeuds consécutifs . Cette différence permet de calculer la largeur de bande de la matrice de rigidité de la structure . Il s'agit de numéroter les noeuds de façon que cette différence soit minimale pour économiser le plus d'espace mémoire .

-le nombre de barres , le numéro du 1er noeud , du 2ème noeud et

.../...

les relaxations de ces noeuds ; à cet effet , il est possible d'introduire pour chaque noeud des degrés d'encastrement partiels par un nombre réel compris entre 0 et 1 (0:articulation ; 1:encastrement parfait) .

- l'inertie et la section de chaque barre constituant la structure
- les caractéristiques des matériaux utilisés .
- les différents types d'appuis .

2°-Construction de la matrice de rigidité de la structure :

---

Dans le cas d'une ossature plane et en négligeant les déformations d'effort tranchant , la matrice de rigidité d'une barre dans un repère lié à cette barre est (voir annexe III):

$$[Ke] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/L & 2EI/L \\ 0 & 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit une relation entre les efforts et les déplacements des noeuds de cette barre de la forme :

$$[Fe] = [Ke].[Ue] \quad \text{avec}$$

$$[Fe] = \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{bmatrix} ; \quad [Ue] = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ u_j \end{bmatrix}$$

où  $M_i$  : moment fléchissant au noeud  $i$  de la barre  $ij$

$M_j$  : " " " "  $j$  " " "

$N_j$  : effort normal dans la barre  $ij$

$\theta_i$  : rotation au noeud  $i$

.../...

$\theta_j$  : rotation au noeud j

$u_j$  : déplacement horizontal du noeud j

Supposons l'élément ij chargé uniquement aux noeuds . Dans un repère lié à la barre (repère local), on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} N_i &= -N_j \\ T_i &= (M_i + M_j)/L \\ M_i &= M_j \\ N_j &= N_j \\ T_j &= -(M_i + M_j)/L \\ M_j &= M_j \end{aligned}$$

relations que l'on peut écrire :

$$[Fe'] = [R].[Fe]$$

avec

$$[R] =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le passage au repère général de la structure s'effectue en introduisant une matrice de rotation de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & T_j \end{bmatrix} ; \quad T_i = T_j = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta$  : angle d'inclinaison de l'élément e par rapport à l'axe ox du repère global .

$$\text{On a alors la relation : } [Fg] = [T].[Fe']$$

Donc , le passage du vecteur [Fe] au vecteur [Fg] est effectué par l'intermédiaire d'une matrice géométrie : [Fg] = [A].[Fe]

avec :

$$[A] = [T].[R] = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta / L & -\sin\theta / L \\ -\sin\theta & \cos\theta / L & \cos\theta / L \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta / L & \sin\theta / L \\ \sin\theta & -\cos\theta / L & -\cos\theta / L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En résumé , la matrice de rigidité [Ke] d'une barre subit en général 2 préparations successives avant d'être utilisée pour l'assemblage de la matrice de rigidité globale [K] de toute la structure :

- une matrice [T] , destinée à exprimer [Ke] dans un espace ayant les dimensions de la structure .
- une matrice [R] , pour rapporter la matrice expansée précédente au système d'axes généraux liés à la structure .

Etablissons l'expression de la matrice [Kg] ainsi obtenue ; pour cela considérons les déplacements cinématiquement admissibles [U] et [u]. D'après le théorème des travaux virtuels nous avons :

$$[Fg]^T.[U] = [Fe]^T.[u] \quad ; \quad \text{or } [Fg] = [A].[Fe]$$

donc  $[Fe]^T.[A]^T.[U] = [Fe]^T.[u]$

et  $[u] = [A]^T.[U] \quad (1) \quad \text{mais } [Fg] = [Kg].[U]$   
 et  $[Fe] = [Ke].[u]$

donc  $[Kg].[U] = [A].[Ke].[u]$

d'où : (1)

$$[Kg] = [A].[Ke].[A]^T$$

L'assemblage est effectué en prenant une à une les matrices

.../...

de rigidité et en les éclatant dans un tableau (matrice de rigidité globale) dont la dimension est égale au nombre de degrés de liberté de la structure .

La superposition des matrices de rigidité élémentaires est effectuée en faisant la somme des éléments de ces matrices occupant la même position .

3°- Introduction des conditions aux limites :

Il s'agit d'introduire les différents déplacements imposés dans le système d'équations linéaire .

A cet effet , une des méthodes utilisées pour introduire le déplacement imposé  $U_i$  a consisté en l'introduction d'un nombre très grand  $N$  que l'on ajoutera à l'élément diagonal  $K_{ii}$  de la matrice de rigidité assemblée ; on aura ainsi l'équation :

$$N.U_i + \sum K_{ji}.U_j = N.U_i'$$

si  $N$  est plus grand que n'importe quel élément de  $K$  , on aura :

$$U_i \approx U_i'$$

Les différents types d'appuis sont introduits suivant leur état :

noeud type 111 ; on connait  $D_x$  ,  $D_y$  ,  $R$

" " 0 ; " "  $F_x$  ,  $F_y$  ,  $M_z$

" " 001 ; " "  $F_x$  ,  $F_y$  ,  $R$

" " 010 ; " "  $F_x$  ,  $D_y$  ,  $M_z$

" " 100 ; " "  $D_x$  ,  $F_y$  ,  $M_z$

" " 101 ; " "  $D_x$  ,  $F_y$  ,  $R$

" " 110 ; " "  $D_x$  ,  $D_y$  ,  $M_z$

" " 011 ; " "  $F_x$  ,  $D_y$  ,  $R$

- Où
- Dx : déplacement imposé suivant la direction ox
  - Dy : " " " " " oy
  - R : rotation imposée suivant oz
  - Fx : force suivant ox
  - Fy : " " oy
  - Mz : Moment d'axe oz

4°- Résolution du système d'équations linéaires :

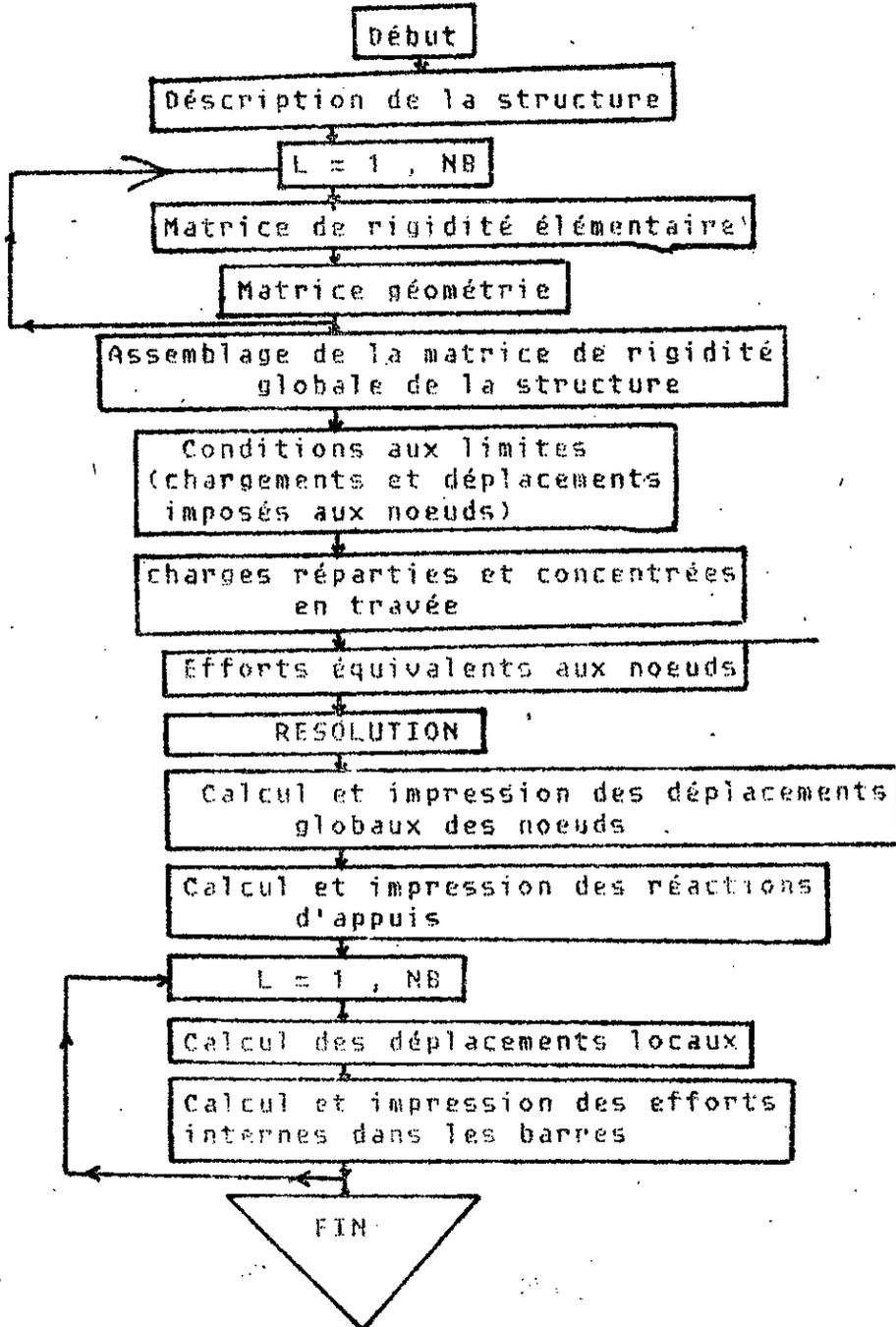
-----  
La résolution de ce système d'équations s'effectue en utilisant une des méthodes numériques connues : méthode de CHOLESKY , méthode de GAUSS , etc ...

On obtient alors les déplacements des différents noeuds de la structure .

Ces déplacements étant obtenus , il est facile de connaître les réactions d'appuis en introduisant ces déplacements dans le système d'équations  $[K] \cdot \{U\} = \{F\}$  .

Organigramme général du programme de calcul

=====



Definition des principales variables

---

NN : nombre total de noeuds de la structure (libres et fixes)

NB : " " " barres " " "

NC : " de cas de chargement

ND : différence de numérotation max. entre 2 noeuds consécutifs

LD : largeur de la 1/2 bande inf. ou Sup. de la matrice globale  
LD = 3.(ND+1)

N : nombre de D.D.L. (y compris les noeuds bloqués)  
N = 3.NN (3 d.d.l. par noeud)

N3 : nombre d'efforts dans la structure ( 3 efforts par barre :  
Mg , Md , N) ; N3 = 3.NB

Ey : Module d'Young

NU(NB,2) : connectivités des barres

VE(NB,2) : relaxations des noeuds

E, F : respectivement moment d'inertie (I) et aire de la section A

EI(NB), EA(NB) : respectivement rigidité de flexion et d'effort N

F(N) : déplacements globaux aux noeuds

SB(N3) : moments aux extrémités de la barre et effort normal

RS(N) : efforts nodaux : Fx, Fy, Mz (aux appuis: valeurs des réact.)

R1, R2, R3, R4 : réactions dues aux charges de travées

KG(N,LD) ou XG(N,LD) : matrice de rigidité globale de la struct.  
(stockée sous forme bande redressée à partir de la diagonale)

KF(3,3) : matrice de rigidité élémentaire

BL(3,6) : matrice géométrie

K1 : code du noeud chargé ou à déplacement imposé

ANNEXE III

=====

MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT BARRE

=====

Considérons un élément-barre i-j d'une structure. Les déformations des noeuds i et j sont : les rotations  $\theta_1, \theta_4$  à la 1ère extrémité i ; les rotations  $\theta_2, \theta_5$  à la 2ème extrémité j, l'allongement  $d_3$  de l'élément et les déplacements relatifs des 2 extrémités i et j (voir figure I) :

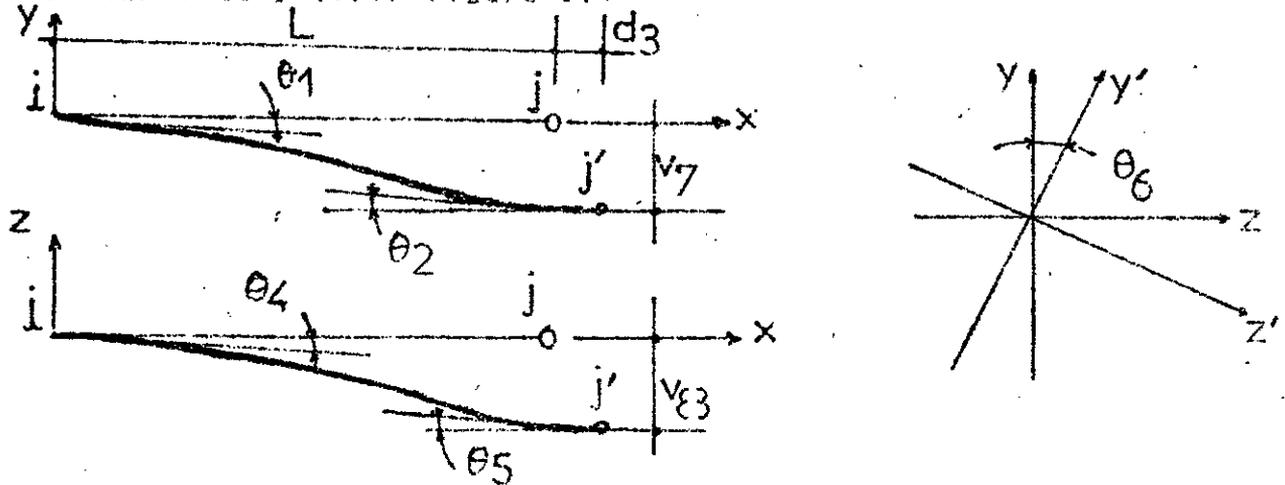


figure I

Le vecteur déplacements généralisés est alors :

$$[U] = [ \theta_1 \quad \theta_2 \quad d_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad v_7 \quad v_8 ]$$

Le vecteur forces généralisées associé est donné par la relation

$$[F] = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & \dots & K_{18} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & \dots & \dots & K_{88} \end{bmatrix} \cdot [U]$$

$K_{ij}$  : c'est la force généralisée (force ou moment) due à la déformation unitaire généralisée produite en j (allongement ou rotation), alors que les autres déformations sont nulles.

.../...

Evaluons par exemple les éléments de la 1ère colonne de la matrice de rigidité globale [K]. Ils représentent les forces aux extrémités de la barre i-j (voir figure II) causées par une rotation unitaire en i ( $\theta_i=1$ ) dans le plan  $ixy$ .

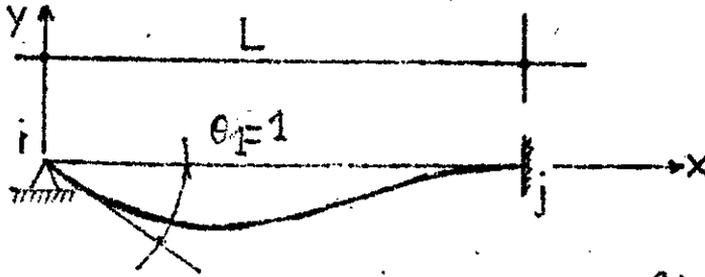


figure II

Soient : L : longueur de la barre i-j

A : section

$I_{yy}, I_{zz}, I_o$  : respectivement moment d'inertie par rapport à l'axe y, l'axe z et moment d'inertie polaire.

E, G : respectivement module d'élasticité long. et trans.

$$K_{11} = 4EI_{zz} / L \quad (\text{moment en i dans le plan } xy)$$

$$K_{21} = 2EI_{zz} / L \quad ( \quad " \quad " \quad j \quad " \quad " \quad " \quad )$$

$$K_{31} = 0 \quad (\text{force axiale dans la barre i-j})$$

$$K_{41} = 0 \quad (\text{moment en i dans le plan } xz)$$

$$K_{51} = 0 \quad ( \quad " \quad " \quad j \quad " \quad " \quad " \quad )$$

$$K_{61} = 0 \quad (\text{moment de torsion})$$

$$K_{71} = -6EI_{zz} / L^2 \quad (\text{effort tranchant dans le plan } xy)$$

$$K_{81} = 0 \quad ( \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad xz )$$

On obtient de la même façon tous les autres éléments.

.../...

On a ainsi la matrice [K] :

$$\begin{bmatrix}
 4EI_{zz} / L & 2EI_{zz} / L & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_{zz} / L^2 & 0 \\
 2EI_{zz} / L & 4EI_{zz} / L & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_{zz} / L^2 & 0 \\
 0 & 0 & EA / L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 4EI_{yy} / L & 2EI_{yy} / L & 0 & 0 & -6EI_{yy} / L^2 \\
 0 & 0 & 0 & 2EI_{yy} / L & 4EI_{yy} / L & 0 & 0 & -6EI_{yy} / L^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_0 / L & 0 \\
 -6EI_{zz} / L^2 & -6EI_{zz} / L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12EI_{zz} / L^3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -6EI_{yy} / L^2 & -6EI_{yy} / L^2 & 0 & 0 & 12EI_{yy} / L^3
 \end{bmatrix}$$

En fait, les déplacements  $v_7$  et  $v_8$  ne sont pas indépendants mais sont dus aux rotations à chaque extrémité de la barre. En les excluant, on a une matrice [K] simplifiée :

$$\begin{bmatrix}
 4EI_{zz} / L & 2EI_{zz} / L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2EI_{zz} / L & 4EI_{zz} / L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & EA / L & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 4EI_{yy} / L & 2EI_{yy} / L & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2EI_{yy} / L & 4EI_{yy} / L & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_0 / L
 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une structure plane rigide, nous obtenons la matrice de rigidité particulière [K] :

$$\begin{bmatrix}
 4EI_{zz} / L & 2EI_{zz} / L & 0 \\
 2EI_{zz} / L & 4EI_{zz} / L & 0 \\
 0 & 0 & EA / L
 \end{bmatrix}$$