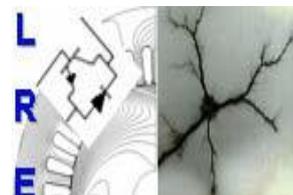


République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



École Nationale Polytechnique d'Alger  
Département d'Electrotechnique  
Laboratoire de Recherche en Electrotechnique  
[http : //lre.enp.edu.dz](http://lre.enp.edu.dz)



**MÉMOIRE DE MAGISTER**

*Spécialité*  
**ÉLECTROTECHNIQUE**

*Option*  
**Machines Électriques**

*Présenté par*  
**MABRAK Samir**  
(Ingénieur d'état en électrotechnique ENP)

**Modélisation des Machines Synchrones à  
Aimants Permanents avec Rotor Externe non  
Magnétique**

Soutenu le 15/ 03/2011, devant le jury composé de:

|                            |                              |              |                               |
|----------------------------|------------------------------|--------------|-------------------------------|
| <b>Mr. Omar TOUHAMI</b>    | <b>Professeur</b>            | <b>ENP</b>   | <b>Président</b>              |
| <b>Mr. Rachid IBTIOUEN</b> | <b>Professeur</b>            | <b>ENP</b>   | <b>Directeur du mémoire</b>   |
| <b>Mr. Kamel BOUGHRARA</b> | <b>Docteur d'Etat</b>        | <b>ENP</b>   | <b>Codirecteur du mémoire</b> |
| <b>Mr. Saïd MEKHTOUB</b>   | <b>Maître de Conférences</b> | <b>ENP</b>   | <b>Examineur</b>              |
| <b>Mr. Redhouane TAHMI</b> | <b>Maître de Conférences</b> | <b>ENP</b>   | <b>Examineur</b>              |
| <b>Mr. Larbi HADJOUT</b>   | <b>Maître de Conférences</b> | <b>USTHB</b> | <b>Examineur</b>              |

## *Remerciements*

Ce travail a été effectué au laboratoire d'électrotechnique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, sous la direction de Monsieur le Professeur **Rachid IBTIOUEN**. Qu'il soit remercié pour avoir accepté de diriger ce travail. Ses encouragements m'ont été d'un grand secours durant les périodes difficiles.

Je remercie Monsieur **Kamel BOUGHRARA**, Docteur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'avoir accepté de co-diriger ce travail de thèse. Je tiens à exprimer ma haute reconnaissance pour sa disponibilité à chaque sollicitation et sa contribution scientifique a été très fructueuse dans l'avancement de ce travail.

J'ai été profondément honoré que Monsieur **Omar TOUHAMI**, Professeur à l'ENP, ait accepté d'examiner ce travail et de présider ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur **Saïd MEKHTOUB**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique et à Monsieur **Redhouane TAHMI**, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour avoir honoré de leur présence le jury et d'avoir accepté d'être examinateurs de mon travail.

Que monsieur **Larbi HADJOUT**, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene pour l'honneur et le plaisir qu'il me fait d'avoir accepté de participer au jury de soutenance.

J'exprime aussi ma reconnaissance à mes collègues de la PG pour leur soutien et leur sympathie

*À mes chers parents  
À mes chers frères  
À Sami et Nasser  
À mes amis*

# *Table des matières*

## **Chapitre I : Généralités sur les Machines Synchrones à Aimants Permanents**

|   |    |
|---|----|
| I.1. Généralités sur les aimants permanents utilisés dans les MSAP  | 05 |
| I.1.1. Les différents types de matériaux pour aimants               | 06 |
| I.1.1.a. Les aimants métalliques                                    | 06 |
| I.1.1.b. Les ferrites   | 06 |
| I.1.1.c. Terres rares   | 07 |
| I.1.1.d. Les Plasto-aimants   | 07 |
| I.1.2. Matériaux magnétiques composites doux                        | 08 |
| I.1.3. Nouvelles topologies   | 08 |
| I.1.4. Application des aimants permanents dans les moteurs          | 09 |
| I.2. Structures des inducteurs des machines synchrones à aimants    | 10 |
| I.2.1. Structures à pôles lisses                                    | 10 |
| I.2.2. Structures à pôles saillants                                 | 13 |
| I.3. Avantages des machines synchrones à aimants permanents         | 13 |
| I.4. Domaines d'application   | 14 |
| I.5. Couple moyen et ondulations de couple                          | 14 |
| I. 5.1. Grandeurs liées à la minimisation des ondulations de couple | 14 |
| I.5.2. Couple de détente  | 15 |
| I.6. Fonctionnement en mode synchrone autopiloté                    | 15 |
| I.6.1. Inconvénients du fonctionnement autopiloté                   | 17 |
| I.7. Conclusion   | 17 |

## **Chapitre II : Calcul Analytique du Champ magnétique dans les MSAP en considérant le stator lisse**

|  |    |
|--|----|
| II.1. Modélisation des machines synchrones à aimants permanents    | 20 |
| II.1.1. Equations de Maxwell                                       | 21 |
| II.1.2. Formulation en potentiel scalaire magnétique ( $\varphi$ ) | 23 |
| II.2. Hypothèses et modèle d'étude                                 | 23 |
| II.3. Modélisation des sources                                     | 24 |
| II.3.1. Modélisation des aimants permanents                        | 24 |
| II.3.2. Modèles des courantes sources                              | 26 |
| II.4. Détermination des potentiels scalaires                       | 29 |
| II.4.1. Potentiel scalaire créé par les aimants                    | 29 |
| II.4.2. Potentiel scalaire créé par les courants statoriques       | 32 |
| II.5. Calcul de la force électromotrice                            | 33 |
| II.6. Calcul du couple développé par la machine                    | 33 |
| II.7. Conclusion   | 34 |

### **Chapitre III : *Modélisation par Eléments Finis des Machines à Aimants Permanents***

|   |    |
|---|----|
| III.1. Code de calcul par éléments finis adapté au calcul des MSAP            | 36 |
| III.2. Le Logiciel FEMM : Partie Préprocesseur                                | 36 |
| III.2.1 Le Solveur  | 36 |
| III.2.2. Formulation intégrale de la méthode des éléments finis               | 37 |
| III.2.3. Expression de la fonction approchée                                  | 37 |
| III.3. Exploitation de la méthode analytique et validation par éléments finis | 38 |
| III.4. Distribution des inductions dues aux aimants                           | 38 |
| III.5. Induction magnétique au centre des aimants                             | 39 |
| III.6. Calcul de la force électromotrice par la méthode des éléments finis    | 40 |
| III.6. 1. Calcul des flux   | 40 |
| III.7. Influence des paramètres géométriques sur le couple électromagnétique  | 44 |
| III.7.1. Taux d'ondulation  | 44 |
| III.7.2. Taux d'harmoniques de distorsion (THD)                               | 45 |
| III.8. Distribution des inductions dues aux courants                          | 46 |
| III.9. Conclusion   | 47 |

### **Chapitre IV : *Prise en Compte des Encoches Statoriques dans le Calcul du Champ par les Transformations Conformées***

|  |    |
|--|----|
| IV. 1. Calcul de la perméance d'entrefer   | 48 |
| IV. 1. 1. Transformations conformées des encoches  | 48 |
| IV. 1. 2. Forme du champ dans le plan S  | 51 |
| IV. 2. Analyse des performances électromagnétiques   | 53 |
| IV. 3. Etat de la saturation   | 54 |
| IV. 4. Calcul analytique de la force électromotrice  | 57 |
| IV. 5. Calcul analytique du couple électromagnétique   | 58 |
| IV. 6. Influence des paramètres géométriques de la machine sur les ondulations du couple électromagnétique | 60 |
| IV. 7. Calcul du couple de détente   | 61 |
| IV. 8. Influence des paramètres géométriques de la machine sur le couple de détente                        | 62 |
| IV. 8. 1. Influence de l'ouverture des aimants   | 62 |
| IV.9. Etude comparée de structures à faibles ondulations de couple et choix des solutions                  | 63 |
| IV. 9. 1. machines à nombre non entier d'encoches par pôle et par phase                                    | 63 |
| IV. 9.1. 1. règles de bobinage   | 63 |
| IV. 9.2. influence de la polarité sur le champ magnétique  | 66 |
| IV.10. Conclusion  | 67 |
| <b>Bibliographie</b>   | 72 |
| <b>Annexe</b>  | 77 |

---

---

## *Introduction Générale*

---

---

Un actionneur électromagnétique est un mécanisme permettant de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique. En fait le terme d'actionneurs électromécaniques est plus général car il peut très bien s'appliquer à des mécanismes couplant directement électricité. Des évolutions importantes ont eu lieu ces dernières années grâce aux progrès réalisés dans les domaines des matériaux (magnétiques, mécaniques, thermiques...) [IBT93, LAT06]. Toutes ces évolutions ont permis d'envisager des améliorations des performances des machines électriques. L'arrivée sur le marché des matériaux magnétiques (aimants permanents modernes) dont les caractéristiques se sont améliorées en terme de performances et de prix, a permis l'essor de la machine synchrone. En effet, la mise en place des aimants permanents au rotor pour créer le champ inducteur supprime les contacts glissants et les dispositifs à diodes tournantes nécessaires aux rotors bobinés. Les machines synchrones à aimants sont caractérisées par un couple massique et un couple volumique important par rapport aux machines synchrones à rotors bobinés. Toutes ces exigences impliquent nécessairement une évolution de la phase de conception. Ainsi, les concepteurs des machines à aimants sont amenés à trouver de nouvelles structures qui répondent aux exigences, de différentes applications industrielles, à s'intéresser à l'intégration de nouveaux types de matériaux. La machine à aimant permanent est la plus utilisée dans l'industrie pour les applications du type servomoteur (robotique, machines outils etc.) [LAT06, LER06]. Elle présente un bon rendement par rapport aux autres types de machines avec toutefois quelques inconvénients liés à son coût de fabrication qui est relativement important et il est difficile de la faire fonctionner en affaiblissement de champ pour monter en vitesse, le flux étant imposé par les aimants (la désaimantation doit rester limitée). Il faut signaler aussi qu'elle ne supporte pas des températures de fonctionnement élevées.

L'objectif de notre étude consiste à modéliser une structure de machine synchrone à aimant performante avec un poids réduit. Cette structure est à **rotor externe non magnétique** constituée de *plasto aimants* et d'une armature non magnétique fabriquée en Aluminium de masse volumique  $2700 \text{ kg/m}^3$  qui est moindre par rapport à celle du fer qui est de  $7870 \text{ kg/m}^3$ . Les aimants utilisés présentent une densité de  $5950 \text{ kg/m}^3$  (*plasto aimants*) *alors que celle des aimants de type Néodyme Fer Bor* et de  $7500 \text{ kg/m}^3$ . Le type d'aimant

utilisé est donc léger et moins coûteux ce qui répond à des applications qui exigent la construction de dispositifs Electrotechniques caractérisés par des performances technico-économiques élevées.

Notre manuscrit s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre porte sur une étude générale des machines synchrones à aimants permanents conçues avec différentes structures d'inducteurs. Les différents types de matériaux pour aimant disponibles et utilisés dans la fabrication des inducteurs des machines à aimants sont présentés. On rappelle aussi les avantages de la machine excitée par des aimants par rapport au cas d'une excitation classique.

Au deuxième chapitre, sous des hypothèses simplificatrices concordantes avec l'objectif visé, on développe un modèle d'étude bidimensionnel, basé sur la résolution analytique des équations de Maxwell et utilisant la formulation en potentiel scalaire pour calculer les champs magnétiques dus aux aimants et aux courants pour différentes structures de machine en considérant le stator lisse, que ce soit à rotors interne ou externe afin de sélectionner les structures les plus performantes. Les calculs sont effectués sous des critères mécaniques et thermiques fixés.

Le troisième chapitre est consacré au calcul des machines synchrones à aimants en utilisant un logiciel de calcul basé sur les éléments finis spécialement dédié aux machines électriques. Nous effectuons une comparaison des résultats obtenus à partir du modèle analytique développé au chapitre précédent avec ceux issus de la méthode des éléments finis. Afin de tenir compte de la structure réelle de la machine, le logiciel est exploité pour analyser l'état de saturation des structures envisagées.

Le dernier chapitre (le quatrième) est consacré à la considération de la géométrie réelle. La modélisation est effectuée en utilisant une technique dite « transformation conforme ». Celle-ci permet de calculer les grandeurs électromagnétiques de la machine dans le cas d'un stator encoché. La dernière partie de ce chapitre consiste à minimiser les ondulations du couple par différentes solutions.

---

## *Chapitre I*

---

# *Généralités sur les Machines Synchrones à Aimants Permanents*

---

### Sommaire

|   |    |
|---|----|
| I.1. Généralités sur les aimants permanents utilisés dans les MSAP  | 05 |
| I.1.1. Les différents types de matériaux pour aimants               | 06 |
| I.1.1.a. Les aimants métalliques                                    | 06 |
| I.1.1.b. Les ferrites   | 06 |
| I.1.1.c. Terres rares   | 07 |
| I.1.1.d. Les Plasto-aimants   | 07 |
| I.1.2. Matériaux magnétiques composites doux                        | 08 |
| I.1.3. Nouvelles topologies   | 08 |
| I.1.4. Application des aimants permanents dans les moteurs          | 09 |
| I.2. Structures des inducteurs des machines synchrones à aimants    | 10 |
| I.2.1. Structures à pôles lisses                                    | 10 |
| I.2.2. Structures à pôles saillants                                 | 13 |
| I.3. Avantages des machines synchrones à aimants permanents         | 13 |
| I.4. Domaines d'application   | 14 |
| I.5. Couple moyen et ondulations de couple                          | 14 |
| I. 5.1. Grandeurs liées à la minimisation des ondulations de couple | 14 |
| I.5.2. Couple de détente  | 15 |
| I.6. Fonctionnement en mode synchrone autopiloté                    | 15 |
| I.6.1. Inconvénients du fonctionnement autopiloté                   | 17 |
| I.7. Conclusion   | 17 |

---

L'électrotechnique moderne a été bouleversée par l'apparition sur le marché d'aimants de plus en plus performants et par le développement spectaculaire d'une électronique de puissance de mieux en mieux adaptée aux exigences industrielles. Les aimants à base de terres-rares sont très appréciés des constructeurs car ils permettent une réduction importante du poids et de l'encombrement de la machine pour une puissance donnée et d'avoir des couples volumiques et massiques élevés [ALL99]. Les matériaux pour aimants sont des substances ferromagnétiques ou ferrimagnétiques. Leur aimantation reste la même en présence de champs extérieurs défavorables car leur champ coercitif est assez important. Le meilleur des matériaux pour aimants du point de vue magnétique est celui qui possède non

seulement une induction rémanente ( $B_r$ ) élevée, mais également un champ coercitif ( $H_c$ ) le plus important (large cycle d'hystérésis). Les points représentatifs de l'état du matériau pour aimants se situent dans le deuxième quadrant du diagramme  $B(H)$  (**Fig. I.1**). La connaissance de la courbe de désaimantation d'un aimant est fondamentale en vue d'une application. L'utilisation d'aimants modernes dans les machines associées aux convertisseurs statiques est de plus en plus adoptée pour les entraînements électriques. Le dispositif machine synchrone à aimants autopilotée constitue une des solutions largement employées [**LAT06**].

Les performances de plus en plus élevées, le prix de revient compétitif et les avantages que présentent les matériaux pour aimants récents au niveau des systèmes électromagnétiques font d'eux un élément de base dans l'industrie moderne. L'évolution des matériaux pour aimant suit pratiquement une courbe exponentielle [**GUE91**].

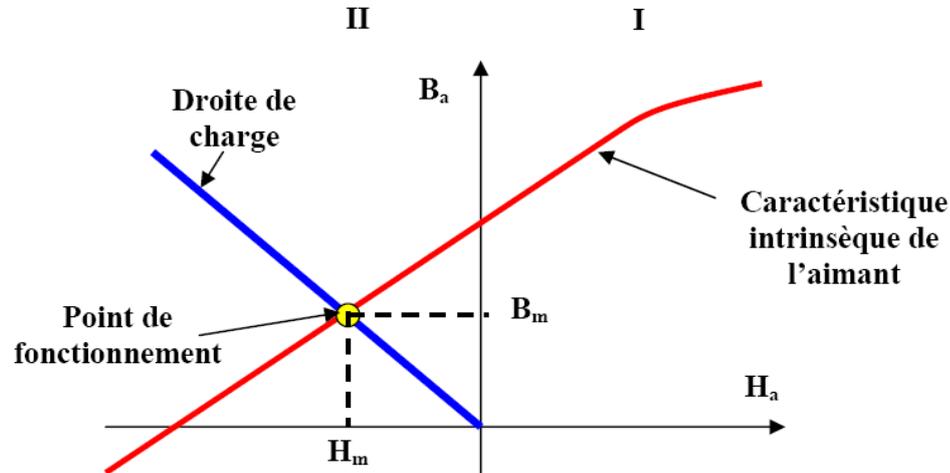
### **I. 1. Généralités sur les aimants permanents utilisés dans MSAP**

Il est difficile de répertorier tous les types et topologies des machines synchrones à aimants permanents comme il n'est pas aisé de comparer leurs performances [**LAT06**]. L'industrie des aimants permanents offre plusieurs catégories de matériaux qui se différencient par les procédés de leurs obtentions. Ces procédés ont un effet direct sur leurs caractéristiques magnétiques et mécaniques. Ces différences conduisent, selon l'application, à un choix d'un type d'aimants qui résulte le plus souvent de critères technico-économiques [**HAD94**]. Les aimants sont principalement caractérisés par leurs cycles d'hystérésis et plus particulièrement par la courbe de désaimantation du deuxième quadrant du plan  $B-H$  (**Fig. I-1**)

En ce qui concerne les aimants, les trois paramètres essentiels pour les machines électriques sont :

- L'induction rémanente  $B_r$ , qui indique les performances potentielles des aimants (plus  $B_r$  est important, plus l'aimant est performant).
- Le champ coercitif  $H_c$  qui donne un premier ordre de grandeur de mesure de la résistance de l'aimant à la démagnétisation durant les démarrages, les courts-circuits etc. Le champ limite admissible est celui pour lequel on peut faire travailler un aimant sous des conditions de fonctionnement variables sans que celui-ci perde une part importante de son aimantation de départ.

- Le troisième paramètre est le "produit d'énergie" $(-B.H)_{\max}$ . Cette énergie est disponible pour une utilisation dans l'espace qui environne l'aimant. Elle définit une sorte "d'énergie spécifique" [LEC].



**Fig. I. 1: Courbe de désaimantation des aimants.**

### I. 1. 1. Les différents types de matériaux pour aimants

Il existe trois familles de matériaux conduisant à l'essentiel des applications sur le marché des aimants permanents. Ces trois familles sont dans l'ordre d'apparition : les aimants métalliques, les ferrites et les terre rares [IBT93, LEC].

#### I. 1. 1. a. Les aimants métalliques

Il existe plusieurs types d'aimants métalliques. Les plus intéressants pour être utilisés dans les machines électriques sont ceux du type alliages ALINCO (alliages Fer-Aluminium-Nickel-Cobalt). Leur induction rémanente  $B_r$  est relativement élevée cependant la faible valeur de leur champ coercitif rend difficile leur utilisation au niveau des machines électriques. Le plus grave inconvénient est qu'en cours de fonctionnement, ils nécessitent généralement une réaimantation [GCP96, GEC, GCP96, LAT06].

#### I. 1. 1. b. Les ferrites

Les aimants ferrites sont fabriqués à partir de matériaux de faibles coûts [LER06]. Ce sont des mélanges d'oxydes de Fer et d'oxydes de Baryum ou de Strontium dont la densité d'énergie peut atteindre  $50 \text{ kJ/m}^3$ . Ces matériaux céramiques présentent une induction rémanente relativement réduite, comprise entre  $0.3 \text{ T}$  et  $0.4 \text{ T}$  pour un champ coercitif largement supérieur à celui des ALNICO (Fig. I. 3). L'utilisation des ferrites dans les machines électriques conduit généralement à des couples faibles [GEC, IBT01, LAT06].

### I. 1. 1. c. Terre rares

Les terres rares, **Samarium-Cobalt (SmCo5)** et les **Néodyme-Fer-Bore(Nd<sub>2</sub>Fe<sub>14</sub>B)**, sont beaucoup plus performants en termes de densité volumique d'énergie que les autres types d'aimants. Les **Samarium-Cobalt** autorisent une température de fonctionnement élevée mais ils sont plus coûteux en raison de la présence du Cobalt dans leurs compositions [**LER06, GCO94**]. Les **Néodyme-Fer-Bore** sont également des terres rares qui ont des performances légèrement supérieures à celles liées aux **Samarium-Cobalt** mais leur tenue en température est moins bonne (-0.1196 %/C pour le  $B_r$  et -0.55 %/C pour le  $H_c$ ) ce qui les rend sensible à la désaimantation à haute température. Ils sont cependant moins coûteux mais ils ont tendance à s'oxyder à cause du Fer qu'ils contiennent. Néanmoins, des progrès récents ont permis d'accroître leur tenue thermique ainsi que leur température maximale d'utilisation (jusqu'à 160 degrés C). Les procédés de fabrication de tous ces aimants sont lourds et seule une production en très grandes séries peut se justifier auprès des fabricants (la Chine domine actuellement le marché mondial des aimants) avec une réalisation d'une forme particulière avec des dimensions données [**GIR01**]. Certains aspects critiques des aimants de type Néodyme-Fer-Bore, comme la prédisposition à la corrosion, ont été aujourd'hui largement solutionnés grâce aux nouvelles technologies. Les nouveaux alliages des **aimants en NdFeb** sont en mesure de garantir une résistance presque parfaite face aux pertes irréversibles comme les **aimants de type Samarium-Cobalt**.

Les travaux réalisés jusqu'à maintenant ont montré que l'utilisation des aimants à hautes performances au niveau de l'inducteur d'une machine réduit les dimensions et le poids de celle-ci. Cela réduit également les pertes et augmente le rendement de la machine [**GAS04, GCO94**].

### I. 1. 1. d. Les plasto-aimants

Les plasto-aimants sont composés d'une poudre magnétique mélangée avec du plastique. Ils présentent plusieurs avantages pour différentes applications : vélo électrique, scooter électrique, fauteuil tout terrain, poussette électrique, brouette électrique etc. Les aimants qu'on vient coller le long de la périphérie sont remplacés par une seule pièce sous forme d'anneaux à coller (**Fig. I. 2**). De plus du fait de la possibilité d'avoir une magnétisation multipolaire à flux orienté (Halbach magnetization) nous n'avons pas besoin de mettre du Fer sous les aimants pour fermer le flux magnétique. Il est alors possible d'avoir un couvercle pour la machine avec armature rotorique en Aluminium. Les aimants plasto sont légers et ont

une densité de  $5950 \text{ kg/m}^3$ <sup>(\*)</sup>. Les plasto-aimants se caractérisent par leurs énergies volumiques élevées et ils sont de très bonnes sources d'excitation. En effet, ils deviennent des sources privilégiées lorsqu'on recherche compacité et augmentation de la puissance volumique [GIR01, GAS04].



**Fig. I.2: Exemple de formes de plasto-aimants**

### **I. 1. 2. Matériaux magnétiques composites doux**

Si les niveaux de saturation et les propriétés mécaniques des matériaux laminés sont très attractifs, le coût de fabrication, de recyclage ainsi que les pertes massiques à haute fréquence constituent encore une source de problèmes. Dans ce contexte, les progrès effectués dans le domaine des poudres magnétiques composites sont susceptibles de répondre dans un futur proche à ce type de contraintes technico-économiques. Ainsi d'un point de vue purement économique, leurs procédés de fabrication comptent un nombre d'étapes deux fois inférieur à celui des matériaux laminés. Par ailleurs, ces procédés permettent non seulement le mélange de composants complémentaires mais aussi le moulage par compression ou injection de pièces actives à structures complexes élargissant ainsi le champ d'investigation quant aux structures de machines envisageables. Ces innovations technologiques ouvrent enfin la voie à une optimisation poussée de la forme et du comportement des circuits magnétiques [ALL99, GIR01].

\* : <http://www.arelec.com/plasto-aimants.htm>

### I. 1. 3. Nouvelles topologies

Parmi les matériaux employés aussi dans les machines électriques, on peut citer la fonte, l'acier coulé, l'acier au Silicium (1%) pour les tôles isolées de haute perméabilité. On peut aussi utiliser de nouveaux matériaux de type composite (Fer-résine) pour remplacer les tôles. Ces matériaux sont réalisés à base de poudre de Fer et de résine. Ils ont une faible perméabilité relative ( $\mu_r = 300$ ), une faible valeur d'induction à saturation (1.4 T) par rapport aux autres Matériaux laminés. Ils sont faciles à usiner et on peut réaliser des formes très complexes avec les moules. Ce type de matériau permet de réaliser le rotor en une seule opération par moulage ou pressage ce qui conduit à un gain de temps dans la production de masse par rapport aux autres types de matériaux [LAT06, GAS04].

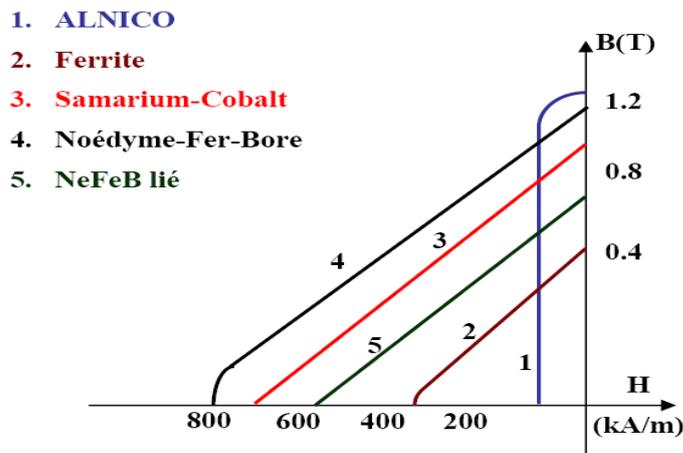


Fig. I.3 : Courbes de désaimantation des principaux types d'aimants [LAT06], [GEC].

Il faut souligner que les aimants permanents utilisés dans les machines électriques présentent une très grande rigidité magnétique (associée à une perméabilité magnétique dynamique proche de la perméabilité de l'air) qui garantit une grande résistance à la désaimantation nécessaire pour les fonctionnements démagnétisants dans les machines. Au regard des propriétés générales des différents aimants et compte tenu du couple désiré pour l'encombrement donné, nous avons privilégié les plasto aimants dans le cas de la structure étudiée. Cependant, pour un cahier des charges moins contraignant en terme d'ondulations du couple, l'utilisation de ferrites avec une structure à concentration de flux paraît être une alternative intéressante. Nous orientons donc notre étude vers un moteur synchrone à aimants permanents comportant des plasto aimants susceptible d'être utilisé au niveau d'un vélo moteur.

#### **I. 1. 4. Application des aimants permanents dans les moteurs**

L'application la plus importante des aimants permanents est dans les moteurs électriques. Avec le développement de ces matériaux et de l'introduction des terres rares, plusieurs travaux de recherche ont été orientés vers les dispositifs électroniques d'alimentation des moteurs électriques [GIR01, GAS04]. Les avantages de l'utilisation des aimants permanents au niveau des machines électriques sont principalement :

- Aucune excitation n'existe ce qui implique l'augmentation de l'efficacité énergétique,
- par conséquent un couple plus élevé,
- la présence d'aimant permanent performant implique l'augmentation de la densité de flux dans l'entrefer.

L'utilisation optimale du matériau aimant pour la conception des machines électriques relève toujours du compromis entre ses propriétés magnétiques, thermiques, mécaniques et le coût de la production totale. Le remplacement direct d'un matériau laminé par des aimants sans aucune modification structurelle et dimensionnelle du dispositif concerné ne peut être optimal en termes d'efficacité ou de rapport puissance/masse. En revanche, à partir d'une réflexion de base concernant plus la fonctionnalité requise par l'application que la synthèse d'une structure imposée, les aimants sont en mesure d'apporter des solutions prometteuses en termes de coût de fabrication, de modularité de la structure et de dissipation des pertes. La recherche systématique de nouvelles topologies de structures et l'adoption de nouveaux compromis entre les propriétés matérielles et les caractéristiques de l'application est la meilleure approche pour atteindre un optimum en termes de performances technique et économique.

#### **I. 2. Structures des inducteurs des machines synchrones à aimants**

Les différents types de machines synchrones à aimants ne se distinguent que par leurs inducteurs. Les aimants peuvent être montés en surface, insérés ou enfouis dans le Fer. Dans tous les cas, le stator reste, au moins dans son principe, le même. Il est souvent constitué d'un enroulement bobiné réparti dans les encoches du circuit magnétique statorique. Ce circuit magnétique est constitué d'un empilage de tôles dans lesquelles sont découpées des encoches parallèles à l'axe de la machine tournante.

On peut distinguer les machines synchrones à aimants permanents via deux grandes catégories d'inducteurs qui peuvent être à « pôles lisses » ou à « pôles saillants ».

### **I.2.1. Structure à pôles lisses**

La majorité des machines synchrones à aimants sont à aimants montés directement sur la surface du rotor. Les aimants sont plaqués sur un noyau magnétique et fixés grâce à des frettes au niveau de l'entrefer. Ces aimants peuvent avoir une aimantation radiale, azimutale ou mixte. Parfois, on rencontre une aimantation inclinée.

Les paramètres qui influent sur les performances de ce type de machines sont le sens de l'aimantation, l'épaisseur de l'aimant, son ouverture sur un pas polaire, l'épaisseur de l'entrefer, le type de matériaux utilisés, le mode d'alimentation adopté et la densité de courant injectée au niveau des encoches statoriques. La distribution de l'induction au niveau de l'entrefer varie fortement suivant le type d'inducteur [HAD94].

Dans notre étude, on s'intéresse aux calculs électromagnétiques par deux méthodes (analytique et numérique) des moteurs synchrones à aimants permanents montés en surface. Ces moteurs sont constitués d'une armature rotorique non magnétique où la perméabilité relative est égale à celle des aimants.

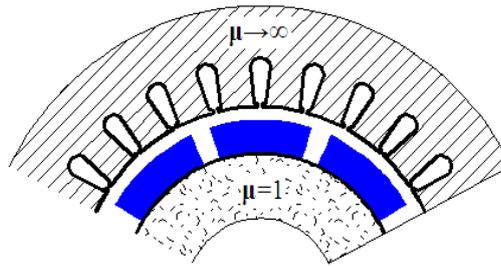
Trois grandes familles existent, les moteurs à rotor intérieur, à rotor extérieur ou à entrefer axial.

#### **✚ Machine à rotor intérieur amagnétique**

Le moteur à rotor intérieur a une configuration classique. Le rotor est constitué d'aimants assemblés sur une douille amagnétique [FRG97]. Le stator est similaire à celui des machines triphasées à induction. D'ailleurs, les stators des machines à induction sont parfois directement utilisés dans la fabrication des machines Brushless pour des raisons d'économie. La Figure 1.3 montre un exemple de moteur à rotor intérieur.

L'avantage majeur de cette structure est le ratio couple / vitesse qui est élevé. Néanmoins une difficulté de construction existe. Il faut être capable de maintenir les aimants, même à vitesse élevée. Le plus souvent, ils sont collés et frettés.

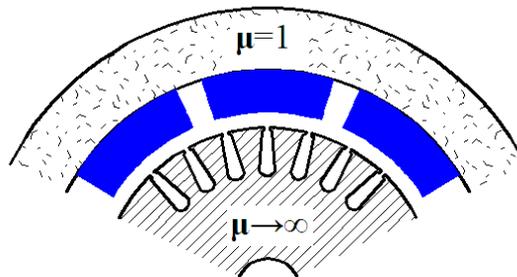
La puissance volumique d'une machine synchrone à aimants ferrites est à peu près équivalente à celle d'un moteur à induction, mais son rendement et son facteur de puissance sont généralement bien meilleurs.



**Fig. I. 3. Machine à rotor intérieur amagnétique**

✚ **Machine à rotor extérieur amagnétique**

La Figure I. 4 présente une portion transversale de la section d'une machine à rotor extérieur.



**Fig. I. 4. Machine à rotor extérieur amagnétique**

Le rotor est constitué d'aimants montés dans une cloche amagnétique. Dans cette configuration, il n'y a plus de problème pour maintenir les aimants car ils sont plaqués sur la cloche par l'action de **la force centrifuge**. Cette structure est fréquemment utilisée dans les applications de ventilations pour son faible coût et sa facilité de fabrication. Cependant, les machines à rotor extérieur ne sont utilisées que pour des applications à vitesse constante car le rotor mobile présente une inertie importante de par sa position externe.

✚ **Machine à entrefer axial**

Dans certaines applications à encombrement réduit, des machines à entrefer axial ont fait leur apparition (moteur de disque dur d'ordinateur, tables tournantes, ventilateur) [FRG97]. Les aimants sont montés sur un disque amagnétique mobile. Les bobines sont fixées en général sur le circuit imprimé avec les composants électroniques. Sous le circuit, une plaque métallique permet au champ de se refermer. Ces machines ont en général un grand nombre de pôles et fonctionnent à basse vitesse (inférieure à 1000 tr/min) afin d'éviter un échauffement excessif dû aux courants de Foucault.

Les avantages du moteur à entrefer axial sont un faible coût, une forme plate et une absence de couple réactif à faible vitesse.

### **I. 2. 2. Structure à pôles saillants**

La saillance permet en principe d'augmenter le couple et d'améliorer les performances de la machine tout en réduisant le volume des aimants [HAD94]. On distingue plusieurs catégories d'inducteurs à pôles saillants.

- Structures avec pièces polaires et concentration de flux ;
- Structures avec pièces polaires sans concentration de flux ;
- Structures à aimants insérés dans l'armature rotorique ;
- Structures à aimants internes.

Cette dernière structure offre un certain nombre d'avantages parmi lesquels [IBT93] :

- des rotors robustes qui permettent de plus grandes vitesses de rotation.
- Une adaptation à des puissances plus importantes.
- De bonnes performances, surtout avec les aimants du type  $N_aFeB$ .

### **I. 3. Avantages des machines synchrones à aimants permanents**

Les avantages associés à l'utilisation des machines asynchrones et synchrones à aimants permanents ne sont pas à démontrer en termes de robustesse et de fiabilité. Aujourd'hui, le moteur synchrone à aimants est de plus en plus utilisé dans les systèmes d'entraînement à vitesse variable à hautes performances. Son choix dans ce domaine est devenu attractif et concurrent par rapport aux moteurs à courant continu et aux moteurs asynchrones. Cela est dû principalement à ses avantages multiples. On cite principalement [GIR01, AME05, BEL00]:

- Facteur de puissance et rendement élevés par rapport à ceux des moteurs asynchrones.
- Robustesse incontestée par rapport au moteur à courant continu.
- Puissance massique élevée et précision de sa commande.
- Développement de la technologie des composants de l'électronique de puissance. L'apparition des processeurs numériques à fréquence élevée et à forte puissance de calcul permettent de surmonter ainsi le problème de l'implantation d'algorithmes de commande de l'onduleur assurant l'auto pilotage du MSAP.

- Augmentation de la constante thermique et de la fiabilité à cause de l'absence de contacts bagues-balais dans ces machines.
- Aucune source d'énergie externe n'est nécessaire (rusticité des aimants).

#### **I. 4. Domaines d'application**

Le moteur synchrone à aimants permanents est utilisé dans une large gamme de puissance allant de quelques Watts (servomoteurs) à plusieurs mégaWatts (systèmes de propulsion des navires) dans des applications aussi diverses que le positionnement, la synchronisation de l'entraînement à vitesse variable et la traction.

- Il peut fonctionner comme compensateur synchrone.
- Il est utilisé pour les entraînements qui nécessitent une vitesse de rotation constante, tels que les grands ventilateurs, les compresseurs et les pompes centrifuges.
- L'existence de champ magnétique en l'absence de courant est mise à profit pour la réalisation des capteurs, par exemple des capteurs de proximité.

#### **I. 5. Couple moyen et ondulations de couple**

L'étude consiste à dimensionner les structures de machines destinées à l'utilisation industrielle en respectant les contraintes liées à cette utilisation. Pour ce faire, il est important d'identifier et de formuler les contraintes inhérentes à chaque structure. Pour le moteur à aimants permanents, les principales contraintes résident dans la minimisation des ondulations du couple et le dimensionnement des aimants pour parer aux éventuels risques de démagnétisation des aimants lors d'un fonctionnement anormal (court-circuit par exemple) et des contraintes de températures.

Les structures des machines à aimants permanents se distinguent par la façon avec laquelle sont disposés les aimants au rotor [HAN94, LAC09, PUI87]. Les rotors avec pièces polaires présentent un couple de reluctance plus élevé par rapport au rotor sans pièces polaires. On peut diminuer ce couple en augmentant le nombre de paires de pôles de la machine car l'effet de l'anisotropie diminue [LAJ81, KEC96].

### I. 5. 1 Grandeurs liées à la minimisation des ondulations de couple

- Le rapport de la largeur des encoches par rapport au pas dentaire est déterminé pour réduire les ondulations dues au couple de détente [TLS88].
- La largeur angulaire des aimants est choisie afin de minimiser certains harmoniques de la fem. [CTB89].
- Les moteurs à nombre d'encoches par pôle et par phase ( $q$ ) fractionnaire permettent de réduire les ondulations du couple de détente. Les variations de la réluctance dues à la présence des encoches sont moins importantes car la périodicité des encoches n'est plus un multiple de la périodicité des aimants. L'intervalle de variation du nombre de paires de pôles est limité par la faisabilité mécanique de l'actionneur à cause du diamètre maximum admissible [TLS88, PPS99].

Dans le chapitre suivant, nous introduisons une modélisation analytique dont l'objectif est de mettre en relation les grandeurs magnétiques et géométriques de la machine. Un choix judicieux des paramètres physiques permet alors de déterminer toutes les performances définissant la machine.

### I. 5. 2. Couple de détente

Il est généré par l'interaction des aimants rotorique avec la variation de l'effet de saillance des dents statoriques (Fig. I.3) qui permettent de loger les conducteurs de l'enroulement d'induit (entrefer variable). Les forces tangentielles créées par l'interaction des aimants rotoriques avec la denture statorique sont à l'origine de ce couple, le plus souvent indésirable [LAP92]. Ce dernier constitue l'une des principales sources des fluctuations de couple dans les machines synchrones à aimants permanents.

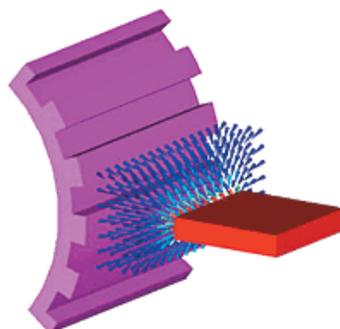


Fig. I. 3: Effet de l'interaction entre l'aimant et les dents statoriques.

Le couple de détente peut être diminué à l'aide de plusieurs méthodes et techniques, entre autres :

#### **l'inclinaison des encoches statoriques**

La solution la plus efficace pour diminuer le couple de détente dans les PMSM consiste à incliner les encoches du stator [BIB02, LTT06, DEO96, JAH96]. Plusieurs études ont montré que l'inclinaison des encoches d'un pas dentaire réduit le couple de détente à des niveaux très bas [BOU97, COL95]. Malgré l'efficacité de cette méthode, elle pose des problèmes de construction.

#### **Inclinaison des aimants du rotor**

Cette méthode permet de réduire substantiellement le couple de détente et les harmoniques de la f.é.m. Ceci ne peut être pratique vu que le coût d'usinage des aimants permanents est élevé [MEJ01, OUA97].

#### **Choix de l'ouverture des aimants**

L'ouverture des aimants joue un rôle très important en ce qui concerne la minimisation de l'amplitude du couple de détente. Cependant, il est noté que la variation de cette ouverture affecte aussi le couple électromagnétique de la machine. Ceci, conduit à choisir une ouverture optimale qui permet de faire un compromis entre la minimisation du couple de détente sans affecter considérablement le couple électromagnétique [ISS93, IBT93].

#### **Autres méthodes pour l'atténuation du couple de détente**

Puisque la variation de la perméance de l'entrefer magnétique, provoquée par la denture statorique, est le facteur important dans la génération du couple de détente, plusieurs techniques ont été envisagées pour la diminuer. Celles-ci, consistent en [ZHO00].

- Minimisation de l'ouverture des encoches statoriques afin de diminuer la variation de la perméance des encoches.
- L'addition de petite encoches ou de dents dans la culasse statorique. Ceci permet de repousser les harmoniques de cette perméance vers les hautes fréquences.
- L'adoption d'un nombre fractionnaire d'encoches par pôle [LGS88, DE096].

## I.6. Fonctionnement en mode synchrone autopiloté

L'autopilotage de la machine synchrone et sa commande en couple à vitesse variable, conduisent à un fonctionnement analogue à celui des machines à courant continu classiques. Le principe de l'autopilotage est d'asservir la vitesse du champ statorique à celle du rotor en maintenant un angle constant entre les deux. Cet angle s'appelle angle d'autopilotage (angle interne de la machine souvent noté par  $\delta$ ). L'alimentation et l'autopilotage des machines synchrones ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche dont le but est d'obtenir un couple uniforme et constant dans une large gamme de vitesse et d'établir une commande simple par microprocesseur pour concurrencer les moteurs à courant continu. On peut classer, en première approche, ces machines en deux familles selon l'allure des f.é.m. :

- Les machines à courant continu sans collecteurs (Brushless DC Motor) dites à f.é.m. trapézoïdales pour lesquelles la forme de courant la plus appropriée (celle qui minimise les ondulations sur le couple) est de type créneaux à  $120^\circ$  (ou  $180^\circ$ ).

- les machines dites à f.é.m. sinusoïdales. Celles-ci sont constituées d'un bobinage dont les spires sont réparties de manière à ce que la densité de courant, aux discontinuités des encoches près, suive une évolution sinusoïdale [MLI] [DAH96]. La forme du courant la plus appropriée est la forme sinusoïdale. Deux types de structures de convertisseurs statiques permettent de réaliser ce mode d'alimentation : les commutateurs de courants et les onduleurs de tension contrôlés en courant :

### a. Commutateur de courants

Ce sont des convertisseurs statiques relativement simples à réaliser ; on assure leur commutation par les tensions aux bornes de la machine. Cependant, pour que cette commutation ait lieu, il faut qu'au moment où elle se produit, le courant soit déphasé en avant par rapport à la f.é.m. Une procédure de contrôle particulière est nécessaire pour le démarrage et pour les faibles vitesses.

### b. Onduleur de tension contrôlé en courant

L'association d'un onduleur de tension contrôlé en courant et d'une machine synchrone à aimant ne comportant pas de possibilités de circulation de courants induits au rotor, autorise d'excellentes performances en régime dynamique limitées uniquement par la constante de temps électrique de l'induit et la technique de contrôle employée.

### I.6.1. Inconvénients du fonctionnement autopiloté

Le grand inconvénient est l'ondulation du couple dû à :

- La forme d'onde de l'induction dans l'entrefer sachant que cette induction est fonction de la structure de l'inducteur. Cependant, on peut réduire ces ondulations en choisissant le type d'inducteur avec prise en compte du mode d'alimentation.

- La reluctance introduite par la denture statorique. On peut réduire cet effet par utilisation de machines à enroulements dans l'entrefer.

- Au mode d'alimentation adopté. Ainsi, pour réduire les ondulations dues à l'alimentation on améliore la commande en utilisant des techniques de contrôle de plus en plus performantes.

## **I. 7. Conclusion**

L'utilisation optimale du matériau ferromagnétique pour la conception des machines électriques relève toujours du compromis entre ses propriétés magnétiques, thermiques, mécaniques et le coût de la production totale.

Les performances des machines synchrones à aimants dépendent essentiellement des dimensions géométriques qui déterminent la forme de l'induction au niveau de l'entrefer, du volume, de la structure et du type d'aimants utilisés.

Le travail décrit dans ce chapitre est effectué dans l'optique d'un état au niveau de la conception des moteurs synchrones à aimants permanents à faibles ondulations du couple. Nous avons tout d'abord listé les techniques permettant de minimiser les ondulations de couple et dégager ainsi les solutions à mettre en œuvre pour concevoir des moteurs à faibles ondulations de couple.

On a donc présenté dans ce chapitre la machine synchrone à aimants permanents, ses avantages et ses domaines d'application. Dans notre travail nous nous intéressons aux machines synchrones à aimants montés sur la surface rotorique non magnétique. Ce type de machines présente généralement un large entrefer magnétique. Ces machines nécessitent donc l'utilisation d'aimants adaptés (**Plasto-aimants**).

## Chapitre II

---

### *Calcul Analytique du Champ magnétique dans les MSAP en considérant le stator lisse*

---

#### Sommaire

---

|  |    |
|--|----|
| II.1. Modélisation des machines synchrones à aimants permanents    | 20 |
| II.1.1. Equations de Maxwell                                       | 21 |
| II.1.2. Formulation en potentiel scalaire magnétique ( $\varphi$ ) | 23 |
| II.2. Hypothèses et modèle d'étude                                 | 23 |
| II.3. Modélisation des sources                                     | 24 |
| II.3.1. Modélisation des aimants permanents                        | 24 |
| II.3.2. Modèles des courantes sources                              | 26 |
| II.4. Détermination des potentiels scalaires                       | 29 |
| II.4.1. Potentiel scalaire créé par les aimants                    | 29 |
| II.4.2. Potentiel scalaire créé par les courants statoriques       | 32 |
| II.5. Calcul de la force électromotrice                            | 33 |
| II.6. Calcul du couple développé par la machine                    | 33 |
| II.7. Conclusion   | 34 |

---

Une démarche de pré- dimensionnement, basée sur un modèle analytique, est mise en œuvre. Ce modèle consiste à appliquer le théorème de superposition sur le champ magnétique d'excitation en scindant la structure en deux domaines d'étude caractéristiques. Dans un premier temps, on considère l'ensemble rotor-entrefer en absence des courants. Dans un second temps, on se propose de résoudre l'équation uniquement en tenant compte du stator à la périphérie duquel est distribuée une couche de courants superficiels. La résolution du problème complet consiste alors à sommer les champs magnétiques d'excitation précédemment obtenus.

## **II. 1. Modélisation des machines synchrones à aimants permanents**

Le dimensionnement des machines électriques consiste à manipuler des équations mathématiques reliant deux types de paramètres : les paramètres descriptifs du système (grandeurs géométriques et constitutives) et les paramètres caractérisant le fonctionnement du système (par exemple la densité surfacique de courant). Il faut donc pouvoir évaluer quantitativement toutes les variables qui caractérisent le fonctionnement du moteur. Le dimensionnement correspond en fait à l'opération inverse : le cahier des charges définit un fonctionnement à réaliser et nous devons déterminer les grandeurs descriptives du moteur. On parle ainsi de problème direct pour la modélisation et de problème inverse pour le dimensionnement. S'il est nécessaire de disposer d'un modèle de la structure, l'opération de dimensionnement nécessite de mettre au point une méthodologie pour réaliser l'inversion du modèle.

Le dimensionnement du moteur comporte généralement deux étapes principales :

✚ La première étape du dimensionnement consiste en un prédimensionnement sur la base d'un modèle analytique. Il s'agit des solutions symboliques exactes des équations physiques du moteur en faisant au préalable des hypothèses simplificatrices, concordantes avec l'objectif visé, sur la structure et les propriétés physiques de celui-ci.

Les modèles analytiques présentent les avantages suivants :

- rapide et permettent d'explorer au maximum l'espace des solutions dans un temps très court.
- favorise une grande variation de tous les paramètres du modèle dans les limites de validité des équations ce qui permet par exemple de dimensionner des moteurs de puissances très différentes dont tous les paramètres varient dans de grandes proportions.
- Les équations symboliques contiennent un lien explicite entre tous les paramètres et les phénomènes physiques.

Ils sont adaptés aux calculs des performances moyennes, mais peu aux calculs de phénomènes locaux.

✚ La deuxième étape du dimensionnement fait appel aux modèles numériques. Les équations physiques de base du moteur sont résolues avec un faible niveau d'hypothèses en utilisant des algorithmes numériques lourds. La méthode des éléments finis est un des exemples de méthodes numériques très utilisées permettant la prise en compte des phénomènes électriques, magnétiques, mécaniques ou thermiques. Ces méthodes reposent en

général sur la décomposition de la structure en petites régions sur lesquelles on suppose une évolution donnée du champ. En regroupant les équations de toutes les régions et en utilisant les conditions aux limites du problème, on peut trouver une valeur approchée du champ dans tous les nœuds et par la suite dans toutes les mailles de la structure.

Ces modèles sont d'autant plus précis que le maillage de la structure est fin. Ils se présentent le plus souvent sous la forme de logiciels génériques dans lesquels on ne fait que décrire la structure géométrique et ses propriétés physiques. En revanche, ils n'offrent pas de lien explicite entre les paramètres mais permettent une analyse détaillée du comportement électromagnétique du moteur prédimensionné et la détermination de ses caractéristiques électromagnétiques (fem, couple électromagnétique, couple de détente, harmoniques de fem,...).

Conformément à cette démarche, nous mettons au point une procédure de prédimensionnement sur la base d'un modèle analytique dont l'objectif est d'obtenir directement une machine physiquement cohérente. Ensuite, nous complétons notre travail par une validation des performances de la solution obtenue par calcul numérique du champ.

Le calcul du champ magnétique dans les machines électriques a un rôle très important car son calcul affecte directement la taille et les performances de la machine. Il y a deux types de sources communes du champ magnétique. Il y a celui créé par le courant de l'enroulement statorique et celui créé par l'aimant permanent monté sur la surface rotorique. Dans notre travail, l'armature du rotor est en Aluminium, sa perméabilité magnétique est donc égale à celle des aimants [IBT98, BOU08, ZAR04, BNO90].

Le type de machines que nous étudions est représenté sur la Fig. (II.1). Ces machines sont constituées de deux parties principales :

**Stator** : Le circuit magnétique du stator est constitué par un empilement de tôles fines en acier sur lesquelles sont taillées les encoches statoriques logeant les conducteurs des enroulements. Les conducteurs au niveau des encoches permettent de créer dans l'entrefer le champ magnétique à l'origine de la conversion d'énergie électromagnétique.

**Rotor** : Constitué d'un aimant monté sur la surface rotorique et d'une armature non magnétique caractérisée par une perméabilité égale à celle des aimants, pour intérêt technico-économique. L'aimantation dans ce type de machines peut être sinusoïdale ou mixte.

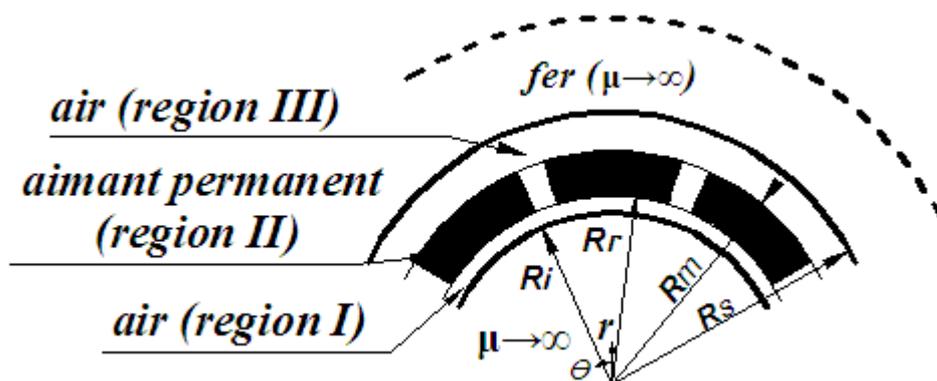


Fig. II.1 Structure de la machine étudiée.

### II. 1. 1. Equations de Maxwell

Le fonctionnement des machines électriques est basé essentiellement sur les phénomènes de distribution spatio-temporels du champ magnétique. L'analyse de ces phénomènes conduit à la résolution des équations de Maxwell dans un domaine tridimensionnel. En général, la modélisation électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents s'effectue à partir d'un modèle magnétostatique justifié par la nature des phénomènes électromagnétique. Celle-ci est traduite par les équations suivantes [MBM10, IBT93, IBT02, BOU08, ZAR04, HAD06, YOU03, PKA03, ALH05] :

• Conservation de flux magnétique :  $div(\vec{B}) = 0$  (II.1)

• Les deux équations de couplage :

Equation de Maxwell Ampère  $rot(\vec{H}) = \vec{J}$  (II.2)

Equation de Maxwell Faraday :  $rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (II.3)

Propriétés des matériaux et des milieux

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (II.4)$$

où  $\mu_0$  représente la perméabilité magnétique du vide et  $\mu_r$  la perméabilité relative du milieu considéré.

Les aimants magnétiquement rigides, actuellement employés dans les machines électriques, possèdent une caractéristique de désaimantation linéaire dans la zone normale d'utilisation [LEC]. Pour les milieux aimantés cette dernière équation est donnée par

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{M} \quad (II.5)$$

où  $B$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $E$  et  $M$  désignent respectivement l'induction magnétique, l'excitation magnétique, la densité volumique de courant, le champ électrique et l'aimantation des aimants (induction rémanente en présence des aimants).

### II. 1. 2. Formulation en potentiel scalaire magnétique ( $\varphi$ )

Cette formulation est adaptée surtout lorsque l'excitation est engendrée par des aimants ou par un champ extérieur appliqué à une partie du domaine [MBM10, ZAR04, AME05, RAG08, PKA03]. Dans ces conditions l'Equation (II.2) s'écrit ainsi :

$$\text{rot}(\vec{H}) = 0 \quad (\text{II.6})$$

De l'Equation (II.6), qui traduit le fait que  $\vec{H}$  est irrotationnel, on en déduit l'existence d'un potentiel scalaire magnétique  $\varphi$  tel que :

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \quad (\text{II.7})$$

La combinaison des Eqs. (II.1), (II.5) et (II.7) conduit à l'équation générale suivante :

$$\text{div}(\mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)) = \text{div}(\vec{M}) \quad (\text{II.8})$$

dont l'association à des conditions aux limites appropriées au domaine d'étude permet de déterminer la distribution du champ magnétique [OUA97, YOU03, PKA03]. Cette formulation est très utilisée pour des calculs de champ en trois dimensions afin de déterminer les effets d'extrémités et les inductances de fuite des têtes de bobines dans les machines électriques.

Le calcul du champ revient donc à résoudre des équations aux dérivées partielles du potentiel scalaire dans l'intervalle  $[R_i, R_s]$ . Le principe de la méthode de résolution consiste à rechercher les expressions analytiques du potentiel scalaire dans les différentes zones du domaine d'étude. Les champs produits par les différentes sources, fonctions de la variable d'espace et du temps  $(\theta, t)$ , sont calculés séparément.

### II. 2. Hypothèses et modèle d'étude

Le modèle d'étude est bidimensionnel. La machine étudiée est donc supposée suffisamment longue pour que les effets de l'extrémité puissent être négligés et que l'étude puisse être effectuée dans un plan radial [BOU08, MBM10, ZAR04, LAC09, YOU92]. Le potentiel scalaire  $\vec{\varphi}$  et la densité de courant  $\vec{J}$  n'auront dans ce cas qu'une seule composante dirigée suivant l'axe (Oz) de sorte que :

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j(x, y) \end{bmatrix}, \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(x, y) \end{bmatrix} \text{ et } \vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\varphi}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{a}_\theta \quad (\text{II.9})$$

Les expressions des inductions radiales et tangentielles se déduisent à partir de :

$$H_r = -\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r} \quad \text{et} \quad H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\theta} \quad (\text{II.10})$$

Pour définir la répartition du champ, plusieurs méthodes de résolution ont été proposées. Parmi ces méthodes, les plus répandues utilisent les développements en série de Fourier des courants sources; les aimants étant modélisés par des densités fictives de courants [OUA97].

Pour analyser les performances de la structure étudiée suivant l'objectif visé, nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Modèle bidimensionnel en coordonnées polaires.
- La perméabilité du fer statorique est supposée très grande  $\mu_{\text{fer}} \rightarrow \infty$ .
- Les courants de Foucault dans le fer sont négligé par suite du feuilletage des culasses.
- La caractéristique de désaimantation de l'aimant est supposée linéaire. Ce qui est le cas des aimants modernes utilisés dans les machines électriques.
- On suppose que la machine est suffisamment longue pour pouvoir négliger les effets de bout et on considère que le problème est invariant par translation suivant le plan d'étude. Ce qui ramène l'étude de la machine se résumer à l'étude de sa section axiale.

### II. 3. Modélisation des sources

Le potentiel scalaire  $\bar{\varphi}$  est la résultante du potentiel scalaire créé par les aimants permanents et par les courants de sources. Chaque source est représentée par un modèle approprié.

#### II. 3. 1. Modélisation des aimants permanents

Le rotor de la machine met en œuvre  $2p$  pôles identiques symétriques constitués d'aimants sous forme de "tuiles fractionnées" ou non et portant une aimantation  $M$ .

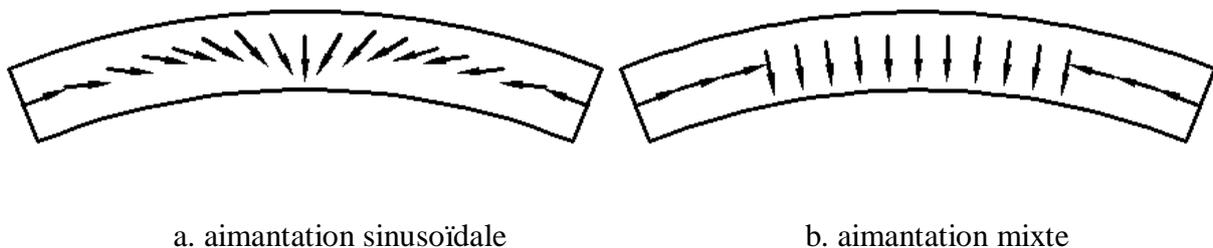


Fig. II. 2. Différents types d'aimantation.

Le vecteur d'aimantation s'exprime en coordonnées polaire comme suit [HAD06, ZAR04]:

$$\vec{M} = M_r \vec{a}_r + M_\theta \vec{a}_\theta \quad (\text{II.16})$$

où  $M_r, M_\theta$  représentent respectivement les composantes radiale et tangentielle de l'aimantation.

Elles sont exprimées par :

$$\begin{cases} M_r = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} M_{rn} \cos(np\theta) \\ M_\theta = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} M_{\theta n} \sin(np\theta) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

où  $p$  désigne le nombre de paires de pôles et où  $\theta$  est l'écart angulaire relatif au centre d'un aimant,  $M_{rn}$  et  $M_{\theta n}$  sont respectivement les amplitudes des harmoniques de rang  $n$  des composantes  $M_r$  et  $M_\theta$ .

- Pour une aimantation sinusoïdale :

$$M_m = \frac{4M\alpha_p \cos(np \frac{\pi}{2} \alpha_p)}{\pi [(np)^2 - 1]} \quad (\text{II.12})$$

$$M_{\theta n} = \pm \frac{4nM\alpha_p^2 \cos(np \frac{\pi}{2} \alpha_p)}{\pi [(np)^2 - 1]} \quad (\text{II.13})$$

Si  $n\alpha_p = 1: M_{rn} = -M_{\theta n} = \pm \frac{M}{n}$  (II.14)

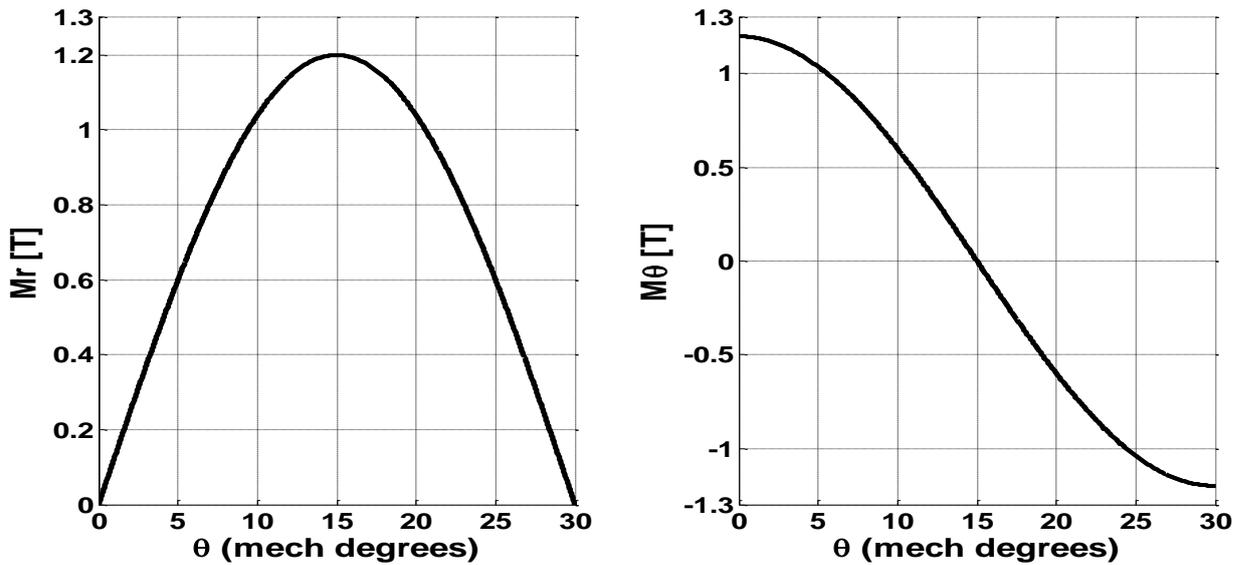


Fig. II. 3. Représentation spatiale de l'aimantation sinusoïdale.

- Pour une aimantation mixte

$$M_m = \frac{4M \sin(np \frac{\pi}{2} \alpha_r)}{\pi n} \quad (\text{II .15})$$

$$M_{\theta n} = \pm \frac{4M \cos(((1-a)\alpha_r + a) \frac{\pi n}{2})}{\pi n} \quad (\text{II .16})$$

où le signe + est utilisé pour les machins à rotor interne et – pour les machines à rotor externe.

$\alpha_p$  représente l'ouverture des aimants sur un pas polaire.

$\alpha_r$  représente l'ouverture des aimants radiaux sur un pas polaire.

$a$  représente l'écart angulaire entre un aimant radial et un aimant azimuthal [%],

$$a = [0 \ 1]$$

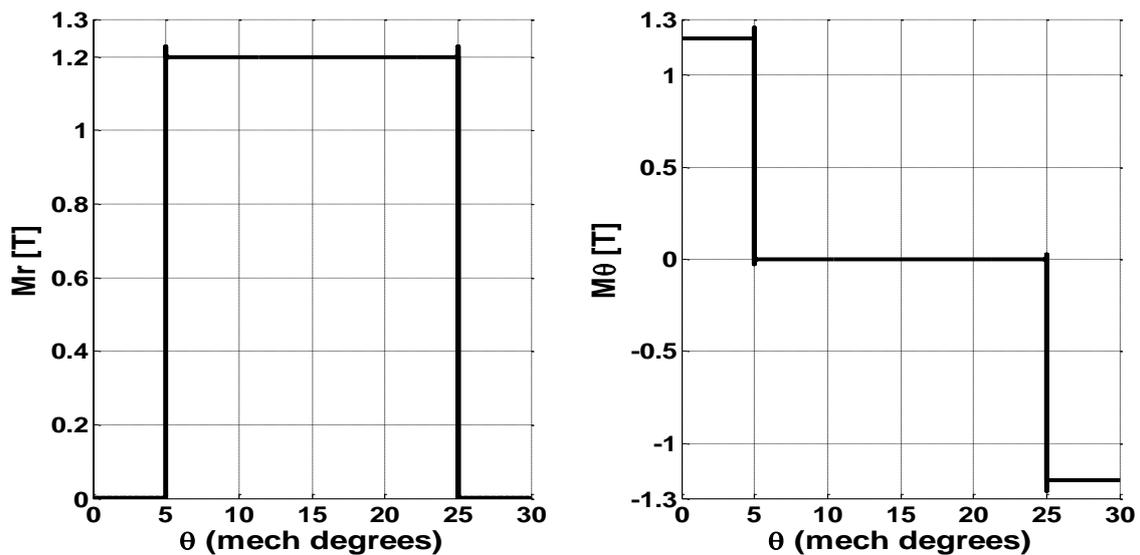


Fig. II. 4. Présentation spatiale de l'aimantation mixte.

### II. 3. 2. Modèles des courants sources

L'unique source de champ produite relativement à l'armature polyphasée disposée au stator de la machine étudiée est assimilée à un système de courants superficiels distribués de manière sinusoïdale et placés à l'endroit de l'isthme d'encoche. L'origine des angles est choisie confondue avec l'axe de symétrie d'une phase du bobinage statorique et ainsi tous les points sont repérés par l'angle  $\theta_s$ . L'alimentation de la machine est assurée par un onduleur

de tension contrôlé en courants qui délivre des courants de forme sinusoïdale ou rectangulaire [HAD06].

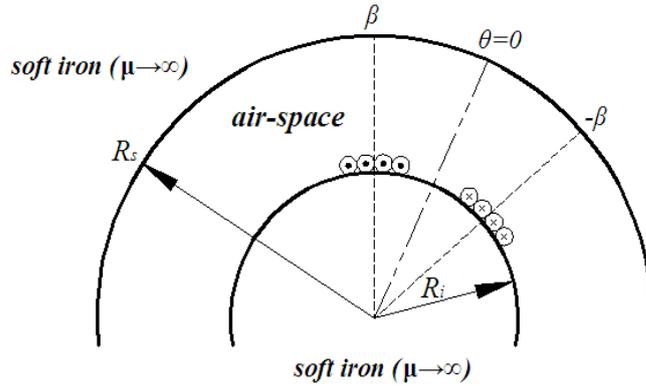


Fig. II. 4. Modélisation des courants statoriques.

**a- Alimentation sinusoïdale**

Pour une alimentation sinusoïdale, les courants triphasés sinusoïdaux d'amplitude  $I_m$  sont exprimés par :

$$\begin{cases} i_a = I_m \cos(\omega t) \\ i_b = I_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ i_c = I_m \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (II.17)$$

Les densités superficielles équivalentes, définies dans le repère statorique au niveau du rayon d'alésage  $R_a$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} J_a(t, \theta_s) = \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_n \cos(n\omega t + np\theta_s) \\ J_b(t, \theta_s) = \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_n \cos(n(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + np\theta_s) \\ J_c(t, \theta_s) = \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} J_n \cos(n(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + np\theta_s) \end{cases} \quad (II.18)$$

où

$$j_n = \frac{4 p N_s I_m}{\pi R_a} k_{bn}$$

$N_s$  étant le nombre de spires dans une encoche et  $k_{bn}$  le coefficient de bobinage de l'enroulement statorique [HAD06, ZAR04, ZHU93], exprimé par:

$$k_{bn} = k_{fn} k_{rn} k_{in} k_{dn} \quad (II.19)$$

Les différents coefficients sont exprimés ainsi :

- $k_{fn}$  coefficient de filtrage :  $k_{fn} = \frac{\sin(np\xi/2)}{np\xi/2}$

Où  $\xi$  représente l'ouverture de l'encoche.

- $k_{dn}$  coefficient de filtrage :  $k_{dn} = \frac{\sin(nqp \tau_d / 2)}{q \sin(np \tau_d / 2)}$

Où  $\tau_d$  est le pas dentaire.

- $k_{rn}$  Coefficient de raccourcissement :  $k_{rn} = \sin(\frac{np\beta}{2})$

Où  $\beta$  est l'angle de raccourcissement.

- $k_{in}$  coefficient d'inclinaison :  $k_{in} = \frac{\sin(n\gamma_i)}{n\gamma_i}$

$\gamma_i$  Représente l'angle de décalage horizontal de l'axe d'une encoche par rapport à l'axe de la machine. La densité résultante équivalente au système de courants triphasés s'écrit alors comme suit :

$$J(\theta_s, t) = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} J_n \cos(\nu\omega t + np\theta_s) \quad (\text{II.20})$$

avec :  $\nu = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 6m + 1 \\ +1 & \text{si } n = 6m - 1 \end{cases}$

Où seules les harmoniques  $n = 6m \pm 1$  sont non nulles.

### b- Alimentation non sinusoïdale

Les courants triphasés non sinusoïdaux d'amplitude  $I_k$  sont exprimés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_a(t) = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} I_k \cos(k\omega t) \\ i_b(t) = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} I_k \cos(k(\omega t - \frac{2\pi}{3})) \\ i_c = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} I_k \cos(k(\omega t + \frac{2\pi}{3})) \end{array} \right. \quad (\text{II.21})$$

$$I_k = \frac{4I_m}{k\pi} \sin(\frac{k\pi}{3})$$

Les densités superficielles équivalentes s'écrivent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_a(t, \theta_s) = \sum_{n,k} J_{n,k} \sin(k\omega t) \cos(np\theta_s) \\ J_b(t, \theta_s) = \sum_{n,k} J_{n,k} \sin(k(\omega t - \frac{2\pi}{3})) \cos(np\theta_s - \frac{2\pi}{3}) \\ J_c(t, \theta_s) = \sum_{n,k} J_{n,k} \sin(k(\omega t + \frac{2\pi}{3})) \cos(np\theta_s + \frac{2\pi}{3}) \end{array} \right. \quad (\text{II.22})$$

La densité résultante équivalente s'écrit comme suit :

$$J_s(\theta_s, t) = \frac{3}{2} \sum_{n,k} J_{n,k} \cos(\nu_1 k \omega t + np\theta_s) \quad (\text{II.23})$$

$$\text{avec : } \nu_1 = \begin{cases} -1 & \text{si } n - k = 6m + 1 \\ +1 & \text{si } n - k = 6m - 1 \end{cases}$$

## II. 4. Détermination des potentiels scalaires

Pour calculer le champ magnétique dans les trois zones de la machine, on utilise le potentiel scalaire créé par les aimants [MBM10, XIZ04]. La détermination du potentiel scalaire dans les différentes parties de la machine est effectuée à partir de la résolution de l'Equation (II .8).

### II. 4. 1. Potentiel scalaire créé par les aimants

La résolution des équations différentielles se fait par séparation de variables. La linéarité du modèle permet de déterminer, séparément, les contributions des aimants et des courants [MBM10, XIZ04, XWQ03] :

$$\Delta\varphi_I = \frac{\partial^2\varphi_I}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_I}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi_I}{\partial\theta^2} = 0 \quad \text{Dans la zone I} \quad (\text{II.22})$$

$$\Delta\varphi_{II} = \frac{\partial^2\varphi_{II}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_{II}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi_{II}}{\partial\theta^2} = \frac{\text{div}(\vec{M})}{\mu_r} \quad \text{Dans la zone II} \quad (\text{II.23})$$

$$\Delta\varphi_{III} = \frac{\partial^2\varphi_{III}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_{III}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi_{III}}{\partial\theta^2} = 0 \quad \text{Dans la zone III} \quad (\text{II.24})$$

avec :

$$\text{div}(\vec{M}) = \frac{M_r}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}$$

Le potentiel scalaire, créé par les aimants dans les différentes zones, s'écrit comme suit :

$$\varphi_I(r, \theta) = (C_1 r^{np} + C_2 r^{-np}) \cos(np\theta) \quad (\text{II.25})$$

$$\varphi_{II}(r, \theta) = (C_3 r^{np} + C_4 r^{-np} + \psi_n r) \cos(np\theta) \quad (\text{II.26})$$

$$\varphi_{III}(r, \theta) = (C_5 r^{np} + C_6 r^{-np}) \cos(np\theta) \quad (\text{II.27})$$

où  $\psi_n$  est le terme de la solution particulière de l'Eq. (II.23), qui s'exprime comme suit :

$$\psi_n(r) = \begin{cases} \frac{M_m + npM_{\theta n}}{(np)^2 - 1} & np \neq 1 \\ \frac{1}{2}(\ln(r) - \frac{1}{2})(M_m + M_{\theta n}) & np = 1 \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

où  $C_i (i=1:6)$  sont les constantes d'intégrations liées à chaque harmonique d'espace de rang  $n$ . Pour calculer ces constantes, on utilise les conditions aux limites. Dans notre étude on intéresse surtout au calcul du champ magnétique dans la région I (entrefer) [XIZ04, XWQ03] :

- Au niveau de rayon d'alésage  $R_i$  :  $H_{\theta I} = 0$
- Au niveau de rayon d'alésage  $R_r$  :  $B_{rI} = B_{rII}$ ,  $H_{\theta I} = H_{\theta II}$
- Au niveau de rayon d'alésage  $R_m$  :  $B_{rII} = B_{rIII}$ ,  $H_{\theta II} = H_{\theta III}$
- Au niveau de rayon d'alésage  $R_s$  :  $H_{\theta III} = 0$

Ce qui conduit aux expressions suivantes :

- Pour les moteurs à rotor externe non magnétique  $R_s \rightarrow \infty$

Si  $np \neq 1$ :

$$C_2 = \frac{(M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np-1)},$$

$$C_1 = R_i^{2np} C_2$$

$$C_3 = \frac{R_i^{2np} (M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np-1)} + \frac{(M_m - M_{\theta n})R_r^{np+1}}{2(np+1)},$$

$$C_4 = \frac{(M_m + M_{\theta n})R_m^{np+1}}{2(np-1)}$$

$$B_{rI}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{np(M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np-1)} (R_i^{2np} r^{np-1} + r^{-np-1}) \cos(np\theta) \quad (\text{II.29})$$

$$B_{\theta I}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{np(M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np-1)} (R_i^{2np} r^{np-1} - r^{-np-1}) \sin(np\theta) \quad (\text{II.30})$$

Si  $np = 1$ :

$$C_2 = \frac{(M_m + M_{\theta n})(\log(R_m) - \log(R_r))}{2},$$

$$C_1 = R_i^2 C_2$$

$$C_3 = \frac{2R_r^2(M_m + M_{\theta n})(\log(R_m) - \log(R_r)) - R_m^2(M_m - M_{\theta n})}{4},$$

$$C_4 = \frac{(M_m + M_{\theta n})\log(R_m) - M_m}{2}$$

$$B_{rI}(r, \theta) = \frac{(M_m + M_{\theta n})(\log(R_m) - \log(R_r))}{2} (R_i^2 r^{-2} + 1) \cos(\theta)$$

$$B_{\theta I}(r, \theta) = \frac{(M_m + M_{\theta n})(\log(R_m) - \log(R_r))}{2} (R_i^2 r^{-2} - 1) \sin(\theta)$$

- Pour les moteurs à rotor interne non magnétique  $R_i \rightarrow 0$

$$C_2 = \frac{(M_m - M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np+1)}$$

$$C_1 = R_s^{-2np} C_2$$

$$C_3 = \frac{(M_m - M_{\theta n})R_r^{np+1}}{2(np-1)}$$

$$C_4 = \frac{(M_m - M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np+1)} + \frac{(M_m - M_{\theta n})R_m^{np+1}}{2(np-1)}$$

$$B_{rI}(r, \theta) = \sum_{n=1.3.5\dots}^{\infty} \frac{np(M_m - M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np+1)} (R_s^{-2np} r^{np-1} + r^{-np-1}) \cos(np\theta)$$

$$B_{\theta I}(r, \theta) = \sum_{n=1.3.5\dots}^{\infty} \frac{np(M_m - M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np+1)} (R_s^{-2np} r^{np-1} - r^{-np-1}) \sin(np\theta)$$

### II. 4. 2. Potentiel scalaire créé par les courants statoriques

La réaction magnétique, induite au niveau des parties conductrices de la machine, est négligée. L'équation de répartition du potentiel scalaire, à résoudre dans l'entrefer (mécanique + magnétique), s'écrit ainsi [ZHU03, XWQ03] :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (\text{II.31})$$

La solution de l'Equation (II.31), s'écrit comme suit :

$$\varphi(r, \theta) = (C_{1c}r^{np} + C_{2c}r^{-np}) \cos(np\theta) \quad (\text{II.32})$$

#### a- Alimentation sinusoïdale

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} (C_{1c}r^{np} + C_{2c}r^{-np}) \cos(np\theta + np\theta_0 + (np\Omega + \nu\omega k)t) \quad (\text{II.33})$$

#### b- Alimentation rectangulaire

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} (C_{1c}r^{np} + C_{2c}r^{-np}) \cos(np\theta + np\theta_0 + (np\Omega + \nu_1\omega k)t) \quad (\text{II.34})$$

Les différentes constantes, définies dans les expressions (II.33) et (II.34), sont déterminées en exploitant les conditions aux limites. Celles-ci sont données par :

- Au niveau de rayon  $R_i$  :  $H_\theta = -\mu_0 J$
- Au niveau de rayon  $R_m$  :  $H_\theta = 0$

Ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$C_{1c} = -\frac{\mu_0 J R_m^{-np+1} R_i^{-2np}}{np(R_m^{-np+1} - R_i^{-np+1})}, \quad C_{2c} = -\frac{\mu_0 J R_m^{-np+1}}{np(R_m^{-np+1} - R_i^{-np+1})}$$

$J = J_n$  quand la machine est alimentée par des courants sinusoïdaux.

et  $J = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} J_{n,k}$  quand la machine est alimentée par des courants non sinusoïdaux.

## II. 5 Calcul de la force électromotrice

La force électromotrice est calculée directement en utilisant la loi de Faraday ou indirectement en utilisant le calcul du couple résultant (électromagnétique et de détente). La première méthode consiste à calculer le flux embrassé par les conducteurs. L'invariance, par translation suivant Oz du système étudié, permet d'exprimer le flux produit par les aimants sous la forme suivante [BOO08, BMB90, HAD06, LAC09] :

$$\Phi(t) = \pi L_u \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} C_n (C_1 R_a^{np} + C_2 R_a^{-np}) \sin(n(\omega t + p\theta_0)) \quad (\text{II.35})$$

où  $C_n, R_a$  sont respectivement la densité des conducteurs de la phase considérée et le rayon d'alésage.

avec :

$$C_n = \frac{4pNk_{bn}}{\pi}$$

La force électromotrice est calculée par dérivation du flux des aimants à travers les enroulements du stator. Son expression est la suivante :

$$e(t) = \frac{d\Phi}{dt} = -\pi L_u n \omega \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} C_n (C_1 R_a^{np} + C_2 R_a^{-np}) \cos(n(\omega t + p\theta_0)) \quad (\text{II.36})$$

## II. 6. Calcul du couple développé par la machine

Le couple d'interaction développé par le type de machine étudiée est calculé en utilisant les moments des forces de Laplace s'exerçant sur la densité de courants placée au niveau du rayon d'alésage. Ce couple est exprimé par la relation suivante [HAD06, XWQ03, MAK06] :

$$\Gamma(\theta) = 2pR_a^2 L_u \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{+\frac{\pi}{2p}} J_s B_\theta d\theta \quad (\text{II.37})$$

Pour une alimentation par des courants sinusoïdaux, l'expression du couple est :

$$\Gamma(\theta) = \frac{3}{2} \pi p R_a^2 L_u \sum_{m=1}^3 n J_n (C_1 R_a^{np} + C_2 R_a^{-np}) \cos((n+\nu)\omega t + np\theta_0) \quad (\text{II.38})$$

$$\text{avec } \nu = \begin{cases} -1 & \text{si } n-k = 6m+1 \\ +1 & \text{si } n+k = 6m-1 \end{cases}$$

- Pour une alimentation par des courants non sinusoïdaux, l'expression du couple s'écrit ainsi :

$$\Gamma(\theta) = \frac{3}{2} \pi p R_a L_u \sum_{m=1}^3 n J_n (C_1 R_a^{np} + C_2 R_a^{-np}) \cos((nk + \nu)\omega t + np\theta_0) \quad (\text{II.39})$$

$$\text{avec } \nu = \begin{cases} -1 & \text{si } n - k = 6m \\ +1 & \text{si } n + k = 6m \end{cases}$$

Notons qu'on peut aussi calculer ce couple à partir de l'expression suivante :

$$\Gamma = \frac{p}{\omega} \sum_{m=1}^3 e_m(\theta) i_m(\theta) \quad (\text{II.40})$$

## II. 7. Conclusion

Le modèle analytique, développé dans notre étude, permet de déterminer les expressions des grandeurs électromagnétiques caractéristiques du fonctionnement pour différentes configurations de machines à aimants montés sur la surface du rotor. La conception et le dimensionnement des machines électriques est une étape très importante dans la construction des ces dernières. Les expressions des grandeurs électromagnétiques développées dans le modèle analytique contiennent les paramètres géométriques qui permettent une étude rapide et souple du comportement dimensionnel de la structure sans encoches excitée par des aimants permanents montés sur la surface rotorique.

## Chapitre III

# *Modélisation par Eléments Finis des Machines à Aimants Permanents*

### Sommaire

|   |    |
|---|----|
| III.1. Code de calcul par éléments finis adapté au calcul des MSAP            | 36 |
| III.2. Le Logiciel FEMM : Partie Préprocesseur                                | 36 |
| III.2.1 Le Solveur  | 36 |
| III.2.2. Formulation intégrale de la méthode des éléments finis               | 37 |
| III.2.3. Expression de la fonction approchée                                  | 37 |
| III.3. Exploitation de la méthode analytique et validation par éléments finis | 38 |
| III.4. Distribution des inductions dues aux aimants                           | 38 |
| III.5. Induction magnétique au centre des aimants                             | 39 |
| III.6. Calcul de la force électromotrice par la méthode des éléments finis    | 40 |
| III.6. 1. Calcul des flux   | 40 |
| III.7. Influence des paramètres géométriques sur le couple électromagnétique  | 44 |
| III. 7. 1. Taux d'ondulation  | 44 |
| III.7.2. Taux d'harmoniques de distorsion (THD)                               | 45 |
| III.8. Distribution des inductions dues aux courants                          | 46 |
| III.9. Conclusion   | 47 |

Dans une procédure de modélisation classique des machines à aimants permanents, on utilise généralement un modèle analytique. Ensuite, pour valider et caractériser la solution obtenue, on utilise un modèle numérique qui nécessite moins d'hypothèses que le modèle précédent [LEF07].

Notre objectif, dans cette partie, est de présenter un module de calcul par éléments finis qui puisse prendre en compte différentes familles de machines à aimants avec un équipement de base comprenant un solveur et un mailleur. Pour cela, nous devons élaborer un code de calcul où les tâches de dessin, de définition des milieux, des conditions aux limites et des sources ainsi que le maillage, la résolution du problème et le calcul des grandeurs soient totalement transparentes. Des logiciels éléments finis commerciaux (**Ansys**, **Femlab**, **Ansoft**, etc.) existent en 2D et en 3D pour résoudre les équations de l'électromagnétisme, de la thermique, de la mécanique etc. [KAN05, BOO08, ARK87].

### III. 1. Code de calcul par éléments finis adapté au calcul des MSAP

Dans notre travail on utilise un outil de modélisation gratuit développé pour calculer les machines synchrones à aimants appelé **FEMM (Finite Element Method Magnetics)** [GAR02, LUA02, DME04]. Ce dernier est, comme son nom l'indique, un générateur d'éléments triangulaires s'appuyant sur la méthode de **Delaunay - Voronoï**. C'est un logiciel libre de droit écrit en langage C et téléchargeable gratuitement sur internet [DME04, DME].

Son développement s'est déroulé en trois étapes. Tout d'abord il a été nécessaire de choisir un paramétrage des entrées permettant de répondre efficacement à nos attentes. Puis d'organiser la structure du programme afin de générer automatiquement la géométrie et le maillage associé. Ensuite nous proposons une méthode d'évaluation du couple électromagnétique pour une application précise, à savoir une machine synchrone à aimants permanents avec rotor externe non magnétique.

### III. 2. Le Logiciel FEMM : Partie Préprocesseur

L'utilisation de la méthode des éléments finis [RAP93] est désormais très répandue dans les divers domaines du Génie Électrique. On s'en sert notamment pour calculer les différentes grandeurs électromagnétiques lorsqu'on étudie ou lorsqu'on dimensionne un dispositif électromécanique donné. Dans le cas présent, nous voulons aboutir à un calcul du couple. Pour se faire il faudra tout d'abord effectuer un calcul des champs électromagnétiques [SAC88], [SLM92]. Ensuite il est possible de calculer la force électromotrice et le couple électromagnétique produit par différents modes d'alimentation.

#### III.2.1 Le Solveur

Il permet la résolution des problèmes magnétiques et électrostatiques plans et axisymétriques (incluant les problèmes de magnétostatique linéaire et non linéaire). Pour les problèmes de magnétostatique et d'électrostatique, un solveur utilisant le gradient conjugué basé sur le pré-conditionnement de sous-relaxation symétrique successif est employé.

La résolution des équations de Maxwell et des lois de comportement associées peut être obtenue en considérant les champs comme inconnues [DRD99, BOS98]. Néanmoins, on préfère exprimer les champs magnétiques et électriques en fonction de potentiels qui peuvent être scalaire ou vectoriel.

### III. 2. 2. Formulation intégrale de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis utilise une formulation intégrale (ou variationnelle) plutôt que les équations aux dérivées partielles. Cela est garanti par la méthode des résidus pondérés qui consiste à rechercher des fonctions  $u$  qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{ R(u) \} dV = 0 \quad (\text{III.1})$$

Pour toute fonction de pondération  $\psi$ , on appelle résidu la quantité  $R(u)$  qui s'annule quand  $u$  est solution de l'Equation (III.1).

Il est clair que la mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite jusqu'ici nécessite l'utilisation des méthodes d'intégration numériques qui permettent de construire les matrices et les vecteurs élémentaires par intégration sur l'élément de référence ainsi que des méthodes de résolution numérique des systèmes algébriques qui en résultent (après introduction des conditions aux limites).

La modélisation électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents est effectuée en utilisant les équations de Maxwell par la formulation en potentiel scalaire. Ces équations peuvent être exprimées en éléments finis à travers une formulation intégrale de Galerkin ou des résidus pondérés par [BTI06, PSF90, DME]:

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} [\Delta \varphi + J] \omega d\Omega = 0 \quad (\text{III.2})$$

Cette équation peut être formulée en éléments finis nodaux du premier ordre sur un maillage triangulaire. Les éléments de ce maillage sont supposés être suffisamment petits pour pouvoir approximer l'inconnue  $\varphi$  par une fonction linéaire en coordonnées spatiales. Sur chaque élément  $e$  du maillage, la solution  $\varphi$  est de la forme suivante :

$$\varphi^e(x, y) = \alpha^e + \beta^e x + \gamma^e y \quad (\text{III.3})$$

### III. 2. 3. Expression de la fonction approchée

On recherche les valeurs de l'inconnue aux nœuds du maillage. Donc la solution doit vérifier :

$$\forall i = 1.2.3.... : \varphi^e(x_i, y_i) = \varphi_i^e \quad (\text{III.4})$$

où  $\varphi_i^e$  est la valeur de la solution au nœud  $i$  de l'élément  $e$ . Soit :

$$\begin{cases} \varphi_1^e = \alpha^e + \beta^e x_1 + \gamma^e y_1 \\ \varphi_2^e = \alpha^e + \beta^e x_2 + \gamma^e y_2 \\ \varphi_3^e = \alpha^e + \beta^e x_3 + \gamma^e y_3 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$\varphi^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) \varphi_i^e \quad (\text{III.6})$$

où les  $N_i^e(x, y)$  sont les fonctions d'interpolations nodales de premier ordre entièrement définies par les coordonnées des nœuds du maillage.

$$N_i^e(x, y) = \frac{\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y}{2\Delta^e} \quad i = 1.2.3 \quad (\text{III.7})$$

Où  $\Delta^e$  est la surface de l'élément considéré. On s'assure, aisément, que les fonctions  $N_i^e(x, y)$  vérifient l'Eq. (III.4). La solution recherchée s'exprime alors comme une combinaison linéaire des valeurs nodales du maillage.

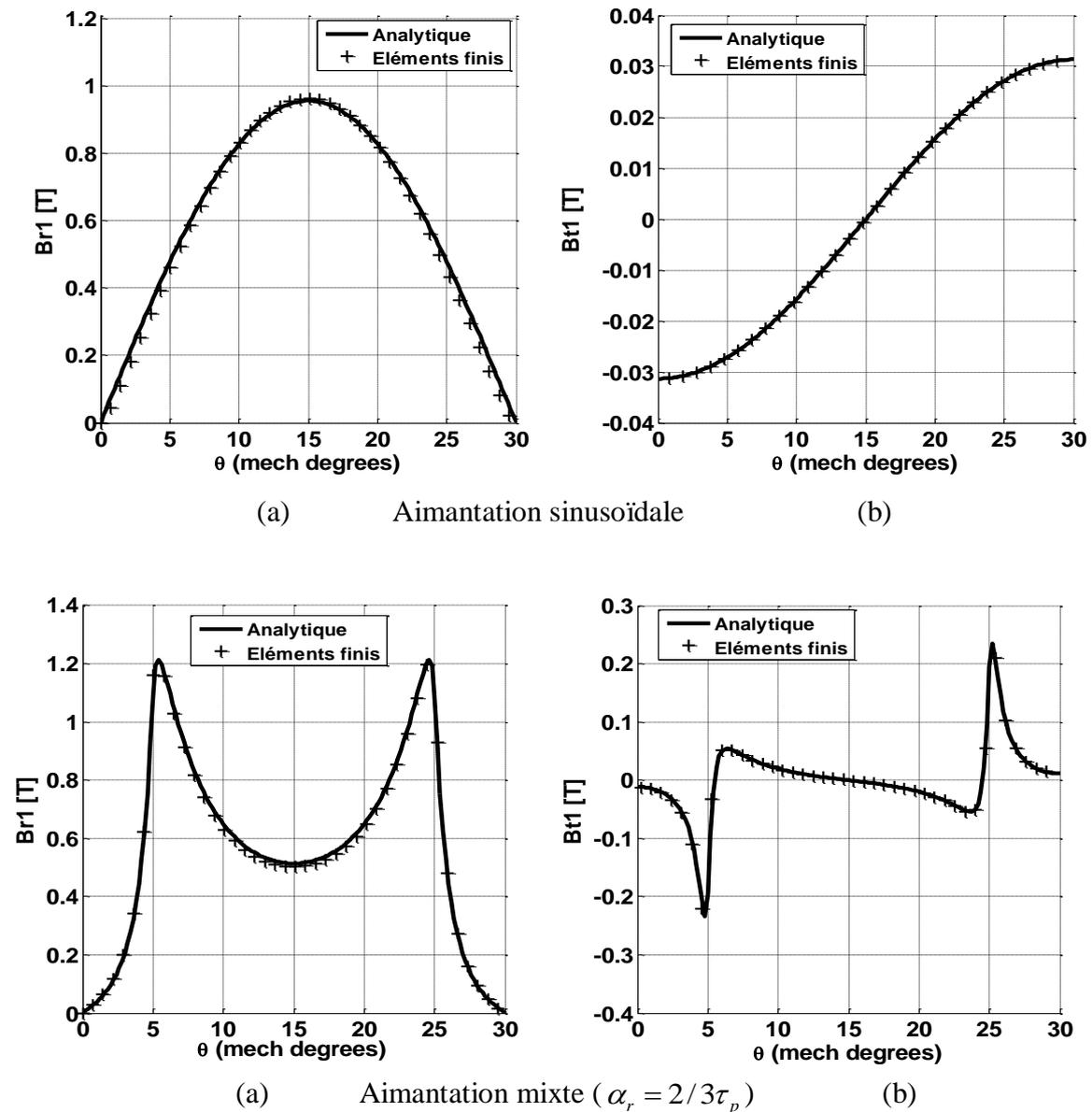
### III.3. Exploitation de la méthode analytique et validation par éléments finis

Sous les mêmes conditions et avec les mêmes hypothèses simplificatrices, nous effectuons une comparaison des résultats obtenus à partir du modèle analytique, développé au chapitre II de notre travail, avec ceux issus de la méthode des éléments finis. Dans le cas des structures que nous étudions, c'est le modèle 2D qui est le plus utilisé pour sa simplicité dans l'introduction des données et pour le temps de calcul réduit.

Une comparaison des résultats obtenus à l'aide du modèle analytique avec ceux issus d'un calcul par éléments finis, pour les deux types d'aimantations envisagées est effectuée. Pour se faire, on a adopté les mêmes hypothèses de calcul pour les deux méthodes en considérant notamment un stator lisse.

### III. 4. Distribution des champs magnétiques dus aux aimants

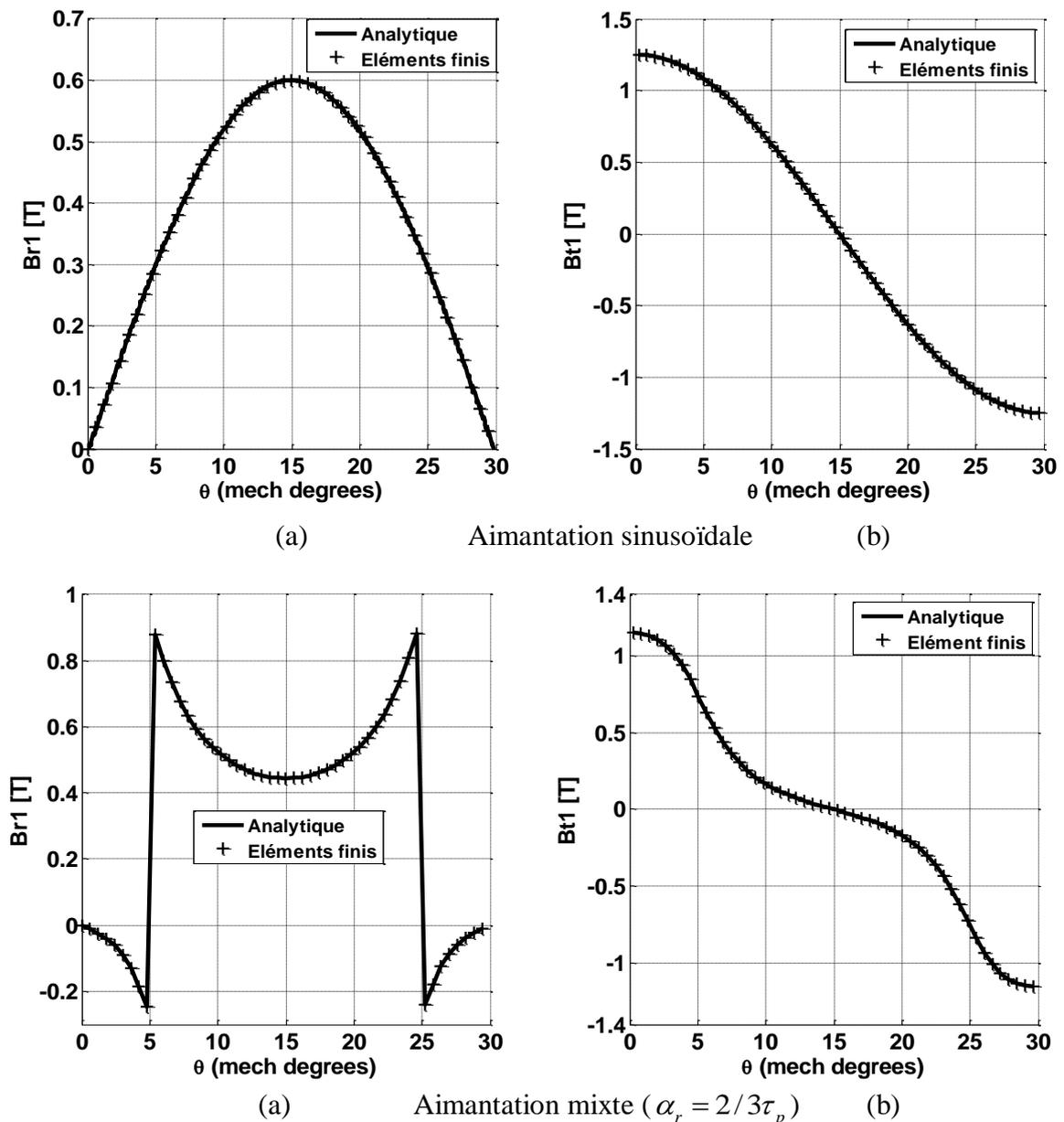
On considère, le fonctionnement à vide. La Figure (III.1) représente les répartitions des inductions radiale et tangentielle créées par les aimants à aimantations sinusoïdale et mixte au niveau du milieu de l'entrefer ( $r = R_i + g/2$ ) en fonction de la position angulaire. On observe que la forme de l'induction est très influencée par la nature de l'aimantation.



**Figs. (III. 1). Répartitions des inductions radiale et tangentielle dues aux aimants au milieu de l'entrefer pour différentes aimantations**  
**a) : Induction radiale, b) : Induction tangentielle**

## II. 5. Induction magnétique au centre des aimants

Les inductions radiale et tangentielle, calculées analytiquement et numériquement, sont identiques. La Figure (III.2) représente les répartitions des inductions créées par les aimants à aimantation sinusoïdale et mixte au centre de l'aimant ( $r = R_r + e_a/2$ ). On constate que l'amplitude de l'induction radiale diminue par contre l'induction tangentielle augmente par rapport aux résultats obtenus au milieu de l'entrefer.



**Figs. (III. 2). Répartitions des inductions radiale et tangentielle dues aux aimants au centre des aimants pour différentes aimantations**

a) : Induction Radiale, b) : Induction Tangentielle

b)

### III. 6. Calcul de la force électromotrice par éléments finis

Nous considérons uniquement le champ dû aux aimants, les enroulements du stator n'étant pas alimentés. La force électromotrice induite à travers une phase du stator s'écrit ainsi :

$$E = -N_c \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{III.50})$$

où  $\Phi$  est le flux de phase.

#### III. 6. 1. Calcul des flux

Le flux dans une encoche est calculé à partir de la moyenne du potentiel vecteur sur cette encoche en utilisant l'expression suivante :

$$A_{moy} = -\frac{1}{S_k} \int_{S_k} A dS \quad (\text{III.51})$$

L'intégrale est calculée élément par élément

$$\phi_k = N_{enc} A_{moy} S_e \quad (\text{III.52})$$

où  $N_{enc} = \frac{N}{S_e}$  représente la densité des conducteurs par encoche et où  $N$  représente le nombre

de conducteurs par encoche.

On calcule les flux dans les encoches pour  $np$  positions sur un pas dentaire des aimants par rapport au stator. On construit la matrice des flux suivante :

$$[\varphi]_{mes} = [\varphi]_1 = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{Ne} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdot & \cdot & \varphi_{1np} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdot & \cdot & \varphi_{2np} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{Ne1} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{Ne np} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Ne (nombre d'encoches)} \\ \downarrow \end{matrix}$$

La matrice des flux est de dimension  $[Q_s, np]$  où  $Q_s$  représente le nombre d'encoches et  $np$  le nombre de positions. On retrouve donc les vecteurs flux d'encoches disposés suivant la position de mesure.

$$[\varphi]_2 = \begin{bmatrix} \varphi_{Ne} \\ \varphi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{Ne-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{Ne1} & \varphi_{Ne2} & \cdot & \cdot & \varphi_{Ne np} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdot & \cdot & \varphi_{1np} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{Ne-11} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{Ne-1 np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix} [\varphi]_{mes}$$

$$[\varphi]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} [\varphi]_{\text{mes}} \quad \text{On pose : } [P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[P] est dite matrice de permutation.

A partir du calcul du flux, pour une rotation sur un pas dentaire, on détermine aisément le flux sur une rotation complète à l'aide de l'expression suivante :

$$[\varphi]_{\text{tot}} = \left[ [\varphi]_{\text{mes}} \quad [P][\varphi]_{\text{mes}} \dots [P]^\delta [\varphi]_{\text{mes}} \dots [P]^{N_e-1} [\varphi]_{\text{mes}} \right] \quad (\text{III.53})$$

où  $\delta \in [1, N_e - 1]$

Une fois les flux d'encoches déterminés, nous calculons les flux par phase. Pour une phase donnée, on repère les encoches « **aller** » et « **retour** » correspondantes et nous effectuons la somme algébrique. Le flux par phase est dépendant du type de bobinage utilisé.

Pour la phase (a) par exemple :

$$\varphi_a = \sum \varphi_{\text{ea aller}} - \sum \varphi_{\text{ea retour}} \quad (\text{III.54})$$

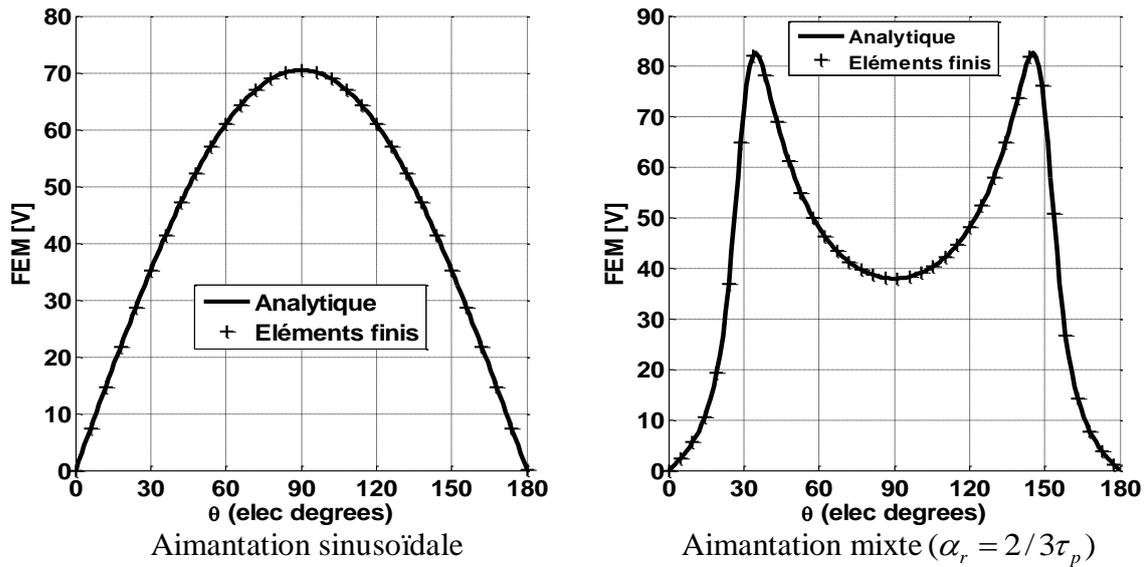
où  $\varphi_{\text{ea}}$  représente le flux par encoche correspondant à la phase a.

On calcule les f.é.m. par phase à partir de l'équation suivante :

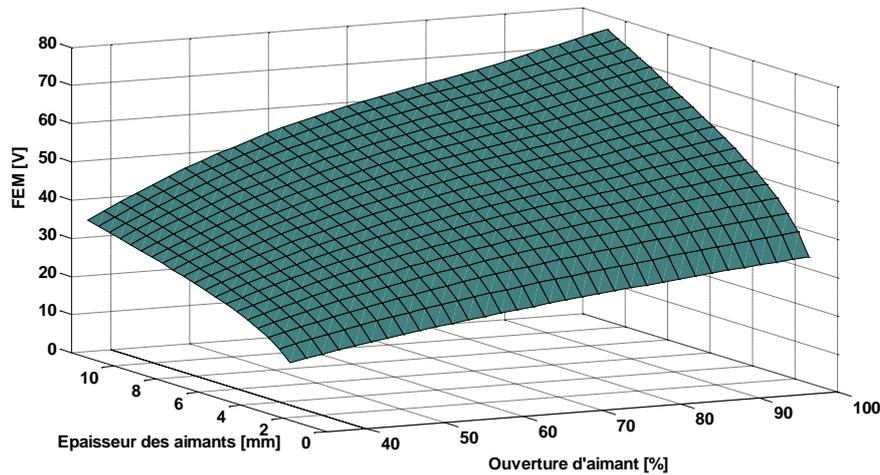
$$e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{III.55})$$

Le couple électromagnétique est calculé par la méthode des puissances Eq. (II.42)

La forme et le type d'aimantation des aimants a une influence sur les contenus harmoniques de la force électromotrice et du couple électromagnétique. La Figure (III.3) montre les différentes formes de la force électromotrice produites par les aimants au niveau du rayon d'alésage. L'influence du volume des aimants sur la force électromotrice est montrée sur la Fig. (III.4).



**Figs. III.3. Répartitions de la f.é.m. par phase ( $\alpha_r = \tau_p$ ).**

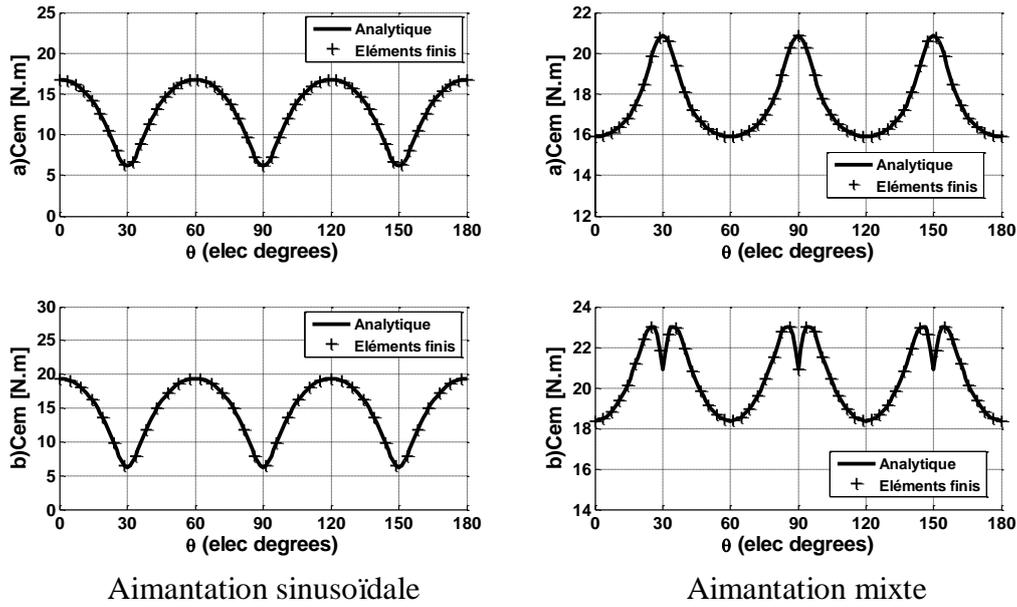


**Fig. III. 4. Influence de l'épaisseur et l'ouverture des aimants sur la fem ( $\alpha_r = 2/3\tau_p$ ).**

(Aimantation sinusoïdale)

Pour les deux modes d'alimentations adoptés, les Figs. (III.5) montrent la variation du couple électromagnétique développé par les deux structures à aimantation sinusoïdale ou à aimantation mixte. Ces ondulations sont dues au mode d'alimentation, soit sinusoïdale ou rectangulaire, et au volume des aimants (ouverture, épaisseur).

On peut réduire ces ondulations soit en adoptant la forme de l'alimentation à celle de la force électromotrice soit en agissant sur les dimensions de l'aimant.



Aimantation sinusoïdale

Aimantation mixte

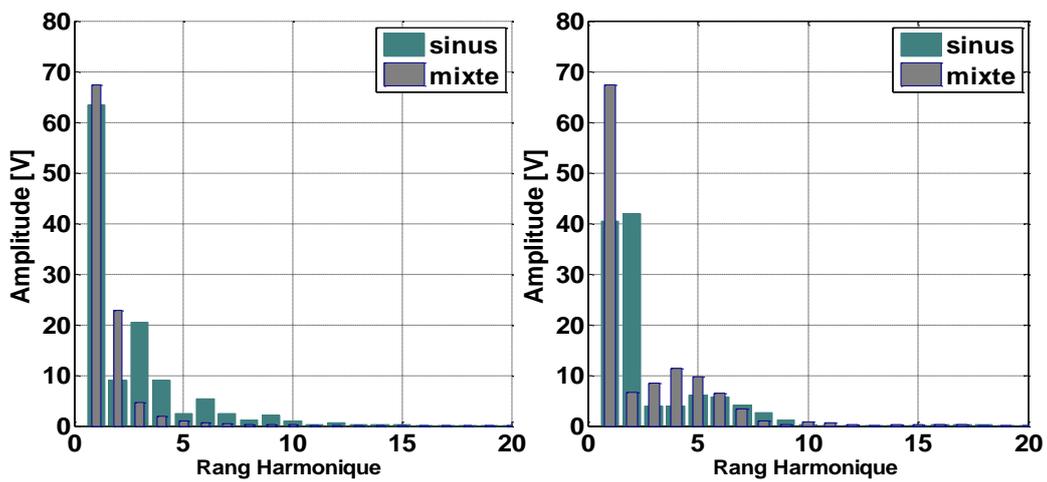
$$(\alpha_r = 2/3\tau_p)$$

a) Alimentation sinusoïdale

b) Alimentation rectangulaire (120°)

**Figs. III.5. Couple d'interaction pour différents sens d'aimantation ( $\alpha_p = 2/3\tau_p$ ).**

La largeur des aimants modifie également le contenu harmonique de la forme d'onde. Une analyse spectrale de la fem (**Figs. III.6**), pour deux ouvertures des aimants, montre l'apparition des harmoniques  $6n \pm 1$  et  $6n \pm 3$ .



a- Ouverture des aimants ( $\alpha_p = 4/6\tau_p$ )

b- Ouverture des aimants ( $\alpha_p = 5/6\tau_p$ )

**Figs. III.6. Spectres harmoniques de la force électromotrice.**

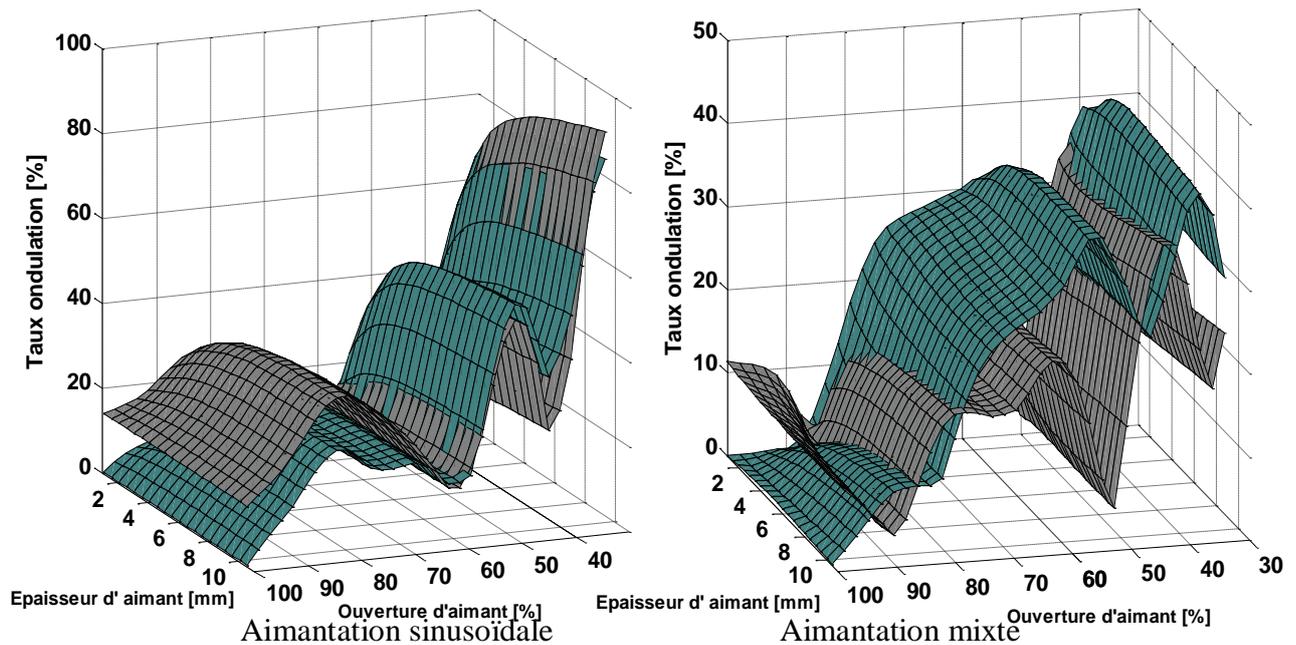
### III. 7. Influence des paramètres géométriques sur le couple électromagnétique

#### III. 7. 1. Taux d'ondulation

Certaines applications exigent un couple avec un minimum d'ondulations. Nous cherchons à minimiser ces ondulations provoquées par la structure étudiée. Le taux d'ondulation est défini par :

$$\tau(\%) = \frac{\Gamma_{max} - \Gamma_{min}}{\Gamma_{moy}} 100 \quad (III.56)$$

où  $\Gamma_{max}$ ,  $\Gamma_{min}$  et  $\Gamma_{moy}$  représentent respectivement le couple maximal, le couple minimal et le couple moyen. Nous cherchons donc un taux d'ondulation minimal en fonction des paramètres géométriques de la machine. La Figure (II.8) montre l'influence du volume de l'aimant en fonction du couple moyen. L'augmentation du volume des aimants permet d'améliorer la valeur moyenne de l'induction ce qui conduit à augmentation des valeurs du couple.



**Figs. III.8. Influence de l'épaisseur et l'ouverture des aimants sur le taux d'ondulation**

$$(\alpha_p = 4/6\tau_p).$$

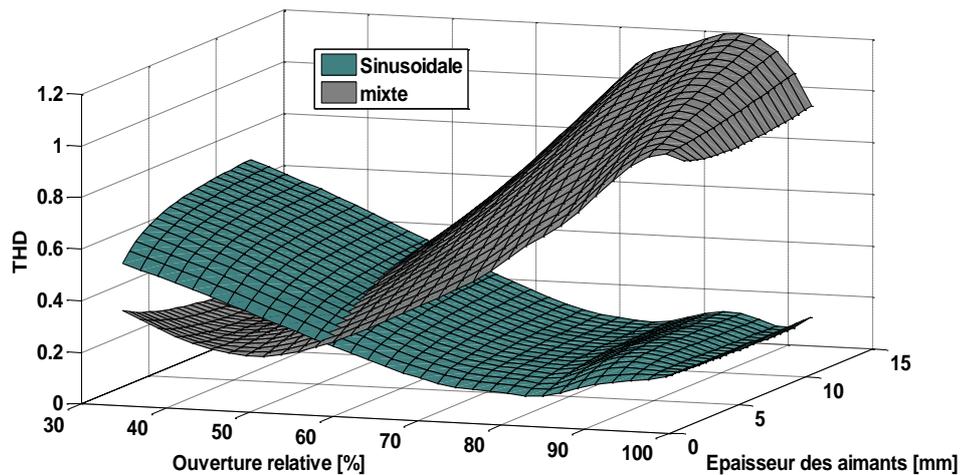
- Alimentation sinusoïdale : courbe en couleur vert
- Alimentation rectangulaire (120°) : courbe grise foncée

### III. 7. 2. Taux d'harmoniques de distorsion (THD)

Le THD est défini comme suit :

$$THD = \sqrt{\frac{\sum_1^{\infty} (har_n)^2 - fond^2}{fond^2}} \quad (III.57)$$

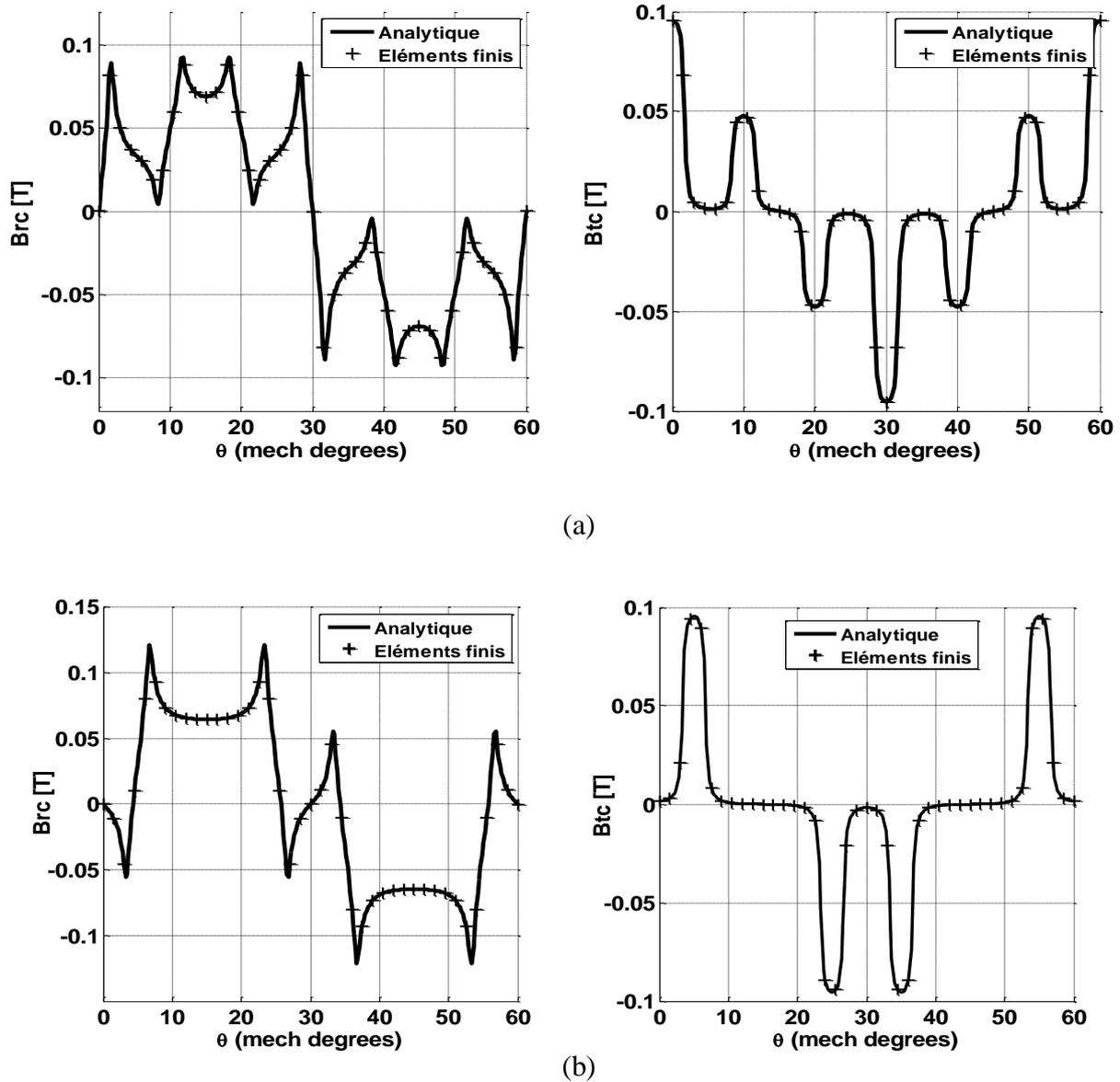
où  $har_n$ ,  $fond$  représentent respectivement l'harmonique d'ordre n et le fondamental du signal. Le THD nous renseigne sur l'apport du fondamental sur le signal par rapport aux autres harmoniques. La Figure (III.9) montre la variation du taux d'harmonique de distorsion en fonction de l'épaisseur et de l'ouverture relative des aimants.



**Figs. III.9.** Influence de l'épaisseur et l'ouverture des aimants sur le THD ( $\alpha_p = 4/6\tau_p$ ).

### III. 8. Distribution des inductions dues aux courants

La Figure (III.10) montre la répartition de l'induction magnétique, le long de l'entrefer, créée par les courants de sources que ce soit pour un courant sinusoïdal ou pour un courant rectangulaire.



**Fig. III.10. Champ dû aux courants statoriques ( $I=10$  A, à  $t=0$ ).**

- a) Alimentation sinusoïdale ( $I_a = I_m, I_b = I_c = -I_m/2$ )
- b) Alimentation rectangulaire  $120^\circ$  ( $I_a = -I_c = I_m, I_b = 0$ )

### **III. 9. Conclusion**

La deuxième étape de notre travail a consisté à exploiter les possibilités du calcul des champs pour valider le dimensionnement analytique et à déterminer l'ensemble des caractéristiques électromagnétiques nécessaires pour la simulation du fonctionnement de la machine à l'aide d'un modèle numérique.

La répartition de l'induction au niveau de l'entrefer est fortement influencée par le type d'aimantation des aimants. La forme d'onde du couple d'interaction, pour les machines synchrones à aimants montés sur la surface du rotor étudié, est directement liée au type de l'aimantation des aimants et par la forme de l'alimentation.

Afin de tenir compte de la géométrie complexe de la machine, un outil de calcul basé sur les éléments finis est utilisé pour la validation du modèle analytique. Les résultats obtenus par ce modèle sont comparés à ceux obtenus à partir de la méthode des éléments finis. La concordance est acceptable comme on a pu effectuer aussi une représentation globale des lignes des champs sur toutes les zones de la machine étudiée.

## Chapitre IV

### *Prise en Compte des Encoches Statoriques dans le Calcul du Champ par les Transformations Conformées*

#### Sommaire

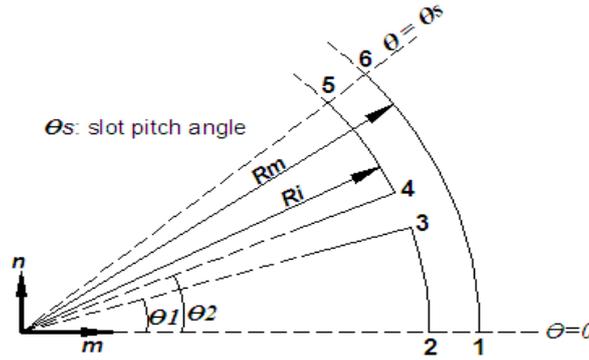
|  |    |
|--|----|
| IV. 1. Calcul de la perméance d'entrefer   | 48 |
| IV. 1. 1. Transformations conformes des encoches   | 48 |
| IV. 1. 2. Forme du champ dans le plan S  | 51 |
| IV. 2. Analyse des performances électromagnétiques   | 53 |
| IV. 3. Etat de la saturation   | 54 |
| IV. 4. Calcul analytique de la force électromotrice  | 57 |
| IV. 5. Calcul analytique du couple électromagnétique   | 58 |
| IV. 6. Influence des paramètres géométriques de la machine sur les ondulations du couple électromagnétique | 60 |
| IV. 7. Calcul du couple de détente   | 61 |
| IV. 8. Influence des paramètres géométriques de la machine sur le couple de détente                        | 62 |
| IV. 8. 1. Influence de l'ouverture des aimants   | 62 |
| IV.9. Etude comparée de structures à faibles ondulations de couple et choix des solutions                  | 63 |
| IV. 9. 1. machines à nombre non entier d'encoches par pôle et par phase                                    | 63 |
| IV. 9.1. 1. règles de bobinage   | 63 |
| IV. 9.2. influence de la polarité sur le champ magnétique  | 66 |
| IV.10. Conclusion  | 67 |

#### IV. 1. Calcul de la perméance d'entrefer

La distribution du champ magnétique, dans le cas d'une machine à stator encoché, est déterminée à partir du produit de l'induction produite par les aimants dans le cas d'un stator sans encoches par la perméance relative de l'entrefer  $\lambda(r, \theta)$  [ZAR04]. Pour déterminer la perméance complexe, on utilise une technique analytique qui permet de déterminer la distribution du champ suivant la forme géométrique de l'encoche. La méthode est basée sur la théorie des transformations conformes [ZAR04, MAR04, ZHO93, ZBL08, BLI09, ZBL06].

##### IV. 1. 1. Transformations conformes des encoches

Une transformation conforme est la représentation d'une surface limitée dans le plan d'une autre variable complexe [ZAR04, MAR04, ZBL08]. Quand on cherche à déterminer la distribution du champ entre deux limites équipotentielles d'une forme non uniforme, le principe de base de la méthode sera expliqué dans l'exemple d'une encoche infiniment profonde comme le montre la Fig. IV.1.



**Fig. IV.1. Ouverture d’encoche infiniment profonde présentée dans le plan S.**

Quatre transformations conformes sont exigées pour transformer notre entrefer encoché en un entrefer lisse dans lequel la solution du champ est connue. La Figure IV. 2 montre cela. Le plan S contient la forme initiale avec encoches ; le plan K contient l’entrefer lisse tandis que les plan Z, W, et T sont utilisés pour des transformations intermédiaires [ZAR04, MAR04].



**Fig. IV. 2. Les transformations utilisées.**

La géométrie avec encoches du plan S, dans son arrangement circulaire d’origine, doit être transformée en un modèle linéaire dans le plan Z. Pour ce faire, on utilise une transformation logarithmique, conforme, qui transforme les systèmes de coordonnées cylindriques en un système de coordonnées cartésiennes [ZAR04, MAR04, MJP04]. La transformation logarithmique entre le plan S et le plan Z est donnée par :

$$z = \ln(s)$$

$$\text{avec } \begin{cases} s = m + jn = re^{j\theta} \\ z = x + jy \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Le lien entre les coordonnées dans les plans S et Z est :

$$\begin{cases} x = \ln(r) \\ y = \theta \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

La prochaine étape consiste à transformer la structure géométrique du plan Z en celle du plan W en utilisant la transformation de Schwarz-Christoffel [MAR04].

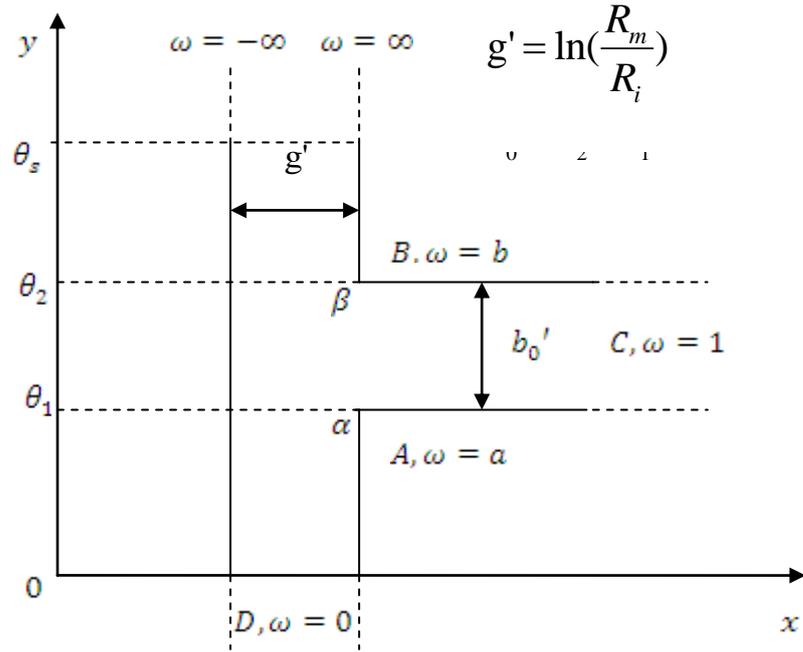


Fig. IV.3. Ouverture de l'encoche dans le plan Z

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\omega} = j \frac{g'}{\pi} \frac{(\omega-a)^{0.5}(\omega-b)^{0.5}}{(\omega-1)\omega} \\ z = j \frac{g'}{\pi} \left[ \ln \left| \frac{1+p}{1-p} \right| - \ln \left| \frac{b+p}{b-p} \right| - \frac{2(b-1)}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{b}} \right) \right] + C \end{cases} \quad (IV.3)$$

avec

$$p = \sqrt{\frac{\omega+b}{\omega-b}}, \quad C = \ln(R_i) + j\theta_2$$

Les constantes  $a$  et  $b$ , qui représentent les valeurs de  $\omega$  dans les coins, sont données par :

$$\begin{cases} b = \left[ \frac{b_0'}{2g'} + \sqrt{\left( \frac{b_0'}{2g'} \right)^2 + 1} \right]^2 \\ a = \frac{1}{b} \end{cases} \quad (IV.4)$$

Pour déterminer la distribution du champ dans la région de l'encoche, une autre transformation du plan T au plan W est exigée. Cette transformation est donnée par [MAR04]:

$$t = j \frac{g'}{\pi} \ln(\omega) + \ln(R_i) + j \frac{\theta_i}{2} \quad (IV.5)$$

La dernière transformation change les deux plaques parallèles (Fig. IV.4) en une forme circulaire qui modélise l'entrefer d'une machine à aimants permanents sans encoches. Pour accomplir cela, une transformation exponentielle est utilisée dont la forme est la suivante :

$$\begin{cases} k = e^t \\ k = R_i e^{j(\frac{g'}{\omega} \ln(\omega) + \frac{\theta_s}{2})} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

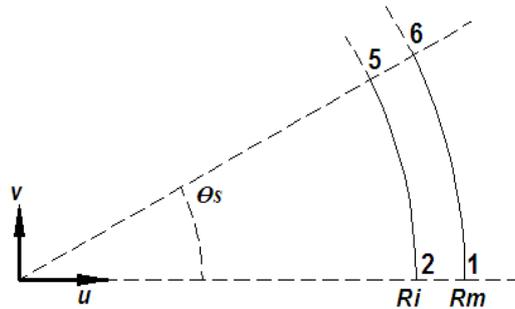


Fig . IV.4. Ouverture d'encoche dans le plan K.

#### IV. 1. 2. Forme du champ dans le plan S

D'après la théorie des nombres complexes, on sait que n'importe quelle fonction de variables complexes  $s = m + jn$  dans le plan S satisfait l'Equation de Laplace [ZAR04, MAR04]. Ces fonctions sont dites fonctions conjuguées. Soit  $k = u(m;n) + jv(m;n)$  une fonction quelconque de  $s$ , donc les fonctions  $u$  et  $v$  satisfont l'Equation de Laplace.

D'après les calculs développés par [ZAR04, ZHO93, ZBL08], on peut écrire l'induction dans le plan S sous la forme suivante :

$$B_s = B_k \left( \frac{\partial k}{\partial s} \right)^* \quad (\text{IV.7})$$

La dérivée partielle  $\frac{\partial k}{\partial s}$  s'exprime par :

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (\text{IV.8})$$

Les dérivées partielles dans l'Equation (IV.8) sont définies par des transformées conformes entre les plans complexes correspondants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial k}{\partial t} = e^t = e^{\ln(k)} = k \\ \frac{\partial y}{\partial x} = j \frac{g'}{\pi} \frac{1}{\omega} \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} = -j \frac{\pi}{g'} \frac{(\omega-1)\omega}{(\omega-a)^{0.5}(\omega-b)^{0.5}} \\ \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{s} \end{array} \right. \quad (IV.9)$$

La substitution des Eqs. ( III.8) et (IV.8) dans l'Eq. (IV.9) Produit :

$$B_s = B_k \left[ \frac{k}{s} \frac{(\omega-1)\omega}{(\omega-a)^{0.5}(\omega-b)^{0.5}} \right]^* \quad (IV.10)$$

Puisque  $B_s$  est l'induction dans l'entrefer encoché, alors la partie de l'Eq. (IV.10), qui multiplie  $B_k$  peut être définie comme la perméance relative complexe de l'entrefer  $\lambda$ . L'Eq. (IV.10) devient alors :

$$B_s = B_k \lambda^*$$

avec

$$\lambda = \frac{k}{s} \frac{(\omega-1)\omega}{(\omega-a)^{0.5}(\omega-b)^{0.5}} \quad (IV.11)$$

Puisque  $k$  est une fonction de  $t$  qui est elle-même une fonction de  $\omega$  et  $s$ , la coordonnée connue dans la géométrie actuelle, qui est aussi fonction de  $\omega$  ; la perméance complexe est indirectement une fonction non linéaire de  $\omega$ . Le problème majeure est que  $\omega$  est liée à  $z$  par une équation non linéaire. S'il est demandé d'évaluer l'induction en un certain point géométrique dans l'entrefer encoché dans le plan  $S$ , la valeur de  $z$ , qui correspond à ce point dans le plan  $Z$ , peut être calculée simplement en sachant que  $z = \ln(s)$ .

Une technique itérative est exigée pour résoudre cette équation non linéaire et déterminer la valeur de  $\omega$  pour  $z$  donnée. L'algorithme de l'optimisation des moindres carrés linéaires, construit via MATLAB (fonction lsqnonlin), a été utilisé pour résoudre ce problème. La norme résiduelle qui est minimisée est définie comme :

$$\|F\| = [R_e(z - z(\omega))]^2 + [\text{Im}(z - z(\omega))]^2 \quad (IV.12)$$

où le  $z$  est la valeur réelle et  $z(\omega)$  est la valeur  $a$  calculée en utilisant l'Eq. (IV.4) avec  $\omega$  issue de l'itération courante. Puisque  $\lambda$  est un nombre complexe, il peut être écrit sous la forme suivante :

$$\lambda = \lambda_a + j\lambda_b \quad (IV.13)$$

Les formes d'ondes résultantes des parties réelles et imaginaires de  $\lambda$  sont montrées sur la **Fig. IV. 5**. Ces deux formes d'onde se répètent avec chaque ton de l'encoche. Elles peuvent être exprimées sous la forme de séries Fourier pour donner la fonction de la perméance relative complexe pour toutes les positions angulaires au milieu de l'entrefer. La série de Fourier est donnée par :

$$\lambda_a(r, \theta) = \lambda_0(r) + \sum_{n=1}^{N_\lambda} \lambda_{an}(r, \theta) \cos(nQ_s \theta)$$

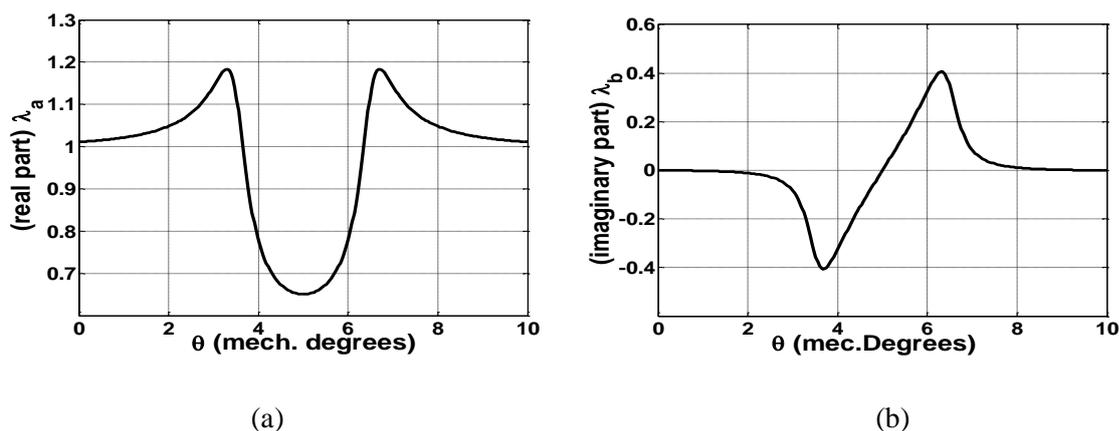
$$\lambda_b(r, \theta) = \sum_{n=1}^{N_\lambda} \lambda_{bn}(r, \theta) \sin(nQ_s \theta)$$
(IV.14)

où  $Q_s$  est le nombre d'encoches et  $N_\lambda$  est l'ordre maximal des coefficients de Fourier. Les coefficients de Fourier  $\lambda_{an}$  et  $\lambda_{bn}$  sont calculés à partir des formes d'onde représentées sur la Fig. (IV.5) en utilisant la transformation de Fourier discrète.

On peut déterminer les expressions de l'induction radiale et tangentielle, créées dans l'entrefer à stator encoché, en multipliant les expressions calculées précédemment Eqs. (II.29) et (II.30) et où la perméance complexe est donnée par l'Eq. (IV.11) :

$$B_{sr} = \text{Re}(B_k \lambda^*) = \text{Re}[(B_{ar} + jB_{a\theta})(\lambda_a - j\lambda_b)] = B_{ar}\lambda_a + B_{a\theta}\lambda_b$$
(IV.15)

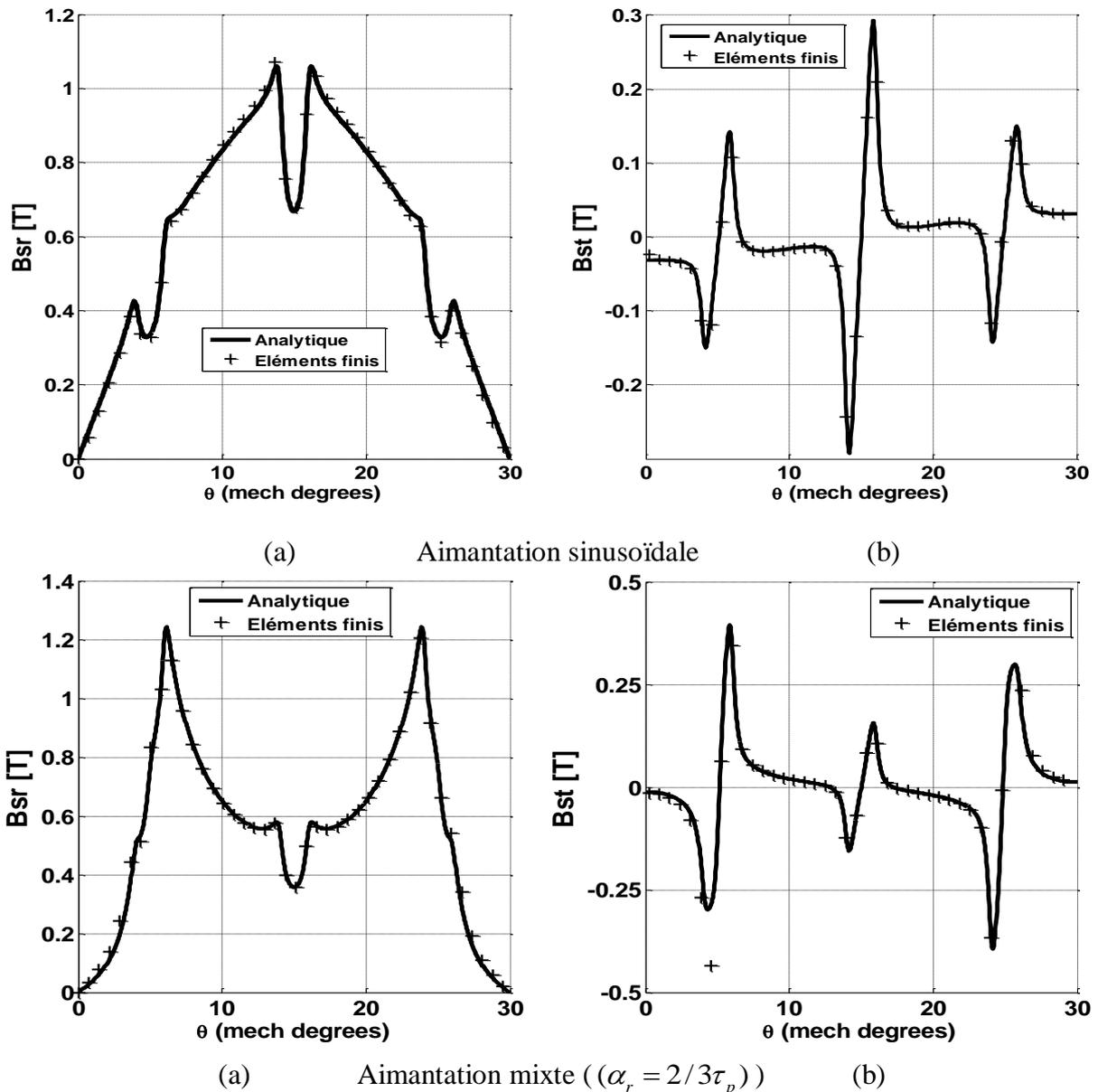
$$B_{s\theta} = \text{Im}(B_k \lambda^*) = \text{Im}[(B_{ar} + jB_{a\theta})(\lambda_a - j\lambda_b)] = B_{a\theta}\lambda_a - B_{ar}\lambda_b$$
(IV.16)



**Figs. IV. 5. Variations de la perméance complexe dans l'entrefer sur un pas dentaire**  
**(a) Partie réelle, (b) Partie imaginaire**

## IV. 2. Analyse des performances électromagnétiques

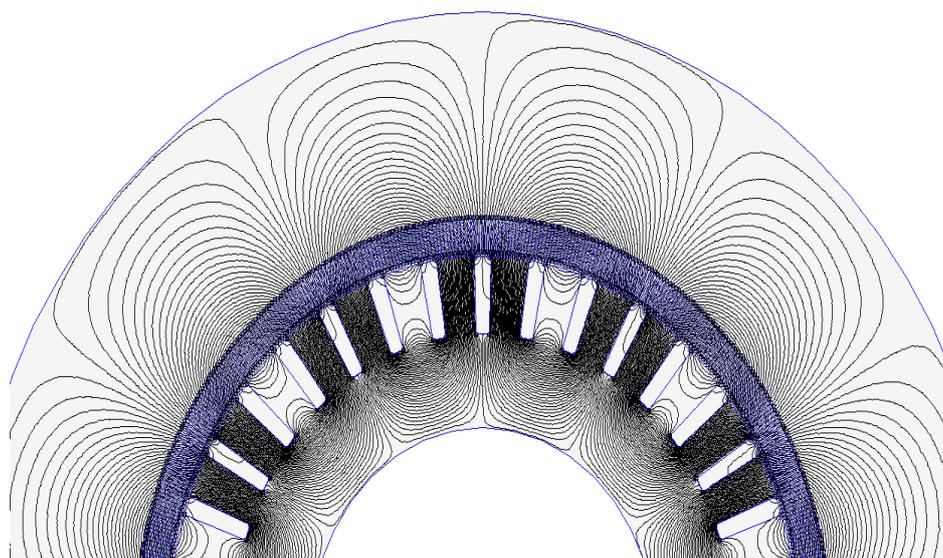
La Figure (IV.6) montre la concordance entre les résultats issus du modèle analytique que nous avons développé et les résultats obtenus à partir du calcul par éléments finis linéaires. Nous représentons successivement le maillage par éléments finis triangulaires de la structure étudiée et la carte du champ magnétique créée par les aimants dans le cas d'un stator encoché. Au niveau des formes d'ondes des inductions radiale et tangentielle, on constate une excellente concordance sous les mêmes hypothèses. Les inductions (**Figs. IV.6**) sont obtenues analytiquement en utilisant les inductions avec un stator lisse ainsi que les perméances relatives réelles et imaginaires de la Fig. (IV. 5).



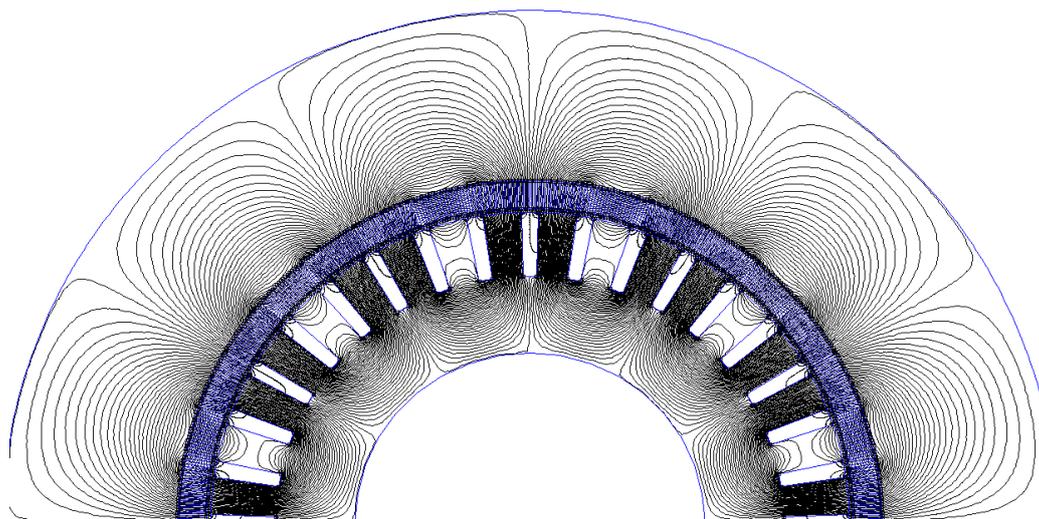
**Figs. IV. 6. Répartitions des inductions radiale et tangentielle dues aux aimants au milieu de l'entrefer pour différents sens d'aimantation**  
**a: Induction radiale, b) : Induction tangentielle**

### IV. 3. Etat de la saturation

Les figures (IV.7) représentent les lignes du champ magnétique au niveau de la machine. A partir de celles-ci, on peut relever les régions de la machine qui présentent les niveaux d'induction les plus élevés. Ces régions sont situées au niveau des dents statoriques et sur les côtés des bases inférieures des aimants. On constate aussi que la répartition de l'induction dans l'entrefer, obtenue en tenant compte de la caractéristique magnétique du fer, est pratiquement la même que celle calculée en régime linéaire.

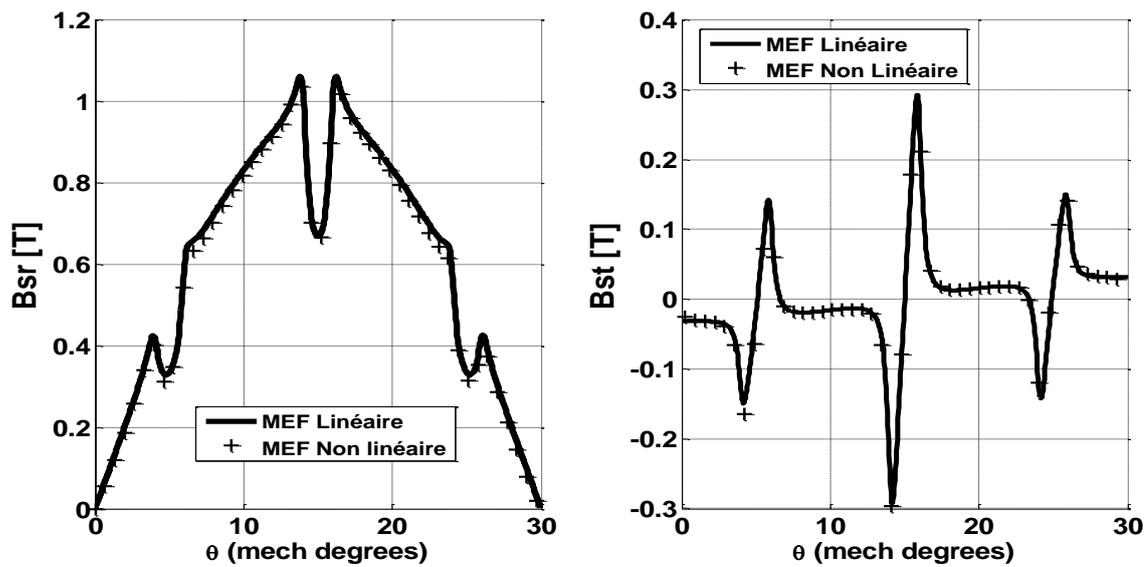


(Aimantation sinusoïdale).



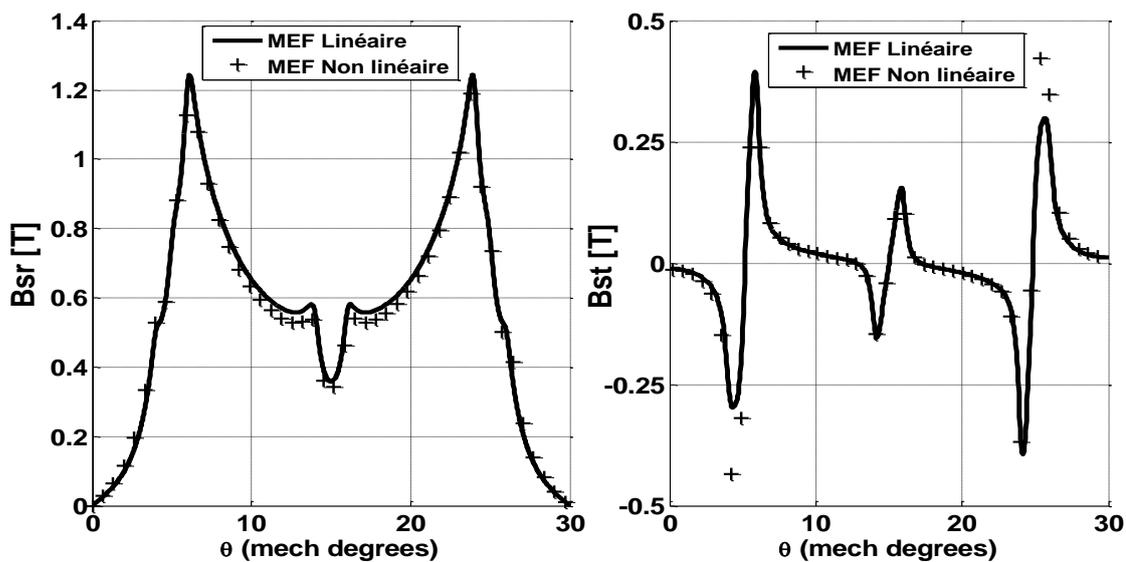
(Aimantation mixte).

**Figs. IV. 7. Illustrations des lignes de champ dues aux aimants (en état de saturation)**



(a) Aimantation sinusoïdale

(b)



(a) Aimantation mixte ( $\alpha_r = 2/3\tau_p$ )

(b)

**Figs. IV. 8. Répartitions des inductions radiale et tangentielle dues aux aimants au milieu de l'entrefer pour différents sens d'aimantation**

**a) : Induction radiale, b) : Induction tangentielle**

#### IV. 4. Calcul analytique de la force électromotrice

On utilise la loi de Faraday pour calculer la FEM à vide, induite dans un enroulement statorique, créée par l'induction magnétique :

$$E_c(t) = -N_c \frac{d\phi_c}{dt} \quad (IV.17)$$

où  $N_c$  est le nombre de conducteurs.

Le flux est l'intégral de l'induction magnétique créée dans l'entrefer [ZAR04] :

$$\phi_c(t) = L_u R \int_{-\frac{\gamma_c}{2}}^{\frac{\gamma_c}{2}} B_{sr}(r, \theta, t) dt \quad (IV.18)$$

avec  $\gamma_c = y_c \frac{2\pi}{Q_s}$

$$B_{sr}(r, \theta, t) = B_r(r, \theta, t) * \lambda_a(r, \theta) + B_\theta(r, \theta, t) * \lambda_b(r, \theta) \quad (IV.19)$$

$$\begin{aligned} B_{sr}(r, \theta, t) = & \sum_{n=1.3.5\dots}^{\infty} B_m \cos(np(\theta - \omega_{rm}t)) \left\{ \lambda_0 + \sum_{m=1}^{N_s} \lambda_{am} \cos(mQ_s(\theta - \theta_{s0})) \right\} \\ & + \sum_{n=1.3.5\dots}^{\infty} B_{\theta n} \sin(np(\theta - \omega_{rm}t)) \sum_{m=1}^{N_s} \lambda_{bm} \sin(mQ_s(\theta - \theta_{s0})) \end{aligned} \quad (IV.20)$$

où  $B_m, B_{\theta n}, \lambda_0, \lambda_{am}, \lambda_{bm}$  et  $\omega_{rm}$  sont respectivement les composantes radiale et tangentielle de l'induction créée dans l'entrefer à stator lisse données par les Eqs (II.29) et (II.30), les coefficients de série de Fourier de la perméance complexe et la vitesse de rotation du rotor [tr/s].

$$\begin{aligned} \phi(t) = L_u R \sum_{n=1.3.5\dots}^{\infty} & \left\{ \lambda_0 B_m \frac{2}{np} \sin(np \frac{\gamma_c}{2}) + \sum_{m=1}^{N_s} (B_m \lambda_{am} - B_{\theta n} \lambda_{bm}) \frac{\sin((np + mQ_s) \frac{\gamma_c}{2})}{np + mQ_s} A_m \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{N_s} (B_m \lambda_{am} + B_{\theta n} \lambda_{bm}) \frac{\sin((np - mQ_s) \frac{\gamma_c}{2})}{np - mQ_s} A_m \right\} \cos(np \omega_{rm} t) \end{aligned} \quad (IV.21)$$

Avec  $A_m = \begin{cases} 1 \\ \cos(m\pi) \end{cases}$

Pour l'égalité  $np = mQ_s$ , il faut remplacer le terme  $\frac{\sin((np + mQ_s)\frac{\gamma_c}{2})}{np + mQ_s}$  par  $\frac{\gamma_c}{2}$ .

La FEM induite dans une phase peut être calculée à partir de la somme des FEMs induites dans les enroulements connectés en série de la phase. Si on prend en considération le facteur de distribution des bobinages tel que :

$$k_{dn} = \frac{\sin(npq\alpha/2)}{q\sin(n\alpha/2)} \quad (\text{IV.22})$$

où  $q$  est le nombre d'encoches par pôle et par phase et où  $\alpha$  est le déphasage entre deux tensions induites par deux enroulements adjacents. Dans un enroulement triphasé, le nombre de spires par phase reliées en série est donné par :

où  $a_p$  est le nombre de voies en parallèle ; sa valeur varie entre  $[0 \ 2p]$ .

A partir des Eqs. (III.17) et (III.21), on aboutit à l'expression finale suivante de la FEM :

$$E_c(t) = N_s \omega_{rm} L_u R \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} K_{dn} \left\{ \lambda_0 B_{rn} \frac{2}{np} \sin(np \frac{\gamma_c}{2}) + \sum_{m=1}^{N_k} (B_{rn} \lambda_{am} - B_{\theta n} \lambda_{bm}) \frac{\sin((np + mQ_s)\frac{\gamma_c}{2})}{np + mQ_s} A_m \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{N_k} (B_{rn} \lambda_{am} + B_{\theta n} \lambda_{bm}) \frac{\sin((np - mQ_s)\frac{\gamma_c}{2})}{np - mQ_s} A_m \right\} \sin(np\omega_{rm}t - \alpha_0) \quad (\text{IV.23})$$

où  $\alpha_0$  est égal à zéro pour la phase A ;  $\frac{2\pi}{3}$  pour la phase B et  $\frac{4\pi}{3}$  pour la phase C.

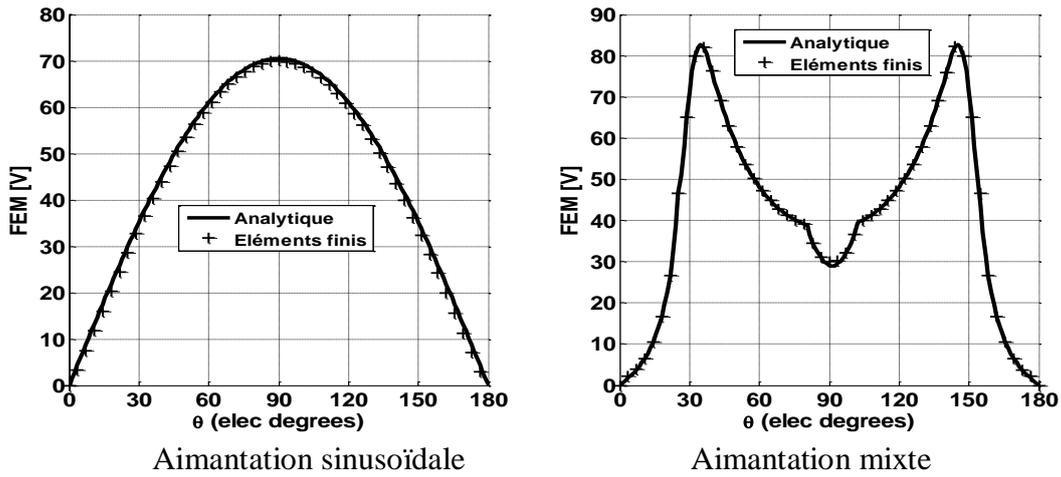
#### IV. 5. Calcul analytique du couple électromagnétique

Le couple électromagnétique, développé par la machine en tenant compte de l'effet des encoches, avec une alimentation sinusoïdale ou rectangulaire, en utilisant l'expression de la puissance développée par les trois phases du stator, est donné par :

$$\Gamma(t) = -\frac{P}{\Omega} \sum_{m=1}^3 E_m(t) i_m(t) \quad (\text{IV.24})$$

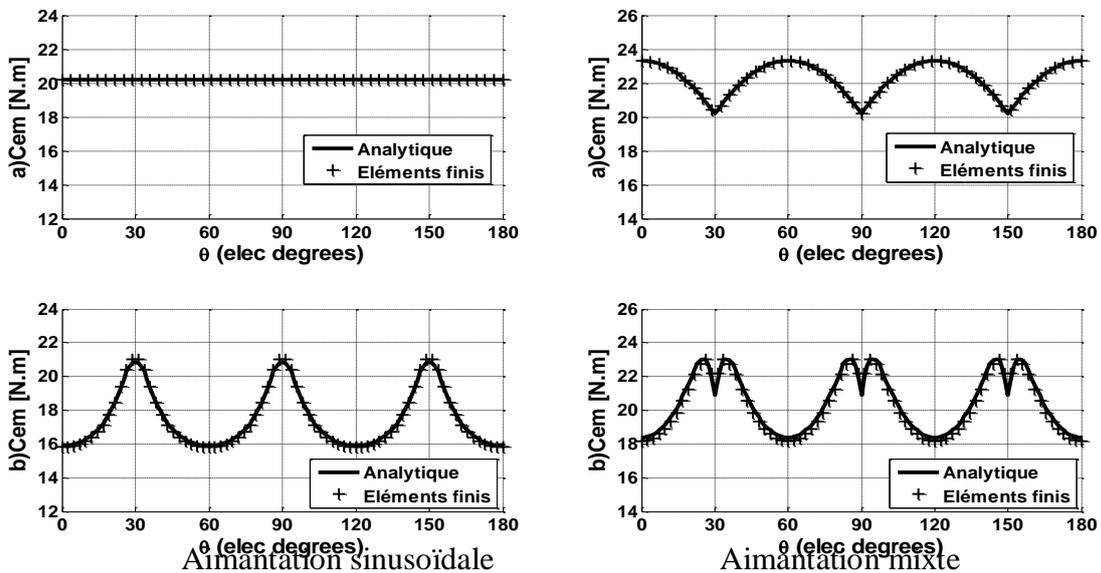
où  $E_c$ ,  $i_m$ , et  $\Omega$  représentent respectivement la force électromotrice de la phase m, le courant de la phase m et la vitesse de rotation du rotor en rad/s

Les formes d'ondes de la FEM calculées à partir du modèle analytique, en tenant compte de l'effet des encoches, au stator ainsi que celles issues de la méthode des éléments finis sont représentées sur la **Fig. IV. 9** pour ( $\beta = 2/3$ ).



**Figs. IV.9. Répartition de la f.é.m par phase.**

Le couple électromagnétique instantané, en fonctionnement synchrone autopiloté, développé par la machine à aimants dans le cas d’une alimentation sinusoïdale et avec le cas d’une alimentation par des créneaux de courant de type 120°, est représenté sur les **Figs. IV.10 et 11** pour deux valeurs de  $\beta$  (2/3 et 3/3). Les ondulations du couple électromagnétique sont dues au couple de détente qui dépend de l’ouverture des aimants, des encoches et de l’alimentation. Ces ondulations sont atténuées en augmentant, par exemple, l’ouverture des aimants ( $\beta = 3/3$ ). Le couple de détente est nul en adoptant une alimentation sinusoïdale qui est plus adaptée pour ce type de structure (fem pratiquement sinusoïdale).

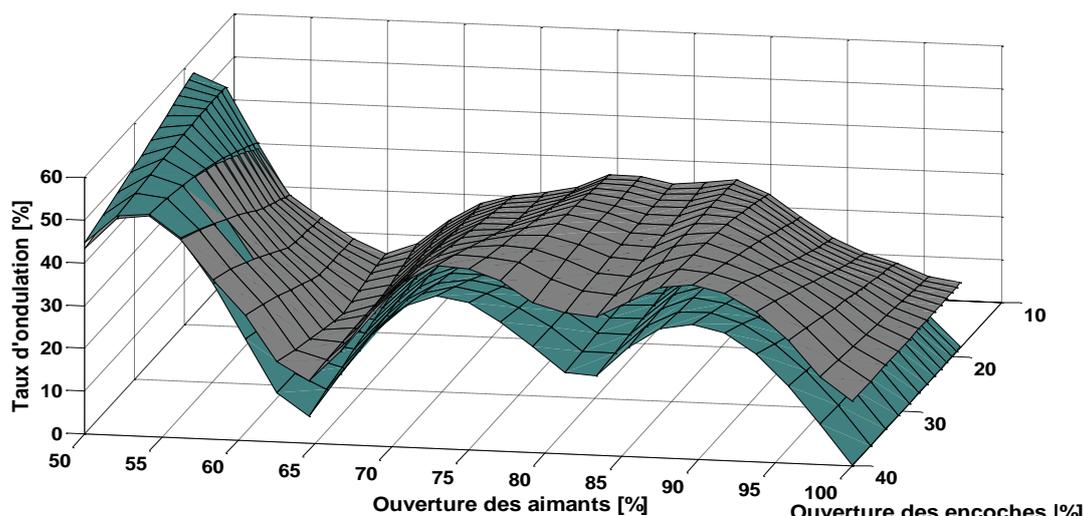


**Figs. IV.10. Couple d’interaction produit par les aimants ( $\alpha_p = \tau_p$ ).**

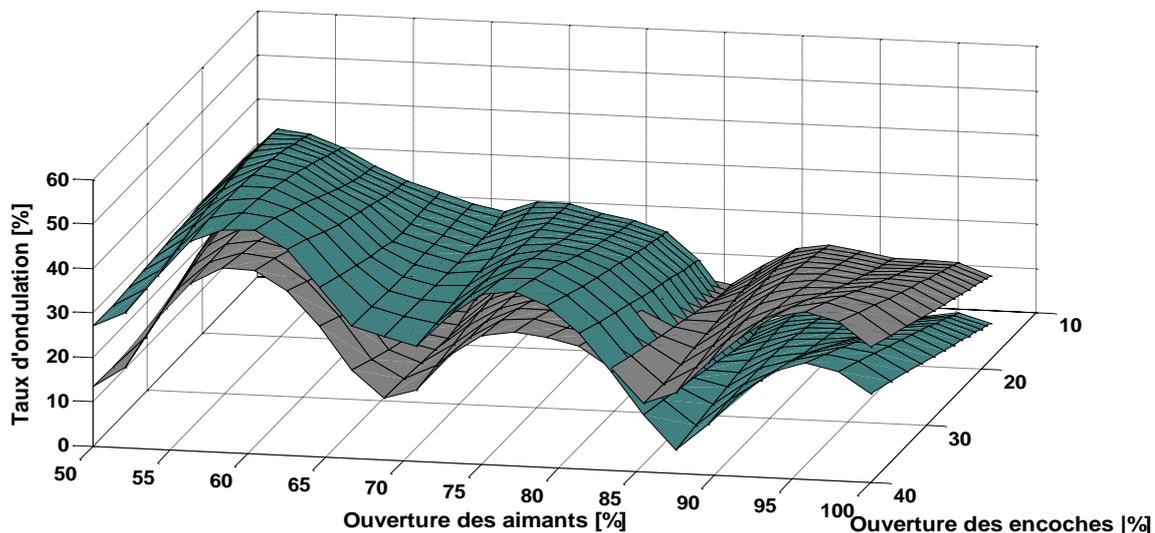
- a) Alimentation sinusoïdale
- b) Alimentation rectangulaire (120°)

#### IV. 6. Influence des paramètres géométriques de la machine sur les ondulations du couple électromagnétique

La Figure (IV.11) montre l'influence du volume des aimants sur la valeur de taux d'ondulation. D'après cette représentation, on constate que le taux d'ondulation est voisin ou tend vers zéro quand l'ouverture des aimants est complète sur le pas polaire. De plus les harmoniques sont ainsi réduits, pour cela on peut conclure que la forme de la f.é.m. est pratiquement adaptée à celle du courant.



Aimantation sinusoïdale



Aimantation mixte

**Figs. IV.11. Influence du volume de l'aimant sur le taux d'ondulation ( $\alpha_p = 2/3\tau_p$ ).**

- a) Alimentation sinusoïdale : courbes en couleur verte
- b) Alimentation rectangulaire (120°) : courbes de couleur grise foncée

#### IV. 7. Calcul du couple de détente

Le couple de détente est un couple pulsatoire dû à l'interaction de la denture statorique avec les aimants rotoriques. En d'autres termes, c'est un couple dû à la variation de l'énergie magnétique au sein du moteur lorsque le rotor tourne à vide. Le couple de détente développé par la structure étudiée est calculé en considérant le moment des forces de Laplace s'exerçant sur l'ensemble des dents de la machine. D'après les calculs développés par [ZAR04, ZBL06], on a l'expression suivante du couple de détente par encoche suivante :

$$T_{encoche} = \frac{l_a}{2\mu_0} \left[ \int_a^b |B_k|^2 \left| \frac{g'}{\pi} k^2 \frac{\omega-1}{\omega(\omega-a)^{0.5}(\omega-b)^{0.5}} \right| d\omega \right] \quad (IV.25)$$

L'expression du couple de détente total développé par la machine étudiée est :

$$T_c = \sum_{k=1}^{Q_s} T_{encoche} \quad (IV.26)$$

où  $Q_s$  est le nombre d'encoches statoriques. On a utilisé un outil informatique pour calculer l'intégrale de l'Eq. (IV.25). On doit effectuer l'intégrale de  $a+\varepsilon$  à  $b-\varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un nombre proche de zéro. Les Figures (IV.12, IV.13) montrent la représentation du couple de détente pour deux sens d'aimantation. Les harmoniques obtenues dépendent de la position initiale de l'aimant par rapport à la denture statorique, du volume des aimants permanents et de la forme des dents statoriques.

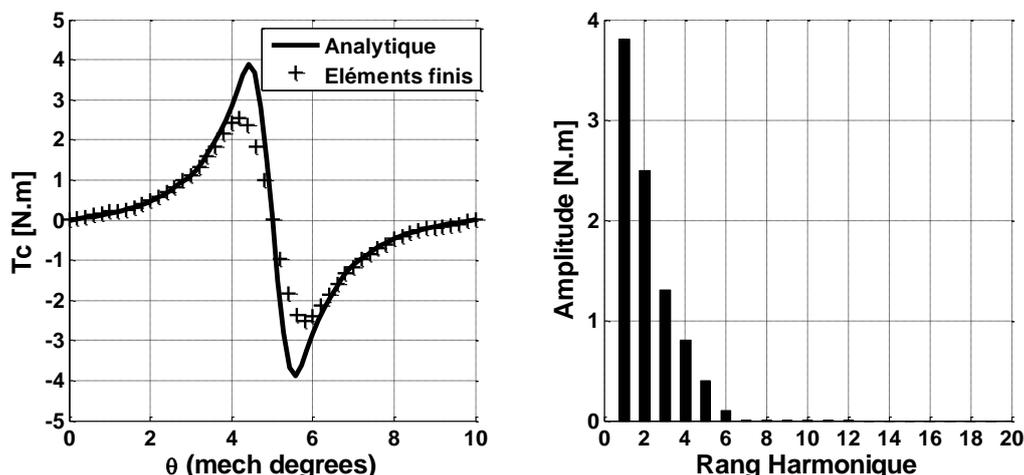


Fig. IV.12. Couple de détente (aimantation sinusoïdale) et son spectre harmonique

$$(\varepsilon/a = 10^{-6})$$

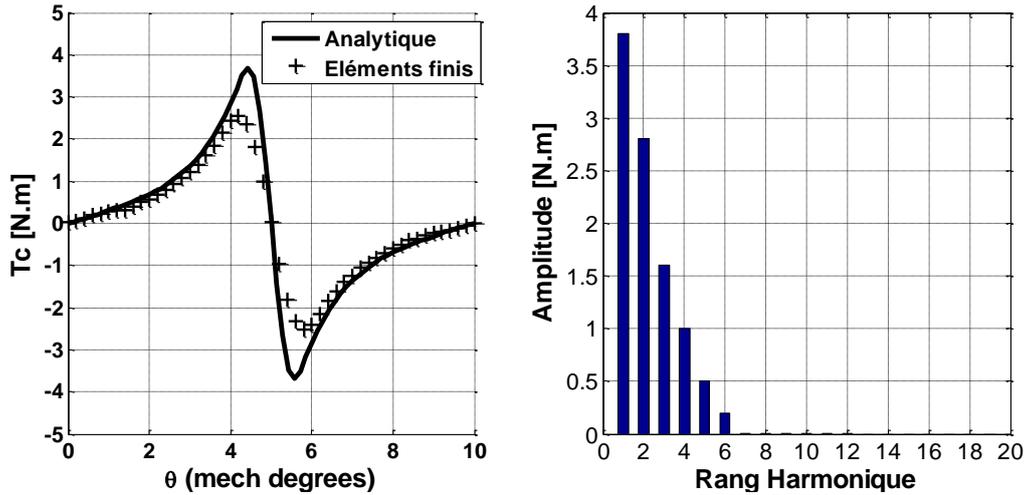


Fig. IV.13. Couple de détente (aimantation mixte) et son spectre harmonique

$$((\varepsilon/a = 10^{-6}))$$

#### IV. 8. Influence des paramètres géométriques de la machine sur le couple de détente

##### IV. 8. 1. Influence de l'ouverture des aimants

Pour les inducteurs à aimantation sinusoïdale où mixte, l'ouverture de l'aimant sur un arc polaire influence directement la forme et l'amplitude du couple de détente (Fig. IV.14.a). Sur la Figure (IV.14.b), on observe que ce couple est fortement réduit pour certaines largeurs de l'arc polaire. On constate aussi que les amplitudes du couple créé par l'aimantation mixte est grande par rapport à celle d'une aimantation sinusoïdale. Ainsi, il est préférable d'utiliser les aimants sinusoïdaux avec une ouverture complète sur le pas polaire pour annuler ou minimiser les ondulations du couple.

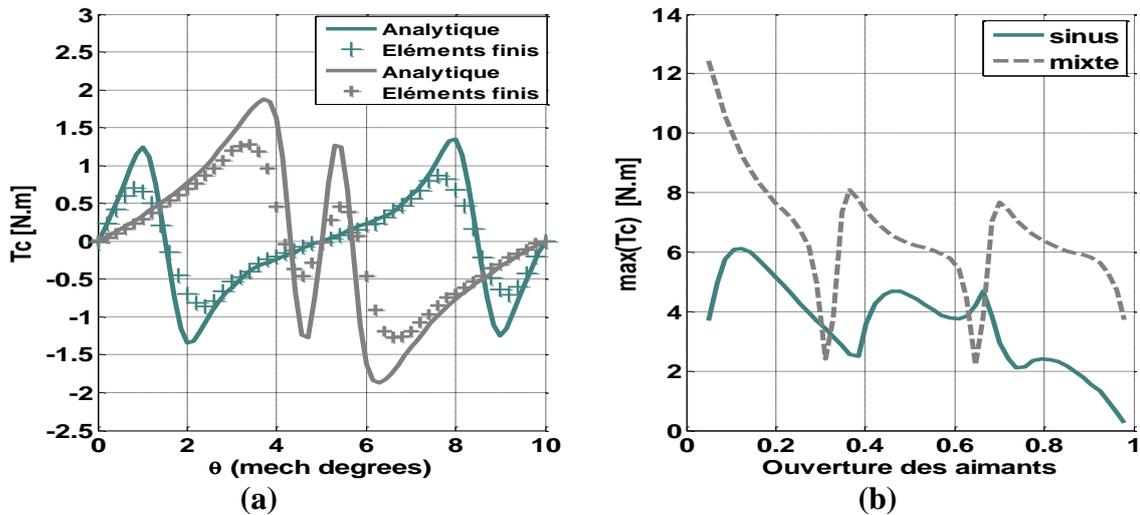


Fig. IV.14. Couples de détente pour deux valeurs optimales ( $\alpha_p = 0.9\tau_p$ ,  $\alpha_r = 0.64\tau_p$ ).

## IV.9. Etude comparée de structures à faibles ondulations de couple et choix des solutions

Les calculs analytique et numérique précédents ont permis d'analyser les différentes techniques permettant de minimiser les ondulations du couple. De nombreuses possibilités sont offertes et nous présentons maintenant une sélection des structures de machines étudiées. Rappelons que nous nous intéressons aux machines à aimants montés sur la surface rotorique et que nous considérons que le couple global est obtenu par combinaison directe des différentes composantes fondamentales et des harmoniques qui en sont les sources.

### IV. 9. 1. Machines à nombre non entier d'encoches par pôle et par phase

Quantitativement, les ondulations du couple de détente sont prépondérantes si la structure du moteur n'est pas modifiée. Dans le but de les réduire, nous étudions les machines à un nombre non entier d'encoches par pôle et par phase. Dans ce cas, la périodicité des encoches n'est plus un multiple de la périodicité des aimants [BBP06].

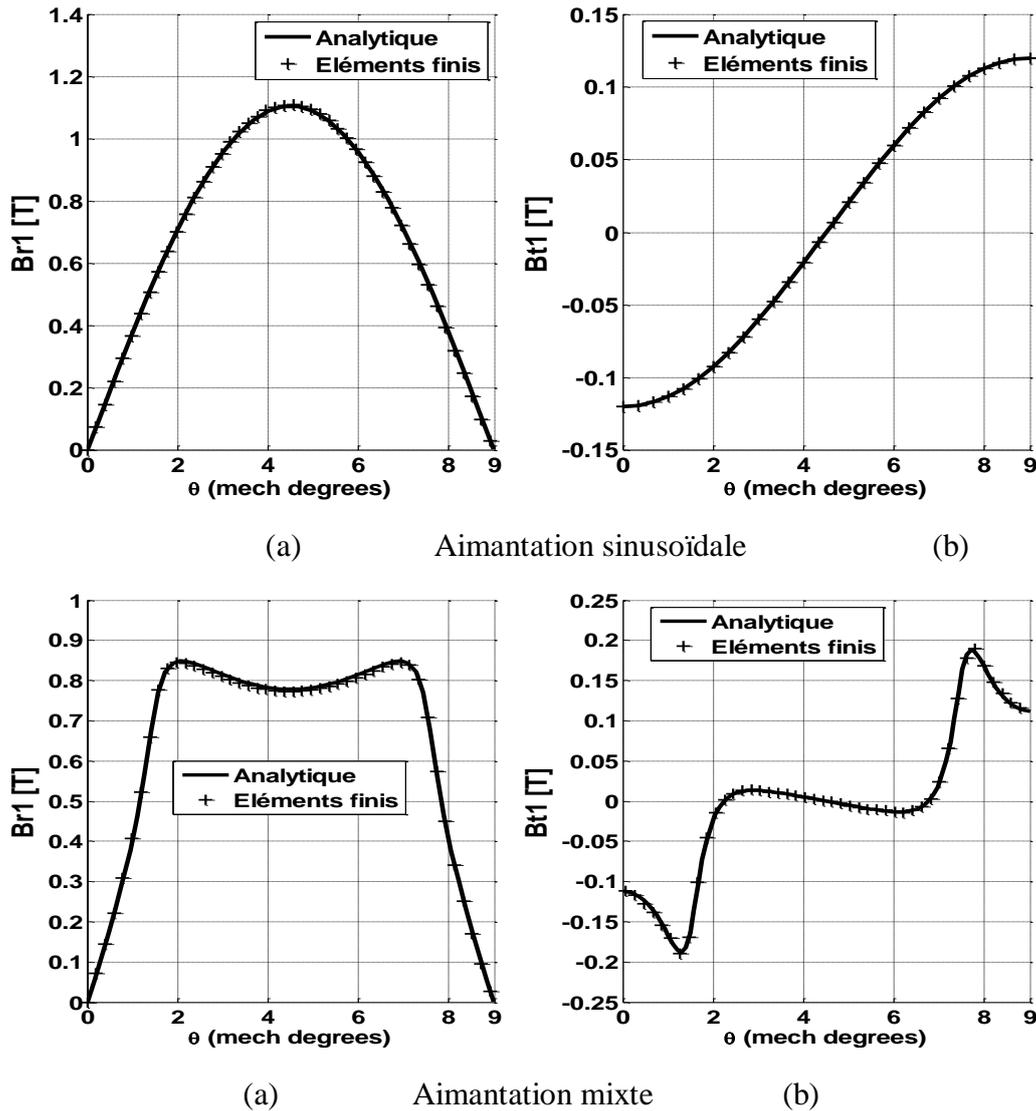
#### IV. 9. 1. 1. Règles de bobinage

Les encoches étant régulièrement réparties sur la périphérie du stator, il est donc possible de s'affranchir du nombre de pôles en adoptant une représentation qui ramène la position relative des encoches par rapport aux pôles sur une seule paire de pôles en faisant intervenir la périodicité du bobinage donnée par la relation  $q = PGCD(Q_s, p)$  où  $Q_s$  est le nombre total d'encoches de stator [GID08, PSA04, SMP04]. Dans ce cas, on définit le nombre d'encoches ayant des positions différentes par rapport à une paire de pôles par la relation  $Q_t = Q_s / q$ .

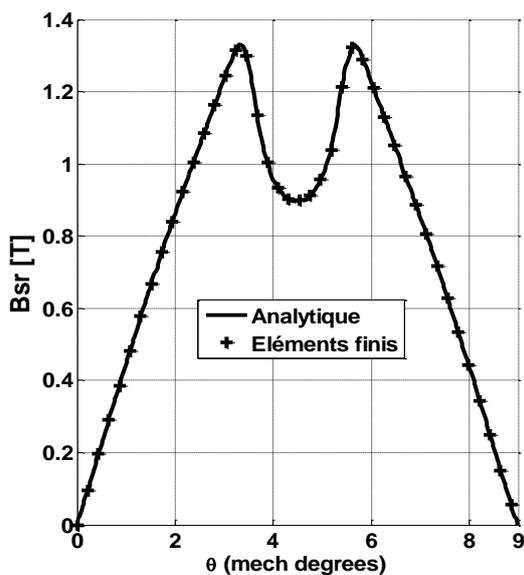
Pour obtenir un bobinage symétrique triphasé, il faut vérifier les relations suivantes :

- le rapport  $Q_t / PGCD(Q_s, p)$  entre, d'une part, le nombre total  $Q_t$  d'encoches de stator et, d'autre part, le Plus Grand Commun Diviseur de  $Q_t$  et  $2p$ , est égal à un multiple du nombre de phases  $N$  de l'alimentation de la machine;
- le rapport  $nepp = Q_t / (2pN)$  entre le nombre total d'encoches et le produit du nombre d'aimants par le nombre de phase est égal à un nombre non entier ou fractionnaire (dans ce paragraphe, nous ne considérerons que les machines à un nombre non entier d'encoches par pôle et par phase);
- le bobinage statorique comporte au moins un bobinage à une couche, à  $N$  conducteurs de phase symétriques, déphasés entre eux d'un angle électrique de  $360^\circ/N$  et de périodicité donnée par  $q = PGCD(Q_s, p)$ ;

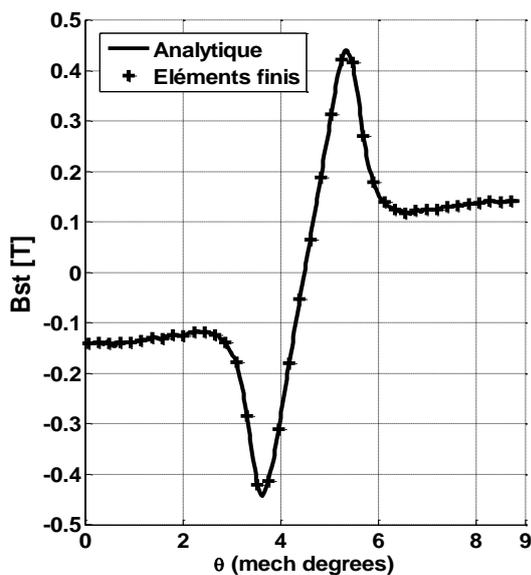
Pour les mêmes dimensions de la machine étudiée, mais cette fois avec un nombre de pôles de 40 pour 36 encoches et une aimantation de 0.8 T, alors la machine caractérisée par  $q$  qui est fractionnel (nombre d'encoche par pôle et par phase) égale 0.3. Les figures (IV.15) montrent la répartition du champ au milieu de l'entrefer pour les deux sens d'aimantation. On constate que l'amplitude du champ obtenue à partir d'une aimantation sinusoïdale est supérieure à l'aimantation des aimants. Cela se traduit par la concentration du flux dans l'entrefer pour les machines à pas polaire petit.



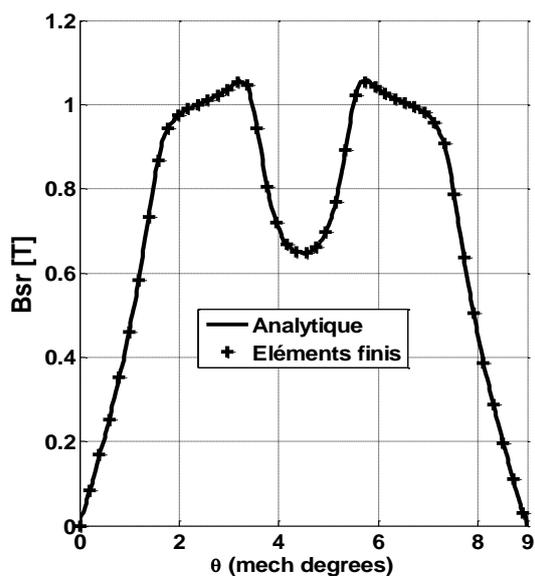
**Figs. (IV. 15). Répartitions des inductions radiale et tangentielle dues aux aimants au milieu de l'entrefer pour différentes sens d'aimantations (stator lisse)**



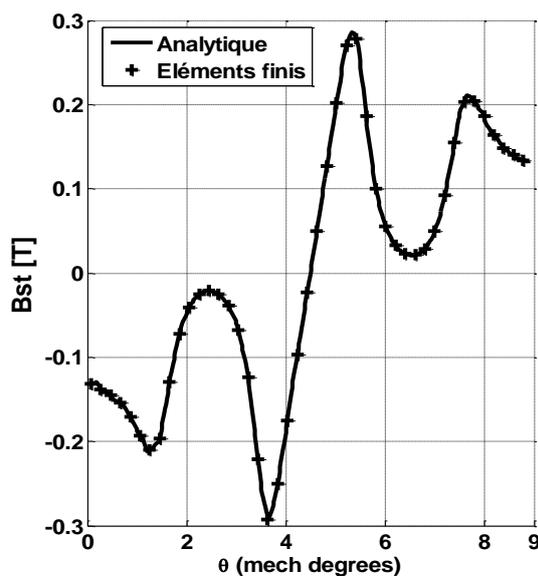
(a) Aimantation sinusoïdale



(b)



(a) Aimantation mixte



(b)

**Figs. (IV. 16).** Répartitions des inductions radiale et tangentielle dues aux aimants au milieu de l'entrefer pour différents sens d'aimantations (stator encoché)

<

### IV. 9. 2. Influence de la polarité sur le champ magnétique

La polarité a une grande influence sur le comportement du champ magnétique dans les machines à aimants. La Figure (IV.17) montre l'évolution de l'amplitude du champ en fonction de la polarité et du type de matériau constituant l'armature rotorique qu'elle soit magnétique ou amagnétique. On remarque bien que pour un nombre de paires de pôles inférieur à 15, il y a une différence d'amplitude entre les deux types du rotor. Par contre pour un nombre de paires de pôles plus élevé les deux caractéristiques se rapprochent.

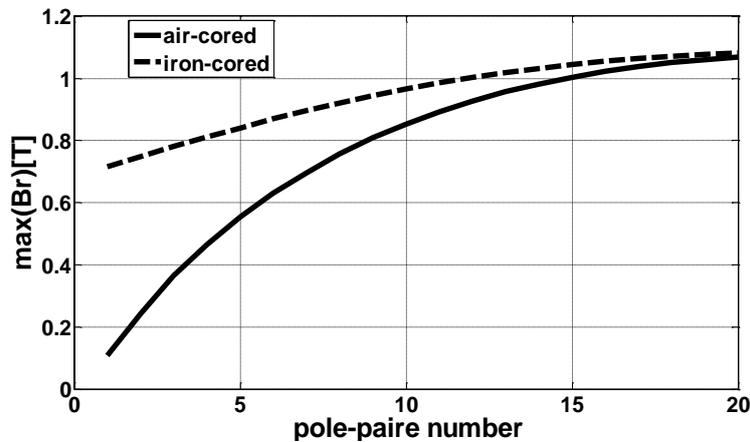
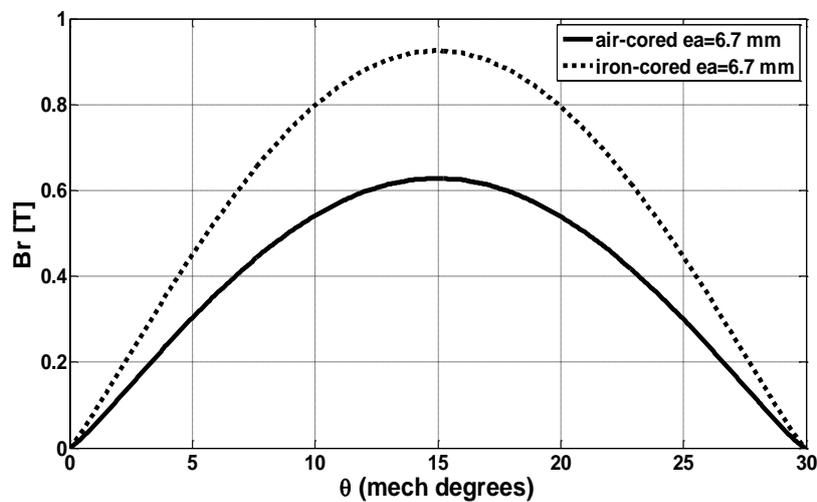
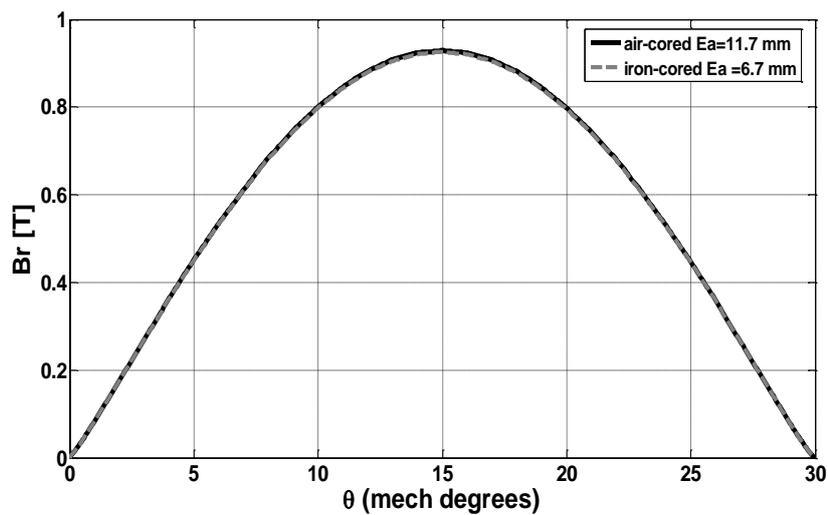


Fig. IV. 17. Evolution de l'amplitude du champ en fonction du nombre de pôles

La Figure (IV.18) montre la différence d'amplitude des inductions radiales dues aux aimants sinusoïdaux pour les deux types de rotor (magnétique ou amagnétique). En effet, la différence maximale entre celles-ci est de 0.29 T. Pour corriger cette différence en gardant la même armature rotorique (en Aluminium), on augmente l'épaisseur de l'aimant du prototype étudié jusqu'à 11.7 mm, là où on obtient une amplitude du champ égale à celle créée par une épaisseur d'aimant de 6.7 mm avec une armature rotorique magnétique. Alors on constate que le poids de la structure du rotor amagnétique est de 2.17 kg tandis que celui de la structure avec un rotor magnétique est de 3.86 kg.

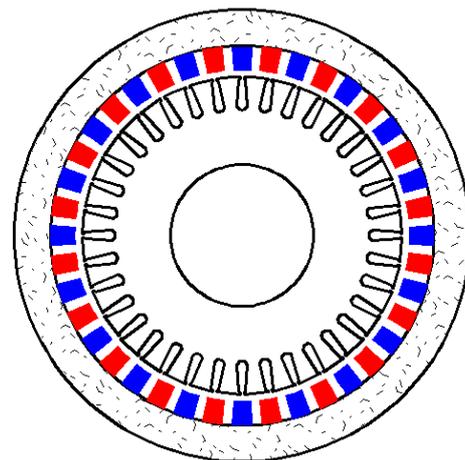
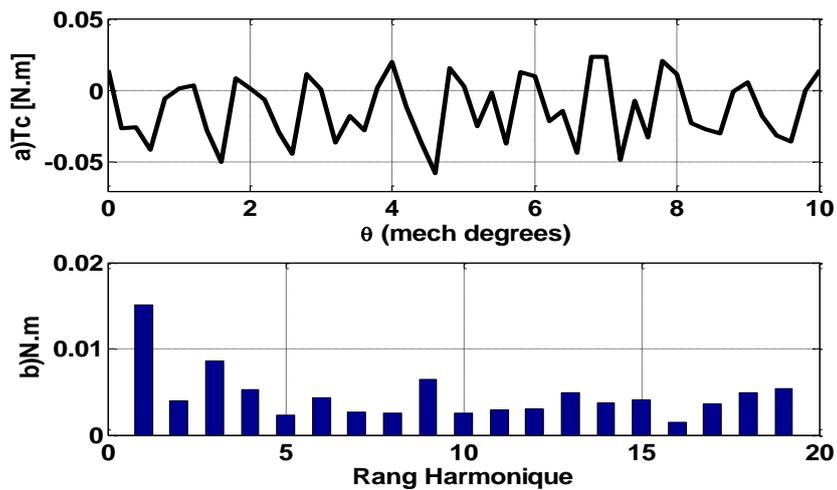


(a)

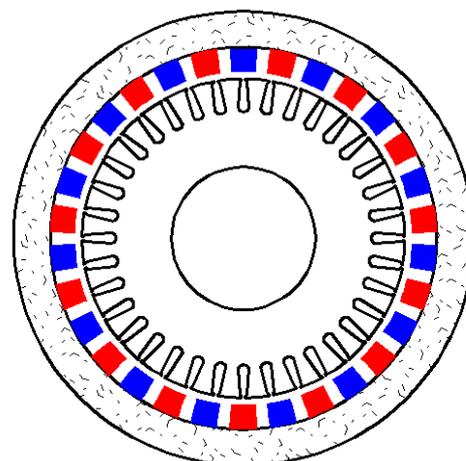
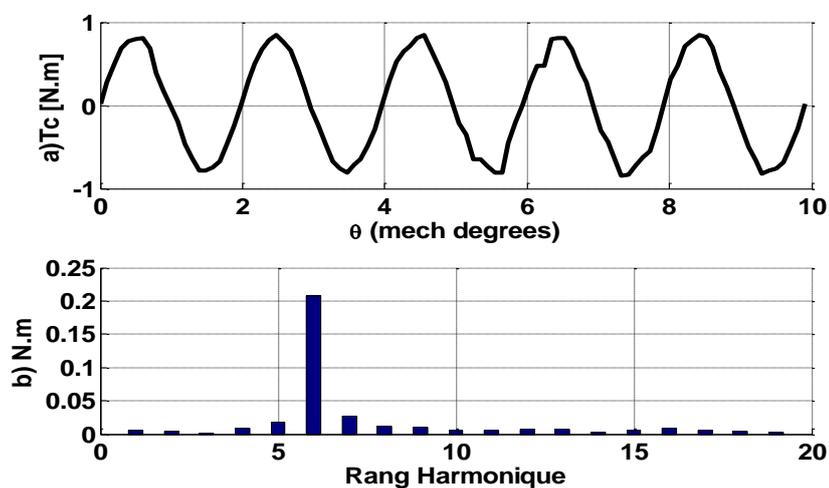


(b)

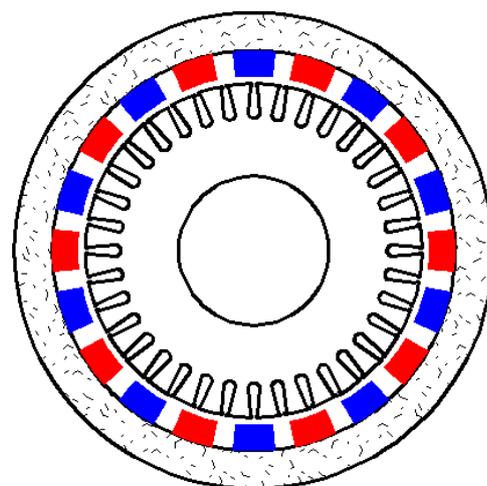
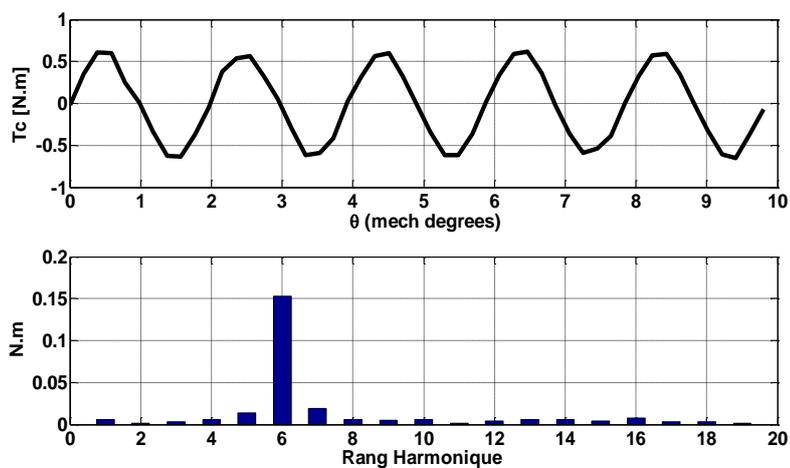
**Figs. (IV. 18). Répartitions des inductions radiales dues aux aimants au milieu de l'entrefer pour différents types de rotor (stator lisse)**



Moteur comportant 20 paires de pôles



Moteur comportant 15 paires de pôles



Moteur comportant 10 paires de pôles

Fig. IV. 19. Couples de détente en fonction du nombre de pôles

#### **IV.10. Conclusion**

Au niveau de ce chapitre, nous avons introduit de nouveaux concepts pour les calculs analytiques de champ dans les machines à aimants permanents montés sur la surface rotorique avec un stator encoché. Le concept de perméance complexe a été développé avec des transformations conformes pour les encoches dans plusieurs domaines puis, nous avons ramené les résultats au plan initial qui est celui du cas réel de la machine étudiée. Ces transformations nous ont aidé à calculer plus facilement les composantes radiales et tangentielles de l'induction dans l'entrefer.

Le choix des dimensions d'une machine donnée est lié aux performances exigées, aux contraintes de réalisation ainsi qu'à l'application envisagée. Certains paramètres comme l'épaisseur et l'ouverture de l'aimant sont le plus souvent imposés à partir d'un critère d'optimisation de la machine.

---

---

## Conclusion Générale

---

---

Tout au long de ce manuscrit, nous avons essayé de montrer que, même s'il est loin d'être récent, le problème de conception d'actionneurs électromagnétiques reste encore un problème compliqué et d'actualité dans la recherche en Génie Électrique.

Une attention particulière est actuellement accordée à la minimisation des ondulations du couple pour étendre le domaine d'application des machines à aimants permanents là où la précision est requise. Dans ce sens, deux voies sont aujourd'hui exploitées: Celle liée à l'électronique de puissance et à la commande pour avoir des semi-conducteurs capables d'assurer une commutation quasi-instantanée et minimiser ainsi les ondulations de couple engendrée par l'alimentation et celle liée à la structure de la machine elle-même (adaptation de la fem au signal du courant et minimisation du couple de détente). Un choix judicieux d'utilisation des aimants modernes, légers et performants que sont les plasto aimants, caractérisés par un poids faible et rigides envers la désaimantation.

Le travail réalisé, dans le cadre de ce mémoire, a permis de développer un modèle d'étude bidimensionnel utilisant des solutions analytiques pour modéliser les différentes structures de **machines synchrones à aimants permanents avec rotor externe non magnétique** à aimantation sinusoïdale ou mixte. Le calcul analytique développé, basé sur la résolution des équations du champ, donne des expressions explicites entre les performances de la machine et ses paramètres de dimensionnement. Il constitue ainsi un outil efficace pour l'analyse des différentes configurations de machines étudiées. Il permet, en particulier dans une procédure de dimensionnement suivant les contraintes mécanique et thermique, de dégager rapidement les solutions envisageables. Le modèle numérique utilisé, qui est basé sur la résolution des équations du champ par la méthode des éléments finis en 2D, tient compte de la structure réelle de la machine, des caractéristiques électriques et magnétiques de ses différentes parties et de son mode d'alimentation. A l'aide de cet outil, on a validé les résultats obtenus par le calcul analytique.

Nous avons utilisé une technique de calcul, pour déterminer le champ dans le cas d'une machine à stator encoché. Cette technique est la transformation conforme basée sur le développement et les transformations géométriques. Ainsi, grâce à cette transformation nous avons déterminé une relation entre les grandeurs définies dans le plan initial (stator lisse) et

celles définies dans le plan encoché. Nous avons exprimé l'induction dans le plan réel de la machine en multipliant la fonction perméance complexe par l'expression montrée dans le plan lisse.

Pour ce qui concerne le couple de détente, il est propre aux structures de machines à aimants permanents avec encoches au stator. C'est un couple parasite qui, à lui seul, peut être une source de rejet des ce type de machines. Le couple de détente accentue les ondulations du couple résultant et il est nécessaire de chercher des stratégies pour le minimiser et même l'annuler. Ces ondulations sont liées à la structure de l'inducteur et elles peuvent être réduites par l'utilisation des aimants avec une ouverture optimale.

Nous avons mis en évidence qu'un choix adapté du nombre d'encoches par paires de pôles permet de diminuer les pulsations du couple de détente. Pour ce nombre, nous montrons que son amplitude peut être significativement réduite en agissant sur l'ouverture des aimants et sur le nombre de blocs d'aimants élémentaires constituant chaque pôle rotorique.

Comme perspective à notre travail, afin de minimiser les ondulations de couple du type de structure étudiée, il est nécessaire de calculer, les machines synchrones à aimants qui sont caractérisées par un nombre d'encoches par pôle et par phase fractionnel, en tenant compte du couplage simultanément des équations électriques et électromagnétiques avec une prise en compte du mouvement. En effet, le comportement vibratoire dépend de la structure électromagnétique et mécanique et de la manière dont est conçue l'alimentation, donc de l'électronique de puissance et de sa commande.

**BIBLIOGRAPHIE :**

- ALH05 :** **Y. ALHASSOUN :** «Etude et mise en œuvre de machines à aimantation induite fonctionnant à haute vitesse », Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Toulouse (ENSEEIH), Mai. 2005.
- ALL99 :** **E. L. F. ALMEIDA :** « Une analyse évolutionniste du changement dans la technologie des moteurs électriques », Thèse de Doctorat de l'université Pierre Mendès, Grenoble, 1999.
- AME05 :** **A. AMEUR :** « Commande sans capteur de vitesse par DTC d'une machine synchrone à aimants permanents dotée d'un observateur d'ordre complet à mode glissant », Thèse de magister, université de Batna, Algérie, décembre. 2005.
- ARK87:** **A. ARKKIO:** « Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations », *Thèse de Doctorat*, Helsinki University of Technology, Finland, Décembre 1987.
- BBP06:** **N. BIANCHI, S. BOLOGNANI, M. D. PRE, AND G. GREZZANI:** «Design considerations for fractional-slot winding configurations of synchronous machines», IEEE Transaction. On Industry Applications, vol. 42, no. 4, pp. 997-1006, 2006.
- BEL00 :** **M. BELKADI :** «Calcul numérique d'une machine synchrone à aimants permanents à pôles lisses», Thèse de magister, ENP, 2000.
- BIB02:** **N. BIANCHI and S. BOLOGNANI:** « Design techniques for reducing the cogging torque in surface-mounted PM motors», IEEE Transaction. Ind. Appl., Vol. 38, No. 2, pp. 1259–1265, September. /October. 2002.
- BLI09:** **K. BOUGHRARA, B. LADGHEM CHIKOUCHE, R. IBTIOUEN, D. ZARKO, O. TOUHAMI:** « Analytical analysis of slotted air-gap surface mounted permanent-magnet synchronous motor with magnet bars magnetized in shifting direction», IEEE Transaction. On Magnetics, Vol. 45, No. 2, February 2009, pp. 747-758.
- BMB90:** **BERTRAND NOGAREDE, MICHEL LAJOIE-MAZENC et BERNARD DAVAT :** « Modélisation analytique des machines à aimants à induit sans encoches », Revue Phys. Appl. 25, juillet 1990.
- BNO90:** **B. NOGAREDE:** « Etude de moteurs sans encoches à aimants permanents de forte puissance à basse vitesse », Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1990.
- BOS98:** **A. BOSSAVIT:** « How weak is the "weak solution" in finite element methods», IEEE Transaction. On Magnetics, Vol. 34, No 5, pp 2429-2434, 1998.
- BOU08:** **K. BOUGHRARA :** « Modélisation analytique et numérique des performances électromagnétiques des moteurs synchrones à aimants permanents », Thèse de Doctorat d'Etat, ENP, Décembre 2008.
- BTI06:** **Y. BOUTORA, N. TAKORABET, R. IBTIOUEN, S. MEZANI:** «A New Proposed Method for Minimizing the Bandwidth and Skyline Storage for Triangular Finite Elements Meshes», CEFC 2006, IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, Miami (Florida-USA), June 6-9, April 30th - May 3rd 2006 pp:47 - 47.

- COL95:** **F. COLAMARTINO :** « Contribution à l'étude de la commande numérique des machines synchrones à aimants permanents- minimisations du couple-commande sans capteur de position », Thèse de Doctorat de l'université de Paris VI, Décembre 1995.
- CTB89:** **R. CARLSON, A TAVARES, J P BASTOS, M LAJOIE-MAJENC:** « Torque ripple attenuation in permanent magnet synchronous motors », Conference Record, IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, 1989, pp. 57-62.
- DAH96:** **P.A DAHONO, Y. SATO, T. KATAOKA:** « Analysis and minimization off ripple components of input current and voltage of PWM inverters », IEEE Transaction on Ind. App. Vol 32 N° 4, July 1996 pp 945-950.
- DEO96:** **R. P. DEODHAR, D. A. STATION, T. M. JAHANS, J. E. MILLER:** « Prediction of cogging torque using the flux-mmf diagram technique » IEEE transaction. On Ind. Applicat, vol. 32, No. 3, May/june 1996, pp. 569-576.
- DME04:** **DAVID MEEKER:** « Finite Element Method Magnetic », [dmeeker@ieee.org](mailto:dmeeker@ieee.org), 2004.
- DME:** **D. Meeker:** «Finite Element Method Magnetics (FEMM): a free magnetic finite element package for windows», <http://www.femm.info/wiki/HomePage>
- DRD99:** **C. DAVEAU, F. RIOUX-DAMIDAU:** « New (e,h) formulation coupling a finite element method and a boundary integral method for the computation of the interaction of waves with a conducting domain », IEEE Transaction. On Magnetics, Vol. 35, No 2, pp 1014-1018, 1999.
- FRG97 :** **FREDERIC. GILLON :** « Modélisation et optimisation par plans d'expérience d'un moteur à commutation électronique ». Thèse de Doctorat de l'Université de Lille (France), Décembre 1997.
- GAR02:** **J. GARRIGUES:** «La méthode des éléments finis», Ecole supérieure de mécanique de Marseille, Janvier 2002
- GAS04 :** **L. GASC :** «Conception d'un actionneur à aimants permanents à faibles ondulations de couple pour assistance de direction automobile : Approches par la structure et par la commande ». Thèse de Doctorat, INP Toulouse (France), Novembre 2004.
- GCO94 :** **G. COUDERCHON :** « Alliages Fer et Fer-Cobalt. Propriétés magnétiques. Traité Génie électrique ». D2 130, 1994.
- GCP96 :** **G. COUDERCHON, J.L. PORTESIL :** « les Alliages de Fer et de Nickel, ch. 1. Quelques propriétés des alliages FeNi riche en Nickel », Lavoisier Tec et Doc., 1996.
- GEC :** **GEORGES COUDERCHON :** «alliages magnétiques doux», technique de l'ingénieur (M350-16), (M350-25), (M350-21).
- GID08:** **J. A. GÜEMES, A. M. IRAOLAGOITIA, M. P. DONSIÓN AND J. I. DEL HOYO:** « Analysis of Torque in Permanent Magnet Synchronous Motors with Fractional Slot Windings », International Conference on Electrical Machines, Paper ID 1181, 2008.
- GIL97 :** **F. GILLON :** « Modélisation et optimisation par plans d'expériences d'un moteur à commutations électroniques », Thèse doctorat, université de Lille, France, Décembre 1997.
- GIR01 :** **GIROUD :** « applications des matériaux magnétiques durs ou doux: domaines, processus d'aimantation, conséquences pratiques », Magnétisme MPA 2001.

- GUE91:** **GUERAUD, ALAIN, AL:** «Evolution des performances et nouvelles applications des machines à aimants permanents», Revue Générale de l'électricité. No. 4, pp. 71-75, 1991.
- HAD06:** **L. HADJOUT :** «Dimensionnement de machines synchrones à aimants montés sur la surface rotorique», Thèse de Doctorat d'Etat, ENP, Décembre. 2006.
- HAD94 :** **L. HADJOUT :** «Analyse des performances électromagnétiques d'une machine synchrone autopilotée à aimants à rotor lisse », Thèse de Magister, ENP, Alger, Algérie, Juin. 1994.
- HAN94 :** **D. C. HANSELMAN:** « Minimum torque ripple, maximum efficiency excitation of permanent magnet motors », IEEE Transaction on Ind. Electron, Vol.41, No.3, June 1994, pp. 292-300.
- IBT01 :** **R. IBTIOUEN :** «Modélisation des machines électriques», cours de 1<sup>ère</sup> année PG, ENP, (cours non édité), 2001,2002.
- IBT98 :** **R. IBTIOUEN, K. BOUGHRARA, O. TOUHAMI :** «Flux density and torque calculations of a BDCM with surface permanent magnets », Fourth International Workshop on Electric and Magnetic Fields, Marseille, 12-15 May 1998, pp. 511-516.
- IBT93 :** **R. IBTIOUEN :** « Contribution au dimensionnement électromagnétique d'une machine synchrone autopilotée à aimants insérés », Thèse de Doctorat d'état, ENP, avril. 1993.
- ISS93:** **T. ISHIKAWA, G.R. SLEMON:** « A method of reducing ripple torque in permanent magnet motors without skewing », IEEE Transaction on magnetic, Vol. 29, No. 2, pp. 2028–2031, 1993.
- JAH96:** **T. M. JAHNS, W. L. SOONG:** «Pulsating torque minimization techniques for permanent magnet AC Drives a Review», IEEE transaction. On Industrial Electronics, Vol. 43, No 2 April 1996.
- KAN05:** **S. KANERVA:** « Simulation of electrical machines, circuits and control systems using finite element method and system simulator », Helsinki Univesity of Technology, Finland, April 2005.
- KEC96 :** **R. KECHROUD :** «Etude d'une machine à aimants permanents à concentration de flux en fonctionnement autopiloté ». Thèse de Magister, USTHB, Juin 1996.
- LAC09 :** **B. LADGHEM CHKOUCHE :** « Calcul des performances de la machine synchrone à aimants permanents», Mémoire de Magister, ENP, Juillet 2009.
- LAJ81 :** **M.LAJOIE-MAZENC, S. LEICHTER :** « Etude des machines synchrones à aimants alimentées par convertisseurs statiques fonctionnant en commutation naturelle » RGE N°3 mars 1981 pp 201-208.
- LAP92 :** **B. LAPORTE, R. IBTIOUEN, M. CHAABANE :** « Recherche de performance optimales pour une machine synchrone à aimants insérés par une méthode intégrale de frontière mettant en jeu méthode analytique », J.Phys. III France 2 (1992), pp 1891-1904.
- LAT06 :** **R. LATEB :** « Modélisation des machines asynchrones et synchrones à aimants avec prise en compte des harmoniques d'espace et de temps », Thèse de Doctorat de l'INPL, Nancy (France), Octobre. 2006.
- LEC :** **L. LECHEVALLIER, J. Le BRETON :** «Aimants permanents», Technique de l'ingénieur D2 102.
- LEF07** **Y. Lefèvre, F. Messine, J. Fontchastagner et X. T. H. BUI,** « Association de différentes méthodes optimisation et de modèles de calcul du champ

- magnétique », dans *Electrotechnique du Futur – EF'2007*, Toulouse, Sept. 6-7 2007.
- LER06 :** **M. LEROY :** « Etude et mise au point de moto-ventilateurs à hautes performances pour l'aéronautique », Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, Novembre 2006.
- LGS88:** **T. Li, G.R. SLEMON:** « Reduction of cogging torque in permanent magnet motors », *IEEE Trans on magnetic*, Vol. 24, No. 6, pp. 2901–2903, 1988.
- LTT06:** **R. LATEB, N. TAKORABET, F MEIBODY-TABAR, AL:** « Design technique for reducing the cogging torque in large surface-mounted magnet motors », *Springer, Recent Development of Electrical Drives*, pp 59-72, Sep./Oct. 2006
- LUA02:** « The Programming Language Lua », Reference Manual for Lua version 4.1 (beta) Last revised on February 14, 2002. Site, [http:// www.lua.org](http://www.lua.org).
- MAK06:** **Z. MAKNI :** « Contribution au développement d'un outil d'analyse multiphasique pour la conception et l'optimisation d'actionneurs électromagnétique », Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, Faculté des Sciences d'Orsay(France), Décembre. 2006.
- MAR04:** **M. MARKOVIC:** « Magnetic Field Analysis in Electric Motors Using conformal Mapping », Docteur Es Sciences Techniques dissertation, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- MBM10:** **S. MABRAK, K. BOUGHRARA, S. MEZANI R. IBTIOUEN, O. TOUHAMI:** « Magnetic Field Analysis of Permanent Magnet Synchronous Motors with non Magnetic Rotor Core », International conference on electrical engineering, electronics and automatic, Paper EMD or04, 2010.
- MEJ01:** **S. M. HWANG, J.B. EOM, Y.H. JUNG, D.W. LEE, B.S. KANG:** « Various design techniques to reduce cogging torque by controlling energy variation in permanent magnet motors », *IEEE Transactions On magnetics.*, Vol. 37, No. 4, pp. 2806–2809, 2001.
- MJP04:** **M. MARKOVIC, M. JUFER, Y. PERRIARD:** « Reducing the Cogging Torque in Brushless DC Motors by Using Conformal Mappings », *IEEE Transactions. On Magnetics.* , Vol. 40, No. 2, March, 2004, pp. 451-455.
- OUA97 :** **Y. OUAZIR :** « Calcul des performances d'une machine synchrone à aimants permanents à entrefer lisse », Thèse de Magister, ENP, Juillet. 1997.
- PKA03:** **A. B. PROCA, A.KEYHANI, A. EI-ANTABLY, W. LU, and M. DAI:** « Analytical Model for Permanent Magnet Motors with Surface Mounted Magnets », *IEEE Transactions On Energy Conversion*. Vol. 18, No. 3, pp. 386–391, September 2003.
- PPS99:** **B. P. PANIGRAHI, K. C. PATRA, V. SUBBARAO, D. PRASAD :** « Design of a permanent synchronous motor », *Electric Machines and power Systems*, Vol. 27, No. 7, pp. 771-779, July 1999.
- PSA04:** **PIA SALMINEN:** « fractional slot permanent magnet synchronous motors for low speed applications », these de doctorat, University of Technology, Finland December, 2004.
- PSF90:** **P. P. SILVESTER, R. L. FERRARI:** « Finite element for electrical engineer », Cambridge University Press, Second Edition, 1990.
- PUI87:** **P. PUIILLANGE :** « Moteurs cylindrique à aimants permanent : De bonnes performances aux moyennes et grandes vitesses », *RGE*, No. 3, Mars 1897, pp. 62-64.

- RAG08:** **P. RAGOT:** « Modélisation analytique multiphysique pour la conception optimale de moteurs synchrones à aimants permanents », Docteur Es Sciences Techniques Dissertation, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.
- RAP93** **P. RAPIN:** « Méthode des éléments finis », dans *Traité Sciences fondamentales*, A 656, Techniques de l'Ingénieur, 1993.
- SAC88** **J.-C. SABONNADIÈRE et J.-L. COULOMB:** « Calcul des champs électromagnétiques », dans *Traité Génie électrique*, numéro D 3 020 dans *Traité Génie électrique*, Techniques de l'Ingénieur, 1988.
- SLM92** **N. SADOWSKI, Y. LEFÈVRE, M. LAJOIE-MAZENC ET J. CROS:** « Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement », *IEEE Transactions On Magnetics*, vol. 29, no 2, pp. 1410–1413, 1992.
- SMP04:** **P. SALMINEN, J. MANTERE, J. PYRHONEN, AND M. NIEMELA:** « Performance analysis of fractional slot wound PM motors », *Proc. International Conference on Electrical Machines, (ICEM)*, paper no. 509, 2004.
- TLS88 :** **T Li, G. SLEMON:** «Reduction of cogging torque in permanent magnet motors», *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 24, No. 6, November 1988.
- XIZ04:** **Z. P. XIA, Z. Q. ZHU:** « Analytical Magnetic Field Analysis of Halbach Magnetized Permanent-Magnet Machines » *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 40, No. 4, July 2004, pp. 1863-1872.
- XWQ03:** **XINGHUA WANG. QINGFU LI:** « Analytical Calculation of Air-Gap Magnetic Field Distribution and Instantaneous Characteristics of Brushless DC Motors » *IEEE Transactions On Energy Conversion*, Vol. 18, No. 03, pp. 424-432. Septembre 2003.
- YOU92:** **A. YOUMSSI :** « Contribution aux calculs des machines synchrones à aimants permanents », Thèse de Doctorat de l'INPL Nancy (France), 1992.
- ZAR04:** **D. ZARKO:** «A systematic approach to optimized design of permanent magnet motors with reduced torque pulsations», Thèse de Doctorat, Université de Wisconsin-Madison, 2004.
- ZBL08:** **D. ZARKO, D. BAN, T. LIPO:** «Analytical Solution for Cogging Torque in Surface Permanent-Magnet Motors Using Conformal Mapping», *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 44, No. 1, January 2008.
- ZBL06:** **D. ZARKO, D. BAN, T. LIPO:** «Analytical Calculation of Magnetic Field Distribution in the Slotted Air Gap of a Surface Permanent-Magnet Motor Using Complex Relative Air-Gap Permeance», *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 42. No. 7. July. 2006.
- ZHO00:** **Z. Q. ZHU and D. HOWE:** « Influence of design parameters on cogging torque in permanent magnet machines », *IEEE Trans. On Energy Conversion*, Vol. 15, No. 4, pp. 407–412, December 2000.
- ZHU93:** **Z. Q. ZHU:** « Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet DC Motors », *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 29, No. 1, January 1993, pp. 136-158.

## A.1 Dimensions géométriques de la machine étudiée

| Paramètres               | symbole    | valeur | unité |
|--------------------------|------------|--------|-------|
| Nombre de pôles          | $2p$       | 12,20  | -     |
| Nombre d'encoches        | $Q_s$      | 36     | -     |
| Ouverture de l'encoche   | $b_0$      | 2.50   | mm    |
| Epaisseur de l'entrefer  | $g$        | 0.80   | mm    |
| Epaisseur de l'aimant    | $e_a$      | 6.70   | mm    |
| Ouverture des aimants    | $\alpha_p$ | 1      | -     |
| Rayon externe du rotor   | $R_m$      | 80.50  | mm    |
| Rayon externe du stator  | $R_i$      | 73.00  | mm    |
| Rayon externe du rotor   | $R_e$      | 98.00  | mm    |
| Aimantation rémanente    | $M$        | 1.2    | T     |
| Perméabilité des aimants | $\mu_r$    | 1.00   | -     |
| Longueur active          | $l_u$      | 40.00  | mm    |

Table A. 1 : Principales dimensions de la machine étudiée.

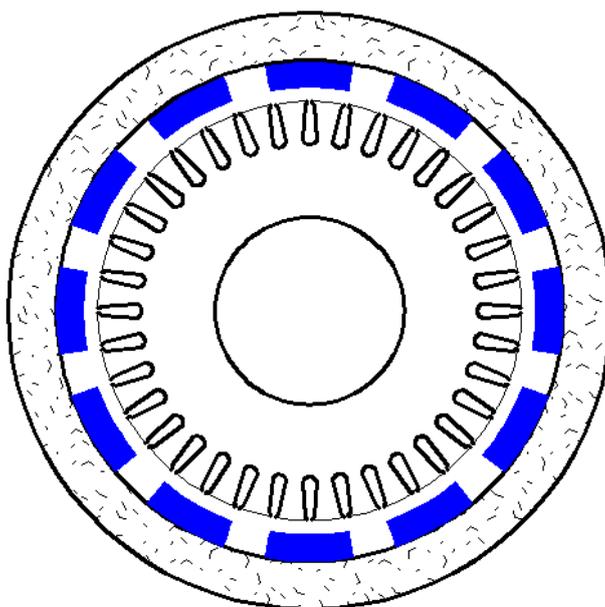


Fig. A 1. Section droite de la machine étudiée.

## A.2. Calcul analytique des machines synchrones à aimants permanents

La résolution de l'équation de Poisson par la méthode de séparations de variables que ce soit par la formulation en potentiel vecteur ou scalaire permet de déterminer le champ magnétique via des expressions analytiques. En considérant une formulation 2D en potentiel scalaire, les équations de Laplace dans l'entrefer mécanique, ou de Poisson dans la zone des aimants, sont les suivantes :<sup>2</sup>

D'après les conditions aux limites on a :

$$C_{2G} = \frac{R_s^{2np} (M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np-1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})} + \frac{(M_m - M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np+1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})}$$

$$C_{1G} = R_i^{2np} C_{2G}$$

$$C_{3G} = \frac{R_i^{2np} R_s^{2np} (M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np-1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})} + \frac{(-M_m + M_{\theta n})(R_i^{2np} R_m^{np+1} - R_s^{2np} R_r^{np+1})}{2(np+1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})}$$

$$C_{4G} = \frac{(M_m + M_{\theta n})(R_s^{2np} R_m^{np+1} - R_i^{2np} R_r^{np+1})}{2(np-1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})} + \frac{(-M_m + M_{\theta n})(R_m^{np+1} - R_r^{np+1})}{2(np+1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})}$$

$$C_{6G} = \frac{R_s^{2np} (M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np-1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})} + \frac{(-M_m + M_{\theta n})(R_m^{-np+1} - R_r^{-np+1})}{2(np+1)(R_s^{2np} - R_i^{2np})}$$

$$C_{5G} = R_s^{-2np} C_{6G}$$

**A.2. 1. Machine à rotor externe magnétique  $R_s = R_m$**

**A.2. 2. Machine à rotor interne magnétique  $R_r = R_i$**

ملخص:

يعرض هذا العمل نموذجا تحليليا للآلات الكهربائية المتزامنة ذات المغناطيس الدائم الموجود على مساحة سطح الدوار. تهدف الخطة إلى استخراج نموذج مبني على حل معادلات ماكس وال لدراسة نوعية أدائها. كذلك استعملنا نموذج عددي يتمثل في العناصر المنتهية للتحقق من نتائج النموذج التحليلي المنجز سابقا. وفي الأخير استعملنا طريقة التحويلات المطابقة لدراسة الآلات في الحالة الحقيقية.

### Résumé

Sous des hypothèses simplificatrices concordantes avec l'objectif visé, on a développé un modèle d'étude bidimensionnel, basés sur la résolution analytique des équations de Maxwell en utilisant la formulation en potentiel scalaire pour calculer les champs magnétiques dus aux aimants et aux courants pour différentes structures de machine, que ce soit à rotors interne où externe afin de sélectionner les structures les plus performantes. Un calcul numérique des machines synchrones à aimants en utilisant un logiciel de calcul basé sur les éléments finis spécialement dédié aux machines électriques. On a effectué une comparaison des résultats obtenus à partir du modèle analytique développé avec ceux issus de la méthode des éléments finis. On a montré ainsi, une technique dite « **transformation conforme** ». Celle-ci permet de calculer les grandeurs électromagnétiques de la machine dans le cas d'un stator encoché.

**Mots clés : machine à aimants permanents, performances, éléments finis.**

### Abstract

Under simplifying assumptions consistent with the objective, we developed a model to study two-dimensional, based on analytical resolution of Maxwell's equations using the scalar potential formulation for calculating magnetic fields due to the magnets and currents for different machine structures, whether internal or external rotors to select the most efficient structures. A numerical calculation of magnet synchronous machines using calculation software based on finite elements specially dedicated to electric machines. We conducted a comparison of results obtained from the analytical model developed with those from the finite element method. It showed well, a technique called "conformal transformation". It calculates the electromagnetic quantities of the machine in the case of a slotted stator.

**Key words: Permanent Magnet Machine, magnet flux density, finite-element.**