

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et  
de la Recherche Scientifique

*Ecole Nationale Polytechnique*



وزارة التعليم العالي  
والبحرث العلمي  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

## DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

### PROJET DE FIN D'ÉTUDES

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur  
d'Etat en Automatique

**Thème :**

**COMMANDE EXTREMALE ADAPTATIVE  
APPLIQUEE AU REACTEUR CHIMIQUE**

**Présenté par :** BOUITAOUNE Mouadh

BOUSSAHEL Mohamed Wassim

**Dirigé par :** Dr R. ILLOUL

**Juin 2011**

Ecole Nationale Polytechnique : 10, Avenue Hassen Badi BP182 El-Harrach

## Commande extrémale adaptative appliquée au réacteur chimique continu parfaitement agité

### Résumé :

L'objectif de ce projet est de résoudre un problème d'optimisation en temps réel des réacteurs chimiques nonisothermes continus parfaitement agités. L'approche utilisée est basée sur la recherche d'un extremum en utilisant un algorithme d'adaptation paramétrique afin de maximiser un profil de concentration à la sortie du réacteur. La synthèse de la commande extrémale ainsi que la loi d'adaptation paramétrique sont basées sur le théorème de stabilité de Lyapunov [GUA-04].

La première partie du projet concerne la modélisation des réacteurs chimiques. La seconde partie concerne la formulation du problème et l'élaboration d'une loi de contrôle afin que l'optimum inconnu soit atteint. Les performances de cette commande extrémale ont été illustrées par l'intermédiaire de simulations numériques sur la réaction de 'van de Vusse'.

**Mot clefs :** Réacteurs chimiques CSTR, commande extrémale, commande adaptative, stabilité de Lyapunov, persistance d'excitation.

### Adaptive extremum-seeking control of continuous stirred tank reactors

#### Abstract:

We present in this project a real-time adaptive extremum seeking control scheme for nonisothermal continuous stirred tank reactors. An adaptive learning technique is introduced to construct an optimum seeking algorithm that drives the system states to optimal equilibrium concentrations of the reaction mixture. Lyapunov's stability theorem is used in the design of the extremum seeking controller structure and the development of the parameter learning laws [GUA-04].

The first part of the project concerns the chemical reactors modeling. The second part relates to the development of an extremum seeking control law that drives the system to the unknown optimum. The performance of the technique is demonstrated with numerical simulations of the van de Vusse reaction.

Keywords: CSTR, Extremum seeking, Lyapunov stability, adaptive learning, persistence of excitation.

### إدارة تحكم طرفية تكيفية لمفاعلات كيميائية من نوع مستمر.

**ملخص :** يرمي هذا المشروع إلى حل مشكل إعطاء الأداء الأمثل للمفاعلات الكيميائية. وقد استخدمنا المنهج القائم على إدارة تحكم طرفية تكيفية من أجل بلوغ التركيز الأقصى في المفاعل. و يقوم بإيجاد إدارة تحكم طرفية و قانون التكيف القياسي على نظرية و تخص الدراسة الأولى إيجاد نماذج رياضية للمفاعلات الكيميائية، و تتمثل الثانية [GUA-04] بالاستقرار لصاحبها Lyapunov. في إعداد قانون تكيف قياسي من أجل بلوغ موقع طرفي و ثم توضيح فعالية هذه الإدارة من خلال حالات صورية رقمية للتفاعل .Van de vusse

#### الكلمات الرئيسية :

مفاعلات كيميائية ، إدارة تحكم طرفية ، إعطاء الأداء الأمثل ، نظرية Lyapunov ، الاستقرار في الإثارة.

# DEDICACES

*Nous dédions ce modeste travail :*

*A nos très chers parents, qui par leur sacrifices et patience,  
nous ont toujours permis de persévérer*

*A nos très chers frères et sœurs*

*A tous nos amis*

*Mouadh*

*Wassim Mohamed*

## REMERCIEMENTS

*Nous tenons tout d'abord à exprimer notre très profonde gratitude et remercier notre promoteur Monsieur Rachid Illoul, Docteur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, d'avoir proposé et dirigé ce travail. Nous sommes très reconnaissants pour toute l'aide et confiance qu'il nous a toujours témoignés.*

*Nous remercions le président et les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

*A l'issue de nos 5 années d'Etudes à l'Ecole, nous tenons à remercier l'ensemble des enseignants du département des Sciences Fondamentales et du département d'Automatique pour la haute qualité de l'enseignement qui nous a été dispensés et pour tout leur savoir qu'ils ont partagé.*

*Nous aimerions aussi remercier particulièrement tout le personnel de la bibliothèque, pour leur sympathie et leur dynamisme.*

## SOMMAIRE

Listes des tableaux et figures .....	viii
Liste des abréviations .....	xi

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
------------------------------------	---

### CHAPITRE I : Généralités sur les réacteurs chimiques

I.1 Introduction aux réacteurs chimiques .....	4
I.2 Critères de classification .....	5
I.2.1 La nature et le nombre de phases .....	5
I.2.2 Le mode de fonctionnement du réacteur .....	6
I.2.2.a Réacteurs fermés (Batch) .....	6
I.2.2.b Réacteurs semi-continus (Fed-Batch) .....	7
I.2.2.c Réacteurs continus.....	8
I.2.3 Le mode d'activation de la réaction .....	11
I.3 Classes des réacteurs chimiques.....	13
I.4 Comparaison des divers types de réacteurs.....	14
I.5 Conclusion .....	15

### CHAPITRE II : Modélisation des réacteurs chimiques

II.1 Introduction.....	17
II.2 Modèles des réacteurs chimiques .....	17
II.2.1 Modèles empiriques .....	18
II.2.2 Modèles phénoménologiques .....	18
II.3 Notions de thermochimie.....	19
II.3.1 Premier principe de la thermodynamique .....	20
II.3.2 Aspect thermique des réactions chimiques .....	22
II.3.2.a Réactions exothermiques .....	22
II.3.2.b Réactions endothermiques .....	23
II.4 Vitesse et mécanismes des réactions .....	23

---

II.4.1 Cinétique des réactions élémentaires .....	24
II.4.2 Influence de la température : loi d'Arrhenius .....	26
II.5 Transfert de chaleur .....	27
II.5.1 Transfert par conduction .....	27
II.5.1.a Loi de Fourier .....	28
II.5.2 Transfert par convection .....	29
II.5.3 Transfert par rayonnement .....	30
II.6 Modélisations des réacteurs chimiques continus .....	30
II.6.1 Modélisation du réacteur parfaitement mélangé (CSTR) .....	30
II.6.1.a Bilan de matière .....	32
II.6.1.b Bilan d'énergie .....	33
II.6.2 Modélisation du réacteur tubulaire (PFTR) .....	36
II.7 Simulation du réacteur parfaitement mélangé en boucle ouverte .....	39
II.7.1 Commentaires .....	42
II.8 Profils d'équilibre .....	43
II.9 Conclusion .....	45

### **CHAPITRE III : Commande extrême adaptative**

III.1 Introduction .....	47
III.2 Généralités sur la commande extrême .....	47
III.2.1 Historique .....	47
III.2.2 Les différents types d'asservissement .....	48
III.2.2.a La commande à une valeur de consigne connue en boucle fermée .....	48
III.2.2.b La commande extrême .....	49
III.3 Notions d'adaptation .....	50
III.3.1 Généralités sur la commande adaptative .....	50
III.3.2 Technique d'adaptation paramétrique .....	50
III.3.2.a Commande adaptative directe .....	51
III.3.2.b Commande adaptative indirecte .....	52
III.4 Méthodes de recherche d'extremum .....	53
III.4.1 Méthodes de recherche d'extremum en régime statique .....	53
III.4.1.a Méthode du gradient .....	53
III.4.1.b Méthode du diviseur .....	54
III.4.2 Méthodes de recherche d'extremum en régime dynamique .....	55

III.4.2.a Analyse par la méthode de la moyenne .....	55
III.4.2.b Analyse par la méthode de Lyapunov .....	56
III.5 Conclusion.....	56

## **CHAPITRE IV : Commande extrémale adaptative appliquée au réacteur chimique continu parfaitement agité**

IV.1 Introduction.....	59
IV.2 Position du problème et hypothèses fondamentales.....	59
IV.3 Paramétrisation des profils optimaux.....	62
IV.4 Développement de l'algorithme de commande.....	64
IV.4.1 Conception de l'estimateur.....	64
IV.4.2 Estimation de la température.....	65
IV.4.3 Conception du contrôleur .....	66
IV.4.4 Loi d'adaptation Paramétrique .....	73
IV.5 Analyse de la convergence et stabilité du système en boucle fermée .....	74
IV.5.1 Convergence de l'état $\eta$ .....	74
IV.5.2 Convergence du vecteur des signaux filtres $Y$ .....	76
IV.5.3 Convergence des poids estimés $\hat{W}$ .....	77
IV.5.4 Convergence du vecteur $e$ .....	81
IV.6 Théorème.....	82
IV.7 Conclusion.....	83

## **CHAPITRE V : Résultats de simulation**

V.1 Introduction .....	85
V.2 Conception du contrôleur .....	85
V.3 Description de la réaction.....	87
V.4 Simulation du réacteur dans les conditions normales.....	89
V.5 Influence des gains de contrôle .....	94
V.5.1 Influence du gain associé au gradient $k_{z0}$ .....	94
V.5.2 Influence du gain associé à l'erreur d'observation de la température $k_{t0}$ : .....	95
V.5.3 Influence du gain d'adaptation .....	96
V.5.4 Influence du gain associé au signal interne $k_d$ .....	96
V.6 Influence des conditions expérimentales.....	97
V.6.1 Influence du taux de dilution et de la concentration d'alimentation.....	97

---

V.6.2 Influence de la température d'entrée .....	99
V.7 Influence de l'amplitude du signal extérieur .....	101
V.8 Influence des paramètres de la cinétique chimique .....	103
V.8.1 Influence de l'énergie d'activation .....	103
V.8.2 Influence du facteur pré-exponentiel .....	105
V.9 Conclusion.....	106
<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>108</b>
Annexes.....	111
Références bibliographiques .....	117

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau (1.1) - Exemple de classes de réacteurs .....	13
Tableau (5.1) - Synthèse de l'algorithme de contrôle .....	86
Tableau (5.2) - Paramètres de simulation – réaction Van de Vusse .....	88
Tableau (5.3) - Paramètres de contrôle.....	88

## LISTE DES FIGURES

Figure (1.1) - Réacteur chimique sous son aspect réel.....	4
Figure (1.2) - Schéma général descriptif d'un réacteur chimique .....	4
Figure (1.3) - Schéma d'un réacteur chimique fermé .....	7
Figure (1.4) - Schéma d'un réacteur chimique Fed Batch. ....	8
Figure (1.5) - Schéma général d'un réacteur parfaitement agité (CSTR).....	9
Figure (1.6) - Schéma général d'un réacteur tubulaire (PFTR) .....	9
Figure (1.7) - Domaines d'utilisation des quatre principaux types de réacteurs .....	15
Figure (2.1) - Représentation bloc d'un système.....	18
Figure (2.2) - Conduction à travers un mur.....	29
Figure (2.3) - Schéma d'un réacteur continu parfaitement mélangé (CSTR) .....	31
Figure (2.4) - Schémas des réacteurs chauffés avec chemise et par des bobines .....	32
Figure (2.5) - Schéma d'un réacteur tubulaire (PFTR) .....	36
Figure (2.6) - Tranche infinitésimale d'un réacteur tubulaire .....	36
Figure (2.7) - Profils de température et concentrations, cas du refroidissement. ....	40
Figure (2.8) - Profils de température et concentrations, cas du chauffage .....	41
Figure (2.9) - Profils de température et concentrations, cas du taux nul.....	42
Figure (2.10) - Profil d'équilibre de la concentration du produit d'intérêt .....	44
Figure (3.1) - Schéma d'un Asservissement en boucle fermée .....	48
Figure (3.2) - Schéma d'une sortie présentant un extremum en fonction de la commande. ....	49

Figure (3.3) - Schéma de principe d'une commande adaptative. ....	51
Figure (3.4) - Schéma de la commande adaptative directe. ....	51
Figure (3.5) - Schéma de commande adaptative indirecte. ....	52
Figure(3.6) - Schéma général de commande par recherche d'extremum .....	53
Figure (3.7) - Méthode du gradient .....	53
Figure (3.8) - Méthode du diviseur .....	54
Figure(3.9) - Schéma de commande par la méthode de la moyenne .....	55
Figure(3.10) - Schéma de commande par la méthode de Lyapunov .....	56
Figure (4.1) - schéma bloc de la synthèse de la commande .....	65
Figure (4.2) - Schéma bloc du bouclage avec introduction du signal $a(t)$ .....	70
Figure (5.1) - Profil de la concentration en fonction de la température – conditions normales .....	89
Figure (5.2) - Profil de la concentration du produit B – conditions normales .....	89
Figure (5.3) - Profil de la concentration du produit d'alimentation .....	90
Figure (5.4) - Profil de la température du réacteur .....	90
Figure (5.5) - Profil de la commande $u$ .....	91
Figure (5.6) - Profil de la température de la chemise .....	91
Figure (5.7) - Profil de l'erreur de l'observation .....	92
Figure (5.8) - Profil du gradient estimé .....	92
Figure (5.9) - Profil du Hessien .....	93
Figure (5.10) - Profil du signal interne .....	93
Figure (5.11) - Profil du signal extérieur .....	94
Figure (5.12) - Influence du gain associé au gradient – gain faible .....	94
Figure (5.13) - Influence du gain associé au gradient – gain fort.....	95
Figure (5.14) - Influence du gain associé à l'erreur d'observation de la température .....	95
Figure (5.15) - Influence du gain d'adaptation .....	96
Figure (5.16) - Influence du gain associé au signal interne.....	97
Figure (5.17) - Changement du profil d'équilibre avec le changement des conditions expérimentales	98
Figure (5.18) - Profil de la concentration avec le changement des conditions expérimentales .....	98

Figure (5.19) - Profil de la concentration en fonction de la température – changement des conditions expérimentales .....	99
Figure (5.20) - Influence de la température d'entrée – profil de la concentration .....	100
Figure (5.21) - Influence de la température d'entrée – profil de la température de la chemise .....	100
Figure (5.22) - Influence de l'amplitude du signal extérieur – profil temporel de la concentration ...	101
Figure (5.23) - Influence de l'amplitude du signal extérieur – profil de la concentration en fonction de la température .....	102
Figure (5.24) - Influence de l'amplitude du signal extérieur - Profil de la température .....	103
Figure (5.25) - Changement du profil d'équilibre – Influence de l'énergie d'activation .....	104
Figure (5.26) - Profil de la concentration - Influence de l'énergie d'activation.....	104
Figure (5.27) - Changement du profil d'équilibre – Influence du facteur pré-exponentiel .....	105
Figure (5.28) - Profil de la concentration – Influence du facteur pré-exponentiel .....	105

## LISTE DES ABREVIATIONS

Abbréviation	Signification	Unité
U	Energie interne	$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
W	Travail	$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
Q	Chaleur	$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
P	Pression	Pascal
H	Enthalpie	$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
T	Temps	h
m	Masse	kg
$C_p$	Chaleur spécifique moyenne	$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
T	Température	K
$T_{in}$	Température d'entrée	K
$T_j$	Température de la chemise	K
V	Volume du réacteur	l
$\rho$	Masse volumique	$\text{kg}\cdot\text{l}^{-1}$
$v$	Vitesse de réaction	$\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}\cdot\text{h}^{-1}$
$\mathcal{R}$	Taux de génération	$\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}\cdot\text{h}^{-1}$
$k_0$	Facteur pré-exponentiel	dépend de la réaction
$E_0$	Energie d'activation	$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
R	Constante des gaz parfaits	$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
$C_{A0}$	Concentration d'alimentation	$\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$
[A]	Concentration du produit A	$\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$
$U_{in}$	Vecteur des concentrations d'alimentation	$\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$
$\pi(T)$	Profil d'équilibre	$\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$
n	Nombre de moles	mol
$A_r$	Surface d'échange	$\text{m}^2$
$k_w$	Coefficient spécifique à la paroi	$\text{kJ}\cdot\text{h}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
d	Diamètre	m
F	Débit du fluide	$\text{l}\cdot\text{h}^{-1}$
D	Taux de dilution	$\text{h}^{-1}$
K	Matrice stœchiométrique	sans unités
$R(x,t)$	Matrice des cinétiques	$\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}\cdot\text{h}^{-1}$
$\lambda$	Vecteur des enthalpies	$\text{K}\cdot\text{l}\cdot\text{mol}^{-1}$
u	Commande	$\text{K}\cdot\text{h}^{-1}$

INTRODUCTION

GENERALE

## INTRODUCTION GENERALE

Les trois objectifs principaux de la commande de procédés sont d'assurer la sécurité, la stabilité et la performance économique des procédés. Généralement, l'utilisation de modèles dynamiques constitue l'instrument de base à la conception de régulateurs qui réalisent ces trois objectifs. Bien qu'il soit possible de construire des modèles fiables des systèmes chimiques à partir des bilans de masse et d'énergie, la difficulté principale ne réside pas dans la structure des modèles mais dans la fiabilité des paramètres de ces derniers. Les paramètres des cinétiques de réactions chimiques et biochimiques sont des exemples typiques de paramètres incertains et difficiles à obtenir *a priori*.

D'autre part, il est clair que la commande des réacteurs constitue la composante centrale de la commande des procédés chimiques. En plus de l'incertitude sur les paramètres, la commande des réacteurs chimiques est une tâche ardue, particulièrement en raison des non-linéarités inhérentes à ce type d'unités.

L'objectif de notre travail est l'optimisation en ligne d'une concentration d'un produit d'intérêt à la sortie d'un réacteur chimique continu parfaitement agité. La stratégie de commande utilisée est une recherche adaptative d'extremum qui a pour objectif d'amener le système à son point d'opération optimal en adaptant en ligne les paramètres inconnus du système.

Dans cette optique, nous allons diviser notre travail en cinq chapitres :

- Le premier chapitre sera consacré à des généralités sur les réacteurs chimiques, nous évoquerons les différents types de réacteurs, leur classification ainsi qu'une comparaison entre les principaux types.
- Le deuxième chapitre abordera la modélisation des procédés chimiques. Nous évoquerons les différents phénomènes physiques et lois thermodynamiques qui permettent d'établir les modèles dynamiques des réacteurs chimiques les plus fréquemment utilisés. Des simulations numériques en boucle ouverte du réacteur

continu parfaitement agité seront effectuées afin de montrer l'intérêt d'application d'une commande extrémale.

- Le troisième chapitre sera consacré à des notions générales sur la commande extrémale et la commande adaptative, et leur intérêt sur les systèmes non linéaires.
  
- Le quatrième chapitre développera une commande adaptative par recherche d'extremum pour le problème d'intérêt ; cette partie se base sur les travaux de l'équipe de recherche de Guay, M., Dochain, D., Perrier, M., sur la commande extrémale adaptative appliquée aux réacteurs chimiques et biologiques [GUA-04]. La première partie du chapitre abordera la formulation du problème; Principalement, il s'agit, à partir du modèle dynamique du réacteur continu parfaitement agité d'explorer le problème d'optimisation des profils de concentrations dans ce type de réacteur. Ensuite, le mémoire présentera le développement d'une commande basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov. Il est aussi montré que l'algorithme amène le système étudié dans le voisinage de son optimum.
  
- Le cinquième chapitre sera constitué de simulations sur la réaction van de Vusse. Ces différentes simulations, nous aideront à mieux cerner les avantages de la commande extrémale adaptative du point de vue performance et productivité.

# Chapitre I

## *GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉACTEURS CHIMIQUES*

## I.1 Introduction aux réacteurs chimiques :

Un réacteur industriel est un appareil permettant d'accomplir une transformation chimique ou biochimique pour convertir des constituants moléculaires en d'autres constituants. Cependant, cette notion est limitée aux cas où la transformation est effectuée dans l'objectif de produire une ou plusieurs espèces chimiques prédéfinies. Dans une installation industrielle un " réacteur chimique" est généralement associé à un ensemble de composants industriels (exemple: des pompes, des vannes, des réservoirs, des échangeurs de chaleur, des chaudières, ..... etc.), ces composants placés en amont et en aval, permettent les traitements physiques des réactifs et des produits des réactions en cours.



Figure(1.1) : Réacteur chimique sous son aspect réel

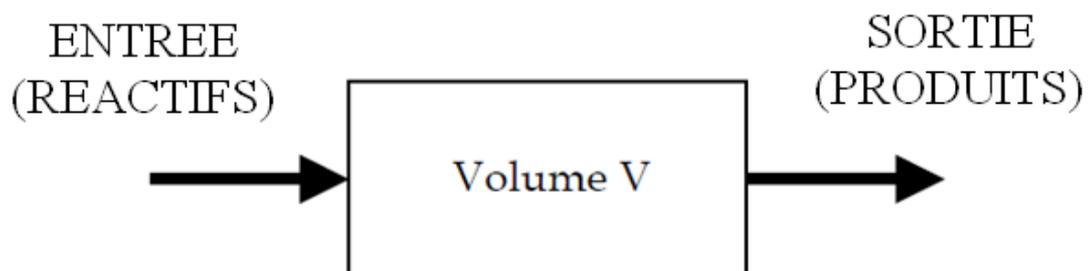


Figure (1.2) : Schéma général descriptif d'un réacteur chimique

## I.2 Critères de classifications :

Même si ce type d'appareils apparaît comme un composant industriel complexe, on peut toute fois définir un certain nombre de critères de classification en se référant aux caractéristiques les plus apparentes à l'échelle macroscopique. En effet, ces critères de classification vont nous permettre de définir un ensemble de catégories de réacteurs et identifier ainsi un quelconque réacteur selon ces caractéristiques pour le classer sous la catégorie appropriée.

Dans ce sens, les critères de classification à l'échelle macroscopique d'un réacteur chimique sont définis comme suit: le nombre et la nature des phases en présence; le mode de fonction du réacteur; le mode d'activation et de la transformation chimique [VIL-96].

### I.2.1 La nature et le nombre des phases en présence :

Ce critère concerne l'état physique du mélange réactionnel. On peut distinguer deux types de réacteurs suivant ce critère :

- a) **Réacteurs monophasiques:** où le mélange réactionnel (considéré homogène) est alors sous forme d'une seule phase qui peut être gazeuse ou liquide.
- b) **Réacteurs polyphasiques:** appelés aussi réacteurs hétérogènes, le mélange réactionnel est constitué de plusieurs phases. On distingue deux types de mélanges :

- 1- Mélanges polyphasiques composés de trois phases : Gaz + Liquide+Solide.
- 2- Mélanges polyphasiques composés de deux phases appelés aussi mélanges biphasiques.

où on peut rencontrer les combinaisons suivantes :

- Gaz + Liquide.
- Gaz + Solide.
- Liquide + Solide.

Cependant, dans le cas où la phase solide est présente, il faut faire la distinction entre

les cas où le constituant solide impliqué dans la réaction sert de catalyseur et ne prend donc pas part à la réaction, et ceux où les constituants solides présents prennent part à la transformation et sont de ce fait des réactifs ou des produits de la réaction.

### **I.2.2 Le mode de fonctionnement du réacteur :**

Ce critère dépend de la construction interne du réacteur et de l'écoulement du mélange réactionnel. En effet, ce sont les exigences pratiques d'exploitation de l'installation qui déterminent le choix du mode de fonctionnement pour accomplir un processus désigné. Ainsi, on a le choix entre différents modes de fonctionnement.

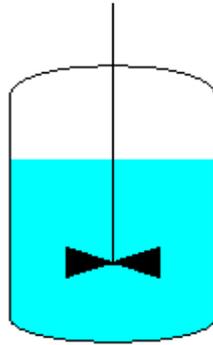
On se base sur un critère de classification lié au mode d'écoulement du mélange réactionnel, on distingue alors : les réacteurs fermés; les réacteurs semi continus; les réacteurs continus;....etc.

#### **I.2.2.a Réacteurs fermés (BATCH) :**

Pour ce type de réacteurs la spécificité est que les constituants réactifs sont chargés au début de l'opération dans la cuve du réacteur. Une fois la transformation chimique accomplie, le mélange est ensuite soutiré. Pendant le temps où se déroule la réaction, il n'y a pas de flux de matière entrant ou sortant du réacteur.

Les hypothèses liées au modèle du réacteur discontinu sont les suivantes :

- Mélange homogène au niveau moléculaire.
- Température homogène du milieu.
- Volume constant (débit d'entrée et débit de sortie nuls).



**Figure (1.3) : Schéma d'un réacteur chimique fermé.**

**Avantages :**

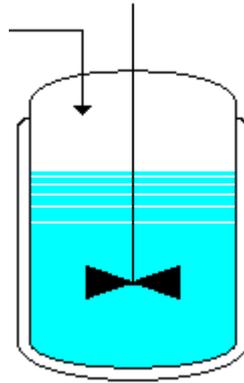
- Installation simple et offrant une très grande polyvalence.
- Permet des réactions nécessitant des variations de conditions opératoires (notamment le changement de température).

**Désavantages :**

- Travaille à des concentrations de réactifs élevées au début de la réaction (problème de sécurité, moins bonne conversion en cas d'inhibition par le substrat).
- Nécessite un temps mort entre chaque opération (remplissage, vidange, nettoyage) qui nuit à la performance.

**I.2.2.b Réacteurs semi continus : (FED BATCH)**

À l'instar des réacteurs fermés, pour ce type de réacteurs le déchargement des produits se fait là encore à la fin de l'opération. Seulement, les constituants réactifs sont introduits tout au long de la transformation chimique.



**Figure (1.4) : Schéma d'un réacteur chimique Fed Batch.**

Les principales hypothèses du modèle sont:

- Mélange homogène au niveau moléculaire.
- Température homogène du milieu.

**Avantages :**

- Permet un contrôle de la concentration (meilleure sécurité).
- Permet des réactions nécessitant des variations de conditions opératoires (notamment le changement de la concentration des réactifs).
- Meilleure conversion en cas d'inhibition par le substrat.
- Permet d'atteindre de très hautes densités cellulaires en biotechnologie.

**Désavantages :**

- Nécessite un excellent contrôle du flux d'entrée (danger d'accumulation des réactifs).
- Nécessite un temps mort entre chaque opération (remplissage, vidange, nettoyage) qui nuit à la performance.

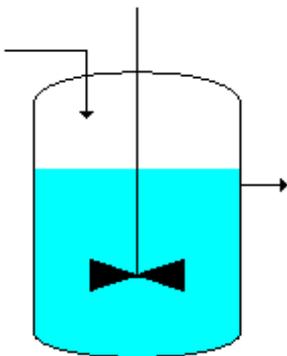
### **I.2.2.c Réacteurs continus :**

Concernant les réacteurs continus considérés comme des systèmes ouverts, et à la

différence des réacteurs fermés et semi continus, le chargement des constituants réactifs et le déchargement du mélange se font en parallèle durant la transformation chimique.

Pour ce type de réacteurs se manifeste un écoulement interne sous diverses formes, qui dépendent de la structure interne du réacteur et des propriétés physiques du mélange réactionnel. Dans ce sens, il est donc indispensable de définir les types d'écoulements pour définir et classer les cas rencontrés, d'où l'intérêt de faire la différence entre ces modes d'écoulements pour attribuer à chaque type de réacteurs continus ces caractéristiques qui le différencient par rapport aux autres. A cet effet, il existe deux principaux types de réacteurs :

- Réacteurs continus parfaitement agités (CSTR : Continuous Stirred Tank Reactors).
- Réacteurs tubulaires (PFTR : Plug-Flow Tubular Reactor).



**Figure (1.5) : Schéma général d'un réacteur parfaitement agité (CSTR)**



**Figure(1.6) : Schéma général d'un réacteur tubulaire (PFTR)**

### 1. Réacteurs continus parfaitement agités :

L'écoulement du mélange réactionnel se fait dans une cuve où le mélange réactionnel est considéré parfaitement agité. Ainsi, les concentrations des constituants réactifs entrant sont différentes de celles du milieu réactionnel qui a une composition identique à celle du flux sortant du réacteur. Ceci dit, à l'entrée du

réacteur on a donc une discontinuité des concentrations des constituants réactifs dans le flux entrant, alors que dans l'ensemble du milieu réactionnel les concentrations des divers constituants sont uniformes. Ces réacteurs sont désignés en anglais par l'appellation CSTR (Continuous Stirred Tank Reactors).

Les hypothèses liées au modèle du réacteur continu sont les suivantes :

- Mélange homogène au niveau moléculaire.
- Température homogène du milieu.
- Volume et densité constants (débit d'entrée = débit de sortie).
- Concentrations et température du flux de sortie sont les mêmes que celles dans le réacteur.

**Avantages :**

- Peu de variation dans la qualité d'un produit sur une longue période de temps.
- Haute performance.
- Bon pour des études cinétiques.
- Travaille à de faibles concentrations de réactifs (meilleure sécurité, meilleure conversion pour des ordres de réactions inférieurs à 1 ou en cas d'inhibition par le substrat).

**Désavantages :**

- Moins bonne conversion pour des ordres de réactions supérieurs à 1 ou en cas d'inhibition par le produit.
- Nécessite un excellent contrôle des flux (entrée et sortie).
- Ne permet pas de réactions nécessitant des variations de conditions opératoires.

## 2. Réacteurs tubulaires :

L'écoulement est de type piston (régime laminaire) avec un flux de matière qui se déplace avec une vitesse désignée dans un tube. Dans ce cas, les constituants se déplacent en se transformant progressivement le long du réacteur. C'est ainsi que ce type de réacteur est parfois qualifié de réacteur à gradient de concentrations. Ainsi, les concentrations de chaque espèce chimique (réactifs, produits) dépendent du temps et de l'espace.

Les hypothèses liées au modèle du réacteur piston sont les suivantes:

- le mélange radial est considéré comme parfait.
- l'écoulement est de type piston.
- la densité constante.
- pas de mélange axial.

### Avantages :

- Peu de variation dans la qualité d'un produit sur une longue période de temps.
- Haute performance.

### Désavantages :

- Nécessite un excellent contrôle des flux (entrée et sortie).

Dans ces réacteurs continus, l'écoulement du mélange se déroule d'une façon plus complexe, ceci dit il existe un temps de séjour du mélange qui représente le temps de rétention d'une molécule entre son entrée et sa sortie. Ainsi, les modèles des réacteurs continus déjà cités sont à vrai dire idéaux.

### I.2.3 Mode d'activation de la réaction :

Ce critère de classification dépend du déroulement de la réaction. Ainsi pour stimuler la réaction et augmenter sa vitesse, deux facteurs peuvent influencer la réaction: les catalyseurs et la thermicité de la réaction.

**Les catalyseurs :**

Pour augmenter la vitesse d'une réaction et améliorer ainsi la productivité d'un procédé, les catalyseurs chimiques sont souvent utilisés pour interagir avec les molécules des réactifs et accélérer leur transformation afin de diminuer le temps de séjour des particules dans le réacteur. Ces catalyseurs peuvent être sous forme de : particules solides (largement utilisés en génie des procédés), liquides, ions, enzymes, ....etc. Par rapport à ce critère de classification on a deux types de réacteurs:

- a) **Réacteurs catalytiques** : dans lesquels le catalyseur est déjà présent dans le mélange réactionnel sous forme suspendue, ou fixé par un dispositif incorporé dans le réacteur appelé un lit.
- b) **Réacteurs non catalytiques**: tous les constituants du mélange réactionnel sont impliqués dans le processus de transformation sauf les constituants considérés comme solvant ou substances inertes.

**Thermicité de la réaction :**

La plupart des réactions chimiques rencontrées en pratique sont caractérisées par la consommation ou le dégagement de chaleur. Ces réactions sont désignées respectivement par "réactions endothermiques" ou "réactions exothermiques". Ce facteur lié directement à toute transformation chimique a même une influence sur la cinétique de la réaction, d'où l'intérêt d'équiper le réacteur de dispositifs d'échange thermique capables de transférer ou non la chaleur correspondante dans le sens désiré. On distingue ainsi deux cas particuliers de réacteurs selon ce critère de classification à savoir :

- a) **Réacteurs adiabatiques** : souvent rencontré dans l'industrie, ils constituent simplement un cas particulier du cas général correspondant à une surface d'échange nulle entre le réacteur et le milieu extérieur, autrement dit il n'y a pas d'échange de chaleur entre le réacteur et le milieu extérieur.
- b) **Réacteurs isothermes** : Pour ce type de réacteurs, on note que les différences d'apparence sont assez souvent à l'origine de la localisation de la surface d'échange thermique. Ainsi, l'échange thermique peut être réalisé : à l'intérieur du réacteur; à

travers les parois du réacteur et à l'extérieur du réacteur.

### I.3 Classes des réacteurs chimiques :

Ainsi, à partir des critères qu'on vient de citer, il est possible d'établir une classification des types de réacteurs évoqués selon les critères de classification retenus à savoir :

- 1) La nature et le nombre des phases en présence.
- 2) Le mode de fonctionnement du réacteur.
- 3) Le mode d'activation.

Lors de la description détaillée des divers types de réacteurs on s'est basé uniquement sur un seul critère de classification, alors que pour les cas pratiques la classification sera faite selon une combinaison de ces critères. Nous avons indiqué dans tableau qui suit quelque cas pratiques particulièrement représentatifs des divers types de réacteurs de manière à donner une première idée du caractère concret de cette classification [TRA-96].

Phases en présence	Discontinu	Continu
	Fermé ou Semi-continu	Tubulaire ou CSTR
L	Polymérisation	Estérification
G+L	Fermentation	Absorption de polluants
L+L	Sulfonation d'aromatiques	Hydrolyse d'esters
(L ou G)+S+Catalyseur	Hydrogénation	Cracking catalytique
(L ou G)+S	Régénération de catalyseur	Combustion en lit fluidisé

(G : gaz, L : liquide, S : solide).

**Tableau (1.1) : Exemple de classes de réacteurs**

## I.4 Comparaison des divers types de réacteurs :

Après avoir décrit les trois types de réacteurs il est intéressant de les comparer sous divers aspects.

- **Phase réactionnelle :**

Pour traiter une phase gazeuse, seul le réacteur tubulaire est bien adapté.

Dans le cas d'une phase liquide, tous les types de réacteurs peuvent convenir.

- **Capacité de production :**

Si on se réfère à la quantité de charge traitée par jour, on peut dire que les systèmes continus l'emportent pour les fortes capacités ( $> 10\,000$  t/an). Pour des capacités très faibles, s'il s'agit de réactions en phase liquide, le système discontinu s'impose.

Dans le domaine des capacités intermédiaires, le choix résulte de comparaisons économiques, tenant compte en particulier du fait qu'un système continu nécessite du personnel posté jour et nuit, alors que le travail en discontinu peut être réalisé de jour.

- **Temps de séjour :**

Sur ce plan, le réacteur discontinu offre une grande souplesse permettant, sans inconvénient, d'avoir un temps de séjour pouvant atteindre 10 ou 20 h. Le réacteur tubulaire est beaucoup plus limité ( $\theta < 1$  h). Le réacteur parfaitement agité permet d'atteindre des temps de séjour de 5 à 6 h, sans grosses difficultés. Il faut cependant noter que le temps de séjour  $\theta$  n'a pas la même signification pour les trois types de réacteurs.

La figure suivante donne les domaines d'utilisation des divers réacteurs en se basant sur la capacité de production et le temps de séjour [TRA-96].

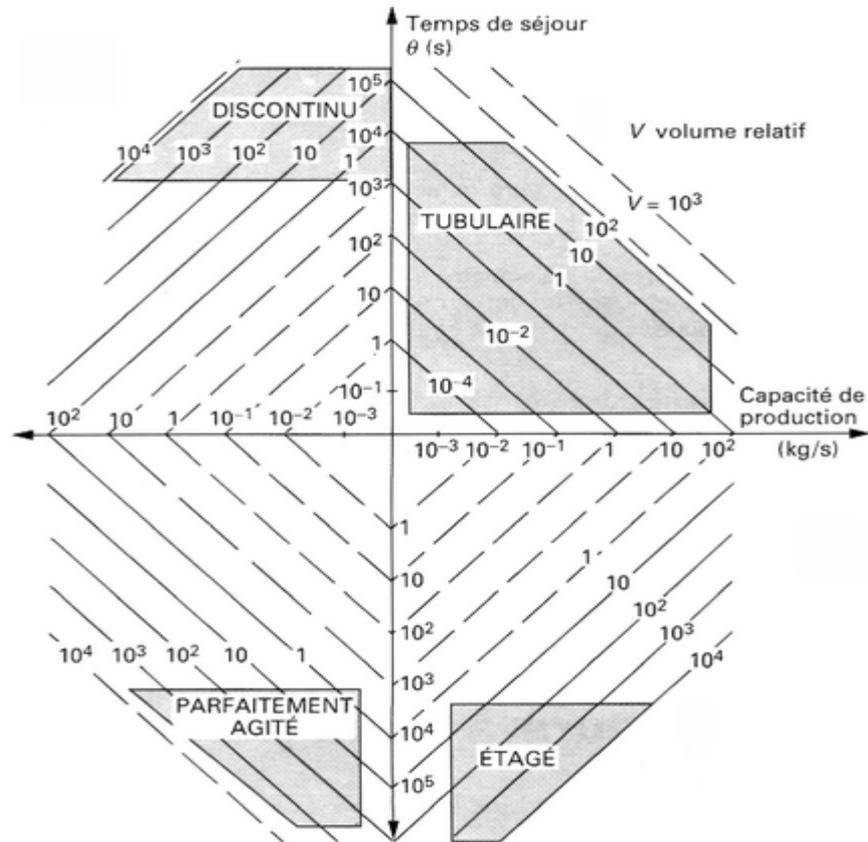


Figure (1.7) : Domaines d'utilisation des quatre principaux types de réacteurs

## I.5 Conclusion :

Nous avons évoqué dans ce chapitre la classification des différents types de réacteurs chimiques et les critères de classification, ceci a permis de définir un certain nombre de catégories de réacteurs. Cette démarche de classification met en évidence les différences entre les réacteurs utilisés dans l'industrie.

# Chapitre II

## *MODÉLISATION DES RÉACTEURS CHIMIQUES*

## II.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va présenter la modélisation des réacteurs chimiques en tenant compte des phénomènes chimiques et physico-chimiques qui peuvent avoir lieu, et qui représentent un critère de classification des réacteurs industriels. La modélisation des réacteurs chimiques sera abordée en évoquant la modélisation des processus thermiques en s'appuyant sur les équations de bilans des différents types de réacteurs. Les modèles obtenus seront combinés avec ceux des réactions chimiques pour reproduire les modèles mathématiques des réacteurs. Par la suite, on va simuler le réacteur qui représente l'objet de notre étude, le réacteur continu parfaitement agité, en boucle ouverte afin de déduire certaines propriétés importantes de cette classe de réacteurs et de mettre en évidence l'intérêt d'application de la commande extrémale.

## II.2 Modèles des réacteurs chimiques :

Pour modéliser un procédé chimique on dispose de plusieurs possibilités parmi les différents types de modèles à savoir [KHA-07]:

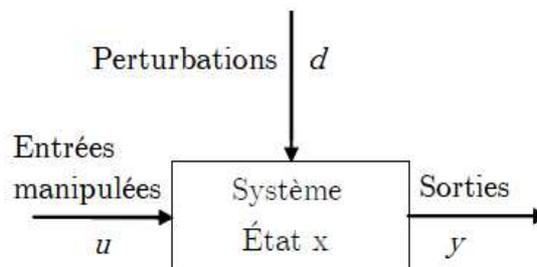
- **Modèles empiriques** : tel que les modèles de fonctions de transfert continues ou discrètes déduites de données entrées-sorties du procédé ; modèle de réseaux de neurones...etc.
- **Modèles phénoménologiques** : ce sont des modèles mathématiques basés sur les principes physico-chimiques de conservation : de la matière et de l'énergie.

En réalité, c'est l'objectif (commande, analyse...etc) qui va définir quel est le modèle le plus adéquat qu'on doit employer.

### II.2.1 Modèles empiriques :

D'après leur appellation, les modèles empiriques sont décrits sur la base d'expériences et ils sont souvent employés en automatique. Ils décrivent en temps continu ou discret le comportement dynamique des systèmes concernés. Seulement, qu'ils soient linéaires ou non linéaires, les modèles empiriques doivent faire l'objet d'une identification de leurs propres paramètres pour reproduire un comportement plus proche au comportement réel du système modélisé.

Les modèles linéaires peuvent être des fonctions de transfert continues ou discrètes ; c'est-à-dire, ils constituent une relation linéaire entre l'entrée et la sortie et ne font pas intervenir les variables d'état.



**Figure (2.1) - Représentation bloc d'un système**

Par contre les modèles dans l'espace d'état font intervenir en plus des entrées/sorties, les variables d'état. Dans l'espace d'état en temps continu, un système dynamique est représenté par la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Où  $x$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ ,  $u$  le vecteur d'entrée de dimension  $w$ ,  $y$  le vecteur de sortie de dimension  $m$ .

### II.2.2. Modèles phénoménologiques :

En génie des procédés on fait appel le plus souvent à des modèles qui décrivent le système à l'échelle macroscopique, car quand il s'agit d'employer le modèle pour un

problème lié à l'analyse ou la commande, il est tout à fait inutile de concevoir un modèle trop détaillé à l'échelle moléculaire vue qu'il sera complexe. Le modèle macroscopique utilise les coefficients de transport entre phases, les constantes cinétiques pour décrire les opérations unitaires (réacteur, colonne de distillation, d'absorption, d'extraction, etc) qui constituent un procédé complet.

Considérons un système réactif ouvert limité par une surface de contrôle. Parmi les équations qui constituent le modèle du procédé se trouvent les équations fondamentales de conservation : bilan de conservation de l'énergie, bilan de matière...etc.

Le transport à travers la surface de contrôle du système se fait par diffusion moléculaire ou par conduction. La génération et la consommation sont dues aux réactions chimiques qui se déroulent dans le réacteur considéré. Le modèle complet est la combinaison de ces équations qui seront différentielles ordinaires et accompagnées de conditions initiales, et cela lorsqu'il s'agit de systèmes à paramètres localisés (exemples : réacteur fermés, réacteur continu parfaitement agité) ; la représentation dans l'espace d'état est donc utilisée dans ce cas. Pour les systèmes à paramètres distribués (exemples : réacteur tubulaire, réacteur colonne fluidisée), le modèle est constitué d'équations aux dérivées partielles, accompagnées de conditions initiales et de conditions aux limites. Ces modèles utiles pour l'analyse et le dimensionnement sont moins commodes pour la commande [KHA-07].

### **II.3. Notions de thermochimie :**

La thermochimie est un domaine de la chimie qui étudie les phénomènes thermiques qui accompagnent les réactions chimiques. Certaines réactions peuvent dégager de la chaleur, elles sont exothermiques et d'autres en absorbent, elles sont endothermiques. Marcellin Berthelot est considéré comme le fondateur de la thermochimie. Il créa la bombe calorimétrique et participa au perfectionnement du calorimètre. La bombe calorimétrique, qui est une très grande invention, permet de mesurer le pouvoir calorifique d'un combustible; la capacité d'un combustible à produire de l'énergie. Mise au point en 1881, elle est encore en usage aujourd'hui.

Au cours du XX<sup>e</sup> siècle, la thermochimie s'est considérablement développée. L'application des principes de la thermodynamique aux systèmes chimiques a permis de prévoir le sens des réactions, le positionnement des équilibres chimiques et donc de définir le rendement et la composition du système après réaction.

### II.3.1. Premier principe de la thermodynamique :

Le premier principe de la thermodynamique stipule que lors de toute transformation, il y a conservation de l'énergie. Ou bien : « Rien ne se crée, rien ne se perd, mais tout se transforme »

Dans le cas des systèmes thermodynamiques, il s'énonce de la manière suivante :

« Au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, la variation de son énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, sous forme de chaleur et sous forme de travail. » [OUA-07]

On pourra donc caractériser un système par son énergie et l'évolution du système par la variation de cette énergie. Cette grandeur, caractéristique d'un état donné du système, est une fonction d'état, c'est-à-dire que la variation de cette grandeur, lorsque le système évolue, ne dépend que des états initial et final. On l'appelle *énergie interne* et on la désigne par la lettre  $U$ .

Le travail est noté par la lettre  $W$  et la chaleur par  $Q$ .

$$U = W + Q \quad (2.1)$$

La variation infinitésimale de l'énergie interne peut s'écrire donc sous la forme :

$$dU = \partial W + \partial Q \quad (2.2)$$

La convention de signe pour  $\partial W$  et  $\partial Q$  est la suivante :

- $\partial W > 0$  et  $\partial Q > 0$  quand ils sont reçus par le système.
- $\partial Q < 0$  et  $\partial W < 0$  quand ils sont cédés par le système.

Le travail élémentaire s'écrit en grandeur et en signe en fonction de la pression  $P$  et du volume  $V$  [OUA-03] :

$$\partial W = -P\partial V \quad (2.3)$$

Ainsi si au cours de la transformation il n'y a pas variation de volume, le travail élémentaire est nul;

Définissons une nouvelle fonction d'état que nous appellerons enthalpie du système :

$$H = U + PV \quad (2.4)$$

En prenant la forme différentielle de la définition de l'enthalpie, on aura :

$$dH = dU + PdV + VdP \quad (2.5)$$

En prenant les dérivées par rapport au temps, on aura :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dU}{dt} + P \frac{dV}{dt} + V \frac{dP}{dt} \quad (2.6)$$

En prenant la définition de l'énergie et du travail, on aura finalement :

$$\frac{dH}{dt} - V \frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (2.7)$$

Pour les liquides la variation de pression est négligeable dans un réacteur [LUY-99]:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

Comme l'énergie est une quantité qui est conservée au cours d'une réaction, et pour les réacteurs à volumes constants le travail est nul ; donc la chaleur est aussi conservée.

Montrons maintenant la relation entre la chaleur de réaction et la température ; pour cela on part du principe que l'énergie est influencée essentiellement par la température. En effet, l'enthalpie peut être écrite sous forme de produit de température absolue et de capacité calorifique moyenne qui est une constante [LUY-99] :

$$H = mC_p T \quad (2.9)$$

En prenant la dérivée par rapport au temps, et la définition de la masse, on aura :

$$\frac{dH}{dt} = \rho V C_p \frac{dT}{dt} \quad (2.10)$$

Ce qui nous conduit à l'équation finale :

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = \dot{Q} \quad (2.11)$$

### II.3.2. Aspect thermique des réactions chimiques :

Au cours d'une réaction chimique, le système échange de l'énergie avec le milieu extérieur sous forme de chaleur. On distingue deux types des réactions chimiques selon leur aspect thermique.

#### II.3.2.1. Réactions exothermiques :

Ces réactions libèrent de l'énergie, ce qui se traduit par les possibilités suivantes :

- Libération sous forme de chaleur : La chaleur qui est libérée entraîne une élévation de la température ou provoque une transformation endothermique qui absorbe cette chaleur

- Libération sous forme d'électricité ou parfois même sous forme de lumière.

L'énergie des réactifs est plus grande que celles des produits. Cet excédent d'énergie est donné à la solution faisant ainsi augmenter la température.

Dans le cas d'une réaction exothermique l'enthalpie de cette réaction est positive ( $\Delta H > 0$ ).

### **II.3.2.2. Réactions endothermiques :**

Ces transformations absorbent de l'énergie, ce qui se traduit par les possibilités suivantes :

- Absorption de chaleur : la chaleur absorbée peut entraîner une baisse de température du milieu et peut nécessiter un apport constant d'énergie
- Absorption sous forme d'électricité ou de lumière

Les réactifs empruntent de l'énergie qu'il faut pour se transformer en produits. Cet emprunt fait diminuer la température de la solution. L'enthalpie de cette réaction est négative ( $\Delta H < 0$ )

## **II.4. Vitesse et mécanismes des réactions:**

On appelle loi de vitesse d'une réaction la variation des réactifs ou des produits par unité de temps. La loi de vitesse est une relation qui existe entre la vitesse et tous les facteurs qui ont une influence sur celle-ci.

Parmi ces facteurs, on distingue d'une part les facteurs physiques (et en particulier la température) et, d'autre part, les quantités (ou les concentrations) des substances présentes dans le milieu réactionnel (et en particulier les réactifs).

La loi de vitesse peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions [NAU-08]:

$$v = k(T)g(C_i) \quad (2.12)$$

Le premier facteur  $k(T)$  est le coefficient de vitesse (ou constante de vitesse) qui dépend notamment de la température, le second est une fonction des quantités (ou des concentrations) des substances présentes dans le milieu réactionnel.

La loi de vitesse doit être établie expérimentalement à partir de séries d'expériences judicieusement conçues en faisant varier différents facteurs.

Dans certains cas, la fonction  $g(C_i)$  peut se mettre sous la forme d'un monôme :

$$g(C_i) = \prod_i C_i^{n_i} \quad (2.13)$$

On dit alors que la réaction admet un ordre et l'on appelle ordre de réaction la somme :

$$n = \sum n_i \quad (2.14)$$

$n_i$  est l'ordre partiel de la réaction par rapport à l'espèce  $i$ .

Il est à noter que les ordres partiels ne sont pas nécessairement égaux aux coefficients stœchiométriques, ils ne sont même pas nécessairement entiers ni positifs, ils peuvent même être des nombres fractionnaires et même des nombres réels. Si la loi de vitesse ne peut pas se mettre sous la forme d'un monôme avec les concentrations comme facteurs, on dit que la réaction n'admet pas d'ordre. Cependant, pour les réactions dites élémentaires les ordres sont égaux aux coefficients stœchiométriques [NAU-08].

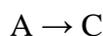
#### II.4.1. Cinétique des réactions élémentaires :

Une réaction est dite élémentaire si les réactifs réagissent simultanément en un même point pour donner directement les produits sans former d'espèces intermédiaires. La vitesse de réaction dépend donc de la probabilité de rencontre des réactifs donc de la fréquence des chocs. Cette fréquence est proportionnelle à leur concentration. Par ailleurs, plus la température est élevée, plus les rencontres sont probables (agitation thermique) et

plus l'énergie cinétique des réactifs au moment du choc est élevée ce qui permet de franchir la barrière d'activation, donc la température a également un rôle important qui est explicité dans la loi d'Arrhenius.

On appelle molécularité le nombre d'entités (molécules, ions) qui entrent simultanément en contact lors d'une réaction élémentaire. Les réactions élémentaires sont dites mono moléculaires, biomoléculaires ou tri moléculaires selon la valeur de leurs molécularités (respectivement 1, 2 ou 3). Comme la probabilité que plus de 3 entités se trouvent simultanément en un même point est quasiment nulle, on considère qu'il n'existe pas de réaction élémentaire de molécularité supérieure à 3 ; la probabilité de chocs triples étant elle-même très faible.

Pour une réaction élémentaire, son ordre est égal à sa molécularité. Prenons comme exemple une réaction élémentaire mono moléculaire :



La loi de vitesse prendrait comme forme :

$$-\frac{d[A]}{dt} = +\frac{d[C]}{dt} = \mathcal{R} = k[A] \quad (2.15)$$

d'ordre global 1 (ordre partiel 1 par rapport au réactif).  $k$  est la constante de vitesse dépendant notamment de la température et éventuellement d'autres facteurs physiques. Ici, l'unité de  $k$  est l'inverse du temps, qui peut être des secondes, minutes, heures, ou même des jours. On désigne le produit  $k[A]$  aussi par le terme 'taux de génération' noté par le symbole  $\mathcal{R}$ .

Pour une réaction élémentaire biomoléculaire :



La loi de vitesse prendrait la forme :

$$-\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = +\frac{d[C]}{dt} = k[A][B] \quad (2.16)$$

d'ordre global 2 (ordre partiel 1 par rapport à chaque réactif). Ici, l'unité de  $k$  est un volume divisé par mole par unité de temps.

Si, par contre :



La loi de vitesse est :

$$-\frac{d[A]}{dt} = +\frac{d[C]}{dt} = k[A]^2 \quad (2.17)$$

#### II.4.2. Influence de la température : loi d'Arrhenius

La température est le facteur ayant la plus grande influence sur la vitesse des réactions chimiques. Dans un très grand nombre de cas la vitesse de la réaction augmente d'un facteur 2 à 3 lorsque la température augmente de 10 degrés. La dépendance de la vitesse de réaction en fonction de la température a fait l'objet d'études expérimentales intensives à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Plusieurs équations empiriques ont alors été proposées, mais c'est la « loi d'Arrhenius » qui s'est imposée au début du XX<sup>e</sup> siècle. Cette loi a été vérifiée depuis pour un très grand nombre de réactions.

Selon la loi d'Arrhenius la température intervient dans un facteur exponentiel, ainsi la constante de vitesse s'écrit comme étant [OUA-03]:

$$k(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (2.18)$$

dans laquelle  $R$  la constante des gaz parfaits,  $T$  la température en Kelvin, et  $k_0$  un facteur pré-exponentiel dépendant de la réaction.  $E_a$  est l'énergie d'activation, c'est la quantité d'énergie nécessaire pour lancer une réaction. En effet, pour démarrer un processus chimique, on doit souvent faire face à une barrière énergétique (c'est-à-dire apporter un minimum d'énergie pour le démarrage). Cette quantité est exprimée, selon le système international d'unités, en  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

Outre son importance pratique, la loi d'Arrhenius a une grande importance théorique car elle est compatible avec la théorie des collisions qui permet de jeter un pont entre la représentation microscopique (à l'échelle des molécules) de la réaction chimique et l'observation macroscopique de sa vitesse. Cependant, toutes les réactions ne suivent pas forcément la loi d'Arrhenius. C'est en particulier le cas des réactions explosives, des réactions catalysées par les enzymes ou ayant d'autres modes d'activation que l'activation purement thermique (activation par rayonnement, par électrochimie ou par micro-ondes).

## **II.5. Transfert de chaleur :**

### **II.5.1. Transfert par conduction :**

La conduction thermique est la propagation de la chaleur, de molécule à molécule, dans un corps ou dans plusieurs corps contigus et non réfléchissants, sans qu'il y ait mouvement du milieu ou que ce mouvement intervienne dans la transmission.

Ce mode de transmission caractérise essentiellement les transferts de chaleur dans les solides ou entre corps solides contigus. La conduction intervient également dans les liquides et les gaz mais, sauf dans le cas des liquides très visqueux ou des gaz emprisonnés dans des matériaux poreux, son effet est marginal par rapport à celui de la convection.

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et

vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc.

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

### II.5.1.1 Loi de Fourier :

La loi de Fourier traduit la relation existant, en chaque point d'un corps, entre le flux thermique et le gradient de température. Cette caractérisée par une seule dimension (paroi plane, cylindrique ou sphérique par exemple), s'écrit [LEL-00]:

$$\frac{d\phi}{dA} = \frac{-\lambda dT}{dx} \quad (2.19)$$

Avec :

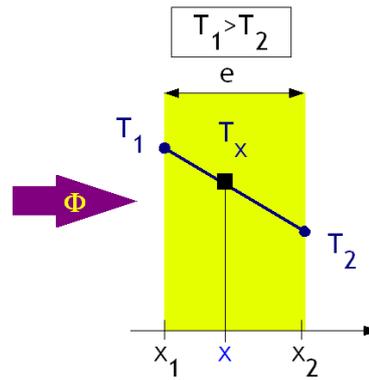
- $\phi$  : flux de chaleur ( $\text{kJ}\cdot\text{s}^{-1}$ ).
- $T$  : température (K).
- $A$  : surface d'échange ( $\text{m}^2$ ).
- $x$  : coordonnée du point considéré (m).
- $\lambda$  : conductivité thermique ( $\text{kJ}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ ).

Le calcul intégral permet de généraliser la loi de Fourier à des corps de forme quelconque. Cette loi traduit le fait que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. La direction de l'écoulement de chaleur coïncide avec celle du gradient de température. Le signe moins caractérise le fait que l'écoulement de chaleur s'effectue dans le sens des températures décroissantes : du chaud vers le froid.

Par exemple, dans le cas d'un mur, le calcul intégral donne :

$$\phi = \frac{\lambda}{e} A(T_1 - T_2) \quad (2.20)$$

$e = x_1 - x_2$  est l'épaisseur de la paroi



Figure(2.2) - Conduction à travers un mur

### II.5.2 Transfert par convection :

Imaginons un solide baignant dans un fluide en mouvement. Si le solide et le fluide ne sont pas à la même température, de la chaleur est échangée entre le solide et les particules fluides qui sont à son contact. Cet échange se fait par conduction, la particule fluide rencontre, au cours de son déplacement, d'autres particules fluides avec lesquelles elle échange de la chaleur [LEL-00].

Le mécanisme élémentaire de transfert de chaleur est la conduction thermique mais le phénomène global, qui est la convection thermique, résulte de la combinaison de cette conduction avec les mouvements du fluide qui obéissent à des lois spécifiques.

Deux types de convection sont généralement distingués :

- La convection naturelle dans laquelle le mouvement résulte de la variation de la masse volumique du fluide avec la température ; cette variation crée un champ de forces gravitationnelles qui conditionne les déplacements des particules du fluide ;
- La convection forcée dans laquelle le mouvement est provoqué par un procédé mécanique indépendant des phénomènes thermiques; c'est donc un gradient de pression extérieur qui provoque les déplacements des particules du fluide.

L'étude de la transmission de chaleur par convection est donc étroitement liée à celle de l'écoulement des fluides.

Les applications du transfert de chaleur par convection sont nombreuses. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur.

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud.

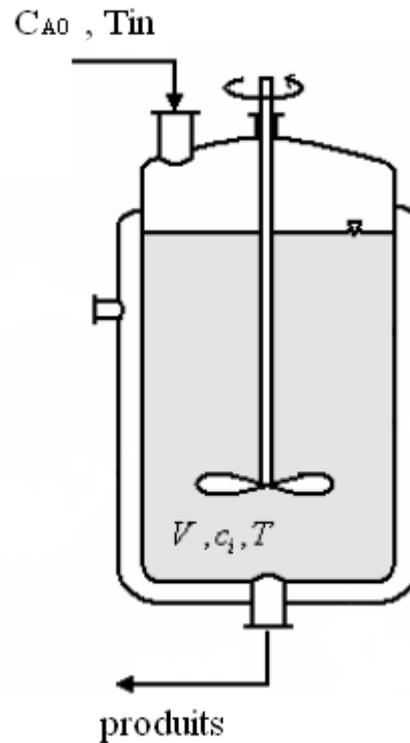
### **II.5.2. Transfert par rayonnement :**

Le rayonnement, synonyme de radiation en physique, désigne le processus d'émission ou de transmission d'énergie impliquant une particule porteuse. Ce type de transfert de chaleur n'a aucun effet sur les bilans thermiques dans les réacteurs chimiques.

## **II.6 Modélisation des réacteurs continus:**

### **II.6.1 Modélisation du réacteur parfaitement agité (CSTR):**

Cette section présente la modélisation d'un réacteur CSTR tel que présenté à la figure suivante :

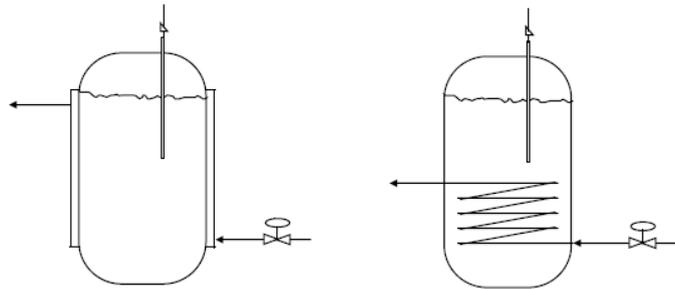


**Figure (2.3) - Schéma d'un réacteur continu parfaitement mélangé (CSTR)**

Le réacteur est alimenté par un produit dont sa concentration est constante, avec une certaine température  $T_{in}$ . L'intérieur du réacteur est le siège des réactions chimiques, le mélange est constamment agité grâce à un mélangeur.

On commande le réacteur en apportant un taux de chaleur, il ya principalement deux façons d'apporter de la chaleur selon la géométrie du réacteur [LUY-07] :

- Réacteurs chauffés par un fluide circulant dans la chemise entourant le réacteur. Ces réacteurs sont les plus couramment utilisés.
- Réacteurs chauffés par un fluide circulant à l'intérieur de bobines installés à l'intérieur du réacteur.

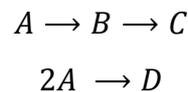


**Figure (2.4) – Schémas des réacteurs chauffés avec chemise et par des bobines**

Afin de modéliser ce réacteur, nous considérons les hypothèses suivantes :

- Mélange homogène au niveau moléculaire.
- Température homogène du milieu.
- Volume et densité constants (débit d'entrée = débit de sortie).
- Concentrations et température du flux de sortie sont les mêmes que celles dans le réacteur.

Nous prenons comme exemple le système de réactions suivant, connu sous le nom de Van de Vusse :



Le réacteur dans ce cas là est alimenté par un seul produit : produit A. La première équation est la principale composée de deux réactions en série, et la deuxième équation est une équation parallèle. Le produit d'intérêt est le produit B : il s'agit du composant à optimiser.

### II.6.1.a Bilan de matière :

D'après la loi fondamentale de la conservation de matière 'Lavoisier' ; rien ne se crée, rien ne se perd, mais tout se transforme.

Nous considérons deux quantités de matière :

La quantité de matière (ou nombre de moles) relatif au produit A :

$$n_1 = Vx_1 \quad (2.21)$$

Et relatif au produit B :

$$n_2 = Vx_2 \quad (2.22)$$

$x_i$  dénote la concentration du produit, en  $\text{mol.l}^{-1}$ , et  $V$  est le volume du réacteur en litres.

Le bilan de matière est :

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Taux} \\ d'accumulation \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Taux d'entrée} \\ \text{par convection} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Taux de sortie} \\ \text{par convection} \end{array} \right] + [\text{Taux de génération}]$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d(Vx_1)}{dt} = FC_{A0} - Fx_1 - Vk_1(T)x_1 - Vk_3(T)x_1^2 \\ \frac{d(Vx_2)}{dt} = 0 - Fx_2 + Vk_1(T)x_1 - Vk_2(T)x_2 \end{cases} \quad (2.23)$$

$C_{A0}$  étant la concentration d'entrée du composant d'alimentation A.  $F$  le débit d'entrée et de sortie.

Les coefficients  $k_i(T)$  sont les coefficients qui interviennent selon un facteur exponentiel d'après la loi d'Arrhenius.

Comme les débits d'entrée et de sortie sont égaux, par conséquent volume est constant dans le réacteur, on divise les deux équations par ce volume pour obtenir les équations finales :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = D(C_{A0} - x_1) - k_1(T)x_1 - k_3(T)x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -Dx_2 + k_1(T)x_1 - k_2(T)x_2 \end{cases} \quad (2.24)$$

$D = \frac{F}{V}$  est appelé le taux de dilution.

### II.6.1.b Bilan d'énergie :

Nous avons vu précédemment que la chaleur dans un réacteur continu parfaitement agité est conservée, et varie selon l'équation (2.11):

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = \dot{Q}$$

En appliquant ce principe de conservation on aura [WEL-00]:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} \text{Taux} \\ \text{d'accumulation} \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c} \text{Taux d'entrée} \\ \text{par convection} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Taux de sortie} \\ \text{par convection} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Taux de génération} \end{array} \right] \\ &+ \left[ \begin{array}{c} \text{Taux d'échange à la paroi} \\ \text{par conduction} \end{array} \right] \end{aligned}$$

La chaleur spécifique moyenne  $C_p$  étant supposée constante, les taux d'entrée et de sortie sont :

- $[Taux\ d'entrée] = \rho C_p F T_{in}$
- $[Taux\ de\ sortie] = \rho C_p F T$
- Le taux d'échange à la paroi selon la loi de conduction est :  
 $[Taux\ d'échange\ à\ la\ paroi] = k_w A_r (T - T_j)$  dans le cas du réacteur avec chemise. L'indice 'j' s'apparente à la chemise (jacket en anglais) du réacteur, ce type de réacteurs sont considérés pour la suite de notre étude. Dans le cas du réacteur chauffé par des bobines, le taux d'échange est égal à un flux de chaleur  $\dot{Q}_{fluide}$ .

La chaleur générée par une réaction est donnée par le terme  $-V\Delta H_R \mathcal{R}$  ;  $\mathcal{R}$  étant le taux de génération donné par la loi de vitesse. Le signe négatif est ajouté au terme pour respecter la convention de l'enthalpie ; lorsque par exemple la réaction est exothermique, c'est-à-dire  $\Delta H_R < 0$  , la chaleur augmente d'où le signe négatif [NAU-08].

Le volume est ajouté à l'expression car l'unité de l'enthalpie est en  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

Lorsque plusieurs réactions se présentent, il faut procéder à une sommation de toutes les enthalpies de réaction :

$$-V \sum_{\text{réactions}} (\Delta H_R)_I \mathcal{R}_I \quad (2.25)$$

D'où le taux de génération dans notre cas :

$$[Taux\ de\ génération] = k_1(T)Vx_1 \Delta H_{rAB} + k_2(T)Vx_2 \Delta H_{rBC} + k_3(T)Vx_1^2 \Delta H_{rAD}$$

En divisant l'équation  $\rho V C_p$  on trouve l'équation finale de la température:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = D(T_{in} - T) + \frac{k_w A_r}{\rho V C_p} (T - T_j) \\ + \frac{(k_1(T)x_1 \Delta H_{rAB} + k_2(T)x_2 \Delta H_{rBC} + k_3(T)x_1^2 \Delta H_{rAD})}{\rho C_p} \end{aligned} \quad (2.26)$$

On peut généraliser les équations du système sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -Dx + KR(x, T) + U_{in} \\ \dot{T} = -DT + \lambda^T R(x, T) + u \end{cases} \quad (2.27)$$

Dans le cas de la réaction Van de Vusse:

- La matrice des coefficients stœchiométriques :  $K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

- La matrice des cinétiques chimiques :  $R(x, T) = \begin{bmatrix} k_{10} \exp\left(-\frac{E_1}{T}\right) x_1 \\ k_{20} \exp\left(-\frac{E_2}{T}\right) x_2 \\ k_{30} \exp\left(-\frac{E_1}{T}\right) x_1^2 \end{bmatrix}$

- Le vecteur des enthalpies de réaction :  $\lambda^T = \begin{bmatrix} \frac{-\Delta H_{rAB}}{\rho C_p} & \frac{-\Delta H_{rBC}}{\rho C_p} & \frac{-\Delta H_{rAD}}{\rho C_p} \end{bmatrix}$

- Le vecteur des concentrations d'alimentation :  $U_{in} = \begin{bmatrix} D C_{A0} \\ 0 \end{bmatrix}$

- La commande qui est le taux de chaleur apporté au réacteur (qui est l'addition du taux chaleur d'entrée et du taux d'échange à la paroi):  $u = DT_{in} + \frac{k_w A_r}{\rho V_r C_p} (T - T_j)$

### II.6.2 Modélisation du réacteur tubulaire (PFTR) :

Cette section présente la modélisation d'un réacteur tubulaire tel que présenté à la figure suivante :

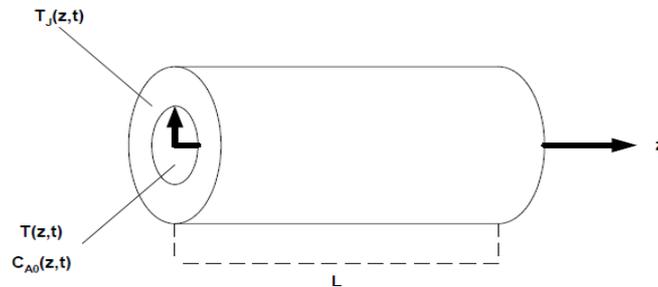


Figure (2.5) – Schéma d'un réacteur tubulaire (PFTR)

Les bilans de matière et d'énergie permettent d'obtenir les équations de concentration et de température pour les réacteurs tubulaires. La figure suivante présente une tranche infinitésimale du réacteur, en supposant que le transfert de matière est principalement l'effet de la convection ; le transfert par rayonnement est négligé.

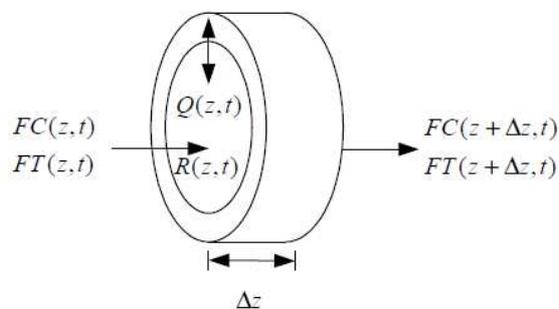


Figure (2.6) – Tranche infinitésimale d'un réacteur tubulaire

Avec :

- $F$  : débit du fluide
- $C$  : le vecteur  $n \times 1$  des profils de concentrations
- $T$  et  $T_J$  : les profils de température dans le réacteur et dans la chemise, respectivement.
- $R$  : représente le vecteur  $r \times 1$  des cinétiques de la réaction
- $Q$  : le taux d'échange thermique à la paroi.

En supposant la masse volumique constante le long de la paroi et le long du réacteur, le bilan matière autour de cet élément est :

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Taux} \\ \text{d'accumulation} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Taux d'entrée} \\ \text{par convection} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Taux de sortie} \\ \text{par convection} \end{array} \right] + [\text{Taux de génération}]$$

$$A\Delta z \frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = FC(z, t) - FC(z + \Delta z, t) + A\Delta z KR(C(z, t), T(z, t)) \quad (2.28)$$

Avec :

- $K$  la matrice  $n \times r$  des coefficients stœchiométriques,
- $A = \frac{\pi d^2}{4}$ , la section du réacteur.

En divisant par  $A\Delta z$  et en prenant la limite  $\Delta z \rightarrow 0$  en sachant que :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{C(z+\Delta z, t) - C(z, t)}{\Delta z} = \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} \quad (2.29)$$

On obtient :

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = -D \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} + KR(C(z, t), T(z, t)) \quad (2.30)$$

On note le taux de dilution :

$$D = \frac{F}{A\Delta z} \quad (2.31)$$

En considérant la chaleur spécifique  $C_p$  constante, le bilan d'énergie sur cet élément est de la forme :

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Taux} \\ \text{d'accumulation} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Taux d'entrée} \\ \text{par convection} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Taux de sortie} \\ \text{par convection} \end{array} \right] + [\text{Taux de génération}] \\ + [\text{Taux d'échange à la paroi}]$$

$$A\Delta z\rho C_p \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \rho C_p FT(z,t) - \rho C_p FT(z+\Delta z,t) + A\Delta z\Delta H^T R(C(z,t), T(z,t)) \\ + (\pi d)\Delta z Q(z,t) \quad (2.32)$$

Où  $\Delta H$ , le vecteur  $r \times 1$  des chaleurs de réactions. Le terme d'échange de l'énergie à la paroi selon la loi de fourier est donné par :

$$Q(z,t) = h(T(z,t) - T_j(z,t)) \quad (2.33)$$

En divisant par  $A\Delta z\rho C_p$  et par définition de la limite:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = -D \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + \frac{\Delta H^T}{\rho C_p} R(C(z,t), T(z,t)) + \frac{4h}{d\rho C_p} (T(z,t) - T_j(z,t)) \quad (2.34)$$

Avec les conditions initiales  $C(z,0)$  et  $T(z,0)$  connues. Les conditions à la frontière sont connues et sont de la forme :

$$\begin{cases} C(0, t) = C_{in} \\ T(0, t) = T_{in} \end{cases} \quad (2.35)$$

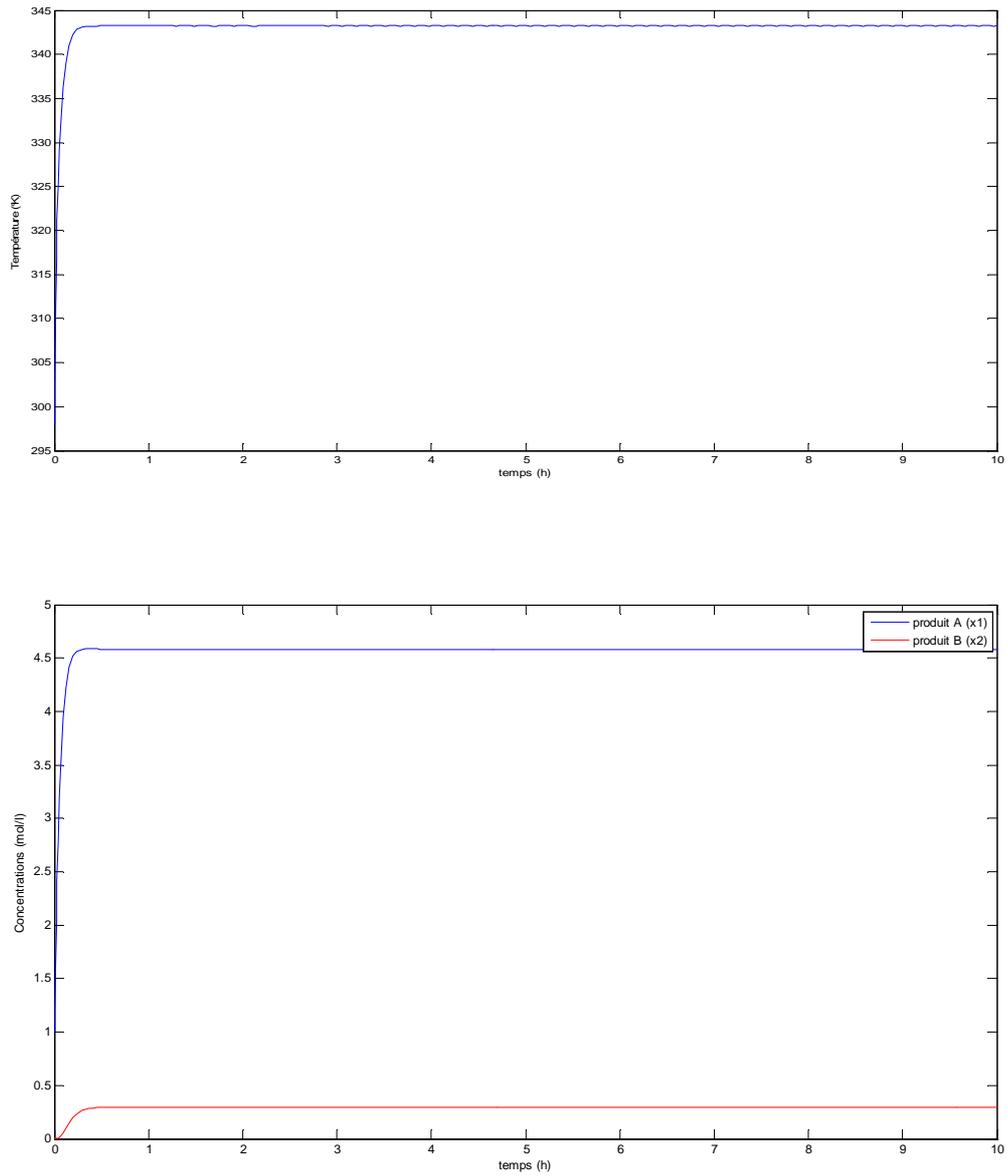
## II.7. Simulation du réacteur CSTR en boucle ouverte :

Nous allons à présent simuler le réacteur modélisé dans la section (II.6.1). Nous allons appliquer une commande en forme d'échelon ; rappelons que la commande est le taux d'échange de chaleur apporté au réacteur, nous allons considérer les trois cas suivants :

- Refroidissement du réacteur : c'est-à-dire que la température de la chemise est inférieure à la température du réacteur, donc le transfert de chaleur est du sens réacteur-chemise.
- Chauffage du réacteur : c'est-à-dire que la température de la chemise est supérieure à la température du réacteur, donc le transfert de chaleur est du sens chemise-réacteur.
- Pas d'échange dans la paroi : c'est-à-dire que la température de la chemise suit la température du réacteur ; il n'ya donc pas de gradient de température entre chemise-réacteur.

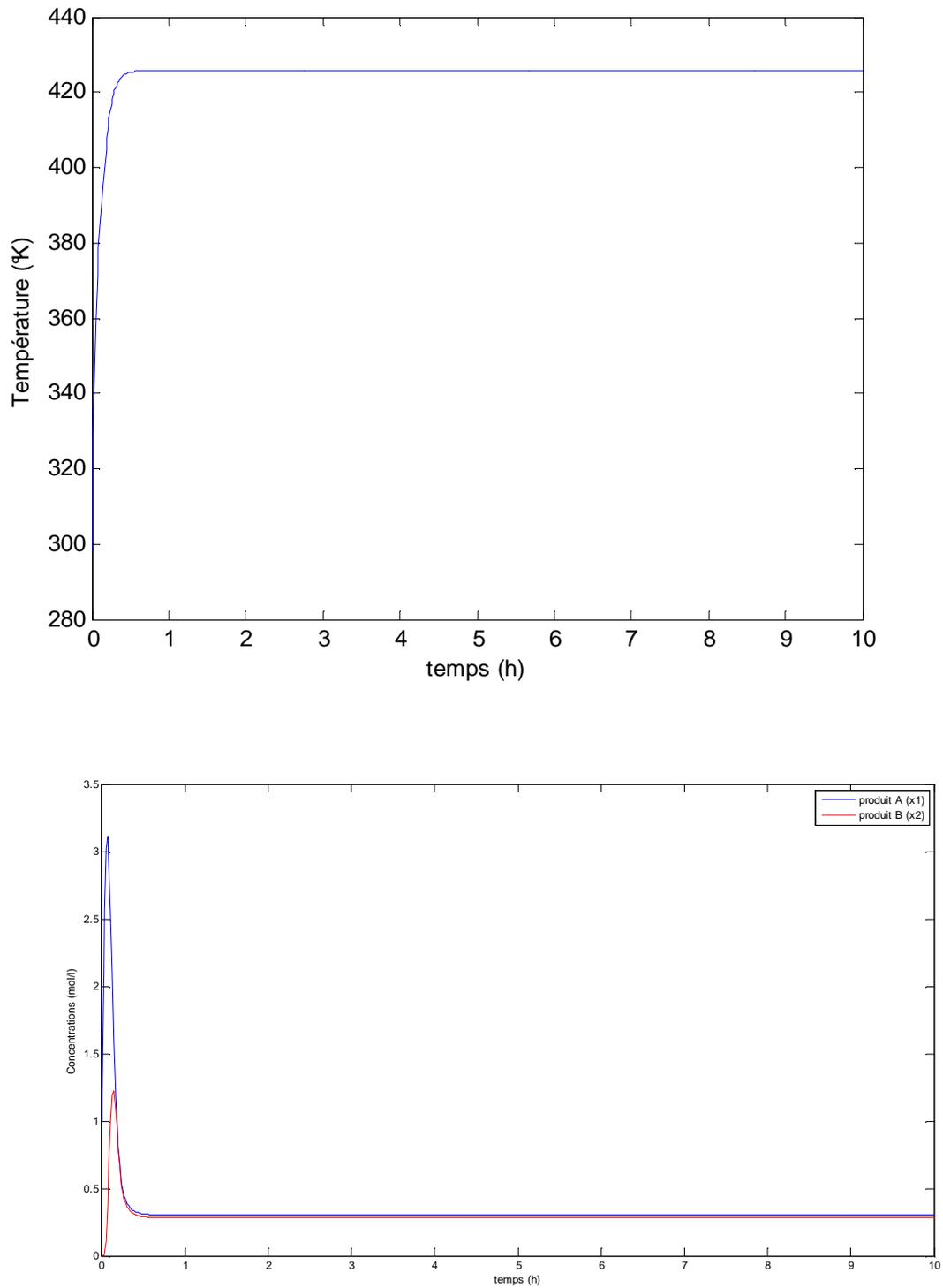
Les valeurs numériques des paramètres de la réaction sont listées dans le chapitre V. Nous allons à chaque cas tracer les courbes de concentrations et de la température.

- **Cas du refroidissement du réacteur:**  $u = DT_{in} - 800 \text{ K} \cdot h^{-1}$



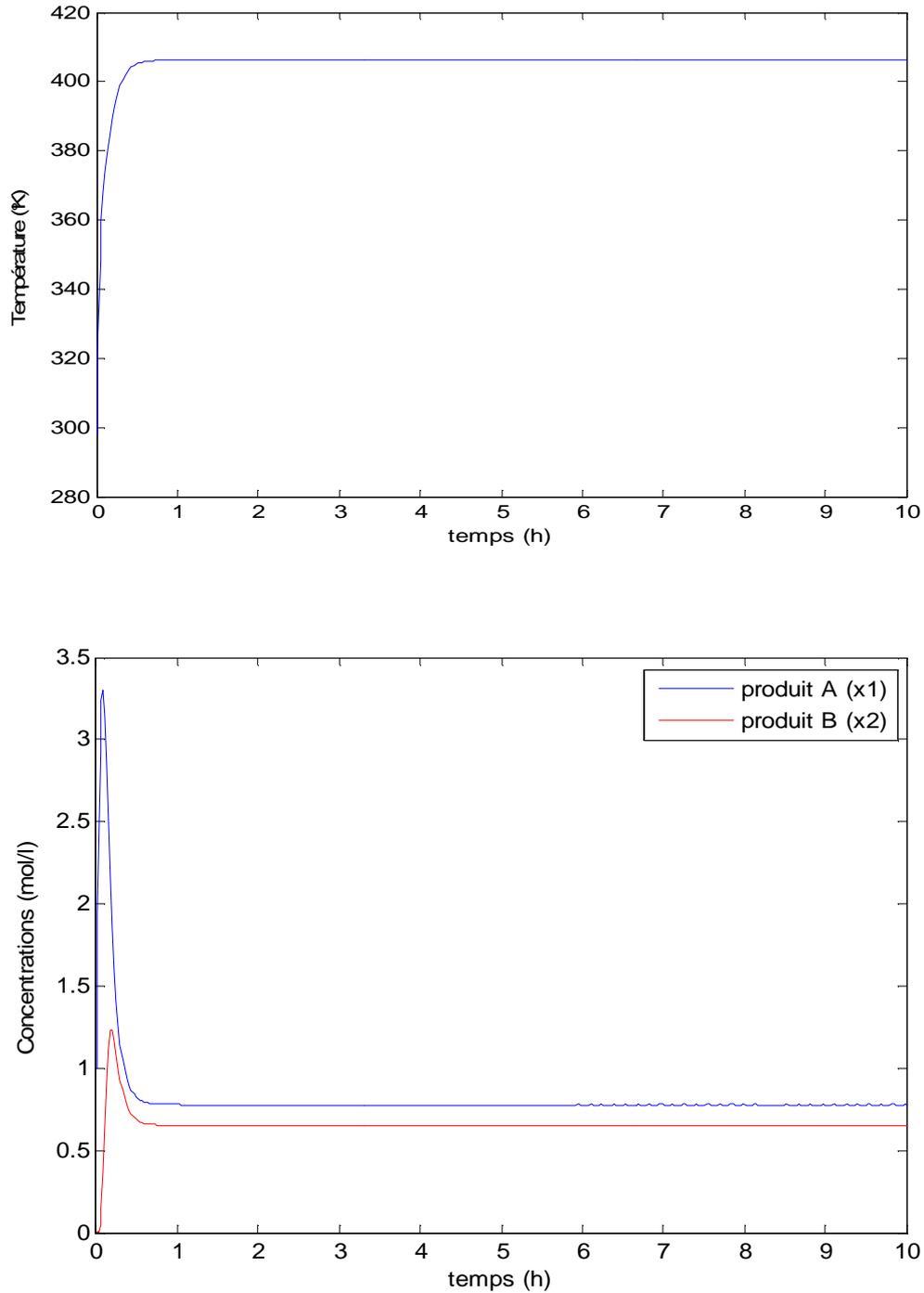
**Figure (2.7) – Profils de température et concentrations, cas du refroidissement.**

- Cas du chauffage du réacteur :  $u = DT_{in} + 200 K \cdot h^{-1}$



**Figure (2.8) – Profils de température et concentrations, cas du chauffage.**

- Cas du taux d'échange nul :  $u = DT_{in} + 0 K.h^{-1}$



**Figure (2.9) – Profils de température et concentrations, cas du taux nul.**

### II.7.1 Commentaires :

Les résultats montrent que pour les trois différents taux d'échange, la température se stabilise ainsi que les concentrations ; le réacteur est donc stable en boucle ouverte. C'est une propriété implicite de ce système. En effet, selon le taux d'échange présent dans

la paroi et la température d'entrée du composant, la température se stabilise dans le réacteur autour d'une certaine valeur, et la réaction continue à être opérationnelle à température constante. Comme la concentration initiale du composé A est constante ; le système de réaction restera toujours physiquement stable.

## II.8. Profils d'équilibres :

Nous avons vu que la température tend à se stabiliser dans le réacteur continu parfaitement agité. C'est l'opération isothermique du réacteur. Elle est achevée lorsque:

$$\dot{T} = 0 \Leftrightarrow T = T_{eq} \quad (2.36)$$

Pour déterminer le profil d'équilibre on cherche le point d'équilibre du système en fonction d'une certaine température d'équilibre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} DC_{A0} - (D + k_1(T))x_1 - k_3(T)x_1^2 = 0 \\ -Dx_2 + k_1(T)x_1 - k_2(T)x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Résolution de la première équation:

$$\Delta = (D + k_1(T))^2 + 4DC_{A0}k_3(T) > 0 \quad (2.39)$$

Il existe deux solutions réelles :

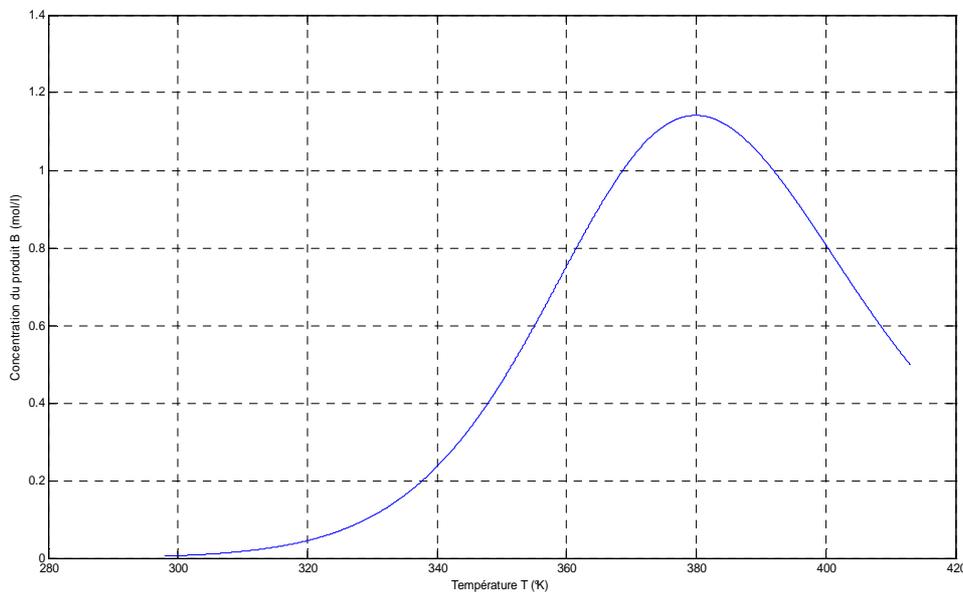
$$\begin{cases} x_{11} = -\frac{(D + k_1(T) + \sqrt{(D + k_1(T))^2 + 4DC_{A0}k_3(T)})}{2k_3(T)} \\ x_{12} = -\frac{(D + k_1(T) - \sqrt{(D + k_1(T))^2 + 4DC_{A0}k_3(T)})}{2k_3(T)} \end{cases} \quad (2.40)$$

Il est clair que  $x_{11}$  est une quantité négative; Comme les concentrations sont des quantités physiques positives, la deuxième solution est envisagée, donc le profil d'équilibre de la concentration  $x_1$  est  $\pi_1(T) = x_{12}$ .

Si on remplace  $x_1$  par  $\pi_1(T)$  dans la deuxième équation du système (2.38); on trouve finalement le profil d'équilibre des concentrations:

$$\pi(T) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-(D + k_1(T)) + \sqrt{(D + k_1(T))^2 + 4DC_{A0}k_3(T)}}{2k_3(T)} \\ \frac{k_1(T)\pi_1(T)}{k_2(T) + D} \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

Traçons à présent la courbe du profil d'équilibre  $\pi_2(T)$  en fonction de la température, en considérant l'intervalle de température :  $[298K, 413K]$  ;



**Figure (2.10) – Profil d'équilibre de la concentration du produit d'intérêt**

On remarque que le profil d'équilibre du produit d'intérêt présente un maximum d'une valeur de  $1.14 \text{ mol.l}^{-1}$  autour de la température de 380 K. Etant donné que ce profil

d'équilibre dépend des éléments de cinétiques chimiques, qui sont inconnus et difficiles à obtenir à priori : le problème de recherche adaptative d'extremum se pose.

## II.9. Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre, les principaux phénomènes et lois physiques et thermodynamiques régissant le fonctionnement des réacteurs chimiques. Nous avons appliqué ces lois pour modéliser deux types de réacteurs largement utilisés dans l'industrie: le réacteur parfaitement mélangé (CSTR) et le réacteur tubulaire (PFTR) ; la différence entre les deux réside dans le fait que le réacteur parfaitement mélangé (CSTR) est un système à paramètres localisés ; le mélange dans ce réacteur étant supposé homogène, les concentrations et la température à la sortie sont supposées égales à leurs valeurs en tout point du mélange.

Par contre, le réacteur tubulaire (PFTR) est un système à paramètres distribués, il est régi par des équations aux dérivées partielles. Ainsi, les concentrations et la température évoluent le long du réacteur.

Notre projet va se concentrer sur le réacteur bien mélangé (CSTR), la simulation en boucle ouverte de ce système a montré qu'il est stable par nature; la température se stabilise autour d'un point qui correspond à une certaine concentration du produit d'intérêt. Le profil d'équilibre de la concentration en fonction de la température montre qu'il existe bien un maximum; le problème de recherche d'un optimum se pose d'où l'intérêt d'application de la commande extrémale.

# Chapitre III

*COMMANDE EXTRÊME*

*ADAPTATIVE*

### **III.1 Introduction :**

L'introduction de l'asservissement a permis d'améliorer le rendement et la qualité des procédés industriels. Les stratégies de commande se basent sur la connaissance de la valeur de référence appelée également « consigne », qui est le plus souvent donnée. Le système étant supposé linéaire pour de petites variations, un régulateur classique PID suffisait largement à satisfaire les besoins et à donner de bons résultats.

Cependant, dans certains cas pratiques il est assez difficile de trouver la référence permettant un fonctionnement optimal pour le processus ; D'où la notion de commande extrémale, dont le principe est de maximiser un certain critère.

### **III.2 Généralités sur la commande extrémale :**

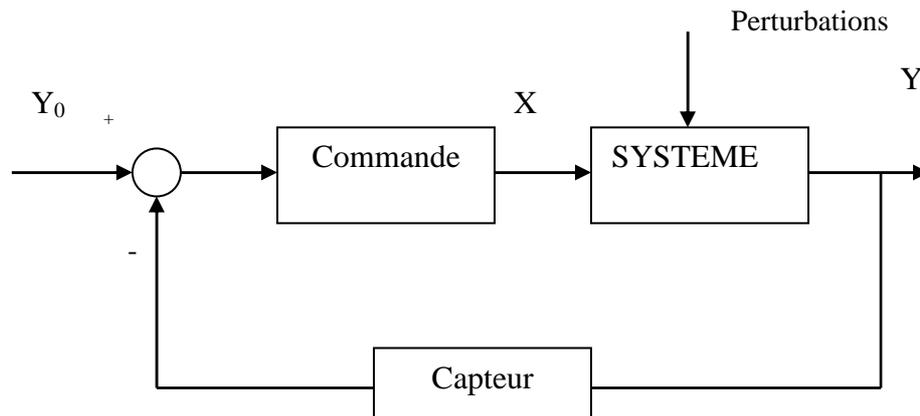
#### **III.2.1 Historique :**

La première application de la commande extrémale est attribuée à Leblanc dans les années 1920. Pendant les années 1940, le sujet a été largement étudié dans l'URSS, la technique s'est imposée dans la littérature. Durant les années 1960, la commande extrémale s'est divisée en deux branches. D'une part, l'émergence des ordinateurs a orienté les scientifiques travaillant dans l'optimisation en temps réel à chercher des algorithmes généraux d'optimisation. D'autre part, il y'a eu une distinction entre les objectifs de stabilisation et d'optimisation, l'apparition de la commande par modèle de référence (MRAC) et surtout le manque de preuve de stabilité du système en boucle fermée a fait peu à peu disparaître la commande extrémale dans la littérature du contrôle. A partir des années 1960, très peu de développement significatif de la méthode a été apporté, l'idée de la méthode sera utilisée graduellement dans le domaine de l'optimisation. Cependant, durant les années 1990, le sujet refait surface avec le développement des calculateurs et est redevenu un centre d'intérêt, pour résoudre certains problèmes liés à des systèmes complexes tels que les systèmes de combustion, de compression, et les systèmes chimiques et biochimiques [ARI-03].

### III.2.2 Les différents types d'asservissement :

#### III.2.2.a La commande à une valeur de consigne connue en boucle fermée.

Cette approche est basée sur la connaissance en temps réel de la variable de sortie  $y$ . Ainsi à partir, de l'écart entre cette mesure et la consigne  $y_0$ , la grandeur de commande  $X$  est définie.



**Figure (3.1) - Schéma d'un Asservissement en boucle fermée.**

Pour que la sortie  $y$  corresponde à la consigne «  $y=y_0$  », le signal d'écart 'e' doit tendre vers zéro.

Concernant l'organe de commande, des régulateurs sont introduits afin d'améliorer les performances.

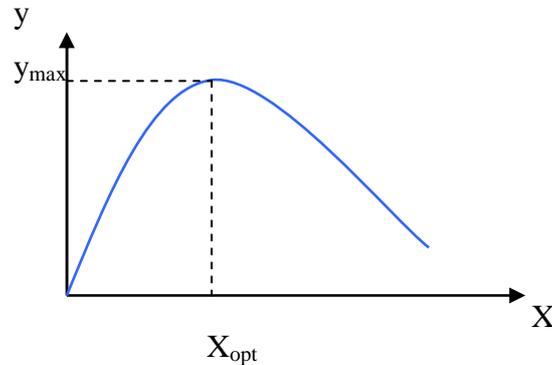
Le régulateur a pour fonction de comparer la valeur du signal, image de la grandeur à réguler  $y$ , avec la valeur de consigne  $y_0$  et d'élaborer la grandeur réglante  $X$  de commande dans le but d'annuler l'écart 'e' entre  $y$  et  $y_0$ .

Il existe plusieurs types de régulateurs à action, les plus utilisés sont les : Proportionnelle intégrale 'PI' et Proportionnelle intégrale dérivée 'PID' [MAR-87].

Les régulateurs à action PI sont utilisés afin d'accélérer la réponse du système et de le rendre stable. Les régulateurs à action PID sont utilisés dans les processus thermiques, chimiques, afin de stabiliser le système.

### III.2.2.b La commande extrémale

Supposons maintenant que la caractéristique « sortie, entrée », présente un extremum.



**Figure (3.2) : Schéma d'une sortie présentant un extremum en fonction de la commande.**

Cette caractéristique est fréquemment rencontrée dans les processus industriels, chimiques et biologiques. Si notre objectif est de maintenir le processus dans l'état où ' $y$ ' est égale à sa valeur extrême ' $y_{\max}$ ', il suffirait de fixer ' $X$ ' à la valeur correspondante  $X_{\text{opt}}$  sur la caractéristique.

Comme dans l'approche classique en boucle fermée, si on connaît  $y_{\max}$  «  $y = y_{\max}$  », on calcule la commande du processus par une grandeur qui dépend du signal d'erreur. Ce dernier doit tendre à s'annuler pour que l'extremum soit atteint. À l'équilibre, on voit que  $X=X_{\text{opt}}$ .

Cependant, dans le cas d'asservissement à valeur de consigne connu, le rôle du régulateur consistait simplement à élaborer le signal de commande à partir des mesures de  $y$  et de  $y_0$ .

En revanche, dans le cas de l'asservissement extrême, la consigne ne peut pas être explicitée, puisque la valeur extrême n'est pas connue a priori. C'est pour cela qu'on utilise des méthodes de recherche d'extremum [LAD-95].

### **III.3 Notions d'adaptation :**

#### **III.3.1 Généralités sur la commande adaptative :**

Les termes "système adaptatif" et "commande adaptative" ont été utilisés dès 1950. Les automaticiens se sont vite aperçus en effet qu'un contrôleur avec des paramètres fixes n'était pas toujours capable d'assurer les performances voulues, par exemple dans le cas où les paramètres du système variaient avec le temps. La conception de pilotes automatiques à haute performance pour les avions a été l'une des principales motivations des recherches sur la commande adaptative durant ces années.

La commande adaptative a une riche littérature complète avec différentes techniques de conception, d'analyse, de performance et d'applications. L'ultime motivation du concept de commande adaptative a été de maintenir les performances requises quand la dynamique du comportement d'entrée-sortie du système à commander n'est pas totalement connue au cours du temps.

Un correcteur est dit adaptatif lorsqu'il s'adapte en ligne au système mal connu. Généralement, les mesures des entrées et des sorties du procédé sont utilisées pour calculer les paramètres du correcteur. Ainsi, un correcteur adaptatif est formé de la combinaison d'un estimateur en-ligne de paramètres, qui fournit les estimées des paramètres inconnus à chaque instant, et d'une loi de commande appropriée. La manière dont l'estimateur paramétrique est associé à la loi de commande donne lieu à deux approches distinctes [PET-95]:

- Commande adaptative indirecte (explicite)
- Commande adaptative directe (implicite)

#### **III.3.2 Technique d'adaptation paramétrique :**

Le principal attrait de la commande adaptative résulte dans le fait qu'elle permet de conserver des performances quasi optimales à un système dont les paramètres varient au cours du temps [AST-89]

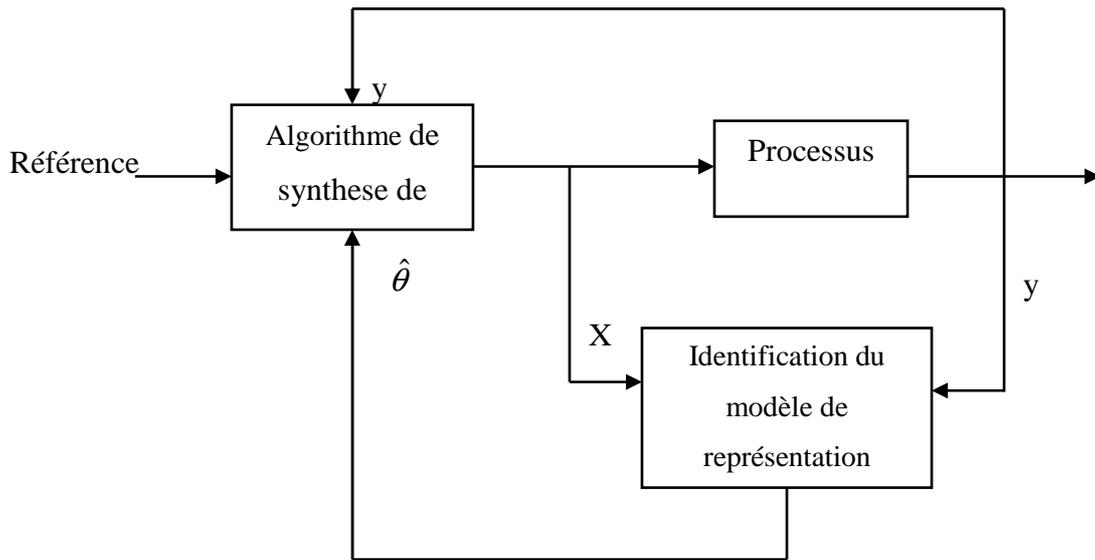


Figure (3.3) - Schéma de principe d'une commande adaptative.

### III.3.2.a Commande adaptative directe :

Cette approche consiste à identifier non les paramètres du système à commander, mais directement les paramètres du régulateur [SLO-91], [TAD-11].

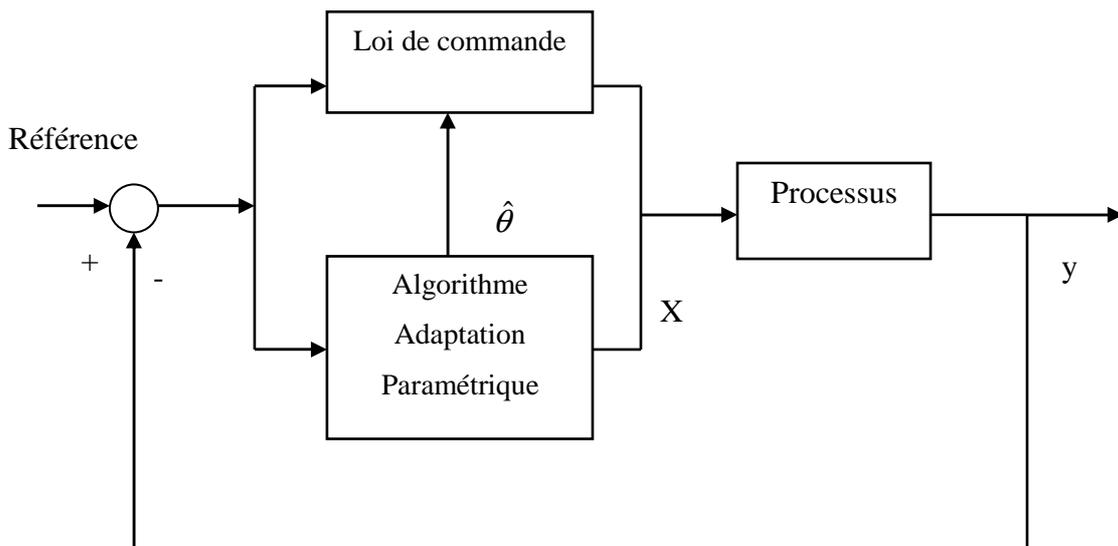


Figure (3.4) - Schéma de la commande adaptative directe.

Etant donné une stratégie de commande et la connaissance de la structure du système, il est facile d'en déduire la forme de la loi de commande et donc la structure d'un régulateur capable de générer cette commande.

L'algorithme d'identification-adaptation peut alors être considéré comme un algorithme d'optimisation paramétrique. Cette approche n'est pas applicable pour les systèmes dits « système à non minimum de phase », car la commande générée sera instable.

### III.3.2.b Commande adaptative indirecte :

Durant la conception, les paramètres du système sont supposés constants. Cependant, les paramètres réels sont souvent variables et ne sont pas généralement connus avec assez de précision. L'identification en ligne est nécessaire pour représenter fidèlement le modèle de ce système où les paramètres sont lentement variables. Dans cette technique, l'algorithme d'identification qui utilise les mesures faites sur le système, fournit des paramètres estimés à l'algorithme de calcul de la loi de commande, [AST-89], [SLO-91], [TAD-11].

Un des avantages de cette approche est de pouvoir transposer directement toutes les stratégies de commande à paramètres supposés connus.

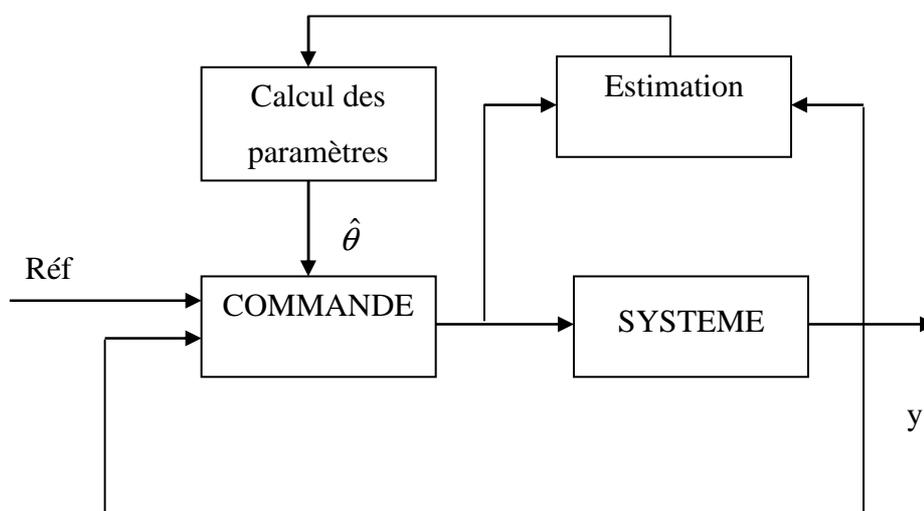


Figure (3.5) - Schéma de commande adaptative indirecte.

### III.4 Méthodes de recherche d'extremum:

Un objectif de la commande de procédés consiste à garder un procédé à un point d'opération donné (dans la pratique, on espère que ce point d'opération est un optimum). Pour certaines applications, il peut être difficile de déterminer *a priori* ce point d'opération. L'objectif de la commande adaptative par recherche d'extremum consiste à déterminer en ligne cet optimum et de garder le procédé à cet optimum.

Le schéma suivant, présente l'idée générale de la méthode [AST-89].

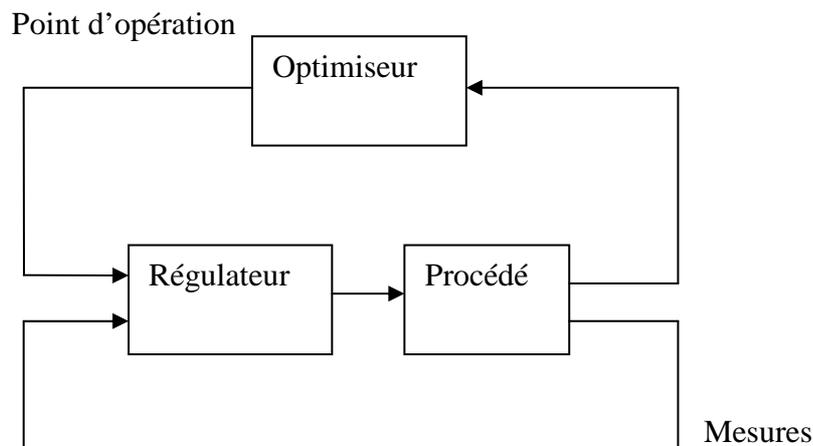


Figure (3.6) – Schéma général de commande par recherche d'extremum

#### III.4.1 Méthodes de recherche de l'extremum en régime statique :

##### III.4.1.a Méthode du gradient :

Le principe de la méthode est représenté par le schéma ci-dessous. Celle-ci consiste à calculer le gradient  $\frac{\partial y}{\partial x}$

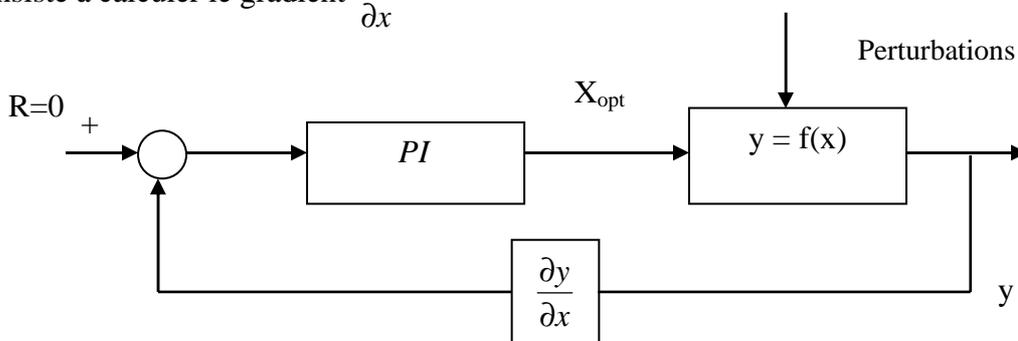


Figure (3.7) - Méthode du gradient

Considérons le système décrit par :

$$y = f(x) \quad (3.1)$$

Le principe est :

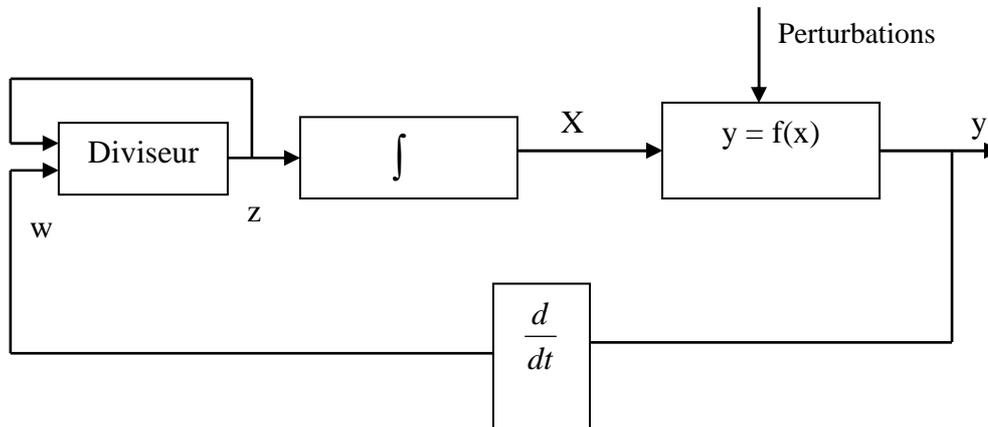
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (3.2)$$

On supposera que le système n'a pas de dynamique. Si  $\frac{dy}{dx}$  égale à zéro, en supposant que

$\frac{dx}{dt}$  est constant, on aura  $y = y_{\max}$ .

#### III.4.1.b Méthode du diviseur :

Considérons le système décrit par l'équation  $y = f(x)$ . Le principe de la méthode est représenté par le schéma ci-dessous :



**Figure (3.8) - Méthode du diviseur**

Le diviseur engendre la dérivée du signal de sortie  $y$  par rapport au signal d'entrée  $X$

On pose :

$$\begin{cases} w = \frac{dy}{dt} \\ z = \frac{dX}{dt} \end{cases} \quad (3.3)$$

Et 
$$z = \frac{w}{z} \tag{3.4}$$

En remplaçant (3.3) dans (3.4), on obtient :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dy}{dX} \tag{3.5}$$

La variation de X est proportionnelle à la pente de la courbe (y, x) et X est forcé dans le sens qui réduit cette pente à zéro. X va tendre vers  $X_{opt}$ .

### III.4.2 Méthodes de recherche d'extremum en régime dynamique :

#### III.4.2.a Analyse par la méthode de la moyenne :

Cette méthode explicitée par le schéma est une méthode générale de recherche d'extremum. Le mérite de cette méthode réside dans les preuves de stabilité fournies. Cet algorithme suppose la mesure en ligne de la fonction à optimiser mais ne nécessite pas de modèle *a priori*. Ainsi, si on dispose de la mesure de la fonction à optimiser avec un signal extérieur sinusoïdal, il est possible d'atteindre l'optimum sans pourtant disposer d'un modèle mathématique du système. [ARI-03]

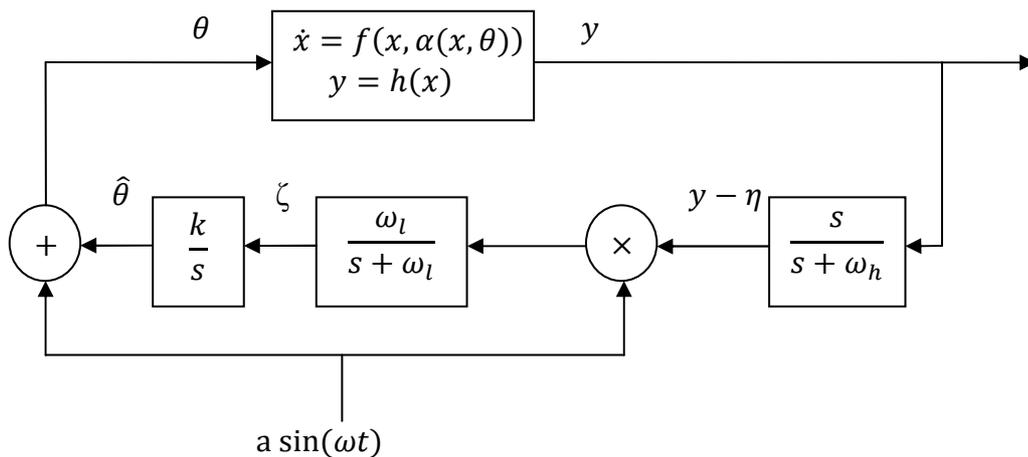


Figure (3.9) - Schéma de commande par la méthode de la moyenne



Nous avons vu la différence qui existe entre les commandes classiques avec consigne connue en boucle fermée et la commande extrémale. Le problème de cette dernière est la recherche du point extremum dans le but de maximiser le rendement du système. Différentes méthodes de recherche ont été développées en régime statique.

La raison pour laquelle il serait très intéressant de reconsidérer les problèmes de commande extrémale en régime dynamique, est qu'il est maintenant possible d'implémenter des algorithmes de commande compliqués dans des calculateurs ; Ainsi, nous avons présenté une méthode d'analyse par Lyapunov que nous utiliserons dans le chapitre prochain.

# Chapitre IV

*COMMANDE EXTRÊME  
ADAPTATIVE APPLIQUÉE  
AU RÉACTEUR CHIMIQUE  
CONTINU PARFAITEMENT  
AGITÉ*

## IV.1- Introduction :

Ce chapitre vise à formuler et à analyser le problème de l'optimisation et de la commande d'un réacteur chimique parfaitement agité. Particulièrement, on s'intéressera à une formulation générale qui permettra de traiter les systèmes avec réactions multiples qui présentent des combinaisons de réactions en série et de réactions en parallèle; Le but étant d'optimiser la concentration d'un produit d'intérêt à la sortie du réacteur. Les cinétiques chimiques étant supposées inconnues, nous allons introduire des notions de commande adaptative afin d'estimer le profil de concentration à équilibre du produit à optimiser qui dépend de ces paramètres inconnus [GUA-04].

## IV.2 Position du problème et hypothèses fondamentales :

Notre problème se concentre sur la classe de réacteurs continus parfaitement agités suivante :

$$\dot{x} = -Dx + KR(x, T) + U_{in} \quad (4.1)$$

$$\dot{T} = -DT + \lambda^T R(x, T) + u \quad (4.2)$$

Rappelons que :

- $x \in S_x \subset \mathbb{R}^{+n}$  est le vecteur de concentrations des composants chimiques dans le réacteur dont les valeurs appartiennent au sous-ensemble  $S_x$  de  $\mathbb{R}^{+n}$ .
- $T$  est la température qui est supposée homogène dans le réacteur dont la valeur appartient au sous ensemble  $S_T$  de  $\mathbb{R}^+$ .
- $K$  est la matrice  $n \times r$  des coefficients stœchiométriques de chacun  $n$  composants des  $r$  réactions.
- $R(x, T) \in \mathbb{R}^r$  est la matrice des cinétiques des réactions.
- $D$  est le taux de dilution du réacteur.
- $U_{in} \in \mathbb{R}^n$  est le taux d'addition de chacun des  $n$  composants.
- $\lambda \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des chaleurs de réaction.
- $u$  est le taux de chaleur apporté au réacteur qui est la commande.

La matrice stœchiométrique  $K$  et le vecteur des enthalpies de réaction  $\lambda$  sont supposés connus. Par contre la matrice des cinétiques de réactions  $R(x, T)$  est inconnue.

L'objectif du contrôle est de concevoir une commande  $u$  qui maximise, en régime permanent, une fonction de la forme :

$$y = Hx \quad (4.3)$$

soit une fonction de la concentration à la sortie du réacteur avec  $H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Seule la mesure de température est disponible. Malgré que certaines méthodes avancées aient été développées pour les mesures de concentrations dans les réacteurs, cela reste une solution chère, et rarement utilisée dans les installations industrielles [ANT-03]. Le problème devrait être ainsi résolu en n'utilisant que les mesures de température.

On suppose qu'il existe un vecteur de concentrations  $\pi(T)$  qui résout l'équation du régime permanent  $\dot{x} = 0$  :

$$-D\pi(T) + KR(\pi(T), T) + U_{in} = 0 \quad (4.4)$$

En supposant que la fonction  $\pi(T)$  existe et est unique dans l'intervalle  $S_T$ , le problème d'optimisation est reformulé de la manière suivante :

$$\max_T H\pi(T) \quad (4.5)$$

Comme le vecteur  $\pi(T)$  contient les cinétiques qui sont inconnues, l'expression de la fonction à optimiser est donc inconnue.

On pose maintenant deux hypothèses fondamentales pour la suite de l'étude [GUA-04]:

**Hypothèse 4.1 :** *La fonction  $H\pi(T)$  est continument différentiable et admet un maximum unique  $S_T$ . C'est-à-dire que  $\frac{dH\pi(T)}{dT} = 0$  avec  $\frac{d^2H\pi(T)}{dT^2} \leq 0$  sur le domaine de  $T$ .*

**Hypothèse 4.2 :** *On considère le bilan de matière (4.1). On suppose que ce système est à déphasage minimal sur l'intervalle de température considéré.*

Pour garantir la convergence de la concentration  $x$  au voisinage de l'équilibre  $\pi(T)$ , cette condition est nécessaire. Ici, cette condition revient à supposer que pour un profil donné de température, il existe un profil unique de concentration à l'équilibre  $\pi(T)$  [GUA-04].

On étudie maintenant la dynamique de la température (4.2) en utilisant l'information donnée par le profil à l'équilibre (4.4). On réécrit l'équation de la température (4.2) en ajoutant et soustrayant le terme  $\lambda^T R(\pi(T), T)$  :

$$\dot{T} = -DT + \lambda^T R(\pi(T), T) + u + \lambda^T (R(x, T) - R(\pi(T), T)) \quad (4.6)$$

On isole le terme  $R(\pi(T), T)$  de l'équation (4.4) :

$$R(\pi(T), T) = K^+(D\pi(T) - U_{in}) \quad (4.7)$$

Avec  $K^+$ , la matrice pseudo-inverse à gauche des coefficients stœchiométriques  $K$ . C'est-à-dire :  $K^+K = I_r$  ; Avec  $I_r$ , la matrice identité  $r \times r$ .

En substituant (4.7) dans (4.6), on obtient :

$$\dot{T} = -DT + \lambda^T K^+(D\pi(T) - U_{in}) + u + \lambda^T (R(x, T) - R(\pi(T), T)) \quad (4.8)$$

On pose l'erreur d'approximation suivante:

$$\Delta(x, T) = R(x, T) - R(\pi(T), T) \quad (4.9)$$

Ce terme n'est malheureusement pas disponible pour la mesure. Cependant, puisqu'il est supposé que  $x \rightarrow \pi(T)$ , donc le terme  $\Delta(x, T)$  va s'annuler asymptotiquement.

On pose l'hypothèse suivante sur cette erreur d'approximation [GUA-04]:

**Hypothèse 4.3** :  $\forall x \in S_x$  et  $\forall T \in S_T$  il existe une constante  $L_1 > 0$  tel que :

$$\|R(x, T) - R(\pi(T), T)\| \leq L_1 \|x - \pi(T)\|$$

Cette hypothèse est essentiellement une condition de continuité globale de Lipschitz sur la cinétique de réaction,  $R$ , avec une constante de Lipschitz. Cette condition est vraie si  $R$  est différentiable par rapport à  $x$ .

### IV.3 Paramétrisation des profils optimaux :

Puisque les cinétiques de réaction ne sont pas connues dans la présente étude, la stratégie consiste à approximer la fonction du profil d'équilibre  $\pi(T)$  en utilisant une technique d'approximation nonlinéaire telle que les réseaux de neurones.

Les réseaux de neurones utilisant les fonctions à bases radiales « RBF » (voire annexe B) vont être utilisés pour approximer une fonction continue  $\phi: R^p \rightarrow R$  par:

$$\phi(z) = W^* T S(z) + \mu_l(t) \quad (4.10)$$

Avec  $\mu_l(t)$  est une erreur d'approximation et

$$S(z) = [s_1(z), s_2(z), \dots, s_l(z)]^T \quad (4.11)$$

$$s_i = \exp \left[ \frac{-(z - \varphi_i)^T (z - \varphi_i)}{\sigma_i^2} \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

L'approximation est dépendante de la distribution des centres  $\varphi_i$ , et de la variance donnée à la gaussienne  $\sigma_i^2$ .

Le poids idéal est noté  $W^*$ . Les poids  $W$  appartiennent à l'ensemble  $\Omega_w$  de  $R^p$

$$\Omega_w = \{W \mid \|W\| \leq \omega_m\} \quad (4.12)$$

C'est-à-dire que la norme des poids  $W$  est bornée, avec  $\omega_m$  une constante positive choisie par le concepteur.

Les résultats étudiés à propos des approximateurs universels indiquent que si le nombre de fonctions d'approximation,  $l$ , est choisi suffisamment grand, alors on peut approximer

n'importe quelle fonction continue sur le domaine des paramètres avec la précision voulue [SPO-02]. Ainsi, on applique (4.10) pour développer une approximation de la fonction qu'on veut approximer  $y = H\pi(T)$  :

$$H\pi(T) = W_p^{*T} S(T) + \mu_p(t) \quad (4.13)$$

On suppose maintenant que l'hypothèse suivante tient pour l'approximation décrite plus haut [GUA-04]:

**Hypothèse 4.4 :** *L'erreur d'approximation de la paramétrisation satisfait  $|\mu_p(t)| \leq \bar{\mu}_p$  et  $|\mu_l(t)| \leq \bar{\mu}_l$  pour des valeurs constantes  $\bar{\mu}_p > 0$  et  $\bar{\mu}_l > 0$  sur l'ensemble compact  $\Omega_w \times S_T$ .*

Il est à noter que d'autres fonctions de base pourraient être utilisées, par exemple des fonctions d'approximation de Gram-Charlier. Cependant, elles doivent satisfaire aux différentes hypothèses établies ici. Les fonctions radiales de bases présentent un avantage de construction. De plus amples études seraient nécessaires pour mesurer l'impact du choix de type de fonctions de base.

Dans la plupart des applications, il n'est pas nécessaire de suivre tous les profils de concentration. En effet, on tente, le plus souvent, d'optimiser le profil d'un composant donné. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'estimer les paramètres  $W$  de tous les profils.

Comme les cinétiques de réactions sont supposées inconnues, on a besoin d'approximer le terme  $D\lambda^T K^+ \pi(T)$  dans l'équation de la température (4.8). Afin de garder la formulation la plus générale possible, nous allons réécrire ce terme associé à la chaleur de réaction:

$$\lambda^T K^+ \pi(T) = \lambda^T K^+ H^T W_p^{*T} S(T) + W_o^{*T} S(T) + \mu_l(t) \quad (4.14)$$

Ce résultat est démontré dans l'annexe B. Cette décomposition met en évidence deux termes : Le premier terme du membre de droite de (4.14) montre la contribution du composé chimique

à optimiser au bilan d'énergie. Le deuxième terme permet d'estimer la contribution globale des réactions au bilan d'énergie. L'équation (4.8) peut donc être réécrite par :

$$\dot{T} = -DT + \lambda^T K^+ H^T W_p^{*T} DS(T) + W_o^{*T} DS(T) + D\mu_l(t) - \lambda^T K^+ U_{in} + u + \lambda^T \Delta \quad (4.15)$$

Cette dernière équation constitue la base du développement de l'algorithme de contrôle présente à la section suivante.

#### **IV.4 Développement de l'algorithme de commande :**

Cette section décrit la solution du problème de commande adaptative par recherche d'extrémum du réacteur continu parfaitement agité. Le résultat est un algorithme de commande par retour de sortie couplé à un estimateur de paramètres en ligne. Formellement, le problème à résoudre est de la forme :

$$\max_T H\pi(T)$$

La conception de la commande et de l'estimation des paramètres, basée sur la paramétrisation présentée précédemment, est réalisée en formulant une fonction de Lyapunov et en utilisant l'information contenue dans le bilan d'énergie. Les preuves de stabilité et de convergence sont présentées à la section (IV.5).

##### **IV.4.1 Stratégie de contrôle:**

Dans cette section, on conçoit une stratégie de contrôle qui va trouver l'optimum inconnu de la fonction  $y$ .

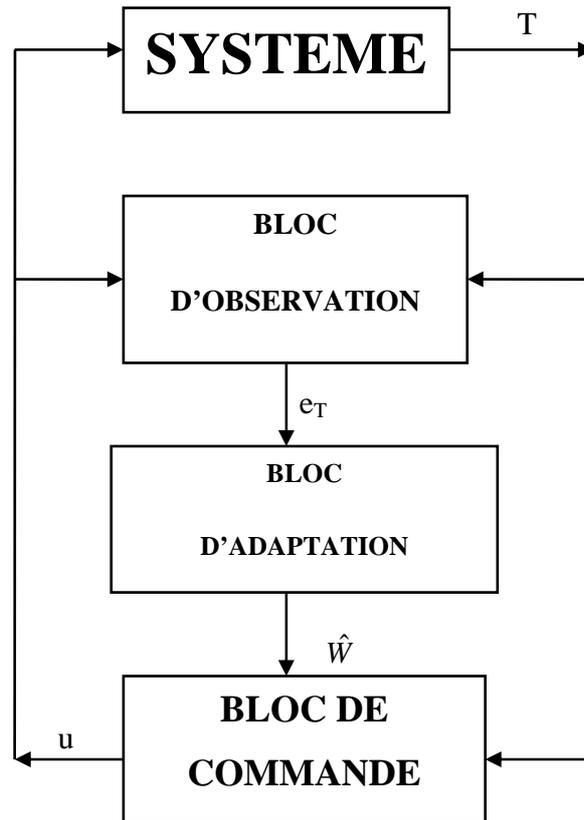


Figure (4.1) - Schéma bloc de la synthèse de la commande

En premier lieu, un observateur est conçu afin d'estimer la température du réacteur. À partir de cette estimée et de l'erreur de prédiction, on élabore un algorithme d'adaptation des paramètres inconnus  $W$ , qui garantit la convergence vers les valeurs réelles. Et on synthétise une loi de commande en se basant sur le théorème de stabilité de Lyapunov.

#### IV.4.2 Estimation de la température :

Soit l'équation dynamique de la température (4.15) :

$$\dot{T} = -DT + \lambda^T K^+ H^T W_p^{*T} DS(T) + W_o^{*T} DS(T) + D\mu_l(t) - \lambda^T K^+ U_{in} + u + \lambda^T \Delta$$

On réécrit cette équation de la manière suivante :

$$\dot{T} = -DT + F(T)W^* + D\mu_l(t) - \lambda^T K^+ U_{in} + u + \lambda^T \Delta(x, T) \quad (4.16)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Delta(x, T) &= R(x, T) - R(\pi(T), T) \\ F(T) &= [DS(T)^T, \lambda^T K^+ H^T S(T)^T] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$W^{*T} = [W_p^{*T}, W_o^{*T}] \quad (4.18)$$

À partir de l'observation de la température  $T$ , on se propose de reconstruire la concentration du produit à optimiser, non mesurable, qui, dans ce cas là est approximée par un approximateur universel. Pour cela, on va élaborer un observateur qui sera un système dynamique alimenté par la commande  $u$  et l'observation de la température  $T$ .

Les vrais poids  $W^*$ , qui sont inconnus sont estimés par  $\widehat{W}$ . Dans l'équation suivante la température estimée  $\widehat{T}$  est décrite par [GUA-04]:

$$\dot{\widehat{T}} = -D\widehat{T} + F(T)\widehat{W} - \lambda^T K^+ U_{in} + u + k_T(T - \widehat{T}) + c_1(t)^T \widehat{W} \quad (4.19)$$

Avec le gain sur la température  $k_T > 0$  et l'erreur d'estimation  $e_T = T - \widehat{T}$ .

Le vecteur  $c_1(t)^T$  est un signal variant dans le temps qui sera conçu par la suite.

En utilisant les équations (4.16) et (4.19), on calcule la dynamique de l'erreur d'estimation :

$$\dot{e}_T = F(T)\widetilde{W} + D\mu_l(t) - k_T e_T + \lambda^T \Delta(x, T) - c_1(t)^T \widehat{W} \quad (4.20)$$

Où  $\widetilde{W} = W^* - \widehat{W}$  est l'erreur d'estimation des poids.

L'objectif du control extrémal est de stabiliser le système en boucle fermée autour d'un point où le gradient de la fonction à optimiser par rapport à la température s'annule tout en essayant d'atténuer l'effet de l'erreur d'approximation  $\mu_l(t)$ .

### IV.3.3- Conception du contrôleur :

On développe maintenant l'algorithme d'estimation des paramètres. L'estimation de la fonction à optimiser :  $H\pi(T) = W_p^{*T} S(T) + \mu_p(t)$  peut s'écrire [GUA-04]:

$$y_e = \widehat{W}_p^T S(T) \quad (4.21)$$

Où  $\widehat{W}_p$  est l'estimé du poids optimal  $W_p^*$ .

L'expression du gradient de la fonction objectif par rapport à la température,  $T$ , est égal à :

$$z = \frac{\partial y_e}{\partial T} = \widehat{W}_p^T dS(T) \quad (4.22)$$

$$\text{Où : } dS(T) = \frac{\partial S(T)}{\partial T}$$

Et le Hessien de  $y_e$  par rapport à  $T$  s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 y_e}{\partial T^2} = \widehat{W}_p^T d^2 S(T) = \Gamma_2 \quad (4.23)$$

$$\text{Où : } d^2 S(T) = \frac{\partial^2 S(T)}{\partial T^2}$$

A partir du gradient estimé, on définit un signal auxiliaire :

$$z_s = \widehat{W}_p^T dS(T) - d(t) \quad (4.24)$$

Avec  $d(t)$ , un signal de superposition qui sera développé dans la suite. C'est un signal d'excitation qui est introduit dans la boucle interne de la commande.

Le contrôleur extrémal a donc deux objectifs. Premièrement, le gradient estimé et perturbé avec un signal interne, doit converger vers le vrai gradient du système. Et deuxièmement, ce gradient estimé doit converger vers un voisinage petit de l'origine

Dans le but de faire la conception de la loi de commande et de l'estimateur, on définit aussi deux signaux auxiliaires faisant intervenir l'erreur d'approximation [GUA-04]:

$$\eta_1 = e_T - c_1(t)^T \widetilde{W} \quad (4.25)$$

$$\eta_2 = z_s - c_2(t)^T \widetilde{W} \quad (4.26)$$

Où  $\widetilde{W} = W^* - \widehat{W}$  est l'erreur d'estimation sur les paramètres.  $c_1(t)^T$  et  $c_2(t)^T$  sont deux signaux variant dans le temps.

On propose la fonction de Lyapunov (Annexe A) suivante :

$$V = \frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \eta_2^2 \quad (4.27)$$

C'est une fonction définie positive, qui va nous aider à atteindre nos objectifs qui sont :

- Convergence du gradient :  $z_s \rightarrow 0$
- Convergence de l'erreur de prédiction :  $e_T \rightarrow 0$
- Convergence de l'erreur sur les poids estimés:  $\widetilde{W} \rightarrow 0$

L'objectif que de trouver la commande pour que cette fonction soit décroissante, pour démontrer en premier lieu que les états  $\eta_1$  et  $\eta_2$  convergent vers un petit voisinage de l'origine.

La dérivée de la fonction  $V$  par rapport au temps donne :

$$\dot{V} = \eta_1 \dot{\eta}_1 + \eta_2 \dot{\eta}_2 \quad (4.28)$$

On calcule les deux termes de la dérivée séparément ; en premier lieu, on calcule le terme  $\eta_1 \dot{\eta}_1$  ; par définition de  $\eta_1$  on a :

$$\eta_1 \dot{\eta}_1 = \eta_1 \left( \dot{e}_T - \dot{c}_1(t)^T \tilde{W} - c_1(t)^T \dot{\tilde{W}} \right) \quad (4.29)$$

Par définition de  $\tilde{W}$  on a :

$$\dot{\tilde{W}} = \dot{W} - \dot{\hat{W}} \quad (4.30)$$

Sachant que les paramètres  $W$  sont lentement variables par rapport à  $\hat{W}$  donc :

$$\dot{W} = 0 \quad (4.31)$$

$$\dot{\tilde{W}} = -\dot{\hat{W}} \quad (4.32)$$

En substituant l'équation (4.32) et par définition de l'équation de  $\dot{e}_T$  (4.20), (4.29) devient :

$$\eta_1 \dot{\eta}_1 = \eta_1 \left( F(T) \tilde{W} + D\mu_l(t) - k_T e_T + \lambda^T \Delta(x, T) - \dot{c}_1(t)^T \tilde{W} \right) \quad (4.33)$$

On définit le signal  $c_1(t)^T$  avec l'équation dynamique suivante [GUA-04].:

$$\dot{c}_1(t)^T = -k_T c_1(t)^T + F(T) \quad (4.34)$$

Où  $k_T > 0$  est un gain. La dynamique de ce signal va permettre d'éliminer les termes incertains  $\tilde{W}$  et d'écrire le reste en fonction de l'état  $\eta_1$ . En substituant (4.34) dans (4.33) on aura :

$$\eta_1 \dot{\eta}_1 = \eta_1 \left( F(T) \tilde{W} + D\mu_l(t) - k_T e_T + \lambda^T \Delta + k_T c_1(t)^T \tilde{W} - F(T) \tilde{W} \right)$$

En simplifiant et en utilisant la définition de  $\eta_1$ , on aura:

$$\eta_1 \dot{\eta}_1 = -k_T \eta_1^2 + \eta_1 (D\mu_l(t) + \lambda^T \Delta) \quad (4.35)$$

On calcule en deuxième lieu  $\eta_2 \dot{\eta}_2$ ; par définition de  $\eta_2$  on aura :

$$\eta_2 \dot{\eta}_2 = \eta_2 \left( \Gamma_2 \dot{T} + \hat{W}_p^T dS - \dot{d}(t) - \dot{c}_2(t)^T \tilde{W} - c_2(t)^T \dot{\hat{W}} \right) \quad (4.36)$$

Sachant l'équation (4.32) :

$$\eta_2 \dot{\eta}_2 = \eta_2 \left( \Gamma_2 \dot{T} + \hat{W}_p^T dS - \dot{d}(t) - \dot{c}_2(t)^T \tilde{W} + c_2(t)^T \dot{\hat{W}} \right) \quad (4.37)$$

En substituant l'équation dynamique de la température (4.16)

$$\eta_2 \dot{\eta}_2 = \eta_2 \left( \Gamma_2 (-DT + F(T)W^* + D\mu_l(t) - \lambda^T K^+ U_{in} + u + \lambda^T \Delta) + \hat{W}_p^T dS - \dot{d}(t) - \dot{c}_2(t)^T \tilde{W} + c_2(t)^T \dot{\hat{W}} \right) \quad (4.38)$$

Une solution est apportée afin de résoudre le problème de l'extremum en proposant la loi de commande dynamique suivante [GUA-04].:

$$\dot{c}_2(t)^T = -k_z c_2(t)^T + \Gamma_2 F(T) \quad (4.39)$$

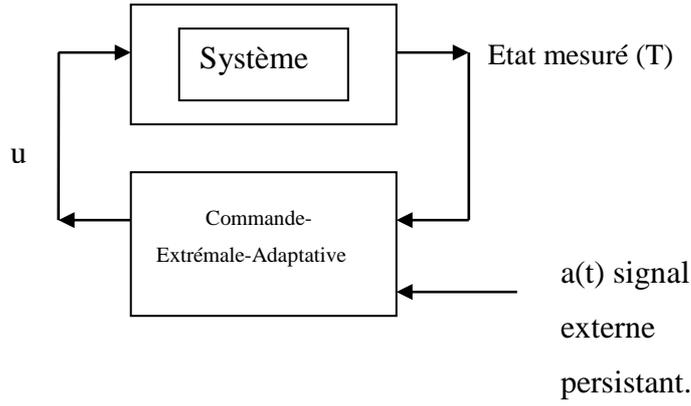
$$\dot{d}(t) = c_2(t)^T \dot{\hat{W}} + k_z z_s - k_d |\Gamma_2| d(t) - \Gamma_2 a(t) + \hat{W}_p^T dS \quad (4.40)$$

$$u = DT - F(T)\hat{W} + \lambda^T K^+ U_{in} - k_d \text{sgn}(\Gamma_2) d(t) - a(t) \quad (4.41)$$

Avec les gains  $k_d > 0$  et  $k_z > 0$ .

La dynamique du signal  $c_2(t)^T$  permet d'éliminer les termes incertains  $\tilde{W}$ .

Le signal persistant  $a(t)$  est introduit dans la boucle afin d'exciter toute la dynamique du système, et permet l'identification des paramètres. Comme le montre la figure (4.2) ce signal est externe à la boucle de réglage [BEL-04].



**Figure (4.2) - Schéma bloc du bouclage avec introduction du signal a(t)**

Après substitution des lois (4.40)-(4.41) dans (4.38), on obtient :

$$\begin{aligned} \eta_2 \dot{\eta}_2 = & \eta_2 \left( \Gamma_2 (-DT + F(T)W^* + D\mu_l(t) - \lambda^T K^+ U_{in} + DT - F(T)\hat{W}) \right. \\ & + \lambda^T K^+ U_{in} - k_d \operatorname{sgn}(\Gamma_2) d(t) - a(t) + \lambda^T \Delta + \hat{W}_p^T dS \\ & - \left( c_2(t)^T \hat{W} + k_z z_s - k_d |\Gamma_2| d(t) - \Gamma_2 a(t) + \hat{W}_p^T dS \right) - \dot{c}_2(t)^T \tilde{W} \\ & \left. + c_2(t)^T \dot{\hat{W}} \right) \end{aligned}$$

Sachant que :  $|\Gamma_2| - \operatorname{sgn}(\Gamma_2)\Gamma_2 = 0$  et en utilisant la définition  $\tilde{W}$  :

$$\eta_2 \dot{\eta}_2 = \eta_2 (\Gamma_2 (F(T)\tilde{W} + D\mu_l(t) + \lambda^T \Delta) - k_z z_s - \dot{c}_2(t)^T \tilde{W}) \quad (4.42)$$

En substituant la loi (4.39), et en utilisant la définition de  $\eta_2$ , on obtient :

$$\eta_2 \dot{\eta}_2 = -k_z \eta_2^2 + \eta_2 \Gamma_2 (D\mu_l(t) + \lambda^T \Delta) \quad (4.43)$$

On peut finalement écrire la dérivée de la fonction de Lyapunov en utilisant (4.35) et (4.43):

$$\dot{V} = -k_T \eta_1^2 - k_z \eta_2^2 + (\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) (D\mu_l(t) + \lambda^T \Delta) \quad (4.44)$$

En isolant le terme contenant l'erreur d'approximation  $\Delta$  :

$$\dot{V} = -k_T \eta_1^2 - k_z \eta_2^2 + (\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) D\mu_l(t) + (\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) \lambda^T \Delta \quad (4.45)$$

Sachant que :

$$(\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) \lambda^T \Delta \leq \|(\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) \lambda^T \Delta\| \quad (4.46)$$

et :

$$\|\lambda^T \Delta\| \leq \|\lambda^T\| \|\Delta\| \quad (4.47)$$

Et en appliquant l'inégalité triangulaire sur le scalaire associé au terme  $\lambda^T \Delta$  :

$$|\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2| \leq |\eta_1| + |\eta_2 \Gamma_2| \quad (4.48)$$

L'équation (4.45) devient :

$$\dot{V} \leq -k_T \eta_1^2 - k_z \eta_2^2 + (\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) D \mu_l(t) + (|\eta_1| + |\eta_2| |\Gamma_2|) \|\lambda\| \|\Delta\| \quad (4.49)$$

En appliquant la condition de Lipschitz spécifiée dans l'hypothèse 4.3 à (4.49) :

$$\dot{V} \leq -k_T \eta_1^2 - k_z \eta_2^2 + (\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) D \mu_l(t) + (|\eta_1| + |\eta_2| |\Gamma_2|) \|\lambda\| L_1 \|x - \pi(T)\| \quad (4.50)$$

Sachant que le maximum existe est unique, on peut en déduire que:

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_x, T \in \mathcal{S}_T} \|x - \pi(T)\| = C_1 \quad (4.51)$$

On substitue (4.51) dans (4.50) :

$$\dot{V} \leq -k_T \eta_1^2 - k_z \eta_2^2 + (\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) D \mu_l(t) + (|\eta_1| + |\eta_2| |\Gamma_2|) \|\lambda\| L_1 C_1 \quad (4.52)$$

On définit les gains  $k_T$ ,  $k_z$  comme étant :

$$k_T = k_{T0} + \frac{k_4}{2} D^2 + \frac{k_5}{2} \|\lambda\|^2 \quad (4.53)$$

$$k_z = k_{z0} + \frac{k_6}{2} D^2 \Gamma_2^2 + \frac{k_7}{2} \|\lambda\|^2 \Gamma_2^2 \quad (4.54)$$

Avec  $k_{T0} > 0$  et  $k_{z0} > 0$  ainsi que  $k_4, k_5, k_6, k_7$  qui sont aussi strictement positifs.

En substituant les lois (4.53)-(4.54) dans (4.52) :

$$\dot{V} \leq -k_{T0} \eta_1^2 - k_{z0} \eta_2^2 + \left[ -\frac{k_4}{2} D^2 \eta_1^2 - \frac{k_6}{2} D^2 \Gamma_2^2 \eta_2^2 + (\eta_1 + \eta_2 \Gamma_2) D \mu_l(t) \right] + \left[ -\frac{k_5}{2} \|\lambda\|^2 \eta_1^2 - \frac{k_7}{2} \|\lambda\|^2 \Gamma_2^2 \eta_2^2 + (|\eta_1| + |\eta_2| |\Gamma_2|) \|\lambda\| L_1 C_1 \right] \quad (4.55)$$

En complétant les carrés dans cette dernière équation:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} \leq & -k_{T0}\eta_1^2 - k_{z0}\eta_2^2 \\
 & + \left[ -\frac{k_4}{2} \left( D\eta_1 - \frac{\mu_l(t)}{k_4} \right)^2 - \frac{k_6}{2} \left( D\Gamma_2\eta_2 - \frac{\mu_l(t)}{k_6} \right)^2 + \left( \frac{1}{2k_6} + \frac{1}{2k_4} \right) \mu_l(t)^2 \right] \\
 & + \left[ -\frac{k_5}{2} \left( \|\lambda\| |\eta_2| - \frac{L_1 C_1}{k_5} \right)^2 - \frac{k_7}{2} \left( \|\lambda\| |\Gamma_2\eta_2| - \frac{L_1 C_1}{k_7} \right)^2 + \left( \frac{1}{2k_5} + \frac{1}{2k_7} \right) L_1^2 C_1^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

On peut donc finalement déduire que :

$$\dot{V} \leq -k_{T0}\eta_1^2 - k_{z0}\eta_2^2 + \left( \frac{1}{2k_6} + \frac{1}{2k_4} \right) \mu_l(t)^2 + \left( \frac{1}{2k_5} + \frac{1}{2k_7} \right) L_1^2 C_1^2 \tag{4.57}$$

On pose :

$$\rho_V = \left( \frac{1}{2k_6} + \frac{1}{2k_4} \right) \mu_l(t)^2 + \left( \frac{1}{2k_5} + \frac{1}{2k_7} \right) L_1^2 C_1^2 \tag{4.58}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit comme :

$$\dot{V} \leq -k_{T0}\eta_1^2 - k_{z0}\eta_2^2 + \rho_V \tag{4.59}$$

Avec :  $\rho_V > 0$  ,  $k_{T0} > 0$  et  $k_{z0} > 0$ .

La constante  $\rho_V$  peut être réduite en ajustant les gains  $k_4$ ,  $k_5$ ,  $k_6$ ,  $k_7$ , ou bien en augmentant le nombre de fonctions de bases dans le réseau d'approximation, qui réduit ainsi la valeur de  $\mu_l(t)$ .

L'équation (4.59) permet de déduire que les états  $\eta_1$  et  $\eta_2$  converge vers un petit voisinage de l'origine, on va prouver cette convergence dans la section (IV.5.1). Mais, ceci ne complète pas le travail, puisque il reste le gradient estimé  $z_s$  et l'erreur sur la température  $e_T$  qui doivent aussi converger vers un voisinage de l'origine.

#### IV.4.4 Loi d'adaptation paramétrique :

Comme le gradient estimé  $z_s$  et l'erreur sur la température  $e_T$  dépendent de l'estimation des paramètres  $\hat{W}$ , il n'est pas suffisant de montrer qu'ils tendent vers un voisinage de l'origine pour en établir la convergence. Il faut d'abord établir, à l'aide d'une condition d'excitation persistante, la convergence de  $\hat{W}$  vers la valeur des paramètres optimaux  $W^*$ .

On considère le vecteur suivant :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1(t)^T \\ c_2(t)^T \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Par construction, en utilisant les lois de deux signaux (4.34) et (4.39), ce vecteur solutionne le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{Y}(t) = -\kappa(t)Y(t) + B(t) \quad (4.61)$$

Avec :

$$\kappa(t) = \begin{bmatrix} k_T & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} F(T) \\ \Gamma_2 F(T) \end{bmatrix}$$

Une borne sur les estimés des paramètres  $\hat{W}$  peut être assurée en choisissant la loi d'estimation des paramètres suivante :

$$\dot{\hat{W}} = \begin{cases} \gamma_\omega \Gamma & \text{si } \|\hat{W}\| \leq \omega_m \text{ ou } \|\hat{W}\| = \omega_m \text{ et } \hat{W}^T \Gamma \leq 0 \\ \gamma_\omega \left( I - \frac{\hat{W}\hat{W}^T}{\hat{W}^T \hat{W}} \right) \Gamma & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.62)$$

Avec :

$$\Gamma = Y(t)^T e$$

et

$$e = \begin{bmatrix} e_T \\ z_s \end{bmatrix}$$

L'équation (4.62) est un algorithme de projection qui assure que les paramètres sont bornés  $\widehat{W}$ :  $\|\widehat{W}\| \leq \omega_m$ . [KRS-95].

L'hypothèse fondamentale qui suit définit la persistance d'excitation, on utilisera cette hypothèse pour démontrer la convergence des paramètres  $\widehat{W}$ . [GUA-04].

**Hypothèse 4.5 :** *La solution de l'équation (4.61) est telle qu'il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $k_N > 0$  telles que :*

$$\int_t^{t+\alpha} Y(\tau)^T Y(\tau) d\tau \geq k_N I_N$$

Où  $I_N$  est la matrice d'identité de dimension  $N$ .

## IV.5 Analyse de la convergence et stabilité du système en boucle fermée:

### IV.5.1 Convergence de l'état $\eta$ :

Reprenons l'équation (4.57) :

$$\dot{V} \leq -k_{T0}\eta_1^2 - k_{z0}\eta_2^2 + \left(\frac{1}{2k_4} + \frac{1}{2k_6}\right)\mu_l(t)^2 + \left(\frac{1}{2k_5} + \frac{1}{2k_7}\right)L_1^2 C_1^2$$

On suppose pour prouver la convergence que les gains  $k_{T0} = k_{z0}$ ,  $k_4 = k_5$  et  $k_6 = k_7$ .

Donc, on peut réécrire l'équation (4.57) s'écrit sous la forme :

$$\dot{V} \leq -k_{z0}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \left(\frac{1}{2k_4} + \frac{1}{2k_6}\right)(\mu_l(t)^2 + L_1^2 C_1^2) \quad (4.63)$$

En utilisant la définition de  $V$ , on écrit l'équation précédente sous une forme standard:

$$\dot{V} \leq -2k_{z0}V + \left(\frac{1}{2k_4} + \frac{1}{2k_6}\right)(\mu_l(t)^2 + L_1^2 C_1^2) \quad (4.64)$$

En intégrant cette inégalité différentielle (Annexe C) :

$$V \leq V(t_0)e^{-2k_{z0}(t-t_0)} + \frac{1}{2k_{z0}}\left(\frac{1}{2k_4} + \frac{1}{2k_6}\right)c_3 \quad (4.65)$$

Avec :  $c_3 = \sup_{t \geq t_0} (\mu_l(t)^2 + L_1^2 C_1^2)$

En utilisant l'inégalité triangulaire (4.65) devient:

$$V \leq V(t_0)e^{-2k_{z0}(t-t_0)} + \frac{1}{2k_{z0}} \left( \frac{1}{2k_4} + \frac{1}{2k_6} \right) (|\bar{\mu}_l|^2 + L_1^2 C_1^2) \quad (4.66)$$

Sachant la définition de  $V$  :

$$V = \frac{1}{2} \|\eta\|^2 \quad (4.67)$$

En remplaçant cette définition dans (4.66) :

$$\|\eta\|^2 \leq 2V(t_0)e^{-2k_{z0}(t-t_0)} + \frac{1}{k_{z0}} \left( \frac{1}{2k_4} + \frac{1}{2k_6} \right) (|\bar{\mu}_l|^2 + L_1^2 C_1^2) \quad (4.68)$$

On peut en tirer la norme de  $\eta$ , en passant à la racine carrée et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|\eta\| \leq \sqrt{2V(t_0)}e^{-k_{z0}(t-t_0)} + \sqrt{\frac{1}{k_{z0}} \left( \frac{1}{2k_4} + \frac{1}{2k_6} \right) (|\bar{\mu}_l| + L_1 C_1)} \quad (4.69)$$

On pose :

$$m = \frac{k_4 k_6}{k_4 + k_6} \quad (4.70)$$

On aura finalement :

$$\|\eta\| \leq \sqrt{2V(t_0)}e^{-k_{z0}(t-t_0)} + \frac{1}{\sqrt{2k_{z0}m}} (|\bar{\mu}_l| + L_1 C_1) \quad (4.71)$$

On pose :  $\alpha_3 = \sqrt{2V(t_0)}$  et  $\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2k_{z0}m}} (|\bar{\mu}_l| + L_1 C_1)$  :

$$\|\eta\| \leq \alpha_3 e^{-k_{z0}(t-t_0)} + \beta_3 \quad (4.72)$$

Cette équation définit la convergence de l'état  $\eta$ , en effet en passant à la limite  $t \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta\| \leq \frac{1}{\sqrt{2k_{z0}m}} (|\bar{\mu}_l| + L_1 C_1) \quad (4.73)$$

Cette équation établit une estimation sur la norme de l'état  $\eta$  à l'infini. Ceci établit que l'état  $\eta$  converge vers un petit voisinage de l'origine. Le terme à droite de l'inégalité peut être réduit en ajustant les gains  $k_{z0}$  et  $m$ .

#### IV.4.2 Convergence du vecteur des signaux filtres $Y$ :

On prouve la convergence du vecteur des signaux filtres  $Y(t)$  :

On rappelle l'équation matricielle (4.61) :

$$\dot{Y}(t) = -\kappa(t)Y(t) + B(t)$$

La norme de  $B(t)$  peut être bornée comme suit. La borne est tout d'abord calculée :

$$\|B(t)\|^2 = \|F(T)\|^2 + \|\Gamma_2 F(T)\|^2 \quad (4.74)$$

En passant à la racine carrée, et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|B(t)\| \leq \|F(T)\| + \|\Gamma_2 F(T)\| \quad (4.75)$$

Les normes de  $\Gamma_2$  et  $F(T)$  sont données en utilisant leurs définitions par :

$$|\Gamma_2| \leq \|\widehat{W}\| \|d^2S(T)\| \quad (4.76)$$

$$\|F(T)\| = \sqrt{D^2 + (\lambda^T K + H^T)^2} \|S(T)\| \quad (4.77)$$

On a besoin d'une estimation sur les normes des fonctions de bases choisies.

Les dérivées premières et secondes  $dS(T)$  et  $d^2S(T)$  sont données en dérivant l'équation décrivant la fonction de base gaussienne :

$$s_i = \exp\left[\frac{-(T - \varphi_i)^2}{\sigma_i^2}\right] \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial s_i}{\partial T} = -2 \frac{(T - \varphi_i)}{\sigma_i^2} \exp\left[\frac{-(T - \varphi_i)^2}{\sigma_i^2}\right] \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial^2 s_i}{\partial T^2} = \left(-2 \frac{1}{\sigma_i^2} + 4 \frac{(T - \varphi_i)^2}{\sigma_i^4}\right) \exp\left[\frac{-(T - \varphi_i)^2}{\sigma_i^2}\right] \quad (4.80)$$

Dans le cas particulier des bases choisies dans l'approximation utilisée ici, nous avons :

$$\|S\| \leq \sqrt{N} \quad (4.81)$$

où  $N$  est le nombre de de fonctions de bases utilisées dans l'approximation. Il en suit que:

$$\|dS\| \leq 2 \sqrt{\frac{NT_U}{\sigma_m^2}} \quad (4.82)$$

$$\|d^2S\| \leq 2 \sqrt{\frac{N}{\sigma_m^2}} + 4\sqrt{N} \frac{T_U}{\sigma_m^2} \quad (4.83)$$

Et  $T_U$  la borne superieure de  $T$  dans l'ensemble compact et  $S_T$  et :

$$\sigma_m = \min_{1 \leq i \leq N} \{\sigma_i\} \quad (4.84)$$

Les centres  $\varphi_i$  sont supposés appartenant à l'ensemble compact  $S_T$ .

On peut finalement borner les normes de  $\Gamma_2$  et  $F(T)$  comme suit :

$$|\Gamma_2| \leq \omega_m \left( 2 \sqrt{\frac{N}{\sigma_m^2}} + 4\sqrt{N} \frac{T_U}{\sigma_m^2} \right) \quad (4.85)$$

$$\|F(T)\| \leq \sqrt{D^2 + (\lambda^T K + H^T)^2} \sqrt{N} \quad (4.86)$$

On substitue ces deux dernières équations dans (4.75) :

$$\|B(t)\| \leq \left( \sqrt{D^2 + (\lambda^T K + H^T)^2} \sqrt{N} \left( 1 + \omega_m \left( 2 \sqrt{\frac{N}{\sigma_m^2}} + 4\sqrt{N} \frac{T_U}{\sigma_m^2} \right) \right) \right) = B_M \quad (4.87)$$

La résolution de l'équation (4.61) donnera finalement :

$$\|Y(t)\| \leq \|Y(t_0)\| e^{-\lambda_2(t-t_0)} + \frac{B_M}{\lambda_2} = \alpha_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)} + \beta_2 \quad (4.88)$$

Avec  $\lambda_2 > 0$ .

### IV.5.3 Convergence des poids estimés $\widehat{W}$ :

On prouve maintenant la convergence des poids de l'approximateur universel.

En utilisant la définition de de  $\tilde{W}$  on a:

$$\dot{\tilde{W}} = -\hat{W}$$

On substitue l'algorithme d'adaptation paramétrique décrit par (4.64):

$$\dot{\tilde{W}} = - \begin{cases} \gamma_\omega \Gamma & \text{si } \|\hat{W}\| \leq \omega_m \text{ ou } \|\hat{W}\| = \omega_m \text{ et } \hat{W}^T \Gamma \leq 0 \\ \gamma_\omega \left( I - \frac{\hat{W}\hat{W}^T}{\hat{W}^T \hat{W}} \right) \Gamma & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.89)$$

Sachant que :  $\Gamma = Y(t)^T e$  et  $e = \begin{bmatrix} e_T \\ z_S \end{bmatrix}$ .

Des définitions des états (4.25)-(4.26) on a :

$$e = \eta + Y(t)\tilde{W} \quad (4.90)$$

Après substitution de cette dernière équation, la dynamique de l'erreur sur les paramètres d'estimation est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}} &= -\gamma_\omega Y(t)^T Y(t)\tilde{W} - \gamma_\omega Y(t)^T \eta \\ &+ \begin{cases} 0 & \text{si } \|\hat{W}\| \leq \omega_m \text{ ou } \|\hat{W}\| = \omega_m \text{ et } \hat{W}^T \Gamma \leq 0 \\ \gamma_\omega \frac{\hat{W}\hat{W}^T}{\hat{W}^T \hat{W}} (Y(t)^T Y(t)\tilde{W} + Y(t)^T \eta) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Dans ce qui suit, on montre que sous certaines hypothèses, la dynamique de l'erreur sur les paramètres d'estimation du système non-perturbé (c'est-à-dire  $\eta(t) \equiv 0$ ) est exponentiellement stable. A cette fin, on utilise l'hypothèse 4.5 de persistance d'excitation.

Le résultat suivant sera requis pour la suite du développement [GUA-04].

On considère l'équation différentielle vectorielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -\phi^T(t)\phi(t)x(t) \quad (4.92)$$

et on fait l'hypothèse qu'il existe  $\alpha > 0$  et  $k_N > 0$  tel que :

$$\int_t^{t+\alpha} \phi^T(\tau)\phi(\tau)d\tau \geq k_N I_N \quad (4.93)$$

alors l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système.

Ce résultat établit que l'origine de l'équation différentielle:

$$\dot{\tilde{W}} = -(\Upsilon(t)^T \Upsilon(t)) \tilde{W} \quad (4.94)$$

est un équilibre exponentiellement stable.

Pour cela on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_\omega = \frac{1}{2} \tilde{W}^T \tilde{W} \quad (4.95)$$

La dérivée de cette fonction, en considérant les états  $\eta$  non perturbés  $\eta(t) \equiv 0$  et en prenant compte de l'hypothèse de persistance d'excitation, est telle que :

$$\dot{V}_\omega = -\gamma_\omega \tilde{W}^T (\Upsilon(t)^T \Upsilon(t)) \tilde{W} \leq -c \gamma_\omega \|\tilde{W}\|^2 \quad (4.96)$$

Avec  $c > 0$ .

Le taux de variation de  $V_\omega$  le des trajectoires du système (4.95) est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\omega &= -\gamma_\omega \tilde{W}^T \Upsilon(t)^T \Upsilon(t) \tilde{W} - \gamma_\omega \tilde{W}^T \Upsilon(t)^T \eta \\ &+ \begin{cases} 0 & \text{si } \|\hat{W}\| \leq \omega_m \text{ ou } \|\hat{W}\| = \omega_m \text{ et } \hat{W}^T \Gamma \leq 0 \\ \gamma_\omega \tilde{W}^T \frac{\hat{W} \hat{W}^T}{\hat{W}^T \hat{W}} (\Upsilon(t)^T \Upsilon(t) \tilde{W} + \Upsilon(t)^T \eta) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.97)$$

En utilisant les propriétés de l'algorithme de projection, on obtient que :

$$\dot{V}_\omega \leq -\tilde{W}^T \gamma_\omega \Upsilon(t)^T \Upsilon(t) \tilde{W} - \gamma_\omega \tilde{W}^T \Upsilon(t)^T \eta \quad (4.98)$$

On ajoute et retranche le terme  $\frac{1}{2} \gamma_\omega \eta^T \eta$  :

$$\dot{V}_\omega \leq -2 \frac{1}{2} \gamma_\omega (\Upsilon(t) \tilde{W})^T (\Upsilon(t) \tilde{W}) - \gamma_\omega \tilde{W}^T \Upsilon(t)^T \eta + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \gamma_\omega \eta^T \eta \quad (4.99)$$

On complète les carrés :

$$\dot{V}_\omega \leq -\frac{1}{2}\gamma_\omega(Y(t)\tilde{W})^T(Y(t)\tilde{W}) + \frac{1}{2}\gamma_\omega\eta^T\eta - \frac{1}{2}\gamma_\omega(\eta + \tilde{W}^TY(t)^T)^T(\eta + \tilde{W}^TY(t)^T) \quad (4.100)$$

On peut finalement écrire :

$$\dot{V}_\omega \leq -\frac{1}{2}\gamma_\omega\tilde{W}^T(Y(t)^TY(t))\tilde{W} + \frac{1}{2}\gamma_\omega\eta^T\eta \quad (4.101)$$

Par stabilité exponentielle décrite dans l'équation (4.96) :

$$\dot{V}_\omega \leq -\frac{c}{2}\gamma_\omega^2\|\tilde{W}\|^2 + \frac{1}{2}\gamma_\omega\eta^T\eta \quad (4.102)$$

En utilisant la définition de  $V_\omega$  et  $\|\eta\|$ , on aura l'équation sous forme standard:

$$\dot{V}_\omega \leq -c\gamma_\omega^2V_\omega + \frac{1}{2}\gamma_\omega\|\eta\|^2 \quad (4.103)$$

En remplaçant l'estimation de  $\|\eta\|^2$  décrite dans l'équation (4.68) :

$$\dot{V}_\omega \leq -c\gamma_\omega^2V_\omega + \gamma_\omega V(t_0)e^{-2k_{z0}(t-t_0)} + \frac{1}{4mk_{z0}}\gamma_\omega(|\bar{\mu}_l|^2 + L_1^2C_1^2)$$

On pose :  $C_2 = \frac{1}{4mk_{z0}}\gamma_\omega(|\bar{\mu}_l|^2 + L_1^2C_1^2)$ . En intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} V_\omega(t) \leq & \frac{V(t_0)\gamma_\omega}{c\gamma_\omega^2 - 2k_{z0}}(e^{-2k_{z0}(t-t_0)} - e^{-c\gamma_\omega^2(t-t_0)}) + \frac{C_2}{c\gamma_\omega^2}(1 - e^{-c\gamma_\omega^2(t-t_0)}) \\ & + V_\omega(t_0)e^{-c\gamma_\omega^2(t-t_0)} \end{aligned} \quad (4.104)$$

En simplifiant, on obtient :

$$V_\omega(t) \leq \theta_1 e^{-\theta_2(t-t_0)} + \frac{C_2}{c\gamma_\omega^2} \quad (4.105)$$

Avec :

$$\theta_1 = \max\left[\frac{V(t_0)}{c\gamma_\omega^2 - 2k_{z0}}, V_\omega(t_0)\right]$$

$$\theta_2 = \min[2k_{z0}, c\gamma_\omega^2]$$

En utilisant la définition de  $V_\omega(t)$  et en passant à la racine carrée :

$$\|\tilde{W}\| \leq \sqrt{2\gamma_\omega\theta_1} e^{-\frac{\theta_2}{2}(t-t_0)} + \frac{1}{\sqrt{2k_{z0}m c\gamma_\omega}} (|\bar{\mu}_l| + L_1 C_1) \quad (4.106)$$

On pose :  $\alpha_4 = \sqrt{2\gamma_\omega\theta_1}$  et  $\beta_4 = \frac{(|\bar{\mu}_l| + L_1 C_1)}{\sqrt{2k_{z0}m c\gamma_\omega}}$  et  $c_3 = c\gamma_\omega$

$$\|\tilde{W}\| \leq \alpha_4 e^{-\lambda_4(t-t_0)} + \beta_4 \quad (4.107)$$

Cette équation définit la convergence de l'erreur d'estimation, en effet en passant à la limite  $t \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{W}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2k_{z0}m c_3}} (|\bar{\mu}_l| + L_1 C_1) \quad (4.108)$$

Cette équation établit une estimation sur la norme des erreurs d'estimation. Ceci établit que le vecteur de l'erreur d'estimation des paramètres converge vers un petit voisinage de l'origine. Le terme à droite de l'inégalité peut être réduit en ajustant les gains  $k_{z0}$  et  $m$  et  $\gamma_\omega$ .

#### IV.5.4 Convergence du vecteur $e$ :

On prouve à présent la convergence, du gradient estimé et de l'erreur de prédiction sur la température :

Sachant la définition du vecteur  $e$  :  $e = \eta + Y(t)\tilde{W}$

On passe à la norme:

$$\|e\| \leq \|\eta\| + \|\tilde{W}\| \|Y(t)\| \quad (4.109)$$

En utilisant les équations (4.88), (4.72) et (4.107), on aura :

$$\|e\| \leq \alpha_5 e^{-\lambda_5(t-t_0)} + \beta_5 \quad (4.110)$$

Avec :

$$\lambda_5 = \min\{k_{z0}, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_4\}$$

$$\alpha_5 = \max\{\alpha_3, \alpha_4\alpha_2, \alpha_4\beta_2, \alpha_2\beta_4\}$$

$$\beta_5 = \beta_4\beta_2$$

La convergence de l'estimation du gradient, et de l'erreur de prédiction sur la température, permet d'assurer, sous les hypothèses formulées auparavant, la convergence exponentielle du système en boucle fermée vers un petit voisinage de l'optimum en régime permanent. Ces équations de convergence complètent les preuves de stabilité de notre stratégie de commande qui est résumée dans la section suivante.

#### IV.6 Théorème : [GUA-04]

On considère le modèle (4.1)-(4.2) d'un réacteur continu parfaitement agité non-isotherme avec le prédicteur sur la température :

$$\dot{\hat{T}} = -D\hat{T} + F(T)\hat{W} - \lambda^T K^+ U_{in} + u + k_T(T - \hat{T}) + c_1(t)^T \hat{W}$$

sous l'action en boucle fermée de la loi de commande

$$u = DT - F(T)\hat{W} + \lambda^T K^+ U_{in} - k_d \text{sgn}(\Gamma_2)d(t) - a(t)$$

,du signal de superposition

$$\dot{d}(t) = c_2(t)^T \hat{W} + k_z z_s - k_d |\Gamma_2| d(t) - \Gamma_2 a(t) + \hat{W}_p^T dS$$

,des signaux dynamiques :

$$\dot{c}_1(t)^T = -k_T c_1(t)^T + F(T)$$

$$\dot{c}_2(t)^T = -k_z c_2(t)^T + \Gamma_2 F(T)$$

et de la loi d'estimation des paramètres :

$$\dot{\hat{W}} = \begin{cases} \gamma_\omega \Gamma & \text{si } \|\hat{W}\| \leq \omega_m \text{ ou } \|\hat{W}\| = \omega_m \text{ et } \hat{W}^T \Gamma \leq 0 \\ \gamma_\omega \left( I - \frac{\hat{W}\hat{W}^T}{\hat{W}^T \hat{W}} \right) \Gamma & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma = Y(t)^T \begin{bmatrix} e_T \\ z_s \end{bmatrix}$$

En supposant que le signal de superposition secondaire  $a(t)$  est tel que,

$$\int_t^{t+\Delta t} Y(\tau)^T Y(\tau) d\tau \geq k_N I_N$$

pour  $k_N > 0$  et  $\Delta t > 0$ . Où  $Y(t) = \begin{bmatrix} c_1(t)^T \\ c_2(t)^T \end{bmatrix}$  est la solution de:

$$\dot{Y}(t) = -\kappa(t)Y(t) + B(t)$$

Alors,

- L'erreur dynamique sur la prédiction de la température,  $e_T$  converge exponentiellement dans un petit voisinage de l'origine.
- L'erreur d'estimation des paramètres  $\tilde{W}$  de l'approximateur universel converge exponentiellement dans un petit voisinage de l'origine.
- L'erreur d'approximation du profil optimal en régime permanent,  $z_s$ , converge exponentiellement dans un petit voisinage de l'origine.

#### **IV.7 Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons appliqué une commande adaptative extrémale, notre but était de maximiser la concentration d'un produit d'intérêt. Le profil d'équilibre de ce produit dépend des cinétiques de réaction qui sont supposées inconnues et de ce fait, la conception d'un algorithme de commande et d'estimation été réalisée, en suivant trois étapes essentielles :

- La première étape était de paramétrer ce profil d'équilibre, plus exactement en utilisant un approximateur universel pour approximer cette fonction nonlinéaire inconnue.
- La deuxième étape, était l'introduction d'un observateur non linéaire. Nous avons ainsi introduit la notion de commande adaptative, pour estimer les paramètres inconnus qui approximent la fonction inconnue à optimiser.
- La troisième étape était de trouver et d'introduire l'algorithme paramétrique, à la commande extrémale. Pour cela un signal d'excitation est introduit à la commande afin de garantir la convergence des paramètres estimés. La stabilité du système en boucle fermée a été démontrée en utilisant la théorie de Lyapunov. La convergence du système à un de ses profils optimaux a été garantie au prix d'une condition d'excitation persistante des paramètres.

# Chapitre V

## *RÉSULTATS DE SIMULATION*

## V.1 Introduction :

Nous avons vu dans le chapitre précédent, comment synthétiser une loi de commande extrémale adaptative appliquée à un réacteur continu parfaitement agité (CSTR). Ainsi, en utilisant seulement la mesure de température, une commande a été extraite telle que la concentration du produit d'intérêt, à la sortie du réacteur, est stabilisée à sa valeur optimale [GUA-04]. Dans le présent chapitre, nous allons procéder à des simulations numériques, afin de valider cette loi de commande, son efficacité et ces performances.

## V.2 Conception du contrôleur :

On reporte au tableau (5.1) les principaux éléments du contrôleur dynamique développé au chapitre précédent [GUA-04]. Les principaux paramètres de conception sont les suivants :

### - Gains du contrôleur :

Quatre gains doivent être spécifiés par l'utilisateur. Le gain  $k_z$  commande la convergence de l'estimé du gradient. Le gain  $k_T$  commande la convergence de l'erreur de prédiction sur la température. Le gain d'adaptation,  $\gamma_\omega$ , doit être choisi assez large pour permettre une certaine forme de robustesse, une petite valeur de ce gain, ralentit la convergence des paramètres. Le gain du signal de superposition,  $k_d$ , doit être choisi aussi grand que possible pour diminuer l'effet du signal  $d(t)$  sur l'action de contrôle.

### - Conditions initiales des signaux filtres et du signal de superposition :

Dans le cas présent, ils sont initialisés à zéro. Cependant un choix alternatif pourrait donner de meilleurs résultats, d'autres études seraient nécessaires pour en mesurer l'effet.

### - Paramètres des fonctions de base : $\varphi_i$ et $\sigma_i^2$

De la théorie des approximateurs universels, il est connu que la paramétrisation aura les propriétés désirées lorsque les centres  $\varphi_i$  sont répartis uniformément sur le domaine de température. Le paramètre de variance,  $\sigma_i^2$ , doit être choisi large.

**Tableau 5.1 – Synthèse de l'algorithme de contrôle**

Estimation de la température
$\dot{\hat{T}} = -D\hat{T} + F(T)\hat{W} - \lambda^T K^+ U_{in} + u + k_T(T - \hat{T})$ $+ c_1(t)^T \hat{W}$ $F(T) = [DS(T)^T, \lambda^T K^+ H^T S(T)^T]$
Action de la commande
$u = DT - F(T)\hat{W} + \lambda^T K^+ U_{in} - k_d \text{sgn}(\Gamma_2)d(t) - a(t)$
Signal de superposition
$\dot{d}(t) = c_2(t)^T \hat{W} + k_z z_s - k_d  \Gamma_2  d(t) - \Gamma_2 a(t)$ $+ \hat{W}_p^T dS$
Signaux filtres
$\dot{c}_1(t)^T = -k_T c_1(t)^T + F(T)$ $\dot{c}_2(t)^T = -k_z c_1(t)^T + \Gamma_2 F(T)$
Loi d'adaptation de paramètres
$\dot{\hat{W}} = \begin{cases} \gamma_\omega \Gamma & \text{si } \ \hat{W}\  \leq \omega_m \text{ ou} \\ & \ \hat{W}\  = \omega_m \text{ et } \hat{W}^T \Gamma \leq 0 \\ \gamma_\omega \left( I - \frac{\hat{W}\hat{W}^T}{\hat{W}^T \hat{W}} \right) \Gamma & \text{sinon} \end{cases}$ $\Gamma = [c_1(t), c_2(t)] \begin{bmatrix} e^T \\ z_s \end{bmatrix}$

- **Conditions initiales sur les poids des fonctions de base**

Dans la plupart des applications, il est difficile d'obtenir des estimés fiables *a priori*. Les estimés des paramètres sont donc initialisés à de petites valeurs positives.

- **Conception du signal extérieur**

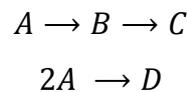
Dans la plupart des cas, le choix d'un signal de superposition qui permet une excitation suffisante demeure difficile à évaluer. Dans le cadre de cette étude, on utilisera la forme générale suivante :

$$a(t) = \sum_{i=1}^N [A_{1i} \sin(\omega_i t) + A_{2i} \cos(\omega_i t)]$$

Les amplitudes  $A_{1i}$  et  $A_{2i}$  sont données par des nombres aléatoires unitaires. Le nombre  $N$  de fréquences excitées est choisi comme étant plus grand ou égal au nombre de fonctions de base de l'approximation.

### V.3 Description de la réaction :

Les paramètres de simulation présentés au tableau (5.2). Dans ce cas, le cyclopentenol ( $B$ ) est produit à partir du cyclopentadiène ( $A$ ). Le produit consécutif,  $C$ , est le cyclopentanédiol et le produit secondaire,  $D$ , est le dicyclopentadiène.



Le vecteur de concentration que l'on utilise ici, correspondant aux concentrations des produits ( $A$ ) et ( $B$ ) est :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

L'objectif ici est de maximiser la concentration du produit intermédiaire  $B$  à la sortie du réacteur, le vecteur  $H$  est donc donné par :

$$H = [0 \quad 1]$$

La matrice stœchiométrique est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et la pseudo-inverse à gauche de  $K$ ,  $K^+$  est donnée par :

$$K^+ = \begin{bmatrix} -0.3333 & 0.3333 \\ -0.3333 & -0.6667 \\ -0.6667 & -0.3333 \end{bmatrix}$$

Le calcul de  $K^+$  est effectué à l'aide de la fonction *pinv* de Matlab. L'algorithme utilise la décomposition en valeurs singulières pour minimiser :

$$KK^+K = K$$

La commande telle décrite dans le chapitre précédent est une commande virtuelle, cette formulation permettait de simplifier l'équation de la température du réacteur ; La commande réelle étant la température de la chemise.

**Tableau (5.2) – Paramètres de simulation – réaction Van de Vusse**

$k_{10}$	=	$1.287 \cdot 10^{12}$	$h^{-1}$
$k_{20}$	=	$1.287 \cdot 10^{12}$	$h^{-1}$
$k_{30}$	=	$9.034 \cdot 10^9$	$l.mol^{-1}.h^{-1}$
$E_1$	=	9758.3	K
$E_2$	=	9758.3	K
$E_3$	=	8560.0	K
$\Delta H_{AB}$	=	4.20	$kJ.mol^{-1}$
$\Delta H_{BC}$	=	-11.00	$kJ.mol^{-1}$
$\Delta H_{AD}$	=	41.85	$kJ.mol^{-1}$
$\rho$	=	0.9342	$kg.l^{-1}$
$C_p$	=	3.01	$kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
$D$	=	14.19	$h^{-1}$
$T_{in}$	=	403	K
$T(0)$	=	298	K
$C_{A0}$	=	5.1	$mol.l^{-1}$
$A_r$	=	0.215	$m^2$
$k_w$	=	4032	$kJ.h^{-1}.m^{-2}.K^{-1}$
$V$	=	10	L
$x_1(0)$	=	1	$mol.l^{-1}$
$x_2(0)$	=	0	$mol.l^{-1}$

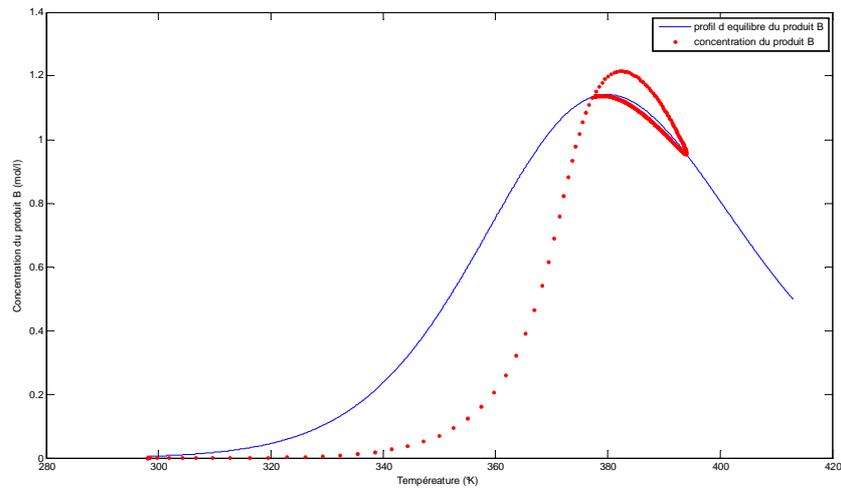
**Tableau (5.3) – Paramètres de contrôle**

$k_{z0}$	=	15
$k_{T0}$	=	15
$k_d$	=	$7.10^4$
$k_4, k_5, k_6, k_7$	=	2

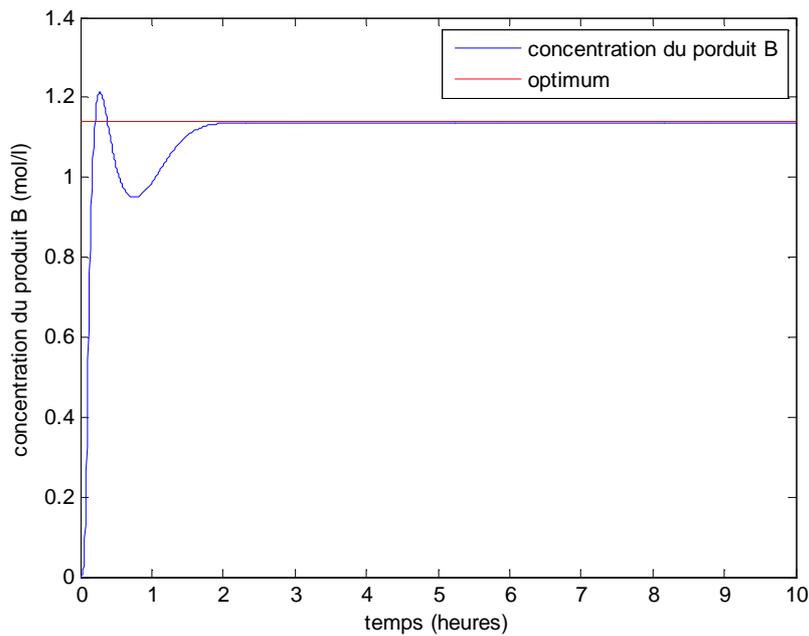
$\gamma_\omega$	=	100
$\sigma_i^2$	=	2500
$\omega_m$	=	1000
N	=	6
$\widehat{W}_i(\mathbf{0})$	=	0.1

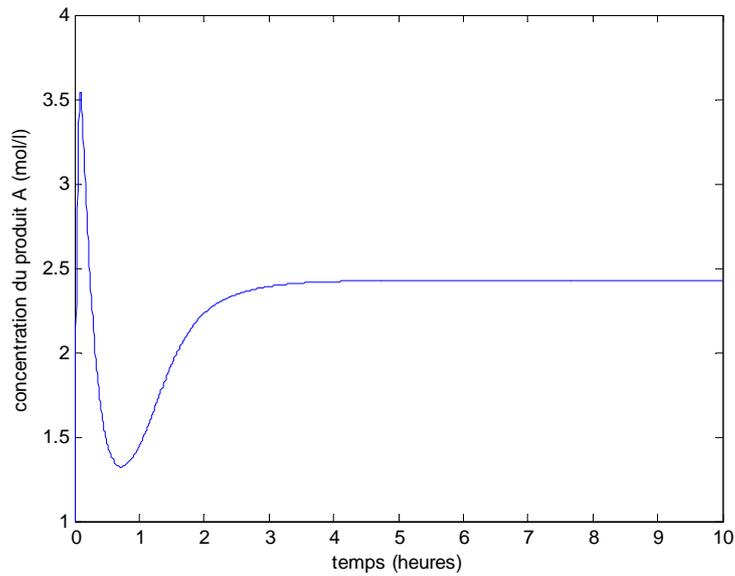
**V.4 Simulation du réacteur dans les conditions expérimentales normales :**

**- Concentrations :**



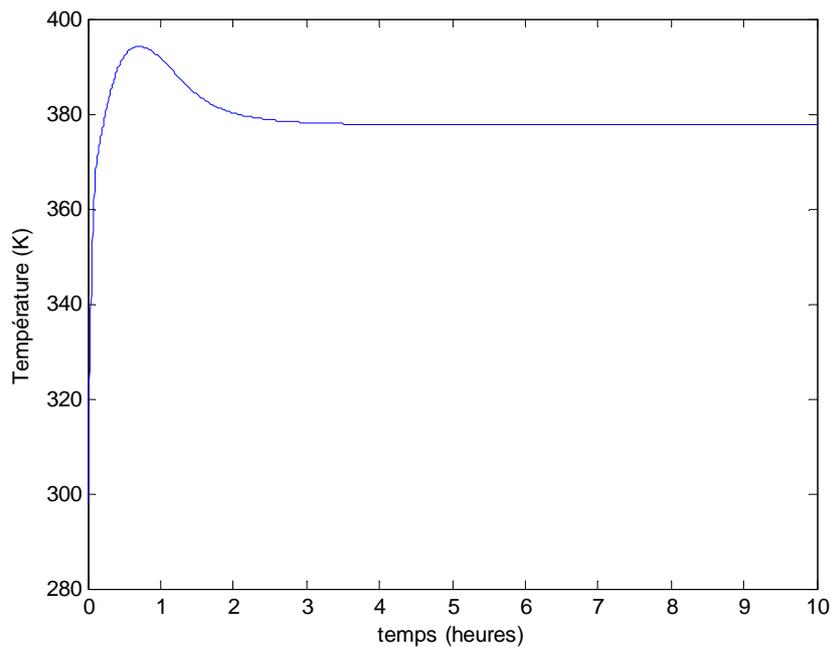
**Figure(5.1) – Profil de la concentration en fonction de la température – conditions normales**



**Figure(5.2) – Profil de la concentration du produit B – conditions normales****Figure (5.3) – Profil de la concentration du produit d'alimentation**

L'objectif de commande est atteint au bout de  $t = 2$  heures avec une erreur de l'ordre de  $10^{-3}$ . La réponse est relativement rapide, le temps de séjour du réacteur doit être donc supérieur à cette durée.

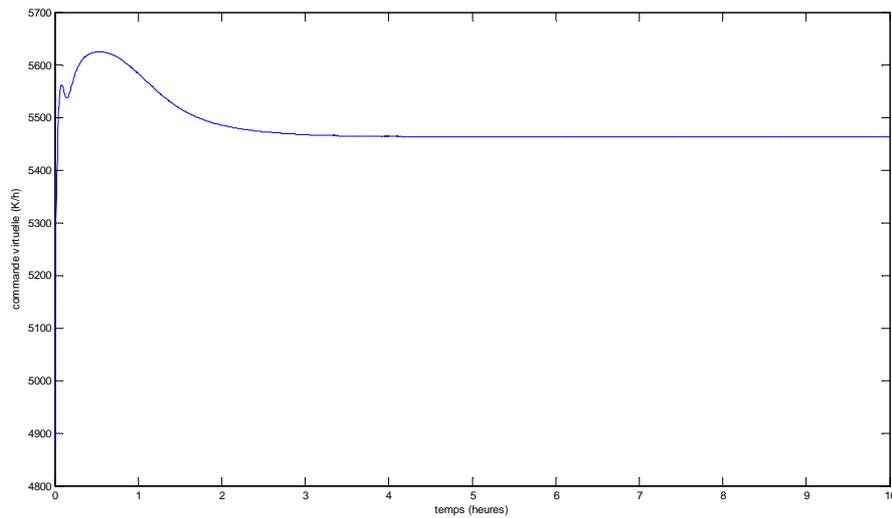
- **Température du réacteur :**



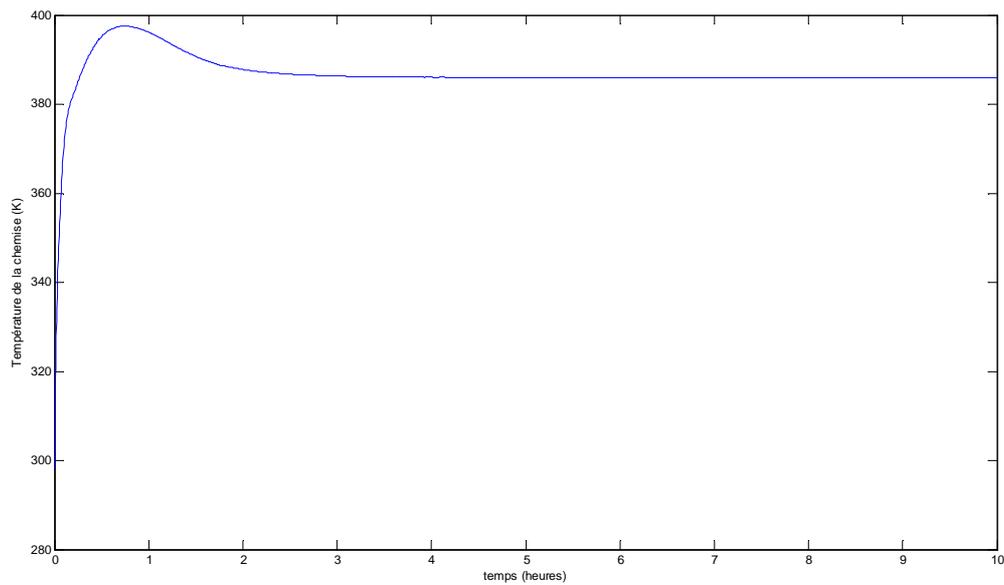
**Figure (5.4) – Profil de la température du réacteur**

La température en régime permanent se stabilise autour de la température optimale

- **Commande virtuelle  $u$ :**

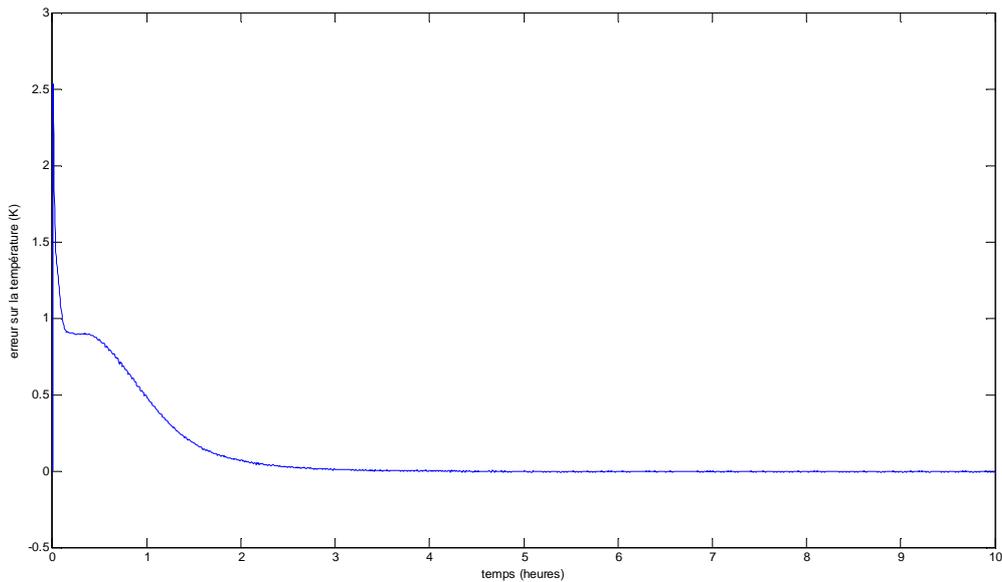
**Figure (5.5) – Profil de la commande  $u$** 

- **Commande réelle : Température de la chemise  $T_j$  :**

**Figure (5.6) – Profil de la température de la chemise**

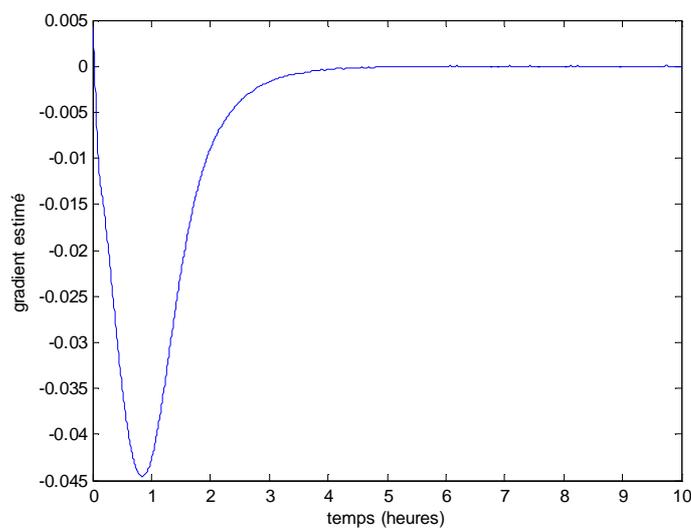
La commande réelle permet de réguler la température de la chemise de façon à ce que le sens de conduction soit orienté de la chemise vers le réacteur, en effet, la température de la chemise est supérieure à la température du réacteur; cela s'explique par les réactions endothermiques présentes dans le système de réaction Van de Vusse.

- **Erreur d'observation sur la température :**

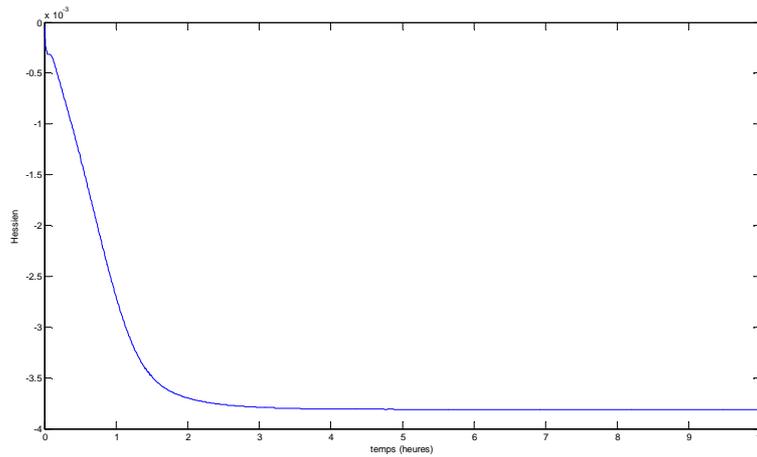


**Figure (5.7) – Profil de l'erreur de l'observation**

**Gradient estimé et hessien:**



**Figure (5.8) – Profil du gradient estimé**

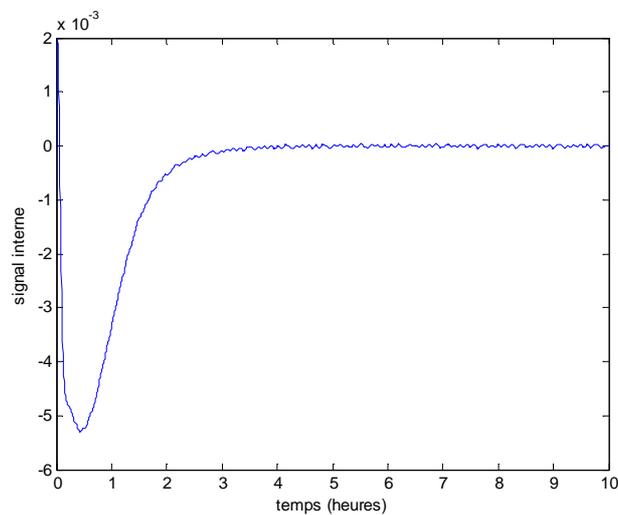


**Figure (5.9) – Profil du Hessien**

L'erreur sur la température converge vers zéro, c'est-à-dire que les paramètres estimés convergent vers les paramètres réels.

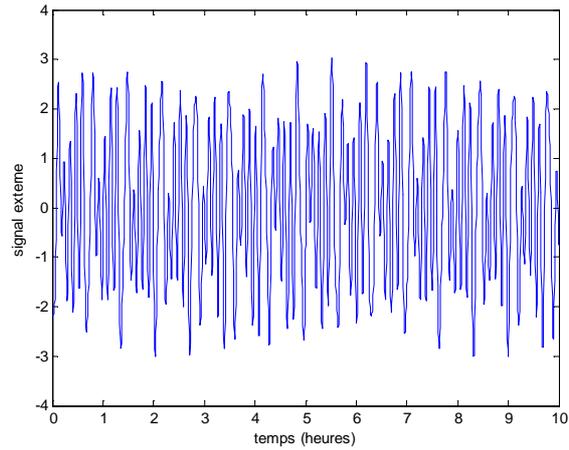
Le gradient estimé tend vers zéro, ce qui prouve que la fonction à optimiser atteint son optimum. Le hessien est négatif, ce qui prouve que l'optimum est bien un maximum.

**Signal interne  $d(t)$  :**



**Figure (5.10) – Profil du signal interne**

**Signal externe  $a(t)$  :**

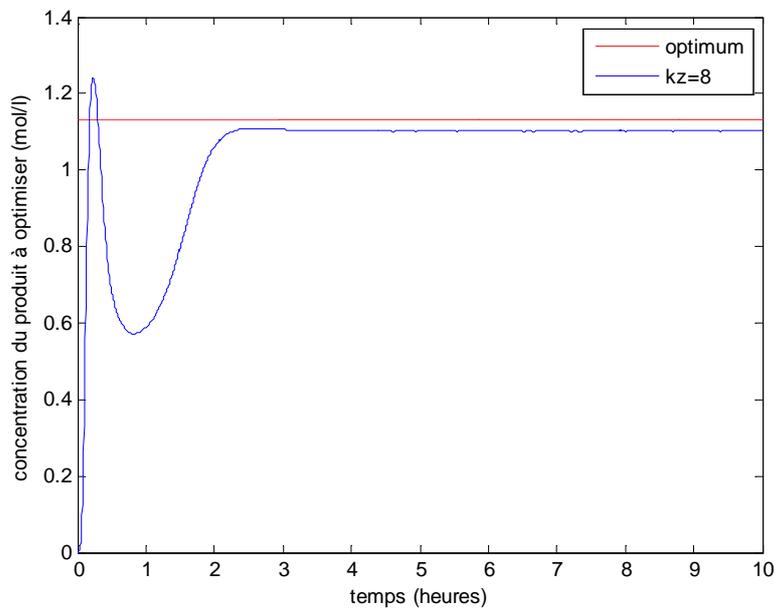


**Figure (5.11) – Profil du signal extérieur**

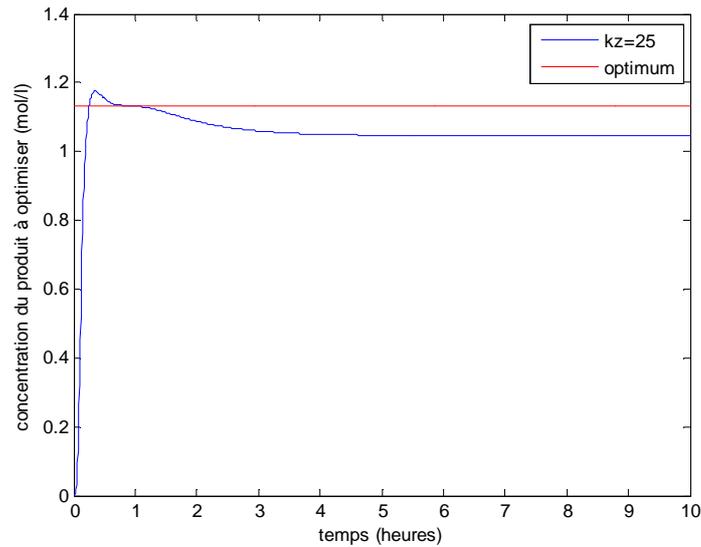
Le signal interne se réduit à la forme du signal externe, et converge autour du zéro.

## V.5 Influence des gains de contrôle:

### V.5.1 Influence du gain associé au gradient $k_{z0}$ :



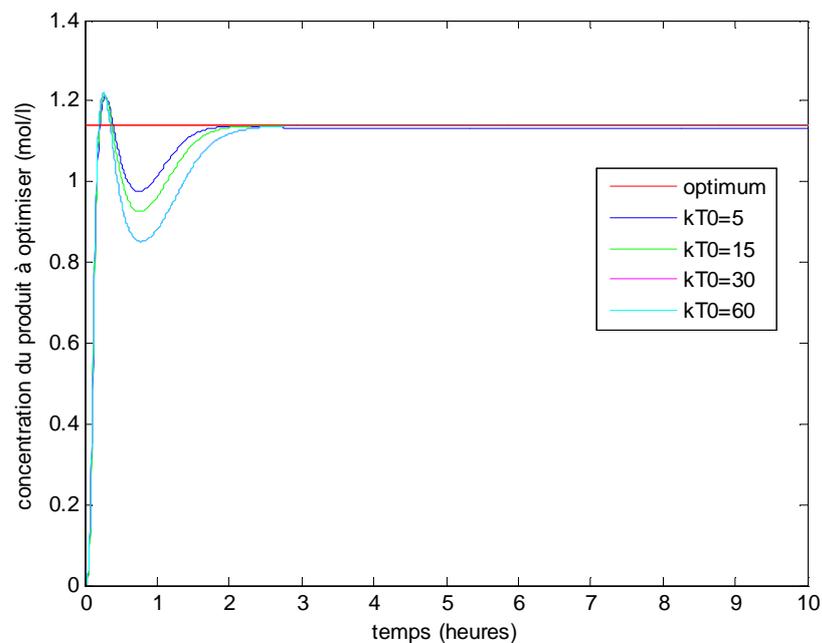
**Figure (5.12) – Influence du gain associé au gradient – gain faible**



**Figure (5.13) – Influence du gain associé au gradient – gain fort**

Le gain associé au gradient doit être choisi avec soin. Une valeur faible du gain ralentit la convergence de la concentration mais commence aussi à l'éloigner du voisinage de l'optimum. Par contre, une valeur trop grande de ce gain donne une mauvaise approximation de l'optimum.

### V.5.2 Influence du gain associé à l'erreur d'observation de la température $k_{T0}$ :



**Figure (5.14) – Influence du gain associé à l'erreur d'observation de la température**

On remarque que de trop grandes valeurs de ce gain, ralentissent la convergence de la concentration.

### V.5.3 Influence du gain d'adaptation :

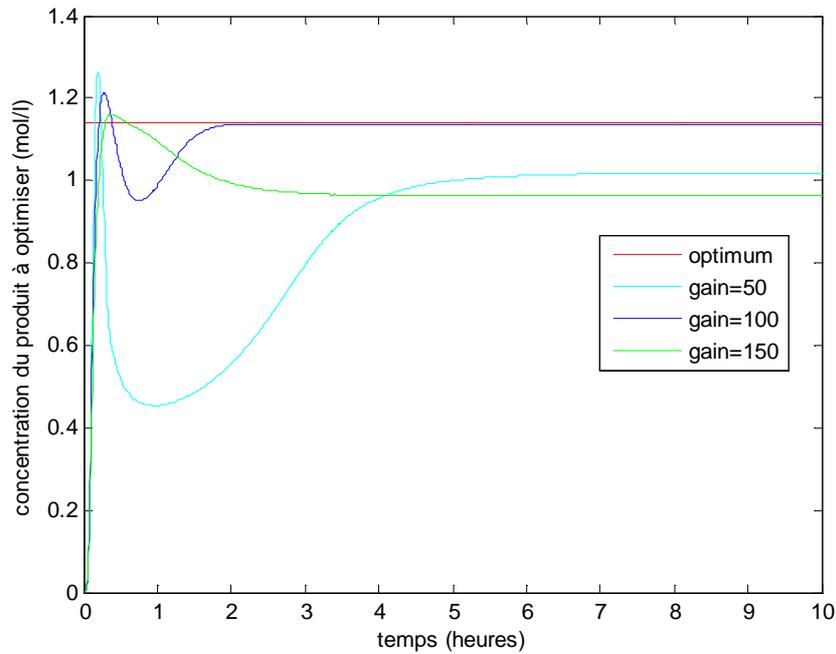
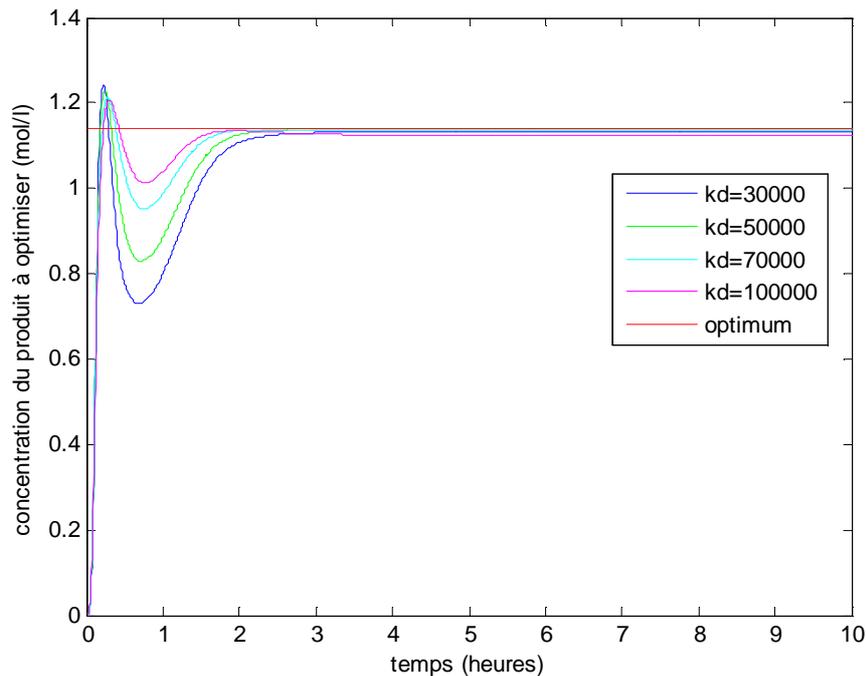


Figure (5.15) – Influence du gain d'adaptation

Une valeur faible du gain d'adaptation approxime ralentit la converge et approxime mal l'optimum. Par contre, une trop forte valeur de ce gain ne ralentit pas la converge mais donne lieu aussi à une mauvaise approximation de l'optimum.

### V.5.4 Gain associé au signal interne $k_d$ :



**Figure (5.16) – Influence du gain associé au signal interne**

On voit que les petites valeurs du gain  $k_d$  ralentissent la convergence ; en augmentant la valeur de ce gain, le régime transitoire devient plus court, l'optimum est donc atteint plus rapidement.

Par contre, de trop fortes valeurs de ce gain, donne lieu à des effets indésirables : la vitesse de convergence s'améliore toujours mais la concentration commence à s'éloigner de son optimum.

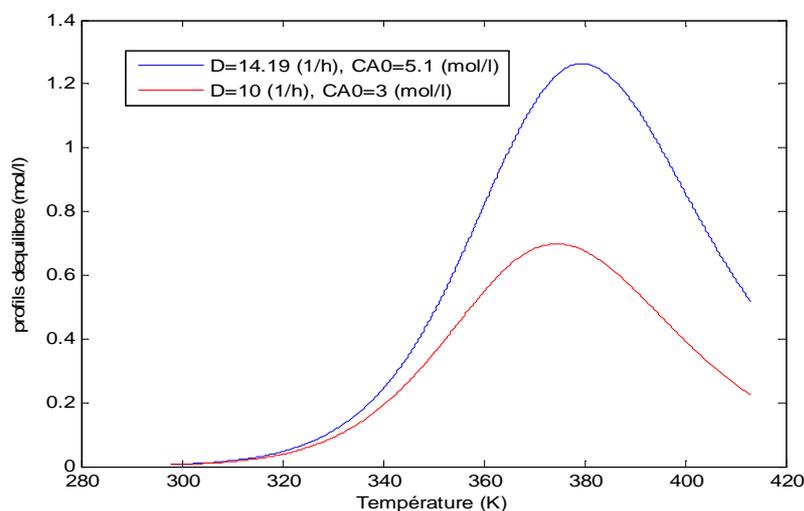
## V.6. Influence des conditions expérimentales :

### V.6.1 Influence du taux de dilution et de la concentration d'alimentation :

Nous allons voir à présent, l'influence de la concentration d'alimentation  $C_{A0}$  et du taux de dilution  $D$ .

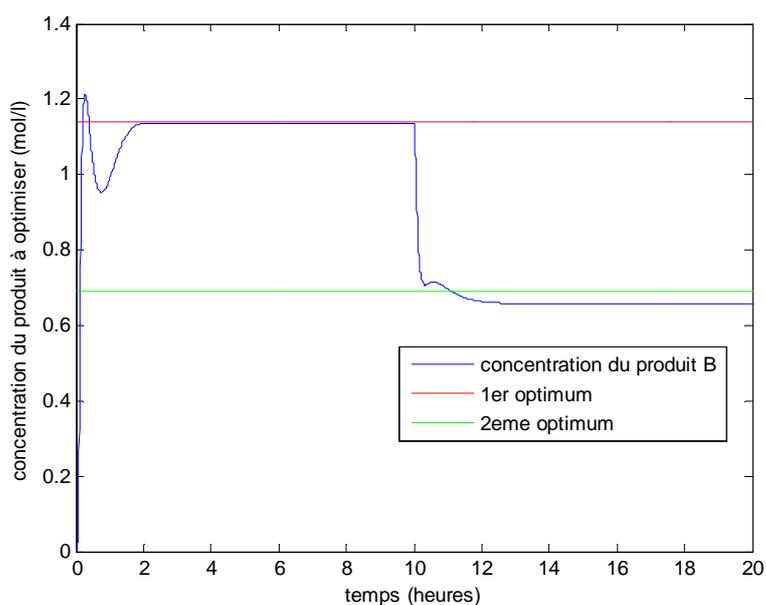
La variation de ces paramètres permet de changer le profil d'équilibre du produit à optimiser. La figure suivante montre les deux profils d'équilibre correspondant aux valeurs expérimentales suivantes :

$D_1$	=	14.19	$\text{h}^{-1}$
$C_{A01}$	=	5.1	$\text{mol.l}^{-1}$
$D_2$	=	10	$\text{h}^{-1}$
$C_{A02}$	=	3	$\text{mol.l}^{-1}$



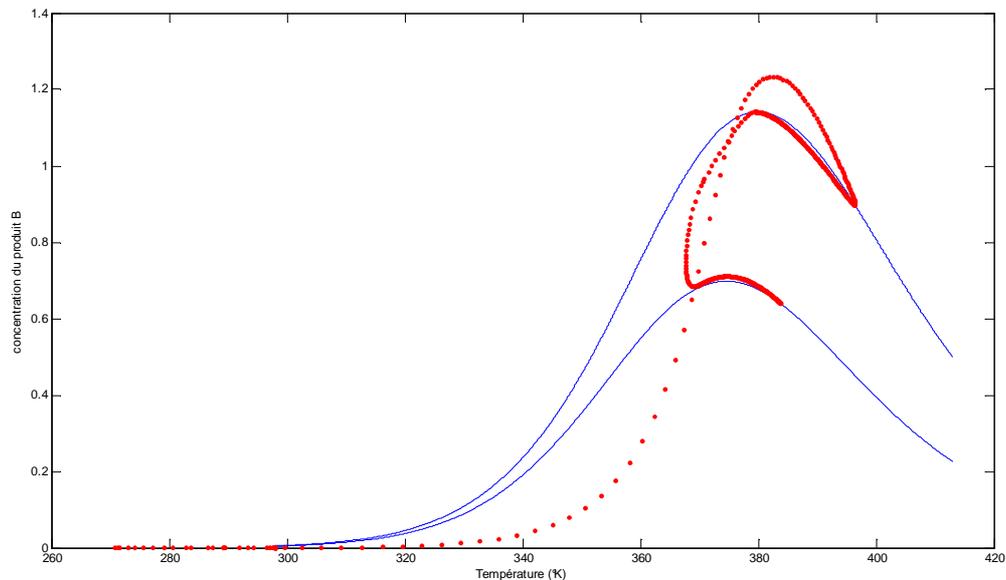
**Figure (5.17) – Changement du profil d'équilibre avec le changement des conditions expérimentales**

La concentration optimale des conditions expérimentales normales est à  $1.14 \text{ mol.l}^{-1}$ . Lors du changement de ces conditions aux valeurs citées ci-dessus la valeur de la nouvelle concentration optimale est à  $0.69 \text{ mol.l}^{-1}$ . On perturbe les paramètres  $D$  et  $C_{A0}$  à  $t = 10 \text{ h}$  :



**Figure (5.18) – Profil de la concentration avec le changement des conditions expérimentales**

- **Graphes de l'évolution de la concentration en fonction de la température :**

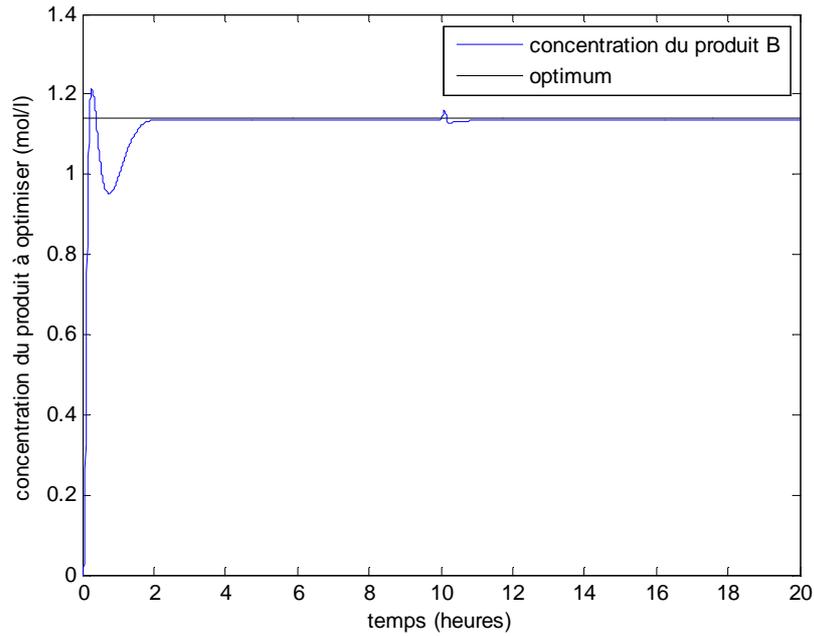


**Figure (5.19) – Profil de la concentration en fonction de la température – changement des conditions expérimentales**

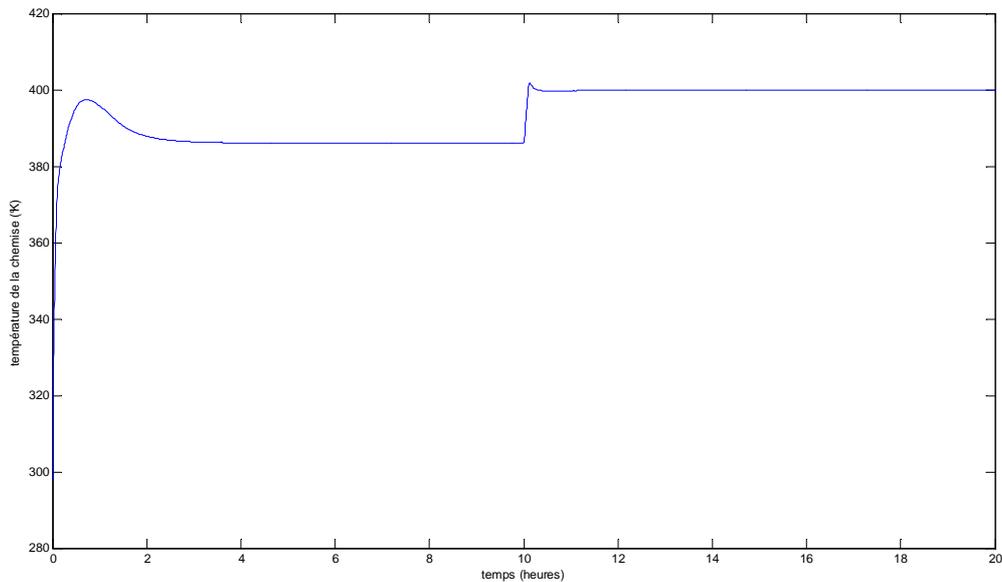
On remarque que lors du changement de l'optimum d'une valeur assez conséquente, le deuxième optimum est atteint rapidement mais avec une erreur de l'ordre de  $10^{-2}$ . Cette erreur est admissible vu que le deuxième optimum est relativement loin du premier optimum. Pour cela un bon contrôle du taux de dilution est recommandé, et de la concentration d'alimentation aussi.

### V.6.2 Influence de la température d'entrée:

On perturbe à présent la température d'entrée  $T_{in}$  de  $20^{\circ}\text{K}$  à partir de  $t = 10\text{h}$ . La température d'entrée n'intervient pas dans l'équation du profil d'équilibre, donc, l'optimum ne change pas.



**Figure (5.20) – Influence de la température d'entrée – profil de la concentration**

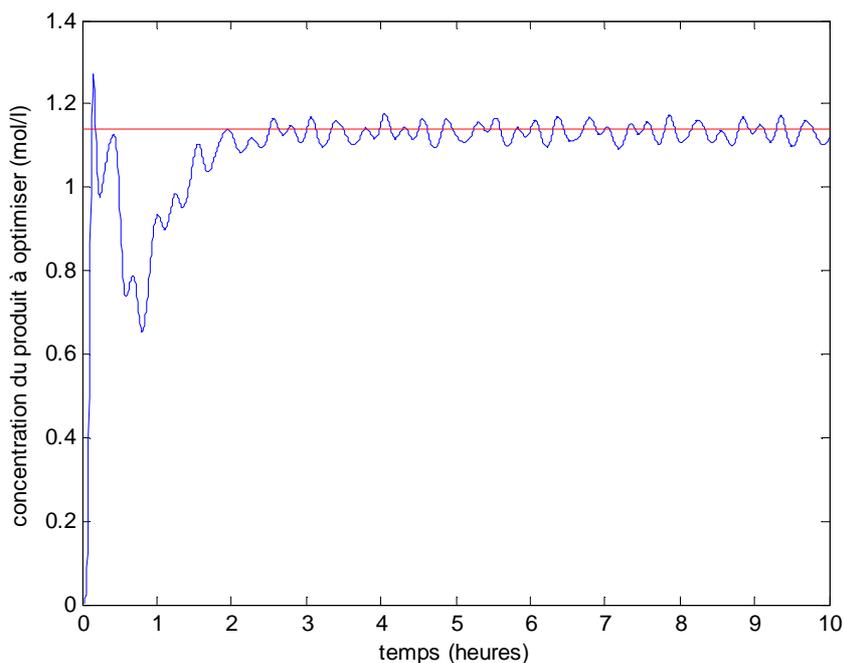


**Figure (5.21) – Influence de la température d'entrée – profil de la température de la chemise**

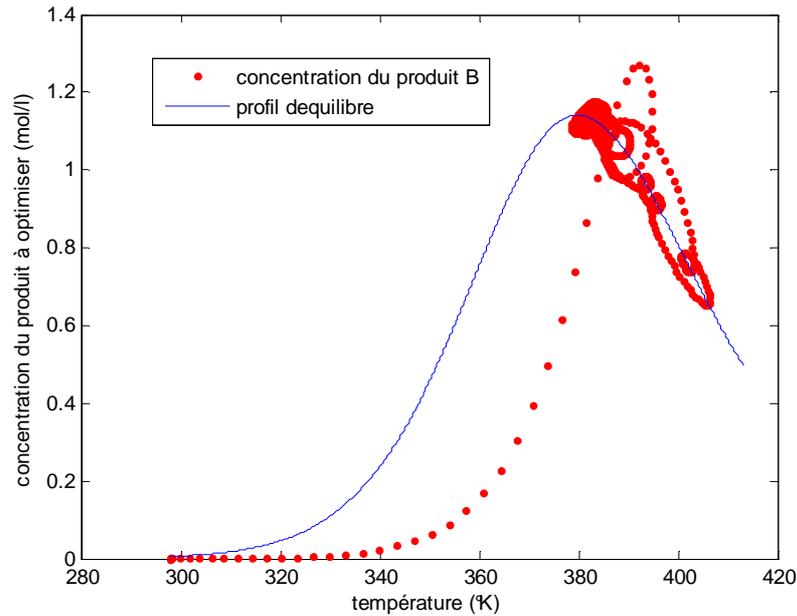
Le système répond d'une façon efficace face aux perturbations de la température d'entrée, et la commande réelle répond rapidement pour pallier à cette perturbation. Ainsi, la concentration se stabilise rapidement autour de son optimum.

### V.7 Influence de l'amplitude du signal extérieur :

Nous allons voir à présente l'influence de l'amplitude du signal extérieur  $a(t)$ . Nous allons pour cela multiplier les amplitudes initialement proposés par un facteur de 200. Les fréquences des sinusoides utilisées sont de 0 à 20  $\text{rad.s}^{-1}$

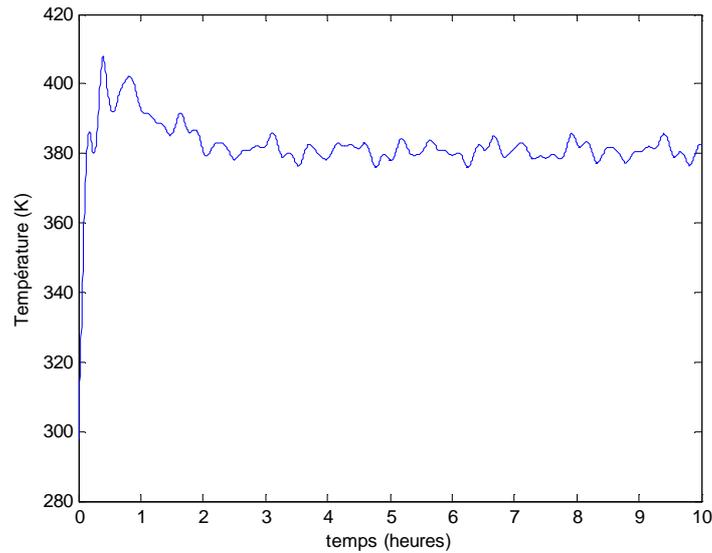


**Figure (5.22) – Influence de l'amplitude du signal extérieur – profil temporel de la concentration**



**Figure (5.23) – Influence de l’amplitude du signal extérieur – profil de la concentration en fonction de la température**

On remarque que le fait d’augmenter l’amplitude du signal extérieur, permet à la concentration de tourner autour de l’optimum, cela s’explique par le fait que le gradient n’atteint jamais la valeur nulle, à cause du signal extérieur qui perturbe le signal interne. Augmenter cette amplitude revient à tourner autour d’une région plus large de l’optimum mais revient aussi à travailler en régime non-isotherme pendant toute la réaction comme le montre la figure ci-dessous :



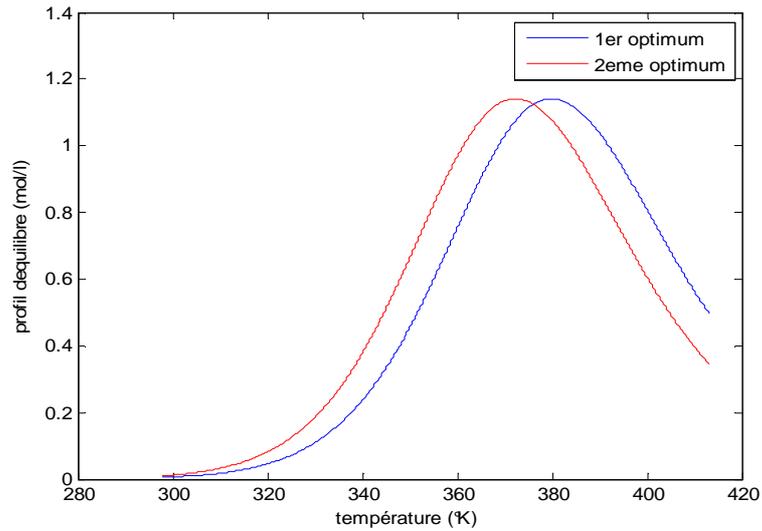
**Figure (5.24) – Influence de l'amplitude du signal extérieur - Profil de la température**

## **V.8 Influence des paramètres de la cinétique chimique :**

### **V.8.1 Influence de l'énergie d'activation :**

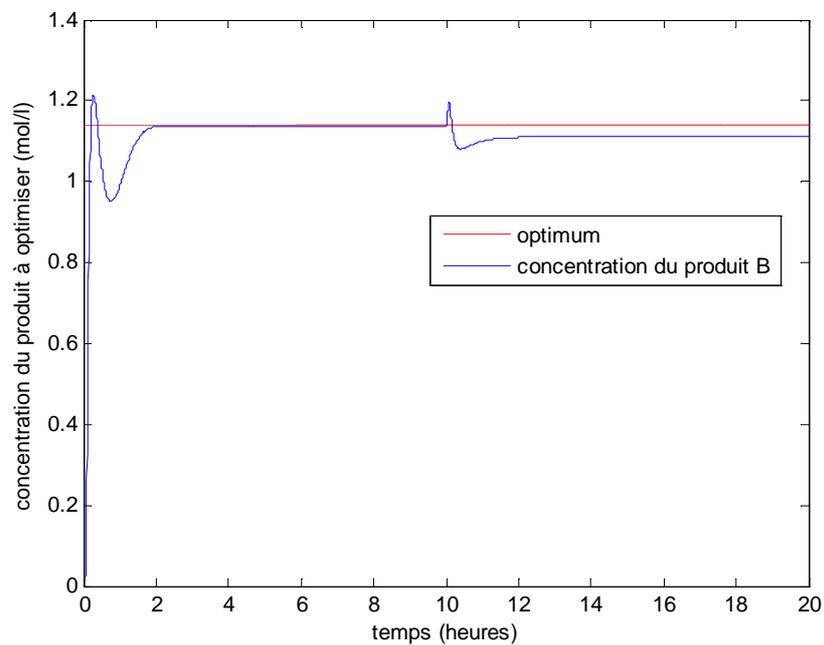
On étudie à présent l'influence de l'énergie d'activation  $E_i$  de la loi d'Arrhénius. La variation de ce paramètre fait considérablement varier le profil d'équilibre du produit à optimiser.

La figure suivante montre la variation de ce profil pour une variation de cette énergie de 2%. On remarque que le profil change légèrement dans l'intervalle de température considéré.



**Figure (5.25) - Changement du profil d'équilibre – Influence de l'énergie d'activation**

Les résultats sont montrés ci-dessous :



**Figure (5.26) – Profil de la concentration - Influence de l'énergie d'activation**

La variation de l'énergie d'activation de 2%, donne d'assez bons résultats ; la concentration converge autour de son optimum avec une erreur acceptable.

### V.8.2 Influence du facteur pré-exponentiel :

On étudie à présent l'influence du facteur pré-exponentiel  $k_{i0}$  de la loi d'Arrhénius. La variation de ce paramètre fait varier le profil d'équilibre du produit à optimiser.

La figure suivante montre la variation de ce profil pour une variation du facteur pré-exponentiel de 30%. On remarque que le profil change légèrement dans l'intervalle de température considéré.

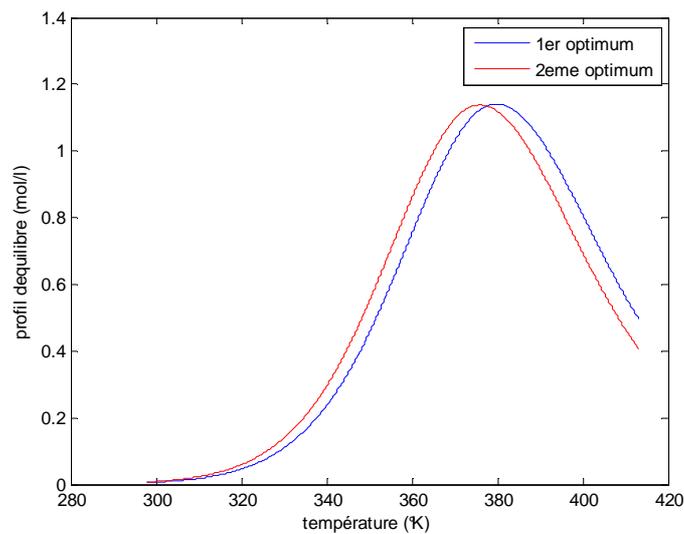


Figure (5.27) - Changement du profil d'équilibre – Influence du facteur pré-exponentiel

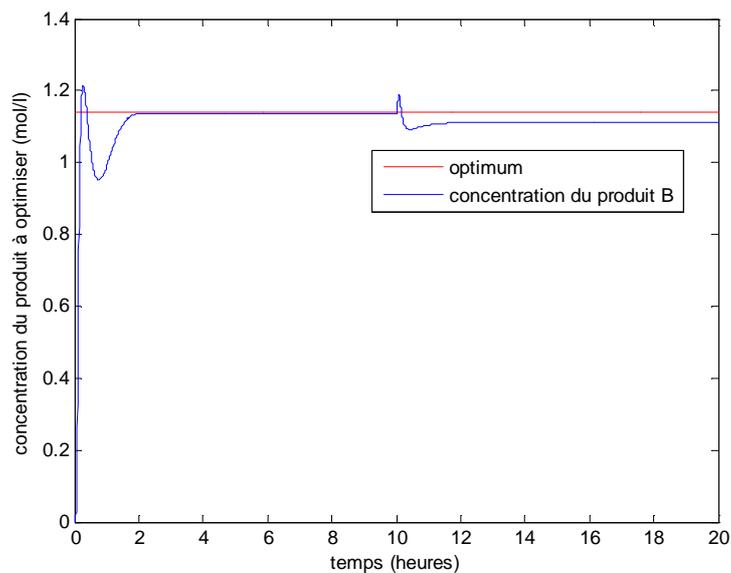


Figure (5.28) - Profil de la concentration – Influence du facteur pré-exponentiel

Une variation de 30% sur le facteur pré-exponentiel donne des résultats satisfaisants, l'erreur obtenue est de l'ordre de  $10^{-2}$ .

## V.9 Conclusion :

Nous avons vu d'après les différentes simulations effectuées dans ce chapitre, l'intérêt principal de l'application de la commande extrémale adaptative qui est d'atteindre une productivité maximale.

Les difficultés rencontrées dans les réacteurs chimiques, sont ceux des mesures disponibles, ainsi, on ne disposait que des mesures de température. La commande extrémale nous a permis d'optimiser en temps réel la concentration d'un produit d'intérêt. Le profil d'équilibre de cette concentration était inconnu et de ce fait, un algorithme d'adaptation a été introduit afin d'estimer les paramètres inconnus de l'approximation universelle utilisée pour approximer ce profil.

Les choix des gains d'adaptation et du gain associé au gradient étaient essentiels sur les performances de la commande. Si ces gains sont choisis trop petits, la convergence était lente, et la concentration se stabilisait autour de l'optimum avec une certaine erreur. Réciproquement, de trop grandes valeurs de ces gains engendraient une mauvaise approximation de l'optimum. Le bon contrôle des conditions expérimentales est aussi recommandé afin de garder l'optimum autour d'une seule valeur.

CONCLUSION

GENERALE

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce mémoire était l'application d'une commande extrémale adaptative sur un procédé chimique. L'idée maîtresse était de maximiser, en ligne, la concentration d'un certain produit d'intérêt à la sortie du réacteur en disposant que des mesures de la température.

La grande diversité des réacteurs chimiques nous a permis de mettre en évidence l'importance des modèles mathématiques phénoménologiques des différents types de processus chimiques. Cette modélisation nécessite une bonne compréhension des phénomènes thermodynamiques, de transfert de chaleur, et les mécanismes des réactions.

Notre projet s'est concentré autour du réacteur chimique continu parfaitement agité qui est un système à paramètres localisés et fortement non-linéaire. Dans le cadre de cette étude, l'expression des cinétiques de réaction était supposée inconnue et de ce fait, la conception d'un algorithme de commande et d'estimation a été réalisée. Outre ces cinétiques inconnues, le problème essentiel qui se posait était le manque de mesures disponibles, ainsi, on ne disposait que des mesures de la température.

La stabilité du système en boucle fermée a été démontrée en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov. La convergence du système à un de ses profils optimaux a été garantie au prix d'une condition d'excitation persistante des paramètres. [GUA-04]

La technique de commande adaptative de recherche d'extremum a été testée et validée par des simulations numériques sur un exemple de la réaction van de Vusse. Il a été montré que le choix du gain d'adaptation et du gain associé au gradient était important pour la bonne approximation de l'optimum ainsi que la rapidité de convergence de la concentration.

**Recommandations et travaux futurs :**

Afin d'affiner ce travail, il serait intéressant d'améliorer la structure du réseau de neurones approximant le profil d'équilibre du produit à optimiser ; Ainsi, dans ce travail, l'approximation par le réseau de fonctions à bases radiales 'RBF' était une solution simple à utiliser, afin d'alléger le contrôleur.

Nous opterons aussi pour l'introduction des concepts de la commande robuste à la commande extrémale. Ces notions présentent l'avantage d'être robustes par rapport aux fortes perturbations.

Afin d'étudier le réacteur chimique dans sa totalité, il serait aussi intéressant d'étudier les systèmes de contrôle de la température de la chemise du réacteur avec plus de détails.

La technique de commande adaptative par recherche d'extremum appliquée à des réacteurs chimiques non-isothermes a montré son efficacité pour la commande et l'optimisation en ligne des réacteurs continus parfaitement mélangés. Il serait intéressant d'étendre cette méthodologie de recherche adaptative d'extremum à la commande de systèmes à paramètres distribués ; c'est le cas des réacteurs tubulaires non-isothermes qui sont modélisés par des équations différentielles partielles hyperboliques non-linéaires.

# Annexes

## Annexe A

### Théorème de stabilité de Lyapunov

Dans cette méthode, on va chercher une fonction scalaire appelée fonction de Lyapunov, notée  $V(x)$  et montrer que cette fonction décroît en fonction du temps. La norme du vecteur d'état décroît et tend vers un point d'équilibre.

#### Théorème 1 :

Soit  $v(x)$  fonction à valeur réelle dont l'argument est le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$

Alors elle est dite définie positive sur un espace  $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^n$  si seulement si :

$$\begin{aligned} V(x) > 0 \quad \forall x \in \Gamma(0) \\ V(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

#### Théorème 2 :

Soit  $v(x)$  fonction à valeur réelle dont l'argument est le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$

Alors elle est dite définie négative sur un espace  $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^n$  si seulement si :

$$\begin{aligned} V(x) < 0 \quad \forall x \in \Gamma(0) \\ V(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

#### Théorème 3 :

Un point d'équilibre  $x=0$  est asymptotiquement stable s'il existe une fonction scalaire  $V(x)$  dont la dérivée est continue telle que :

$$\begin{aligned} V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Soit le système non linéaire  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$

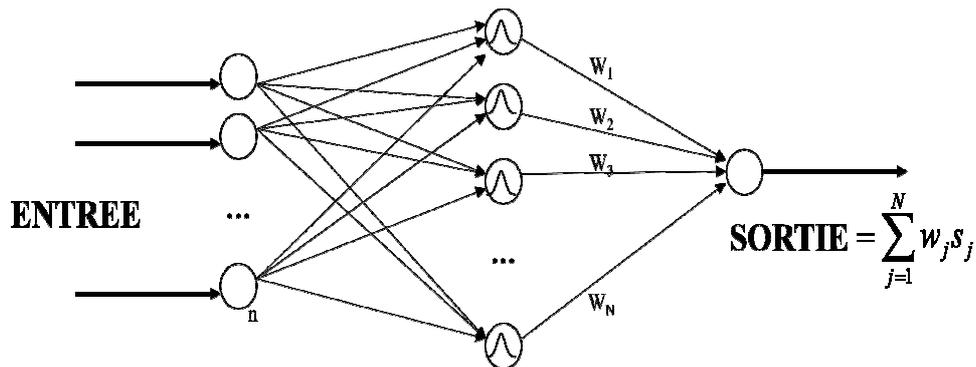
On cherche une loi de commande  $u = \phi(x)$ , afin que le système en boucle fermée possède un point d'équilibre asymptotiquement stable. Pour cela, on utilise la fonction de Lyapunov définie positive, et on cherche à déterminer  $u$  tel que :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] < 0 \quad (\text{A.4})$$

**ANNEXE B :****Approximation par réseaux de neurones RBF****Description du réseau RBF:**

Le réseau de neurones de fonction à bases radiales ou RBF est un réseau de neurones supervisé. Un RBF est constitué uniquement de 3 couches [SPO-02]:

- La couche d'entrée : elle retransmet les inputs sans distorsion.
- La couche RBF : couche cachée qui contient les neurones RBF.
- La couche de sortie : simple couche qui contient une fonction linéaire.



Chaque couche est totalement connectée à la suivante. Chaque neurone RBF contient une gaussienne qui est centrée sur un point de l'espace d'entrée. Pour une entrée donnée, la sortie du neurone RBF est la hauteur de la gaussienne en ce point.

La fonction gaussienne permet aux neurones de ne répondre qu'à une petite région de l'espace d'entrée, région sur laquelle la gaussienne est centrée.

La sortie du réseau est simplement une combinaison linéaire des sorties des neurones RBF multipliés par le poids de leur connexion respective ; généralement, un biais est additionné à la sortie :

Il y a 4 paramètres principaux à régler dans un réseau RBF :

- Le **nombre** de neurones RBF (nombre de neurones dans l'unique couche cachée).
- La **position** des centres des gaussiennes de chacun des neurones.

- La **largeur** de ces gaussiennes.
- Le **poids** des connexions entre les neurones RBF et le neurone de sortie.

On peut approximer les fonctions non-linéaires avec ce réseau pourvu que le choix de ses 4 paramètres soit approprié. Dans notre mémoire l'espace d'entrée est l'intervalle de température.

### Démonstration du résultat de l'équation (4.14) :

Soit  $r$ , le nombre de réactions,  $n$ , le nombre de composants chimiques mis en jeu, l'indice  $x$  est apparenté au composant à optimiser.

$$\lambda^T K^+ \pi(T) = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_r] \begin{bmatrix} K_{11}^+ & \dots & K_{1x}^+ & \dots & K_{1n}^+ \\ \vdots & \dots & K_{ix}^+ & \dots & \vdots \\ K_{r1}^+ & \dots & K_{rx}^+ & \dots & K_{rn}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1(T) \\ \vdots \\ \pi_x(T) \\ \vdots \\ \pi_n(T) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

En multipliant les deux premières matrices, on aura :

$$\lambda^T K^+ \pi(T) = [\sum_i \lambda_i K_{i1}^+ \quad \dots \quad \sum_i \lambda_i K_{ix}^+ \quad \dots \quad \sum_i \lambda_i K_{in}^+] \begin{bmatrix} \pi_1(T) \\ \vdots \\ \pi_x(T) \\ \vdots \\ \pi_n(T) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

On multiplie les deux vecteurs, en isolant le terme associé à la fonction à optimiser :

$$\lambda^T K^+ \pi(T) = \sum_{j/j \neq x} \left( \pi_j(T) \sum_i \lambda_i K_{ij}^+ \right) + \left( \sum_i \lambda_i K_{ix}^+ \right) \pi_x(T) \quad (\text{B.3})$$

Sachant que :

$$\sum_i \lambda_i K_{ix}^+ = \left[ \sum_i \lambda_i K_{i1}^+ \quad \dots \quad \sum_i \lambda_i K_{ix}^+ \quad \dots \quad \sum_i \lambda_i K_{in}^+ \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda^T K^+ H^T \quad (\text{B.4})$$

Et, l'approximation utilisée dans (4.13) :

$$\pi_x(T) = H\pi(T) = W_p^{*T}S(T) + \mu_p(t)$$

Le terme restant considéré comme une seule fonction non-linéaire sera approximé selon l'approximation universelle :

$$\sum_{j/j \neq x} \left( \pi_j(T) \sum_i \lambda_i K_{ij}^+ \right) = W_o^{*T}S(T) + \mu_o(t)$$

(B.5)

En utilisant (B.4), (4.13) et (B.5) on aura :

$$\lambda^T K^+ \pi(T) = \lambda^T K^+ H^T W_p^{*T} S(T) + W_o^{*T} S(T) + \lambda^T K^+ H^T \mu_p(t) + \mu_o(t) \quad (\text{B.6})$$

En posant :  $\mu_l(t) = \lambda^T K^+ H^T \mu_p(t) + \mu_o(t)$  ; on obtient le résultat (4.14)

**Annexe C :****Intégration des inégalités différentielles**

Cette annexe présente certains résultats concernant l'intégration des inégalités différentielles.

Soient  $v$  et  $\rho$  des fonctions à valeurs réelles appartenant à l'ensemble  $\mathbb{R}_+$ , et soient  $b$  et  $c$  des constantes positives ; s'ils répondent à l'inégalité suivante [KRS-95] :

$$\dot{v} \leq -cv + b\rho^2(t), \text{ et } v(0) \geq 0$$

Alors, on peut estimer la fonction  $v$  par l'inégalité suivante:

$$v(t) \leq v(0)e^{-ct} + b \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \rho(\tau)^2 d\tau$$

Si, en plus, la fonction  $\rho(t) \in \mathcal{L}_\infty$  (c'est-à-dire que  $\|\rho\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |\rho(t)|$  existe et est fini) alors :

$$v(t) \leq v(0)e^{-ct} + \frac{b}{c} \|\rho\|_\infty^2$$

# Bibliographie

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [ANT-03] Antonelli, R., Astolfi, A., 2003. Continuous stirred tank reactors: easy to stabilise ? *Automatica* 39 (10), 1817-1827.
- [ARI-03] ARIYUR, K. B., KRSTIC, M., 2003, Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control, John Wiley and Sons.
- [AST-89] Astrom K.J., Wittenmark, B., 1995. Adaptive control. Second edition. Addison-Wesley.
- [BEL-04] Belhout., A., , 2004. Commande extrémale adaptative appliqué au bioréacteur. Projet de Fin d'Etudes, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.
- [GUA-02] Guay, M. and T. Zhang, 2002. Adaptive extremum seeking control of nonlinear systems with parametric uncertainties. *Proc. IFAC World Congress, Barcelona* pp. 475–481.
- [GUA-04] Guay, M., Dochain, D. and Perrier, M., 2004, Adaptive Extremum Seeking Control of Nonisothermal Continuous Stirred Tank Reactors. *Chemical Engineering Science* 60, 3671-3681.
- [HUD-04] Hudon, N., Perrier, M., Guay, M., Dochain, D., 2004. “Adaptive Extremum Seeking of Nonisothermal Tubular Reactor,” in *Proceedings of the 43rd IEEE Conference of Decision and Control*, Paradise Island, Bahamas.
- [KHA-07] Khaled, A., R., 2007. Contribution de l’outil bond graph pour la modélisation des réacteurs chimiques en vue de leur supervision. Thèse de Doctorat, Université de Lille 1.
- [KRS-95] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P., 1995. Nonlinear and Adaptive Control Design, John Wiley and Sons.

- [LAD-95] Ladaci, S., 1995. Commande extrémale d'un moteur à allumage commande d'automobile. Projet de fin d'Etudes, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.
- [LEL-00] Leleu, R., 2000. Transferts de chaleur, document techniques de l'ingénieur.
- [LUY-07] Luyben, W., L., Chemical Reactor Design and Control, 2007, John Wiley and Sons.
- [LUY-99] Luyben, W., L., 1999. Process modelling, simulation and control for chemical engineers, Second edition, McGrawHill.
- [MAR-87] Maret L., 1987. Régulation automatique, Ed Presses polytechnique Romandes.
- [NAU-08] Nauman, E., B., 2008. Chemical Reactor Design, Optimization, and Scaleup , 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley and Sons.
- [OUA-03] Ouahes., R., Devallez., B., édition 2003. Chimie générale. Office des Publications Universitaires.
- [PET-95] Petros, A., 1995. Robust adaptive control, Edition Prentice Hall.
- [SPO-02] Spooner, J., T., Maggiore, M., Ordonez, R., Passino, K., M., 2002. Stable adaptive control and estimation for nonlinear systems: neural and fuzzy approximator techniques, John Wiley and Sons.
- [TAD-11] Tadjine, M., 2011. Cours d'Automatique Avancée, cours cinquième année, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.
- [TIT-03] M. Titica, D. Dochain, and M. Guay, 2003. Adaptive extremum-seeking control of fed-batch bioreactors. European Journal of control, 9614-627.
- [TRA-96] Trambouze, P., 1996. Technologie des réacteurs chimiques, document techniques de l'ingénieur.
- [VIL-96] Villermaux, J., 1996. Les réacteurs chimiques, document techniques de l'ingénieur.
- [WEL-00] Wellstead, E., P., 2000. Introduction to physical system modeling, Academic Press Ltd.

- [ZHA-03] Zhang, T., Guay, M., Dochain, D., 2003, Adaptive Extremum Seeking Control of Continuous Stirred-Tank Bioreactors, *AIChE Journal* 49(1), 113-123.