

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique  
Département d'Automatique  
Laboratoire de Commande des Processus



# Thèse de Doctorat en Génie Electrique

Option : AUTOMATIQUE

Présenté par :

**KHELIFI OTMANE Khelifa**

Magister en Electrotechnique de l'UHBC CHLEF

**Intitulé**

## Commande prédictive robuste, application à la machine asynchrone triphasee

Soutenu publiquement le **09/02/2016** devant le jury composé de :

<b>Président :</b>	BOUCHERIT Mohamed seghir	Professeur	ENP Alger
<b>Rapporteur :</b>	NEZLI Lazhari	Professeur	ENP Alger
<b>Rapporteur :</b>	BALI Nouredine	Professeur	USTHB Alger
<b>Examineurs :</b>	TADJINE Mohamed	Professeur	ENP Alger
	BOUDANA Djamel	M.C.A	UYF Médéa
	BOUCHHIDA Ouahid	M.C.A	UYF Médéa
	BENZINEBE Omar	M.C.A	USD Blida

**ENP 2016**

## *Remerciement*

*Je suis particulièrement sensible à l'honneur que m'ont fait professeur **L. NEZLI** et professeur **N. BALI**, d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse et pour la confiance et l'intérêt qu'ils m'ont témoigné tout au long de la réalisation de ce travail.*

*C'est un honneur pour moi que le professeur **M.S. BOUCHERIT** ait accepté de participer à ce jury et d'en assumer la tâche de président. Je l'en remercie très sincèrement et très profondément.*

*Mes remerciements vont également aux autres membres de jury examinateurs qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de ma thèse. Il s'agit, en l'occurrence de : Monsieur **M. TADJINE**, Monsieur **D. BOUDANA**, Monsieur **O. BOUCHHIDA** et Monsieur **O. BENZINEBE**.*

*Enfin, je ne saurais ici oublier dans ces sentiments mon entourage proche qui depuis toujours m'a aidé à réaliser mes projets avec la plus grande compréhension et le plus grand intérêt.*

*A ma famille et mes amis pour  
la patience et dévouement dont ils ont fait preuve*

## ملخص

العمل المقدم في هذه الأطروحة يتمحور حول توليف منهجية لتعزيز صلابة منظم من نوع تنبؤي معمم وذلك بإستعمال معايير يولا. في بداية الأمر قمنا بحساب قانون التحكم التنبؤي الأولي من أجل ضمان مستوى معين من الأداء الاسمي والاستقرار من حيث سلوك الإدخال / الإخراج. في أول خطوة لتعزيز صلابة المنظم، أخذنا بعين الإعتبار الإرتيابات الغير منتظمة على الجهاز لتوليف المنظم مع ضمان مواصفات الأداء الإسمي لإلغاء الإضطرابات. الخطوة الأخيرة ترتبط بإدراج الإرتيابات المنتظمة متعددة المقامات في مرحلة تعزيز الصلابة، وذلك بإضافة الإرتيابات الغير منتظمة في أن واحد. في هذه الحالة، يتم ضمان الاستقرار في قمم متعدد مقامات باستخدام شرط الاستقرار المقترح من طرف ليباتوف-سوكولوف. هذا يؤدي في النهاية إلى طرح مسألة برمجة خطية في ظل قيود من الدرجة الثانية (Qclp). يتم حل هذه المسألة بإستعمال تقنية المصفوفة الخطية المتفاوتة (LMIs). حل هذه المسألة وبفضل معيار يولا يسمح بإدارة التوازن بين قوة الاستقرار في مواجهة الإرتيابات الغير منتظمة على الجهاز من جهة و قوة الاستقرار في مواجهة الإرتيابات المنتظمة متعددة المقامات من جهة أخرى. وأخيرا، قمنا بتطبيق هذه المنهجية على محرك غير متزامن لإثبات فعاليتها.

**كلمات مفتاحية:** تحكم تنبؤي معمم ، تحكم تنبؤي تسلسلي، تعبير يولا، تحسين مقعر، برمجة خطية، آلة غير متزامنة، صلابة ، متعدد مقام

## Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire est axé sur la synthèse d'une méthodologie hors-ligne de robustification d'une commande prédictive généralisée en utilisant l'outil fourni par la paramétrisation de Youla. La démarche consiste d'abord à construire une loi de commande prédictive initiale assurant un certain niveau de performance nominale et de robustesse en stabilité, en termes de comportement entrée/sortie. Ensuite, comme première étape de robustification, des incertitudes non-structurées sont prises en compte tout en garantissant des spécifications de performance nominale pour le rejet des perturbations. Enfin, la dernière étape est liée à la prise en compte d'incertitudes structurées polytopiques dans l'étape de robustification, en plus de la considération d'incertitudes non-structurées. Dans ce cas, la stabilité est assurée dans les sommets du polytope en utilisant le critère de stabilité de Lipatov-Sokolov. Il en résulte un problème de programmation linéaire sous contraintes quadratiques (QCLP). Ce dernier est résolu avec les outils d'inégalités matricielles linéaires (LMIs), en particulier grâce à la résolution de ce problème de robustification via un paramètre de Youla permettant de gérer le compromis entre la robustesse en stabilité face à des incertitudes additives non-structurées agissant sur le modèle nominal et la robustesse en stabilité pour un système appartenant à un domaine incertain polytopique. Finalement, on présente une application sur un moteur asynchrone triphasé pour démontrer l'efficacité de notre méthode.

**Mots clés** —Commande prédictive généralisée, Commande prédictive généralisée cascade, Inégalités Matricielles Linéaires, Paramétrisation de Youla, Polytope Optimisation convexe, Programmation linéaire, Machine asynchrone triphasée, Robustesse.

## Abstract

The work presented in this thesis is centered on the synthesis of an off-line methodology of robustification of a generalized predictive control law by using the tool provided by the Youla parametrization. The first step consists in building an initial predictive law ensuring a certain degree of nominal performance and stability robustness, in terms of the input/output behavior. Then, as first stage of robustification, unstructured uncertainties are taken into account while guaranteeing specifications of nominal performance for the disturbances rejection. After that, the structured polytopic uncertainties are taken into account in the stage of robustification, in addition to the consideration of unstructured uncertainties. In this case, the stability is ensured in the polytope vertices by using the stability criterion of Lipatov-Sokolov. It results a quadratic constraints linear programming problem (QCLP) which is solved with thanks to the linear matrix inequalities (LMIs) tools. Therefore, the robustification provides stability robustness towards unstructured uncertainties for the nominal system, while guaranteeing stability properties over a specified polytopic domain of uncertainties. Finally, we present an application on the induction motor to demonstrate the proposed method.

**Keywords** — Generalized Predictive Control, Cascade Generalized Predictive Control, de Youla Parameterization, Convex Optimization, Linear Matrix Inequalities, Linear Programming, Polytope, Three Phase Asynchronous Machine, Robustness.

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	01
<b>Chapitre 1 Commande prédictive généralisée</b>	
1.1 Introduction.....	04
1.2 Concepts de base de la commande prédictive .....	04
1.3 Stratégie de la commande prédictive.....	06
1.3.1 Principe général.....	06
1.3.2 Modélisation du système .....	07
1.4 Commande prédictive généralisée (GPC) .....	08
1.4.1 Principe de calcul.....	08
1.4.1.1 Modèle de prédiction.....	09
1.4.1.2 Prédicteur optimal.....	10
1.4.1.3 Résolution récursive des équations de diophantien.....	11
1.4.1.3.1 Résolution récursive de la première équation de diophantien.....	11
1.4.1.3.2 Résolution récursive de la deuxième équation de diophantien.....	13
1.4.1.4 Fonction du coût quadratique.....	14
1.4.1.5 Prédicteur optimal sous forme matricielle.....	15
1.4.1.6 Fonction de coût sous forme matricielle.....	16
1.4.1.7 Loi de commande optimale.....	16
1.4.1.8 Stratégie de l'horizon fuyant.....	17
1.4.2 Structure RST du régulateur.....	17
1.4.3 Algorithme de calcul de la GPC.....	18
1.4.4 Choix des paramètres de réglage.....	19
1.4.4.1 Choix de l'horizon minimal de prédiction $N_l$ .....	19
1.4.4.2 Choix de l'horizon maximal de prédiction $N_2$ .....	19
1.4.4.3 Choix de l'horizon maximal de prédiction $N_u$ .....	19
1.4.4.4 Choix du facteur de pondération de la commande $\lambda$ .....	20
1.5 Applications numériques sur différents procédés.....	20
1.5.1 Système second ordre stable à phase minimale.....	20
1.5.2 Système second ordre stable à phase non minimale.....	21
1.5.3 Système instable.....	23
Conclusion.....	25
<b>Chapitre 2 Commande prédictive généralisée robustifiée vis-à-vis les incertitudes non-structurées</b>	
2.1 Introduction.....	26
2.1 Rôle de robustification de la loi de commande prédictive.....	28
2.1.1 Robustesse en stabilité.....	28
2.1.2 Définition de la marge de robustesse pour le cas du correcteur GPC.....	29
2.2 Paramétrisation de Youla, idées de base.....	29
2.3 Paramétrisation de Youla d'un correcteur GPC.....	32
2.4 Spécifications de robustesse et performance nominale.....	34
2.4.1 Spécifications fréquentielles.....	37
2.4.2 Spécifications temporelles.....	40
2.4.3 Problème d'optimisation convexe.....	41

2.5	Résolution par programmation linéaire.....	42
2.5.1	Norme $H_\infty$ .....	43
3.5.2	Respect d'un gabarit temporel.....	45
	Conclusion.....	47
<b>Chapitre 3 Robustification d'une Commande GPC : Prise en compte d'incertitudes structurées</b>		
3.1	Introduction.....	48
3.2	Incertaines polytopiques.....	48
3.3	Condition de stabilité de Lipatov-Sokolov.....	52
3.4	Formulation du problème de robustesse face à des Incertaines polytopique.....	52
3.5	Exemple.....	56
	Conclusion.....	59
<b>Chapitre 4 Application à un moteur asynchrone triphasé</b>		
4 .1.	Introduction.....	60
4.2.	Commande vectorielle de la machine asynchrone triphasée.....	60
4.2.1.	Principe de la commande par flux orienté.....	61
4.2.2.	Théorie du flux orienté.....	62
4.2.3.	Application de la commande vectorielle indirecte (IRFO).....	64
4.3.	Elaboration de la commande.....	67
4.3.1	Synthèse du régulateur GPC pour la boucle de courant.....	68
4.3.2	Synthèse du régulateur GPC pour la boucle de vitesse.....	69
4.3.3	Influence de la boucle interne sur la boucle externe.....	70
4.3.4	Commande GPC/cascade.....	71
4.3.5	Application de la GPC/cascade sur le modèle complet de la MAS.....	75
4.3.6	Commande Contrainte.....	78
4.3.7	Robustification face à des bruits de mesure et aux incertitudes de modèle à haute fréquence .....	83
4 .3.8.	Correcteur robustifié face à des incertitudes additives et polytopiques.....	88
	Conclusion.....	91
	<b>Conclusion générale</b> .....	92
	<b>Annexes</b> .....	95
	Annexe A : Paramètres de la machine asynchrone triphasée.....	95
	Annexe B : Modélisation de la machine asynchrone triphasée.....	96
	<b>Références bibliographiques</b> .....	107

## Introduction générale

Le travail de la présente thèse se trouve à l'intersection de deux axes importants parmi l'ensemble des structures de commande : la commande prédictive et la commande robuste. Ces deux domaines ont démontré leur potentiel et ont au fil des années suscité un intérêt croissant de la part du milieu industriel et de la recherche.

La commande prédictive, méthode récente dite avancée, a commencé à donner ses premiers résultats théoriques et pratiques à la fin des années 1970, notamment avec la méthode PFC [1]. Dans les années 1980, plusieurs méthodes basées sur les mêmes concepts prédictifs ont été développées. Parmi ces méthodes, on peut citer la commande prédictive généralisée (GPC), développée par David Clarke et son équipe [2], qui a été la technique la plus largement utilisée par la suite. Toutes les commandes prédictives s'avèrent performantes grâce à ses particularités:

- L'utilisation des informations issues d'un modèle (simple et approprié) du système à régler ;
- Calcul de la suite de commandes à appliquer au système de façon à minimiser un critère à horizon fini portant sur l'écart entre la sortie prédite et la sortie future désirée ;
- Application du premier élément de la suite de commandes calculées ;
- Répétition du processus à la période d'échantillonnage suivante, selon le principe de l'horizon fuyant.

La différence entre les structures prédictives existantes réside, notamment, dans l'utilisation de modèles et critères différents. Ces types de commande sont aujourd'hui groupés sous la dénomination « MPC », pour *Model Predictive Control*. Dans les chapitres à venir, on se focalisera essentiellement sur l'application à la Commande Prédictive Généralisée (GPC).

La richesse de la commande prédictive provient du fait que d'une part sa démarche repose sur une méthodologie permettant la prise en compte des contraintes pour la mise au point de la loi de commande; d'autre part, il est possible d'exploiter pleinement les informations de trajectoires prédéfinies situées dans le futur. En effet, le but de la stratégie, comme nous le verrons par la suite, est de faire coïncider la sortie du processus avec une consigne dans le futur et sur un horizon fini. De plus, la commande prédictive est applicable sur une large classe de systèmes (stable, instable en boucle ouverte, à phase non minimale, avec retard). C'est pourquoi elle est apparue très séduisante aux industriels dans le cadre général de problèmes de suivi de trajectoires.

La conception de la loi de commande pour le système nominal est habituellement fondée sur les deux hypothèses suivantes :

- Il n'y a aucune incertitude sur le modèle ;
- La perturbation a un comportement bien défini.

Par conséquent, la loi de commande résultante présente en conséquence de bonnes performances pour le modèle nominal mais des performances dégradées en présence d'incertitude et/ou de perturbations sur le système. Surmonter ces problématiques, des techniques provenant de la théorie de la commande robuste peuvent être utilisées pour les lois prédictives. On peut citer les travaux réalisés depuis une dizaine d'années [3, 4, 5, 6,7], qui sont essentiellement dédiées aux systèmes monovariables où l'on remarque l'utilisation de l'outil fourni par la paramétrisation de Youla pour robustifier la loi de commande GPC. Cependant, ces processus de robustification ne permettent pas toujours d'ajuster facilement le compromis entre la robustesse et la performance de la commande. Par ailleurs, la paramétrisation de Youla est un outil très général qui a déjà permis d'obtenir des résultats satisfaisants dans d'autres domaines, comme la synthèse  $H_\infty$  de correcteurs [24, 54, 55], le séquençement de gains [56] ou l'analyse de faisabilité d'un cahier de charges [28]. Dans les travaux présentés par Pedro RODRIGUEZ AYERBE [8, 9], la paramétrisation de Youla est utilisée pour la synthèse d'une méthodologie de robustification d'une structure de commande prédictive. Cette robustification a pour objectif la synthèse d'un correcteur invariant, permettant d'assurer la stabilité et la performance de la loi de commande face à des perturbations extérieures agissant sur le système, ainsi que face à des changements susceptibles de se produire sur le système, par exemple, des modifications structurelles de charge ou de température, ou des détériorations dans la vie du système. Ces changements qui sont considérés comme des incertitudes non structurées lors de la synthèse du correcteur.

Le but de ces travaux est d'aller encore plus loin dans la démarche de robustification, en considérant que le système n'est pas nécessairement précisément connu, mais appartient plutôt à un ensemble polytopique donné. Cet aspect de robustification face à des incertitudes structurées polytopiques sera traité dans le prolongement de la démarche de robustification face à des incertitudes non-structurées.

Ce mémoire est partagé en quatre chapitres organisés comme suit :

Au premier chapitre, on présente la commande prédictive en général, puis on aborde de façon détaillée la commande prédictive généralisée (GPC), pour les systèmes linéaires et sans prise en compte de contraintes. Des indications liées au choix des paramètres de réglage sont données.

Ensuite on applique la GPC sur quelques systèmes élémentaires pour prouver leur efficacité après avoir déduit la représentation polynomiale RST du régulateur GPC équivalent.

Le deuxième chapitre expose l'essentiel de la procédure de robustification d'une commande GPC proposé dans [9]. Le chapitre présente d'abord la paramétrisation de Youla, ainsi que ses principes et propriétés. Ensuite, la paramétrisation de Youla d'un correcteur GPC sera illustrée. Puis, on définit les spécifications formulées pour robustifier un correcteur initial. Enfin, La procédure de robustification se base sur l'optimisation convexe d'un paramètre de Youla, résolue avec résolution par programmation linéaire.

Le troisième chapitre constitue le cœur de ce mémoire, on propose d'étendre la méthodologie de robustification proposée dans le deuxième chapitre. Dès lors, la procédure prend en compte les aspects de robustesse en stabilité à la fois face à des incertitudes additives non-structurées et des incertitudes structurées appartenant à un ensemble polytopique. Dans ce cas, La stabilité de LIPATOV-SOKOLOV est validée dans les sommets du polytope.

Le dernier chapitre propose une application de la méthodologie de robustification à un système complexe: moteur asynchrone triphasé alimenté via un onduleur MLI de tension. Après la description du système, une structure prédictive cascade est développé à partir de l'algorithme GPC pour piloter le moteur en vitesse avec prise en compte des boucles internes de courants. Cette loi de commande initiale est ensuite robustifiée face à des incertitudes additives non-structurées et incertitudes polytopiques. La démarche consiste à atteindre trois objectifs :

- Minimiser les courants dans les régimes transitoires ;
- Diminuer l'impact du bruit de mesure du capteur de vitesse sur la commande ;
- Garantir la stabilité sur un domaine polytopique imposé par une plage de variation de l'inertie du système.

Les résultats obtenus dans ce chapitre traduisent l'efficacité de la méthode de robustification. Enfin, nous terminons par une conclusion générale sur l'ensemble de notre travail.

# Chapitre I

## Commande prédictive généralisée

### 1.1 Introduction

La commande prédictive (MPC : *model predictive control*) est née à la fin des 1970 et s'est intensivement développée depuis, à la fois dans la communauté de la recherche en automatique et dans l'industrie. La raison de ce succès peut être attribuée au fait que la commande prédictive est la façon la plus générale de poser le problème de la commande de procédés dans le domaine temporel. En effet, sa formulation intègre des concepts tirés de la commande optimale, la commande stochastique, la commande multivariable et prend en compte les références futures lorsqu'elles sont disponibles. Un avantage de la commande prédictive est que, grâce à l'horizon de commande fini et au modèle du système, les contraintes, et même des processus non linéaires et /ou variant dans le temps, peuvent être considérés en pratique.

La première partie de ce chapitre a pour but tout d'abord de préciser les grandes idées communes aux méthodes prédictives, puis dans le cas particulier de la commande prédictive généralisée (GPC), pour les systèmes linéaires et sans contraintes. Ensuite développer la mise en œuvre mathématique aboutissant à la synthèse du régulateur sous forme polynomiale (*RST*) et enfin d'aborder le problème du choix des paramètres de réglage par application numérique sur quelques systèmes élémentaires.

### 1.2 Concepts de base de la commande prédictive

Le terme de *Commande Prédictive* ne désigne pas une stratégie spécifique de commande mais un ensemble de méthodologies de l'automatique qui utilisent explicitement un modèle du processus à commander, afin d'obtenir le signal de commande par la minimisation d'une fonction de coût. Ces méthodes donnent des correcteurs linéaires qui ont pratiquement tous la même structure et que se basent tous plus ou moins sur les idées suivantes [10, 11,12] :

- Utilisation d'un modèle du système pour prédire les sorties du procédé à des instants futurs (notion d'*horizon de prédiction*). Ce modèle peut être obtenu par une discrétisation de la fonction de transfert continue du modèle (transformée en  $z$ ) ou par une identification préalable hors ligne du système. Ainsi le modèle du système à commander constitue le

point fondamental de la commande prédictive et, par conséquent, certains auteurs ont utilisé le plus souvent l'appellation « Commande prédictive à base de modèle, dite 'MBC' (*Model Based Control*) ;

- Connaissance de la trajectoire à suivre sur un horizon au moins aussi long que l'horizon de prédiction ;
- Calcul de la séquence des commandes à appliquer au système de façon à minimiser une fonction du coût dans le futur (notion d'*horizon de commande*) ;
- A chaque instant d'échantillonnage, l'horizon de prédiction est déplacé vers le futur, et seule la première des commandes calculées est effectivement appliquée au système ;
- Répétition des étapes précédentes à la période d'échantillonnage suivante selon le principe de l'horizon fuyant (notion d'*horizon fuyant*).

La commande prédictive présente un certain nombre d'avantages, par rapport aux autres méthodes, parmi lesquelles on trouve :

- Son principe est très intuitif et le réglage relativement facile de ces paramètres la rendent accessible aux personnes avec des connaissances limitées en automatique ;
- elle peut être utilisée pour commander une grande variété de processus, ceux avec des dynamiques simples à ceux plus complexes, par exemple les systèmes à grand retards, les systèmes instable, et les systèmes à phase non minimale;
- Le cas multi variable se traite facilement ;
- Elle est capable intrinsèquement de compenser les retards et les temps morts ;
- Le correcteur obtenu est une loi de commande linéaire facile à implémenter et qui requiert peu de temps de calcul ;
- Le traitement de contraintes sur le système à commander peut être inclus systématiquement dans la définition du correcteur ;
- Elle est très utile lorsque les consignes ou les trajectoires à suivre sont connues à l'avance ;

En revanche, il y a quelques désavantages de la commande prédictive. Le plus grand des inconvénients est le besoin d'un modèle approprié du système. L'algorithme de calcul du correcteur prédictif se base sur une connaissance a priori de ce modèle, il est donc évident que les avantages obtenus avec la commande prédictive sont affectés par les écarts qui peuvent exister entre le vrai processus et le modèle utilisé.

### 1.3 Stratégie de la commande prédictive

La prédiction est une notion qui joue un rôle important pour toute activité dans laquelle on cherche à anticiper une trajectoire prédéfinie. De nombreuses activités humaines telles que la conduite d'une automobile cherche à anticiper une trajectoire afin de prévoir les gestes et manœuvres à effectuer, en fait, le conducteur connaît la trajectoire de référence désirée (le tracé de la route) sur un horizon de la commande fini (celui de son champ visuel), et en prenant en compte les caractéristiques de la voiture (modèle mental du comportement du véhicule), il décide quelles actions (accélérer, freiner ou tourner le volant) qu'il faut réaliser afin de suivre la trajectoire désirée. Seule la première action de conduite est exécutée à chaque instant, et la procédure est répétée à nouveau pour les prochaines actions. Noter que lorsqu'on recourt à des schémas de commande classiques, comme les PID, les commandes sont calculées à partir des erreurs passées et de l'erreur courante. Si l'on étend l'analogie de la conduite automobile, la technique PID serait alors équivalente à conduire une voiture en utilisant seulement ce qui se passe juste devant la voiture (accès à la mesure courante) et le rétroviseur (mesures passées). Mais l'analogie est un peu sévère, car la commande prédictive a besoin en réalité de beaucoup plus d'informations que le PID (la trajectoire à suivre par le système, et un modèle de ce système). Et si un point situé dans le futur sur la trajectoire de référence est utilisé comme consigne pour le PID, alors les différences entre les deux stratégies sont moins grandes [13].

#### 1.3.1 Principe général

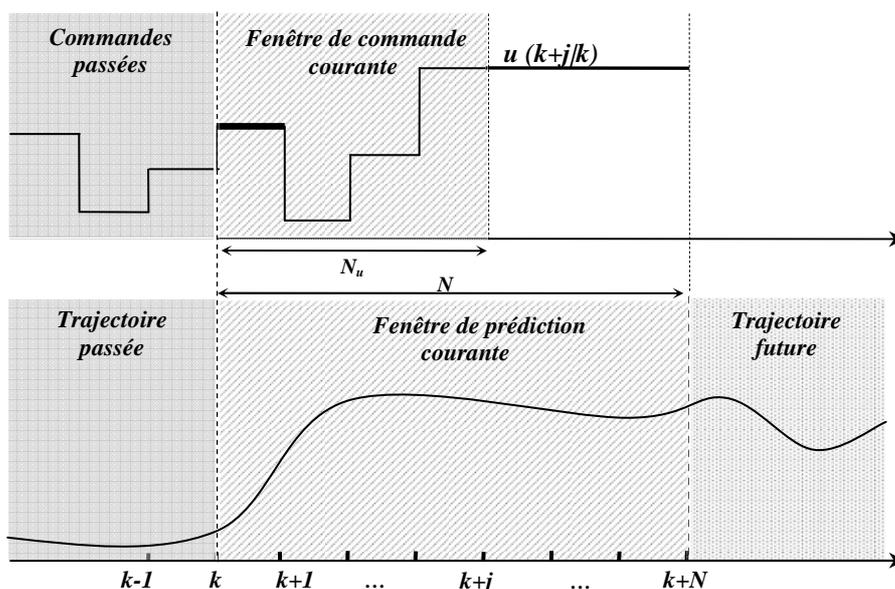
Le principe général de tous les correcteurs de la classe prédictive se caractérise par la stratégie suivante, représentée sur la Figure (1.1) :

1. Les sorties futures sur un horizon déterminé de taille  $N$ , appelé l'horizon de prédiction, sont prédites à chaque instant  $k$  à l'aide du modèle du processus. Ces prédictions sont notées  $y(k+j/k)$ , avec  $j = 1, \dots, N$ , pour indiquer la valeur de la sortie à l'instant  $k+j$  calculée à l'instant  $k$ . Elles dépendent des valeurs connues jusqu'à l'instant  $k$  (entrées et sorties passées) et des commandes futures  $u(k+j/k)$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , qui sont celles à envoyer au système et qui doivent être calculées ;

2. L'ensemble des commandes futures est calculé en optimisant un critère déterminé pour garder le processus aussi proche que possible de la trajectoire de référence  $r(k+j)$ . Ce critère prend généralement la forme d'une fonction quadratique des erreurs entre le signal de sortie prédit et les consignes futures. L'énergie de la commande est incluse dans la fonction de coût dans la plupart des cas. Une solution explicite peut être obtenue si le critère est quadratique, le

modèle linéaire et s'il n'y a pas de contraintes, sinon une méthode d'optimisation itérative doit être utilisée. Des hypothèses sont également faites sur la structure de la loi de commande future, comme par exemple qu'elle sera constante à partir d'un instant donné (horizon de commande) ;

3. La commande  $u(k/k)$  est envoyée au système et les autres valeurs de commande sont oubliées, parce qu'à l'instant d'échantillonnage suivant la mesure  $y(k+1)$  est déjà connue et que l'étape n°1 est répétée avec cette nouvelle valeur, toutes les séquences étant mise à jour. Alors on calcule la commande  $u(k+1/k+1)$ , qui est différente de  $u(k+1/k)$  en principe à cause des nouvelles informations prises en compte.



**Figure (1.1)** Représentation temporelle du principe de la commande prédictive

### 1.3.2 Modélisation du système

Pour l'implémentation de la stratégie prédictive, la structure de base de la Figure (1.2) est mise en œuvre. Un modèle sert à prédire les futures sorties du système, grâce aux valeurs courantes et passées de la commande et aux commandes optimales futures. Ces dernières sont calculées par une méthode d'optimisation, qui prend en compte la fonction du coût (qui dépend aussi des consignes futures), et éventuellement des contraintes.

Le modèle du système joue donc un rôle central dans le correcteur. Le modèle choisi doit être capable de rendre compte de la dynamique du processus pour prédire précisément les sorties futures et aussi doit être simple à implémenter et à comprendre. Tous les algorithmes de

commande prédictive ne diffèrent entre eux que par le modèle utilisé pour représenter le procédé et les bruits, et par la fonction du coût à minimiser.

Les différentes approches se différencient par le type de modèle qu'elles utilisent, ainsi que par la forme de la fonction de coût et la prise en compte ou non de contraintes.

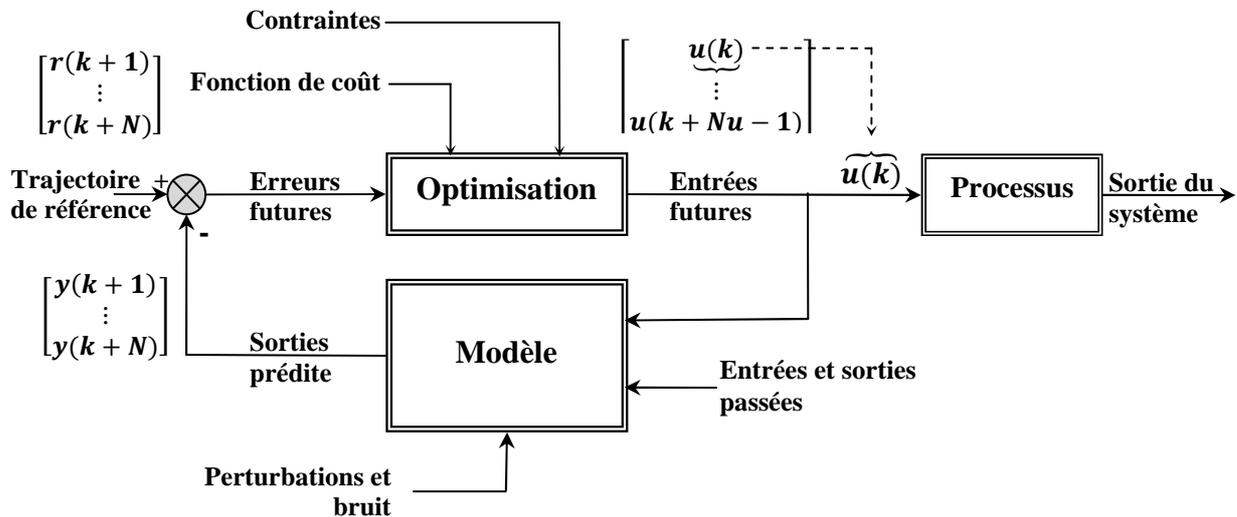


Figure (1.2) : Stratégie de la commande prédictive

## 1.4 Commande prédictive généralisée (GPC)

La stratégie de commande GPC a été proposée par Clarke à l'université d'Oxford en 1987 [2], elle est devenue l'un des algorithmes de commande prédictive les plus répandus. Elle a été très tôt implémentée, avec succès, dans nombreuses applications industrielles, et a montré de bonnes performances et un certain degré de robustesse.

L'idée à la base de la commande GPC est de calculer une séquence de commandes futures de telle façon qu'une fonction de coût à plusieurs composantes soit minimale sur un certain horizon de prédiction. L'indice à optimiser est une fonction quadratique qui mesure la distance entre la sortie prédite du système et une séquence de référence, plus une fonction quadratique qui mesure l'effort de commande [2,10].

### 1.4.1 Principe de calcul

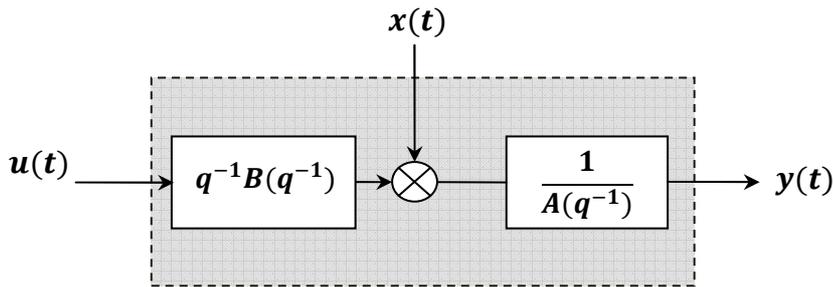
A partir des développements formulés par Clarke, les principales étapes donnant la loi de commande sont les suivantes :

### 1.4.1.1 Modèle de prédiction

Le modèle numérique de prédiction est classiquement défini par fonction de transfert entrée/sortie. Le système est alors représenté sous la forme **CARIMA** (**C**ontrolled **A**uto **R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage), correspondant à la Figure (1.3), dont l'expression est :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + x(t) \quad (1.1)$$

Tel que 
$$x(t) = C(q^{-1}) \frac{\xi(t)}{\Delta(q^{-1})}$$



**Figure (1.3)** Représentation CARIMA du modèle numérique

Avec  $u(t)$  l'entrée du système,  $y(t)$  la sortie,  $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$  l'opérateur de différence  $\xi(t)$  modélise les perturbations par un bruit blanc centré,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des polynômes en opérateur de retard  $q^{-1}$  :

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) = 1 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b} \\ C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c} \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce modèle appelé aussi modèle incrémental, introduit une action intégrale par le terme  $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$  et permet donc d'annuler toute erreur statique vis à vis d'une consigne ou d'une perturbation constante. On retiendra alors pour la suite cette dernière structure CARIMA, avec  $C(q^{-1})=1$  en ne s'intéressant qu'aux fonctions de transfert entrée/sortie pour lesquelles ce polynôme n'a aucune influence.

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{\xi(t)}{\Delta(q^{-1})} \quad (1.3)$$

### 1.4.1.2 Prédicteur optimal

La méthodologie prédictive requiert la définition d'un prédicteur optimal à  $j$ -pas qui permette d'anticiper le comportement du processus dans le futur sur un horizon fini. Pour cela, à partir de la forme du modèle, équation. (1.3), on élabore la sortie estimée à l'instant  $t + j$ , connaissant la sortie à l'instant  $t$ .

On a :

$$A(q^{-1})\Delta(q^{-1})y(t + j) = B(q^{-1})\Delta u(t + j - 1) + \xi(t + j) \quad (1.4)$$

Ou encore :

$$y(t + j) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}\Delta u(t + j - 1) + \frac{\xi(t + j)}{\Delta(q^{-1})A(q^{-1})} \quad (1.5)$$

On peut alors séparer les termes de la sortie prédite de la manière suivante :

$$y(t + j) = \underbrace{F_j(q^{-1})y(t) + H_j(q^{-1})\Delta u(t - 1)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{G_j(q^{-1})\Delta u(t + j - 1) + J_j(q^{-1})\xi(t + j)}_{\text{réponse forcée}} \quad (1.6)$$

Avec  $G_j$  représentant le futur,  $F_j, H_j$  correspondant au présent et au passé,  $J_j$  lié aux perturbations. Dès lors, le premier terme représentant la réponse libre est dû aux incréments de commandes passées, le deuxième terme représentant la réponse forcée correspond aux incréments de commandes futures et présentes, et à l'influence des perturbations.

L'équation du modèle CARIMA, équation (1.3), combinée avec celle du prédicteur, équation. (1.6), fournit le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} A(q^{-1})\Delta(q^{-1})y(t + j) = B(q^{-1})\Delta u(t + j - 1) + \xi(t + j) \\ [1 - q^{-j}F_j(q^{-1})]y(t + j) = [G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1})]\Delta u(t + j - 1) + J_j(q^{-1})\xi(t + j) \end{cases} \quad (1.7)$$

Considérant l'égalité des fonctions de transfert, les quatre polynômes inconnus sont obtenus de façon explicite et unique par résolution des deux équations de diophantien suivantes :

$$\begin{cases} \Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) = 1 \\ G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) = B(q^{-1})J_j(q^{-1}) \end{cases} \quad (1.8)$$

En faisant l'hypothèse que la meilleure prédiction du terme lié aux perturbations est sa moyenne (ici nulle dans le cas du bruit blanc centré), le prédicteur optimal est défini de façon unique, dès que les polynômes sont connus, par la relation :

$$\hat{y}(t+j) = F_j(q^{-1})y(t) + G_j(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + H_j(q^{-1})\Delta u(t-1) \quad (1.9)$$

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} \text{degré de } [G_j(q^{-1})] = j - 1 \\ \text{degré de } [F_j(q^{-1})] = \text{degré de } [A(q^{-1})] \\ \text{degré de } [H_j(q^{-1})] = \text{degré de } [B(q^{-1})] - 1 \end{cases}$$

### 1.4.1.3 Résolution récursive des équations de diophantien

L'implémentation de la commande prédictive généralisée nécessite la résolution des deux équations de diophantien (1.8).

#### 1.4.1.3.1 Résolution récursive de la première équation de diophantien

On a

$$\Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) = 1 \quad (1.10)$$

On pose

$$\tilde{A} = \Delta(q^{-1})A(q^{-1}) \quad (1.11)$$

Pour les horizons de prédiction  $j$  et  $j+1$  l'équation (1.10) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{A}(q^{-1})J_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) = 1 \\ \tilde{A}(q^{-1})J_{j+1}(q^{-1}) + q^{-(j+1)}F_{j+1}(q^{-1}) = 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

La différence donne

$$\tilde{A}(q^{-1})[J_{j+1}(q^{-1}) - J_j(q^{-1})] + q^{-j}[q^{-1}F_{j+1}(q^{-1}) - F_j(q^{-1})] = 0 \quad (1.13)$$

D'après l'équation (1.13) nous constatons que  $q^{-j}$  divise le polynôme  $\tilde{A}(q^{-1})[J_{j+1}(q^{-1}) - J_j(q^{-1})]$ , or  $q^{-j}$  et  $\tilde{A}(q^{-1})$  sont premières entre eux. Ceci nous permet d'écrire :

$$[J_{j+1}(q^{-1}) - J_j(q^{-1})] = q^{-j}r_j \quad (1.14)$$

En remplaçant  $[J_{j+1}(q^{-1}) - J_j(q^{-1})]$  par son expression dans (1.13) nous aurons :

$$q^{-j}[q^{-1}F_{j+1}(q^{-1}) - F_j(q^{-1}) + \tilde{A}(q^{-1})r_j] = 0 \quad (1.15)$$

Il ressort de l'équation précédente :

$$F_{j+1}(q^{-1}) = q[F_j(q^{-1}) - \tilde{A}(q^{-1})r_j] \quad (1.16)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} F_j(q^{-1}) = f_{j,0} + f_{j,1}q^{-1} + f_{j,2}q^{-2} + \dots + f_{j,n_a}q^{-n_a} \\ \tilde{A}(q^{-1})r_j = [1 + \tilde{a}_1q^{-1} + \tilde{a}_2q^{-2} + \dots + \tilde{a}_{n_a+1}q^{-(n_a+1)}]r_j \end{cases} \quad (1.17)$$

On aura :

$$F_{j+1}(q^{-1}) = q[\{f_{j,0} - r_j\} + \{f_{j,0} - \tilde{a}_1r_j\}q^{-1} + \dots + \{f_{j,n_a} - \tilde{a}_{n_a}r_j\}q^{-n_a} - \tilde{a}_{n_a+1}q^{-(n_a+1)}r_j] \quad (1.18)$$

Tel que:

$$F_{j+1}(q^{-1}) = f_{j+1,0} + f_{j+1,1}q^{-1} + f_{j+1,2}q^{-2} + \dots + f_{j+1,n_a}q^{-n_a} \quad (1.19)$$

En identifiant les coefficients des polynômes d'équations (1.18) et (1.19), nous tirons les relations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} r_j = f_{j,0} \\ f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - \tilde{a}_{i+1}r_j \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n_a - 1 \\ f_{j+1,n_a} = -\tilde{a}_{n_a+1}r_j \end{cases} \quad (1.20)$$

Ces relations déterminent le polynôme  $F_{j+1}(q^{-1})$ , nous retrouvons à partir de (1.14)

$$J_{j+1}(q^{-1}) = J_j(q^{-1}) + q^{-1}r_j \quad (1.21)$$

Les conditions initiales étant pour  $j=1$  :

$$\tilde{A}(q^{-1})J_1(q^{-1}) + q^{-1}F_1(q^{-1}) = 1 \quad (2.22)$$

Le coefficient  $\tilde{a}_0$  étant égal à 1, l'identité (1.2) est vérifiée lorsque :

$$J_1(q^{-1}) = 1 \quad (1.23)$$

$$F_1(q^{-1}) = q[1 - \tilde{A}(q^{-1})] \quad (1.24)$$

### 1.4.1.3.2 Résolution récursive de la deuxième équation de diophantien

On considère la deuxième équation diophantienne du système (1.8), que l'on rappelle ici :

$$G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) = B(q^{-1})J_j(q^{-1}) \quad (1.25)$$

Pour les horizons de prédiction  $j$  et  $j+1$  l'équation (1.10) s'écrit :

$$\begin{cases} G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) = B(q^{-1})J_j(q^{-1}) \\ G_{j+1}(q^{-1}) + q^{-(j+1)}H_{j+1}(q^{-1}) = B(q^{-1})J_{j+1}(q^{-1}) \end{cases} \quad (1.26)$$

La différence donne

$$[G_{j+1}(q^{-1}) - G_j(q^{-1})] + q^{-j}[q^{-1}H_{j+1}(q^{-1}) - H_j(q^{-1})] = B(q^{-1})[J_{j+1}(q^{-1}) - J_j(q^{-1})] \quad (1.27)$$

D'après (2.14) on implique :

$$[G_{j+1}(q^{-1}) - G_j(q^{-1})] + q^{-j}[q^{-1}H_{j+1}(q^{-1}) - H_j(q^{-1})] = q^{-j}B(q^{-1})r_j \quad (1.28)$$

D'où nous constatons que  $q^{-j}$  divise le polynôme  $[G_{j+1}(q^{-1}) - G_j(q^{-1})]$ , ceci nous permet d'écrire :

$$[G_{j+1}(q^{-1}) - G_j(q^{-1})] = q^{-j}s_j \quad (1.29)$$

En remplaçant  $[G_{j+1}(q^{-1}) - G_j(q^{-1})]$  par son expression dans (1.28) nous aurons :

$$q^{-j}[q^{-1}H_{j+1}(q^{-1}) - H_j(q^{-1}) - B(q^{-1})r_j + s_j] = 0 \quad (1.30)$$

Il ressort de l'équation précédente :

$$H_{j+1}(q^{-1}) = q[H_j(q^{-1}) + B(q^{-1})r_j - s_j] \quad (1.31)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} H_j(q^{-1}) = h_{j,0} + h_{j,1}q^{-1} + h_{j,2}q^{-2} + \dots + h_{j,n_b-1}q^{-(n_b-1)} \\ B(q^{-1})r_j = [b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}]r_j \end{cases} \quad (1.32)$$

On aura :

$$H_{j+1}(q^{-1}) = q[\{h_{j,0} + b_0r_j - s_j\} + \{h_{j,0} + b_1r_j\}q^{-1} + \dots + \{H_{j,n_b-1} + b_{n_b-1}r_j\}q^{-n_b} + b_{n_b}q^{-n_b}r_j] \quad (1.33)$$

Tel que:

$$H_{j+1}(q^{-1}) = h_{j+1,0} + h_{j+1,1}q^{-1} + h_{j+1,2}q^{-2} + \dots + h_{j+1,n_b-1}q^{-(n_b-1)} \quad (1.34)$$

En identifiant les coefficients des polynômes d'équations (1.33) et (1.34), nous tirons les relations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} s_j = h_{j,0} + r_j \\ h_{j+1,i} = h_{j,i+1} + b_{i+1}r_j \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n_b - 2 \\ h_{j+1,n_b-1} = b_{n_b}r_j \end{cases} \quad (1.35)$$

Ces relations déterminent le polynôme  $H_{j+1}(q^{-1})$ , nous retrouvons à partir de (1.29)

$$G_{j+1}(q^{-1}) = G_j(q^{-1}) + q^{-1}s_j \quad (1.36)$$

Les conditions initiales étant pour  $j=1$  :

$$G_1(q^{-1}) + q^{-1}H_1(q^{-1}) = B(q^{-1})J_1(q^{-1}) \quad (1.37)$$

L'identité (1.37) est vérifié lorsque :

$$G_1(q^{-1}) = b_0 \quad (1.38)$$

$$H_1(q^{-1}) = q[B(q^{-1}) - b_0] \quad (1.39)$$

#### 1.4.1.4 Fonction du coût quadratique

Une fois définie l'équation de prédiction, la méthode implique la minimisation d'un critère quadratique à horizon fini. La stratégie GPC minimise une somme pondérée des carrés des erreurs futures entre la sortie prédite et la consigne, et des incréments des commandes futures.

$$J(N_1, N_2) = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [u(t+j-1)]^2 \quad (1.40)$$

On suppose :

$$\Delta u(t+j) = 0 \text{ pour } j \geq N_u \quad (1.41)$$

Avec :  $w(t+j)$  consigne appliquée à l'instant  $t+j$ ,  $\hat{y}(t+j)$  sortie prédite à l'instant  $t+j$ ,  $\Delta u(t+j-1)$  incrément de commande à l'instant  $t+j-1$ . La relation (1.11) signifie que lorsque le pas de prédiction  $j$  atteint la valeur fixée pour l'horizon de commande  $N_u$ , la variation de commande s'annule et donc que la commande future va se stabiliser. Cette hypothèse permettra par la suite de simplifier le calcul de la commande.

Le critère nécessite la définition de quatre paramètres de réglage :

- $N_1$  : horizon de prédiction minimal ;
- $N_2$  : horizon de prédiction maximal ;
- $N_u$  : horizon de prédiction sur la commande ;
- $\lambda$  : coefficient de pondération sur la commande.

Ce critère comprend donc un terme quadratique sur l'erreur et l'incrément de la commande. Sa minimisation analytique fournit la séquence des commandes futures dont seule la première sera effectivement appliquée. L'aspect incrémental du modèle se retrouve dans le critère par l'intermédiaire de  $\Delta u$ . Enfin le coefficient  $\lambda$  permet de donner plus ou moins de poids à la commande par rapport à la sortie, de façon à assurer la convergence lorsque le système de départ présente un risque d'instabilité.

#### 1.4.1.5 Prédicteur optimal sous forme matricielle

La minimisation du critère se base sur la mise sous forme matricielle de l'équation de prédiction, équation (1.9), et de la fonction de coût équation (1.40). On considère les notations matricielles suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{if} = [F_{N_1}(q^{-1}), \dots, F_{N_2}(q^{-1})]^T \\ \mathbf{ih} = [H_{N_1}(q^{-1}), \dots, H_{N_2}(q^{-1})]^T \\ \tilde{\mathbf{u}} = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N_u+1)]^T \\ \hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t+N_1), \dots, \hat{y}(t+N_2)]^T \end{cases} \quad (1.42)$$

Le prédicteur (1.9) peut alors être transcrit sous forme matricielle :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{if}y(t) + \mathbf{ih}\Delta u(t-1) \quad (1.43)$$

Où  $\mathbf{G}$  est la matrice formée des coefficients  $\{g_i^j\}$  des polynômes  $G_j$ . Ces coefficients correspondent aux valeurs des coefficients  $\{g_i\}$  de la réponse indicielle du modèle.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{N_1}^{N_1} & g_{N_1-1}^{N_1} & \cdots & \cdots \\ g_{N_1+1}^{N_1+1} & g_{N_1}^{N_1+1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ g_{N_2}^{N_2} & g_{N_2-1}^{N_2} & \cdots & g_{N_2-N_u+1}^{N_2} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

#### 1.4.1.6 Fonction de coût sous forme matricielle

De la même manière, le critère de coût (1.40) se transcrit sous la forme :

$$J = [\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{if}y(t) + \mathbf{ih}\Delta u(t-1) - \mathbf{w}]^T [\mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{if}y(t) + \mathbf{ih}\Delta u(t-1) - \mathbf{w}] + \lambda \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} \quad (1.45)$$

Avec :

$$\mathbf{w} = [w(t+N_1), \dots, w(t+N_2)]^T$$

#### 1.4.1.7 Loi de commande optimale

La loi de commande optimale est obtenue par minimisation analytique du critère sous forme matricielle  $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = 0$  :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{opt} = -\mathbf{M}[\mathbf{if}y(t) + \mathbf{ih}\Delta u(t-1) - \mathbf{w}] \quad (1.46)$$

Où

$$\mathbf{M} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}_{N_u}]^{-1} \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_{N_u} \end{bmatrix}$$

### 1.4.1.8 Stratégie de l'horizon fuyant

De façon classique en commande prédictive, seule la première valeur de la séquence, équation (1.46), est finalement appliquée au système en accord avec la stratégie de l'horizon fuyant, l'ensemble de la procédure étant effectué de nouveau à la période d'échantillonnage suivante.

$$u_{opt}(t) = u_{opt}(t - 1) - \mathbf{m}_1[\mathbf{i}f y(t) + \mathbf{i}h\Delta u(t - 1) - \mathbf{w}] \quad (1.47)$$

### 1.4.2 Structure RST du régulateur

La structure *RST* polynomiale est introduite afin d'obtenir une relation entre la sortie  $y(t)$ , la commande  $u(t)$  et la consigne  $w(t)$ . À partir de la relation (1.47), il vient :

$$\Delta u_{opt}(t)[1 + q^{-1}\mathbf{m}_1\mathbf{i}h(q^{-1})] = -\mathbf{m}_1\mathbf{i}f(q^{-1})y(t) + \mathbf{m}_1[q^{N_1} \dots q^{N_2}]\mathbf{w} \quad (1.48)$$

Cette relation doit correspondre d'après la Figure (1.4) à l'équation :

$$S(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t) = -R(q^{-1})y(t) + T(q)w(t) \quad (1.49)$$

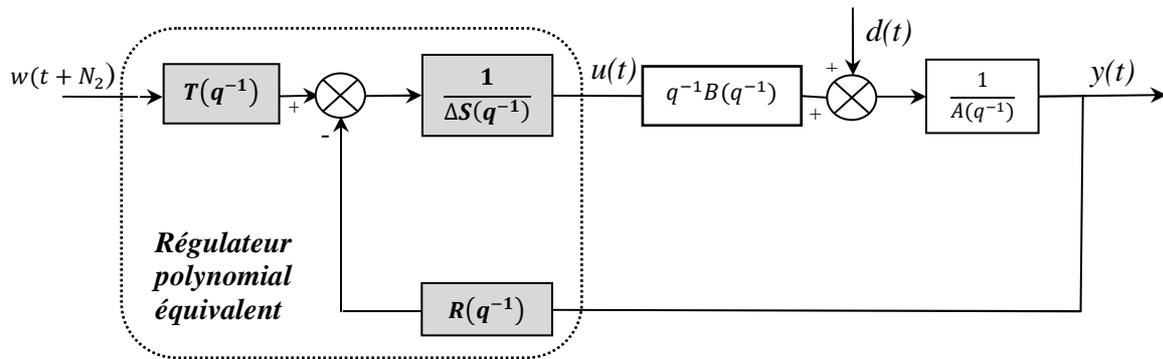


Figure (1.4) Structure *RST* de la commande GPC

Ce qui fournit par identification les trois polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  constituant le régulateur linéaire équivalent :

$$\begin{cases} S(q^{-1}) = 1 + \mathbf{m}_1\mathbf{i}h q^{-1} \\ R(q^{-1}) = \mathbf{m}_1\mathbf{i}f \\ T(q^{-1}) = \mathbf{m}_1[q^{-N_2+N_1} \quad q^{-N_2+N_1+1} \quad \dots \quad 1]^T \end{cases} \quad (1.50)$$

Avec

$$\begin{cases} \text{degré}[S(q^{-1})] = \text{degré}[B(q^{-1})] \\ \text{degré}[R(q^{-1})] = \text{degré}[A(q^{-1})] \\ \text{degré}[T(q^{-1})] = N_2 - N_1 \end{cases}$$

Notons que  $T$  est volontairement choisi ici causal (puissances de  $q^{-1}$ ), en considérant que le signal de consigne est  $w(t + N_2)$ .

L'intérêt qui se dégage de la représentation  $RST$  (par ailleurs très générale puisque toute loi de commande numérique peut se modéliser ainsi) est que finalement la boucle temps réel s'avère très peu gourmande en temps de calcul, puisque la commande appliquée au système se calcule par une simple équation aux différences (équation 1.49). Les trois polynômes  $R$ ,  $S$ ,  $T$  sont en effet élaborés hors ligne et définis de façon unique dès lors que les quatre paramètres de réglage  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$ ,  $\lambda$  sont choisis. En conséquence, ce type de commande permet la sélection de périodes d'échantillonnage faibles et s'avère bien adapté à la commande de systèmes électromécaniques.

Un autre intérêt majeur de cette structure  $RST$  concerne l'étude de la stabilité de la boucle corrigée, et donc la caractérisation de la stabilité de la commande prédictive élaborée, qui est dès lors possible pour un jeu de paramètres du critère fixé. On peut vérifier la position des pôles en boucle fermée, donnés par l'équation caractéristique suivante:

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1}) \quad (1.51)$$

Avec cette représentation, il est possible de tester la stabilité avant l'implantation de la loi de commande sur le système réel.

### 1.4.3 Algorithme de calcul de la GPC

Nous pouvons résumer la synthèse de la commande prédictive généralisée dans l'algorithme suivant :

Début

1. Obtention des coefficients  $A$  et  $B$  du modèle de processus de type CARIMA ;
2. Calcul du polynôme  $\tilde{A} = A\Delta$ ;
3. Définir les horizons de prédictions  $N_1$  et  $N_2$ , l'horizon de commande  $N_u$ , et le facteur de pondération  $\lambda$  ;
4. Résolution des deux équations de diophantien;

5. Formation de la matrice  $\mathbf{G}$  ;
6. Définition des matrices  $\mathbf{if}$  et  $\mathbf{ih}$  ;
7. Calcul de la matrice  $\mathbf{M} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}_{N_u}]^{-1} \mathbf{G}^T$  ;
8. Calcul de  $\mathbf{m}_1$  (stratégie de l'horizon fuyant) ;
9. Synthèse du correcteur  $RST$

Fin

#### 1.4.4 Choix des paramètres de réglage

La définition du critère quadratique (1.40) a montré qu'on doit fixer quatre paramètres de réglage. Ce choix des paramètres s'avère cependant délicat, car il n'existe pas de relations empiriques permettant de relier ces paramètres à des 'indicateurs' classiques en Automatique, tel que la marge de stabilité. Cependant, leur choix peut s'effectuer selon les règles de synthèse des paramètres GPC énoncées dans [14] :

##### 1.4.4.1 Choix de l'horizon minimal de prédiction $N_1$

Le produit  $N_1 T_e$  ( $T_e$  période d'échantillonnage) est choisi égal au retard pur du système. Ainsi, pour un système ne présentant pas de retard ou un retard mal connu ou variable,  $N_1$  est choisi égal à 1.

##### 1.4.4.2 Choix de l'horizon maximal de prédiction $N_2$

$N_2$  est choisi de sorte que le produit  $N_2 T_e$  soit limité par la valeur du temps de réponse souhaité. En effet augmenter la prédiction au delà du temps de réponse n'apporte aucune information supplémentaire et complexifie la résolution. Par ailleurs, plus  $N_2$  est grand, plus le système corrigé est stable et lent.

##### 1.4.4.3 Choix de l'horizon maximal de prédiction $N_u$

L'horizon de commande conditionne les dimensions des matrices et vecteurs impliqués pour le calcul de la loi de commande : plus ce paramètre est choisi petit et plus le volume de calcul diminue. En plus si  $N_u = 1$ , ceci permet d'éviter des inversions de matrices lors des calculs de la loi de commande. D'où l'intérêt de choisir ce paramètre le plus petit possible (égal à un ou deux selon les performances exigées).

#### 1.4.4.4 Choix du facteur de pondération de la commande $\lambda$

On peut interpréter le facteur de pondération  $\lambda$  comme 'l'équilibre de la balance'. Plus  $\lambda$  est élevé et plus la commande optimale fournie est douce. Si  $\lambda$  est nulle, la minimisation du critère est effectuée sans tenir compte des mouvements de la commande. Il peut donc en résulter une commande très forte pouvant faire diverger le processus réel. Une relation permettant de déterminer rapidement la valeur de  $\lambda$  apportant au système le maximum de stabilité est donnée ci-dessous :

$$\lambda_{opt} = trace(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \quad (1.52)$$

### 1.5 Applications numériques sur différents procédés

Afin de compléter la partie théorique, cette partie est consacrée à la présentation d'un ensemble de résultats qui vont permettre de valider et confirmer la théorie présentée précédemment. Pour cela quelques tests seront réalisés afin de montrer l'effet des principaux paramètres de réglage de la GPC sur différents types de procédés.

#### 1.5.1 Système second ordre stable à phase minimale

Le modèle du procédé considéré est le suivant [15] :

$$G(q^{-1}) = \frac{0.0232 - 0.0006q^{-1}}{1 - 1.16939q^{-1} + 0.7165q^{-2}} q^{-1} \quad (1.53)$$

Avec  $T_e = 0.001s$  est la période d'échantillonnage.

Les polynômes  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  du model CARIMA sont :

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 - 1.16939q^{-1} + 0.7165q^{-2} \\ B(q^{-1}) = 0.0232 - 0.0006q^{-1} \end{cases} \quad (1.54)$$

La Figure (1.5a) montre l'effet de l'horizon de prédiction final  $N_2$  sur la sortie et la commande du procédé, on a fixé  $N_1 = 1$  et  $N_u = 1$  ; le coefficient de pondération est pris égale à  $trace(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$ . Les différentes valeurs de  $N_2$  sont : 2, 10, et 30.

On constate que pour un horizon de prédiction court, la réponse est très rapide (voire même instable dans quelques cas) exigeant des valeurs considérables de la commande; En revanche, si l'horizon de prédiction est long, la dynamique de réponse est lente avec une commande douce. Lorsque  $N_2$  tend vers l'infini, la réponse du système en boucle fermée tend vers celle de la boucle ouverte (les pôles en boucle fermée tendent vers les pôles du procédé en boucle ouverte).

La Figure (1.5b) montre l'effet de l'horizon de commande  $N_u$  sur la sortie et la commande du procédé, on a fixé  $N_1 = 1$   $N_2 = 10$ , et  $\lambda = 0.5$ . Les différentes valeurs de  $N_u$  sont : 3, 9, et 10. On remarque que l'horizon de commande affecte la nature du signal de commande fourni. S'il est court la loi de commande fournie un contrôle doux et peu actif. Le choix de ce paramètre dépend principalement du système à commander. Plus le système sera complexe, plus  $N_u$  doit être élevé.

La Figure (1.5c) montre l'effet du coefficient de pondération  $\lambda$  sur la sortie et la commande du procédé, on a fixé  $N_1 = 1$   $N_2 = 10$ , et  $N_u = 1$ . Les différentes valeurs de  $\lambda$  sont : 1, 15, et 30. On voit que ce paramètre de réglage permet de pondérer les variations brusques du signal de commande. Plus  $\lambda$  est élevé et plus la commande optimale fournie est douce.

### 1.5.2 Système second ordre stable à phase non minimale

Le comportement de ce type de système est très sensibles aux choix de l'horizon initial  $N_1$ ; Afin d'illustrer l'influence de ce dernier sur le comportement d'un système second ordre stable à phase non minimale en boucle fermée, on considère le modèle suivant [15] :

$$G(q^{-1}) = \frac{-0.2138 + 0.2365q^{-1}}{1 - 1.16939q^{-1} + 0.7165q^{-2}} q^{-1} \quad (1.55)$$

Avec  $T_e = 0.01s$  est la période d'échantillonnage.

Les polynômes  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  du model CARIMA sont :

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 - 1.16939q^{-1} + 0.7165q^{-2} \\ B(q^{-1}) = -0.2138 + 0.2365q^{-1} \end{cases} \quad (1.56)$$

La simulation de ce système en boucle ouverte, pour une entrée échelon est présentée sur la Figure (1.6).

Dans ce cas l'horizon de prédiction doit être assez long soit  $N_2 = 30$  pour "voir" au delà du départ malin, permettant ainsi de prendre en considération toute la partie montante de la sortie dans le critère.

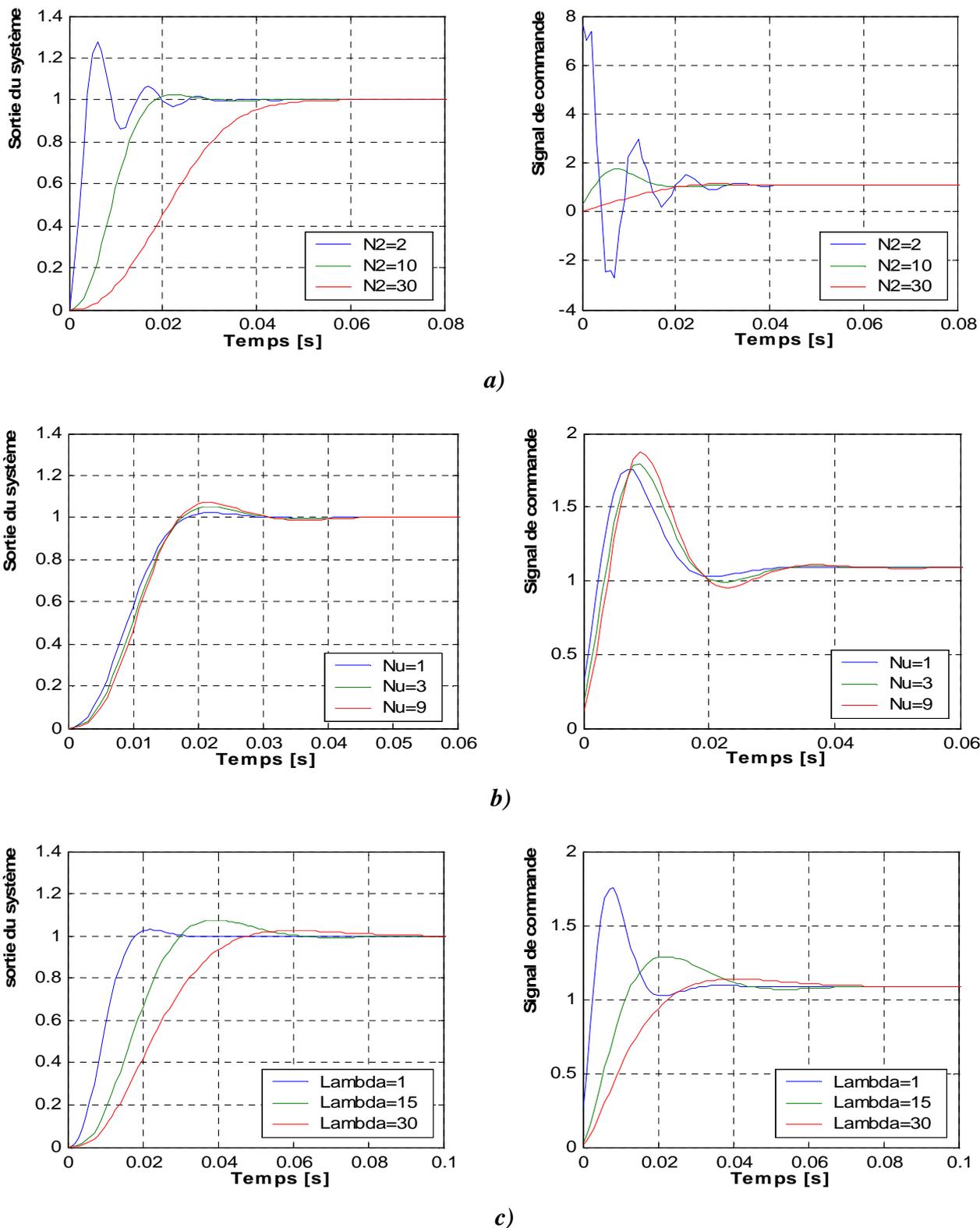
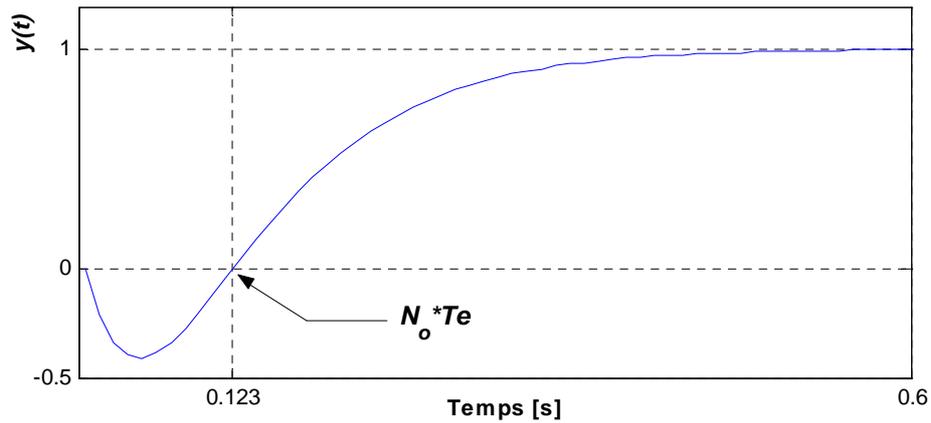


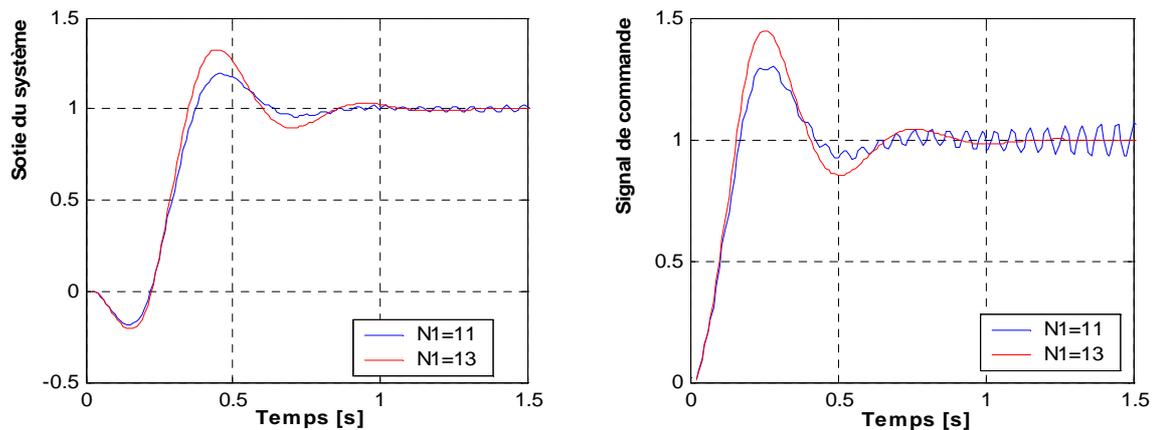
Figure (1.5) Evolution de la sortie et de la commande d'un système 2<sup>ème</sup> ordre stable à phase minimale

- a) Influence de l'horizon de prédiction  $N_2$
- b) Influence de l'horizon de commande  $N_u$
- c) Influence du coefficient de pondération  $\lambda$



**Figure (1.6)** réponse indicielle en boucle ouverte d'un système 2<sup>ème</sup> ordre stable à phase non minimale

Le paramètre  $N_1$  doit être égal ou supérieur de  $N_0$  indiqué sur la Figure (1.6) :  $N_0 = \frac{0.123}{T_e}$  soit  $N_1 = 13$ . On constate d'après la Figure (1.7) qu'une faible valeur de  $N_1$  entraîne une instabilité.



**Figure (1.7)** Evolution de la sortie et de la commande d'un système 2<sup>ème</sup> ordre stable à phase non minimale : influence de l'horizon de prédiction initial  $N_2$

### 1.5.3 Système instable

On considère le système instable suivant [16]

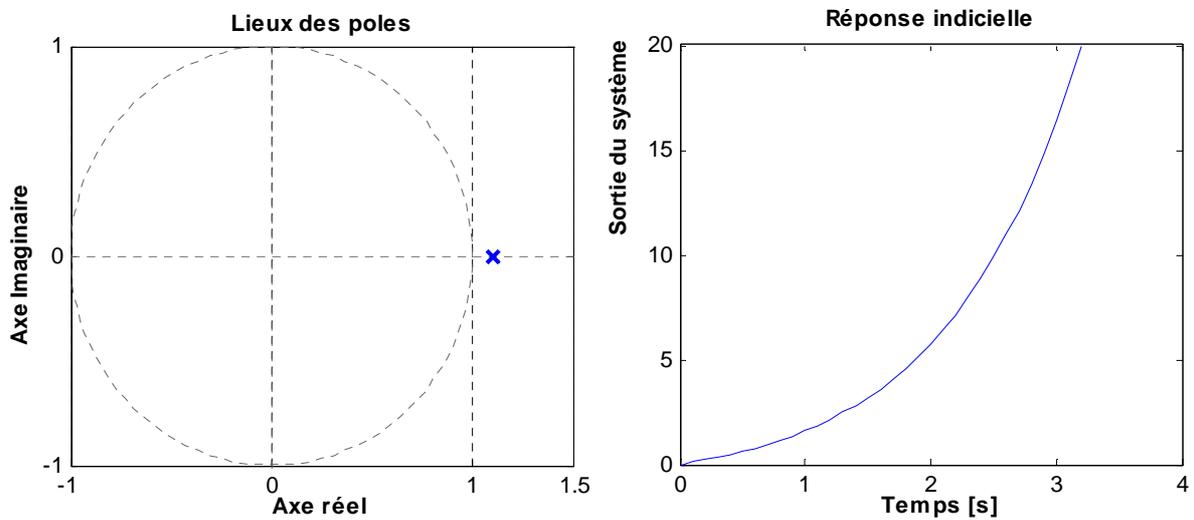
$$G(q^{-1}) = \frac{0.1}{1-1.1q^{-1}} q^{-1} \tag{1.57}$$

Avec une période d'échantillonnage  $T_e=0.01s$

Les polynômes  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  du model CARIMA sont :

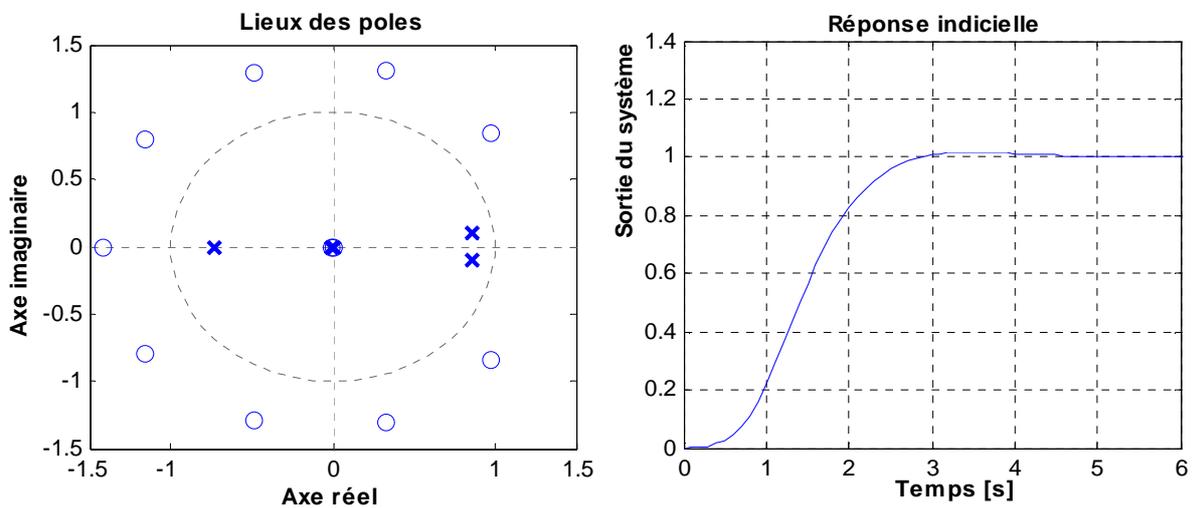
$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 - 1.1q^{-1} \\ B(q^{-1}) = 0.1 \end{cases} \tag{1.58}$$

La Figure (1.8) montre la simulation de ce système en boucle ouverte, le système possède un pôle instable en 1.1



**Figure (1.8)** Lieux des pôles et réponse indicielle en boucle ouverte d'un système instable

Le choix des paramètres de réglages  $N_1 = 1, N_1 = 10, N_u = 1$  et  $\lambda = trace(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = 7.939$  conduit à un comportement stable et bien amorti Figure (1.9).



**Figure (1.9)** Lieux des pôles et réponse indicielle en boucle fermée d'un système instable stabilisé par la GPC

## Conclusion

Ce chapitre a présenté la stratégie de la commande prédictive en insistant sur ses particularités qui en font une méthode de commande particulièrement efficace et très répandue dans la communauté automatique. Les atouts principaux de cette technique de commande reposent sur son aspect prédictif permettant une anticipation au niveau du suivi de la trajectoire.

Les calculs du correcteur prédictif généralisé GPC ont été rappelés dans le cadre des systèmes linéaires sans contraintes, le but était de formuler cette commande sous une forme polynomiale *RST*. Une application numérique est faite sur quelques exemples.

Néanmoins, la commande prédictive peut avoir comme effet néfaste sur notre système à cause des changements susceptibles de se produire sur le système, et à cause des perturbations extérieures agissant sur le système comme les bruits de mesure par exemple. Ces changements sont alors considérés comme des incertitudes non-structurées lors de la synthèse du correcteur. Ainsi, il s'avère nécessaire de retoucher le correcteur obtenu pour mieux répondre aux demandes de performance et de robustesse spécifiques à chaque application, ce qui est l'objet des prochains chapitres.

## **Chapitre II**

### ***Commande prédictive généralisée robustifiée vis-à-vis les incertitudes non-structurées***

#### **2.1 Introduction**

Le chapitre précédent a montré que l'utilisation d'un modèle du système constitue l'élément primordial pour la synthèse de la loi de commande prédictive GPC. Par conséquent, le succès de la commande prédictive dépend essentiellement au degré de la précision du modèle du système. Cependant, dès lors que le modèle représente toujours imparfaitement la réalité du système physique, des incertitudes de modèle apparaissent nécessairement. Ainsi, l'étude de la robustification d'une loi de commande prédictive constitue naturellement l'étape suivante, le but d'une commande robustifiée étant de préserver la stabilité du système corrigé et les spécifications de performance en présence des incertitudes et des perturbations possibles.

L'amélioration de la robustesse de la commande prédictive est étudiée dans plusieurs articles. Diverses stratégies ont ainsi été développées, visant à l'amélioration des caractéristiques de robustesse en stabilité face à plusieurs types d'incertitudes, face à certaines contraintes imposées et ainsi que des caractéristiques face à des spécifications de performance nominale ou de robustesse vis-à-vis des perturbations ou des bruits de mesure. La plupart de ses méthodes s'effectue par une optimisation à chaque période d'échantillonnage, afin de minimiser un critère de performance à chaque pas, tout en respectant certaines contraintes au niveau de l'entrée, la sortie et l'état du système. Cela donne comme résultat un régulateur non linéaire et variant dans le temps [17, 18]. D'autre part, la paramétrisation de Youla est utilisée dans [19, 20, 21] comme outil de robustification de la commande prédictive, et qui considèrent un paramètre de Youla variant, ce qui implique de réaliser une optimisation à chaque période d'échantillonnage. Egalement, [6, 22, 23] utilisent de même la paramétrisation de Youla pour robustifier un correcteur polynomial initial, mais il est aussi nécessaire d'effectuer une optimisation en ligne.

Des résultats convaincants ont ainsi été obtenus par le biais d'approches en ligne, mais parfois avec une charge importante en termes de calculs à effectuer, qui peut devenir un facteur de

limitation de cette classe de méthodes. Afin de surmonter cette surcharge de calculs et la limitation temps réel, et dans le but de pouvoir appliquer des lois de commande prédictives robustes à des processus industriels rapides ou des systèmes de grande taille, des méthodes de robustification hors-ligne ont été développées.

Quant à la robustification hors-ligne de la commande GPC, la technique la plus classique est développée par Yoon et Clark [16] elle se base sur le choix du dit *polynôme C*. Une autre approche proposée par Kouvaritakis [3], il utilise la *Q*-paramétrisation pour améliorer la robustesse de la commande, il s'agit de trouver un paramètre *Q* qui apporte le maximum de la robustesse au régulateur, en minimisant une norme pondérée. Cette approche a l'inconvénient de pénaliser le rejet de perturbation. La *Q*-paramétrisation est utilisée aussi dans [4] ; dans ce travail, une sensibilité mixte est définie mais le compromis entre la robustesse et les performances nominales est difficile à gérer. La *Q*-paramétrisation se peut référer comme paramétrisation de Youla [24]. Ansay [7] a pu ajuster le compromis entre le rejet de perturbation et la robustesse mais l'espace de recherche du paramètre de Youla est restreint. Une méthodologie sophistiquée est développée par P. Rodriguez [9], son avantage consiste à utiliser tous les degrés de liberté offerts par la paramétrisation de Youla. Cette dernière permet, d'une part, d'accéder à tous les correcteurs stabilisant le système et, d'autre part, de formuler des spécifications de type fréquentiel et temporel en boucle fermée. Ces deux caractéristiques sont utilisées de façon à traduire le problème de robustification en un problème d'optimisation convexe. De cette façon, il a pu ajuster le compromis robustesse / performance d'une manière simple. Cette dernière méthode de robustification constitue un atout primordial pour une bonne régulation d'un processus soumis à des incertitudes non-structurées.

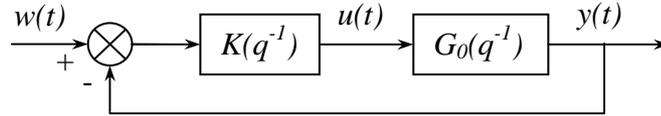
Cette partie présente de façon détaillée la méthode de robustification proposée pour les lois de commande prédictive GPC. Les idées de la méthode se basent sur le travail développé par P. Rodriguez [9]. La méthode est en réalité applicable à toute loi de commande numérique sous forme *RST*.

Le chapitre s'intéresse tout d'abord à la paramétrisation de Youla d'un correcteur GPC à deux degrés de liberté. On y décrit comment, à partir d'un correcteur GPC initial, il est possible de paramétrer tous les correcteurs qui stabilisent le système. Cette paramétrisation permet de définir le problème de robustification comme un problème d'optimisation convexe. Ensuite on analyse la résolution numérique du problème d'optimisation.

## 2.1 Rôle de robustification de la loi de commande prédictive

### 2.1.1 Robustesse en stabilité

Considérons le système de la Figure (2.1)



**Figure (2.1)** Système bouclé pour analyse de robustesse

On notera  $G(q^{-1})$  la fonction de transfert modélisant le système et  $G_0(q^{-1})$  le système réel. Le théorème 2.1, basé sur le critère de stabilité de Nyquist, donne les conditions de stabilité du système bouclé [25].

#### ***Théorème 2.1***

Le système de la Figure (2.1) est stable si :

- Le système bouclé avec  $G(q^{-1})$  est stable.
- $G(q^{-1})$  et  $G_0(q^{-1})$  ont le même nombre de pôles à l'extérieur du cercle unité.
- Si  $G_0(q^{-1})$  a des pôles sur le cercle unité, ceux-ci sont aussi pôles de  $G(q^{-1})$ .
- La condition suivante est satisfaite pour  $\forall w \in [0, \pi]$ .

$$|G(e^{-jw})K(e^{-jw}) - G_0(e^{-jw})K(e^{-jw})| < |1 + G(e^{-jw})K(e^{-jw})| \quad (2.1)$$

Cette condition peut être s'interpréter graphiquement sur le diagramme de Nyquist, comme montre la Figure (2.2).

La stabilité est garantie si, pour tout point du lieu de Nyquist nominal  $G(e^{-jw})K(e^{-jw})$ , le cercle de centre  $GK$  et de rayon  $|GK - G_0K|$  ne contient pas le point (-1).

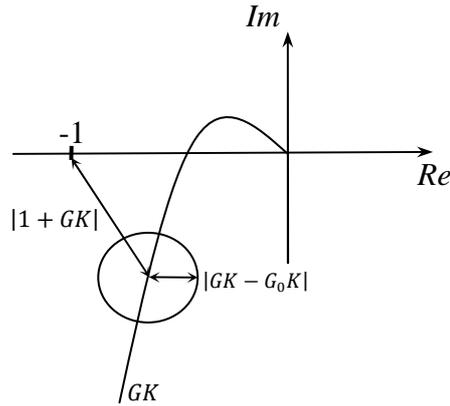


Figure (2.2) Interprétation de la condition de robustesse en stabilité

### 2.1.2 Définition de la marge de robustesse pour le cas du correcteur GPC

Appliquant la condition précédente relation (2.1) au système de la Figure (1.4) on a :

$$\left| \frac{q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1})} - \frac{q^{-1}B_0(q^{-1})R(q^{-1})}{A_0(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1})} \right| < \left| 1 + \frac{q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1})} \right| \quad (2.2)$$

En considérant (1.51), il vient

$$\left| \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} - \frac{B_0(q^{-1})}{A_0(q^{-1})} \right| < \left| \frac{P_c(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})} \right| = B_r \quad (2.3)$$

Plus la partie droite de l'inégalité sera grande, plus notre système sera robuste face aux incertitudes de modèle. Ce transfert est donc une marge de robustesse du système, que l'on va nommer  $B_r$ .

### 2.2 Paramétrisation de Youla, idées de base

Il s'agit de paramétrer de manière complète la famille de correcteurs stabilisants pour un système donné. On considère le système en boucle fermée de la Figure (2.3).

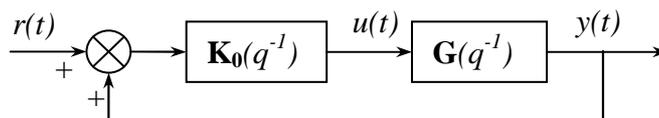


Figure (2.3) Boucle fermée classique (avec retour positif)

Les deux théorèmes suivants définissent la Paramétrisation de Youla (le lecteur pourra consulter leurs preuves dans [26]).

### ***Théorème 2.2***

Considérons :

$$\mathbf{G} = \mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{N}} \quad (2.4)$$

et :

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{U}_0\mathbf{V}_0^{-1} = \tilde{\mathbf{V}}_0^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_0 \quad (2.5)$$

Les factorisations fractionnelles co-premières de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{K}_0$  à gauche et à droite ou  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{V}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{V}}_0$  sont les matrices de transfert stables.

Si  $\mathbf{K}_0$  est un correcteur stabilisant, alors  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{V}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{V}}_0$  peuvent être choisies telles que : [26].

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_0 & -\tilde{\mathbf{U}}_0 \\ -\tilde{\mathbf{N}} & \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{N} & \mathbf{V}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

### ***Théorème 2.3***

En considérant (2.4) et (2.5) telles que (2.6) soit vérifiée, pour toute matrice de transfert stable  $\mathbf{Q}$  de dimensions adéquates, on définit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{M}\mathbf{Q} \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{N}\mathbf{Q} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{M}} \quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{N}} \quad (2.8)$$

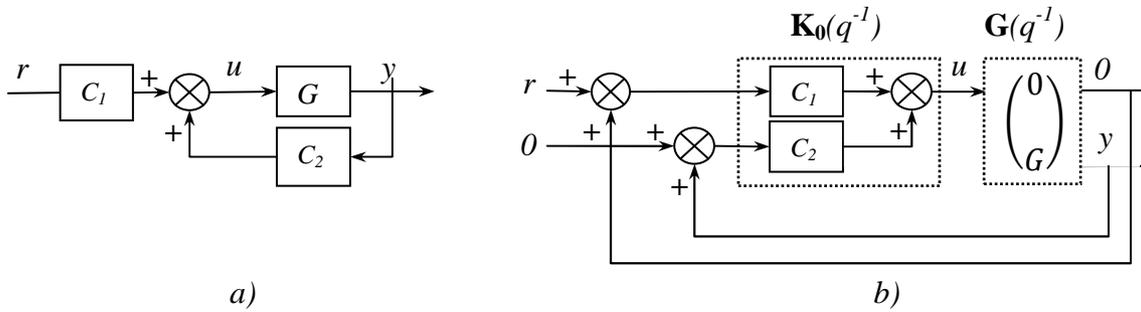
Alors :

- $\mathbf{U}\mathbf{V}^{-1} = \tilde{\mathbf{V}}_0^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_0$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{U}\mathbf{V}^{-1} = \tilde{\mathbf{V}}_0^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_0$  est un correcteur stabilisant pour  $\mathbf{G} = \mathbf{N}\mathbf{M}^{-1} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{N}}$
- Tout correcteur stabilisant a une représentation fractionnelle donnée par (2.7) et (2.8).

Afin d'aboutir à une représentation correspondante pour un correcteur à deux degrés de liberté (le cas RST étant la structure utilisée), plusieurs transformations sont requises (Figure 2.4), à

partir de la forme générale (Figure 2.4a) jusqu'à la forme de bouclage standard illustrée dans la Figure (2.4b) afin de conserver la mise en forme de la Figure (2.3).

Avec :  $\mathbf{K} = (C_1 \quad C_2)$  et  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}$



**Figure (2.4)** Correcteur à deux degrés de liberté. a) Représentation générale. b) Bouclage standard

Afin de paramétrer le correcteur, un choix de factorisation peut être le suivant :

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = 1, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{U}_0 = \tilde{\mathbf{U}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{v}}_0 = 1$$

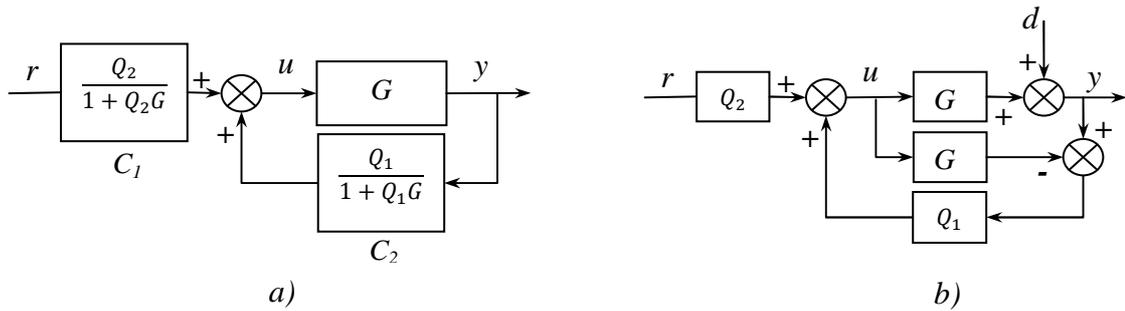
qui vérifient (2.4), (2.5) et (2.6) avec  $\mathbf{Q} = (Q_2 \quad Q_1)$ , on obtient la famille de correcteurs est la suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \tilde{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{M}} = (Q_2 \quad Q_1) \\ \tilde{\mathbf{V}} &= \tilde{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{N}} = 1 + Q_1G \end{aligned} \tag{2.9}$$

A partir de la relation  $\mathbf{K} = \mathbf{U}\mathbf{V}^{-1} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1}\tilde{\mathbf{U}}$ , il vient :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{Q_2}{1+Q_2G} & \frac{Q_1}{1+Q_1G} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Les deux représentations (a) et (b) de la figure (3.5) sont équivalentes :



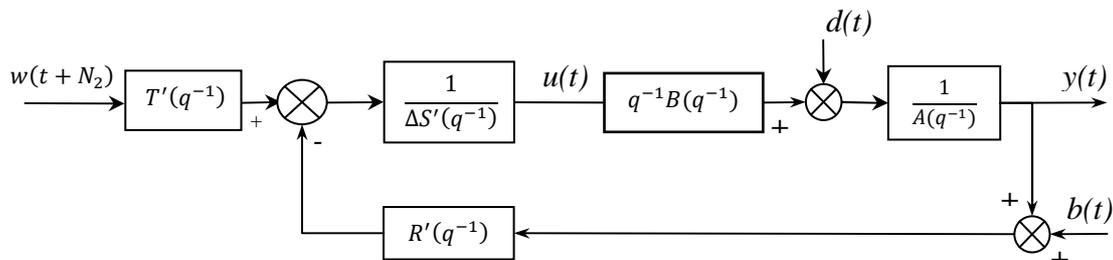
**Figure (2.5)** Paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants pour un correcteur à deux degrés de liberté

La Figure (2.5b) correspond à la paramétrisation de tous les correcteurs stabilisants à deux degrés de liberté avec une structure à modèle interne. On constate au travers de cette représentation que la paramétrisation d'un régulateur à deux degrés de liberté implique un paramètre de Youla à deux composantes ;  $Q_2$  qui a un rôle de préfiltrage, et  $Q_1$ , qui modifie la dynamique de la boucle fermée. On remarque également que  $Q_1$  a une influence uniquement sur la partie non modélisée par  $G$ , à savoir les perturbations qui agissent sur le système, représentées ici par le signal  $d$ .

L'intérêt de ce type de régulateur réside tout particulièrement en une séparation des dynamiques de poursuite et de régulation. Le paramètre  $Q_2$  modifie la dynamique de poursuite sans changer la dynamique de la boucle fermée (ou de régulation), et le paramètre  $Q_1$  modifie la dynamique de régulation sans changer la dynamique de poursuite.

### 2.3 Paramétrisation de Youla d'un correcteur GPC

Considérons un correcteur GPC initial noté  $R'$ - $S'$ - $T'$ , représenté Figure (2.6). Ce correcteur a été synthétisé avec les paramètres  $N_1, N_2, N_u$  et  $\lambda$  ajustés de façon à obtenir le comportement entrée/sortie désiré.



**Figure (2.6)** Correcteur  $R'$ - $S'$ - $T'$  initial

Afin d'obtenir la paramétrisation de Youla de ce correcteur initial, il faut tout d'abord définir une structure de bouclage standard Figure (2.3) et appliquer le Théorème (2.3). Pour ce faire, modifions la Figure (2.6), pour arriver à la Figure (2.7), puis à la Figure (2.8).

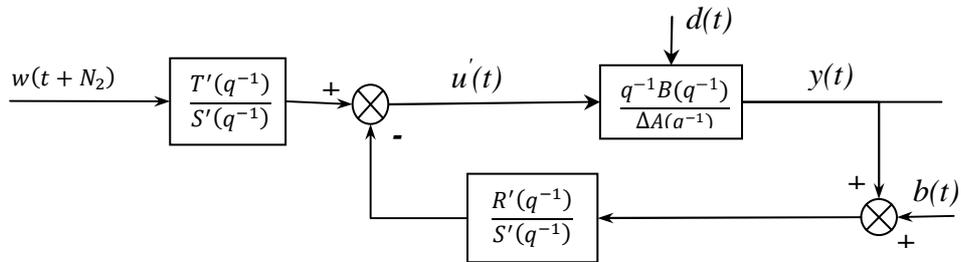


Figure (2.7) Correcteur initial, structure modifiée

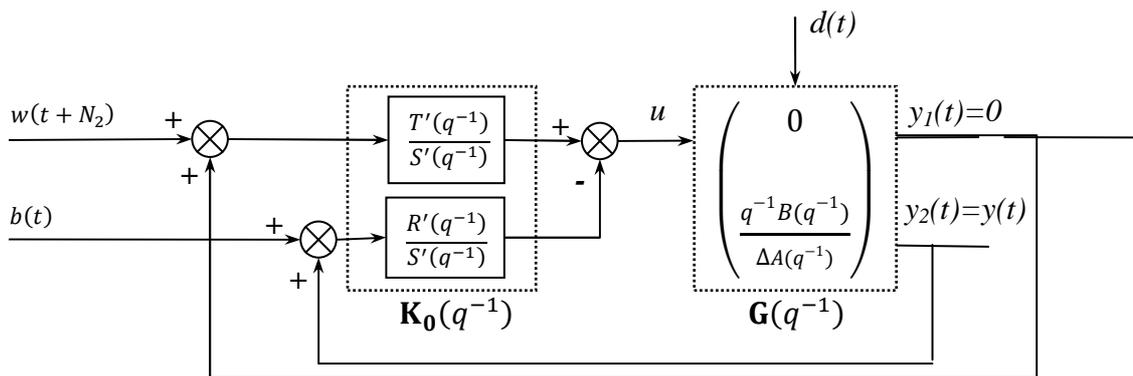


Figure (2.8) Correcteur initial avec la structure du bouclage standard

L'action intégrale du correcteur initial est incluse dans le modèle du système, permettant ainsi de paramétrer tous les correcteurs qui conservent l'action intégrale. Utilisant le Théorème (2.3), avec la factorisation suivante [9] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q^{-1}B}{A_c} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{q^{-1}B}{A_0} \end{pmatrix} \\ \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\Delta AT'}{A_0 A_c} & \frac{R'}{A_c} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{U}}_0 = \begin{pmatrix} \frac{T'}{A_0} & -\frac{R'}{A_0} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = \frac{\Delta A}{A_c} \\ \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta A}{A_c} \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{q^{-1}BT'}{A_0 A_c} & -\frac{S'}{A_c} \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{V}}_0 = \frac{S'}{A_0} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

et en considérant  $\mathbf{Q} = [Q_2 \quad Q_1]$ , l'ensemble des correcteurs stabilisants est :

$$\mathbf{K}(q^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{T' - A_0 Q_2}{S' - q^{-1} B Q_1} & \frac{R' + \Delta A Q_1}{S' - q^{-1} B Q_1} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Où  $A_0 A_c = \Delta A S' + q^{-1} B R'$  est l'équation caractéristique de la boucle fermée obtenue avec le correcteur initial  $\mathbf{K}_0$  de la Figure (2.6). Cette équation caractéristique est factorisée comme dans le cas d'un placement de pôles [25], en un polynôme  $A_c$  correspondant à la dynamique de commande et un polynôme  $A_0$  correspondant à la dynamique de l'observateur. Les deux polynômes sont stables, toutes leurs racines étant de module inférieur à 1, car le correcteur initial est un correcteur stabilisant.

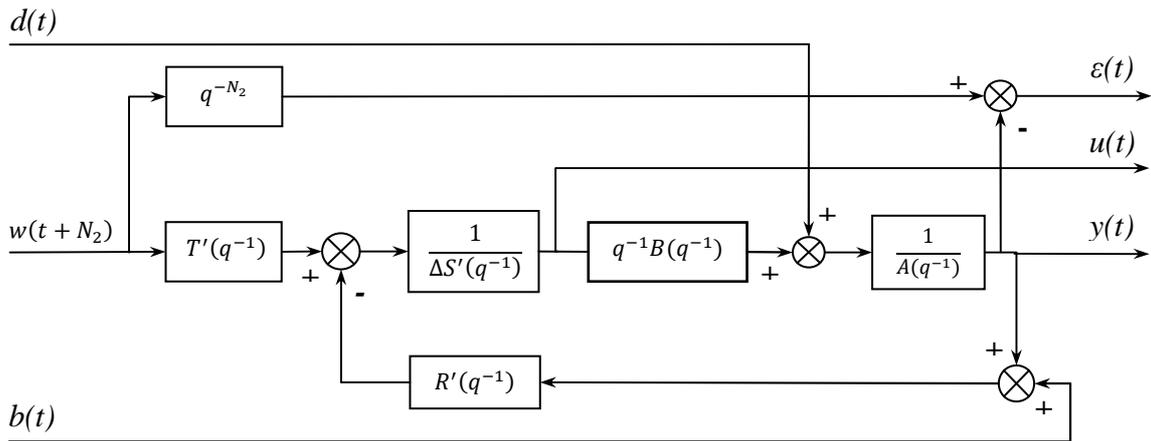
La structure *RST* finale est la suivante :

$$\begin{cases} T(q^{-1}) = T'(q^{-1}) - A_0(q^{-1})Q_2(q^{-1}) \\ R(q^{-1}) = R'(q^{-1}) + \Delta A(q^{-1})Q_1(q^{-1}) \\ S(q^{-1}) = S'(q^{-1}) - q^{-1}B(q^{-1})Q_1(q^{-1}) \end{cases} \quad (2.13)$$

Où  $Q_1(q^{-1})$  et  $Q_2(q^{-1})$  sont des transferts stables. Le transfert  $Q_2(q^{-1})$  modifie le comportement entrée/sortie, tandis que le paramètre  $Q_1(q^{-1})$  modifie la dynamique de la boucle fermée ou de régulation, sans changer le transfert entrée/sortie.

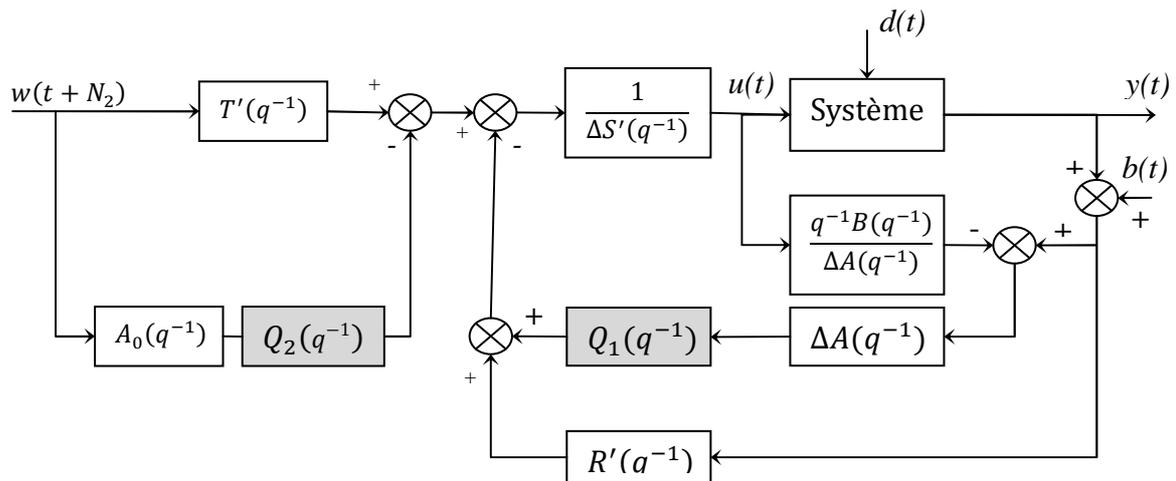
## 2.4 Spécifications de robustesse et performance nominale

La paramétrisation de Youla paramétrant tous les correcteurs stabilisants peut s'appliquer au système décrit par la Figure (2.9).



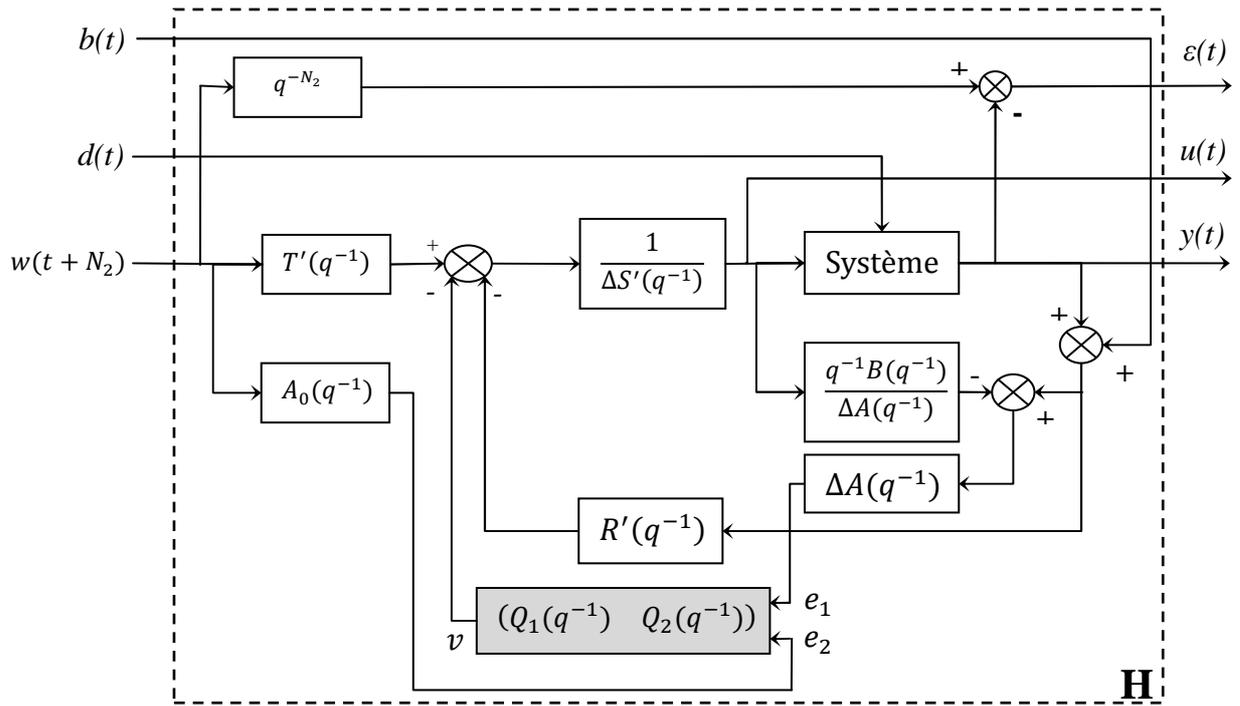
**Figure (2.9)** Système avec régulateur RST, entrées  $d, w, b$  et sorties  $\varepsilon, y, u$

L'application de la paramétrisation, définie par la relation (2.13), au correcteur initial conduit au correcteur représenté Figure (2.10).



**Figure (2.10)** Régulateur GPC avec paramétrisation de Youla

Cette représentation peut être modifiée afin de faire apparaître les deux paramètres au sein d'un seul bloc, comme le montre la Figure (2.11).

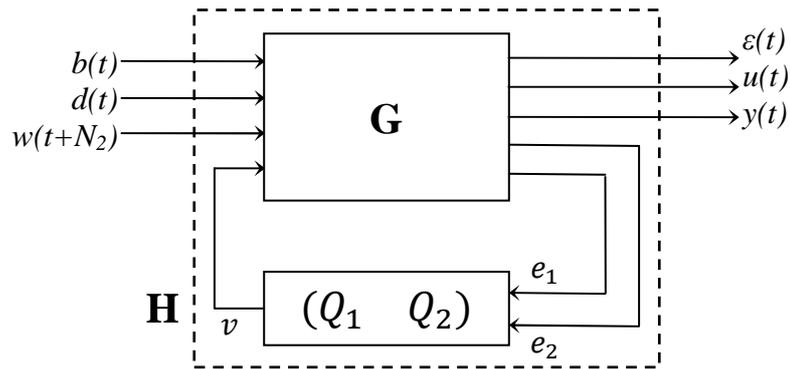


**Figure (2.11)** Régulateur GPC avec paramétrisation de Youla dégageant les signaux  $e_1$ ,  $e_2$ , et  $v$

On arrive finalement à la structure de la Figure (2.12) avec :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ u \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} b \\ d \\ w \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} + \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & -\frac{\Delta S'}{A_0A_c} + \frac{q^{-1}B\Delta}{A_0A_c} Q_1 & \frac{A_0A_c q^{-N_2} - q^{-1}BT'}{A_0A_c} + \frac{q^{-1}BA_0}{A_0A_c} Q_2 \\ -\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{\Delta A^2}{A_0A_c} Q_1 & -\frac{R'}{A_0A_c} - \frac{\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & \frac{T'A}{A_0A_c} - \frac{AA_0}{A_0A_c} Q_2 \\ -\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 & \frac{\Delta S'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta}{A_0A_c} Q_1 & \frac{T'q^{-1}B}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}BA_0}{A_0A_c} Q_2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$



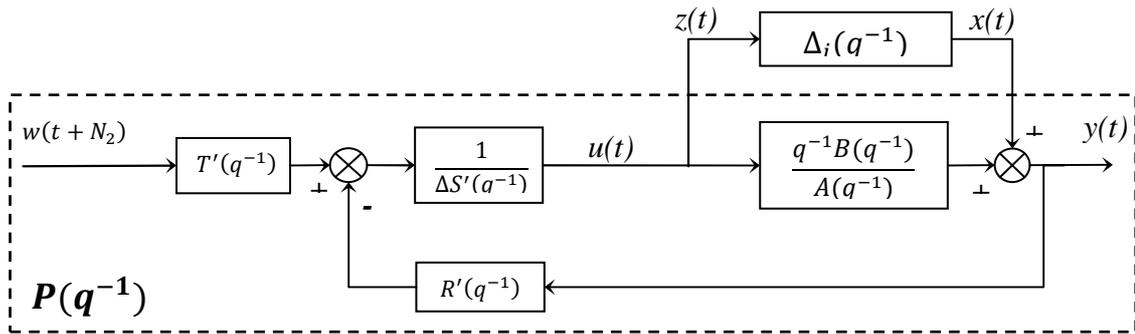
**Figure (2.12)** Régulateur GPC avec paramétrisation de Youla. Formalisme par bloc

On constate dès lors aisément que le paramètre  $Q_1$  modifie les fonctions de transfert associant  $b$  et  $d$  à  $\varepsilon$ ,  $u$  et  $y$ , et le paramètre  $Q_2$  modifie les fonctions de transfert reliant  $w$  à  $\varepsilon$ ,  $u$  et  $y$ . En conséquence,  $Q_1$  modifie la dynamique de la boucle fermée et  $Q_2$  modifie la dynamique de poursuite.

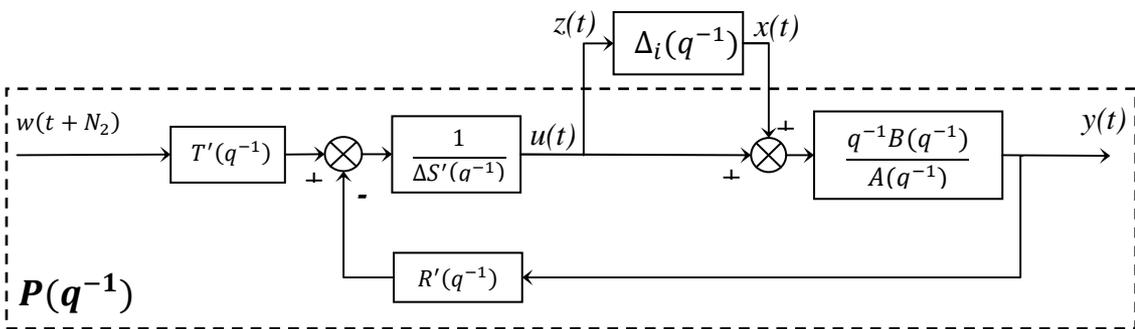
On va maintenant examiner des spécifications de robustesse en stabilité face à des incertitudes non structurées, et des spécifications de performance nominale, grâce au respect de gabarits temporels.

### 2.4.1 Spécifications fréquentielles

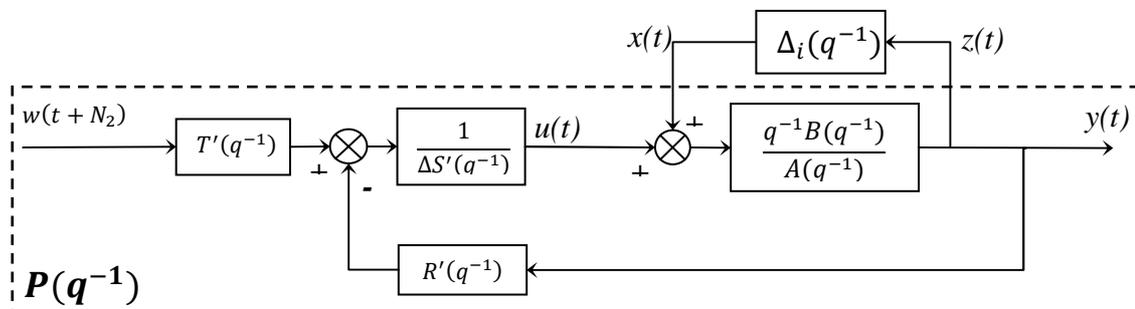
La méthode décrite ici a pour but la robustification du régulateur GPC à deux degrés de liberté vis-à-vis d'incertitudes non-paramétrées. Cette classe d'incertitudes inclut des incertitudes additives directes et inverses, multiplicatives directes et inverses. Appliquées à la structure GPC-RST présentée précédemment, ces types d'incertitudes agissent comme illustré Figure (2.13).



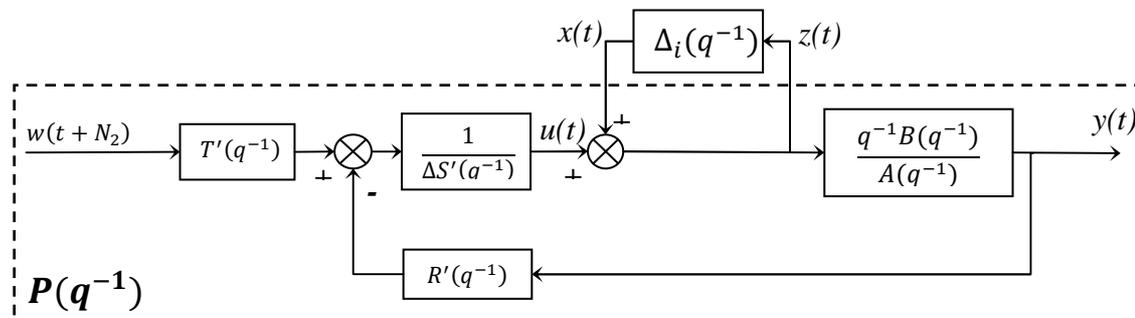
a) Incertitude additive directe



b) Incertitude multiplicative directe



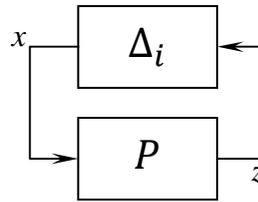
c) Incertitude additive inverse



d) Incertitude multiplicative inverse

Figure (2.13) Différents types d'incertitudes non structurées.

En généralisant, un système bouclé par une incertitude non structurée peut se représenter sous la forme de la Figure (3.14).



**Figure (2.14)** Système  $P$  bouclé par l'incertitude non structurée

Par la suite, le but est de déterminer le transfert  $P$  correspondant à chaque type d'incertitude. Le calcul peut se faire de deux manières : soit en intégrant dans la Figure (2.10) les différents types d'incertitudes sur la partie dénotée « *Système* ». Et en calculant par la suite le transfert  $P$ , soit en partant du régulateur initial  $RST$  (Figure 2.6) en calculant le transfert  $P$  et finalement en utilisant la paramétrisation (2.12) pour en déduire le transfert  $P$  dans le cas robuste. Si l'on examine par exemple le cas d'une incertitude additive directe (Figure 2.13a), le système bouclé par l'incertitude non structurée est :

$$-\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c} Q_1 \tag{2.16}$$

Le tableau (2.1) récapitule les fonctions de transfert liées aux différentes incertitudes.

$\Delta_i$	$P$
additive directe	$-\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c} Q_1$
additive inverse	$\frac{q^{-1}B\Delta S'}{A_0A_c} - \frac{q^{-2}B^2\Delta}{A_0A_c} Q_1$
multiplicative directe	$-\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1$
multiplicative inverse	$-\frac{S'A}{A_0A_c} - \frac{\Delta A q^{-1}B}{A_0A_c} Q_1$

**Tableau (2.1)** Transfert  $P$  connecte aux blocs d'incertitude non structurée.

A l'aide du théorème du petit gain [27], la robustification vis-à-vis d'une incertitude non structurée est maximisée par la minimisation de la norme  $H_\infty$  suivante :

$$\min_{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty} \|P(q^{-1})W(q^{-1})\|_\infty \quad (2.17)$$

Où le transfert  $W$  sert à pondérer davantage la bande de fréquences pour laquelle les incertitudes de modèle sont les plus importantes. La notation  $\mathcal{RH}_\infty$  indique l'espace de toutes les matrices de transfert propres et stables à coefficients réels. La paramétrisation de Youla procure une dépendance linéaire entre les transferts  $P$  et le paramètre de Youla, comme indique dans le Tableau (2.1), de sorte que les spécifications définies par la relation (2.16) sont convexes en  $Q_1$  [27].

### 2.4.2 Spécifications temporelles

Le compromis de cette méthode se situe au niveau de la réaction du système face aux différentes perturbations (par exemple le couple résistant et le bruit de mesure). La méthode présentée à l'avantage de rendre la commande moins sensible face aux bruits de mesure par exemple, mais en revanche elle ralentit le rejet des perturbations. Il est donc nécessaire de trouver un compromis pour ces deux problèmes : l'insensibilité face aux bruits et un bon rejet des perturbations. On peut envisager des lors de contraindre le rejet de perturbation ou l'effet des bruits de mesure à rester à l'intérieur d'un gabarit fixé au préalable. Cela peut se faire par l'intermédiaire d'une enveloppe temporelle, en imposant des valeurs limite inférieures et supérieures au signal contraint.

En notant  $s_{ij}(t)$  la réponse du transfert  $H_{ij}(t)$  a une entrée déterminée, la spécification temporelle consiste en un gabarit à l'intérieur duquel la sortie  $s_{ij}(t)$  doit rester confinée. L'ensemble des paramètres  $Q$  qui satisfont cette spécification est donné par :

$$\begin{aligned} C_{env} &= \{Q_1 / \forall t \geq 0; s_{min}(t) \leq s_{ij}(t) \leq s_{max}(t)\} \\ &= \{Q_1 / \Phi_{env}(Q_1) \leq 0\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Avec 
$$\Phi_{env}(Q_1) = \max\left(\max_{t \geq 0} (s_{ij}(t) - s_{max}(t)), s_{min}(t) - s_{ij}(t)\right)$$

### 2.4.3 Problème d'optimisation convexe

Avec ces deux spécifications, fréquentielles et temporelles, le problème de robustification d'un correcteur initial est défini comme un problème de minimisation sous contraintes, où le critère à minimiser, la contrainte à satisfaire et l'espace d'appartenance du paramètre de Youla sont convexes. Il s'agit dès lors d'un problème d'optimisation convexe, comme il a été défini dans [9]. Ainsi, par exemple, la robustification du régulateur initial vis-à-vis d'incertitudes additives directes, des dynamiques négligées par exemple, tout en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation, afin de ne pas trop ralentir la dynamique de régulation, se traduit par :

$$\min_{\substack{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \left( -\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (2.19)$$

Où  $\Phi_{env}(Q_1)$  définit la contrainte d'enveloppe du rejet de perturbation. Dans ce cas, seul le paramètre  $Q_1$  du paramètre  $Q$  intervient dans l'optimisation, car il s'agit de modifier la dynamique de la boucle fermée ou de régulation.

De la même façon, on peut envisager un problème d'optimisation modifiant la dynamique de poursuite. On peut ainsi faire respecter un gabarit pour la réponse à un échelon, tout en minimisant le transfert entrée/commande, de façon à minimiser, par exemple, la commande en haute fréquence. Ceci conduit au problème décrit par (2.19). Dans ce cas, seul le paramètre  $Q_2$  intervient, car on cherche à modifier la dynamique entrée/sortie.  $\Phi_{env}(Q_2)$  définit la contrainte d'enveloppe temporelle imposée à la réponse à un échelon.

$$\min_{\substack{Q_2 \in \mathcal{RH}_\infty \\ \Phi_{env}(Q_2) < 0}} \left\| \left( \frac{T'A}{A_0A_c} - \frac{AA_0}{A_0A_c} Q_2 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (2.20)$$

De façon générale, les spécifications fréquentielles et temporelles peuvent être utilisées indistinctement pour chercher une robustesse en stabilité ou une performance nominale. Ainsi, dans le dernier exemple, la minimisation de la norme  $H_\infty$  sert à diminuer la commande en haute fréquence pour le système nominal, on cherche donc à garantir une performance nominale. De même, le critère de robustesse en stabilité face à des incertitudes additives directes peut être traduit par le respect d'un gabarit pour le transfert bruit de mesure/commande, qui est, en fait, le transfert  $P$  considéré dans ce cas.

La prise en compte de contraintes fréquentielles ou temporelles supplémentaires est aussi possible. Ainsi, si l'on souhaite robustifier vis-à-vis d'incertitudes multiplicatives directes, tout en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation, mais en considérant aussi l'effet du bruit de mesure sur la commande, on peut l'exprimer :

$$\min_{\substack{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty \\ \Phi_{env1}(Q_1) < 0 \\ \Phi_{env2}(Q_1) < 0}} \left\| \left( -\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 \right) W(q^{-1}) \right\|_\infty \quad (2.21)$$

Où  $\Phi_{env1}(Q_1)$  définit le gabarit à respecter par la perturbation, et  $\Phi_{env2}(Q_1)$  le gabarit à respecter par l'effet du bruit de mesure sur la commande. Le même problème peut se traduire par :

$$\min_{\substack{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \begin{array}{l} \left( -\frac{q^{-1}BR'}{A_0A_c} - \frac{q^{-1}B\Delta A}{A_0A_c} Q_1 \right) W_1(q^{-1}) \\ \left( -\frac{R'A}{A_0A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_0A_c} Q_1 \right) W_2(q^{-1}) \end{array} \right\|_\infty \quad (2.22)$$

Dans ce cas, on minimise les transferts  $P$  correspondant à des incertitudes multiplicatives directes et additives directes, en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation. L'équivalence entre les deux problèmes vient du fait qu'un bruit de mesure et une dynamique négligée en haute fréquence peuvent se modéliser par des incertitudes additives directes ; pour ce type d'incertitude le transfert  $P$  considéré correspond au transfert entre le bruit de mesure ( $b$ ) et la commande ( $u$ ).

## 2.5 Résolution par programmation linéaire

Considérant les contraintes fréquentielles et temporelles formulées lors de la partie précédente, on en conclut qu'il est nécessaire de minimiser une norme  $H_\infty$  parmi les paramètres  $Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty$  qui satisfont la contrainte temporelle. Le problème à ce stade est que  $Q_1$  appartient à l'ensemble des systèmes stables  $\mathcal{RH}_\infty$ , ensemble de dimension infinie. A l'heure actuelle, il n'existe aucune méthode permettant de résoudre ce type d'optimisation. Une solution possible procurant une solution sous optimale consiste alors à restreindre l'espace de recherche à un sous-ensemble généré par une base de transferts stables,  $Q$  prenant la forme suivante :

$$Q = \sum_{l=0}^{n_q} \alpha_l Q_l \quad (2.23)$$

Dans le cas des systèmes discrets, une base naturelle de systèmes stables est donnée par  $Q_l(q^{-1}) = q^{-l}$ , ce qui revient à rechercher le transfert  $Q_1$  sous la forme d'un polynôme ou filtre FIR.

Grace au choix de cette base des transferts stables pour le paramètre  $Q_1$ , il s'avère possible d'approcher les spécifications sur les contraintes fréquentielles et temporelles par des inégalités linéaires, et le problème peut ensuite être résolu par une optimisation sous contraintes de type inégalité.

### 2.5.1 Norme $H_\infty$

La relation (3.16) peut s'écrire de la façon suivante

$$\min_{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty} \|P(q^{-1})W(q^{-1})\|_\infty = \min_{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty} \max_w |T_1 + T_2 Q| \quad (2.24)$$

En considérant que chaque expression  $P$  du Tableau (2.1) peut se mettre sous la forme  $T_1 + T_2 Q$

$$\text{Soit : } \min_{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty} \max_{0 \leq w \leq \pi} |T_1(e^{-jw}) + T_2(e^{-jw})Q(e^{-jw})| \quad (2.25)$$

En notant  $\gamma$  le majorant de la relation précédente, et en discrétisant le demi-cercle unité [28], il vient

$$|T_1(e^{-j\theta_k}) + T_2(e^{-j\theta_k})Q(e^{-j\theta_k})| \leq \gamma \quad (2.26)$$

$$\text{Avec : } \theta_k = \frac{\pi(k-1)}{N-1} \text{ pour } k=1, \dots, N$$

Avec  $Q$  sous forme de filtre FIR (2.23), on déduit :

$$\left| \underbrace{T_1(e^{-\theta_k})}_{T_{1k}} + \underbrace{T_2(e^{-\theta_k})[Q_0(e^{-\theta_k}) \dots Q_{n_q}(e^{-\theta_k})]}_{\mathbf{T}_{2k}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n_q} \end{bmatrix} \right| \leq \gamma \quad (2.27)$$

Soit en simplifiant la notation :

$$|T_{1k} + \mathbf{T}_{2k}| \leq \gamma \quad \text{pour } k=1, \dots, N$$

Cette inégalité portant sur le module, du type  $|u| \leq \gamma$ , est une contrainte quadratique. Il est possible de l'approximer par les quatre inégalités suivantes [28] :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u) + \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ \operatorname{Re}(u) - \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ -\operatorname{Re}(u) + \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \\ -\operatorname{Re}(u) - \operatorname{Im}(u) &\leq \gamma \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à réécrire chaque inégalité ci-dessus sous la forme standard

$$ax - b \leq 0 \quad (2.28)$$

Ainsi la première de ces inégalités :

$$\operatorname{Re}(T_{1k} + \mathbf{T}_{2k}\boldsymbol{\alpha}) + \operatorname{Im}(T_{1k} + \mathbf{T}_{2k}\boldsymbol{\alpha}) \leq \gamma \quad (2.29)$$

Devient

$$[\operatorname{Re}(\mathbf{T}_{2k}) + \operatorname{Im}(\mathbf{T}_{2k}) - 1] \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} - [-\operatorname{Re}(T_{1k}) - \operatorname{Im}(T_{1k})] \leq 0 \quad (2.30)$$

En regroupant les quatre inégalités, on obtient finalement le critère à minimiser sous forme matricielle :

$$\min_{\mathbf{AX}-\mathbf{B}\leq\mathbf{0}} \mathbf{CX} \quad (2.31)$$

Avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{T}_{21}) + \operatorname{Im}(\mathbf{T}_{21}) & \cdots & -1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -\operatorname{Re}(\mathbf{T}_{2N}) - \operatorname{Im}(\mathbf{T}_{2N}) & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{(4N+1) \times (n_q+2)}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\operatorname{Re}(T_{11}) - \operatorname{Im}(T_{11}) \\ \vdots \\ -\operatorname{Re}(T_{1N}) - \operatorname{Im}(T_{1N}) \\ 0 \end{bmatrix}_{(4N+1) \times 1}$$

$$\mathbf{X}^T = [\alpha_0 \quad \cdots \quad \alpha_0 \quad \gamma]_{1 \times (n_q+2)}$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]_{1 \times (n_q+2)}$$

## 2.5.2 Respect d'un gabarit temporel

De façon similaire à la manipulation effectuée au paragraphe précédent, un transfert  $H_{ij}$  de la relation (2.14) devient :

$$H_{ij} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 Q \quad (2.32)$$

Soit encore d'après la relation (2.21)

$$\frac{s_i(t)}{e_j(t)} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \sum_{l=0}^{n_q} \alpha_l Q_l \quad (2.33)$$

La réponse à  $e_j(t)$  s'exprime donc par

$$s_i(t) = \tilde{T}_1 e_j(t) + \tilde{T}_2 \alpha_0 Q_0 e_j(t) + \cdots + \tilde{T}_2 \alpha_{n_q} Q_{n_q} e_j(t) \quad (2.34)$$

En notant enfin :

$$s_1(t) = \tilde{T}_1 e_j(t) \text{ et } s_{2i}(t) = \tilde{T}_2 Q_i e_j(t) \text{ il vient :}$$

$$s_i(t) = s_1(t) + [s_{20}(t) \quad s_{21}(t) \quad \cdots \quad s_{2n_q}(t)] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n_q} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

En considérant les  $N_t$  premières valeurs de la réponse  $s_i(t)$  et les valeurs, maximale  $s_{max}(t)$  et minimale  $s_{min}(t)$  du gabarit temporel, voir Figure (2.15), on obtient l'inégalité matricielle suivante :

$$\left. \begin{array}{l} s_i(t) - s_{max}(t) \leq 0 \\ -s_i(t) + s_{min}(t) \leq 0 \end{array} \right\} \text{ pour } t_0, t_1, \dots, t_{N_t} \quad (2.36)$$

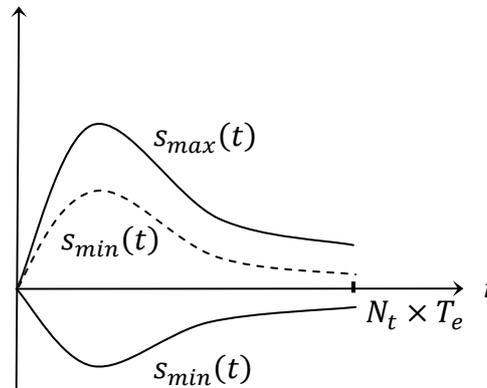


Figure (2.15) Gabarit temporel

D'où les contraintes supplémentaires :

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{B}} \leq \mathbf{0} \quad (2.37)$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} s_{20}(t_0) & s_{21}(t_0) & \cdots & s_{2n_q}(t_0) & 0 \\ s_{20}(t_1) & s_{21}(t_1) & \cdots & s_{2n_q}(t_1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ s_{20}(t_{N_t}) & s_{21}(t_{N_t}) & \cdots & s_{2n_q}(t_{N_t}) & 0 \\ -s_{20}(t_0) & -s_{21}(t_0) & \cdots & -s_{2n_q}(t_0) & 0 \\ -s_{20}(t_{N_t}) & -s_{21}(t_{N_t}) & \cdots & -s_{2n_q}(t_{N_t}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} s_{max}(t_0) - s_1(t_0) \\ \vdots \\ s_{max}(t_{N_t}) - s_1(t_{N_t}) \\ -s_{min}(t_0) + s_1(t_0) \\ \vdots \\ -s_{min}(t_{N_t}) + s_1(t_{N_t}) \end{bmatrix}$$

Il convient alors d'ajouter ces contraintes (2.35) à celles définies par la relation (2.29).

$$\min_{\substack{\mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{A}}}} \mathbf{CX} \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (2.38)$$

Le problème initial devient ainsi un problème de programmation linéaire qui peut être résolu par des algorithmes classiques. Par ailleurs, puisque le problème est convexe en  $\mathcal{Q}$ , la convergence vers le minimum global est garantie, tout au moins dans l'espace de recherche.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une commande GPC robustifiée basant sur la paramétrisation de Youla. En fait, Cette paramétrisation permet, d'une part, de paramétrer tous les correcteurs stabilisant le système et, d'autre part, de formuler des spécifications convexes en boucle fermée. Ces deux caractéristiques sont utilisées de façon à traduire le problème de robustification en un problème d'optimisation convexe. Les contraintes de type fréquentiel et temporel en boucle fermée sont transformées en un problème d'optimisation convexe. L'utilisation de plusieurs spécifications en boucle fermée permet d'obtenir une synthèse mixte robustesse/ performance nominale, où la relation entre les deux est facile à ajuster grâce à l'utilisation de gabarits temporels pour les spécifications temporelles en boucle fermée.

En ce qui concerne le problème de robustesse en stabilité, seule la stabilité robuste face à des incertitudes non-structurées a été considérée dans ce chapitre. Le chapitre suivant a pour objectif d'étendre cette démarche de robustification qui fera de plus intervenir la robustesse en stabilité face à des incertitudes structurées appartenant à un ensemble incertain polytopique donné.

## **Chapitre III**

# ***Robustification d'une Commande GPC : Prise en compte d'incertitudes structurées***

### **3.1 Introduction**

Dans la pratique, les systèmes sont souvent soumis à deux types d'incertitudes ; structurées ou non-structurées. Dans le chapitre précédent, la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes non-structurées de la loi de commande GPC a été présentée, des incertitudes structurées sont maintenant prises en compte qui constitue le cœur de notre contribution. Ainsi, ce chapitre se présente comme une extension de la méthode de robustification de la loi GPC proposée dans [9] en considérant de plus la robustesse en stabilité face à des incertitudes structurées, appartenant à un ensemble incertain polytopique donné. Cette prise en compte impose en fait une condition supplémentaire de stabilité sur tout le domaine d'incertitudes.

Dans la première partie de ce chapitre, on propose les résultats théoriques nécessaires à la compréhension de l'approche présentée. Les parties suivantes détaillent la technique de robustification face à des incertitudes appartenant à un ensemble polytopique s'appuyant sur le critère de stabilité de Lipatov-Sokolov. Ensuite, le problème global obtenu nécessite la résolution d'un ensemble de LMIs. Enfin, pour mieux illustrer les résultats, les procédures développées sont appliquées sur un exemple académique.

### **3.2 Incertitudes polytopiques**

Pratiquement, les processus sont généralement non-linéaires. Des modèles linéaires simplifiés obtenus par linéarisation autour d'un point d'équilibre sont alors utilisés afin de permettre la synthèse d'une loi de commande linéaire. Mais ces modèles demeurent précis uniquement dans un voisinage du point choisi lors de l'étape de linéarisation. L'idéal est en fait d'obtenir de bons résultats à partir d'un modèle simple et d'un correcteur permettant non seulement de commander la configuration nominale, mais aussi de garantir certaines demandes de robustesse et performances dans une région entourant le point nominal, dans laquelle le système réel (éventuellement non-linéaire) évolue. Les différents points de fonctionnement d'un processus

peuvent avoir une influence significative sur le modèle, en modifiant ses paramètres. Ainsi, pour pouvoir considérer ces variations de modèle, il est nécessaire de prendre en compte des incertitudes intervenant dans la structure du modèle. Les incertitudes peuvent être décrites de plusieurs façons. Les variations des paramètres d'un système définissent des incertitudes paramétriques qui sont appelées :

- des incertitudes non-structurées quand elles agissent d'une manière globale, sans pouvoir quantifier précisément le phénomène ;
- des incertitudes structurées dans le cas où elles peuvent être interprétées par une variation des certains paramètres particuliers.

Au cours du chapitre précédent, il a été montré que des incertitudes non-structurées peuvent apparaître surtout en haute fréquence quand il s'agit des dynamiques négligées pendant l'étape de modélisation, des résonances électromagnétiques ... Habituellement, les incertitudes en basse fréquence peuvent être considérées comme des incertitudes structurées, en analysant leur effet sur la variation des paramètres du modèle (par exemple des incertitudes sur les pôles d'un système donné sous la forme de fonction de transfert, des incertitudes sur le gain d'amplification ... [29]). Pratiquement les incertitudes paramétriques structurées sont prise en compte en imposant des bornes maximales et minimales pour les variations des paramètres. Par exemple, en considérant le vecteur des paramètres incertains  $\theta(k) \in \mathbb{R}^n$  avec  $\theta(k) = [\theta_1(k) \dots \theta_n(k)]$ , les incertitudes structurées peuvent être traitées en imposant les bornes suivantes :

$$\theta_{imin} \leq \theta_i(k) \leq \theta_{imax} \text{ pour } i=1, n \quad (3.1)$$

Dans la suite, on considère un ensemble incertain polytopique  $\Omega$  à  $l$  sommet présenté sur la Figure (3.1), tel que le  $i^{\text{ème}}$  sommet constitue la fonction de transfert du modèle  $G_i$

$$G_i(q^{-1}) = q^{-1} \frac{B_i(q^{-1})}{A_i(q^{-1})} \quad (3.2)$$

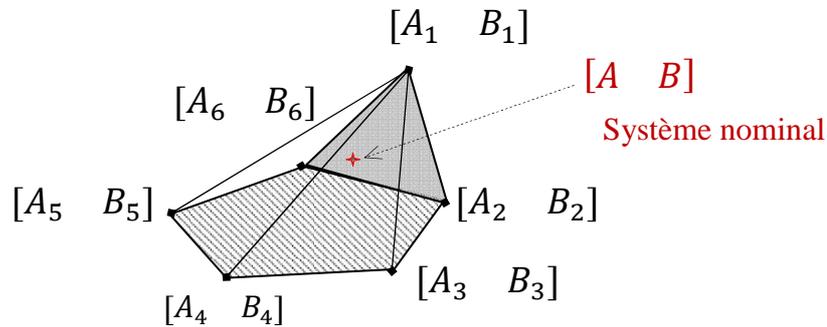
Le polytope  $\Omega$  est représenté sous la forme

$$\Omega = \text{Co}\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_l \ B_l]\} \quad (3.3)$$

Où « Co » est la notation correspondant à l'enveloppe convexe définie par les  $l$  sommets  $[A_i \ B_i]$  du polytope. Pour garantir la stabilité sur tout cet ensemble polytopique il suffit de satisfaire la stabilité à chaque sommet  $i$  du polytope [30].

Pour le cas nominal où le système est égal au modèle, le transfert entrée-sortie  $y/w$  (Figure (2.10)) est donné par l'expression suivante

$$\frac{y}{w} = \frac{T_0 q^{-1} B}{P_0} \quad (3.4)$$



**Figure (3.1)** Représentation d'une incertitude appartenant à un ensemble polytopique décrit par  $l = 6$  sommets

En revanche, si des incertitudes polytopiques interviennent, où le système est égal au modèle  $G_i$ , le transfert entrée-sortie  $y/w$  pour chaque sommet est

$$\frac{y}{w} = \frac{T_0 q^{-1} B_i}{P_i} \quad (3.5)$$

Avec  $P_i$  représente le polynôme caractéristique de la boucle fermée de la  $i$ -ème sommet donné par la relation :

$$P_i = \Delta A_i S_0 + q^{-1} B_i R_0 + q^{-1} \Delta Q_1 \quad (3.6)$$

Par conséquent, le problème de vérification de la stabilité du système de polytopique revient à vérifier si les pôles de chaque polynôme caractéristique de  $P_i$  résident à l'intérieur du cercle d'unité ou pas. À cette étape, la difficulté est apparue à cause de la présence du paramètre  $Q_1$

dans la relation (3.6). On peut noter facilement que si le modèle est exact (c.-à-d. si  $A = A_i$  et  $B = B_i$ ), donc la fonction de transfert en boucle fermée (3.5) est réduit à (3.4).

On réécrit l'expression (3.6) comme suit

$$P_i = \tilde{T}_{i1} + \tilde{T}_{i2}Q_1 \quad (3.7)$$

Egalement, on peut écrire

$$P_i = \sum_{j=0}^n p_{ij}q^{-j}, \quad \tilde{T}_{1i} = \sum_{j=0}^{n_1} t_{1ij}q^{-j}, \quad \text{et} \quad \tilde{T}_{2i} = \sum_{j=0}^{n_2} t_{2ij}q^{-j}$$

Soit  $n = \max(n_1, n_2 + n_q)$  l'ordre du polynôme caractéristique tel que  $n_1, n_2$  représentent les ordres de  $\tilde{T}_{1i}, \tilde{T}_{2i}$  respectivement.

On suppose  $n_1 < n_2 + n_q \Rightarrow n = n_2 + n_q$  et on écrit les coefficients de  $P_i$  en fonction de  $\alpha$  sous une forme matricielle

$$P_i = L_i + H_i\alpha \quad (3.8)$$

Avec :

$$[P_i] = \begin{bmatrix} p_{i0} \\ p_{i1} \\ \vdots \\ p_{in} \end{bmatrix}, \quad [L_i] = \begin{bmatrix} t_{i10} \\ \vdots \\ t_{i1n_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n_q} \end{bmatrix}$$

$$[H_i] = \begin{bmatrix} t_{i20} & 0 & \dots & 0 \\ t_{i21} & t_{i20} & \dots & 0 \\ \vdots & t_{i21} & \ddots & \vdots \\ t_{i2n_2} & \vdots & \ddots & t_{i20} \\ 0 & t_{i2n_2} & \vdots & t_{i21} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{i2n_3} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n_q+1)}$$

$$n_3 = \begin{cases} n_q - n_2 & \text{si } n_2 < n_q \\ n_q & \text{si } n_2 \geq n_q \end{cases}$$

### 3.3 Condition de stabilité de Lipatov-Sokolov

En 1978, Lipatov et Sokolov [31] ont proposé une condition suffisante de stabilité pour les systèmes continus en termes des coefficients du polynôme caractéristique. Le résultat de ce travail est résumé comme suit : voir les références [31, 32, 33, 34, 35] pour plus de détail de cette condition ainsi que ses propriétés.

Soit  $F(s)$  un polynôme caractéristique à coefficients réels

$$F(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \quad a_k > 0 \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n \quad (3.9)$$

Ce polynôme est *Hurwitz* [31,32] stable si la relation (3.10) est vérifiée

$$a_{j-1}a_{j+2} \leq 0.4655a_ja_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, n - 2 \quad (3.10)$$

### 3.4 Formulation du problème de robustesse face à des Incertitude polytopique

Afin d'appliquer la condition de stabilité de Lipatov à notre démarche, il est nécessaire de convertir le polynôme caractéristique (3.9) à son équivalence en temps continu. Pour ce faire, on utilise la transformation bilinéaire.

La transformation Bilineaire est connue dans la littérature souvent sous le nom la méthode trapézoïdale d'intégration, ou la méthode de transformation de *Tustin* [35, 36], Elle permet le passage d'une transformée de Laplace en une transformée en  $z$  et vice-versa.

Soit :

$$s \leftrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad q^{-1} \leftrightarrow \frac{1-\frac{T_e s}{2}}{1+\frac{T_e s}{2}} \quad (3.11)$$

Où  $s = j.w$  est la fréquence complexe et  $q = \exp(j.w.T_e)$  est une variable complexe,  $T_e$  dénote est la période d'échantillonnage

On considère  $P_i^*(s)$  le polynôme transformé en continu de  $P_i(q^{-1})$ , en utilisant la relation (3.11)

$$P_i^*(s) = \left(1 + \frac{T}{2}s\right)^n P_i\left(\frac{1 - (T/2)s}{1 + (T/2)s}\right) = \sum_{j=0}^n p_{ij}^* s^j \quad (3.12)$$

Les vecteurs  $\mathbf{p}_i^* = [p_{i0}^* \ p_{i1}^* \ \dots \ p_{in}^*]^T$ ,  $\mathbf{p}_i = [p_{i0} \ p_{i1} \ \dots \ p_{in}]^T$  sont reliés par une matrice constante  $\mathbf{Q}_n$  d'ordre  $(n + 1)$ . [37, 38, 39,40]

$$\mathbf{P}_i^* = \mathbf{Q}_n \mathbf{P}_i \quad (3.13)$$

La matrice de transformation est donnée comme suit :

$$[\mathbf{Q}_n] = \begin{bmatrix} q_{0,0} & \dots & q_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,0} & \dots & q_{n,n} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Avec

$$q_{0,j} = 1, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$q_{i,0} = n! / [(n - i)! i!], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$q_{i,j} = q_{i,j-1} - q_{i-1,j-1} - q_{i-1,j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

D'après (3.8) et (3.13)

$$\mathbf{P}_i^* = \mathbf{L}_i^* + \mathbf{H}_i^* \boldsymbol{\alpha} \quad (3.15)$$

Tel que

$$\mathbf{L}_i^* = \mathbf{Q}_n \mathbf{L}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_i^* = \mathbf{Q}_n \mathbf{H}_i \quad (3.16)$$

On définit :

$$\underline{\mathbf{P}}_i^* = [0 \quad | \quad [\mathbf{P}_i^*(1:n)]^T]^T \quad (3.17)$$

$$\overline{\mathbf{P}}_i^* = [[\mathbf{P}_i^*(2:n+1)]^T \quad | \quad 0]^T \quad (3.18)$$

$$\overline{\underline{P}}_i^* = [[\underline{P}_i^*(3:n+1)]^T \quad | \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.19)$$

$$\underline{L}_i^* = [0 \quad | \quad [\underline{L}_i^*(1:n)]^T]^T \quad (3.20)$$

$$\overline{L}_i^* = [[\overline{L}_i^*(2:n+1)]^T \quad | \quad 0]^T \quad (3.21)$$

$$\overline{\overline{L}}_i^* = [[\overline{\overline{L}}_i^*(3:n+1)]^T \quad | \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.22)$$

$$\underline{H}_i^* = [0 \quad | \quad [\underline{H}_i^*(1:n)]^T]^T \quad (3.23)$$

$$\overline{H}_i^* = [[\overline{H}_i^*(2:n+1)]^T \quad | \quad 0]^T \quad (3.24)$$

$$\overline{\overline{H}}_i^* = [[\overline{\overline{H}}_i^*(3:n+1)]^T \quad | \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.25)$$

Il devient :

$$\underline{P}_i^* = \underline{L}_i^* + \underline{H}_i^* \alpha \quad (3.26)$$

$$\overline{P}_i^* = \overline{L}_i^* + \overline{H}_i^* \alpha \quad (3.27)$$

$$\overline{\overline{P}}_i^* = \overline{\overline{L}}_i^* + \overline{\overline{H}}_i^* \alpha \quad (3.28)$$

Maintenant, on applique la condition de stabilité de Lipatov (3.10) sous forme matricielle :

$$\underline{P}_i^* .* \overline{P}_i^* \leq 0.4655 P_i^* .* \overline{\overline{P}}_i^* \quad (3.29)$$

Tel que  $(.*)$  dénote le produit élément par élément. Ainsi, la relation (3.29) est équivalente à l'expression ci-dessous :

$$[\underline{L}_i^* + \underline{H}_i^* \alpha] .* [\overline{L}_i^* + \overline{H}_i^* \alpha] \leq 0.4655 [\underline{L}_i^* + \underline{H}_i^* \alpha] .* [\overline{\overline{L}}_i^* + \overline{\overline{H}}_i^* \alpha] \quad (3.30)$$

La relation (3.30) se constitue de  $(n+1)$  inégalités, on s'intéresse seulement aux  $(n-2)$  premières inégalités selon la condition (3.10), d'où le nombre total des inégalités pour l'ensemble des sommets est  $(n-2)l$ , il vient

$$\boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{W}_{ik} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{V}_{ik} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{U}_{ik} \leq \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, (n-2) \quad (3.31)$$

Avec :

$$\mathbf{W}_{ik} = \left[ \left[ \underline{\mathbf{H}}_i^*(k) \right]^T \overline{\mathbf{H}}_i^*(k) - 0.4655 \left[ \mathbf{H}_i^*(k) \right]^T \overline{\overline{\mathbf{H}}}_i^*(k) \right]_{(n-2) \times (n-2)}$$

$$\mathbf{V}_{ik} = \left[ \underline{\mathbf{L}}_i^*(k) \overline{\mathbf{H}}_i^*(k) + \overline{\mathbf{L}}_i^*(k) \underline{\mathbf{H}}_i^*(k) - 0.4655 \left( \underline{\mathbf{L}}_i^*(k) \overline{\overline{\mathbf{H}}}_i^*(k) + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_i^*(k) \mathbf{H}_i^*(k) \right) \right]_{1 \times (n_q+1)}$$

$$\mathbf{U}_{ik} = \left[ \underline{\mathbf{L}}_i^*(k) \overline{\mathbf{L}}_i^*(k) - 0.4655 \underline{\mathbf{L}}_i^*(k) \overline{\overline{\mathbf{L}}}_i^*(k) \right]_{1 \times 1}$$

$(k)$  désigne la ligne  $k$  (ou l'élément  $k$ ) de la matrice (ou du vecteur) correspondant (e). Il convient alors d'ajouter les contraintes (3.31) à celles définies par la relation (2.31). Le problème d'optimisation devient ainsi un problème de programmation linéaire sous contraintes quadratiques (QCLP). Si  $\mathbf{W}_{ik} \succcurlyeq \mathbf{0}$  (c.à.d.  $\mathbf{W}_{ik}$  est semi-définie positive) le problème d'optimisation est convexe et ainsi il est facile à résoudre. Sinon, il est non convexe (*NP-hard*) [41] et il nécessite à en relaxer. Dans la littérature il existe plusieurs techniques de relaxation de ce type de problème. Nous utilisons celle proposée dans [42, 43, 44] ; cette technique se base sur la programmation semi-définie (*SDP*). Elle consiste à remplacer chaque terme quadratique  $\alpha_i \alpha_j$  par une variable additionnelle  $z_{ij}$ . Pour simplifier la notation, les variables  $z_{ij}$  sont arrangées dans la matrice  $\mathbf{Z}$ , et la nouvelle contrainte non linéaire qui doit être considérée est  $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T$ . La relaxation *SDP* du problème est obtenue par imposer  $\mathbf{Z} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T$  [42].

La condition  $\mathbf{Z} - \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \succcurlyeq \mathbf{0}$  est équivalente à l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0} \quad (3.32)$$

On dénote le produit scalaire de deux matrices  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  comme  $\mathcal{X} \star \mathcal{Y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij}$

Cette technique permet d'offrir une solution implantable avec une charge de calcul raisonnable pour le problème de robustification considéré

Finalement, garantir la robustesse en stabilité d'un système nominal avec stabilité pour un ensemble d'incertitudes polytopique, impose de résoudre le problème global d'optimisation suivant :

$$\min \mathbf{C}_t \mathbf{X}_t \quad (3.33)$$

Sujet à :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B} \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{W}_{ik} \star \mathbf{Z} + \mathbf{V}_{ik} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{U}_{ik} \leq \mathbf{0}, \quad \begin{cases} k = 1, \dots, (n-2) \\ i = 1, \dots, l \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0}$$

Avec :

$$\mathbf{X}^T = [\gamma \mid \boldsymbol{\alpha}^T]^T, \quad \mathbf{C}_t = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n_t}$$

$$\mathbf{X}_t^T = \left[ \left[ \mathbf{X}^T \mid z_{00} \ z_{10} \ \dots \ z_{(n_q+1)(n_q+1)} \right]^T \right]_{1 \times n_t}$$

$n_t$  est le nombre total des variables de décisions

$$n_t = (n_q + 2) + \frac{(n_q + 1)(n_q + 2)}{2}$$

### 3.5 Exemple

Cette partie focalise sur l'application de la procédure de robustification précédemment développée sur un exemple académique. Le modèle du système est le suivant [10]:

$$G(q^{-1}) = \frac{a \cdot q^{-1} + b \cdot q^{-2}}{1 + c \cdot q^{-1} + d \cdot q^{-2}} \quad (3.34)$$

Avec  $a = 1.344$ ,  $b = 3.024$ ,  $c = -0.98$ ,  $d = -0.02$

et  $T_e = 0.005s$  est la période d'échantillonnage.

En premier lieu, le correcteur prédictif initial (appelé GPC0) est synthétisé avec  $C(q^{-1}) = 1$  et les paramètres de réglages suivants :  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 8$ ,  $\lambda = 200$ . Ces paramètres ont été cherchés afin de respecter certaines demandes de stabilité et de performance. Dans un deuxième temps, la robustification du correcteur initial face à des incertitudes non-structurées additives est

considérée (appelé GPC1). Dans ce cas, le paramètre de Youla obtenu est le résultat du problème d'optimisation (2.31). L'ordre du paramètre de Youla est choisi  $n_q = 5$

L'étape suivante adresse la robustification vis à vis les incertitudes polytopiques structurées. On considère la fonction de transfert donné par la relation (3.34) est pris comme modèle nominale. Un domaine incertain polytopique est construit autour de ce modèle nominal, en supposant que les paramètres  $a, b, c, d$  sont incertains jusqu'à  $\pm 10\%$  de leur valeurs nominales. Il en résulte un système polytopique de ( $l = 2^4 = 16$ ) sommets. Dans cette plage d'incertitude les pôles du système affecté par les incertitudes polytopiques, bouclé avec le correcteur initial, résident à l'intérieur du cercle unité (pour les seize sommets du polytope), ainsi le système bouclé avec le correcteur GPC0 est stable dans tout le domaine polytopique. Après la robustification avec le correcteur GPC1, la robustesse en stabilité du système nominal face à des incertitudes additives non-structurées est améliorée, mais la propriété de stabilité sur tout le domaine incertain polytopique est perdue. La Figure (3.2) indique la présence des pôles instables dans une partie du système polytopique. Cette perte de stabilité justifie le développement du correcteur GPC2, utilisé pour recouvrer la stabilité sur tout le domaine polytopique. Dans ce cas le correcteur GPC2 est le résultat du problème d'optimisation (3.33) avec  $l=16$ . La Figure (3.3) propose une étude de la fonction de sensibilité du transfert  $b/u$  obtenue sur le modèle nominal pour les trois correcteurs. Le meilleur comportement en termes de robustesse en stabilité du système nominal face à des incertitudes additives non-structurées est obtenu avec GPC1. Le correcteur GPC2 est moins performant en termes de robustesse en stabilité face à ce type d'incertitudes, mais il offre une garantie de stabilité sur tout le domaine polytopique considéré (tous les pôles résident à l'intérieur du cercle unité voir La Figure (3.4). D'où un compromis est réalisé entre la robustesse en stabilité du système nominal face à des incertitudes additives non-structurées et la stabilité sur un domaine d'incertitudes polytopiques.

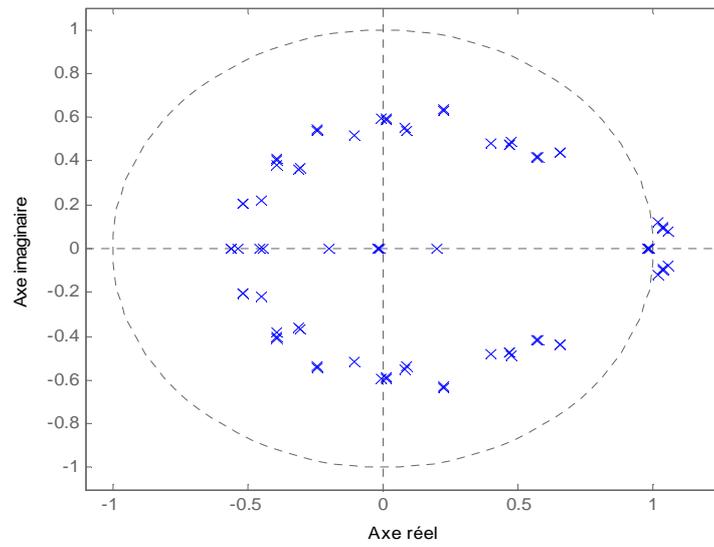


Figure (3.2) Lieux des pôles du système polytopique bouclé avec le correcteur GPC1

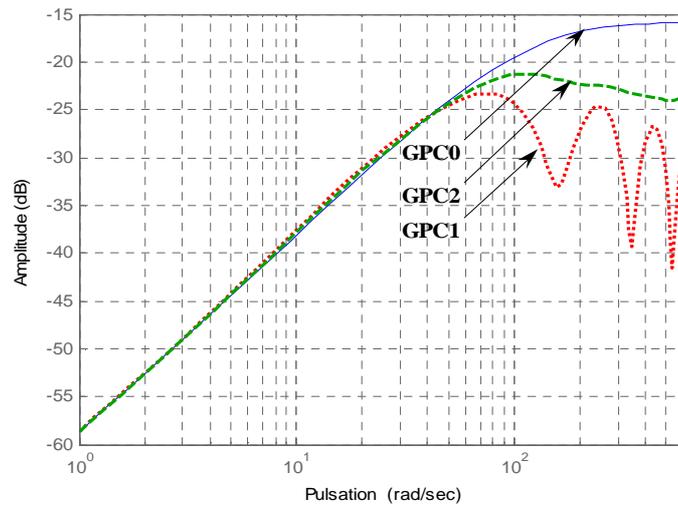
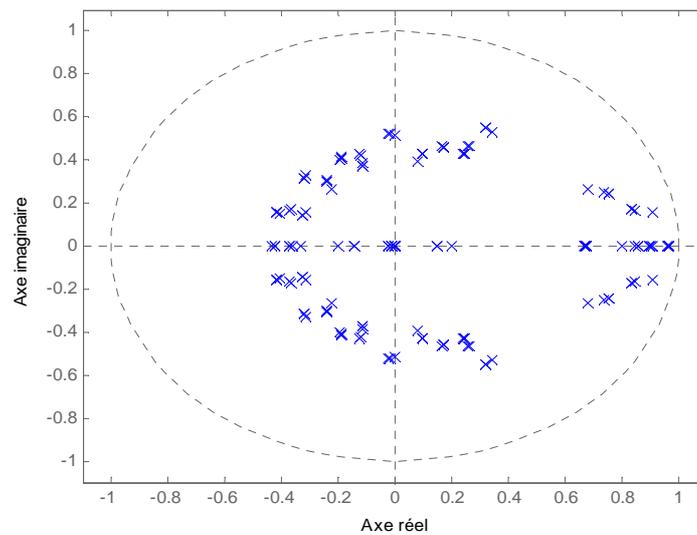


Figure (3.3) Transfert bruit de mesure /commande (b/u)



**Figure (3.4)** *Lieux des pôles du système polytopique bouclé avec le correcteur GPC2*

## Conclusion

Ce chapitre a enrichi la méthode de robustification proposée au chapitre précédent en considérant de plus la robustesse en stabilité face à des incertitudes structurées, appartenant à un ensemble incertain polytopique donné. Cette prise en compte impose en fait une condition supplémentaire de stabilité de Lipatov-Sokolov sur tout le domaine d'incertitudes. Cette condition est donnée sous une forme LMI. Une application sur un exemple académique a été proposée afin de valider cette méthodologie de robustification. Ainsi le paramètre de Youla trouvé permet de gérer le compromis entre la robustesse en stabilité du système nominal face à des incertitudes additives non-structurées et la stabilité sur un domaine incertain polytopique.

# **Chapitre IV**

## ***Application à un moteur asynchrone triphasé***

### **4.1. Introduction**

Ce chapitre va permettre de valider la méthodologie de robustification proposée dans ce travail sur un système d'entraînement par moteur asynchrone triphasé (ses paramètres sont donnés dans l'annexe A). Le moteur est alimenté par l'intermédiaire d'un onduleur de tension triphasé fonctionnant en modulation de largeur d'impulsion (MLI). L'annexe B présente, après une brève description de la machine asynchrone, une modélisation dans le plan triphasé et biphasé, cette modulation repose sur des paramètres électriques et mécaniques du moteur qui décrivent les phénomènes électromagnétiques moyennant des hypothèses simplificatrices, ainsi, un bref aperçu de l'alimentation et de l'onduleur MLI est donné.

Quant à la commande de la machine, elle est pilotée par une structure de commande de type cascade, pour laquelle la boucle interne de couple et de flux est conçue autour d'une commande par orientation de flux (FOC), et la boucle externe de vitesse autour de la loi de commande correspondant à notre approche robustifiée.

La première partie de ce chapitre sera consacré à la commande vectorielle par orientation du champ de la machine asynchrone, la théorie de cette commande permet d'assimiler la machine asynchrone à une machine à courant continu à excitation séparée.

### **4.2. Commande vectorielle de la machine asynchrone triphasée**

Grâce au développement de l'électronique de puissance et de l'électronique de commande (micro - électronique), il est aujourd'hui possible d'obtenir des machines asynchrones aussi performantes que des machines à courants continus [45, 46, 47].

La machine à courant continu à excitation indépendante offre comme principal avantage d'être facilement commandable.

Le couple et le flux sont découplés et contrôlables indépendamment. Le flux est contrôlé de l'inducteur, le couple est contrôlé par le courant d'induit. Cependant le collecteur mécanique prohibe leur utilisation dans des conditions difficiles. Pour cette raison la machine à courant continu est remplacée par des machines à courant alternatif. Néanmoins le couplage entre les flux les rend difficilement commandables. En plus le régime transitoire de ces machines dépend de plusieurs grandeurs reliées entre eux d'une manière non linéaire.

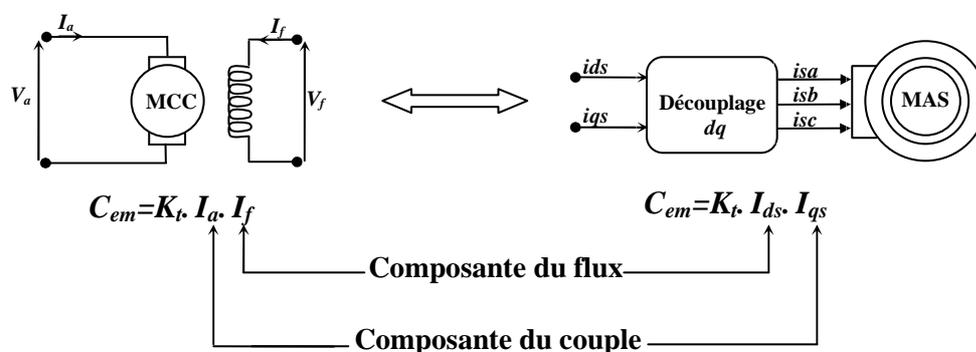
Le modèle de Park permet certaines simplifications. En effet un choix convenable du repère permet d'obtenir un modèle simple de la MAS. Ce repère particulier peut être orienté sur le flux rotorique, sur le flux statorique ou sur le flux d'entrefer.

Dans ce chapitre l'étude est consacrée à la commande vectorielle (commande par flux orienté), et en particulier à l'orientation du flux rotorique par la commande indirecte.

#### 4.2.1. Principe de la commande par flux orienté

La difficulté pour commander une machine asynchrone réside dans le fait qu'il existe un couplage complexe entre les variables internes de la machine comme le flux, le couple, la vitesse ou la position. Une méthode de commande classique consiste à contrôler le couple par le glissement fréquentiel et le flux par le rapport de la tension d'alimentation à la fréquence. Toutefois, ce type de commande ne peut pas donner des performances dynamiques appréciables à cause du manque de connaissance de cette quantité à priori.

En 1971, *Blaschke* a proposé une nouvelle théorie de commande par flux orienté qui permet d'assimiler la machine asynchrone à une machine à courant continu, Figure (4.1) [48, 49,50].



**Figure (4.1)** Schéma de principe du découplage pour la MAS par analogie avec la machine à courant continu

La commande d'une MCC est effectuée simplement en pilotant deux courants continus. Par contre, le cas d'une MAS est beaucoup plus difficile car il faut piloter trois grandeurs, deux courants ou deux tensions statoriques et la fréquence de ces signaux.

D'après la proposition de *Blaschke*, on peut maîtriser ces difficultés en introduisant des coordonnées de champ, la dynamique d'une MAS sera ramenée à celle d'une MCC.

Dans une machine à courant continu, le rotor est bobiné de telle manière que l'axe de la force magnétomotrice de l'induit établit un angle de  $90^\circ$  avec l'axe du flux inducteur, et ceci quelle que soit la vitesse de rotation de la machine. De ce fait, le couple est proportionnel au produit du flux inducteur et du courant induit. Dans le cas d'une machine à excitation séparée, si l'on maintient le flux inducteur constant, le couple peut être contrôlé aussi rapidement que le courant induit peut l'être.

En contrepartie, dans une MAS, l'angle entre le champ tournant du stator et celui du rotor varie avec la charge, ce qui donne des interactions complexes et des réponses dynamiques oscillantes.

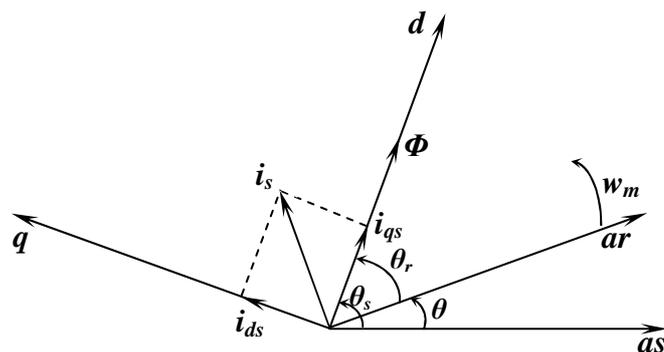
Pour obtenir une situation équivalente à celle d'une MCC, on cherche un repère propre pour que le vecteur courant stator se décompose en deux composantes, une qui produit le flux et l'autre le couple. Aujourd'hui, grâce à cette technique de commande et en développant des systèmes numériques, de nombreux entraînements à courant continu sont remplacés par des MAS.

#### 4.2.2. Théorie du flux orienté

Dans le modèle de la MAS représenté par les équations biphasées, nous choisissons un référentiel lié au champ tournant tel que l'axe «d» coïncide avec la direction désirée du flux (rotorique, statorique ou d'entrefer).

Le flux  $\Phi$  représenté à la Figure (4-2) peut être le flux rotorique, le flux statorique ou le flux d'entrefer. Cependant, nous pouvons orienter les trois différents flux :

- Soit le flux rotorique avec les conditions:  $\Phi_{dr} = \Phi_r, \Phi_{qr} = 0$  ;
- Soit le flux statorique avec les conditions:  $\Phi_{ds} = \Phi_s, \Phi_{qs} = 0$  ;
- Soit le flux d'entrefer avec les conditions:  $\Phi_{dg} = \Phi_g, \Phi_{qg} = 0$  ;



**Figure (4. 2)** Principe de la commande à flux rotorique orienté

La commande par flux orienté est une technique qui, malgré la structure complexe et non linéaire de la MAS, permet sa commande de façon similaire à celle de la machine à courant continu. Par conséquent, trois types de commande par flux orienté de la MAS sont possibles:

- Orientation du flux rotorique;
- Orientation du flux statorique;
- Orientation du flux d'entrefer.

Chacune de ces méthodes de commande permet d'obtenir un contrôle de flux et un contrôle de couple découplés comme une machine à courant continu à excitation séparée. Ce découplage permet d'obtenir de très bonnes réponses de l'entraînement en régime dynamique.

Deux méthodes sont possibles:

**Méthode dite directe:** Le flux considéré est directement mesuré ou estimé à l'aide d'un estimateur.

**Méthode dite indirecte :** La position du flux considéré est calculée à partir de la mesure de la vitesse du rotor et d'autres grandeurs accessibles comme les tensions et les courants statorique.

Dans notre travail l'étude est essentiellement consacrée à la méthode indirecte.

### 4.2.3. Application de la commande vectorielle indirecte (IRFO)

Si le flux rotorique est orienté sur l'axe  $d$  d'un repère lié au champ tournant à la vitesse  $\omega_s$ , on a :

$\varphi_{dr} = \varphi_r$  et  $\varphi_{qr} = 0$  ; Et les équations de la machine dans ce référentiel deviennent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{ds} = R_s i_{ds} + \sigma L_s \frac{di_{ds}}{dt} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\varphi_r}{dt} - \sigma \omega_s L_s i_{qs} \\ v_{qs} = R_s i_{qs} + \sigma L_s \frac{di_{qs}}{dt} + \omega_s \frac{L_m}{L_r} \varphi_r + \sigma \omega_s L_s i_{ds} \\ i_{ds} = \frac{1}{L_m} \left( T_r \frac{d\varphi_r}{dt} + \varphi_r \right) \\ i_{qs} = \frac{L_r}{p L_m} \frac{C_{em}}{\varphi_r} \\ \omega_{gl} = \frac{L_m}{T_r} \frac{i_{qs}}{\varphi_r} \\ \omega_s = \omega_m + \omega_{gl} \\ J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f_r \Omega \end{array} \right. \quad (4.1)$$

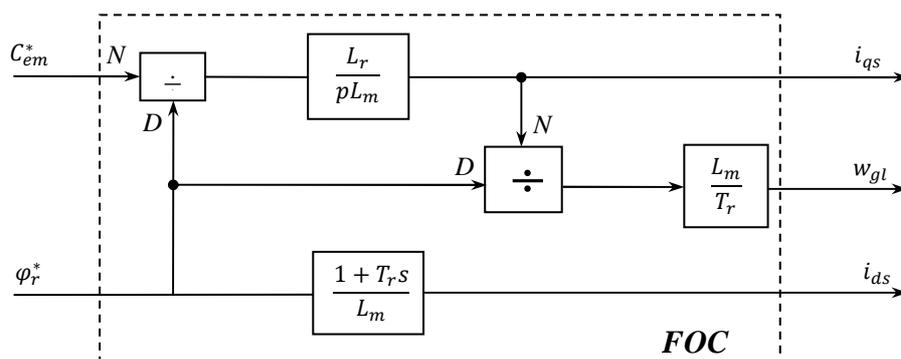
Après passage par une transformation de Laplace nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{ds} = (R_s + \sigma L_s s) i_{ds} + \frac{L_m}{L_r} s \varphi_r - \sigma \omega_s L_s i_{qs} \\ v_{qs} = (R_s + \sigma L_s s) i_{qs} + \omega_s \frac{L_m}{L_r} \varphi_r + \sigma \omega_s L_s i_{ds} \\ \varphi_r = \left( \frac{L_m}{1 + T_r s} \right) i_{ds}, \text{ ainsi } \varphi_r = L_m i_{ds} \text{ en régime permanent} \\ C_{em} = \frac{p L_m}{L_r} \varphi_r i_{qs} \\ \omega_{gl} = \frac{L_m}{T_r} \frac{i_{qs}}{\varphi_r} \\ \Omega = \left( \frac{1}{f_r + J s} \right) [C_{em} - C_r] \end{array} \right. \quad (4.2)$$

On peut donc commander le flux rotorique à l'aide de la composante  $i_{ds}$  et on peut commander le couple essentiellement avec la composante  $i_{qs}$ . Afin d'assurer un contrôle du couple et de pouvoir fournir à tout instant un couple maximal, le flux est maintenu à sa valeur nominale. Néanmoins dans un régime de survitesse où on atteint la limitation de la tension maximale qui peut être fournie par l'onduleur, il est intéressant de diminuer de flux, afin de

réduire la norme de la tension. Dans ces conditions, on ne peut que difficilement assurer le contrôle du couple.

La Figure (4.3) donne le schéma détaillé de la structure de commande (**FOC : Field Oriented Control**) le flux rotorique  $\varphi_r^*$  et couple  $c_{em}^*$  considèrent comme références de commande.



**Figure (4. 3)** Schéma de principe de découplage FOC à flux rotorique orienté

D'après le système (4.2), les équations des tensions montrent un découplage indésirable :  $v_{ds}$  et  $v_{qs}$  influent à la fois  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$  donc sur le flux et le couple. Il est donc nécessaire de réaliser un découplage [48].

On définit deux nouvelles variables de commande  $v_{ds1}$  et  $v_{qs1}$  telles que  $v_{ds1}$  n'agisse que sur  $i_{ds}$  et  $v_{qs1}$  sur  $i_{qs}$ . La variation du module du flux rotorique est supposée très lente par rapport à  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$  [51].

On a donc :

$$\begin{cases} v_{ds} = v_{ds1} - e_{ds} \\ v_{qs} = v_{qs1} - e_{qs} \end{cases} \quad (4.3)$$

Avec

$$\begin{cases} e_{ds} = \sigma \omega_s L_s i_{qs} \\ e_{qs} = -\omega_s \frac{L_m}{L_r} \varphi_r - \sigma \omega_s L_s i_{ds} \end{cases} \quad (4.4)$$

On a donc un nouveau système :

$$\begin{cases} v_{ds1} = (R_s + \sigma L_s s) i_{ds} \\ v_{qs1} = (R_s + \sigma L_s s) i_{qs} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} i_{ds} = \frac{1}{R_s} \frac{1}{(1 + \sigma T_s s)} v_{ds1} \\ i_{qs} = \frac{1}{R_s} \frac{1}{(1 + \sigma T_s s)} v_{qs1} \end{cases} \quad (4.6)$$

La Figure (4.4) donne une vue globale de la réalisation de la commande de vitesse de la MAS commandé par orientation du flux rotorique indirecte en boucle fermée.

Les principaux constituants dans ce type de commande sont la boucle de régulation de vitesse, celles des courants  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$ , le bloc de calcul de  $\theta_s$  et les transformations directe et inverse de PARK. La vitesse est régulée à travers la boucle externe du bloc. La sortie de son régulateur est le couple électromagnétique de référence  $C_{em}^*$  ou le courant de référence  $i_{qs}^*$ . Il est limité de manière à tenir compte la surcharge de la machine.  $i_{qs}^*$  est comparé à la valeur  $i_{qs}$  issue de la mesure des courants réels. L'erreur sollicite l'entrée du régulateur dont la sortie est la tension de référence  $v_{qs}^*$  après introduction du terme de découplage  $e_{qs}$ .

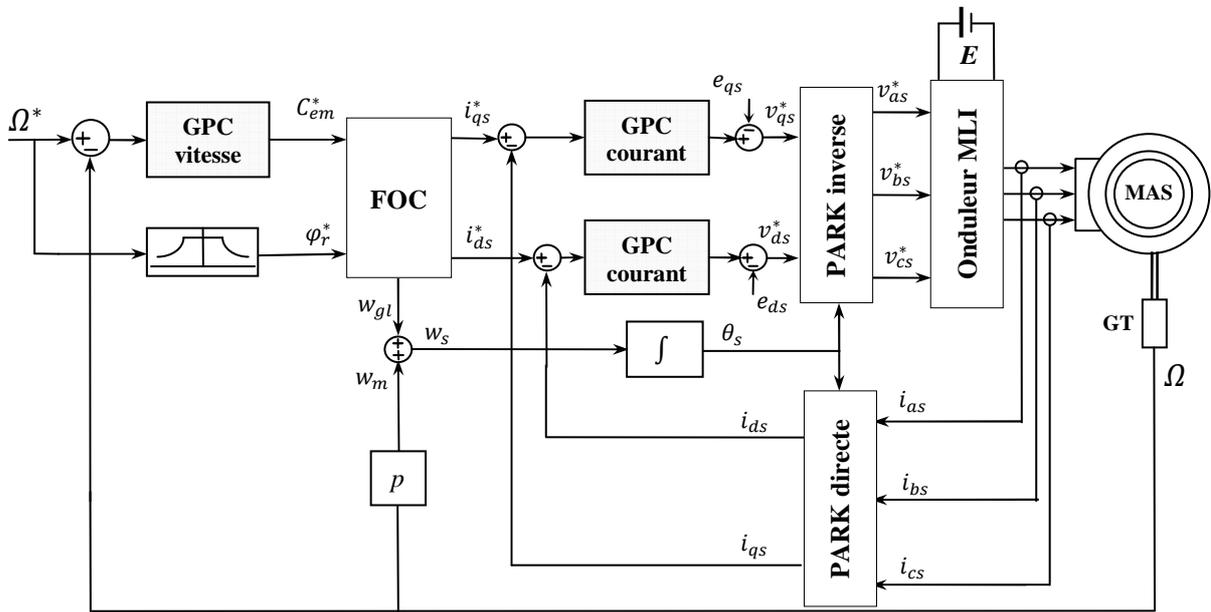


Figure (4.4) Structure globale de la commande de la MAS par régulateurs GPC

En parallèle avec cette boucle interne, on trouve une boucle de régulation de  $i_{ds}$ . Le courant de référence  $i_{ds}^*$  est calculé à partir du flux à imposer. Ce flux correspond à sa valeur nominale pour la zone de vitesse inférieure à la vitesse de base. Au-delà de cette zone, on procède au défluxage de la machine de manière à pouvoir atteindre des vitesses supérieures. Le couple

maximal que l'on peut imposer devient alors plus faible. La sortie du régulateur de  $i_{ds}$  donne la tension de référence  $v_{ds}^*$  après avoir introduire le terme de découplage  $e_{ds}$ . Les deux tensions de référence  $v_{ds}^*$  et  $v_{qs}^*$  sont transformées en grandeurs triphasées à l'aide d'une transformation de PARK.

L'onduleur à MLI applique des créneaux de tension à la machine dont les valeurs moyennes sur une période de MLI correspondent aux valeurs  $v_{as}^*$ ,  $v_{bs}^*$ ,  $v_{cs}^*$ . Les courants  $i_{as}$ ,  $i_{bs}$ ,  $i_{cs}$  sont mesurés puis transformés dans le référentiel tournant et donnent  $i_{ds}$ ,  $i_{qs}$  qu'on utilise pour la régulation des courants.

La pulsation statorique  $\omega_s$  et l'angle  $\theta_s$  sont calculés à partir d'une mesure de vitesse mécanique  $\omega_m$  et du calcul de la pulsation du glissement  $\omega_{gl}$ . C'est cet angle qui sera utilisé dans les transformations (directe et inverse).

### 4.3. Elaboration de la commande

La démarche considérée se déroule en quatre parties. Les deux modèles simplifiés de la MAS concernant le mode électrique et le mode mécanique sont tout d'abord utilisés pour construire deux loi GPC stabilisant ces modèles, ainsi une structure prédictive cascade est adoptée. La deuxième partie présente une modification du correcteur initial de vitesse via le paramètre de Youla  $Q_2$  afin de minimiser l'effort du signal de commande. Dans la troisième partie, le correcteur initial sera robustifié face à des incertitudes additives non-structurées afin de diminuer l'effet du bruit de mesure du capteur de vitesse sur la commande tout en respectant un gabarit pour le rejet de perturbation. Enfin, dans la dernière partie, un domaine incertain polytopique est construit autour du modèle nominal. Une garantie de stabilité sur tout le domaine d'incertitudes polytopique est donnée en appliquant la méthodologie proposée dans le chapitre précédent. En résumé, les correcteurs qui seront appliqués pour contrôler la vitesse de rotation du moteur sont les suivants :

- GPC0 – le correcteur prédictif initial ;
- GPC/cascade – le correcteur prédictif cascade qui tient en compte le mode électrique ;
- MGPC – le correcteur modifié par le paramètre  $Q_2$  de Youla;
- GPC1 – le correcteur robustifié face à des incertitudes non-structurées additives;

- GPC2– le correcteur robustifié face à des incertitudes non-structurées additives et polytopiques, résultat de la solution proposée au troisième chapitre.

Partant des deux des fonctions de transferts du modèle simplifié de la MAS donné à partir ses équations citées précédemment qu'on les rappelle ici :

$$G_c(s) = \frac{v_{qs1}}{i_{qs}} = \frac{1}{R_s} \frac{1}{(1+\sigma T_s s)} \quad (4.7)$$

$$G_v(s) = \frac{\Omega}{c_{em}} = \frac{1}{f_r} \frac{1}{(1+T_m s)} \quad (4.8)$$

Prenant une période d'échantillonnage  $T_{ec} = 0.0001s$  pour le mode électrique, et une période d'échantillonnage  $T_{ev} = 0.001s$  pour le mode mécanique. On obtient les deux fonctions de transferts discrétisés correspondent aux systèmes (2.59) et (2.60) respectivement.

$$G_c(q^{-1}) = \frac{0.0028}{1-0.9776q^{-1}} q^{-1} \quad (4.9)$$

$$G_v(q^{-1}) = \frac{0.06666}{1-0.9997q^{-1}} q^{-1} \quad (4.10)$$

### 4.3.1 Synthèse du régulateur GPC pour la boucle de courant

Selon (4.9) on obtient les polynômes  $A_c(q^{-1})$  et  $B_c(q^{-1})$  du model CARIMA suivants :

$$\begin{cases} A_c(q^{-1}) = 1 - 0.977q^{-1} \\ B_c(q^{-1}) = 0.0028 \end{cases} \quad (4.11)$$

Le régulateur de courant est synthétisé pour le réglage suivant :  $N_1 = 1, N_2 = 25, N_u = 1$  et  $\lambda = \text{trace}(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = 0.0294$  ; Les polynômes  $RST$  de la structure symbolisée dans la Figure (1.4) deviennent :

$$S_c(q^{-1}) = 1 \Rightarrow \Delta S_i(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$R_c(q^{-1}) = 187.5965 - 174.5607q^{-1}$$

$$\begin{aligned} T_c(q^{-1}) = & 0.9198 + 0.8922q^{-1} + 0.8639q^{-2} + 0.8349q^{-3} + 0.8053q^{-4} + 0.7750q^{-5} + 0.7440q^{-6} + 0.7124q^{-7} + \\ & 0.6799q^{-8} + 0.6468q^{-9} + 0.6129q^{-10} + 0.5782q^{-11} + 0.5427q^{-12} + 0.5064q^{-13} + 0.4692q^{-14} + \\ & 0.4312q^{-15} + 0.3924q^{-16} + 0.3526q^{-17} + 0.3120q^{-18} + 0.2704q^{-19} + 0.2278q^{-20} + 0.1843q^{-21} + \\ & 0.1398q^{-22} + 0.0942q^{-23} + 0.0476q^{-24} \end{aligned}$$

Ce réglage assure pour le système corrigé de bonnes performances, la Figure (4.5) illustre la réponse indicielle et le diagramme de Bode du système ainsi corrigé. Le Système possède alors un temps de réponse très rapide égale à  $0.006s$  sans dépassement, et une marge de gain  $\Delta G = 11.3dB$ .

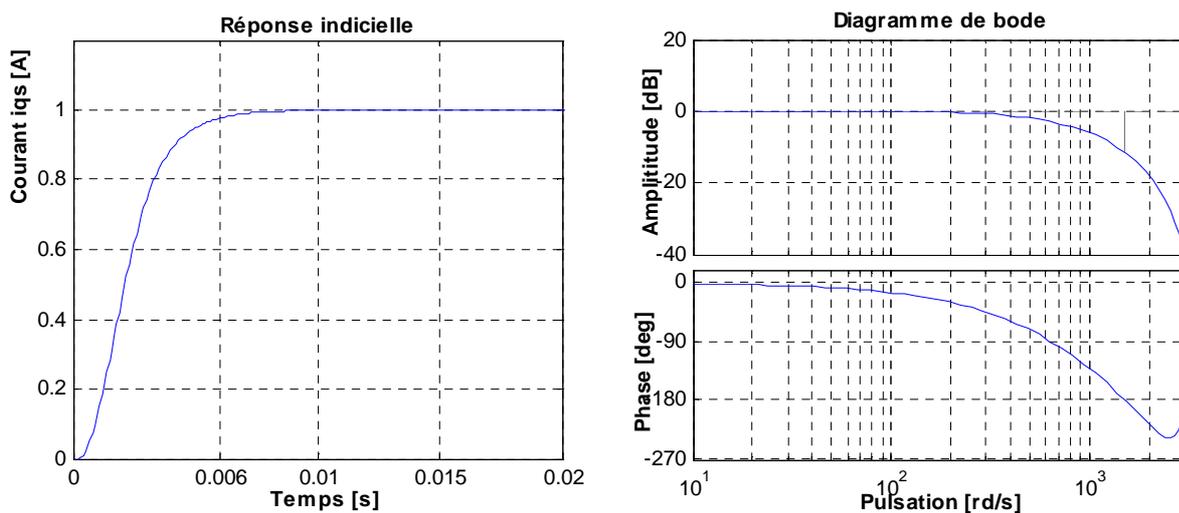


Figure (4.5) Réponse indicielle et diagramme de Bode du système corrigé par la GPC : Boucle de courant

#### 4.3.2 Synthèse du régulateur GPC pour la boucle de vitesse

Les polynômes  $A_v(q^{-1})$  et  $B_v(q^{-1})$  du model CARIMA correspond à l'équation (4.10) sont les suivants :

$$\begin{cases} A_v(q^{-1}) = 1 - 0.9997q^{-1} \\ B_v(q^{-1}) = 0.06666 \end{cases} \quad (4.12)$$

Le régulateur de vitesse est synthétisé pour le réglage suivant :  $N_1 = 1, N_2 = 30, N_u = 1$  et  $\lambda = \text{trace}(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = 41.7034$ ; Les polynômes  $RST$  de la structure symbolisée dans la Figure (1.4) deviennent :

$$S_v(q^{-1}) = 1 \Rightarrow \Delta S_v(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$R_v(q^{-1}) = 7.8692 - 7.4988q^{-1}$$

$$T_v(q^{-1}) = 0.0239 + 0.0231q^{-1} + 0.0223q^{-2} + 0.0215q^{-3} + 0.0207q^{-4} + 0.0199q^{-5} + 0.0191q^{-6} + 0.0183q^{-7} + 0.0175q^{-8} + 0.0167q^{-9} + 0.0159q^{-10} + 0.0151q^{-11} + 0.0143q^{-12} + 0.0135q^{-13} + 0.0128q^{-14} + 0.0120q^{-15} + 0.0112q^{-16} + 0.0104q^{-17} + 0.0096q^{-18} + 0.0088q^{-19} + 0.0080q^{-20} + 0.0072q^{-21} + 0.0064q^{-22} + 0.0056q^{-23} + 0.0048q^{-24} + 0.0040q^{-25} + 0.0032q^{-26} + 0.0024q^{-27} + 0.0016q^{-28} + 0.0008q^{-29}$$

Ce réglage assure pour le système corrigé de bonnes performances, la Figure (4.6) illustre la réponse indicielle et le diagramme de Bode du système ainsi corrigé. Le Système possède un temps de réponse très rapide égale à 0.1s sans dépassement, et une marge de gain  $\Delta G = 30.2dB$ .

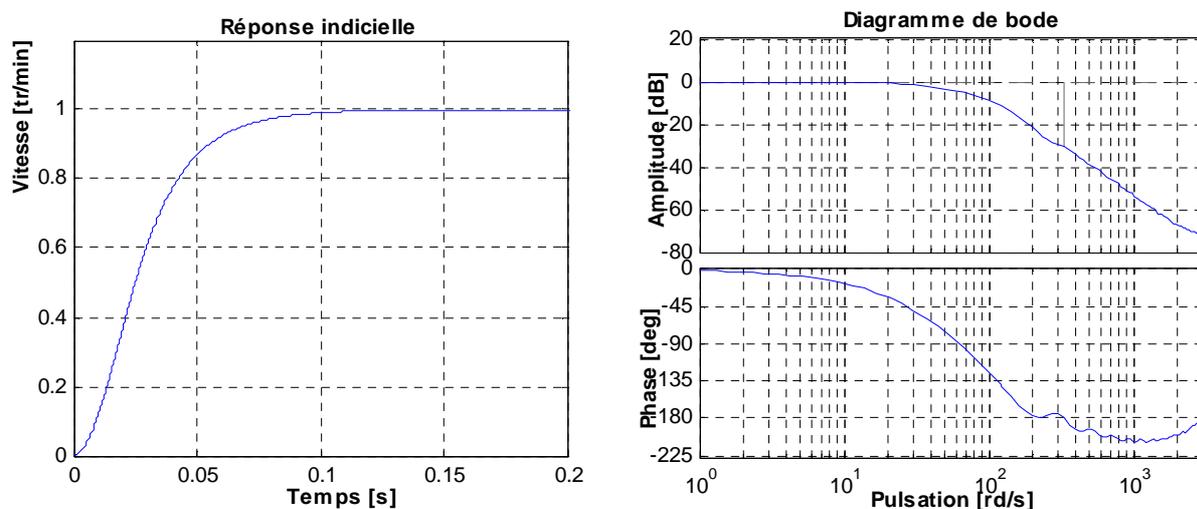


Figure (4.6) Réponse indicielle et diagramme de Bode du système corrigé par la GPC : Boucle de vitesse

### 4.3.3 Influence de la boucle interne sur la boucle externe

Afin de révéler l'influence de la boucle de courant sur la boucle de vitesse on réalise la structure de commande simplifié suivante, Figure (4.7) :

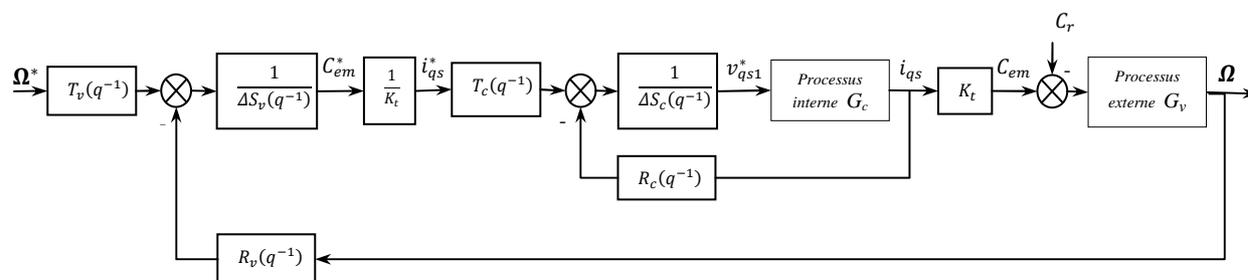


Figure (4.7) Mise en cascade des deux régulateurs prédictifs

On garde les mêmes polynômes  $RST$  de courant et de vitesse calculés précédemment et on trace le diagramme de Bode en boucle fermée correspond à la structure (4.7), ce dernier est comparé au diagramme de Bode de la boucle externe sans introduction de la partie électrique.

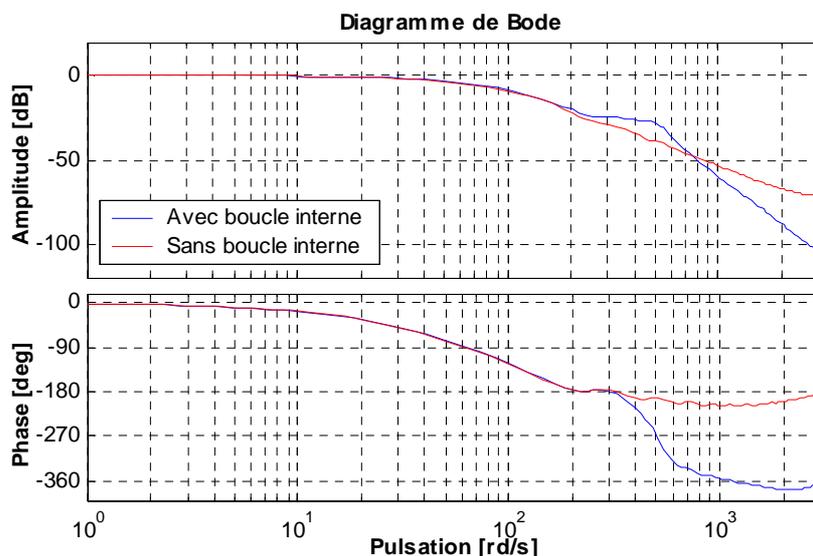


Figure (4.8) Diagramme de Bode du système avec et sans considération de la boucle de courant

On constate selon la Figure (4.8), que la dynamique du système en boucle fermée est changée après avoir incorporé la boucle interne notamment en haute fréquence. Dans la suite on omit l'hypothèse qui considère une rapidité de la boucle interne par rapport à la boucle externe, pour cela on fait appel à la commande  $GPC/cascade$  [52, 53].

#### 4.3.4 Commande $GPC/cascade$

Dans le cadre de la commande du moteur asynchrone classiquement implémentée sous forme cascade (vitesse, courant), il s'avère nécessaire de développer, à partir de l'algorithme  $GPC$  'de base' détaillé précédemment, une structure prédictive cascade tient compte tout les éléments de la boucle y compris le régulateur interne.

La Figure (4.9) illustre la structure cascade en mettant en évidence les modèles utilisés pour l'élaboration des polynômes  $RST$ . Afin d'implanter la commande  $GPC$  pour la boucle de courant, il est nécessaire d'élaborer un modèle de prédiction noté '*modèle interne*'. Egalement pour la

boucle de vitesse, il est nécessaire de disposer d'un modèle de prédiction pour cette boucle de vitesse, noté ici 'modèle global', afin de pouvoir prédire son comportement. Ce modèle est composé d'une partie correspondant au 'modèle externe' et d'une deuxième partie représentant la boucle interne fermée.

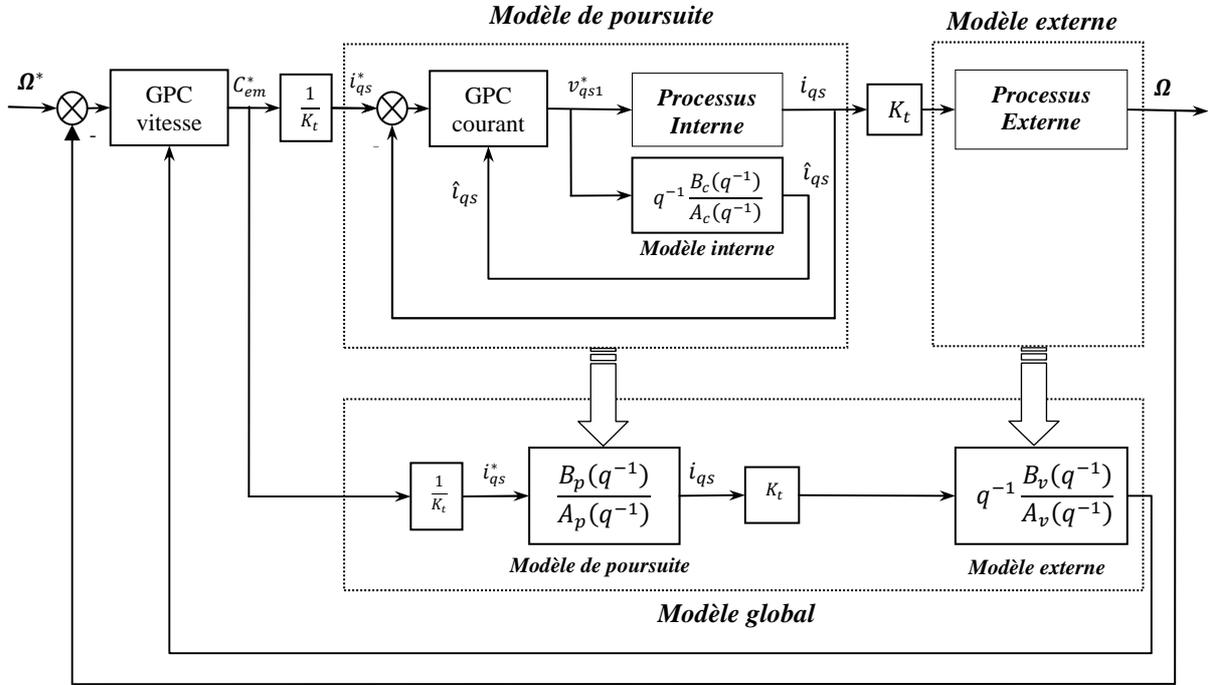


Figure (4.9) Structure de commande GPC cascade

L'algorithme de calcul permettant d'aboutir aux six polynômes pour les deux boucles procède en deux étapes. La boucle interne est envisagée tout d'abord puis la boucle externe.

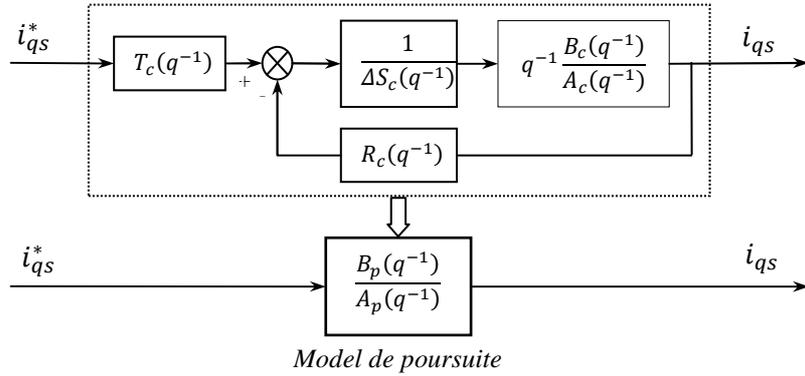
Les polynômes  $R_c(q^{-1})$ ,  $S_c(q^{-1})$  et  $T_c(q^{-1})$  du régulateur interne sont les mêmes que ceux obtenus précédemment, à paramètres de réglage identiques.

A partir de ces polynômes et le modèle du processus interne on définit un modèle de poursuite représenté dans la Figure (4.10), par la relation suivante :

$$i_{qs}(t) = \frac{B_p(q^{-1})}{A_p(q^{-1})} i_{qs}^*(t) \tag{4.13}$$

Tel que

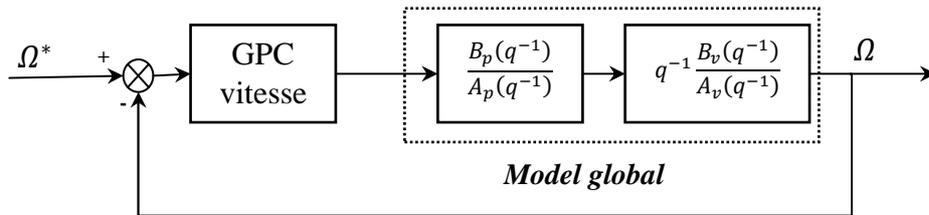
$$\frac{B_p(q^{-1})}{A_p(q^{-1})} = \frac{q^{-1}T_i(q^{-1})B_i(q^{-1})}{\Delta S_i(q^{-1})A_i(q^{-1}) + q^{-1}R_i(q^{-1})B_i(q^{-1})} \quad (4.14)$$



**Figure (4.10)** Dynamique équivalente de la boucle interne

On utilise la commande *minreal* fourni par Matlab pour trouver la minimale réalisation de  $\frac{B_p(q^{-1})}{A_p(q^{-1})}$  après avoir changé le pas de discrétisation utilisant la commande *d2d*.

Afin de retrouver l'expression des nouveaux polynômes  $R_v(q^{-1})$ ,  $S_v(q^{-1})$  et  $T_v(q^{-1})$  du régulateur *GPC* de vitesse, la définition du modèle global externe est nécessaire, comme défini Figure (4.11). Ce modèle inclut le modèle de la boucle fermée de courant, exprimé par l'intermédiaire du modèle de poursuite (4.13) et le modèle externe.



**Figure (4.11)** Boucle externe de vitesse

Le modèle de prédiction global s'exprime alors par la relation suivante :

$$\Omega(t) = q^{-1} \frac{B_g(q^{-1})}{A_g(q^{-1})} \Omega^*(t) = q^{-1} \frac{B_v(q^{-1}) B_p(q^{-1})}{A_v(q^{-1}) A_p(q^{-1})} \Omega^*(t) \quad (4.15)$$

Finalement on trouve les polynômes  $A_g(q^{-1})$  et  $B_g(q^{-1})$  du model CARIMA :

$$\begin{cases} B_g(q^{-1}) = B_v(q^{-1})B_p(q^{-1}) \\ A_g(q^{-1}) = A_v(q^{-1})A_p(q^{-1}) \end{cases} \quad (4.16)$$

L'application numérique donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} B_g(q^{-1}) = 0.0121 q^{-1} + 0.0164q^{-2} + 0.0057q^{-3} \\ A_g(q^{-1}) = 1 - 1.447 q^{-1} + 0.448 q^{-2} - 0.0008 q^{-3} \end{cases}$$

Pour un jeu de paramètres de réglage suivant:

$$N_1 = 1, N_2 = 30, N_u = 1 \text{ et } \lambda = \text{trace}(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) = 27.42$$

On aboutit aux nouveaux polynômes  $R_v(q^{-1})$ ,  $S_v(q^{-1})$  et  $T_v(q^{-1})$  suivants :

$$\begin{aligned} S_v(q^{-1}) &= 1 + 0.5269q^{-1} + 0.3497q^{-2} + 0.0912q^{-3} \Rightarrow \Delta S_v(q^{-1}) = 1 - 0.4731q^{-1} - 0.1772q^{-2} - 0.2584q^{-3} - 0.0912q^{-4} \\ R_v(q^{-1}) &= 16.8245 - 23.5597q^{-1} + 7.1854q^{-2} - 0.0125q^{-3} \\ T_v(q^{-1}) &= 0.0307 + 0.0296q^{-1} + 0.0285q^{-2} + 0.0274q^{-3} + 0.0263q^{-4} + 0.0251q^{-5} + 0.024q^{-6} + 0.0229q^{-7} + 0.0218q^{-8} + \\ &\quad 0.0207q^{-9} + 0.0195q^{-10} + 0.0184q^{-11} + 0.0173q^{-12} + 0.0162q^{-13} + 0.0151q^{-14} + 0.0139q^{-15} + 0.0128q^{-16} + \\ &\quad 0.0117q^{-17} + 0.0106q^{-18} + 0.0094q^{-19} + 0.0083q^{-20} + 0.0072q^{-21} + 0.0061q^{-22} + 0.005q^{-23} + 0.0038q^{-24} + \\ &\quad 0.0028q^{-25} + 0.0017q^{-26} + 0.0008q^{-27} + 0.0002q^{-28} + 0q^{-29} \end{aligned}$$

L'essai suivant est fait sur le modèle simplifié de la MAS, structure (2.12), munie de ce dernier régulateur (GPC/cascade). On applique un couple résistant de  $C_r = 7Nm$  à partir de l'instant 0.3s jusqu'à l'instant 0.6s alors que la vitesse est régulée à 1000tr/min.

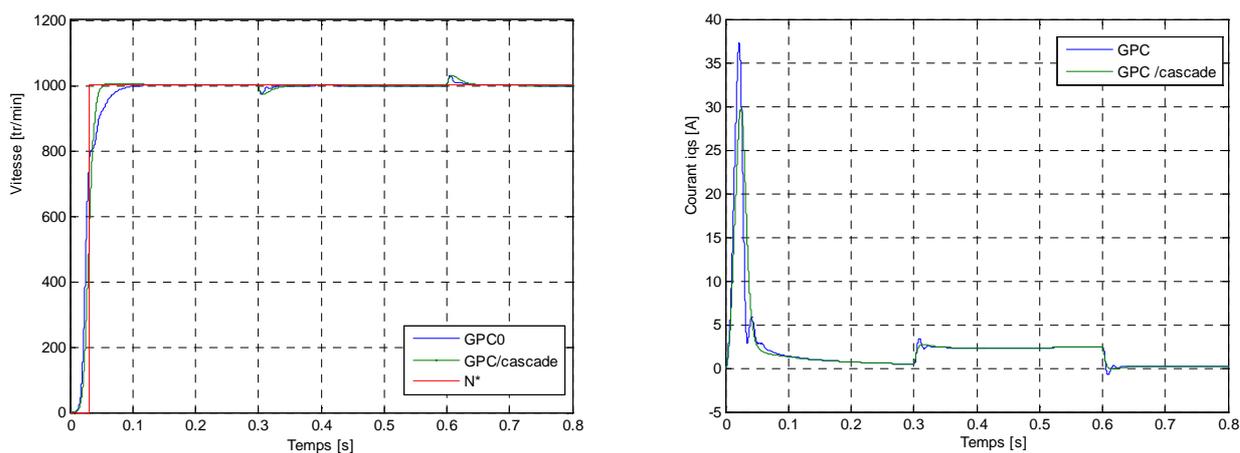


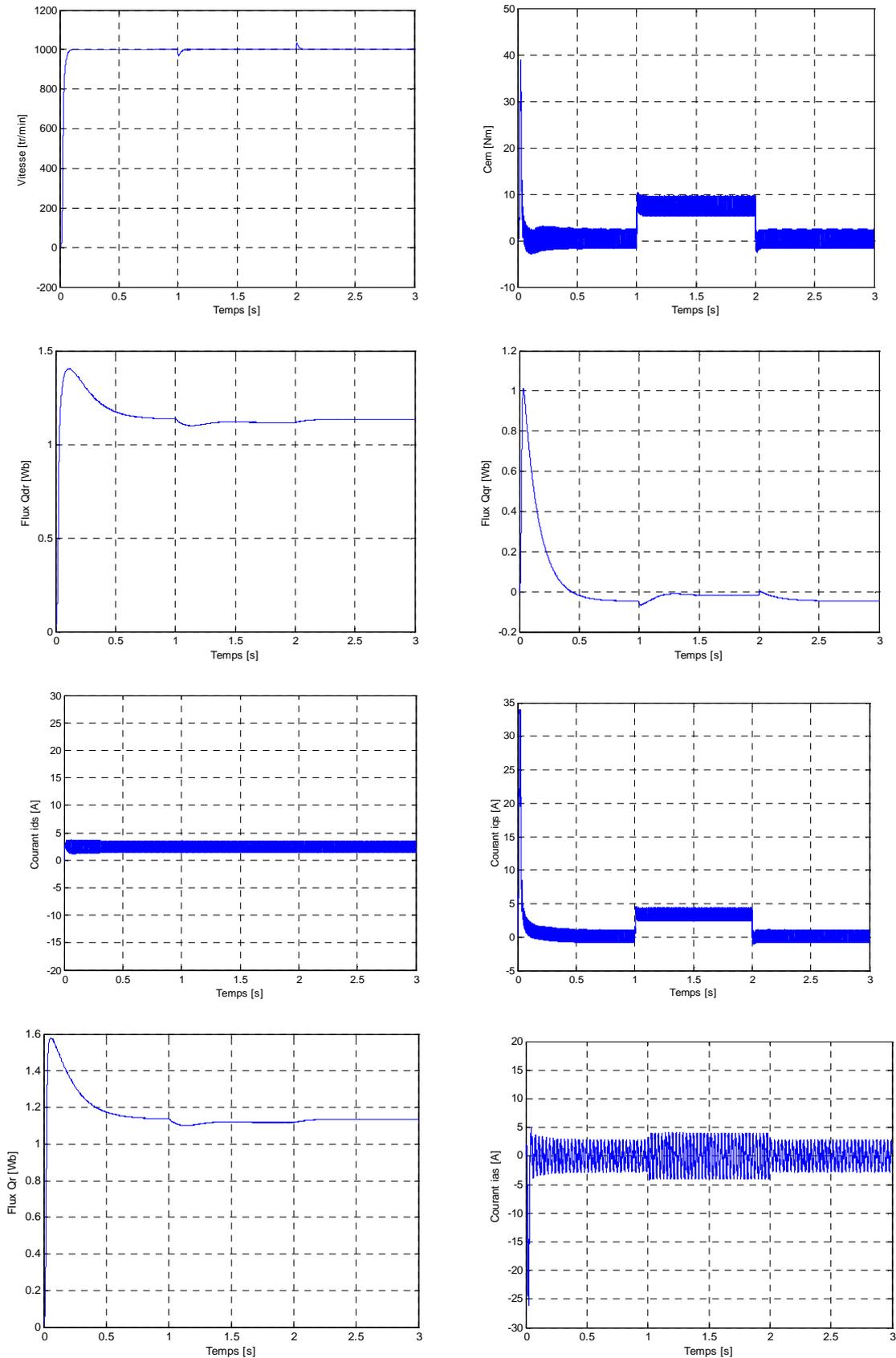
Figure (4.12) Comparaison entre GPC et GPC cascade

La Figure (4.12) illustre la comparaison entre la GPC et la GPC/cascade, on constate que les performances obtenues avec la GPC/cascade est meilleur à celui obtenus avec la régulation GPC qui ne tient pas en compte la boucle interne de courant.

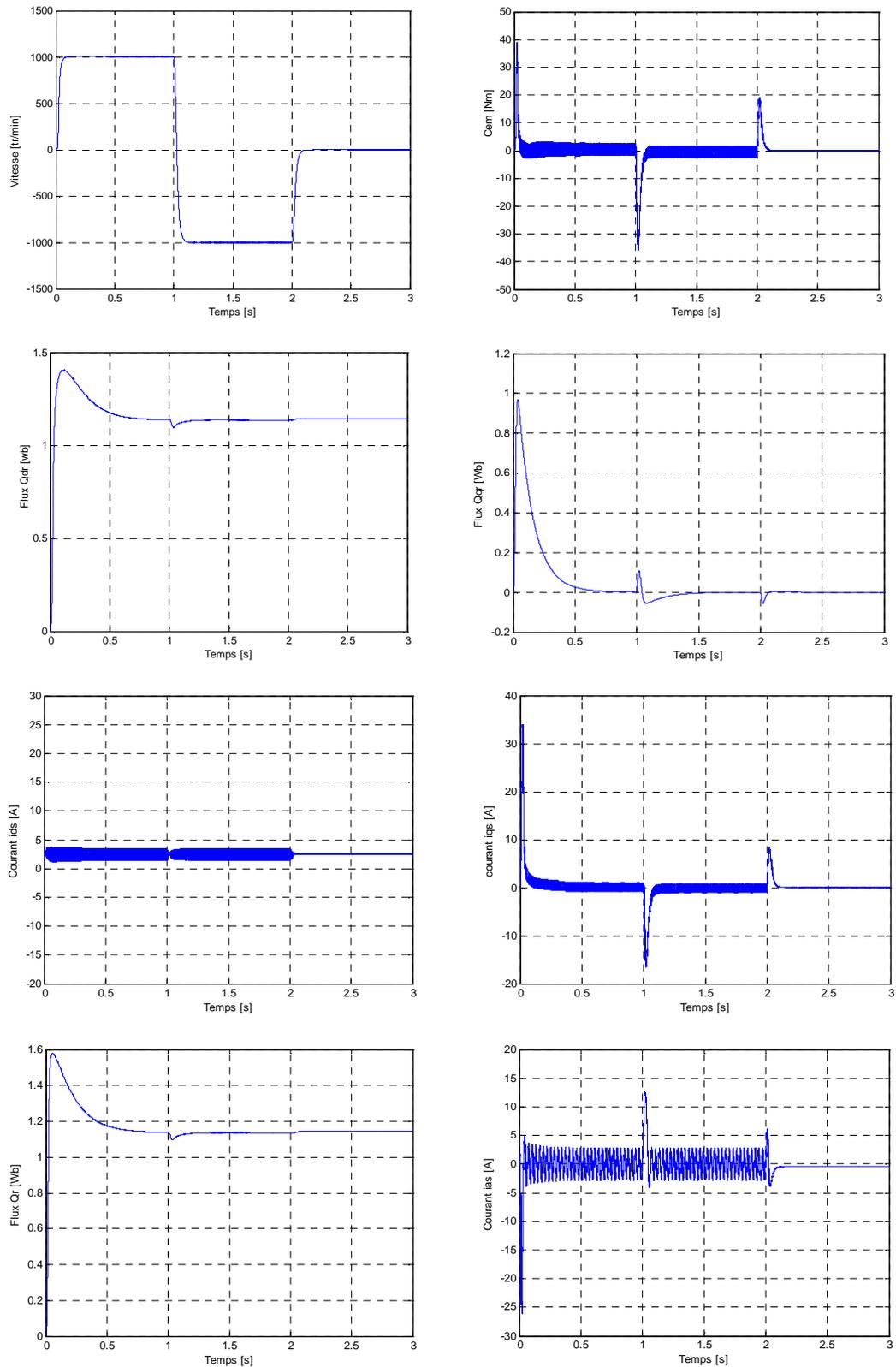
#### **4.3.5 Application de la GPC/cascade sur le modèle complet de la MAS**

A la partie précédente, nous avons appliqué la GPC au modèle simplifié de la MAS, cette étude est basée sur le modèle linéaire découplé. Afin d'approcher le fonctionnement réel de la machine, nous faisons, dans ce qui suit, une application de la GPC/cascade sur le modèle complet de la machine muni du pilotage vectoriel Figure (4.4).

On présente les différentes grandeurs de la machine dans les Figures (4.13) et (4.14) pour deux essais. La première figure montre un démarrage à vide avec une consigne de 1000tr/min suivi d'une application d'un couple nominal  $7Nm$  à l'instant  $I_s$  pendant  $I_s$ . La deuxième figure illustre un test d'inversion de vitesse donnant une référence varie de (1000tr/min et -1000tr/min), nous remarquons que le rejet de perturbation est très efficace, ainsi le découplage entre le flux et couple est parfaitement assuré.



**Figure (4.12)** Performances de la conduite d'une MAS commandée par la GPC/cascade : Démarrage à vide puis application d'un couple résistant entre 1s et 2s.



**Figure (4.13)** Performances de la conduite d'une MAS commandée par la GPC/cascade : Inversion du sens de rotation entre 1s et 2s.

La méthodologie précédemment développée est appliquée maintenant en vue de robustifier la commande GPC en vitesse d'un moteur asynchrone.

Le premier objectif consiste à élaborer un paramètre  $Q_2$  permettant de respecter un gabarit pour le comportement entrée/sortie en s'imposant une commande la plus faible possible avec la dynamique de poursuite désirée et sans modification de la boucle fermée.

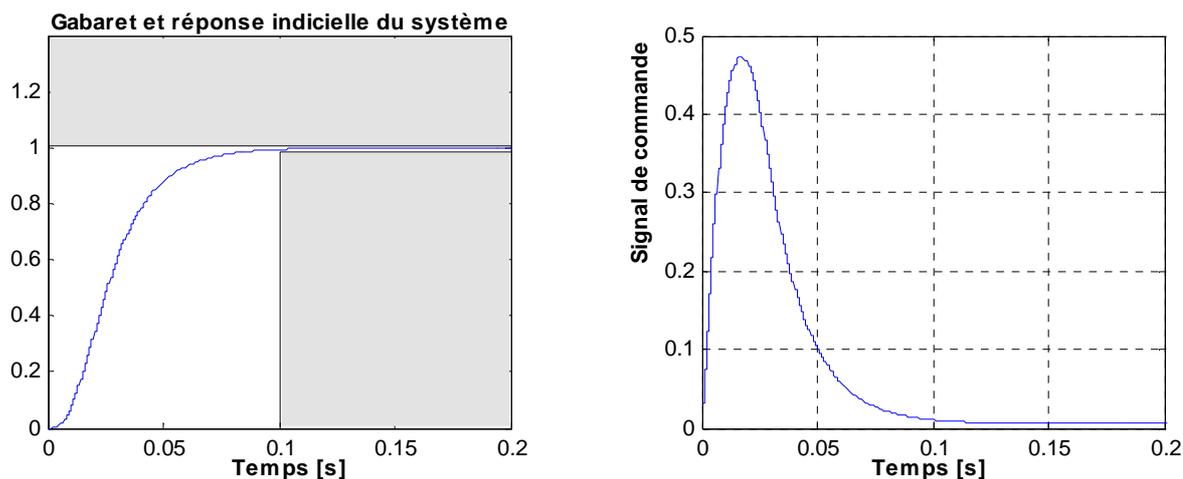
Le deuxième objectif est alors de robustifier ce correcteur initial, de sorte que la loi de commande soit moins sensible aux bruits de mesure et aux incertitudes de modèle à haute fréquence. Cependant, cette robustification doit être réalisée, d'une part, en conservant le comportement entrée/sortie imposé par le correcteur initial (dynamique de poursuite) et, d'autre part, en respectant un gabarit spécifié au préalable pour le rejet de perturbation, afin de ne pas trop ralentir la dynamique de régulation de la boucle fermée.

#### 4.3.6 Commande Contrainte

Le régulateur initial *GPC* a été obtenu et mis sous forme *RST* selon les méthodes exposées au deuxième chapitre. On cherche alors le paramètre  $Q_2$ , (on fixe  $Q_1=0$ ), qui permette de respecter un gabarit entrée/sortie tout en minimisant les courants transitoires.

La première étape a pour but de déterminer le gabarit à respecter. La démarche adoptée ici vise à la mise en œuvre d'un gabarit pour lequel le système conserve le temps de réponse obtenu avec le correcteur initial ( $0.1s$ ), et de minimiser la norme  $H_\infty$  du transfert  $u/w$  cela implique une minimisation des transitoires de la commande. Le gabarit est représenté Figure (4.14), en incluant la réponse indicielle du système avec le correcteur initial à titre de comparaison. Cette réponse a été obtenue en se ramenant à une allure causale de la réponse indicielle du système. On a choisi  $N_t = 200$  (nombre de points de la réponse temporelle pris en compte par le gabarit) pour la minimisation, soit un horizon de  $0.2s$ .

Afin de réduire la commande en haute fréquence, on choisit :  $W = \frac{1-0.8q^{-1}}{0.2}$



**Figure (4.14)** Gabarit avec réponse indicielle du système et signal de commande pour le correcteur initial

D'après la relation (2.14) on a :

$$\begin{cases} \frac{y(q^{-1})}{w(q^{-1})} = \frac{T' q^{-1} B}{A_c} - \frac{q^{-1} B}{A_c} Q_2 \\ \frac{u(q^{-1})}{w(q^{-1})} = \frac{T' A}{A_c} - \frac{A}{A_c} Q_2 \end{cases} \quad (4.17)$$

Pour conserver un gain unitaire dans le transfert entrée/sortie, il est nécessaire de valider la relation suivante :

$$\frac{y(q^{-1})}{w(q^{-1})} = \frac{T' q^{-1} B}{A_c} - \frac{q^{-1} B}{A_c} Q_2 \Big|_{q=1} = 1 \quad (4.18)$$

Avec le correcteur initial, le gain unitaire est satisfait par structure de l'algorithme GPC, ce qui garantit que la première partie de la relation (4.18) possède un gain unitaire. Il faut donc que  $Q_2(q^{-1}) = 0$  pour  $q = 1$ . Ceci peut s'obtenir simplement en forçant dans  $Q_2$  un terme  $\Delta = 1 - q^{-1}$  au numérateur, soit :

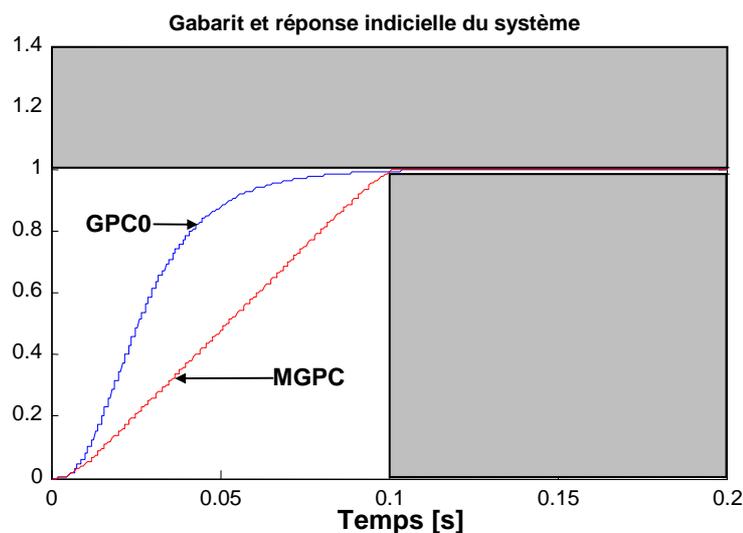
$$Q_2(q^{-1}) = \Delta(q^{-1}) Q_2'(q^{-1}) \quad (4.19)$$

On arrive à la minimisation suivante

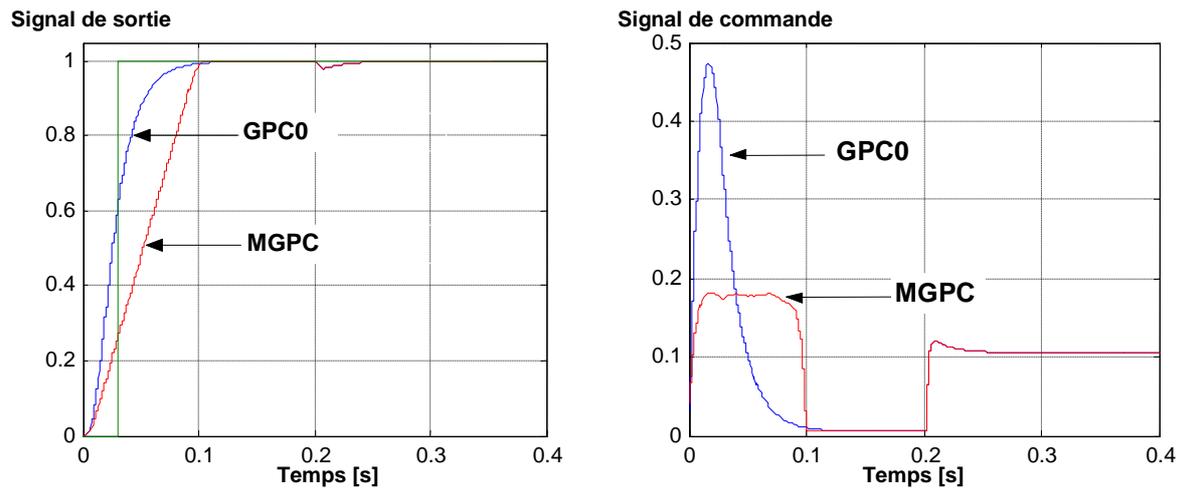
$$\min_{\substack{Q_2' \in \mathcal{RH}_\infty \\ \Phi_{env}(Q_2) < 0}} \left\| \left( \frac{T'A}{A_c} - \frac{A\Delta}{A_c} Q_2' \right) W \right\|_\infty \quad (4.20)$$

La contrainte temporelle est représenté par  $\Phi_{env}(Q_2)$  ; l'optimisation a été effectuée via une programmation linéaire, avec un paramètre  $Q_2$  polynomial d'ordre 90, et 200 points de discrétisation pour la réponse fréquentielle.

La Figure (4.15) illustre la réponse indicielle du système et le gabarit à respecter pour les correcteurs initial et modifié. La réponse temporelle à un échelon en entrée et à une perturbation et le signal de commande sont représentés à la Figure (4.16), où les résultats obtenus avec le correcteur initial sont superposés à titre de comparaison. On constate d'une part que la réponse à la perturbation est la même que celle obtenue avec le correcteur initial, ce qui nous montre que la dynamique de la boucle n'a pas été modifiée. D'autre part, les transitoires de la commande sont limités et la dynamique du comportement entrée/sortie respecte le gabarit imposé.

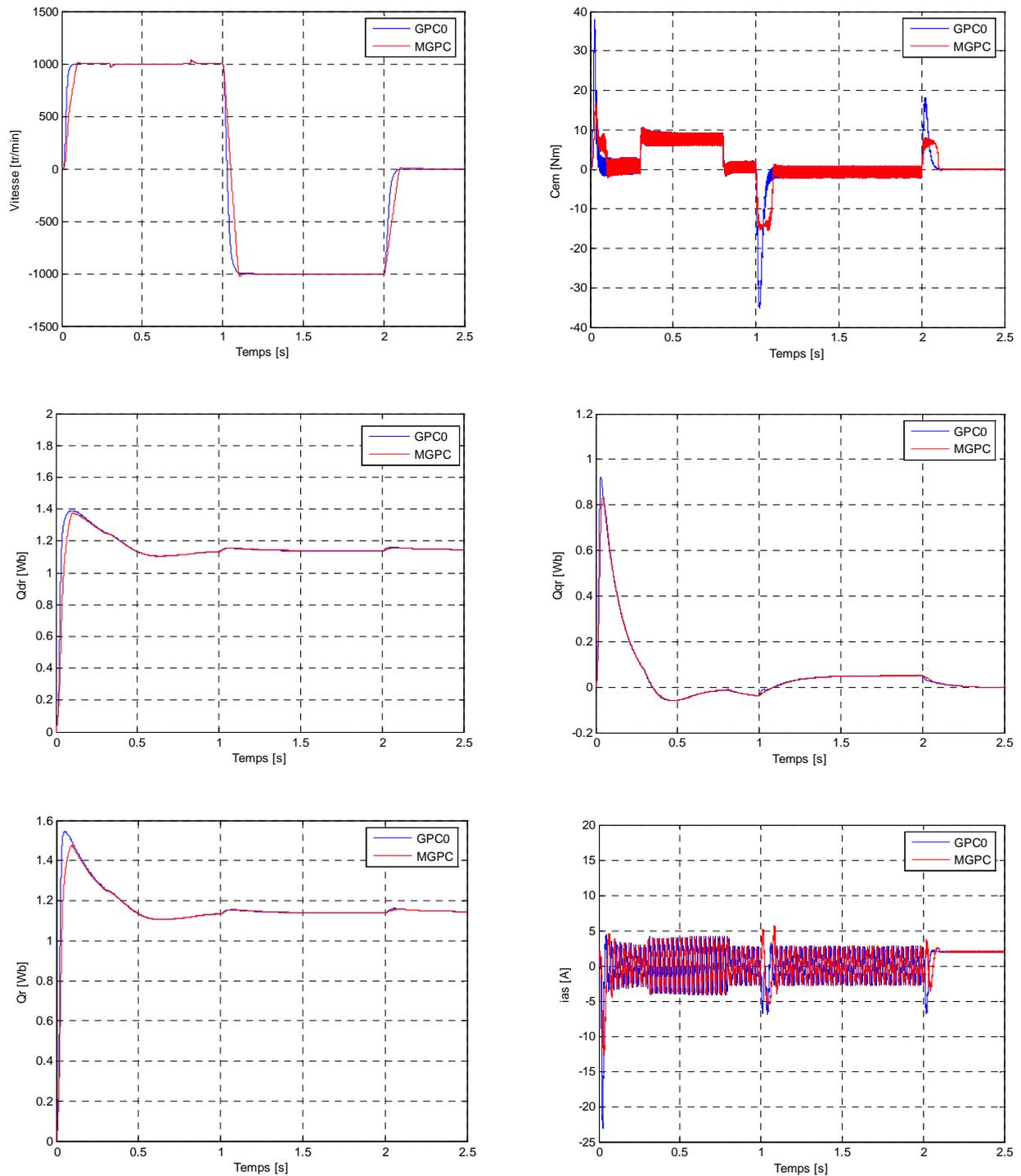


**Figure (4.15)** Gabarit avec réponse indicielle du système pour les correcteurs initial et modifié



**Figure (4.16)** réponse temporelle et signal de commande du système pour les correcteurs initial et modifié

Finalement on teste cette technique sur le model complet de la machine asynchrone triphasée en incluant l'onduleur. Les différentes grandeurs de la machine sont illustrées sur la Figure (4.17), on reproduit les résultats obtenus avec le correcteur initial à titre de comparaison.



**Figure (4.17)** Résultats de simulation d'une MAS commandée par la GPC/cascade modifié à l'aide du paramètre de Youla  $Q_2$  comparés à ceux obtenus avec le régulateur GPC initial : Démarrage à vide puis application d'un couple résistant entre 0.3s et 0.8s et inversion du sens de rotation entre 1s et 2s.

### 4.3.7 Robustification face à des bruits de mesure et aux incertitudes de modèle à haute fréquence

L'objectif dans ce cas consiste à rechercher le paramètre de Youla  $Q_1$ , (on fixe  $Q_2=0$ ), qui permet de robustifier le correcteur initial, de sorte que la loi de commande soit moins sensible aux bruits de mesure et aux incertitudes de modèle à haute fréquence. Cependant, cette robustification doit être réalisée, d'une part, en conservant le comportement entrée/sortie imposé par le correcteur initial (dynamique de poursuite) et, d'autre part, en respectant un gabarit spécifié au préalable pour le rejet de perturbation, afin de ne pas trop ralentir la dynamique de régulation de la boucle fermée.

Robustifier pour diminuer l'effet du bruit de mesure sur la commande se traduit par une robustification maximisant l'incertitude additive directe ; On déduit alors le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\substack{Q_1 \in \mathcal{RH}_\infty \\ \Phi_{env}(Q_1) < 0}} \left\| \left( -\frac{R'A}{A_c} - \frac{A^2\Delta}{A_c} Q_1 \right) W \right\|_\infty \quad (4.21)$$

Le gabarit pour le rejet de perturbation est décrit par  $\Phi_{env}(Q_1)$ , ce dernier est représenté sur la Figure (4.18), (en fixant la valeur maximale égale à 12), et ainsi le rejet de perturbation déduit de l'action du correcteur initial, pour un échelon unité de perturbation. On a choisi  $N_t = 150$  (nombre de points de la réponse temporelle pris en compte par le gabarit) pour la minimisation, soit un horizon de 0.15s. Et afin de pondérer davantage les hautes fréquences ( $>100$ rd/s), on considère ici  $W = \frac{1-0.3q^{-1}}{0.7}$ .

Avec ce choix de paramètres (pondération et gabarit), la recherche du paramètre  $Q_1$  est réalisée via une structure de programmation linéaire, relation (2.31), en imposant un polynôme d'ordre 40, et 60 points de discrétisation pour la réponse fréquentielle.

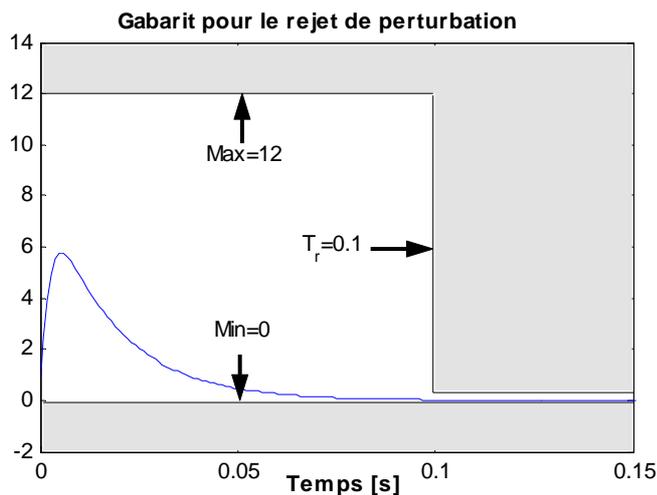


Figure (4.18) Gabarit pour le rejet de perturbation

La Figure (4.19) montre la réponse temporelle à un échelon de vitesse, puis à un échelon de perturbation. On constate que la réponse à l'échelon de vitesse reste identique à celle obtenue avec ce correcteur initial (ce qui correspond à l'objectif fixé), et que le gabarit imposé pour le rejet de perturbation est pratiquement respecté.

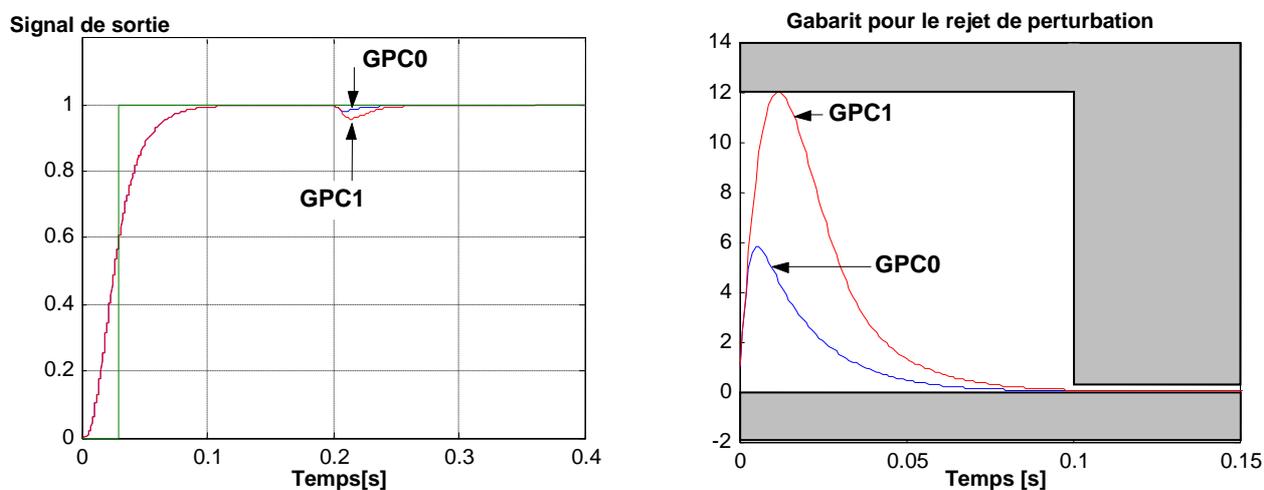


Figure (4.19) Gabarit pour le rejet de perturbation et réponse indiciel

Par ailleurs, la Figure (4.20), illustre la marge de robustesse  $B_r$  du système bouclé par le régulateur initial et par le régulateur robustifié, on vérifie que la robustesse à haute fréquence a été améliorée.

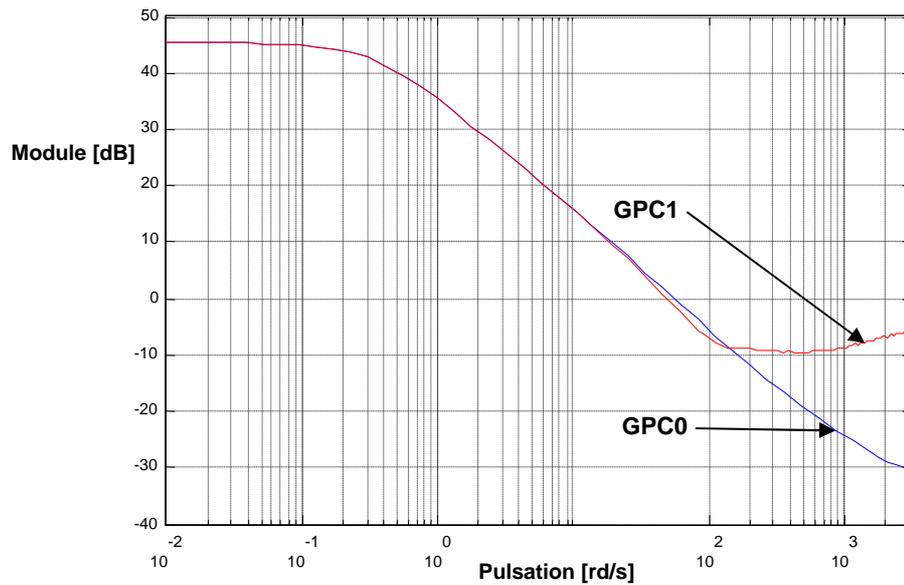
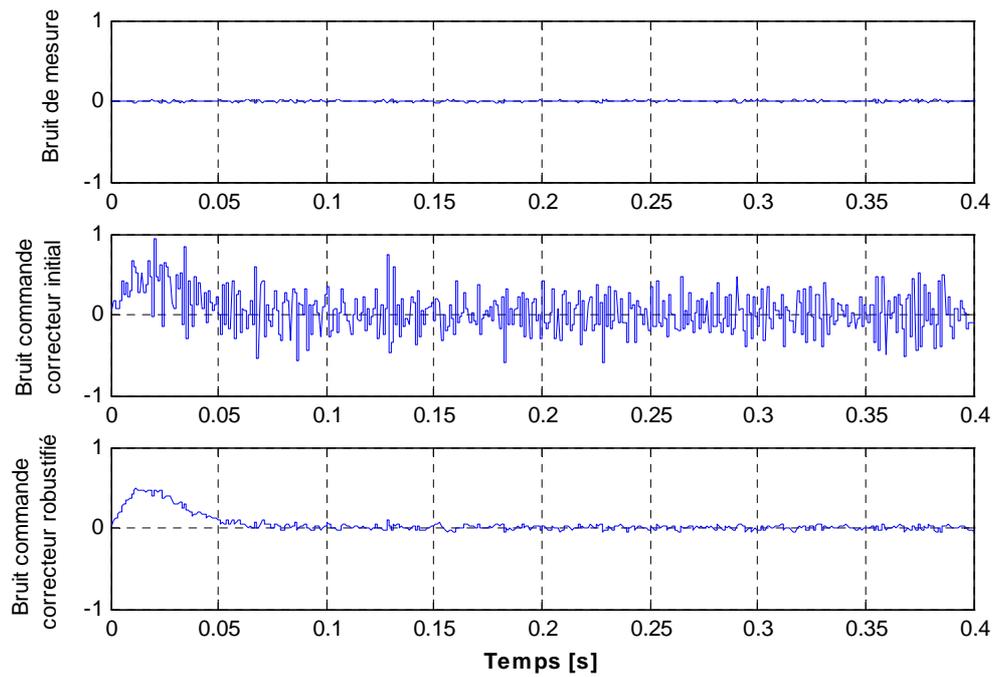


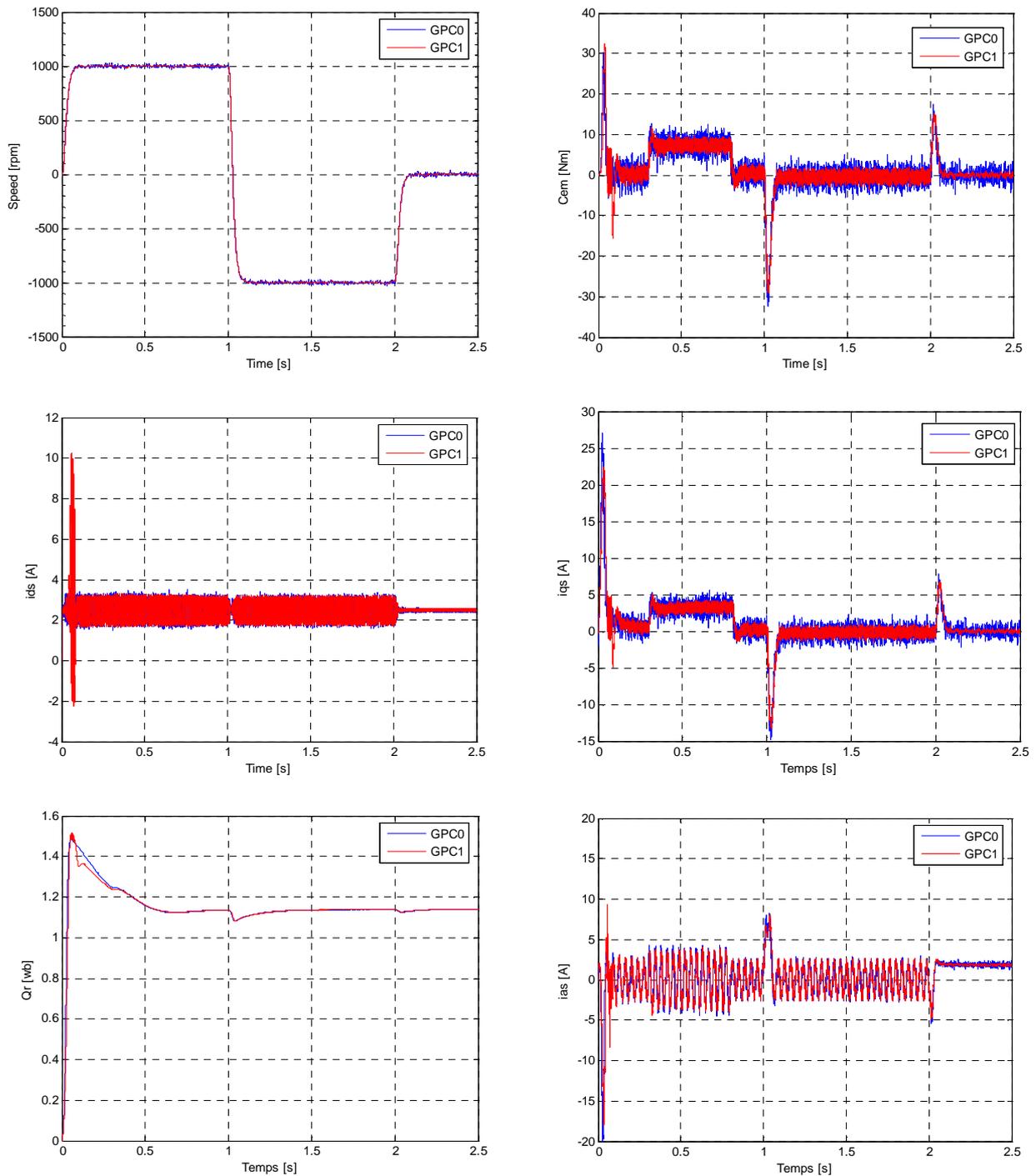
Figure (4.20) Marge de robustesse  $B_r$

On constate d'après la Figure (3.21) que l'effet du bruit de mesure sur la commande a été largement diminué par rapport au correcteur initial, mais cela au détriment de la rapidité du rejet de perturbation.



**Figure (4.21)** Bruit de mesure et effet de mesure sur le signal de commande

La Figure (3.22) illustre les résultats de simulation obtenus après avoir appliqué cette technique de robustification sur le model complet de la machine asynchrone triphasée en incluant l'onduleur. On a introduit volontairement un bruit blanc dans la boucle de vitesse afin de tester leur impact sur les grandeurs de la machine. Et on a reproduit les résultats obtenus avec le correcteur GPC/cascade initial à titre de comparaison.



**Figure (4.22)** Résultats de simulation d'une MAS commandée par la GPC/cascade robustifié à l'aide du paramètre de Youla  $Q_1$  comparés à ceux obtenus avec le régulateur GPC initial : Démarrage à vide puis application d'un couple résistant entre 0.3s et 0.8s et inversion du sens de rotation entre 1s et 2s.

#### 4.3.8. Correcteur robustifié face à des incertitudes additives et polytopiques

Lors de la première étape de robustification, le correcteur (GPC0) est robustifié uniquement face à des incertitudes additives sous une spécification sur la dynamique du rejet de perturbation (GPC1). Ce correcteur est maintenant robustifié face à des incertitudes additives et polytopiques, il est noté (GPC2). Dans cette étape, Le domaine incertain polytopique est construit en considérant la variation du moment d'inertie  $J$  de  $\pm 70\%$  autour de sa valeur nominale. Cette hypothèse induit une variation des paramètres de la fonction de transfert discrétisée du système nominal. Par conséquent, quatre transferts sont définis autour du système nominal correspondent aux quatre sommets pour le domaine polytopique :

$$G_1(q^{-1}) = q^{-1} \frac{0.0381}{1 - 0.9998q^{-1}};$$

$$G_2(q^{-1}) = q^{-1} \frac{0.2665}{1 - 0.9998q^{-1}};$$

$$G_3(q^{-1}) = q^{-1} \frac{0.0381}{1 - 0.9987q^{-1}};$$

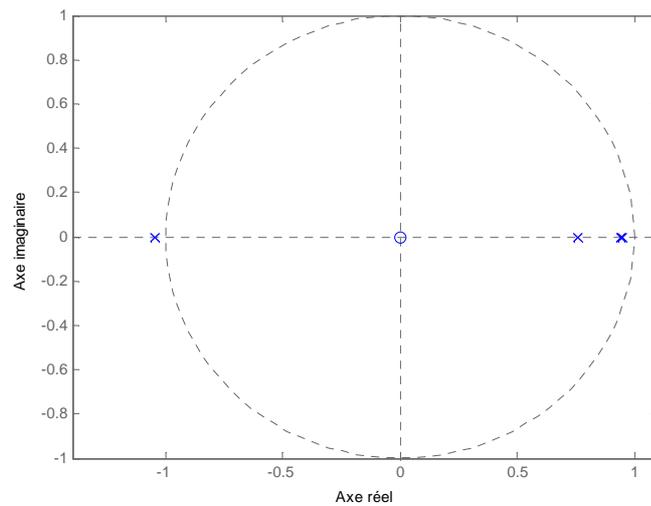
$$G_4(q^{-1}) = q^{-1} \frac{0.2665}{1 - 0.9987q^{-1}}.$$

Ainsi, le domaine polytopique est de la forme

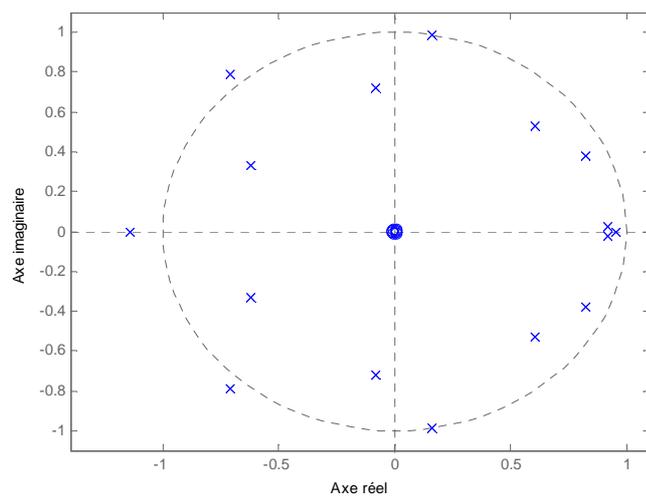
$$[A \ B] \in \Omega = \text{Co}\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], [A_3 \ B_3], [A_4 \ B_4]\} \quad (4.21)$$

L'ordre du paramètre de Youla est fixé à  $n_q = 5$ .

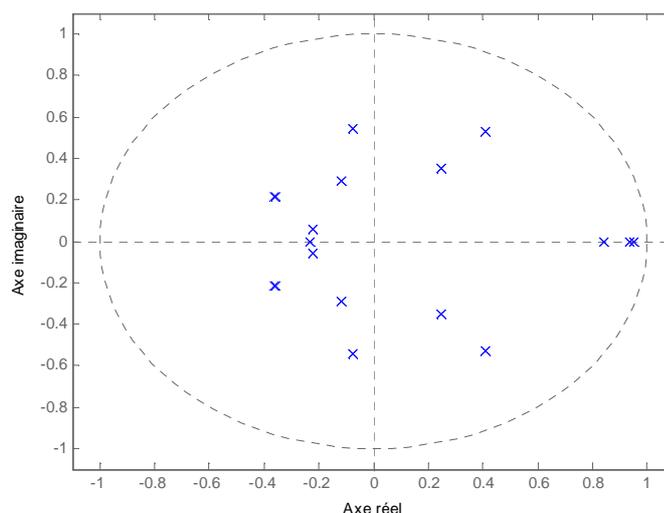
À partir des Figure (4.23), Figure (4.24), on constate que les correcteurs (GPC0), (GPC1) ne stabilisent pas le système sur tout le domaine polytopique considéré. Pour assurer la stabilité sur tout le domaine, le correcteur (GPC2) est synthétisé suivant la méthode proposée au troisième chapitre. Par conséquent, la Figure (4.25) montre que tous les pôles résident à l'intérieur du cercle unité pour les quatre sommets.



**Figure (4.23)** Lieux des pôles du système polytopique bouclé avec le correcteur initial GPC0

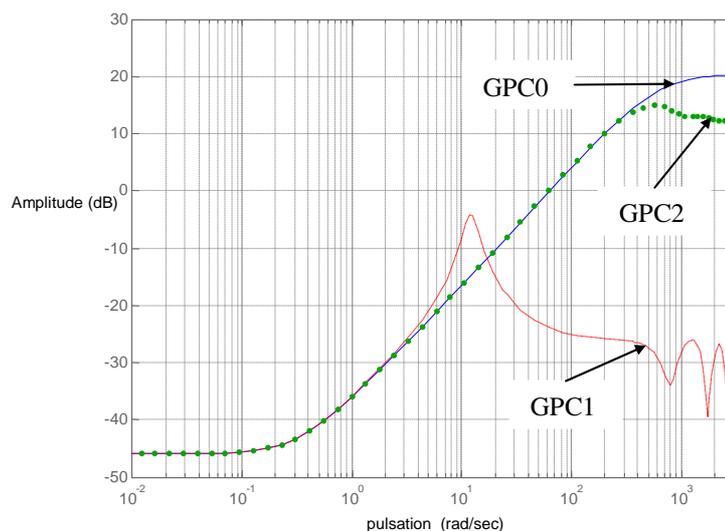


**Figure (4.24)** Lieux des pôles du système polytopique bouclé avec le correcteur GPC1



**Figure (4.25)** Lieux des pôles du système polytopique bouclé avec le correcteur GPC2

Une analyse fréquentielle est possible à partir de la Figure (4.26). Le correcteur (GPC1) possède la meilleure robustesse en stabilité face à des incertitudes additives. Ensuite, en prenant en compte des incertitudes polytopiques (GPC2), la robustesse en stabilité face à des incertitudes additives se dégrade, c'est le prix à payer pour assurer la stabilité sur tout le domaine polytopique. Ainsi, le correcteur (GPC2) offrant un meilleur compromis entre la robustesse en stabilité face à des incertitudes additives et polytopiques.



**Figure (4.26)** Amplitude du diagramme de Bode de la fonction de sensibilité ( $b/u$ ) pour le système nominal bouclé avec les trois correcteurs

## Conclusion

Ce dernier chapitre a proposé une application de la méthodologie développée dans ce mémoire sur une machine asynchrone triphasée pour l'asservissement de vitesse. Tout d'abord, un correcteur prédictif initial a été développé pour le modèle nominal. Ce correcteur a été modifié au moyen du paramètre de Youla  $Q_2$ , minimisant les transitoires de la commande tout en respectant un gabarit pour lequel le système conserve le temps de réponse obtenu avec le correcteur prédictif initial. Ensuite, le correcteur initial a été robustifié en utilisant la procédure basée sur l'optimisation du paramètre de Youla  $Q_1$ , améliorant la robustesse en stabilité face à des incertitudes additives afin de diminuer l'impact du bruit de mesure du capteur de vitesse sur la commande, tout en garantissant le respect d'un gabarit pour le rejet de perturbation et sans modifier le comportement entrée/sortie. Ainsi, des incertitudes polytopiques sont prises en compte considérant des variations sur l'inertie du système. Par conséquent, le correcteur initial et le correcteur robustifié face à des incertitudes non-structurées sont instables en une partie du polytope considéré. Finalement, en appliquant la procédure décrite dans le troisième chapitre, la stabilité sur tout le domaine polytopique a été garantie.

## Conclusion générale

Cette thèse a présenté un ensemble de techniques de robustification hors-ligne de lois de commande prédictives de type GPC, pouvant s'appliquer a priori à tout type de commande sous une forme polynomiale *RST*. La démarche développée se veut avant tout progressive, nécessitant la synthèse préalable d'une loi de commande prédictive stabilisante. La procédure de robustification a été mise en œuvre en se basant sur ce correcteur initial.

Ainsi, le point de départ de la robustification est lié à la considération d'incertitudes non-structurées. Le problème de robustification est alors transformé en un problème d'optimisation convexe d'un paramètre de Youla. Pour cela, les caractéristiques de robustesse désirées sont exprimées à partir de spécifications fréquentielles et temporelles de la boucle fermée, comme par exemple la minimisation de la norme  $H_\infty$  d'un transfert en boucle fermée ou le respect d'un gabarit temporel par un signal est obtenu. Ces spécifications permettent de prendre en compte des critères de robustesse face à des incertitudes non structurées et des critères de performance nominale. De cette façon, le paramètre de Youla obtenu réalise un compromis entre la robustesse et la performance.

Les aspects précédents s'intéressent avant tout à la problématique de dynamique négligée, ou encore de paramètres globalement incertains, mais ne répondent pas directement à la robustification vis-à-vis de variations paramétriques intervenant dans un intervalle donné, autrement dit la robustification vis-à-vis d'incertitudes structurées. C'est pourquoi l'étape suivante consiste à considérer à la fois la stabilité face à des incertitudes additives non-structurées et la stabilité face à des incertitudes structurées, appartenant à un ensemble polytopique donné. Que l'on envisage la configuration pour laquelle le correcteur prédictif initial stabilise le système sur tout le domaine polytopique ou sur une partie du domaine, le paramètre de Youla obtenu réalise un compromis entre la robustesse face à des incertitudes non-structurées et structurées.

Le résultat final dans ce cas consiste à prendre en compte des contraintes quadratiques supplémentaires issue par imposer la condition de stabilité de Lipatov-Sokolov sur tous les sommets du polytope. Pour cela, des techniques de relaxation de contraintes quadratiques en LMIs ont été utilisées. Cela a impliqué une augmentation du nombre de variables scalaires de décision. Le problème final est donc une optimisation sous ces contraintes LMIs avec toujours la

contrainte linéaire correspondant au problème de robustesse en stabilité face à des incertitudes non-structurées.

Un exemple académique proposé a montré les performances potentielles de la stratégie développée vis-à-vis des différents types d'incertitudes. On constate notamment que la robustesse en stabilité face à des incertitudes non-structurées additives peut être améliorée de façon considérable, cela parfois au prix d'un espace de stabilité réduit autour de la configuration nominale.

Ensuite, pour mettre en valeur cette procédure de robustification, on l'a appliqué pour la conduite d'une machine asynchrone triphasée. La machine est associée à un onduleur de tension à deux niveaux commandé par la technique de modulation de largeur d'impulsion MLI. D'abord, le modèle mathématique de la machine asynchrone est présenté. L'importance de la transformation de Park utilisée dans la modélisation de la machine permet d'obtenir un système linéaire d'ordre réduit. L'asservissement de vitesse de la MAS nécessite un découplage entre le flux et le couple électromagnétique, qui est réalisé en utilisant la commande indirecte par orientation du flux rotorique. Grâce à cette commande, la machine asynchrone devient commandable comme une machine à courant continu à excitation séparée.

Les boucles de commande (vitesse et courants) viennent ensuite se caractériser, on a adopté tout d'abord des régulateurs initiales de type GPC implémentés numériquement sous la forme polynomiale RST, condition fondamentale pour la structure prédictive cascade envisagée par la suite. Ainsi, le correcteur prédictif de vitesse est retouché afin d'atteindre trois objectifs : Le premier objectif est de modifier le comportement de poursuite de la loi de commande à l'aide du paramètre de Youla  $Q_2$  qui permet de minimiser les transitoires du signal de commande (courant  $i_{qs}$ ) tout en respectant un gabarit pour lequel le système conserve le temps de réponse obtenu avec le correcteur prédictif initial. Le deuxième objectif est de trouver un paramètre de Youla  $Q_1$  qui permet de diminuer l'impact du bruit de mesure sur la commande, et les incertitudes du modèle à haute fréquence, tout en garantissant le respect d'un gabarit pour le rejet de perturbation et sans modifier le comportement entrée/sortie. Finalement, le dernier objectif est de garantir la stabilité sur un domaine polytopique imposé par une plage de variation de l'inertie du système. Les résultats obtenus traduisent l'efficacité de la méthode de robustification.

Quelques perspectives à ce travail peuvent être envisagées. Une première démarche consiste dans l'élargissement de la méthodologie à d'autres types de correcteurs structurés sous forme *RST* et à l'utilisation d'autres contraintes convexes en boucle fermée. On pourrait considérer d'autres spécifications temporelles et fréquentielles. Une autre perspective à étudier consiste à examiner cette méthodologie dans le cas multivariable.

Un autre problème peut survenir au niveau de la garantie de la stabilité sur un ensemble incertain polytopique dans le cas où le polytope est défini par un nombre élevé de sommets. Dans ce cas, le nombre de LMIs à résoudre devient significatif. Ainsi, une solution possible est d'approcher ce domaine polytopique par un ellipsoïde pour lequel il suffit d'écrire une seule condition de stabilité. Ce problème est difficile à mettre en oeuvre et demande une analyse approfondie.

L'aspect présenté dans ce travail a été mis en évidence dans le cadre de la GPC sans contrainte. Une perspective importante est d'envisager l'extension de la démarche au cas de la commande prédictive GPC sous contraintes.

Enfin, et pour poursuivre dans la voie applicative considérée pendant ce travail, il apparaît nécessaire de sortir du cadre de la simulation, au sein duquel on a pu montrer l'intérêt de la méthode, pour tester de façon expérimentale les bénéfices réellement attendus.

**Annexe A****Paramètres de la machine asynchrone triphasée**

La machine asynchrone triphasée utilisée pour notre étude, est une machine à cage d'écureuil caractérisée par les paramètres suivants:

Puissance nominale.....	$P_n = 1,1Kw$
Tension nominale.....	$V_n = 220/380V$
Vitesse nominale.....	$N_n = 1000tr/min$
Couple nominal.....	$C_n = 7Nm$
Fréquence nominale.....	$f_n = 50Hz$
Nombre de paires de pôles.....	$p = 3$
Résistance statorique.....	$R_s = 8.1\Omega$
Résistance rotorique.....	$R_r = 3.2\Omega$
Inductance cyclique propre du stator.....	$L_s = 0.48H$
Inductance cyclique propre du rotor.....	$L_r = 0.48H$
Inductance cyclique mutuelle stator-rotor.....	$L_m = 0.46H$
Moment d'inertie.....	$J = 0.006Kg.m^2$
Coefficient de frottement visqueux.....	$f_r = 0.005Nm.s.rd^{-1}$

## **Annexe B**

### **B.1 Modélisation de la machine asynchrone triphasée**

#### **B.1.1 Présentation de la machine**

Une machine asynchrone comporte une partie fixe, dite stator, et une partie mobile, dite rotor. Dans des encoches régulièrement réparties sur la face interne du stator sont logés trois enroulements identiques, à  $p$  paires de pôles ; leurs axes sont distants entre eux d'un angle électrique égale à  $2\pi/3$ . Les phases du stator sont alimentées par un réseau triphasé de tension sinusoïdale à fréquence et amplitude constantes ou par un onduleur de tension ou de courant à fréquence et à amplitudes réglables. La structure électrique du rotor peut-être de deux types :

Soit par un système d'enroulements triphasés (rotor bobiné), raccordés en étoile à trois bagues sur les quelles frottent trois balais fixes accessibles par la plaque à bornes et mis en court-circuit pendant les régimes permanents,

Soit par une cage conductrice intégrée aux tôles ferromagnétiques, le circuit magnétique est composé de barres généralement en cuivre ou en aluminium. Ces barres sont reliées entre elles à chaque extrémité par un anneau de court-circuit. Cette cage est traversée par l'arbre mécanique qui peut sortir ou non de chaque côté.

La machine électrique étant un système très complexe pour tenir compte dans sa modélisation complète de tous les phénomènes physiques qu'elle contient, il est essentiel de poser quelques hypothèses simplificatrices.

Tout d'abord, la saturation du circuit magnétique n'est pas considérée, ni son hystérésis, ce qui entraîne la constance des inductances propres. On suppose que la construction mécanique est parfaitement équilibrée, l'entrefer est lisse, et la répartition de l'induction dans l'entrefer est sinusoïdale, et la dispersion du champ magnétique aux deux bouts de la machine est négligeable.

Ces hypothèses permettent de décrire le comportement dynamique de la machine, ainsi, le modèle obtenu permet d'élaborer les stratégies de commande de la machine. C'est également à partir de ce modèle que la simulation numérique de la machine est mise en œuvre, afin de tester les différentes méthodes de commande envisagées.

### B.1.2 Modélisation dans le repère triphasé

Soit une machine asynchrone triphasée au stator et au rotor représentée schématiquement par la Figure (B.1) et dont les phases sont repérées respectivement par  $as$ ,  $bs$ ,  $cs$  et  $ar$ ,  $br$ ,  $cr$ .

L'angle électrique  $\theta$  variable en fonction du temps définit la position relative instantanée entre les axes magnétiques des phases  $as$  et  $ar$  choisis comme axes de référence.

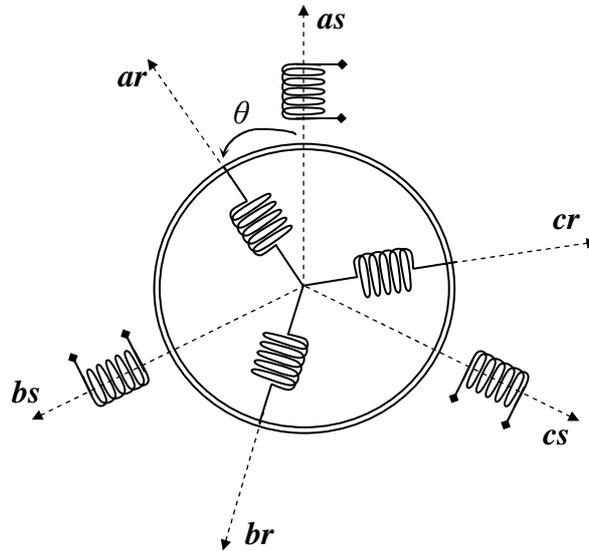


Figure (B.1) Représentation schématique d'une machine asynchrone triphasée

#### B.1.2.1 Equations électriques

Par application du loi de Faraday à chaque enroulement de la machine représenté par la Figure (B. 1) On peut écrire

$$[V_s] = [R_s][I_s] + \frac{d}{dt} [\Phi_s] \quad (\text{B.1})$$

$$[V_r] = [R_r][I_r] + \frac{d}{dt} [\Phi_r] \quad (\text{B.2})$$

Avec :

$$[V_s] = [v_{as}, v_{bs}, v_{cs}]^T, [V_r] = [v_{ar}, v_{br}, v_{cr}]^T$$

$$[I_s] = [i_{as}, i_{bs}, i_{cs}]^T, [I_r] = [i_{ar}, i_{br}, i_{cr}]^T$$

$$[\Phi_s] = [\varphi_{as}, \varphi_{bs}, \varphi_{cs}]^T, [\Phi_r] = [\varphi_{ar}, \varphi_{br}, \varphi_{cr}]^T$$

$$[R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}, [R_r] = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

### B.1.2.2 Equations des flux

Les hypothèses que nous avons présentées conduisent à des relations linéaires entre les flux et les courants. Elles sont exprimées sous forme matricielles comme suit :

$$[\Phi_s] = [L_{ss}][I_s] + [M_{sr}][I_r] \quad (\text{B.3})$$

$$[\Phi_r] = [L_{rr}][I_r] + [M_{rs}][I_s] \quad (\text{B.4})$$

Où  $[L_{ss}]$ ,  $[L_{rr}]$ ,  $[M_{sr}]$  et  $[M_{rs}]$  sont les matrices d'inductances telles que :

$$[L_{ss}] = \begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix}, \quad [L_{rr}] = \begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix}$$

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^T = M_o \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Avec :

$l_s$  : Inductance propre d'une phase statorique ;

$l_r$  : Inductance propre d'une phase rotorique ;

$m_s$  : Inductance mutuelle entre phases statoriques ;

$m_r$  : Inductance mutuelle entre phases rotoriques ;

$M_o$  : Maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor ; il est obtenu lorsque les axes sont alignés.

En remplaçant (B.3) et (B.4) dans (B.1) et (B.2), on obtient le système suivant :

$$[V_s] = [R_s][I_s] + [L_{ss}] \frac{d}{dt} [I_s] + \frac{d}{dt} \{ [M_{sr}][I_r] \} \quad (\text{B.5})$$

$$[V_r] = [R_r][I_r] + [L_{rr}] \frac{d}{dt} [I_r] + \frac{d}{dt} \{ [M_{rs}][I_s] \} \quad (\text{B.6})$$

### B.1.2.3 Equation du couple électromagnétique

Le couple électromagnétique est donné par l'expression générale suivante :

$$C_{em} = p[I]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [L][I] \right\} \quad (\text{B.7})$$

Avec :

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{ss}] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_{rr}] \end{bmatrix} \text{ et } [I] = \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}$$

Les sous matrices  $[L_{ss}]$  et  $[L_{rr}]$  contiennent des termes constants d'où la possibilité de simplification, on a donc :

$$C_{em} = p[I_s]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [M_{sr}][I_r] \right\} \quad (\text{B.8})$$

#### B.1.2.4 Equation du mouvement

Elle est solution de l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{J}{p} \frac{dw_n}{dt} = C_{em} - C_r - \frac{f}{p} w_n \quad (\text{B.9})$$

Puisque  $w_n = p\Omega_m$  ; on a

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = C_{em} - C_r - f\Omega_m \quad (\text{B.10})$$

Avec :

$p$  : Nombre de paire de pôles ;

$f$  : Coefficient de frottement visqueux ;

$J$  : Moment d'inertie total des masses tournantes ;

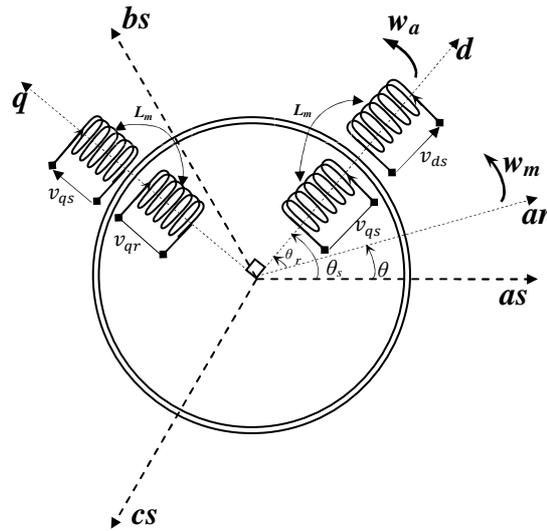
$\omega_m$  : Vitesse angulaire électrique du rotor ;

$C_r$  : Couple résistant de la charge montée sur l'arbre du rotor.

La modélisation triphasée présente un inconvénient majeur pour notre application. La matrice  $[M_{sr}]$  dépend de l'angle de rotation mécanique, et nécessite donc d'être recalculée à chaque pas d'échantillonnage.

#### B.1.3 Modélisation dans le repère de Park :

La transformation de Park est une opération mathématique qui permet de passer d'un système triphasé d'axes magnétiques décalés d'un angle électrique de  $2\pi/3$  radian, en un système à trois axes orthogonaux. En fait ce n'est rien d'autre qu'un changement de base pour les axes magnétiques du système. La Figure (B.2) représente la transformation des enroulements réels de la machine  $abc$  en enroulements orthogonaux  $dq$



**Figure (B.2)** Représentation des enroulements fictifs d'axes  $d, q$

Les notations portées sur la Figure (B.2) désignent respectivement :

$\theta$  : Angle électrique entre  $as$  et  $ar$  ;

$\theta_s$  : Angle électrique entre  $as$  et  $d$  ;

$\theta_r$  : Angle électrique entre  $ar$  et  $d$  ;

$\omega_a$  : Vitesse angulaire électrique du système d'axes  $d, q$ ,  $\left(\omega_a = \frac{d\theta_s}{dt}\right)$  ;

$\omega_m$  : Vitesse angulaire électrique du rotor,  $\left(\omega_m = \frac{d\theta}{dt}\right)$

Cette transformation est définie par sa matrice de passage de **PARK**  $[P(\theta)]$  tel que :

$$[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La matrice de passage  $[P(\theta)]$  écrite sous cette forme est orthogonale, ce qui conduit à la conservation de la puissance instantanée. L'orthogonalité nous permet d'écrire :

$$[P(\theta)]^{-1} = [P(\theta)]^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

L'angle  $\theta$  prend la valeur  $\theta_s$  pour les grandeurs statoriques et la valeur  $(\theta_r = \theta_s - \theta)$  pour les grandeurs rotoriques.

$$\text{On a ainsi : } [X_{dq}] = [P(\theta)][X_{abc}] \quad (\text{B.11})$$

$X$  : pouvant représenter la tension, le courant et le flux.

La transformation inverse s'écrit :

$$[X_{abc}] = [P(\theta)]^{-1}[X_{dq}] \quad (\text{B.12})$$

En utilisant la matrice de passage  $[P(\theta)]$ , on obtient dans le plan biphasé  $d, q$  les nouvelles équations suivantes :

### B.1.3.1 Equations électriques

$$\begin{cases} v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\varphi_s}{dt} - w_a \varphi_{qs} \\ v_{qs} = R_r i_{qs} + \frac{d\varphi_{qs}}{dt} + w_a \varphi_{ds} \\ v_{dr} = 0 = R_r i_{dr} + \frac{d\varphi_{dr}}{dt} - (w_a - w_m) \varphi_{qr} \\ v_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \frac{d\varphi_{qr}}{dt} - (w_a - w_m) \varphi_{dr} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

### B.1.3.2 Equations des flux

$$\begin{cases} \varphi_{ds} = L_s i_{ds} + L_m i_{dr} \\ \varphi_{qs} = L_s i_{qs} + L_m i_{qr} \\ \varphi_{dr} = L_r i_{dr} + L_m i_{ds} \\ \varphi_{qr} = L_r i_{qr} + L_m i_{qs} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Avec :

$L_s = l_s - m_s$  : Inductance cyclique propre du stator ;

$L_r = l_r - m_r$  : Inductance cyclique propre du rotor ;

$L_m = \frac{3}{2} M_0$  : Inductance cyclique mutuelle stator - rotor.

### B.1.3.3 Equation du couple électromagnétique

$$C_{em} = p \frac{L_m}{L_r} (\varphi_{dr} i_{qs} - \varphi_{qr} i_{ds}) \quad (\text{B.15})$$

### B.1.3.4 Equation du mouvement

$$\frac{dw_m}{dt} = \frac{p^2}{J} \frac{L_m}{L_r} (\varphi_{dr} i_{qs} - \varphi_{qr} i_{ds}) - \frac{p}{J} C_r - \frac{f_r}{J} w_m \quad (\text{B.16})$$

### B.1.4 Choix du référentiel

Parmi tous les référentiels possibles, trois sont particulièrement intéressants : Le premier est celui qui fixe  $d$  et  $q$  par rapport au stator. Dans ce cas,  $\theta_s$  est constant, c'est à dire  $\omega_a = 0$ . Le second repère intéressant est celui où  $d$  et  $q$  sont fixes par rapport au rotor. Dans ce cas  $\theta_r$  est constant, c'est à dire  $\omega_a = \omega_m$ .

Enfin, un troisième repère intéressant est celui où  $d$  et  $q$  sont fixes par rapport au champ tournant. Dans ce cas,  $\omega_a = \omega_s$ . Ce repère est intéressant lorsque la fréquence d'alimentation est constante car les grandeurs transformées selon les axes  $d$  et  $q$  deviennent des constantes, c'est à dire des grandeurs continues qu'il est facile de réguler. Dans ce dernier référentiel, le système (B.13) devient :

$$\begin{cases} \frac{di_{ds}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s} \left[ - \left( R_s + \frac{L_m^2}{L_r T_r} \right) i_{ds} + \frac{L_m}{L_r T_r} \varphi_{dr} + p\Omega \frac{L_m}{L_r} \varphi_{qr} + \sigma \omega_s L_s i_{qs} + v_{ds} \right] \\ \frac{di_{qs}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s} \left[ - \left( R_s + \frac{L_m^2}{L_r T_r} \right) i_{qs} - p\Omega \frac{L_m}{L_r} \varphi_{dr} + \frac{L_m}{L_r T_r} \varphi_{qr} - \sigma \omega_s L_s i_{ds} + v_{qs} \right] \\ \frac{d\varphi_{dr}}{dt} = \frac{L_m}{T_r} i_{ds} - \frac{1}{T_r} \varphi_{dr} + (\omega_s - p\Omega) \varphi_{qr} \\ \frac{d\varphi_{qr}}{dt} = \frac{L_m}{T_r} i_{qs} - \frac{1}{T_r} \varphi_{qr} - (\omega_s - p\Omega) \varphi_{dr} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J} \frac{L_m}{L_r} (\varphi_{dr} i_{qs} - \varphi_{qr} i_{ds}) - \frac{c_r}{J} - \frac{f_r}{J} \Omega \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Avec 
$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$$

## B.2 Modélisation de l'onduleur de tension

L'onduleur triphasé de tension utilisé se décompose en trois bras. Chaque bras est composé de deux interrupteurs en série. Le point milieu de chaque bras est relié à une phase de la charge. Les trois bras de l'onduleur sont connectés à une alimentation continue, de force électromotrice  $E$ . La Figure (B.3) fournit une représentation schématique de cet onduleur.

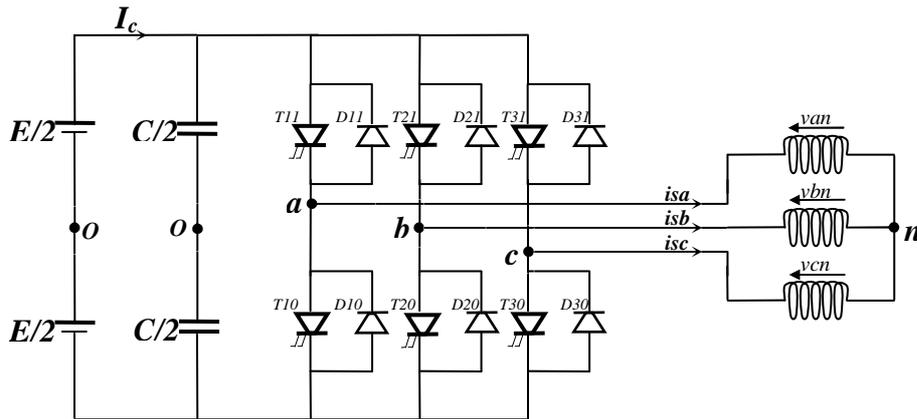


Figure (B.3) Représentation de l'onduleur triphasé de tension

### B.2.1 Fonction de connexion

On définit la fonction de connexion de chaque interrupteur  $TD_{ks}$  (Thyristor à GTO – Diode) comme étant une fonction qui décrit l'état ouvert ou fermé de celui-ci tel que:

$$F_{ks} = \begin{cases} 1 & \text{si } TD_{ks} \text{ est fermé} \\ 0 & \text{si } TD_{ks} \text{ est ouvert} \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Avec  $k$  est le numéro du bras ;

$s$  est le numéro de l'interrupteur.

### B.2.2 L'alimentation en tension constante

L'alimentation en tension de l'onduleur sera considérée comme parfaite. On entend par parfaite, le fait quel soit capable de délivrer une puissance infini. En pratique, cela se traduit le fait que, quelque soit le courant  $I_c$  délivré par cette alimentation, La tension  $E$  ses bornes reste toujours constante.

Afin de faciliter la modélisation de l'onduleur, on considérait que cette alimentation est constituée par deux générateurs de force électromotrice égale à  $E/2$ . Ces deux générateurs étant connectés entre eux en un point fictif noté  $O$  ; Le rôle de la capacité  $C$  est de fournir l'énergie réactive à la machine.

### B.2.3 Modélisation aux valeurs instantanées

La commande des interrupteurs d'un bras de l'onduleur doit être complémentaire tel que :

$$\begin{cases} F_{11} = 1 - F_{10} \\ F_{21} = 1 - F_{20} \\ F_{31} = 1 - F_{30} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Les différentes tensions composées de cet onduleur s'expriment au moyen des fonctions des connexions comme suit :

$$\begin{bmatrix} v_{ab} \\ v_{bc} \\ v_{ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} E \quad (\text{B.20})$$

Les tensions simples sont liées aux tensions composées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_{an} = \frac{1}{3}(v_{ab} - v_{ca}) \\ v_{bn} = \frac{1}{3}(v_{bc} - v_{ab}) \\ v_{cn} = \frac{1}{3}(v_{ca} - v_{bc}) \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Par conséquent, les tensions simples sont exprimées au moyen des fonctions de connexion comme suit :

$$\begin{bmatrix} v_{an} \\ v_{bn} \\ v_{cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} \frac{E}{3} \quad (\text{B.22})$$

#### B.2.4 Méthodes de commande de l'onduleur de tension

Il nous importe ici de voir de quelle manière les signaux de commandes de l'onduleur  $F_{11}$ ,  $F_{12}$  et  $F_{13}$  sont élaborés. Pour cela regardons quelle est la fonction de l'ensemble alimentation – onduleur – commande de l'onduleur. Dans le cas qui est le notre, il s'agira d'imposer des courants désirés dans les enroulements de la machine afin d'en assurer le pilotage vectoriel comme nous le verrons par la suite. Pour mener à bien à cette tâche deux stratégies sont notées ; premièrement, les régulateurs de courant génèrent directement les signaux de commande de l'onduleur, c'est la stratégie d'*hystérésis*. La deuxième stratégie c'est que les régulateurs de courants fournissent des références de tensions à appliquer par l'onduleur, c'est la stratégie de commande par MLI (*Modulation de Largeur d'Impulsion*).

Nous nous intéresserons par la suite à la commande par la stratégie MLI.

#### 1.3.5. Modulation de Largeur d'Impulsion

Elle consiste à convertir une modulante (tension de référence au niveau commande), généralement sinusoïdale, en une tension sous forme de créneaux successifs, générée à la sortie de l'onduleur (niveau puissance). Au niveau électronique, son principe repose sur la comparaison de la modulante avec la porteuse triangulaire (ou en dent de scie) et la modulante procède d'un compromis entre une bonne neutralisation des harmoniques et un bon rendement de l'onduleur.

Les technique de modulation sont nombreuses, les plus utilisées sont : la naturelle, la régulière, l'optimisée (élimination des harmonique non désirées), et la vectorielle.

L'objectif de la MLI, c'est la minimisation ou la réduction des oscillations sur la vitesse, le couple et les courants. Cela permettra de réduire la pollution du réseau électrique en harmonique, avec minimisation des pertes dans le système par conséquent augmenter le rendement.

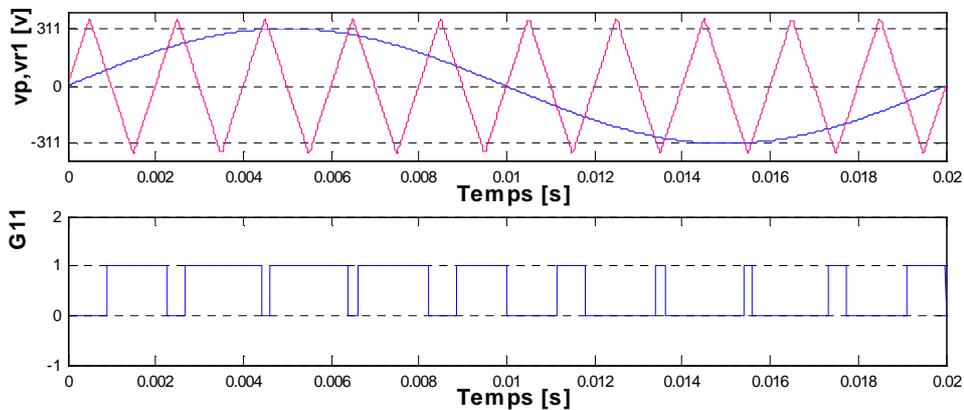
Dans ce travail, on va utiliser la MLI naturelle en se basant sur la comparaison entre deux signaux Figure (B.4) :

- Le premier c'est le signal de référence d'une phase qui représente l'image de la sinusoïde qu'on désire à la sortie de l'onduleur, ce signal est modulable en amplitude et en fréquence.
- Le second qui est appelé signal de la porteuse définit la cadence de commutation des interrupteurs statiques de l'onduleur, c'est un signal de haute fréquence par rapport au signal de référence.

On définit l'indice de modulation  $m$  le rapport de la fréquence  $f_p$  de la porteuse à la fréquence  $f_r$  de la référence. Et le taux de modulation  $r$ , est le rapport de l'amplitude  $V_{rm}$  de la tension de référence à l'amplitude  $V_{pm}$  de la porteuse.

$$\begin{cases} m = \frac{f_p}{f_r} \\ r = \frac{V_{rm}}{V_{pm}} \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

On choisi la fréquence de la porteuse  $f_p$  égale à 25KHZ.

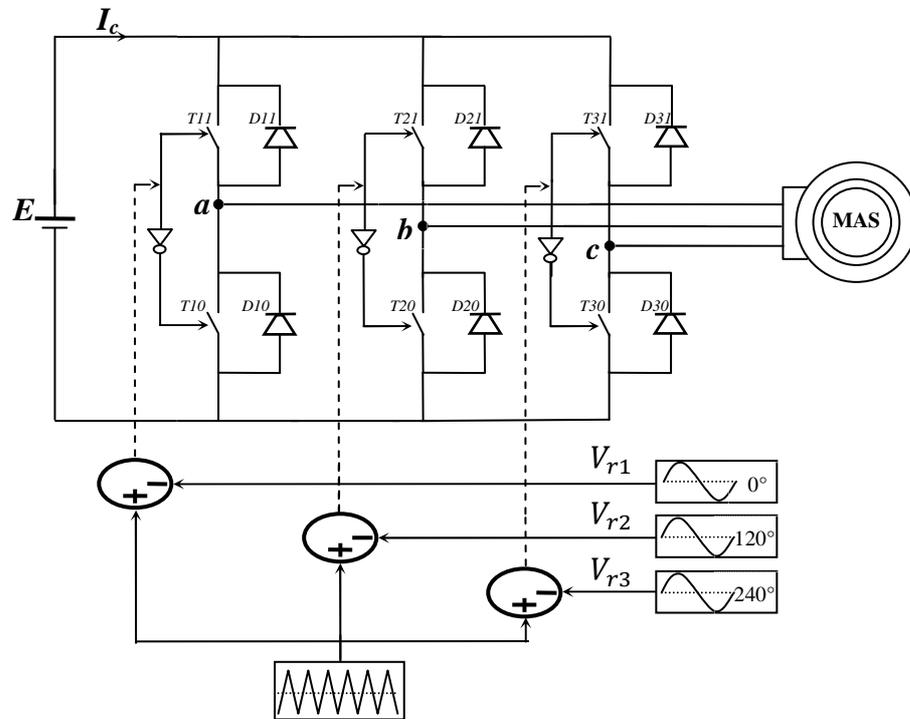


**Figure (B.4)** Séquence de commande d'un interrupteur réalisé par la MLI naturelle.

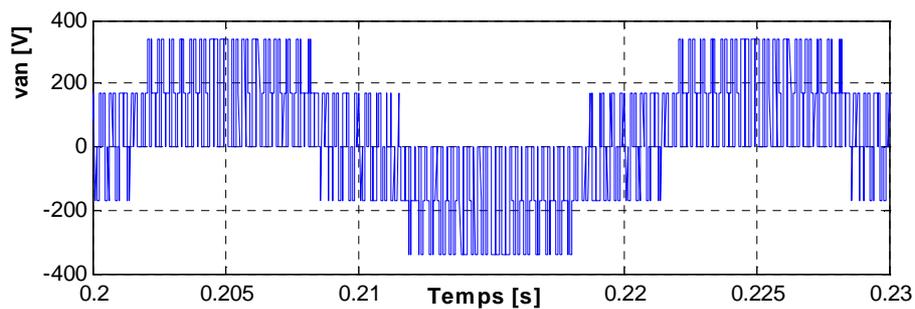
L'algorithme de la commande triangulo-sinusoïdale se résume pour un bras  $k$  comme suit :

$$\begin{cases} v_{rk} \geq v_p \Rightarrow G_{k1} = 1, G_{k0} = 0 \\ v_{rk} < v_p \Rightarrow G_{k1} = 0, G_{k0} = 1 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

La Figure (B.5) illustre le schéma global correspondant à l'association du moteur asynchrone triphasé à un onduleur commandé par la stratégie MLI, tandis que la Figure (B.6) symbolise la tension à la sortie de l'onduleur.



**Figure (B.5)** Schéma d'association d'un moteur asynchrone à un onduleur commandé par la technique MLI



**Figure (B.6)** Représentation de la tension à la sortie de l'onduleur

## Références bibliographiques

- [1] J. Richalet, A. Rault, J.L. Testud et J. Papon, "Model predictive heuristic control: applications to industrial processes", *Automatica*, 14(5), pp. 413- 428, 1978..
- [2] D.W Clarke, C. Mohtadi et P.S. Tuffs, "Generalized predictive control – Part I. and II", *Automatica*, 23(2), pp. 137-160, 1987.
- [3] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang, "Stable generalized predictive control: an algorithm with guaranteed stability", *IEE Proceedings-D*, 139(4), pp. 349-362, 1992.
- [4] K. Hrisagis, O.D. Crisalle, M. Sznaier, "Robust design of unconstrained predictive controllers", *American Control Conference*, Seattle, Washington, 1995.
- [5] T.W. Yoon, D. W. Clarke, "Observer design in receding-horizon predictive control", *International Journal of Control*, 61(1), pp. 171-191, 1995.
- [6] M. Fikar, S. Engell, "Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kučera parametrization", *European Journal of Control*, 3(4), pp.304-316, 1997.
- [7] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz, "Enhancing the robustness of GPC via a simple choice of the Youla parameter", *European Journal of Control*, 4, pp. 64-70, 1998.
- [8] P. Rodríguez, D. Dumur, S. Font, "Youla parametrization applied to a GPC controlled system", *15th IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelone, juillet 2002.
- [9] P. Rodríguez, D. Dumur, "Generalized predictive control robustification under frequency and time-domain constraints", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13(4), pp. 577-587, 2005.
- [10] P. Boucher, D. Dumur, "La commande prédictive", *Collection méthode et pratique de l'ingénieur*, Edition Technip, Paris, 1996.
- [11] P. Boucher, D. Dumur, "Predictive motion control", *Journal of Systems Engineering*, pp. 148-162, 1995.
- [12] P. Boucher, D. Dumur, S. Daumüller, "Predictive Cascade Control of Machine Tools Motor Drives", *Proceedings of EPE91*, vol. 2, pp.120-125, Firenze, Italy, 1991.
- [13] J.M. Martin-Sanchez et J. Rodellar. « adaptative predictive control. From the concepts to plant optimization». *Prentice-Hall International (UK)*, 1996.
- [14] Boucher, P., D. Dumur, and S. Daumüller. "Automatic design of tuning parameters for predictive control of CNC machines". *Annals of the CIRP*, 41/1:pp. 417-420. 1992.
- [15] A. Khattani "La commande prédictive globale multivariable" *Thèse doctorat, université Laval Canada 2000*.

- [16] T.W. Yoon, D. W. Clarke, "Observer design in receding-horizon predictive control", *International Journal of Control*, 61(1), pp. 171-191, 1995.
- [17] J.C. Allwright, G.C. Papavasiliou, "On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses", *Systems & Control Letters*, 18, pp. 159-164, 1992.
- [18] M.V. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities", *Automatica*, vol. 32(10), pp. 1361-1379, 1996.
- [19] R.A.J. de Vries, T.J.J. van den Boom "Constrained robust predictive control", *European Control Conference*, Rome, Italy, 1995.
- [20] T.J.J. van den Boom, R.A.J. de Vries, "Constrained predictive control using a time-varying Youla parameter: a state space solution", *European Control Conference*, Rome, Italy, 1995.
- [21] R.A.J. de Vries, T.J.J. van den Boom "Robust stability constraints for predictive control", *European Control Conference*, 1997.
- [22] J.A. Rossiter, B. Kouvaritakis. "Youla parameter and robust predictive control with constraint handling", *workshop on non-linear predictive control*, Ascona, 1998.
- [23] M. Pouliquen, M. M'Saad, "Compensation adaptative des perturbations" *Journées Doctorales et Nationales d'Automatique*, Valenciennes, juin, 2003.
- [24] J.M. Maciejowski, "Multivariable feedback design", *Addison-Wesley publishing company*, Wokingham, England, 1989.
- [25] K. J. Åström and B.Wittenmark, "Computer Controlled Systems. Theory and Design (3<sup>ème</sup> Edition) ". *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997*.
- [26] J.M. Maciejowski, "Multivariable feedback design", *Addison-Wesley publishing company*, Wokingham, England, 1989.
- [27] M. Morari et E. Zafiriou, "Robust Process Control" *Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1989*.
- [28] S. Hbaïeb, "Analyse de cahier des charges en automatique par optimisation convexe". *Thèse de Doctorat, Université Paris XI, Paris 2002*.
- [29] E.F. Camacho, C. Bordons, "Model predictive control", *Ed. Springer-Verlag, 2<sup>ème</sup> ed.*, London, 2004.
- [30] M.V. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix in-equalities", *Automatica*, vol. 32(10), pp. 1361, 1996.
- [31] A. Lipatov and N. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems", *Automat. Remote Control.*, 39, 1285-1291, 1979.
- [32] S. Manabe, "Sufficient condition for stability and instability by Lipatov and its application to the CDM", *9th Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics*, Sagamira, ISAS, 1999.
- [33] S. Manabe and Y.C. Kim, "Recent development of Coefficient Diagram Method", *ASSC'2000 3rd Asian Control Conference*, Shanghai, 2000.

- [34] S. Manabe, "The coefficient diagram method", *14<sup>th</sup> IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Aug. 24-28, 1998, Seoul, Korea, pp. 199-210.
- [35] K. Ogata, "Discrete-time control systems". *Prentice Hall, Englewood, Cliffs, USA*, 1987.
- [36] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, et John R. Buck. "Discrete-Time Signal Processing". *Prentice Hall*, Upper Saddle River, 1999.
- [37] BOSE, N.K.: "Properties of the  $Q_n$ -matrix in bilinear transformation", *Proc. IEEE*, 71, pp. 1110-1111, 1983
- [38] E. I. JURY "Inners and Stability of Dynamic Systems" (*Second ed.*) *Florida: Krieger*, 1982, pp. 242-252.
- [39] E. I. Jury "Inners and stability of dynamic systems". *2nd ed. Florida. Krieger*, 1982.
- [40] D. Hertz, E. Zeheb, "A general property of the transformation matrices associated with the n-variable bilinear transformation" *Trans. Circuits System. IEEE* 1983.
- [41] S. Burer and A. Letchford, "On Non-Convex Quadratic Programming with Box Constraints". *Optimization Online*, July 2008.
- [42] L. Vandenberghe and S. Boyd, "Semidefinite programming". *SIAM Review* 38, pp. 49-95. 1996.
- [43] K.M. Anstreicher. "Semidefinite programming versus the reformulation linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming" *J. Global Optimization*, pp.43-471, 2009.
- [44] S. Boyd, L. Vandenberghe, "Convex Optimization". *Cambridge University Press*, 2004.
- [45] J.P Caron, J.P Hautier: " Modélisation et commande de la machine asynchrone " *Edition technip, Paris 1995*.
- [46] G. Grellet, G. Clerc "Actionneurs électriques", *Editions Eyrolles*, 1997.
- [47] W.Leonhard, "Control of machines with the help of microelectronics", *Third IFAC Symposium on Control in Power Electronics and Electrical Drives*, Lausanne, pp.35-58, 1994.
- [48] Jean. Pierre et Jean-Paul Hautier, " Modélisation et commande de la machine asynchrone", *collection; 7 électrotechnique; éditions technique, France*, 1995.
- [49] M. Ta-Cao, M. Tarbouchi, H. Le-Huy, "Un variateur de vitesse de haute performance pour l'entraînement à machine asynchrone avec commande vectorielle", *Proceedings of the Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Canada, Vol. 1*, pp.288-291. 1995.
- [50] Brian Hebert, Longya Xu and Yifan Tang, "Fuzzy Logic Enhanced Speed Control of an Indirect Field-Oriented Induction Machine Drive". *IEEE Trans. Power Electronics*. Vol. 12. NO 5 , pp 772-778, 1997.
- [51] L. Baghli "Contribution à la commande de la machine asynchrone, utilisation de la logique floue, des réseaux de neurones et des algorithmes génétiques" *Thèse doctorat université Henri Poincaré*

*Nancy.I* 1999.

- [52] I. Benyó "Cascade generalised predictive control, application in power plant control" *Presses de l'université Ouluensis Finland*, 2006.
- [53] M. Susanu "Commande prédictive hiérarchisée pour le positionnement des axes de machine outil à architecture ouverte " *Thèse doctorat, Supélec Paris*, 2005.
- [54] D.J.N. Limebeer, E.M. Kasenally et J.D. Perkins, "On the design of robust two degree of freedom controllers", *Automatica*, 29(1), pp. 157-168, 1993.
- [55] B. Bergeon, F. Cazaurang et S. Ygorra. "Méthodologie de commande robuste linéaire. Extensions aux systèmes plats et saturés", *APII Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 35, pp. 85-106, 2001.
- [56] B. Clément, "Synthèse multiobjectifs et séquençement de gains : application au pilotage d'un missile". *Thèse de Doctorat, Université Paris XI, Paris* 2001.