

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

12/88

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

THESE

Présentée par :

TAR HOURIA

Ingénieur E.N.P

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE
MASTRE EN GENIE CIVIL

**ETUDE D'UNE MODELISATION DU
SOL, COMPTE TENU DES FORCES
D'INERTIE, DANS LA REPONSE
DYNAMIQUE DES FONDATIONS RIGIDES**

Soutenu en Juin 1988

Devant le Jury d'Examen

Président : B . TILIOUINE - Professeur
Rapporteur : P . BONNEVILLE - Professeur
Examineurs : { D.V. CUONG - Professeur
Y . DJERBIB - Maître de Conférences
Z.DJILLALI BERKANE - Chargé de Cours
Invité : B . AMEUR Chef de Département Sol C T C

R E M E R C I E M E N T S

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur P.BONNEVILLE pour m'avoir fait profiter sans réserve de ses reconnaissances ,pour sa patience et sa totale disponibilité à mon égard .

Je remercie Monsieur le Professeur B.TILLOUINE d'avoir accepter de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également à :

- Monsieur le Professeur D.V CUONG
 - Monsieur le Maître de Conférence Y.DJERBIB
 - Mademoiselle Z.DJILLALI BERKANE Chargé de cours
 - Monsieur B. AMEUR Chef de Département sol CTC ,
- pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail en me faisant l'honneur de participer au jury .

RESUME

La modélisation , à l'aide de modèles mécaniques simples à petit nombre de paramètres, du sol d'appui d'une fondation d'ouvrage sollicité dynamiquement, est étudiée par ajustement aux " fonctions d'impédance de raideur " de fondations usuelles: fondations superficielles circulaires ou rectangulaires sollicitées en translation ou en basculement. Il est montré qu'une très bonne concordance peut être obtenue , selon les cas à l'aide d'oscillateurs simples ou doubles de différents types et de caractéristiques appropriées , dans la gamme de pulsations adimensionnelles $a_0 \leq 2$.

SUMMARY

The development of analytical models as simplified mechanisms that include a small number of parameters to represent the supporting soil under the foundation of a given structure , subjected to a dynamic loading is being investigated by adjustment to the " stiffness impedance functions " of the usual foundations : circular or rectangular superficial foundations in translation or ricking motion . It is shown that a good agreement can be reached , using either a single or a double degree of freedom system of different types and having specific characteristics in the range of a_0 , such as $a_0 \leq 2$.

TABLE DES MATIERES

Résumé	0-1
Table des matières	0-2
Principales notations	0-5
CH I INTRODUCTION	1
CH II ETUDES ANTERIEURES	3
II-1 GENERALITES	3
II-2 RECHERCHES ANTERIEURES	4
II-2.1 Les méthodes de "ressorts de sol"	4
II-2.2 Détermination de la masse de sol associée au mouvement d'une fondation	7
II-2.3 Modèles pratiques représentant le système sol-structure	9
II-2.4 Methodes de calcul de l'interaction sol-structure	12
II-2.4.1 Méthode des sous structures	12
II-2.4.2 Fonctions d'impédance	13
II-2.4.3 Méthode des éléments finis	14
II-2.4.4 Méthode des équations intégrales	15
II-2.5 Analyse des fonctions d'impédance	15
II-2.5.1 Fonctions d'impédance des fondations circulaires	16
II-2.5.1.1 Fonctions d'impédance d'une fondation circulaire pour le mouvement de translation verticale	16
II-2.5.1.2 Solutions pour les autres composantes du mouvement	17
II-2.5.2 Fonctions d'impédance d'une fondation superficielle circulaire rigide	18
II-2.5.3 Fonctions d'impédance des fondations rectangulaires superficielles	22
II-2.5.4 Fonctions d'impédance des fondations enterrées	25
II-2.5.5 Fonctions d'impédance indépendantes de la fréquence	25
II-2.5.6 Méthode de détermination de l'impédance d'une fondation superficielle de forme quelconque	26
II-2.5.7 Fonctions d'impédance utilisées comme critères de référence dans la présente recherche	26

CH III	METHODE DE MODELISATION	27
III-1	NECESSITE ET OBJECTIFS D'UNE MODELISATION DU SOL	27
III-2	CRITERES DE VALIDITE DES MODELES A L'AIDE DES FONCTIONS D'IMPEDANCE	27
III-3	MODELES ENVISAGES	28
III-3.1	Modèles à paramètres répartis ou à para- mètres concentrés	28
III-3.2	Modélisation du sol par un oscillateur multiple	
III-3.2.1	Modélisation et fonctions d'impédance	28
III-3.2.2	Bande de fréquence utile	30
III-3.2.3	Modèles mécaniques simples	31
III-3.3	Formulation des équations du mouvement	33
III-3.3.1	Mise en équation du modèle I	34
III-3.3.2	Mise en équation du modèle II	35
III-3.3.3	Mise en équation du modèle III	36
III-3.3.4	Mise en équation du modèle IV	38
CH IV	MODELES PROPOSES POUR DES FONDATIONS USUELLES	41
IV-1	ANALYSE DIMENSIONNELLE	41
IV-1.1	Dimensions des rigidités et de la pulsation d'une fondation	41
IV-1.2	Propriétés de similitude d'un oscillateur multiple	43
IV-1.3	Ajustement par similitude des fonctions d'im- pédance de l'oscillateur multiple et de la fondation	45
IV-2	EXPRESSION ET FORME DES GRAPHES DES FONCTIONS D'IMPE- DANCE POUR LES MODELES MECANIQUES	47
IV-2.1	Formulation adimensionnelle des fonctions d'impédance	47
IV-2.2	Oscillateur simple amorti sans masse (modèle I)	48
IV-2.3	Oscillateur simple amorti avec masse (modèle II)	48
IV-2.4	Oscillateur double (modèle III et IV)	49
IV-2.4.1	Modèle mécanique III	49
IV-2.4.2	Modèle mécanique IV	50
IV-3	MODELISATION DES FONDATIONS USUELLES	52
IV-3.1	Fondations circulaires rigides sur demi-espace élastique	52
IV-3.1.1	Translation verticale	52
IV-3.1.1.1	Fonctions de raideur déduites des études antérieures	52

IV-3.1.1.2	Modélisation proposée	55
IV-3.1.2	Translation horizontale	60
IV-3.1.2.1	Fonctions de raideur déduites des études antérieures	60
IV-3.1.2.2	Modélisation proposée	61
IV-3.1.3	Rotation en basculement	72
IV-3.1.3.1	Fonctions de raideur déduites des études antérieures	72
IV-3.1.3.2	Modélisation proposée	73
IV-3.2	Fondations rectangulaires rigides sur demi-espace élastique	80
IV-3.2.1	Translation verticale	80
IV-3.2.1.1	Fonctions de raideur déduites des études antérieures	80
IV-3.2.1.2	Modélisation proposée	83
IV-3.2.2	Translation horizontale	86
IV-3.2.2.1	Fonctions de raideur déduites des études antérieures	86
IV-3.2.2.2	Modélisation proposée	88
IV-3.2.3	Rotation en basculement	94
IV-3.2.3.1	Fonctions de raideur déduites des études antérieures	94
IV-3.2.3.2	Modélisation proposée	96
IV-4	COMPARAISON AUX ETUDES ANTERIEURES	104
IV-4.1	Translation verticale	104
IV-4.2	Translation horizontale	106
IV-4.3	Rotation en basculement	109
IV-5	VALIDITE DES MODELES MECANQUES	113
CH V	EXEMPLE D'APPLICATION AU CAS DES STRUCTURES RIGIDES SOLLICITEES EN BASCULEMENT EN REPONSE TRANSITOIRE	115
V-1	GENERALITES	115
V-2	MODELE PROPOSE	116
V-3	MODELE DE NIETO	122
CH VI	CONCLUSION	127
	ANNEXE	128
	Bibliographie	134

CHAPITRE I

INTRODUCTION

CHAPITRE - I -

- Introduction :

Le calcul usuel de la réponse d'une structure à des sollicitations dynamiques est généralement effectué en admettant que le mouvement du sol est le mouvement "de champ libre", c'est à dire le mouvement qui se produirait en l'absence de toute construction, et que la liaison sol-structure est un encastrement.

La présence de la construction modifie en fait les mouvements du sol en son voisinage, et par suite la réponse de la structure s'en trouve modifiée.

Une approche précise du problème dynamique doit tenir compte de ce phénomène d'interaction sol-structure, c'est à dire de la modification du mouvement d'ensemble par suite de la déformation du sol.

Dans la plupart des cas les propriétés du sol jouent un rôle important dans le comportement sismique des structures, compte tenu du problème d'interaction sol-fondation. Ce problème fait intervenir de très nombreux paramètres, tant en ce qui concerne les propriétés statiques et dynamiques du sol, que les caractéristiques géométriques et mécaniques de la fondation.

L'étude dynamique d'interaction sol-structure a été assez développée en ce qui concerne les fondations circulaires et les fondations rectangulaires superficielles.

De nombreuses recherches sont en cours pour traiter de façon plus générale le problème d'interaction sol-structure , soit par des méthodes globales laborieuses considérant le comportement dynamique de l'ensemble sol-structure en totalité , soit par une modélisation plus ou moins schématique du comportement du sol vis à vis des forces d'interaction, permettant de se ramener à un problème plus simple de dynamique des structures sous les sollicitations de " champ libre " .

L'objet de la présente thèse est la recherche de modèles mécaniques , composés de systèmes d'oscillateurs et d'amortisseurs à petit nombre de paramètres , permettant de représenter avec précision , pour une fondation donnée , la réponse du sol aux forces d'interaction .

Ces modèles seront ajustés au cas des fondations superficielles circulaires et rectangulaires sur un demi-espace élastique dont les réponses sont connues , en considérant les mouvements de translation verticale et horizontale , ainsi que le mouvement de basculement .

Selon la présentation de cette thèse , les points essentiels de la recherche sont les suivants :

Après l'introduction du sujet au chapitre I , le chapitre II traite des études et recherches antérieures relatives à l'interaction sol-structure , et la modélisation du comportement du sol .

Le troisième chapitre étudie les objectifs de la modélisation du sol , et décrit les modèles mécaniques envisagés .

Les calculs effectués sur les modèles proposés pour des fondations usuelles sont traités dans le quatrième chapitre

Un exemple d'application au cas de structures rigides sollicitées au basculement , est présenté dans le cinquième chapitre .

Le sixième chapitre est réservé aux conclusions de la recherche.

CHAPITRE II

ETUDES

ANTERIEURES

ETUDES ANTERIEURESII - 1. Généralités : Interaction sol - structure et modélisation du sol de fondation

Jusqu'aux environs de 1970 ; la majorité des analyses faites sur le comportement sismique d'une structure, ont utilisé l'hypothèse classique d'une structure encastrée à une base rigide qui conduit aux calculs dynamiques les plus simples.

Diverses observations de dommages sismiques avaient déjà montré que les réponses dynamiques de structures fondées sur un sol déformable, peuvent être sensiblement différentes de celles des structures similaires mais supportées par un sol ferme ; cependant, les connaissances des caractéristiques et propriétés du sol, à l'époque ne permettaient pas la prise en compte de ce phénomène.

Et même actuellement dans les constructions courantes, l'interaction sol-structure est négligée ou traitée forfaitairement.

Par contre pour les ouvrages de dimension et de poids exceptionnels, notamment les barrages et les réacteurs nucléaires, les bâtiments de très grande hauteur, des études approfondies ont confirmé la nécessité d'un calcul complet qui englobe à la fois le sol et la structure.

Les calculs d'interaction s'effectuent à partir de modélisation du sol et de la structure. La modélisation du sol constitue un élément essentiel de ces calculs.

II - 2. Recherches antérieures :

II - 2. 1 Les méthodes de " Ressorts de sol "

" Winkler " a le premier modélisé le comportement du sol par " des ressorts " représentant les réactions élastiques du sol vis à vis des composantes de déplacement statique de la fondation.

Ces ressorts de sol étaient déterminés pour des fondations rigides, selon l'hypothèse d'une réaction élastique du sol par unité de surface, proportionnelle au déplacement du sol au point considéré selon un " coefficient de Ballast " constant pour la composante de déplacement étudiée : coefficient de Ballast " vertical " ou horizontal.

La méthode de " Winkler " était initialement une méthode de " Ressorts répartis ", mais elle permet également de représenter par un ressort unique la résultante des actions élastiques pour un mouvement donné : ressort vertical, ressort horizontal dans une direction définie ; ressort de rotation d'axe défini.

Les " hypothèses de Winkler " présentant des contradictions avec le comportement tridimensionnel du sol déformé, et même avec les lois physiques de similitude entre des fondations géométriquement semblables. Les " coefficients de Ballast " ne sont en fait applicables, que dans un domaine très restreint de caractéristiques du sol et de la fondation.

Par ailleurs, la méthode des " ressorts de sol " est a priori une méthode statique, et son utilisation dans les problèmes dynamiques ne permet pas de tenir compte des forces d'inertie dues à la masse de sol en mouvement.

Une détermination plus précise des ressorts de sol a été faite en considérant le sol comme un demi-espace élastique. Dans cette hypothèse des formules pratiques ont été obtenues, donnant l'expression de ces constantes de ressort qui en premier lieu, ont été déterminés pour des fondations circulaires.

Bycroft [8] a obtenu la rigidité horizontale en supposant une distribution uniforme des contraintes sur la surface de contact sol-Fondation circulaire.

Timochenko et Goodier [13] ont établi la rigidité verticale selon l'hypothèse des fondations rigides circulaires.

Sous l'effet d'un couple statique, Boxowika 1943 a formulé l'expression de la rigidité au basculement de la fondation circulaire reposant sur un demi-espace élastique.

En utilisant la méthode des éléments finis, kaldjian 1969 a établi la variation de la rigidité verticale d'une fondation circulaire enterrée en fonction de l'enfoncement.

L'extension des constantes de ressort de sol au cas de fondation non circulaire est obtenue en convertissant la surface de la base de la fondation rectangulaire en une base circulaire équivalente ; le rayon de la fondation circulaire est remplacé par un rayon équivalent fonction des dimensions de la fondation rectangulaire .

Barkan en 1962 [35] a calculé les rigidités horizontales dans l'hypothèse d'une distribution uniforme des contraintes sur la surface de contact sol-fondation , rectangulaire superficielle .

Gorbunov - Possadov, [36] en 1961 établissent la formule qui permet de calculer la rigidité au basculement pour une rigidité infinie des fondations rectangulaires .

Pour le mouvement de translation horizontale et le mouvement de basculement ; une étude expérimentale en bidimensionnel a été développée en 1984 [18] sur modèle réduit ; évaluent ainsi la loi de variation de la rigidité du sol pour fondation rectangulaire enterrée

Récemment en 1986 , une étude statique tridimensionnelle et expérimentale à la base de modèle tridimensionnel réduit ; a été faite dans le but de la détermination de la variation de la rigidité du sol en fonction de l'enfoncement de la fondation rigide rectangulaire . L'étude concerne les mouvements de basculement [28] et les deux mouvements de translation (verticale et horizontale) [29] .

Toutes ces méthodes sont toutefois basées sur le comportement du sol sous sollicitations statiques , et leur utilisation à des calculs dynamiques ne permet qu'une approximation justifiée dans un domaine limité (faible valeur de la pulsation , dans le cas de sollicitations harmoniques) .

II - 2.2 :

Détermination de la masse de sol associée
au mouvement d'une fondation superficielle:

Plusieurs chercheurs [12], [9], [8] ont tenté d'estimer la " masse de sol active " pour des systèmes sol structures discrétisés.

Dans le cas des vibrations des fondations de machine, le volume du sol participant au mouvement ne peut être négligé. Pour cela plusieurs solutions ont été proposées. Ces solutions admettent que le système se comporte comme une masse équivalente unique égale à la masse de la fondation et de la machine augmentée d'une masse apparente du sol, qui vibre en phase avec la fondation ; la formule déterminant la masse de sol définie selon les auteurs [12], [9], [10] s'ajoute ainsi fictivement au poids du vibreur.

Le problème d'un vibreur s'appuyant sur une surface horizontale d'un milieu semi-infini élastique et isotrope a été traité analytiquement par Reissner en 1936 et quinalan 1953 .

De telles analyses sont limitées dans leur application à des formes particulières des surfaces de contact et à des conditions idéales de sol.

Dans la procédure proposée par Crockett et Hanson [9], la masse apparente du sol vibrant est déterminée à partir du volume contenu dans l'enveloppe du " bulbe de pression ". En tel calcul présume non seulement une connaissance de la distribution des contraintes dans le sol, mais aussi que la zone du sol vibrant avec la fondation est bien déterminée.

Hsieh en 1962 [3] a estimé la masse effective pour une fondation circulaire rigide , en utilisant la théorie du demi-espace élastique . Les masses effectives ainsi déterminées sont données dans le tableau (II-1) , pour différentes valeurs du coefficient de Poisson . Il est à noter que cette masse active est différente pour chaque mode de vibration .

Mode de vibration	Masse effective du sol		
	$\nu = 0$	$\nu = 1/4$	$\nu = 1/2$
Translation verticale	$0,50 \rho r^3$	$1,00 \rho r^3$	$2,00 \rho r^3$
Translation horizontale	$0,20 \rho r^3$	$8,20 \rho r^3$	$0,10 \rho r^3$
Rotation en basculement	$0,40 \rho r^3$	non	calculée

Tableau(II-1) : Masse apparente pour le sol de fondation (circulaire rigide) , selon Hsieh [3] .

Modèles pratiques représentant le système
Sol - fondation :

Des modèles pratiques ont été conçus par certains auteurs pour une schématisation simplifiée du comportement sol-fondation.

Dans le cas particulier de la semelle circulaire rigide simplement posée sur un sol soumis à des vibrations verticales, deux solutions approchées sont données sous la forme des deux modèles suivants :

- Modèle de " Lymer Hall " [30] : c'est un modèle universel qui couvre toute la gamme de fréquences de zéro à l'infini. La constante de rappel a pour valeur celle du cas statique, le coefficient d'amortissement est ajusté de façon à optimiser l'erreur dans la bande des basses et moyennes fréquences. Ce modèle est couramment utilisé pour les machines. Pour les constructions en zone sismique, la considération des très hautes fréquences n'offre pas d'intérêt, car pratiquement seuls le mode fondamental et à un degré bien moindre le deuxième mode sont concernés par le phénomène d'interaction. Le modèle recommandé est celui de Nieto-Rosenblueth - Rascon.

- Modèle de Nieto - Rosenblueth - Rascon [30] : c'est un modèle qui a été conçu pour le cas des séismes. Il se différencie de celui de Lymer par l'incorporation à la semelle d'une masse fictive du sol solidaire de cette dernière. Ce modèle est adapté à la gamme de [0 à 10 Hz] dans laquelle il donne des résultats plus précis que le modèle universel.

à titre indicatif ; il est donné dans le tableau (II-7) (voir annexe) ; pour le modèle de Lysmer les valeurs des trois paramètres (constante de rappel K ; coefficient d'amortissement C ; et la masse associée M (qui est nulle pour le modèle universel)) pour la vibration verticale d'une fondation circulaire rigide .

Le tableau (II-2) complet pour les différents degrés de liberté et les diverses formes de semelles (circulaires et rectangulaires) est donné selon Niéto-Rosenblueth-Rascon ; avec une masse additionnelle définie comme celle d'un prisme de même section que la semelle et dont il suffit de donner la hauteur h .

tableau (II-2) : Masse associée , coefficient de raideur , amortissement équivalent d'après Niéto-Rosenblueth-Rascon

degré de liberté	hauteur du prisme de sol	amortissement visqueux	rigidité base circulaire	rigidité base rectangulaire
vertical	$0,27 \sqrt{A}$	$5,42 \sqrt{K\rho h^3}$	$\frac{4Gr_0}{(1-\nu)}$	$\frac{E \sqrt{A} C_S}{(1-\nu^2)}$
Horizontal	$0,05 \sqrt{A}$	$41,1 \sqrt{K\rho h^3}$	$\frac{5,8 Gr_0(1-\nu^2)}{(2-\nu)^2}$	$\frac{E \sqrt{A} K_T}{(1-\nu^2)}$
Basculement	$0,35 \sqrt{A}$	$0,97 \sqrt{K\rho h^5}$	$2,7 Gr_0 (\nu=0)$	$EI K_0 \sqrt{A}(1-\nu)$

I : Moment d'inertie est calculé par rapport aux axes situés sur la zone de contact de la fondation avec le sol

A : Surface de la zone de contact sol-fondation .

h : Hauteur du prisme du sol :

K : Désigne la rigidité associée au mouvement pour lequel on entend définir l'amortissement .

ρ ; désigne la densité du sol .

$$E = 2 (1 + \nu) G$$

C_B , K_T , K_0 : sont des coefficients dépendant du rapport a/b ; leur valeurs sont données au tableau suivant :

a/b	C_B	K_T					K_0
		$\nu=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	
1	1,06	1,00	0,938	0,868	0,792	0,704	1,984
1,5	1,07	1,01	0,942	0,864	0,770	0,692	2,254
2,0	1,09	1,02	0,945	0,870	0,784	0,686	2,510
3,0	1,13	1,05	0,975	0,906	0,806	0,700	2,955
5,0	1,22	1,15	1,050	0,950	0,850	0,732	3,700
10,0	1,41	1,25	1,160	1,040	0,940	0,940	4,981

II - 2.4 : Méthodes de calcul de l'interaction sol-structure :

II - 2.4.1 : Méthode de sous-structure :

La prise en compte de l'interaction sol-structure avec la méthode des sous-structures a été développée en utilisant les résultats d'étude de la vibration des massifs de fondation.

Le principe des méthodes des sous-structures est la détermination par étapes des mouvements du sol et de la structure. Cette méthode peut-être effectuée selon les étapes suivantes :

Première étape : - Etude de la réponse du site en l'absence de structure sous réserve d'une hypothèse établie sur le type d'ondes sismiques prises en compte.

Deuxième étape : - Etude de la réponse du sol et de la structure supposée sans masse ; en prenant en compte la raideur de l'interface sol-structure. Les déplacements de la fondation constituent le résultat de cette étape.

Troisième étape : - Détermination de l'impédance de la fondation ; c-à-d à des coefficients de raideur et d'amortissement en chaque point de liaison pour une valeur donnée de la pulsation.

Quatrième étape : - Etude dynamique de la structure et de ses fondations soumises au mouvement déterminé par la deuxième étape .

II - 2.4.2 : Fonctions d'impédance :

Pour les problèmes dynamiques, des solutions précises ont été développées récemment, à partir des fonctions d'impédance.

La méthode des fonctions d'impédance contribue, comme indiqué précédemment (en II-2.4.1) à la résolution des problèmes dynamiques par la méthode générale des sous - structures.

Ces fonctions ont été déterminées pour des fondations superficielles circulaires ou rectangulaires selon certaines hypothèses sur la distribution des contraintes où la déformabilité de la fondation.

Elles définissent les relations entre les forces appliquées au sol par l'intermédiaire de la fondation et les déformations subies par le sol.

Les fonctions d'impédance sont définies sous une forme complexe comportant une partie réelle et une partie imaginaire. La partie réelle caractérise la rigidité et la partie imaginaire caractérise l'amortissement du sol.

Elles représentent soit les éléments de la matrice de passage du vecteur force appliqué au sol, au vecteur déplacement de la fondation ; appelée ainsi " matrice des fonctions de souplesse " ; ou soit les éléments de la matrice de passage du vecteur déplacement de la fondation au vecteur force ; dite ainsi " Matrice de rigidité " .

La méthode des fonctions d'impédance permet une analyse complète du comportement dynamique d'un système sol - fondation, en particulier dans les problèmes des fondations de machine pour lesquels on étudie l'effet d'une pulsation constante.

II - 2.4.3 : Méthode des éléments finis :

Au cours des dernières années, l'analyse par la méthode des éléments finis des problèmes de sol - structure, a été largement développée notamment dans le cas de l'étude dynamique sismique sur des modèles bidimensionnels.

La représentation du sol par un modèle d'éléments finis permet de mieux prendre en compte les propriétés dynamiques du sol. Le maillage peut être choisi pour une représentation significative des caractéristiques variables du sol. A chaque noeud du maillage sont en effet considérées les propriétés physiques du sol, (coefficient de Poisson, module d'élasticité du sol, coefficient d'amortissement, masse volumique etc ...).

Les études par éléments finis sur modèles tridimensionnels sont restées exceptionnelles et limitées pour des raisons d'économie et de capacité des ordinateurs.

II - 2. 4. 4 : Méthode des équations intégrales :

C'est une autre méthode numérique utilisée pour l'obtention des fonctions d'impédance dans le cas de milieux homogènes, bicouches ou éventuellement tricouches.

Cette méthode est utilisée pour ramener la résolution numérique des équations intégrales définissant la loi de comportement d'un milieu, à une résolution numérique effectuée le long de la frontière du milieu.

II - 2. 5 / Analyse des fonctions d'impédance :

Les fonctions d'impédance interviennent dans l'équation suivante:

$$\{ F (t) \} = \left[[K (\alpha) + i \alpha [C (\alpha)] \right] \{ U (t) \}$$

$\{ F (t) \}$: est le vecteur des amplitudes de forces harmoniques appliquées à la fondation.

$\{ U (t) \}$: désigne le vecteur des amplitudes des déplacements harmoniques de la fondation. Les matrices $[K (\alpha)]$ et $[C (\alpha)]$ contiennent respectivement les parties réelles et imaginaires de fonctions d'impédance de raideur.

Compte tenu du fait que les forces appliquées et les déplacements subis sont harmoniques :

$$F (t) = F (t) = F_0 e^{i \alpha t}$$

$$U (t) = U (t) = U_0 e^{i \alpha t}$$

$$\alpha = \frac{2 \pi}{T} \quad (\text{ pulsation })$$

L'équation précédente peut s'écrire :

$$F_0 = \left([K(\alpha)] + i \alpha [C(\alpha)] \right) U_0$$

ou encore :

$$F_0 = \left([K(\alpha)] + i \alpha [C(\alpha)] \right) U$$

$[K(\alpha)]$: Matrice des coefficients des ressorts équivalents au comportement de la fondation.

$[C(\alpha)]$: Matrice des coefficients d'amortisseurs équivalents au comportement de la fondation.

II - 2-5.1 : Fonctions d'impédances des fondations circulaires :

II- 2-5.1.1 : Fonctions d'impédances d'une fondation circulaire pour le mouvement de translation verticale :

Dans le cas du mouvement vertical de la fondation circulaire, le déplacement en fonction de la force peut s'écrire sous la forme :

$$Z = \frac{F_0}{Gr_0} (F_1 + iF_2) e^{i\alpha t} \quad (\text{II-1})$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions réelles dépendant de la fréquence et du coefficient de poisson.

Ces fonctions sont appelées fonctions de déplacement, ou fonction de "souplesse" ou encore fonction de "Reissner". Elles sont données par rapport à une variable adimensionnelle a_0 , définie

Par :

$$a_0 = \frac{\alpha R_0}{V_S}$$

Où :

α : pulsation d'excitation

r_0 : rayon de la fondation

G : module de cisaillement du sol

V_g : vitesse de propagation des ondes S dans le sol

A partir de la relation force - déplacement précédemment établie (II-1), on déduit la rigidité et l'amortissement (dans le cas d'un mouvement vertical) :

$$K_2 = Gr_0 \frac{F_1}{(F_1^2 + F_2^2)} \quad (\text{II-2})$$

$$C_2 = \frac{Gr_0}{\alpha} \frac{-F_2}{F_1^2 + F_2^2} \quad (\text{II-3})$$

F_1 et F_2 sont les fonctions de souplesse dépendant de la distribution des contraintes dans le sol; et des hypothèses choisies pour le calcul. Celles-ci sont présentées par certains auteurs (Sung ; Reismor ; Hsieh ;) sous forme de développements limités en fonction des valeurs faibles de a_0 ($0 \leq a_0 \leq 1,5$) et pour les différentes valeurs de ν (voir tableaux (II-5) ; (II-6) et (II-7) en annexe) .

II-2.5.1.2 Solution pour les autres composantes du mouvement :

Parallèlement au développement de solutions pour le mouvement vertical ont été développées des solutions pour les autres modes de vibration, (déplacement horizontal et rotation) .

La formulation des résultats est identique à celle du mouvement vertical mais bien sûr les fonctions de déplacement (ou fonctions de souplesse) sont différentes .

II - 2 . 5 . 2 : Impédance d'une fondation superficielle rigide :

Plusieurs solutions relatives à l'étude d'une fondation circulaire rigide , reposant sur un milieu semi-infini , ont été rapportées dans la littérature . Nous citons en résumé celles obtenues par :

Hsieh [9] : Examine le cas du pompage , du tassis , du roulis avec distribution rigide des déplacements sur une surface circulaire .

Les valeurs des fonctions de raideur \overline{F}_1 et \overline{F}_2 (adimensionnelles) en tassis et en roulis obtenues par Hsieh , sont résumées dans le tableau (II-5) donné en annexe .

Veletsos et Wei [11] : Etudient le problème des vibrations d'une fondation circulaire rigide reposant sur un milieu semi-infini , homogène, isotrope , élastique linéaire pour le mouvement de translation horizontale, et le mouvement de rotation en basculement. Les fonctions d'impédance de raideur relatives aux mouvements horizontal et de basculement s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{8G r_0}{2 - \nu} \alpha_x \\ C_x &= \frac{8 r_0^2 \sqrt{GP}}{2 - \nu} \beta_x \end{aligned} \right\} \text{(II-4)}$$

$$\left. \begin{aligned} K_\theta &= \frac{8G r_0^3}{3(1 - \nu)} \alpha_\theta \\ C_\theta &= \frac{8 r_0^4 \sqrt{GP}}{3(1 - \nu)} \beta_\theta \end{aligned} \right\} \text{(II-5)}$$

Poisson ν et de a_0 , et sont exprimés en fonction des fonctions de souplesse (données en annexe sur tableaux (II-4)) à partir des formules :

$$\alpha_x = \frac{f_{11}}{f_{11}^2 + g_{11}^2}$$

$$\beta_x = \frac{-g_{11}}{f_{11}^2 + g_{11}^2}$$

$$\alpha_\theta = \frac{f_{22}}{f_{22}^2 + g_{22}^2}$$

$$\beta_\theta = \frac{-g_{22}}{f_{22}^2 + g_{22}^2}$$

Les fonctions de souplesse f_{11} , g_{11} et f_{22} , g_{22} sont présentées sur les figures (II-1a) et (II-1b).

Luco et Westman : Étudient le problème de vibration d'une fondation circulaire rigide sur un espace ~~semi~~-infini, homogène, isotrope, élastique linéaire. Les fonctions de déplacement de Luco et Westman relatives aux composantes du mouvement (translation horizontale ; translation verticale et rotation en basculement) sont données sur les figures (II-2a), (II-2b), et (II-2c) en annexe [17].

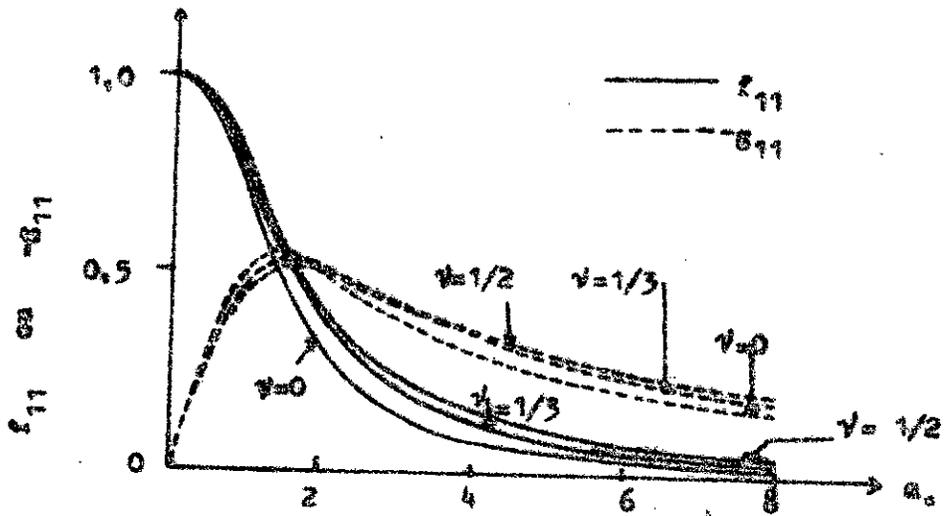


Fig : (II-7a) : Fonctions f_{11} et $-g_{11}$ pour fondations circulaires rigides en translation horizontale selon Veletsos et Wei .

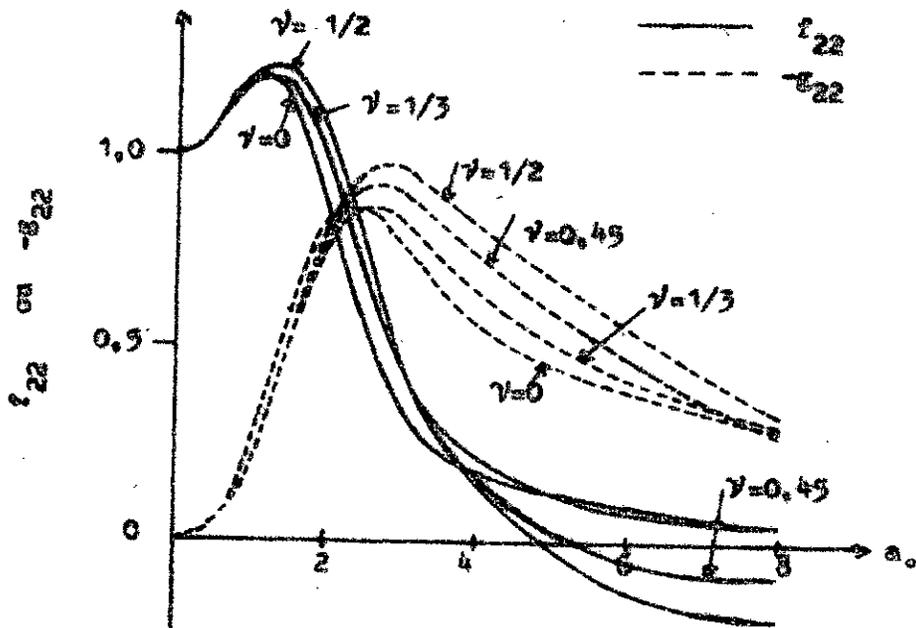


Fig (II-7b) : Fonctions f_{22} et $-g_{22}$ pour fondations circulaires rigides en rotation de base-ment selon Veletsos et Wei .

Ijaco [34] : a établi les fonctions d'impédance relatives au cas d'une fondation circulaire rigide reposant sur une couche d'épaisseur finie surmontant un espace semi-infini homogène.

Sung [23] : Etudie la vibration verticale d'une fondation circulaire reposant sur un milieu semi - infini , homogène isotrope , élastique linéaire , sous l'effet d'un effort extérieur vertical. Le problème est résolu dans trois cas :

- La distribution des contraintes verticales est rigide.
- La distribution des contraintes verticales est uniforme.
- La distribution des contraintes verticales est parabolique sur l'aire de contact entre la fondation et le sol .

Sung présente ses résultats sous forme de développements limités donnant F_1 et F_2 en fonction de a_0 pour $a_0 \leq 1,5$; et pour différentes valeurs de ν (voir tableau (II-6) en annexe).

Les fonctions d'impédances de raideur sont calculées à partir des relations (II-2) et (II-3) .

Veletsos et Vebric [31] : Etudient le problème de vibration d'un disque circulaire rigide sur un milieu semi-infini , homogène , isotrope viscoélastique pour les mouvements de poussage , de taxis , de roulis et de tangage .

II - 2. 5. 3 : Fonctions d'impédance des fondations rectangulaires superficielles :

D'après certains auteurs [20], les fondations rectangulaires superficielles de dimensions $2c$ et $2d$, peuvent être étudiées à l'aide des fonctions de souplesse F_1 et F_2 établies pour les fondations circulaires ; cependant le rayon r_0 est remplacé par le rayon équivalent donné - pour le cas du mouvement vertical - par :

$$r_0 = \sqrt{\frac{4 C d}{\pi K}} \quad \text{et cela pour un rapport } C/d \text{ ne dépassant pas deux.}$$

Dans le cas particulier du mouvement vertical de fondations rectangulaires, les fonctions de souplesse F_1 et F_2 ont été établies par (Nieto, Elordy, Szekely [20]) et sont comparées à celles obtenues dans le cas de fondation circulaire par (Bycroft [8] Sung [23]).

La comparaison des courbes F_1 et F_2 obtenus pour les fondations circulaires, et pour les fondations rectangulaires pour les rapports $(\frac{C}{d} = 1 ; \frac{C}{d} = 2)$ et pour $\nu = \frac{1}{2}$, montre un écart négligeable (Voir figure II - 3).

Luco et Wong [19] : ont calculé les fonctions de déplacement d'une fondation rectangulaire rigide reposant sur un demi-espace élastique pour les translations (verticale et horizontale), et pour la rotation ou basculement.

Pour une fondation rectangulaire de dimensions $2b$ et $2c$, et pour un coefficient de Poisson $\nu = 1/3$, ces fonctions sont représentées sur la figure (II-4) ; avec en abscisse la variable adimensionnelle a , définie par :

$$a = \alpha b / V_g$$

α : pulsation excitatrice .

b : dimension de la base .

V_g : vitesse de propagation des ondes de cisaillement .

Les fonctions de rigidité et d'amortissement relatives aux translations (verticale et horizontale), ainsi qu'au mouvement de basculement sont :

$$\nu = 1/4$$

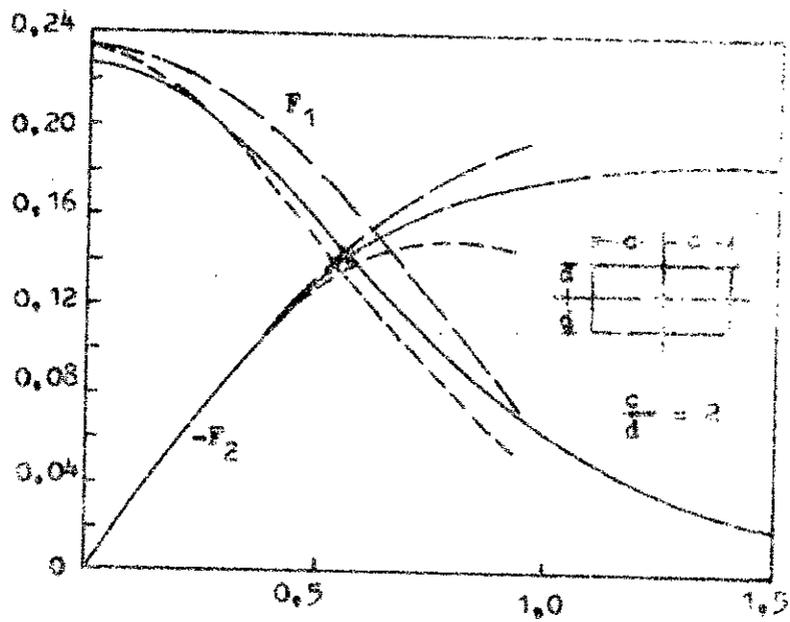
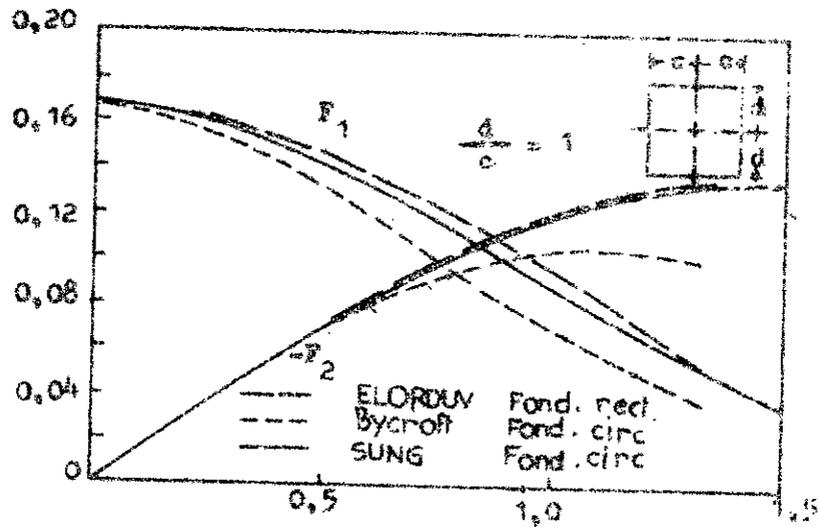


Figure (II-3) : Fonctions de déplacement dans le cas du mouvement vertical des fondations rectangulaires et circulaires rigides .

Fig (II-4) : Fonctions de déplacement d'une fondation rectangulaire rigide selon Liao et Wong .

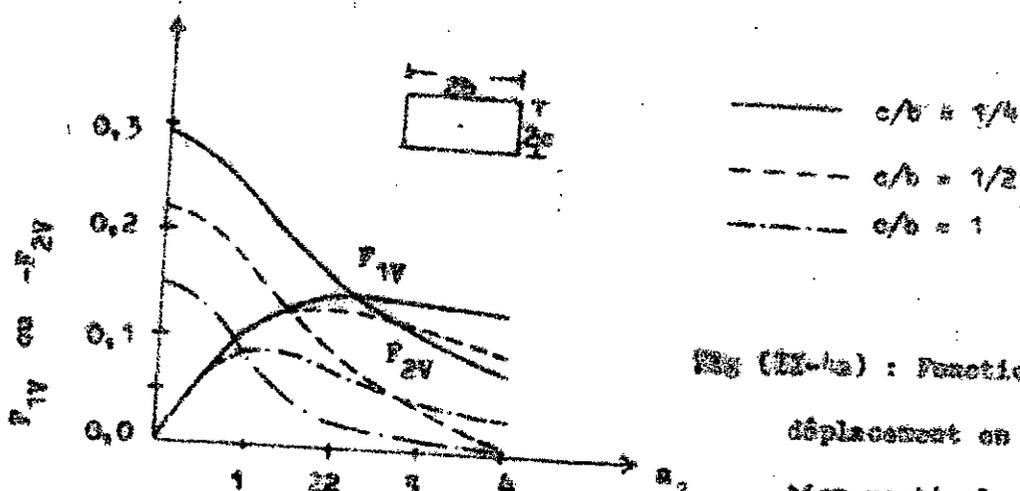


Fig (II-4a) : Fonctions de déplacement en translation verticale selon Liao et Wong .

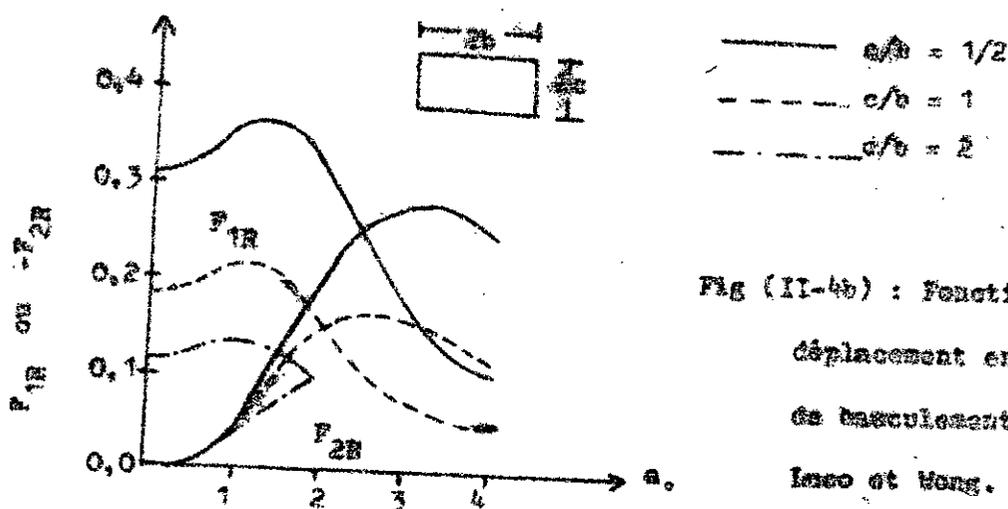


Fig (II-4b) : Fonctions de déplacement en rotation de basculement d'après Liao et Wong .

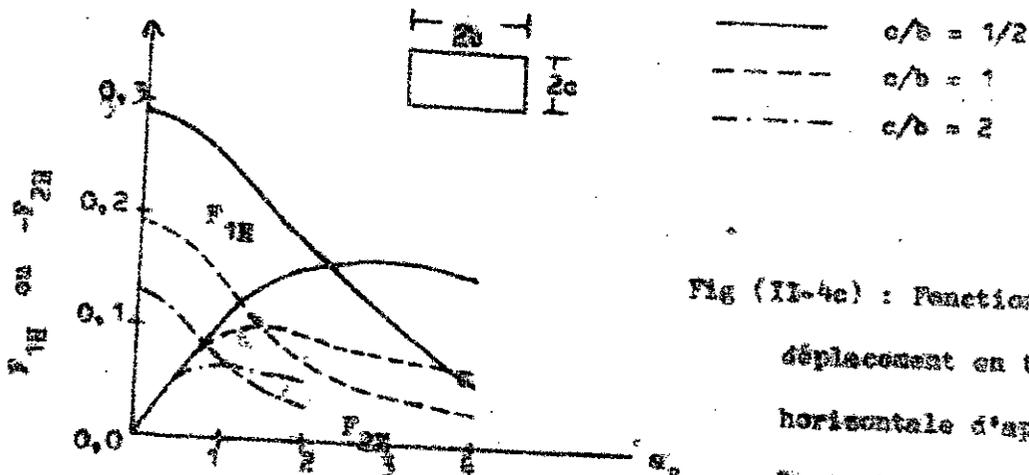


Fig (II-4c) : Fonctions de déplacement en translation horizontale d'après Liao et Wong .

$$\left. \begin{aligned} K_Z &= Gb \frac{F_{1V}}{F_{1V}^2 + F_{2V}^2} \\ C_Z &= Gb \frac{-F_{2V}}{F_{1V}^2 + F_{2V}^2} = \frac{-F_{2V}}{F_{1V}^2 + F_{2V}^2} b^2 \sqrt{G\rho} \end{aligned} \right\} \text{(II-6)}$$

$$\left. \begin{aligned} K_x &= Gb \frac{F_{1H}}{F_{1H}^2 + F_{2H}^2} \\ C_x &= Gb \frac{-F_{2H}}{F_{1H}^2 + F_{2H}^2} = \frac{-F_{2H}}{F_{1H}^2 + F_{2H}^2} b^2 \sqrt{G\rho} \end{aligned} \right\} \text{(II-7)}$$

$$\left. \begin{aligned} K_\theta &= Gb^3 \frac{F_{1R}}{F_{1R}^2 + F_{2R}^2} \\ C_\theta &= Gb^3 \frac{-F_{2R}}{F_{1R}^2 + F_{2R}^2} = b^4 \sqrt{\rho G} \frac{-F_{2R}}{F_{1R}^2 + F_{2R}^2} \end{aligned} \right\} \text{(II-8)}$$

II - 2.5.4 Fonctions d'impédance des fondations enterrées :

Selon Luco [34] : les fonctions d'impédance obtenues en général pour les fondations circulaires enterrées, sont basées sur des hypothèses simplificatrices variées à l'égard des effets des couches entourant la fondation sur la réponse totale.

II - 2.5.5 Fonctions d'impédance indépendantes de la fréquence :

Du fait des difficultés de calcul que représente la prise en compte de fonctions d'impédance variables avec la fréquence, une simplification a été introduite, et qui consiste à proposer des valeurs de fonctions d'impédance indépendantes de la fréquence.

L'usage de coefficients d'impédance constants donne pour certains cas, des résultats satisfaisants. La partie réelle est choisie de façon à obtenir une réponse exacte à la résonance. L'idée a été développée par plusieurs chercheurs [17]; [16].

En 1982 Ghaffar - Zadeh [16] : a obtenu la prise en compte de la variation avec la fréquence en utilisant la valeur de chaque terme pour la fréquence propre du mode propre correspondant..

II - 2.5.6 Méthode de détermination de l'impédance d'une fondation circulaire superficielle de forme quelconque :

Historiquement les méthodes analytiques, ont permis à partir des équations de propagation des ondes dans un milieu continu et de diverses simplifications, de calculer l'impédance d'une fondation circulaire sur un demi-espace élastique.

Différentes méthodes numériques, éléments finis, équations intégrales, nombre d'onde ou double transformée de Fourier ont pris le relais et permettent aujourd'hui d'envisager le calcul de l'impédance d'une fondation de forme quelconque.

II - 2.5.7 Fonctions d'impédance utilisées comme critères de référence dans la présente recherche

Les résultats des études antérieures présentées aux paragraphes précédents: II.2.5.1 à 3, montrent que, selon les auteurs, hypothèses et simplifications admises, les fonctions d'impédance obtenues pour les fondations superficielles peuvent différer de façon appréciable.

Dans la suite de la présente recherche, nous nous référerons aux auteurs dont les fonctions d'impédance ont été les plus récemment publiées, ou ont été confirmées et réutilisées dans les publications les plus récentes, à savoir:

Sung [23] pour les fondations circulaires en translation verticale,

Valetson & Wei [11] pour les fondations circulaires en translation horizontale et en basculement,

Luo & Wong [19] pour les fondations rectangulaires.

CH III : Méthode de modélisation :

III - 1. Nécessité et objectifs d'une modélisation du sol :

Comme vu précédemment, le comportement complexe du sol nécessite une modélisation ; l'objectif visé est de :

- Représenter avec la précision désirée la réponse du sol.
- Conduire aux calculs les plus simples.

III - 2. Critères de validité des modèles à l'aide des fonctions d'impédance :

Les Modèles antérieures ont souvent été proposés sans critères quantitatifs de vérification. Les seules vérifications, faites essentiellement pour un mouvement vertical - c'est le cas notamment des modèles " statiques ", se basant sur l'influence relativement faible des conditions du mouvement - sont des vérifications globales pour une structure bien déterminée. Le modèle de " Lysmer " [30] rapporté dans la littérature est l'un de ces modèles représentant le système.

D'où l'intérêt de rechercher un modèle vérifiable pour tout type de superstructure ; C - à - d par la méthode des sous - structures associée à la détermination de l'impédance du sol de fondation. Une telle vérification peut s'effectuer :

- Soit à partir des fonctions de Souplesse.
- Soit à partir des fonctions de rigidité. La méthode utilisée est celle des rigidités (mais dans un certain domaine de fréquence en vue de leur application au génie sismique).

III - 3. Modèles envisagés :

III - 3.1 - Modèles à paramètre répartis ou à paramètres concentrés :

On pouvait envisager un modèle continu plus simple que le tridimensionnel (le modèle bidimensionnel a déjà été utilisé, on pouvait encore simplifier éventuellement à un ou plusieurs éléments infinis monodimensionnels). Il est plus commode de rechercher d'abord un système à paramètres concentrés, de calcul plus simple, et ne recourir au système continu que si les résultats obtenus sont insuffisants.

III - 3.2 - Modélisation du sol par un oscillateur multiple :

III - 3.2.1 - Modélisation et fonctions d'impédance :

Le modèle envisagé peut être un oscillateur multiple quelconque à masses concentrées, à n degrés de liberté, composé de masses m_j reliées entre elles et à une base fixe par des ressorts K_j et des amortisseurs C_j .

La base de la fondation est supposée coïncider avec la masse m_1 (qui peut être nulle) selon le degré de liberté $N^o = 1$ de l'oscillateur correspondant au mouvement réel de cette base.

On exerce selon m_1 la force $f_1 e^{i\alpha t}$; qui provoque le déplacement $U_1 e^{i\alpha t}$ de la masse m_1 , ainsi que le déplacement $U_j e^{i\alpha t}$ selon le degré de liberté j , c.-à-d. le vecteur déplacement :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} e^{i\alpha t}$$

selon les n degrés de liberté (les U_j et f_j étant réels ou complexes).

Il revient au même de considérer que l'on impose en m_1 un déplacement $U_1 e^{i\alpha t}$, ce qui nécessite une force d'excitation $f_1 e^{i\alpha t}$. En choisissant une amplitude de déplacement U_1 réelle, f_1 sera en général complexe et f_1 / U_1 représentera la rigidité complexe de la fondation.

Ces équations d'équilibre selon les n degrés de liberté peuvent s'écrire, en simplifiant par $e^{i\alpha t}$:

$$(-M\alpha^2 + C i\alpha + K) \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \left[(K - M\alpha^2)^2 + C^2 \alpha^2 \right]^{-1} \cdot (K - M\alpha^2 - C i\alpha) \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient en particulier la relation entre U_1 et f_1

de forme :

$$U_1 = \lambda f_1 \quad ; \quad \lambda = \lambda(\alpha) \quad \text{étant la souplesse complexe du modèle}$$

on inversement :

$$f_1 = \mu U_1 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda \cdot \overline{\lambda}}$$

$\overline{\lambda}$: imaginaire conjugué de λ

Λ est la rigidité complexe de la fondation dont les parties réelles et imaginaires sont les fonctions d'impédance de raideur du modèle de fondation considéré.

Cette relation est valable, que f_1 et U_1 soient réels ou non, mais on peut se fixer un déplacement U_1 réel, donnant f_1 complexe (il suffit de multiplier les déplacements et les forces, dans les deux membres de l'équation d'équilibre par un coefficient complexe adimensionnel proportionnel à la valeur conjuguée de U_1 initial).

Le calcul ci-dessus montre qu'il est possible d'obtenir pour tout oscillateur multiple, les fonctions d'impédance de raideur pour une sollicitation harmonique exercée selon un degré de liberté déterminé.

En pratique, pour un petit nombre de degrés de liberté, la solution, qui est celle d'un système d'équations linéaires à coefficients et variables réelles ou complexes, pourra s'il y a lieu s'obtenir plus rapidement par une méthode directe de substitution.

III - 3. 2. 2. : Bande de fréquence utile :

On recherche ainsi des modèles analytiques discrets simples ; couvrant la bande de fréquence ($0 \leq \omega \leq 2$), (domaine des fréquences significatives pour le génie sismique).

III - 3. 2. 3 : Modèles mécaniques simples :

La méthode consiste à déterminer un oscillateur simple ou multiple ayant les mêmes fonctions d'impédances que la fondation donnée soumise à l'une de ses composantes de mouvement (translation ou rotation).

L'oscillateur sera caractérisé par ses masses M_1 , rigidité K_1 , amortisseurs C_1 , ces grandeurs étant de même nature que celles de la fondation dans le mouvement considéré, c'est à dire :

- masse, rigidité de translation, amortisseur de translation pour un mouvement de translation de la fondation.

- "masse généralisée " c'est à dire inertie polaire massique, rigidité de rotation et amortisseur de rotation, pour un mouvement de rotation de la fondation.

Divers modèles mécaniques peuvent être envisagés pour représenter le comportement dynamique du sol.

L'étude concerne les trois composantes de mouvement suivantes :

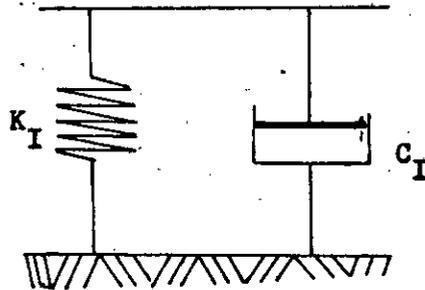
- Mouvement de translation horizontal
- Mouvement de translation vertical
- Mouvement de rotation en basculement.

qui seront étudiées séparément pour la détermination d'un modèle approprié.

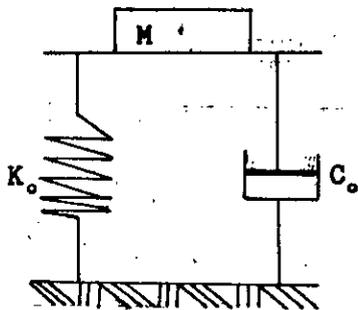
Il ne semble pas justifié de rechercher un modèle mécanique unique représentatif de toutes les composantes de mouvement : un tel modèle devrait disposer d'un nombre important de paramètres indépendants et son calcul complexe lui enlèverait tout intérêt pratique.

Les modèles mécaniques proposés sont les suivants :

- Modèle mécanique " I " : C'est le modèle classique de ressort de sol avec amortisseur

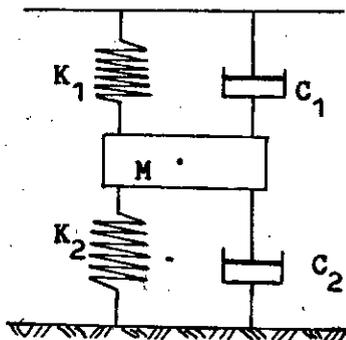


- Modèle mécanique " II " : C'est le même modèle que " I " ; mais corrigé par une masse additionnelle solidaire de la base de la fondation.



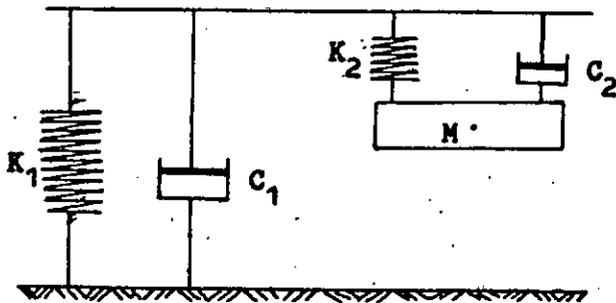
Ce modèle a déjà été utilisé par différents auteurs : [2] ; [6]

- Modèle mécanique " III " : Le schéma représentatif de ce modèle est le suivant :



Ce modèle représente une masse de sol " active " liée élastiquement, avec amortissement, à la fondation, et au sol " inactif " environnant.

- Modèle mécanique " IV " : C'est un modèle à cinq paramètres



(2 ressorts ; 2 amortisseurs et une masse vibrante).

Ce modèle, moins intuitif, avec une " masse de sol en console " a été introduit en cours de recherche, lors de l'étude du mouvement de basculement.

Il est entendu, comme indiqué ci-dessus au § III63.2.3 que les schémas, représentatifs d'un mouvement de translation sont également applicables pour un mouvement de rotation en considérant des amortissements et des rigidités de rotation, et une inertie polaire massique, au lieu d'une masse.

III - 3.3 Formulation des équations du mouvement :

Les forces et couples s'exerçant sur les différentes parties de l'oscillateur à l'instant t , alors que la base de la fondation occupe la position définie par U sont :

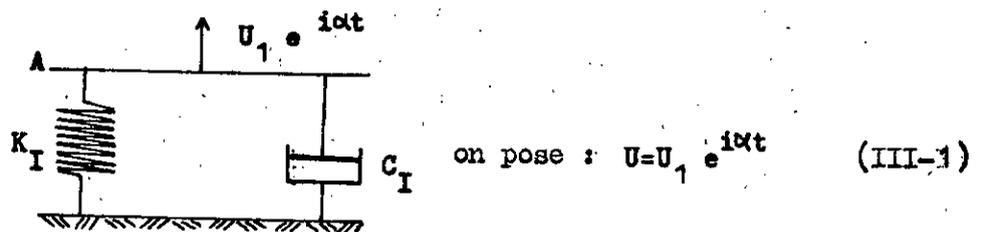
- La force d'inertie
- Les forces et couples de rappel

- Les forces et couples d'amortissement
- La force excitatrice appliquée à la base pour lui communiquer le mouvement imposé.

Comme il a été indiqué précédemment au § III - 3.2.1 dans les calculs de fonctions d'impédances, on considère la réponse permanente à une sollicitation harmonique de pulsation α , le mouvement sera dans les calculs exprimé sous la forme complexe exponentielle :

$U_j e^{i\alpha t}$ (pour le degré de liberté j), étant entendu, que pour un mouvement réel, seule la partie réelle des résultats sera à prendre en compte.

III - 3.3.1 Mise en équation du mouvement du modèle I :



Seules les forces suivantes agissent sur le plateau A ; lors de son mouvement :

- force de rappel $F_1^* = -K_I U$
- force d'amortissement $F_2^* = -C_I \dot{U}$
- force excitatrice de pulsation α : $F = f_1 e^{i\alpha t}$

L'équilibre du système satisfait l'équation :

$$F_1^* + F_2^* + F = 0$$

ou encore :

$$(-K_I U - C_I \dot{U} + f_1 e^{i\alpha t}) = 0$$

et compte tenu de la relation (III - 1) on obtient :

$$(K_I + i\omega C_I) U_1 = f_1 \quad (\text{III-2})$$

cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(K + i\omega C) U_1 = f_1$$

où K : représente la rigidité du modèle mécanique I

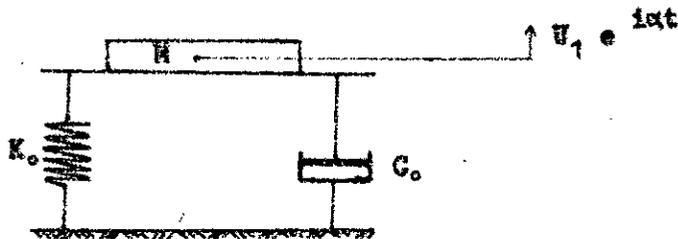
C : représente l'amortissement du modèle mécanique I

on a donc :

$$K = K_I \quad (\text{III-2a})$$

$$\omega C = \omega C_I \quad (\text{III-2b})$$

III - 3. 3. 2 Mise en équation du mouvement du modèle II :



d'après l'équation

(III-1) on a :

$$U = U_1 e^{i\omega t}$$

La masse "M" est soumise à l'action des forces suivantes :

- force de rappel : $F_1^* = -K_0 U$
- Force d'amortissement : $F_2^* = -C_0 \dot{U}$
- Force d'inertie : $F_1 = M \ddot{U}$
- Force excitatrice : $F = f_1 e^{i\omega t}$

Le théorème du mouvement du centre de gravité fournit l'équation :

$$F_1^* + F_2^* + F = F_1$$

ou encore :

$$-F_1^* - F_2^* + F_1 = F$$

et tenant compte de la relation (III - 1) ; on arrive à établir

l'équation d'équilibre suivante :

$$\left[(K_0 - M\omega^2) + i\omega C_0 \right] U_1 = f_1 \quad (\text{III - 3})$$

équation qui peut encore s'écrire :

$$(K + i\omega C) U_1 = f_1 \quad (\text{III - 4})$$

K : représente la rigidité dynamique du modèle mécanique II.

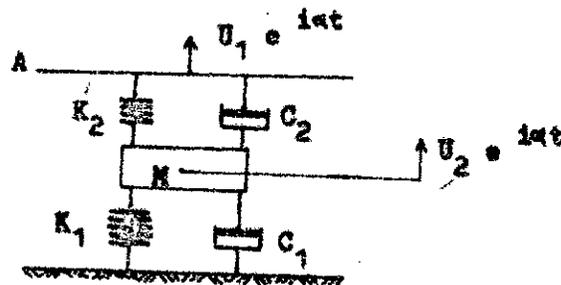
C : représente l'amortissement du modèle mécanique II.

Égalisant la partie réelle de l'équation (III-4) avec celle de l'équation (III - 3) ; et la partie imaginaire de la relation (III - 4) avec celle de (III - 3) on obtient :

$$\hat{K} = K_0 - N\alpha^2 \quad (\text{III-4a})$$

$$\alpha C = \alpha C_0 \quad (\text{III -4b})$$

III - 3. 3. 3 Mise en équation du mouvement du modèle III :



on pose :

$$\begin{aligned} U &= U_1 e^{i\omega t} \\ V &= U_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Le théorème du mouvement du centre de gravité fournit deux équations :

- équation du mouvement de la masse " M "
- équation du mouvement de la plateforme " A "

a - Mise en équation du mouvement de la masse " M "

La masse " M " se déplace sous l'effet des forces suivantes :

- force de rappel due à l'action du ressort \$K_1\$: $F_1^* = -K_1 V$
- force de rappel due à l'action du ressort \$K_2\$: $F_2^* = K_2 (U-V)$
- force d'amortissement de l'amortissement \$C_1\$: $F_3^* = -C_1 \dot{V}$

+ force d'amortissement de l'amortisseur C_2 : $F_4 = C_2 (\dot{U} - \dot{V})$

- force d'inertie : $F_1 = M\ddot{V}$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$F_1^* + F_2^* + F_3 + F_4 = F_1$$

compte - tenu des relations (III - 5) on obtient l'équation d'équilibre de la masse " M " :

$$M\alpha^2 U_2 - K_1 U_2 + K_2 (U_1 - U_2) - i\alpha C_1 U_2 + i\alpha C_2 (U_1 - U_2) = 0$$

qui nous permet d'établir la relation entre U_1 et U_2 soit :

$$(K_2 + i\alpha C_2) U_1 = \left[(K_1 + K_2 - M\alpha^2 + i\alpha(C_1 + C_2)) \right] U_2$$

ou encore :

$$U_2 = (K_2 + i\alpha C_2) \frac{(K_1 + K_2 - M\alpha^2 - i\alpha(C_1 + C_2))}{(K_1 + K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2(C_1 + C_2)^2} U_1 \quad (\text{III-6})$$

b - Mise en équation du mouvement de la plateforme " A " :

La réaction du sol en " A " est de la forme :

$$F = (K + i\alpha C) U$$

cette réaction est due aux actions des deux forces suivantes :

- force de rappel due au ressort K_2 : $K_2 (U-V)$

- force d'amortissement due à l'amortissement C_2 : $C_2 (U-V)$

soit :

$$(K+i\alpha C) U = (K_2(U-V) + i\alpha C_2(U-V))$$

En utilisant les relations (III - 5) ; cette équation

peut s'écrire (après division par $i\alpha$)

de l'équation (III-6) on tire le rapport :

$$\frac{U_2}{U_1} = (K_2 + i\alpha C_2) \frac{K_1 + K_2 - M\alpha^2 - i\alpha(C_1 + C_2)}{(K_1 + K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2(C_1 + C_2)^2}$$

en développant; le rapport U_2/U_1 prend la forme complexe suivante :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K_2(K_1 + K_2 - M\alpha^2) + \alpha^2 C_2(C_1 + C_2) + i\alpha(C_2 K_1 - C_1 K_2 - M\alpha^2 C_2)}{(K_1 + K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2(C_1 + C_2)^2}$$

on a encore :

$$1 - U_2/U_1 = \frac{(K_1 - M\alpha^2)(K_1 + K_2 - M\alpha^2) + \alpha^2 C_1(C_1 + C_2) - i\alpha(C_2 K_1 - C_1 K_2 - M\alpha^2 C_2)}{(K_1 + K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2(C_1 + C_2)^2} \quad (\text{III-8})$$

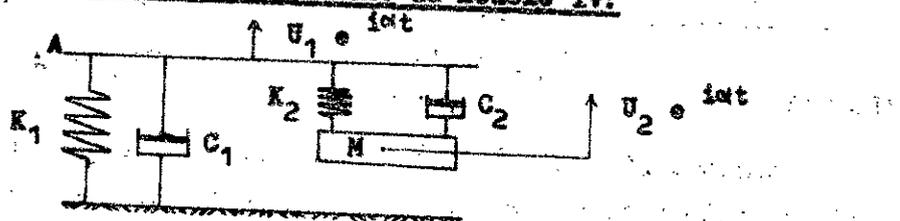
La rigidité " K " s'obtient en multipliant (III-8) par l'expression $(K_2 + i\alpha C_2)$ - (voir équation (III-7)) - et en prenant la partie réelle, soit :

$$K = \frac{K_2(K_1 - M\alpha^2)(K_1 + K_2 - M\alpha^2) + \alpha^2(K_2 C_1^2 + K_1 C_2^2) - \alpha^4 M C_2^2}{(K_1 + K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2(C_1 + C_2)^2} \quad (\text{III-9})$$

L'amortissement " C " est obtenu en multipliant (III-8) par l'expression $(K_2 + i\alpha C_2)$ et en prenant la partie imaginaire divisée par " i\alpha " ; (voir équation (III-7)). La terme " \alpha C " s'obtient en multipliant l'amortissement " C " par la pulsation " \alpha " soit :

$$\alpha C = \alpha \frac{C_2(K_1 - M\alpha^2)(K_1 + K_2 - M\alpha^2) + \alpha^2 C_1 C_2(C_1 + C_2) - K_2(C_2 K_1 - C_1 K_2 - M\alpha^2 C_2)}{(K_1 + K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2(C_1 + C_2)^2} \quad (\text{III-10})$$

III - 3.3.4 Mise en équation du mouvement du modèle IV:



on pose encore : $V = U_2 e^{i\alpha t}$

$$U = U_1 e^{i\alpha t} \quad (\text{III-11})$$

a - Formulation de l'équation de mouvement de la masse " M " :

La masse " M " est soumise à l'action des forces suivantes :

-- Force de rappel du ressort K_2 : $K_2(U-V)$

-- Force de vitesse de l'amortissement C_2 : $C_2(\dot{U}-\dot{V})$

-- Force d'inertie : $M\ddot{V}$

l'équilibre s'écrit :

$$K_2(U_1 - U_2) + C_2(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = M \ddot{V}$$

Les relations (III-11) permettent d'écrire :

$$K_2(U_1 - U_2) + i\alpha C_2(U_1 - U_2) = -\alpha^2 M U_2$$

Cette équation fournit la relation entre U_1 et U_2 soit :

$$U_2 = \frac{(K_2 + i\alpha C_2) ((K_2 - M\alpha^2) - i\alpha C_2)}{(K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2 C_2^2} U_1 \quad (\text{III-12})$$

b - Formulation de l'équation de mouvement de la plateforme A :

La réaction du sol en A est donnée par :

$$F = (K + i\alpha C) U \quad (\text{III-13})$$

Cette réaction est due aux actions des forces suivantes :

-- Force de rappel due au ressort K_1 : $F_1^* = -K_1 U$

-- Force de rappel due au ressort K_2 : $F_2^* = -K_2(U-V)$

-- Force de vitesse due à l'amortisseur C_1 : $F_3^* = -C_1 \dot{U}$

-- Force de vitesse due à l'amortisseur C_2 : $F_4^* = -C_2(\dot{U}-\dot{V})$

-- Force excitatrice : $F = f_1 e^{i\omega t}$

L'équilibre est traduit par l'équation :

$$F_1^* + F_2^* + F_3 + F_4 + F = 0$$

En utilisant la définition donnée en (III-13) on aboutit à l'équation :

$$(K + i\alpha C) U = (K_1 + i\alpha C_1) U + (K_2 + i\alpha C_2)(U - V)$$

Les déplacements U et V étant exprimés en fonction du temps par les relations (III-11) ; en les injectant dans l'équation précédente et en développant on obtient :

$$(K + i\alpha C) = (K_1 + K_2 - i\alpha(C_1 + C_2)) - \frac{(K_2 + i\alpha C_2)^2 (K_2 - M\alpha^2 - i\alpha C_2)}{(K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2 C_2^2}$$

Ou encore :

$$(K + i\alpha C) = K_1 - M\alpha^2 \frac{K_2(K_2 - M\alpha^2) + \alpha^2 C_2^2}{(K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2 C_2^2} + i\alpha(C_1 + C_2) \frac{(M\alpha^2)^2}{(K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2 C_2^2}$$

Après identification des parties réelles et parties imaginaires de cette équation on peut écrire les expressions suivantes :

$$K = K_1 - M\alpha^2 \frac{K_2(K_2 - M\alpha^2) + \alpha^2 C_2^2}{(K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2 C_2^2} \quad (\text{III-14})$$

et

$$\alpha C = \alpha C_1 + \alpha C_2 \frac{(M\alpha^2)^2}{(K_2 - M\alpha^2)^2 + \alpha^2 C_2^2} \quad (\text{III-15})$$

" K " représente la rigidité de l'oscillateur ; " C " son amortissement .

CHAPITRE IV

MODELES PROPOSES POUR DES FONDATIONS SCULPTALES

Chapitre IV : Modèles proposés pour des fondations usuelles :IV - 1. analyse dimensionnelle :IV - 1.1 Dimensions des rigidités et de la pulsation d'une fondation :

Pour un mouvement de translation, la rigidité est une force par unité de déplacement, de dimension $F L^{-1}$, soit $M L^{-2} T^{-2}$.

Cette dimension est applicable à une rigidité statique aussi bien qu'aux deux composantes réelle et imaginaire : " K " et " αC " d'une rigidité complexe.

Pour un mouvement de rotation, la rigidité est un moment par angle unitaire de rotation, de dimension $F L$, soit $M T^{-2}$.

La pulsation, comme la fréquence, est proportionnelle à l'inverse d'un temps, soit T^{-1} .

Il est commode d'utiliser des grandeurs adimensionnelles, en vue d'obtenir des fonctions d'impédance applicables à des fondations semblables, et à des sols différents (caractérisés par le module de glissement " G " et la vitesse " v_s " de propagation des ondes transversales).

Fonctions d'impédance adimensionnelles :

Les rigidités, pour une fondation de dimensions données, sont proportionnelles aux contraintes, et par suite, au module de glissement G, de dimension $F L^{-2}$.

Les rigidités de translation de dimension $F L^{-1}$ seront rendues adimensionnelles en les divisant par $G.l$, l désignant une dimension de référence de la base :

-Soit $l = r_0$, rayon d'une fondation circulaire, ou rayon

"équivalent" d'une fondation rectangulaire .

— soit $l = a$ ou $l = b$, longueur ou demi-longueur d'un des côtés d'une fondation rectangulaire .

On déterminera par suite les fonctions de raideur sans dimensions :

$\frac{K}{GI}$ et $\frac{\alpha C}{GI}$ pour les rigidités de translation .

→ Pour les rigidités de rotation , de dimension FL , on utilise les fonctions sans dimensions $\frac{K}{GI^3}$ et $\frac{\alpha C}{GI^3}$.

En ce qui concerne la variable représentative de la pulsation , on utilise non la pulsation α elle-même , mais la variable sans dimension :

$$a_0 = \frac{l\alpha}{V_S}$$

Où " l " désigne comme indiqué ci-dessus une dimension de référence de la base (le plus souvent r_0) .

L'utilisation de cette variable permet d'obtenir des fonctions d'impédances indépendantes de V_S et de la similitude géométrique de la fondation .

Si l'on considère une fondation de dimensions données et deux valeurs différentes de V_S , il est nécessaire , pour obtenir une même valeur des rigidités sous une certaine pulsation d'excitation , que les longueurs d'ondes siniques correspondant à cette pulsation soient conservées ; sinon la configuration des déformations dans le milieu de fondation serait modifiée , et par suite les contraintes et les rigidités . La longueur d'onde transversale pour la pulsation α est :

$$L = \frac{2\pi}{\alpha} V_S$$

Cette longueur sera conservée ainsi que la longueur d'onde longitudinale qui lui est proportionnelle pour V_S variable, si le rapport $\frac{\alpha}{V_S}$ reste constant, c'est - à dire pour une même valeur de la variable a . si l'on effectue une similitude de rapport "s" sur la fondation et le milieu déformé (similitude des déplacements, conservation des déformations et contraintes), les longueurs d'onde devront subir la même similitude et la pulsation $\alpha = 2\pi \frac{V_S}{L}$ correspondante devra être réduite dans le rapport $1/s$ pour conserver la même distribution des contraintes, et les mêmes fonctions de raideurs adimensionnelles. D'on l'intérêt d'introduire la longueur l en facteur dans la variable a , qui reste ainsi la même pour des fondations semblables soumises à des états de contraintes semblables conduisant aux mêmes fonctions d'impédance adimensionnelles.

IV - 1.2 : Propriétés de similitude d'un oscillateur multiple :

Comme il a été indiqué au [III - 3.2.1], les équations d'équilibre selon les n degrés de liberté d'un oscillateur multiple sollicité selon le premier degré de liberté par une force excitatrice $f_1 e^{i\alpha t}$ peuvent s'écrire :

$$(-M\alpha^2 + i\alpha C + K) \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} e^{i\alpha t} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\alpha t} \quad (IV-1)$$

définissant entre les amplitudes de force et déplacement U_1 et f_1 la relation :

$$f_1 = \mathcal{N} U_1$$

$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\alpha)$ rigidité complexe selon le degré de liberté $N^\circ = 1$.

Considérons un oscillateur sollicité selon le 1^{er} degré de liberté par une force excitatrice : $f_1 e^{i\alpha t}$ et obtenu à partir du précédent oscillateur en multipliant :

- Toute les masses dans le rapport f^m
- Les coefficient d'amortissement dans le rapport δ^*

Les rigidités dans le rapport χ

$$\begin{aligned} \text{soit :} \quad M' &= \mu M \\ C' &= \gamma C \\ K' &= \chi K \\ \alpha' &= \eta \alpha \end{aligned} \quad (\text{IV-2})$$

L'équation d'équilibre devient alors :

$$(-M' \alpha'^2 + C' i \alpha' + K') \begin{Bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ \vdots \\ U_n' \end{Bmatrix} e^{i \alpha' t} = \begin{Bmatrix} f_1' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i \alpha' t} \quad (\text{IV-3})$$

Définissant la relation d'impédance :

$$f_1' = \pi' U_1' \quad , \quad \pi' = \pi'(\alpha') \quad \text{rigidité complexe}$$

Ou encore (après division de l'équation (IV-3) par $e^{i \alpha' t}$) :

$$(-M \alpha^2 \mu \eta^2 + C i \alpha \gamma \eta + K \chi) \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-4})$$

Les coefficients de similitude μ, η, χ , et γ^* peuvent être choisis de sorte que :

$$\chi = \gamma^* \eta = \mu \eta^2 \quad (\text{IV-5})$$

et la relation (IV-4) devient :

$$(-M \alpha^2 + C i \alpha + K) \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\chi} \quad (\text{IV-6})$$

Cette relation entre les amplitudes de déplacement et la force excitatrice, ne diffère de la relation initiale (après division par $e^{i \alpha t}$) que par le facteur $1/\chi$ appliqué à la force excitatrice. Par suite, le vecteur amplitude de déplacement est le même :

$$\{U_j(\alpha')\} = \{U_j(\alpha)\}$$

La relation d'impédance initiale donne :

$$\frac{1}{\chi} f_1' = \pi(\alpha) U_1'$$

$$f_1' = \chi \pi(\alpha) U_1' \quad \text{d'ou} \quad \pi'(\alpha') = \chi \pi(\alpha)$$

On voit que si les masses, amortissements, et rigidités de l'oscillateur, ainsi que la pulsation d'excitation sont multipliées dans les rapports μ , δ , γ , et η respectivement satisfaisant aux relations (IV-5), la rigidité complexe, c'est à dire les fonctions d'impédances de raideur pour la pulsation d'excitation α' s'obtiennent en multipliant dans le rapport γ , les fonctions d'impédances de l'oscillateur initial correspondant à une pulsation α' / η .

Autrement dit les ordonnées sont multipliées dans le rapport γ et les abscisses dans le rapport η .

Comme les quatre coefficients de similitude sont liés par deux relations (IV-5), on peut fixer arbitrairement γ et η ce qui détermine μ et δ :

$$\mu = \frac{\gamma}{\eta^2} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\gamma}{\eta}$$

IV-1 . 3 . Ajustement par similitude des fonctions d'impédances de l'oscillateur et de la fondation :

Les propriétés de similitudes examinées au paragraphe précédent ont montré que pour un oscillateur multiple, on pouvait par un choix convenable de rapports de similitudes sur les masses, amortissements et rigidités modifier l'échelle des abscisses et des ordonnées des graphes de fonctions d'impédances correspondants.

La forme de ces graphes et leur variation simultanée en fonction de la pulsation dépendent par contre du ~~caractère~~ de l'oscillateur, et de la valeur relative des grandeurs de même dimensions qui le constituent.

Connaissant les graphes des fonctions de raideur d'une fondation donnée, ou d'un type de fondation donnée qui peuvent être représentées sous la forme dimensionnelle $K(\alpha)$, on recherchera par tâtonnement un type d'oscillateur dont les fonctions d'impédances $K'(\alpha)$ présentant dans un certain domaine de fréquences des lois de variation très voisines, à une

double affinité près à partir des axes de coordonnées .

Il suffira alors d'effectuer ces deux affinités dans les rapports η et ψ , selon les notations du paragraphe précédent , pour obtenir la coïncidence approchée des fonctions d'impédances . Cette double affinité détermine les rapports de similitude à appliquer aux grandeurs M_j , C_j , K_j de l'oscillateur , d'où la valeur de ces grandeurs pour l'oscillateur équivalent à la fondation donnée .

Il est entendu que cet ajustement pourra également se faire à partir de fonctions d'impédances adimensionnelles , et s'il ya lieu de pulsations adimensionnelles , pour renvoyer ensuite aux valeurs dimensionnelles par les changements d'échelle inverse .

IV - 2 : Expression et forme des graphes des fonctions de raideur pour les modèles élastiques :

IV-2.1 Formulation adimensionnelle des fonctions d'impédance :

Les fonctions d'impédance de raideur des modèles élastiques proposés seront exprimées à partir des grandeurs sans dimensions suivantes :

$$\beta_0 = \alpha / W_0$$

$$\beta_1 = \alpha / W_1$$

$$\beta_2 = \alpha / W_2$$

$$f_0 = C_0 / 2H W_0^2 \quad (IV-7)$$

$$f_1 = C_1 / 2H W_1^2$$

$$f_2 = C_2 / 2H W_2^2$$

$$\delta = W_2 / W_1$$

Où les paramètres W_0 , W_1 et W_2 étant définis par les relations :

$$K_0 = N W_0^2$$

$$K_1 = N W_1^2 \quad (IV-8)$$

$$K_2 = N W_2^2$$

La pulsation sans dimension β_2 est proportionnelle à la pulsation adimensionnelle a_2 utilisée pour les fonctions réelles, et les formes des graphes de fonctions de raideur seront directement comparables.

IV-2.2 Oscillateur simple amorti sans masse (modèle I) :

Les fonctions d'impédance de raideur du ressort de sol simple, comme indiqué au (§III-3.3.1) sont, par définition K_I et αC_I , on déduit les fonctions de raideur adimensionnelles en divisant les équations (III-2a) et (III-2b) par la valeur " K_I " :

$$K/K_I = 1 \quad (IV-9)$$

$$\alpha C/K_I = \alpha C_I / K_I \quad (IV-10)$$

La rigidité " K " et l'amortissement " C " sont indépendants de la pulsation α , ils restent constamment égaux à " K_I " et " C_I " sur toute la gamme de fréquence.

IV-2.3 Oscillateur simple amorti avec masse (modèle II) :

Les fonctions d'impédance de ce modèle étant déterminées par les formules (III-4a) et (III-4b) ; en divisant ces équations par la rigidité K_0 ; et tenant compte des relations (IV-7) et (IV-8) on obtient les fonctions de raideur sous la forme adimensionnelle suivante :

$$K / K_0 = 1 - \beta_0^2 \quad (IV-11)$$

$$\alpha C / K_0 = 2 \int \beta_0 \quad (IV-12)$$

Ces équations montrent que la fonction " K/K_0 " est une parabole axée sur l'axe des ordonnées, à concavité vers le bas. La variation de " $\alpha C/K_0$ " en fonction de β_0 est représentée par une droite passant par l'origine.

Indépendamment du changement d'échelle des abscisses qui peut être fait sur les deux graphes par similitude physique de l'oscillateur (comme

indiqué au § IV -1.2 ci-dessus) et qui ne dépend que de $\omega_0 = \sqrt{K_0 / M}$.

La position de la droite par rapport à la parabole peut être modifiée

en jouant sur le coefficient angulaire $2f_0 = C_0 / \sqrt{K_0 M}$.

IV-2.4 Oscillateur double (modèle III et IV) :

Les fonctions d'impédance adimensionnelles pour les modèles "III" et "IV", et pour une rigidité " K_1 " non nulle sont exprimées sous la forme :

$$K/K_1 = f_1^2(\beta_1, \delta, \frac{f_1}{\sqrt{1}}, \frac{f_2}{\sqrt{2}}) \quad (IV-13)$$

$$\alpha C/K_1 = f_2^2(\beta_1, \delta, \frac{f_1}{\sqrt{1}}, \frac{f_2}{\sqrt{2}}) \quad (IV-14)$$

Où les paramètres $\beta_1, \delta, \frac{f_1}{\sqrt{1}}, \frac{f_2}{\sqrt{2}}$ sont définis par les relations (IV-7) et (IV-8).

IV-2.4.1 Modèle mécanique "III" :

Les fonctions f_1^2 et f_2^2 définissant le modèle III (voir les équations (IV-13) et (IV-14) établies ci-dessus) sont obtenues respectivement en divisant les deux membres des équations (III-9) et (III-10) par la rigidité fixe " K_1 "; et en les explicitant en fonction de la pulsation adimensionnelle " β_1 " et des grandeurs sans dimensions $\delta, \frac{f_1}{\sqrt{1}}, \frac{f_2}{\sqrt{2}}$ on obtient ainsi :

$$\frac{K}{K_1} = 1 - \frac{(1 + \delta^2 - \beta_1^2)(1 - 4\beta_1^2 \frac{f_1^2}{1}) + 8\beta_1^2 \frac{f_1}{\sqrt{1}} (\frac{f_1}{\sqrt{1}} + \delta \frac{f_2}{\sqrt{2}})}{(1 + \delta^2 - \beta_1^2)^2 + 4\beta_1^2 (\frac{f_1}{\sqrt{1}} + \delta \frac{f_2}{\sqrt{2}})^2} \quad (IV-15)$$

$$\frac{\alpha C}{K_1} = 2\beta_1 \frac{f_1}{\sqrt{1}} - 2\beta_1 \frac{2\frac{f_1}{\sqrt{1}}(1 + \delta^2 - \beta_1^2) - (\frac{f_1}{\sqrt{1}} + \delta \frac{f_2}{\sqrt{2}})(1 - 4\beta_1^2 \frac{f_1^2}{1})}{(1 + \delta^2 - \beta_1^2)^2 + 4\beta_1^2 (\frac{f_1}{\sqrt{1}} + \delta \frac{f_2}{\sqrt{2}})^2} \quad (IV-16)$$

Ces fonctions restent déterminées pour $S \neq 0$.

Selon les valeurs attribuées aux paramètres $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ et S ; plusieurs formes des graphes des fonctions de raideur peuvent être obtenues. Pour des valeurs particulières de $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ et S , différentes formes de ces graphes sont reportées sur les figures (IV-1), (IV-2), (IV-3), et (IV-4) et cela pour $\beta_1 \in (0, 1)$.

IV-2.4.2 Modèle mécanique IV :

En développant les équations (III-14) et (III-15) en fonction des grandeurs adimensionnelles $\sqrt{1}$; $\sqrt{2}$; S et en fonction de la pulsation adimensionnelle β_1 ; on déduit les fonctions d'impédance de raideur du modèle IV rapportées à la rigidité du ressort " K_1 " non nulle; soit :

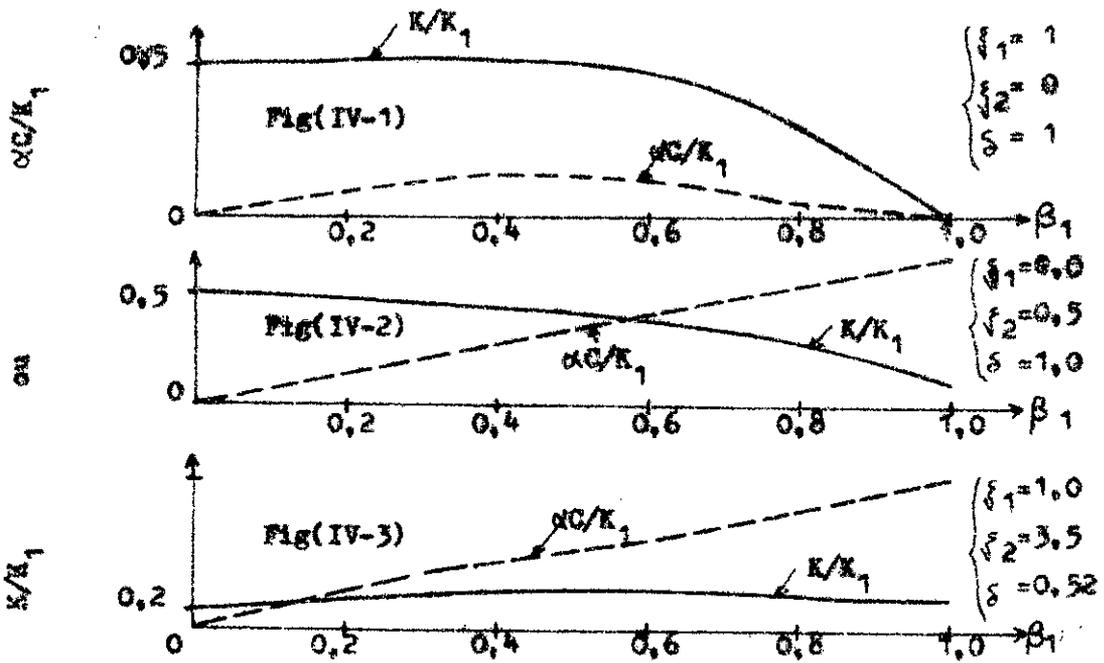
$$\frac{K}{K_1} = 1 - \beta_1^2 \frac{s^4 - \beta_1^2 s^2 + 4\sqrt{2}^2 \beta_1^2 s^2}{(s^2 - \beta_1^2)^2 + 4\sqrt{2}^2 \beta_1^2 s^2}$$

$$\frac{dC}{K_1} = 2\beta_1 \frac{\sqrt{2} s \beta_1^4 + \sqrt{1} \left[(s^2 - \beta_1^2)^2 + 4s^2 \sqrt{2}^2 \beta_1^2 \right]}{(s^2 - \beta_1^2)^2 + 4\sqrt{2}^2 \beta_1^2 s^2}$$

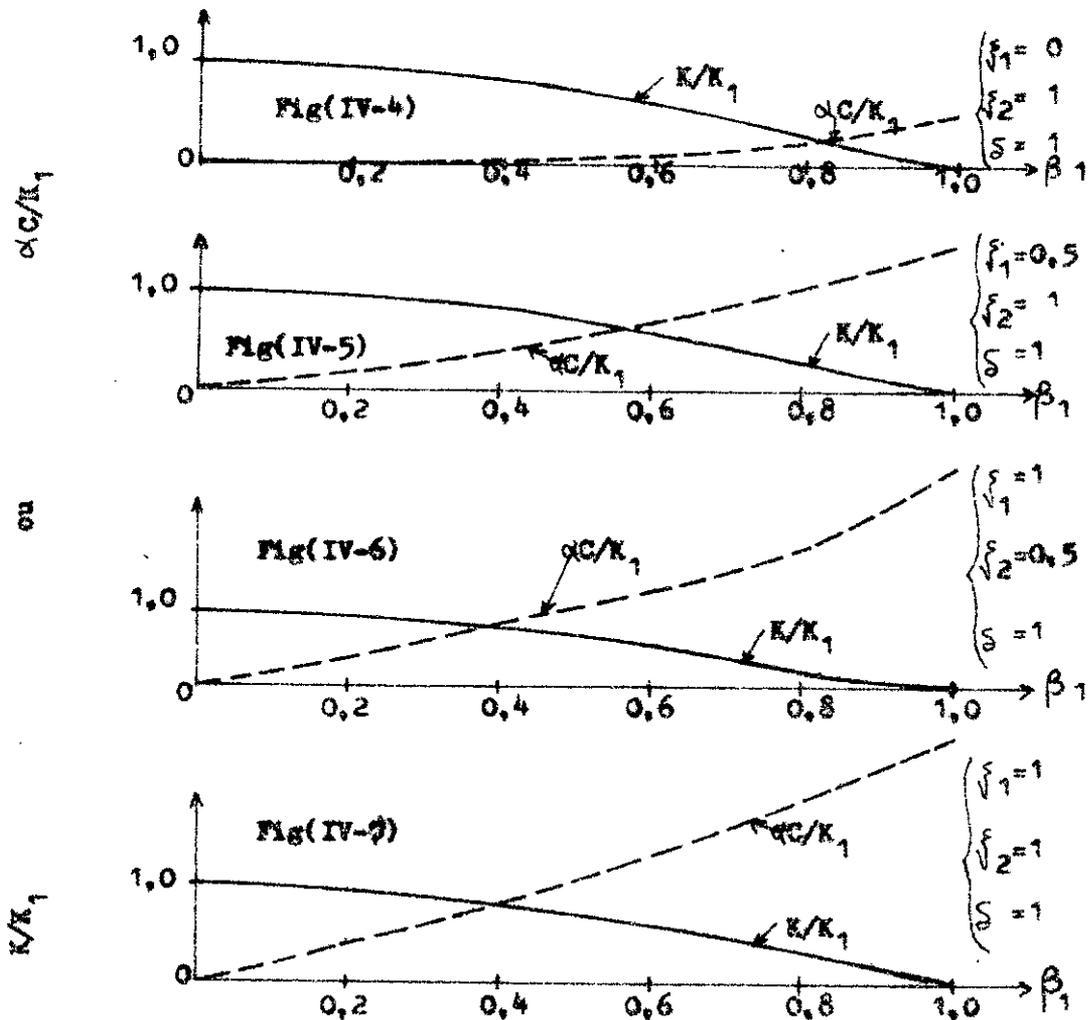
et cela quelque soit $S \neq 0$.

Diverses formes des graphes de ces fonctions sont présentées sur les figures (IV-6), (IV-5), (IV-7) et (IV-4) pour des valeurs particulières des grandeurs $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, et S dans le domaine des fréquences adimensionnelles : $\beta_1 \in (0, 1)$.

Pour une rigidité K_2 nulle les équations (III-14) et (III-15) (définies quelque soit K_1 et S non nula) deviennent :



Fonctions d'impédance de raideur du modèle III pour différentes valeurs de f_1 , f_2 et δ ($\beta_1 \leq 1$).



Fonctions de raideur du modèle IV pour différentes valeurs de f_1 , f_2 et δ ($\beta_1 \leq 1$).

$$K = K_1 - M\alpha^2 \frac{\alpha^2 c_2^2}{(M\alpha^2)^2 + \alpha^2 c_2^2} \quad (\text{IV-17})$$

$$\alpha C = \alpha C_1 + \alpha C_2 \frac{(M\alpha^2)^2}{(M\alpha^2)^2 + \alpha^2 c_2^2} \quad (\text{IV-18})$$

La rigidité K_2 étant non nulle on pose alors : $C_2 = \gamma K \omega_1$, et après introduction des expressions de K_1 ; C_1 ; β_1 données par les équations (IV-7) et (IV-8) on obtient les fonctions d'impédance adimensionnelles suivantes :

$$\frac{K}{K_1} = 1 - \frac{\beta_1^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \gamma^2} \quad (\text{IV-19})$$

$$\frac{\alpha C}{K_1} = 2 \sqrt{1 - \beta_1} + \frac{\gamma \beta_1^{\frac{3}{2}}}{\beta_1^2 + \gamma^2} \quad (\text{IV-20})$$

Pour des valeurs particulières des paramètres $\sqrt{1 - \beta_1}$ et γ , différentes formes de graphes " K/K_1 " et " $\alpha C/K_1$ " sont données sur les figures (IV-9), (IV-10) et (IV-18).

IV-3 Modélisation de fondations usuelles :

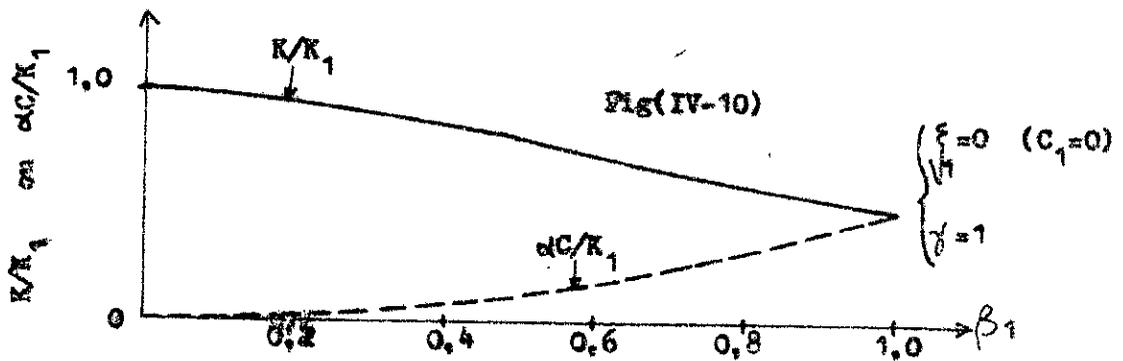
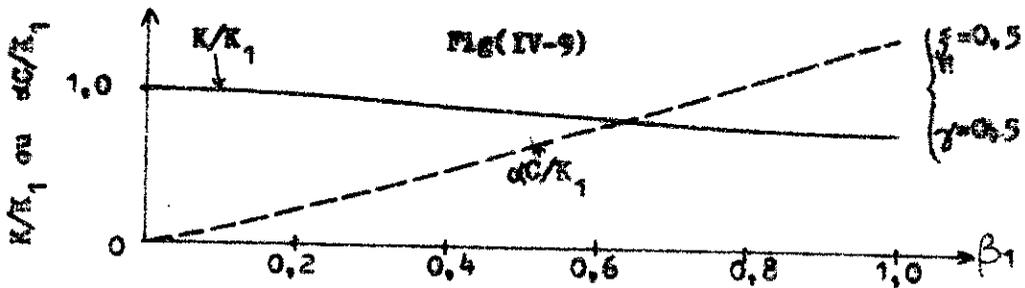
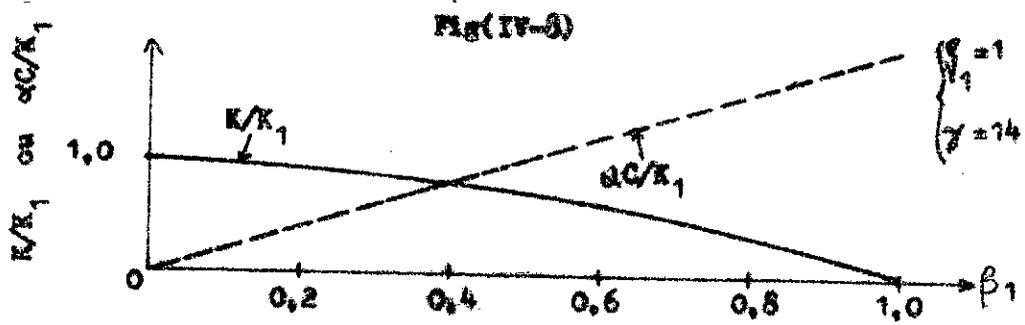
IV-3.1 Fondations circulaires rigides sur demi-espace élastique :

IV-3.1.1 Translation verticale :

IV-3.1.1.1 Fonctions de raideur déduites des

études antérieures :

Sung [23] a donné les fonctions de souplesse F_1 et F_2 relatives à la vibration verticale d'une fondation circulaire rigide, reposant sur un demi-espace élastique. Ces fonctions



Fonctions d'impédance de raideur du modèle IV pour K_2 nulle et pour différentes valeurs de ξ_1 et γ .

sont présentées dans le tableau (IV-1) ; (IV-2) et (IV-3) pour $\nu=0$;
1/3 ; et 1/2 respectivement .

Les fonctions de raideur comme indiqués au (III-2.5.1) et sont
dédites par les formules (II-2) et (II-3) . Sur les bases de ces
données les fonctions de raideur adimensionnelles pour a_0 sont
 $K_z / 80 r_0$ et $\alpha C_z / 80 r_0$.

a_0	F_1	F_2	$K_z / 80 r_0$	$\alpha C_z / 80 r_0$
0,00	0,2500	0,0000	0,5000	0,0000
0,25	0,2432	0,0530	0,4907	0,1069
0,50	0,2233	0,1024	0,4625	0,2121
0,75	0,1919	0,1448	0,4151	0,3132
1,00	0,1515	0,1775	0,3477	0,4074
1,25	0,1057	0,1986	0,2611	0,4906
1,50	0,0591	0,2072	0,1591	0,5379

Tableau (IV-1) : Fonctions de souplesse et de raideur pour $\nu=0$; en
translation verticale d'après Suag .

a_0	F_1	F_2	$K_z / 80 r_0$	$\alpha C_z / 80 r_0$
0,00	0,1667	0,0000	0,7499	0,0000
0,25	0,1629	0,0323	0,7383	0,1464
0,50	0,1518	0,0628	0,7055	0,2719
0,75	0,1341	0,0898	0,6436	0,4300
1,00	0,1110	0,1116	0,5600	0,5530
1,25	0,0841	0,1273	0,4516	0,6303
1,50	0,0557	0,1363	0,3211	0,7857

Tableau (IV-2) : Fonctions de souplesse et de raideur pour $\nu=1/3$,
en translation verticale selon Suag .

a_0	F_1	F_2	$K_s/8cr_0$	$\alpha C_s/8cr_0$
0,00	0,1250	0,0000	1,0000	0,00000
0,25	0,1221	0,0259	0,9797	0,2078
0,50	0,1135	0,0505	0,9193	0,4091
0,75	0,0998	0,0724	0,8206	0,5953
1,00	0,0817	0,0905	0,6870	0,7610
1,25	0,0605	0,1041	0,5217	0,8976
1,50	0,0377	0,1126	0,3342	0,9981

Tableau (IV-3) : Fonctions de souplesse et de raideur pour $\nu = 1/2$, en translation verticale .

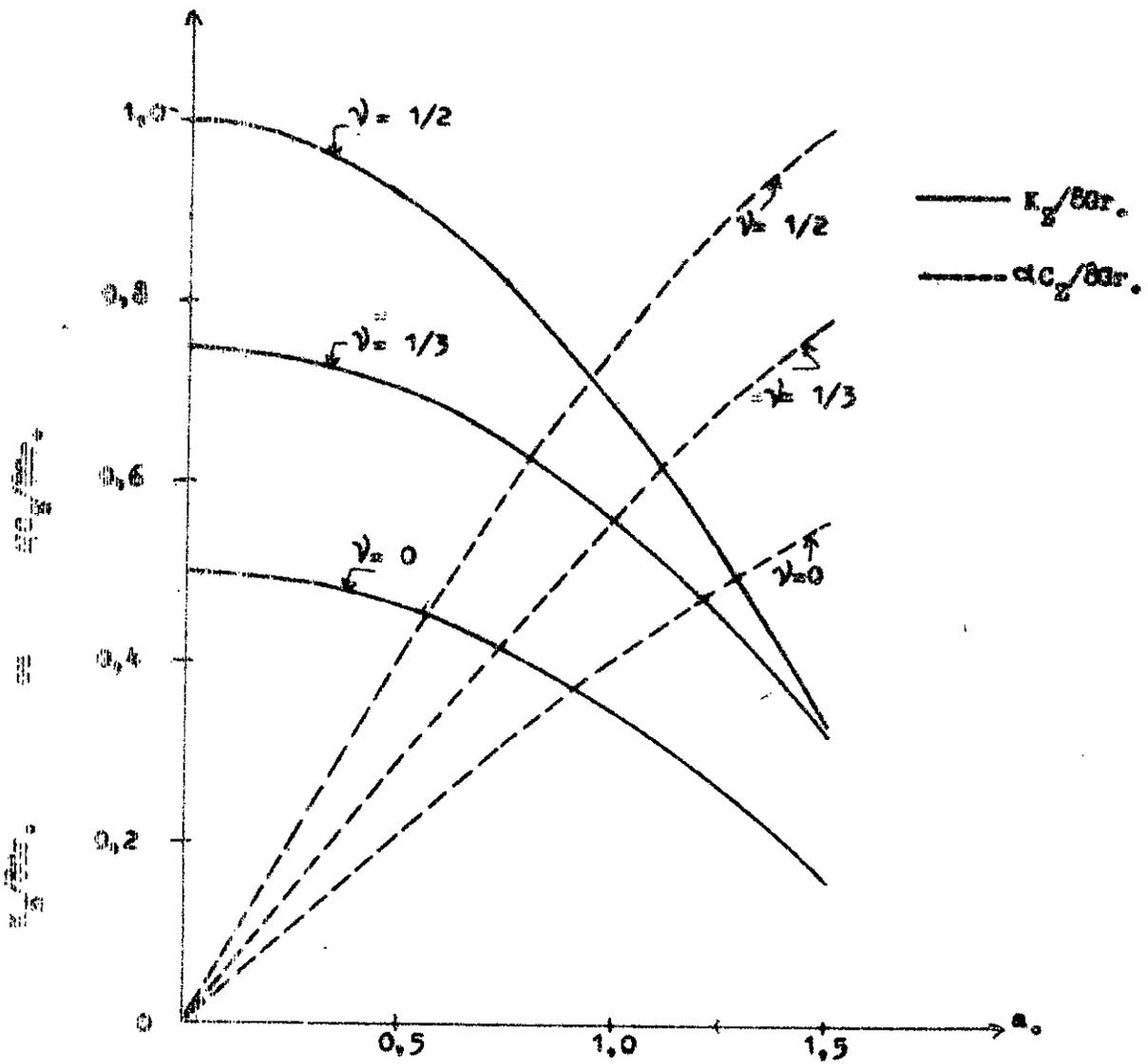
Les fonctions de raideur de Sung sont ainsi présentées sur la figure(IV-11).

IV-3.1.1.2 Modélisation proposée :

La forme parabolique du graphe de la partie réelle des fonctions d'impédance du sol en translation verticale (voir fig (IV-11)) correspond à celle du graphe du modèle II (ressort simple avec masse additionnelle). Le graphe de la partie imaginaire de ces fonctions d'impédance est par ailleurs très proche d'une droite passant par l'origine pour $a_0 \leq 1,5$, ce qui correspond également à la partie imaginaire du modèle II dont l'équation linéaire est donnée par la formule (IV-12).

La rigidité " K_s " du modèle II est choisie égale à la rigidité statique donnée par les parties réelles des fonctions d'impédance de sol définies selon "Sung" .

Les paramètres M et C_s de ce modèle II seront déterminés de façon à minimiser l'écart entre les fonctions d'impédance de raideur du modèle et celles données par "Sung", c'est à dire à partir d'une parabole d'approximation de la partie réelle et d'une droite d'approximation de la partie imaginaire .



Fig(IV-11): Fonctions de raideur en translation verticale pour fondations circulaires rigides (d'après Sung) .

La parabole ainsi que la droite d'approximation peuvent être exprimées par rapport à la variable " a_0 " sous la forme :

$$\frac{R}{K_0} = 1 - \psi_1 a_0^2 \quad (\text{IV-21})$$

$$\frac{\alpha C}{K_0} = \psi_2 a_0 \quad (\text{IV-22})$$

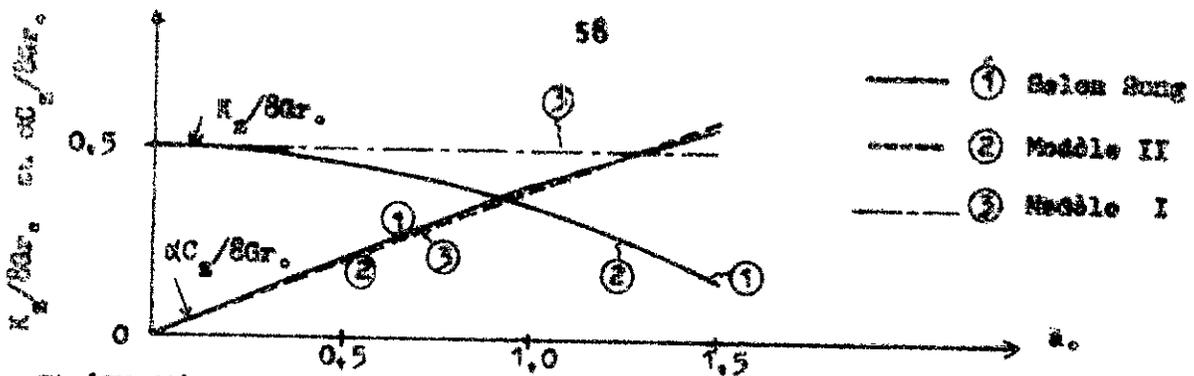
ψ_1 et ψ_2 étant des valeurs numériques sans dimensions obtenues par titrage - par ajustement aux graphes de fonctions de raideur de "Sung" pour différentes valeurs du coefficient de Poisson. L'ajustement a été réalisé de manière à minimiser l'écart absolu entre les graphes obtenus et les graphes de référence. Les valeurs obtenues figurent au tableau ci-après :

ν	0	1/3	1/2
ψ_1	0,304	0,253	0,300
ψ_2	0,778	0,720	0,700

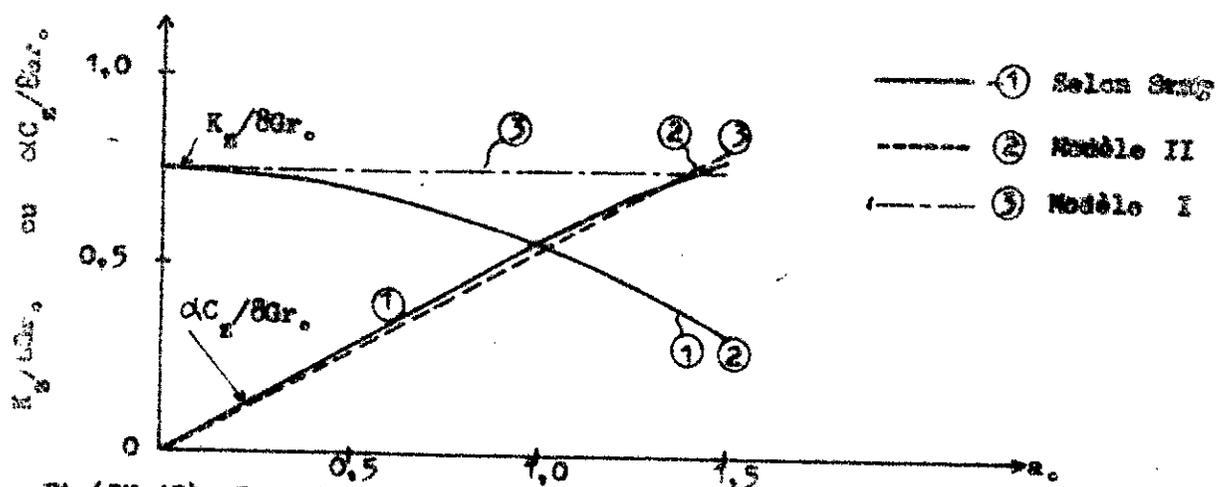
Tableau (IV-4) : Valeurs des paramètres définissant le modèle II en translation verticale pour fondation circulaire rigide .

A titre comparatif les fonctions d'impédance de raideur du modèle II ; ainsi que celles données par Sung - et pour différentes valeurs de ν - sont représentées sur les figures (IV-12) , fig (IV-13) et fig(IV-14).

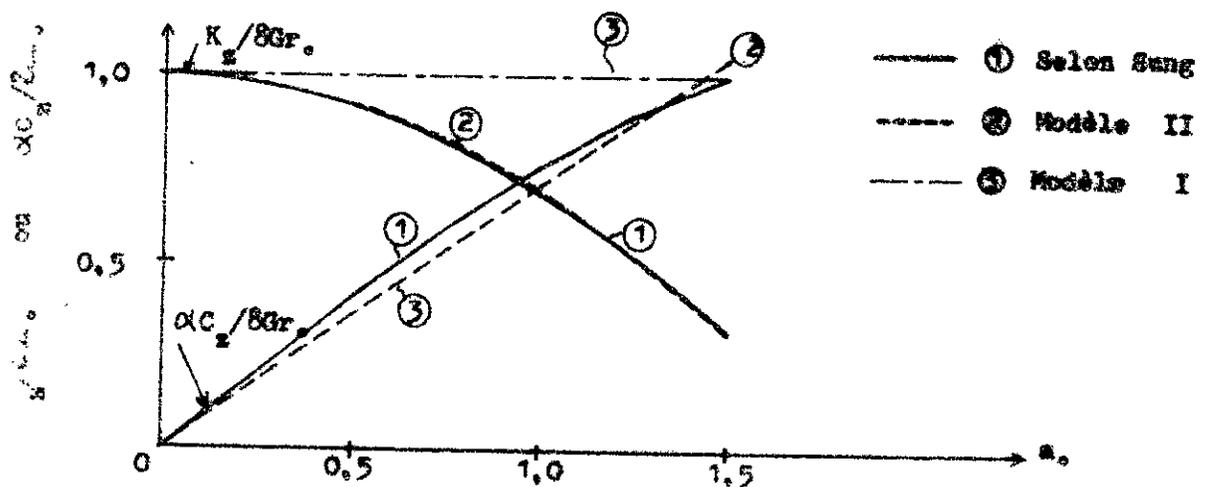
En égalisant la relation (IV-11) à (IV-11a) et la relation (IV-12) à (IV-12a) ; et tenant compte des expressions établies : (IV-7) et (IV-8), propres au modèle II et celle qui relie la palanque excitatrice " α " à la



Fig(IV-12): Fonctions de raideur en translation verticale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 0$.



Fig(IV-13): Fonctions de raideur en translation verticale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 1/3$.



Fig(IV-14): Fonctions de raideur en translation verticale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 1/2$.

vitesse de propagation des ondes transversales " V_S "; on peut passer aux grandeurs " M "; " K_0 "; et " C_0 " à partir des relations :

$$M = K_0 \psi_1 (r_0/V_S)^2 \quad \text{ou encore : } M = K_0 \psi_1 \rho r_0^2/G \quad (\text{IV-23})$$

et

$$C_0 = K_0 \psi_2 r_0/V_S \quad \text{ou encore : } C_0 = K_0 \psi_2 r_0 \sqrt{\rho/G} \quad (\text{IV-24})$$

La rigidité " K_0 " est fixée par l'ordonnée du graphe " $K_z/8Gr_0$ " à l'origine . D'après l'équation (IV-11) , à l'origine on a :

$$\frac{K(a_0=0)}{K_0} = 1 \quad (\text{IV-25})$$

Cette relation (IV-25) nous permet de déduire la rigidité " K_0 "; après avoir multiplié par " $8Gr_0$ " la grandeur à l'origine du graphe " $K_z/8Gr_0$ " qui prend la valeur : " $K_0/8Gr_0$ " (on a $K_z(a_0=0) = K(a_0=0) = K_0$).

(IV-26)

Les valeurs du paramètre " C_0 " ; et de la masse " M " du modèle II sont calculées à partir des formules établies précédemment ((IV-23) et (IV-24)) ; et sont données dans le tableau (IV-5) pour différentes valeurs du coefficient de Poisson .

ν	K_0	M	C_0
0	4,00Gr ₀	1,22pr ₀ ³	3,11 r ₀ ² √ρG
1/3	6,00Gr ₀	1,52pr ₀ ³	4,32 r ₀ ² √ρG
1/2	8,00Gr ₀	2,40pr ₀ ³	5,60 r ₀ ² √ρG

Tableau (IV-5) : Paramètres mécaniques du modèle II représentant le sol en translation verticale.

Pour représenter le sol en translation verticale par un modèle élastique - plus simple que le modèle II - sans masse vibrante (modèle I) on peut choisir une rigidité " K_I " égale à la rigidité statique K_0 (voir la relation (IV-25)). L'amortissement " C_I " - déterminé selon le même critère utilisé pour la détermination de " C_0 " du modèle II - prendra la valeur 4_0 (voir équations (IV-19) et (IV-22)). Les fonctions de raideur du modèle I représentatif du sol en translation verticale sont données sur les figures (IV-12), fig(IV-13) et fig(IV-14) pour $\nu = 0, 1/3$ et $1/2$.

IV-3.1.2 Translation horizontale :

IV-3.1.2.1 Fonctions de raideur décrites des études antérieures

Comme va précédemment au chapitre II ; Veletsos et Wei ont donné les fonctions de souplesse relatives au cas de vibration d'une fondation circulaire rigide sur un demi-espace élastique sous l'effet d'un effort horizontal extérieur. Ces auteurs ont aussi calculé les fonctions de raideur correspondantes à partir des relations de type (II-4).

Les fonctions d'impédance de raideur soit " K_x " et " ωC_x " rapportées à la rigidité fixe " K_{s0} " sont calculées et présentées dans le tableau (IV-6) ci-joint pour les valeurs de $\nu : 0, 1/3$ et $1/2$; et pour $a_0 \leq 2,5$.

a ₀	ν = 0		ν = 1/3		ν = 1/2	
	K _y /8Gr ₀	αC _x /8Gr ₀	K _x /8Gr ₀	αC _y /8Gr ₀	K _x /8Gr ₀	αC _x /8Gr ₀
0,00	0,5000	0,0000	0,6000	0,0000	0,6667	0,0000
0,25	0,4980	0,0833	0,5989	0,0873	0,6653	0,0931
0,50	0,4921	0,1679	0,5939	0,1756	0,6615	0,1874
0,75	0,4830	0,2550	0,5872	0,2660	0,6556	0,2839
1,00	0,4718	0,3457	0,5791	0,3594	0,6497	0,3835
1,25	0,4600	0,4403	0,5711	0,4560	0,6443	0,4863
1,50	0,4491	0,5386	0,5645	0,5553	0,6414	0,5917
1,75	0,4405	0,6397	0,5606	0,6563	0,6421	0,6985
2,00	0,4353	0,7422	0,5598	0,7573	0,6473	0,8047
2,50	0,4328	0,9442	0,5652	0,9533	0,6670	1,0079

Tableau (IV-6) : Fonctions d'impédance de raideur du sol pour fondation

circulaire rigide en translation horizontale selon

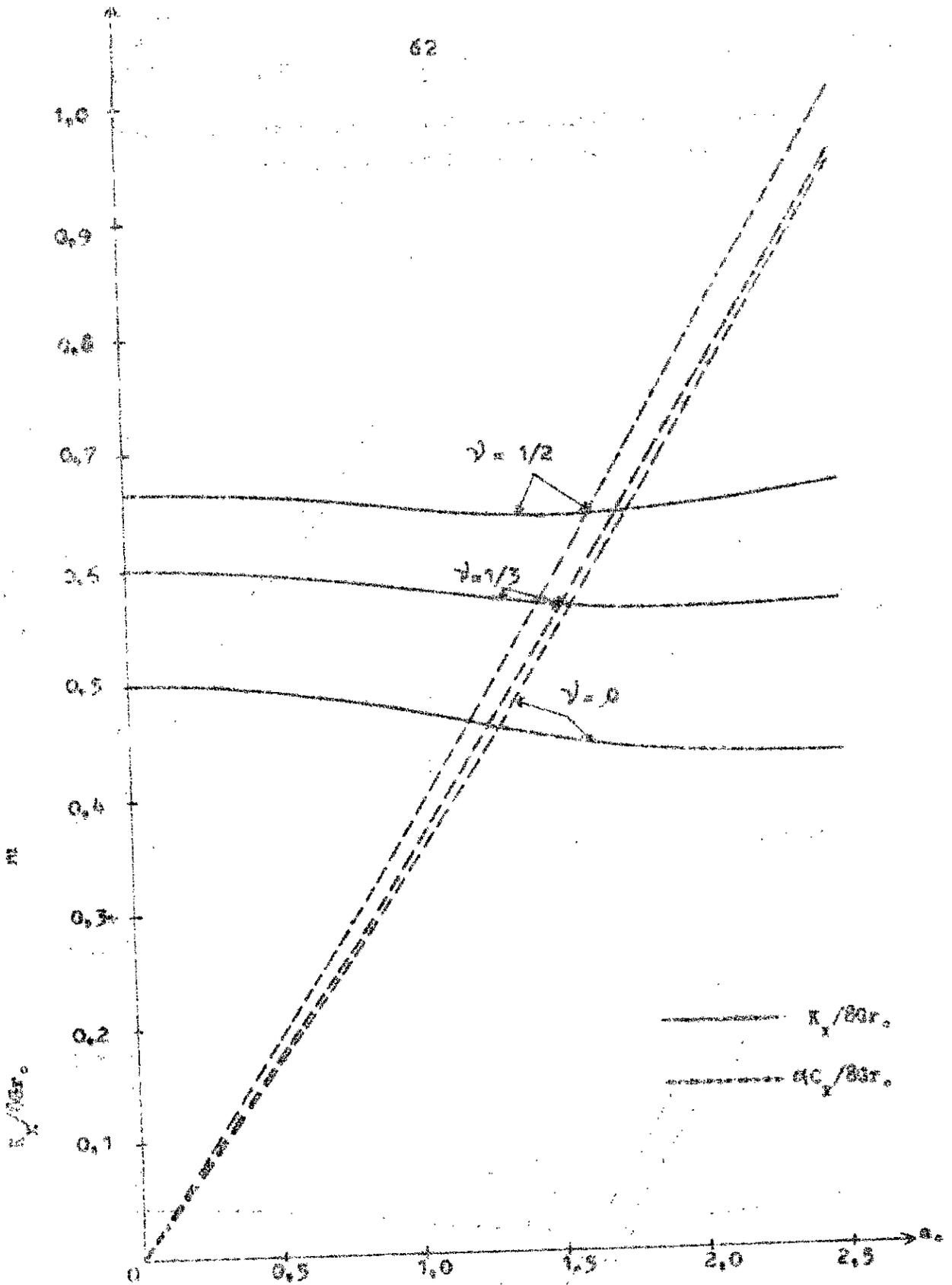
Veletsos et Wei .

Les graphes représentant ces fonctions de raideur adimensionnelles sont données sur la figure (IV-15) .

IV-3.1.2.2 Modélisation proposée :

a - Modèle II :

La figure (IV-15) montre que les variations de la partie réelle des fonctions d'impédance peuvent être assez bien représentées par des paraboles dans la plage des fréquences $a_0 \leq 2$; la partie



Fig(IV-15): Fonctions de raideur en translation horizontale pour fondations circulaires rigides (d'après Veletans et Wei) .

imaginaire à une variation sensiblement linéaire .

Le modèle II (dont les variations de la partie réelle des fonctions de raideur sont paraboliques , et celles de la partie imaginaire sont linéaires) peut ainsi donner une bonne approche pour un choix convenable des paramètres mécaniques .

La parabole d'approximation et la droite d'approximation obtenues par tâtonnement sont caractérisées respectivement par les valeurs numériques sans dimensions ψ_1 et ψ_2 (voir équations (IV-11a) et (IV-12b) en §IV-3.1.1.2) . Ces valeurs sont donc résumées dans le tableau (IV-7) en fonction du coefficient de Poisson .

ν	0	1/3	1/2
ψ_1	0,037	0,022	0,012
ψ_2	0,720	0,620	0,588

Tableau (IV-7) : Valeurs des paramètres sans dimensions définissant le modèle II en translation horizontale pour fondation circulaire rigide .

Les relations permettant de déterminer les paramètres mécaniques du modèle II telles quelles sont définies en § IV-3.1.1.2 ; satisfont les grandeurs du tableau ci- dessous pour un coefficient de Poisson variable.

ν	K_0	C_0	M
0	4,00Gr.	2,88 $r_0^2 \sqrt{\rho G}$	0,15 ρr_0^3
1/3	4,80Gr.	3,00 $r_0^2 \sqrt{\rho G}$	0,11 ρr_0^3
1/2	5,34Gr.	3,14 $r_0^2 \sqrt{\rho G}$	0,06 ρr_0^3

Tableau (IV-8) : Rigidité , amortissement , et masse apparente du modèle II représentatif du sol - de fondation circulaire rigide - en translation horizontale.

Une comparaison entre les graphes des fonctions de raideur données par Veletsos et Wei et celles du modèle II est représentée sur les figures: fig(IV-16) , fig(IV-17) et fig(IV-18) pour différentes valeurs du coefficient de Poisson ν (0 , 1/3 , 1/2) .

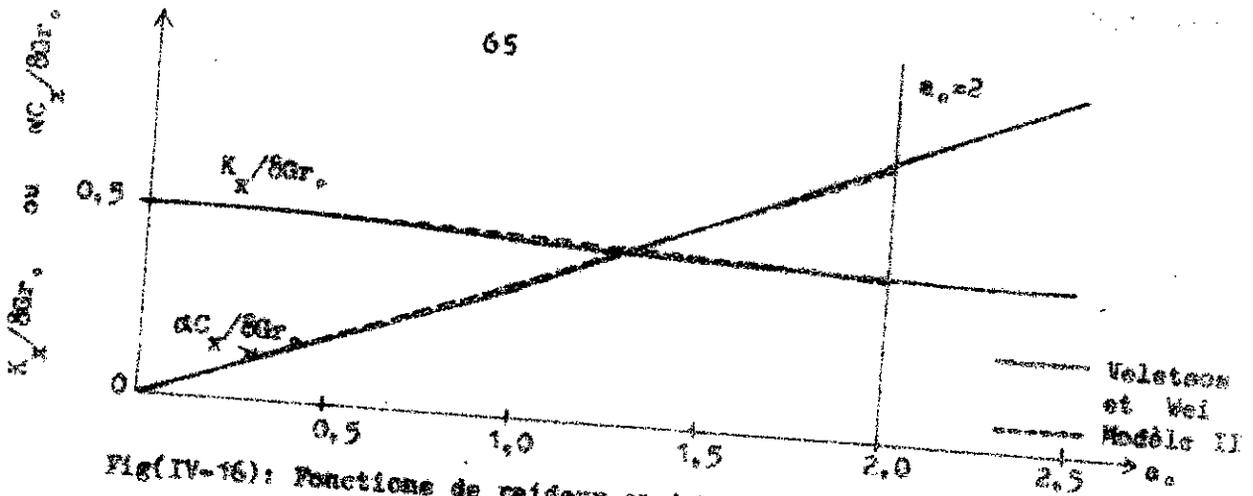
b - Modèle III :

Le modèle II -représentant le sol en translation horizontale - donne une bonne approche pour la valeur des fonctions d'impédance dans l'intervalle choisi . Toutefois , en gradient l'écart est maximal à la borne supérieure ($a_0 = 2$) , ce qui entraînerait des courbes rapidement croissantes sur les rigidités si le modèle était utilisé au delà de $a_0=2$.

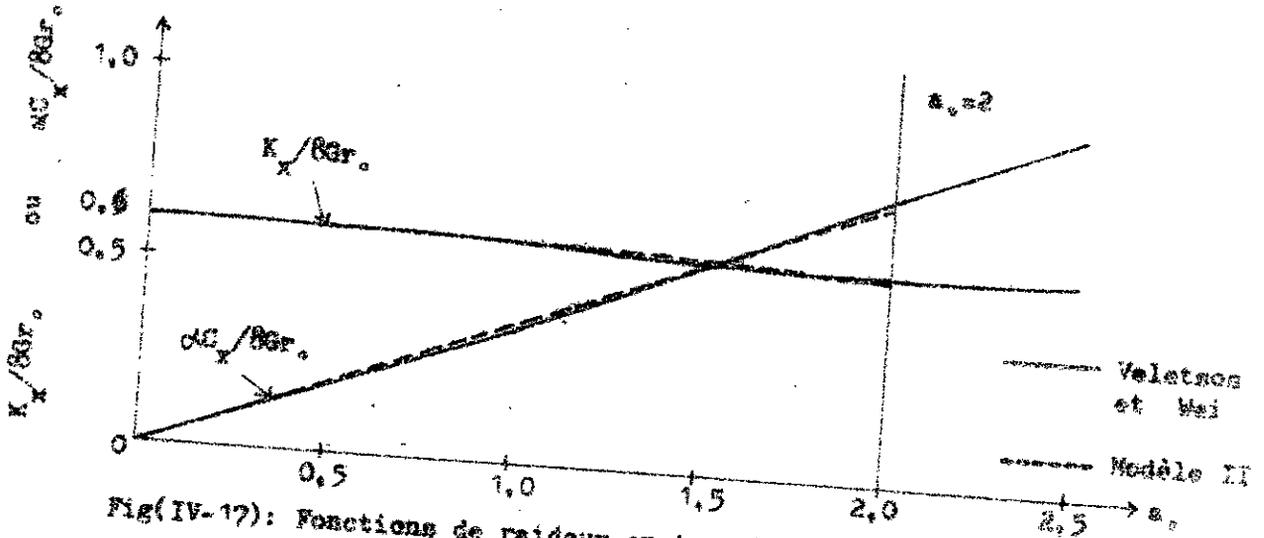
On pourrait aussi rechercher un modèle moins simple mais plus précis pour cette composante du mouvement à l'aide du modèle III . Ainsi une meilleure approche peut être obtenue en utilisant le modèle III dont les graphes de fonctions d'impédance représentés sur la figure(IV-2) ont une forme voisine de celle des graphes déduits de Veletsos et Wei (voir fig(IV-15)) .

Les équations (IV-15) et (IV-16) sont donc utilisées afin de déterminer par tâtonnement les paramètres sans dimension du modèle III - c'est à dire ξ_1 , ξ_2 et δ - qui permettent aux grandeurs " K/K_1 " et " $\alpha C/C_1$ " de s'ajuster à ceux de Veletsos et Wei .

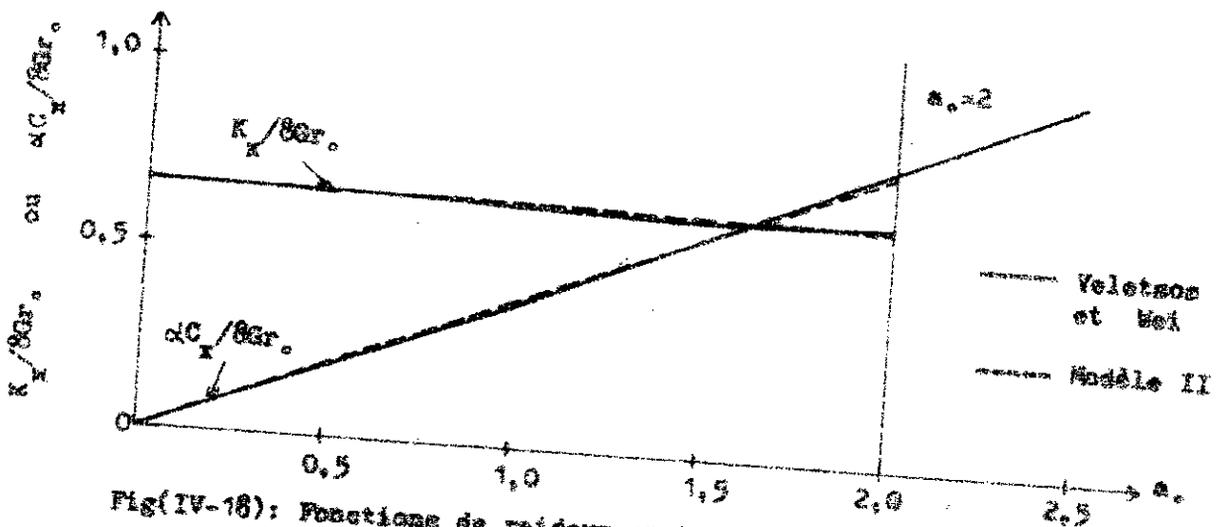
Les graphes des fonctions d'impédance de raideur de sol " $K_x/8Gr_0$ " et " $\alpha C_x/8Gr_0$ " se rencontrent en un point dont les coordonnées sont désignées par (a_0 , K^*) . Les paramètres ξ_1 , ξ_2 , et δ



Fig(IV-16): Fonctions de raideur en translation horizontale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 0$.



Fig(IV-17): Fonctions de raideur en translation horizontale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 1/3$.



Fig(IV-18): Fonctions de raideur en translation horizontale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 1/2$.

du modèle mécanique sont ajustés par tâtonnement pour donner notamment une côte voisine de celle des graphes de référence pour le point de concours des courbes de " K/K_1 " et " $\alpha C/K_1$ ".

Par affinité horizontale de rapport (β_1/a_0), on peut ajuster la coïncidence en abscisse du point de concours ; et procéder à des essais successifs pour ajuster également la forme de la courbe de " K/K_1 " (celle de " $\alpha C/K_1$ " restant pratiquement linéaire dans le domaine utile).

Les valeurs de ces paramètres sans dimensions ainsi obtenues sont résumées sur le tableau suivant (en fonction du coefficient ν) :

ν	ξ_1	ξ_2	ξ
0	0,260	0,910	0,630
1/3	0,260	0,910	0,700
1/2	0,250	0,875	0,820

Tableau (IV-9) : Paramètres sans dimensions du modèle III représentatif du sol en translation horizontale pour fondation circulaire superficielle rigide .

Suivant la valeur du coefficient de Poisson les valeurs des fonctions d'impédance de raideur du modèle III affine , représentatif du sol en translation horizontale sont données sur les tableaux (IV-10), (IV-11) et tab(IV-12).

β_1	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_1
0,00	0,2841	0,0000	0,00
0,10	0,2823	0,0633	0,33
0,20	0,2770	0,1283	0,67
0,30	0,2690	0,1969	1,00
0,35	0,2676	0,2330	1,17
0,39	0,2670	0,2628	1,30
0,40	0,2600	0,2704	1,33
0,50	0,2524	0,3498	1,67
0,60	0,2485	0,4352	2,00

$a_0 = 3,33\beta_1$

= point de concours de $\frac{K}{K_1}$ & $\frac{\alpha C}{K_1}$

Tableau (IV-10) : Fonctions d'impédance de raideur du modèle III :
représentant le sol en translation horizontale
pour fondation circulaire rigide et pour $\nu = 0$.

β_1	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_1
0,3033	0,4021	0,0000	0,00
0,200	0,3984	0,1200	0,59
0,400	0,3898	0,2479	1,08
0,510	0,3844	0,3732	1,56
0,595	0,3842	0,3841	1,60
0,600	0,3842	0,3877	1,61
0,744	0,3878	0,4947	2,00

= point de concours de $\frac{K}{K_1}$ & $\frac{\alpha C}{K_1}$

$a_0 = 2,69\beta_1$

Tableau (IV-12) : Fonctions d'impédance de raideur du modèle XXI
représentant le sol en translation horizontale
pour fondation superficielle circulaire rigide
et pour $\nu = 1/2$.

β_1	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_0
0,000	0,3259	0,0500	0,00
0,100	0,3275	0,0532	0,33
0,200	0,3297	0,1279	0,66
0,300	0,3182	0,1955	0,99
0,400	0,3121	0,2564	1,32
0,450	0,3094	0,3095	1,45
0,450	0,3089	0,3073	1,50
0,500	0,3072	0,3418	1,85
0,607	0,3055	0,4260	2,00

sur point de concours de

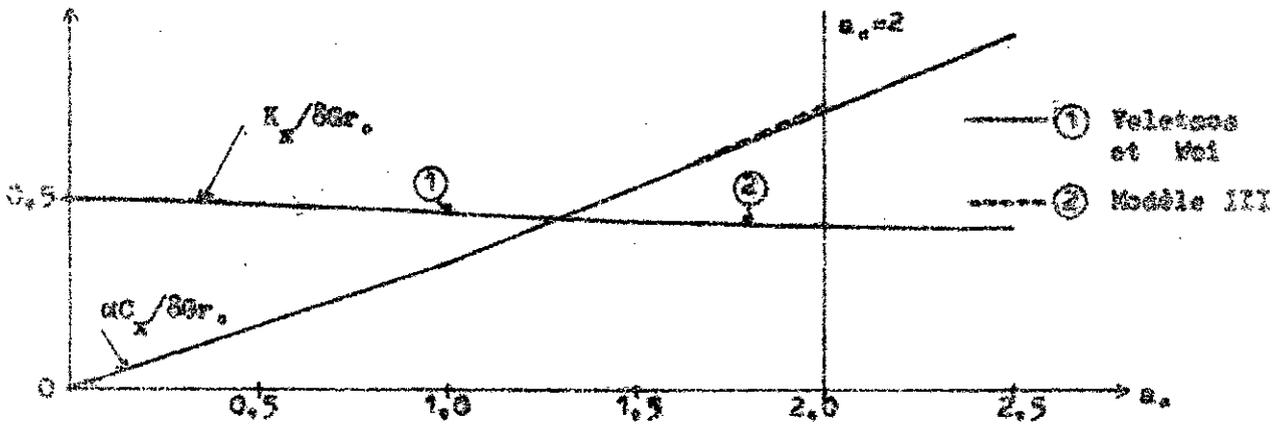
$$\frac{K}{K_1} \text{ et } \frac{\alpha C}{K_1}$$

$$a_0 = 3,3E$$

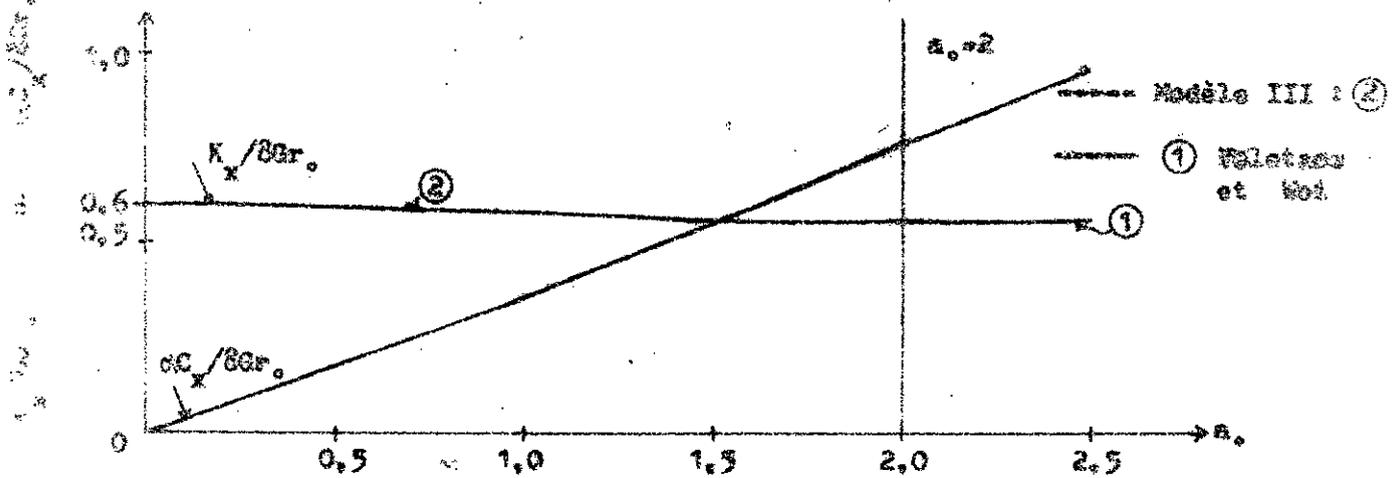
Tableau (IV-11) : Fonctions d'impédance de raideur du modèle III représentant le sol en translation horizontale pour fondation circulaire superficielle rigide et pour $\nu = 1/3$.

Sur les figures (IV-19) ; (IV-20) et fig(IV-21) sont tracés les graphes des fonctions K/K_1 et $\alpha C/K_1$ - correspondants aux valeurs des tableaux précédents- et sont comparés aux graphes des fonctions de raideur de Volozec et Sai.

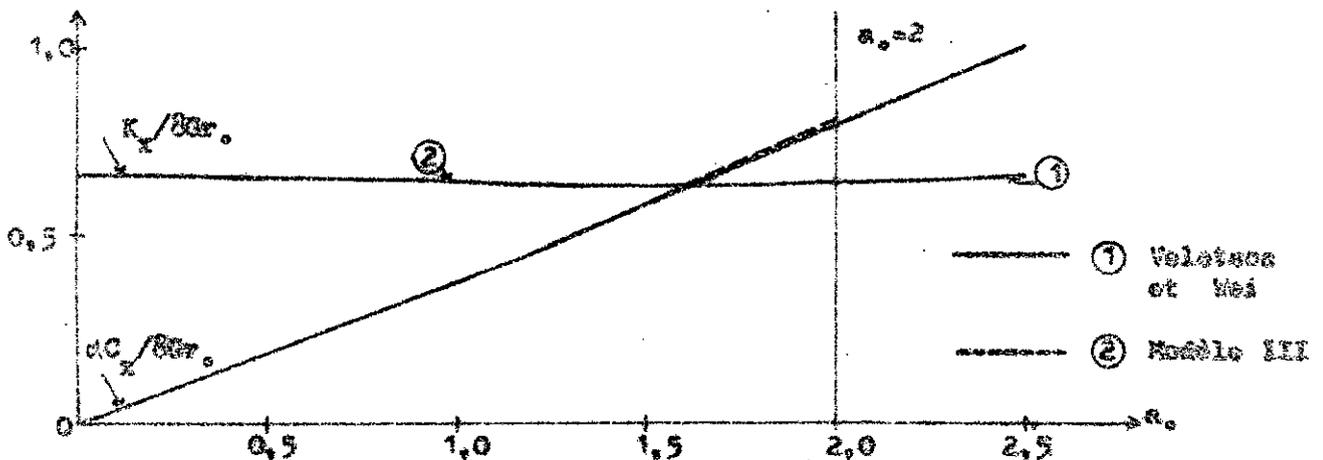
On remarque une bonne coïncidence sur tout l'intervalle, en particulier, on remarque la divergence γ sur une partie d'intervalle observée pour le modèle II (voir fig(IV-16) ; fig(IV-17) et fig(IV-18)), et le modèle pourrait être étendu avec ajustements éventuels à des valeurs sensiblement plus élevées de a_0 .



Fig(IV-19): Fonctions de raideur en translation horizontale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 0$.



Fig(IV-20): Fonctions de raideur en translation horizontale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 1/3$.



Fig(IV-21): Fonctions de raideur en translation horizontale pour une fondation circulaire rigide et pour $\nu = 1/2$.

À l'origine du graphe de la fonction " K/K_1 " donnée par la relation (IV-5) on a :

$$\frac{K(\beta_1=0)}{K_1} = \frac{\delta^2}{\delta^2 + 1}$$

Cette valeur étant fixée par l'ordonnée à l'origine du graphe " $K_x/8Gr_0$ " soit " K'' ". On peut écrire :

$$\frac{K_x(a_0=0)}{8Gr_0} = K'' \quad \text{avec : } K(\beta_1=0) = K_x(a_0=0)$$

Où encore :

$$K_1 = \frac{1 + \delta^2}{\delta^2} K'' 8Gr_0 \quad (\text{IV-27})$$

Tenant compte des expressions établies (IV-7) et (IV-8) propres au modèle III, et celles définissant la vitesse de propagation des ondes transversales en fonction de la pulsation excitatrice " ω " ; on obtient les expressions des paramètres dimensionnels du modèle mécanique " M " ; " K_1 " ; " K_2 " ; " C_1 " et " C_2 " .

Soit :

$$K = K_1 \left(\frac{\beta_1}{a_0} \right)^2 \frac{r_0^2}{\delta}$$

Expression qui peut s'écrire également sous la forme :

$$M = K'' \frac{(1 + \delta^2)}{\delta^2} \left(\beta_1/a_0 \right)^2 8Gr_0^3 \quad (\text{IV-28})$$

L'amortissement " C_1 " est calculé à partir de l'équation :

$$C_1 = 16 \int_1^\infty K'' \frac{1 + \delta^2}{\delta^2} \left(\beta_1/a_0 \right)^2 r_0^2 \sqrt{\delta} \quad (\text{IV-29})$$

La rigidité " K_2 " se calcule à partir de la relation :

$$K_2 = \delta^2 K_1$$

Ou encore :

$$K_2 = (\delta^2 + 1) K'' 8gr. \quad (IV-30)$$

L'amortissement " C_2 " est lié à l'amortissement " C_1 " par l'expression:

$$C_2 = \delta \left(\frac{f_2}{f_1} \right) C_1$$

qui s'écrit également en tenant compte de (IV-29) :

$$C_2 = \delta f_2 \frac{(\delta^2 + 1)}{\delta^2} 16 K'' (\beta_1/a_0) r_0^2 \sqrt{\rho G} \quad (IV-31)$$

Les valeurs de ces paramètres (correspondant aux trois valeurs du coefficient de Poisson 0, 1/3, 1/2) sont données au tableau ci-dessous .

ν	K_1	C_1	M	K_2	C_2
0	14,08gr.	0,66r. ² √ρG	1,27 pr. ³	5,59gr.	3,09r. ² √ρG
1/3	14,60gr.	2,30r. ² √ρG	1,34 pr. ³	7,15gr.	5,63r. ² √ρG
1/2	13,26gr.	2,02r. ² √ρG	1,83 pr. ³	8,92gr.	5,80r. ² √ρG

Tableau(IV-13): Paramètres mécaniques du modèle III représentant le sol en translation horizontale pour une fondation superficielle circulaire rigide .

IV-3.1.3 Rotation en basculement :IV-3.1.3.1 Fonctions de raideur déduites des études antérieures:

Sous l'effet d'un moment de rotation en basculement extérieur Veletsos et Wei ont calculé les fonctions d'impédance de souplesse pour le cas de vibration de fondation circulaire rigide reposant sur un demi-espace élastique .

Les fonctions d'impédance de raideur adimensionnelles " $K_{\theta}/8Gr_0^3$ " et " $\alpha C_{\theta}/8Gr_0^3$ " correspondantes sont calculées à partir des relations (II-5) , et figurent au tableau donné ci-après pour $a_0 \leq 2,5$ et pour différentes valeurs du coefficient de Poisson .

a_0	$\nu = 0$		$\nu = 1/3$		$\nu = 1/2$	
	$K_{\theta}/8Gr_0^3$	$\alpha C_{\theta}/8Gr_0^3$	$K_{\theta}/8Gr_0^3$	$\alpha C_{\theta}/8Gr_0^3$	$K_{\theta}/8Gr_0^3$	$\alpha C_{\theta}/8Gr_0^3$
0,00	0,3333	0,0000	0,5000	0,0000	0,6667	0,0000
0,25	0,3264	0,0015	0,4913	0,0019	0,6547	0,0023
0,50	0,3093	0,0106	0,4691	0,0126	0,6239	0,0163
0,75	0,2884	0,0291	0,4410	0,0352	0,5846	0,0459
1,00	0,2680	0,0547	0,4126	0,0676	0,5441	0,0880
1,25	0,2493	0,0849	0,3862	0,1068	0,5054	0,1383
1,50	0,2319	0,1181	0,3620	0,1500	0,4691	0,1933
1,75	0,2163	0,1540	0,3397	0,1976	0,4344	0,2512
2,00	0,2015	0,1920	0,3196	0,2463	0,4008	0,3107
2,50	0,1760	0,2751	0,2820	0,3522	0,3354	0,4329

Les graphes représentant ces fonctions de raideur adimensionnelles " $K_{\theta} / 8Gr_0^3$ " et " $\alpha C_{\theta} / 8Gr_0^3$ " sont donnés sur les figures (IV-22).

IV-3.1.3.2 Modélisation proposée :

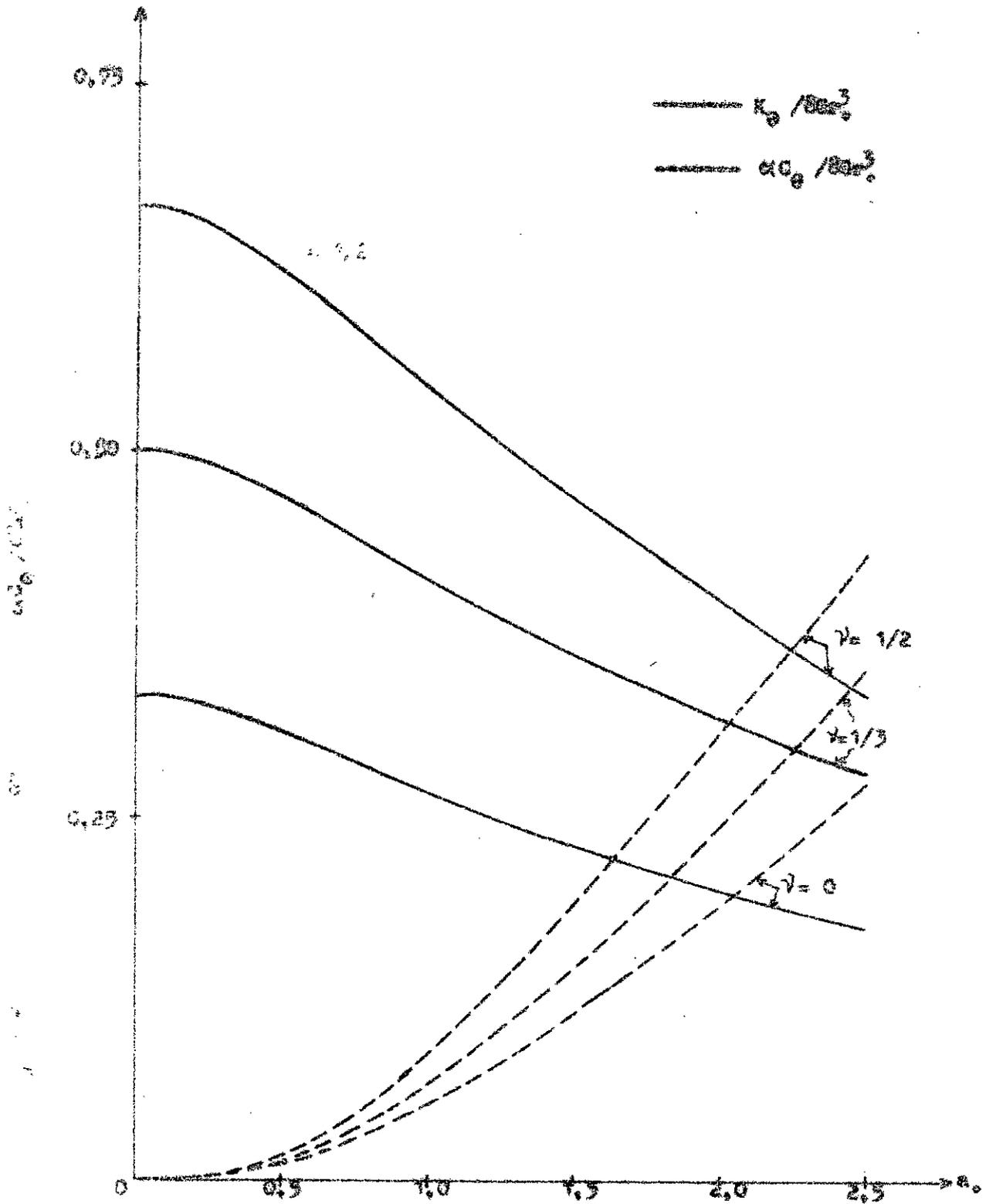
Les graphes des fonctions d'impédance de raideur du modèle IV proposé pour étudier la composante du mouvement de basculement peuvent présenter des formes différentes (voir fig(IV-5) à fig(IV-10)).

Sur les figures (IV-10) et (IV-9) ; on voit que les variations de la partie réelle des fonctions de raideur du modèle IV (correspondant à $K_2 = 0$) ont dans un certain domaine une forme analogue à celle des fonctions d'impédance de raideur de Veletsos et Wei données sur la figure précédente. Les variations de la partie imaginaire des fonctions de raideur de ces modèles sont presque linéaires elles ne sont donc pas en conformité avec l'allure parabolique des variations de " $\alpha C_{\theta} / 8Gr_0^3$ " de Veletsos et Wei . Pour simuler la variation parabolique de " $\alpha C_{\theta} / 8Gr_0^3$ " avec tangente horizontale à l'origine , il faut annuler l'amortissement " C_1 " (voir expression (IV-18)).

En tâtonnant sur la valeur du paramètre adimensionnel " ν " on recherche un modèle ayant la même côte , " K'' " (du point de concours des graphes de K/K_1 et $\alpha C/K_1$) que celle des graphes de Veletsos et Wei donnés sur la figure(IV-22) . Par affinité horizontale de rapport (β_1/a_0) comme cela a été fait effectivement pour le modèle III , on obtient l'ajustement précis recherché .

Les valeurs du paramètre adimensionnel " ν " , sont données sur le tableau ci-après (pour $\nu = 0 , 1/3 , 1/2$) .

ν	0	1/3	1/2
δ	0,77	0,79	0,78



Fig(IV-22): Fonctions de raidour en rotation de basculement pour une fondation circulaire rigide, selon Voletos et Wei.

Les relations (IV-19) et (IV-20) satisfait aux valeurs des tableaux (IV-15), (IV-16) et (IV-17). Ces valeurs représentent les fonctions de raideur du modèle affine en basculement pour fondation circulaire superficielle rigide.

β_1	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_0
0,00	1,0000	0,0000	0,00
0,13	0,9848	0,0025	0,03
0,25	0,9435	0,0184	0,46
0,50	0,8241	0,1142	0,91
0,75	0,7114	0,2812	1,37
1,00	0,6279	0,4834	1,82
1,10	0,6023	0,5676	2,00

l'abscisse du point de concours du graphe de la partie réelle avec celui de la partie imaginaire donne :

$$a_0 = 1,82 \beta_1$$

Tableau (IV-15) : Fonctions de raideur du modèle IV représentant le sol en basculement pour fondation circulaire rigide et pour $\nu = 0$.

β_1	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_0
0,00	1,0000	0,0000	0,00
0,15	0,9817	0,0032	0,28
0,28	0,9328	0,0234	0,55
0,55	0,7963	0,1419	1,11
0,82	0,6748	0,3392	1,66
1,00	0,6157	0,4864	2,01

l'abscisse du point de concours du graphe de la partie réelle avec celui de la partie imaginaire donne la relation :

$$a_0 = 2,01 \beta_1$$

Tableau (IV-16) : Fonctions de raideur du modèle IV pour fondation circulaire rigide vibrant en mode de basculement et pour $\nu = 1/3$.

β_1	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_0
0,000	1,0000	0,0000	0,00
0,125	0,9848	0,0024	0,25
0,250	0,9432	0,0182	0,50
0,375	0,8852	0,0549	0,75
0,500	0,8228	0,1136	1,00
0,625	0,7621	0,1906	1,25
0,750	0,7077	0,2810	1,50
0,875	0,6610	0,3803	1,75
1,000	0,6217	0,4850	2,00

l'abscisse du point de concours du graphe de la partie réelle avec celui de la partie imaginaire donne la relation :

$$a_0 = 2,00 \beta_1$$

Tableau (IV-17) : Fonctions de raideur du modèle IV en mode de basculement pour fondation circulaire rigide et pour $\nu = 1/2$.

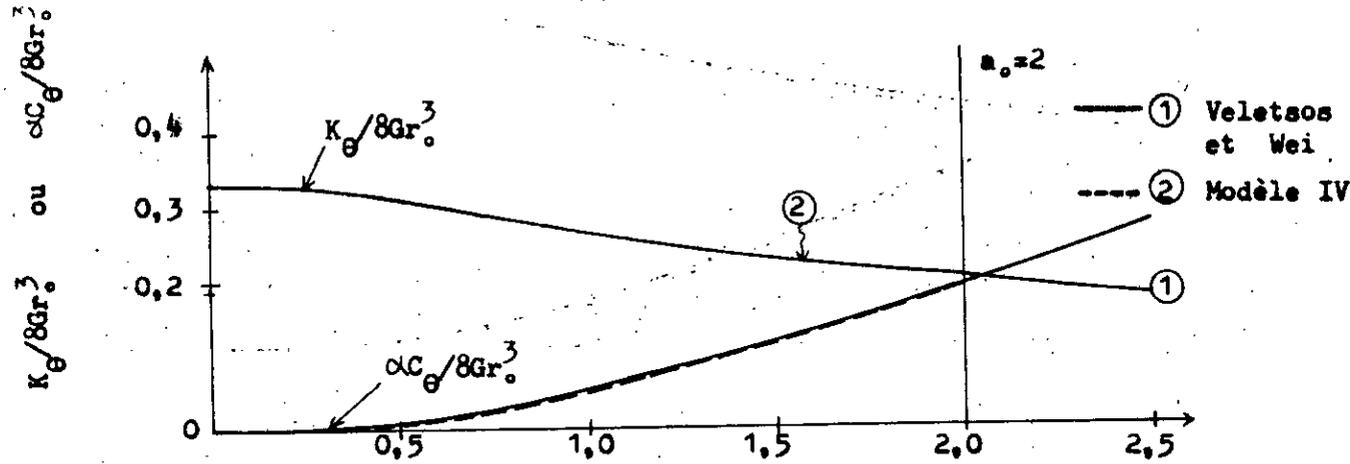
Pour différentes valeurs du coefficient de Poisson ν , une comparaison entre les graphes de $(K/K_1 ; \alpha C/K_1)$ et ceux de $(K_0 ; \frac{\alpha C_0}{8cr_0^3})$ est représentée sur les figures (IV-23), (IV-24) et fig(IV-25).

A l'origine du graphe de la fonction " K/K_1 " représentant la variation de la relation (IV-19) en fonction de " β_1 " on a :

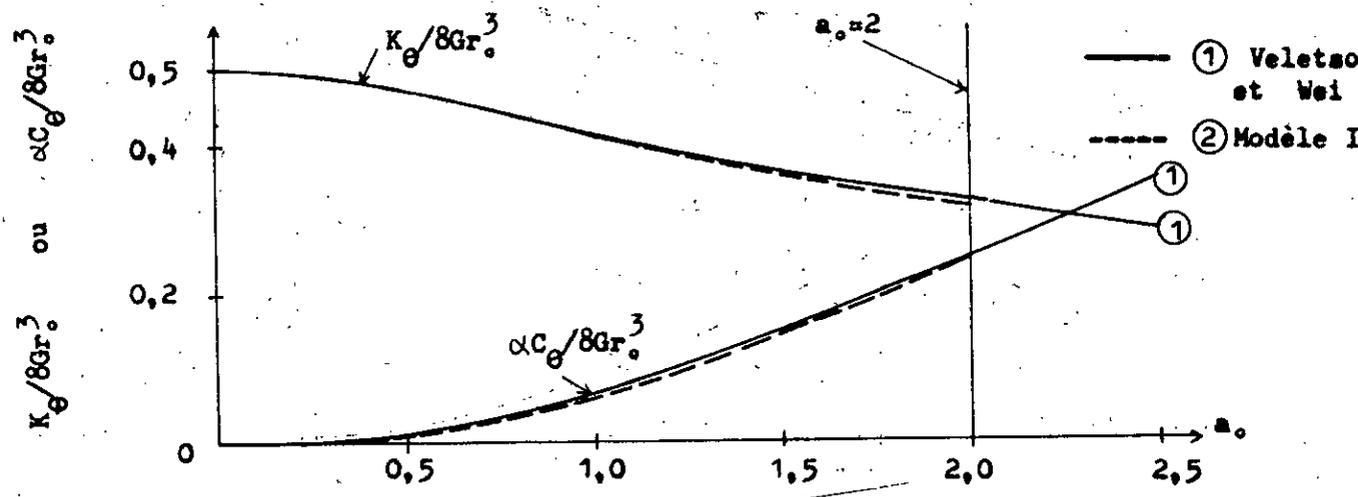
$$K(\beta_1 = 0) / K_1 = 1$$

L'ordonnée à l'origine du graphe de la fonction " $K_0(a_0=0) / 8cr_0^3$ " étant K''' , on peut écrire :

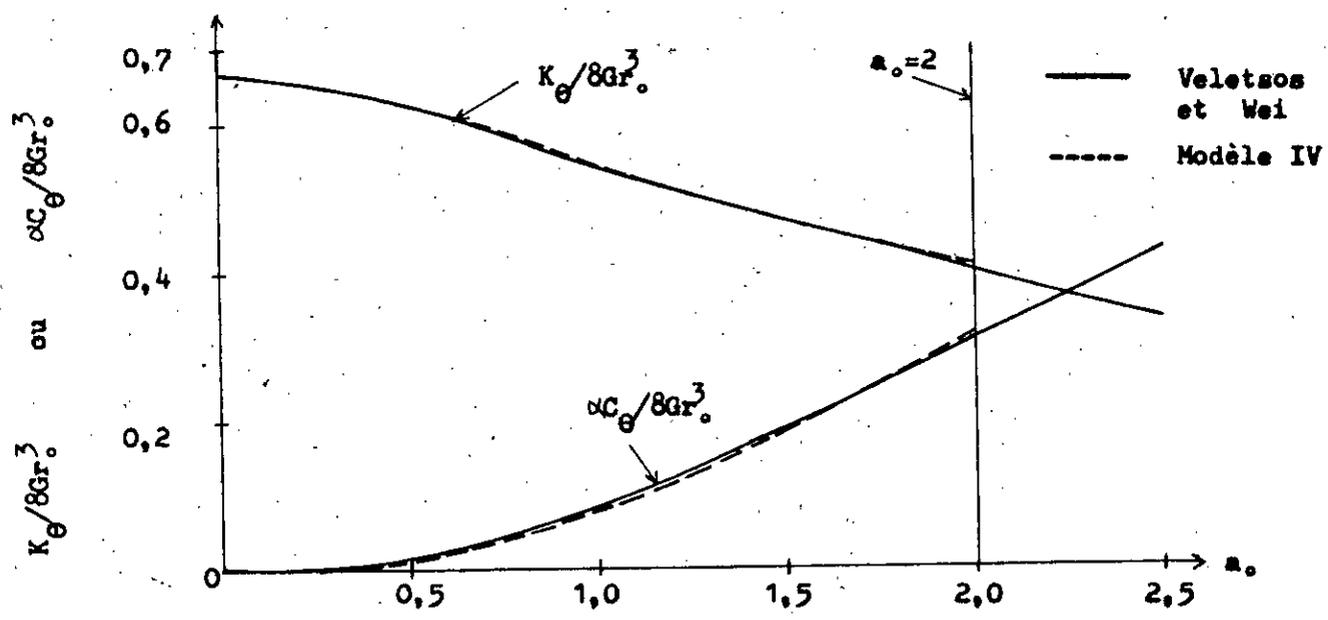
$$K_0(a_0=0) / 8cr_0^3 = K''''$$



Fig(IV-23): Fonctions de raideur en rotation de basculement pour fondations circulaires rigides et pour $\nu = 0$.



Fig(IV-24): Fonctions de raideur en rotation de basculement pour fondations circulaires rigides et pour $\nu = 1/3$.



Fig(IV-25): Fonctions de raideur en rotation de basculement pour fondations circulaires rigides et pour $\nu = 1/2$.

Les deux expressions précédentes nous permettent d'établir la relation donnant la rigidité " K_1 " soit :

$$K_1 = K^{''''} \text{EGr}_0^3 \quad (\text{IV-32})$$

En utilisant les expressions (IV-7) et (IV-8) relatives au modèle IV ; et celle qui relie la vitesse de propagation des ondes transversales à la pulsation excitatrice " α " , on peut passer aux paramètres mécaniques du modèle IV (" M " et " C_2 ") à partir des relations suivantes :

L'inertie massique " M " est égale à :

$$M = K_1 (\beta_1/a_0)^2 r_0^2 \rho/G$$

Elle s'exprime également par :

$$M = K^{''''} \cdot 8 (\beta_1/a_0)^2 \rho r_0^5 \quad (\text{IV-33})$$

L'amortissement " C_2 " est :

$$C_2 = 8K^{''''} (\beta_1/a_0) r_0^4 \sqrt{\rho G} \quad (\text{IV-34})$$

Les valeurs de " $K^{''''}$ " et de " δ " sont regroupées au tableau donné ci-dessous pour différentes valeurs du coefficient de Poisson ν .

ν	$K^{''''}$	β_1/a_0	δ
0	0,333	0,549	0,770
1/3	0,500	0,498	0,790
1/2	0,667	0,500	0,780

Tableau (IV-18) : Valeurs de " $K^{''''}$ " ; " β_1/a_0 " et " δ " du modèle IV représentant le sol en basculement pour fondation circulaire rigide .

Les grandeurs " K_1 " ; " C_2 " et " M " - déduites des relations (IV-32) ; (IV-33) et (IV-34) - du modèle IV réduit donc à une rigidité K_2 nulle et à un amortissement C_1 nul ; sont données sur le tableau (IV-19) .

ν	K_1	C_2	M
0	$2,70 \text{ Gr.}^3$	$1,13 r_0^4 \sqrt{\rho G}$	$0,81 \rho r_0^5$
1/3	$4,00 \text{ Gr.}^3$	$1,57 r_0^4 \sqrt{\rho G}$	$0,99 \rho r_0^5$
1/2	$5,33 \text{ Gr.}^3$	$2,08 r_0^4 \sqrt{\rho G}$	$1,33 \rho r_0^5$

Tableau (IV-19) : Rigidité ; amortissement et inertie polaire massique M du modèle IV représentant le sol pour fondation superficielle circulaire rigide vibrant en basculement .

IV-3.2 Fondations rectangulaires rigides sur demi-espace élastique :

IV-3.2.1 Translation verticale :

IV-3.2.1.1 Fonctions de raideur déduites des études antérieures :

Les fonctions de souplesse de Lucco et Wong relatives à la vibration verticale d'une fondation rectangulaire rigide, reposant sur un demi-espace élastique de coefficient $\nu = 1/3$ sont présentées dans les tableaux (IV-20) ; (IV-21) et (IV-22) pour respectivement $c/b = 1/4$, $1/2$ et 1 .

A partir des formules (II-9) de Lucco et Wong (v . p. voir SII-2.5.3) on déduit les fonctions de raideur . Sur les mêmes tableaux sont présentées aussi les fonctions de raideur adimensionnelles pour $a_0 \leq 2,5$; soit $K_z/8Gb$ et $\alpha C_z/8Gb$.

a_0	F_{1v}	F_{2v}	$K_z/8Gb$	$\alpha C_z/8Gb$
0,00	0,2897	0,0000	0,4319	0,0000
0,25	0,2840	0,0364	0,4330	0,0555
0,50	0,2680	0,0703	0,4364	0,1145
0,75	0,2499	0,0944	0,4377	0,1654
1,00	0,2308	0,1101	0,4412	0,2105
1,25	0,2111	0,1230	0,4421	0,2576
1,50	0,1917	0,1301	0,4464	0,3030
2,00	0,1570	0,1420	0,4379	0,3960
1,75	0,1732	0,1389	0,4392	0,3527
2,50	0,1289	0,1431	0,4344	0,4822

Tableau(IV-20) : Fonctions de souplesse et de raideur en translation verticale ($\frac{c}{b} = 1/4$ et $\nu = 1/3$) , selon Lucco et Wong .

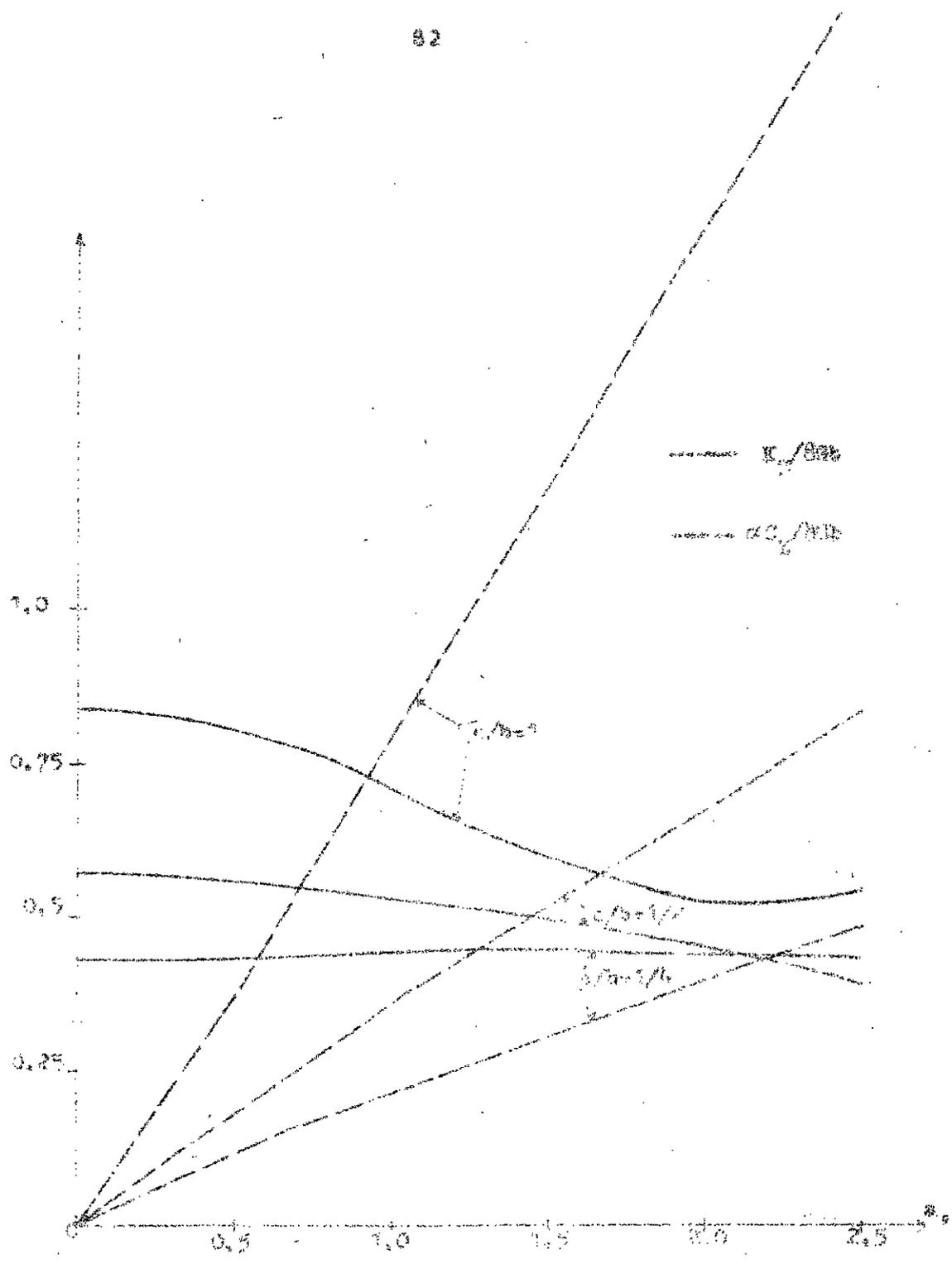
a_0	F_{1V}	F_{2V}	$K_z/8Gb$	$\alpha C_z/8Gb$
0,00	0,2187	0,0000	0,5716	0,0000
0,25	0,2144	0,0362	0,5669	0,0957
0,50	0,2050	0,0650	0,5541	0,1756
0,75	0,1850	0,0900	0,5464	0,2658
1,00	0,1620	0,1100	0,5291	0,3586
1,25	0,1415	0,1200	0,5138	0,4357
1,50	0,1210	0,1265	0,4939	0,5160
1,75	0,1030	0,1281	0,4769	0,5927
2,00	0,0863	0,1278	0,4536	0,6717
2,50	0,0600	0,1250	0,3901	0,8398

Tableau (IV-21) : Fonctions de souplesse et de raideur en translation verticale ($c/b = 1/2$ et $\nu = 1/3$) selon Luco et Wong .

a_0	F_{1V}	F_{2V}	$K_z/8Gb$	$\alpha C_z/8Gb$
0,00	0,1491	0,0000	0,8384	0,0000
0,25	0,1440	0,0320	0,8272	0,1838
0,50	0,1288	0,0590	0,8022	0,3675
0,75	0,1025	0,0780	0,7723	0,5877
1,00	0,0781	0,0880	0,7052	0,7946
1,25	0,0583	0,0884	0,6498	0,9853
1,50	0,0420	0,0840	0,5952	1,1900
1,75	0,0300	0,0766	0,5540	1,4140
2,00	0,0230	0,0703	0,5255	1,6062
2,50	0,0151	0,0568	0,5464	2,0554

Tableau (IV-22) : Fonctions de souplesse et de raideur en translation verticale pour fondation carrée ($c/b = 1$) et $\nu = 1/3$; selon Luco et Wong .

Les fonctions de raideur adimensionnelles $K_z/8Gb$ et $\alpha C_z/8Gb$ sont représentées sur la figure(IV-26) en fonction de la variable a_0 .



Fig(IV-28): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en translation verticale pour $\nu = 0.3$, d'après Liao et Wong.

IV-3.2.1.2

Modélisation proposée :

Le graphe de la partie réelle des fonctions de raideur du sol en mode de translation verticale ayant une forme sensiblement parabolique pour $a_0 \ll 2$ (voir figure (IV-26)) qui correspond bien aux graphes de la partie réelle du modèle II. Dans le cas particulier de $c/b = 1/4$, la partie réelle est sensiblement constante, la parabole se réduit à une droite ($\psi_1 = 0$) ce qui correspond à une masse de sol associée $M = 0$; on est donc ramené au modèle I du ressort de sol à rigidité constante.

La forme linéaire du graphe de la partie imaginaire de ces fonctions de raideur correspond à celle du modèle II et I. Les paraboles et droites d'approximation ont comme précédemment selon les formules (IV-21) et (IV-22) les équations :

$$K/K_0 = 1 - \psi_1 a_0^2$$

$$\alpha C/K_0 = \psi_2 a_0$$

Les paramètres adimensionnels ψ_1 et ψ_2 sont obtenus par tâtonnement et ajustement aux graphes de fonctions de raideur de Luco et Wong. Leurs valeurs numériques sont données - pour $c/b = 1/4$, $1/2$ et 1 - au tableau ci-après.

c/b	1/4	1/2	1
ψ_1	0,000	0,060	3,108
ψ_2	0,478	0,595	0,950

Tableau (IV-23) : Valeurs des paramètres sans dimensions ψ_1 et ψ_2 définissant le modèle II en translation verticale pour fondations rectangulaire rigide et $\nu = \frac{1}{3}$.

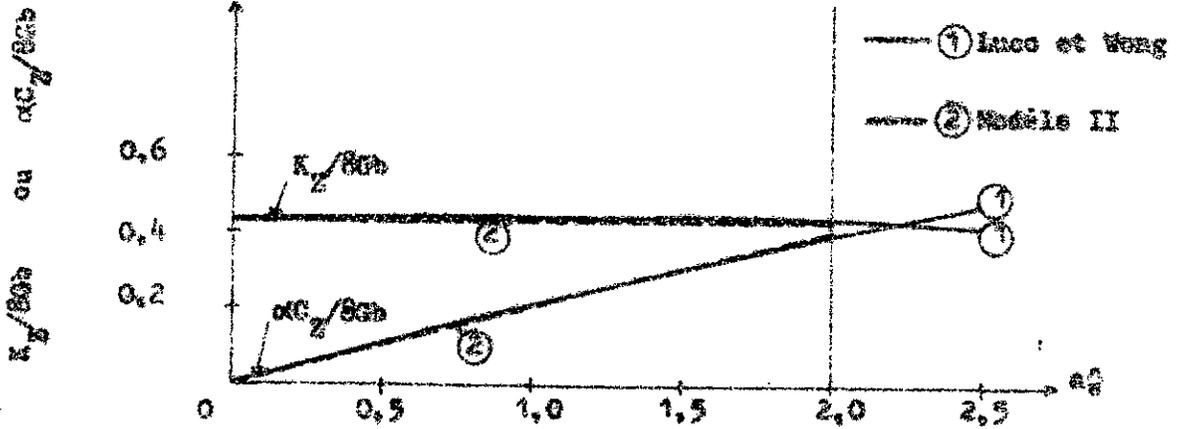
les formules (IV-26) ; (IV-23) et (IV-24) - permettant de calculer les paramètres " K_0 " ; " M " et " C_0 " pour fondations circulaires - restent valables pour le cas de fondations rectangulaires si l'on introduit la dimension " b " à la place du rayon " r_0 ". Au tableau (IV-24) figurent les valeurs de " M " , " K_0 " et " C_0 " calculées pour $c/b = 1/4$, $1/2$ et 1 .

c/b	K_0	M	C_0
1/4	3,45 cb	0,00 ρb^3	1,658 $\sqrt{\rho b^3}$
1/2	4,57 cb	0,27 ρb^3	2,68 $\sqrt{\rho b^3}$
1	6,71 cb	0,76 ρb^3	6,37 $\sqrt{\rho b^3}$

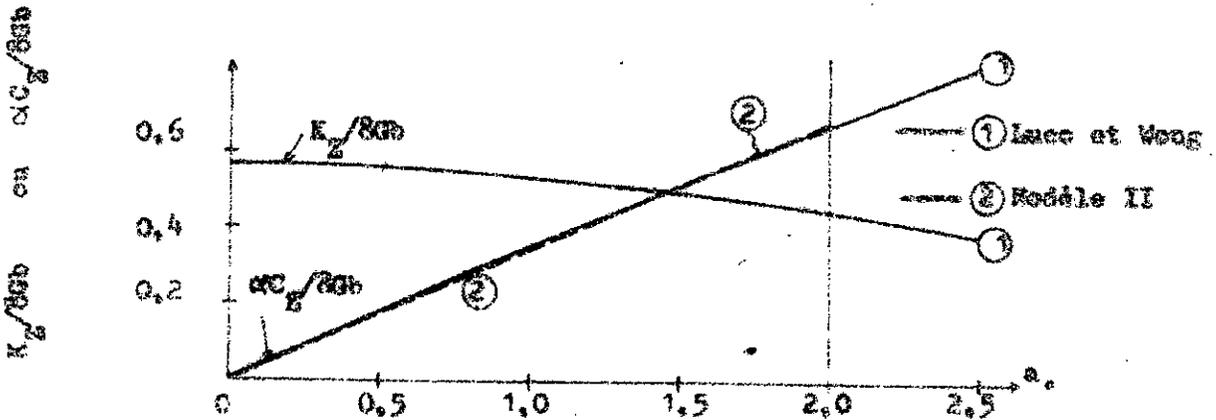
Tableau (IV-24) ; Paramètres mécaniques du modèle II représentant le sol de fondation superficielle rectangulaire rigide en translation verticale :

Le modèle mécanique simple sans masse vibrante (modèle I) - représentant le sol pour fondation rectangulaire rigide vibrant en translation verticale - a pour paramètres mécaniques " K_I " et " C_I " égaux respectivement aux paramètres " K_0 " et " C_0 " du modèle mécanique II dont les valeurs sont regroupées au tableau (IV-24) .

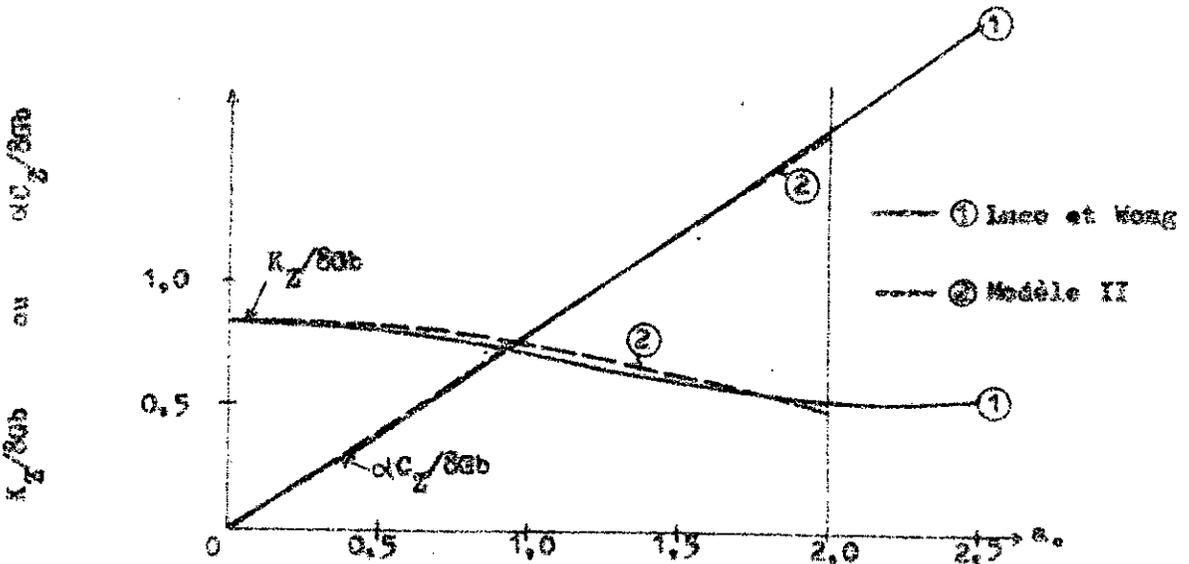
Les fonctions de raideur du modèle I et II sont représentées et comparées à celles de Luco et Wong sur les figures (IV-27) ; (IV-28) et (IV-29) , pour différentes valeurs du rapport (c/\sqrt{b}) .



Fig(IV-27): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en translation verticale pour $c/b=1/4$ et $\nu=1/3$.



Fig(IV-28): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en translation verticale pour $c/b= 1/2$ et $\nu=1/3$.



Fig(IV-29): Fonctions de raideur d'une fondation carrée($c/b=1$) rigide en translation verticale , pour $\nu=1/3$.

IV-3.2.2 Translation horizontale

IV-3.2.2.1 Fonctions de raideur déduites des études antérieures

Lucc et Wong ont donné les fonctions de souplesse relatives au cas de vibration d'une fondation rectangulaire rigide sur un demi-espace élastique sous l'effet d'un effort horizontal extérieur. Ces fonctions sont présentées dans les tableaux (IV-25), (IV-26) et (IV-27) pour $c/b = 1/3$, 1 et 2 (respectivement).

Comme indiqué au chapitre II, les fonctions de raideur sont obtenues à partir des formules (II-10). Sur les mêmes tableaux sont aussi données les fonctions de raideur adimensionnelles pour $a_0 \leq 2.5$, soit $K_x / 8Gb$ et $\alpha C_x / 8Gb$.

a_0	F_{1H}	F_{2H}	$K_x / 8Gb$	$\alpha C_x / 8Gb$
0,00	0,2913	0,0000	0,4291	0,0000
0,25	0,2880	0,0515	0,4289	0,0465
0,50	0,2786	0,0588	0,4287	0,0907
0,75	0,2675	0,0870	0,4228	0,1374
1,00	0,2502	0,1075	0,4214	0,1812
1,25	0,2283	0,1267	0,4188	0,2324
1,50	0,2087	0,1307	0,4123	0,2792
1,75	0,1837	0,1428	0,4103	0,3217
2,00	0,1725	0,1542	0,4029	0,3604
2,50	0,1446	0,1610	0,3859	0,4298

Tableau (IV-25) : Fonctions d'impédance de souplesse et de raideur du sol en translation horizontale pour fondation rectangulaire rigide, avec $\nu=1/3$ et $c/b=1/2$, selon Lucc et Wong.

a_0	F_{1H}	F_{2H}	$K_x/8cb$	$\alpha''/8cb$
0,00	0,1892	0,0000	0,6608	0,0000
0,25	0,1862	0,0302	0,6543	0,3063
0,50	0,1743	0,0570	0,6473	0,6117
0,75	0,1563	0,0793	0,6361	0,8227
1,00	0,1340	0,0918	0,6350	0,9551
1,25	0,1124	0,0978	0,6330	0,9918
1,50	0,0932	0,0994	0,6343	0,6698
1,75	0,0780	0,0963	0,6350	0,7838
2,00	0,0657	0,0918	0,6345	0,9005
2,50	0,0503	0,0824	0,6748	1,1054

Tableau (IV-26) : Fonctions d'impédance de raideur du sol pour fondation rigide carrée ($c/b = 1$) et $\nu = 1/3$; selon Lucco et Wong en translation horizontale .

a_0	F_{1H}	F_{2H}	$K_x/8cb$	$\alpha''/8cb$
0,00	0,1293	0,0000	0,9669	0,0000
0,25	0,1215	0,0302	0,9632	0,2409
0,50	0,1020	0,0520	0,9729	0,4959
0,75	0,0804	0,0612	0,9845	0,7502
1,00	0,0643	0,0630	0,9927	0,9334
1,25	0,0520	0,0611	1,0100	1,1867
1,50	0,0415	0,0576	1,0302	1,4276
1,75	0,0352	0,0546	1,0429	1,6175
2,00	0,0301	0,0516	1,0562	1,8065

Tableau (IV-27) : Fonctions d'impédance de raideur du sol pour fondation rectangulaire rigide , en translation horizontale pour $c/b = 2$ et $\nu = 1/3$; selon Lucco et Wong .

Sur la figure (IV-30) sont reportées les graphes représentatifs de ces fonctions de raideur adimensionnelles .

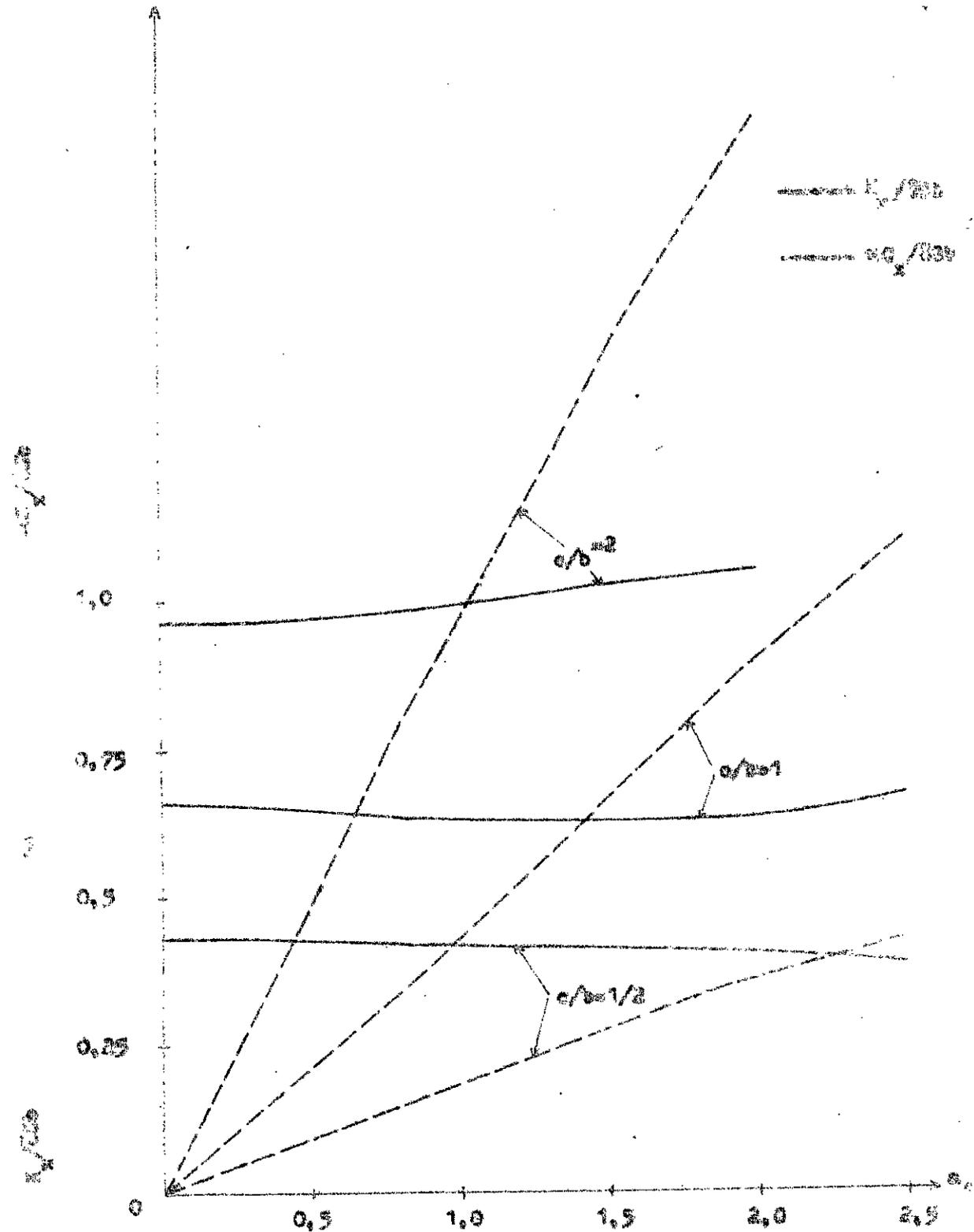
IV-3.2.2.2 Modélisation proposée :

Les graphes des fonctions d'impédance de raideur du modèle III (voir fig(IV-2)) représentant des allures similaires -pour $\nu = 1/2$ - à ceux données par Luco et Wong (voir fig(IV-30)) pour la vibration en translation horizontale d'une fondation superficielle rectangulaire rigide . Le modèle III peut donc être proposé pour représenter le sol pour cette composante du mouvement .

Les paramètres sans dimensions f_1 , f_2 et β du modèle III permettant aux graphes de " K/K_0 " et " W/W_0 " de s'ajuster à ceux de Luco et Wong sont déterminés par l'équation (IV-28) dans le casus décrit précédemment en (§IV-3.1.2.2-b) . Leurs valeurs sont regroupées au tableau suivant (en fonction du rapport c/b) :

c/b	f_1	f_2	β
1/2	0,250	0,875	0,800
1	0,250	0,875	0,800
2	0,400	1,400	0,500

Tableau (IV-28) : Paramètres sans dimensions du modèle III représentant le sol en translation horizontale pour fondations rectangulaires rigides , pour $\nu = 1/3$.



Fig(IV-30²): Fonctions d'impédance de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en translation horizontale selon Ince et Wang ($\nu = 1/3$).

Suivant la valeur du rapport c/b , les fonctions de raideur du modèle III affine représentatif du sol en translation horizontale - pour fondations superficielles rectangulaires rigides - sont données sur les tableaux (IV-29) ; (IV-30) et (IV-31) pour $a_0 \leq 2$.

β_1	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
K/K_1	0,390	0,389	0,386	0,382	0,377	0,373
$\alpha C/K_1$	0,000	0,060	0,121	0,184	0,250	0,319
a_0	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00

$$a_0 = 4 \beta_1$$

Tableau(IV-29): Fonctions de raideur du modèle III, représentant le sol en translation - pour fondations superficielles rectangulaires rigides ; $c/b = 1/2$ et $\nu = 1/3$ - horizontale

β_1	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
K/K_1	0,390	0,389	0,386	0,382	0,377	0,373	0,371	0,372	0,379
$\alpha C/K_1$	0,00	0,060	0,121	0,184	0,250	0,319	0,392	0,467	0,564
a_0	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00

$$a_0 = 2,5 \beta_1$$

Tableau(IV-30): Fonctions de raideur du modèle III, représentant le sol en translation horizontale pour fondations carrées rigides superficielles et pour $\nu = 1/3$.

β_1	0,000	0,118	0,235	0,353	0,470
K/K_1	0,213	0,215	0,220	0,227	0,237
dC/K_1	0,000	0,110	0,219	0,126	0,400
a_0	0,000	0,502	1,000	1,502	2,000

Point de co-
cours de K/K_1
et dC/K_1 ;
 $a_0 = 4,25 \beta_1$

Tableau(IV-31) : Fonctions de raideur du modèle III , représentant le sol en translation horizontale pour fondations rectangulaires rigides ; $c/b = 2$ et $\nu = 1/3$.

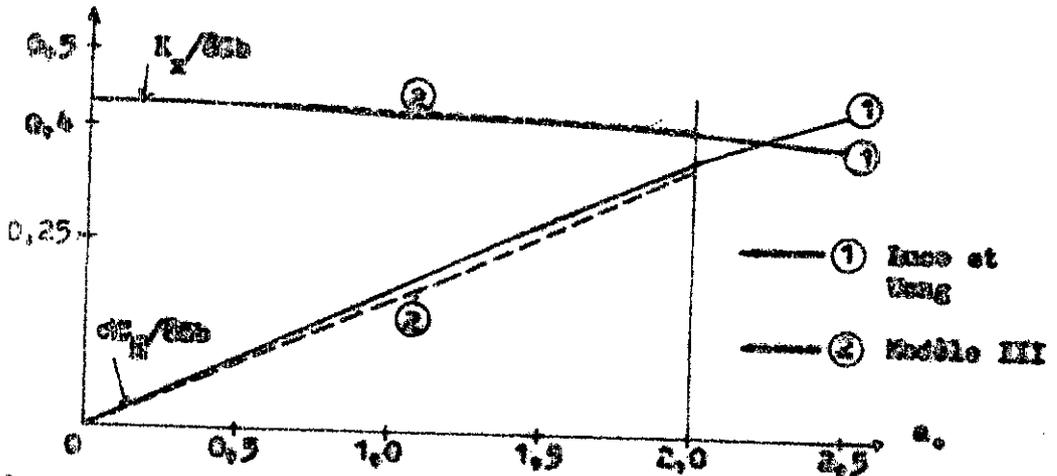
A titre comparatif les fonctions d'impédance de raideur du modèle III , ainsi que celles données par Luco et Wong sont représentées sur les figures (IV-31) ; (IV-32) et (IV-33) pour différentes valeurs du rapport de dimensions de la fondation (c/b) .

Les formules (IV-28) , (IV-27) , (IV-29) , (IV-30) et (IV-31) permettant de passer aux paramètres mécaniques du modèle III - relatives aux fondations superficielles circulaires rigides - seront valables pour le cas de fondations rectangulaires si l'on remplace le rayon " a_0 " par la dimension " b " (selon la définition de a_0 en § II-2.5.3) , on obtient dans ce cas :

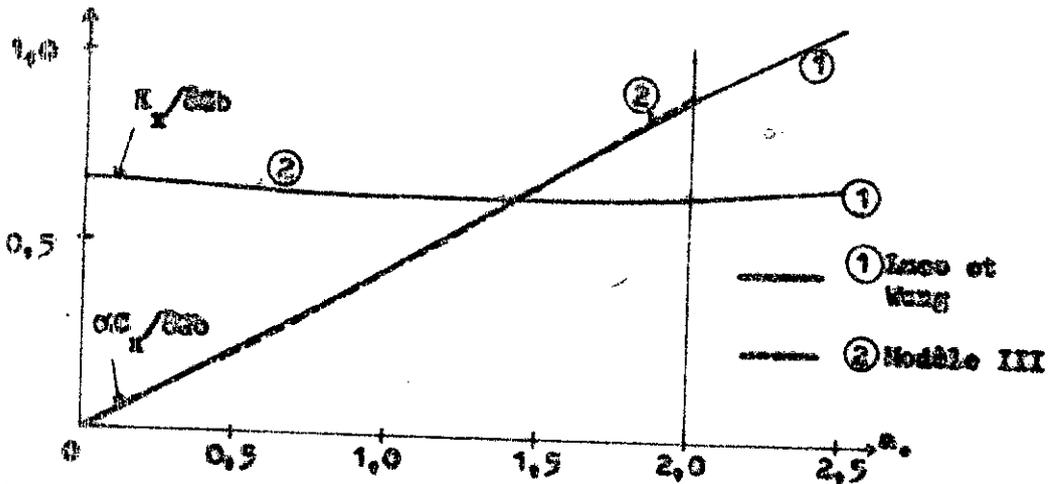
$$K'' = K_x(a_0 = 0) / 8Gb \quad (IV-35)$$

$$K_1 = \frac{(1 + \delta^2)}{\delta^2} K'' 8Gb \quad (IV-36)$$

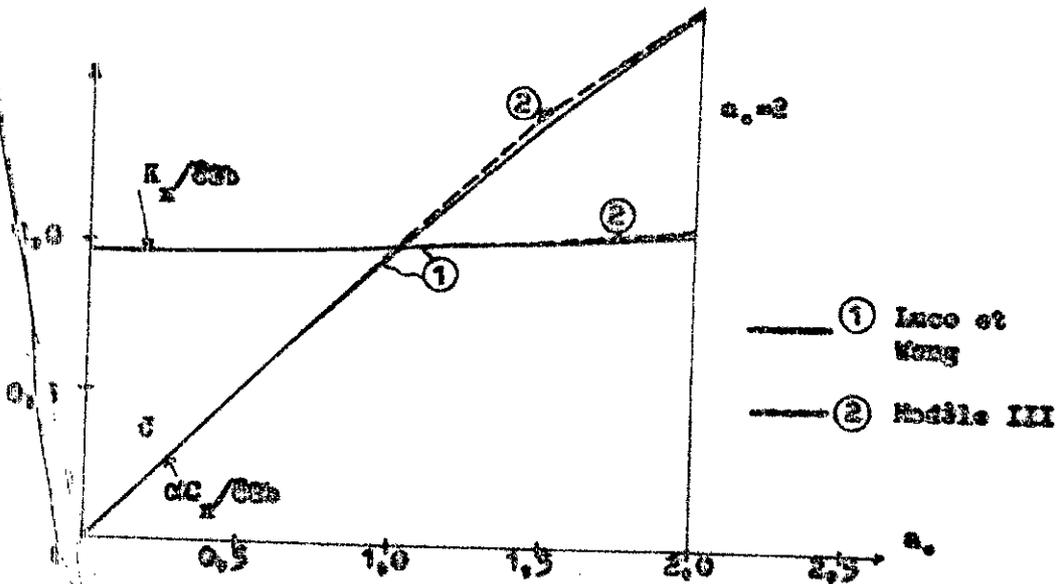
$$M = K'' \frac{(1 + \delta^2)}{\delta^2} (\beta_1 / a_0)^2 8pb^3 \quad (IV-37)$$



Fig(31-31): Fonctions de rigidité d'une fondation rectangulaire rigide en translation horizontale ($c/b=1/2$ et $\nu=1/3$).



Fig(32-32): Fonctions de rigidité d'une fondation carrée ($c/b=1$) rigide en translation horizontale ($\nu=1/3$).



Fig(33-33): Fonctions de rigidité d'une fondation rectangulaire rigide en translation horizontale ($c/b=2$ et $\nu=1/3$).

$$C_1 = 16 \int_1 K'' \left(\frac{\delta^2 + 1}{\delta^2} \right) \left(\beta_1 / a_0 \right) b^2 \sqrt{\rho g} \quad (\text{IV-38})$$

$$K_2 = \delta^2 K_1 \quad (\text{IV-39})$$

$$C_2 = 16 \delta \int_2 K'' \left(\frac{\delta^2 + 1}{\delta^2} \right) \left(\beta_1 / a_0 \right) b^2 \sqrt{\rho g} \quad (\text{IV-40})$$

Les relations précédentes (IV-35) ; (IV-36) ; (IV-37) ; (IV-38) ; (IV-39) et (IV-40) satisfont les valeurs du tableau donné ci-après .

c/b	K_1/bb	$C_1/b^2\sqrt{\rho g}$	$M/\rho b^3$	K_2/bb	$C_2/b^2\sqrt{\rho g}$
1/2	8,80	1,10	0,55	5,63	3,08
1	13,55	2,71	2,17	8,67	7,59
2	38,67	7,27	2,14	9,67	12,72

Tableau(IV-32): Rigidité, amortissement , et masse associée du modèle III représentatif du sol de fondation rectangulaire rigide en translation horizontale pour $\nu=1/3$.

IV-3.2.3 Rotation en basculement :IV-3.2.3.1 Fonctions de raideur déduites des études antérieures:

Luco et Wong ont donné les fonctions de souplesse d'une fondation rectangulaire rigide - reposant sur un demi-espace élastique - vibrent sous l'effet d'un moment de rotation en basculement.

Les fonctions d'impédance de raideur " K_G " et " αC_G " sont calculées comme indiqué précédemment selon les formules (IV-11) pour différentes valeurs de c/b - Les fonctions de raideur adimensionnelles " $K_G / 8Gb^3$ " et " $\alpha C_G / 8Gb^3$ " figurent sur les tableaux (IV-33) ; (IV-34) et (IV-35) dans le domaine des fréquences (sans dimensions) $a_0 \leq 2.5$.

a_0	F_{1R}	F_{2R}	$K_G / 8Gb^3$	$\alpha C_G / 8Gb^3$
0,00	0,2917	0,0000	0,4285	0,0000
0,25	0,2978	0,0024	0,4197	0,0030
0,50	0,3100	0,0131	0,4038	0,0170
0,75	0,3337	0,0264	0,3723	0,0295
1,00	0,3424	0,0436	0,3392	0,0447
1,25	0,3480	0,0790	0,3416	0,0780
1,50	0,3487	0,1162	0,3226	0,1075
1,75	0,3352	0,1597	0,3000	0,1448
2,00	0,3084	0,1945	0,2900	0,1829
2,50	0,2387	0,2479	0,2519	0,2516

Tableau(IV-33) : Fonctions d'impédance de souplesse et de raideur du sol en basculement pour fondation rectangulaire rigide , $c/b = 1/2$ et $\nu = 1/3$ (d'après Luco et Wong).

a_0	F_{1R}	F_{2R}	$K_g/100b^2$	$\alpha C_g/80b^2$
0,00	0,1778	0,0000	0,7630	0,0000
0,25	0,1817	0,0027	0,6879	0,0079
0,50	0,1900	0,0082	0,6167	0,0283
0,75	0,1997	0,0206	0,5494	0,0639
1,00	0,2071	0,0420	0,5795	0,1175
1,25	0,2065	0,0700	0,5429	0,1640
1,50	0,1971	0,0992	0,5061	0,2047
1,75	0,1780	0,1251	0,4700	0,2303
2,00	0,1518	0,1445	0,4321	0,2411
2,50	0,1000	0,1500	0,3845	0,2769

Tableau(IV-34) : Fonctions d'impédance de souplesse et de raideur du sol en basculement pour fondations carrées ($c/b = 1$), rigides et $\nu = 0,3$, selon LECO et WINK.

a_0	F_{1R}	F_{2R}	$K_g/100b^2$	$\alpha C_g/80b^2$
0,00	0,1113	0,0000	1,1234	0,0000
0,25	0,1146	0,0025	1,0502	0,0238
0,50	0,1220	0,0082	1,0200	0,0686
0,75	0,1287	0,0218	0,9441	0,1099
1,00	0,1317	0,0396	0,8700	0,1616
1,25	0,1291	0,0657	0,8126	0,2056
1,50	0,1208	0,0726	0,7603	0,2569
1,75	0,1080	0,0863	0,7066	0,3046
2,00	0,0916	0,0948	0,6589	0,3519

Tableau(IV-35) : Fonctions d'impédance de souplesse et de raideur du sol en basculement pour fondations rectangulaires rigides ($c/b = 2$ et $\nu = 1/2$), d'après LECO et WINK.

Sur la figure (IV-34) sont présentées les graphes des fonctions de raideur pour le mode de rotation en basculement, selon Luco et Wong.

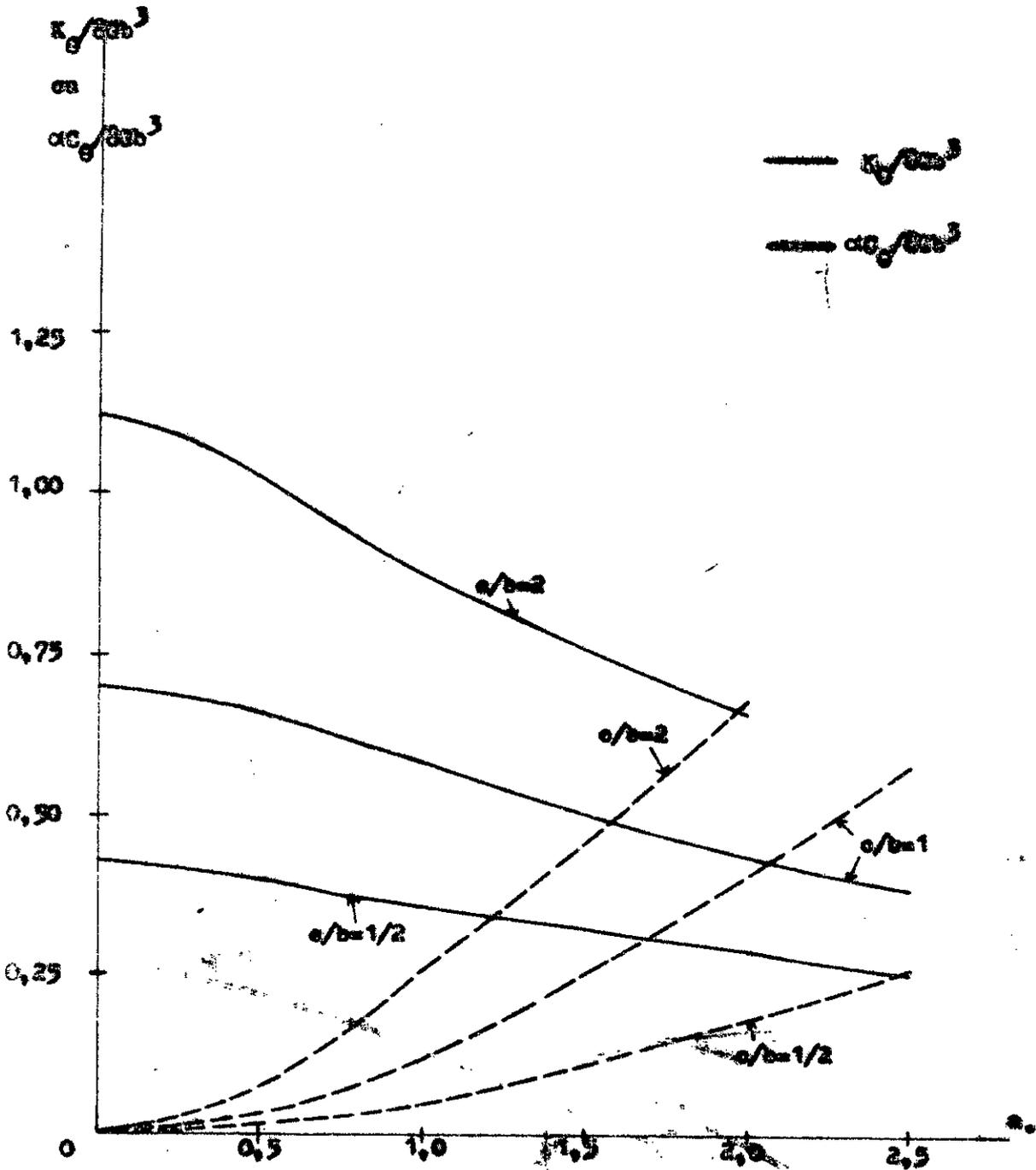
IV-3.2.3.2 Modélisation proposée :

Différentes formes des graphes des fonctions d'impédance de raideur du modèle IV sont montrées sur les figures (IV-5), (IV-6), (IV-7), (IV-8), (IV-9), (IV-10) et (IV-14).

Les variations de la partie réelle des fonctions d'impédance de raideur du modèle IV (représentées sur les figures (IV-4), (IV-6),(IV-10)) sont analogues à celles de la partie réelle des fonctions d'impédance de raideur de référence (voir fig(IV-34)). Sur la figure (IV-10) on voit que les variations paraboliques de la partie imaginaire des fonctions d'impédance de raideur sont proches de celles de la partie imaginaire données par Luco et Wong. On peut donc proposer de représenter le sol en mouvement de basculement - pour fondations superficielles rectangulaires rigides - par le modèle simple IV réduit à une rigidité K_2 nulle et à un amortissement C_1 nul.

Le paramètre " γ " intervenant dans les relations (IV-19) et (IV-20) du modèle mécanique est ajusté par tâtonnement pour donner une même cote ou une cote voisine de celle des graphes de Luco et Wong pour le point de concours des courbes de " K/K_1 " et " $\alpha C/K_1$ ". La coïncidence en abscisse du point de concours est ajustée par affinité horizontale de rapport (β_1/a_0) ; la forme de la courbe " K/K_1 " ainsi que celle de " $\alpha C/K_1$ " sont ajustées en procédant à des essais successifs.

Les valeurs du paramètre adimensionnel " γ " - correspondant au modèle IV le plus satisfaisant trouvé - sont données dans



Fig(IV-34): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en rotation de basculement pour $\nu = 1/3$, selon Luo et Wang).

Le tableau (IV-36) en fonction du rapport c/b .

c/b	$1/2$	1	2
δ	$0,7$	$0,7$	$0,3$

Tableau (IV-36) : Valeurs du paramètre adimensionnel " δ " définissant le modèle IV en basculant pour fonctions superficielles rectangulaires rigides ($\delta = 1$).

Pour le cas particulier de $c/b = 2$ l'ajustement de la partie réelle a été préféré à la précision de la partie imaginaire étant noté que (voir fig(IV-37)).

Les valeurs des fonctions d'impédance de raideur du modèle affine IV choisi, satisfont les relations (IV-19) et (IV-20). Ces valeurs sont données aux tableaux (IV-39), (IV-37) et (IV-38).

β_1	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_1
0,000	1,0000	0,0000	0,000
0,112	0,9878	0,0020	0,248
0,224	0,9500	0,0100	0,496
0,336	0,9082	0,0240	0,744
0,448	0,8500	0,0500	0,992
0,560	0,8088	0,0930	1,240
0,672	0,7400	0,2200	1,488
0,784	0,7274	0,3054	1,736
0,896	0,6600	0,4000	1,984
1,120	0,5900	0,5900	2,232

Point de concours

de K/K_1 et $\alpha C/K_1$

$a_1 = 2,232$

Tableau(IV-57) : Fonctions de raideur du modèle « III » représentant le sol en rotation de basculement, pour sections rectangulaires rigides ($c/b = 1$ et $\beta = 1$)

β_2	K/K_1	$\alpha C/K_1$	a_2
0,000	1,0000	0,0000	0,000
0,112	0,9878	0,0020	0,200
0,224	0,9500	0,0100	0,410
0,336	0,9082	0,0240	0,610
0,448	0,8500	0,0500	0,810
0,560	0,8088	0,0930	1,010
0,672	0,7400	0,2200	1,220
0,784	0,7274	0,3054	1,420
0,896	0,6600	0,4000	1,620
1,120	0,5900	0,5900	2,020

Point de concours

de K/K_1 et $\alpha C/K_1$

$a_2 = 2,020$

Tableau(IV-58) : Fonctions de raideur du modèle « IV » représentant le sol en rotation de basculement pour sections rectangulaires rigides ($c/b = 1$) ; $\beta = 1/3$

β	K/K_1	$\Delta C/K_1$	R_0
0,00	1,0000	0,0000	0,00
0,20	0,9624	0,0094	0,35
0,40	0,8720	0,0640	0,71
0,60	0,7696	0,1728	1,06
0,80	0,6800	0,3200	1,41
1,00	0,6100	0,4878	1,76
1,02	0,6038	0,5050	1,80
1,05	0,5951	0,5300	1,85
1,13	0,5793	0,6050	2,00

$$R_0 = 1,76 \text{ (à } \beta = 1,00 \text{)}$$

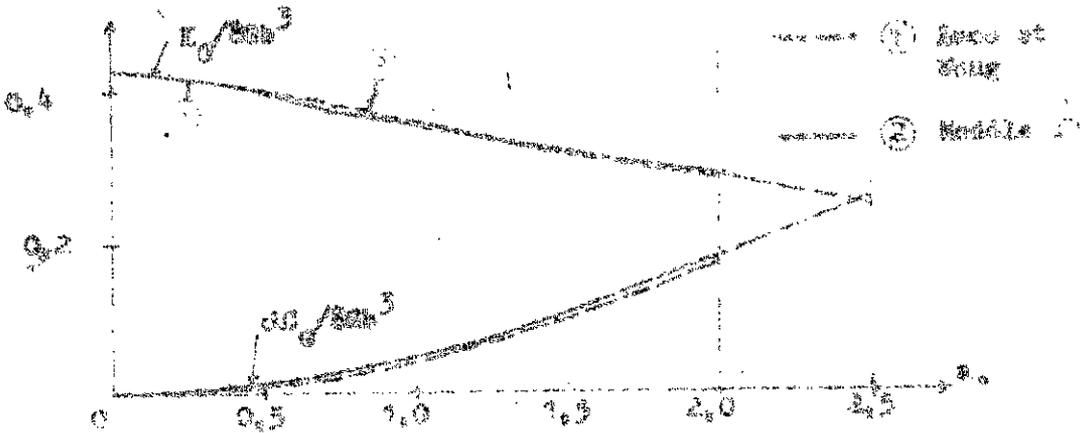
Tableau(IV-39) : Fonctions de raideur du modèle IV représentant le sol en rotation de basculement pour fondations rectangulaires rigides ($c/b = 2$ et $\nu = 1/3$).

Ces fonctions de raideur (du modèle IV) sont comparées à celles de Lucc et Wong sur les figures (IV-35) ; (IV-36) et (IV-37).

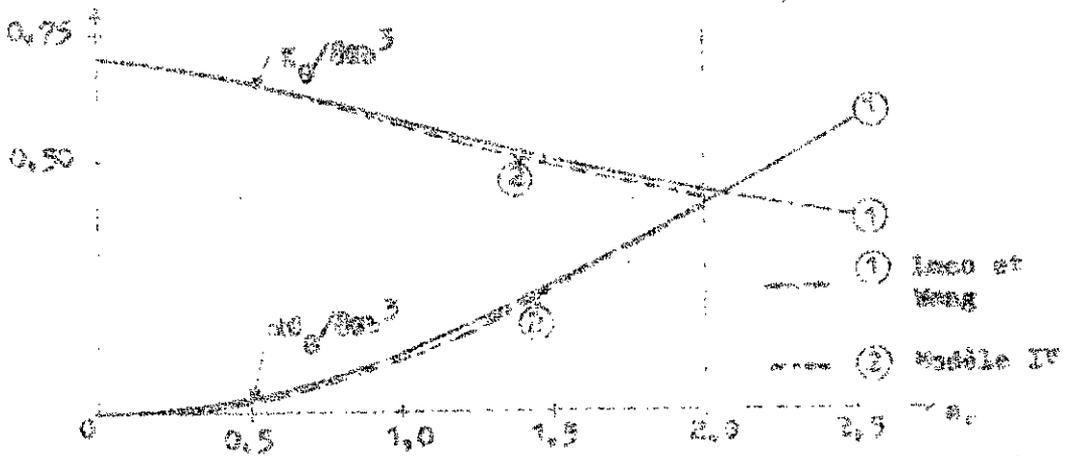
Il est possible de passer aux paramètres mécaniques du modèle IV à partir des relations (IV-32) ; (IV-33) et (IV-34) - établies pour le cas de fondations circulaires - si l'on remplace le rayon " r_0 " par la dimension " b " (selon la définition de " r_0 " en § II-2.5.3). Dans ce cas la valeur de K^{***} est l'ordonnée à l'origine du graphe " $K_0/8cb^3$ ". On peut alors écrire les formules suivantes :

La rigidité du ressort K_1 :

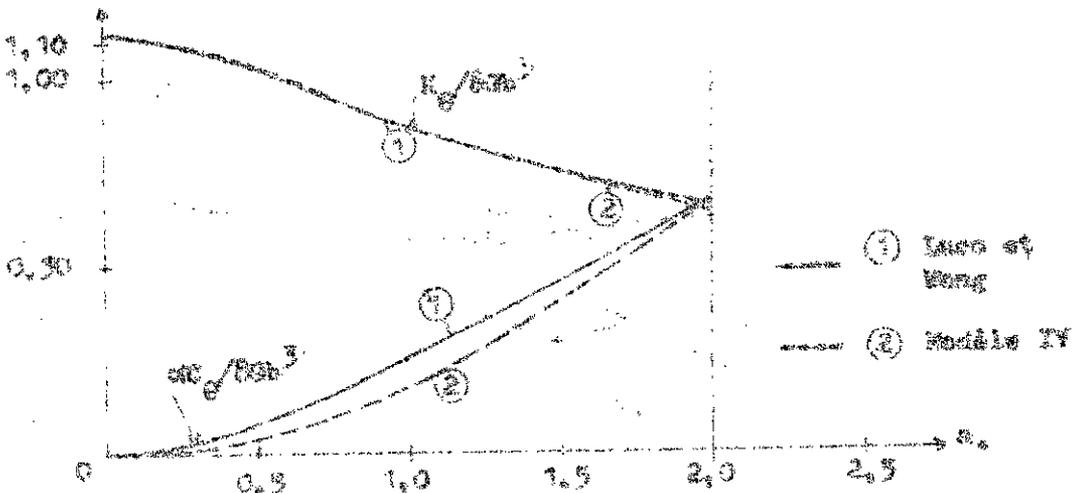
$$K_1 = K^{***} 8cb^3 \quad (IV-41)$$



Fig(IV-35): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en rotation de basculement ($c/b=1/2$ et $\nu=1/3$).



Fig(IV-36): Fonctions de raideur d'une fondation carrée ($c/b=1$) rigide en rotation de basculement, pour $\nu=1/3$.



Fig(IV-37): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en rotation de basculement pour $c/b=2$ et $\nu=1/3$.

L'inertie massique polaire " H " :

$$H = K''' 8 (\beta_1 / a_0)^2 \rho b^5 \quad (\text{IV-42})$$

L'amortissement C_2 du modèle IV :

$$C_2 = 8 K''' (\beta_1 / a_0) b^4 \sqrt{\rho G} \quad (\text{IV-43})$$

Les valeurs de " K''' " ; (β_1 / a_0) et " δ " sont données sur le tableau (IV-40) pour c/b variable .

c/b	K'''	δ	β_1 / a_0
1/2	0,4286	0,700	0,452
1	0,7030	0,700	0,553
2	1,1234	0,800	0,567

Tableau (IV-40) : Valeurs de K''' ; δ et (β_1 / a_0) du modèle IV représentatif du sol en rotation de basculement pour fondations rectangulaires rigides ($\nu = 1/3$) .

Les grandeurs K_1 ; H et C_2 sont évaluées à partir des relations (IV-41) ; (IV-42) et (IV-43) ; elles figurent au tableau (IV-41) en fonction du rapport c/b .

c/b	K_1	M	C_2
1/2	$3,31 \text{ pb}^3$	$0,68 \text{ pb}^3$	$1,05 \text{ b}^4 \sqrt{\rho \omega}$
1	$5,60 \text{ pb}^3$	$1,71 \text{ pb}^3$	$2,17 \text{ b}^4 \sqrt{\rho \omega}$
2	$8,90 \text{ pb}^3$	$2,85 \text{ pb}^3$	$4,03 \text{ b}^4 \sqrt{\rho \omega}$

Tableau(IV-41) : Rigidité ; inertie massique ; et amortissement du modèle IV représentant le sol en rotation de basculement pour fondations rectangulaires rigides ($\gamma = 1/3$) .

IV-4. Comparaison aux études antérieures :

IV-4.1 Translation verticale :

a- Fondations circulaires :

Comme il a été indiqué au § II-2.3 , les valeurs des paramètres mécaniques du modèle de LYMER pour la vibration verticale d'une fondation circulaire rigide sont résumées dans le tableau (II-7) donné en annexe. Le modèle de Lymer étant défini sans masse additionnelle correspond au type de modèle mécanique I dont les fonctions d'impédance sont calculées - pour les paramètres mécaniques définis au tableau (II-7) - à partir des relations (IX-9) et (IV-10) .

Or le modèle de Niéto comprend une masse active vibrant en phase avec la fondation , et les fonctions d'impédance de raideur correspondantes sont calculées - pour les paramètres mécaniques définis au tableau (II-2) (voir § II-2.3)- à partir des relations (IV-11) et (IV-12) .

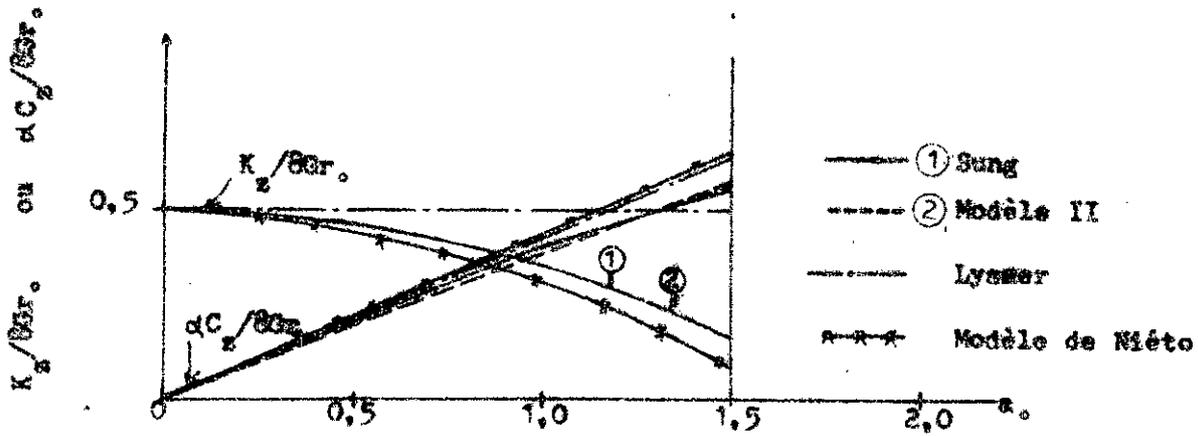
La comparaison graphique des résultats est donnée sur les figures (IV-38) ; (IV-39) et (IV-40) pour différentes valeurs de ν . Ces figures regroupent à la fois les graphes de fonctions de raideur obtenues par Sung et celles du modèle mécanique II et celles des modèles de Lymer et Niéto .

Tous ces modèles présentent la même rigidité initiale (rigidité statique , pour $a_0=0$) .

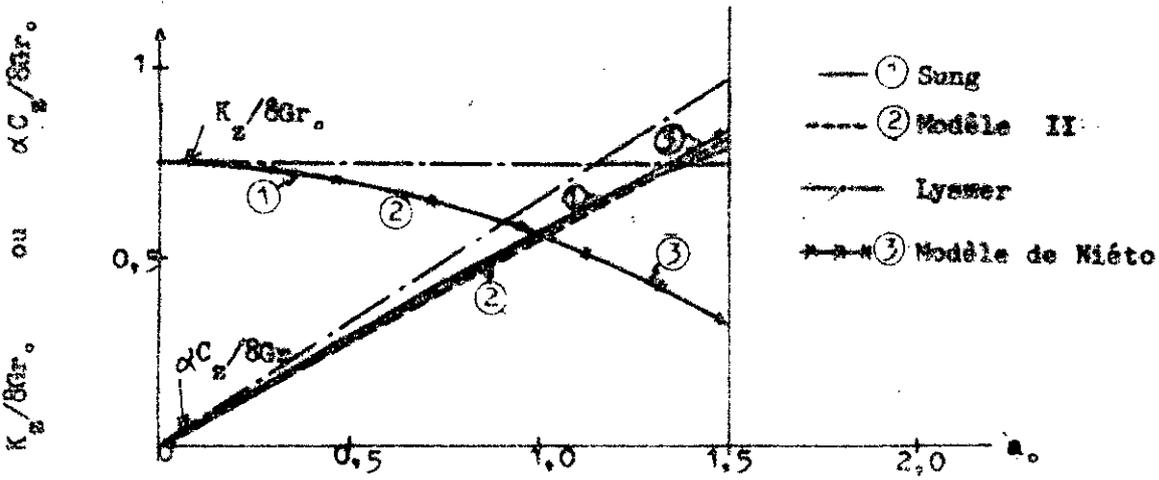
Lorsque a_0 augmente jusqu'à 1,5, le graphe de la partie réelle des fonctions de raideur , selon Sung , s'écarte sensiblement de l'horizontale correspondant à la rigidité constante de Lymer ; la rigidité devient pratiquement faible pour $a_0=1,5$.

Les graphes correspondant aux modèles II ajustés dans le présent travail pour $\nu = 0$, $1/3$, et $1/2$ restent extrêmement voisins de la courbe de Sung .

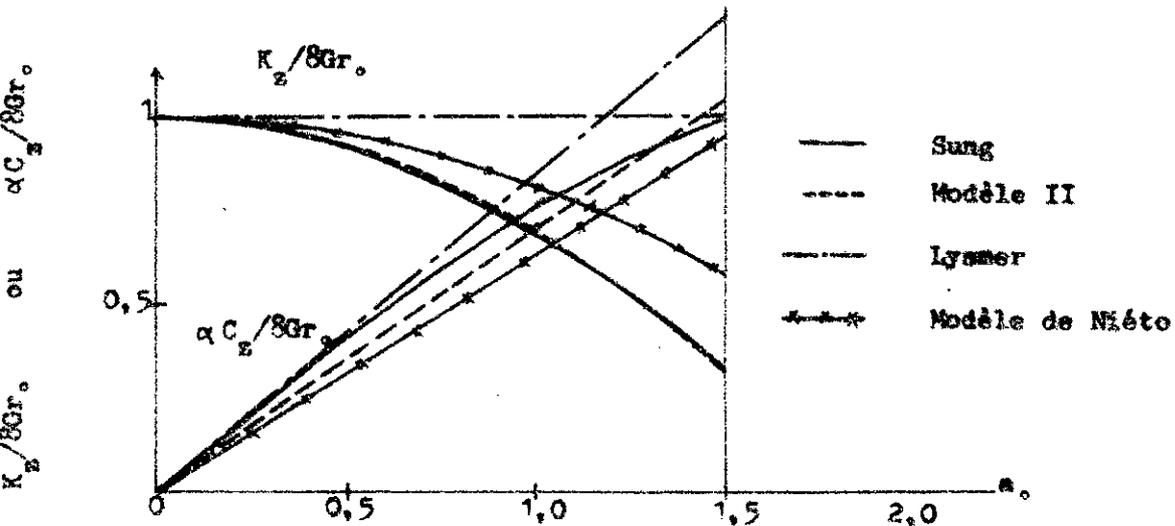
Le modèle de Niéto , qui est également du type II (ressort + masse en phase) est également très bien ajusté pour la valeur $\nu = 1/3$, car contre il fait apparaître un écart appréciable (jusqu'à $\pm 30\%$ de K_0) pour $\nu=0$ et $1/2$. Ceci est dû au fait que ce modèle définit pour la masse associée une "hauteur de prise de sol" unique , quelle que soit la valeur de ν , alors que la décroissance de la rigidité (selon Sung , c'est à dire en demi-espace élastique) est sensiblement affectée par le coefficient ν .



Fig(IV-38) : Fonctions de raideur d'une fondation circulaire vibrant en translation verticale (pour $\nu = 0$)



Fig(IV-39) : Fonctions de raideur d'une fondation circulaire rigide en translation verticale pour $\nu = 1/3$



Fig(IV-40) : Fonctions de raideur d'une fondation circulaire rigide en translation verticale pour $\nu = 1/2$

b- Fondations rectangulaires :

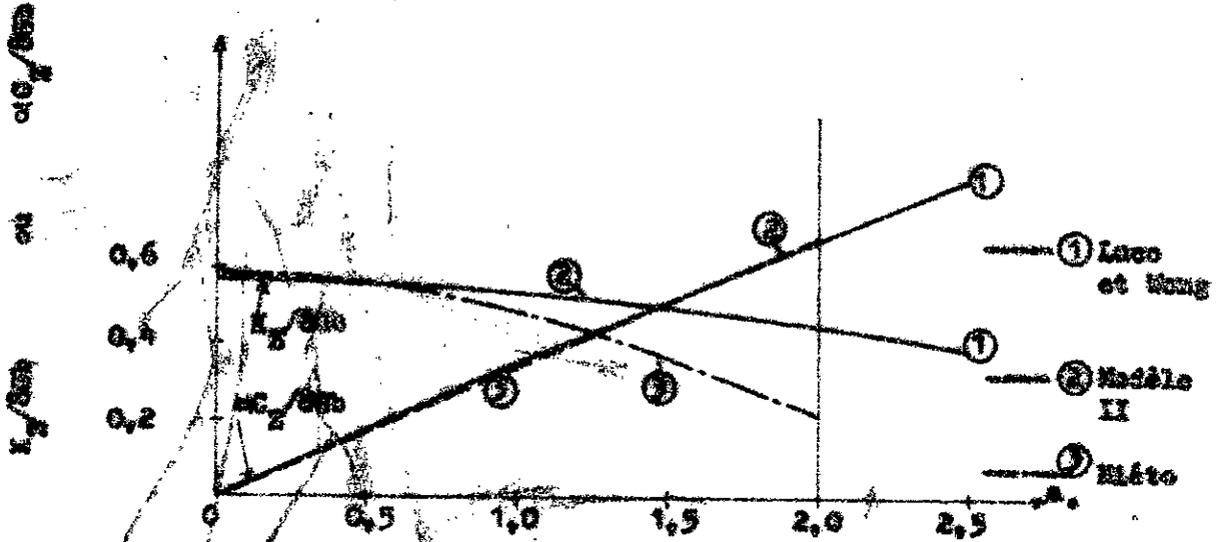
Pour les fondations rectangulaires rigides, les paramètres mécaniques du modèle de Niéto en translation verticale figurent au tableau (II-2). Les fonctions d'impédance de raideur du modèle de Niéto sont calculées à partir des relations (IV-11) et (IV-12) - pour $c/b = 1/2$ et 1) - leurs graphes sont comparés à ceux des fonctions d'impédance de Lucc et Wong sur les figures (IV-41) et (IV-42). Ces figures regroupent également les fonctions d'impédance du modèle mécanique II ; qui donne d'une façon très visible une très bonne approche. Pour le modèle de Niéto, on constate une décroissance nettement, plus rapide de la rigidité. Cette différence est due à la masse de sol associée, qui a été définie dans ce modèle par "un prisme de sol" de même hauteur que dans le cas du modèle circulaire, sans doute par extrapolation de ce cas. Il semble en fait que la masse de sol associée au modèle rectangulaire doit être nettement plus faible (réduction au 1/3 environ).

IV-4.2 Translation horizontale :

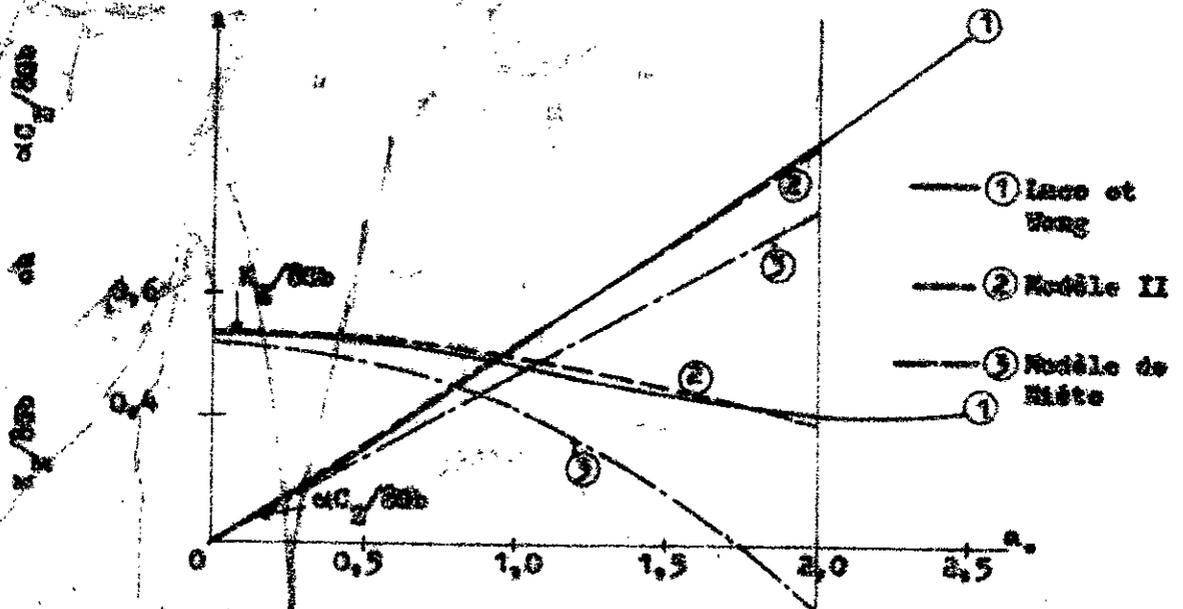
a- Fondations circulaires :

Les graphes des fonctions d'impédance de raideur du modèle de Niéto sont établis à partir des expressions (IV-11) et (IV-12) pour les valeurs des paramètres mécaniques relatives à la vibration en translation horizontale (définis au tableau (II-2)). Sur les figures (IV-43) (IV-44) et (IV-45) sont représentés les graphes des fonctions de raideur de Veletsos et Wei. Cependant, avec une précision un peu moins bonne (de quelques % de K_0) le modèle II, plus simple d'emploi est également bien adapté (voir graphes du paragraphe § IV-3.1.2.2 a).

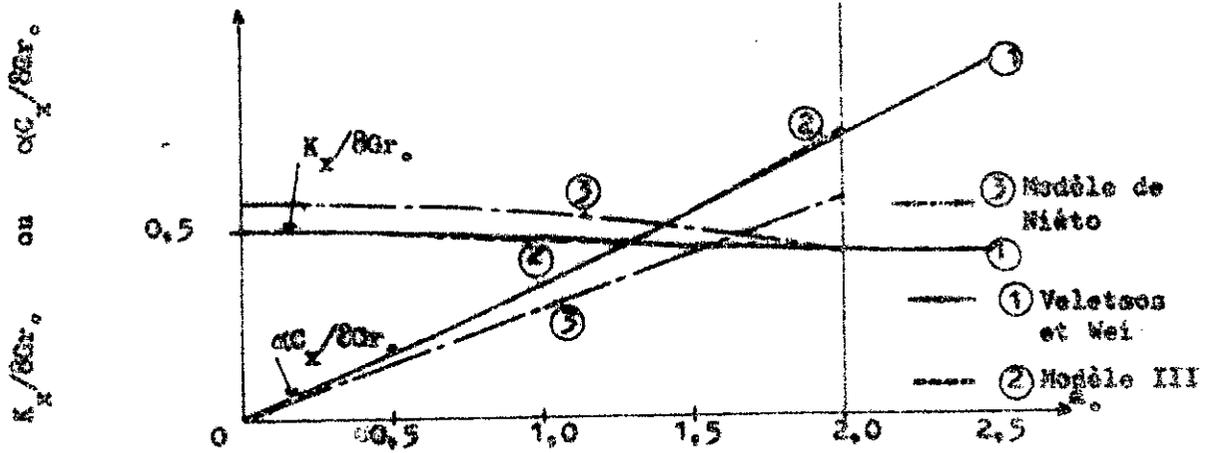
Le modèle de Niéto s'écarte sensiblement de ces graphes, pour la partie réelle. Ce qui est dû essentiellement non au modèle, mais à la valeur de la rigidité initiale (statique), supérieure de 15 % environ à celle de Wei. Par ailleurs la diminution de la rigidité lorsque a_0 augmente est plus rapide selon le modèle de Niéto, c'est à dire que la masse de sol active prise en compte est excessive.



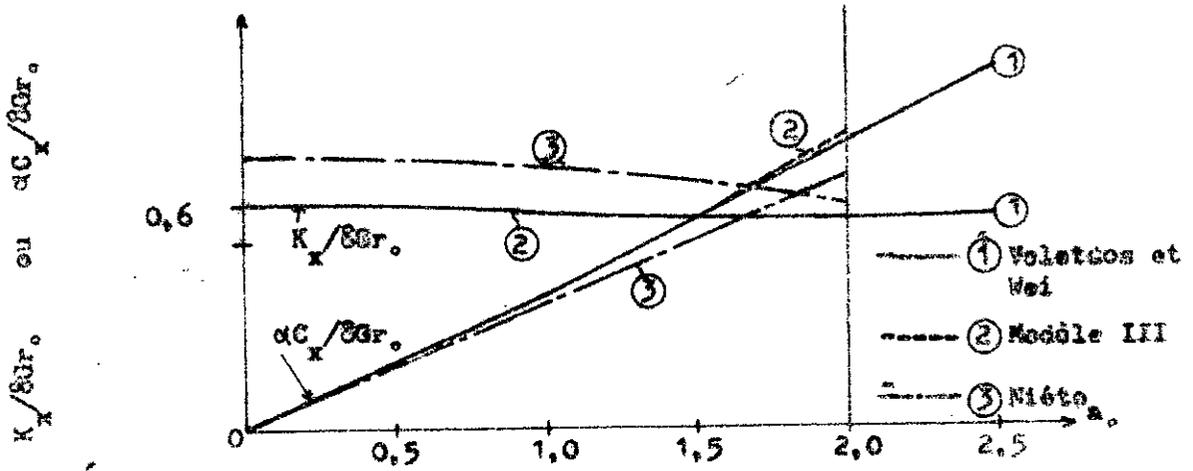
Fig(IV-42): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en translation verticale pour $a/b=1/3$ et $\nu=1/3$.



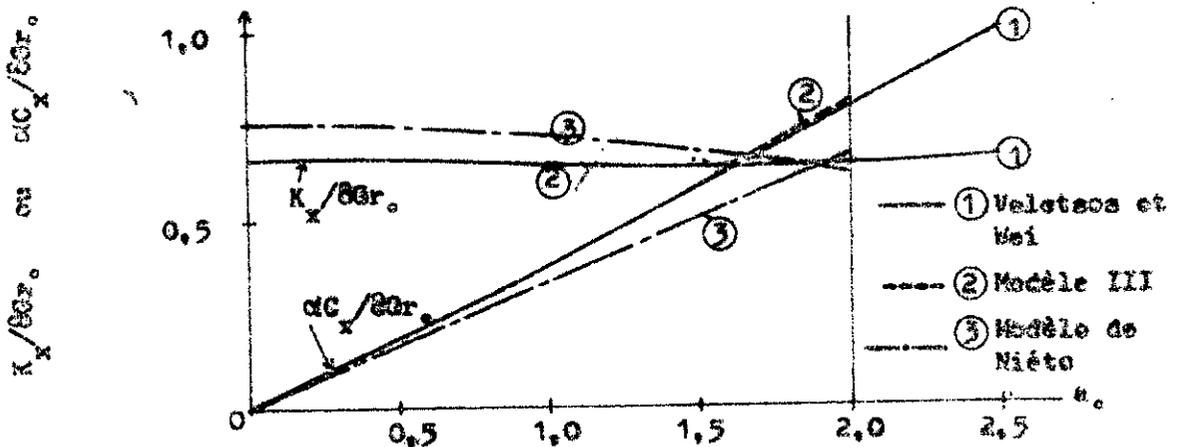
Fig(IV-41): Fonctions de raideur d'une fondation carrée ($a/b=1$) rigide en translation verticale pour $\nu=1/3$.



Fig(IV-43): Fonctions de raideur d'une fondation circulaire rigide en translation horizontale pour $\nu = 0$.



Fig(IV-44): Fonctions de raideur d'une fondation circulaire rigide en translation horizontale pour $\nu = 1/3$.



Fig(IV-45): Fonctions de raideur d'une fondation circulaire rigide en translation horizontale pour $\nu = 1/2$.

b- Fondations rectangulaires :

Le modèle de Niéto à base rectangulaire vibrant en translation horizontale est défini pour les paramètres mécaniques donnés au tableau (II-2) . Leur fonctions de raideur étant calculées à partir des relations (IV-11) et (IV-12) ; sont alors présentées sur les figures (IV-46) (IV-47) et (IV-48) .

Sur les mêmes figures sont reportées les graphes des fonctions de raideur de Luco et Wong (en translation horizontale) ainsi que ceux obtenus pour le modèle II .

Le modèle mécanique de type II donne une très bonne précision pour $c/b \leq 1$. La précision est moins bonne pour un rapport $c/b > 1$ (du fait que la rigidité K augmente) , on ne peut prendre que $M=0$; et l'erreur reste inférieure à 10 % de K_0 pour la borne supérieure $a_0 = 2$.

Le modèle de Niéto est du type II . Il présente des rigidités initiales assez bonnes mais les masses apparentes sont beaucoup trop élevées ce qui engendre un écart important (notamment pour le rapport $c/b = 2$) lorsque a_0 augmente .

IV-4.3 Rotation en basculement :

Le modèle de Niéto étant du type II ; ses fonctions d'impédance de raideur satisfont donc les relations (IV-11) et (IV-12) . Selon les définitions du tableau (II-2) , les paramètres mécaniques (en rotation de basculement) sont calculés pour des fondations rectangulaires rigides et figurent au tableau(IV-42) .

Sur la figure(IV-49) sont établis les graphes de fonctions d'impédance de raideur du modèle de Niéto ; ceux obtenus par Veletsos et Wei ; ainsi que ceux du modèle mécanique IV choisi pour représenter le sol en rotation de basculement d'une fondation circulaire rigide (par $\nu=0$) .

Pour le cas de fondations rectangulaires les graphes des fonctions d'impédance en basculement (d'après Luco et Wong ; ceux du modèle de Niéto et ceux du modèle IV) sont représentés sur les figures (IV-50) et (IV-51) .

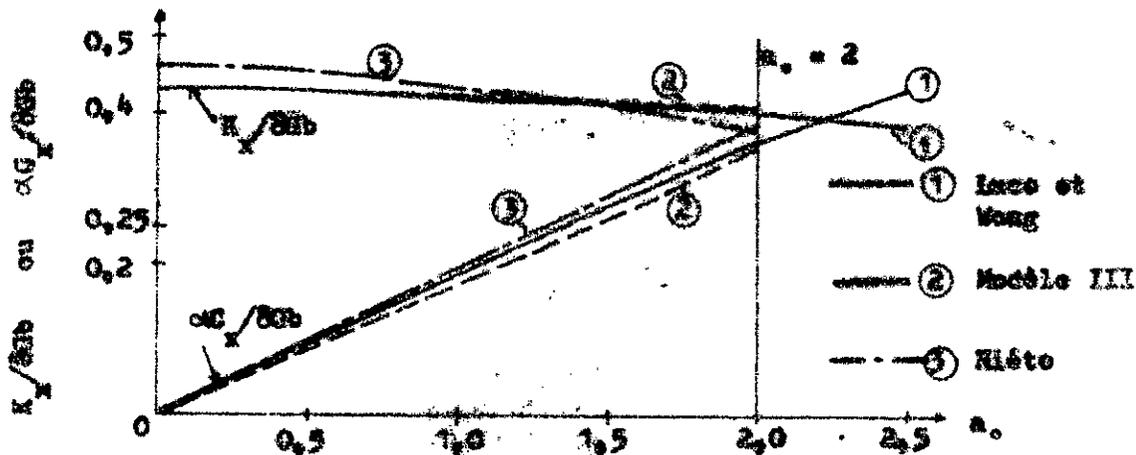


Fig. (IV-46): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en translation horizontale ($c/b=1/2$ et $\nu=1/3$).

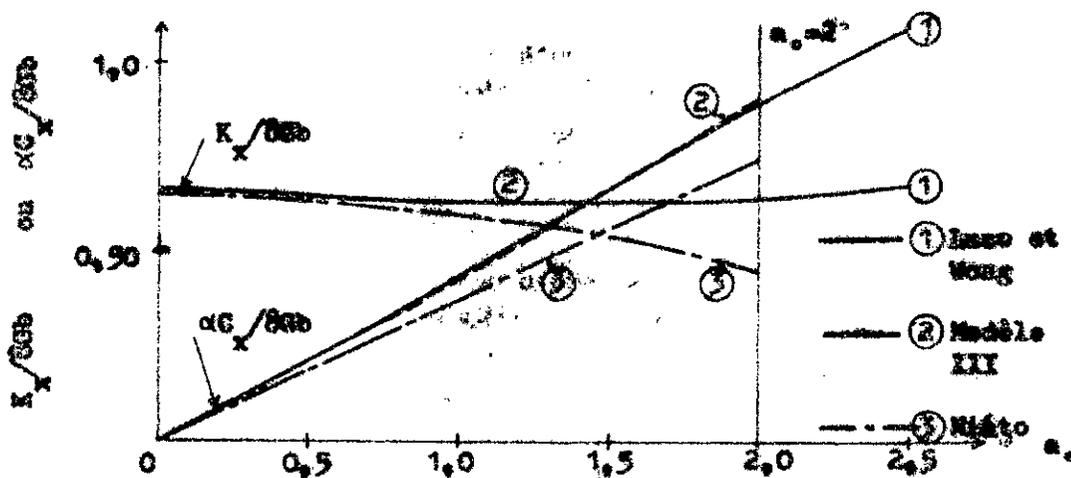


Fig. (IV-47): Fonctions de raideur d'une fondation carrée ($c/b=1$) rigide en translation horizontale ($\nu=1/3$).

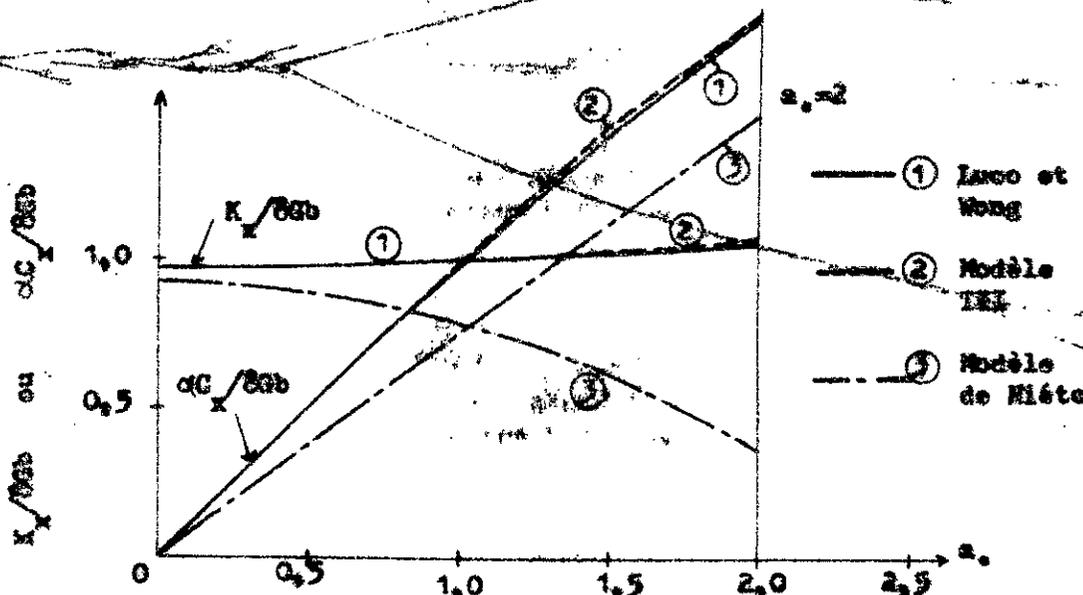
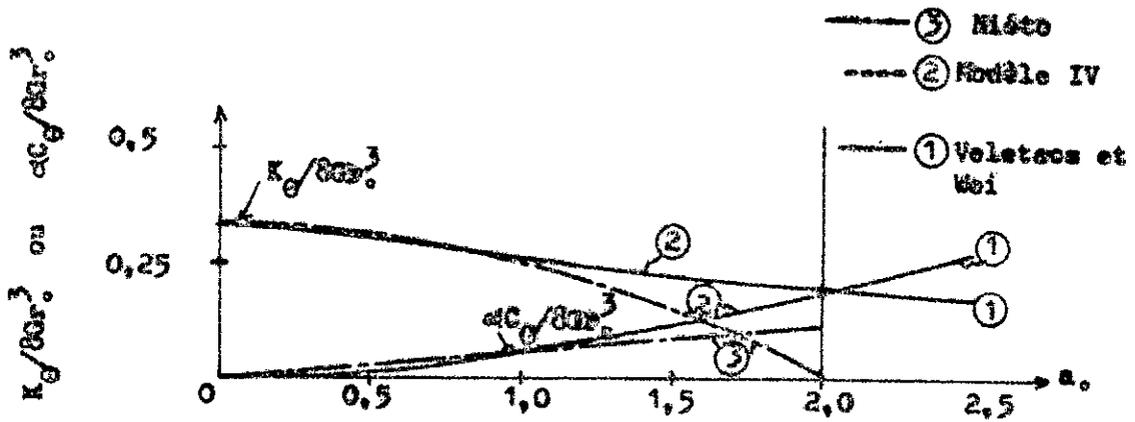
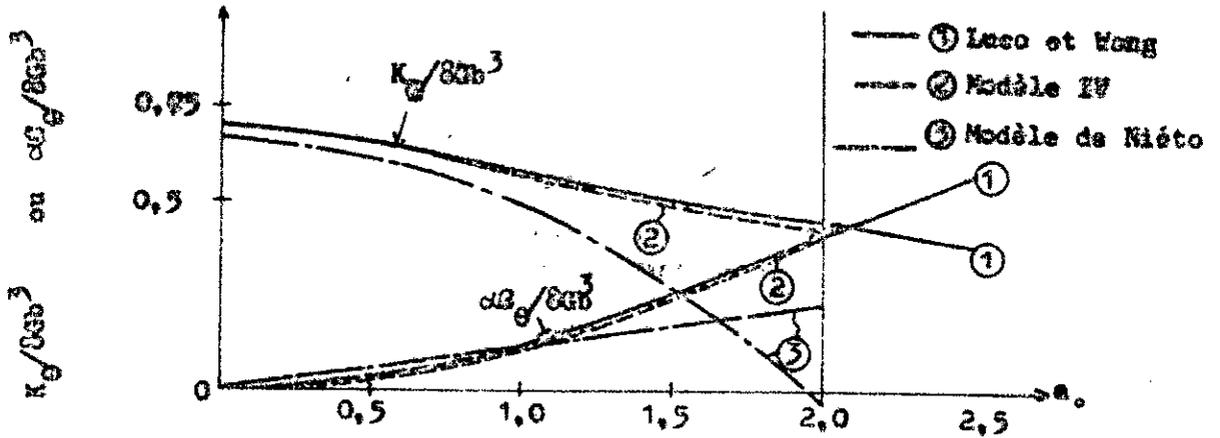


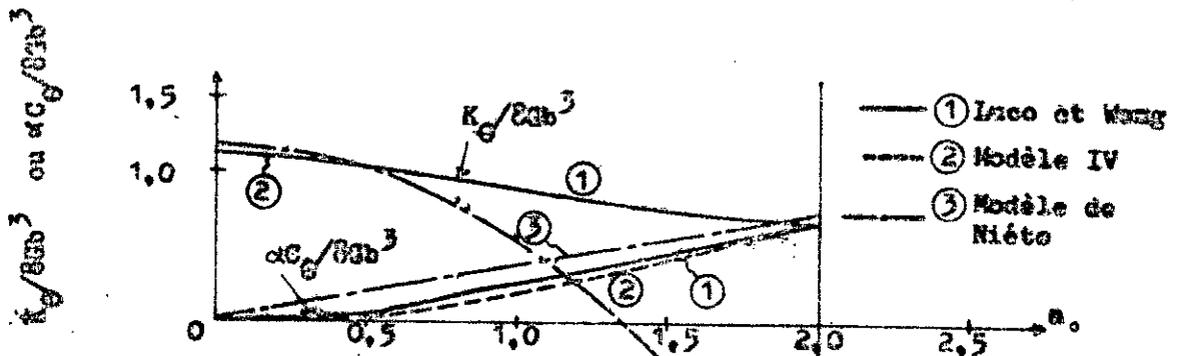
Fig. (IV-48): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en translation horizontale ($c/b=2$ et $\nu=1/3$).



Fig(IV-40): Fonctions de raideur d'une fondation circulaire rigide en rotation de basculement pour $\nu=0$.



Fig(IV-50): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en rotation de basculement pour $c/b=1, \nu=1/3$.



Fig(IV-51): Fonctions de raideur d'une fondation rectangulaire rigide en rotation de basculement pour $c/b=2$ et pour $\nu=1/3$.

fondation rectangulaire de basculement.

Pour cette composante du mouvement, le modèle de type IV donne une très bonne précision. L'utilisation d'un modèle de type II; est toujours médiocre pour la partie imaginaire (parabole remplacée par une droite). C'est donc l'inconvénient du modèle de Niéto; par ailleurs ses masses associées sont également trop fortes ce qui augmente l'écart entre ses courbes et ceux du demi-espace élastique (voir figures (IV-50) et (IV-51)). Un choix convenable de la masse de sol active fournira une bonne représentation possible de la partie réelle avec modèle de type II.

c/b	M	K	C
1	$1,39 \rho b^5$	$5,29 Gb^3$	$0,92 b^4 \sqrt{\rho G}$
2	$5,23 \rho b^5$	$9,47 Gb^3$	$2,91 b^4 \sqrt{\rho G}$

Tableau(IV-42) : Paramètres mécaniques du modèle de Niéto en basculement pour fondations rectangulaires ($\gamma = 1/3$).

Comme vu au chapitre II, le modèle de Niéto n'est défini que pour une gamme de fréquence (0 à 10HZ); soit pour une structure de longueur $2b$ dans le sens du mouvement, une fréquence adimensionnelle $a_0 \leq 20\sqrt{b}/V_s$.

Pour des caractéristiques usuelles de sol et structures cette borne supérieure reste très inférieure à 1, par exemple pour $b=10m$ et $V_s = 3000 m/s$ $a_0 \leq 0,2$.

Le modèle de Niéto pourrait ainsi être très sensiblement amélioré dans l'intervalle $a_0 \leq 2$; essentiellement par modification de la masse de sol associée et correction de la rigidité initiale selon les cas. Cependant il serait nécessaire d'avoir quelques renseignements complémentaires, notamment pour le cas de la base rectangulaire ou le nombre de cas étudiés antérieurement est insuffisant pour pouvoir établir une loi générale.

IV - 6 Validité des modèles mécaniques :

Cette méthode permet une modélisation par des oscillateurs simples avec une précision plus grande et une gamme de fréquence plus étendue que les auteurs antérieurs . En particulier une très bonne représentation est obtenue pour les fondations circulaires et rectangulaires en translation verticale ; et pour les fondations circulaires en translation horizontale . Pour le cas de fondations rectangulaires vibrant en translation horizontale , une modélisation très fine peut être obtenue avec le modèle III (oscillateur double en série) ; la modélisation moins précise par oscillateur simple restant acceptable si une précision moins grande est désirée . Pour le basculement , l'utilisation du modèle IV (oscillateur double en parallèle) permet en particulier une bonne approche de la partie imaginaire " αC " , qui reste mal représentée (linéaire) par un oscillateur simple . La validité comme modèles représentatifs du sol -pour les composantes du mouvement étudiées- est donc bien confirmée au cas où ces modèles sont utilisées dans les mêmes conditions que les fonctions d'impédance ; c'est à dire pour une pulsation donnée .

Il est certain que l'intérêt de la modélisation du sol ne se limite pas seulement à son emploi vis à vis de la réponse à une pulsation donnée . Toutefois , en ce qui concerne les sollicitations sismiques , on connaît l'importance particulière sur le comportement des structures des vibrations dont les fréquences sont voisines des fréquences propres des ouvrages , et , par ailleurs , les modèles proposés ont été étudiés sur une bande de fréquences couvrant très largement les fréquences propres des deux ou trois premiers modes propres des structures usuelles de Genie - civil . On peut par suite supposer, comme l'ont fait les auteurs antérieurs, que cette modélisation reste significative à l'égard des sollicitations sismiques . L'étude de la précision de la modélisation en ce cas fait appel à un problème complexe de réponse en régime transitoire dont l'étude générale n'entre pas dans le cadre de cette recherche .

A titre indicatif, un cas simplifié de réponse transitoire (oscillations libres en basculement d'une structure rigide sur demi - espace) sera abordé au chapitre suivant, en vue d'examiner en ce cas l'incidence sur le comportement de la finesse de modélisation proposée par rapport au modèle antérieur .

CHAPITRE V

EXEMPLE D'APPLICATION AU CAS DES STRUCTURES RIGIDES
SOLLICITEES EN BASCULEMENT EN REPONSE TRANSITOIRE.

V - Exemple d'application au cas de structures rigides sollicitées au basculement en réponse transitoire :

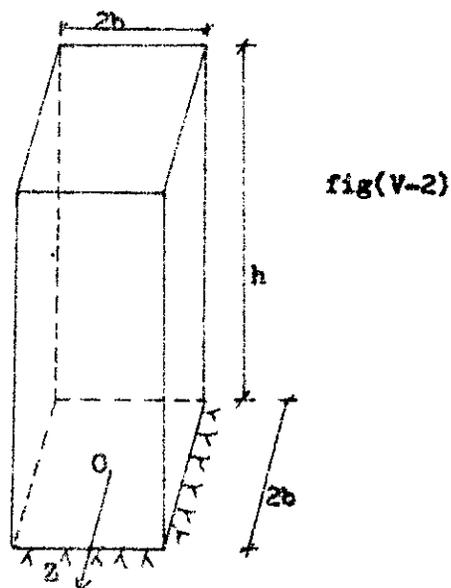
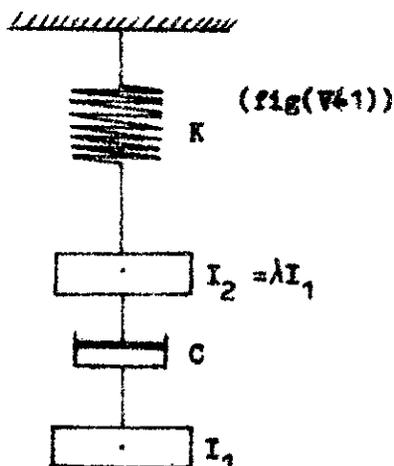
V-1 Généralités :

Les modèles mécaniques proposés dans la présente recherche ont été ~~ajustés~~ ^{ajustés} à partir des fonctions d'impédance de la fondation , c'est à dire dans la réponse permanente à des sollicitations harmoniques .

L'étude de leur comportement en régime transitoire comparativement aux fondations sur demi-espace élastique ne peut être traité dans cette thèse , à défaut notamment de termes de comparaison dans la littérature existante .

Le problème de l'incidence de la modélisation sur le comportement transitoire sera cependant abordé ici sur un exemple , celui des oscillations propres en basculement d'une structure sur fondation rectangulaire écartée de sa position d'équilibre .

Le mouvement propre sera étudié avec modèle proposé (§IV-3.2.3.2) ci-dessous (voir fig(V-1)) , ou avec le modèle de Niéto (défini en (§II-2.3)) à masse de sol solidaire de la base .



I_1 : Inertie polaire de la masse de rotative .

X : rigidité du modèle mécanique représentatif du sol , qui peut s'écrire :

$$K = 1,4 \omega^2 \quad (V-18)$$

Z : déplacement du modèle mécanique représentatif du sol , qui

$$\text{s'écrit : } Z = 2 \int I_1 u_0 \quad (V-19)$$

λ : coefficient d'amortissement .

I_2 : Inertie polaire de la structure qui est définie par : $I_2 = \lambda I_1$ (V-19)

Les relations précédentes :

Pour une fondation surée rigide , soumise à un mouvement de translation horizontale ; Les caractéristiques dynamiques du sol selon les ordonnées indiquées au chapitre IV sont (pour $\nu = 0,33$) :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 1,71 \text{ m}^2 \\ \nu &= 3,60 \text{ db}^2 \\ \beta &= 2,17 \text{ m}^2 \sqrt{G\rho} \end{aligned} \right\} \quad (V-2)$$

Le coefficient $\beta \sqrt{G\rho}$ est trouvé égal à 0,7 (V-30)

Or, dans la relation (V-18), ω_0 est défini par : $\omega_0 = 1,51 \frac{V_0}{h}$ (V-30)

Pour un mouvement de rotation on représentera par deux

OS : le mouvement relatif de la masse de sol active ainsi que celui de

la structure est défini par le vecteur rotation θ dans OS le long (Fig(V-21))

On admet la matrice d'inertie massique plane de ν mètres

donné en figure (V - 1) .

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (V-4)$$

La matrice de rigidité $[K]$ s'écrit :

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (V-5)$$

La matrice d'amortissement du même système a pour expression :

$$[C] = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} \quad (V-6)$$

L'équation d'équilibre du système considéré est :

$$\left([K] + [C]r + [I]r^2 \right) \left\{ \Theta e^{rt} \right\} = 0 \quad (V-7)$$

— Expression des pulsations et des vecteurs propres :

L'équation aux pulsations, déduite de (V-7) prend la forme :

$$\det \left([K] + [C]r + [I]r^2 \right) = 0 \quad (V-8)$$

L'amortissement "C" n'étant pas un amortissement de Rayleigh, les propriétés d'orthogonalité ne peuvent s'appliquer ; on cherchera donc des pulsations propres amorties complexes, solutions de l'équation (V-8).

En introduisant les expressions (V-4) ; (V-5) et (V-6) dans l'équation précédente et en développant le déterminant correspondant on obtient l'équation :

$$\left(I_1 I_2 r^3 + C (I_1 + I_2) r^2 + I_1 K r + C K \right) = 0 \quad (V-9)$$

En injectant les expressions (V-1a) ; (V-1b) et (V-1c) dans l'équation (V-9) on aboutit à :

$$r \left(\lambda r^3 + 2 f_0 \omega_0 (1 + \lambda) r^2 + \omega_0^2 r + 2 f_0 \omega_0^3 \right) = 0 \quad (V-10)$$

Soit "U" un complexe défini par : $r = U \omega_0$ (V-11)

ω_0 : étant le réel défini par la formule (V-1a) .

La relation (V-11) nous permet de transformer l'équation (V-10) en :

$$\lambda U^3 + 2 f_0 (1 + \lambda) U^2 + U + 2 f_0 = 0 \quad (V-12)$$

Cette équation en "U" complexe admet trois solutions, une solution réelle ; et les deux autres solutions sont des complexes conjugués .

Nous traiterons le cas d'un rapport "A" entre les inerties polaires massiques I_1 et I_2 égal à 4 ; cette valeur a été choisie :

- suffisamment élevée pour que l'éclatement de la structure soit appréciable, c - à - d que dans le cas d'une sollicitation sinusoïdale les réponses de translation seront négligeables devant les réponses de rotation en basculement (voir [18]).
- suffisamment faible pour que l'influence du sol soit importante.

Ce cas correspond par exemple à une structure parallélépipédique rigide à base carrée, de section de base 10×10 mètre carré, de hauteur 44 mètre. Le poids spécifique moyen de la structure (supposé homogène) étant de 3000 N/m^3 , et celui du sol 2000 N/m^3 .

L'équation (V-12) devient alors :

$$4 U^3 + 3,5 U^2 + U + 0,7 = 0 \quad (\text{V-13})$$

Cette équation admet pour solutions les racines :

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -0,8283 && \text{Solution réelle} \\ U_2 &= -0,0234 + i 0,4591 \\ U_3 &= -0,0234 - i 0,4591 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V-14})$$

Solutions complexes

Les composantes des vecteurs propres pour chaque mode j sont données à un coefficient près par les relations :

$$\left(\begin{bmatrix} K \\ C \end{bmatrix} r_j + \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} r_j^2 \right) \begin{Bmatrix} g_j \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{V-15})$$

ou $\{\theta_j\}$ représente le vecteur propre correspondant au mode de vibration " j " ; défini par :

$$\{\theta_j\} = \begin{pmatrix} \psi_{j1} \\ \psi_{j2} \end{pmatrix}$$

on peut prendre :

$$\psi_{j1} = 1$$

(V-16)

$$\psi_{j2} = d_j$$

Selon la première des deux relations (V-15) on trouve :

$$d_j = 1 + \frac{F_j}{2 \sqrt{\omega_0}} \quad ; \quad (j = 1 ; 2 \text{ ou } 3)$$

qui peut s'écrire également :

$$d_j = 1 + \frac{U_j}{2 \sqrt{\omega_0}} \quad (V-17)$$

Pour le premier mode de vibration (j = 1) les composantes du mouvement s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{U_1}{2 \sqrt{\omega_0}} \end{pmatrix} e^{r_1 t}$$

Pour le second et le troisième mode de vibration on a les composantes du mouvement suivantes :

$$\begin{pmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{U_2}{2 \sqrt{\omega_0}} \end{pmatrix} e^{r_2(t-t_1)}$$

et

$$\begin{pmatrix} \theta_{31} \\ \theta_{32} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{U_3}{2 \sqrt{\omega_0}} \end{pmatrix} e^{r_3(t-t_1)}$$

Comme U_2 et U_3 sont des racines conjuguées on peut écrire :

$$\theta_{31} = \overline{\theta_{21}} \quad \text{et} \quad \theta_{32} = \overline{\theta_{22}}$$

On pose :

$$U_2 = \alpha^* + i \beta^* \quad \text{on a alors :} \quad U_3 = \alpha^* - i \beta^*$$

Les composantes du mouvement en mode complexe sont des complexes conjugués leur somme est alors réelle :

$$\theta_{22} + \overline{\theta_{22}} = 2B e^{\alpha^* \omega_0 (t-t_1)} \left(\cos \beta^* \omega_0 (t-t_1) \right) \left(1 + \frac{\alpha^*}{2\zeta_0} \right) - \frac{\beta^*}{2\zeta_0} \sin \beta^* \omega_0 (t-t_1)$$

$$\theta_{12} + \overline{\theta_{12}} = 2B e^{\alpha^* \omega_0 (t-t_1)} \left(\cos \beta^* \omega_0 (t-t_1) \right)$$

Pour les composantes θ_1 et θ_2 du mouvement de l'oscillateur on trouve :

$$\theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12} + \overline{\theta_{12}} + A'$$

$$\theta_2 = \theta_{22} + \overline{\theta_{22}}$$

A' : représente une rotation arbitraire de la masse de sol .

Ces équations peuvent également s'écrire :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A e^{U_1 \omega_0 t} + 2B e^{\alpha^* \omega_0 (t-t_1)} \cos \beta^* \omega_0 (t-t_1) + A' \\ \theta_2 &= A \left(1 + \frac{U_1}{2\zeta_0} \right) e^{U_1 \omega_0 t} + 2B \left[e^{\alpha^* \omega_0 (t-t_1)} \left(-\frac{\beta^*}{2\zeta_0} \sin \beta^* \omega_0 (t-t_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2B e^{\alpha^* \omega_0 (t-t_1)} \left(1 + \frac{\alpha^*}{2\zeta_0} \right) \cos \beta^* \omega_0 (t-t_1) \right] \end{aligned}$$

(V-18)

Les constantes A , B , t_1 , et A' peuvent s'exprimer en fonction des conditions initiales, c'est à dire des rotations $\theta_1(0)$ et $\theta_2(0)$; et des vitesses $\dot{\theta}_1(0)$ et $\dot{\theta}_2(0)$ à l'instant $t=0$ ou commencent les oscillations du système .

Mouvement propre à partir des conditions initiales :

On cherchera la réponse propre lorsque l'oscillateur est écarté de sa position d'équilibre, puis lâché sans vitesse initiale. Pour comparer les résultats au modèle de Niéto à masse solidaire, nous admettons que la masse de sol est également écartée du même angle θ_0 , avec vitesse initiale nulle, soient les relations :

$$\theta_1(0) = \theta_0$$

$$\theta_2(0) = \theta_0$$

(V-19)

$$\dot{\theta}_1(0) = 0$$

$$\dot{\theta}_2(0) = 0$$

En posant : $B_1 = B e^{-\alpha^* \omega_0 t_1}$ et $\varphi_0 = \beta^* \omega_0 t_1$, le

système d'équation (V-18) à l'instant $t=0$ s'écrit :

$$\theta_1(0) = A + 2B \cos \varphi_0 + A'$$

$$\theta_2(0) = A \left(1 + \frac{U_1}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}}\right) + 2B_1 \left(\left(1 + \frac{\alpha^*}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}}\right) \cos \varphi_0 + \frac{\beta^*}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}} \sin \varphi_0 \right) = \theta_0$$

Les vitesses $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ à $t=0$ ont pour expression :

$$\dot{\theta}_1(0) = AU_1 + 2B_1 (\alpha^* \cos \varphi_0 + \beta^* \sin \varphi_0) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2(0) = AU_1 \left(1 + \frac{U_1}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}}\right) + 2B_1 \left(\alpha^* \left(1 + \frac{\alpha^*}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}}\right) - \frac{\beta^*{}^2}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}} \right) \cos \varphi_0 \\ + \left(\frac{\alpha^* \beta^*}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}} + \beta^* \left(1 + \frac{\alpha^*}{2 \frac{\omega_0}{\omega_0}}\right) \right) \sin \varphi_0 = 0 \end{aligned}$$

Ce système d'équations admet pour solutions les constantes :

$$A^* = 0$$

$$2B_1 = 0,8950 \theta_0$$

$$A = 0,2461 \theta_0$$

$$\psi_0 = 32,6124$$

Si l'on pose : $\psi = \beta^* \omega_0 t$, les composantes du mouvement sont :

$$\theta_1 = A e^{(\nu_1/\beta^*)\psi} + 2B_1 e^{(\alpha^*/\beta^*)\psi} \cos(\psi - \psi_0)$$

$$\theta_2 = A \left(1 + \frac{\nu_1}{2f_0}\right) e^{(\nu_1/\beta^*)\psi} + 2B_1 e^{(\alpha^*/\beta^*)\psi} \left(\left(1 + \frac{\alpha^*}{2f_0}\right) \cos(\psi - \psi_0) - \frac{\beta^*}{2f_0} \sin(\psi - \psi_0) \right)$$

Les rotations θ_1 et θ_2 sont représentées sur la figure (V-3) .

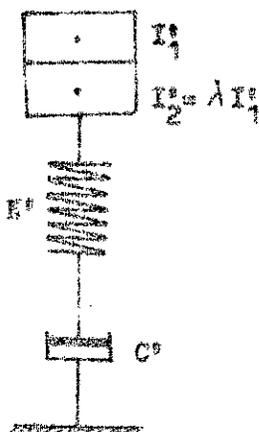
V-3 Modèle de Niéto en basculement :

D'après le tableau (IV-42) donné en chapitre IV ; les caractéristiques du modèle de Niéto en mode de rotation en basculement correspondantes à une base carrée et à un coefficient de Poisson $\nu = 1/3$ sont :

$$C^* = 0,93 b^4 \sqrt{\rho g}$$

$$K^* = 5,29 g b^3 \quad (V-20)$$

$$I_1^* = 1,39 \rho b^5$$



fig(V-4)

Expressions des pulsations et vecteurs propres du modèle de Niéto :

L'équation d'équilibre du système représenté sur la figure(V-4) s'écrit :

$$\left[K^* + (I_1^* + I_2^*) r^{*2} + C^* r^* \right] \theta e^{r^* t} = 0$$

Où encore :

$$K^* + I_1^* (1 + \lambda) r^{*2} + C^* r^* = 0 \quad (V-21)$$

En posant :

$$K^* = I_1^* \omega_0^{*2}$$

$$C^* = 2 \frac{f^*}{\sqrt{g}} I_1^* \omega_0^* \quad (V-22)$$

$$\eta^* = r^* / \omega_0^*$$

$$\omega_0^* \text{ est défini par : } \omega_0^* = \sqrt{K^* / I_1^*} = 1,95 \sqrt{g/b}$$

En introduisant les expressions (V-22) dans l'équation (V-21) on obtient:

$$(1 + \lambda) \eta^{*2} + 0,34 \eta^* + 1 = 0 \quad \text{avec } \lambda = 4$$

Cette équation admet pour solutions deux racines complexes conjuguées :

$$W_1^* = -0,03400 + i 0,445919$$

$$W_2^* = \overline{W_1^*}$$

Le vecteur propre α pour composantes :

$$\alpha_j = e^{\frac{W_j^* t}{j}} \quad \text{et } (j = 1 \text{ ou } 2)$$

$$\text{On pose : } W_1^* = \alpha^j + i \beta^j \quad ; \quad \text{on a : } W_2^* = \alpha^j - i \beta^j$$

La composante du mouvement " θ " s'écrit :

$$\theta = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = A_1 (e^{\alpha^j(t-t_0)} + e^{\alpha^j(t-t_0)})$$

Elle s'exprime également par l'équation :

$$\theta = A_2 e^{\alpha^j \omega_0^j t} \cos \beta^j \omega_0^j (t-t_0) \quad (V-22)$$

$$\text{ou : } A_2 = 2A_1 e^{\alpha^j \omega_0^j t_0}$$

Les constantes A_2 et t_0 s'expriment à partir des conditions initiales :

--- Mouvement propre à partir des conditions initiales :

En vue de comparer les composantes du mouvement du système (représenté sur la fig(V-1)) et celle du modèle de Mioto, on cherchera la réponse propre de l'oscillateur (représenté sur la fig(V-2)) si on l'écarte de sa position d'équilibre d'une rotation initiale θ_0 .

À l'instant $t=0$; l'équation (V-22) s'écrit :

$$\theta(t=0) = A_2 \cos \beta^j \omega_0^j t_0 = \theta_0$$

La vitesse: $\dot{\theta}(t=0) = A_2 \omega_0' (\alpha^{e_0} \cos \beta^{e_0} \omega_0' t_0 + \beta^{e_0} \sin \beta^{e_0} \omega_0' t_0) = 0$

Ces équations admettent pour solutions :

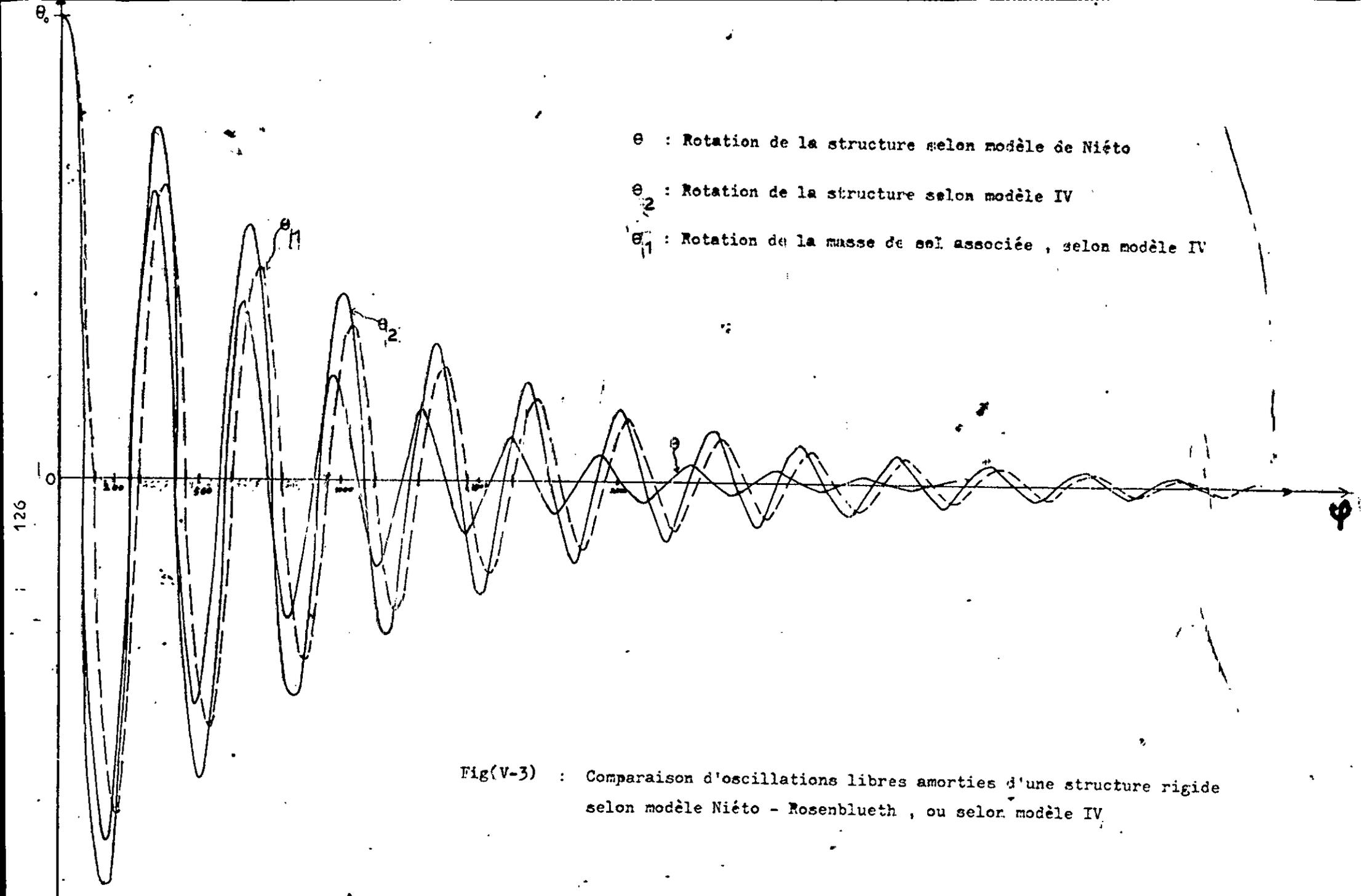
$$A_2 = 1,0029 \theta_0$$

$$t_0 = 5,0075 (V_S/b)^{-1} \quad (V-23)$$

La rotation θ donnée par l'équation (V-22) est représentée -pour les valeurs de A_2 et t_0 données par (V-23) - sur la figure (V-3) .

V-4 Comparaison des résultats :

Sur le graphe de la figure (V-3) , on peut comparer le comportement de la structure selon les deux modèles . On constate que les comportements sont assez similaires , cependant les amplitudes du mouvement du modèle IV sont plus grandes , et l'amortissement est nettement moins rapide ; ce qui montre que la finesse de la modélisation a une influence non négligeable sur le comportement transitoire .



Fig(V-3) : Comparaison d'oscillations libres amorties d'une structure rigide selon modèle Niéto - Rosenblueth, ou selon modèle IV.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

VI - Conclusion :

La présente recherche a montré la possibilité de modéliser le comportement d'un sol de fondation soumise, par les forces d'interaction, à une sollicitation harmonique, à l'aide de modèles mécaniques à petit nombre de paramètres.

Sur l'exemple de fondations usuelles connues : circulaires ou rectangulaires superficielles sur demi-espace élastique, en mouvement de translation verticale ou horizontale, ou de rotation de basculement, une très bonne approximation a été obtenue à l'aide d'oscillateurs simples ou doubles de différents types (en "série" ou en "parallèle") avec masses et amortisseurs.

Une méthodologie de détermination de cette modélisation a été mise au point, par ajustement aux "fonctions d'impédance de raideur" des fondations connues ; l'intérêt de ces fonctions de raideur est de pouvoir s'obtenir, pour l'oscillateur simple ou double, sous une forme explicite relativement simple en fonction des paramètres à déterminer.

Cette méthode permet une modélisation par des oscillateurs simples avec une précision plus grande et une gamme de fréquence plus étendue que les auteurs antérieurs. En particulier une très bonne représentation est obtenue pour les fondations circulaires et rectangulaires en translation verticale ; et pour les fondations circulaires en translation horizontale. Pour le cas de fondations rectangulaires vibrant en translation horizontale, une modélisation très fine peut être obtenue avec le modèle III (oscillateur double en série). Pour le basculement, l'utilisation du modèle IV (oscillateur double en parallèle) permet en particulier une bonne approche de la partie imaginaire " αC ", qui reste mal représentée (linéaire) par un oscillateur simple.

La modélisation proposée pourrait être étendue à d'autres types et conditions de fondations : sols multicouches, fondations enterrées, fondations élastiquement déformables ... etc.

Par ailleurs d'autres recherches pourraient être entreprises pour étudier la validité et la précision de cette modélisation à paramètres discrets vis à vis des sollicitations transitoires.

ANNEXE

ANNEXE

Graphes et tableaux

Figure(II-2a): Fonctions de déplacement d'une fondation circulaire rigide en translation horizontale d'après Laco et Westman .

Figure(II-2b): Fonctions de déplacement d'une fondation circulaire rigide en translation verticale selon Laco et Westman .

Figure(III-2b): Fonctions de déplacement d'une fondation circulaire rigide en rotation de basculement d'après Laco et Westman .

Tableau(II-4a): f_{11} et S_{11} d'après Valetsos et Wei pour une fondation circulaire rigide en translation horizontale.

Tableau(II-4b): f_{22} et S_{22} d'après Valetsos et Wei pour une fondation circulaire rigide en basculement .

Tableau(II-5): Fonctions de raideur selon Esieh pour une excitation horizontale , de roulis et de lacet .

Tableau(II-6): Fonctions de déplacement de rottement pour une fondation circulaire en translation verticale .

Tableau(II-7): Parametres mecaniques du modele de Lyner pour une fondation circulaire rigide en translation verticale

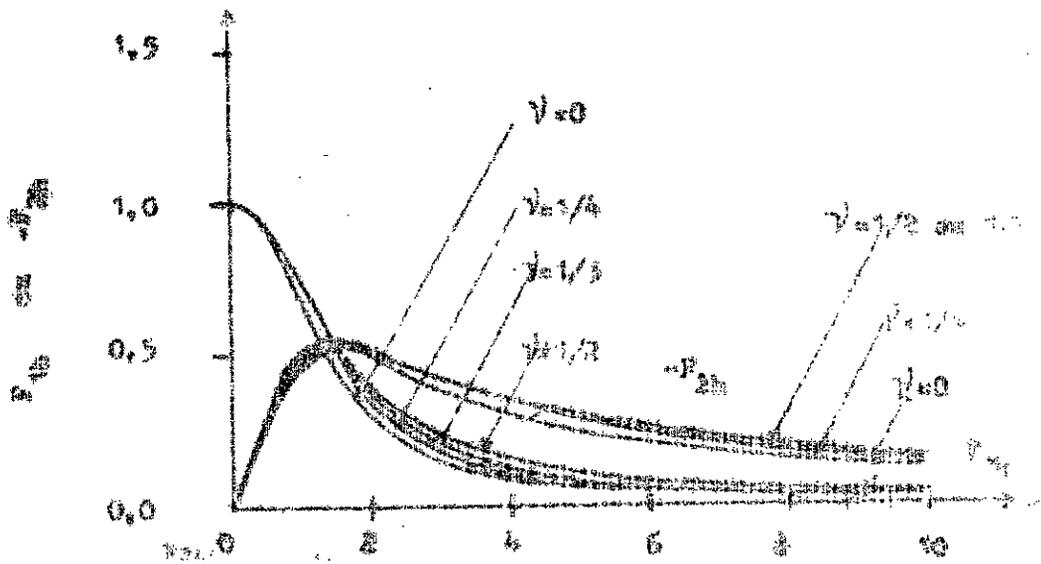


Fig (II-2a) : Fonctions de déplacement d'une fondation circulaire rigide en translation horizontale selon l'axe et l'ordonnée

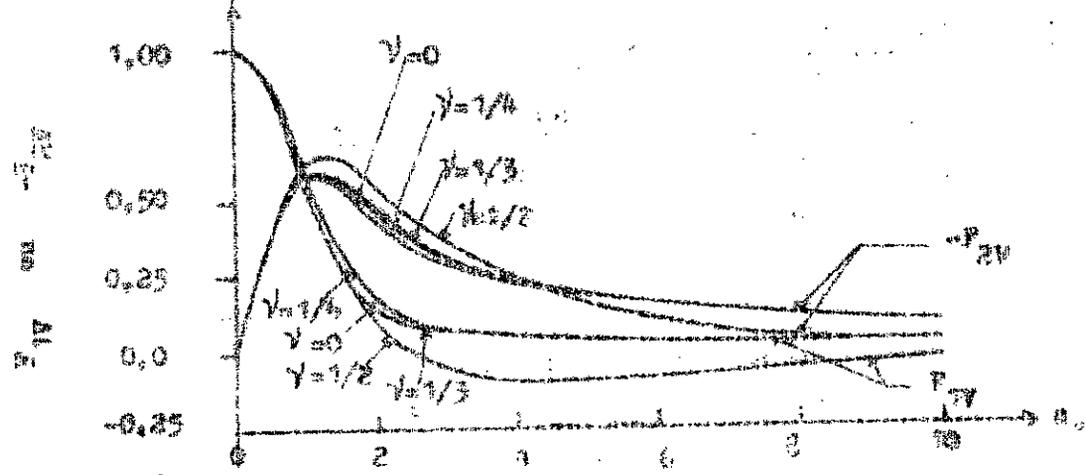


Fig (II-2b) : Fonctions de déplacement d'une fondation circulaire rigide en translation verticale selon l'axe et l'ordonnée

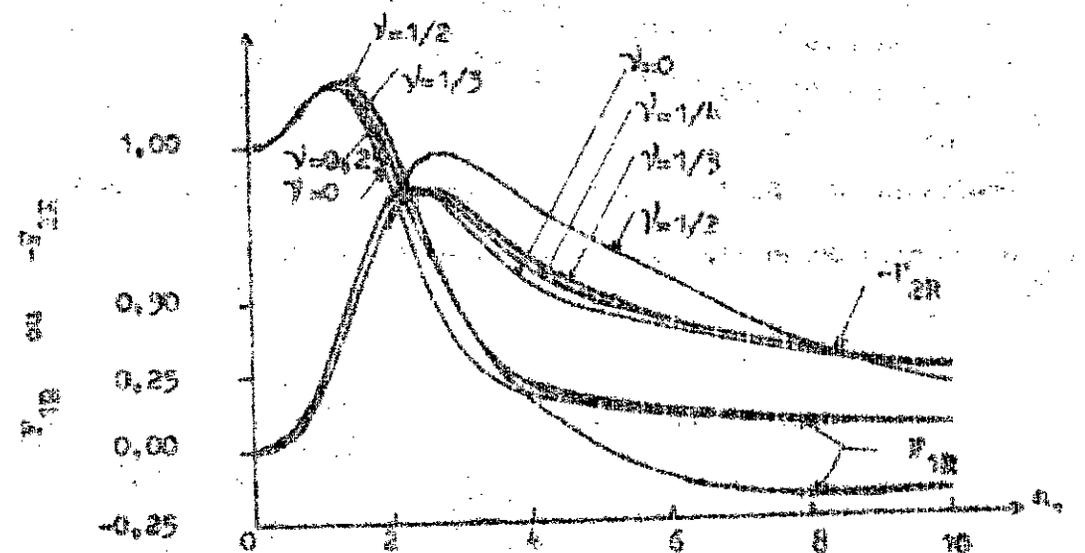


Fig (II-2c) : Fonctions de déplacement d'une fondation circulaire rigide en rotation de basculement d'après l'axe et l'ordonnée

Répartition		Fonctions F_1 et F_2
Uniforme	0,00	$F_1 = -0,319(1 - 0,291 a_0^2 + 0,023 a_0^4 + \dots)$ $F_2 = -0,282 J_1(1,143 a_0) + 0,0516 a_0(1 - 0,056 a_0^2 + \dots)$
Uniforme	0,25	$F_1 = -0,239(1 - 0,25 a_0^2 + 0,0179 a_0^4 + \dots)$ $F_2 = -0,1835 J_1(1,09 a_0) + 0,048 a_0(1 - 0,063 a_0^2 + \dots)$
Uniforme	0,50	$F_1 = -0,159(1 - 0,25 a_0^2 + 0,0153 a_0^4 + \dots)$ $F_2 = -0,109 J_1(1,047 a_0) + 0,046 a_0(1 - 0,065 a_0^2 + \dots)$

Tableau (II-3) : Fonctions de déplacement de raisser .

Tableau (II-5) : Fonctions de raidier d'après Reich .

Excita- tion		F_1	F_2
horizon- tale	0	$4,51 - 0,15 a_0^2$	$2,60 + 0,07 a_0^2$
$0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$	0,25	$4,80 - 0,20 a_0^2$	$2,50 + 0,30 a_0^2$
	0,50	$5,30 - 0,10 a_0^2$	$3,00 + 0,25 a_0^2$
de roulis	0 à 0,5	$2,50 - 0,40 a_0^2$	$0,40 a_0$
$0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$			
de lacet	0	$5,10 - 0,30 a_0^2$	$0,50 a_0$
$0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}$			

u_0		f_{11}	g_{11}
	0	1	0
0	1/3	1	0
	1/2	1	0
0,25	0	0,9768	-0,1633
	1/3	0,9818	-0,1431
	1/2	0,9828	-0,1375
0,50	0	0,9702	-0,2105
	1/3	0,9290	-0,2746
	0,5	0,9329	-0,2643
0,75	0	0,8096	-0,4275
	1/3	0,8478	-0,3841
	0,5	0,8560	-0,3706
1,00	0	0,6896	-0,5053
	1/3	0,7480	-0,4642
	0,5	0,7610	-0,4492
1,25	0	0,5673	-0,5430
	1/3	0,6416	-0,5023
	0,5	0,6592	-0,4973
1,50	0	0,4566	-0,5476
	1/3	0,5102	-0,5314
	0,5	0,5615	-0,5180
1,75	0	0,3657	-0,5302
	1/3	0,4515	-0,5286
	0,5	0,4755	-0,5172
2,00	0	0,2940	-0,5013
	1/3	0,3786	-0,5123
	0,5	0,4045	-0,5030
2,25	1/3	0,3210	-0,4897
2,50	0	0,2006	-0,4376
	1/3	0,2761	-0,4657
	0,5	0,3044	-0,4600
2,75	1/3	0,2405	-0,4430
3,00	0	0,1462	-0,3844
	1/3	0,2113	-0,4224
	0,5	0,2416	-0,4200
3,25	1/3	0,1863	-0,4040

Tableau (II-4a) : Fonctions f_{11} et g_{11} en translation horizontale d'après Volovson et Wei [11]

e_{22}		f_{22}	g_{22}
0	0	1	0
	1/3	1	0
	0,5	1	0
0,25	0	1,0212	-0,0018
	1/3	1,0177	-0,0037
	0,5	1,0183	-0,0056
0,50	0	1,0766	-0,0370
	1/3	1,0632	-0,0283
	0,5	1,0678	-0,0210
0,75	0	1,1441	-0,1153
	1/3	1,1268	-0,0698
	0,5	1,1334	-0,0500
1,00	0	1,1941	-0,2437
	1/3	1,1802	-0,1974
	0,5	1,1941	-0,1632
1,25	0	1,1981	-0,4082
	1/3	1,2028	-0,3226
	0,5	1,2272	-0,3357
1,50	0	1,1399	-0,5807
	1/3	1,1780	-0,4892
	0,5	1,2149	-0,5008
1,75	0	1,0227	-0,8280
	1/3	1,1014	-0,6357
	0,5	1,1502	-0,6651
2,00	0	0,8670	-0,8210
	1/3	0,9880	-0,7283
	0,5	1,0390	-0,8055
2,25	1/3	0,8387	-0,8343
2,50	0	0,5501	-0,8598
	1/3	0,6926	-0,8652
	0,5	0,7457	-0,9624
2,75	1/3	0,5598	-0,8591
3,00	0	0,3322	-0,7639
	1/3	0,4488	-0,8281
	0,5	0,4734	-0,9674
3,25	1/3	0,3613	-0,7639

Tableau (II-4b) : Fonctions f_{22} et g_{22} en rotation de

basculéent d'après Valotson et Wei [11]

Tableau (II-6) : Fonctions de déplacement en translation verticale d'après Soguy

Répartition	δ	Fonction F1
Rigide	0	$0.230000 - 0.109375a_0^2 + 0.010905a_0^4 - \dots + \dots$
	1/4	$0.187500 - 0.070313a_0^2 + 0.004131a_0^4 - \dots + \dots$
	1/3	$0.165667 - 0.060764a_0^2 + 0.005085a_0^4 - \dots + \dots$
	1/2	$0.125000 - 0.046875a_0^2 + 0.003561a_0^4 - \dots + \dots$
Uniforme	0	$0.318310 - 0.092341a_0^2 + 0.007605a_0^4 - \dots + \dots$
	1/4	$0.238733 - 0.059683a_0^2 + 0.004163a_0^4 - \dots + \dots$
	1/3	$0.212207 - 0.051575a_0^2 + 0.003453a_0^4 - \dots + \dots$
	1/2	$0.159135 - 0.039789a_0^2 + 0.002432a_0^4 - \dots + \dots$
Parabolique	0	$0.424414 - 0.074272a_0^2 + 0.004232a_0^4 - \dots + \dots$
	1/4	$0.318310 - 0.047747a_0^2 + 0.002379a_0^4 - \dots + \dots$
	1/3	$0.282942 - 0.041262a_0^2 + 0.001973a_0^4 - \dots + \dots$
	1/2	$0.212207 - 0.031831a_0^2 + 0.001389a_0^4 - \dots + \dots$

Répartition	δ	Fonction F2
Rigide	0	$0.214474a_0 - 0.039416a_0^3 + 0.002444a_0^5 - \dots + \dots$
	1/4	$0.148594a_0 - 0.023677a_0^3 + 0.001294a_0^5 - \dots + \dots$
	1/3	$0.130630a_0 - 0.020048a_0^3 + 0.001052a_0^5 - \dots + \dots$
	1/2	$0.104547a_0 - 0.014717a_0^3 + 0.000717a_0^5 - \dots + \dots$
Uniforme	0	$0.214474a_0 - 0.029561a_0^3 + 0.001528a_0^5 - \dots + \dots$
	1/4	$0.148594a_0 - 0.017757a_0^3 + 0.000808a_0^5 - \dots + \dots$
	1/3	$0.130630a_0 - 0.015027a_0^3 + 0.000633a_0^5 - \dots + \dots$
	1/2	$0.104547a_0 - 0.011020a_0^3 + 0.000444a_0^5 - \dots + \dots$
Parabolique	0	$0.214474a_0 - 0.019708a_0^3 + 0.000764a_0^5 - \dots + \dots$
	1/4	$0.148594a_0 - 0.011837a_0^3 + 0.000405a_0^5 - \dots + \dots$
	1/3	$0.130630a_0 - 0.010024a_0^3 + 0.000328a_0^5 - \dots + \dots$
	1/2	$0.104547a_0 - 0.007258a_0^3 + 0.000233a_0^5 - \dots + \dots$

Tableau (II-7) : Paramètres numériques γ , η , θ et ξ de Soguy de Lyner ; pour une fondation circulaire en translation verticale

γ	η	θ
$4Gr_0 / (1-\nu)$	$0.85 Kr_0 / V_S$	0

BIBLIOGRAPHIE

1. F.E. Richart , J. R Hall R.D Woods-"Vibrations of soil and foundations"
Prentice Hall N.J.....USA.....1970
2. R.V. Whitman, M. ASCE, and F.E.Richart, Jr.,F.ASCE ;"Design procedures for
dynamically loaded foundations"
J.of the soil mécha.and found. div.....1967
3. T.K. Hsieh "Foundations vibrations"
Proc.Instit.of Gen. Civ. Eng. Vol.221962
4. G. Deleuze - "Reponse à un mouvement sismique d'un édifice posé sur un sol
élastique"
-suppl . Ann I.T.B.T.P. N° 234Juin 1987
5. M.Seguin-"Résolution théorique du mouvement d'un massif lié élastiquement
à un support"-Suppl Ann I.T.B.T.P N°= 194.....1964
6. -J. Lysmer-"Vertical motion of rigid footings"
Dept. of civil eng.Univ .of Michigan:.....1966
7. J. Lysmer and F.E.Richart -"Dynamic response of footings to vertical
loading"
J. soil mecha . and found . Vol; 92 SMI:.....1966
8. G.W.Bycroft "Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi infinite
elastic space and on an élastique stratum "
philosophical trans royal société , London Vol. 248 pp6
.....1956
9. J.H.A. Crockett , and R.E.R. Hammond , "The dynamic principles of machine
foundations and ground ," Proceedings,Inst . Méchanical
Engrs ., London ,Vol.160 , pp.512-531.....1949
10. H.Bolton Seed , John Lysmer , R.Kang -"Soil structure interaction
analyse for seismic response"- A.S.C.E Jour Géotech -
Engng Div1975
11. A.S. Veletsos and Y.T.Wei -"Lateral and rocking vibrations of footings"
A.S.C.M. Jour Soil Mech and found Div SM9.....1971
12. H. Lorenz -"Elasticity and damping effect of oscillating bodies on soil"
symp Dyn Test Soil A.S.T.M S.T.P N°= 156
.....1953
13. Biot, J. et Goodier, J., Théorie de l'élasticité ,
Mc Graw - Hill Book Company , Inc ,1951

14. E. ABSI -"Foundations rectangulaires rigides sur sol élastique"
Suppl ann I.T.B.T.P. N° 2651970
15. Arnold, Bycroft , Wahbukton - "Forced vibrations of a body on an
infinite élastique solid"
A.S.M.E. Ser E Jour Appl Mech1955
16. M. Ghaffar Zadeh "Modèles de fonctions d'impédance constantes"
thèse Dr Ing E.C.P.1982
17. Juan E , Luco and R.A.Westmann_"Dynamic response of circular footings"
A.S.C.E. Jour soil Mech and found div SM9.....1971
18. Z. Djillali Berkane "Influence du deuxième mode de vibration sur le
comportement sismique des structures rigides sur sols
meubles élastique"
thèse de magister ENPA1984
19. H.L Wong and J.E.Luco -"Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape"
Earthquake Engineering Research Laboratory , California Institute of technology , Pasadena , California, U.S.A
.....1976
20. J.Elorduy ,J.A.Nieto and E.M.Szekely ;"Dynamic response of bases of arbitrary shape subjected to periodic vertical loading",
proc subjected to ; intl symp .on wave propagation and dynamic properties of earth matériaux, univ .of new Mexico
.....1967
21. Weissmann, G.F. "A mathématique model of a vibrating soil_foundation"
the Bell System Technical Journal.....1966
22. Pauw,A. "A dynamic analogy for foundation _soil systems ."
Américan société for testing and matériaux .
ASTM/STP.....1953
23. T.Y.Sung "vibrations in semi-infinite solids due to périodic surface loading"
symp dyn test soil , A.S.T.M. S. T. P. N° 156 pp(33-64)
.....1953
24. N.M.Newmark and . E. Rosenbluth-"Fondamentals of earthquake engineering"
prentice hall1971
25. Capra & V . Davidovici -"Calcul dynamic des structures en zone sismique"
Eyrolles1980

26. 8th world conference on earthquake Engineering
San Francisco volume III1984
27. J . Girard - " Vibration des massifs de fondation sur supports
élastiques"
suppl Ann I.T.B.T.P N° = 243-441968
28. K . Saichi-"Etude expérimentale des rigidités du sol pour les fon-
dations rectangulaires enterrées soumises à des mouve-
ments de rotation"
thèse de magister E.N.P.A1986
29. A . Carrared-"Etude expérimentale des rigidités du sol pour les
fondations rectangulaires enterrées soumises à des mou-
vements de translation horizontal et vertical"
thèse de magister E.N.P.A1986
30. Filliat- " la pratique des sols et fondations " chapitre 19 et 20 .
31. A . S. Veletsos et Vebric - " Vibration of viscoelastic foundations"
Earth . Eng. and struc . Dyn . Vol . 21973
32. R.W. Clouth and Pensien - " Dynamique des structures "
Edition Pluralis1980
33. Victor Davidovici " Génie parasismique "
Presses de l'école national des ponts et chaussées..
.....1986
34. J.E . Lucco.H.L.Wong and M.D.Trifunac- " A note on dynamic response o
of rigid embedded foundation "
Earth . Eng . and struc . Dyn . Vol 4 p119-127 U.S.A
.....1975
35. D . D . Barkan - " Dynamics of bases and foundations "
Mc Graw-Hill Book Con . Y . U.S.A1962
36. M . I . Gorbunov-Possadov " Design of structures upon elastic foun-
tion "
proc . 5th ICSMFE ; vol I pp 643-6481961