

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Ecole Nationale Polytechnique**



**Département d'Automatique**

**Projet de fin d'études**

Pour l'obtention du diplôme

**D'Ingénieur d'Etat en Automatique**

Intitulé

**Commande d'un quadrirotor**

Réalisé par :

**LAIB Khaled**

**MAAMRIA Djamaledine**

Proposé et dirigé par :

**Pr M. TADJINE**

**Promotion : Juin 2011**

*Nous dédions ce travail à :*

*Nos très chers parents et grands-parents*

*A nos familles*

*A nos amis*

*A toute la promotion 2011*

*A tous ceux qui ont partagé nos joies et nos peines*

# *Remerciements*

Nous remercions tout d'abord, Allah qui nous a guidés sur la bonne voie et nous a aidés à surmonter les difficultés.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre promoteur Pr M. TADJINE pour avoir proposé ce sujet, son aide et ses précieux conseils tout au long de notre travail.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner notre travail.

Enfin, tous nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les drones quadrirotors</b>	<b>3</b>
1.1 Définition d'un drone . . . . .	3
1.2 Classification des drones . . . . .	3
1.2.1 Drones à voilures fixes . . . . .	3
1.2.2 Drones à ailes battantes . . . . .	4
1.2.3 Drones à voilures tournantes . . . . .	4
1.3 Avantages de la configuration quadrirotor . . . . .	7
1.4 Les premiers quadrirotors . . . . .	8
1.5 Les travaux de recherche récents sur les quadrirotors . . . . .	10
1.5.1 Le projet Mesicopter (1999-2001) . . . . .	10
1.5.2 Le projet STARMAC 2007 . . . . .	11
1.5.3 Le projet OS4 (2003-2007) . . . . .	12
1.6 Technologies des quadrirotors . . . . .	13
1.6.1 Les capteurs . . . . .	13
1.6.2 Les moteurs . . . . .	14
1.6.3 La carte de comande . . . . .	14
1.7 Applications et utilisations . . . . .	15
1.7.1 Applications militaires . . . . .	15
1.7.2 Applications civiles . . . . .	16
1.8 Conclusion . . . . .	16
<b>2 Modélisation du quadrirotor</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Les possibilités de vol du quadrirotor . . . . .	17

2.2.1	Les gaz (mouvement vertical) . . . . .	18
2.2.2	Le lacet . . . . .	18
2.2.3	Le roulis (Le déplacement suivant l'axe $Y$ ) . . . . .	18
2.2.4	Le tangage (Le déplacement suivant l'axe $X$ ) . . . . .	18
2.3	Repérage du quadrirotor dans l'espace . . . . .	19
2.3.1	Repères utilisés . . . . .	19
2.3.2	Matrices de rotation . . . . .	20
2.4	Modèle dynamique du quadrirotor . . . . .	22
2.4.1	La dynamique de translation . . . . .	23
2.4.2	La dynamique de rotation . . . . .	24
2.4.3	La relation entre les angles d'Euler et les vitesses angulaires . . . . .	26
2.4.4	La dynamique des rotors . . . . .	27
2.4.5	Modèle d'état du quadrirotor . . . . .	28
2.4.6	Liaisons non holonomes . . . . .	30
2.5	Modélisation hybride du quadrirotor . . . . .	31
2.5.1	Rappels et définitions . . . . .	31
2.5.2	Modèle hybride du quadrirotor . . . . .	32
2.5.3	Automate hybride . . . . .	36
2.6	Conclusion . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Commande des quadrirotors</b>	<b>38</b>
3.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Etat de l'art sur la commande du quadrirotor . . . . .	39
3.3	Commande par backstepping . . . . .	40
3.3.1	Les étapes de la synthèse . . . . .	40
3.3.2	Synthèse des lois de commande pour le quadrirotor . . . . .	42
3.3.3	Résultats et simulations . . . . .	43
3.4	Commande à structure variable . . . . .	45
3.4.1	Synthèse de la commande par mode glissant . . . . .	45
3.4.2	Le phénomène de Chattering . . . . .	47
3.4.3	Synthèse des commandes pour le quadrirotor . . . . .	48
3.4.4	Résultats et simulations . . . . .	49
3.5	Commande par forwarding . . . . .	51

3.5.1	Les étapes de la synthèse . . . . .	51
3.5.2	Synthèse des lois de commande pour le quadrirotor . . . . .	54
3.5.3	Résultats et simulations . . . . .	56
3.6	Commande à base du modèle hybride . . . . .	58
3.6.1	Backstepping . . . . .	59
3.6.2	Mode glissant . . . . .	62
3.6.3	Forwarding . . . . .	65
3.6.4	Commande hybride . . . . .	67
3.7	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Etudes de robustesse et comparaison</b>	<b>70</b>
4.1	Introduction . . . . .	70
4.2	Tests de robustesse . . . . .	70
4.2.1	Effet du vent . . . . .	70
4.2.2	Effet de la force de trainée . . . . .	74
4.2.3	Effet de la variation paramétrique . . . . .	77
4.3	Etude comparative . . . . .	83
4.4	Conclusion . . . . .	86
	<b>Conclusion générale</b>	<b>87</b>
	<b>Annexe</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>89</b>

# Table des figures

1.1	Le dirigeable [28] . . . . .	4
1.2	La libellule artificielle [28] . . . . .	4
1.3	Avion 3D [28] . . . . .	5
1.4	Hélicoptère classique [4] . . . . .	5
1.5	L'hélicoptère en tandem . . . . .	5
1.6	Le trirotor [28] . . . . .	6
1.7	Le vectron [4] . . . . .	6
1.8	L'hélicoptère auto stable [28] . . . . .	6
1.9	Configuration d'un quadrirotor [28] . . . . .	7
1.10	Gyroplane de Bréguet Richet [4] . . . . .	8
1.11	Le quadrirotor d'Oemichen [4] . . . . .	9
1.12	Quadrirotor de Bothezat[4] . . . . .	9
1.13	Convertawings[4] . . . . .	9
1.14	Le Mesicopter [17] . . . . .	11
1.15	Le STARMAC II [13] . . . . .	11
1.16	L'OS4 [31] . . . . .	12
2.1	Les gaz [2] . . . . .	18
2.2	Le lacet [2] . . . . .	18
2.3	Le roulis [2] . . . . .	19
2.4	Le tangage [3] . . . . .	19
2.5	Les repères utilisés . . . . .	19
2.6	Rotation autour de l'axe $X$ (Roulis) . . . . .	20
2.7	Rotation autour de l'axe $Y$ (Tangage) . . . . .	21
2.8	Rotation autour de l'axe $Z$ (Lacet) . . . . .	22
2.9	Les couples aérodynamiques . . . . .	25

2.10	Modèle hybride du quadrirotor . . . . .	37
3.1	Schéma général de la commande du quadrirotor . . . . .	38
3.2	La réponse du système (Backstepping) . . . . .	44
3.3	Les erreurs de poursuite (Backstepping) . . . . .	44
3.4	Les signaux de commande (Backstepping) . . . . .	45
3.5	La réponse du système (Mode glissant) . . . . .	49
3.6	Les erreurs de poursuite (Mode glissant) . . . . .	50
3.7	Les signaux de commande (Mode glissant) . . . . .	50
3.8	La réponse du système (Forwarding) . . . . .	57
3.9	Les erreurs de poursuite (Forwarding) . . . . .	57
3.10	Les signaux de commande (Forwarding) . . . . .	58
3.11	Régulateur hybride du quadrirotor . . . . .	59
3.12	La réponse du système hybride (Backstepping) . . . . .	61
3.13	Les signaux de commande par Backstepping pour le modèle hybride . . . . .	61
3.14	Evolution des modes du système (Backstepping) . . . . .	62
3.15	La réponse du système hybride (SMC) . . . . .	63
3.16	Les signaux de commande par SMC pour le modèle hybride . . . . .	64
3.17	Evolution des modes du système (SMC) . . . . .	64
3.18	La réponse du système hybride (Forwarding) en 3D . . . . .	66
3.19	Les signaux de commande par Forwarding pour le modèle hybride . . . . .	66
3.20	Evolution des modes du système (Forwarding) . . . . .	67
3.21	La réponse du système hybride . . . . .	68
3.22	Les signaux de commande pour le modèle hybride . . . . .	69
3.23	Evolution des modes du système . . . . .	69
4.1	La réponse du système en présence du vent (backstepping) . . . . .	71
4.2	Les erreurs de poursuite en présence du vent (backstepping) . . . . .	71
4.3	La réponse du système en présence du vent (SMC) . . . . .	72
4.4	Les erreurs de poursuite en présence du vent (SMC) . . . . .	72
4.5	La réponse du système en présence du vent (forwarding) . . . . .	73
4.6	Les erreurs de poursuite en présence du vent (forwarding) . . . . .	73
4.7	La réponse du système en présence de la force de traînée (backstepping) . . . . .	74
4.8	Les erreurs de poursuite en présence de la force de traînée (backstepping) . . . . .	75



4.9	La réponse du système en présence de la force de trainée (SMC) . . . . .	75
4.10	Les erreurs de poursuite en présence de la force de trainée (SMC) . . . . .	76
4.11	La réponse du système en présence de la force de trainée (forwarding) . . . . .	76
4.12	Les erreurs de poursuite en présence de la force de trainée (forwarding) . . . . .	77
4.13	La réponse du système avec une variation paramétrique (backstepping) . . . . .	77
4.14	Les erreurs de poursuite avec une variation paramétrique (backstepping) . . . . .	78
4.15	La réponse du système avec une variation paramétrique (SMC) . . . . .	78
4.16	Les erreurs de poursuite avec une variation paramétrique (SMC) . . . . .	79
4.17	La réponse du système avec une variation paramétrique (forwarding) . . . . .	79
4.18	Les erreurs de poursuite avec une variation paramétrique (forwarding) . . . . .	80
4.19	La réponse du système avec une variation de la masse (backstepping) . . . . .	80
4.20	Les erreurs de poursuite avec une variation de la masse (backstepping) . . . . .	81
4.21	La réponse du système avec une variation de la masse (SMC) . . . . .	81
4.22	Les erreurs de poursuite avec une variation de la masse (SMC) . . . . .	82
4.23	La réponse du système avec une variation de la masse (forwarding) . . . . .	82
4.24	Les erreurs de poursuite avec une variation de la masse (forwarding) . . . . .	83
4.25	Poursuite d'une trajectoire hélicoïdale (SMC) . . . . .	85
4.26	Poursuite d'une trajectoire ellipsoïdale (SMC) . . . . .	85
4.27	Poursuite d'autre trajectoire (SMC) . . . . .	86

# Liste des tableaux

2.1	La description des modes de vol . . . . .	33
4.1	Etude comparative entre les commandes sans perturbation . . . . .	84
4.2	Etude comparative entre les commandes avec une variation paramétrique . . . . .	84
4.3	Etude comparative entre les commandes en présence du vent . . . . .	84

# Liste des symboles

$x, y, z$  : Coordonnées cartésiennes

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  : Vitesses de translation

$u, v, w$  : Vitesses de translation

$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  : Accélérations de translation

$\phi, \theta, \psi$  : Angles d'Euler

$p, q, r$  : Vitesses angulaires

$\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  : Accélérations angulaires

$m$  : La masse

$d$  : La distance entre le centre de gravité du quadrirotor et l'axe de rotation des hélices

$g$  : Accélération de la pesanteur

$\omega_i$  : Vitesse angulaire

$P$  : Le poids du quadrirotor

$\rho_{air}$  : La masse volumique de l'air

$C_d$  : Coefficient de trainée

$F_t$  : Force de trainée

$F_p$  : Force de portance

$f_i$  : Force de portance produite par l'hélice  $i$

$J$  : Matrice d'inertie du quadrotor

$b$  : Coefficient de portance

$k$  : Coefficient de trainée

$J_r$  : Matrice d'inertie du rotor

$C_v$  : Coefficient de frottement visqueux

# Introduction générale

Reproduire les capacités humaines ou animales, de perception ou d'action dans les systèmes robotisés, a toujours été un défi que voulait relever chaque chercheur. Pour ce faire, il fallait surmonter diverses contraintes dont la miniaturisation des capteurs et celle des actionneurs, aussi intégrer les technologies nouvelles dans les systèmes embarqués. Les avancées dans le contrôle automatique et l'intelligence artificielle ont conduit à un essor dans le domaine des robots volants à voilures tournantes miniatures.

Ces véhicules aériens ont suscité un grand intérêt grâce à leur manœuvrabilité, capacité d'exécuter des décollages et atterrissages verticaux et leur grand champ d'applications tant bien militaire que civile et en particulier lorsque l'intervention humaine devient difficile ou dangereuse.

Ces aéronefs sont des systèmes fortement non linéaires, couplés et sous actionnés (le nombre d'entrées de commande est inférieur au nombre de degrés de liberté) ce qui induit une grande difficulté dans la conception de la commande. Cela a fait naître plusieurs projets et travaux de recherche aussi bien au niveau national qu'international. Parmi ces robots, l'hélicoptère à quatre rotors, appelé communément quadrirotor, a pris le dessus sur les autres grâce à sa dynamique élégante et sa simplicité de construction. Par contre, ces systèmes sont difficiles à modéliser ce qui rend la synthèse d'une loi de commande performante difficile quelle que soit la méthode utilisée pour obtenir le modèle mathématique ; car il existera toujours un compromis entre la simplicité du modèle et son aptitude à décrire l'ensemble des phénomènes qui caractérisent le comportement global du système.

Notre mémoire est organisé en quatre chapitres de la manière suivante :

- Le premier chapitre est consacré à la description et au fonctionnement du quadrotor. Nous donnons un bref historique sur la conception des quadrotors et présentons quelques travaux récents sur cette configuration.

- Dans le deuxième chapitre, nous décrivons le quadrotor et ses possibilités de vol et nous établissons son modèle dynamique ainsi qu'un modèle hybride proposé, puis nous simplifions le modèle afin de faciliter sa commande.
- Le troisième chapitre est consacré à la conception des méthodes de commande pour la stabilisation de l'engin volant et la poursuite des trajectoires désirées simples ou complexes selon les trois axes  $z$ ,  $x$  et  $y$ .
- Le quatrième chapitre est consacré à l'étude comparative entre les différentes lois de commandes proposées ainsi que leurs robustesse.

Ce manuscrit s'achève par une conclusion discutant les résultats obtenus et proposant quelques perspectives à prendre en considération.

# Chapitre 1

## Généralités sur les drones quadrirotors

### 1.1 Définition d'un drone

Un drone (en anglais UAV : unmanned aerial vehicle) est aujourd'hui largement utilisé pour désigner un « aéronef sans pilote », quelque soit sa taille, sa forme, sa fonction et ses caractéristiques. On retiendra donc la définition anglo-saxonne :

« Drone : an aircraft without a pilot that is operated by remote control ».

On peut noter dans cette définition qu'un drone :

- Est contrôlé, c.-à-d. qu'il n'est pas complètement autonome ;
- n'est pas contrôlé nécessairement depuis le sol, il peut être piloté depuis un autre aéronef ;
- peut transporter des passagers.

### 1.2 Classification des drones

Il n'existe pas une manière unique pour classer les drones, ils peuvent être répartis selon plusieurs critères : Altitude, mission, taille, système de contrôle, ... [4], [26], [28]. Le fonctionnement aérodynamique fournit une autre possibilité de classification. Ainsi, les drones peuvent être structurés en trois familles [4] :

#### 1.2.1 Drones à voilures fixes

Ce sont des drones utilisant des ailes fixes dans leur mode de déplacement. Ils peuvent être :

- Plus lourd que l'air : Type avion ;

- plus léger que l'air : Type dirigeable qui utilisent de l'hélium pour générer une poussée verticale et des rotors pour générer des couples (Figure 1.1) [28]. Ayant un volume important, ils se déplacent lentement et sont relativement plus sensibles au vent. Mais les dirigeables ont l'avantage d'être stables et d'avoir des vibrations mécaniques moindres.

## 1.2.2 Drones à ailes battantes

Les ailes battantes constituent un système de propulsion alternatif pour les mini et micro-aéronefs. Les battements d'ailes reproduisent le vol des oiseaux ou des insectes (Figure 1.2).



FIGURE 1.1 – Le dirigeable [28]



FIGURE 1.2 – La libellule artificielle [28]

## 1.2.3 Drones à voilures tournantes

Ce type se subdivise en quatre sous-classes :

### 1. Configuration ayant un seul rotor

Dans cette configuration, nous trouvons essentiellement les avions appelés 3D (Figure 1.3). Ces avions ont un seul moteur, comme actionneur principal, suffisamment puissant pour décoller verticalement et des ailerons d'une grande surface pour assurer des couples de commande suffisamment grands afin que l'appareil soit facile à piloter. Ils se développent de plus en plus et ils ont l'avantage de pouvoir voler comme un avion normal, ce qui donne la possibilité de se déplacer rapidement et de manière très économique en terme d'énergie [28].



FIGURE 1.3 – Avion 3D [28]

## 2. Configuration à deux rotors

Dans ce type de configuration nous pouvons distinguer ceux qui utilisent un ou deux plateaux cycliques et ceux qui utilisent des pales à pas fixe [4], [28].

Parmi ceux qui utilisent des plateaux cycliques, nous avons l'hélicoptère classique avec un rotor principal et un rotor de queue (Figure 1.4). Dans cette catégorie, on peut citer aussi l'hélicoptère en tandem qui possède deux rotors qui tournent en contre sens mais dans des axes différents (Figure 1.5).

En ce qui concerne les appareils sans plateaux cycliques, il est clair qu'avec seulement deux rotors on ne peut pas générer une force et trois couples indépendants. Il faut donc ajouter soit des ailerons, soit des mécanismes pour faire pivoter les rotors. Ainsi, nous trouvons dans cette catégorie le birotor avec des ailerons, c.-à-d. deux rotors sur des axes différents et des ailerons dans le flux d'air des rotors pour obtenir les couples nécessaires à la commande en 3D. Les rotors peuvent tourner en sens opposés ou dans le même sens.



FIGURE 1.4 – Hélicoptère classique [4]



FIGURE 1.5 – L'hélicoptère en tandem

## 3. Configuration à trois rotors

Dans cette catégorie nous trouvons le trirotor, le vectron et l'hélicoptère auto-stable [4], [28].

Le trirotor est constitué de deux rotors à l'avant qui tournent dans des sens opposés et



un rotor à l'arrière avec orientation réglable. Le fonctionnement est similaire à celui d'un quadrirotor mais la performance en vol n'est pas aussi satisfaisante [4], [28].

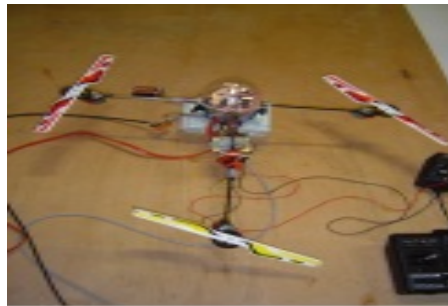


FIGURE 1.6 – Le trirotor [28]

Le vectron est constitué de trois rotors qui tournent dans le même sens (Figure 1.7). Le corps circulaire de l'appareil tourne par conséquent dans le sens contraire. Les vitesses des moteurs sont variées à des instants très précis de manière à obtenir des couples de tangage et de roulis [4], [28].

L'hélicoptère auto-stable (blade-runner) a été inventé récemment par un norvégien (Figure 1.8). Il est constitué de deux rotors à pas fixe qui sont montés sur le même axe et qui tournent dans des sens opposés. Un petit rotor de queue permet d'obtenir le couple de tangage. Cet hélicoptère a la propriété d'être stable grâce au fait qu'il existe une articulation entre les pales du rotor principal et l'axe du rotor. Etant donné son mode de fonctionnement, cet appareil peut être utilisé uniquement en intérieur [4], [28].



FIGURE 1.7 – Le vectron [4]



FIGURE 1.8 – L'hélicoptère auto stable [28]

#### 4. Configuration à quatre rotors

Le quadrirotor est un aéronef soulevé et propulsé par quatre rotors. Comme son nom l'indique, il se compose de quatre moteurs situés aux extrémités d'une armature qui n'est

autre que deux axes en croix.



FIGURE 1.9 – Configuration d'un quadrirotor [28]

Son mouvement est contrôlé par la variation de vitesse de chaque rotor pour changer la force de portance et le couple créé par chacun. Deux rotors du même axe tournent dans le sens horaire ; alors que les deux autres tournent dans le sens antihoraire pour compenser le couple créé par les rotors sur l'armature.

En considérant que les quatre moteurs tournent à la même vitesse et que tous les éléments sont identiques (hélices, dimensions, équilibre des masses), les couples de rotation générés par une paire de moteurs du même axe s'annulent. Donc, le quadrirotor est théoriquement en vol stationnaire (stable sur ses 3 axes).

Par la suite, notre étude sera focalisée sur cette configuration.

### 1.3 Avantages de la configuration quadrirotor

La conception du quadrirotor offre de réels avantages par rapport à d'autres configurations [27] :

- Leurs tailles réduites et leur manœuvrabilité leur permettent de voler dans des environnements fermés (Indoor) ou ouverts (Outdoor) et près des obstacles à l'opposition des hélicoptères classiques ;
- la simplicité de sa mécanique facilite sa maintenance ;
- aucun embrayage n'est exigé entre le moteur et le rotor et aucune exigence n'est donnée sur l'angle d'attaque des rotors ;
- quatre petits rotors remplacent le grand rotor de l'hélicoptère ce qui réduit énormément l'énergie cinétique stockée et minimise les dégâts en cas d'accidents.

## 1.4 Les premiers quadrirotors

La conception des quadrirotors a évolué dans deux grandes générations. La première génération était conçue pour transporter un ou plusieurs passagers. Ces engins étaient parmi les premiers véhicules aériens à décollage et à atterrissage verticaux réussis. Ils sont caractérisés par leurs grandes tailles et ils ont souffert de mauvaises performances (encombrement, qualité des moteurs, matériau de conception, ...).

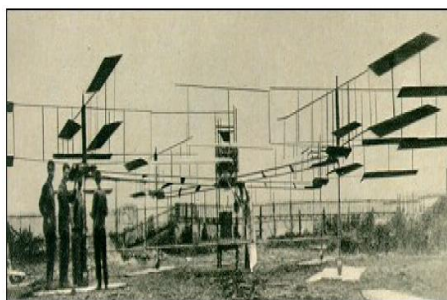


FIGURE 1.10 – Gyroplane de Bréguet Richet [4]

Le premier quadrirotor était le Gyroplane n°1 « Breguet-Richet », conçu par les frères scientifiques français Louis et Jaque Breguet en collaboration avec le professeur Charles Richet en 1907 (Figure 1.10) [4]. Le décollage de cet engin a eu lieu le 24 août 1907 [4], [10]. Ce Gyroplane de 578 kg réussit tout de même à décoller de 60 cm au-dessus du sol, son vol fut cependant si instable que quatre hommes furent nécessaires pour le tenir. Néanmoins, l'Académie Française des Sciences (AFS) accepta de valoriser cet essai comme le premier décollage motorisé à la verticale d'un homme [4], [10]. Ce Gyroplane était équipé d'un moteur Antoinette de 45 CV, entraînant quatre rotors de diamètre 8 m montés par paires, entraînés en alternance. Chaque rotor était constitué de quatre ailes bi-planes. Le pilote fut placé au milieu de cette construction, en-dessous du moteur [10].

Un an plus tard, un autre quadrirotor Gyroplane n°2 a été construit. Il était équipé d'un moteur Renault, plus puissant, qui atteignit 55 CV. Malheureusement, l'aéronef fut détruit lors d'un atterrissage un peu brusque. Le quadrirotor fut réparé, mais la suite des essais des frères Breguet ne déboucha sur aucun résultat significatif [10].

En 1920, Etienne Oemichen a commencé ses expériences dans la conception des aéronefs à voilures tournantes. Six modèles ont été conçus par ce jeune ingénieur de la compagnie Peugeot. Parmi lesquels nous constatons un grand quadrirotor de 800 kg construit en 1922, avec quatre rotors de diamètre (2x7.60 m + 2x6.40 m) et huit hélices tournées par un seul moteur Gnome Rhône de 135 kW (Figure 1.11). Ce quadrirotor a montré un degré considérable de stabilité et

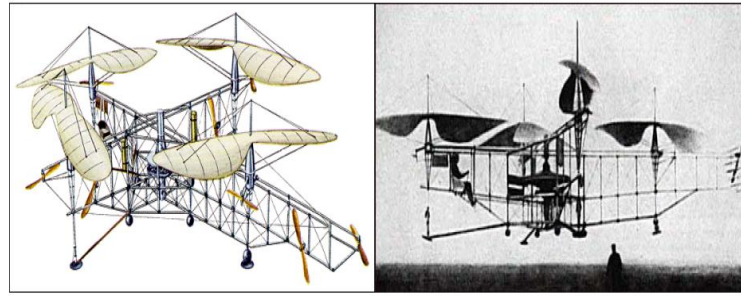


FIGURE 1.11 – Le quadrirotor d’Oemichen [4]

de contrôlabilité. En 1924, Oemichen a fait un premier vol réussi de 360 m et plus de mille tests de vol ont été effectués au cours de ces années [4].

Une autre plateforme à vol vertical a été construite pour le service aérien de l’armée américaine à Dayton, Ohio en 1921 par les ingénieurs George de Bothezat et Ivan Jerome . C’était une structure en croix de 1678 kg portant six hélices de diamètre 8.1 m sur chaque axe de longueur 9 m. Plus de 100 essais de vols ont été exécutés sur ce grand quadrirotor, mais la commande en vol était très difficile et le prototype n’a pas répondu aux exigences d’exécution de l’armée américaine [4].

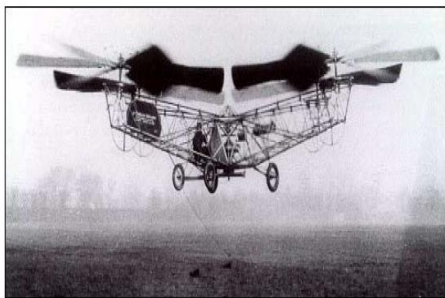


FIGURE 1.12 – Quadrirotor de Bothezat[4]

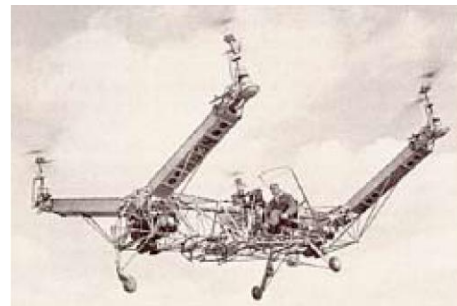


FIGURE 1.13 – Convertawings[4]

Dans les années cinquantes, Amityville (New York), Convertawings a construit un quadrirotor disposant des rotors de diamètre 5.92 m et des ailes pour générer une portance vers l’avant. Deux moteurs Continental de 90 CV ont été utilisés et le véhicule a été commandé en changeant la poussée fournie par chaque rotor. Le quadrirotor de Convertawings a été piloté avec succès, mais la production a été arrêtée en raison d’un manque d’intérêt commercial pour cet avion [4].

La configuration de quadrirotor n’a pas obtenu beaucoup d’attention jusqu’au début des années quatre-vingts. Depuis, plusieurs chercheurs ont commencé à s’intéresser à cette configuration dans des applications mini drones à cause de sa simplicité, sa capacité à supporter une charge utile accrue et son coût réduit.

## **1.5 Les travaux de recherche récents sur les quadrirotors**

Au fil du temps et grâce à l'avancement des techniques de production et l'innovation connus dans la technologie des capteurs et des calculateurs numériques, qui tend particulièrement vers la miniaturisation et la haute précision, une nouvelle génération de quadrirotors a vu le jour. Cette nouvelle génération englobe des prototypes conçus pour être des véhicules aériens sans pilote (Unmanned Aerial Vehicle, UAV), appelés également Drones.

Ces drones sont équipés d'une électronique de commande et des capteurs pour assurer leur autonomie et leur stabilité. Par conséquent, le problème de la commande de cette nouvelle génération d'UAV a connu un énorme progrès et de nouveaux axes de recherches ont été créés pour résoudre cette problématique.

Le nombre de projets portants sur le problème de la conception et la commande des quadrirotors ne cesse d'augmenter. Ils existent des projets qui portent sur les problèmes de la modélisation et la commande en se basant sur des plateformes commerciales comme le Draganflyer, HMX4, UFO4, ... [13]. L'objectif est de doter ces quadrirotors avec plus de capteurs et d'intelligence pour réaliser un certain degré d'autonomie. Tandis que d'autres projets ont abordé le problème de la conception.

### **1.5.1 Le projet Mesicopter (1999-2001)**

Le Mesicopter, appelé également Meso-Scale, est un nano quadrirotor électrique de 40 gr et 1.5 cm d'envergure capable de voler en portant soit sa propre alimentation fournie par des batteries miniatures, soit avec une alimentation externe. Il porte des capteurs dédiés à la recherche atmosphérique ou l'exploration planétaire (Figure 1.14).

Ce travail est une collaboration d'une équipe de chercheurs du département d'Aéronautique et d'Astronautique et le département de Mécanique à l'université de Stanford aux USA, avec l'appui des associés industriels Intel et SRI, qui est un leader dans la fabrication des batteries et des capteurs miniatures de la haute technologie, ainsi que la NASA. Ce dispositif miniature fait partie d'une classe très évoluée de robots volants très utiles dans les mesures atmosphériques [17].

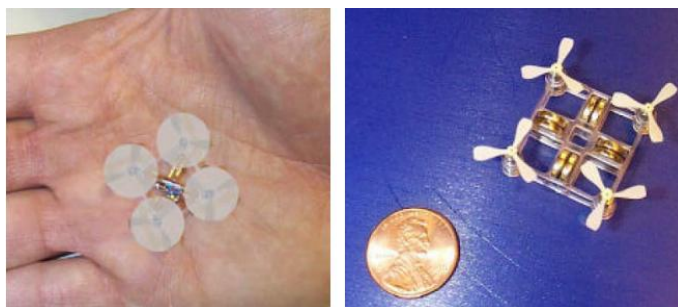


FIGURE 1.14 – Le Mesicopter [17]

### 1.5.2 Le projet STARMAC 2007

STARMAC (Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi-Agent Control) est un autre projet très intéressant qui étudie la commande multi-agents à l'université de Stanford, département d'Aéronautique et d'Astronautique, USA [13].

Les quadrirotors conçus pour ce projet (Figure 1.15) sont des plateformes autonomes dédiées pour des applications Outdoor idéales pour valider de nouveaux algorithmes de coordination multi-véhicules et répondent aux exigences suivantes [13] :

- Une manœuvre simple et sûre quelque soit le milieu (interne ou externe) ;
- une commande de position et poursuite de trajectoire en une pleine autonomie ;
- l'utilisation de plusieurs capteurs pour la perception de l'environnement ;
- la communication avec d'autres plateformes et avec une station au sol ;
- l'implémentation en temps réel des algorithmes de coordination multi-véhicules sur des calculateurs embarqués.



FIGURE 1.15 – Le STARMAC II [13]

Ces quadrirotors sont dotés de moteurs Brushless Axi 2208 pour la propulsion, et ils sont capables de suivre une trajectoire prescrite en utilisant des GPS, des Unités de Mesures Inertielles et des Ultrasons pour l'altitude [13].

La commande et tout calcul sont partagés en deux niveaux : une commande bas niveau qui exécute la boucle d'asservissement en temps réel et produit les signaux de commande PWM. Cela se fait sur une carte microcontrôleurs de Robostix, basée sur le processeur Atmega 128. La planification, l'estimation et la commande de haut niveau sont effectuées sur un ordinateur embarqué Crossbow Stargate 1.0.

### 1.5.3 Le projet OS4 (2003-2007)

Au Laboratoire des Systèmes Autonomes (ASL) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL, Suisse, de nombreux projets ont étudié des hélicoptères existants dans le commerce. Un modèle propre à l'EPFL a été développé : Omnidirectional Stationary Flying Outstretched Robot (OS4). Le développement de l'OS4 a eu pour but la réalisation d'un quadrirotor avec une pleine autonomie et capable de voler dans un environnement encombré. Dans ce projet, l'équipe a travaillé simultanément sur les aspects de la conception et de la commande. Ceci a permis de simplifier la commande par changement de conception et vice-versa [31].



FIGURE 1.16 – L'OS4 [31]

Le quadrirotor OS4 inclut tous les dispositifs nécessaires de l'avionique et d'énergie pour un vol entièrement autonome. Il comporte [31] :

- Une unité de mesure inertielle 3DM-GX1 comme capteur d'attitude ;
- un capteur de position basé sur la vision utilisant une caméra CCD miniature embarquée ;
- cinq capteurs à ultrason SRF10 Ultrasonic Ranger sont utilisés : Quatre pour l'évitement des obstacles et un pour la mesure de l'altitude ;
- un ordinateur embarqué Geode1200, de vitesse 266 Mhz et 128 Mo de RAM est utilisé pour l'implémentation en temps réel des lois de commande.

## 1.6 Technologies des quadrirotors

Le quadrirotor comme tout autre robot est composé de deux parties : Une partie mécanique inclue le corps du quadrirotor et les quatre hélices et une partie électronique comprenant les moteurs, le circuit de commande, l'étage de puissance et un ensemble de capteurs nécessaires pour la stabilisation et l'autonomie du quadrirotor [22].

### 1.6.1 Les capteurs

Afin de mettre en œuvre la commande d'un système donné, les états et les propriétés de son environnement interne et externe doivent être connus. En d'autres termes, les paramètres importants pour la commande doivent être surveillés et rétroagis au système. Pour établir ces exigences, des capteurs spécifiques pour différents environnements d'observation doivent être utilisés [22]. Ces capteurs sont habituellement classés en deux familles [26] :

#### 1. Les capteurs proprioceptifs

Ils permettent de mesurer le déplacement du drone entre deux instants. On peut citer : Accéléromètres, gyroscopes, . . . L'intégration de leurs mesures permet d'estimer la situation courante du véhicule relativement à sa situation initiale. Leurs fiabilités diminuent rapidement avec le temps. Il faut donc leur adjoindre un système permettant de corriger périodiquement la situation absolue du véhicule [26].

#### 2. Les capteurs extéroceptifs

Ils mesurent la situation absolue du drone par observation de points de repère naturel ou artificiel (balises, satellites, . . .) dont la situation est connue dans un référentiel attaché à l'environnement. On peut mentionner : Compas magnétiques, gyrocompas et le GPS. Ils peuvent intervenir pour assurer la sécurité du véhicule (perception de l'environnement proche, contrôle de l'attitude de la plateforme) et pour construire en ligne un modèle de l'environnement exploré [26].

Par exemple, pour la navigation d'un aéronef, une connaissance précise de son orientation et sa position est nécessaire. Ces informations peuvent être délivrées par une unité de mesure inertielle et un GPS (Global Positioning System). L'unité de mesure inertielle est composée d'accéléromètres, Gyroscopes et Magnétomètres à trois axes. Les Gyroscopes sont utilisés pour



mesurer le taux de variation sur la rotation autour d'un axe alors que les accéléromètres sont utilisés pour mesurer des accélérations linéaires du système [22],[26]. A cet ensemble de capteurs s'ajoutent d'autres types de capteurs pour la détection du champ magnétique terrestre qui sert au calcul de la direction et d'altitude.

Les Caméras et tout autre capteur de vision sont utilisés essentiellement pour estimer les positions relatives des cibles, comme les sites au sol et les véhicules terrestres. Cependant, les systèmes de vision ne sont pas aussi rapides ni aussi fiables que d'autres capteurs. Ils nécessitent un temps de calcul plus important et ils sont très sensibles au changement d'éclairage [22],[26].

### **1.6.2 Les moteurs**

Les moteurs utilisés dans ce genre d'application sont des moteurs électriques. Ils sont plus légers que des moteurs à combustion et n'ont pas besoin d'un carburant combustible, ce qui diminue le risque d'explosion [20].

Les moteurs à courant continu disponibles utilisés dans les avions radiocommandés sont soit des moteurs à balais, soit des moteurs sans balais. Les moteurs sans balais sont plus chers, plus puissants, plus efficaces et n'ont pas besoin d'entretien régulier. Par contre, les moteurs à balais sont moins chers avec une durée de vie plus courte et leurs balais nécessitent des remplacements réguliers. Pour ces raisons, il est préférable d'utiliser des moteurs sans balais [20].

Il y a des cas où le moteur n'a pas le couple nécessaire pour tourner le rotor à la vitesse demandée. Pour remédier à ce problème on doit ajouter un variateur de vitesse qui s'en charge.

Comme la structure du quadrirotor doit être la plus légère possible, le variateur de vitesse doit l'être également. La vitesse d'un moteur sans balais peut être commandée par des contrôleurs électroniques de vitesse qui reçoivent la puissance de la batterie et la conduisent aux moteurs selon un signal de commande généré par la technique MLI (modulation en largeur d'impulsion)[20].

### **1.6.3 La carte de commande**

La commande et le pilotage du quadrirotor sont assurés par le biais d'une carte de commande à base du microcontrôleur. Cette carte est destinée à être embarquée sur le quadrirotor, à cet effet, sa taille doit être très réduite en utilisant des composants miniatures. Cette carte reçoit [22] :

- Les mesures d'attitude provenant de l'unité de mesure inertielle ;

- les mesures d’altitude ;
- les mesures de vitesse des quatre rotors.

Avec l’implémentation des lois de commande préprogrammées dans le microcontrôleur, elle doit pouvoir traiter ces informations, exécuter ces lois stabilisantes et générer des signaux MLI pour commander les vitesses des moteurs .

## **1.7 Applications et utilisations**

Les drones sont développés à l’origine pour remplacer l’homme dans des environnements ou des situations dangereuses. Ces engins sans pilote présentent de nombreux avantages [26] :

- Diminution des contraintes liées à la sécurité ;
- l’évolution dans un environnement dangereux et inadapté aux pilotes humains ;
- la miniaturisation possible, donc réduction des coûts de fabrication et de fonctionnement.

### **1.7.1 Applications militaires**

Les lourdes pertes subies pendant la deuxième guerre mondiale par les aviations d’observation de chacun des antagonistes suscitèrent l’idée d’un engin d’observation militaire sans équipage (ni pilote, ni observateur) [26].

En 1973, lors de la guerre du Kippour, les Israéliens en déployèrent pour surveiller le plateau du Golan et saturer les défenses aériennes égyptiennes dans la région du canal de Suez [8].

Pendant la guerre du Golfe en 1991, Les forces de la coalition commencèrent à se servir des drones (les Américains ont fait appel au drone Pioneer) pour la surveillance jour et nuit et les réglages de l’artillerie [8].

Lors du conflit dans les pays de l’ex-Yougoslavie, les Américains mirent en service des Predator et l’armée française des drones de types CL289 et Crécerelle. La recherche des dirigeants d’Al-Qaïda, dans les montagnes d’Afghanistan en 2001-2002, a accentué l’intérêt opérationnel de ces engins qui ont également été utilisés dans le conflit irakien par les forces américaines [8].

Par ailleurs, les progrès effectués dans les technologies de guidage, de propulsion et en matière d’électronique ont permis d’entrevoir de nouvelles performances opérationnelles. En outre, la tendance est aujourd’hui de mettre de moins en moins en péril la vie des pilotes. Les drones seront donc de plus en plus impliqués dans des missions dangereuses ou de très longue durée. Dans les missions d’observation, ils présentent aussi un avantage par rapport aux

satellites. Ils sont, en effet, capables d'assurer une surveillance permanente des zones ciblées et de transmettre en temps réel leurs informations, ce qui n'est pas toujours le cas des satellites.

### **1.7.2 Applications civiles**

De plus en plus, le secteur civil prend en charge de nombreuses missions de surveillance ou autres dans lesquelles la présence de l'homme n'est pas indispensable et\ou de bas coûts d'opération sont demandés. Dans les missions actuelles, on peut citer [23], [26] :

- Surveillance et contrôle des voies maritimes, des clandestins mais aussi détection des pollutions ;
- surveillance des oléoducs, gazoducs, lignes à haute tension ;
- missions de sécurité civile (surveillance du trafic routier, des manifestations, protection des zones réservées ou interdites, évaluation des catastrophes naturelles comme des feux de forêt, activité des volcans, . . . ) ;
- inspection des ouvrages d'art tels les ponts, les viaducs et les barrages ;
- épandages agricoles, surveillance des zones cultivées et mesures atmosphériques.

Par exemple, le programme « Deep Water » pour la garde côtière américaine vise à acquérir 76 drones pour la surveillance maritime et relever les nouveaux défis de sécurité : Observation des pipelines de pétrole et de gaz, surveillance de cargaisons dangereuses, dépistage de vols de contrebande, des actes de piraterie maritime mais aussi des sources d'eau, des vestiges archéologiques, des filons de matières premières ou de combustible, . . .

## **1.8 Conclusion**

Nous constatons que la configuration quadrirotor a connu un grand intérêt dans la dernière décennie, que ce soit à l'échelle scientifique au niveau des unités de recherche ou à l'échelle commerciale. Cela est essentiellement dû aux avancées croissantes des technologies d'instrumentation et des calculateurs et aux avantages qu'offre le quadrirotor par rapport aux autres configuration. Cependant, les chercheurs sont toujours contraints à respecter les difficultés imposées par les phénomènes atmosphériques et les effets aérodynamiques qui sont généralement difficiles à estimer et à modéliser.

# Chapitre 2

## Modélisation du quadrirotor

### 2.1 Introduction

La modélisation regroupe un ensemble des techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. Elle requiert une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques.

La synthèse des lois de commande d'un système dynamique nécessite une modélisation précise de ce dernier afin que le modèle puisse prévoir au mieux le comportement du système aux diverses excitations (commandes, perturbations, ...). Ainsi, plus il est détaillé, plus il est fidèle au système. Néanmoins, cela engendre une complication de l'étude et de la synthèse d'éventuelles lois de commande. Un compromis doit être fait en adoptant des hypothèses simplificatrices afin de pouvoir répondre aux contraintes pratiques.

Le quadrirotor est classé dans la catégorie des systèmes volants les plus complexes vu le nombre des phénomènes physiques qui affectent sa dynamique. Afin de concevoir un contrôleur de vol, on doit d'abord comprendre profondément les mouvements du système et sa dynamique. Cette compréhension est nécessaire pas simplement pour la conception du contrôleur, mais afin de s'assurer que les simulations de l'engin dépendront un comportement aussi proche que possible de la réalité quand la commande est appliquée.

### 2.2 Les possibilités de vol du quadrirotor

Le quadrirotor est un engin volant doté de quatre rotors placés aux extrémités d'une croix. Ce sont ces quatre rotors qui fournissent la force verticale (portance) qui permet à l'appareil de

s'élever. Les mouvements possibles du quadrirotor sont [2] :

### 2.2.1 Les gaz (mouvement vertical)

Cela représente le mouvement de montée/descente du drone. Les quatre moteurs tournent à la même vitesse. On diminue la vitesse des quatre moteurs pour faire descendre le quadrirotor tandis qu'on l'augmente pour le faire monter.

### 2.2.2 Le lacet

Il permet de faire tourner le quadrirotor sur lui même. On réalise cela en agissant sur les moteurs par paires : on diminue la vitesse de rotation des deux moteurs face à face (avant et arrière) et on augmente la vitesse des deux autres (gauche et droit).

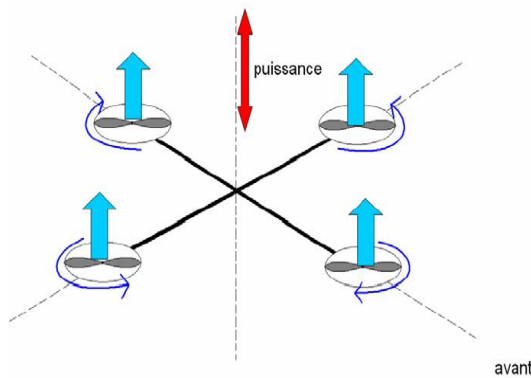


FIGURE 2.1 – Les gaz [2]

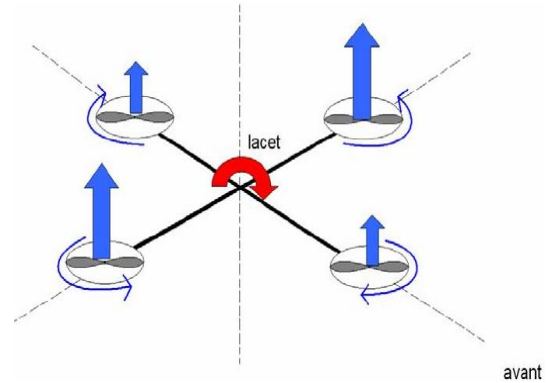


FIGURE 2.2 – Le lacet [2]

### 2.2.3 Le roulis (Le déplacement suivant l'axe Y)

Ce mouvement se produit suite à une rotation autour de l'axe X en agissant sur les moteurs gauche et droit. Par exemple, si le quadrirotor penche à gauche, on augmente la vitesse du moteur gauche tout en diminuant celle du moteur droit.

### 2.2.4 Le tangage (Le déplacement suivant l'axe X)

Ce mouvement se produit suite à une rotation autour de l'axe Y. Les moteurs avant et arrière permettent de garder une assiette stable sur cet axe. Si le quadrirotor est orienté vers l'arrière, il faut donner plus de vitesse au moteur arrière et baisser celle du moteur avant.

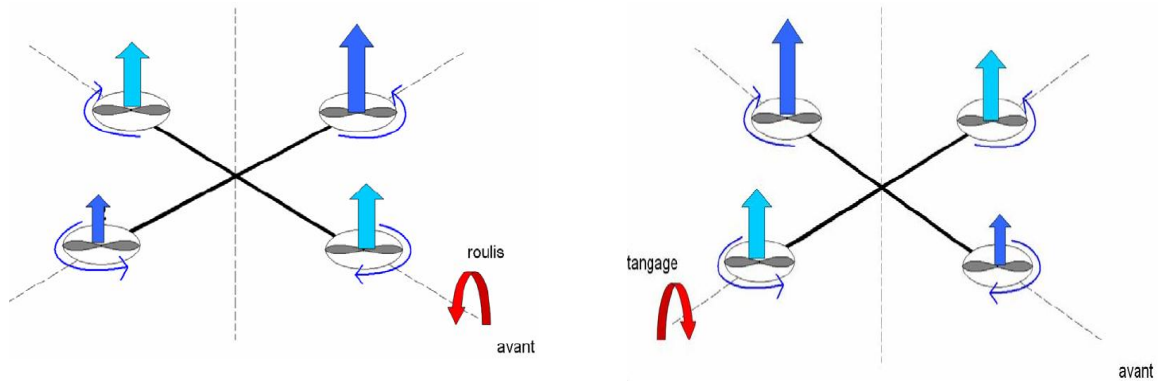


FIGURE 2.3 – Le roulis [2]

FIGURE 2.4 – Le tangage [3]

## 2.3 Repérage du quadrirotor dans l'espace

### 2.3.1 Repères utilisés

Un quadrirotor nécessite deux trièdres pour le repérer dans l'espace, ces repères sont :

#### 1. Le repère terrestre

Il est noté  $R_0(O_0, X_0, Y_0, Z_0)$ . C'est un repère lié à la terre supposé immobile.

#### 2. Le repère lié au corps du quadrirotor

Il est noté  $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ . C'est un repère dont l'origine  $O_1$  coïncide avec le centre de gravité  $G$  du quadrirotor.

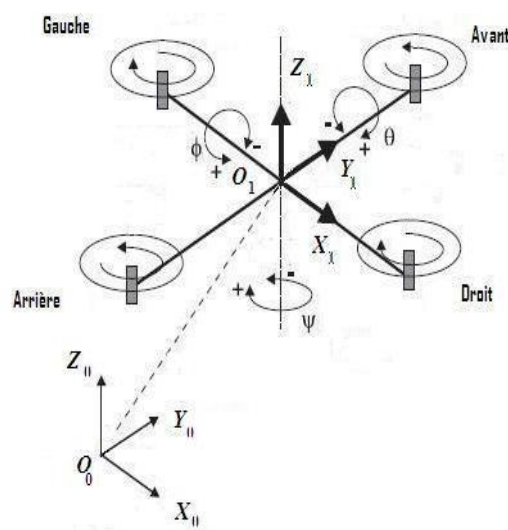


FIGURE 2.5 – Les repères utilisés

Donc les paramètres qui permettent de décrire le mouvement du quadrirotor sont  $(x, y, z, \phi, \theta, \psi, V, \Omega)$  avec :

- $x$  : Coordonnée du centre de gravité  $G$  du quadrirotor suivant  $X_0$  ;
- $y$  : Coordonnée du centre de gravité  $G$  du quadrirotor suivant  $Y_0$  ;
- $z$  : Coordonnée du centre de gravité  $G$  du quadrirotor suivant  $Z_0$  ;
- $\phi$  (angle de roulis) : Rotation autour  $X_1$  ( $-\pi < \phi < \pi$ ) ;
- $\theta$  (angle de tangage) : Rotation autour  $Y_1$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) ;
- $\psi$  (angle de lacet) : Rotation autour  $Z_1$  ( $-\pi < \psi < \pi$ ) ;
- $V = [u, v, w]^T \in R_1$  : La vitesse linéaire liée au quadrirotor ;
- $\Omega = [p, q, r]^T \in R_1$  : La vitesse de rotation liée au même corps.

### 2.3.2 Matrices de rotation

On considère que les centres  $O_0$  et  $O_1$  des deux repères sont confondus, ce qui signifie que le repère  $R_1$  ne fait que des rotations par rapport au repère  $R_0$ . Trois paramètres indépendants sont nécessaires pour décrire complètement l'orientation du repère  $R_1$  par rapport à celle de  $R_0$ .

Le passage du repère  $R_1$  vers le repère  $R_0$  se fera par trois rotations en utilisant deux repères intermédiaires  $R_i$  et  $R_j$  [3].

#### 1. Passage du repère $R_0$ vers le repère $R_i$

La rotation se fait autour de l'axe  $x_i = x_0$ . On passe du repère  $R_0$  vers  $R_i$  en faisant une rotation d'angle  $\phi$  appelé angle de roulis. La représentation se fait par des figures planes,

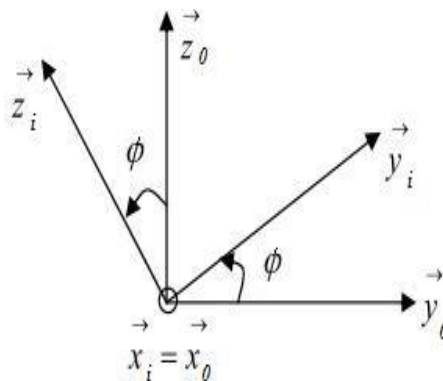


FIGURE 2.6 – Rotation autour de l'axe  $X$  (Roulis)

à partir desquelles nous construisons les matrices de passage. Nous avons ainsi la matrice [3] :

$$R(X_0, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

## 2. Passage du repère $R_j$ vers le repère $R_i$

La rotation se fait autour de l'axe  $y_j = y_i$ . On passe du repère  $R_j$  vers le repère  $R_i$  en faisant une rotation d'angle  $\theta$  appelé angle de tangage.

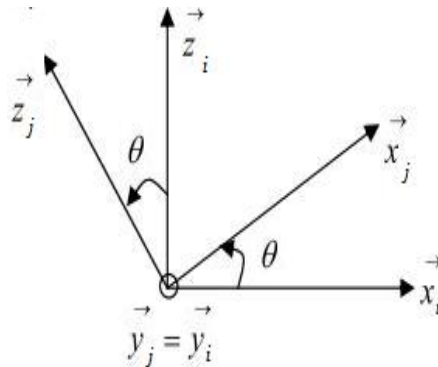


FIGURE 2.7 – Rotation autour de l'axe Y (Tangage)

Nous avons ainsi la matrice [3] :

$$R(Y_0, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

## 3. Passage du repère $R_1$ vers le repère $R_j$

La rotation se fait autour de l'axe  $z_1 = z_j$ . On passe du repère  $R_1$  vers le repère  $R_j$  en faisant une rotation d'angle  $\psi$  appelé angle du lacet.

Nous avons ainsi la matrice [3] :

$$R(Z_0, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$



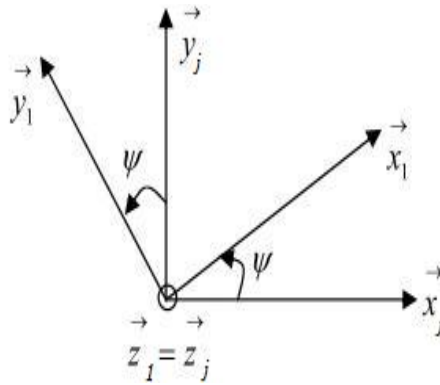


FIGURE 2.8 – Rotation autour de l'axe  $Z$  (Lacet)

Le passage du repère  $R_1$  vers le repère  $R_0$  ou inversement se fait par trois rotations successives de telle sorte que tous les axes de  $R_1$  occupent des positions différentes de celle de  $R_0$ . La matrice de passage de  $R_1$  vers  $R_0$  est donnée par le produit des trois matrices successives, on obtient :

$$R = R(\phi, \theta, \psi) = R(Z_0, \psi) * R(Y_0, \theta) * R(X_0, \phi)$$

$$R = \begin{bmatrix} c(\theta) c(\psi) & -c(\phi) s(\psi) + s(\phi) s(\theta) c(\psi) & s(\phi) s(\psi) + c(\phi) s(\theta) c(\psi) \\ c(\theta) s(\psi) & c(\phi) c(\psi) + s(\phi) s(\theta) s(\psi) & -s(\phi) c(\psi) + c(\phi) s(\theta) s(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi) c(\theta) & c(\phi) c(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Où :  $c(\theta) = \cos(\theta)$  et  $s(\theta) = \sin(\theta)$ .

## 2.4 Modèle dynamique du quadrirotor

Nous adaptons les hypothèses suivantes pour établir le modèle dynamique du quadrirotor [31] :

- La structure du quadrirotor est supposée rigide et symétrique ;
- les hélices sont supposées rigides pour pouvoir négliger l'effet de déformation lors de la rotation ;
- la matrice d'inertie  $J$  est supposée constante (il n'y a pas de changement de poids) ;
- les forces de portance et de trainée sont supposées proportionnelles au carré de la vitesse de rotation des rotors.

## 2.4.1 La dynamique de translation

D'après la première loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(mV)}{dt} = \sum F_{ext \rightarrow repere} \quad (2.5)$$

La vitesse exprimée dans le repère inertiel est :

$$\frac{d(mV)}{dt} = m\dot{V} \quad (2.6)$$

Les forces extérieures appliquées au quadrirotor sont :

### 1. Le poids

Il est donné par :

$$P = -mgz_0 \quad (2.7)$$

### 2. La force de trainée

C'est la résultante des forces qui s'opposent au mouvement du quadrirotor dans l'air. Elle s'exerce parallèlement au sol, de même direction que le mouvement du quadrirotor, mais de sens opposé. Elle représente en quelque sorte les forces de frottement sur l'objet. Elle est donnée par :

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho_{air}C_d|V|V \quad (2.8)$$

Où :  $C_d$  est le coefficient de trainée.

En prenant  $C_{da} = \frac{1}{2}\rho_{air}C_d$ , l'équation précédente devient :

$$F_t = -C_{da}|V|V \quad (2.9)$$

### 3. La force de portance

Elle est perpendiculaire à l'écoulement d'air, dirigée vers le haut c'est-à-dire qu'elle a tendance à faire élever le quadrirotor. Elle représente la force totale produite par les quatre hélices. Elle est donnée par :

$$F_p = \left( \sum_{i=1}^4 f_i \right) z_1 \quad (2.10)$$

Où :  $f_i$  est la force de portance produite par la rotation de l'hélice  $i$ . Elle est donnée par :

$$f_i = b\omega_i^2 \quad (2.11)$$

Avec :  $b$  est le coefficient de portance.

Donc la force de portance totale est :

$$F_p = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)z_1 \quad (2.12)$$

On doit exprimer cette force dans le repère inertiel, pour cela on utilise la matrice de rotation  $R$  :

$$F_p = \left( \sum_{i=1}^4 f_i \right) (Rz_0) \quad (2.13)$$

En remplaçant les expressions des forces, l'équation (2.5) devient :

$$\dot{V} = -gz_0 - \frac{C_{da}}{m}|V|V + \frac{F_p}{m}(Rz_0) \quad (2.14)$$

En développant l'équations (2.14) et sachant que  $\dot{P} = V$ , on obtient le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ \dot{u} = -\frac{C_{da}^u}{m}|u|u + \frac{F_p}{m}(S\psi S\phi + S\theta C\psi C\phi) \\ \dot{v} = -\frac{C_{da}^v}{m}|v|v + \frac{F_p}{m}(S\psi S\theta C\phi - S\phi C\psi) \\ \dot{w} = -g - \frac{C_{da}^w}{m}|w|w + \frac{F_p}{m}(C\theta C\phi) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

## 2.4.2 La dynamique de rotation

D'après la deuxième loi de la dynamique de Newton :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = \sum \tau_{ext \rightarrow repere} \quad (2.16)$$

Et comme la vitesse angulaire est exprimé dans le repère lié au quadricoptère, alors :

$$\frac{d(J\Omega)}{dt} = J\dot{\Omega} + \Omega \wedge J\Omega \quad (2.17)$$

Les couples extérieurs sont :

### 1. Les couples aérodynamiques

Ils sont produits par les forces de trainée et de poussée créées par la rotation des quatre hélices. Ils sont notés  $\tau_a^i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_a^1 = db(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ \tau_a^2 = db(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \tau_a^3 = k(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Avec :  $k$  est le coefficient de traînée et  $d$  est la distance entre le centre de gravité du quadrirotor et l'axe du rotor.

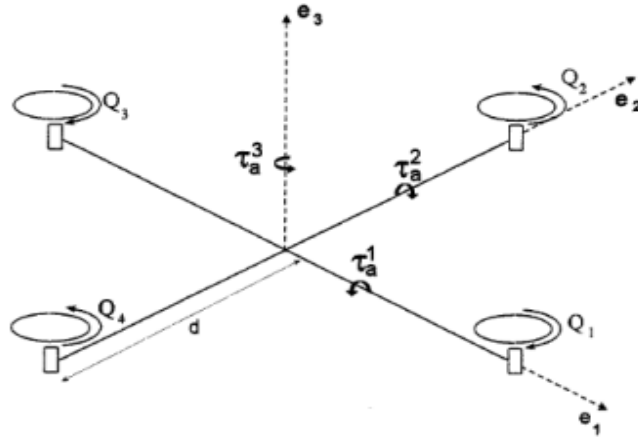


FIGURE 2.9 – Les couples aérodynamiques

## 2. Le moment gyroscopique

Il se crée dans les systèmes physiques en mouvement avec des parties rotatoires. Lorsque la trajectoire du quadrirotor change, le rotor subit des rotations du fuselage. L'expression générale de ce moment est donnée par :

$$\tau_{gyro} = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^i \omega_i \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice d'inertie du chaque rotor est supposée diagonale :

$$J_r = \begin{bmatrix} J_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & J_{rz} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A partir des équations (2.19) et (2.20), on obtient :

$$\tau_{gyro} = \sum_{i=1}^4 [(-1)^i \omega_i J_{rz}] \Omega \wedge z_i \quad (2.21)$$

En remplaçant l'expression (2.21) dans l'équation (2.17) :

$$J\dot{\Omega} + \Omega \wedge J\Omega = \tau_a + \sum_{i=1}^4 [(-1)^i \omega_i J_{rz}] \Omega \wedge z_i \quad (2.22)$$

Comme la structure du quadrirotor est supposée symétrique, la matrice d'inertie  $J$  est diagonale :

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Donc l'équation (2.22) devient :

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{J_y - J_z}{J_x} qr + \frac{J_{rz}}{J_x} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) q + \frac{\tau_a^1}{J_x} \\ \dot{q} = \frac{J_z - J_x}{J_y} pr - \frac{J_{rz}}{J_y} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) p + \frac{\tau_a^2}{J_y} \\ \dot{r} = \frac{J_x - J_y}{J_z} pq + \frac{\tau_a^3}{J_z} \end{cases} \quad (2.24)$$

### 2.4.3 La relation entre les angles d'Euler et les vitesses angulaires

Si un solide tourne à une vitesse constante, sa vitesse angulaire  $\Omega$  est constante. Par contre, les variations des angles d'Euler seront variables car elles dépendent des angles instantanés entre les axes des deux repères. La séquence des angles d'Euler est obtenue à partir de trois rotations successives : roulis, tangage et lacet. La variation  $\dot{\phi}$  nécessite une rotation,  $\dot{\theta}$  nécessite deux rotations et  $\dot{\psi}$  nécessite trois rotations [20] :

$$\Omega = R(X_0, \phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(X_0, \phi) R(Y_0, \theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(X_0, \phi) R(Y_0, \theta) R(Z_0, \psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S(\theta) \\ 0 & C(\phi) & S(\phi)C(\theta) \\ 0 & -S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Donc la relation entre  $\dot{\Phi} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$  et  $\Omega = [p \ q \ r]^T$  est :

$$\dot{\Phi} = T * \Omega$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & S(\phi)t(\theta) & C(\phi)t(\theta) \\ 0 & C(\phi) & -S(\phi) \\ 0 & \frac{S(\phi)}{C(\theta)} & \frac{C(\phi)}{C(\theta)} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

En développant l'équation précédente, on aura :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + S(\phi)t(\theta)q + C(\phi)t(\theta)r \\ \dot{\theta} = C(\phi)q - S(\phi)r \\ \dot{\psi} = \frac{S(\phi)}{C(\theta)}q + \frac{C(\phi)}{C(\theta)}r \end{cases} \quad (2.28)$$

#### 2.4.4 La dynamique des rotors

On peut exprimer la dynamique des rotors en utilisant la deuxième loi de Newton :

$$\frac{d(J_r \bar{\omega}_i)}{dt} = \sum \tau_{ext \rightarrow rotor_i} \quad (2.29)$$

La matrice d'inertie  $J_r$  de chaque rotor est constante, et comme la vitesse angulaire  $\bar{\omega}_i$  est exprimée dans le repère lié aux rotors, donc :

$$\frac{d(J_r \bar{\omega}_i)}{dt} = J_r \dot{\bar{\omega}}_i + \bar{\omega}_i \wedge J_r \bar{\omega}_i \quad (2.30)$$

Les couples (moments) extérieurs sont :

##### 1. Un couple réactif

C'est un couple généré par l'hélice tournant à une vitesse  $\bar{\omega}_i$  et opposant à sa rotation. Il est donné par :

$$\bar{Q}_i = -k|\bar{\omega}_i|\bar{\omega}_i \quad (2.31)$$

Où :  $k$  est le coefficient de trainée. Il dépend de plusieurs facteurs : la densité de l'air, le rayon de l'hélice, nombre de pales, ...

##### 2. Un couple moteur

Il est noté  $\tau_i$ .

##### 3. Un couple de poussée

Il est produit par la force de poussée générée par l'hélice. Comme cette force est perpendiculaire au plan de rotation de l'hélice, elle ne produit aucun couple.

#### 4. Un moment visqueux

Résultat du frottement visqueux, qui s'oppose à la rotation de l'hélice. Il est donné par :

$$\tau_{visq} = -C_v \bar{\omega}_i \quad (2.32)$$

Où :  $C_v$  est le coefficient du frottement visqueux.

Comme les hélices ne tournent pas dans la même direction, le signe du couple moteur est toujours celui de la vitesse de rotation  $\omega_i$ , tandis que le couple réactif et le moment visqueux sont toujours opposés à lui, donc on peut écrire :

$$\sum \tau_{ext \rightarrow rotor_i} = (-1)^i [\tau_i - k\omega_i^2 - C_v \omega_i] z_1 \quad (2.33)$$

L'équation (2.29) devient :

$$\frac{d(J_r (-1)^i \omega_i)}{dt} z_1 = J_{rz} [(-1)^i \dot{\omega}_i z_1 + (-1)^i \omega_i (\Omega \wedge z_1)] \quad (2.34)$$

Le terme  $(-1)^i \omega_i (\Omega \wedge z_1)$  n'est pas dans la direction de l'axe  $z_1$ , donc sa projection sur l'axe  $z_1$  est nulle. L'équation finale de la dynamique du rotor  $i$  sera :

$$J_{rz} \dot{\omega}_i = \tau_i - k\omega_i^2 - C_v \omega_i \quad (2.35)$$

On aura le système suivant :

$$\begin{cases} J_{rz} \dot{\omega}_1 = \tau_1 - k\omega_1^2 - C_v \omega_1 \\ J_{rz} \dot{\omega}_2 = \tau_2 - k\omega_2^2 - C_v \omega_2 \\ J_{rz} \dot{\omega}_3 = \tau_3 - k\omega_3^2 - C_v \omega_3 \\ J_{rz} \dot{\omega}_4 = \tau_4 - k\omega_4^2 - C_v \omega_4 \end{cases} \quad (2.36)$$

#### 2.4.5 Modèle d'état du quadrirotor

Le système dynamique final du quadrirotor donné par (2.15, 2.24, 2.28, 2.36) est subdivisé en quatre sous-systèmes (position /vitesse linéaire, angles d'Euler, vitesse angulaire et équations des rotors). Une architecture de ce type, où l'état du premier système est contrôlé par une commande indirecte, qui est en réalité l'état prochain du système, est appelée une structure cascade.

Pour des raisons de simplification et comme les mouvements angulaires du quadrirotor sont de faibles amplitudes et de petites vitesses, cela revient à écrire :  $\Omega = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ .

Le modèle dynamique simplifié ne contenant pas le modèle des actionneurs sera :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{J_y - J_z}{J_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{J_{rz}}{J_x} \dot{\theta} \bar{\Omega} + \frac{d}{J_x} U_2 \\ \ddot{\theta} = \frac{J_z - J_x}{J_y} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{J_{rz}}{J_y} \dot{\phi} \bar{\Omega} + \frac{d}{J_y} U_3 \\ \ddot{\psi} = \frac{J_x - J_y}{J_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{1}{J_z} U_4 \\ \ddot{x} = (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = (C\phi C\theta) \frac{U_1}{m} - g \end{cases} \quad (2.37)$$

Avec :  $U_1, U_2, U_3$  et  $U_4$  sont les entrées de commande du système où :

$$\begin{cases} \tau_a^1 = dU_2 \\ \tau_a^2 = dU_3 \\ \tau_a^3 = U_4 \\ F_p = U_1 \end{cases} \quad (2.38)$$

L'écriture des entrées de commande en fonction des vitesses de rotation des rotors est la suivante :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -b & 0 & b \\ -b & 0 & b & 0 \\ -k & k & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Tel que :

$$\bar{\Omega} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \quad (2.40)$$

Pour mettre le système sous forme d'état, on peut choisir comme vecteur d'état :

$$X = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T$$



On aura le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_3 x_2 x_6 + a_4 x_2 \bar{\Omega} + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_5 x_2 x_4 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \frac{U_1}{m} U_x \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \frac{U_1}{m} U_y \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{C(x_1)C(x_3)}{m} U_1 - g \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{J_y - J_z}{J_x}, a_2 = \frac{J_{rz}}{J_x}, a_3 = \frac{J_z - J_x}{J_y}, a_4 = -\frac{J_{rz}}{J_y}, a_5 = \frac{J_x - J_y}{J_z} \\ b_1 = \frac{d}{J_x}, b_2 = \frac{d}{J_y}, b_3 = \frac{1}{J_z} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = Cx_1 Sx_3 Cx_5 + Sx_1 Sx_5 \\ U_y = Cx_1 Sx_3 Sx_5 - Sx_1 Cx_5 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

## 2.4.6 Liaisons non holonomes

Les liaisons non holonomes sont des relations liant les deux angles  $\phi$  et  $\theta$  avec  $\psi$  et les composantes du vecteur d'accélération. Ces relations sont obtenues en manipulant les trois équations du modèle dynamique (4.3), (4.4) et (2.46) :

$$\ddot{x} = \frac{U_1}{m} (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi) \quad (2.44)$$

$$\ddot{y} = \frac{U_1}{m} (C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi) \quad (2.45)$$

$$\ddot{z} = \frac{C(\phi)C(\theta)}{m}U_1 - g \quad (2.46)$$

$$(4.3)C\psi + (4.4)S\psi \Rightarrow S\theta C\phi = \frac{m}{U_1}(\ddot{x}C\psi + \ddot{y}S\psi) \quad (2.47)$$

$$(4.3)S\psi - (4.4)C\psi \Rightarrow S\phi = -\frac{m}{U_1}(-\ddot{x}S\psi + \ddot{y}C\psi) \quad (2.48)$$

$$(2.46) \Rightarrow C\theta C\phi = \frac{m}{U_1}(\ddot{z} + g) \quad (2.49)$$

$$(2.47)/(2.49) \Rightarrow \tan \theta = \frac{\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi}{\ddot{z} + g} \quad (2.50)$$

$$(2.48) \Rightarrow \sin \phi = \frac{m}{U_1}(\ddot{x} \sin \psi - \ddot{y} \cos \psi) \quad (2.51)$$

Or :

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2 = \frac{U_1^2}{m^2}$$

Donc :

$$\frac{m}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2}} \quad (2.52)$$

En remplaçant dans (2.51), on obtient :

$$\sin \phi = \frac{\ddot{x} \sin \psi - \ddot{y} \cos \psi}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} + g)^2}} \quad (2.53)$$

Les équations (2.50) et (2.53) sont appelées liaisons non holonomes.

## 2.5 Modélisation hybride du quadrirotor

### 2.5.1 Rappels et définitions

En automatique, les systèmes physiques sont souvent représentés par un modèle dynamique continu ou par un modèle à événements discrets. La nature de chaque modèle est définie selon les variables utilisées pour décrire l'état du système et la variable caractérisant le temps [21].

Cependant, la majorité des systèmes complexes réalistes, mélangeant le continu et le discret, ne peuvent pas être classés ni dans la catégorie "système continu" ni dans la catégorie "système discret". Il est nécessaire alors d'utiliser des modèles hybrides permettant la prise en compte à la fois des variables continues et des variables discrètes ainsi que l'interaction entre elles. Plusieurs modélisations hybrides ont été développées dans la littérature. Elles peuvent être classées en trois catégories [21] :

- L'approche discrète ou événementielle ;
- l'approche continue ;

- l'approche mixte.

Dans ce qui suit, nous présentons une modélisation spécifique des systèmes hybrides, celle que nous appelons : les automates hybrides.

L'idée est simple : Un mode machine est construit en combinant :

- Les changements de l'état continu, décrits par des équations différentielles qu'on appelle les modes ;
- les changements de l'état discret qui sont modélisés en utilisant les transitions, dépendant des conditions et des performances des actions possibles, entre les modes.

Une définition formelle de l'automate hybride est donnée en se basant sur [21] :

**Définition 1** *Un système hybride est définie par :*

$$H = \{Q, X, Init, E, D, U, f, G, R\}$$

- $Q$  est l'ensemble des états discrets ;
- $X$  est l'ensemble des états continus ;
- $Init$  est l'ensemble des conditions initiales ;
- $E \subset Q \times Q$  est l'ensemble des transitions ;
- $D = \{D_q; q \in Q\}$  est l'ensemble des domaines continus,  $\forall q \in Q, D_q$  est un sous ensemble de  $\mathbf{R}^n$  d'intérieur non vide ;
- $U = \{U_q; q \in Q\}$  est l'ensemble des domaines de commandes admissibles,  $\forall q \in Q, U_q$  est un sous ensemble de  $\mathbf{R}^n$  ;
- $f = \{f_q; q \in Q\}$  est l'ensemble des champs de vecteurs décrivant les dynamiques du système associées à chaque état discret,  $\forall q \in Q, f_q : D_q \times U_q \rightarrow \mathbf{R}^p$  ;
- $G = \{G_e; e \in E\}$  est l'ensemble de garde,  $\forall e = (q, q') \in E, G_e \subseteq D_q$  ;
- $R = \{R_e; e \in E\}$  est l'ensemble des fonctions reset,  $\forall e = (q, q') \in E, R_e : G_q \rightarrow 2^{D_{q'}}$  ; où  $2^{D_{q'}}$  dénote l'ensemble des parties de  $D_{q'}$ . On suppose que  $\forall x \in G_e, R_e(x) \neq \phi$ .

## 2.5.2 Modèle hybride du quadrirotor

Le mouvement du quadrirotor peut se décomposer en trois mouvements de base [25] :

- Un mouvement de montée/descente contrôlé par  $U_1$  ;
- une translation dans le plan  $xy$  contrôlée indirectement à travers  $U_2$  et  $U_3$  ;
- une rotation autour de lui-même commandée par  $U_4$ .

En plus, il existe le mode du vol stationnaire qui permet de maintenir le système dans sa position finale. Cela correspond à  $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ .

Le tableau suivant récapitule les quatre modes de vol possibles :

	$U_1$	$U_2$ et $U_3$	$U_4$	Description
Mode 1 : $Z$	Active	0	0	Réglage de l'altitude
Mode 2 : $\psi$	Constante	0	Active	Réglage de l'orientation
Mode 3 : $XY$	Constante	Actives	0	Réglage de l'attitude
Mode 4 : Stationnaire	Active	Actives	Active	Vol stationnaire

TABLE 2.1 – La description des modes de vol

### 1. Mode 1

Dans ce mode, le quadrirotor se déplace verticalement, on active  $U_1$  et on garde  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_4$  nulles [25].

On note  $\bar{U}_1$  la commande à générer :

$$\begin{cases} U_1 = \bar{U}_1 \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 = \frac{\bar{U}_1}{b} \\ -\omega_2^2 + \omega_4^2 = 0 \\ -\omega_1^2 + \omega_3^2 = 0 \\ -\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = \frac{\bar{U}_1}{4b} \end{cases}$$

Prenons en considération les conditions de saturations de la vitesse des moteurs :

$0 \leq \omega_i^2 \leq \omega_{limite}^2$ , on obtient :

$$0 \leq \bar{U}_1 \leq 4b\omega_{limite}^2 \quad (2.54)$$

#### Le vecteur d'état

A partir de l'équation (2.41) et tenant compte des conditions d'existence du vecteur d'état, le nouveau modèle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{C(x_1)C(x_3)}{m}\bar{U}_1 - g \end{cases} \quad (2.55)$$

### 2. Mode 2

Dans ce mode, on active  $U_4$  et on désactive  $U_2$  et  $U_3$ .  $U_1$  prend une valeur constante, qu'on la note  $U_1^*$ , qui permet au quadrirotor de maintenir son altitude [25].

On note  $\bar{U}_4$  la commande à générer :

$$\begin{cases} U_1 = U_1^* \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = \bar{U}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 = \frac{U_1^*}{b} \\ -\omega_2^2 + \omega_4^2 = 0 \\ -\omega_1^2 + \omega_3^2 = 0 \\ -\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2 = \frac{\bar{U}_2}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2^2 + \omega_4^2 = \omega_1^2 + \omega_3^2 = \frac{U_1^*}{2b} \\ \omega_4^2 = \frac{\bar{U}_2}{b} + \omega_2^2 \\ \omega_4^3 = \frac{\bar{U}_3}{b} + \omega_1^2 \end{cases}$$

En prenant en compte les conditions de saturations :  $0 \leq \omega_i^2 \leq \omega_{limite}^2$ , on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{kU_1^*}{b} \leq \bar{U}_4 \leq \frac{kU_1^*}{b} \\ -\frac{4bk\omega_{limite}^2 - kU_1^*}{b} \leq \bar{U}_4 \leq \frac{4bk\omega_{limite}^2 - kU_1^*}{b} \end{cases}$$

On tire alors la condition suivante :

$$|\bar{U}_4| \leq \min\left(\frac{kU_1^*}{b}, \frac{4bk\omega_{limite}^2 - kU_1^*}{b}\right) \quad (2.56)$$

### Le vecteur d'état

A partir de l'équation (2.41) et tenant compte des conditions d'existence du vecteur d'état, la dynamique des variables continues est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_5 x_2 x_4 + b_3 \bar{U}_4 \end{cases} \quad (2.57)$$

### 3. Mode 3

Dans ce mode on active  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_1$  et on garde  $U_4$  nulle.  $U_1$  prend une valeur constante qu'on la note  $U_1^*$  pour laquelle le quadrirotor garde son altitude.  $U_2$  et  $U_3$  permettent le réglage de position dans le plan  $XY$  [25].

On note  $\bar{U}_2$  et  $\bar{U}_3$  les commandes à générer :

$$\begin{cases} U_1 = U_1^* \\ U_2 = \bar{U}_2 \\ U_3 = \bar{U}_3 \\ U_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 = \frac{U_1^*}{b} \\ -\omega_2^2 + \omega_4^2 = \frac{\bar{U}_2}{b} \\ -\omega_1^2 + \omega_3^2 = \frac{\bar{U}_3}{b} \\ -\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2^2 + \omega_4^2 = \omega_1^2 + \omega_3^2 = \frac{U_1^*}{2b} \\ \omega_4^2 = \frac{\bar{U}_2}{b} + \omega_2^2 \\ \omega_4^3 = \frac{\bar{U}_3}{b} + \omega_1^2 \end{cases}$$

Alors, on obtient les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 = \frac{U_1^* - 2\bar{U}_3}{4b} \\ \omega_2^2 = \frac{U_1^* - 2\bar{U}_2}{4b} \\ \omega_3^2 = \frac{U_1^* + 2\bar{U}_3}{4b} \\ \omega_4^2 = \frac{U_1^* + 2\bar{U}_2}{4b} \end{array} \right.$$

En ajoutant les conditions de saturations :  $0 \leq \omega_i^2 \leq \omega_{limite}^2$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{U_1^*}{2} \leq \bar{U}_{2,3} \leq \frac{U_1^*}{2} \\ -\frac{4b\omega_{limite}^2 - U_1^*}{2} \leq \bar{U}_{2,3} \leq \frac{4b\omega_{limite}^2 - U_1^*}{2} \end{array} \right.$$

On tire alors la condition suivante :

$$|\bar{U}_{2,3}| \leq \min\left(\frac{U_1^*}{2}, \frac{4b\omega_{limite}^2 - U_1^*}{2}\right) \quad (2.58)$$

### Le vecteur d'état

A partir de l'équation (2.41) et tenant compte des conditions d'existence du vecteur d'état, la dynamique des variables continues est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 \bar{U}_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_3 x_2 x_6 + a_4 x_2 \bar{\Omega} + b_2 \bar{U}_3 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \frac{U_1^*}{m} U_x \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \frac{U_1^*}{m} U_y \end{array} \right. \quad (2.59)$$

## 4. Mode 4

Dans ce mode, on active toutes les commandes afin de maintenir le système dans sa position finale. Les commandes sont calculées afin d'annuler les différentes vitesses

$$V = [\dot{\phi} \dot{\theta} \dot{\psi} \dot{x} \dot{y} \dot{z}]^T.$$

### 2.5.3 Automate hybride

On définit les propositions suivantes :

- $P_1 = [|z - z_d| \geq \epsilon_p]$
- $P_2 = [|z\dot{z}| \geq \epsilon_v]$
- $P_3 = [|\psi - \psi_d| \geq \epsilon_p]$
- $P_4 = [|\dot{\psi}| \geq \epsilon_v]$
- $P_5 = [|x - x_d| \geq \epsilon_p \vee |y - y_d| \geq \epsilon_p]$
- $P_6 = [|x\dot{x}| \geq \epsilon_v \vee |y\dot{y}| \geq \epsilon_v]$

Où :  $\vee$  et  $\wedge$  sont respectivement les opérateurs mathématiques 'ou' et 'et'.

Et :  $\epsilon_p$  et  $\epsilon_v$  sont respectivement les erreurs tolérées en position et en vitesse.

Les conditions d'invariance pour chaque mode sont :

- $X(q_1) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_1 \vee P_2\}$
- $X(q_2) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_2 \vee P_4\}$
- $X(q_3) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_5 \vee P_6\}$
- $X(q_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge \bar{P}_3 \wedge \bar{P}_5\}$

Et les ensembles de garde sont définis par :

$$E = \{(q_4, q_1), (q_4, q_2), (q_4, q_3), (q_1, q_4), (q_2, q_4), (q_3, q_4)\}$$

Les conditions de transitions sont définies par les transitions possibles entre les différents modes :

- $G(q_4, q_1) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_1\}$
- $G(q_4, q_2) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge P_3\}$
- $G(q_4, q_3) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge \bar{P}_3 \wedge P_5\}$
- $G(q_1, q_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge \bar{P}_2\}$
- $G(q_2, q_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_3 \wedge \bar{P}_4\}$
- $G(q_3, q_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_5 \wedge \bar{P}_6\}$

Les conditions initiales sont :  $Init = \{q_4\} \times \{x \in \mathbf{R}^{12}\}$ .

L'automate hybride du système peut être représenté par le graphe suivant :

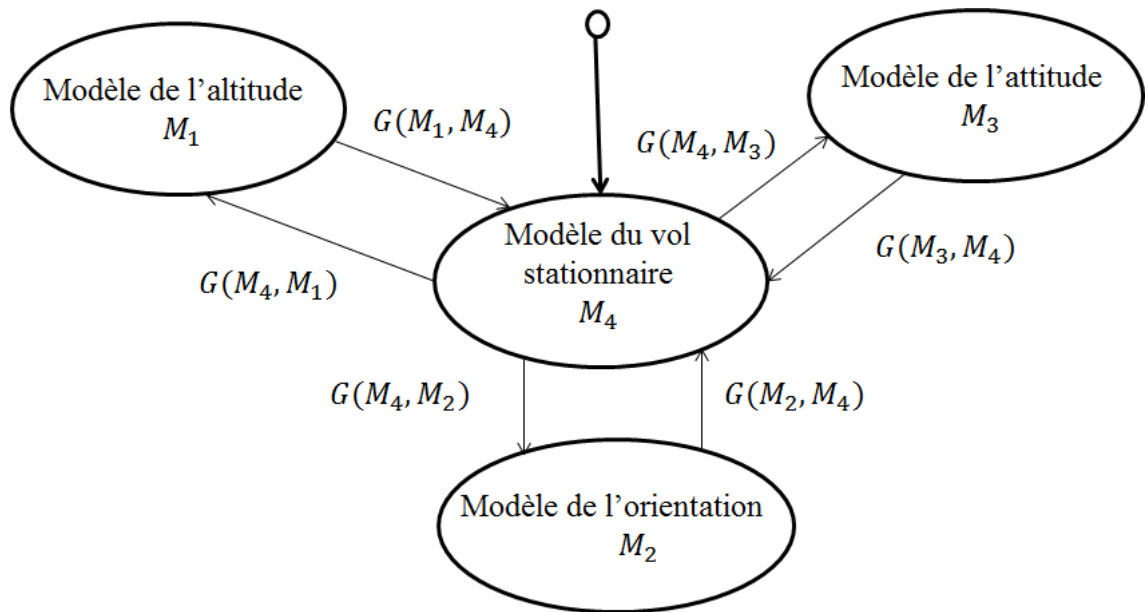


FIGURE 2.10 – Modèle hybride du quadrirotor

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a décrit les mouvements de base du quadrirotor. Puis, on a donné son modèle dynamique par le formalisme de Newton. Ce modèle complet comprend presque tous les phénomènes physiques agissant sur le quadrirotor. Ce dernier modèle montre la nature couplée, complexe, non linéaire, multivariables et le sous actionnement de notre système, ce qui rend la synthèse de la commande relativement difficile. Une autre approche de modélisation, dite hybride, a été faite en se basant sur la décomposition du mouvement.



# Chapitre 3

## Commande des quadrirotors

### 3.1 Introduction

Le quadrirotor est un véhicule aérien à voilure tournante, la difficulté de son contrôle est due principalement à sa dynamique complexe, non linéaire, multivariables et surtout de son sous-actionnement.

Toutes les commandes stabilisantes sont conçues afin d'assurer la poursuite des trajectoires désirées suivant les trois axes ( $X, Y, Z$ ) et l'angle du lacet  $\psi$ . La stratégie de commande adoptée est basée sur la décomposition du système d'origine en deux sous systèmes : le premier concerne la commande en position tandis que le deuxième est celui de la commande en orientation.

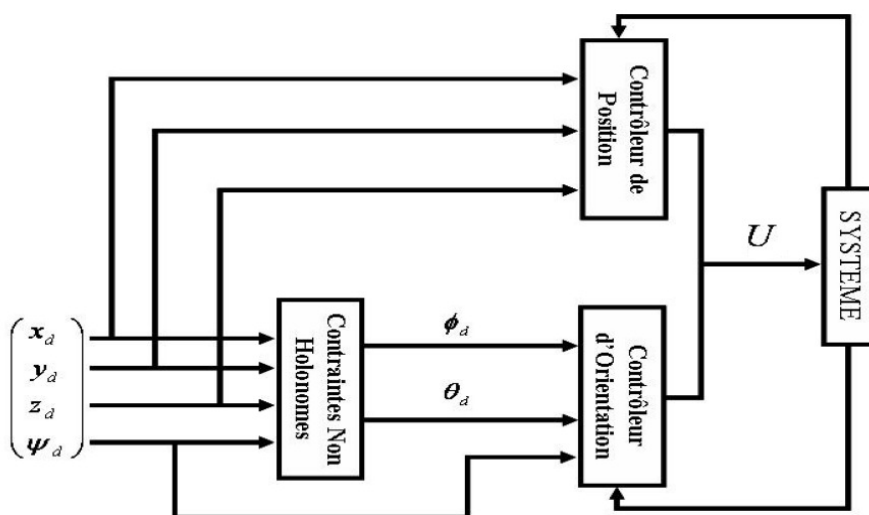


FIGURE 3.1 – Schéma général de la commande du quadrirotor

Comme on ne peut pas commander  $x$  et  $y$  qu'à travers  $\phi$  et  $\theta$ ,  $U_x$  et  $U_y$  sont considérées comme des commandes virtuelles pour le système. Ensuite, en utilisant les contraintes non

holonomes,  $\phi_d$  et  $\theta_d$  seront générées à partir de  $U_x$  et  $U_y$  pour permettre au système d'atteindre  $x_d$  et  $y_d$ .

L'objectif principal de ce chapitre est la synthèse des lois de commande stabilisantes robustes en termes de translation et d'orientation pour le quadrirotor.

## 3.2 Etat de l'art sur la commande du quadrirotor

La configuration à quatre rotors a attiré l'attention des chercheurs en aéronautique, robotique et en automatique. Ainsi, la recherche des lois de commande simples et robustes reste aussi un domaine très vaste. Plusieurs laboratoires travaillent sur la commande des drones et plusieurs lois de commande ont été proposées. Nous présentons ici les différentes techniques :

1. Le contrôleur PID : Cette commande classique n'a aucune exigence sur les paramètres du système à commander et elle est très simple à mettre en œuvre [12], [18], [24], [32], [33];
2. la commande LQR : Cette loi de commande a donné de bons résultats dans la stabilisation d'attitude du quadrirotor [18], [20], [31], [32], [33];
3. l'approche Backstepping : De meilleurs résultats ont été obtenus avec cette technique de commande non linéaire, la convergence des états internes du quadrirotor a été garantie [24], [31]. Cette technique de commande a été renforcée par la suite dans les travaux de [31] par l'ajout de l'action intégrale. Cette approche a été validée sur OS4 dans diverses expériences de vol ;
4. la commande par mode glissant : Cette technique de commande non linéaire a donné de bons résultats et la stabilisation du système a été garantie [15], [24], [31];
5. la Commande par Vision : Cette technique est basée sur la commande visuelle utilisant soit une caméra miniature embarquée à bord du quadrirotor, soit une caméra externe [9], [18].

D'autres techniques de commande ont été élaborées pour la commande du quadrirotor, parmi lesquelles on peut citer : Feedback Linearization, la logique floue, les réseaux de neurones, la commande prédictive, ...

### 3.3 Commande par backstepping

Le backstepping représente une méthode récursive qui permet de construire une loi de commande qui garantit, en tout temps, la stabilité du système. L'écriture des états sous forme paramétrique pure met en évidence les sous-systèmes. Pour chacune de ces parties, il faut trouver, à l'aide d'une fonction de Lyapunov, une commande qui permet de stabiliser ce sous-système. Pour ce faire, l'état suivant est considéré comme la nouvelle entrée de commande (commande virtuelle). L'ordre du sous-système est ensuite augmenté et le développement précédent est recommencé. A la fin, une loi de commande est obtenue [8].

#### 3.3.1 Les étapes de la synthèse

Le Backstepping n'est en fait que la construction de la fonction de Lyapunov ainsi que la commande étape par étape et cela pour un système qui peut être écrit sous la forme, dite cascade, suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 + \phi_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \phi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ \dot{x}_n = u + \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Où :  $x \in \mathbf{R}^n$  et  $u \in \mathbf{R}$ .

Le but est de trouver une loi de commande qui assure la poursuite d'une référence  $y_d$ . Cela s'effectue en plusieurs étapes [7] :

##### 1. Première étape

Soit l'erreur de poursuite donnée par :  $e_1 = x_1 - y_d$ . Sa dynamique est décrite par :

$$\dot{e}_1 = x_2 + \phi_1(x_1) - \dot{y}_d \quad (3.2)$$

On définit la fonction de Lyapunov pour le système (3.2) comme suit :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2. \quad (3.3)$$

Cette fonction est définie positive sur  $\mathbf{R}$ .

Sa dérivé temporelle est donnée par :

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial t} = e_1[x_2 + \phi_1(x_1) - \dot{y}_d] \quad (3.4)$$

Pour rendre  $\dot{V}_1$  définie négative, on peut choisir la commande fictive suivante :

$$x_2 = \alpha_1(x_1) = -c_1 e_1 - \phi_1(x_1) + \dot{y}_d \text{ avec } c_1 \geq 0 \quad (3.5)$$

On aura alors :  $\dot{V}_1 = -c_1 e_1^2$  qui est définie négative sur  $\mathbf{R}$ .

## 2. Deuxième étape

On prend le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 + \phi_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.6)$$

On cherche à trouver une commande fictive  $x_3$  qui permet de ramener  $x_2$  vers  $\alpha_1$  afin de stabiliser  $e_1$ .

$$\text{Soit : } \begin{cases} e_2 = x_2 - \alpha_1(x_1) \\ V_2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

$V_2$  est définie positive sur  $\mathbf{R}^2$ . Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_2 = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 \quad (3.8)$$

Pour rendre  $\dot{V}_2$  définie négative, on peut prendre la commande fictive suivante :

$$x_3 = \alpha_2(x_1, x_2) = -e_1 - \phi_1 + \dot{\alpha}_1 - c_2 e_2 \text{ avec } c_2 \geq 0 \quad (3.9)$$

Ce qui donne :  $\dot{V}_2 = -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2$  qui est définie négative sur  $\mathbf{R}^2$ .

## 3. L'étape $n$

Dans cette étape, on prend le système (3.1). On cherche à trouver la commande  $u$  qui permet de ramener  $x_n$  vers  $\alpha_{n-1}$  (calculé dans l'étape  $n - 1$ ).

$$\text{Soit : } \begin{cases} e_n = x_n - \alpha_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ V_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

$V_n$  est définie positive sur  $\mathbf{R}^n$ . Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_n = \sum_{i=1}^n \dot{e}_i e_i \quad (3.11)$$

Pour rendre  $\dot{V}_n$  définie négative, on peut choisir comme commande :

$$u = -e_{n-1} - \phi_n + \dot{\alpha}_{n-1} - c_n e_n \text{ avec } c_n \geq 0 \quad (3.12)$$

Ce qui donne :  $\dot{V}_n = -\sum_{i=1}^n c_i e_i^2$  qui est définie négative sur  $\mathbf{R}^n$ .

Cette commande  $u$  assure la convergence asymptotique de la sortie vers la référence désirée.

### 3.3.2 Synthèse des lois de commande pour le quadricoptère

Toutes les erreurs de poursuite sont écrites sous la forme suivante :

$$e_i = \begin{cases} x_i - x_{id} / i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ x_i - \dot{x}_{(i-1)d} + \lambda_{i-1} e_{i-1} / i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \end{cases} \quad (3.13)$$

Avec  $\lambda_i \geq 0 \forall i \in [1, 12]$ .

Toutes les fonctions de Lyapunov prennent la forme :

$$V_i = \begin{cases} \frac{1}{2} e_i^2 / i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ \frac{1}{2} (V_{i-1} + e_i^2) / i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \end{cases} \quad (3.14)$$

On va synthétiser la loi de commande pour le sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 \end{cases} \quad (3.15)$$

La synthèse s'effectue en deux étapes :

#### 1. Première étape

On pose :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_{1d} \\ V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 \\ \dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Pour assurer la stabilité du système, il faut que  $\dot{V}_1 \leq 0$ . La stabilisation de  $e_1$  peut avoir lieu en choisissant la commande virtuelle :

$$x_2 = \alpha_1(x_1) = \dot{x}_{1d} - \lambda_1 e_1 \quad / \lambda_1 \geq 0 \quad (3.17)$$

Dans ce cas, la dérivée de  $V_1$  devient alors :  $\dot{V}_1(e_1) = -\lambda_1 e_1^2$  ce qui assure la convergence de  $e_1$  vers l'origine.

## 2. Deuxième étape

Faisons le changement de variable :  $e_2 = x_2 - \alpha_1(x_1)$ .

En prenant comme fonction de Lyapunov :  $V_2 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)$ .

Sa dérivée sera :

$$\dot{V}_2 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \quad (3.18)$$

Sachant que :

$$\dot{e}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 - \ddot{x}_{1d} + \lambda_1 \dot{e}_1 \quad (3.19)$$

La loi de commande qui permet de satisfaire la condition  $\dot{V}_2 \leq 0$  sera :

$$U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \dot{e}_1 - e_1 - \lambda_2 e_2) \quad (3.20)$$

Les mêmes étapes sont reprises afin de déterminer  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_1$ ,  $U_x$  et  $U_y$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} (g - e_{11} - \lambda_{12} e_{12} + \ddot{x}_{11d} - \lambda_{11} \dot{e}_{11}) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - e_3 - \lambda_4 e_4 - \lambda_3 \dot{e}_3 + \ddot{x}_{3d}) \\ U_4 = \frac{1}{b_2} (-a_5 x_2 x_4 + \ddot{x}_{5d} - \lambda_5 \dot{e}_5 - e_5 - \lambda_6 e_6) \\ U_x = \frac{m}{U_1} (\ddot{x}_{7d} - \lambda_7 \dot{e}_7 - e_7 - \lambda_8 e_8) \\ U_y = \frac{m}{U_1} (\ddot{x}_{9d} - \lambda_9 \dot{e}_9 - e_9 - \lambda_{10} e_{10}) \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Avec  $\lambda_i \geq 0$  pour  $i \in [1, 12]$ .

### 3.3.3 Résultats et simulations

Afin de valider et tester la loi synthétisée, on présente dans les figures suivantes la poursuite d'une référence en créneaux (Figure 3.2) ainsi que les erreurs de poursuite (Figure 3.3) et les signaux de commande (les efforts à fournir) (Figure 3.4).

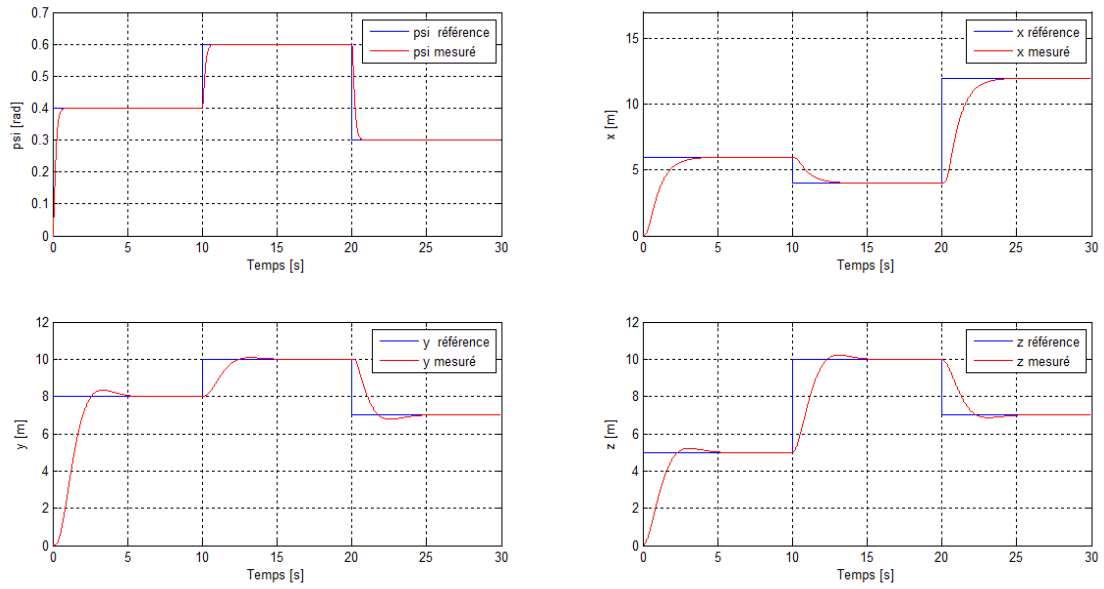


FIGURE 3.2 – La réponse du système (Backstepping)

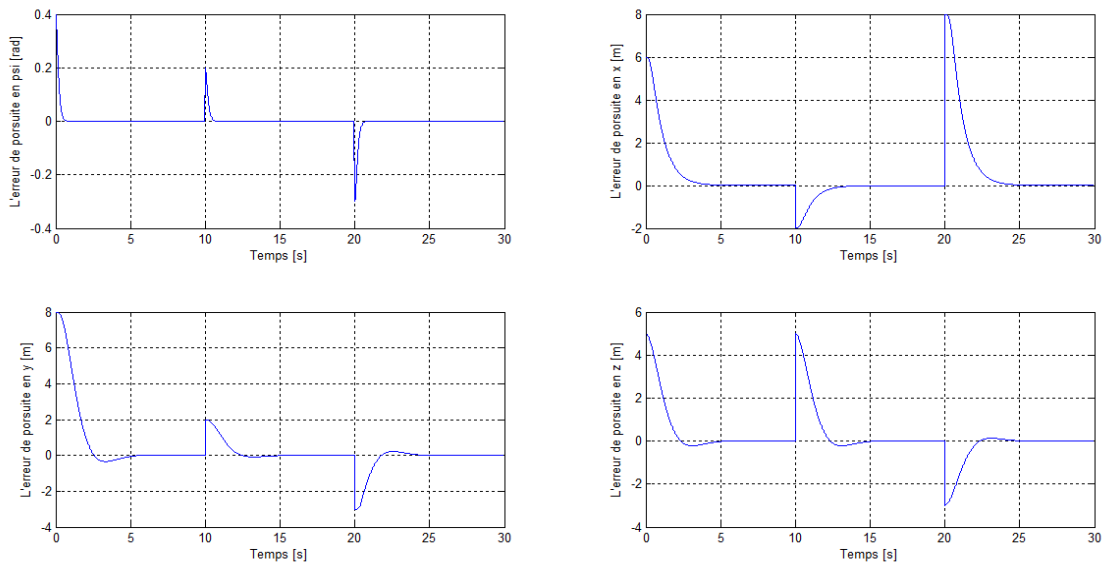


FIGURE 3.3 – Les erreurs de poursuite (Backstepping)

Les erreurs convergent rapidement vers zéro. Le quadrirotor suit sa trajectoire de référence. Une fois arrivé à la référence désirée, le contrôleur utilise de faibles commandes. Cette technique présente une souplesse de manipulation, mais le choix des  $\lambda_i$  est difficile car un mauvais choix peut induire l'instabilité du système.

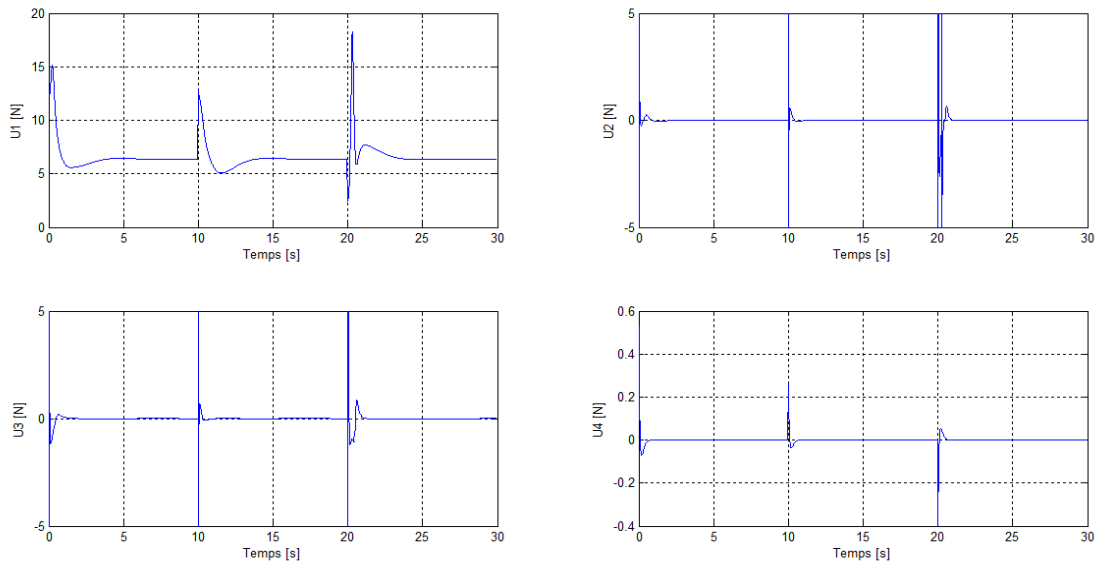


FIGURE 3.4 – Les signaux de commande (Backstepping)

### 3.4 Commande à structure variable

Pour des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres variables dans le temps, les lois de commande classique peuvent être insuffisantes, car elles ne sont pas robustes. La caractéristique principale des systèmes à structure variable est que leur loi de commande se modifie d'une manière discontinue. Les commutations de la commande s'effectuent en fonction des variables d'état utilisées pour créer une "variété" ou "surface" dite de glissement dont le but est de forcer la dynamique du système à suivre celle définie par l'équation de cette surface. Quand l'état est maintenu sur cette surface, le système est dit en régime glissant. La commande par mode glissant a largement prouvé son efficacité à travers les études théoriques rapportées [8].

#### 3.4.1 Synthèse de la commande par mode glissant

On considère le système non linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ y = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.22)$$

Avec l'entrée  $u(t) \in \mathbf{R}^m$ , le vecteur d'état  $x \in \mathbf{R}^n$ , la sortie  $y \in \mathbf{R}^p$ ,  $f$  et  $h$  sont des fonctions de  $C^\infty$ .

La synthèse d'un contrôleur par mode glissant pour le système (3.22) se fait en trois étapes [8], [35] :



## 1. Choix de la surface de glissement

Le choix concernant la forme de cette surface est en fonction de l'application et l'objectif visé. On trouve dans la littérature que Slotine [19] a proposé une forme générale qui consiste à définir une fonction scalaire dans le plan des phases donnée par :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_x\right)^{r-1} e(x) \quad (3.23)$$

$x$  : La variable à commander ;

$e(x) = x - x_d$  : L'erreur de poursuite ;

$\lambda_x$  : Une constante positive qui interprétera la dynamique de la surface ;

$r$  : Le degré relatif du système.

## 2. Conditions d'existence du régime glissant

C'est la condition sous laquelle la trajectoire d'état va atteindre la surface de glissement, appelée aussi "condition d'attractivité". Deux types de conditions d'accès à la surface de glissement sont présentés : Approche directe et approche de Lyapunov. On va utiliser l'approche directe.

Cette approche est la plus ancienne, elle a été proposée par Emilyanov et Utkin [36].

$$\begin{cases} \dot{S}(x) > 0 \text{ lorsque } S(x) < 0 \\ \dot{S}(x) < 0 \text{ lorsque } S(x) > 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Cette condition est toutefois difficile à utiliser, particulièrement dans le cas d'un système à plusieurs entrées.

## 3. Etablissement de la loi de commande

Dans le but de forcer les états du système à atteindre la surface de glissement et le contraindre à rester sur cette surface malgré la présence des incertitudes et des perturbations, la commande  $u$  contient deux termes [8] :

- La commande équivalente qui est un moyen de déterminer le comportement du système lorsqu'un régime glissant idéal est établi. Elle peut être calculée à partir de la condition d'invariance de la surface :

$$\begin{cases} S(x, t) = 0 \\ \dot{S}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Ce qui conduit à l'expression :

$$u_{eq}(x, t) = -\left[\frac{\partial S}{\partial x}g(x, t)\right]^{-1}\left\{\frac{\partial S}{\partial x}f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t}\right\} \quad (3.26)$$

– La deuxième est une fonction discontinue qui permet de satisfaire la condition d'attractivité :  $S(x)\dot{S}(x) \leq 0$ . Elle est généralement de la forme :

$$u_{att} = -K \text{sign}(S) \quad (3.27)$$

Donc, la commande  $u$  sera :

$$u = -\left[\frac{\partial S}{\partial x}g(x, t)\right]^{-1}\left\{\frac{\partial S}{\partial x}f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t}\right\} - K \text{sign}(S) \quad (3.28)$$

### 3.4.2 Le phénomène de Chattering

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Evidemment, pour une utilisation pratique, seule une commutation à une fréquence finie est possible ; ce qui cause un retard entre la mesure de la sortie et le calcul de la commande. Cela conduit le système à quitter la surface de glissement sans que la commande puisse réagir [8], [35].

Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités de la commande peuvent entraîner des oscillations en haute fréquence de la trajectoire du système autour de la surface de glissement, ce phénomène est appelé broutement ou chattering. En conséquence, les performances et la robustesse du système sont dégradées et cela peut même conduire à l'instabilité [35].

Nombreuses solutions ont été proposées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. Il existe des méthodes comme celle de la couche limite (boundary layer) qui consiste à remplacer la fonction *sign* de la loi de commande par une approximation continue à gain élevé dans un voisinage de  $S$ , et saturée en dehors de ce voisinage. Le régime glissant qui en résulte n'est plus confiné dans  $S$ , mais dans un voisinage de celui-ci. Dans ce cas, le système est dit en régime pseudo-glissant. Ces méthodes réduisent la robustesse de la commande. Elles sont paramétrées par une constante positive  $\delta$  réglée pour avoir un bon compromis entre la réduction du chattering et la conservation de la robustesse. Dans les méthodes présentées ici, plus  $\delta$  est petit, plus l'approximation tend vers la fonction *sign*, et donc meilleure est la robustesse, au détriment de la réduction du chattering [35].

Les fonctions les plus utilisées sont [7], [35] :

### Fonction saturation

$$sat(\sigma, \delta) = \begin{cases} sign(\sigma) & si \ |\sigma| \geq \delta \\ \frac{\sigma}{\delta} & si \ |\sigma| \leq \delta \end{cases} \quad (3.29)$$

### La fonction pseudo-signe

$$v(\sigma, \delta) = \frac{\sigma}{|\sigma| + \delta} \quad (3.30)$$

### La fonction arctangente

$$v(\sigma, \delta) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (3.31)$$

### La fonction tangente hyperbolique

$$v(\sigma, \delta) = \tanh\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (3.32)$$

## 3.4.3 Synthèse des commandes pour le quadrirotor

Tout d'abord, nous définissons les surfaces de glissement suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_\phi = \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \\ S_\theta = \dot{e}_3 + \lambda_2 e_3 \\ S_\psi = \dot{e}_5 + \lambda_3 e_5 \\ S_x = \dot{e}_7 + \lambda_4 e_7 \\ S_y = \dot{e}_9 + \lambda_5 e_9 \\ S_z = \dot{e}_{11} + \lambda_6 e_{11} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Avec :  $e_i = x_i - x_{id}$  /  $i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  et  $\lambda_i \geq 0$ .

On prend la surface  $S_z$  et on montre les étapes de la synthèse de la commande.

La dérivée de la surface  $S_z$  est :

$$\dot{S}_z = \ddot{e}_{11} + \lambda_6 \dot{e}_{11}. \quad (3.34)$$

Pour assurer la stabilité du système, il faut avoir  $S(z)\dot{S}(z) \leq 0$  (pour satisfaire la condition d'attractivité). On peut choisir :

$$\dot{S}_z = -k_6 sign(S_z) = \dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} + \lambda_6(x_{12} - \dot{x}_{11d}) \quad \text{avec } k_6 \geq 0 \quad (3.35)$$

Il en résulte :

$$U_1 = \frac{m}{\cos(x_1)\cos(x_3)}[-k_6 \text{sign}(S_z) + g + \ddot{x}_{11d} - \lambda_6(x_{12} - \dot{x}_{11d})] \quad (3.36)$$

Les commandes  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_x$  et  $U_y$  sont calculées de la même manière, elles sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2 = \frac{1}{b_1}(-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{1d} - \lambda_1(x_2 - \dot{x}_{1d}) - k_1 \text{sign}(S_\phi)) \\ U_3 = \frac{1}{b_2}(-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{3d} - \lambda_2(x_4 - \dot{x}_{3d}) - k_2 \text{sign}(S_\theta)) \\ U_4 = \frac{1}{b_3}(-a_5 x_2 x_4 + \ddot{x}_{5d} - \lambda_3(x_6 - \dot{x}_{5d}) - k_3 \text{sign}(S_\psi)) \\ U_x = \frac{m}{U_1}(\ddot{x}_{7d} - \lambda_4(x_8 - \dot{x}_{7d}) - k_4 \text{sign}(S_x)) \\ U_y = \frac{m}{U_1}(\ddot{x}_{9d} - \lambda_5(x_{10} - \dot{x}_{9d}) - k_5 \text{sign}(S_y)) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Avec :  $k_i \geq 0$  pour  $i \in [1, 6]$ .

### 3.4.4 Résultats et simulations

On a vu que la commande par mode glissant idéal présente un phénomène de chattering [35]. Pour remédier à ce problème, on a remplacé la fonction  $\text{sign}$  par la fonction  $\tanh(\frac{S}{\delta})$  pour le réglage de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Pour le réglage des angles, la fonction  $\text{sign}$  a été remplacée par la fonction  $\frac{2}{\pi} \arctan(\frac{S}{\delta})$ . On présente dans les figures suivantes la poursuite d'une référence en créneaux (Figure 3.5) ainsi que les erreurs de poursuite (Figure 3.6) et les signaux de commande (les efforts à fournir) (Figure 3.7).

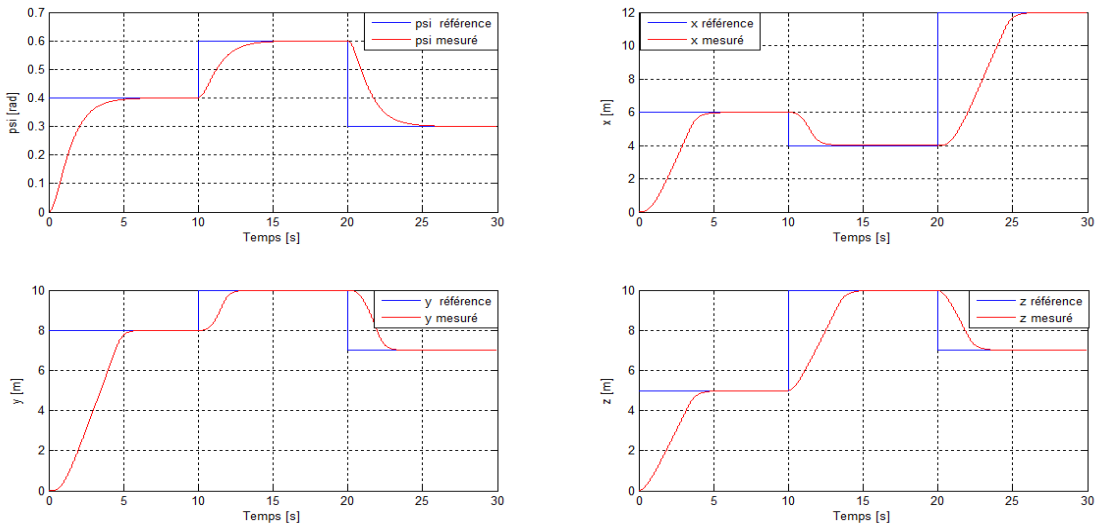


FIGURE 3.5 – La réponse du système (Mode glissant)

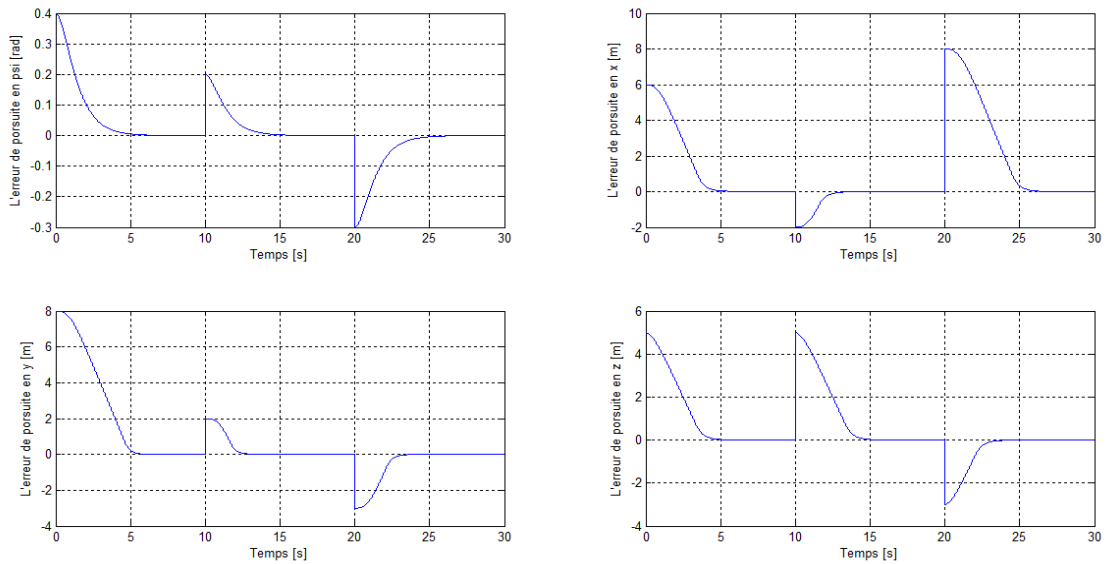


FIGURE 3.6 – Les erreurs de poursuite (Mode glissant)

Le quadrirotor suit la trajectoire de référence. Une fois arrivé à la référence désirée, Les commandes sont stables après un régime transitoire très court. Donc, la stabilité du système est assurée. Cette technique présente une souplesse de manipulation, mais le choix des  $\lambda_i$  et  $k_i$  est délicat car un mauvais choix peut induire l'instabilité du système. Le problème de chattering n'existe plus en utilisant des fonctions continues, ce qui présente un avantage par rapport au cas du mode glissant idéal.

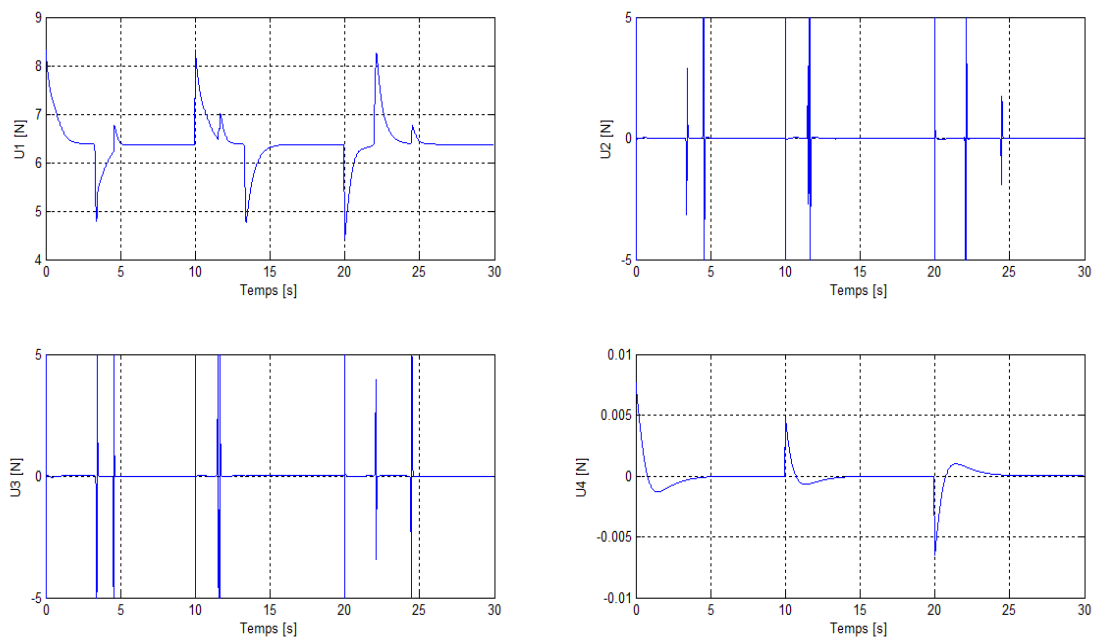


FIGURE 3.7 – Les signaux de commande (Mode glissant)

## 3.5 Commande par forwarding

Comme Backstepping, Forwarding n'est en fait que la construction de la fonction de Lyapunov ainsi que la commande d'une manière récursive et cela pour un système qui peut être écrit sous la forme suivante [29], [30], [37], [38] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_2, \dots, x_n) + g_1(x_2, \dots, x_n)u \\ \dot{x}_2 = f_2(x_3, \dots, x_n) + g_2(x_3, \dots, x_n)u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)u \\ \dot{x}_n = u \end{cases} \quad (3.38)$$

Où :  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}$  et  $g = [g_1, \dots, g_{n-1}, 1]^T$ .

L'objectif est de déterminer une loi de commande qui assure la stabilisation globale du système (3.38). Cela s'effectue en plusieurs étapes.

En premier lieu, nous essayons de stabiliser  $x_n$  à travers  $u$ . En prenant une fonction de Lyapunov  $V_n$  qui est définie positive sur  $\mathbf{R}$  et on cherche à trouver un retour d'état  $u = \alpha_n(x_n)$  pour stabiliser  $x_n$ .

L'étape suivante consiste à augmenter le système, de  $x_n$  à  $x_{n-1}$ , et remplacer la commande  $u$  par  $u = \alpha_n(x_n) + v_{n-1}$ . En prenant une fonction de Lyapunov  $V_{n-1}$  définie positive sur  $\mathbf{R}^2$ , on cherche à trouver un retour d'état  $v_{n-1} = \alpha_{n-1}$  qui permet de stabiliser le système augmenté.

On refait la même procédure jusqu'à la dernière étape, où une commande  $u$  qui permet d'avoir une stabilisation globale du système sera calculée.

### 3.5.1 Les étapes de la synthèse

La synthèse de la loi de commande pour le système (3.38) s'effectue en plusieurs étapes [29], [30], [38] :

#### 1. Première étape

On prend le système :

$$\dot{x}_n = u \quad (3.39)$$

Soit la fonction de Lyapunov :  $V_n = \frac{1}{2}x_n^2$ .

Sa dérivée est donnée par :  $\dot{V}_n = x_n u$ .

Pour rendre  $\dot{V}_n$  définie négative, on peut prendre :

$$u = \alpha_n(x_n) = -\lambda_n L_g V_n = -\lambda_n x_n \text{ avec } \lambda_n \geq 0 \quad (3.40)$$

Ce qui donne  $\dot{V}_n = -\lambda_n x_n^2$  qui est définie négative sur  $\mathbf{R}$ .

## 2. Deuxième étape

Soit le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)u \\ \dot{x}_n = u \end{cases} \quad (3.41)$$

Pour  $u = \alpha_n(x_n)$ , le système (3.41) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_{n-1} = \phi_{n-1}(x_n) \\ \dot{x}_n = -\lambda_n x_n \\ \phi_{n-1}(x_n) = f_{n-1}(x_n) - \lambda_n g_{n-1}(x_n)x_n \end{cases} \quad (3.42)$$

Le terme  $\phi_{n-1}$  est appelé le terme d'interconnexion.

La solution temporelle du système précédent sera :

$$\begin{cases} \tilde{x}_n(t) = x_n(0)e^{-\lambda_n t} \\ \tilde{x}_{n-1}(t) = \int_0^t (f_{n-1}(\tilde{x}_n) - \lambda_n g_{n-1}(\tilde{x}_n)\tilde{x}_n) dt + x_{n-1}(0) \end{cases} \quad (3.43)$$

La nouvelle entrée de commande pour le système (3.41) sera [29], [30] :

$$u = \alpha_n(x_n) + v_{n-1} \quad (3.44)$$

La fonction de Lyapunov pour le système (3.41) est donnée par [30] :

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= V_n + \frac{1}{2}x_{n-1}^2 + \int_0^\infty \tilde{x}_{n-1}(t)\phi_{n-1}(\tilde{x}_n(t))dt \\ &= V_n + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_{n-1}^2(t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sa dérivée est [30] :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &= \dot{V}_{n-1}|_{u=\alpha_n(x_n)} + (L_g V_{n-1})v_{n-1} \\ &= -\lambda_n (L_g V_n)^2 + (L_g V_{n-1})v_{n-1} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Donc pour rendre  $\dot{V}_{n-1}$  définie négative, on peut prendre :

$$v_{n-1} = -\lambda_{n-1}L_g V_{n-1} \text{ avec } \lambda_{n-1} \geq 0 \quad (3.47)$$

Dans ce cas là, on aura :  $\dot{V}_{n-1} = -\lambda_n(L_g V_n)^2 - \lambda_{n-1}(L_g V_{n-1})^2$ . Cette fonction est définie négative sur  $\mathbf{R}^2$ . La commande qui assure la stabilisation globale du système (3.41) est alors [30] :

$$u = \alpha_{n-1}(x_n, x_{n-1}) = \alpha_n(x_n) + v_{n-1} \quad (3.48)$$

### 3. L'étape n

Dans cette étape, on considère le système complet décrit par l'équation (3.38).

Pour  $u = \alpha_2(x_2, \dots, x_n)$  (calculée dans l'étape  $(n - 1)$ ), le système (3.38) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \phi_1(x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_3, \dots, x_n) + g_2(x_3, \dots, x_n)\alpha_2(x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)\alpha_2(x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n = \alpha_2(x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.49)$$

Avec le terme d'interconnexion :

$$\phi_1(x_2, \dots, x_n) = f_1(x_2, \dots, x_n) + g_1(x_2, \dots, x_n)\alpha_2(x_2, \dots, x_n) \quad (3.50)$$

On note  $\tilde{x}_i(t)$  pour  $i \in [1, n]$  la solution temporelle du système (3.49).

La nouvelle entrée de commande pour (3.38) sera [30] :

$$u = \alpha_2(x_2, \dots, x_n) + v_1 \quad (3.51)$$

La fonction de Lyapunov est alors [30] :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \int_0^\infty \tilde{x}_1(t)\phi_1(\tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))dt \\ &= V_2 + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_1^2(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Sa dérivée est [30] :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{V}_1|_{u=\alpha_2} + (L_g V_1)v_1 \\ &= -\lambda_2(L_g V_2)^2 + (L_g V_1)v_1 \end{aligned} \quad (3.53)$$



Donc pour rendre  $\dot{V}_1$  définie négative, on peut prendre le retour d'état non linéaire suivant :

$$v_1 = -\lambda_1 L_g V_1 \text{ avec } \lambda_1 \geq 0 \quad (3.54)$$

Il en résulte :

$$\dot{V}_1 = -\lambda_2 (L_g V_2)^2 - \lambda_1 (L_g V_1)^2 \quad (3.55)$$

Cette fonction est définie négative donc la stabilité globale du système (3.38) est assurée.

La commande finale est [30] :

$$u = \alpha_1(x_1, \dots, x_n) = \alpha_2(x_2, \dots, x_n) + v_1 \quad (3.56)$$

### 3.5.2 Synthèse des lois de commande pour le quadrirotor

Toutes les erreurs de poursuite sont écrites sous la forme suivante :

$$e_i = \begin{cases} x_i - x_{id} / i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ x_i - \dot{x}_{(i-1)d} / i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \end{cases} \quad (3.57)$$

Toutes les fonctions de Lyapunov prennent la forme :

$$V_i = \begin{cases} \frac{1}{2} e_i^2 / i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \\ V_{i+1} + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}_i^2 / i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \end{cases} \quad (3.58)$$

Avec  $\tilde{e}_i$  représente la solution temporelle du système.

Les étapes de la synthèse de la commande seront montrées pour le sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} + b_1 U_2 \end{cases} \quad (3.59)$$

Soit l'erreur de poursuite définie par :  $e_1 = x_1 - x_{1d}$ .

Sa dynamique est décrite par :  $\dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_{1d}$ .

Si on pose  $e_2 = x_2 - \dot{x}_{1d}$ , le système (3.59) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \bar{\Omega} - \ddot{x}_{1d} + b_1 U_2 \end{cases} \quad (3.60)$$

La synthèse s'effectuera en deux étapes :

## 1. La première étape

On ne considère que la deuxième équation du système (3.60).

Soit la fonction de Lyapunov :  $V_2 = \frac{1}{2}e_2^2$ .

Sa dérivée est :  $\dot{V}_2 = e_2\dot{e}_2$ .

Pour rendre  $\dot{V}_2$  définie négative, on peut choisir la commande :

$$U_2 = \alpha_2(x) = \frac{1}{b_1}(-a_1x_4x_6 - a_2x_4\bar{\Omega} + \ddot{x}_{1d} - \lambda_2e_2) \text{ avec } \lambda_2 \geq 0 \quad (3.61)$$

On aura  $\dot{V}_2 = -\lambda_2e_2^2$  qui est définie négative sur  $\mathbf{R}$ . Cette commande va assurer la convergence de  $e_2$  vers l'origine.

## 2. Deuxième étape

En remplaçant la commande trouvée dans l'étape précédente dans le système (3.60), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\lambda_2e_2 \end{cases} \quad (3.62)$$

La solution temporelle de ce système est :

$$\begin{cases} \tilde{e}_2(t) = e_2(0)e^{-\lambda_2t} \\ \tilde{e}_1(t) = \frac{-1}{\lambda_2}e_2(0)e^{-\lambda_2t} + e_1(0) + \frac{1}{\lambda_2}e_2(0) \end{cases} \quad (3.63)$$

On pose :

$$\begin{cases} e_2(0) = e_2 \\ e_1(0) = e_1 \end{cases} \quad (3.64)$$

Soit la fonction de Lyapunov :

$$V_1 = V_2 + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}_1^2(t) \quad (3.65)$$

$$V_1 = \frac{1}{2}[e_2^2 + (e_1 + \frac{1}{\lambda_2}e_2)^2] \quad (3.66)$$

Si on pose :  $U_2 = \alpha_2(x) + w_2$ , la dérivée de  $V_1$  sera :

$$\dot{V}_1 = e_2\dot{e}_2 + (e_1 + \frac{1}{\lambda_2}e_2)(\dot{e}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\dot{e}_2) \quad (3.67)$$

$$\dot{V}_1 = -\lambda_2e_2^2 + [\frac{e_1}{\lambda_2} + (\frac{1}{\lambda_2^2} + 1)e_2]b_1w_2 \quad (3.68)$$

Pour rendre  $\dot{V}_1$  définie négative, on peut prendre :

$$w_2 = -\frac{\lambda_1}{b_1} \left[ \frac{e_1}{\lambda_2} + \left( \frac{1}{\lambda_2^2} + 1 \right) e_2 \right] \text{ avec } \lambda_1 \geq 0 \quad (3.69)$$

La commande  $U_2$  devient :

$$U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_1 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} + \lambda_1 + \lambda_2 \right) e_2 + \ddot{x}_{1d}) \quad (3.70)$$

Cette commande va assurer la stabilisation du système (3.60).

Les mêmes étapes sont reprises afin de déterminer  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_1$ ,  $U_x$  et  $U_y$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} e_3 - \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_4^2} + \lambda_3 + \lambda_4 \right) e_4 + \ddot{x}_{3d}) \\ U_4 = \frac{1}{b_3} (-a_5 x_2 x_4 - \frac{\lambda_5}{\lambda_6} e_5 - \left( \frac{\lambda_5}{\lambda_6^2} + \lambda_5 + \lambda_6 \right) e_6 + \ddot{x}_{5d}) \\ U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} \left( g - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}} e_{11} - \left( \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}^2} + \lambda_{11} + \lambda_{12} \right) e_{12} + \ddot{x}_{11d} \right) \\ U_x = \frac{m}{U_1} \left( -\frac{\lambda_7}{\lambda_8} e_7 - \left( \frac{\lambda_7}{\lambda_8^2} + \lambda_7 + \lambda_8 \right) e_8 + \ddot{x}_{7d} \right) \\ U_y = \frac{m}{U_1} \left( -\frac{\lambda_9}{\lambda_{10}} e_9 - \left( \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}^2} + \lambda_9 + \lambda_{10} \right) e_{10} + \ddot{x}_{9d} \right) \end{array} \right. \quad (3.71)$$

Avec :  $\lambda_i \geq 0$  pour  $i \in [1, 12]$ .

### 3.5.3 Résultats et simulations

On présente dans les figures suivantes la poursuite d'une référence en créneaux (Figure 3.8) ainsi que les erreurs de poursuite (Figure 3.9) et les signaux de commande (les efforts à fournir) (Figure 3.10).

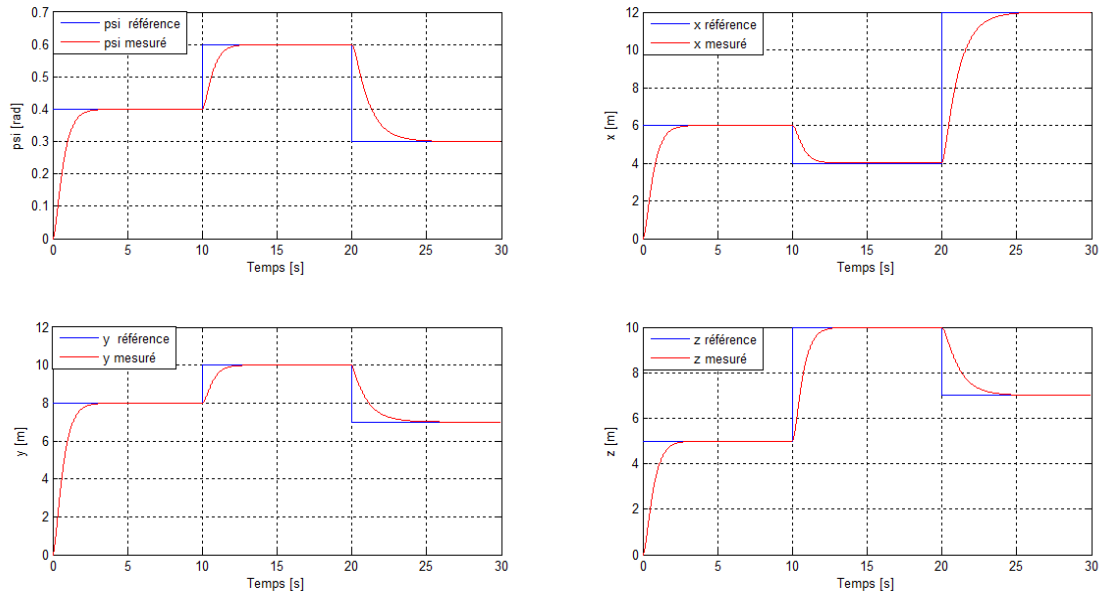


FIGURE 3.8 – La réponse du système (Forwarding)

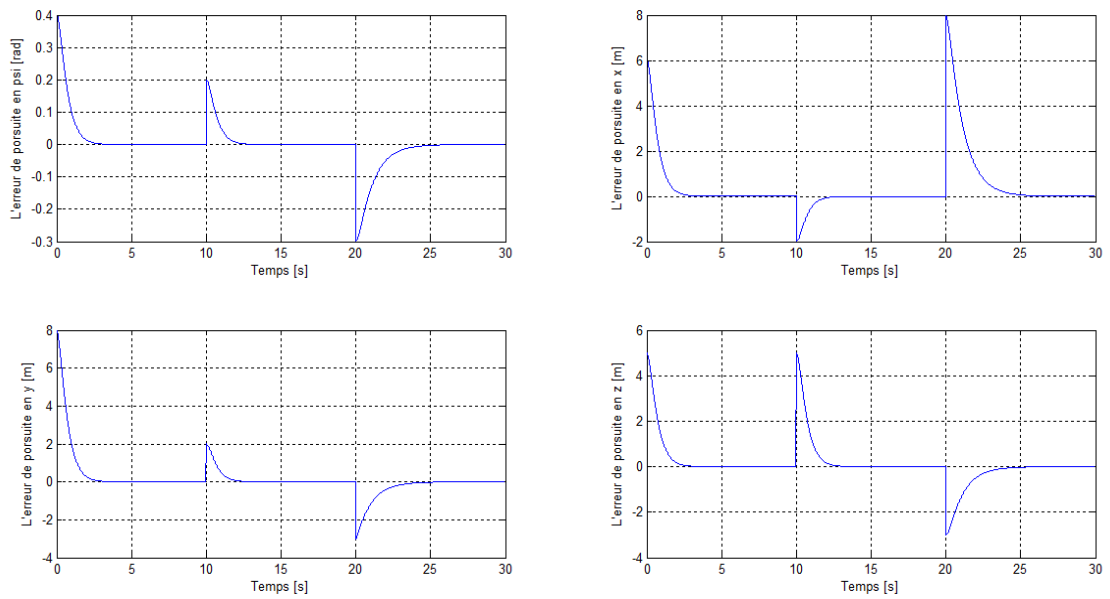


FIGURE 3.9 – Les erreurs de poursuite (Forwarding)

Le quadrirotor atteint la référence désirée. Une fois arrivé, les commandes sont stables après un régime transitoire. Cette technique présente une souplesse de manipulation, mais le choix des  $\lambda_i$  est délicat car un mauvais choix peut induire l'instabilité du système.

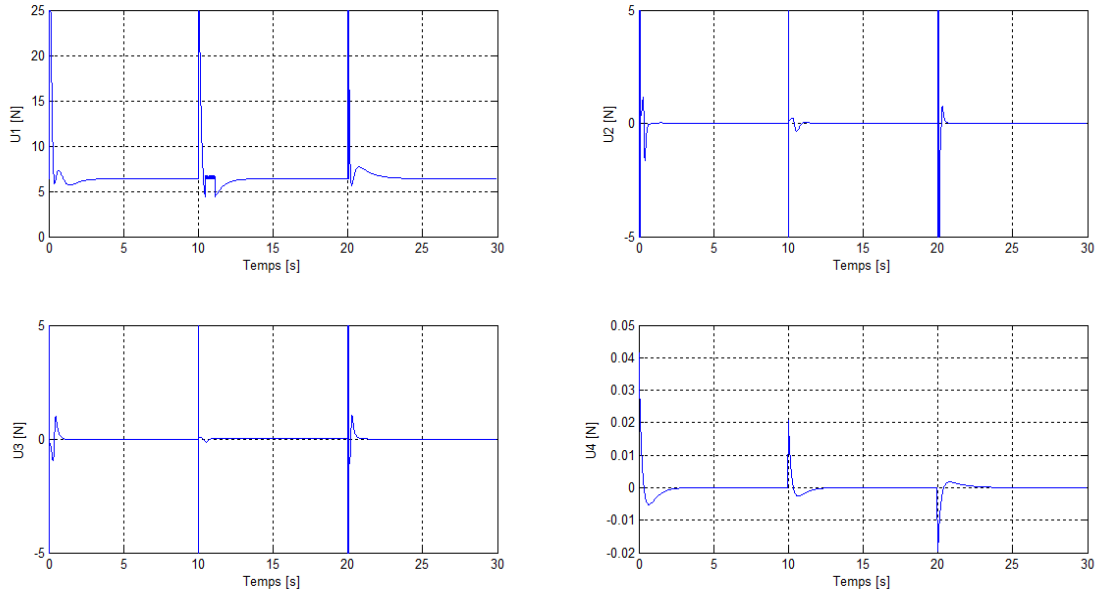


FIGURE 3.10 – Les signaux de commande (Forwarding)

### 3.6 Commande à base du modèle hybride

Nous allons synthétiser dans cette partie, une commande en utilisant les automates hybrides et cela dans le but de permettre au quadrirotor de suivre une trajectoire de référence.

Comme on a défini précédemment quatre modes, chaque mode est lui associé un régulateur qui assure les performances désirées. Chaque régulateur est déterminé à partir du modèle associé à chaque mode. Ce qui correspond à quatre régulateurs.

Les conditions d'invariance pour chaque régulateur sont :

- $X(R_1) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_1 \vee P_2\}$
- $X(R_2) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_2 \vee P_4\}$
- $X(R_3) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_5 \vee P_6\}$
- $X(R_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge \bar{P}_3 \wedge \bar{P}_5\}$

Et les ensembles de garde sont définis par :

$$E = \{(R_4, R_1), (R_4, R_2), (R_4, R_3), (R_1, R_4), (R_2, R_4), (R_3, R_4)\}$$

Les conditions de transitions sont définies par les transitions possibles entre les différents régulateurs :

- $G(R_4, R_1) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : P_1\}$
- $G(R_4, R_2) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge P_3\}$

- $G(R_4, R_3) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge \bar{P}_3 \wedge P_5\}$
- $G(R_1, R_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_1 \wedge \bar{P}_2\}$
- $G(R_2, R_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_3 \wedge \bar{P}_4\}$
- $G(R_3, R_4) = \{x \in \mathbf{R}^{12} : \bar{P}_5 \wedge \bar{P}_6\}$

L'automate hybride du régulateur peut être représenté par le graphe suivant :

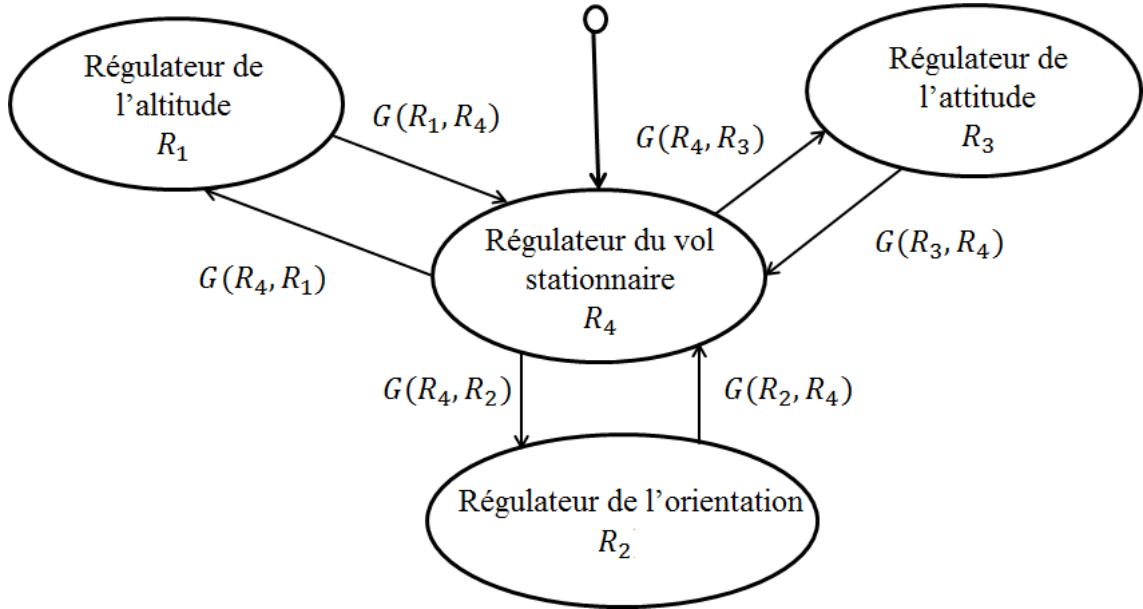


FIGURE 3.11 – Régulateur hybride du quadrirotor

### 3.6.1 Backstepping

Les commandes de chaque mode sont synthétisées par backstepping.

Pour  $(R_1)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} (g - e_{11} - \lambda_2 e_{12} + \ddot{x}_{11d} - \lambda_1 \dot{e}_{11}) \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

Avec  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

Pour  $(R_2)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = \frac{1}{b_2} (-a_5 x_2 x_4 + \ddot{x}_{5d} - \lambda_3 \dot{e}_5 - e_5 - \lambda_4 e_6) \end{cases} \quad (3.73)$$

Avec  $\lambda_3, \lambda_4 > 0$ .

Pour  $(R_3)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{1d} - \lambda_5 \dot{e}_1 - e_1 - \lambda_6 e_2) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - e_3 - \lambda_7 e_4 - \lambda_8 \dot{e}_3 + \ddot{x}_{3d}) \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

Avec  $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8 > 0$ .

Pour  $(R_4)$ , Les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} (g - c_1 x_{12}) \\ U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - c_2 x_2) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - c_3 x_4) \\ U_4 = \frac{1}{b_3} (-a_5 x_2 x_4 - c_4 x_6) \end{cases} \quad (3.75)$$

Avec  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

## Simulation

On présente dans les figures suivantes la poursuite d'un échelon (Figure 3.12) ainsi que les signaux de commande (les efforts à fournir) (Figure 3.13) et les modes du système (Figure 3.14).

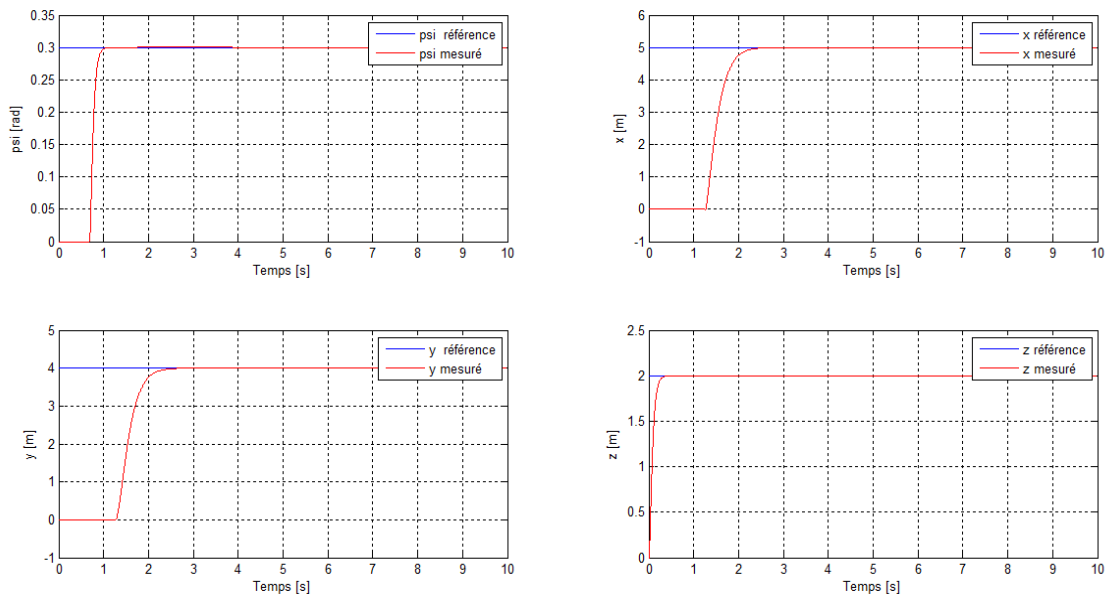


FIGURE 3.12 – La réponse du système hybride (Backstepping)

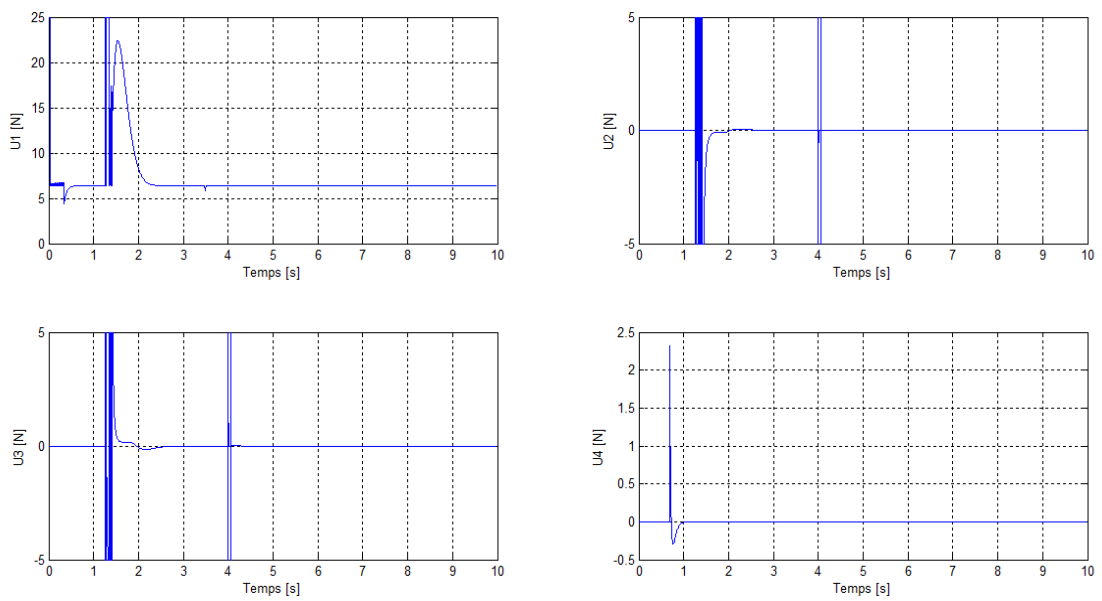


FIGURE 3.13 – Les signaux de commande par Backstepping pour le modèle hybride

Les erreurs convergent rapidement vers zéro. Le quadrirotor suit sa trajectoire de référence. Une fois arrivé à cette trajectoire, les signaux de commande deviennent faibles. La réponse dans ce cas est plus rapide par rapport à celle synthétisée directement.



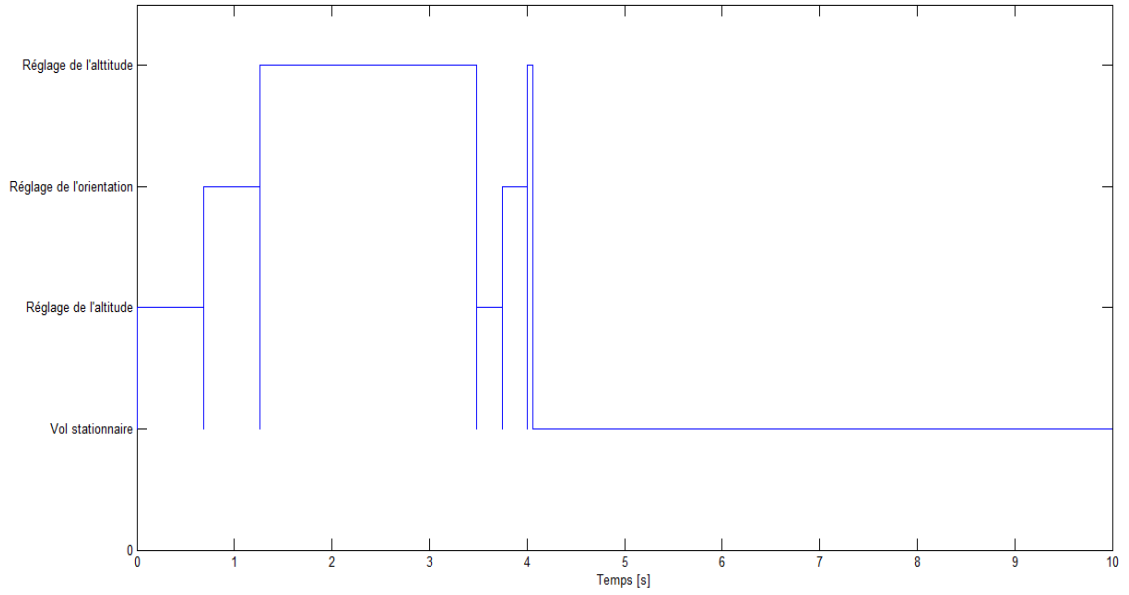


FIGURE 3.14 – Evolution des modes du système (Backstepping)

### 3.6.2 Mode glissant

Les commandes de chaque mode sont synthétisées par mode glissant.

Pour  $(R_1)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} [-k_1 \text{sign}(S_z) + g + \ddot{x}_{11d} - \lambda_1(x_{12} - \dot{x}_{11d})] \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

Avec  $\lambda_1, k_1 > 0$ .

Pour  $(R_2)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = \frac{1}{b_3} (-a_5 x_2 x_4 + \ddot{x}_{5d} - \lambda_2(x_6 - \dot{x}_{5d}) - k_2 \text{sign}(S_\psi)) \end{cases} \quad (3.77)$$

Avec  $\lambda_2, k_2 > 0$ .

Pour  $(R_3)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{1d} - \lambda_3 (x_2 - \dot{x}_{1d}) - k_3 \text{sign}(S_\phi)) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{3d} - \lambda_4 (x_4 - \dot{x}_{3d}) - k_4 \text{sign}(S_\theta)) \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

Avec  $\lambda_3, \lambda_4, k_3, k_4 > 0$ .

Pour  $(R_4)$ , Les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} (g - c_1 x_{12}) \\ U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - c_2 x_2) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - c_3 x_4) \\ U_4 = \frac{1}{b_3} (-a_5 x_2 x_4 - c_4 x_6) \end{cases} \quad (3.79)$$

Avec  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

## Simulation

On présente dans les figures suivantes la poursuite d'une trajectoire en 3D (Figure 3.15) ainsi que les signaux de commande (les efforts à fournir) (Figure 3.16) et les modes (Figure 3.17).

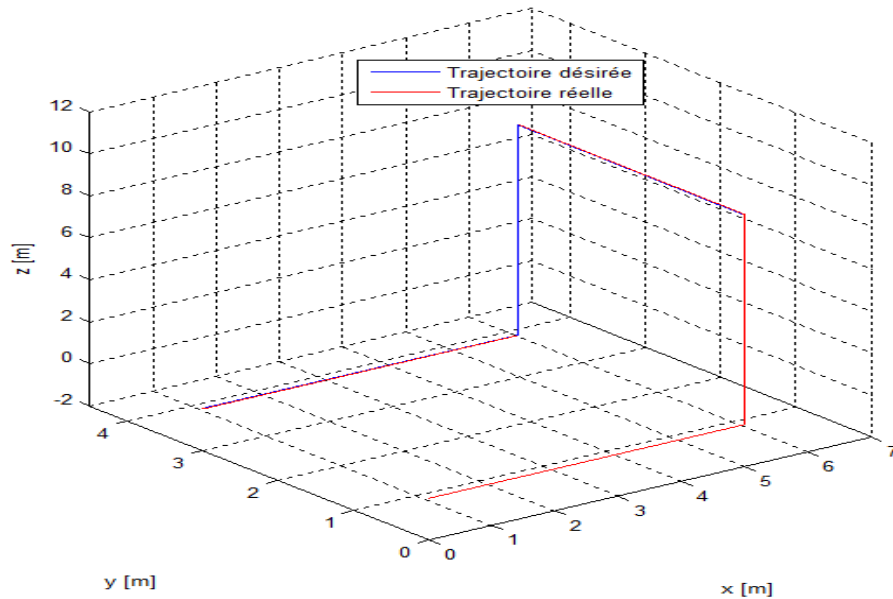


FIGURE 3.15 – La réponse du système hybride (SMC)

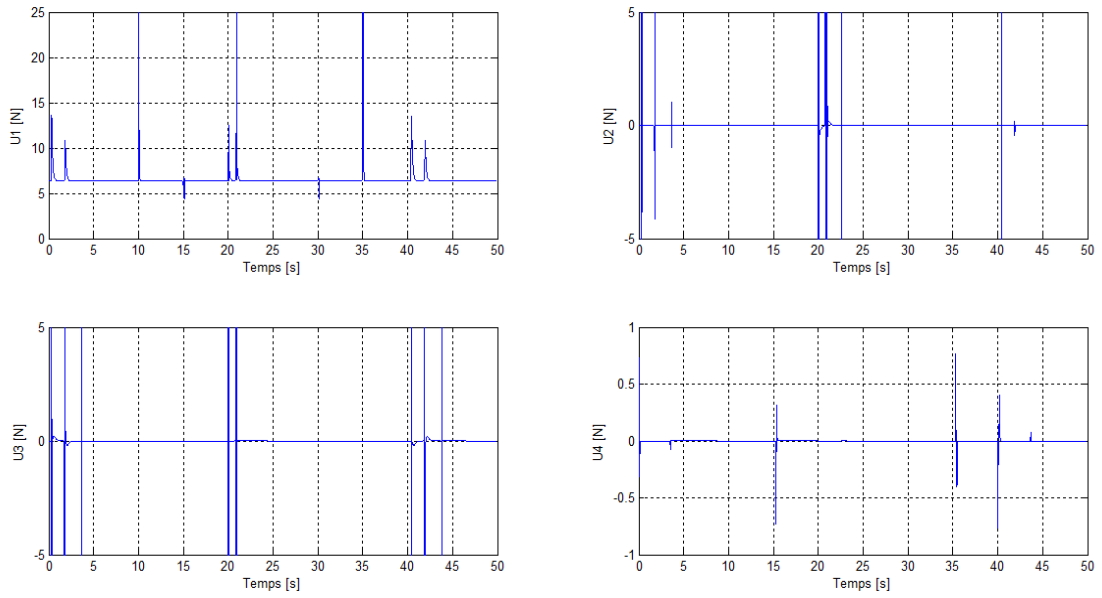


FIGURE 3.16 – Les signaux de commande par SMC pour le modèle hybride

Les erreurs convergent rapidement vers zéro. Le quadrirotor suit la trajectoire de référence. Une fois arrivé à la référence désirée, Les commandes sont stables. Donc, la stabilité du système est assurée. Cette technique présente une rapidité pour atteindre les références.

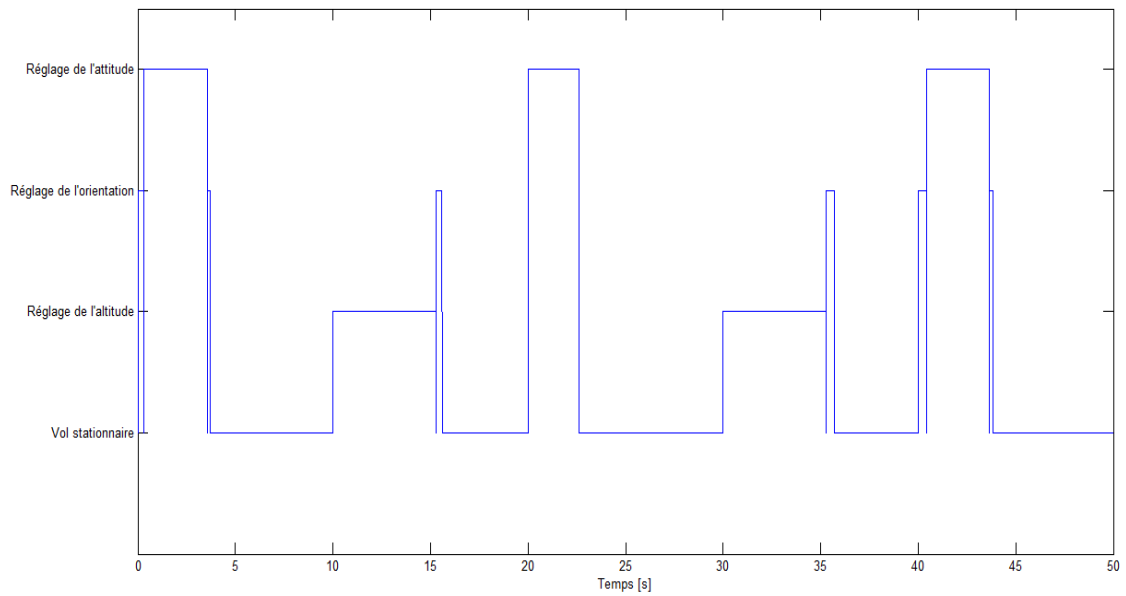


FIGURE 3.17 – Evolution des modes du système (SMC)

### 3.6.3 Forwarding

Les commandes de chaque mode sont synthétisées par forwarding.

Pour  $(R_1)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} \left( g - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_{11} - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} + \lambda_1 + \lambda_2 \right) e_{12} + \ddot{x}_{11d} \right) \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

Avec  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

Pour  $(R_2)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = \frac{1}{b_3} \left( -a_5 x_2 x_4 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} e_5 - \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_4^2} + \lambda_3 + \lambda_4 \right) e_6 + \ddot{x}_{5d} \right) \end{cases} \quad (3.81)$$

Avec  $\lambda_3, \lambda_4 > 0$ .

Pour  $(R_3)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = \frac{1}{b_1} \left( -a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - \frac{\lambda_5}{\lambda_6} e_1 - \left( \frac{\lambda_5}{\lambda_6^2} + \lambda_5 + \lambda_6 \right) e_2 + \ddot{x}_{1d} \right) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} \left( -a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - \frac{\lambda_7}{\lambda_8} e_3 - \left( \frac{\lambda_7}{\lambda_8^2} + \lambda_7 + \lambda_8 \right) e_4 + \ddot{x}_{3d} \right) \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

Avec  $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8 > 0$ .

Pour  $(R_4)$ , les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} (g - c_1 x_{12}) \\ U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - c_2 x_2) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - c_3 x_4) \\ U_4 = \frac{1}{b_3} (-a_5 x_2 x_4 - c_4 x_6) \end{cases} \quad (3.83)$$

Avec  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

## Simulation

On présente dans les figures suivantes la poursuite d'une trajectoire en 3D (Figure 3.18) ainsi que les signaux de commande (les efforts à fournir) (Figure 3.19) et l'évolution des modes (Figure 3.20).

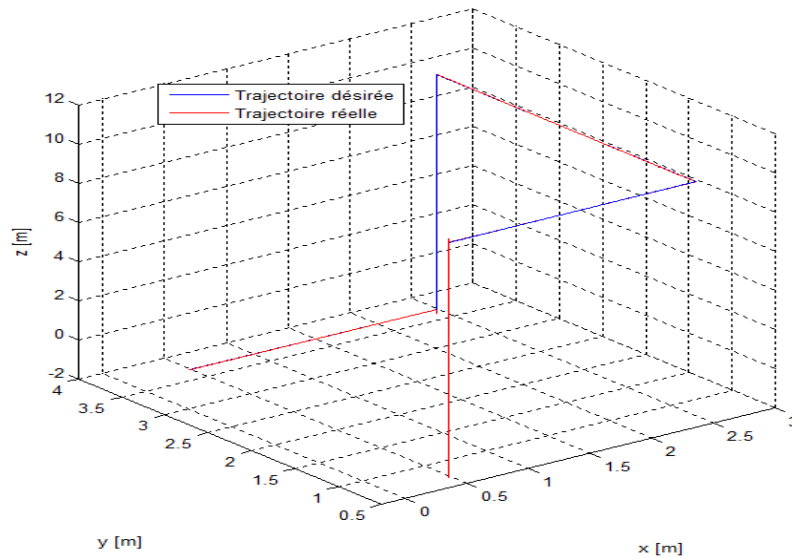


FIGURE 3.18 – La réponse du système hybride (Forwarding) en 3D

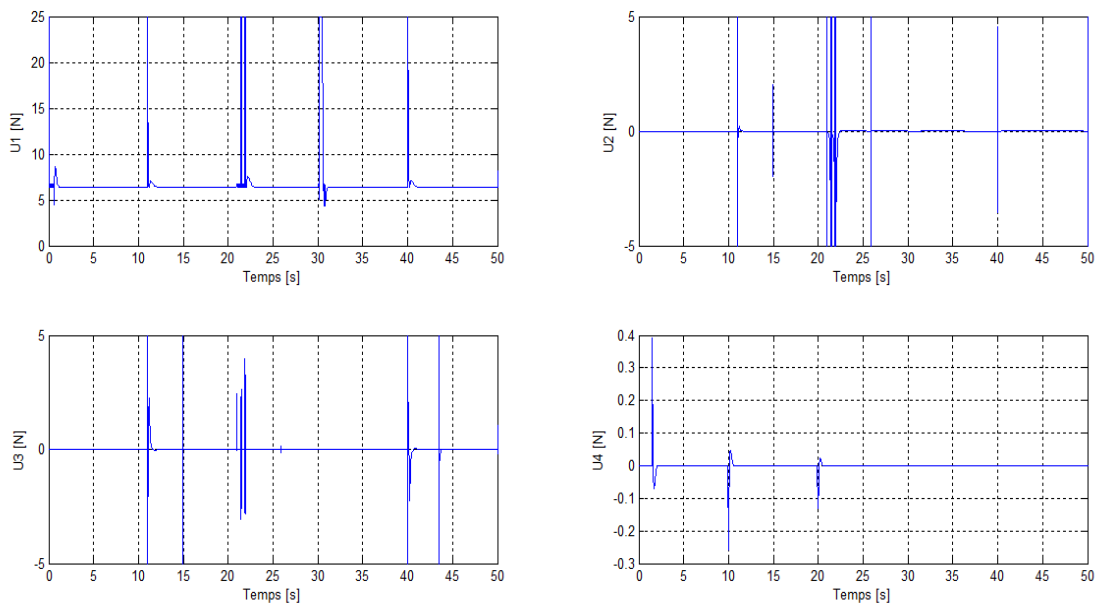


FIGURE 3.19 – Les signaux de commande par Forwarding pour le modèle hybride

Les erreurs tendent rapidement vers zéro. Une fois arrivé à la trajectoire de référence, Les commandes sont stables. Cette technique présente un temps de réponse très court.

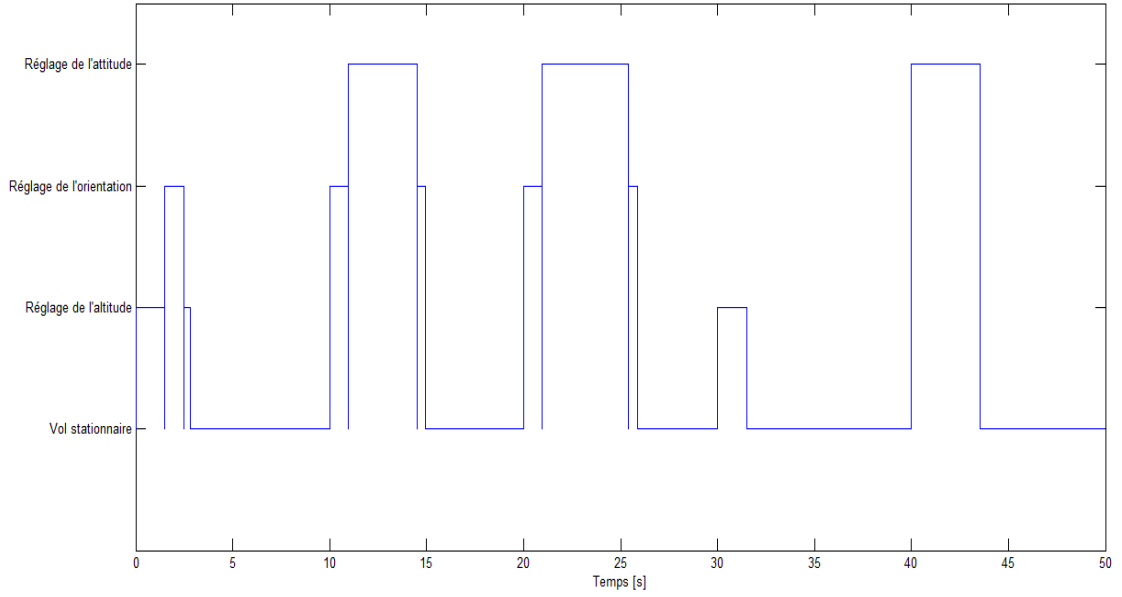


FIGURE 3.20 – Evolution des modes du système (Forwarding)

### 3.6.4 Commande hybride

Pour  $(R_1)$ , la synthèse de  $U_1$  s'effectue en utilisant forwarding. Les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} \left( g - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e_{11} - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} + \lambda_1 + \lambda_2 \right) e_{12} + \ddot{x}_{11d} \right) \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

Avec  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

Pour  $(R_2)$ , le calcul de  $U_4$  s'effectue par mode glissant. Les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 0 \\ U_4 = U_4 = \frac{1}{b_3} \left( -a_5 x_2 x_4 + \ddot{x}_{5d} - \lambda_3 (x_6 - \dot{x}_{5d}) - k \text{sign}(S_\psi) \right) \end{cases} \quad (3.85)$$

Avec  $\lambda_3, k > 0$ .

Pour  $(R_3)$ , le calcul de  $U_2$  et  $U_3$  s'effectue par backstepping. Les commandes sont données

par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} g \\ U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} + \ddot{x}_{1d} - \lambda_4 \dot{e}_1 - e_1 - \lambda_5 e_2) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - e_3 - \lambda_6 e_4 - \lambda_7 \dot{e}_3 + \ddot{x}_{3d}) \\ U_4 = 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

Avec  $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 > 0$ .

Pour  $(R_4)$ , le calcul de quatre commandes s'effectue en utilisant les fonctions de Lyapunov.

Les commandes sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m}{\cos(x_1) \cos(x_3)} (g - c_1 x_{12}) \\ U_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \bar{\Omega} - c_2 x_2) \\ U_3 = \frac{1}{b_2} (-a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \bar{\Omega} - c_3 x_4) \\ U_4 = \frac{1}{b_3} (-a_5 x_2 x_4 - c_4 x_6) \end{cases} \quad (3.87)$$

Avec  $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ .

## Simulation

On présente dans les figures suivantes la poursuite d'un échelon (Figure 3.21) ainsi que les signaux de commande (les efforts à fournir) (Figure 3.22) et les modes du système (Figure 3.23).

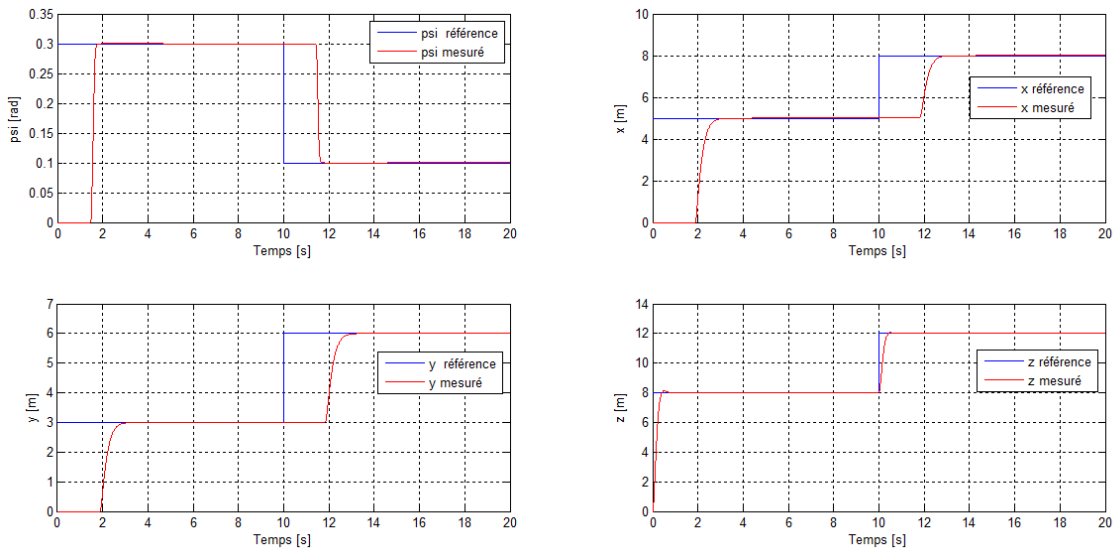


FIGURE 3.21 – La réponse du système hybride

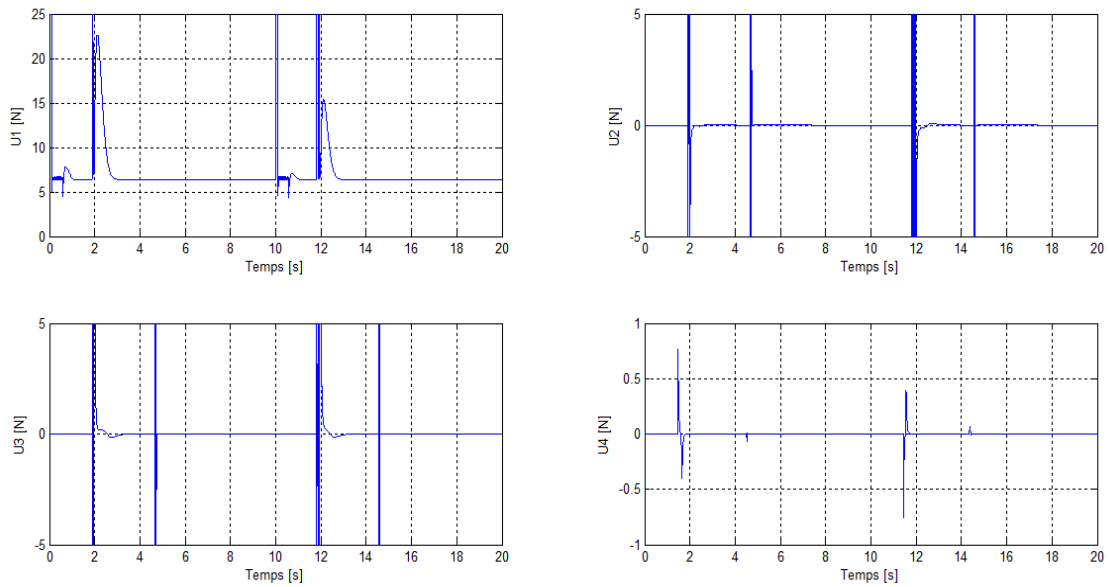


FIGURE 3.22 – Les signaux de commande pour le modèle hybride

On remarque que le système atteint la trajectoire de référence au bout de 4 s. Cette réponse est plus rapide par rapport à celle du système complet.

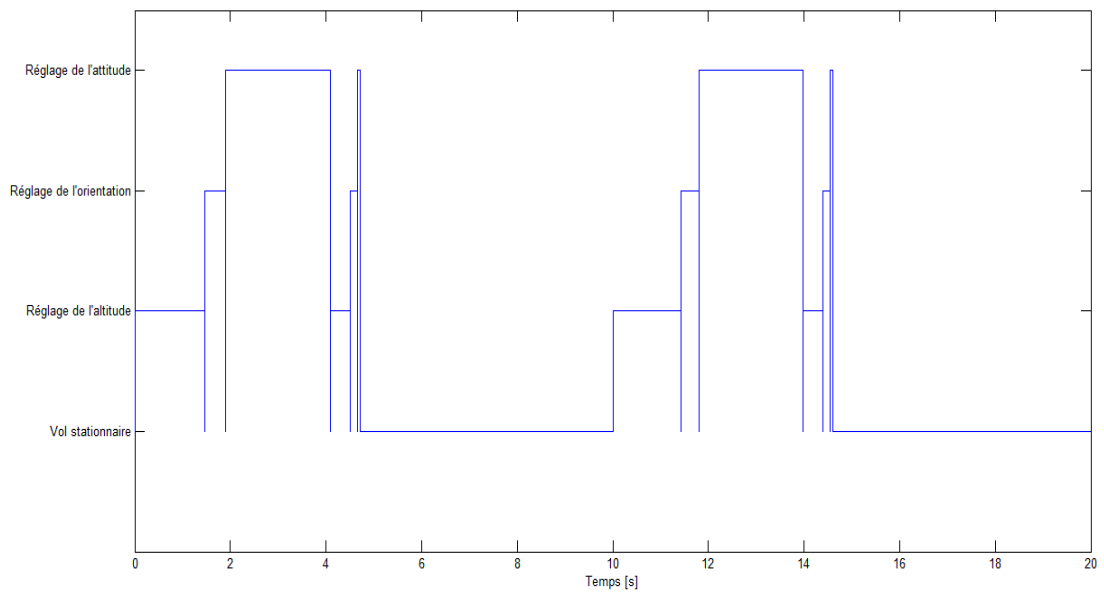


FIGURE 3.23 – Evolution des modes du système

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents schémas de commande appliqués au quadrirotor : Backstepping, mode glissant et forwarding. Ces techniques ont permis une poursuite presque parfaite des trajectoires considérées.



# Chapitre 4

## Etudes de robustesse et comparaison

### 4.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous allons vérifier la validité de nos schémas de commande par des tests de robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures. Les perturbations considérées sont : L'effet du vent, la variation des paramètres et l'effet des dynamiques négligées précédemment. Ensuite, on termine par une étude comparative entre les trois techniques synthétisées.

### 4.2 Tests de robustesse

Pour les tests de robustesse, trois types de perturbations sont considérées. La première catégorie regroupe les incertitudes dues à la variation des paramètres du système par rapport aux valeurs nominales. La deuxième catégorie regroupe les couples et les forces extérieurs qui peuvent affecter la dynamique du système. La troisième catégorie regroupe les perturbations dues aux dynamiques non modélisées ou négligées.

#### 4.2.1 Effet du vent

Il est connu que la pression du vent peut être approximée par [5], [6], [8] :

$$P_w = \frac{1}{2} \zeta \rho v_w^2 \quad (4.1)$$

Où :  $\rho$  représente la masse volumique de l'air ( $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ ),  $v_w$  représente la vitesse du vent ( $v_w = 3.3 \text{ m/s}$ ) et  $\zeta$  est un facteur de forme ( $\zeta = 1$ ).

Ces valeurs vont produire une pression  $P_w = 6.8 \text{ N/m}^2$ . Dans le but de convertir cette pression en une force, la surface d'influence doit être trouvée. Cette surface a été calculée [8] :

$S = 0.02 \text{ m}^2$ . La relation entre la force du vent  $F_w$  et la pression est :  $F_w = P_w S$ , ce qui nous donne  $F_w$  exercée sur le quadrirotor :  $F_w = 0.136 \text{ N}$ . Pour voir l'influence de cette force sur le comportement du système en présence du régulateur, on l'ajoute sur les deux axes  $x$  et  $y$  entre les instants 6.5 s et 6.9 s comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 + F_w \\ \dot{x}_9 = x_{10} + F_w \end{cases}$$

## 1. Backstepping

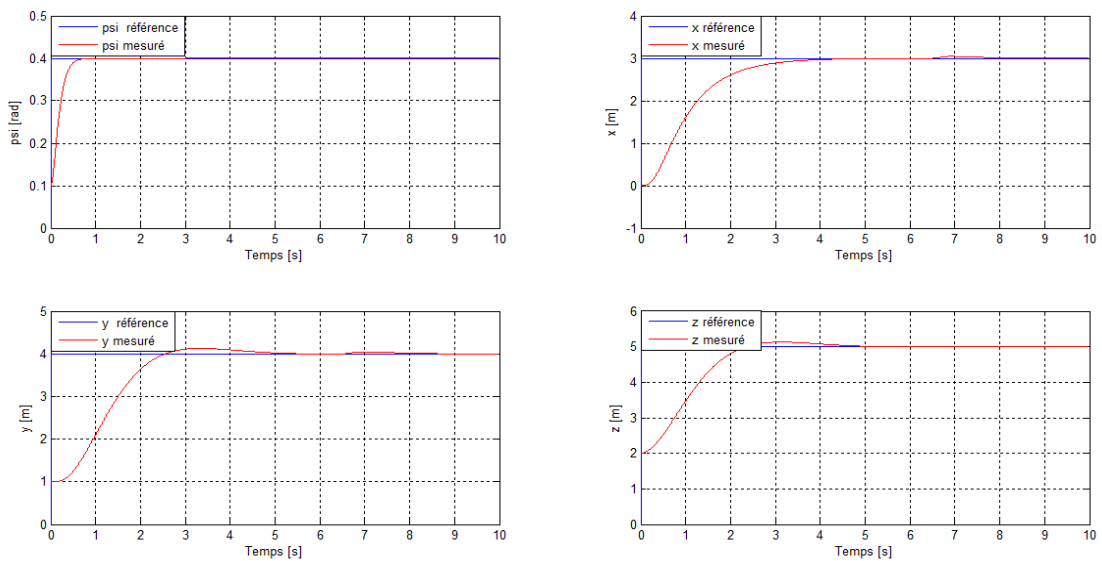


FIGURE 4.1 – La réponse du système en présence du vent (backstepping)

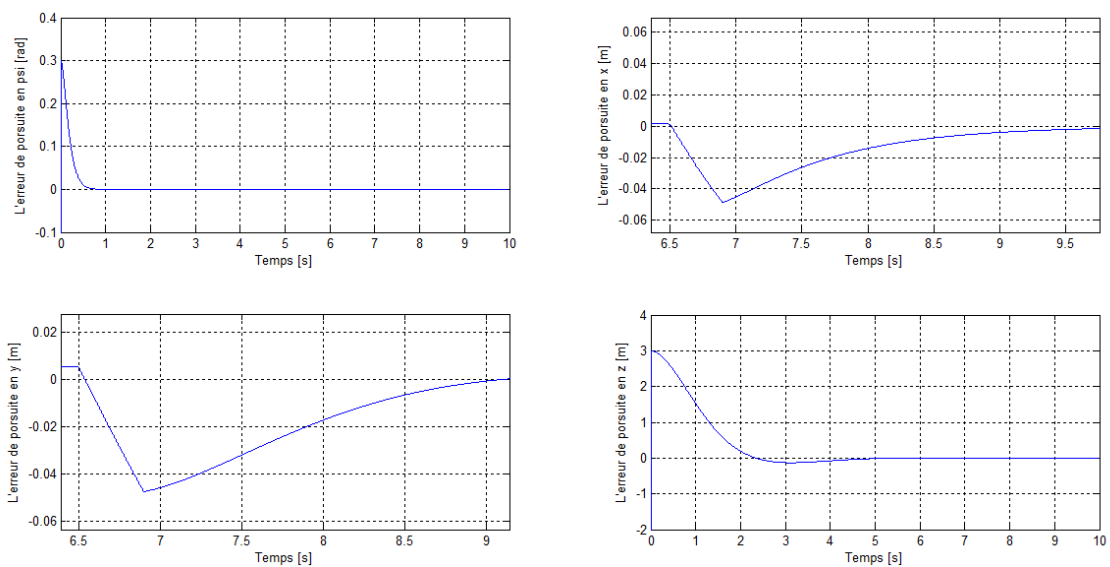


FIGURE 4.2 – Les erreurs de poursuite en présence du vent (backstepping)

## 2. Mode glissant

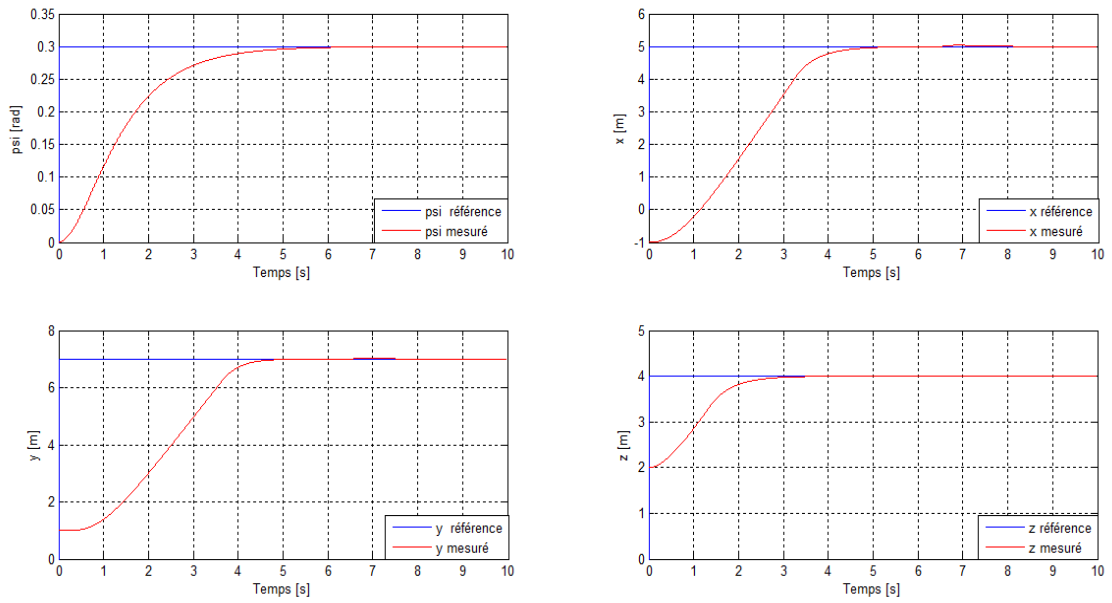


FIGURE 4.3 – La réponse du système en présence du vent (SMC)

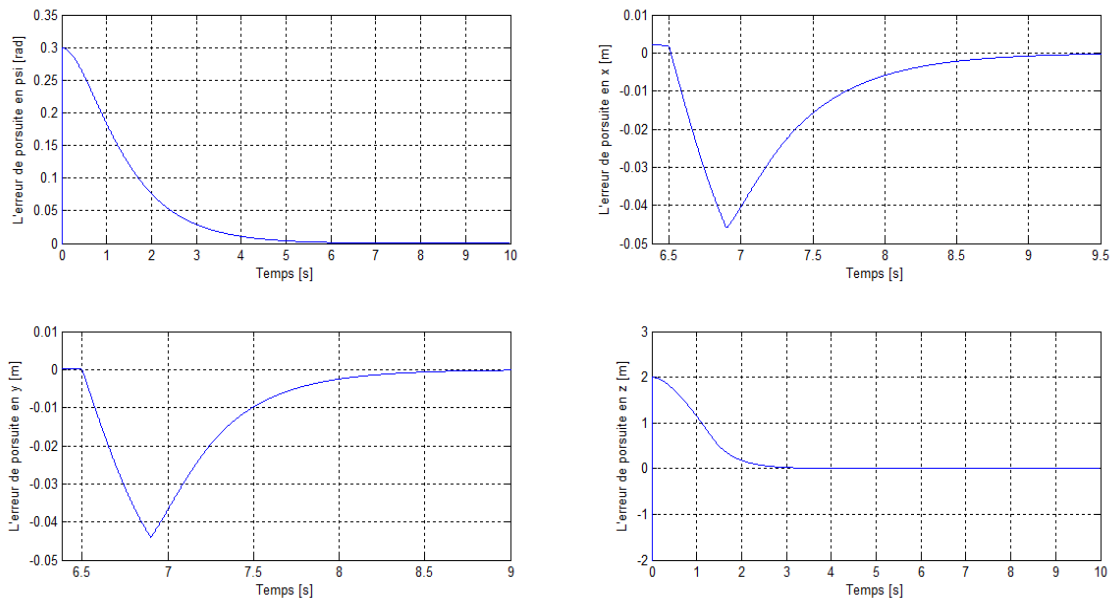


FIGURE 4.4 – Les erreurs de poursuite en présence du vent (SMC)

### 3. Forwarding

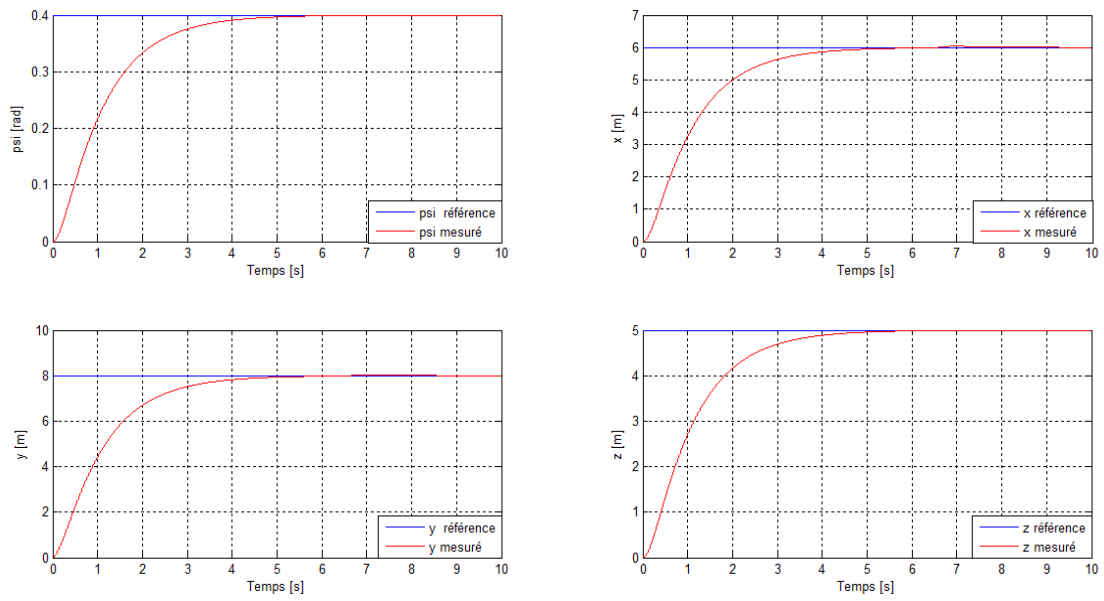


FIGURE 4.5 – La réponse du système en présence du vent (forwarding)

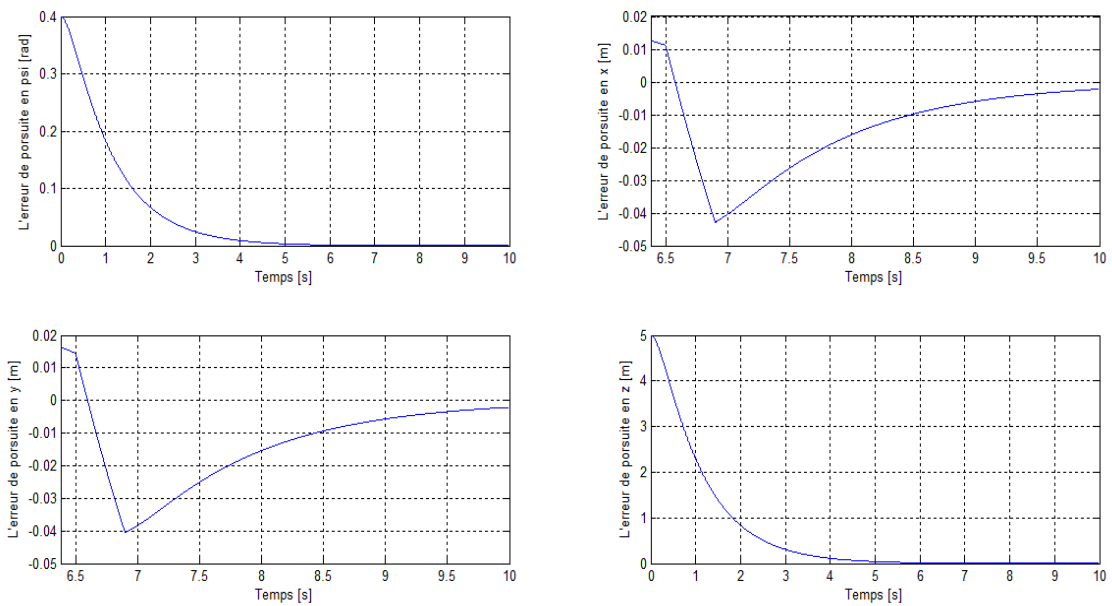


FIGURE 4.6 – Les erreurs de poursuite en présence du vent (forwarding)

Pour les trois techniques, on voit bien que le quadrirotor suit sa trajectoire de référence bien que sous l'effet de perturbation, il s'en écarte légèrement puis il revient rapidement.

## 4.2.2 Effet de la force de trainée

La force de trainée est une résistance opposante au mouvement du système dans l'air. Elle est donnée, précédemment (Chapitre 2), par [8], [16], [31] :

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho_{air}C|V|V = -\frac{1}{2}\rho_{air}SC_d|V|V \quad (4.2)$$

Avec :  $V$  représente la vitesse relative de déplacement,  $\rho$  représente la masse volumique de l'air ( $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ ),  $S$  représente la surface de référence [8] ( $S = 0.02 \text{ m}^2$ ) et  $C_d$  est le coefficient de trainée [8], [16] ( $C_d^x = C_d^y = 0.5$ ,  $C_d^z = 0.08$ )

### 1. Backstepping

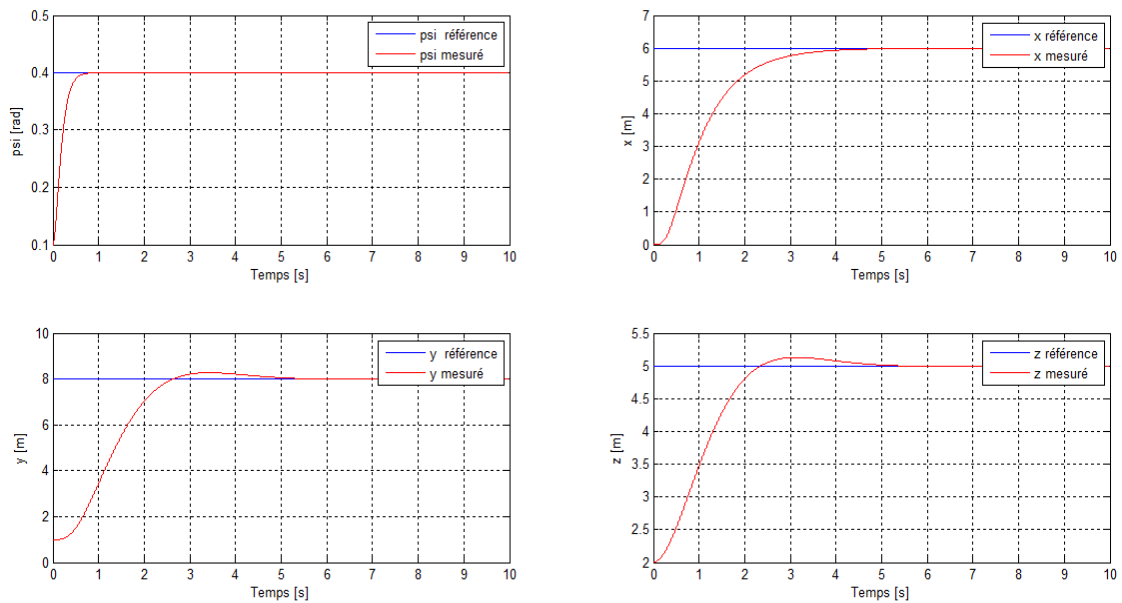


FIGURE 4.7 – La réponse du système en présence de la force de trainée (backstepping)

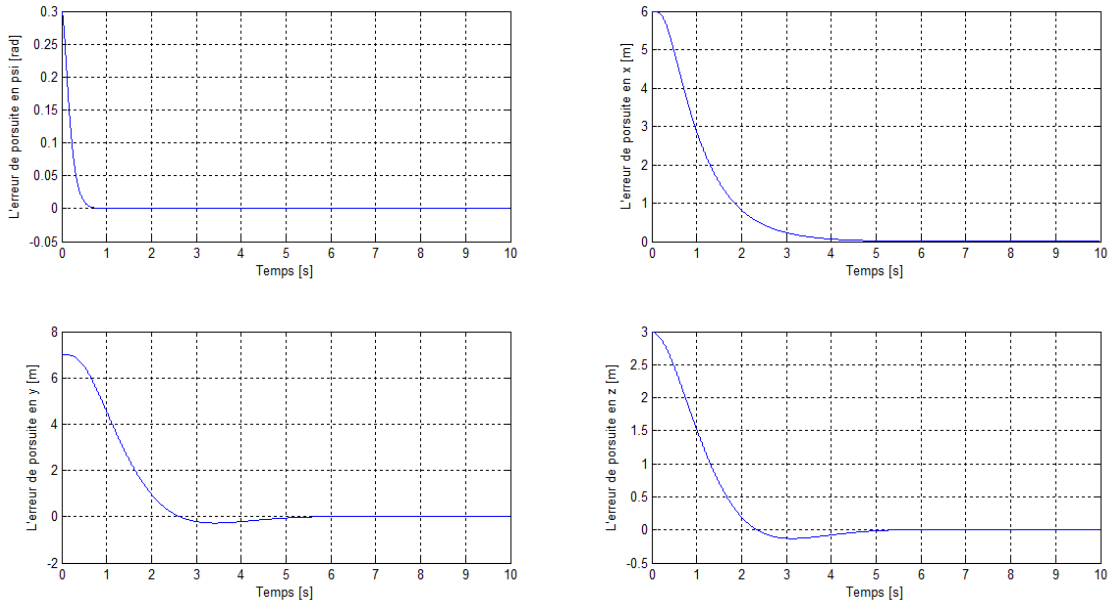


FIGURE 4.8 – Les erreurs de poursuite en présence de la force de trainée (backstepping)

## 2. Mode glissant

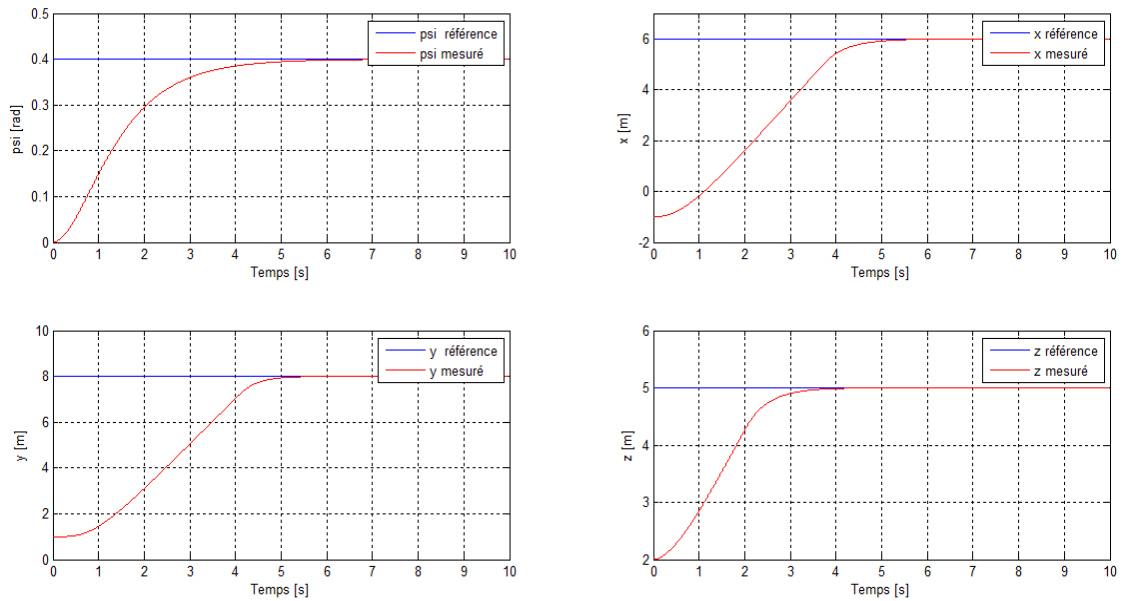


FIGURE 4.9 – La réponse du système en présence de la force de trainée (SMC)

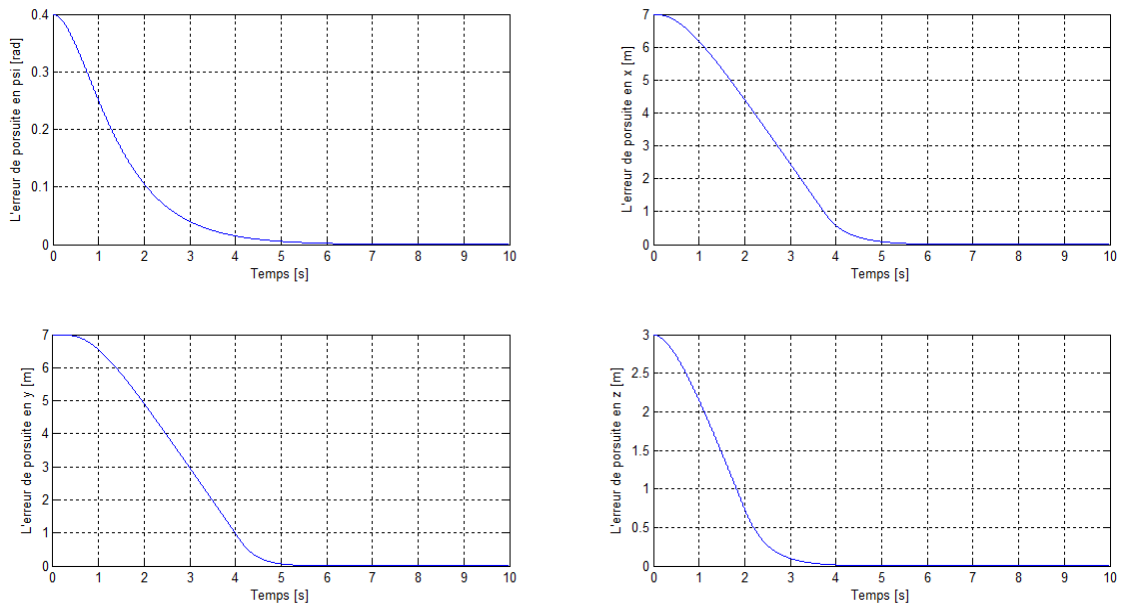


FIGURE 4.10 – Les erreurs de poursuite en présence de la force de trainée (SMC)

### 3. Forwarding

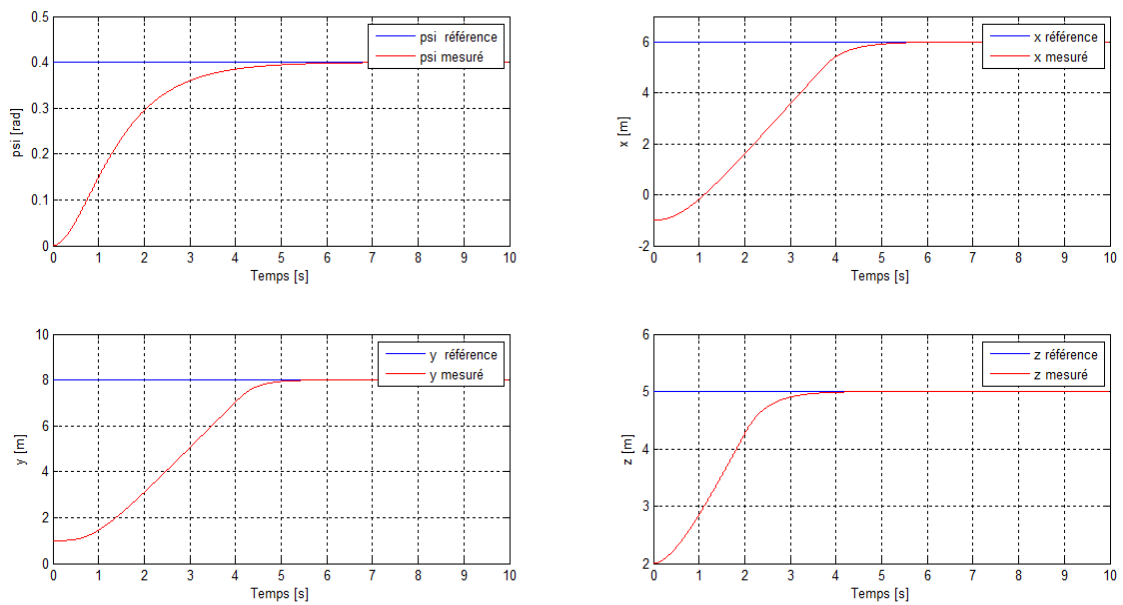


FIGURE 4.11 – La réponse du système en présence de la force de trainée (forwarding)

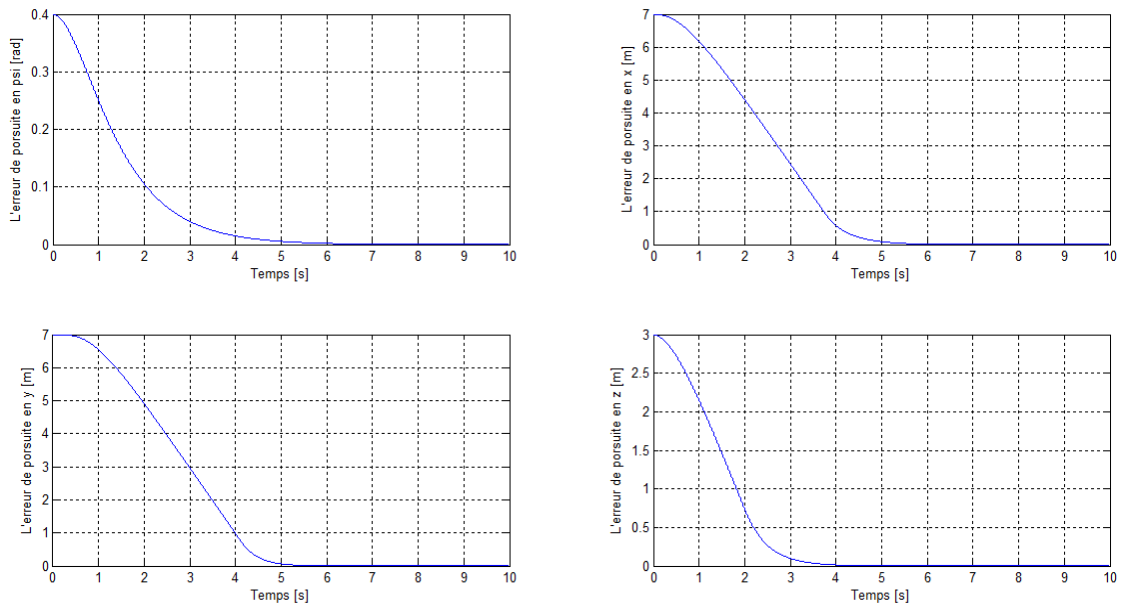


FIGURE 4.12 – Les erreurs de poursuite en présence de la force de trainée (forwarding)

Malgré la présence de la perturbation considérée, le erreurs de poursuite tendent rapidement vers zéro. Le quadrirotor suit sa trajectoire de référence.

### 4.2.3 Effet de la variation paramétrique

On présente les résultats de simulation pour une variation de 40% des paramètres du système sauf la masse.

#### 1. Backstepping

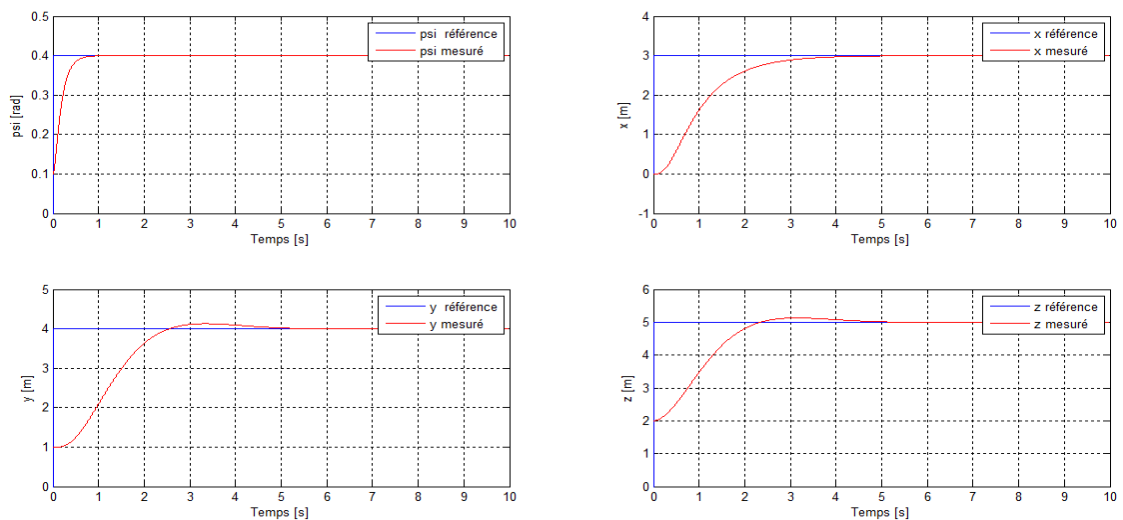


FIGURE 4.13 – La réponse du système avec une variation paramétrique (backstepping)



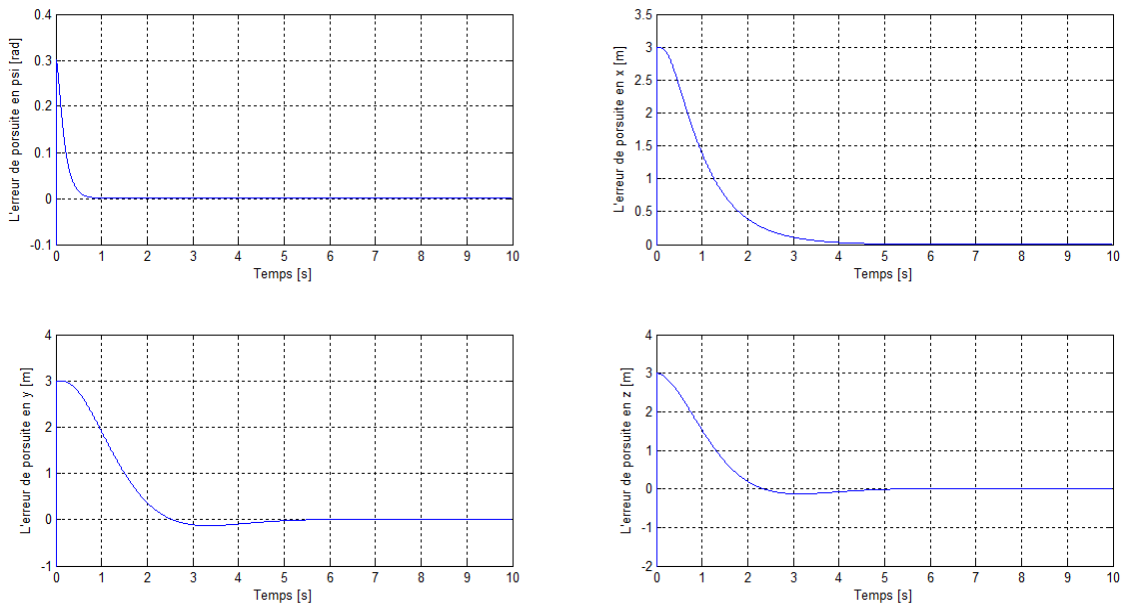


FIGURE 4.14 – Les erreurs de poursuite avec une variation paramétrique (backstepping)

## 2. Mode glissant

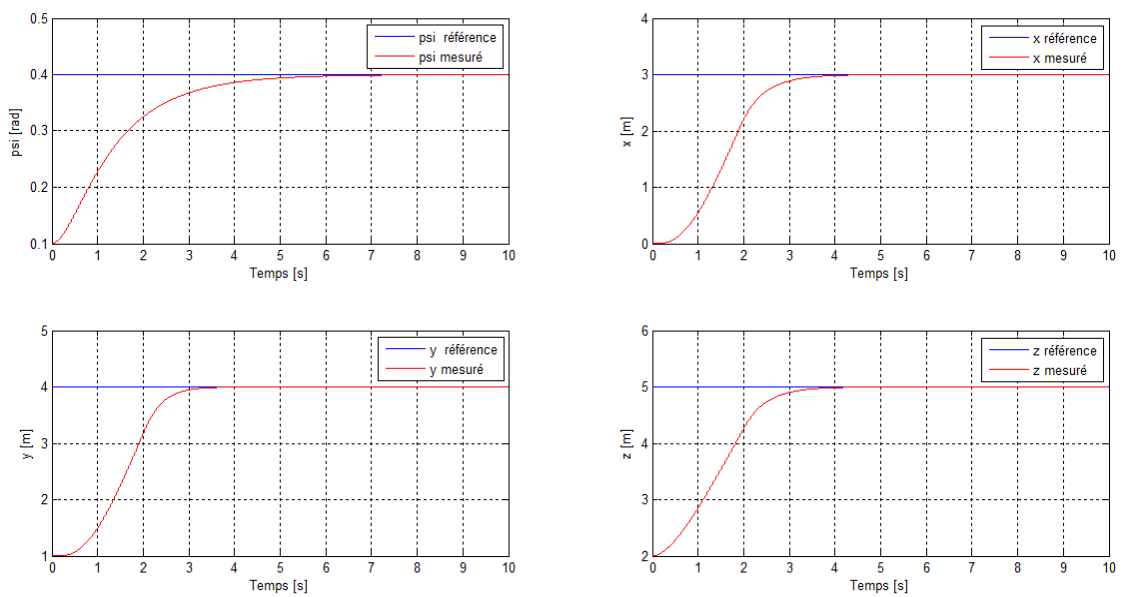


FIGURE 4.15 – La réponse du système avec une variation paramétrique (SMC)

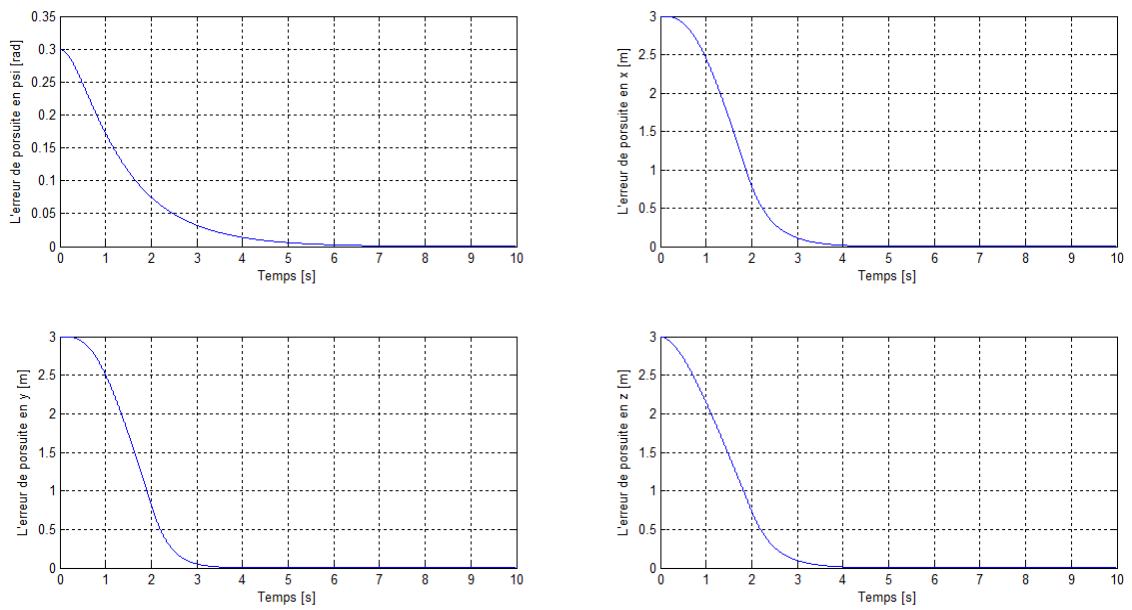


FIGURE 4.16 – Les erreurs de poursuite avec une variation paramétrique (SMC)

### 3. Forwarding

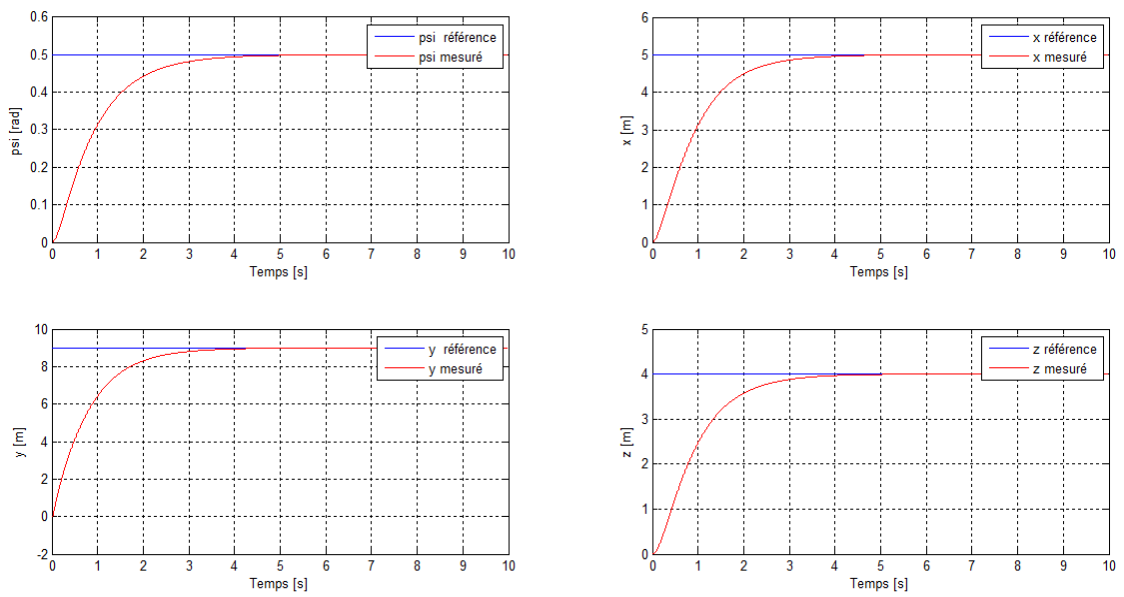


FIGURE 4.17 – La réponse du système avec une variation paramétrique (forwarding)

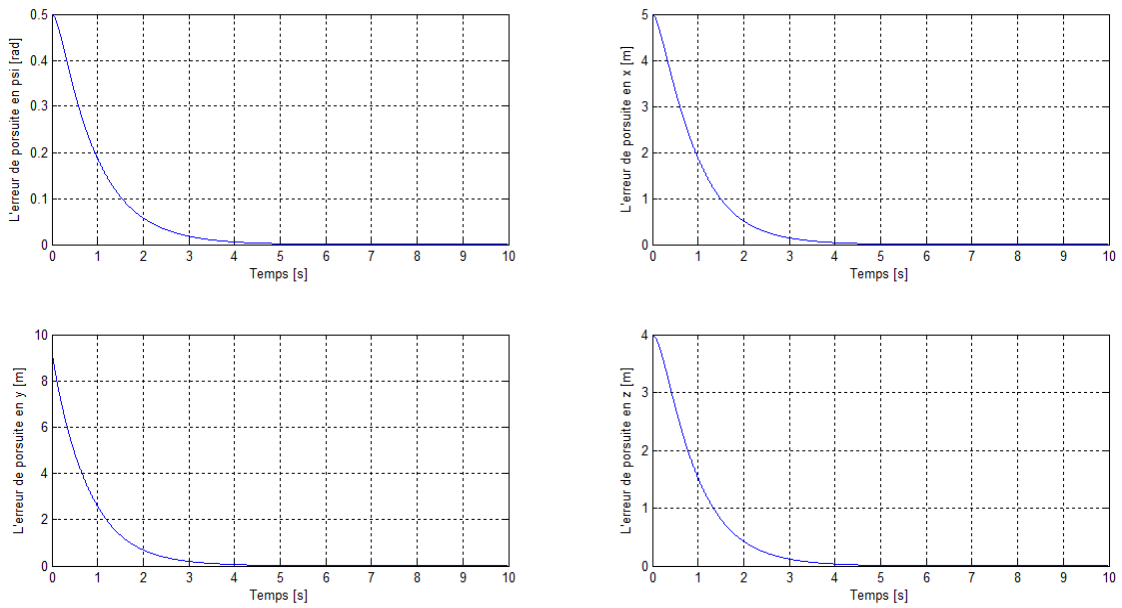


FIGURE 4.18 – Les erreurs de poursuite avec une variation paramétrique (forwarding)

Malgré la variation des paramètres du quadrirotor, les erreurs de poursuite s'annulent.

On présente les résultats de simulation pour une variation de 10% de la valeur de la masse dans les figures suivantes.

### 1. Backstepping

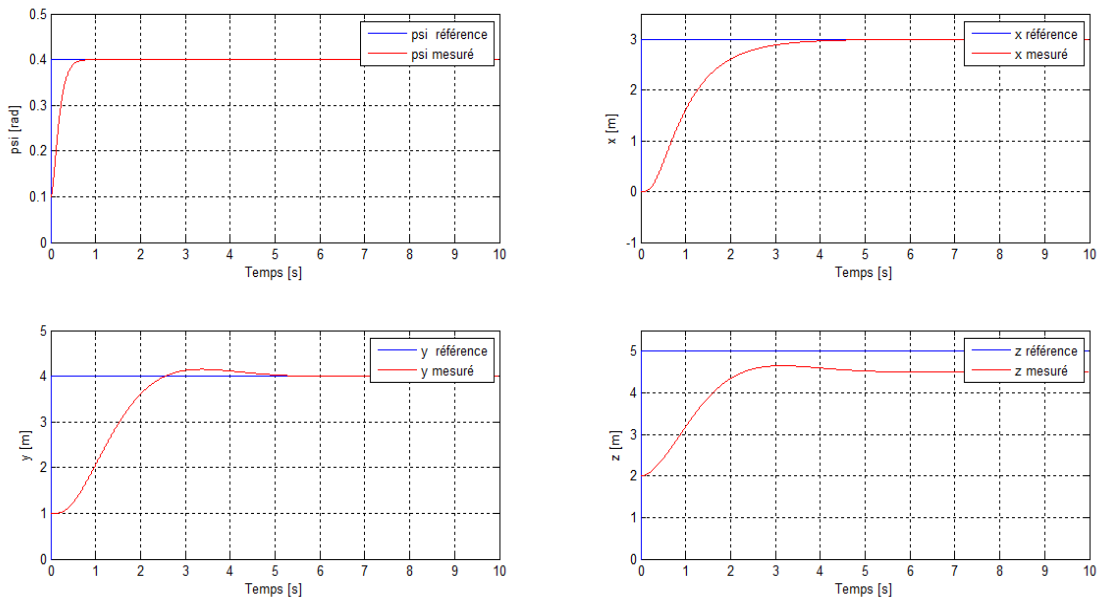


FIGURE 4.19 – La réponse du système avec une variation de la masse (backstepping)

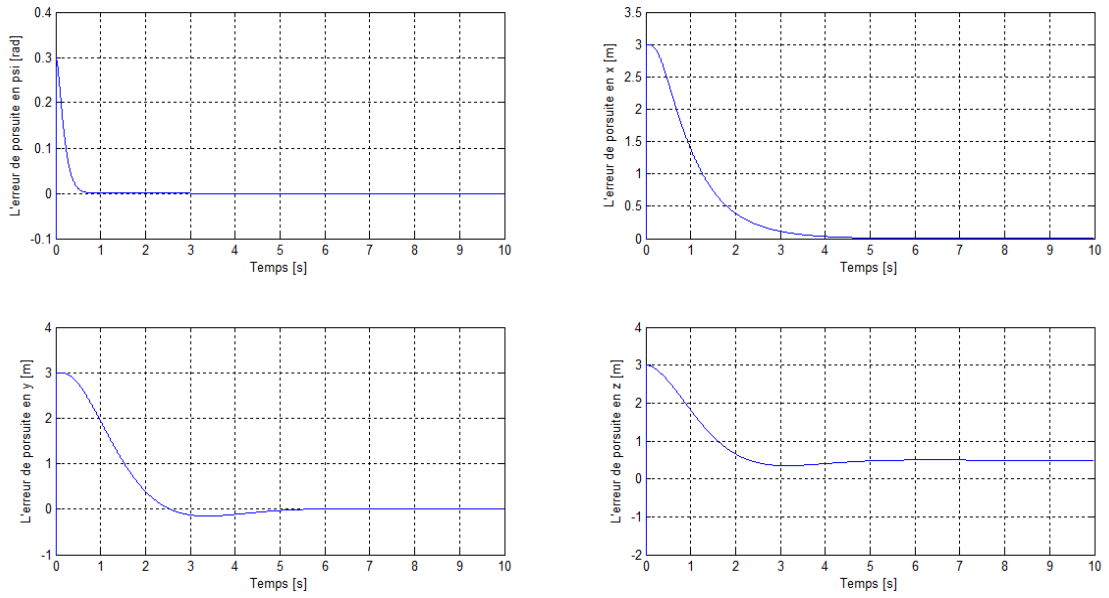


FIGURE 4.20 – Les erreurs de poursuite avec une variation de la masse (backstepping)

## 2. Mode glissant

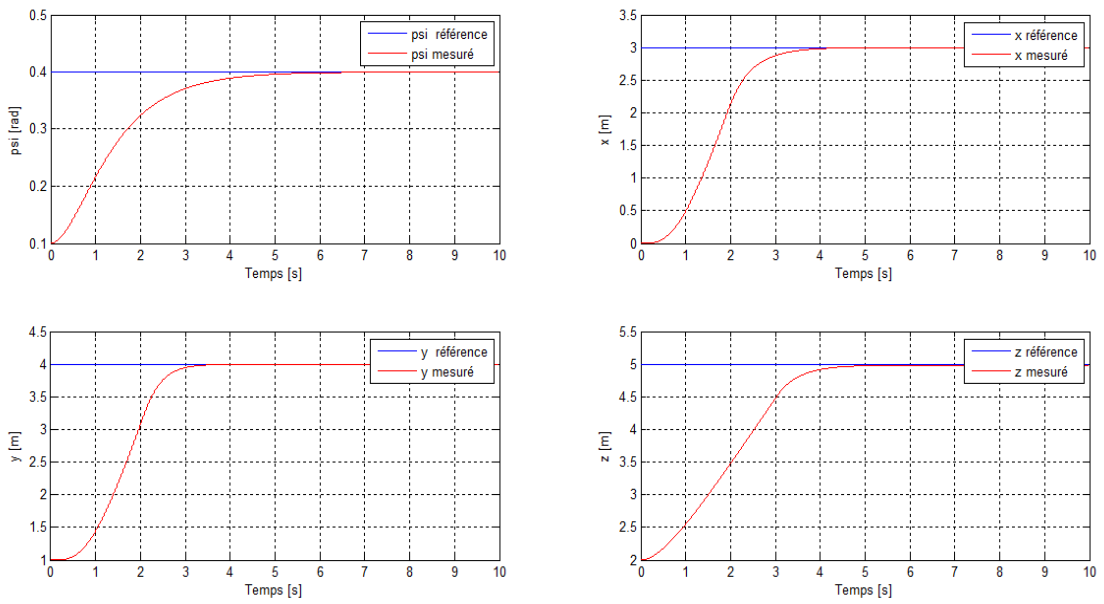


FIGURE 4.21 – La réponse du système avec une variation de la masse (SMC)

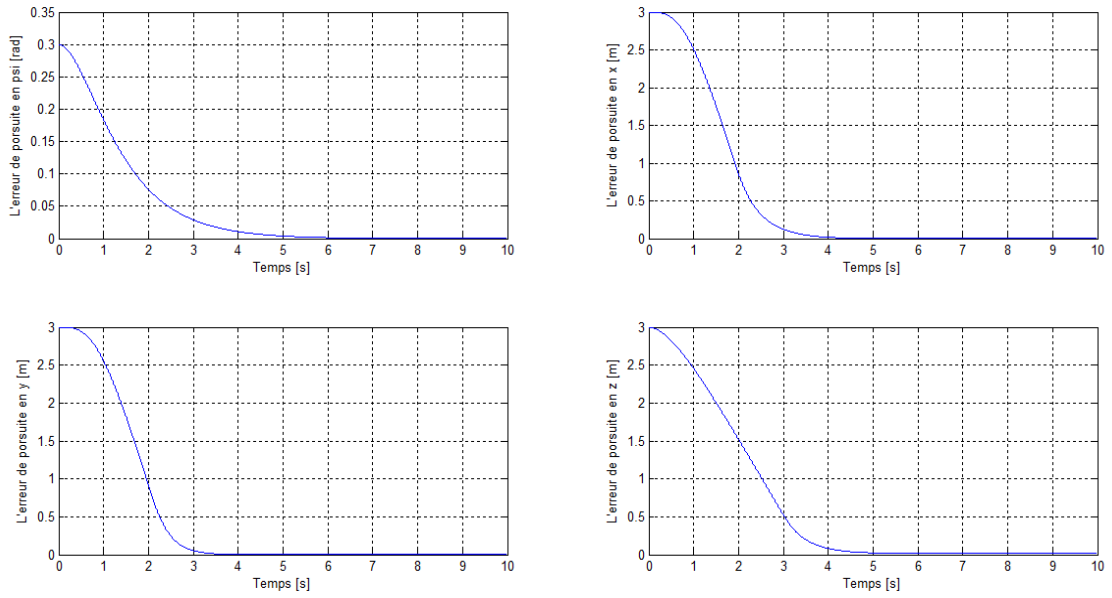


FIGURE 4.22 – Les erreurs de poursuite avec une variation de la masse (SMC)

### 3. Forwarding

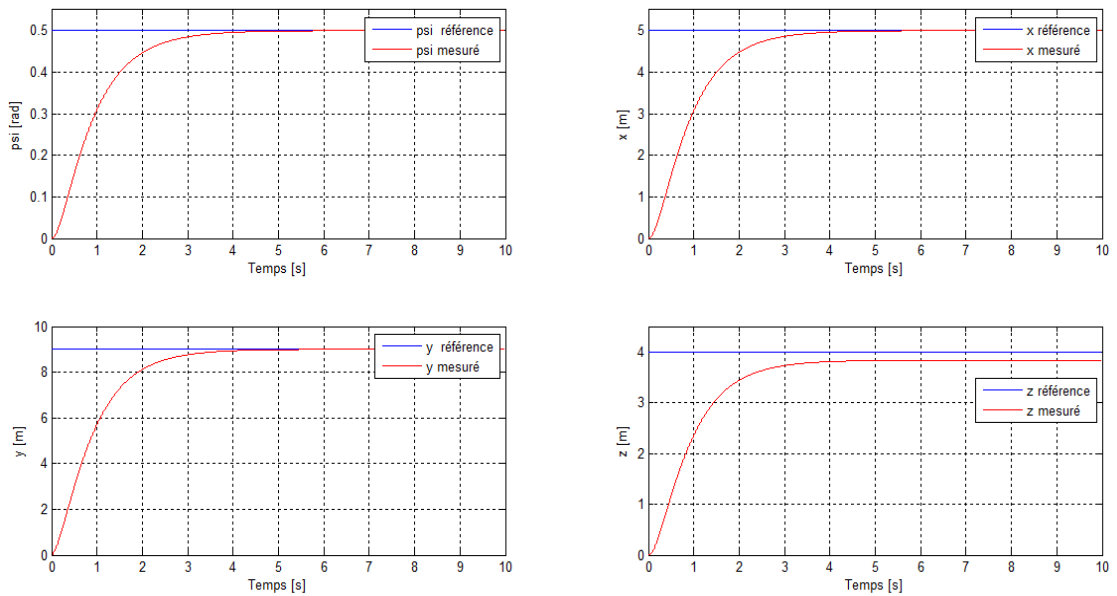


FIGURE 4.23 – La réponse du système avec une variation de la masse (forwarding)

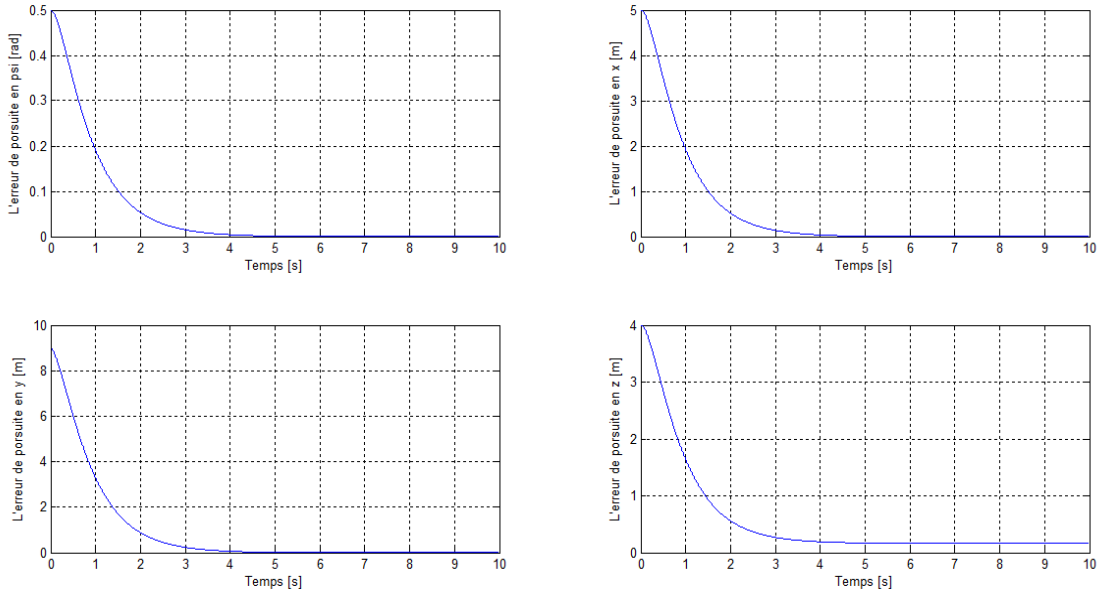


FIGURE 4.24 – Les erreurs de poursuite avec une variation de la masse (forwarding)

Dès l'apparition d'une variation de la masse, la commande en altitude est totalement inefficace car il y a toujours une erreur statique en  $z$ . Pour la commande de  $x$  et  $y$ , les trajectoires désirées sont atteintes malgré la présence de cette perturbation.

### 4.3 Etude comparative

A fin de faciliter la comparaison entre les différentes lois de commande, nous avons adopté deux critères de comparaison :

- $J_1$  représente l'erreur quadratique de la poursuite :

$$J_1 = \frac{1}{n} \sum_1^n (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) \quad (4.3)$$

- $J_2$  représente l'énergie fournie par le contrôleur :

$$J_2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \quad (4.4)$$

Les références sont  $\psi = 0.3 \text{ rad}$ ,  $x = 5 \text{ m}$ ,  $y = 4 \text{ m}$  et  $z = 2 \text{ m}$ . Le temps de simulation est de 10 s, avec un pas d'échantillonnage de  $10^{-3}$  s. Le tableau (Tab 4.1) résume les valeurs des deux critères pour chaque commande :

	$J_1$	$J_2$
Backstepping	3.7418	43.2916
Mode glissant	6.9236	41.7234
Forwarding	2.7988	44.3450

TABLE 4.1 – Etude comparative entre les commandes sans perturbation

Pour une trajectoire hélicoïdale avec une variation paramétrique de 40% des valeurs nominales et pour une durée de 40 s, le tableau (Tab 4.2) présente les valeurs des deux critères pour chaque commande :

	$J_1$	$J_2$
Backstepping	0.8772	43.7034
Mode glissant	1.7286	43.2848
Forwarding	0.0068	46.7626

TABLE 4.2 – Etude comparative entre les commandes avec une variation paramétrique

Pour une trajectoire hélicoïdale avec une force du vent pour une durée de 15 s, le tableau (Tab 4.3) résume les valeurs des deux critères pour chaque commande :

En constatant que la commande forwarding a donné les meilleurs résultats pour le critère de l'erreur quadratique. Par ailleurs, la commande par mode glissant a donné les meilleurs résultats pour le critère de l'énergie. Nous allons tester ce dernier contrôleur pour d'autres trajectoires plus complexes et les résultats obtenus sont illustrés par les figures suivantes :

	$J_1$	$J_2$
Backstepping	2.3278	44.8636
Mode glissant	4.6828	43.7382
Forwarding	0.0318	62.5598

TABLE 4.3 – Etude comparative entre les commandes en présence du vent

## 1. Trajectoire hélicoïdale

Les références sont une rampe en  $z$ , sinusoïde en  $x$  et cosinus en  $y$  d'amplitude 6m.

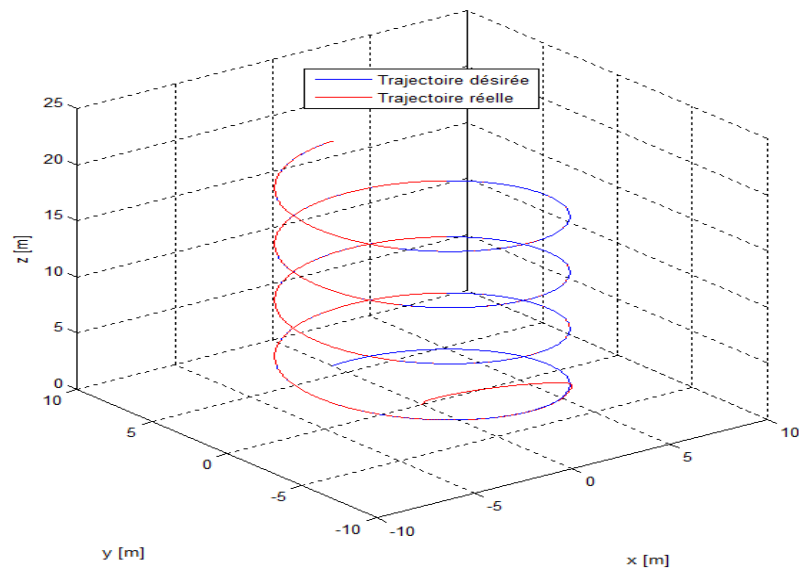


FIGURE 4.25 – Poursuite d'une trajectoire hélicoïdale (SMC)

## 2. Trajectoire ellipsoïdale

La référence en  $z$  est une sinusoïde d'amplitude 5 m et une ellipse dans le plan  $(xy)$ .

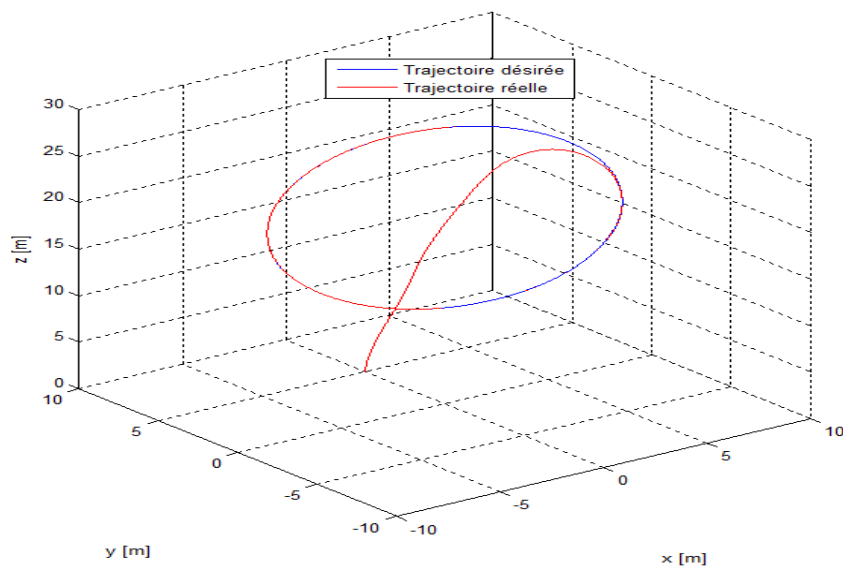


FIGURE 4.26 – Poursuite d'une trajectoire ellipsoïdale (SMC)



### 3. Autre trajectoire

La référence en  $z$  est une rampe, sinusoïde en  $x$  et cosinus en  $y$  d'amplitude égale à  $z$ .

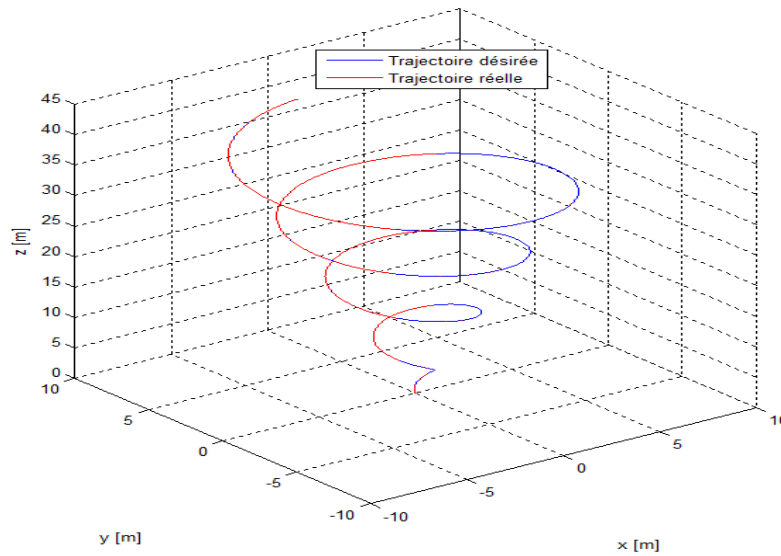


FIGURE 4.27 – Poursuite d'autre trajectoire (SMC)

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué plusieurs tests de robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures, ce qui montre la validité des différentes commandes. Ensuite, une étude comparative est faite, en définissant deux critères de comparaison, où nous avons vu que la commande par mode glissant a présenté les meilleurs résultats pour les deux critères définis. Ceci nous a poussé de la tester pour d'autres trajectoires plus complexes (hélicoïdale, ellipsoïdale, ...).

# Conclusion générale

Le quadrirotor est l'un des mini drones les plus populaires et séduisant de part son élégance et sa dynamique. Par conséquent, il a attiré l'attention et est devenu le sujet de recherche de plusieurs équipes et laboratoires ces dernières années. Ce drone est un système complexe, non linéaire, multivariables, instable et présente une dynamique fortement couplée, ce qui a fait de sa commande un grand défi.

Le travail réalisé rentre dans un cadre de recherche sur la commande des quadrirotors capables de réaliser des vols stationnaires.

Nous avons commencé le document par des aperçus sur les quadrirotors avec leurs historiques, les derniers projets de recherche traitant ce sujet ainsi que leurs champs d'application. Nous avons également décrit les capteurs et les moteurs généralement utilisés pour ce type d'aéronef.

En suite, une modélisation dynamique a été faite en se basant sur le formalisme de Newton. Puis le modèle a été modifié en adoptant des hypothèses simplificatrices afin de faciliter la synthèse des lois de commande. Le modèle ainsi obtenu est identique à celui présenté par [31], qui a effectué des expérimentations et des tests de vol indoor. Une autre approche de modélisation, dite hybride, basée sur la décomposition du mouvement est faite. Cette dernière présente beaucoup d'avantages : Faciliter la synthèse de la commande, améliorer les performances tel que le temps de réponse et enfin permettre d'effectuer des mouvements plus complexes.

En ce qui concerne la commande, trois techniques non linéaires sont présentées. Backstepping et forwarding sont des techniques récursives basées sur les fonctions de Lyapunov. La commande par mode glissant est fondée sur la théorie des systèmes à structure variable. Les commandes développées assurent les performances désirées en tenant compte des limitations énergétiques du système et des perturbations extérieures affectant sa dynamique. Plusieurs tests de robustesse ont été considérés pour valider les commandes synthétisées. En plus, une étude comparative entre ces dernières a été effectuée.

A l'issue de ce travail, l'ensemble des perspectives que nous estimons abordables seront présentées. Elles peuvent apporter soit des améliorations, soit des nouveautés aux contributions futures :

- Nous espérons la mise en œuvre expérimentale des lois de commandes développées sur un système réel ;
- le choix des paramètres de réglage n'est pas optimisé. Il est envisageable d'optimiser ce choix dans le but d'améliorer les performances du système. On signale également que le choix de ces paramètres peut induire l'instabilité du système. Donc, on propose d'entamer une optimisation basée sur les méthodes évolutionnaires tels que les algorithmes génétiques afin de cerner une plage de confiance pour que le choix de ces paramètres n'affecte pas la stabilité du système ;
- dans notre travail, nous n'avons pas considéré le problème des retards de mesure. Nous proposons la prise en compte de ce facteur lors de la modélisation et la synthèse de la commande ;
- la synthèse des observateurs pour la commande du quadrirotor ;
- En ce qui concerne le modèle hybride, il est intéressant de définir d'autres modes qui prennent en considération l'apparition des défauts soit au niveau des capteurs, soit au niveau des actionneurs.

# Annexe

Les paramètres du quadrirotor sont résumés dans le tableau suivant [8], [32] :

Nom	Paramètre	Valeur	Unité
Masse	$m$	0.650	kg
Moment d'inertie du quadrirotor par rapport à x	$J_x$	7.5e-3	kg.m <sup>2</sup>
Moment d'inertie du quadrirotor par rapport à y	$J_y$	7.5e-3	kg.m <sup>2</sup>
Moment d'inertie du quadrirotor par rapport à z	$J_z$	1.3e-2	kg.m <sup>2</sup>
Coefficient de portance	$b$	3.13e-5	Ns <sup>2</sup>
Coefficient de trainée	$k$	7.5e-5	Nms <sup>2</sup>
Moment d'inertie du rotor par rapport à z	$J_{rz}$	6e-5	kg.m <sup>2</sup>
Distance entre le rotor et le centre de gravité	$d$	0.23	m

# Bibliographie

- [1] A. Belhani. "*Conception des Contrôleurs Flous Multivariables*". Thèse de Doctorat, Université Mentouri, Constantine, 2007.
- [2] A. Frenot, A. Gossmann et R. Guillerm. "*Stabilisation d'un quadrirotor*". Rapport PIP, ENSICA, Toulouse, France, 2006.
- [3] A. Kadi. "*Mécanique Rationnelle Cours et exercices résolus*". (pages 222-225). Université M'hamed Bougara, Boumerdès.
- [4] All the world's Rotorcraft, [www.aviastar.org](http://www.aviastar.org).
- [5] A. Martini. "*Modélisation et Commande de vol d'un hélicoptère drone soumis à une rafale de vent*". Thèse de Doctorat, université Paul Verlaine, Metz, France, 2008.
- [6] B. Nourghassemi. "*Development of the Control Algorithms for Autonomous Landing of Unmanned Aerial Vehicles*". Master Thesis. University of Applied Sciences Ravensburg-Weingarten, 2009.
- [7] Cours d'Automatique Avancée. L'Ecole Nationale Polytechnique, Alger, Algérie.
- [8] D. Rachedi Nedjmi. "*Commande hybride avec observation d'un UAV de type quadrotor*". Thèse de Magistère, Ecole Militaire Polytechnique, Alger, Algérie, 2010.
- [9] E. Altuğ, James P. Ostrowski and R. Mahony. "*Control of a Quadrotor Helicopter Using Visual Feedback*". Proceedings of 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 72-77, Washington, DC, May 2002.
- [10] European Aeronautic Defence and Space Company, EADS N.V. <http://www.eads.net/1024/fr/eads/history/airhist/1900-1909/Breguet1-1907>.
- [11] F. Mazenc, R. Mahony and R. Lozano. "*Forwarding control of scale model autonomous helicopter : A Lyapunov control design*". Proceedings of the 42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3690-3695, Maui, Hawaii USA, December 2003.
- [12] F. Yacef et M. Nasri. "*Commande PID adaptative robuste appliquée au quadrirotor*". Mémoire d'ingénieur, Université de Jijel, 2009.

- [13] G. Hoffmann, H. Huang, S. Waslander and C. Tomlin. "*Quadrotor helicopter flight dynamics and control : Theory and Experiment*". AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 2007.
- [14] H. Bouadi . "*Synthèse des lois de commande stabilisantes pour un UAV type quadrotor*". Thèse de Magistère, Ecole Militaire Polytechnique, Alger, Algérie, 2008.
- [15] H. Bouadi, and M. Tadjine. "*Nonlinear Observer Design and Sliding Mode Control of Four Rotors Helicopter*". World Academy of Science, Engineering and Technology 31, 2007.
- [16] H. Osmani. "*Mise en œuvre d'une unité de commande pour robots volants type quadrotor*". Thèse de Magistère, Ecole Militaire Polytechnique, Alger, Algérie, 2009.
- [17] I. Kroo, F. Prinz. "*The Mesicopter : A miniature rotorcraft concept phase II Final Report*". Stanford university, USA.
- [18] J. Epiney. "*Quadrotor Helicopter Hovering with Vision*". Travail de diplôme, Laboratoire de systèmes autonomes, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2006.
- [19] J.E. Slotine and W. Li. "*Applied nonlinear control*". Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [20] J. Miguel Brito Domingues. "*Quadrotor prototype*". Thèse de Master. Université technique de Lisbonne, Portugal, 2009.
- [21] K. Benmansour. "*Réalisation d'un banc d'essai pour la commande et l'observation des convertisseurs multicellulaires série : Approche hybride*". Thèse de Doctorat, université de Cergy Pontoise, France, 2009.
- [22] M. Alma et B. Atik. "*Commande à base d'observateurs d'état non linéaires d'un simulateur d'hélicoptère*". Mémoire d'ingénieur, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 2006.
- [23] M. Asencio. "*L'utilisation civile des drones*". Note de la FRS, Fondation pour la Recherche Stratégique, 2008.
- [24] M. Önder Efe. "*Robust Low Altitude Behavior Control of a Quadrotor Rotorcraft Through Sliding Modes*", Proceeding of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, Athens, July 2007.
- [25] M. Orsag and S. Bogdan. "*Hybrid control of Quadrotor*". Proceedings of IEEE, 17<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation, pp. 1239-1244, Makedonia Palace, Thessaloniki, Greece, 2009.

- [26] P. Brisset. *"Drones civils Perspectives et réalités"*. Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France, 2004.
- [27] R. AbouSleiman, D. Korff, E. Gjioni and H. Chul Yang. *"The Oakland University Unmanned Aerial Quadrotor System"*. the 2008 AUVSI UAS Student Competition.
- [28] R. Lozano, P. Castillo, S. Salazar et D.Lara. *"Stabilisation de véhicules aériens à décollage vertical : Théorie et application"*.
- [29] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. Kokotovic. *"Constructive Nonlinear Control"*. Springer-Verlag, London, 1997.
- [30] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. Kokotovic. *"Interlaced system and recursive designs for global stabilization"*.(1996)
- [31] S. Bouabdallah. *"Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying"*. Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2007.
- [32] S. Bouabdallah, A. Noth and R. Siegwart. *"PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor"*, Proceedings of IEEE/RSJ international conference on intelligent Robots and Systems, pp. 2451-2456, Sendai, Japan, September 2004.
- [33] S. Bouabdallah and R. Siegwart. *"Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor"*. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp 2247-2252, Barcelona, Spain, 2005.
- [34] T. Madani and A. Benallegue. *"Backstepping Sliding Mode Control Applied to a Miniature Quadrotor Flying Robot"*.IEEE pp 700-705, 2006.
- [35] V. Bregeault. *"Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants"*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France ,2010.
- [36] V.I. Utkin. *"Sliding modes in control optimization"*. Communication and control Engineering series, Springer Verlag, 1992.
- [37] W. Respondek and I. Tall. *"Strict feedforward form and symmetries of nonlinear control systems"*. 43<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1611-1616, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- [38] W. Su and M. Fu. *"Robust Nonlinear Control : Beyond Backstepping Nonlinear Forwarding"*. Proceeding of the 38<sup>th</sup> conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, 1999.

**الملخص :** في هذا العمل ، نهتم بإيجاد نموذج ديناميكي و هجين للروبوت الطائر ذو أربعة مراوح وذلك مع الأخذ بعين الاعتبار مختلف الظواهر المحيطة به والمؤثرة على ديناميكيته، هذا ما مكنا من التوصل الى نموذج حالة اكثر واقعية. ثم قمنا بعرض و تطوير تقنيات للتحكم بهذا الجهاز : التحكم التراجعي ،التحكم التقدمي و التحكم الانزلاقي. هذه التقنيات تضمن الاستقرار الشامل للنظام.

**كلمات مفتاحية :** روبوت الطائر ذو أربعة مراوح ، نموذج ديناميكي، نموذج هجين، التحكم التراجعي ،التحكم التقدمي، التحكم الانزلاقي.

**Résumé :** Dans ce travail ; nous nous intéressons à la modélisation dynamique et hybride du quadrotor en tenant compte des divers phénomènes qui peuvent influencer la dynamique d'une structure volante. Cela nous a permis d'aboutir à une représentation d'état plus complète et plus réaliste. Ensuite, nous présentons le développement et la synthèse des lois de commande : Backstepping, mode glissant et forwarding. Ces différentes techniques assurent la stabilité globale du système et une poursuite de trajectoires complexes.

**Mots clés :** Quadrirotor, modèle dynamique, modèle hybride, backstepping, mode glissant, forwarding.

**Abstract:** In this work; we are interested in dynamic and hybrid modelling of a quadrotor while taking into account the various physical phenomena which can affect the dynamics of a flying object. These allow us to introduce a state space representation more complete and more realistic. After; we present the development and the synthesis of control laws: Backstepping, sliding mode and forwarding. These techniques ensure the global stability of the system and the tracking of complex trajectories.

**Key words:** Quadrotor, dynamic model, hybrid model, backstepping, sliding mode, forwarding.