

M0027/96B

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

THESE DE MAGISTER

EN ELECTRONIQUE APPLIQUEE

OPTION: ACQUISITION ET TRAITEMENT DE L'INFORMATION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**MODELISATION ARMA DES SUITES
CHRONOLOGIQUES COMPLEXES ET SON
APPLICATION DANS LE TRAITEMENT DES ECHOS
RADAR**

Présentée par **NAFISSA SADI AHMED**
Ingénieur d'Etat en Electronique

devant le jury composé de Mme. et MM. :

- | | | | |
|--------------------|--------------------------|------------------------------|------------|
| <i>Président:</i> | Dr. A. ZERGUERRAS | <i>Maître de conférences</i> | ENP |
| <i>Rapporteur:</i> | Dr. B. DERRAS | <i>Maître de conférences</i> | ENP |
| <i>Examineurs:</i> | Dr. D. BERKANI | <i>Maître de conférences</i> | ENP |
| | Dr. M. GUERTI | <i>Maître de conférences</i> | ENP |
| | Dr. M. MEHENNI | <i>Maître de conférences</i> | ENP |

le 12. Novembre 1996

*Ce mémoire est dédié
A
Mes très chers parents.*

❧ REMERCIEMENTS ❧

Je tiens à remercier Monsieur B. DERRAS pour avoir dirigé cette thèse et pour les conseils judicieux qu'il m'a apportés tout au long de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à:

- ❧ Monsieur A. ZERGUERRAS pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.
- ❧ Melle M. GUERTI et Messieurs D. BERKANI et M. MEHENNI pour avoir eu l'amabilité d'accepter de juger ce travail.

Je ne sais comment remercier mes parents adorés qui, sans leurs précieux apports, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. De même, je remercie beaucoup Didine, Djazira et Hana pour leur aide, leur réconfort et surtout leur patience durant ces trois dernières années.



TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 1

INTRODUCTION

1.1 PROBLEMATIQUE	1
1.2 CONTRIBUTIONS DE CETTE RECHERCHE	5
1.3 ORGANISATION DE LA THESE	5

PARTIE I *MODELISATION ARMA DES SUITES CHRONOLOGIQUES COMPLEXES*

CHAPITRE 2 7

GENERALITES SUR LA MODELISATION PARAMETRIQUE

2.1 INTRODUCTION	7
2.2 PROCESSUS STOCHASTIQUES ET SUITES CHRONOLOGIQUES	8
2.2.1 Définitions	8
2.2.2 Stationnarité au sens large	9
2.2.3 Estimation des statistiques d'ordre 1 et 2	10
2.3. MODELISATION PARAMETRIQUE	12
2.3.1 Le modèle rationnel	12
2.3.2 Validité du modèle ARMA	14
2.3.3 Equivalence entre les modèles	16
2.3.4 Stabilité et inversibilité	16
2.3.5 Fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA	17
2.4. MODELES DE BASE	18
2.4.1 Modèle Autoregressif (AR)	18
2.4.2 Modèle à moyenne adaptée (MA)	22
2.4.3 Modèle Autoregressif à moyenne adaptée (ARMA)	24
2.5 CONCLUSION	33

CHAPITRE 3 34

CONSTRUCTION D'UN MODELE ARMA POUR UNE SUITE CHRONOLOGIQUE COMPLEXE

3.1 INTRODUCTION	34
3.2 REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN PROCESSUS ARMA	35
3.3 PROCEDURE DE CONSTRUCTION DU MODELE ARMA	36
3.4 ESTIMATION DE L'ORDRE DU MODELE	38
3.4.1 Estimation de l'ordre du modèle AR de référence	38
3.4.2 Estimation de l'ordre ARMA du modèle	47
3.5 DETERMINATION DES PARAMETRES ARMA	56
3.5.1 Approche des moindres carrés	56
3.5.2 Problème des moindres carrés vrais	57
3.5.3 Méthode des moindres carrés modifiés	59
3.5.4 Méthode des moindres carrés modifiés pondérés	60
3.5.5 Techniques itératives pour la solution des moindres carrés vrais	62
3.5.6 Effet d'un bruit blanc additif	69
3.5.7 Remarques	71

3.6 ALGORITHMES EFFICACES UTILISES DANS LA PROCEDURE TLS	71
3.6.1 Algorithme de Jury (ou Levinson inverse)	71
3.6.2 Algorithme de Mullis-Roberts	71
3.6.3 Algorithme de Demeure-Mullis	72
3.6.4 Algorithme bicanal de Levinson	72
3.7 CONCLUSION	72
CHAPITRE 4	73
APPLICATION DE LA PROCÉDURE TLS À DES EXEMPLES NUMERIQUES	
4.1 INTRODUCTION	73
4.2 EXEMPLES NUMERIQUES	73
4.3 ESTIMATION DE L'ORDRE DU MODELE	75
4.3.1 Nouvelle technique	75
4.3.2 Résultats	78
4.4 APPLICATION DES TECHNIQUES TLS	86
4.5 DISCUSSION DES RESULTATS	92
4.6 CONCLUSION	100
PARTIE II	APPLICATION AUX ECHOS RADAR
CHAPITRE 5	101
GENERALITES SUR LE RADAR COHERENT A IMPULSIONS	
5.1 INTRODUCTION	101
5.2 PRINCIPE DU RADAR DOPPLER A IMPULSIONS	102
5.3 PORTEE ET VITESSE D'UNE CIBLE	105
5.4 CELLULE DE RESOLUTION PORTEE-AZIMUT	106
5.5 SPECTRE DE L'ECHO D'UNE CIBLE RADAR	108
5.5.1 Cas d'un radar aéroporté	110
5.6 CONCLUSION	112
CHAPITRE 6	113
MODELISATION ARMA DES ECHOS RADAR	
6.1 INTRODUCTION	113
6.2 LA SUITE CHRONOLOGIQUE RADAR	114
6.3 L'ENVIRONNEMENT RADAR	116
6.4 UTILITE DE LA MODELISATION ARMA	118
6.4.1 Classification du clutter	118
6.4.2 Détection de cibles	119
6.4.3 Simulation de l'environnement radar	123
6.4.4 Identification de cibles	123
6.5 APPLICATIONS DE LA PROCEDURE TLS	124
6.5.1 Simulation des données	125
6.5.2 Résultats	127
6.5 CONCLUSION	132

CHAPITRE 7	133
-------------------	------------

CONCLUSIONS ET SUGGESTIONS

7.1 CONCLUSION GENERALE	133
7.2 SUGGESTIONS POUR DES RECHERCHES ULTERIEURES	135

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	136
------------------------------------	------------

ANNEXES

ANNEXE A	144
-----------------	------------

ALGORITHME DE JURY

ANNEXE B	145
-----------------	------------

ALGORITHME DE MULLIS-ROBERTS

ANNEXE C	148
-----------------	------------

ALGORITHME DE DEMEURE-MULLIS

ANNEXE D	152
-----------------	------------

ALGORITHME BICANAL DE LEVINSON

ANNEXE E	154
-----------------	------------

LA DISTRIBUTION DE WEIBULL

LISTE DES ABRÉVIATIONS

AIC	Akaike Information Criterion; «Critère de Akaike basé sur la théorie de l'information ».
AR	Auto-Régressif (modèle).
ARMA	Auto-Régressif à Moyenne Adaptée (modèle).
BCR	Borne de Cramer-Rao.
BEP	Blanchiment de l'Erreur de Prédiction (critère de).
BIC	Bayesian Information Criterion; «Critère basé sur l'information de Bayes».
BT	Blackman-Tukey.
CAT	Criterion of Auto-Regressive Transfer function; «Critère de la fonction de transfert auto-régressive».
CDE	Corrigitur Dum Erigitur; «Corriger tout en érigeant».
CIC	Consistent Information Criterion; «Critère consistant basé sur l'information».
CovM	Covariance Modifiée (méthode de la).
DSP	Densité Spectrale de la Puissance moyenne.
FAC	Fonction d'Auto-Corrélation.
FACE	Fonction d'Auto-Corrélation Etendue.
FCP	Fonction de la Corrélacion Partielle.
FFT	Fast Fourier Transform; «Algorithme de la transformée de Fourier rapide».
FI	Fréquence Intermédiaire.
FIC	Finite sample Information Criterion; «Critère basé sur l'information des échantillons finis».
FPE	Final Prediction Error; «Critère de l'erreur de prédiction finale».
FSC	Finite Sample Criterion; «Critère des échantillons finis».
GIC	Generalized Information Criterion; «Critère généralisé de l'information».
GKM	Gray-Kelley-McIntire (méthode de).
GLS	Generalized Least Squares; «Méthode des moindres carrés généralisés».
IBDA	Innovations-Based Detection Algorithm; «Algorithme de détection basé sur les innovations».
LRV	Logarithme du Rapport de Vraisemblance.
MA	Moyenne Adaptée (modèle de la).
MDL	Minimum Descriptive Length; «Critère de la longueur de représentation minimale».
ME	Maximum d'Entropie (méthode du).
MLS	Modified Least Squares; «Méthode des moindres carrés modifiés».

MTI	Moving Target Indication: «Visualisation des cibles mobiles».
MTD	Moving Target Detection: «Détection des cibles mobiles».
MV	Maximum de Vraisemblance.
PARCOR	Partial Correlation: «Coefficients de la corrélation partielle».
PER	Periodogramme.
PPI	Plan Position Indicator; «Indicateur de gisement».
RCC	Rapport Cible à Clutter
RF	Radio-Fréquence.
RII	Réponse Impulsionnelle Infinie.
RMCI	Régression aux moindres carrés itérée.
RSB	Rapport Signal à Bruit.
SER	Surface Equivalente Radar.
SIMD	Single Instruction stream - Multiple Data stream: «Chaine simple d'instructions pour plusieurs chaînes de données».
SSL	Stationnaire au Sens Large.
SVD	Singular Value Decomposition: «Décomposition en valeurs singulières».
TF	Transformée de Fourier.
TLS	True Least Squares: «des moindres carrés vrais».
TZ	Transformée en Z.
WMLS	Weighted Modified Least Squares, «des moindres carrés modifiés et pondérés».
WPC	Weak Parameter Criterion: «Critère du paramètre faible».
YW	Yule-Walker (méthode de).
YWM	Yule-Walker Modifiée (méthode de).

LISTE DES NOTATIONS FIXES

(EMPLOYÉES DANS CET OUVRAGE)

SYMBOLES

t ou k	Instants et/ou retards (discrets).
f	Fréquence.
ω	Fréquence angulaire $\omega=2\pi f$.
z	Variable des transformées en Z.
$\delta(t)$	Impulsion unité de Kronecker.
?(t)	Suite chronologique ou fonction du temps.
?(z) (majuscule)	Transformée en Z de ?(t).
? (majuscule gras)	Matrice.
? (minuscule gras)	Vecteur.
0 (en gras)	Vecteur nul.
$\hat{?}$ ou $\tilde{?}$	Quantités estimées de "?".
?*, ?*	Conjugué complexe du scalaire "?" ou de la matrice "?".
?T	Transposée de la matrice "?".
?H	Hermitien (i.e., Conjuguée et transposée) de la matrice "?".
?(i), ?(i)	Valeur de "?" ou "?" à l'itération i.
? ^p , ?(m,n)	Valeur de "?" à l'ordre p ou (m,n).
[?] _{ij}	Valeur de l'élément de la position (i,j) de la matrice "?".

OPERATEURS

E[?]	Espérance mathématique.
Z ⁻¹	Retard d'une unité de temps.
TZ(.) (ou TF(.))	Transformée en Z (ou de Fourier).
TZ(.) ⁻¹ (ou TF(.)) ⁻¹	Transformée en Z (ou de Fourier) Inverse.
*	Convolution.
Grad(.)	Gradient d'une fonction.
Det(.)	Déterminant.

NOTATIONS DES CARACTERISTIQUES DE LA SUITE CHRONOLOGIQUE

x(t), x'(t), ou y(t)	Suite chronologique.
e(t), b(t), ou n(t)	Suite chronologique purement aléatoire (blanche).
L	Longueur de la suite chronologique.
T	Période d'échantillonnage.
$\mu_?$	Moyenne du processus "?".
$\sigma_?^2$	Variance du processus "?".
R _? (k)	Fonction d'autocorrélation de la suite chronologique "?".
R _? ₁ (k)	Fonction d'intercorrélacion des suites chronologiques "? et "1".
C _? (k)	Fonction d'autocovariance de la suite chronologique "?".
S _? (ω)	DSP du processus "?".
X(z), E(z)	Transformée en Z du processus x(t), e(t).
R	Matrice de la FAC.
h(t)	Réponse impulsionnelle du modèle.
H(z)	Fonction de transfert du modèle.
H	Matrice de la réponse impulsionnelle.
A(z), D(z)	Polynôme du dénominateur de H(z).
B(z), C(z)	Polynôme du numérateur de H(z).
λ_i	pôle du modèle ARMA(p,q) (i=1,...,p).

γ_i	zéro du modèle ARMA(p,q) ($i=1,\dots,q$).
ρ_i	ième coefficient de réflexion.
$w(t)$	Fonction de pondération.
$e_n^F(t)$ ($e_n^B(t)$)	Erreur de prédiction avant (arrière) du filtre AR(n).
$V_{RES}(p)$	Variance des résidus à l'ordre p de l'échantillon fini.
$V_{EP}(p)$	Variance de l'erreur de prédiction à l'ordre p de l'échantillon fini.
$Q(p)$	Test de blanchiment de l'erreur de prédiction à l'ordre p.
v_i	Variance du coefficient de réflexion à l'ordre i estimé à partir d'un échantillon fini de la suite chronologique.
$r_m(n)$	Fonction d'autocorrélation étendue.
$\varepsilon(t)$	Erreur à minimiser pour trouver les paramètres ARMA.
$\mathcal{E}(z)$	Transformée en Z de $\varepsilon(t)$.
ε	Vecteur des données $\varepsilon(t)$.

NOTATIONS CONCERNANT LES MODELES PARAMETRIQUES

p, q ou m	Ordre du modèle.
a_i, d_i	ième paramètre de la partie AR du modèle.
b_i, c_i	ième paramètre de la partie MA du modèle.
a, b	vecteurs des paramètres a_i et b_i du modèle.
$\mathcal{E}_r(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	Critère de la méthode "r".
$\mathcal{L}(\cdot)$	Fonction de Lagrange.
$\phi_{ak}(t), \phi_{bk}(t)$	Dérivées partielles de $\mathcal{E}_r(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ par rapport à a_k (b_k respectivement).
$\Phi_{ak}(z), \Phi_{bk}(z)$	Transformée en Z de $\phi_{ak}(t), \phi_{bk}(t)$.

NOTATIONS DE LA PARTIE RADAR

c	Vitesse de la lumière.
τ	Durée de l'impulsion radar.
T_r	Période de répétition des impulsions.
f_r	Fréquence de répétition des impulsions ($f_r = 1/T_r$).
f_e	Fréquence d'émission.
f_L	Fréquence de l'oscillateur local.
f_i	Fréquence intermédiaire.
f_d	Fréquence Doppler.
B	Largeur spectrale du récepteur.
B_0	Largeur spectrale des raies du signal écho (ou résolution spectrale).
$S_e(t), S_r(t)$	Signaux émis et reçu respectivement.
$A_e(t), A_r(t)$	Amplitudes des signaux émis et reçu respectivement.
$\varphi(t)$	phase du signal reçu.
$P(t), Q(t)$	Composantes en phase et en quadrature de phase du signal reçu.
D	Distance de la cible.
δD	Résolution (pouvoir séparateur) en distance du radar.
v_r	Vitesse radiale relative de la cible.
Δv_r	résolution en vitesse du radar.
Δt	retard entre l'impulsion et son écho.
$\Delta \theta$	Angle d'ouverture du lobe principal de l'antenne à 3 dB.
H	Dimension de l'antenne.
δD_θ	Résolution en distance transversale.
Ω	Vitesse de rotation de l'antenne.
N_c	Nombre de coups par cible.
G(t)	Gain de l'antenne.
λ_{IBDA}	Test LRV de l'algorithme IBDA.

INTRODUCTION

1.1 Problématique

La plupart des données dans l'économie, les affaires commerciales, l'ingénierie, la technologie, et les sciences naturelles se présentent sous forme de suites chronologiques d'observations dépendantes. L'intérêt de l'analyse des suites chronologiques se verse essentiellement sur la nature de cette dépendance.

L'outil le plus souvent utilisé dans l'analyse des suites chronologiques discrètes est la construction des modèles stochastiques. Ces modèles doivent avoir une formulation simple et être en mesure de réaliser une représentation suffisante des suites correspondantes en utilisant un nombre minimum de paramètres. L'obtention de tels modèles est importante car:

- ❖ ils informent sur la nature des processus générateurs des suites chronologiques et leur évolution,
- ❖ ils peuvent prévoir de manière optimale les valeurs futures en se basant sur les valeurs courantes et passées des suites,
- ❖ ils permettent de réduire les coûts des stockages et des transmissions par une transcription parcimonieuse de l'information contenue dans toute une suite chronologique dans un nombre limité de paramètres.

Cette étude est consacrée aux modèles dits stationnaires [BOX & JENKINS, 76] du type ARMA. L'analyse du cas général des suites chronologiques complexes discrètes y est considérée avec un intérêt particulier pour les suites pauvres en données. Cette étude s'intéresse également aux applications de cette modélisation dans un domaine aussi délicat que celui du radar.

Pourquoi le modèle ARMA?

Hormis sa formulation rationnelle simple et sa parcimonie dans la représentation des suites, le modèle ARMA est un modèle de grande flexibilité. Il est plus général; il englobe le modèle autorégressif AR très utilisé dans divers domaines, le non-moins important modèle de la moyenne adaptée MA, et le modèle composé autorégressif à moyenne adaptée AR-MA. Par

sa structure pôle-zéro et donc par les possibilités de combinaison de pics et de creux spectraux, le modèle ARMA est capable de retrouver avec habileté les caractéristiques spectrales de la plupart des processus stationnaires. Ce modèle est donc en mesure de fournir de très bonnes estimations des statistiques d'ordre 2 (i.e., les densités spectrales de puissance et les fonctions d'autocorrélation).

Problèmes relatifs à la modélisation ARMA

Pour construire un modèle ARMA(p,q) adapté à une suite chronologique, il faut d'abord l'identifier, c'est à dire estimer l'ordre (p,q) qui lui convient le mieux, ensuite déterminer les (p+q+1) paramètres qui lui incombent. Le problème n'est pas aussi simple et direct que pour le cas d'une modélisation AR.

En effet, la contribution de la partie MA rend le problème de l'estimation des paramètres d'un modèle ARMA non-linéaire. Pour résoudre ce problème, diverses approches sont présentées dans la littérature. Les paramètres des parties AR et MA y sont déterminés soit simultanément ou séparément. Malheureusement dans toutes les méthodes et techniques surviennent un ou plusieurs inconvénients tels que les erreurs d'estimation de la fonction d'autocorrélation (FAC) et la difficulté du choix de la séquence la plus informative et la moins erronée de celle-ci, la complexité de la méthode, l'incertitude de convergence, les coûts onéreux en calculs et en mémoire, la stabilité et l'inversibilité incertaines des modèles obtenus.

Quant à la sélection de l'ordre ARMA, il existe, dans la littérature, deux catégories de méthodes; les méthodes basées sur la variance de l'erreur de prédiction et les méthodes basées sur les estimées de la FAC. Le problème de la première catégorie est qu'elle nécessite l'estimation préalable des paramètres pour évaluer la variance de l'erreur de prédiction et de là les critères basés sur le maximum de vraisemblance (MV) pour un ordre donné (e.g. critères AIC, BIC, MDL). La seconde catégorie requiert énormément de calculs et d'espace mémoire surtout pour l'évaluation des statistiques permettant la décision (e.g. méthodes GKM).

Problème de la longueur des séquences de données

Généralement, dans l'analyse des suites chronologiques, la seule information disponible sur le processus est celle contenue dans la séquence de données observées. Plus cette séquence est longue et plus les grandeurs estimées sont fiables et crédibles. Mais hélas, dans la majorité des cas pratiques, le nombre des observations n'est pas infini et est souvent très limité. Cette

limitation est soit imposée par la nature du processus et les contraintes de son observation, ou est délibérée par soucis d'assurer la stationnarité des séquences observées.

En conséquence, dans les cas pratiques, cette contrainte sur la longueur des séquences de données va encore compliquer les problèmes de la modélisation ARMA. En effet, aussi bien les méthodes de sélection de l'ordre ARMA que les méthodes d'estimation des paramètres deviennent défailtantes lorsqu'il s'agit de courtes séquences de données. La notion de consistance des estimateurs n'a plus de sens ici. D'autre part, il n'existe pas dans la littérature, de théorie sur les échantillons finis spécifique au modèle ARMA comme il en est pour le modèle AR.

Solutions proposées dans cette thèse

Dans cette recherche, une procédure simple et intéressante est suggérée pour une modélisation ARMA efficace en utilisant des séquences courtes de données.

Dans cette procédure, l'estimation de l'ordre (p,q) se fait directement à partir des données sans préalablement estimer la FAC ni les paramètres ARMA pour les différents ordres. En effet, une nouvelle méthode de sélection de l'ordre est proposée. Elle est basée sur la théorie de sélection de l'ordre AR pour les échantillons finis. Elle utilise une version modifiée des critères FIC (Finite-sample Information Criterion) pour déterminer en même temps l'ordre du modèle AR long adéquat et l'ordre p de la partie AR du modèle ARMA. Ces deux ordres sont ensuite exploités, pour estimer l'ordre q de la partie MA. L'efficacité de cette nouvelle méthode est testée et prouvée pour plusieurs types de processus et pour différentes longueurs des échantillons.

Pour déterminer les paramètres du modèle ARMA (p,q) (p et q étant déjà obtenus), deux techniques itératives basées sur le critère des moindres carrés vrais (TLS) sont proposées. Ces techniques sont remarquables car elles permettent d'obtenir de très bonnes estimations pour les paramètres du modèle même pour des séquences courtes de données. Elles possèdent aussi des caractéristiques intéressantes de convergence et de stabilité des modèles obtenus. De même, l'avantage le plus attrayant de ces techniques TLS réside dans leur coût considérablement réduit. Ceci revient en plus grande partie à l'emploi des algorithmes rapides et efficaces dans les différentes phases de leurs calculs.

Pourquoi l'application au radar?

Une des fonctions importantes d'un système radar de «surveillance» est d'assurer la sécurité et l'ordre du trafic aérien (surtout dans un aéroport). Il doit permettre aux avions d'éviter les turbulences atmosphériques, les volées d'oiseaux notamment durant les saisons de migration et, bien sûr, les collisions avec d'autres avions. Par conséquent, l'aptitude de classer avec discernement les diverses situations probables de se produire en pratique est nécessaire. Généralement, cette fonction de classification et de détection de cibles (e.g. avions) est confiée aux opérateurs radar. Ces derniers s'en remettent à la capacité de l'écran PPI (Plan Position Indicator) et à leur expérience pour distinguer entre les situations possibles.

Comme les signaux disponibles au niveau du récepteur du radar ne sont pas déterministes à cause de leur dépendance de plusieurs facteurs, les échos peuvent être considérés comme des échantillons de n'importe lequel des nombreux processus aléatoires. En fait, le clutter simple émanant du sol ou des conditions météorologiques a été traité avec succès comme un processus AR d'ordre faible. Cependant, pour un clutter composite qui consiste en un amalgame d'échos de deux ou de plusieurs types de réflecteurs, c'est généralement le modèle ARMA qui est le plus approprié pour le représenter.

Cette alternative de décrire les situations radar possibles par des modèles du type ARMA apporte beaucoup de solutions et ouvre de nouvelles perspectives pour le traitement des signaux radar (e.g., la classification des échos et la détection de cibles). Pour mettre à profit ces atouts, il est primordial que les procédures et les algorithmes utilisés pour modéliser les données entrant dans le récepteur radar soient adaptés aux particularités et aux exigences d'un tel système. En effet, ces algorithmes de modélisation ont à traiter des segments courts de (10 à, au maximum, 50) données complexes en un temps très faible (de quelques millisecondes) et à fournir de très bonnes estimations. Vu l'application, il est évident que la fiabilité des estimations fournies est capitale.

Dans ces conditions, la procédure TLS proposée dans ce travail paraît très indiquée pour ce domaine d'application. De plus, par sa simplicité, elle est facilement implémentable sur un système radar déjà existant.

1.2 Contributions de cette recherche

L'objectif essentiel de cette recherche est de proposer une procédure complète et efficace pour la modélisation ARMA complexe des processus à partir de courtes séquences d'observations et surtout d'étudier l'utilisation de cette procédure dans le traitement des échos radar. La réalisation de cette recherche a nécessité l'élaboration d'autres travaux qui, pris individuellement, peuvent être considérés comme des contributions supplémentaires de cette thèse. Ces dernières se résument en:

- ☞ la synthèse des différentes méthodes qui existent dans la littérature concernant la modélisation des trois modèles de base (i.e., AR, MA et ARMA) et la sélection des ordres AR et ARMA. Les problèmes de ces méthodes sont discutés et quelques solutions sont proposées.
- ☞ une formule matricielle générale pour les solutions des méthodes des moindres carrés dans la détermination des paramètres ARMA.
- ☞ une nouvelle méthode de sélection de l'ordre ARMA basée sur la théorie des échantillons finis dans la sélection de l'ordre AR.
- ☞ des développements et/ou des extensions (au cas complexe et au cas des modèles ARMA(p,q), $p \neq q$) des algorithmes efficaces qui sont utilisés dans les techniques TLS.
- ☞ une description de quelques méthodes et techniques d'extraction de l'information dans le traitement des signaux radar.

1.3 Organisation de la thèse

Cette thèse comprend deux volets. Le premier concerne la modélisation ARMA en général et la procédure TLS proposée alors que le second est consacré à la modélisation ARMA des échos radar.

Pour le premier volet de cette étude, des notions générales sur les suites chronologiques, le modèle ARMA et les diverses méthodes d'estimation des paramètres des modèles AR, MA, ARMA sont présentés au Chapitre 2. Le Chapitre 3 est consacré à la procédure TLS. Des méthodes éventuelles pour ses différentes étapes y sont suggérées. A l'étape de la détermination des paramètres du modèle ARMA, deux techniques itératives découlant de l'expression générale de la solution du problème des moindres carrés y sont explicitées. Une nouvelle technique de sélection de l'ordre du modèle ARMA pour de courts segments de

données est proposée pour la procédure TLS au Chapitre 4. Elle est testée sur plus d'un millier de séquences de divers types de processus. Les résultats des tests de la procédure TLS sur des exemples numériques de processus courants sont exposés et discutés dans ce même chapitre.

Pour le second volet de cette étude, des notions sur le radar Doppler à impulsions, ses caractéristiques, ses contraintes et la nature de l'information qu'il peut fournir sont présentées dans le Chapitre 5. Quant au Chapitre 6, il est consacré au traitement des suites chronologiques complexes formées à partir des échos radar. Les possibilités et les avantages qu'offrent l'introduction de la modélisation ARMA, surtout en utilisant la procédure TLS, dans ce traitement y sont exposées. Des résultats d'application de la procédure TLS dans la modélisation de quelques situations types de clutter composite y sont aussi présentés.

Une conclusion générale sur cette étude ainsi que des suggestions pour des travaux à venir sont données au Chapitre 7. Les détails et les développements des algorithmes efficaces utilisés dans la procédure TLS sont présentés en annexe.

Tous les calculs effectués dans le cadre de cette thèse ont été réalisés sur PC 486 XD, 33 MHz, 640 Ko RAM; en utilisant le langage FORTRAN 77.

PARTIE I

***MODELISATION ARMA DES SUITES
CHRONOLOGIQUES COMPLEXES***

CHAPITRE 2

GENERALITES SUR LA MODELISATION PARAMETRIQUE

2.1 Introduction

La méconnaissance des lois exactes qui régissent n'importe quel phénomène ou processus leur attribue un caractère aléatoire et rend les grandeurs statistiques le seul moyen possible pour l'analyse et l'interprétation. Généralement, seulement une suite chronologique (quelquefois spatiale) de données et/ou, dans certains cas, de statistiques au plus du second ordre (i.e., la séquence d'autocorrélation) sont observées. Ces données sont traitées de façon à en extraire les caractéristiques du processus, surtout celles qui sont informatives pour les applications en question. Dans la plupart des applications du traitement des signaux, une quantité importante de l'information (e.g. les périodicités, l'énergie, la phase) sur les processus observés est mise en évidence dans le domaine fréquentiel. C'est pourquoi, la densité spectrale de puissance (DSP) du processus, qui est une statistique du second ordre, est le plus souvent utilisée [ROBERTS & MULLIS, 87].

En pratique, les séquences de données disponibles (de suite chronologique ou de fonction d'autocorrélation) ne sont pas infinies et peuvent être très limitées. Dans ces conditions, la qualité des estimateurs spectraux classiques basés sur les transformées de Fourier (TF) devient médiocre. Ce qui a encouragé le développement des méthodes paramétriques qui sont capables de fournir de meilleures estimations. Par ces méthodes, des modèles mathématiques représentés par un nombre limité de paramètres qui tentent d'approximer le processus générateur des données, sont construits à partir d'une séquence finie (plus ou moins réduite) de celles-ci. L'utilisation de l'information *a priori* sur les données permet la sélection d'un modèle adéquat (de Prony, de Pisarenko, ou généralisé du type ARMA), pour approximer au mieux le processus [MARPLE, 87; KAY, 88].

La fréquente indisponibilité des statistiques des processus et la nécessité d'utiliser celles-ci dans la construction des modèles [GIANNAKIS & TSATSANIS, 91 & 94; TUGNAIT, 91] imposent l'inclusion d'hypothèses de stationnarité et d'ergodicité afin de permettre des estimations temporelles de ces grandeurs à partir des données. En pratique, l'hypothèse de la stationnarité n'est généralement vérifiée que pour de courts segments de données.

Dans ce chapitre, une introduction à la modélisation paramétrique ARMA, ses motivations et ses justifications sont présentées. Un bref aperçu y est donné des propriétés des trois modèles de bases; AR, MA et ARMA ainsi que les différentes approches usuellement employées dans l'estimation de leurs paramètres. Ces approches ne sont pas explicitées vu leur multitude et leurs variétés que ce volume ne peut contenir. Elles sont sommairement décrites afin d'avoir une vue d'ensemble sur leurs qualités et leurs défauts et de motiver l'étude des procédures moins complexes et plus efficaces proposées dans le chapitre suivant.

2.2 Processus Stochastiques et Suites Chronologiques

2.2.1 Définitions

Processus stochastique est le nom attribué à tout phénomène évoluant, de manière imparfaitement prévisible, en fonction d'un paramètre physique (généralement le temps), suivant des lois probabilistes.

L'analyse d'un processus aléatoire se fait souvent par le biais de plusieurs séries indépendantes d'observations (ou épreuves) enregistrées à partir de celui-ci et appelées "réalisations".

Une suite chronologique $x(t)$ (où t désigne le temps) est une famille de variables aléatoires réelles ou complexes à temps continu ou discret (i.e., $t \in \mathbb{R}$ ou $t \in \mathbb{Z}$) représentant les observations lors d'une réalisation d'un processus aléatoire [CHARBIT, 90]. La caractéristique essentielle des suites chronologiques est que, contrairement aux fonctions déterministes, leurs comportements ne peuvent être prédits de façon exacte [HARNETT, 75; BOX & JENKINS, 76].

Pour l'analyse des processus, il est souvent plus approprié d'avoir des suites chronologiques discrètes. Elles peuvent donc provenir soit d'un échantillonnage des suites chronologiques à temps continu ou d'une accumulation d'une variable sur une période de temps donnée (i.e., à temps discret). Une suite chronologique $x(t)$ de longueur L est donc une séquence de L échantillons de données; $x(0), x(1), \dots, x(L-1)$; enregistrés aux instants $t = 0, T, 2T, \dots, (L-1)T$. T est la période d'échantillonnage; elle est généralement constante (pour un échantillonnage uniforme) et souvent considérée comme l'unité de temps ($T=1$) [JENKINS & WATTS, 68].

2.2.2 Stationnarité au sens large

La stationnarité d'un processus aléatoire équivaut à un équilibre statistique dans le sens où il ne contient pas de tendances ou de caractère saisonnier ou cyclique. C'est à dire que les propriétés statistiques du processus sont constantes dans le temps pour toutes les réalisations [JENKINS & WATTS, 68; HARNETT, 75].

En pratique, pour des raisons de simplicité de l'analyse des processus réels, la condition de stationnarité est souvent restreinte aux statistiques d'ordre 1 et 2 seulement. C'est la stationnarité au sens large. Par conséquent un processus discret stationnaire au sens large (SSL) sera convenablement caractérisé par : [PAPOULIS, 84; CHARBIT, 90]

♦ Une moyenne constante:

$$\mu_x = E[x(k)] \quad (2.1)$$

où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique.

♦ Une fonction d'autocorrélation (FAC) indépendante de l'origine des temps:

$$R_x(k) = E[x(t) x^*(t-k)] \quad k = 0,1,2,\dots \quad (2.2)$$

où $(*)$ désigne le conjugué complexe. Elle est aussi dotée de la propriété dite hermitienne suivante:

$$R_x(k) = R_x^*(-k) \quad (2.3)$$

♦ Une fonction d'autocovariance:

$$\begin{aligned} C_x(k) &= E[(x(t) - \mu_x)(x^*(t-k) - \mu_x^*)] \\ &= R_x(k) - |\mu_x|^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

♦ Une variance constante: $\sigma_x^2 = C_x(0) = R_x(0) - |\mu_x|^2 \quad (2.5)$

La moyenne μ_x mesure le centre de gravité de la distribution des observations et la variance σ_x^2 mesure leur variabilité (ou dispersion) autour de la moyenne.

Il est à noter que dans l'analyse des processus aléatoires, ces derniers sont souvent centrés; c'est à dire que même si μ_x n'est pas naturellement nul, les observations seront préalablement centrées pour des raisons de simplicité de traitement. Les fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance sont souvent alors synonymes [BOX & JENKINS, 76].

La FAC donne une image visuelle de la manière avec laquelle la dépendance dans la suite chronologique diminue suivant le retard (ou la séparation) entre ses points. Par exemple, pour un processus blanc stationnaire centré dont les échantillons de sa suite chronologique sont complètement indépendants les uns des autres, la FAC est donnée par:

$$R_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\delta(k)$ est la fonction impulsion unité de Kronecker.

Cependant, pour la plupart des processus aléatoires, il est souvent difficile d'interpréter la FAC car des processus ayant des distributions différentes peuvent avoir des FAC très rapprochées (ou même identiques) surtout pour des faibles retards. De plus, l'information de phase se trouve complètement perdue si la FAC seulement est analysée. Il est d'habitude préférable de considérer la transformée de Fourier (TF) de la FAC qui n'est autre que la densité spectrale de puissance (DSP) du processus (d'après le théorème de Wiener-Kintchine) donnée par: [PAPOULIS, 84; CHARBIT, 90]

$$S_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x(k) \exp(-j\omega k) \quad (2.7)$$

où ω est la fréquence angulaire normalisée et $S_x(\omega)$ est une fonction continue, périodique sur $[-\pi, \pi]$ et définie semi-positive. L'interprétation de la DSP est généralement plus facile que celle de la FAC et présente un intérêt physique direct [JENKINS & WATTS, 68; PROCEEDINGS IEEE, 82].

2.2.3 Estimation des statistiques d'ordre 1 et 2

Il est courant qu'en pratique, les propriétés statistiques des processus à analyser soient inconnues et que seulement une réalisation comprenant un nombre fini d'échantillons soit disponible. Par conséquent, pour estimer les quantités statistiques, seulement les moyennes temporelles sont possibles plutôt que les moyennes d'ensemble décrites implicitement par l'opérateur $E[\cdot]$. L'équivalence des deux types de moyennes (temporelles et d'ensemble) ne peut être justifié que sous l'hypothèse de l'ergodicité du processus stationnaire [PAPOULIS, 84; CHARBIT, 90].

2.2.4.1 Estimation de la moyenne

A partir d'une suite chronologique finie $\{x(t), t=0, 1, 2, \dots, L-1\}$ d'un processus ergodique SSL, la moyenne μ_x peut être estimée par:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} x(t) \quad (2.8)$$

Cet estimateur est non biaisé; i.e. $E[\hat{\mu}_x] = \mu_x$; et sa variance est proportionnelle à la valeur de la DSP du processus à la fréquence zéro et inversement proportionnelle à la longueur L de la suite [THOMAS, 84]. Cet estimateur est donc plus consistant pour les processus dont la puissance est concentrée aux fréquences hautes.

2.2.4.2 Estimation de la FAC

Pour calculer la séquence d'autocorrélation à partir de L échantillons de la suite, seulement un nombre fini de paires de données est possible; i.e. $L - |k|$ pour un retard k . Un estimateur de la FAC est donc: [ROBERTS & MULLIS, 87]

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{L - |k|} \sum_{t=0}^{L-|k|-1} x(t) x^*(t-k) \quad (2.9)$$

$\hat{R}_x(k)$ est appelé l'estimateur non biaisé de la FAC.

Un autre estimateur de la FAC couramment utilisé, dit biaisé, est obtenu en remplaçant le diviseur $(L - |k|)$ dans (2.9) par L comme suit:

$$\tilde{R}_x(k) = \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-|k|-1} x(t) x^*(t-k) \quad (2.10)$$

$\tilde{R}_x(k)$ est plus utilisé que $\hat{R}_x(k)$ dans l'analyse des suites chronologiques et cela pour deux raisons. La première est que l'estimateur biaisé est une fonction définie positive alors que l'autre estimateur ne l'est pas. Cette propriété assure la non-négativité de la DSP (ou la transformée de Fourier de l'estimateur). L'autre raison est que la variance de l'estimateur non biaisé qui est de l'ordre $O(1/(L - k))$ tend à être plus grande que celle de l'estimateur biaisé. Cette dernière est de l'ordre de $O(1/L)$. Cette tendance de la variance est particulièrement observée pour des séquences courtes de données [THOMAS, 84].

2.2.4.3 Estimation classique de la DSP

L'estimation classique de la DSP d'un processus aléatoire à partir d'une séquence finie est basée sur deux techniques principales utilisant la transformée de Fourier (TF). L'une est appelée le "corrélogramme" de Blackman-Tukey qui évalue la TF de la séquence d'autocorrélation $R_x(k)$ pondérée par une fenêtre normalisée $w(k)$ de durée $(2M+1)$. Elle est donnée par: [PROCEEDINGS IEEE, 82]

$$\hat{S}_{BT}(\omega) = \sum_{k=-M}^M w(k) R_x(k) \exp(-j\omega k) \quad (2.11)$$

La seconde technique est le périodogramme (et ses variantes) qui évalue directement la DSP à partir de la TF de la suite chronologique. Il est donné par:

$$\hat{S}_{PER}(\omega) = \frac{1}{L} \left| \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \exp(-j\omega k) \right|^2 \quad (2.12)$$

Bien que ces approches basées sur la TF soient très efficaces du point de vue des calculs en utilisant l'algorithme FFT, elles présentent, toutefois, des limitations inhérentes au comportement de ce dernier. La plus importante limitation est la médiocrité de la résolution spectrale due à l'utilisation de la TF pour une séquence de données finie et courte, (elle est inversement proportionnelle à L).

De plus, le fenêtrage implicite des données temporelles suppose que la suite temporelle et la séquence de la FAC sont nulles en dehors du segment de temps considéré. Cette supposition irréaliste entraîne des pertes d'énergie sous forme de lobes secondaires dans le spectre induisant ainsi des distorsions et des masquages [KAY & MARPLE, 81].

Néanmoins il est nécessaire de signaler que des techniques récentes utilisant la FFT de façon itérative arrivent à extraire des sinusoides (ou exponentielles) très proches noyées dans un bruit large bande [GOUGH, 94].

2.3. Modélisation Paramétrique

2.3.1 Le modèle rationnel

Pour contourner les problèmes de la résolution et des lobes secondaires de l'estimation classique de la DSP d'un processus aléatoire, surtout dans le cas des séquences courtes, et pour conserver la nature continue du spectre en fréquence, la DSP peut être bien approximée par une fonction rationnelle de la forme: [CADZOW, 82]

$$\hat{S}_x(\omega) = K \left| \frac{1 + \beta_1 e^{-j\omega} + \dots + \beta_q e^{-jq\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_p e^{-jp\omega}} \right|^2 \quad (2.13)$$

où p et q sont des entiers positifs convenablement choisis, les paramètres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q, a_1, a_2, \dots, a_p$ sont des coefficients complexes (ou réels) et K est une constante positive de normalisation. Cette fonction représente en fait une combinaison de pics et de creux spectraux (par ses pôles et ses zéros, respectivement) qui décrit le mieux le processus.

Il est clair de cette façon qu'à partir de L échantillons de données $\{x(0), x(1), \dots, x(L-1)\}$ excédant le nombre $(p+q+1)$ des paramètres de la fonction rationnelle à déterminer, i.e., $\{K, a_1, a_2, \dots, a_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\}$, il est possible d'obtenir une DSP qui est une fonction continue de la fréquence donc avec une haute résolution fréquentielle.

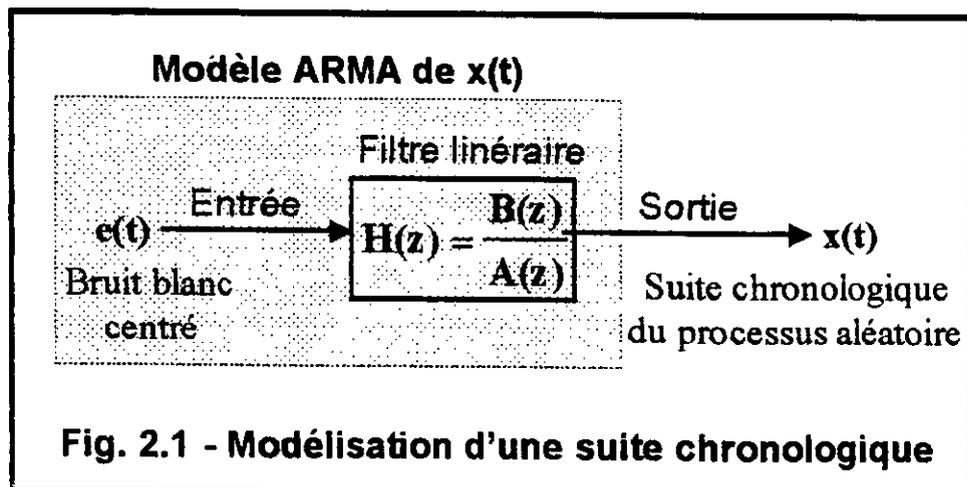
Du point de vue physique, le modèle paramétrique de la DSP de (2.13) possède une interprétation bien justifiée: La suite chronologique $x(t)$ peut être vue comme étant le résultat d'un filtrage linéaire d'un bruit blanc centré $e(t)$ de variance σ_e^2 à travers un filtre discret dont la fonction de transfert est donnée par: (voir Fig. 2-1)

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (2.14)$$

avec $B(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i} = b_0 \prod_{i=1}^q (1 - \gamma_i z^{-1})$ (où b_0 est dit le gain du filtre) (2.15a)

et $A(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i} = \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i z^{-1})$ avec $a_0 = 1$ (2.15b)

Le polynôme $B(z)$ représente la partie "moyenne mobile ou adaptée" (MA) du modèle dont les racines $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ sont appelés les "zéros" et le polynôme $A(z)$ représente la partie



"autoregressive" (AR) du modèle dont les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont appelés les "pôles". Le modèle rationnel $H(z)$ est souvent dit modèle "pôle-zéro" ou "autoregressif à moyenne adaptée" d'ordre (p,q) , noté ARMA (p,q) .

- Si $p=0$, le modèle ARMA $(0,q)$ est appelé modèle "tout zéro" ou à moyenne adaptée pur d'ordre q , noté MA (q) , et sa fonction de transfert est alors:

$$H(z) = B(z) \quad (2.16)$$

- Si $q=0$, le modèle ARMA $(p,0)$ est dit modèle "tout pôle" ou autoregressif pur d'ordre p , noté AR (p) , et sa fonction de transfert est alors:

$$H(z) = \frac{b_0}{A(z)} \quad (2.17)$$

2.3.2 Validité du modèle ARMA

La relation entrée-sortie du modèle ARMA (p,q) dans le domaine Z s'écrit:

$$X(z) = H(z)E(z) \quad (2.18)$$

où $E(z)$ et $X(z)$ sont les transformées en Z (TZ) respectives des suites chronologiques de l'entrée $e(t)$ et de la sortie $x(t)$ du filtre.

En multipliant (2.18) par $X^*(1/z^*)$, on obtient:

$$\begin{aligned} S_x(z) &= X(z)X^*(1/z^*) \\ &= S_e(z)H(z)H^*(1/z^*) \quad \text{avec} \quad S_e(z) = E(z)E^*(1/z^*) \end{aligned} \quad (2.19)$$

La DSP de la sortie est évaluée à partir de (2.19) pour $z = e^{j\omega}$, et comme l'entrée est un bruit blanc centré, sa DSP est constante, elle est égale à sa variance, i.e.,

$$S_e(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \quad (2.20)$$

donc, la DSP de $x(t)$ est donnée par:

$$\begin{aligned} S_x(e^{j\omega}) &= S_e(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 \\ &= \sigma_e^2 |H(e^{j\omega})|^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

et on retrouve ainsi la forme rationnelle proposée en (2.13) en posant:

$$K = \sigma_e^2 |b_0|^2 \quad \text{et} \quad \{\beta_i = b_i/b_0, \quad i = 1, 2, \dots, q\}.$$

Remarque: Dans la littérature, pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, un des deux paramètres b_0 ou σ_e^2 est contraint à l'unité de sorte que la constante K de la DSP à déterminer désigne un seul paramètre. Dans la suite de ce mémoire, la suite chronologique est supposée être générée à partir d'un bruit blanc centré et normalisé et la valeur de K se réduit donc à celle de b_0 qui doit être déterminée.

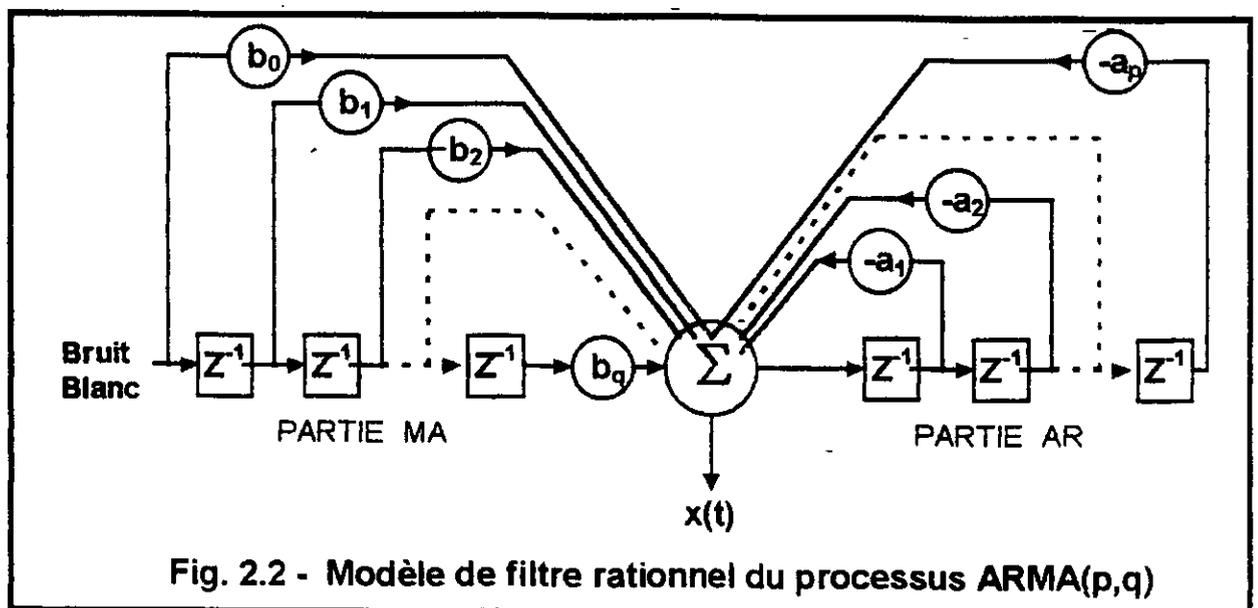
Dans le domaine temporel, le modèle ARMA(p,q) est représenté par une équation aux différences finies à partir de laquelle la suite chronologique $x(t)$ est générée comme suit:

$$x(t) = \underbrace{-\sum_{i=1}^p a_i x(t-i)}_{S_1(t)} + \underbrace{\sum_{i=0}^q b_i e(t-i)}_{S_2(t)} \quad (2.22)$$

La synthèse de $x(t)$ suivant (2.22) est directement réalisable par une structure simple composée d'éléments à décalage unité, de gains et de sommateurs (voir Fig.2-2).

Ainsi, le modèle ARMA(p,q) est validé par le théorème de la décomposition de Wold [MARPLE, 87; PAPOULIS, 85a & 85b] qui énonce que: tout processus aléatoire centré et SSL peut être décomposé en une composante complètement aléatoire; représentée ici par le bloc somme $S_2(t)$ dépendant de la séquence blanche d'excitation du modèle, et une composante déterministe; représentée ici par le bloc somme complètement prévisible $S_1(t)$.

De plus, grâce à un tel modèle, une prédiction satisfaisante de la suite chronologique est tout à fait possible car les deux aspects dynamique et statistique du processus aléatoire sont distinctement représentables; l'aspect dynamique se traduit par les $(p+q+1)$ paramètres du filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII), $B(z)/A(z)$, tandis que l'aspect statistique se traduit



par le bruit blanc de l'entrée du filtre [ROBINSON, 79]. Une telle description d'un processus a pour avantage de transcrire l'information contenue dans toute la suite chronologique (aussi longue soit-elle) dans un nombre relativement très petit de paramètres. C'est le concept de la "parcimonie" [BOX & JENKINS, 76].

Aussi, il a été démontré dans [PILLAI et al., 92] que dans le concept généralisé de l'entropie maximale, la maximisation d'une erreur minimale de prédiction à n pas par rapport à une séquence de la FAC d'un processus de longueur p aboutit à une DSP d'un modèle ARMA($p, n-1$). Ce qui fournit une justification supplémentaire au modèle rationnel.

Il est à noter que le modèle ARMA(p, q) caractérisant un processus aléatoire peut être défini dans la théorie des systèmes comme étant un filtre linéaire **abstrait** dont l'entrée est un processus **aléatoire pur** donc qui ne peut être sujet à aucune modélisation (c'est un bruit blanc) et qui, de plus, est **inobservable**.

2.3.3 Equivalence entre les modèles

Un corollaire du théorème de Wold énonce que si la DSP est continue, tout processus ARMA ou AR peut être représenté par un modèle MA unique d'ordre infini. D'autre part, un autre théorème dû à Kolmogorov énonce que tout processus ARMA ou MA est représentable par un modèle AR d'ordre infini [MARPLE, 87; KAY, 88].

Ces théorèmes sont importants car si, pour représenter un processus donné, le modèle choisi parmi les trois se révèle mauvais, une approximation raisonnable peut toujours être obtenue en augmentant suffisamment l'ordre de ce même modèle. Un tel modèle est généralement appelé modèle "long" équivalent du processus.

2.3.4 Stabilité et inversibilité

Une suite chronologique stationnaire issue d'un processus physique ne peut être générée par le filtrage linéaire d'une séquence blanche stationnaire que si le filtre en question est causal (i.e., physiquement réalisable) et stable. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un modèle ARMA(p, q) est que tous ses pôles résident à l'intérieur du cercle unité (i.e., $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, p$).

Le modèle ARMA(p, q) est dit inversible si son inverse $A(z)/B(z)$ est un modèle stable, autrement dit; si tous ses zéros (racines de $B(z)$) se trouvent à l'intérieur du cercle unité (i.e., $|\gamma_i| < 1, i = 1, 2, \dots, q$).

Pour garantir l'unicité du modèle ARMA pour une séquence d'autocorrélation donnée, il suffit de rechercher un modèle à phase minimale, c'est à dire; à la fois stable et inversible [THOMAS, 84; MARPLE, 87; KAY, 88].

2.3.5 Fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA

En multipliant l'équation de récurrence (2.22) d'un modèle ARMA(p,q) par $x^*(t-k)$ et en prenant sa moyenne statistique, on obtient:

$$\begin{aligned} E[x(t)x^*(t-k)] &= -\sum_{i=1}^p a_i E[x(t-i)x^*(t-k)] + \sum_{i=0}^q b_i E[e(t-i)x^*(t-k)] \\ R_x(k) &= -\sum_{i=1}^p a_i R_x(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i R_{ex}(k-i) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$R_{ex}(k)$ est la séquence de l'intercorrélation entre l'entrée et la sortie du modèle, elle est donnée par:

$$R_{ex}(k) = E[e(t)x^*(t-k)] = \sigma_e^2 h^*(-k) \quad (2.24)$$

où σ_e^2 est la variance de $e(t)$, elle est considérée égale à l'unité, et $h(k)$ est la réponse impulsionnelle du filtre causal du modèle, autrement dit, la TZ inverse de $H(z)$, telle que:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \quad (2.25)$$

et donc

$$R_{ex}(k) = \begin{cases} h^*(-k), & \text{si } k < 0; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.26)$$

L'expression de l'autocorrélation d'un modèle ARMA(p,q) est alors donnée par: [CADZOW, 82; MARPLE, 87; KAY, 88]

$$R_x(k) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i R_x(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i h^*(i-k), & \text{pour } 0 \leq k \leq q; \\ -\sum_{i=1}^p a_i R_x(k-i), & \text{pour } k > q; \\ R_x^*(-k), & \text{pour } k < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

2.4. Modèles de base

2.4.1 Modèle Autorégressif (AR)

Le modèle autorégressif AR(p) (donné par (2.22) pour $q=0$) est complètement caractérisé par ses $(p+1)$ paramètres; $\{a_1, a_2, \dots, a_p, b_0\}$. Ce modèle est une représentation appropriée aux processus stationnaires dont le spectre contient des pics (ou pointes) bien définis sans accuser de creux prononcés. Si le processus possède des creux, il est possible de simuler leurs effets au prix d'un certain nombre de pôles supplémentaires (i.e., un ordre AR élevé). Par souci de parcimonie des paramètres, les modèles AR sont à éviter pour des spectres risquant de contenir des creux [KAY & MARPLE, 81; CADZOW, 82; BOITE & KUNT, 87].

L'expression de la FAC pour un modèle AR est déduite de (2.27) pour $q=0$ et sachant que $h(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} H(z) = b_0$, le système obtenu est communément dit de Yule-Walker (YW),

il est donné par:

$$R_x(k) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i R_x(k-i) + |b_0|^2 & , k=0; \\ -\sum_{i=1}^p a_i R_x(k-i) & , k>0; \\ R_x^*(-k) & , k<0 \end{cases} \quad (2.28)$$

L'écriture matricielle de (2.28) est:

$$\begin{pmatrix} R_x(0) & R_x^*(1) & \dots & R_x^*(p) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(p) & R_x(p-1) & \dots & R_x(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N) & R_x(N-1) & \dots & R_x(N-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

notée,

$$\mathbf{R}_N \mathbf{a} = \alpha_p \mathbf{e}_1$$

avec $\alpha_p = |b_0|^2$ et $\mathbf{e}_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$

\mathbf{R}_N est une matrice $(N+1) \times (p+1)$ (N peut être aussi grand que possible) et $\mathbf{a} = (1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)^T$.

Pour déterminer a et b_0 , la FAC exacte du processus étant donnée, il suffit de résoudre les équations de YW pour $N = p$. Comme R_N est une matrice hermitienne carrée, définie positive (pour un modèle stable) et possède la structure de Toeplitz, elle peut être efficacement inversée en $O(p^2)$ opérations au lieu de $O(p^3)$ pour les algorithmes d'inversion ordinaires tel que l'algorithme de l'élimination de Gauss. Les algorithmes rapides les plus connus sont ceux de Levinson-Durbin [PAPOULIS, 85a; MARPLE, 87; ROBERTS & MULLIS, 87], de Schur [BOITE & KUNT, 87; CHAPMAN & RAHMAN, 90], d'Euclid, de Berlekamp-Massey et leurs variantes [ZHANG & DUHAMEL, 92].

Ces mêmes équations de YW peuvent être obtenues par la théorie de la prédiction linéaire [PARZEN, 74; MAKHOUL, 75; MARPLE, 87; KAY, 88]. De plus, dans cette théorie, deux types d'erreurs de prédiction sont définis et dont les variances sont minimisées en tant que coût de la prédiction, en l'occurrence :

♦ l'erreur de la prédiction avant (Forward) définie par:

$$e^F(t) = x(t) - \hat{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i x(t-i) \quad (\hat{\ } \text{indique une quantité estimée}) \quad (2.30)$$

♦ l'erreur de la prédiction arrière (Backward) définie par:

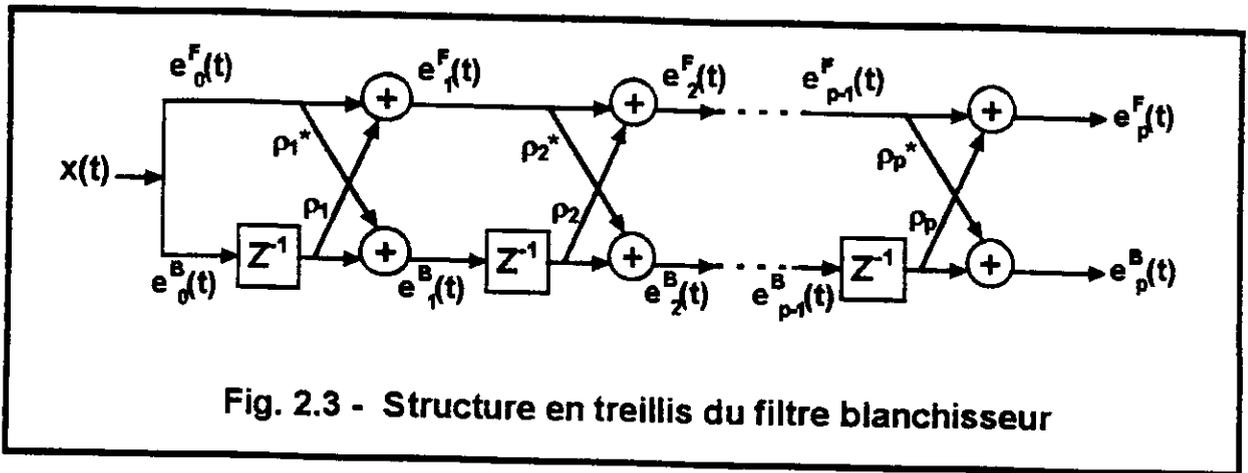
$$e^B(t) = x(t-p) - \hat{x}(t-p) = \sum_{i=0}^p a_i^* x(t-p+i) \quad (2.31)$$

Les variances de ces deux erreurs sont théoriquement identiques pour un processus AR pur. D'après la récurrence dans l'ordre de Levinson-Durbin, ces deux erreurs sont liées par les équations suivantes: [KAY, 88; MARPLE, 87]

$$\begin{cases} e_n^F(t) = e_{n-1}^F(t) + \rho_n e_{n-1}^B(t-1) \\ e_n^B(t) = e_{n-1}^B(t-1) + \rho_n^* e_{n-1}^F(t) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, p \quad (2.32)$$

où n est l'indice de la récurrence dans l'ordre et $\{\rho_n, n=1, 2, \dots, p\}$ sont les coefficients de réflexion du modèle AR(p) dont le sens physique en traitement de la parole a été présenté par [MAKHOUL, 75] et en sismique et géophysique par [GUTOWSKI et al., 78; ROBINSON, 83].

Adjoints d'un signe moins (-), ces coefficients sont appelés coefficients de la corrélation partielle (PARCOR) [BOX & JENKINS, 76]. Ils représentent aussi la séquence de l'intercorrélation normalisée entre l'erreur de prédiction avant et l'erreur de prédiction arrière retardée d'une unité de temps. Ces coefficients sont des fonctions de la FAC du processus e doivent vérifier $\{|\rho_n| < 1, n = 1, 2, \dots, p\}$ pour assurer la stabilité du modèle.



Les équations (2.32) permettent d'avoir une structure en treillis du modèle inverse $A(z)$ appelé aussi filtre blanchisseur ou prédicteur d'erreur [PAPOULIS, 81] (voir Fig. 2.3). Cette structure offre une flexibilité, une insensibilité aux erreurs de calcul durant l'implémentation du modèle et plusieurs autres avantages [MAKHOUL, 77; LEE, 80; FRIEDLANDER, 82c; ROBERTS & MULLIS, 87; LI & DICKINSON, 88].

Remarque: Si le filtre de prédiction linéaire avant est un filtre blanchisseur d'un processus AR alors le filtre d'erreur de prédiction linéaire arrière est la réalisation anticausale du processus AR.

Pour un processus gaussien, l'estimation spectrale par la méthode du maximum d'entropie (ME) est équivalente à une estimation spectrale AR [BURG, 67; MAKHOUL, 75; PAPOULIS, 81; PROCEEDINGS IEEE, 82; PILLAI et al., 92]. De plus, une relation existe entre l'estimateur ME et celui de la méthode du maximum de vraisemblance (MV) [BURG, 72].

En pratique, comme la FAC exacte des processus n'est généralement pas fournie, l'analyse d'un processus se base exclusivement sur la séquence de données disponible de sa suite chronologique. Pour estimer les paramètres du modèle AR, la procédure la plus simple serait d'obtenir une estimation convenable de la FAC (voir les estimateurs (2.9) et (2.10)) et de l'utiliser dans les équations de YW de (2.29) au lieu de la FAC authentique inconnue; c'est l'algorithme de YW. Une nette amélioration de la résolution spectrale peut être obtenue en utilisant un système YW surdéterminé ($N > p$) et en calculant la solution par la méthode de la pseudo-inverse [CHAN & LANGFORD, 82] ou en utilisant les algorithmes rapides des décompositions QR ou de Cholesky [RIALAN & SCHARF, 88]. Les statistiques asymptotiques de la solution YW surdéterminé sont discutées dans [GINGRAS & MASRY, 88]. Des équations semblables peuvent être obtenues en utilisant une approximation de la méthode du maximum de vraisemblance (MV) [ASTROM, 80]. L'existence d'une solution MV pour le problème AR a

été discutée dans [DEGERINE, 93]. L'inconvénient de telles approches est la dégradation de la résolution spectrale lorsque les séquences de données disponibles sont courtes. Malheureusement, cette contrainte est très fréquente en pratique.

Une autre alternative, pour trouver les paramètres du modèle en évitant les erreurs liées à l'estimation de la FAC, consiste à utiliser l'algorithme de Levinson mais en estimant directement les coefficients de réflexion à partir des erreurs de prédiction avant et/ou arrière (cf. (2.30) à (2.32)) au lieu de la FAC [MAKHOUL, 75; MARPLE, 87; ABDELOUEL, 93].

Une nette amélioration de la résolution spectrale est obtenue par des techniques des moindres carrés utilisant directement les données. Le critère minimisé par rapport aux paramètres AR est soit les puissances des erreurs de prédiction avant ou arrière (séparément), soit leur moyenne. Parmi ces techniques, il y a les méthodes de covariance et de covariance modifiée, la méthode d'autocorrélation, de pré- et post-fenêtrage [MARPLE, 87; KAY, 88]. Chacune de ces méthodes présente des inconvénients qui sont soit inhérents à sa formulation soit dus à l'insuffisance de données pour décrire le comportement général du processus sous analyse. Cependant la méthode la plus performante est celle de la covariance modifiée bien qu'elle ne garantit pas toujours la stabilité du modèle [MARPLE, 87; KAY, 88].

Toutefois, la méthode la plus utilisée est celle de Burg dite aussi "méthode harmonique". Ce dernier a utilisé le concept du maximum d'entropie et a minimisé la moyenne des puissances des erreurs de prédiction avant et arrière par rapport aux coefficients de réflexion. Cet algorithme assure un modèle stable, s'apprête bien à une structure en treillis et offre une bonne résolution même pour des séquences courtes de données. L'inconvénient de cet algorithme est qu'il peut quelquefois causer des dédoublements de raies spectrales et des biais fréquentiels. Ces derniers peuvent toujours être réduits en pondérant les carrés des erreurs de prédiction par une fonction adéquate [HELME & NIKIAS, 84; MARPLE, 87].

Remarque: Dans beaucoup de situations pratiques, un bruit d'observation vient altérer les données d'un processus AR(p) dégradant ainsi les performances des estimateurs AR. Cette dégradation revient au fait que le modèle AR supposé pour l'analyse du processus n'est plus approprié. En effet, si la suite chronologique $x(t)$ est la superposition d'un processus $s(t)$ autorégressif pur et d'un bruit additif $b(t)$ supposé blanc centré de variance σ_b^2 :

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

et comme $b(t)$ n'est pas corrélé avec $s(t)$, la DSP du processus observé $x(t)$ s'écrit alors:

$$S_x(z) = \frac{\sigma_e^2}{A(z) A^*(1/z^*)} + \sigma_b^2 = \frac{\sigma_e^2 + \sigma_b^2 (A(z) A^*(1/z^*))}{A(z) A^*(1/z^*)}$$

donc le processus AR bruité sera proprement représenté par un modèle ARMA(p,p) (cf. Section 2.4.3).

2.4.2 Modèle à moyenne adaptée (MA)

Le modèle à moyenne adaptée MA(q) (donné par (2.22) pour p=0) est complètement caractérisé par ses (q+1) paramètres; $\{b_0, b_1, \dots, b_q\}$. Ce type de modèle est particulièrement indiqué pour approximer les spectres contenant des creux bien prononcés et de larges pics. Cependant, un spectre présentant des pics à bandes étroites peut être modélisé par un modèle MA mais d'ordre assez élevé à cause des zéros additionnels. C'est pourquoi les modèles MA sont à éviter lorsque la présence de pics (ou pointes) dans le spectre du processus à analyser est suspectée. Ce ne sont pas des estimateurs à haute résolution spectrale [KAY & MARPLE, 81; CADZOW, 82; AGNEL, 84; MARPLE, 87; KAY, 88].

L'expression de la fonction d'autocorrélation d'un modèle MA est déduite de (2.27) en posant p=0 et $\{h(i) = b_i, i = 0, 1, 2, \dots, q\}$. Les équations de la FAC obtenues sont données par:

$$R_x(k) = \begin{cases} \sum_{i=k}^q b_i b_{i-k}^*, & \text{pour } 0 \leq k \leq q; \\ R_x^*(-k), & \text{pour } -q \leq k < 0; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.33)$$

Il est évident, d'après (2.33), que la FAC d'un modèle MA(q) est une séquence finie de longueur (2q+1). Il est donc possible d'identifier l'ordre du modèle à partir de la longueur de sa FAC.

Pour estimer les paramètres MA(q), l'approche la plus évidente est de résoudre le système non linéaire (2.33) en utilisant des estimations de l'autocorrélation à partir des données. La résolution de telles équations nécessite des techniques itératives de factorisation spectrale plus ou moins complexes qui, à partir de la forme factorisée de la transformée en Z de la FAC, i.e. $S_x(z) = B(z)B^*(1/z^*)$, décomposent la matrice de la FAC en produit de deux matrices triangulaires dont les éléments sont les paramètres $\{b_0, b_1, \dots, b_q\}$ [AGNEL, 84]. L'algorithme itératif le plus connu de la factorisation spectrale est celui de Bauer utilisant la factorisation de Cholesky de la matrice de l'autocorrélation [AGNEL, 84]. Une version plus

rapide de cet algorithme avec moins d'opérations et de variables internes est due à Rissanen [MULLIS & DEMEURE, 86]. D'autres techniques de décomposition qui sont basées sur la méthode de Newton-Raphson sont proposées par [WILSON, 69] et [MULLIS & DEMEURE, 86]. Celle de Mullis et Demeure se distingue des autres techniques d'estimation MA par une convergence quadratique sûre et des calculs rapides à chaque itération, ce-ci grâce à un algorithme efficace utilisé pour l'inversion de matrices du type de Jury.

Une autre approche d'estimation des paramètres MA(q) consiste en une approximation du processus par un modèle AR d'ordre élevé. Cette approche utilise des équations linéaires et donne généralement des estimateurs spectraux satisfaisants.

En effet, un processus MA(q) est représentable par un modèle AR(∞) (cf. Section 2.3.3), c'est à dire :

$$B(z) = \frac{1}{A_\infty(z)} \Leftrightarrow B(z) A_\infty(z) = 1 \quad \text{avec} \quad A_\infty(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^{-i} \quad (2.34)$$

La transformée en Z inverse de (2.34) donne dans le domaine temporel:

$$a_k + \sum_{n=1}^q b_n a_{k-n} = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0; \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

avec $a_0 = 1$ et $a_k = 0$ pour $k < 0$ (2.35)

Ainsi, les paramètres MA peuvent être déterminés à partir des paramètres d'un modèle AR d'ordre infini en résolvant un sous ensemble quelconque de q équations de (2.35). En pratique, l'ordre infini du modèle AR est approximé par un ordre élevé M. Le modèle AR(M) est dit le modèle AR long équivalent. Les paramètres MA sont estimés de sorte que le second membre de (2.35) soit aussi faible que possible pour $k \neq 0$, (dans le cas idéal, il est nul) [MARPLE, 87]. Pour ce fait, plusieurs algorithmes sont disponibles dans la littérature dont celui de Durbin basé sur le MV des paramètres AR(M) et celui de Schur-Le Roux appelé aussi algorithme de la réponse impulsionnelle et est basé sur la FAC [AGNEL, 84].

Pour des séquences finies de données, les paramètres MA peuvent être estimés par des techniques des moindres carrés en minimisant la norme quadratique du second membre de (2.35) qui est assimilable à la variance de l'erreur de prédiction avant. De plus, ces techniques présentent des structures identiques à celles des méthodes d'autocorrélation et de covariance de la prédiction linéaire où les paramètres AR jouent le rôle des données. Ce sont aussi des estimations MV approchées si le processus est gaussien [MARPLE, 87; KAY, 88]. Une méthode hybride joignant les concepts de la factorisation spectrale à celui du modèle AR long

équivalent consiste à inverser les facteurs de Cholesky de la matrice de la FAC obtenus par l'algorithme de Levinson pour le modèle AR pour construire un système linéaire estimant directement les paramètres MA [AGNEL, 84].

D'autres méthodes d'estimation MA utilisent le spectre (ou le periodogramme) des observations telles que la méthode itérative de Hannan [AGNEL 84] et les méthodes de Cleveland et de Clevenson [KAY, 88]. Ces deux dernières effectuent des inversions spectrales afin de traiter des modèles AR(q) par des méthodes linéaires et plus simples.

Les paramètres MA peuvent aussi être estimés grâce à la représentation d'état du modèle. Cette approche possède plusieurs formulations dont une particulière due à Favier et qui consiste en la résolution itérative de l'équation de Riccati en mettant en œuvre un filtrage de Kalman dont le gain est le vecteur des paramètres MA [AGNEL, 84].

De plus, des méthodes basées sur le MV des données sont praticables pour obtenir des estimations des paramètres MA en utilisant des algorithmes itératifs comme celui de Newton-Raphson [KAY, 88].

Toutefois, si l'estimation spectrale uniquement est désirée, il n'est pas nécessaire de déterminer les paramètres du modèle. Il suffit seulement d'estimer la séquence FAC puisque la densité spectrale d'un tel modèle est donnée par:

$$S_x(e^{j\omega}) = |B(e^{j\omega})|^2 = \sum_{k=-q}^q R_x(k) e^{-jk\omega} \quad (2.36)$$

Cet estimateur est identique à celui de Blackman-Tukey pour une fenêtre rectangulaire [KAY & MARPLE, 81; CADZOW, 82].

Remarque: La séquence de la FAC du modèle MA peut être estimée itérativement par une méthode MV asymptotiquement efficace due à Walker [AGNEL, 84]. Le nombre d'observations est supposé grand et le processus gaussien. L'initialisation de l'algorithme se fait par l'estimateur biaisé normalisé de la FAC.

2.4.3 Modèle Autoregressif à moyenne adaptée (ARMA)

Le modèle ARMA(p,q) est complètement défini par ses (p+q+1) paramètres (voir (2.14) et (2.22)). C'est le modèle le plus adéquat pour représenter parcimonieusement des processus contenant des pics et des creux spectraux. En effet, les nombres p des pôles et q des zéros correspondent respectivement aux nombres des pics et des creux pour un processus ARMA et ne peuvent en être inférieurs dans le cas d'une approximation.

La FAC d'un modèle ARMA(p,q) a été donnée par (2.27). La contribution de l'intercorrélation entrée-sortie (la réponse impulsionnelle) dans l'expression de la FAC pour les indices de retard $0 \leq k \leq q$ rend le système non linéaire pour les paramètres du modèle. Le sous-ensemble équations de (2.27) défini pour $k > q$ est linéaire pour les paramètres de la partie AR, il est appelé système de Yule-Walker modifié ou étendu (YWM) car il est similaire à la queue du système YW d'un modèle purement AR. Si la séquence de la FAC exacte est disponible pour $(q-p+1) \leq k \leq (q+p+1)$ (ce qui n'est malheureusement pas possible en pratique), les paramètres AR du modèle ARMA(p,q) peuvent être déterminés en résolvant le système YWM par des versions modifiées des algorithmes efficaces conçus pour un système YW d'un modèle AR [KAY, 88].

L'estimation ARMA par les techniques statistiques optimales MV ont été largement investiguées par les statisticiens. La méthode MV requiert la minimisation d'une fonction très non-linéaire même sous des hypothèses simplificatrices. Une grande classe de techniques itératives d'optimisation (e.g., du type de Monté-Carlo) tentent d'implémenter l'estimateur MV en le divisant en algorithmes de calcul efficaces telles que l'estimateur de Akaike qui utilise la méthode de Newton-Raphson, celui de Hannan qui utilise la décomposition de Cholesky [KAY, 88] et d'autres estimateurs utilisent les méthodes du gradient [CADZOW, 76] et des moindres carrés [BOX & JENKINS, 76; GUTOWSKI et al., 78].

Remarque: Une bonne approximation de l'estimateur MV peut être choisie en considérant la distribution de l'erreur de prédiction de la suite chronologique. En effet des algorithmes itératifs fondés sur la minimisation de la norme l_n ($1 \leq n < \infty$) de cette erreur peuvent être efficaces si l'exposant n est sélectionné en fonction de la distribution de cette dernière. Il est bien connu que, par exemple, les estimateurs du type l_1 sont efficaces pour une distribution de Laplace, les estimateurs du type l_2 conviennent pour une distribution Gaussienne et ceux du type l_∞ (estimateurs de Chebychev ou minimax) sont efficaces lorsque la distribution est uniforme [CHEN et al., 94]. En vertu du théorème de la limite centrale [CHARBIT, 90], seul cas de la distribution gaussienne (norme l_2) est considéré dans la suite de cette étude.

Ces approches sont coûteuses en calculs et en mémoires, ne s'appêtent pas au traitement en temps réel, leur convergence n'est pas garantie et peut se produire pour de fausses solutions (problème des minimums locaux). C'est pourquoi, plusieurs techniques sous-optimales faciles à mettre en œuvre ont été développées pour parer la charge des calculs des méthodes optimales [KAY & MARPLE, 81]. Ces méthodes estiment généralement les paramètres AR et MA du

modèle séparément plutôt que simultanément comme il en est pour les méthodes d'estimation optimales.

La plupart des caractéristiques statistiques des estimateurs spectraux ARMA ont été établies sur l'évidence empirique d'un certain nombre de simulations sur des séquences courtes de données relativement insuffisantes pour en extraire des résultats concluants. Bien que quelques résultats asymptotiques sur les estimateurs MV des paramètres ARMA sont disponibles dans la littérature, leurs comportements sur des suites de données finies restent encore mal connus [MARPLE, 87].

Remarque: Cas spécial de processus ARMA

Si la suite chronologique $x(t)$ est réelle et est issue d'un processus à bandes étroites multiples (symétriques) ou composé de sinusoides noyées dans un processus additif large bande (bruit coloré), un modèle convenable aura la forme particulière ARMA(2p,2p) suivante: [NEHORAI, 85]

$$H(z) = \frac{A(\rho^{-1}z)}{A(r^{-1}z)} \quad \text{où} \quad A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p} + a_{p-1} z^{-p-1} + \dots + z^{-2p} \quad (2.36)$$

avec $\rho < r < 1$ et avec les paramètres de $A(z)$ vérifiant l'identité suivante:

$$a_{2p-i} = a_i \quad (0 \leq i \leq p)$$

L'ordre p est égal au nombre de sinusoides (ou de bandes étroites). Un algorithme efficace pour l'estimation des paramètres a_i s est proposé dans [NEHORAI, 85]. Si la suite $x(t)$ est complexe et si le processus est constitué de p exponentielles dans un bruit coloré (ou de p bandes étroites non-symétriques), un modèle approprié est un ARMA(p,p) de la même forme que (2.36) sauf que les paramètres a_i s ne présentent pas de symétrie entre eux.

2.4.3.1 Estimations séparées des paramètres AR et MA

2.4.3.1.a Méthode de Yule-Walker modifiée

La plupart des procédures sous-optimales d'estimation des paramètres et de la DS² ARMA sont basées sur la relation théorique donnée entre les paramètres et la FAC en (2.27). Dans la majorité des cas pratiques, la FAC exacte des processus n'est pas accessible, seulement une séquence finie de la suite chronologique d'observations peut être enregistrée. En conséquence, la FAC est remplacée dans les équations (2.27) par un estimateur convenable [FRIEDLANDER & PORAT, 84a] pour estimer le modèle ARMA(p,q). Dans la littérature statistique, ce type de procédure est appelé méthode des moments.

1. Estimation de la partie AR

Les paramètres AR sont d'abord estimés à partir des équations YWM de (2.27). La résolution d'un tel système en utilisant p équations est de pauvre qualité spectrale (variance importante) surtout lorsque les valeurs du spectre ARMA sont faibles. Ceci est essentiellement dû à l'inexactitude soit des estimateurs de la FAC ou de l'ordre AR sélectionné ou des deux à la fois [KAY, 88; MARPLE, 87].

Pour améliorer la qualité de cette estimation, Mehra a proposé l'utilisation de plus de p équations YWM incluant ainsi l'information contenue dans les éléments de la FAC d'indices de retard élevés [MEHRA, 71; CADZOW, 80 & 82; KAY, 80]. En effet, cette amélioration est surtout constatée pour les processus à bandes étroites ou à pics spectraux qui sont caractérisés par une FAC lentement décroissante; donc les éléments de la FAC à indices de retard élevés peuvent posséder des valeurs relativement importantes. Contrairement, pour les processus à bandes larges, la séquence de la FAC décroît rapidement et l'information contenue dans ses éléments d'indices élevés est négligeable. Ce qui implique que le choix du nombre équations YWM à utiliser est un problème qui dépend des caractéristiques spectrales du processus [FRIEDLANDER & PORAT, 84a].

Il est nécessaire de noter que l'utilisation du système YWM même surdéterminé dans le cas des processus à bandes larges ou à creux étroits ne fournit pas une bonne résolution car les éléments de la FAC d'indices faibles contenant la plus grande partie de l'information ne contribuent pas tous à l'estimation des paramètres AR du modèle. En effet, le système de YWM ne tient pas compte des éléments de la FAC dont les indices de retard sont inférieurs à $(q-p+1)$. Ces problèmes ont été traités et quantifiés dans [BRUZZONE & KAVEH, 84] en se basant sur des observations empiriques.

Le fait de remplacer la FAC par des estimations, le second membre des équations YWM n'est plus nul (voir (2.27)); il est égal à l'erreur d'approximation. La solution des moindres carrés pour le système YWM surdéterminé doit être celle qui minimise la norme quadratique de cette erreur. Cette méthode est quelquefois appelée "modélisation par l'équation de l'erreur". Elle ne possède pas de propriétés d'optimalité et la stabilité n'est pas garantie. Une pondération de l'erreur quadratique par une fonction normalisée non-négative décroissante peut être envisagée afin de réduire la variance de l'estimation de la FAC pour des indices de retard élevés et de maximiser ainsi la précision des paramètres AR estimés. En effet, pour l'indice de retard de la FAC est élevé et moins de produits de paires de données sont

disponibles pour l'estimer (voir Section 2.2.4); ce qui fait augmenter la variance de l'estimation [MARPLE, 87; CADZOW, 82].

Plusieurs techniques de calcul peuvent être utilisées pour calculer la solution moindres carrés (pondérés) du système YWM surdéterminé telles que le calcul direct de la matrice pseudo-inverse, la factorisation de Cholesky [GOLUB & VAN LOAN, 83], la décomposition en valeurs singulières (SVD) [GOLUB & KAHAN, 65; KLEMA & LAUB, 80; BALLANCE, 84] et d'autres algorithmes efficaces destinés aux systèmes de la forme de Toëplitz et proche de Toëplitz [MORF et al., 77; FRIEDLANDER, 82a]. D'autres techniques sont récursives dans le temps et effectuent une mise à jour des paramètres à chaque nouvelle donnée enregistrée [FRIEDLANDER, 82b, MOSES et al., 85].

La plupart de ces méthodes moindres carrés de YWM surdéterminé ont les mêmes propriétés asymptotiques en fonction du nombre de termes de l'erreur utilisé, le rapport signal à bruit et la largeur de la bande spectrale [MARPLE, 87]. La borne de Cramer-Rao (BCR) est généralement atteinte. Les différences entre les divers algorithmes deviennent souvent apparentes seulement pour des courtes séquences de données. Elles sont généralement étudiées pour un nombre limité de simulations; ce qui rend difficile la comparaison des performances de ces algorithmes de façon significative.

La qualité de l'estimation spectrale des paramètres AR ne dépend pas seulement du nombre d'équations YWM mais aussi de leur ordre p . La sélection de l'ordre peut être basée sur les méthodes similaires à ceux des processus AR purs. La surdétermination de l'ordre AR peut améliorer l'estimation spectrale ARMA globale. L'ordre peut être indiqué en analysant le rang de la matrice de YWM par la méthode SVD [CADZOW, 82] ou par la méthode proposée dans [FRIEDLANDER & PORAT, 84a] qui cherche le nombre des modes de $A(z)$ à énergies dominantes.

2. Estimation de la partie MA

Une fois les paramètres AR obtenus, les paramètres de la partie MA sont à leur tour estimés. En filtrant la suite chronologique originale $x(t)$ par le filtre AR estimé inverse ; $\hat{A}(z)$; la suite résiduelle obtenue à la sortie $y(t)$ représente approximativement un processus à moyenne adaptée, c'est à dire que d'après (2.22):

$$y(t) = \sum_{i=0}^p \hat{a}_i x(t-i) \approx \sum_{i=0}^q b_i e(t-i) \quad t = p+1, p+2, \dots, L-1 \quad (2.27)$$

où les paramètres $\{1, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\}$ sont des estimations de la partie AR obtenus par la méthode de YWM. De même, la FAC de la partie MA peut s'exprimer en fonction de la FAC de la suite chronologique originale et des paramètres de la partie AR du modèle ARMA comme suit:

$$R_y(k) = E[y(t)y^*(t-k)] = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p a_i R_x(k+i-j) a_j^* \quad (2.38)$$

et dont l'écriture matricielle donne:

$$R_y(k) = \begin{pmatrix} 1 & a_1^* & \dots & a_p^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x(k) & R_x(k-1) & \dots & R_x(k-p) \\ R_x(k+1) & R_x(k) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(k+p) & R_x(k+p-1) & \dots & R_x(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

La forme de (2.39) est particulièrement intéressante car elle permet d'évaluer $R_y(k)$ à l'aide d'algorithmes efficaces tels que ceux proposés dans [AGNEL, 84; DERRAS, 93].

Ainsi, en ayant la suite résiduelle $y(t)$ et/ou la FAC $R_y(k)$, une estimation des paramètres de la partie MA du modèle peut s'obtenir en appliquant une des méthodes MA décrites dans la Section 2.4.2.

Dans le cas où seulement le numérateur de la DSP du modèle ARMA est désiré; i.e., $B(z)B^*(1/z^*)$, plusieurs méthodes calculant d'autres paramètres plus ou moins équivalents à $R_y(k)$ sont utilisées; par exemple, les méthodes qui calculent la DSP du modèle sous la forme:

$$S_x(z) = \frac{C(z)}{A(z)} + \frac{C^*(1/z^*)}{A^*(1/z^*)} \quad (2.39)$$

et tentent d'évaluer le polynôme $C(z)$ d'ordre p par diverses techniques comme celles de [CADZOW, 80; FRIEDLANDER, 82a] ou celle de [KAY, 80] qui est une variante de la procédure de [CADZOW, 80] assurant de plus la non-négativité de $C(z)$ pour $z = e^{j\omega}$. D'autres procédures utilisent la réponse impulsionnelle de $1/A(z)$ ou de $1/(A(z)A^*(1/z^*))$ [FRIEDLANDER & PORAT, 84a] et d'autres utilisent le concept des transformations linéaires [DUGRE et al., 82].

2.4.3.1.b Autres méthodes

Il existe d'autres méthodes d'estimation des paramètres AR et MA séparément dont la plus courante est celle du modèle AR long équivalent du processus. A partir de la relation théorique établie entre le modèle ARMA(p,q) et son modèle AR long équivalent $1/D(z)$ d'ordre infini;

$$\frac{1}{D(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^q b_i d_{k-i} = \begin{cases} a_k & , k = 0, 1, \dots, p; \\ 0 & , k = p+1, \dots \end{cases} \quad (2.40)$$

l'estimation des paramètres MA et AR devient possible en approximant l'ordre de $D(z)$ par un nombre fini élevé. Cette approximation permet de déterminer, dans un premier temps, les paramètres MA par des méthodes des moindres carrés en utilisant le système linéaire surdéterminé de (2.40) pour $k > p$. Les paramètres AR sont ensuite calculés en remplaçant les b_i 's ($0 \leq i \leq q$) trouvés dans (2.40) pour $0 \leq k \leq p$. Cependant, cette procédure n'est pas recommandée dans le cas où les polynômes des parties AR et MA sont très rapprochés [MARTINELLI et al., 85; BENSIDI-SLIMANE, 92].

Un estimateur robuste a été proposé dans [LI & DICKINSON, 86 & 88], il est basé sur le principe de la régression des moindres carrés réitérée de [TSAY & TIAO, 84] et il est équivalent à celui de la méthode YWM. La méthode consiste à construire un modèle AR($p+q$) (filtre en treillis) à partir duquel les paramètres AR du modèle ARMA(p,q) sont extraits linéairement et les paramètres MA sont ensuite déterminés par une simple normalisation de certains paramètres intermédiaires.

Une méthode basée sur le concept de l'entropie relative préblanchie minimale (dite aussi, mesure de la divergence (nombre de Kullback-Leibler)) est présentée dans [POLITIS, 93], elle consiste d'abord à estimer un modèle MA à phase minimale, ensuite à préblanchir les données par ce modèle et enfin à déterminer l'ordre et les paramètres AR par un algorithme efficace (e.g., celui de Burg). Cette procédure est asymptotiquement consistante.

Une autre approche [STOICA & NEHORAI, 86] utilise le concept de la variable instrumentale pour estimer la FAC du processus et les paramètres AR simultanément. Les paramètres MA sont ensuite déterminés par une méthode MA appropriée (cf. Sections 2.4.2 et 2.4.3.2.a-2.). Cette méthode est asymptotiquement efficace.

Dans le cas où un bruit d'observation coloré du type AR s'ajoute au processus ARMA, une estimation des paramètres ARMA est possible en utilisant la notion des moindres carrés généralisés (GLS). Dans [ZHANG & TAKEDA, 87], les paramètres AR du modèle et ceux du bruit additif sont itérativement déterminés par une procédure GLS du type "bootstrap" et la partie MA est estimée par une des méthodes déjà citées ci-dessus.

2.4.3.2 Estimations simultanées des paramètres AR et MA

2.4.3.2.a Approches de l'identification entrée-sortie

La non-linéarité dans le système (2.27) est principalement due à l'inobservabilité de la séquence de l'excitation bruit blanc du modèle qui rend l'estimation directe de l'intercorrélacion entre l'entrée et la sortie $R_{ex}(k)$ impraticable.

Une classe sous-optimale d'estimateurs tente de trouver itérativement les paramètres ARMA(p,q) en estimant à chaque fois la séquence de l'entrée et en se servant d'une des procédures employées dans l'identification des systèmes pour la détermination des paramètres. Ainsi un problème linéaire pour l'estimation des paramètres AR et MA est établi par l'estimation préalable de l'entrée et grâce à la nature itérative de ces approches, ces estimations sont raffinées.

L'idée de cette classe d'estimateurs consiste généralement en les étapes suivantes:

étape 1: Initialisation de la séquence de l'entrée

- 1.1 Construction d'un modèle AR long équivalent (ou d'un modèle ARMA stable).
- 1.2 Filtrage de la suite chronologique $x(t)$ par l'inverse de ce modèle. Noter la séquence résiduelle obtenue $e^{(0)}(t)$.

étape 2: Corps de la procédure (initialisation des itérations : $i=1$)

- 2.1 Application d'une méthode d'identification entrée-sortie en utilisant soit directement la séquence de l'entrée estimée $e^{(i-1)}(t)$ ou une estimation de l'intercorrélacion entrée-sortie (en guise de réponse impulsionnelle). Calcul du modèle $B^{(i)}(z)/A^{(i)}(z)$.
- 2.2 S'il y a convergence, fin de la procédure. Sinon, Filtrage de $x(t)$ par $A^{(i)}(z)/B^{(i)}(z)$ afin de mettre à jour la séquence de l'entrée $e^{(i)}(t)$. Incrémenter i d'une unité et aller en 2.1.

La différence essentielle entre les diverses approches de cette classe d'algorithmes réside dans la méthode et le critère utilisés au niveau 2.1 pour trouver les paramètres ARMA(p,q). Le plus souvent ces méthodes sont basées sur le critère des moindres carrés; par exemple, les algorithmes proposés dans [KAY, 88], dans [MARPLE, 87] qui utilise la procédure de Steiglitz-McBride, dans [YARMAN-VURAL, 85] où la structure proche de Toeplitz est exploitée efficacement, dans [CUPO, 85] basé sur l'algorithme CDE de [ROBINSON, 83] et dans [CADZOW, 76] utilisant les méthodes du gradient (c'est à dire, les méthodes de la plus raide descente (steepest descent), de Newton et de la linéarisation). La convergence et l'efficacité de cette procédure dépend de l'algorithme et du nombre de données utilisés [KAY, 88].

Pour un processus corrompu par un bruit additif coloré (du type AR), une méthode basée sur les GLS peut être utilisée [SODERSTROM, 74] seulement la convergence n'est pas garantie.

Dans l'estimation de l'excitation $e^{(i)}(t)$ par le filtrage inverse de $x(t)$, l'utilisation de l'équation de récurrence (2.22) doit être évitée car la longueur de la séquence générée sera réduite à chaque itération (suite à l'omission de la partie transitoire); par conséquent, la réponse impulsionnelle de $1/B^{(i)}(z)$ est utilisée dans l'évaluation de $e^{(i)}(t)$. Mais comme cette dernière est, en général, de durée infinie et doit être tronquée à un intervalle fini pour opérer sur la séquence finie de données $x(t)$, ceci constitue une source d'erreur pour cette procédure d'estimation. Dans le souci de réduire la variance, Mayne & Firoozan [KAY, 88] proposent une procédure dite "three stage least squares" qui modifie la méthode basée sur les moindres carrés en rajoutant une troisième étape à la procédure, mais cette estimation peut produire des modèles inverses instables.

Si la stabilité et l'inversibilité du modèle ARMA estimé ne sont pas garanties par la méthode utilisée, des modifications dans la procédure itérative générale sont nécessaires afin de projeter les pôles/zéros à l'intérieur du cercle unité après chaque itération. Une procédure de stabilisation itérative intéressante est proposée dans [COMBETTES & TRUSSELL, 92]. Elle est basée sur la méthode du gradient et donne le meilleur modèle stable et inversible par la reprojction des pôles et/ou zéros dans l'hypercube de stabilité.

2.4.3.2.b Autres méthodes

Une autre classe de méthodes qui estiment simultanément les paramètres AR et MA est celle qui utilise l'espace d'état. Ces méthodes sont plus ou moins équivalentes à celles utilisant l'équation aux différences (2.22) sauf qu'elles offrent, de plus, des structures d'état équilibrées, insensibles aux erreurs de calcul dues à la limitation de la précision et réduites optimalement par des méthodes robustes telles que la SVD [KARALAMANGALA, 84].

Des techniques itératives spectrales peuvent aussi estimer les paramètres ARMA en utilisant le domaine fréquentiel (échantillonnage de la DSP) dont une méthode presque efficace et moins complexe que la MV est proposée dans [FRIEDLANDER & PORAT, 84b].

D'autre part, pour le traitement séquentiel des processus ARMA, des méthodes utilisant des structures en treillis (lattice) et en échelle (ladder) se révèlent efficaces et robustes pour l'estimation simultanée des paramètres ARMA. Généralement, ces méthodes représentent le modèle comme un processus AR bicanal [LEE, 80; FRIEDLANDER, 82c; STROBACH, 88; MONIN

& SALUT, 94]. Ainsi les méthodes séquentielles AR multicanal sont applicables à ce problème telles que celles du type de Levinson [BENVENISTE & CHAURE, 81] et celles basées sur les moindres carrés récurrents (RLS) (algorithme de Kalman rapide) [ARDALAN & FABER, 88].

2.5 Conclusion

La modélisation paramétrique ARMA est un outil mathématique permettant à la fois de représenter parcimonieusement une suite chronologique d'un processus aléatoire SSL ergodique et de reproduire plus ou moins fidèlement l'information apportée par cette suite. En effet, cette modélisation fournit des DSP de haute résolution spectrale en plus de la faculté de régénérer approximativement la même suite chronologique à partir de combinaisons linéaires d'un nombre très limité de paramètres. La revue des trois modèles de base, de leurs propriétés et des différentes approches d'estimation de leurs paramètres a permis de conclure que :

- ❖ le modèle AR est une représentation minimale (par un nombre minimal de paramètres) pour les processus dont les spectres se caractérisent exclusivement par des pics ou bandes étroites. Ce type de modèle est le plus simple à mettre en œuvre grâce à sa formulation linéaire et aux algorithmes efficaces et rapides disponibles.

- ❖ le modèle MA est une représentation minimale pour les processus à larges bandes spectrales et/ou ne contenant que des creux. L'estimation MA est assez complexe à cause de la non-linéarité des équations qui régissent ses paramètres.

- ❖ le modèle ARMA est le plus général, il offre un bon compromis entre une représentation minimale et une résolution spectrale convenable pour les processus mixtes dont les spectres sont composés de pics et de creux spectraux. Le problème de l'estimation de ses paramètres apparaît plus difficile que celui du cas AR pur. Cela est dû à la non-linéarité intrinsèque de l'estimation de la partie MA. De nombreuses approches ont été investiguées pour résoudre ce problème mais elles sont soit complexes et/ou coûteuses du point de vue des calculs et de l'espace mémoire ou pas efficaces.

Le problème ARMA demeure toujours un domaine de recherche d'algorithmes combinant à la fois la simplicité, l'efficacité et la rapidité pour la détermination de l'ordre et des paramètres. A cet effet, le chapitre suivant a pour thème une procédure de modélisation ARMA des suites chronologiques assez intéressante du point de vue du coût et de la qualité de ses estimations et utilisant deux techniques itératives utilisant des algorithmes efficaces et rapides.

CHAPITRE 3

CONSTRUCTION D'UN MODELE ARMA POUR UNE SUITE CHRONOLOGIQUE COMPLEXE

3.1 Introduction

Bien que le modèle ARMA possède une grande latitude dans la représentation des processus de diverses formes spectrales y compris les processus extrêmes du type AR et MA, c'est le modèle AR qui a accaparé pendant longtemps l'attention dans la littérature technique de la modélisation des suites chronologiques. La popularité du modèle AR est généralement due à l'association de la tendance dentée de son spectre à la haute résolution spectrale et surtout au vaste répertoire d'algorithmes linéaires simples consacrés à l'estimation de ses paramètres. Ce qui n'est pas le cas des modèles ARMA et MA dont la nature fortement non linéaire de leurs systèmes d'équations limite le nombre des algorithmes d'estimation de leurs paramètres même lorsque la séquence de la FAC est bien connue.

Après avoir pris connaissance des diverses méthodes d'estimation des paramètres ARMA dans le chapitre précédent et de leurs inconvénients; (e.g. le considérable coût en calculs et mémoire, le problème du choix de la séquence de la FAC la plus informative et la moins erronée pour le système YWM, l'instabilité probable des modèles obtenus (cf. Section 2.4.3)); une procédure intéressante pour la modélisation ARMA est proposée dans ce chapitre.

La procédure proposée recherche le modèle ARMA adéquat aux données disponibles en utilisant une estimation du modèle AR long équivalent correspondant comme référence. Les ordres de ces deux modèles (AR et ARMA) doivent être déterminés au préalable. Les paramètres ARMA sont déterminés au sens des moindres carrés vrais (TLS: True Least Squares) par une des techniques itératives sous-optimales, conçues pour l'identification des systèmes, et adaptées au problème de la modélisation ARMA des suites chronologiques complexes. Ces techniques tentent de résoudre les équations de la réponse impulsionnelle du modèle ARMA et non pas les équations de la FAC données par (2.27). Cette résolution est effectuée en se basant uniquement sur les données disponibles tout en impliquant la suite chronologique entière du processus (i.e., en utilisant la moyenne d'ensemble dans le critère à minimiser). Ces techniques TLS offrent un bon compromis entre la précision de l'estimation du modèle et l'efficacité dans les calculs et dans l'espace mémoire nécessaire.

3.2 Réponse impulsionnelle d'un processus ARMA

Pour la modélisation ARMA des suites chronologiques et contrairement à l'identification des systèmes, la notion de la réponse impulsionnelle $h(k)$ du modèle est fictive et n'a aucune réalité physique, elle se limite à représenter la TZ inverse de $H(z)=B(z)/A(z)$ et qui correspond à la fonction d'intercorrélation entre la suite chronologique $x(t)$ à modéliser et la suite blanche inobservable $e(t)$ de l'excitation du modèle, i.e. $R_{xe}(k) = h(k)$. En multipliant l'équation de récurrence (2.22) par $e^*(t-k)$ (qui est le bruit blanc normalisé de l'excitation conjugué et retardé) et en prenant son espérance mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned} E[x(t) e^*(t-k)] &= -\sum_{i=1}^p a_i E[x(t-i) e^*(t-k)] + \sum_{i=0}^q b_i E[e(t-i) e^*(t-k)] \\ R_{xe}(k) &= -\sum_{i=1}^p a_i R_{xe}(k-i) + \sigma_e^2 b_k \delta(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

qui n'est autre que l'expression de la réponse impulsionnelle. Elle est donc donnée explicitement par (en supposant $\sigma_e^2 = 1$ et $p \geq q$):

$$h(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k < 0; \\ b_0, & \text{si } k = 0; \\ -\sum_{i=1}^k a_i h(k-i) + b_k, & \text{si } 0 < k \leq q; \\ -\sum_{i=1}^p a_i h(k-i), & \text{si } k > q \end{cases} \quad (3.2)$$

et son écriture matricielle est:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{H}_1 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \text{H}_2 \\ \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} h(0) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(q) & h(q-1) & \dots & h(0) & 0 & \dots & 0 \\ \hline h(q+1) & h(q) & \dots & h(1) & h(0) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(p) & h(p-1) & \dots & \dots & \dots & h(1) & h(0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

noté e $\mathbf{H} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{H}_1 \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \mathbf{H}_2 \mathbf{a} = \mathbf{0} \end{cases}$

où \mathbf{H} est une matrice $\infty \times (p+1)$ de la forme de Toeplitz et la sous-matrice supérieure \mathbf{H}_1 est triangulaire inférieure de dimension $(q+1) \times (p+1)$ et \mathbf{H}_2 est de dimension $\infty \times (p+1)$ et où $\mathbf{a} = (1 \ a_1 \ \dots \ a_p)^T$ et $\mathbf{b} = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_q)^T$ (où $(^T)$ désigne la transposition).

D'autre part, en exprimant l'équation (2.21) : $S_x(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 |H(e^{j\omega})|^2$ dans le domaine temporel, la relation entre la FAC de la suite chronologique $x(t)$ du processus aléatoire et la réponse impulsionnelle de celui-ci est obtenue telle que:

$$R_x(k) = h(k) * h^*(-k) = \sum_{r=0}^{+\infty} h(r) h^*(r-k) \quad (\sigma_e^2 = 1) \quad (3.4a)$$

où (*) désigne le produit de convolution, et une écriture matricielle de (3.4a) est alors:

$$R_p = H^H H = H_1^H H_1 + H_2^H H_2 \quad (3.4b)$$

où l'indice (^H) désigne le hermitien, i.e. le conjugué complexe du transposé, H est donnée par (3.3) et R_p est une matrice de Toeplitz carrée $(p+1) \times (p+1)$ de la FAC telle que:

$$[R_p]_{i,j} = R_x(i-j) \quad 0 \leq i \leq p \text{ et } 0 \leq j \leq p$$

3.3 Procédure de construction du modèle ARMA

Une grande partie des problèmes rencontrés dans la construction d'un modèle ARMA(p,q) pour un processus aléatoire représenté uniquement par un enregistrement fini de L échantillons de sa suite chronologique, est due à la non-linéarité des équations liant les paramètres recherchés (cf. (2.27) et (3.2)). Généralement, un tel problème est résolu par le recours aux solutions itératives. Il est aussi évident que cette modélisation nécessite la disponibilité de la FAC et de la réponse impulsionnelle (l'intercorrélacion entrée (bruit blanc)-sortie) du processus. L'estimation directe de la FAC est toujours possible à partir des données observées alors que celle de la réponse impulsionnelle ne l'est pas à cause de l'inobservabilité de la suite chronologique de l'excitation bruit blanc.

Dans la procédure itérative proposée ci-après, le problème de l'estimation de la séquence de la réponse impulsionnelle est résolu dès le début, par la construction d'un modèle de référence en se basant sur les données observées et en utilisant des méthodes linéaires simples. Un modèle de référence de choix est par excellence le modèle AR long équivalent d'ordre m assez élevé (mais $m < L/2$) capable de conserver le maximum de l'information contenue dans les données et qui fournira alors la réponse impulsionnelle et même la FAC [SCHARF & LUBY, 79]. Cette alternative épargne beaucoup de calculs et évite les erreurs induites par le filtrage que pourrait entraîner l'estimation de la séquence de la réponse impulsionnelle par l'estimation de la séquence de l'entrée comme il en est dans les procédures d'identification entrée-sortie décrites dans la Section 2.4.3.2.a.

Pour mieux comprendre la procédure proposée et pour mieux cerner et lier les outils qui lui sont nécessaires, ses différentes étapes sont d'abord résumées ci-après avant d'être développées étape par étape, dans les sections suivantes.

Ayant la séquence de données complexes $x(0), x(1), \dots, x(L-1)$

Étape 1 : Choix des modèles

1.1- Sélection de l'ordre du modèle **AR(m)** de référence (m ne doit pas excéder $L/2$).

Plusieurs critères sont proposés à la Section 3.4.1 non seulement pour le cas asymptotique mais aussi pour le cas des échantillons finis dont la théorie y est aussi explicitée.

1.2- Sélection de l'ordre du modèle **ARMA(p,q)** sachant que $q \leq p < m$. Les différents critères et méthodes sont donnés à la Section 3.4.2. Si $q=0$, alors $p=m$, un modèle AR pur est le plus adéquat pour représenter le processus à partir de la séquence de L données disponibles.

Étape 2 : Détermination des paramètres de référence

2.1- Construction du modèle de référence **AR(m)** en se basant sur les L données. Elle peut se faire grâce à une des méthodes AR décrites dans le Chapitre 2. Vu ses propriétés, la méthode de Burg paraît la plus adéquate pour ce cas précis. La fonction de transfert $H(z)$ de ce modèle sera considérée, par la suite, comme étant la fonction de transfert exacte du processus aléatoire. Si $q=0$, le modèle **AR(m)** est suffisant alors fin de la procédure.

2.2- Détermination des séquences de la réponse impulsionnelle; $h(k)$ ($0 \leq k \leq q$) et de la FAC; $R_x(k)$ ($0 \leq k \leq p$) correspondant au modèle **AR(m)** en utilisant respectivement (2.28) et (3.2) pour $q=0$. La FAC peut aussi être calculée par l'algorithme de Jury (cf. Annexe A).

Étape 3: Initialisation de la technique itérative

3.1- Construction du modèle **ARMA(p,q)** initial en utilisant $R_x(k)$ et $h(k)$ par la méthode des moindres carrés modifiés (MLS) (cf. Section 3.5.3) qui donne toujours des modèles stables

Ce modèle est noté: $\hat{H}^{(0)}(z)$ et ses paramètres sont représentés par les vecteurs: $\hat{\mathbf{a}}^{(0)}$ et $\hat{\mathbf{b}}^{(0)}$.

Étape 4: Corps de la technique itérative

Initialisation de l'indice des itérations: $i=1$.

4.1- Application d'une des techniques itératives des moindres carrés vrais (TLS); i.e., Technique I ou Technique II, données à la Section 3.5.5, pour déterminer $\hat{H}^{(i)}(z)$ en utilisant $R_x(k)$, $h(k)$, $H(z)$ et $\hat{H}^{(i-1)}(z)$.

4.2- Test de la convergence : si le critère TLS atteint une valeur minimale préfixée (cf. Section 3.5.5), alors fin de la procédure, sinon incrémentation de i d'une unité et aller en 4.1.

3.4 Estimation de l'ordre du modèle

Outre l'estimation des paramètres, l'estimation de l'ordre du modèle et la capacité du modèle de générer des données futures sont des problèmes aussi importants de la modélisation paramétrique.

Pour un processus du type ARMA (ou AR), il n'est pas nécessaire que l'ordre estimé soit égal à l'ordre exact. Le plus important est d'obtenir une estimation spectrale acceptable. Une bonne qualité du spectre dépend non seulement de l'ordre sélectionné mais aussi de l'estimateur utilisé pour les paramètres du modèle.

Un processus est du type ARMA avec un ordre (p,q) ($q \geq 0$) s'il vérifie au moins une des caractéristiques suivantes: [AGNEL, 84; THOMAS, 84; MARPLE, 87; KAY, 88]

- l'erreur de prédiction a une variance **minimale** pour l'ordre exact,
- la suite résiduelle (issue du modèle inverse) est **blanche** à partir de l'ordre (p,q) exact,
- toute matrice $R(i,j)$ ($i \times i$) de la forme de Toeplitz définie par:

$$R(i, j) = \begin{pmatrix} R_x(j) & R_x(j-1) & \dots & R_x(j-i+1) \\ R_x(j+1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_x(j+i-1) & \dots & \dots & R_x(j) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

est **singulière** pour tout $j \geq (q+1)$ et tout $i \geq (p+1)$.

3.4.1 Estimation de l'ordre du modèle AR de référence

3.4.1.1 Critères basés sur la variance de l'erreur de prédiction

Pour avoir une bonne estimation de l'ordre du modèle AR(m) pour un processus donné, il est avantageux de considérer tout d'abord la taille de l'échantillon (ou la séquence) disponible de la suite chronologique $x(t)$ pour savoir quel type de critères est adéquat. En effet, il existe deux théories distinctes pour la sélection de l'ordre AR; la plus courante est la théorie asymptotique qui est basée sur un nombre d'observations infini ($L \rightarrow \infty$). L'autre théorie dite de l'échantillon fini est particulièrement destinée aux estimations utilisant des séquences de données limitées et courtes et plus précisément celles dont le rapport $p/L > \varepsilon$ (généralement, $\varepsilon \approx 0.1$) où p représente les ordres possibles pour le modèle [BROERSEN & WENSINK, 93].

Pour un nombre infini d'observations, la distribution limite des paramètres estimés est la normale multivariée et les fonctions de densité de probabilité des erreurs de prédictions et des résidus $e(t)$ sont considérées les mêmes car l'incertitude sur les paramètres est supposée négligeable. Donc aucune différence n'apparaît entre les diverses méthodes d'estimation des paramètres et aucune distinction n'est faite entre la variance des résidus qui a été minimisée pour estimer les paramètres et la variance de l'erreur de prédiction qui est une mesure de l'accès du modèle aux données futures. Or cette distinction est essentielle dans la sélection de l'ordre du modèle et par conséquent, la théorie limite de probabilité n'en fournit aucune base [BROERSEN & WENSINK, 93].

Pour le cas des échantillons finis, les paramètres estimés présentent des biais et des variances plus ou moins importants selon la méthode d'estimation utilisée et sa manière de traiter les effets de bords des séquences de données. Toutefois, en pratique, la théorie asymptotique reste applicable avec une précision de $1/L$ aux échantillons finis (L fini) mais importants à condition que L soit supérieur à dix fois les ordres possibles pour le modèle ($p/L < 0.1$). Ainsi, une distinction entre la variances des résidus et celle des erreurs de prédiction devient possible [BROERSEN & WENSINK, 93].

La variance des résidus $V_{RES}(p)$ est une mesure de l'accès du modèle aux données passées ou plus précisément aux données qui ont servi dans l'estimation des paramètres à l'ordre p . Elle est définie comme une moyenne de $|\hat{e}(t)|^2$ minimisée;

$$V_{RES}(p) = \frac{1}{L-p} \sum_{t=p}^{L-1} \left| x(t) + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i x(t-i) \right|^2 \quad (3.6)$$

Le nombre de termes qui contribuent dans cette équation est $L-p$ pour les méthodes de covariance (Cov), de Burg et de Yule-Walker (YW) et $2(L-p)$ résidus sont minimisés dans la méthode de la covariance modifiée (CovM) car les résidus arrière (backward) y sont aussi inclus [KAY, 88; BROERSEN & WENSINK, 93].

Pour les algorithmes usuels de YW et Burg, $V_{RES}(p)$ est évaluée suivant l'expression:

$$\begin{aligned} V_{RES}(p) &= \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} x(t) \prod_{i=1}^p (1 - |\hat{\rho}_i|^2) \\ &= V_{RES}(0) \prod_{i=1}^p (1 - |\hat{\rho}_i|^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $\{\hat{\rho}_i, i = 1, 2, \dots, p\}$ sont les estimés des p premiers coefficients de réflexion. Les expressions (3.6) et (3.7) donnent les mêmes valeurs pour la méthode de Burg alors qu'elles sont

différentes pour YW car l'estimation des coefficients de réflexion, pour cette méthode, suppose la séquence de données infinie et nulle sauf pour les observations $x(0), \dots, x(L-1)$ (cf Sections 2.2.4 et 2.4.1). La valeur de $V_{RES}(p)$ obtenue par (3.7) pour YW est donc biaisée (positivement) par rapport à sa valeur de (3.6), cependant elle peut toujours être utilisée dans la sélection de l'ordre comme elle n'influence pas le résultat du processus de sélection.

Il est très important de faire la distinction entre la variance des résidus et celle des erreurs de prédiction qui est notée $V_{EP}(p)$ et est définie par: [BROERSEN & WENSINK, 93]

$$V_{EP}(p) = \frac{1}{K} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+K} \left| x'(t) + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i x'(t-i) \right|^2 \quad (3.8)$$

où les estimés $\{\hat{a}_i, i=1, \dots, p\}$ sont calculés à partir de $x(t)$ et sont substitués dans une réalisation indépendante $x'(t)$ du même processus. Des définitions similaires à (3.8) ont été données dans la littérature; e.g. [JENKINS & WATTS, 68].

Dans beaucoup d'applications, la sélection de l'ordre vrai n'est pas la propriété la plus souhaitée dans la modélisation d'un processus à partir d'une séquence finie de sa suite chronologique. Le modèle recherché est plutôt celui donnant les meilleurs résultats lorsqu'il est appliqué à n'importe quelles autres données ayant la même structure probabiliste que celle des données qui ont servi à le déterminer. C'est le modèle avec la plus petite variance de l'erreur de prédiction. Vu l'équivalence des domaines temporel et fréquentiel, c'est aussi ce modèle qui fournit la plus exacte représentation spectrale des données.

Le meilleur critère pour l'estimation de l'ordre est celui qui aurait $V_{EP}(p)$ comme espérance et dont la valeur minimale donnerait le modèle avec le meilleur accès espéré aux données futures et indépendantes (i.e., toutes les réalisations). Cependant, la seule quantité disponible dans l'estimation à partir d'un échantillon fini de données est la variance des résidus obtenue après une minimisation dans un sens donné.

La variance des résidus continue à décroître avec $(1 - |\hat{\rho}_i|^2)$ lorsque les modèles d'ordres supérieurs sont estimés successivement alors que la variance de l'erreur de prédiction inconnue décroît seulement lorsque le coefficient de réflexion estimé est significatif. Quand trop de paramètres sont utilisés, $V_{EP}(p)$ du modèle estimé augmente [BROERSEN & WENSINK, 93].

Comme le comportement de ces deux variances est étroitement lié aux statistiques du dernier paramètre estimé à l'ordre p , i.e. de $\hat{\rho}_p$ pour les méthodes de YW et de Burg et \hat{a}_p pour

les méthodes de la covariance et de la covariance modifiée, il est intéressant d'observer l'évolution de la variance de ce paramètre pour les ordres supérieurs à l'ordre exact m .

L'outil de base de la théorie de l'échantillon fini est le processus aléatoire pur (i.e., bruit blanc) puisque:

- ◆ il comprend les éléments nécessaires pour représenter les spectres de tous les processus non blancs,
- ◆ il est représentatif du comportement de tout processus AR(m) au delà du vrai ordre m ,
- ◆ c'est un processus dont l'ordre AR exact est zéro offrant ainsi le moindre biais pour les paramètres. Il permet donc de trouver des concepts unificateurs car un biais important peut masquer quelques résultats,
- ◆ il permet une application importante qu'est le test de la blancheur des résidus.

Des approximations empiriques pour les variances des coefficients de réflexion ont été obtenues à l'aide de simulations sur des processus purement aléatoires (de distribution normale ou uniforme). Elles sont données en fonction de l'ordre i (>0), du nombre d'observations L ($2 \leq L \leq 100$) et de la méthode d'estimation des paramètres par les expressions suivantes:

[BROERSEN & WENSINK, 93]

$$\begin{aligned}
 v_{i,YW} &= (L-i)/\{L(L+2)\} \\
 v_{i,Burg} &= 1/(L-i+1) \\
 v_{i,CovM} &= 1/(L-1.5i+1.5) \\
 v_{i,Cov} &= 1/(L-2i+2)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Dans la théorie asymptotique, la valeur de cette variance est égale à $1/L$ pour tous les coefficients \hat{a}_i et pour toutes les méthodes. Comme dans cette théorie les coefficients de réflexion $\hat{\rho}_p$ pour $p \geq m+1$ suivent la distribution $N(0, 1/L)$ [BOX & JENKINS, 76], il est probable à 95% que $|\hat{\rho}_p| \leq 1.96/\sqrt{L}$ et ainsi l'ordre m peut être sélectionné comme étant l'ordre à partir duquel tous les modules des coefficients de réflexion d'ordres supérieurs deviennent inférieurs à ce seuil [KAY, 88].

Pour un processus purement aléatoire, l'espérance de la variance des résidus de (3.7) est donnée par:

$$E[V_{RES}(p)] \approx \sigma_e^2 \prod_{i=1}^p (1 - v_{i,.})
 \tag{3.10}$$

où le point dans $v_{i,.}$ indique que la méthode est indifférente.

En plus de Burg et YW, la forme multiplicative de (3.10) peut être utilisée pour toutes les méthodes d'estimation vu l'existence d'algorithmes récursifs pour les méthodes de la covariance et de la covariance modifiée et donnant des résultats similaires à ceux de Burg (ceci a été justifié par des simulations) [BROERSEN & WENSINK, 93].

D'autre part, un ensemble d'observations indépendantes peut être généré par les simulations de Monté-Carlo permettant le calcul de l'accès du modèle aux données futures par (3.8). Son espérance devient, pour un processus purement aléatoire $x'(t)$ avec une variance σ_e^2 :

$$E[V_{EP}(p)] = \sigma_e^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p E[|\hat{a}_i|^2] \right) \quad (3.11)$$

Il a été prouvé par induction que: [BROERSEN & WENSINK, 93]

$$E[V_{EP}(p)] \approx \sigma_e^2 \prod_{i=1}^p (1 + v_{i..}) \quad (3.12)$$

pour les méthodes utilisant la récursion de Levinson-Durbin (YW et Burg). Comme pour la variance résiduelle de (3.10), cette relation (3.12) peut aussi être utilisée pour les méthodes des moindres carrés (i.e., celles de la covariance et de la covariance modifiée) pour les mêmes raisons citées ci-dessus.

Un résultat intéressant est obtenu en divisant (3.12) par (3.10) :

$$\frac{E[V_{EP}(p)]}{E[V_{RES}(p)]} \approx \prod_{i=1}^p \frac{(1 + v_{i..})}{(1 - v_{i..})} \quad (3.13)$$

montrant que l'accès du modèle aux données passées et futures est indépendant de la variance du processus. Ce rapport des espérances sera utilisé pour estimer $V_{EP}(p)$ à partir d'une valeur donnée de $V_{RES}(p)$ calculée en utilisant L observations.

3.4.1.1.a Critères FPE, FSC et WPC

Les expressions des espérances de $V_{EP}(p)$ et $V_{RES}(p)$ dans le cas asymptotique pour $p \geq m$ peuvent être obtenues en utilisant l'approximation suivante:

$$\prod_{i=1}^p (1 \pm v_{i..}) \approx 1 \pm p/L \quad (3.14)$$

dans les relations (3.10) et (3.12). Akaike les a utilisées pour dériver le critère de l'erreur de prédiction finale appelé FPE (Final Prediction Error): [AKAIKE 74]

$$FPE(p) = V_{RES}(p) \frac{L+p}{L-p} \quad (3.15)$$

qui transforme une valeur mesurée de la variance des résidus en une estimation de la variance de l'erreur de prédiction basée sur la théorie asymptotique.

Une correction empirique du critère FPE(p) pour $p > L/2$ a été proposée par [JONES, 76] dans le but de l'adapter au cas des échantillons courts de données lorsque la méthode de Burg est utilisée. Cependant, de meilleurs résultats sont obtenus en se basant directement sur des critères issus de la théorie des échantillons finis.

Pour cette théorie, un choix évident pour la sélection de l'ordre devient le critère de l'échantillon fini FSC (Finite Sample Criterion) [BROERSEN & WENSINK, 93] défini par:

$$FSC(p) = V_{RES}(p) \prod_{i=1}^p \frac{(1 + v_{i..})}{(1 - v_{i..})} \quad (3.16)$$

FSC(p) a la même espérance statistique que $V_{EP}(p)$ lorsque le modèle d'ordre p inclut tous les coefficients de réflexion significatifs du processus ($p \geq m$), c'est à dire que la suite des résidus est approximativement un bruit blanc (processus purement aléatoire).

Un critère similaire est le critère du paramètre faible WPC (Weak Parameter Criterion) défini par: [BROERSEN, 85]

$$WPC(p) = V_{RES}(p) \prod_{i=1}^p \frac{1}{(1 - 2v_{i..})} \quad (3.17)$$

et qui considère qu'un coefficient de réflexion n'est pas significatif (i.e. faible) si sa valeur quadratique est inférieure au double de sa variance ($|\hat{\rho}_i|^2 \leq 2v_{i..}$). WPC est équivalent à FSC si $v_{i..}$ est faible, i.e. lorsque la relation: $(1 + v_{i..}) / (1 - v_{i..}) \cong 1 / (1 - 2v_{i..})$ est possible.

La procédure de la sélection de l'ordre au moyen du FSC (ou WPC) est:

1) Choix de l'ordre maximal possible p_{max} .

Il est choisi en fonction de l'incertitude maximale tolérée dans l'estimation des coefficients de réflexion. Généralement, p_{max} est déterminé de sorte que $v_{p_{max}..} < 0.1$ (ce qui correspond à un écart type de 0.32). Donc $p_{max} > 8$ pour YW, $p_{max} = L - 9$ pour Burg, $p_{max} = 2L/3 - 6$ pour CovM et $p_{max} = L/2 - 4$ pour Cov.

2) Calcul de $V_{RES}(p)$ pour $0 \leq p \leq p_{max}$

3) Sélection de l'ordre m correspondant à la plus petite valeur FSC(m) (ou WPC(m)).

FSC(p) et FPE(p) sont des approximations de $V'_{EP}(p)$ (pour $p > m$) basées sur les théories de l'échantillon fini et asymptotique, respectivement. Ces deux quantités sont proches dans le cas $p/L < 0.1$ pour lequel la théorie asymptotique est applicable.

3.4.1.1.b Critères de sélection asymptotiques

Il existe plusieurs critères pour la sélection de l'ordre. En plus du FPE, Akaike a introduit son critère AIC (Akaike Information Criterion) basé sur la théorie asymptotique de l'information [AKAIKE, 74] et qui est asymptotiquement équivalent au FPE ($\ln(\text{FPE}) \approx \text{AIC}$). De même qu'une autre forme du AIC a été proposée par [TONG, 75] pour déterminer l'ordre des processus autoregressifs purs noyés dans du bruit blanc. Parzen a aussi proposé un critère donnant les mêmes résultats que FPE et AIC appelé CAT (Criterion of Autoregressive Transfer function) donné par: [PARZEN, 74]

$$\text{CAT}(p) = \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^p (V'_{RES}(i))^{-1} \right) - (V'_{RES}(p))^{-1} \quad \text{où } V'_{RES}(i) = \frac{L}{L-i} V_{RES}(i) \quad (3.18)$$

Plusieurs variantes du AIC ont été proposées dans la littérature pour pallier à son inconsistance et à sa tendance à surestimer l'ordre exact [AGNEL, 84; MARPLE, 87; KAY, 88]. Une expression générale pour ces critères consistants et le AIC peut être donnée sous forme d'un critère généralisé de l'information GIC (Generalized Information Criterion): [BROERSEN & WENSINK, 93]

$$\text{GIC}(\alpha, p) = \ln(V_{RES}(p)) + \alpha p/L \quad (3.19)$$

avec

- $\alpha = 2$ pour AIC
- $\alpha = \ln(L)$ pour le critère consistant de Rissanen, appelé critère de la longueur minimale de représentation MDL (Minimum Descriptive Length).
- $\alpha = 2c \ln(\ln(L))$ pour le critère consistant minimal de Harman ($c \geq 1$).
- $\alpha = 3$ ou 4 pour les variantes à α constant du FPE et AIC.
- $\alpha = \frac{L}{L-p} \bar{F}(l)$ où $\bar{F}(l) = 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{p} \sqrt{l} e^{-l/2}$ (la variable $l (> 0)$ est le niveau de

décision) pour le critère consistant CIC (Consistent Information Criterion) de [CIFTCIOGLU et al., 94] basé sur la théorie asymptotique de décision.

En appliquant le $GIC(\alpha, p)$ aux échantillons finis ($p/L > 0.1$), un second minimum dépendant du p_{max} choisi apparaît (sauf pour YW) et qui est plus profond que le premier. Celui-ci peut induire en erreur la sélection de l'ordre basée sur des simulations individuelles pour lesquelles l'utilisateur doit rechercher le premier minimum local. Aucun de ces critères $GIC(\alpha, p)$ ne donne des résultats satisfaisants pour des séquences courtes de données sauf dans le cas des processus harmoniques, un ordre choisi entre $L/3$ et $L/2$ fournit une résolution spectrale acceptable avec peu de pics parasites [MARPLE, 87; KAY, 88].

3.4.1.1.c Critères équivalents pour les échantillons finis

Le logarithme de FSC donne:

$$\begin{aligned} \ln\{FSC(p)\} &= \ln\{V_{RES}(p)\} + \sum_{i=1}^p \ln(1+v_{i..}) - \sum_{i=1}^p \ln(1-v_{i..}) \\ &\approx \ln\{V_{RES}(p)\} + 2 \sum_{i=1}^p v_{i..} \end{aligned} \quad (3.20)$$

En prenant la valeur asymptotique $1/L$ pour tous les $v_{i..}$, le second terme de (3.20) (i.e., la somme) devient $2p/L$. Donc asymptotiquement le logarithme de FSC correspond au $GIC(\alpha, p)$ pour $\alpha=2$. Par conséquent, un critère équivalent du $GIC(\alpha, p)$ pour les échantillons finis et pour toutes les valeurs de α dit $FIC(\alpha, p)$ (Finite sample Information Criterion) peut être défini comme étant: [BROERSEN & WENSINK, 93]

$$FIC(\alpha, p) = \ln\{V_{RES}(p)\} + \alpha \sum_{i=1}^p v_{i..} \quad (3.21)$$

Les performances asymptotiques du GIC et du FIC sont les mêmes. Le $FIC(\alpha, p)$ possède un seul minimum prononcé indépendant de p_{max} .

Les critères $FIC(2, p)$, $FSC(p)$ et $WPC(p)$ sélectionnent presque le même ordre mais le $FSC(p)$ est plus avantageux car il représente en plus une estimation de $V_{BP}(p)$. Plus α augmente et plus la sélection d'un ordre très faible est probable. L'absence d'un paramètre significatif dans le modèle cause généralement une plus grande perte dans la précision que celle causée par l'inclusion d'un ou de deux paramètres superflus.

3.4.1.2 Critères basés sur la blancheur des résidus

Etant donné que pour un processus autoregressif pur d'ordre m , la suite résiduelle $e(t)$ (cf. équation (2.30)) obtenue en appliquant les données disponibles $x(t)$ à l'entrée du filtre inverse d'un modèle AR doit être blanche pour tous les ordres supérieurs à m , des critères testant la blancheur des résidus sont utilisés comme estimateur de l'ordre du processus. Une suite chronologique purement aléatoire ou blanche $e(t)$ est caractérisée par une FAC $R_e(k)$ qui est pratiquement nulle pour tout retard $k \neq 0$ (cf. équation (2.6)).

La plupart des critères de sélection sont des transformations des estimés $\hat{R}_e^p(k)$ de cette FAC (cf. Section 2.2.4) pour un modèle d'ordre p qui tentent de détecter une forte prédominance de l'élément $\hat{R}_e^p(0)$ par rapport au reste des éléments.

Dans la théorie asymptotique, si un processus est exactement AR(p) alors le quotient: [BOX & JENKINS, 76]

$$Q(p) = L \sum_{k=1}^M \left| \frac{\hat{R}_e^p(k)}{\hat{R}_e^p(0)} \right|^2 \sim \chi_{M-p}^2 \quad (3.22)$$

où χ_{M-p}^2 désigne la distribution du Chi carré à $(M-p)$ degrés de liberté.

En calculant $Q(p)$ pour tous les ordres possibles p jusqu'à un ordre maximal donné et en choisissant un niveau de signification de, par exemple, 95%, des seuils ζ_p sont évalués tels que $\Pr\{\chi_{M-p}^2 > \zeta_p\} = 0.05$. L'ordre m sélectionné est celui pour lequel $Q(m) \leq \zeta_m$. En pratique, ce type de test peut, quelquefois, ne pas fournir une bonne indication de l'ordre car il peut se produire que plusieurs valeurs de $Q(p)$ soient au-dessous de leurs seuils ou que toutes les valeurs de $Q(p)$ soient supérieures à leurs seuils respectifs.

Dans le cas des échantillons finis, pour avoir une bonne indication sur l'ordre du modèle à partir de simulations individuelles, un critère ad hoc assez simpliste appelé BEP (Blanchiment de l'erreur de prédiction) [ABDELOUEL & DERRAS, 92] peut être utilisé:

$$BEP(p) = \frac{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\hat{R}_e^p(k)|}{\hat{R}_e^p(0)} \quad (3.23)$$

L'ordre choisi m est celui qui correspond à la plus petite valeur $BEP(m)$, autrement dit c'est la valeur de p pour laquelle la valeur de $\hat{R}_e^p(0)$ est la plus importante par rapport à la moyenne arithmétique des éléments de la FAC d'indices de retard supérieurs.

L'évaluation des critères $Q(p)$ et $BEP(p)$ nécessite la détermination des séquences $\{\hat{R}_e^p(k), k=0,1, \dots, M\}$ pour chaque modèle d'ordre $p=1,2,\dots,p_{max}$. La méthode directe de calcul de ces séquences est très coûteuse en temps machine et requiert environ ML multiplications pour chaque ordre. Désormais, une méthode efficace et rapide proposée par [ABDELOUEL & DERRAS, 92] permet de calculer récursivement ces séquences en environ $7M$ multiplications par itération grâce à l'utilisation d'une structure en treillis.

Le choix de la valeur de M n'est pas évident. Il dépend de la longueur effective de la réponse impulsionnelle du modèle qui est inconnue, i.e., de sa largeur de bande [KAY, 88]. En pratique, M est généralement choisi égal à $L/5$.

3.4.2 Estimation de l'ordre ARMA du modèle

3.4.2.1 Critères basés sur la variance de l'erreur de prédiction

Contrairement au processus AR pur, la séquence des coefficients de réflexion d'un processus ARMA(p,q) est infinie et donc une théorie spéciale pour l'évaluation de la variance de l'erreur de prédiction lorsque la séquence de la suite chronologique est finie n'est pas aussi évidente que pour le cas AR (cf. Section 3.4.1.1). Elle est jusqu'à ce jour inexistante dans la littérature.

Pour avoir une indication sur l'ordre ARMA, des critères basés sur la théorie asymptotique de l'information peuvent être utilisés. Ces critères sont simplement des extensions des critères asymptotiques $G(\alpha,p)$ des processus AR (cf. Sous-Section 3.4.1.1.b) telles que: [THOMAS, 84; AGNEL, 84; KAY, 88]

$$GIC_{ARMA}(\alpha, p, q) = \ln\left\{\hat{\sigma}_e^2(p, q)\right\} + \alpha (p+q)/L \quad (3.24)$$

où $\hat{\sigma}_e^2(p, q)$ est une estimation de la variance de la suite résiduelle $\hat{e}(t)$ obtenue par le filtrage de $x(t)$ par $\hat{A}(z)/\hat{B}(z)$ et où $\alpha = 2$ pour le AIC, $\alpha = \ln(L)$ pour le MDL (Minimum Descriptive Length) et $\alpha = 2 + L \left\{ \ln \left(\frac{L}{L+p} \left(\hat{\sigma}_x^2 / \hat{\sigma}_e^2(p, q) - 1 \right) \right) - 1 \right\}$ pour le BIC (Bayesian Information Criterion) de Akaike où $\hat{\sigma}_x^2$ est une estimation de la variance de la suite originale $x(t)$.

Comme la consistance pour les séquences courtes est mal définie, l'ordre sélectionné par le AIC est considéré le plus correct bien qu'il soit le plus élevé [THOMAS, 84].

Ces critères nécessitent la sélection de plusieurs ordres ARMA possibles pour le processus, l'estimation des paramètres ARMA pour chaque ordre, le calcul des suites résiduelles correspondantes et enfin l'évaluation des $GIC_{ARMA}(\alpha, p, q)$ (α donné) pour l'estimation de l'ordre (p, q) optimum correspondant à la valeur minimale du critère. Cette approche est assez difficile et lente à appliquer vu la complexité de la détermination des paramètres ARMA (cf. Section 2.4.3) ainsi que l'évaluation des critères.

3.4.2.2 Critères basés sur la blancheur des résidus

Le principe de cette approche est identique à celui de la Section 3.4.1.2 décrit pour les processus AR. Les suites résiduelles sont estimées pour tous les modèles ARMA (p, q) possibles (comme pour l'approche précédente (cf. Section 3.4.2.1)), celles-ci sont complètement aléatoires (blanche) si l'ordre est correct.

De même, dans le cas asymptotique (L infini), le quotient: [BOX & JENKINS, 76; KAY, 88]

$$Q(p, q) = L \sum_{k=1}^M \left| \frac{\hat{R}_e^{(p, q)}(k)}{\hat{R}_e^{(p, q)}(0)} \right|^2 \sim \chi_{M-p-q}^2 \quad (3.22)$$

où χ_{M-p-q}^2 désigne la distribution du Chi carré à $(M-p-q)$ degrés de liberté, peut donc servir de test de la blancheur des résidus.

La procédure de sélection de l'ordre ARMA par ce type de test ainsi que les difficultés de son application sont semblables à ceux du cas AR (cf. Section 3.4.1.2). D'autres tests de blancheur sont proposés dans [JENKINS & WATTS, 68].

3.4.2.3 Critères basés sur les caractéristiques de la FAC

Ce type de critères est généralement le plus utilisé. Il est plus simple à mettre en œuvre et nécessite généralement moins de calculs que les autres types de critères (cf. Sections 3.4.2.1-2).

3.4.2.3.a Méthode de Box-Jenkins

Cette méthode considère les propriétés des séquences de la FAC et de la fonction de corrélation partielle (FCP) (ou les coefficients PARCOR (cf. Section 2.4.1)). Ces fonctions sont estimées directement à partir des données disponibles en utilisant les estimateurs (2.9) ou (2.10) pour la FAC et les estimateurs proposés par [MAKHOUL, 75] basés sur les erreurs de

prédictions avant et arrière pour la FCP. Il est bien connu que la FAC et la FCP sont des séquences finies pour les processus purement MA et AR, respectivement.

Box et Jenkins proposent d'identifier les modèles adéquats pour des processus donnés en examinant leurs séquences de FAC et de FCP et en recherchant les niveaux de coupures de ces dernières [BOX & JENKINS, 76; THOMAS, 84]. Comme pour un processus AR pur la FCP suit la loi normale (asymptotiquement) au-delà de l'ordre exact, sa valeur est alors inférieure à $1/\sqrt{L}$. Il en est de même pour la FAC d'un processus MA pur. La procédure de Box-Jenkins est donnée par les étapes suivantes:

- 1) Initialiser $i = m = n = 0$, $x_0(t) = x(t)$.
- 2) Estimer la FAC et la FCP de $x_i(t)$. Tester :
 - a) Si la FAC se coupe à partir d'un retard k (i.e. $FAC < 1/\sqrt{L}$) alors $m = k$ et le processus est MA(m). Aller en 4).
 - b) Si la FCP se coupe à partir d'un retard k (i.e. $FCP < 1/\sqrt{L}$) alors $n = k$ et le processus est AR(n). Aller en 4).

Sinon, le processus est du type mixte AR-MA.
- 3) Supposer un modèle ARMA(1,1) pour $x_i(t)$ et
 - a) Estimer les paramètres du modèle.
 - b) Obtenir la séquence résiduelle $x_{i+1}(t)$ par le filtrage inverse de $x_i(t)$.
 - c) Mettre $i = i + 1$. Tester: si la séquence $x_i(t)$ est blanche alors aller en 4), sinon aller en 2).
- 4) Le modèle adéquat pour $x(t)$ est ARMA(p, q) avec $p = i + n$ et $q = i + m$. Fin de la procédure. Ce modèle est donc constitué de la mise en cascade des i modèles ARMA(1,1), qui ont été supposés, et/ou du modèle AR(n) ou MA(m).

3.4.2.3.b Méthode de Gray-Kelley-McIntire (GKM)

Cette méthode exploite la structure régulière de la FAC d'un processus ARMA [THOMAS, 84]. Deux matrices R et S sont construites; leurs éléments sont des fonctions des estimés de la FAC et sont récursivement calculés. L'identification de l'ordre (p, q) du modèle ARMA adéquat se fait en recherchant d'abord la première colonne de S ayant un comportement constant et dont l'indice indique l'ordre p et en examinant soit la longueur de la sous-colonne non nulle de la $(p+1)^{i\text{ème}}$ colonne de R qui est égale à $(2q+1)$ ou le plus grand élément de S dont la position est $(-p-q-1, p+1)$.

La prise de décision dans cette approche peut être automatisée en utilisant une fonction statistique qui reflète les structures des matrices R et S dans un ensemble de scalaires et dont la valeur maximale indique le choix optimum de l'ordre (p,q). Une formule ad hoc est généralement utilisée, elle est appelée "la statistique D" [THOMAS, 84]. L'évaluation de cette statistique se prête bien au traitement parallèle du type SIMD (Single Instruction stream - Multiple Data stream) et systolique.

3.4.2.3.c Méthode du coin

La base théorique de cette technique est que si le processus est ARMA(p,q), sa FAC satisfait une équation aux différences d'ordre minimal p à partir du rang minimal (q+1). Les valeurs propres de la matrice R(i,j) de (3.5) sont non nulles si $i \leq p$ ou $j \leq q$. Dans le cas contraire, R(i,j) aura au moins une valeur propre nulle, ce qui se traduit par un déterminant $\det(i,j)$ nul. La méthode du coin consiste donc en: [THOMAS, 84]

- 1) Estimation de la FAC à partir de x(t) par un estimateur approprié.
- 2) Construction de la matrice des déterminants de R(i,j) ($1 \leq i \leq p_{\max}$ et $0 \leq j \leq q_{\max}$). La structure de cette matrice (lorsque la FAC exacte est utilisée) est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \det(1,0) & \det(1,1) & \dots & \det(1,q) & \dots & \dots & \det(1,q_{\max}) \\ \det(2,0) & \det(2,1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \det(2,q_{\max}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \det(p,0) & \det(p,1) & \dots & \det(p,q) & \det(p,q+1) & \dots & \det(p,q_{\max}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \det(p+1,q) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \det(p_{\max},0) & \det(p_{\max},1) & \dots & \det(p_{\max},q) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- 3) Identification de l'ordre (p,q) en repérant la sous-matrice nulle du coin droit inférieur de cette matrice. Comme c'est souvent une estimation de la FAC qui est utilisée, la sous-matrice recherchée n'est pas exactement nulle. Il faut donc spécifier un seuil d'ébasage.

3.4.2.3.d Méthode de Chan-Wood

D'après les équations de YWM (Section 2.4.3.2) d'un processus ARMA(p,q), la FAC s'écrit sous la forme autorégressive suivante:

$$R_x(k) = - \sum_{i=1}^p a_i R_x(k-i) \quad \text{pour } k > q \quad (3.23)$$

Cette relation n'est pas valable pour les retards $k \leq q$. Une autre forme de (3.23) est donnée par:

$$R_x(k) = - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_i}{a_p} R_x(k+p-i) \quad , a_0 = 1 \quad \text{pour } k > q-p \quad (3.24)$$

Cette équation (3.24) montre que $R_x(k)$ est une combinaison linéaire d'une base $\{R_x(k+p) \ R_x(k+p-1) \ \dots \ R_x(k+1)\}$ de dimension p dont les poids sont les paramètres a_i/a_p , $i=0,1,\dots,(p-1)$.

Chan et Wood proposent une méthode de sélection de l'ordre (p,q) en exploitant la relation (3.24) [CHAN & WOOD, 84]. Une matrice \mathbf{R} , de dimensions $(\alpha+\beta+1) \times (\alpha+\beta+1)$ (où α et β sont des entiers arbitraires), est construite telle que:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_x(\alpha) & R_x(\alpha-1) & \dots & R_x(0) & R_x(-1) & \dots & R_x(-\beta) \\ R_x(\alpha+1) & R_x(\alpha) & \dots & R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(-\beta+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(2\alpha+\beta) & \dots & \dots & R_x(\alpha+\beta) & \dots & \dots & R_x(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_\alpha & \dots & C_{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

où la colonne $C_k = (R_x(\alpha-k) \ R_x(\alpha-k+1) \ \dots \ R_x(2\alpha-k+\beta))^T$, $k=0,1,\dots,\alpha+\beta$.

Si un processus est exactement ARMA(p,q) alors:

- les colonnes $\{C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{p-1}\}$ sont linéairement indépendantes entre elles car la base des $R_x(k)$ est incomplète.
- les colonnes $\{C_p \ C_{p+1} \ \dots \ C_{\alpha+p-q-1}\}$ peuvent s'exprimer chacune en fonction de $\{C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{p-1}\}$ (en vertu de (3.24)), elles en sont donc linéairement dépendantes.
- les colonnes $C_{\alpha+p-q}$ jusqu'à $C_{\alpha+\beta}$ sont linéairement indépendantes car l'équation (3.24) ne s'applique plus.

La propriété des colonnes de la matrice \mathbf{R} décrite ci-dessus peut être utilisée pour identifier l'ordre ARMA optimum pour un processus aléatoire à partir d'une séquence $x(t)$ de sa suite chronologique. Les éléments de la FAC sont généralement remplacés par leurs estimés biaisés.

Pour déceler les niveaux de dépendance linéaire entre les colonnes, la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est utilisée pour transformer les vecteurs C_k en vecteurs normés linéairement indépendants u_k et ainsi les vecteurs $\{u_p \ u_{p+1} \ \dots \ u_{\alpha+p-q-1}\}$ auront des normes négligeables (nulles dans le cas idéal).

La procédure de Chan-Wood est alors comme suit: [CHAN & WOOD, 84]

- 1) Calcul de $\hat{R}_x(-\beta), \dots, \hat{R}_x(0), \dots, \hat{R}_x(2\alpha + \beta)$ (avec $\alpha > q_{\max}$ et $\beta > p_{\max}$),
- 2) Construction des vecteurs $C_0 \dots C_{\alpha+\beta}$ d'après (3.25) et leur normalisation: $c_k = C_k / \|C_k\|$, $k=0,1,\dots,(\alpha+\beta)$.
- 3) Application de la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt [CHAN & WOOD, 84; COULON, 86] aux vecteurs c_k et obtenir les vecteurs u_k ; $k = 0,1,\dots,(\alpha + \beta)$.
- 4) Comparaison des normes $\|u_k\|$ à un seuil TH1 (e.g. 0.1). Au premier vecteur u_m tel que $\|u_m\| \leq TH1$, prendre $p=m$.
- 5) Poursuite de la comparaison des normes des vecteurs suivants ($k>m$) à un autre seuil TH2 (e.g. 0.01). Soit u_n le premier vecteur tel que $\|u_n\| \geq TH2$ alors prendre $q=n-\alpha-p$. Si aucune des normes n'est inférieure ou égale à TH2 alors prendre $q=0$.

Le choix de α , β , TH1 et TH2 est critique. Il doivent être ajustés pour chaque application.

Remarque: Plus α est grand et moins les estimés de la FAC sont précis. Ce qui peut causer l'indépendance linéaire. TH1 est choisi en fonction de la résolution spectrale désirée [CHAN & WOOD, 84].

3.4.2.3.e Méthode de Tsay-Tiao

Cette méthode exploite la facilité d'estimation des paramètres d'un modèle ARMA de la méthode proposée dans [TSAY & TIAO, 84]. Pour la compréhension de cette méthode de sélection de l'ordre ARMA, il est bon d'avoir d'abord une idée sur la méthode de détermination des paramètres de laquelle elle découle.

Dans cette méthode, l'approche de la régression aux moindres carrés itérée (RMCI) est utilisée pour trouver des estimés consistants des p paramètres AR du modèle ARMA(p,q) à partir d'un filtre blanchisseur en treillis d'ordre ($p+q$) et en résolvant un système linéaire de q équations [LI & DICKINSON, 86]. Des estimés des paramètres MA peuvent être simplement obtenus en se basant sur l'heuristique de la propriété d'orthogonalité des erreurs de prédiction du filtre blanchisseur et de leur assimilation à la séquence blanche de l'excitation du modèle ARMA [LI & DICKINSON, 88]. Cette méthode se résume en les étapes suivantes:

- 1) Calcul des ($p+q$) premiers coefficients de réflexion ρ_i à partir de $x(t)$ en utilisant la méthode de Burg.

- 2) Calcul des paramètres de tous les modèles AR(p+n), n=0,1,...,q; notés $\alpha_i^{(p+n,0)}$ pour i=1,..., p+n, à l'aide de la récursion de Levinson-Durbin.
- 3) Détermination des paramètres auxiliaires $\beta_j^{(q)}$, i=1,...,n; à partir du système linéaire suivant pour n=q:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^{(n)} a_{j-i}^{(p+n-i,0)} = -a_j^{(p+n,0)} \quad p+1 \leq j \leq p+n$$

- 4) Calcul des estimés AR du modèle ARMA(p,q); notés $\alpha_j^{(p,q)}$; en utilisant l'expression suivante pour n=q:

$$a_j^{(p,n)} = a_j^{(p+n,0)} + \sum_{i=1}^{\min(n,j)} \beta_i^{(n)} a_{j-i}^{(p+n-i,0)} \quad 1 \leq j \leq p$$

- 5) Calcul des estimés MA du modèle par:

$$\hat{b}_j = \frac{1}{\theta_j} \beta_j^{(q)} \quad 1 \leq j \leq q \quad \text{avec } \hat{b}_0 = 1 \quad \text{et où } \theta_j = \left[\prod_{i=1}^j (1 - |\rho_{p+q-j+i}|^2) \right]^{1/2}$$

De nombreuses simulations ont montré que les estimés des paramètres AR obtenus par cette méthode sont meilleurs et en aucun cas plus pauvres que ceux obtenus par la méthode YWM basée sur les estimations directes de la FAC à partir de x(t). Toutefois, la stabilité et l'inversibilité des modèles obtenus ne sont pas garanties [LI & DICKINSON, 86].

La méthode d'identification de l'ordre (p,q) du modèle appelée aussi méthode de la fonction d'autocorrélation étendue (FACE) utilise l'équation de récurrence qui lie les paramètres AR des modèles ARMA(m,n), ARMA(m+1,n-1) et ARMA(m,n-1) déterminés par la méthode présentée ci-dessous. Cette équation est: [TSAY & TIAO, 84; WANG & LIBERT, 94]

$$\hat{\alpha}_i^{(m,n)} = \hat{\alpha}_i^{(m+1,n-1)} - \frac{\hat{\alpha}_{m+1}^{(m+1,n-1)}}{\hat{\alpha}_m^{(m,n-1)}} \hat{\alpha}_{i-1}^{(m,n-1)} \quad (3.26)$$

$$\text{où } i = 1, \dots, m \quad (m \geq 1 \text{ et } n \geq 1) \quad \text{et } \hat{\alpha}_0^{(m,n)} = 1$$

Les $\hat{\alpha}_i^{(m,n)}$ sont les paramètres AR du modèle ARMA(m,n) et les $\hat{\alpha}_i^{(j,0)}$ sont les estimés moindres carrés du modèle AR(j) à partir des données x(t). Les estimés de (3.26) sont consistants pour les paramètres AR du modèle ARMA(p,q) si m ≥ p et n=q ou m=p et n > q.

Utilisant ces estimés consistants, la FACE est définie par:

$$r_{(m)}(n) = E \left[y_{(m,n)}(t) y_{(m,n)}^*(t-n) \right] = R_{y_{(m,n)}}(n) \quad (3.27)$$

$$\text{où } y_{(m,n)}(t) = \sum_{i=0}^m \hat{\alpha}_i^{(m,n)} x(t-i)$$

La séquence de la FACE est donc constituée des éléments de FAC de plusieurs suites chronologiques $y_{(m,n)}(t)$ ($m \neq 0$) (définies en (3.27)). Ne pas confondre la FACE avec la FAC d'une suite chronologique donnée.

Si le modèle exact est ARMA(p,q) alors $y_{(p,n)}(t)$ est asymptotiquement un processus MA(q)

pûr pour $n \geq q$, tel que:

$$y_{(p,n)}(t) \doteq \sum_{i=0}^q b_i e(t-i) \quad n \geq q$$

et donc :

$$r_{(m)}(n) \doteq \begin{cases} 0 & \text{pour } n > q \text{ et } m = p \\ \neq 0 & \text{pour } n = q \text{ et } m = p \end{cases} \quad (3.28)$$

où le symbole (\doteq) désigne l'équivalence asymptotique en probabilité.

L'équation (3.28) traduit la propriété de coupure de la fonction d'autocorrélation d'un processus MA(q) pûr (cf. Section 2.4.2). Il est donc facile d'identifier q lorsque p est connu grâce à cette propriété.

Malheureusement en pratique, p et q sont tous les deux inconnus et des complications peuvent survenir lorsque $m > p$ et $n > q$; c'est l'effet de la suradaptation [WANG & LIBERT, 94]. Cet effet conduit généralement, pour la même séquence de données, à une augmentation virtuelle de l'ordre exact (p,q) à la valeur $(p',q') = (p+\Delta, q+\Delta)$ où $\Delta = \min(m-p, n-q)$. Cette augmentation est évidemment compensée par le phénomène de l'annulation pôle-zéro. L'équation (3.28) devient alors:

$$r_{(m)}(n) \doteq \begin{cases} c(m-p, n-q) & \text{pour } n = q' \Leftrightarrow m-p \geq n-q \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n > q' \Leftrightarrow n-q > m-p \geq 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

où $c(m-p, n-q)$ est une constante non nulle ou une variable aléatoire bornée par -1 et +1.

Pour identifier p et q, les $r_{(m)}(n)$ sont arrangés dans un tableau dont les lignes correspondent aux ordres AR et les colonnes aux ordres MA, de sorte que $r_{(i)}(j+1)$ occupe la position (i,j), notée $Cell(i,j)$, (voir Tableau 3.1). Les éléments de la FACE de la première ligne sont identiques à ceux de la FAC de $x(t)$ car $y_{(0,n)}(t) = x(t)$. Pour un processus ARMA(p,q), le tableau précédent aura la forme du Tableau 3.2, dans lequel (\diamond) désigne une valeur non nulle entre -1 et +1. Dans ce tableau, un triangle de zéros apparait limité par la ligne horizontale $i=p$ et la diagonale $j-i=q$ et le sommet de l'angle formé par ces deux dernières se trouve à la position (p,q). Ainsi l'ordre (p,q) peut être identifié rien qu'en repérant le triangle de zéros dans le tableau de la FACE.

Tableau 3.1 - Disposition des éléments de la FACE

AR	MA			
	0	1	2	...
0	$r_{(0)}(1)$	$r_{(0)}(2)$	$r_{(0)}(3)$...
1	$r_{(1)}(1)$	$r_{(1)}(2)$	$r_{(1)}(3)$...
2	$r_{(2)}(1)$	$r_{(2)}(2)$	$r_{(2)}(3)$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tableau 3.2 - Forme du Tableau 3.1 pour un processus ARMA(p,q)

AR	MA								
	0	1	q-1	q	q+1	q+2	q+3
0	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦♦
1	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦♦
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p-1	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦♦
p	♦	♦	♦	0	0	0	0	0.....0
p+1	♦	♦	♦	♦	0	0	0	0.....0
p+2	♦	♦	♦	♦	♦	0	0	0.....0
p+3	♦	♦	♦	♦	♦	♦	0	0.....0
⋮	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	0.....0

(♦) désigne une valeur non nulle entre -1 et +1

Dans le cas des échantillons finis et courts, les valeurs de la FACE n'atteignent pas exactement zéro à l'intérieur du triangle. Cette difficulté peut être levée en codant le tableau d'une façon informative sur les spécifications du modèle, par exemple en mettant:

$$Cell(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r_{(i)}(j+1)| > 2\sigma_r; \\ 0 & \text{si } |r_{(i)}(j+1)| \leq 2\sigma_r; \end{cases}$$

avec σ_r , une estimation de l'écart type de la FACE, elle peut être obtenue en utilisant une approximation de la formule de Barlett [WANG & LIBERT, 94].

D'autre part, dans des applications réelles où les processus étudiés ne sont pas tout à fait ARMA, le triangle de zéros du tableau de la FACE n'est pas évident et il devient difficile d'identifier l'ordre (p,q) du modèle. Pour ce fait, Wang et Libert proposent d'utiliser une technique avancée de reconnaissance de formes associée aux critères d'information de Akaike (AIC et BIC). L'algorithme "perceptron" est appliqué à plusieurs formes d'apprentissage du tableau de la FACE pour obtenir leurs fonctions de décision et pouvoir sélectionner les modèles les plus convenables ensuite les critères AIC et BIC sont calculés pour ces modèles et le meilleur d'entre eux est choisi [WANG & LIBERT, 94].

3.5 Détermination des paramètres ARMA

Les méthodes d'estimation des paramètres ARMA utilisées aux Etapes 3 et 4 de la procédure proposée (cf. Section 3.3) sont basées sur le principe des moindres carrés.

3.5.1 Approche des moindres carrés

Le principe de toutes les méthodes d'estimation des paramètres ARMA(p,q) basées sur les moindres carrés est de minimiser la puissance (ou la norme quadratique) d'une certaine erreur dépendant des paramètres \mathbf{a} et \mathbf{b} avec la contrainte $a_0 = 1$. Soit $\varepsilon(t)$ cette erreur, confinée dans un vecteur infini $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon(0) \ \varepsilon(1) \ \dots \ \dots)^T$, sa puissance est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \boldsymbol{\varepsilon}^H \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{t=0}^{+\infty} |\varepsilon(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{E}(e^{j\theta})|^2 d\theta \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $\mathcal{E}(z)$ désigne la TZ de $\varepsilon(t)$. La minimisation avec contrainte de $\mathcal{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est effectuée par la minimisation d'une fonction de Lagrange définie par:

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \eta) = \mathcal{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \eta^* (\mathbf{a}^T \mathbf{u}_1 - 1) \quad \text{où } \mathbf{u}_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T \quad (3.32)$$

η est un scalaire dit paramètre de contrainte de Lagrange. La solution recherchée est celle qui donne:

$$\text{Grad } \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \eta) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{a}} - \eta^* \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^*} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

c'est à dire (après une dérivation complexe):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{a}} = \eta^* \mathbf{u}_1 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{0} \\ \eta^* = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{a}} \end{cases} \quad (3.33)$$

Les dérivées partielles de $\mathcal{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ par rapport aux paramètres complexes a_k et b_k sont données par:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} &= \sum_{t=0}^{+\infty} \varepsilon^*(t) \phi_{a_k}(t) = \left(\phi_{a_k}(0) \quad \phi_{a_k}(1) \quad \dots \right) \varepsilon^* \quad (0 \leq k \leq p) \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} &= \sum_{t=0}^{+\infty} \varepsilon^*(t) \phi_{b_k}(t) = \left(\phi_{b_k}(0) \quad \phi_{b_k}(1) \quad \dots \right) \varepsilon^* \quad (0 \leq k \leq q)\end{aligned}\quad (3.34)$$

où

$$\begin{aligned}\phi_{a_k}(t) &= \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial a_k} \xrightarrow{TZ} \Phi_{a_k}(z) = \frac{\partial \mathcal{E}(z)}{\partial a_k} \\ \phi_{b_k}(t) &= \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial b_k} \xrightarrow{TZ} \Phi_{b_k}(z) = \frac{\partial \mathcal{E}(z)}{\partial b_k}\end{aligned}$$

et en généralisant pour tous les paramètres, (3.34) donne:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{F}_a \varepsilon^* \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{F}_b \varepsilon^* \quad (3.35)$$

où \mathbf{F}_a et \mathbf{F}_b sont des matrices de dimensions $(p+1) \times \infty$ et $(q+1) \times \infty$ respectivement et dont les éléments sont:

$$\begin{aligned}[\mathbf{F}_a]_{i,j} &= \phi_{a_i}(j) \quad (0 \leq i \leq p \text{ et } j = 0, 1, \dots) \\ [\mathbf{F}_b]_{i,j} &= \phi_{b_i}(j) \quad (0 \leq i \leq q \text{ et } j = 0, 1, \dots)\end{aligned}\quad (3.36)$$

Une autre écriture de la solution des méthodes des moindres carrés de (3.33) est alors:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_a^* \varepsilon = \eta \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{F}_b^* \varepsilon = \mathbf{0} \\ \eta = \mathbf{a}^H \mathbf{F}_a^* \varepsilon \end{cases} \quad (3.37a)$$

Remarque: Si la suite chronologique $x(t)$ et les paramètres ARMA recherchés sont réels alors la solution des moindres carrés est (après une dérivation réelle):

$$\begin{cases} \mathbf{F}_a \varepsilon = \frac{\eta}{2} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{F}_b \varepsilon = \mathbf{0} \\ \eta = 2 \mathbf{a}^T \mathbf{F}_a \varepsilon \end{cases} \quad (3.37b)$$

3.5.2 Problème des moindres carrés vrais

Le problème des moindres carrés vrais consiste à trouver le modèle ARMA(p,q) qui minimise la puissance de l'erreur de prédiction de la suite chronologique $x(t)$, i.e. $E[|x(t) - \hat{x}(t)|^2]$, les séquences de la réponse impulsionnelle et de la FAC vraies étant données.

D'après le théorème de Parseval:

$$\mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = E[|x(t) - \hat{x}(t)|^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta}) - \hat{X}(e^{j\theta})|^2 d\theta \quad (3.38a)$$

Sachant que : $X(z) = H(z)E(z)$ et $\hat{X}(z) = \hat{H}(z)E(z)$ avec $|E(e^{j\omega})|^2 = \sigma_e^2 = 1$

où $H(z)$ est la fonction de transfert exacte du processus supposée connue et $\hat{H}(z) = \hat{B}(z)/\hat{A}(z)$ est la fonction de transfert du modèle ARMA(p,q) recherchée. Le critère des moindres carrés vrais (TLS) peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta}) - \hat{H}(e^{j\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{TLS}}(e^{j\theta})|^2 d\theta \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} |h(t) - \hat{h}(t)|^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{TLS}}^H \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{TLS}} \end{aligned} \quad (3.38b)$$

$$\text{avec } \varepsilon_{\text{TLS}}(t) = h(t) - \hat{h}(t) \xrightarrow{\mathcal{I}Z} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{TLS}}(z) = H(z) - \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \hat{G}(z)(H(z)\hat{A}(z) - \hat{B}(z)) \quad (3.39)$$

$$\text{où } \hat{G}(z) = 1/\hat{A}(z) \xrightarrow{(\mathcal{I}Z)^{-1}} \hat{g}(t) \quad (\hat{g}(t) = 0 \text{ pour } t < 0)$$

Le calcul des dérivées partielles de $\mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (cf. (3.34)) donne:

$$\begin{aligned} \Phi_{a_k}(z) &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{TLS}}(z)}{\partial a_k} = \frac{z^{-k}}{\hat{A}^2(z)} \hat{B}(z) = z^{-k} \hat{G}(z) \hat{H}(z) \xrightarrow{(\mathcal{I}Z)^{-1}} \phi_{a_k}(t) = \hat{h}(t-k) * \hat{g}(t) \\ \Phi_{b_k}(z) &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{TLS}}(z)}{\partial b_k} = -\frac{z^{-k}}{\hat{A}(z)} = -z^{-k} \hat{G}(z) \xrightarrow{(\mathcal{I}Z)^{-1}} \phi_{b_k}(t) = -\hat{g}(t-k) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\text{Donc : } \mathbf{F}_a = \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{G}}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_b = -(\mathbf{I}_{q+1} \mathbf{0} \dots) \hat{\mathbf{G}}^T = -\hat{\mathbf{G}}'^T$$

où $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{G}}$ et $\hat{\mathbf{G}}'$ sont des matrices Toeplitz triangulaires inférieures de dimensions $\infty \times (p+1)$, $\infty \times \infty$ et $\infty \times (q+1)$, respectivement, et telles que

$$[\hat{\mathbf{H}}]_{i,j} = \hat{h}(i-j) \quad \text{et} \quad [\hat{\mathbf{G}}]_{i,j} = \hat{g}(i-j)$$

et \mathbf{I}_{q+1} est la matrice identité de dimensions $(q+1) \times (q+1)$. De même le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ de l'erreur $\varepsilon(t)$ peut s'écrire (cf. (3.39)):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{TLS}} = \hat{\mathbf{G}} \left(\mathbf{H} \hat{\mathbf{a}} - \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = \hat{\mathbf{G}} \mathbf{H} \hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{G}}' \hat{\mathbf{b}} \quad (3.41)$$

En remplaçant les matrices \mathbf{F}_a , \mathbf{F}_b et $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans (3.37a), la solution TLS est donc donnée par le système:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{G}}^H \hat{\mathbf{G}} \mathbf{H} & -\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{G}}^H \hat{\mathbf{G}}' \\ -\hat{\mathbf{G}}'^H \hat{\mathbf{G}} \mathbf{H} & \hat{\mathbf{G}}'^H \hat{\mathbf{G}}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

qui est évidemment très non-linéaire en $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$, $\hat{h}(t)$ et $\hat{g}(t)$ et sa résolution est quasiment impossible. A cause de sa non linéarité, le critère TLS n'est jamais utilisé directement. Ce sont plutôt des techniques itératives utilisant des critères linéaires qui sont utilisés afin d'approcher la solution TLS.

3.5.3 Méthode des moindres carrés modifiés

Cette méthode est linéaire et aboutit toujours à un modèle stable [MULLIS & ROBERTS, 76]. Elle tente de trouver un modèle ARMA(p,q) pour lequel l'erreur due à la substitution des paramètres \mathbf{a} et \mathbf{b} par leurs estimés $\hat{\mathbf{a}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$ dans (3.2) soit minimale au sens des moindres carrés; i.e.

$$\mathbf{H} \hat{\mathbf{a}} - \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MLS}} \neq \mathbf{0}$$

Le critère des moindres carrés modifiés (MLS: Modified Least Squares) est donc donné par:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{MLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MLS}}^H \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MLS}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MLS}}(e^{j\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta}) \hat{A}(e^{j\theta}) - \hat{B}(e^{j\theta})|^2 d\theta \end{aligned} \quad (3.43)$$

En remplaçant $\boldsymbol{\varepsilon}$ par sa valeur dans (3.34), les dérivées partielles du critère sont:

$$\begin{aligned} \Phi_{a_k}(z) &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{MLS}}(z)}{\partial a_k} = H(z) z^{-k} \xrightarrow{(TZ)^{-1}} \phi_{a_k}(t) = \hat{h}(t-k) \\ \Phi_{b_k}(z) &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{MLS}}(z)}{\partial b_k} = -z^{-k} \xrightarrow{(TZ)^{-1}} \phi_{b_k}(t) = -\delta(t-k) \end{aligned}$$

et donc : $\mathbf{F}_a = \mathbf{H}^T$ et $\mathbf{F}_b = -(\mathbf{I}_{q+1} \mathbf{0} \mathbf{0} \dots)$

En utilisant (3.37a), la solution MLS est alors :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{a}} = \eta \mathbf{u}_1 \\ \eta = \hat{\mathbf{a}}^H \mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{a}} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MLS}}^H \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MLS}})_{\min} \end{cases} \quad (3.44a)$$

Comme $\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2 = \mathbf{R}_p - \mathbf{H}_1^H \mathbf{H}_1$ (cf. Equation (3.4b))

la solution MLS peut s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_p & -\mathbf{H}_1^H \\ -\mathbf{H}_1 & \mathbf{I}_{q+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.44b)$$

Il est facilement démontrable que la matrice $\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2$ est proche de Toeplitz avec un déplacement de rang $\mathfrak{R}(\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2) = 3$ déterminé par la formule: [YARMAN-VURAL, 85]

$$\mathfrak{R}(\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2) = \text{Rang} \left\{ (\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2) - \mathbf{Z}(\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2) \mathbf{Z}^T \right\} \quad (3.45)$$

avec \mathbf{Z} une matrice carrée dite de décalage définie telle que : $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

par conséquent, il existe au moins un algorithme efficace récursif dans l'ordre pour l'inversion de $\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2$ en utilisant seulement $O(3(p+1)^2)$ multiplications et trois (\mathfrak{R}) vecteurs de paramètres; i.e., deux de paramètres intermédiaires et un de paramètres inconnus. En l'occurrence, un algorithme efficace est proposé par [MULLIS & ROBERTS, 76] pour résoudre le deuxième système de (3.44a), il est modifié et développé (cf. Section 3.6) dans l'Annexe B.

Remarque: Pour une matrice carrée de Toeplitz $N \times N$, le déplacement de rang est $\mathfrak{R} = 2$, son inversion peut être effectuée par un algorithme récursif (e.g. Algorithme de Levinson-Durbin), utilisant $O(2N^2)$ multiplications et deux vecteurs de paramètres; i.e., le vecteur des inconnus avec un vecteur intermédiaire qui correspond à celui des paramètres de prédiction arrière.

Dans le cas où $p = q$, le système (3.44b) est alors formé de quatre blocs Toeplitz carrés et la solution MLS peut être déterminée efficacement en utilisant l'algorithme bicanal de Levinson après réorganisation de ce système (cf. Section 3.6 et Annexe D pour les détails).

3.5.4 Méthode des moindres carrés modifiés pondérés

Un critère linéaire intéressant est obtenu en pondérant l'erreur MLS. C'est le critère des moindres carrés modifiés pondérés (WMLS: Weighted Modified Least Squares), il est donné par: [DERRAS, 88]

$$\mathcal{E}_{\text{WMLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{E}_{\text{WMLS}}(e^{j\theta})|^2 d\theta = \mathbf{e}_{\text{WMLS}}^H \mathbf{e}_{\text{WMLS}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\text{WMLS}}(z) = W(z) (H(z)\hat{A}(z) - \hat{B}(z)) \quad (3.46)$$

$$\text{et donc } \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{WMLS}} = \mathbf{W} \left(\mathbf{H} \hat{\mathbf{a}} - \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{W} \mathbf{H} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{W}' \hat{\mathbf{b}}$$

où $W(z)$ est la fonction de pondération et \mathbf{W} est une matrice $\infty \times \infty$ triangulaire inférieure de la forme de Toeplitz telle que: $[\mathbf{W}]_{ij} = w(i-j)$ où $w(t)$ est la TZ inverse causale de $W(z)$ (avec $w(t)=0$ si $t < 0$) et $\mathbf{W}'^T = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{q+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \end{pmatrix} \mathbf{W}^T$.

Ce critère possède la particularité de s'identifier aux critères TLS et MLS pour un choix spécifique de la fonction de pondération, en effet :

$$\square \text{ Si } W(z) = 1/\hat{A}(z) \quad \text{alors } \mathcal{E}_{\text{WMLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$\square \text{ Si } W(z) \equiv 1 \quad \text{alors } \mathcal{E}_{\text{WMLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathcal{E}_{\text{MLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Si $W(z)$ est une fonction connue indépendante de $\hat{\mathbf{a}}$ et $\hat{\mathbf{b}}$, les dérivées partielles de l'erreur WMLS sont alors:

$$\begin{aligned} \Phi_{a_k}(z) &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{WMLS}}(z)}{\partial a_k} = z^{-k} W(z) H(z) \xrightarrow{(TZ)^{-1}} \phi_{a_k}(t) = h(t-k) * w(t) \\ \Phi_{b_k}(z) &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{WMLS}}(z)}{\partial b_k} = -z^{-k} W(z) \xrightarrow{(TZ)^{-1}} \phi_{b_k}(t) = -w(t-k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\text{et donc : } \mathbf{F}_a = \mathbf{H}^T \mathbf{W}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_b = -\mathbf{W}'^T$$

La solution WMLS est obtenue par (d'après l'Equation (3.37a)):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{H} & -\mathbf{H}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W}' \\ -\mathbf{W}'^H \mathbf{W} \mathbf{H} & \mathbf{W}'^H \mathbf{W}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \eta = (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{WMLS}}^H \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{WMLS}})_{\min} \quad (3.48a)$$

$$\text{qui peut aussi s'écrire: } \begin{pmatrix} \mathbf{R}_c & -\mathbf{R}_{cw} \\ -\mathbf{R}_{cw} & \mathbf{R}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48b)$$

où \mathbf{R}_w et \mathbf{R}_c sont des matrices Toeplitz héritiennes des FAC's de $W(z)$ et de $C(z)=H(z)W(z)$ respectivement et \mathbf{R}_{cw} est leur matrice d'intercorrélacion. Les dimensions respectives de ces trois matrices sont $(q+1) \times (q+1)$, $(p+1) \times (p+1)$ et $(q+1) \times (p+1)$ et leurs éléments sont définis par:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_w]_{ij} &= R_w(i-j) = \sum_{t=0}^{+\infty} w(t) w^*(t-(i-j)) \\ [\mathbf{R}_c]_{ij} &= R_c(i-j) = \sum_{t=0}^{+\infty} c(t) c^*(t-(i-j)) \\ [\mathbf{R}_{cw}]_{ij} &= R_{cw}(i-j) = \sum_{t=0}^{+\infty} c(t) w^*(t-(i-j)) \end{aligned} \quad (3.49)$$

avec $w(t)$ et $c(t)$ les TZ inverses respectives de $W(z)$ et $C(z)$.

Dans le cas où $p = q$, le système (3.48b) est alors formé de quatre blocs Toeplitz carrés et la solution WMLS peut être déterminée efficacement en utilisant l'algorithme bicanal de Levinson (cf. Section 3.6 et Annexe D pour les détails).

3.5.5 Techniques itératives pour la solution des moindres carrés vrais

En exploitant la structure de la solution WMLS, le problème TLS (cf. Section 3.5.2) peut être résolu itérativement par deux procédures inspirées des modes I et II de la méthode de Steiglitz et McBride [STEIGLITZ & McBRIDE, 65; McBRIDE et al., 66; EVANS & FISCHL, 73]. Ces techniques sont utilisées à l'Etape 4 de la procédure TLS générale (cf. Section 3.3) étant donné :

- la fonction de transfert exacte du processus qui est estimée à partir d'un modèle AR(m) de référence telle que $H(z)=1/D(z)$ et dont les paramètres sont donnés par le vecteur $\mathbf{d}=(1 \ d_1 \ \dots \ d_m)^T$
- les séquences de la FAC $R_x(k)$ et de la réponse impulsionnelle $h(k)$.
- un modèle ARMA(p,q) initial donné par $\hat{H}^{(0)}(z) = \hat{B}^{(0)}(z)/\hat{A}^{(0)}(z)$

3.5.5.1 Technique I

Cette technique est du type du point fixe. Son but est d'approcher itérativement la solution TLS en déterminant à l'itération i la solution $\hat{H}^{(i)}(z) = \hat{B}^{(i)}(z)/\hat{A}^{(i)}(z)$ qui minimise le critère WMLS dont la fonction de pondération est $W(z) = 1/\hat{A}^{(i-1)}(z)$. A la convergence $\hat{A}^{(i)}(z) \cong \hat{A}^{(i-1)}(z) \approx \hat{A}(z)$ et donc $\mathcal{E}_{\text{WMLS}}(\hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \hat{\mathbf{b}}^{(i)}) \cong \mathcal{E}_{\text{TLS}}(\hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \hat{\mathbf{b}}^{(i)})$.

Etapes de la Technique I de la procédure TLS

I) Initialisation de l'indice des itérations, $i=1$

II) Construction du système (3.48b): Soit $W(z) = 1/\hat{A}^{(i-1)}(z)$.

II.1) Calcul de R_w :

Pour construire R_w , il est seulement nécessaire de calculer la séquence $\{R_w(k), k=0,1,\dots, q\}$. Comme $W(z)$ est un AR(p) dont les paramètres $\hat{\mathbf{a}}^{(i-1)}$ sont connus, la FAC de la suite infinie $w(t)$ peut être calculée efficacement par l'algorithme de Jury (ou Levinson Inverse) (cf. Section 3.6 et Annexe A pour les détails).

II.2) Calcul de \mathbf{Rc} :

La TZ de la suite $c(t)$ est:

$$C(z) = H(z)W(z) = \frac{1}{D(z)\hat{A}^{(t-1)}(z)} = \frac{1}{S(z)} \quad (3.50)$$

$$\text{où } S(z) = \sum_{j=0}^n s_j z^{-j} \quad (s_0 = 1) \quad \text{et} \quad s_j = \sum_{l=0}^p \hat{a}_l^{(t-1)} d_{j-l} \quad 0 \leq j \leq n, \quad n = m + p$$

Etant donnés les paramètres s_j , la FAC $R_c(k)$ de la suite infinie $c(t)$ est calculable efficacement grâce à l'algorithme de Jury (cf. Section 3.6 et Annexe A pour les détails). Pour construire la matrice \mathbf{Rc} , il est seulement nécessaire de calculer la séquence $\{R_c(k), k=0,1,\dots,p\}$.

II.3) Calcul de \mathbf{Rcw}

Pour construire la matrice \mathbf{Rcw} , la séquence $\{R_{cw}(k), k = -p, -p+1, \dots, 0, 1, \dots, q\}$ est nécessaire.

$$\text{Comme} \quad C(z) S(z) = 1 \quad (\text{cf. (3.50)}) \quad (3.51a)$$

$$\text{et} \quad W(z) \hat{A}^{(t-1)}(z) = 1 \quad (3.51b)$$

en effectuant le produit de (3.51a) par $W^*(1/z^*)$ et celui de (3.51b) par $C^*(1/z^*)$ et ensuite leurs TZ inverses respectives, deux expressions pour $R_{cw}(k)$ sont obtenues telles que:

$$\sum_{j=0}^n s_j R_{cw}(k-j) = \begin{cases} w^*(-k), & \text{pour } k \leq 0 \\ 0, & \text{pour } k > 0 \end{cases} \quad (3.52a)$$

$$\sum_{j=0}^p \hat{a}_j^{(t-1)*} R_{cw}(j-k) = \begin{cases} c(-k), & \text{pour } k \leq 0 \\ 0, & \text{pour } k > 0 \end{cases} \quad (3.52b)$$

où évidemment:

$$w(t) = \sum_{j=0}^p \hat{a}_j^{(t-1)} w(t-j) + \delta(t) \quad \text{et} \quad c(t) = \sum_{j=0}^n s_j c(t-j) + \delta(t) \quad (3.52c)$$

Afin de pouvoir calculer la séquence requise pour \mathbf{Rcw} , un système minimal de $(n+p)$ inconnues doit être résolu. En considérant n équations de (3.52b) et p équations de (3.52a), un système d'une structure intéressante est obtenu tel que:

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & \hat{a}_1^{(i-1)*} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)*} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & \hat{a}_1^{(i-1)*} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)*} & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 1 & \hat{a}_1^{(i-1)*} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)*} \\
 \hline
 s_n & s_{n-1} & \dots & s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & s_n & s_{n-1} & \dots & s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & s_n & s_{n-1} & \dots & \dots & s_1 & 1
 \end{array} \right)
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 R_{cw}(-n) \\
 R_{cw}(-n+1) \\
 \vdots \\
 R_{cw}(-1) \\
 \hline
 R_{cw}(0) \\
 R_{cw}(1) \\
 \vdots \\
 R_{cw}(p-1)
 \end{array} \right)
 =
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad (3.53)
 \end{array}
 \end{array}$$

← n + p →

La matrice de ce système est de la forme de Sylvester modifiée [DERRAS, 88] et possède des "1" sur sa diagonale principale. Un tel système est efficacement solvable par un algorithme basé sur la division euclidienne proposé par [DEMEURE & MULLIS, 89]. (cf. Section 3.6 et Annexe C pour les détails).

Si $q=p$ alors la séquence recherchée pour R_{cw} sera complétée par le calcul de $R_{cw}(p)$ en utilisant simplement la formule autorégressive (3.52a).

III) Résolution du système (3.48b).

Dans le cas où $p=q$, une résolution efficace est possible à l'aide de l'algorithme bicanal de Levinson (cf. Section 3.6 et Annexe A pour les détails). Les paramètres ARMA trouvés sont notés: $\hat{\mathbf{a}}^{(0)}$ et $\hat{\mathbf{b}}^{(0)}$.

IV) Test de la convergence:

La convergence est atteinte si $\hat{A}^{(i)}(z) \cong \hat{A}^{(i-1)}(z)$, un critère d'arrêt reflétant cette convergence peut être :

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^p |\hat{a}_j^{(i)} - \hat{a}_j^{(i-1)}|^2}{\sum_{j=1}^p |\hat{a}_j^{(i)}|^2}} \quad (3.54)$$

qui doit être infiniment petit. Par conséquent,

Si $\Lambda \leq \delta$ (e.g., $\delta = 10^{-3}$), alors $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}^{(0)}$ et $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}^{(0)}$ et fin de la procédure.

Sinon; incrémentation de i d'une unité et réexécution des étapes II) à IV).

3.5.5.2 Technique II

La Technique I, décrite ci-dessus, se contente de faire tendre $\mathcal{E}_{\text{WMLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ à $\mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ uniquement sans se préoccuper de minimiser effectivement ce dernier. Comme la valeur minimale du critère WMLS ne correspond pas forcément à la valeur minimale du critère TLS, une seconde technique qui remédie à ce problème et qui est aussi du type du point fixe, peut être utilisée. Cette technique a pour but, en plus de rapprocher le problème WMLS au problème TLS, de réduire itérativement $\mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ à sa valeur minimale stationnaire. En effet, si, à l'itération i ,

↳ la fonction de pondération est $W(z) = 1/\hat{A}^{(i-1)}(z)$

↳ dans l'expression des dérivées partielles (3.47), $H(z)$ est remplacé par $\hat{H}^{(i-1)}(z)$ et donc $\mathbf{F}_a = \hat{\mathbf{H}}^{(i-1)\top} \mathbf{W}^\top$ et $\mathbf{F}_b = -\mathbf{W}'^\top$ (où $\hat{\mathbf{H}}^{(i-1)}$ est une matrice $\infty \times (p+1)$ telle que:

$$\left[\hat{\mathbf{H}}^{(i-1)} \right]_{j,k} = \hat{h}^{(i-1)}(j-k) \quad (\hat{h}^{(i-1)}(j) \text{ est causale}),$$

alors à la convergence, i.e. lorsque:

$$\hat{A}^{(i)}(z) \cong \hat{A}^{(i-1)}(z) \approx \hat{A}(z) \quad \text{et} \quad \hat{H}^{(i)}(z) \cong \hat{H}^{(i-1)}(z) \approx H(z),$$

la solution trouvée est celle qui vérifie (cf. (3.38) et (3.40)):

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\text{WMLS}}(\hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \hat{\mathbf{b}}^{(i)}) \cong \mathcal{E}_{\text{TLS}}(\hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \hat{\mathbf{b}}^{(i)}) \\ \mathbf{Grad} \mathcal{E}_{\text{WMLS}}(\hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \hat{\mathbf{b}}^{(i)}) \approx \mathbf{Grad} \mathcal{E}_{\text{TLS}}(\hat{\mathbf{a}}^{(i)}, \hat{\mathbf{b}}^{(i)}) \approx \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.55)$$

Donc pour cette technique, la solution, à l'itération i , est donnée par le système:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}^{(i-1)\text{H}} \mathbf{W}^{\text{H}} \mathbf{W} \mathbf{H} & -\hat{\mathbf{H}}^{(i-1)\text{H}} \mathbf{W}^{\text{H}} \mathbf{W}' \\ -\mathbf{W}'^{\text{H}} \mathbf{W} \mathbf{H} & \mathbf{W}'^{\text{H}} \mathbf{W}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{b}}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^{(i)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.56a)$$

En posant $C(z) = H(z)W(z)$ et $\hat{C}(z) = \hat{H}^{(i-1)}(z)W(z)$, (3.56a) peut aussi s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Rc}\hat{c} & -\mathbf{Rw}\hat{c} \\ -\mathbf{Rc}\mathbf{w} & \mathbf{Rw} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{b}}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^{(i)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.56b)$$

où $\mathbf{Rc}\hat{c}$, $\mathbf{Rw}\hat{c}$ et $\mathbf{Rc}\mathbf{w}$ sont des matrices Toeplitz des intercorrélations entre $C(z)$ et $\hat{C}(z)$, $W(z)$ et $\hat{C}(z)$, et $C(z)$ et $W(z)$, respectivement. Les dimensions respectives de ces trois matrices sont $(p+1) \times (p+1)$, $(p+1) \times (q+1)$ et $(q+1) \times (p+1)$ et leurs éléments sont définis par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{Rcc}]_{i,j} &= R_{c\hat{c}}(i-j) = \sum_{t=0}^{+\infty} c(t) \hat{c}^*(t-(i-j)) \\ [\mathbf{Rwc}]_{i,j} &= R_{w\hat{c}}(i-j) = \sum_{t=0}^{+\infty} w(t) \hat{c}^*(t-(i-j)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

(pour ceux de \mathbf{Rcw} , cf. (3.49))

avec $w(t)$, $c(t)$ et $\hat{c}(t)$ les TZ inverses de $W(z)$, $C(z)$ et $\hat{C}(z)$, respectivement. \mathbf{Rw} est la matrice Toeplitz hermitienne $(q+1) \times (q+1)$ de la FAC de $W(z)$ (cf. (3.49)).

La structure du système (3.56a) révèle que celui-ci est le résultat de la minimisation d'un critère non quadratique défini par:

$$\mathcal{E}_{\text{Tech 2}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{Tech 2}}^H \mathbf{e}_{\text{Tech 2}} \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\text{Tech 2}} = \mathbf{W} \mathbf{H} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} - \mathbf{W}' \hat{\mathbf{b}}^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{\text{Tech 2}} = \mathbf{W} \hat{\mathbf{H}}^{(i-1)} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} - \mathbf{W}' \hat{\mathbf{b}}^{(i)} \end{cases} \quad \text{et} \quad W(z) = 1/\hat{A}^{(i-1)}(z)$$

et donc la valeur de la constante $\eta^{(i)}$ du second membre de (3.56a) est complexe.

A la convergence, $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{Tech 2}}$ tend vers $\mathbf{e}_{\text{Tech 2}}$ et c'est alors que $\mathcal{E}_{\text{Tech 2}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ devient quadratique et η devient une quantité réelle positive égale à $(\mathbf{e}_{\text{Tech 2}}^H \mathbf{e}_{\text{Tech 2}})_{\min}$.

□ Etapes de la Technique II de la procédure TLS

I) Initialisation de l'indice des itérations, $i=1$

II) Construction du système (3.56b): Soit $W(z) = 1/\hat{A}^{(i-1)}(z)$.

II.1) Calcul de \mathbf{Rw} . (identique à l'Etape II.1 de la Technique I)

II.2) Calcul de \mathbf{Rcw} . (identique à l'Etape II.3 de la Technique I)

II.3) Calcul de \mathbf{Rwc} :

Pour construire la matrice \mathbf{Rwc} , la séquence $\{R_{w\hat{c}}(k), k = -q, -q+1, \dots, 0, 1, \dots, p\}$ est nécessaire. Comme:

$$\hat{C}(z) = W(z) \hat{H}^{(i-1)}(z) = \frac{\hat{B}^{(i-1)}(z)}{U(z)} \Leftrightarrow \hat{C}(z) U(z) = \hat{B}^{(i-1)}(z) \quad (3.59a)$$

$$\text{où } U(z) = \left(\hat{A}^{(i-1)}(z)\right)^2 = \sum_{j=0}^{2p} u_j z^{-j} \quad \text{avec } u_j = \sum_{l=0}^p \hat{a}_l^{(i-1)} \hat{a}_{j-l}^{(i-1)} \quad (u_0 = 1 \quad 0 \leq l \leq 2p)$$

$$\text{et comme} \quad W(z) \hat{A}^{(i-1)}(z) = 1 \quad (3.59b)$$

la multiplication de (3.59a) par $W^*(1/z^*)$ et celle de (3.59b) par $\hat{C}^*(1/z^*)$ donnent, dans le domaine temporel, les expressions en $R_{w\hat{c}}(k)$ suivantes:

$$\sum_{j=0}^{2p} u_j^* R_{w\hat{c}}(j-k) = \zeta_k \quad \text{avec} \quad \zeta_k = \sum_{j=0}^q \hat{b}_j^{(i-1)*} w(j-k) \quad (3.60a)$$

$$\sum_{j=0}^p \hat{a}_j^{(i-1)} R_{w\hat{c}}(k-j) = \begin{cases} \hat{c}^*(-k), & \text{si } k \leq 0 \\ 0, & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad (3.60b)$$

Afin de pouvoir calculer la séquence nécessaire pour construire $R_{w\hat{c}}$ à partir de ces deux expressions, un système minimal de $3p$ inconnues doit être résolu. En considérant $2p$ équations de (3.60b) et p équations de (3.60a), un système d'une structure intéressante est obtenu tel que:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2p \\ \vdots \\ \vdots \\ + \\ p \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & \hat{a}_1^{(i-1)} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \hat{a}_1^{(i-1)} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \hat{a}_1^{(i-1)} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)} \\ \hline u_{2p}^* & u_{2p-1}^* & \dots & u_1^* & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_{2p}^* & u_{2p-1}^* & \dots & u_1^* & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{2p}^* & u_{2p-1}^* & \dots & \dots & u_1^* & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} R_{w\hat{c}}(2p) \\ R_{w\hat{c}}(2p-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{w\hat{c}}(1) \\ \hline R_{w\hat{c}}(0) \\ R_{w\hat{c}}(-1) \\ \vdots \\ R_{w\hat{c}}(-p+1) \end{array} \right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{p-1} \end{array} \right) \end{array} \quad (3.61)$$

← $3p$ →

La matrice de ce système est de la même forme que celle de (3.53), elle est donc efficacement inversée grâce à l'algorithme proposé par [DEMEURE & MULLIS, 89] (cf. Section 3.6 et Annexe C pour les détails).

Pour compléter la séquence recherchée, $R_{w\hat{c}}(-p)$ est calculé en utilisant simplement (3.60a), i.e.

$$R_{w\hat{c}}(-p) = \zeta_p - \sum_{j=1}^{2p} u_j^* R_{w\hat{c}}(j-p)$$

II.4) Calcul de $R_{c\hat{c}}$:

Pour construire la matrice $R_{c\hat{c}}$, la séquence $\{R_{c\hat{c}}(k), k = -p, -p+1, \dots, 0, 1, \dots, p\}$ est nécessaire. Comme

$$\hat{C}(z) = W(z) \hat{H}^{(i-1)}(z) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{C}(z) \hat{A}^{(i-1)}(z) = W(z) \hat{B}^{(i-1)}(z) \quad (3.62a)$$

$$\text{et} \quad C(z) = W(z) H(z) \Leftrightarrow C(z) D(z) = W(z)$$

$$\text{où} \quad D(z) = \sum_{j=0}^m d_j z^{-j} \quad (d_0 = 1) \quad (3.62b)$$

la multiplication de (3.62a) par $C^*(1/z^*)$ et celle de (3.62b) par $\hat{C}^*(1/z^*)$ donnent, dans le domaine temporel, les expressions en $R_{c\hat{c}}(k)$ suivantes:

$$\sum_{j=0}^p \hat{a}_j^{(i-1)*} R_{c\hat{c}}(j-k) = v_k \quad \text{avec} \quad v_k = \sum_{j=0}^q \hat{b}_j^{(i-1)*} R_{cw}(j-k) \quad (3.63a)$$

$$\text{et} \quad \sum_{j=0}^m d_j R_{c\hat{c}}(k-j) = R_{w\hat{c}}(k) \quad (3.63b)$$

Pour calculer la séquence requise pour la construction de $R_{w\hat{c}}$ à partir de ces deux expressions, un système minimal de $(p+m)$ inconnues doit être résolu. En considérant m équations de (3.63a) et p équations de (3.63b), un système peut être obtenu tel que:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & \hat{a}_1^{(i-1)*} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \hat{a}_1^{(i-1)*} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)*} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \hat{a}_1^{(i-1)*} & \dots & \hat{a}_p^{(i-1)*} \\ \hline d_m & d_{m-1} & \dots & d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_m & d_{m-1} & \dots & d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_m & d_{m-1} & \dots & \dots & d_1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} R_{c\hat{c}}(-m) \\ R_{c\hat{c}}(-m+1) \\ \vdots \\ R_{c\hat{c}}(-1) \\ \hline R_{c\hat{c}}(0) \\ R_{c\hat{c}}(1) \\ \vdots \\ R_{c\hat{c}}(p-1) \end{array} = \begin{array}{c} v_m \\ v_{m-1} \\ \vdots \\ v_1 \\ \hline R_{w\hat{c}}(0) \\ R_{w\hat{c}}(1) \\ \vdots \\ R_{w\hat{c}}(p-1) \end{array} \quad (3.64) \\ \leftarrow \quad \quad \quad m+p \quad \quad \quad \rightarrow \end{array}$$

La matrice de ce système est de la même forme que celles de (3.53) et (3.61), elle est donc efficacement inversée grâce à l'algorithme de [DEMEURE & MULLIS, 89] (cf. Section 3.6 et Annexe C pour les détails).

La séquence recherchée est complétée par le calcul direct de $R_{c\hat{c}}(p)$ (cf. (3.63b)), i.e.

$$R_{c\hat{c}}(p) = R_{w\hat{c}}(p) - \sum_{j=1}^m d_j R_{c\hat{c}}(p-j)$$

III) Résolution du système (3.56b).

Dans le cas où $p=q$, une résolution efficace est possible à l'aide de l'algorithme bicanal de Levinson (cf. Section 3.6 et Annexe D pour les détails).

Les paramètres ARMA trouvés sont notés: $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ et $\hat{\mathbf{b}}^{(1)}$.

IV) Test de la convergence:

- Si $\Lambda \leq \delta$ (Λ est donné par (3.54) et δ infiniment petit) ET si $\eta^{(i)}$ est réel positif ($< 10^{-5}$), alors $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ et $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}^{(i)}$. Fin de la procédure.
- Sinon; incrémentation de i d'une unité et réexécution des étapes II) à IV).

3.5.6 Effet d'un bruit blanc additif

Pour la modélisation ARMA(p,q) d'une suite complexe $x(t)$ affectée d'un bruit blanc additif (de mesure ou de fond) $n(t)$ centré de variance σ_n^2 , la suite observée s'écrit alors

$$x'(t) = x(t) + n(t)$$

L'effet de ce bruit sur la performance des méthodes moindres carrés décrites ci-dessus est montré dans ce qui suit.

a- Cas de la méthode TLS

L'erreur TLS est donnée par (3.38) comme étant: $\varepsilon'_{\text{TLS}}(t) = x'(t) - \hat{x}(t)$ de sorte que

$$\mathbb{E}[\varepsilon'_{\text{TLS}}(t)] \xrightarrow{\text{TZ}} \mathcal{E}'_{\text{TLS}}(z) = X'(z) - \hat{X}(z)$$

$$\text{avec } X'(z) = H(z)E(z) + N(z) \quad \text{et} \quad \hat{X}(z) = \hat{H}(z)E(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)}E(z) \quad (3.65a)$$

où $E(z)$ est la TZ du bruit blanc $e(t)$ centré et normalisé ($\sigma_e^2 = 1$) de l'excitation du processus et qui est non corrélé avec $n(t)$. Le critère à minimiser est alors:

$$\mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbb{E}[|\varepsilon'_{\text{TLS}}(t)|^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{E}'_{\text{TLS}}(e^{j\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta}) - \hat{H}(e^{j\theta})|^2 d\theta + \sigma_n^2 \quad (3.65b)$$

Ce qui implique que la puissance minimale de l'erreur de modélisation par la méthode TLS exacte de la suite bruitée ne peut être inférieure à la puissance du bruit additif; i.e.

$$\left(\mathcal{E}_{\text{TLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)_{\min} \geq \sigma_n^2 \quad (\text{borne de Cramer-Rao})$$

b- Cas de la méthode MLS

D'après (3.43), le critère MLS peut aussi s'écrire:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{MLS}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \mathbb{E}[|\hat{a}_t * \varepsilon'_{\text{TLS}}(t)|^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{A}(e^{j\theta})|^2 |\mathcal{E}'_{\text{TLS}}(e^{j\theta})|^2 d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta}) \hat{A}(e^{j\theta}) - \hat{B}(e^{j\theta})|^2 d\theta}_1 + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^2 |\hat{A}(e^{j\theta})|^2 d\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

La minimisation du terme 1 du critère correspond à la situation sans bruit additif. Le terme 2 ajoute une fonction pénalisante quant à la norme du dénominateur du modèle. Ce qui rend la solution $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ dépendante de la puissance du bruit.

Une solution à ce problème de biais est proposée par [REGALIA, 94], elle consiste à changer la contrainte $\hat{a}_0 = 1$ par $\|\hat{\mathbf{a}}\|_2 = \hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}} = 1$ tout en conservant les propriétés de la méthode MLS. Ainsi le terme 2 devient une constante ($=\sigma_n^2$) et la solution MLS ne varie plus en fonction de la variance du bruit.

c- Cas des techniques itératives TLS

Comme à l'itération i de la Technique I, le critère utilisé est le WMLS avec $W(z) = 1/\hat{A}^{(i-1)}(z)$, et d'après (3.66), dans le cas de bruit blanc additif, ce critère s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{Tech I}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|\hat{A}^{(i-1)}(e^{j\theta})|^2} |H(e^{j\theta}) \hat{A}^{(i)}(e^{j\theta}) - \hat{B}^{(i)}(e^{j\theta})|^2 d\theta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^2 \frac{|\hat{A}^{(i)}(e^{j\theta})|^2}{|\hat{A}^{(i-1)}(e^{j\theta})|^2} d\theta \end{aligned} \quad (3.67)$$

A la convergence lorsque $\hat{A}^{(i)}(z) \cong \hat{A}^{(i-1)}(z) \approx \hat{A}(z)$, et le critère minimum donné par:

$$(\mathcal{E}_{\text{Tech I}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H(e^{j\theta}) - \frac{\hat{B}(e^{j\theta})}{\hat{A}(e^{j\theta})} \right|^2 d\theta + \sigma_n^2$$

est toujours minoré par la variance σ_n^2 du bruit additif.

Quant à la Technique II, le critère à minimiser à l'itération i n'est pas quadratique (cf. (3.58)), il s'agit de minimiser l'intercorrélacion entre deux erreurs;

$$\mathcal{E}_{\text{Tech 2}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\hat{A}^{(i)}(e^{j\theta})|^2}{|\hat{A}^{(i-1)}(e^{j\theta})|^2} \mathcal{E}'_{\text{Tech 2}}(e^{j\theta}) \check{\mathcal{E}}_{\text{Tech 2}}^*(e^{-j\theta}) d\theta \quad (3.68a)$$

avec $\check{\mathcal{E}}_{\text{Tech 2}}(z) = \hat{X}^{(i-1)}(z) - \hat{X}^{(i)}(z)$ et $\mathcal{E}'_{\text{Tech 2}}(z) = X'(z) - \hat{X}^{(i)}(z)$ (cf. (3.65a))

En utilisant l'orthogonalité entre $\mathbf{n}(t)$ et $\mathbf{e}(t)$, ce même critère s'écrit:

$$\mathcal{E}_{\text{Tech 2}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\hat{A}^{(i)}(e^{j\theta})|^2}{|\hat{A}^{(i-1)}(e^{j\theta})|^2} (H(e^{j\theta}) - \hat{H}^{(i)}(e^{j\theta})) (\hat{H}^{(i-1)*}(e^{-j\theta}) - \hat{H}^{(i)*}(e^{-j\theta})) d\theta \quad (3.68b)$$

Ainsi, le critère non-quadratique de la Technique II ne tient pas compte de la présence du bruit additif $n(t)$ et par conséquent, sa valeur minimale n'en est pas affectée.

Donc en présence d'un bruit blanc additif et à la convergence, la Technique I tend à se comporter comme la méthode TLS, alors que le critère de la Technique II fait abstraction du bruit dès le départ.

3.5.7 Remarques

- Les techniques TLS fournissent une représentation correcte des données si le bruit additif est blanc [STOICA & SODERSTROM, 81].
- Si le bruit additif est corrélé et ses propriétés statistiques sont connues (surtout sa matrice de covariance), il est toujours possible de le blanchir tout en appliquant les techniques TLS [STEFANSKI & WEYGANDT, 71].
- Si le modèle initial est stable et si le rapport signal à bruit est assez important alors la convergence des Techniques I et II est assurée. Les modèles obtenus sont asymptotiquement stables [STOICA & SODERSTROM, 81].
- Lorsque les données consistent en des sinusoides noyées dans un bruit blanc les techniques I et II sont équivalentes [KAY, 84].

3.6 Algorithmes efficaces utilisés dans la procédure TLS

3.6.1 Algorithme de Jury (ou Levinson inverse)

Cet algorithme calcule la FAC d'un processus $AR(p)$ à partir de ses paramètres. Il exécute l'opération inverse de l'algorithme de Levinson. et, de même, permet de trouver les paramètres de tous les modèles $AR(n)$ ($n < p$). Cet algorithme est présenté dans [DEMEURE & MULLIS, 89] seulement pour des paramètres réels. Un développement explicite de cet algorithme avec une extension au cas complexe sont présentés à l'Annexe A.

3.6.2 Algorithme de Mullis-Roberts

En exploitant la structure proche de Toeplitz de la matrice du système (3.53), Mullis et Roberts ont proposé un algorithme efficace pour trouver la solution MLS [MULLIS & ROBERTS, 76]. Celui-ci, tel qu'il a été présenté, se limite au cas réel et traite seulement le cas des modèles $ARMA(n,n)$. C'est pourquoi, une généralisation de cet algorithme au cas complexe

avec un développement détaillé pour le cas des modèles ARMA(p,q) où $p \geq q$ sont présentés à l'Annexe B.

3.6.3 Algorithme de Demeure-Mullis

Cet algorithme résout efficacement les systèmes linéaires de la forme particulière dite de Sylvester modifiée et dont la diagonale principale est constituée de "1" (cf. (3.53), (3.61) et (3.64)). Etant donné que l'algorithme, tel qu'il est publié dans [DEMEURE & MULLIS, 89], comporte certaines erreurs qui ne facilitent pas la tâche de son utilisateur, une explicitation de toutes les étapes de l'algorithme ainsi que l'algorithme corrigé sont présentés dans l'Annexe C. Ces développements permettent de faciliter la compréhension de l'algorithme et de voir son applicabilité pour le cas complexe.

3.6.4 Algorithme bicanal de Levinson

Cet algorithme permet de résoudre efficacement les systèmes linéaires dont la matrice est constituée de quatre blocs carrés de la forme de Toeplitz [ROBINSON, 83; MULLIS, 85]. Celui-ci est étendu au cas des systèmes complexes et généralisé pour des blocs non hermitiens à l'Annexe D.

3.7 Conclusion

Une procédure complète et assez attrayante pour la modélisation ARMA des suites chronologiques complexes a été présentée ensuite détaillée dans ce chapitre, en proposant un ensemble de techniques alternatives pour chacune de ses étapes. Deux techniques itératives TLS pour la détermination des paramètres du modèle ont été largement explicitées, elles sont avantagées par l'introduction d'algorithmes efficaces et simples au niveau de leurs différentes étapes de calcul.

Pour mettre en évidence la qualité des estimations obtenues par cette procédure, des résultats de quelques exemples de simulation sont présentés et commentés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

APPLICATION DE LA PROCÉDURE TLS À DES EXEMPLES NUMÉRIQUES

4.1 Introduction

Ce présent chapitre est exclusivement consacré à l'application et à l'étude du comportement de la procédure générale TLS vis-à-vis de quelques processus stochastiques types. Ainsi, mis à part l'attrait de ses aspects théorique et algorithmique (cf. Chapitre 3), d'autres performances de cette procédure peuvent être révélées suivant la nature des processus.

L'intérêt de cette étude est particulièrement focalisé sur le cas de segments de suites chronologiques complexes de courtes longueurs (i.e., constitués d'au plus de 100 données). Il est évident que les résultats pour les autres cas de suites où les contraintes sont moins sévères (i.e., suites réelles et/ou de tailles modérées ou longues), peuvent être directement déduits et nettement meilleurs.

4.2 Exemples numériques

Pour tester la procédure TLS, des suites chronologiques complexes sont préalablement générées à partir de processus stochastiques types. Cinq exemples représentant la plupart des processus rencontrés en pratique sont utilisés dans cette étude et plusieurs réalisations de différentes suites chronologiques sont synthétisées avec adjonction d'un bruit blanc à différents rapports signal à bruit (RSB).

Les trois premiers exemples sont des processus du type ARMA. Les suites chronologiques $x(t)$ correspondantes sont générées en appliquant aux entrées de leurs modèles respectifs des suites chronologiques gaussiennes purement aléatoires (blanches) $e(t)$ de moyennes nulles et de variances unités ($\sigma_e^2=1$) (c.f. (2.22)). Les deux derniers exemples représentent des combinaisons de lignes (ou exponentielles) noyées dans des bruits blanc et coloré (du type ARMA). Ces cinq exemples sont les suivants:

Exemple 1 Processus ARMA(2,1) à larges bandes spectrales défini par:

Paramètres		Racines	
AR	MA	Pôles	Zéro
$a_0 = (1.0000, .0000)$	$b_0 = (1.0000, .0000)$	$\lambda_1 = 0.6 \text{ Exp}(-j 0.15 \pi)$	$\gamma_1 = 0.6 \text{ Exp}(j 0.15 \pi)$
$a_1 = (-0.7818, -.4884)$	$b_1 = (-0.5346, -.2724)$	$\lambda_2 = 0.8 \text{ Exp}(j 0.4 \pi)$	
$a_2 = (0.3394, 0.3394)$			

Exemple 2 Processus ARMA(3,3) à bandes étroites rapprochées défini par:

Paramètres		Racines	
AR	MA	Pôles	Zéros
$a_0 = (1.0000, .0000)$	$b_0 = (1.0000, .0000)$	$\lambda_1 = 0.95 \text{ Exp}(-j 0.15 \pi)$	$\gamma_1 = 0.95 \text{ Exp}(-j 0.1 \pi)$
$a_1 = (-2.4565, -.3891)$	$b_1 = (-2.0435, -1.0412)$	$\lambda_2 = 0.95 \text{ Exp}(j 0.25 \pi)$	$\gamma_2 = 0.95 \text{ Exp}(j 0.4 \pi)$
$a_2 = (2.2471, .7301)$	$b_2 = (1.2807, 1.7627)$	$\lambda_3 = .95 \text{ Exp}(j 0.05 \pi)$	$\gamma_3 = 0.95 \text{ Exp}(j 0.15 \pi)$
$a_3 = (-.7639, -.3892)$	$b_3 = (-.1341, -.8468)$		

Exemple 3 Processus ARMA(4,0) (ou AR(4)) défini par: ($b_0=1$)

Paramètres	Pôles
$a_0 = (1.0000, .0000)$	$\lambda_1 = 0.99 \text{ Exp}(j 0.2 \pi)$
$a_1 = (-2.5323, -1.3631)$	$\lambda_2 = 0.99 \text{ Exp}(j 0.25 \pi)$
$a_2 = (2.5653, 2.5653)$	$\lambda_3 = 0.99 \text{ Exp}(j 0.35 \pi)$
$a_3 = (-1.3359, -2.4819)$	$\lambda_4 = 0.99 \text{ Exp}(-j 0.3 \pi)$
$a_4 = (5.4 \text{ E-}016, .9606)$	

Exemple 4 Somme de trois exponentielles et d'un bruit blanc $b(t)$ donné par:

$$x(t) = e^{j0.2 \pi t} + e^{j0.25 \pi t} + 0.5 e^{-j0.3 \pi t} + b(t)$$

Exemple 5 Processus ARMA(2,1) de l'Exemple 1 additionné de deux exponentielles de fréquences angulaires $\omega_1 = -0.4\pi$ et $\omega_2 = 0.6\pi$ dont les rapports de leurs puissances respectives à celle du processus ARMA(2,1) sont de -6 dB et de -10 dB (i.e. 25% et 10%). Comme la puissance moyenne du processus ARMA(2,1) est estimée à 1.58 dB, les amplitudes de ces exponentielles sont respectivement 0.60 et 0.38.

4.3 Estimation de l'ordre du modèle

Comme il est primordial, dans la procédure TLS (cf. Chapitre 3), d'estimer les ordres m du modèle AR de référence et (p,q) du modèle ARMA adéquats avant d'entamer la procédure itérative, il est donc souhaitable d'utiliser des techniques directes, simples et convenant aux séquences courtes de données. Il est évident que, pour le cas du modèle de référence, les critères de la théorie des échantillons finis (i.e., FIC, WPC) semblent les plus indiqués (cf. Section 3.4.1).

Quant à l'estimation de l'ordre du modèle ARMA, les méthodes décrites dans le chapitre précédent, malgré leurs performances, ne sont pas adaptées aux exigences de la procédure TLS ni à la taille réduite des suites chronologiques. En effet, les méthodes basées sur la variance de l'erreur de prédiction nécessitent l'estimation préalable des paramètres pour évaluer cette variance et les méthodes basées sur les estimés de la FAC sont, pour la plupart, onéreuses (en calculs et/ou en mémoires) et deviennent défailtantes lorsqu'il s'agit de courtes séquences de données (cf. Section 3.4.2).

Pour résoudre ce problème, une technique simple et intéressante de sélection de l'ordre ARMA découlant des critères de la théorie des échantillons finis est proposée dans ce qui suit.

4.3.1 Nouvelle technique

Cette technique repose essentiellement sur le comportement des critères FIC (donnés par (3.21)) suivant la nature du processus source des données. Après avoir testé ces critères sur un grand nombre de processus et pour différentes longueurs des suites chronologiques, il est constaté qu'en plus de la sélection de l'ordre AR le plus convenable, ils sont en mesure d'indiquer si une partie MA ($q \neq 0$) est nécessaire pour une meilleure représentation des processus en utilisant uniquement les données disponibles.

En effet, d'une manière générale, lorsque c'est un modèle AR pur qui décrit le mieux un processus, les critères FIC décroissent de façon raide vers un minimum correspondant à l'ordre AR optimal m ($m=p$ et $q=0$). Si, par contre, un modèle ARMA(p,q) ($q \neq 0$) est plus adéquat, les critères FIC présentent une cassure (changement significatif de raideur), un palier ou un minimum local au niveau d'un certain ordre avant d'atteindre le minimum global (cf. Fig 4.1). D'après les tests (environ un millier), cet ordre correspond en fait à une estimation de l'ordre p de la partie AR du modèle alors que le minimum global indique l'ordre optimal du modèle AR

long équivalent. Il est donc possible d'estimer les ordres m et p à partir d'un même critère FIC (cf. Fig 4.1).

Ce resultat empirique peut être justifié par la conjecture suivante:

Etant donnés que (cf. Section 3.4.1.1):

** les critères FIC évoluent pratiquement dans le même sens que l'espérance statistique de la variance de l'erreur de prédiction V_{EP} .*

** $V_{EP}(I)$ ne décroît que lorsque le coefficient de réflexion estimé à l'ordre I est significatif, alors le changement notable de raideur des critères FIC constaté, pour les processus ARMA, à un certain ordre p avant d'atteindre le minimum absolu en m , peut être expliqué comme suit:*

A partir de l'ordre p , l'importance des coefficients de réflexion diminue mais n'est pas négligeable, leur signification diffère de celle des coefficients des ordres antérieurs. Il est donc très probable que l'ensemble de ces coefficients (des ordres $p+1$ à m) représente la contribution de la partie MA du processus.

Comme les variations intéressantes des critères FIC (i.e. minimums locaux, creux, paliers) ne sont pas toujours évidentes, une amélioration de la performance de ces derniers est obtenue en introduisant une simple modification dans leur formulation. Cette modification consiste à soustraire à chaque variation entre deux points du critère une quantité constante égale à la moyenne de toutes les variations de celui-ci. Cette moyenne n'est, en fait, que la pente de la droite joignant le premier et le dernier point du critère. De cette manière, les variations importantes dans le comportement général des critères (telles que les creux et les paliers) sont renforcées et les variations faibles sont atténuées. Ainsi, la détection des ordres m (minimum global) et p (creux ou palier) devient plus facile. Les critères FIC modifiés (notés FICM) obtenus sont donnés par:

$$FICM(\alpha, I) = FIC(\alpha, I) - \frac{I}{p_{\max} - 1} (FIC(\alpha, p_{\max}) - FIC(\alpha, 1)) - K$$

$$I = 1, 2, \dots, p_{\max}$$

où p_{\max} est la valeur de l'ordre maximal possible et K est une constante servant à avoir toutes les valeurs de $FICM(\alpha, I)$ positives avec la valeur minimale nulle; elle est donnée par:

$$K = \min_{1 \leq I \leq p_{\max}} \left\{ FIC(\alpha, I) - \frac{I}{p_{\max} - 1} (FIC(\alpha, p_{\max}) - FIC(\alpha, 1)) \right\}$$

❖ Estimation de l'ordre de la partie MA

Les ordres m et p étant estimés, l'ordre q peut être déterminé en utilisant la relation théorique qui existe entre les paramètres d'un modèle ARMA(p,q) et son modèle AR équivalent représenté par le modèle AR(m) de référence i.e.,

$$\frac{1}{D(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \xrightarrow{(TZ)^{-1}} \sum_{i=0}^q b_i d_{j-i} = \begin{cases} a_j & , 0 \leq j \leq p \\ 0 & , j > p \end{cases}$$

En effet, d'après le cas $j > p$ de cette relation, il est facile de constater que le rang (i.e., nombre de lignes et de colonnes linéairement indépendantes) de la matrice définie par:

$$\begin{pmatrix} d_{p+1} & d_p & d_{p-1} & \cdots & d_{p-q+1} \\ d_{p+2} & d_{p+1} & d_p & \cdots & d_{p-q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_m & d_{m-1} & d_{m-2} & \cdots & d_{m-q} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

est égal à l'ordre de la partie MA du modèle ARMA, c'est à dire q .

Pour déterminer q , il suffit donc de:

- 1) estimer les paramètres du modèle AR(m),
- 2) construire la matrice (4.1) en supposant un ordre maximal q_{\max} pour la partie MA du modèle ARMA,
- 3) déterminer le rang de la matrice ainsi construite en calculant ses valeurs singulières à l'aide de l'algorithme efficace SVD [GOLUB & KAHAN, 65; KLEMA & LAUB, 80; BALLANCE, 84].

Le nombre des valeurs singulières significatives est alors pris comme l'ordre q recherché.

Une autre manière de procéder pour l'estimation de q consiste à déceler la dépendance linéaire entre les colonnes de la matrice de (4.1) en appliquant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt [GOLUB et al, 83; CHAN & WOOD, 84; COULON, 86]. En orthonormalisant successivement $k=2,3,\dots,q_{\max}$ colonnes consécutives de cette matrice désignées à chaque fois par des vecteurs:

$$\mathbf{c}_j = \left(d_{p-k+j+1} \quad d_{p-k+j+2} \quad \cdots \quad d_{m-k+j} \right)^T \quad j = 1, 2, \dots, k$$

et en calculant les normes des vecteurs orthogonaux correspondants notés \mathbf{u}_j , $j=1,2,\dots,k$; l'ordre q correspondra alors à la première valeur de k pour laquelle la norme de \mathbf{u}_k devient négligeable par rapport aux normes des vecteurs précédents (i.e., \mathbf{u}_j tels que $j=1,2,\dots, k-1$).

4.3.2 Résultats

Pour illustrer la performance de la technique de sélection des ordres m , p et q décrite ci-dessus, les résultats de son application aux suites chronologiques des cinq exemples de simulation (cf. Section 4.2) obtenus sont représentés ci-après par les Tableaux 4.1 à 4.5 et les graphes de Fig 4.1.

Les critères $FICM(\alpha, L)$ ont été évalués en se basant sur la méthode de Burg pour tous les exemples et en utilisant au moins 10^3 réalisations pour chacune des longueurs de suites suivantes:

- ◆ $L=100$ (Nombre d'exécutions = 1000)
- ◆ $L=30$ (Nombre d'exécutions = 1140)
- ◆ $L=20$ (Nombre d'exécutions = 1160)

Seulement pour simplifier leurs appellations (cf. Section 3.4.1.1), ces critères ont été notés suivant les valeurs de α comme suit:

Critère 1	pour $\alpha=2$
Critère 2	pour $\alpha= \ln L$
Critère 3	pour $\alpha=2 \ln (\ln L)$
Critère 4	pour $\alpha=3$
Critère 5	pour $\alpha=4$

Des tests similaires ont été effectués sur ces mêmes observations noyées dans des bruits blancs additifs avec des rapports signal à bruit (RSB) de 20 dB et 3 dB pour chaque exemple.

Il va sans dire que, pour l'Exemple 4, le cas sans bruit additif (RSB= ∞ dB) soit omis, vu que les exponentielles pures sont déterministes et ne peuvent être sujettes à une modélisation ARMA.

L'ordre q de la partie MA est estimée en utilisant la méthode basée sur les valeurs singulières les plus significatives de la matrice (4.1). Dans ce présent travail, les valeurs les plus significatives sont définies comme étant les valeurs prépondérantes dont la somme des carrés représente 95% de la somme des carrés de toutes les valeurs singulières.

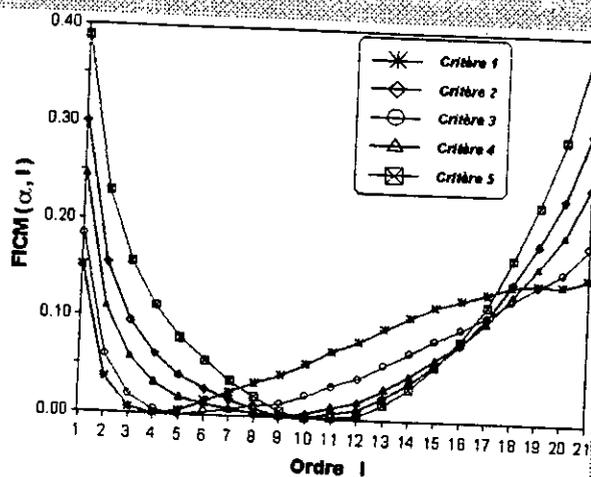
Comme certaines valeurs de α sont liées à la longueur L de la suite chronologique, les Critères 3 et 4 et les Critères 2 et 5 pour $L=100$ ainsi que les Critères 2 et 4 et les Critères 1 et 3 pour $L=20$ deviennent identiques (ou presque identiques).

De plus, il est aussi remarqué que les cinq critères sont fortement rapprochés (jusqu'à être confondus) pour les Exemples 2, 3 et 4 alors qu'une certaine dispersion est constatée pour les deux autres exemples (cf. Fig 4.1). Cette dispersion des critères est observée surtout dans le cas des processus ayant des pôles loin du cercle unité (i.e. bandes spectrales larges).

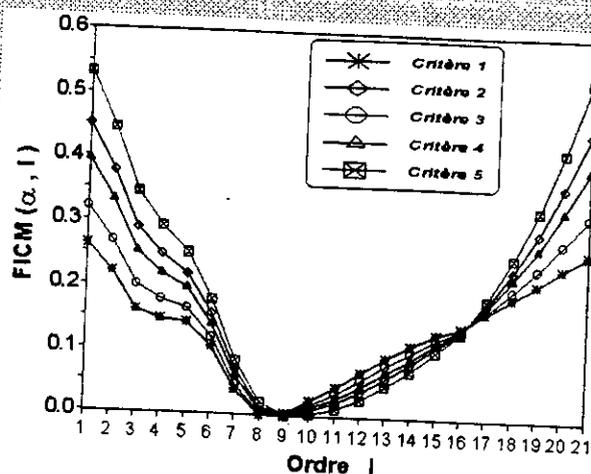
D'après les Tableaux 4.1 à 4.5, le Critère 1 (l'équivalent du AIC) sélectionne presque toujours un ordre m plus faible que ceux des autres critères, ce qui l'amène souvent au choix de modèles AR purs. Par contre, les Critères 2 et 5 ont tendance à sélectionner les ordres m les plus élevés. La valeur de l'ordre m sélectionné dans le cas $q \neq 0$ varie dans le même sens que L et dans le sens contraire du RSB alors que celle de p n'est pratiquement pas affectée par la valeur de L ni par le niveau du bruit additif.

Lorsque RSB diminue, les critères FICM tendent à sélectionner des modèles AR purs, si ce n'est pas des modèles ARMA avec des modèles AR longs d'ordres importants. Pour la plupart des exemples, les ordres m , p et q sélectionnés dans le cas d'un RSB = 20 dB sont exactement identiques à ceux sélectionnés dans le cas sans bruit. Ce qui amène à penser que, jusqu'à un certain RSB, les critères de sélection de l'ordre FICM restent insensibles à la présence d'un bruit blanc qui vient altérer les données.

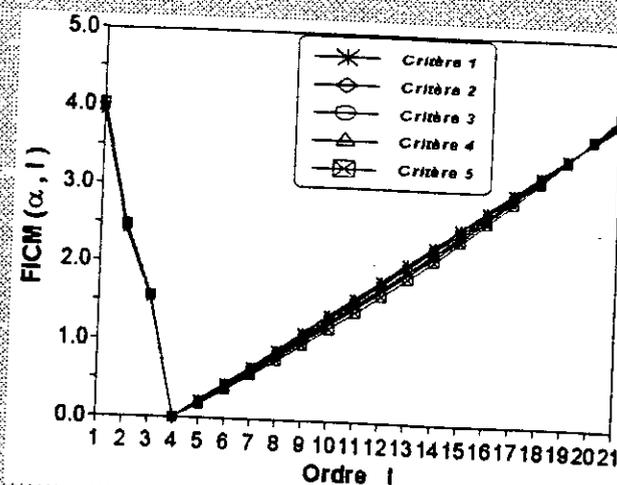
Pour $L=20$ et moins, tous les critères FICM préfèrent le choix de modèles AR purs plutôt que ARMA (l'ordre m étant très petit), et surtout si en plus, le RSB est faible (cf. Tableaux 4.1-5). En effet, l'addition d'un bruit à un processus ARMA doit théoriquement conduire à un processus d'ordre plus grand, mais les résultats de l'analyse de courtes séquences de données contredisent ce fait en sélectionnant toujours des modèles AR purs. La somme d'un processus ARMA et d'un bruit peut produire des pôles et des zéros dans la fonction de transfert du nouveau modèle qui peuvent presque s'annuler. Cette annulation conduit à la sélection d'un modèle d'ordre plus faible. De plus, l'adjonction d'un bruit additif à un processus aléatoire va rehausser le plancher de la courbe de la densité spectrale (voir les DSP exactes des processus bruités des Fig 4.2 à 4.11). Comme les racines MA contribuent dans les creux spectraux, la sélection de modèles AR purs par les critères FICM pour les données bruitées est donc valide.



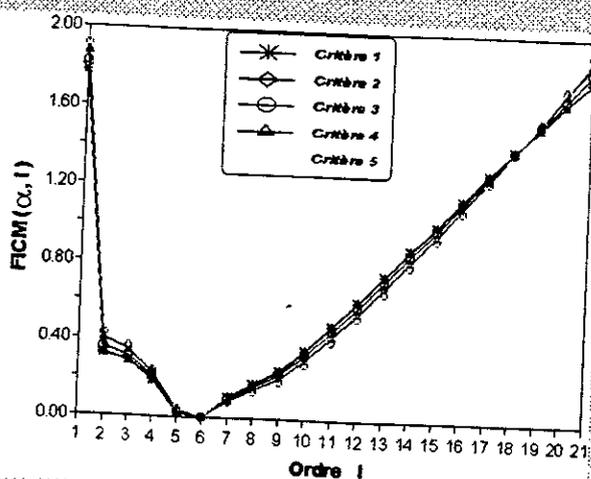
(a) Exemple 1



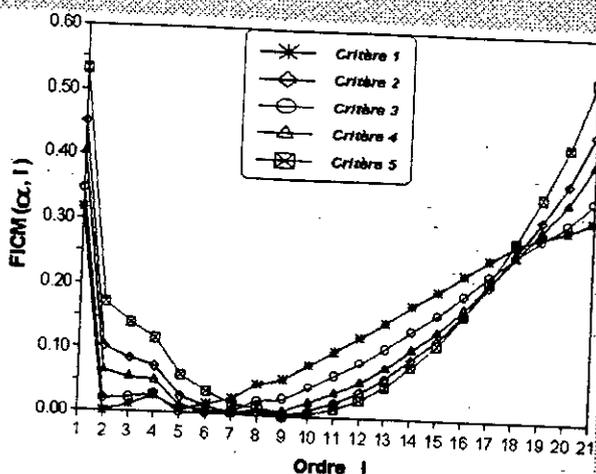
(b) Exemple 2



(c) Exemple 3



(d) Exemple 4 (RSB=20dB)



(e) Exemple 5

Fig 4.1 Critères FICM moyens pour L=30 (1140 exécutions)
 (Cas sans bruit additif sauf pour l'Exemple 4, RSB=20 dB)

Tableau 4.1 Résultats des critères FICM(α, l) pour l'Exemple 1

RSB(α)	α			20			3					
	100	30	20	100	30	20	100	30	20			
L	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Ordres	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Critère												
1	4	4	0	3	3	0	3	3	0	4	4	0
2	17	4	3	7	7	0	4	4	0	17	4	3
3	9	4	3	3	3	0	3	3	0	9	4	3
4	9	4	3	5	5	0	4	4	0	9	4	3
5	17	4	3	8	8	0	5	5	0	17	4	3

Tableau 4.2 Résultats des critères FICM(α, l) pour l'Exemple 2

RSB(α)	α			20			3					
	100	30	20	100	30	20	100	30	20			
L	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Ordres	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Critère												
1	9	3	2	8	3	2	8	3	2	9	3	2
2	16	3	3	9	3	2	8	3	2	16	3	3
3	9	3	2	8	3	2	8	3	2	9	3	2
4	9	3	2	9	3	2	8	3	2	9	3	2
5	16	3	3	9	3	2	7	3	2	16	3	3

Tableau 4.3 Résultats des critères FICM(α, l) pour l'Exemple 3

RSB(α)	α			20			3					
	100	30	20	100	30	20	100	30	20			
L	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Ordres	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Critère												
1	4	4	0	4	4	0	4	4	0	14	6	2
2	4	4	0	4	4	0	4	4	0	14	6	2
3	4	4	0	4	4	0	4	4	0	14	6	2
4	4	4	0	4	4	0	4	4	0	14	6	2
5	4	4	0	4	4	0	4	4	0	14	6	2

Tableau 4.4 Résultats des critères FICM(α, l) pour l'Exemple 4

RSB(α)	20						3											
	100			30			20			100			30			20		
L	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Ordres																		
Critère																		
1	10	3	3	6	3	3	2	2	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0
2	10	3	3	6	3	3	2	2	0	20	4	3	8	4	3	4	4	0
3	10	3	3	6	3	3	2	2	0	18	4	4	4	4	0	4	4	0
4	10	3	3	6	3	3	2	2	0	18	4	4	4	4	0	4	4	0
5	10	3	3	6	3	3	5	2	1	20	4	3	10	4	3	4	4	0

Tableau 4.5 Résultats des critères FICM(α, l) pour l'Exemple 5

RSB(α)	∞						20						3																	
	100			30			20			100			30			20			100			30			20					
L	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q	m	p	q
Ordres																														
Critère																														
1	7	3	3	2	2	0	2	2	0	7	3	3	2	2	0	2	2	0	8	3	3	2	2	0	2	2	0			
2	11	3	3	7	3	3	2	2	0	11	3	3	7	3	3	2	2	0	18	3	1	8	2	2	3	3	0			
3	9	3	3	5	2	1	2	2	0	9	3	3	5	2	1	2	2	0	13	3	1	8	2	2	2	2	0			
4	9	3	3	7	3	3	2	2	0	9	3	3	7	3	3	2	2	0	13	3	1	8	2	2	3	3	0			
5	11	3	3	9	3	3	5	3	2	11	3	3	9	3	3	5	3	2	18	3	1	10	2	2	5	2	1			

Pour le processus à larges bandes spectrales de l'Exemple 1, des modèles ARMA sont obtenus pour $L=100$ avec des ordres qui surestiment l'ordre exact alors que pour les autres cas des modèles AR sont choisis avec des nombres de pôles toujours supérieurs à celui des pôles exacts. Ce ci peut s'expliquer par le fait que le zéro d'un tel processus se trouve assez éloigné du cercle unité de sorte qu'un modèle AR suffit pour le décrire.

Pour le processus ARMA à bandes spectrales étroites et rapprochées de l'Exemple 2, l'ordre exact est pratiquement retrouvé pour des RSB assez élevés; l'ordre q exact étant retrouvé seulement pour $L=100$. Pour $RSB=3$ dB, la perte de l'information s'est traduite par des sous-estimations de l'ordre processus.

Pour l'*Exemple 3* représentant un modèle AR pur ayant des pôles très rapprochés et se trouvant à proximité du cercle unité, le modèle exact est retrouvé en l'absence du bruit. Il est aussi retrouvé mais quelquefois avec une surestimation pour des RSB faibles et des L réduits. Pour des L importants, la présence du bruit induit le choix de modèles ARMA, (ce-ci est en accord avec le modèle théorique d'un processus AR additionné d'un bruit blanc), mais avec $p \neq q$.

Pour le cas des exponentielles noyées dans un bruit blanc de l'*Exemple 4* ou dans un bruit coloré de l'*Exemple 5*, des modèles ARMA dont les ordres p et q sont supérieurs ou égaux au nombre de lignes spectrales, sont toujours sélectionnés par les critères FICM pour des L élevés. Lorsque L est réduit la perte en résolution spectrale se traduit par la sélection de modèles dont le nombre de pôles est inférieurs au nombre de lignes spectrales.

Comme quelques modèles AR purs ont été sélectionnés par les critères FICM pour les cinq exemples, leurs DSP correspondantes peuvent être estimées directement en utilisant la méthode de Burg. Les graphes des Fig 4.2 à 4.6 représentent les DSP moyennes de ces modèles AR obtenues à partir de plus d'un millier de segments de données de plusieurs réalisations correspondant à chacun des processus (le nombre exact de ces segments est donné au début de cette section suivant la valeur de L). Les DSP exactes des différents exemples et pour les différents rapports signal à bruit sont représentées sur les mêmes graphes que les DSP estimées (donc à la même échelle), afin d'illustrer la capacité de ces modèles de décrire des processus entiers rien qu'en prélevant de courts échantillons.

Quant aux modèles ARMA(p,q) ($q \neq 0$) sélectionnés, leurs performances dans la représentation des processus seront illustrées après que leurs paramètres auront été déterminés en continuant la procédure générale TLS dans la section qui suit.

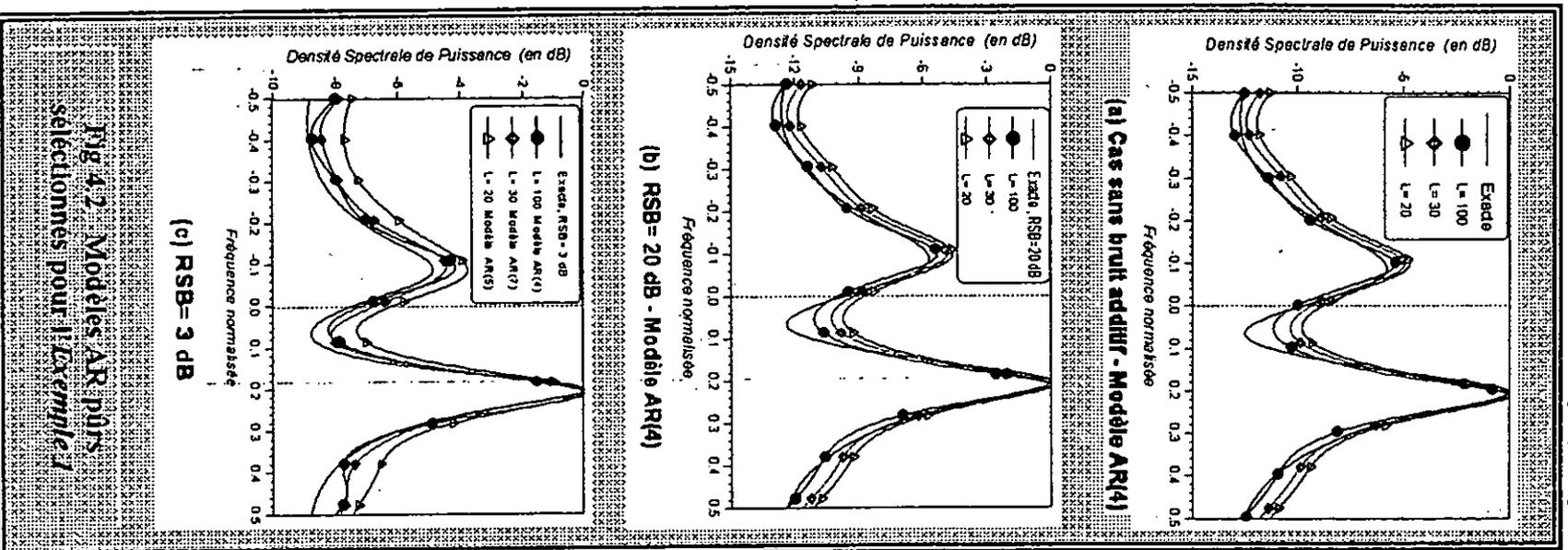


Fig 4.2 Modèles AR purs sélectionnés pour l'Exemple 1

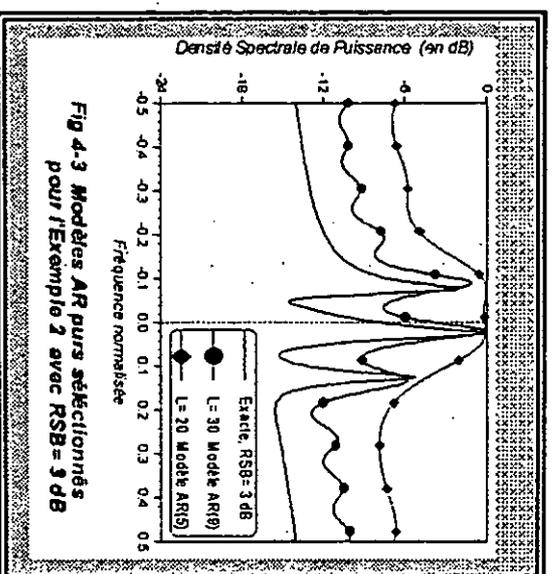


Fig 4-3 Modèles AR purs sélectionnés pour l'Exemple 1 avec RSB= 3 dB

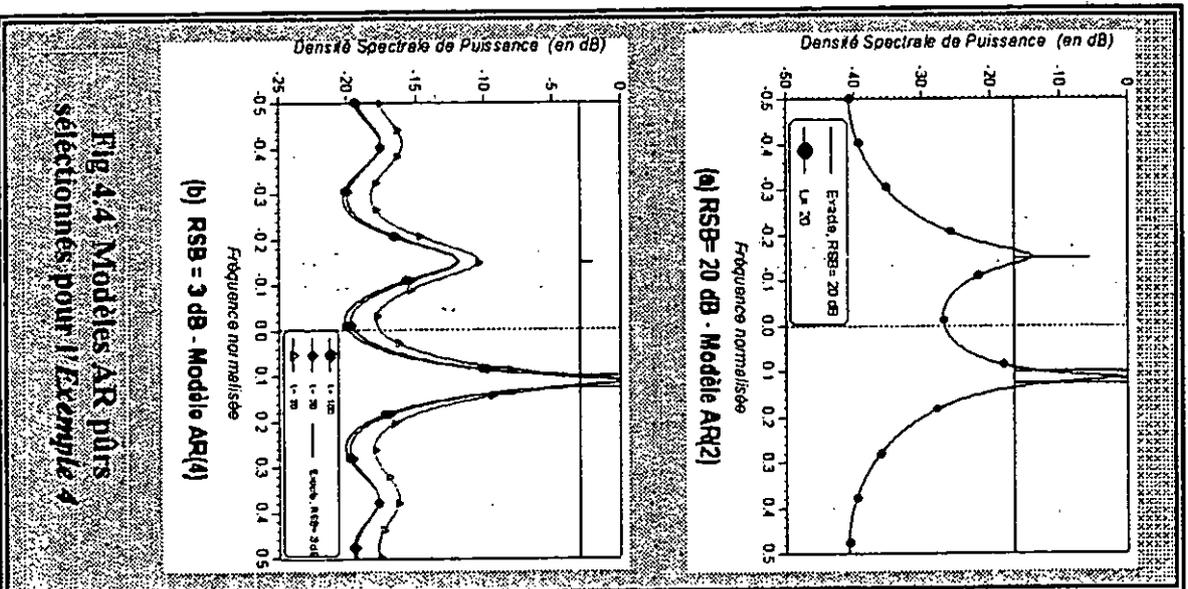
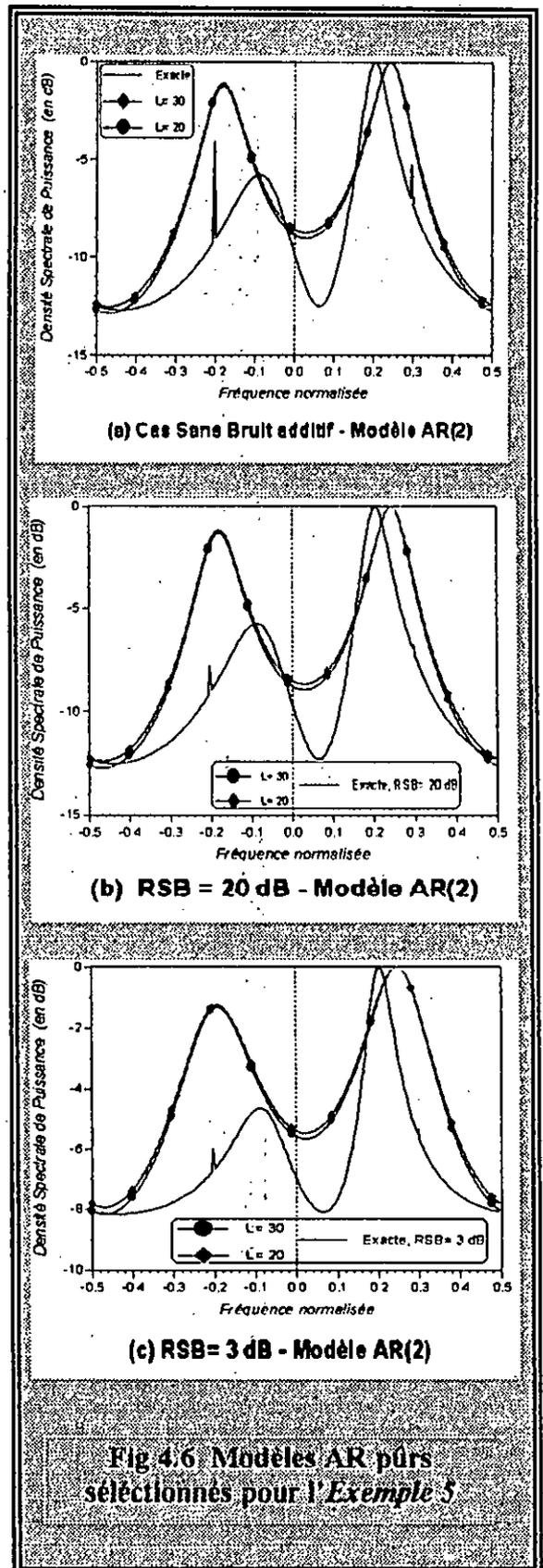
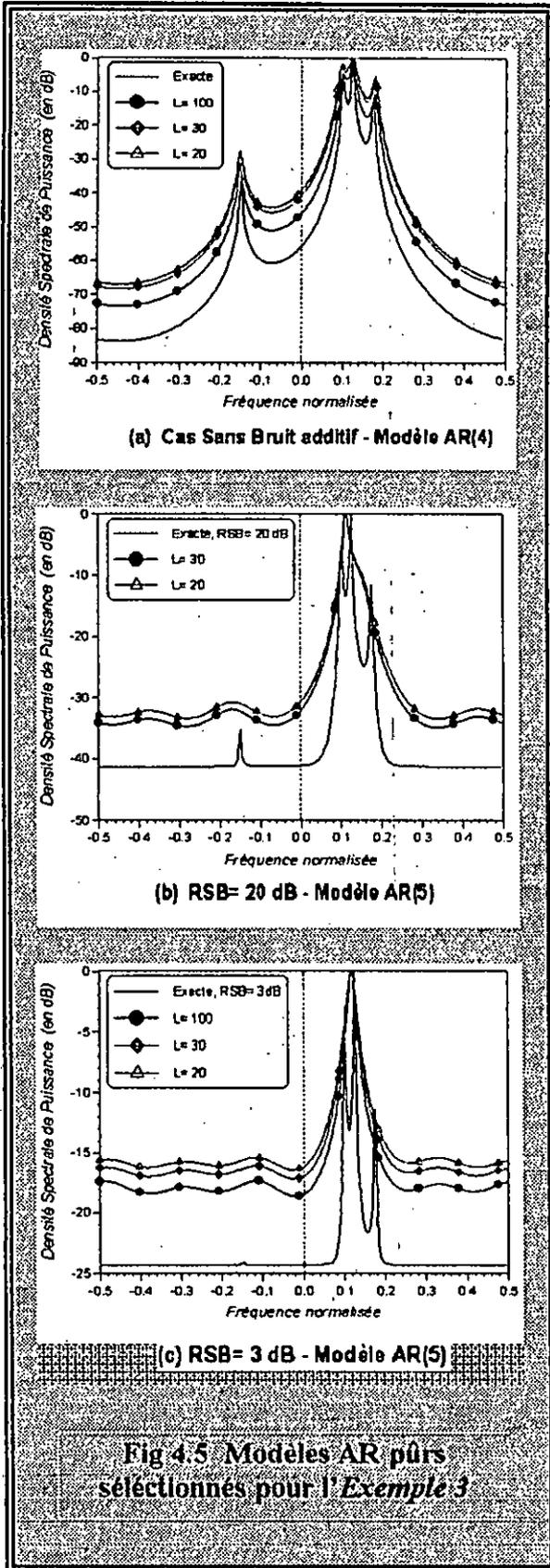


Fig 4.4 Modèles AR purs sélectionnés pour l'Exemple 1



4.4 Application des techniques TLS

Après avoir exécuté la première étape de la procédure générale TLS et estimé les ordres m des modèles AR de référence et (p,q) des modèles ARMA correspondant à chacun des processus des *Exemples 1 à 5* et pour différents RSB et L, les étapes suivantes de la procédure sont alors réalisées. Donc, pour chaque exemple et pour chaque cas de RSB et de L:

- ☞ Les paramètres du modèle AR(m) sont d'abord estimés en utilisant la méthode de Burg et les séquences de la FAC et de la réponse impulsionnelle sont alors générées (cf. Sections 3.3 et 4.3).
- ☞ L'estimation du modèle ARMA(p,q) initial est ensuite effectuée en utilisant la méthode MLS (cf. Section 3.6.3).
- ☞ Une des deux techniques itératives TLS décrites dans la Section 3.6.5 (i.e. Technique I ou II) est enfin appliquée aux données et les paramètres du modèle ARMA sélectionné sont estimés. Lorsque la Technique II est appliquée à la suite de la Technique I, elle est notée Technique II*.

Dans cette étude, les itérations des Techniques I et II sont arrêtées lorsque la valeur du critère de convergence Λ devient inférieure à 10^{-3} . Pour la Technique II, il faut qu'en plus la valeur du critère minimisé η de la méthode à l'itération finale devienne réelle positive et inférieure à 10^{-5} (cf. Section 3.6.5).

Les Tableaux 4.6 à 4.10 résument les résultats obtenus par la procédure TLS en utilisant 100 réalisations de chaque cas (de RSB et de L) des cinq exemples. Ces tableaux indiquent pour chaque méthode;

- les nombres de modèles stables et de modèles à phase minimale obtenus sur les cent estimés ainsi que le nombre moyen des itérations correspondant,
- les valeurs moyennes de η et Λ ,
- et enfin, les pôles et les zéros moyens.

Les DSP moyennes obtenues par chaque technique et pour chacun des modèles sont représentées par les graphes de Fig 4.7 à 4.11.

Tableau 4.6 Résultats des techniques TLS sur les modèles ARMA sélectionnés pour l'Exemple 1
 (en se basant sur 100 réalisations pour chaque cas, les valeurs ci-après sont des moyennes, sauf celles des deux premières lignes)

L	100											
RSB (dB)	∞				20				3			
Modèle	ARMA(4,3) (Mod. Ref. AR(9))				ARMA(4,3) (Mod. Ref. AR(9))				ARMA(4,1) (Mod. Ref. AR(18))			
Méthode	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*
# Modèles Stables	100	100	33	97	100	100	30	96	100	100	47	100
# Modèles à phase min.	100	100	33	97	100	100	30	96	100	100	47	100
# itérations	-	14	17	15	-	14	15	14	-	13	14	10
η (Critère Min.)	3.41155E-002	2.32986E-002	(E-14,5E-15)	(9E-14,7E-14)	3.48581E-002	2.32081E-002	(8E-15,5E-16)	(9E-14,-E-14)	0.2402698	0.1564729	(4E-14,3E-14)	(2E-13,2E-14)
A (Converg.)	-	7.51121E-004	5.18308E-004	6.71533E-004	-	7.51165E-004	5.67199E-004	1.36449E-003	-	7.14831E-004	4.47689E-004	4.76908E-004
Pôles	.81 EXP(j .41 π)	.40 EXP(-j .44 π)	.38 EXP(-j .31 π)	.37 EXP(-j .47 π)	.81 EXP(j .41 π)	.39 EXP(-j .41 π)	.35 EXP(-j .27 π)	.39 EXP(-j .43 π)	.45 EXP(-j .09 π)	.42 EXP(j .41 π)	.30 EXP(-j .22 π)	.41 EXP(j .42 π)
	.44 EXP(-j .14 π)	.43 EXP(-j .42 π)	.60 EXP(-j .49 π)	.39 EXP(-j .40 π)	.45 EXP(-j .12 π)	.46 EXP(-j .39 π)	.53 EXP(j .49 π)	.48 EXP(-j .36 π)	.39 EXP(j .41 π)	.40 EXP(j .12 π)	.31 EXP(j .25 π)	.40 EXP(j .14 π)
	.50 EXP(j .46 π)	.61 EXP(-j .15 π)	.68 EXP(-j .15 π)	.59 EXP(-j .14 π)	.49 EXP(j .46 π)	.60 EXP(-j .14 π)	.63 EXP(-j .13 π)	.59 EXP(-j .12 π)	.62 EXP(-j .17 π)	.61 EXP(-j .22 π)	.60 EXP(-j .18 π)	.59 EXP(-j .21 π)
	.62 EXP(-j .16 π)	.81 EXP(j .41 π)	.83 EXP(j .41 π)	.81 EXP(j .41 π)	.61 EXP(-j .15 π)	.81 EXP(j .41 π)	.81 EXP(-j .42 π)	.81 EXP(j .41 π)	.77 EXP(j .42 π)	.76 EXP(j .41 π)	.81 EXP(j .42 π)	.76 EXP(j .41 π)
Zéros	.53 EXP(j .15 π)	.45 EXP(-j .48 π)	.34 EXP(-j .44 π)	.44 EXP(-j .49 π)	.54 EXP(j .15 π)	.47 EXP(-j .46 π)	.54 EXP(j .13 π)	.48 EXP(-j .47 π)	.04 EXP(j .30 π)	.51 EXP(j .33 π)	.32 EXP(j .38 π)	.52 EXP(j .33 π)
	.39 EXP(-j .17 π)	.39 EXP(-j .43 π)	.46 EXP(-j .12 π)	.36 EXP(-j .43 π)	.39 EXP(-j .16 π)	.41 EXP(-j .42 π)	.38 EXP(-j .36 π)	.41 EXP(-j .38 π)				
	.48 EXP(j .45 π)	.53 EXP(j .13 π)	.52 EXP(-j .47 π)	.56 EXP(j .13 π)	.46 EXP(j .44 π)	.56 EXP(-j .12 π)	.49 EXP(-j .48 π)	.58 EXP(j .12 π)				

Tableau 4.7 Résultats des techniques TLS sur les modèles ARMA sélectionnés pour l'Exemple 2
(en se basant sur 100 réalisations pour chaque cas, les valeurs ci-après sont des moyennes, sauf celles des deux premières lignes)

RSB (dB)	L	100				30				20				
		Modèle	ARMA(3,3) (Mod. Ref. AR(16))				ARMA(3,2) (Mod. Ref. AR(9))				ARMA(3,2) (Mod. Ref. AR(8))			
		Méthode	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*
60		# Modèles Stables	100	100	4	100	100	100	19	100	100	100	29	100
		# Modèles à phase min.	99	94	3	89	98	56	19	60	99	78	27	78
		# itérations	-	7	10	4	-	10	15	6	-	10	17	7
		η (Critère Min.)	0.3560581	0.3007921	(4E-11,4E-11)	(2.3E-9,2E-9)	0.42936936	0.44321079	(E-11,-1E-11)	(E-10,3E-11)	0.481804	0.4807113	(2E-11,4E-12)	(E-10,-5E-12)
		Λ (Converg.)	-	4.953E-004	2.5138E-004	3.6324E-004	-	5.9482E-004	4.0203E-004	4.49527E-004	-	6.01127E-004	5.78292E-004	6.25842E-004
		Pôles	.40 EXP(j .23 π) .77 EXP(j .14 π) .75 EXP(j .13 π)	.88 EXP(j .22 π) .95 EXP(j .05 π) .96 EXP(j .16 π)	.94 EXP(j .25 π) .82 EXP(j .03 π) .77 EXP(j .24 π)	.88 EXP(j .22 π) .95 EXP(j .05 π) .96 EXP(j .16 π)	.35 EXP(j .10 π) .68 EXP(j .20 π) .76 EXP(j .13 π)	.44 EXP(j .02 π) .85 EXP(j .19 π) .86 EXP(j .08 π)	.92 EXP(j .11 π) .81 EXP(j .21 π) .39 EXP(j .27 π)	.44 EXP(j .00 π) .83 EXP(j .19 π) .87 EXP(j .08 π)	.74 EXP(j .12 π) .40 EXP(j .09 π) .64 EXP(j .23 π)	.29 EXP(j .33 π) .82 EXP(j .20 π) .90 EXP(j .11 π)	.39 EXP(j .07 π) .82 EXP(j .10 π) .83 EXP(j .23 π)	.28 EXP(j .31 π) .83 EXP(j .20 π) .90 EXP(j .11 π)
		Zéros	.81 EXP(j .42 π) .44 EXP(j .28 π) .70 EXP(j .02 π)	.81 EXP(j .35 π) .91 EXP(j .13 π) .88 EXP(j .12 π)	.96 EXP(j .36 π) .71 EXP(j .07 π) .60 EXP(j .23 π)	.82 EXP(j .35 π) .91 EXP(j .13 π) .88 EXP(j .12 π)	.20 EXP(j .20 π) .54 EXP(j .35 π)	.67 EXP(j .06 π) .62 EXP(j .14 π)	.32 EXP(j .37 π) .69 EXP(j .16 π)	.64 EXP(j .05 π) .62 EXP(j .12 π)	.22 EXP(j .37 π) .50 EXP(j .39 π)	.48 EXP(j .19 π) .57 EXP(j .12 π)	.41 EXP(j .34 π) .45 EXP(j .25 π)	.49 EXP(j .19 π) .58 EXP(j .13 π)
	20		# Modèles Stables	100	100	7	100	100	100	23	100	100	100	29
		# Modèles à phase min.	100	98	7	98	100	63	23	63	98	85	29	85
		# itérations	-	7	22	4	-	10	13	7	-	11	18	7
		η (Critère Min.)	0.3581984	0.2534218	(3E-11,9E-12)	(5E-10,-E-11)	0.42885164	0.39745129	(7E-12,1E-12)	(2E-10,-E-12)	0.47550720	0.42266634	(7E-12,-E-12)	(2E-10,2E-11)
		Λ (Converg.)	-	4.99634E-004	2.70168E-002	3.40132E-004	-	6.40640E-004	5.03985E-004	1.49062E-003	-	6.01969E-004	5.09627E-004	4.92634E-004
		Pôles	.39 EXP(j .21 π) .77 EXP(j .14 π) .74 EXP(j .13 π)	.87 EXP(j .22 π) .95 EXP(j .05 π) .96 EXP(j .17 π)	.72 EXP(j .27 π) .82 EXP(j .21 π) .98 EXP(j .06 π)	.87 EXP(j .22 π) .95 EXP(j .05 π) .96 EXP(j .17 π)	.36 EXP(j .08 π) .67 EXP(j .20 π) .76 EXP(j .12 π)	.41 EXP(j .00 π) .85 EXP(j .08 π) .86 EXP(j .19 π)	.36 EXP(j .14 π) .77 EXP(j .22 π) .87 EXP(j .12 π)	.41 EXP(j .01 π) .86 EXP(j .08 π) .94 EXP(j .19 π)	.74 EXP(j .11 π) .41 EXP(j .09 π) .62 EXP(j .23 π)	.29 EXP(j .36 π) .79 EXP(j .18 π) .85 EXP(j .05 π)	.31 EXP(j .28 π) .71 EXP(j .20 π) .84 EXP(j .13 π)	.28 EXP(j .35 π) .81 EXP(j .19 π) .87 EXP(j .09 π)
		Zéros	.73 EXP(j .41 π) .43 EXP(j .26 π) .69 EXP(j .02 π)	.76 EXP(j .34 π) .90 EXP(j .13 π) .88 EXP(j .12 π)	.60 EXP(j .17 π) .83 EXP(j .39 π) .87 EXP(j .10 π)	.77 EXP(j .34 π) .90 EXP(j .13 π) .88 EXP(j .12 π)	.16 EXP(j .16 π) .47 EXP(j .32 π)	.61 EXP(j .13 π) .66 EXP(j .08 π)	.27 EXP(j .35 π) .61 EXP(j .21 π)	.61 EXP(j .13 π) .65 EXP(j .07 π)	.19 EXP(j .42 π) .42 EXP(j .36 π)	.48 EXP(j .08 π) .46 EXP(j .13 π)	.29 EXP(j .20 π) .46 EXP(j .24 π)	.46 EXP(j .16 π) .51 EXP(j .06 π)
3			# Modèles Stables	100	100	12	100	100	100	36	100	100	100	36
		# Modèles à phase min.	100	100	12	100	100	100	36	100	100	100	36	98
		# itérations	-	8	17	5	-	11	11	8	-	11	11	8
		η (Critère Min.)	0.935952	0.2519713	(4E-12,8E-12)	(8E-12,4E-12)	1.05700345	0.41880556	(3E-13,2E-13)	(3E-12,-E-13)	-	-	-	-
		Λ (Converg.)	-	5.11739E-004	5.76667E-004	3.93994E-004	-	7.04773E-004	4.84864E-004	4.62308E-004	-	-	-	-
		Pôles	.07 EXP(j .33 π) .66 EXP(j .01 π)	.94 EXP(j .06 π) .90 EXP(j .14 π)	.47 EXP(j .13 π) .92 EXP(j .07 π)	.94 EXP(j .06 π) .89 EXP(j .14 π)	.14 EXP(j .18 π) .61 EXP(j .02 π)	.58 EXP(j .19 π) .90 EXP(j .03 π)	.07 EXP(j .05 π) .62 EXP(j .07 π)	.53 EXP(j .20 π) .80 EXP(j .02 π)	-	-	-	-
		Zéros	.03 EXP(j .25 π) .27 EXP(j .09 π)	.77 EXP(j .08 π) .78 EXP(j .11 π)	.32 EXP(j .07 π) .73 EXP(j .08 π)	.77 EXP(j .08 π) .79 EXP(j .11 π)	.17 EXP(j .04 π)	.72 EXP(j .03 π)	.34 EXP(j .04 π)	.72 EXP(j .04 π)	-	-	-	-

Tableau 4.8 Résultats des techniques TLS sur les modèles ARMA sélectionnés pour l'Exemple 3
(en se basant sur 100 réalisations pour chaque cas, les valeurs ci-après sont des moyennes, sauf celles des deux premières lignes)

RSB (dB)	20								3			
L	100				30				100			
Modèle	ARMA(6,2) (Mod. Ref. AR(14))				ARMA(5,2) (Mod. Ref. AR(11))				ARMA(6,2) (Mod. Ref. AR(19))			
Méthode	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*
# Modèles Stables	100	100	41	100	100	100	29	97	100	100	21	97
# Modèles à phase min.	100	100	41	100	100	98	29	97	100	90	21	94
# itérations	-	10	15	12	-	14	17	16	-	16	20	14
η (Critère Min.)	108.90047	6.73228E-002	(3E-7, 4E-7)	(2E-7, E-7)	242.61994	0.1788984	(6E-07, 3E-07)	(2E-6, E-5)	1236.7990	0.1483478	(E-9, 2E-9)	(6E-9, 3E-9)
A (Converg.)	-	7.01442E-004	5.18572E-004	1.74268E-003	-	9.64932E-004	4.95965E-004	5.30558E-004	-	7.74774E-004	6.15612E-004	9.99259E-004
Pôles	.48 EXP(j .38 π)	.83 EXP(j .35 π)	.92 EXP(j .37 π)	.83 EXP(j .35 π)	.70 EXP(j .31 π)	.65 EXP(j .19 π)	.35 EXP(j .25 π)	.61 EXP(j .19 π)	.50 EXP(-j .45 π)	.34 EXP(-j .45 π)	.49 EXP(j .40 π)	.34 EXP(-j .49 π)
	.54 EXP(-j .10 π)	.56 EXP(-j .19 π)	.57 EXP(-j .17 π)	.56 EXP(-j .19 π)	.45 EXP(-j .18 π)	.52 EXP(j .05 π)	.44 EXP(j .03 π)	.52 EXP(j .02 π)	.49 EXP(-j .12 π)	.37 EXP(-j .12 π)	.42 EXP(-j .23 π)	.42 EXP(-j .13 π)
	.58 EXP(j .28 π)	.55 EXP(j .24 π)	.59 EXP(j .22 π)	.54 EXP(j .23 π)	.51 EXP(j .25 π)	.59 EXP(-j .39 π)	.49 EXP(-j .40 π)	.55 EXP(-j .41 π)	.52 EXP(j .17 π)	.36 EXP(j .29 π)	.54 EXP(j .18 π)	.40 EXP(j .30 π)
	.66 EXP(-j .33 π)	.68 EXP(-j .30 π)	.75 EXP(-j .30 π)	.67 EXP(-j .30 π)	.61 EXP(-j .34 π)	.74 EXP(j .38 π)	.77 EXP(j .32 π)	.74 EXP(j .36 π)	.58 EXP(-j .14 π)	.51 EXP(-j .26 π)	.45 EXP(-j .10 π)	.52 EXP(-j .25 π)
	.66 EXP(j .25 π)	.90 EXP(j .20 π)	.97 EXP(j .25 π)	.90 EXP(j .20 π)	.96 EXP(j .23 π)	.97 EXP(j .24 π)	.97 EXP(j .24 π)	.97 EXP(j .24 π)	.95 EXP(j .23 π)	.83 EXP(j .23 π)	.53 EXP(-j .36 π)	.82 EXP(j .24 π)
.95 EXP(j .24 π)	.95 EXP(j .25 π)	.98 EXP(j .20 π)	.95 EXP(j .25 π)					.53 EXP(-j .48 π)	.95 EXP(j .23 π)	.97 EXP(j .24 π)	.96 EXP(j .23 π)	
Zéros	.16 EXP(j .10 π)	.60 EXP(j .29 π)	.52 EXP(j .39 π)	.60 EXP(j .22 π)	.35 EXP(j .31 π)	.24 EXP(j .18 π)	.16 EXP(j .31 π)	.23 EXP(j .21 π)	.38 EXP(j .20 π)	.35 EXP(j .27 π)	.22 EXP(-j .26 π)	.36 EXP(j .26 π)
	.45 EXP(j .16 π)	.61 EXP(j .23 π)	.62 EXP(j .19 π)	.62 EXP(j .29 π)	.24 EXP(j .39 π)	.67 EXP(j .26 π)	.67 EXP(j .24 π)	.68 EXP(j .26 π)	.20 EXP(j .15 π)	.86 EXP(j .22 π)	.64 EXP(j .28 π)	.86 EXP(j .22 π)

Tableau 4.9 Résultats des techniques TLS sur les modèles ARMA sélectionnés pour l'Exemple 4
(en se basant sur 100 réalisations pour chaque cas, les valeurs ci-après sont des moyennes, sauf celles des deux premières lignes)

RSB (dB)	L	100				30				20			
		ARMA(3,3) (Mod. Ref. AR(10))				ARMA(3,3) (Mod. Ref. AR(6))				ARMA(2,1) (Mod. Ref. AR(5))			
	Modèle	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*
20	# Modèles Stables	100	100	65	100	100	100	95	100	100	100	41	100
	# Modèles à phase min.	98	100	65	100	92	100	95	100	98	100	41	100
	# itérations	-	2	3	3	-	2	4	1	-	3	5	4
	η (Critère Min.)	1.65107E-002	7.23179E-002	(1E-06, 1E-07)	(2E-06, 3E-08)	1.97973E-002	6.53197E-002	(6E-9, 4E-9)	(7E-09, 3E-11)	3.53983E-002	6.975885	(1E-10, E-10)	(4E-10, E-10)
	A (Converg.)	-	9.10591E-005	7.90125E-005	8.39521E-007	-	2.58006E-004	1.47187E-004	1.33837E-005	-	5.43090E-004	2.72522E-004	3.98670E-004
	Pôles	.68 EXP(j .28 π)	1.00EXP(j .25 π)	.99 EXP(j .25 π)	1.00EXP(j .25 π)	.40 EXP(j .37 π)	.97 EXP(j .25 π)	.97 EXP(j .25 π)	.97 EXP(j .25 π)	.99 EXP(j .23 π)	.97 EXP(j .23 π)	.97 EXP(j .23 π)	.97 EXP(j .23 π)
		.98 EXP(j .22 π)	1.00EXP(j .20 π)	.99 EXP(j .20 π)	1.00EXP(j .20 π)	.98 EXP(j .22 π)	.97 EXP(j .20 π)	.97 EXP(j .20 π)	.97 EXP(j .20 π)	.96 EXP(j .31 π)	.99 EXP(j .31 π)	.99 EXP(j .31 π)	.99 EXP(j .31 π)
		.99 EXP(j .30 π)	1.00EXP(j .30 π)	1.00EXP(j .30 π)	1.00EXP(j .30 π)	.98 EXP(j .30 π)	1.00EXP(j .30 π)	1.00EXP(j .30 π)	1.00EXP(j .30 π)				
Zéros	.68 EXP(j .07 π)	.78 EXP(j .30 π)	.78 EXP(j .30 π)	.78 EXP(j .30 π)	.72 EXP(j .49 π)	.66 EXP(j .34 π)	.65 EXP(j .34 π)	.66 EXP(j .34 π)	.65 EXP(j .21 π)	.78 EXP(j .28 π)	.78 EXP(j .28 π)	.79 EXP(j .28 π)	
	.77 EXP(j .39 π)	.79 EXP(j .14 π)	.78 EXP(j .14 π)	.79 EXP(j .14 π)	.53 EXP(j .35 π)	.66 EXP(j .06 π)	.66 EXP(j .06 π)	.66 EXP(j .06 π)					
	.96 EXP(j .30 π)	.82 EXP(j .29 π)	.82 EXP(j .29 π)	.82 EXP(j .29 π)	.79 EXP(j .13 π)	.68 EXP(j .28 π)	.68 EXP(j .28 π)	.68 EXP(j .28 π)					
3	Modèle	ARMA(4,4) (Mod. Ref. AR(18))				ARMA(4,3) (Mod. Ref. AR(8))							
	Méthode	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*				
	# Modèles Stables	100	100	2	99	100	100	54	97				
	# Modèles à phase min.	100	100	2	99	100	100	54	97				
	# itérations	-	18	21	8	-	11	14	11				
	η (Critère Min.)	1183.560185	0.1022797	(7E-11, E-10)	(E-09, 8E-10)	898.393158	7.70363E-002	(2E-13, E-13)	(2E-13, 2E-13)				
	A (Converg.)	-	7.15650E-004	3.20769E-004	4.85419E-004	-	7.17211E-004	6.28933E-004	5.19710E-004				
	Pôles	.50 EXP(j .34 π)	.98 EXP(j .25 π)	.97 EXP(j .25 π)	.98 EXP(j .25 π)	.95 EXP(j .22 π)	.39 EXP(j .27 π)	.46 EXP(j .20 π)	.35 EXP(j .23 π)				
.61 EXP(j .14 π)		.48 EXP(j .03 π)	.66 EXP(j .12 π)	.49 EXP(j .03 π)	.56 EXP(j .24 π)	.55 EXP(j .14 π)	.51 EXP(j .16 π)	.54 EXP(j .14 π)					
.91 EXP(j .30 π)		.98 EXP(j .30 π)	.99 EXP(j .29 π)	.98 EXP(j .30 π)	.57 EXP(j .17 π)	.87 EXP(j .30 π)	.84 EXP(j .30 π)	.86 EXP(j .30 π)					
Zéros	.97 EXP(j .23 π)	.98 EXP(j .20 π)	.98 EXP(j .20 π)	.98 EXP(j .20 π)	.83 EXP(j .31 π)	.97 EXP(j .22 π)	.96 EXP(j .22 π)	.97 EXP(j .22 π)					
	.43 EXP(j .38 π)	.44 EXP(j .03 π)	.88 EXP(j .28 π)	.46 EXP(j .03 π)	.45 EXP(j .26 π)	.53 EXP(j .28 π)	.48 EXP(j .25 π)	.55 EXP(j .28 π)					
	.57 EXP(j .12 π)	.88 EXP(j .27 π)	.64 EXP(j .10 π)	.88 EXP(j .27 π)	.44 EXP(j .04 π)	.41 EXP(j .04 π)	.42 EXP(j .02 π)	.41 EXP(j .05 π)					
	.83 EXP(j .30 π)	.90 EXP(j .30 π)	.91 EXP(j .28 π)	.90 EXP(j .30 π)	.48 EXP(j .37 π)	.56 EXP(j .31 π)	.52 EXP(j .34 π)	.56 EXP(j .31 π)					
	.71 EXP(j .23 π)	.89 EXP(j .17 π)	.88 EXP(j .18 π)	.89 EXP(j .17 π)									

Tableau 4.10 Résultats des techniques TLS sur les modèles ARMA sélectionnés pour l'Exemple 5
(en se basant sur 100 réalisations pour chaque cas, les valeurs ci-après sont des moyennes, sauf celles des deux premières lignes)

RSB (dB)	L	100				30				20			
		Modèle	ARMA(3,3) (Mod. Ref. AR(9))			ARMA(3,3) (Mod. Ref. AR(7))				ARMA(3,2) (Mod. Ref. AR(5))			
		MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*	MLS	Tech. I	Tech. II	Tech. II*
∞	# Modèles Stables	100	100	65	100	100	100	58	99	100	100	80	98
	# Modèles à phase min.	100	100	65	100	100	100	58	99	100	100	80	98
	# Itérations	-	9	13	6	-	8	10	6	-	7	11	7
	η (Critère Min.)	0.107316477	6.50565E-002	(4E-14-E-14)	(6E-14,2E-14)	0.12343800	7.34384E-002	(3E-14,6E-15)	(5E-14-E-15)	9.45141E-002	5.96505E-002	(2E-14-E-15)	(2E-14,2E-15)
	Α (Converg.)	-	5.76979E-004	4.55981E-004	3.94376E-004	-	5.80662E-004	4.07844E-004	3.36477E-004	-	5.97942E-004	5.07954E-004	4.65198E-004
	Pôles	.32 EXP(j .40π)	.45 EXP(j .29π)	.41 EXP(j .35π)	.45 EXP(j .30π)	.29 EXP(j .41π)	.48 EXP(j .22π)	.60 EXP(j .35π)	.48 EXP(j .23π)	.15 EXP(j .48π)	.30 EXP(j .24π)	.27 EXP(j .26π)	.31 EXP(j .23π)
		.61 EXP(j .43π)	.70 EXP(j .43π)	.66 EXP(j .38π)	.71 EXP(j .42π)	.59 EXP(j .48π)	.73 EXP(j .50π)	.57 EXP(j .46π)	.73 EXP(j .50π)	.72 EXP(j .50π)	.74 EXP(j .50π)	.76 EXP(j .49π)	.75 EXP(j .50π)
.89 EXP(j .40π)		.95 EXP(j .40π)	.95 EXP(j .40π)	.95 EXP(j .40π)	.83 EXP(j .40π)	.90 EXP(j .40π)	.90 EXP(j .40π)	.90 EXP(j .40π)	.77 EXP(j .38π)	.82 EXP(j .39π)	.83 EXP(j .39π)	.82 EXP(j .39π)	
Zéros	.69 EXP(j .20π)	.28 EXP(j .28π)	.30 EXP(j .15π)	.26 EXP(j .28π)	.58 EXP(j .20π)	.34 EXP(j .34π)	.65 EXP(j .26π)	.34 EXP(j .34π)	.31 EXP(j .42π)	.40 EXP(j .36π)	.43 EXP(j .41π)	.41 EXP(j .37π)	
	.46 EXP(j .16π)	.70 EXP(j .24π)	.74 EXP(j .22π)	.70 EXP(j .25π)	.47 EXP(j .16π)	.57 EXP(j .22π)	.43 EXP(j .21π)	.58 EXP(j .23π)	.27 EXP(j .42π)	.31 EXP(j .48π)	.35 EXP(j .46π)	.31 EXP(j .46π)	
	.77 EXP(j .47π)	.77 EXP(j .44π)	.78 EXP(j .43π)	.77 EXP(j .44π)	.62 EXP(j .47π)	.63 EXP(j .44π)	.65 EXP(j .44π)	.64 EXP(j .44π)					
20	# Modèles Stables	100	100	66	100	100	100	63	100	100	100	77	100
	# Modèles à phase min.	100	100	66	100	100	100	63	100	100	100	77	100
	# Itérations	-	9	12	6	-	8	13	9	-	8	10	7
	η (Critère Min.)	0.10685857	6.43135E-002	(4E-14-E-14)	(5E-14-E-14)	0.12742453	7.46381E-002	(3E-14-E-14)	(4E-14-E-14)	9.66144E-002	6.00351E-002	(2E-14-E-15)	(2E-14,2E-16)
	Α (Converg.)	-	5.89302E-004	4.36135E-004	3.73078E-004	-	5.53965E-004	4.48394E-004	1.98300E-003	-	6.15191E-004	4.55065E-004	4.85904E-004
	Pôles	.32 EXP(j .41π)	.46 EXP(j .29π)	.41 EXP(j .39π)	.45 EXP(j .31π)	.29 EXP(j .40π)	.50 EXP(j .21π)	.56 EXP(j .32π)	.50 EXP(j .21π)	.14 EXP(j .48π)	.31 EXP(j .26π)	.28 EXP(j .32π)	.31 EXP(j .26π)
		.61 EXP(j .42π)	.70 EXP(j .43π)	.67 EXP(j .38π)	.70 EXP(j .41π)	.58 EXP(j .48π)	.72 EXP(j .49π)	.63 EXP(j .45π)	.72 EXP(j .49π)	.71 EXP(j .49π)	.73 EXP(j .50π)	.73 EXP(j .49π)	.74 EXP(j .50π)
.89 EXP(j .40π)		.95 EXP(j .40π)	.95 EXP(j .40π)	.95 EXP(j .40π)	.83 EXP(j .40π)	.91 EXP(j .40π)	.89 EXP(j .40π)	.89 EXP(j .40π)	.77 EXP(j .38π)	.82 EXP(j .39π)	.83 EXP(j .40π)	.82 EXP(j .39π)	
Zéros	.69 EXP(j .20π)	.28 EXP(j .27π)	.33 EXP(j .16π)	.26 EXP(j .27π)	.59 EXP(j .19π)	.58 EXP(j .21π)	.61 EXP(j .24π)	.37 EXP(j .35π)	.29 EXP(j .39π)	.40 EXP(j .36π)	.41 EXP(j .40π)	.40 EXP(j .37π)	
	.46 EXP(j .16π)	.70 EXP(j .24π)	.74 EXP(j .23π)	.71 EXP(j .24π)	.47 EXP(j .16π)	.36 EXP(j .34π)	.47 EXP(j .24π)	.64 EXP(j .44π)	.25 EXP(j .40π)	.29 EXP(j .38π)	.32 EXP(j .50π)	.29 EXP(j .48π)	
	.77 EXP(j .47π)	.77 EXP(j .44π)	.78 EXP(j .43π)	.77 EXP(j .44π)	.62 EXP(j .48π)	.63 EXP(j .44π)	.69 EXP(j .44π)	.58 EXP(j .21π)					
3	# Modèles Stables	100	100	39	97	100	100	54	100	100	100	81	98
	# Modèles à phase min.	100	100	39	97	100	100	54	100	100	100	81	98
	# Itérations	-	11	13	11	-	9	10	7	-	8	11	9
	η (Critère Min.)	0.3442276	0.171820	(5E-14-E-14)	(1E-13-E-14)	0.440497	0.1912827	(E-14,2E-15)	(8E-14-E-14)	0.2982006	0.138377	(3E-15-E-17)	(4E-15-E-16)
	Α (Converg.)	-	6.98993E-004	4.93776E-004	4.96360E-004	-	6.21480E-004	3.98367E-004	4.52212E-004	-	6.24965E-004	4.64485E-004	4.95433E-004
	Pôles	.25 EXP(j .15π)	.19 EXP(j .32π)	.18 EXP(j .31π)	.23 EXP(j .48π)	.64 EXP(j .49π)	.74 EXP(j .45π)	.75 EXP(j .48π)	.75 EXP(j .45π)	.60 EXP(j .50π)	.64 EXP(j .47π)	.63 EXP(j .48π)	.63 EXP(j .47π)
		.65 EXP(j .45π)	.62 EXP(j .47π)	.61 EXP(j .45π)	.61 EXP(j .47π)	.63 EXP(j .40π)	.71 EXP(j .39π)	.80 EXP(j .39π)	.71 EXP(j .39π)	.59 EXP(j .38π)	.63 EXP(j .36π)	.64 EXP(j .36π)	.63 EXP(j .35π)
.68 EXP(j .35π)		.84 EXP(j .39π)	.74 EXP(j .27π)	.80 EXP(j .38π)									
Zéros	.21 EXP(j .44π)	.58 EXP(j .37π)	.42 EXP(j .38π)	.59 EXP(j .38π)	.30 EXP(j .43π)	.49 EXP(j .42π)	.44 EXP(j .45π)	.52 EXP(j .43π)	.07 EXP(j .07π)	.17 EXP(j .02π)	.17 EXP(j .04π)	.20 EXP(j .02π)	
					.33 EXP(j .47π)	.52 EXP(j .43π)	.57 EXP(j .44π)	.53 EXP(j .43π)					

4.4.1 Comportement général de ces techniques

Les Tableaux 4.6 à 4.10 permettent d'émettre les constatations générales suivantes:

1. Lorsque le modèle initial est issu de la méthode MLS, Technique I donne toujours des modèles stables alors que, dans le meilleur des cas, Technique II ne donne pas plus de 95% de modèles stables. Une nette amélioration dans la stabilité des modèles est obtenue par Technique II* de sorte que plus de 96% des modèles sont stables.
2. Pratiquement, tous les modèles stables obtenus par les techniques TLS sont à phase minimale sauf pour quelques cas de l'Exemple 2 où le taux de modèles non-inversibles peut atteindre 44%.
3. Pour franchir le seuil du critère d'arrêt Λ , Technique II requiert toujours le nombre d'itérations le plus important. Sa valeur moyenne maximale est de 22 itérations alors que celles des Techniques I et II* sont respectivement de 18 et 16 itérations.
4. Technique I offre une valeur de l'erreur de prédiction (i.e. de critère minimisé) beaucoup plus faible que celle de la méthode MLS, tandis que celles des Techniques II et II* sont pratiquement nulles.
5. Les techniques TLS réussissent remarquablement à approcher et, dans la plupart des cas, à retrouver les pôles et les zéros originaux des processus quelles que soient les valeurs de L et du RSB. Les pôles et les zéros obtenus par la méthode MLS en sont nettement éloignés.

4.5 Discussion des résultats

Il serait absurde de chercher à étudier les performances des techniques TLS suivant les valeurs de L et du RSB en perdant de vue les modèles associés à chaque cas de chaque exemple. En effet,

- ⇒ les modèles sélectionnés pour les divers cas de L et de RSB sont souvent différents pour un même processus;
- ⇒ pour une suite chronologique donnée, les performances des techniques TLS diffèrent selon le choix des ordres m, p, et q. La performance optimale n'est pas toujours obtenue lorsque le modèle exact du processus est sélectionné.

Il est donc plus raisonnable de considérer le comportement de la procédure TLS générale et de voir son pouvoir de recouvrir les caractéristiques importantes des processus étudiés à partir de courts échantillons de leurs suites chronologiques. Comme ces processus sont de natures différentes, ils sont examinés séparément.

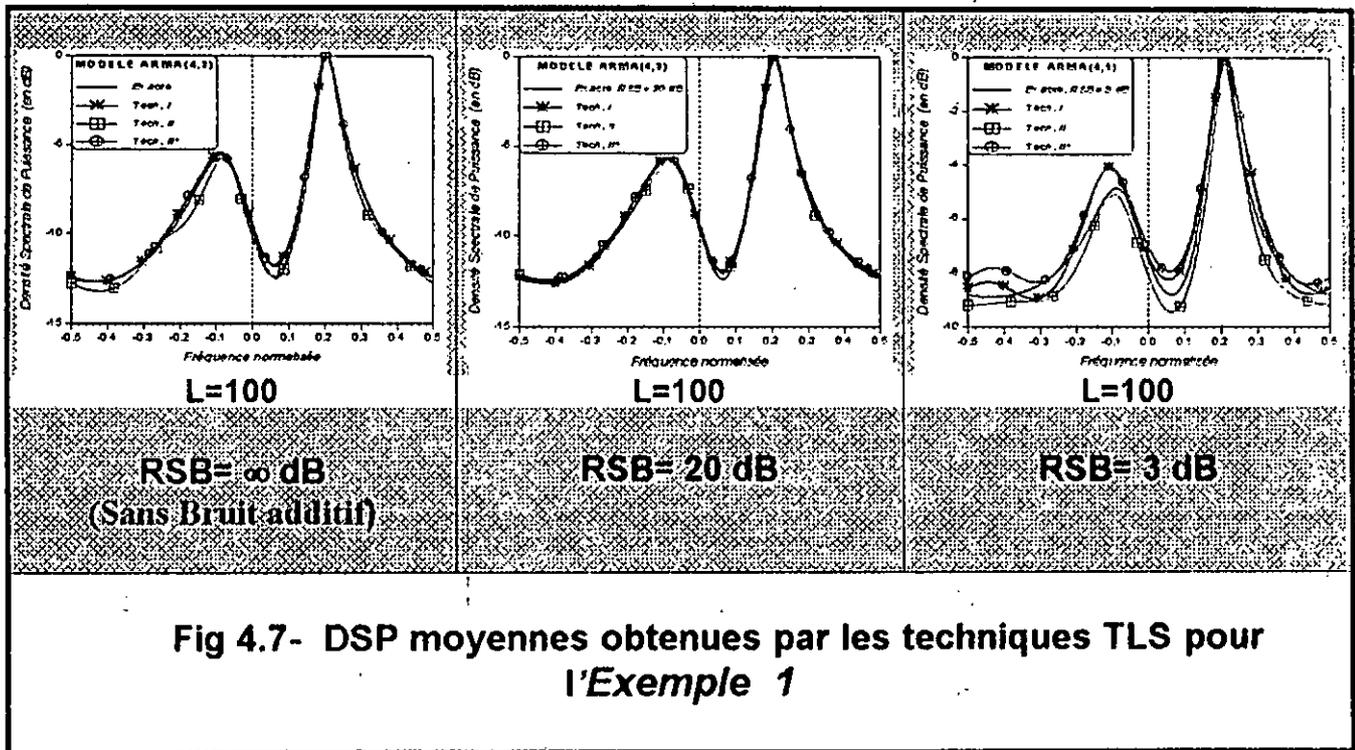


Fig 4.7- DSP moyennes obtenues par les techniques TLS pour l'Exemple 1

A) Exemple 1 (Processus ARMA(2,1))

Des modèles ARMA ($q \neq 0$) ont été choisis seulement pour les cas $L=100$. Pour les RSB élevés (≥ 20 dB), la procédure TLS arrive à bien décrire le processus en utilisant un modèle ARMA(4,3): les deux pôles et le zéro du processus sont retrouvés, alors que pour RSB=3dB, un modèle ARMA(4,1) est sélectionné et seulement les deux pôles du processus sont relativement bien estimés. Les autres pôles et zéros sont de faibles amplitudes et très rapprochés de façon à pratiquement causer des annulations pôle-zéro ou à renforcer la largeur des pics spectraux.

Les DSP moyennes de Fig 4.7 montrent bien que, pour les RSB élevés, les résultats de toutes les techniques sont très satisfaisants et arrivent même à se confondre avec la DSP exacte (sauf, peut être, Technique II qui présente une petite distorsion pour $L=100$). Pour RSB=3dB, la DSP de Technique II est la plus proche de la DSP exacte alors que celles des deux autres techniques manifestent un léger biais de la bande spectrale gauche.

Bien qu'un modèle AR(4) donne des résultats très acceptables pour les trois cas (cf. Fig 4.2), le modèle ARMA réduit considérablement les biais spectraux et les distances entre les DSP estimées et exacte.

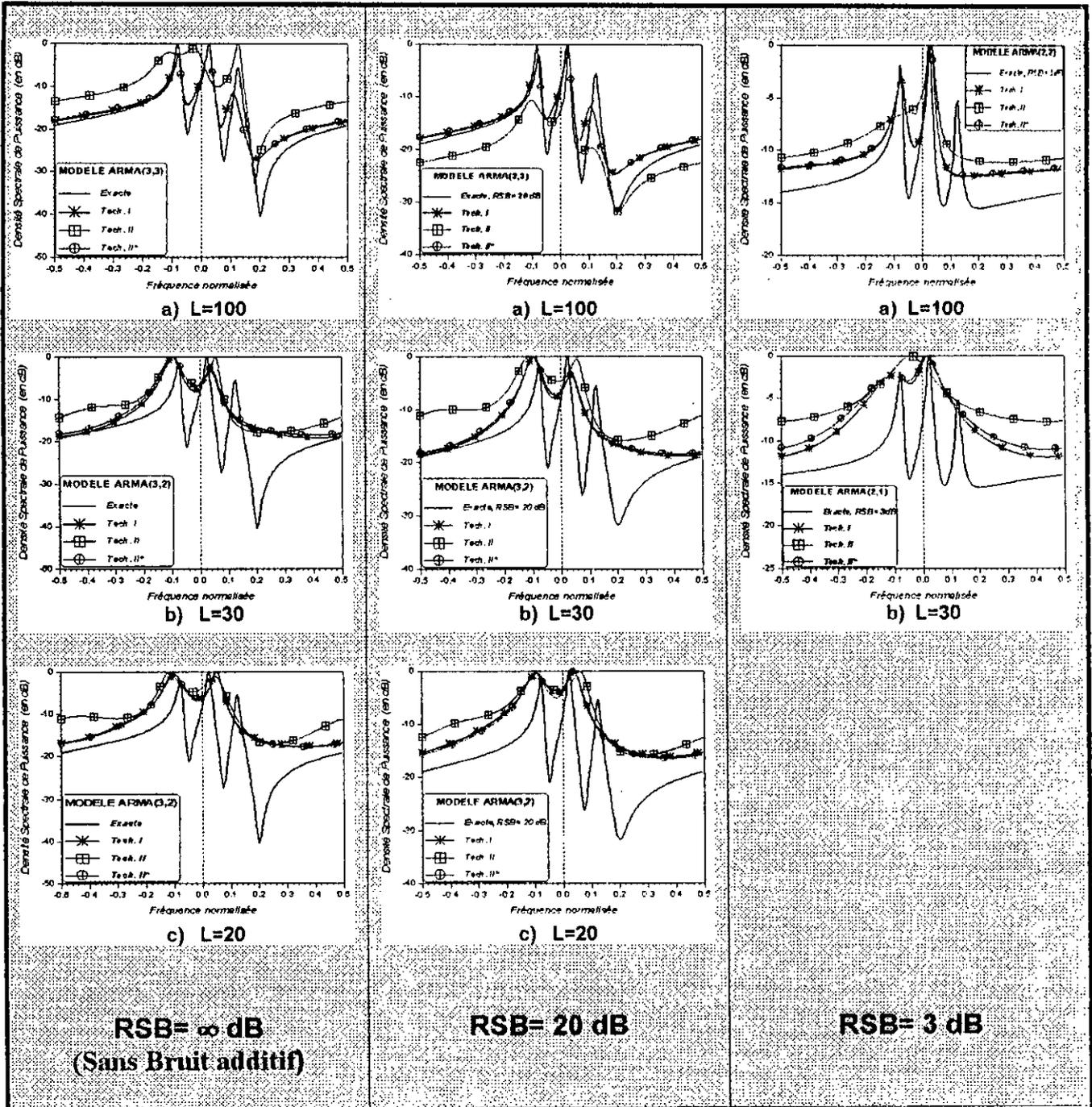


Fig 4.8- DSP moyennes obtenues par les techniques TLS pour l'Exemple 2

B) Exemple 2 (Processus ARMA(3,3))

Ce processus est caractérisé par trois bandes spectrales très étroites et très rapprochées et par des pôles et des zéros à proximité du cercle unité.

Pour des RSB élevés et pour $L=100$, le choix d'un modèle ARMA(3,3) a permis aux techniques TLS de retrouver plus ou moins les pôles et les zéros du processus. Les DSP correspondant aux Techniques I et II* de Fig 4.8 montrent l'excellente résolution obtenue et la bonne approximation de la DSP exacte, vu qu'une séquence de 100 données est généralement insuffisante pour décrire un processus de cette nature en employant d'autres méthodes. Lorsque L diminue ($L=30$ et 20), un modèle ARMA(3,2) est choisi. Il en résulte que seulement deux des trois pôles sont proches des pôles originaux, le troisième pôle étant faible et assez éloigné. La perte a priori d'un zéro a induit une perte en résolution, ce qui ne fait apparaître que deux bandes spectrales sur trois et avec des biais (cf. Fig 4.8).

Pour $RSB=3$ dB et pour $L=100$, les Techniques I et II* ont réussi à retrouver deux pôles et un zéro du processus en utilisant un modèle ARMA(2,2). Fig 4.8 montre que deux bandes spectrales adjacentes sont exactement définies et sans aucun biais. Pour $L=30$, le modèle ARMA(2,1) ne permet d'entrevoir que deux bandes spectrales larges et contiguës car le zéro estimé est assez éloigné des zéros originaux. Un modèle AR(9) offre, pour ce cas, une bien meilleure DSP (avec trois pics) malgré les biais (cf Fig 4.3). Avec $L=20$, il n'est plus possible de retracer les caractéristiques du processus même en utilisant un modèle AR(5).

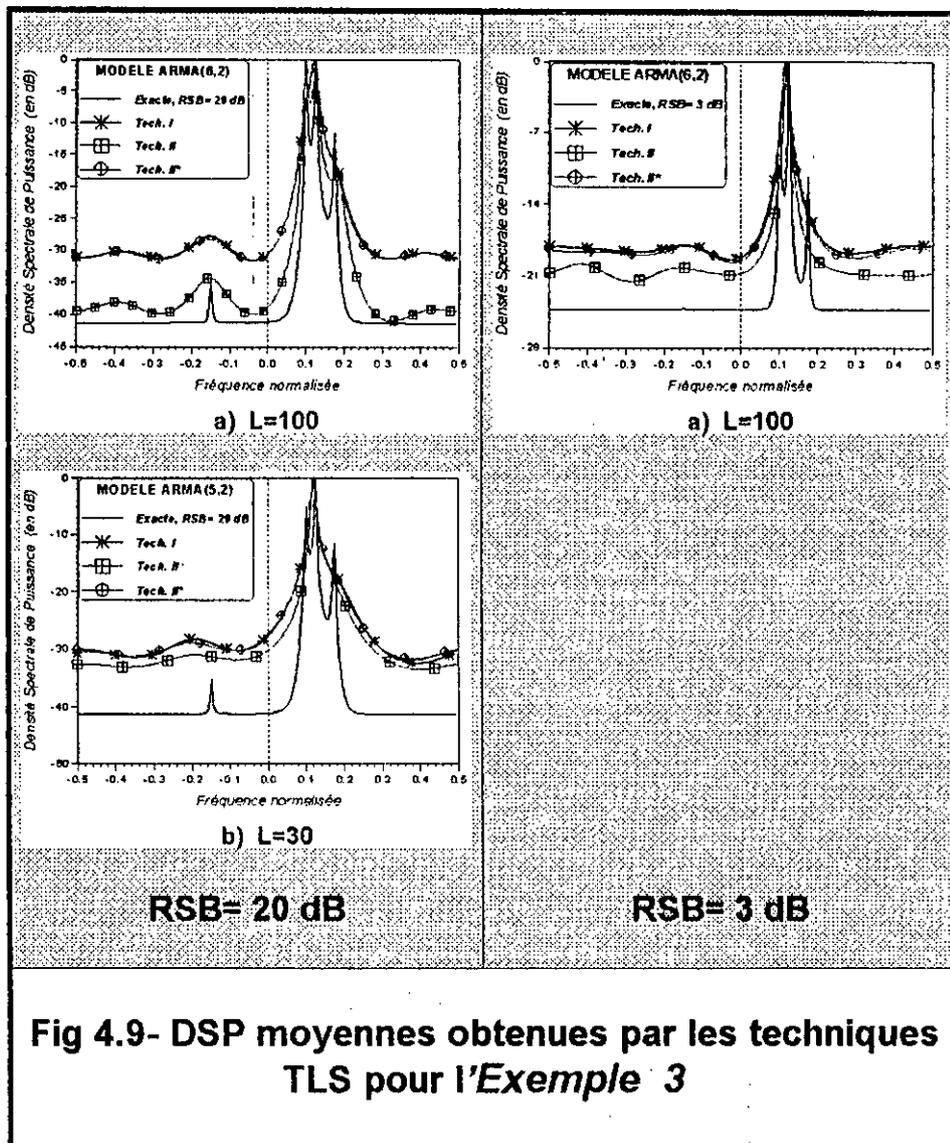
En outre, il est noté que, pour cet exemple, Technique II est très instable et donne des résultats médiocres tandis que les Techniques I et II* peuvent fournir quelquefois des modèles non inversibles (cf. Tableau 4.8).

C) Exemple 3 (Processus AR(4))

Ce processus est constitué de quatre pics spectraux étroits dont trois sont très proches. Tous ses pôles se trouvent au voisinage du cercle unité et trois d'entre eux sont assez rapprochés.

Pour le cas sans bruit additif, le choix du modèle AR(4) qui est le modèle exact du processus fournit d'excellents résultats pour toutes les valeurs de L (cf. Fig 4.4-a)).

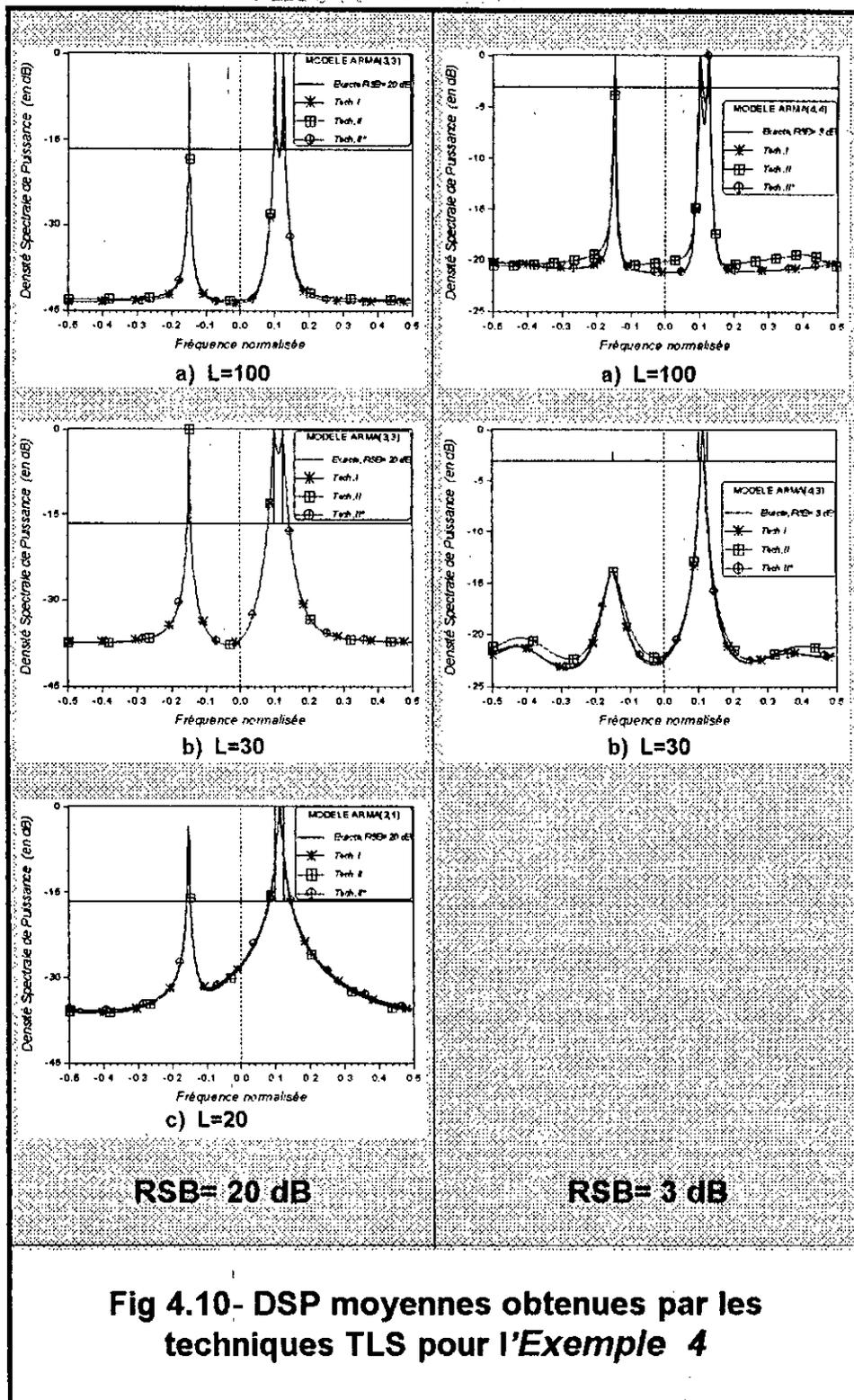
En introduisant un bruit blanc avec un RSB assez élevé (e.g. 20 dB) et en utilisant seulement 100 données, la procédure TLS parvient à attribuer aux pôles dominants des modèles ARMA estimés (e.g. ARMA(6,2)) les positions angulaires exactes des pôles



originaux. Les amplitudes correspondantes étant légèrement atténuées par rapport aux amplitudes exactes (cf. Tableau 4.7).

Pourtant, pour ce cas, seule Technique II réussit à fournir une DSP satisfaisante en distinguant les quatre pics spectraux du processus, les autres techniques offrent juste un profil du spectre sans prendre en compte des détails (cf. Fig 4.9).

Lorsque L et/ou RSB diminuent, une perte en résolution spectrale est remarquée aussi bien pour les modèles AR(5) que pour les modèles ARMA(5,2) et ARMA(6,2). Les trois pics voisins sont, dans tous les cas, confondus. Cependant, la présence du pic isolé est pratiquement toujours indiquée sur le spectre par un plus ou moins petit renflement à son emplacement, même s'il est à peine apparent sur la DSP exacte (cf. Fig 4.4 et Fig 4.9).



D) Exemple 4 (Exponentielles dans un bruit blanc)

Ce processus se compose d'un bruit blanc dans lequel sont noyées trois exponentielles. Il est noté que les fréquences de ces exponentielles sont identiques à celles des pics les plus rapprochés et du pic isolé de l'Exemple 3 (cf. Section 4.2).

Pour ce type de processus, il est constaté que:

- ⇒ les modèles stables obtenus par les techniques TLS sont inversibles pour tout L et RSB.
- ⇒ pour des RSB élevés, ces techniques convergent en un nombre très faible d'itérations. Technique II, dont la convergence est la plus lente, ne dépasse pas cinq (05) itérations.
- ⇒ Technique II donne le plus grand nombre de modèles stables relativement aux autres processus (lorsque RSB n'est pas faible).

Lorsque le RSB est important et $L \geq 30$, la procédure TLS a tendance à sélectionner des modèles ARMA(3,3), ce qui concorde avec le modèle théorique adéquat pour ce type de processus (cf. Section 2.4.3). De plus, grâce à ces modèles, les techniques TLS parviennent remarquablement à retrouver les fréquences exactes des exponentielles (cf. Tableau 4.9) et à fournir des DSP très satisfaisantes (cf. Fig 4.10). Alors que pour des séquences très courtes ($L \leq 20$), une perte en résolution est obtenue par la sélection d'un modèle ARMA(2,1) de sorte que les deux fréquences rapprochés sont représentées par une seule fréquence correspondant plus ou moins à leur moyenne. De toute manière, ce modèle fournit des DSP meilleures que celles du modèle AR(2) (cf. Fig 4.5) avec des pics plus précis et étroits.

Pour le cas RSB=3 dB et L=100, le choix du modèle ARMA(4,4) et l'utilisation des techniques TLS permettent de retrouver les trois exponentielles. Hormis le pôle de faible amplitude qui s'annule pratiquement avec un zéro très voisin, les autres pôles du modèle correspondent à de bonnes estimations des exponentielles. Les DSP obtenues sont très satisfaisantes et de loin meilleures que celle obtenue par un modèle AR(4). Pour L=30, le modèle ARMA(4,3) permet de retrouver une fréquence exacte, les deux autres fréquences voisines sont confondues en une seule fréquence qui est pratiquement leur moyenne. Ce modèle est plutôt équivalent au modèle AR(4) (cf. Fig 4.5 et Fig 4.10).

E) Exemple 5 (Exponentielles dans un bruit coloré)

Ce processus correspond à deux exponentielles noyées dans un bruit coloré à larges bandes (i.e. le processus ARMA(2,1) de l'Exemple 1). La puissance de la première exponentielle représente le quart de celle du bruit coloré alors que celle de la seconde n'en représente que le dixième.

Pour des RSB élevés avec L=100 et 30, la procédure TLS réussit, au moyen d'un modèle ARMA(3,3), à extraire ou plus exactement à filtrer de façon très précise la première exponentielle. La seconde exponentielle ne se manifeste que par un léger biais vers la

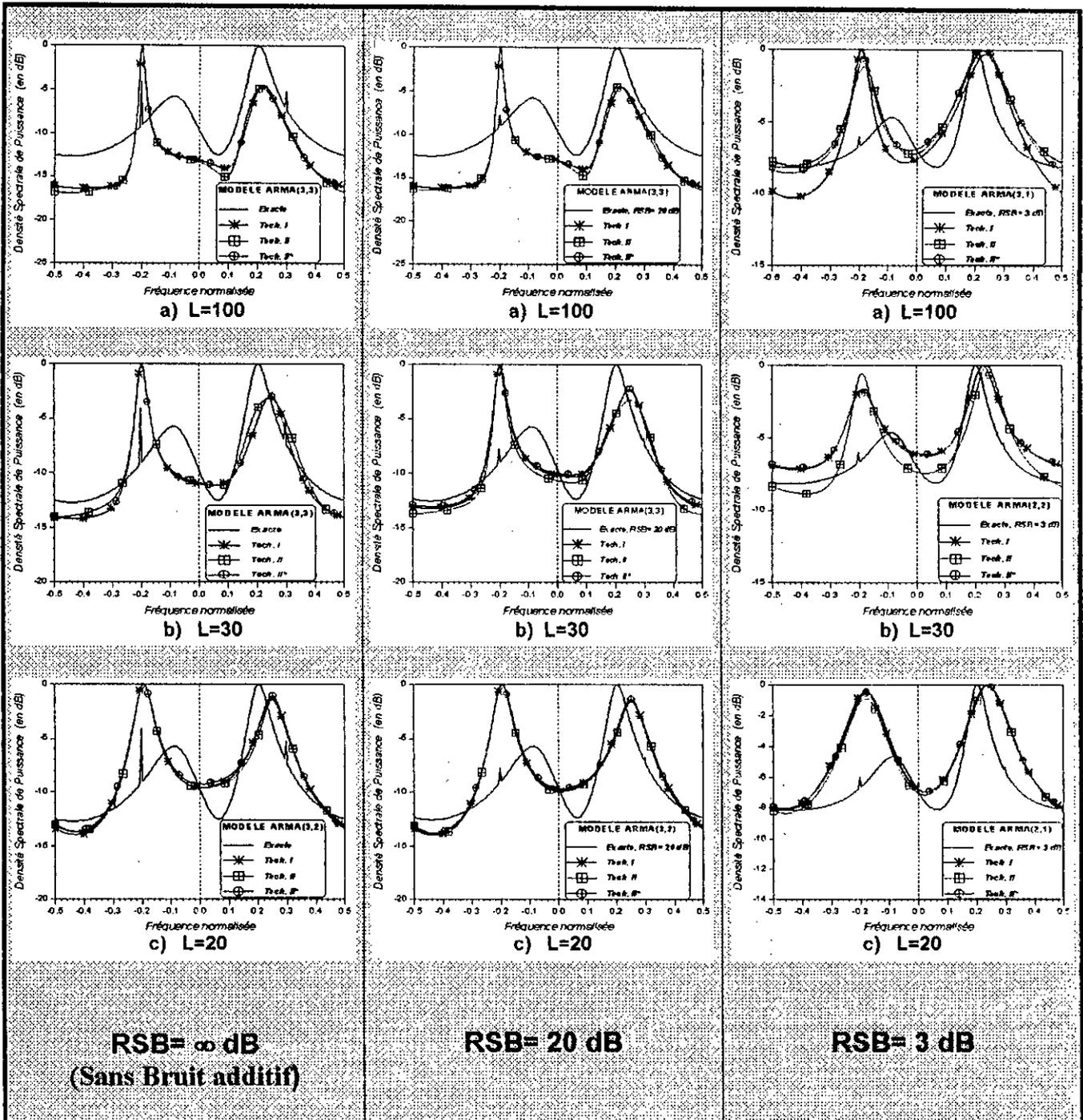


Fig 4.11- DSP moyennes obtenues par les techniques TLS pour l'Exemple 5

droite de la bande spectrale droite du bruit coloré, surtout pour les cas de L faible (cf Fig 4.11). Plus RSB et/ou L diminuent, plus le pic correspondant à la première exponentielle s'élargit. Dans tous les cas, l'utilisation d'un modèle ARMA est plus avantageuse que celle d'un modèle AR(2) car la résolution spectrale est plus ou moins améliorée et la distance entre les DSP exacte et estimées est plus réduite (cf. Fig 4.6).

4.6 Conclusion

L'application de la procédure TLS à quelques exemples numériques de processus types et l'introduction de la nouvelle technique de sélection des modèles ont dévoilé plusieurs aspects positifs d'une telle procédure. En effet, la procédure TLS a permis de réaliser:

- de très bonnes estimations des processus à partir de séquences de moins de 100 données.
- une rapidité d'exécution due à:
 - la simplicité de la détection de l'ordre du modèle ARMA en utilisant le critère FICM,
 - le calcul allégé des paramètres du modèle (en temps et mémoire) par l'utilisation des algorithmes efficaces,
 - la vitesse de convergence des techniques TLS. Le nombre des itérations nécessaires n'est pas élevé.
- des modèles en majorité stables et à phases minimales.
- une meilleure performance pour les processus comportant des exponentielles.
- un bon filtrage des exponentielles noyées dans du bruit. Lorsqu'elles ne sont pas trop rapprochées, une trentaine de données suffisent pour les déceler. Cette propriété prédestine la procédure aux applications liées à la détection des périodicités cachées.

L'examen des résultats des Techniques II et II* montre que le fait de changer de modèle initial peut améliorer considérablement les propriétés de stabilité et de convergence d'une technique TLS. Cette dépendance du modèle initial suggère la possibilité de trouver une méthode efficace (autre que la méthode MLS) offrant le modèle initial qui permet d'optimiser les performances des techniques TLS et d'aboutir aux meilleurs résultats. Ceci pourrait constituer un sujet de recherche assez excitant.

PARTIE II

APPLICATION AUX ECHOS RADAR

CHAPITRE 5

GENERALITES SUR LE RADAR COHERENT A IMPULSIONS

5.1 Introduction

Le mot radar a été inventé par l'US Navy à partir de la contraction de l'expression: "RAdio Detection And Ranging". Comme son nom l'indique, le radar est un moyen électromagnétique de détection, de localisation et d'étude des objets à distance. Il émet, dans la direction de son antenne, des ondes électromagnétiques (EM) qui illuminent des objets de son environnement et reçoit ensuite une partie de l'énergie EM réfléchiée et/ou diffusée par ces derniers. Ces objets sont appelés **cibles** et les signaux diffusés par ces dernières sont appelés **échos**. Ainsi, grâce à ces échos, le radar peut développer une image EM de l'environnement dans lequel il opère.

Le radar emploie des micro-ondes qui lui permettent de "voir" à travers toutes les conditions de temps telles que le brouillard, la brume, la neige, la pluie, et la grêle, et il peut être utilisé de jour comme de nuit. Ces facultés offrent à l'être humain une capacité sensorielle supérieure à ses propres sens de vision et d'audition.

Dans cette étude, l'intérêt est particulièrement dirigé sur le radar cohérent à impulsions qui est largement utilisé comme radar de surveillance soit au sol ou à bord des avions. Ce type de radar est largement abordé et développé sous tous ses angles par plusieurs ouvrages spécialisés dont ceux de [THOUREL, 84; BARTON, 88; CARPENTIER, 90].

Quelques notions sur ce type de radar sont brièvement présentées dans ce chapitre. Elles concernent le fonctionnement d'un tel système, le mécanisme de génération de sa suite chronologique ainsi que la nature et les caractéristiques de l'information véhiculée. Ces notions sont juste suffisantes pour la compréhension du chapitre suivant qui traite l'apport de la modélisation ARMA (et par là, celui de la procédure TLS) dans le traitement du signal radar.

5.2 Principe du radar Doppler à impulsions

Le radar Doppler à impulsions émet une onde sinusoïdale de fréquence élevée f_e (220 MHz - 35 GHz) par impulsions brèves de puissance crête de l'ordre du Mégawatt et de durée τ de l'ordre de quelques nanosecondes à quelques dizaines de microsecondes. La période de répétition de ces impulsions $T_r = 1/f_r$ est de l'ordre de quelques millisecondes de sorte que le facteur de forme (duty cycle) τ/T_r du train d'impulsions émis soit de l'ordre de 10^{-3} .

L'émetteur du radar est généralement constitué d'un magnétron qui délivre la fréquence d'émission f_e et d'un modulateur qui allume et éteint un amplificateur de puissance radiofréquence (RF) de façon à obtenir une modulation en amplitude du signal micro-onde par un train d'impulsions rectangulaires. Le signal émis est de la forme:

$$S_e(t) = A_e \cos(2\pi f_e t) \quad k T_r \leq t \leq k T_r + \tau \quad (\text{où } k \text{ entier})$$

Ces impulsions amplifiées passent à travers une ligne de transmission (ou guide d'ondes) au duplexeur qui relie alternativement l'émetteur et le récepteur à l'antenne. La ligne de l'émetteur est connectée à l'antenne pendant seulement la durée de l'impulsion d'émission. Le duplexeur doit assurer l'isolation nécessaire entre l'émetteur et le récepteur afin de protéger le récepteur de toute détérioration que peut provoquer la haute puissance de l'émetteur (cf. Fig. 5.1).

L'antenne rayonne les impulsions d'émission dans l'espace suivant son diagramme de rayonnement. Ce dernier est généralement un faisceau étroit de forme conique (ou éventail) dont l'ouverture du lobe principal à -3dB en azimut est faible (de l'ordre de 1° à 2°). L'antenne peut être dirigée mécaniquement ou électriquement dans une direction spécifique.

Les échos produits par les réflexions des objets illuminés par chaque impulsion émise (i.e., balayés par le faisceau) sont captés durant la période de silence (i.e., l'intervalle entre deux impulsions d'émission). Ces signaux passent dans le récepteur à travers le duplexeur. Ce sont aussi des impulsions mais pas rectangulaires et de très faibles puissances (de l'ordre de quelques milliwatts). L'écho reçu d'un objet ponctuel après un retard $\Delta(t)$ de l'instant de l'émission d'une impulsion est de la forme:

$$S_r(t) = A_r(t) \cos(2\pi f_e t + \varphi(t)) \quad k T_r + \Delta(t) \leq t \leq k T_r + \Delta(t) + \tau \quad (5.1)$$

où l'information utile sur la cible est entièrement contenue dans l'amplitude $A_r(t)$ et la phase $\varphi(t)$.

Le récepteur commence par un amplificateur RF qui fixe la sensibilité du récepteur et ramène le signal à un niveau convenable pour le traitement, suivi d'un mélangeur qui, alimenté par un oscillateur très stable appelé STALO et délivrant une fréquence f_L , translate la fréquence porteuse f_c du signal à une fréquence plus faible $f_I = f_c - f_L$. C'est la fréquence intermédiaire (FI) du radar, elle est de l'ordre de 30-60 MHz. Un amplificateur calé sur f_I et de largeur de bande $B=1.2/\tau$ est ensuite utilisé comme un filtre adapté qui maximise le rapport signal à bruit, ce qui fixe la sélectivité du récepteur avec une faible perte d'énergie (de l'ordre de 1dB) (cf. Fig. 5-1).

Dans un récepteur de radar cohérent et afin de conserver les informations d'amplitude et de phase de l'enveloppe, le signal est doublement démodulé (i.e., traduit à la bande de base) à la sortie de l'amplificateur FI. Comme le magnétron est instable en fréquence d'une impulsion à la suivante, un oscillateur cohérent appelé COHO est utilisé dans la détection de phase du signal (cf. Fig. 5-1). Cet oscillateur est très stable, il délivre la fréquence f_I tout en verrouillant sa phase à celle du magnétron après chaque impulsion d'émission.

La double démodulation consiste à multiplier le signal reçu d'une part avec le signal direct du COHO, i.e., $\cos(2\pi f_I t)$, et d'autre part avec ce même signal déphasé de $\pi/2$, et à effectuer des filtrages passe-bas nécessaires pour qu'à la sortie des détecteurs de phase, deux composantes; l'une en phase $P(t)$ et l'autre en quadrature $Q(t)$ telles que:

$$\begin{aligned} P(t) &= A_r(t) \cos\varphi(t) \\ Q(t) &= A_r(t) \sin\varphi(t) \end{aligned}$$

d'un signal vidéo (i.e., en bande de base) complexe:

$$x(t) = P(t) + jQ(t) = A_r(t) e^{j\varphi(t)} \quad (5.2)$$

soient obtenues.

Le signal complexe $x(t)$ contient donc toute l'information du signal réel $S_r(t)$. Il est alors échantillonné et mémorisé en attente du traitement par calcul pour en extraire les informations. Ce sont donc ces échantillons qui constituent la suite chronologique du radar. Le bloc de traitement peut être donc un ordinateur spécialisé permettant une évaluation rapide et précise des mesures radar ainsi qu'un renouvellement fréquent des informations (plusieurs fois par minute). Ces informations seront enfin visualisées et exploitées.

La position angulaire de la cible est déterminée par la direction vers laquelle le faisceau de l'antenne est pointé lorsque l'écho est observé. Les mesures des angles d'élévation et d'azimut sont effectuées par des instruments se trouvant au niveau du socle sur lequel l'antenne est montée. Ces données sont directement transmises aux unités de visualisation et d'exploitation.

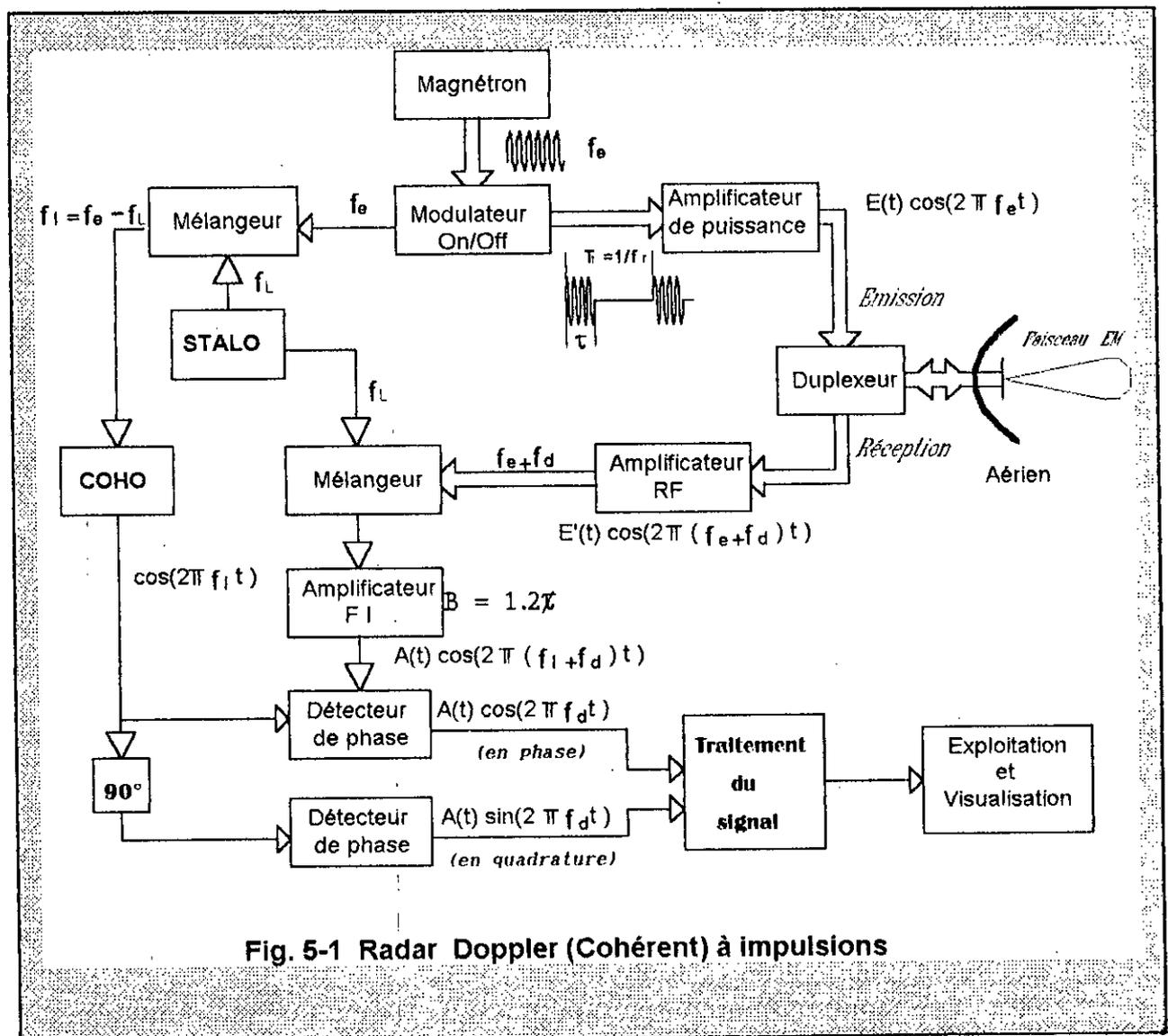


Fig. 5-1 Radar Doppler (Cohérent) à impulsions

5.3 Distance et vitesse d'une cible

Si la cible et/ou le radar sont en mouvement avec une vitesse radiale relative v_r , la distance D qui les sépare à l'instant t , (en supposant qu'ils se rapprochent), s'écrit:

$$D(t) = D_0 - v_r t \quad (\text{où } D_0 \text{ est la distance initiale}) \quad (5.3)$$

Si $\Delta t(t)$ est le temps écoulé entre l'émission d'une impulsion et la réception de son écho, il correspond donc à la durée du parcours aller et retour, entre l'antenne radar et la cible, effectué par l'onde EM se propageant à la vitesse de la lumière c . L'impulsion écho reçue à l'instant t (en réponse à l'impulsion émise à l'instant $t - \Delta t(t)$) aurait donc été réfléchiée par la cible à l'instant $t - \Delta t(t)/2$. A cet instant, la cible était à la distance $D(t - \Delta t(t)/2)$. Donc $\Delta t(t)$ s'écrit:

$$\Delta t(t) = \frac{2}{c} D\left(t - \frac{\Delta t(t)}{2}\right) \quad (5.4)$$

En remplaçant (5.3) dans (5.4), l'expression de $\Delta t(t)$ devient donc:

$$\Delta t(t) = \frac{2 D_0}{c - v_r} - \frac{2 v_r}{c - v_r} t \quad (5.5)$$

Deux cibles se trouvant dans la même direction seront confondues par le radar si le retard entre leurs échos est inférieur à la durée τ d'une impulsion. Donc le pouvoir séparateur ou la résolution en distance du radar est:

$$\delta D = \frac{c \tau}{2} \quad (5.6)$$

Comme $v_r/c \ll 1$ et généralement durant la mesure, $v_r t \ll \delta D$, alors, d'après (5.5)

$$\Delta t(t) \approx \frac{2 D_0}{c} \quad (5.7)$$

et par conséquent, la distance d'une cible (fixe ou mobile) est pratiquement constante durant chaque mesure. La distance maximale sans ambiguïté d'un radar à impulsions est:

$$D_{\max} = \frac{c T_r}{2} \quad (5.8)$$

Le déphasage $\varphi(t)$ (cf. Equation (5.1)) de l'onde reçue par rapport à l'onde émise est introduit par le retard $\Delta t(t)$ et est donné par:

$$\varphi(t) = -2\pi f_e \Delta t(t)$$

En utilisant l'expression (5.5), ce déphasage s'écrit sous la forme:

$$\varphi(t) = \omega_d t + \varphi_0 \quad (5.9)$$

où $\omega_d = 2\pi f_d$ est une fréquence angulaire produite par l'effet Doppler causé par le mouvement de la cible. La fréquence Doppler est alors définie par:

$$\begin{aligned} f_d &= f_e \frac{2v_r}{c - v_r} \cong f_e \frac{2v_r}{c} \quad (\text{comme } v_r/c \ll 1) \\ &\cong \frac{2v_r}{\lambda} \end{aligned} \quad (5.10)$$

où λ est la longueur d'onde émise. φ_0 est un déphasage constant dû à la distance

$$\varphi_0 = -2\pi f_e \frac{2D_0}{c - v_r} \cong -2\pi \frac{2D_0}{\lambda}$$

La mobilité de la cible a donc pour effet de décaler la fréquence porteuse de l'écho d'une quantité f_d proportionnelle à sa vitesse radiale. Ce décalage Doppler est nul si la cible est fixe ($v_r=0$) et il est positif (respectivement négatif) si la cible se rapproche (respectivement s'éloigne) du radar.

5.4 Cellule de résolution distance-azimut

Le pouvoir séparateur (ou résolution) en azimut d'un radar est fixée par la largeur de son faisceau d'antenne puisque dans une direction donnée et à une distance D donnée, le faisceau peut couvrir plus d'une cible au même moment. La largeur en azimut du faisceau rayonné est définie comme étant l'ouverture $\Delta\theta$ du lobe principal à -3db de sa puissance maximale et est donnée (en radians) en fonction de la dimension de l'antenne H et de la longueur d'onde émise par: [THOUREL, 84; BARTON, 88; CARPENTIER, 90]

$$\Delta\theta = 1.2 \frac{\lambda}{H} \approx \frac{\lambda}{H}$$

Donc pour un radar, deux cibles se trouvant à la même distance D (à δD près) n'auront des positions angulaires (azimutales) distinctes que si la distance transversale qui les sépare est supérieure ou égale à $\delta D_\theta = D \Delta\theta$.

Par conséquent, dans le plan distance-azimut, une cible ponctuelle représente l'ensemble des diffuseurs se trouvant dans une aire δS limitée en distance par δD et en azimut par δD_θ . Cette aire est appelée cellule de résolution (cf. Fig 5.2).

L'impulsion écho reçue à partir d'une cellule de résolution consiste en la superposition des échos des différents objets contenus dans celle-ci. Une expression plus générale que (5.1) pour le signal reçu est alors: [AVERY, 85]

$$\begin{aligned}
 S_r(t) &= \sum_k A_{r_k}(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_k(t)) \\
 &= A_r(t) \cos(2\pi f_c t + \Phi(t))
 \end{aligned}$$

où $A_{r_k}(t)$ et $\varphi_k(t)$ sont respectivement l'amplitude et la phase de l'écho d'un seul diffuseur. L'amplitude caractérise la taille et la réflectance de l'objet; i.e., sa surface équivalente radar (SER), et la phase est une fonction de la vitesse radiale de l'objet (i.e., le décalage Doppler). Les composantes du signal vidéo complexe obtenu après la double démodulation de $S_r(t)$ s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
 P(t) &= A_r(t) \cos\Phi(t) = \sum_k A_{r_k}(t) \cos\varphi_k(t) \\
 Q(t) &= A_r(t) \sin\Phi(t) = \sum_k A_{r_k}(t) \sin\varphi_k(t)
 \end{aligned}$$

et le signal complexe en bande de base est donné par:

$$x(t) = A_r(t) e^{j\Phi(t)} = \sum_k A_{r_k}(t) e^{j\varphi_k(t)} \quad (5.11)$$

Il est évident d'après l'expression (5.11) que, dans un radar cohérent, même si les diffuseurs se trouvent dans une même cellule de résolution, il peuvent toujours être séparés en fonction de leurs vitesses radiales (i.e., fréquences Doppler) et de leurs sens de déplacement par rapport au radar (i.e., signes des décalages Doppler).

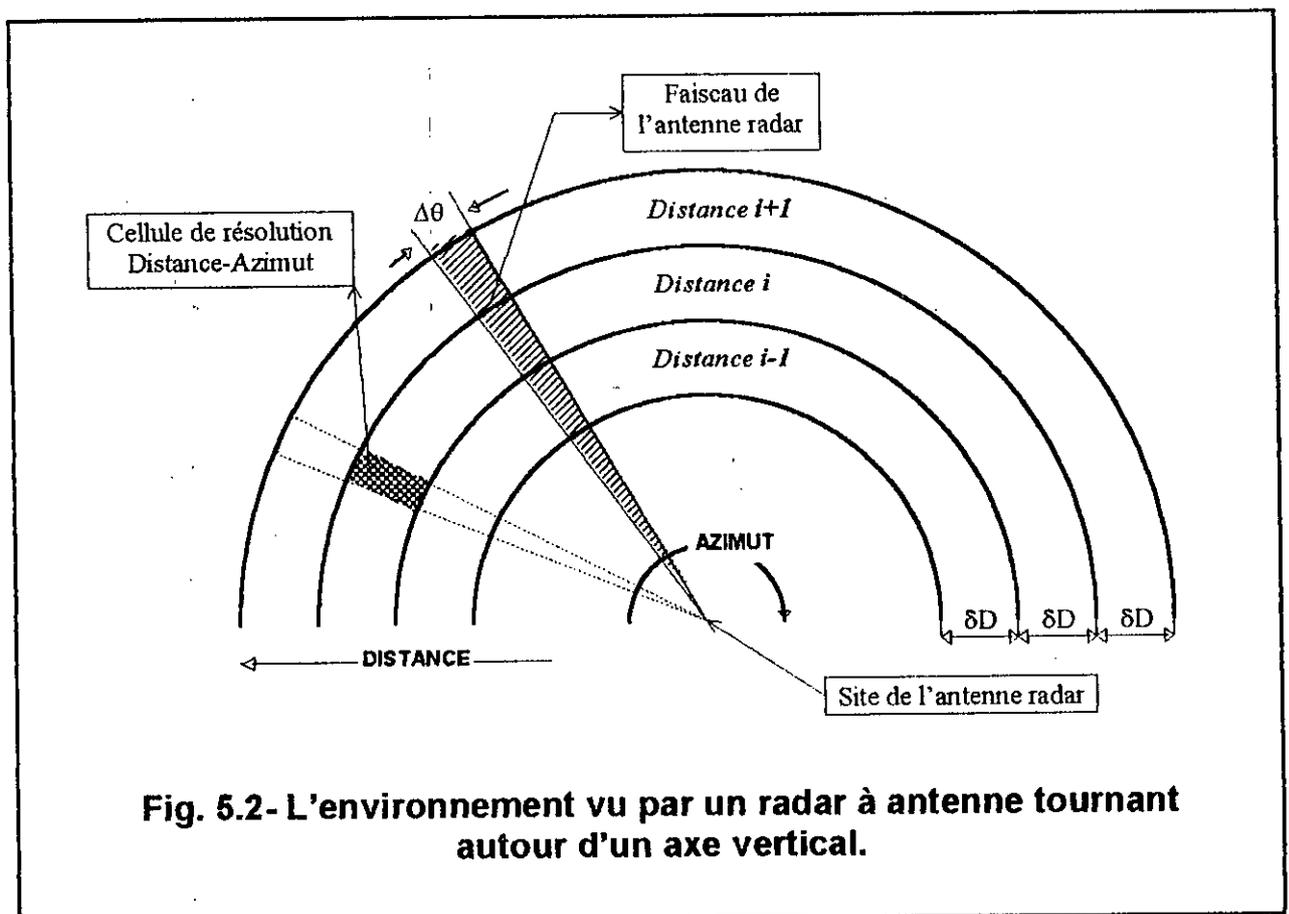


Fig. 5.2- L'environnement vu par un radar à antenne tournant autour d'un axe vertical.

5.5 Spectre de l'écho d'une cible radar

Dans les applications de radar cohérent, la fonction statistique qui caractérise le plus convenablement l'écho radar résultant de la réflexion d'un ensemble de points diffuseurs est sa DSP. Cette DSP est intimement liée aux vitesses des diffuseurs. Quel que soit le nombre de diffuseurs, la DSP $S_x(f)$ d'un écho est une image pondérée de la distribution de vitesses. En particulier, si $S_x(v_r) dv_r$ exprime la fraction de puissance reçue renvoyée par les diffuseurs dont les composantes de vitesse dans la direction du radar sont contenues dans l'incrément dv_r , alors il est possible d'écrire la relation: [AVERY, 85; HAYKIN, 85]

$$S_x(f) df = S_x(v_r) dv_r$$

en tenant compte de la relation Doppler $f=2v_r/\lambda$. Ceci montre que la DSP représente en effet la distribution des vitesses radiales du volume de diffuseurs considéré.

Etant donnée la largeur du faisceau d'antenne, une cellule de résolution est balayée en un temps T_0 . Pendant ce temps, $N_c = T_0 / T_r$ impulsions passent dans le faisceau et éclairent la cible. L'écho d'une cible est, par conséquent, un train de N_c impulsions. N_c est communément appelé le *nombre de coups par cible*, et T_0 le *temps d'observation d'une cible*. Pour une antenne rotative, ce nombre N_c est donnée par:

$$N_c = \frac{\Delta\theta}{\Omega T_r}$$

où Ω est la vitesse de rotation de l'antenne. Les valeurs typiques de N_c vont de 10 à 50 coups par cible [THOMAS, 84].

Le spectre du signal reçu à partir d'une cible ponctuelle fixe est centré sur f_0 . Avant la démodulation, cette fréquence f_0 correspond à la fréquence d'émission ou à la fréquence intermédiaire et après la démodulation, elle est la fréquence nulle.

Le spectre d'une suite infinie d'impulsions rectangulaires de durée τ est constitué de raies distantes de f_r et modulées en amplitude par la fonction $\sin(u)/u$ avec le premier zéro à la fréquence $1/\tau$. Comme il n'y a que N_c impulsions par écho, le signal reçu à partir d'un diffuseur ponctuel correspond à un signal rectangulaire échantillonné de durée T_0 , se produisant à la cadence de rotation de l'antenne si celle-ci tourne. De ce fait, le spectre de N_c impulsions est de la même forme que celui du train infini d'impulsions sauf que chaque raie s'élargit et devient une surface limitée par la fonction $\sin(u)/u$ avec des zéros correspondants à $1/T_0 = f_r/N_c$ [THOUREL, 84].

Cependant en pratique, ces N_c impulsions de l'écho ne sont pas d'amplitudes égales; elles sont plutôt pondérées par la forme du lobe principal du diagramme de rayonnement de l'antenne. En effet, lorsque le faisceau d'antenne balaye une cible, son gain $G(t)$ varie dans le temps et module l'amplitude des impulsions émises. Généralement, le faisceau est gaussien donc $G(t)$ est une courbe de Gauss, et comme la transformée d'une courbe de Gauss est aussi une courbe de Gauss, les raies s'élargissent en fait suivant une courbe gaussienne et non pas suivant $\sin(u)/u$, ce qui modifie quelque peu la forme du spectre décrit ci-dessus en considérant que la largeur de bande de chaque raie est $B_0 = 1/T_0 = f_r/N_c$ (voir Fig. 5.3). Si la cible est mobile, toutes les raies du spectre seront déplacées de $+f_d$ dans le cas d'un rapprochement (ou de $-f_d$ dans le cas d'un éloignement) et la fréquence centrale du spectre sera alors $(f_0 + f_d)$ (ou $(f_0 - f_d)$) [THOUREL, 84; BARTON 88].

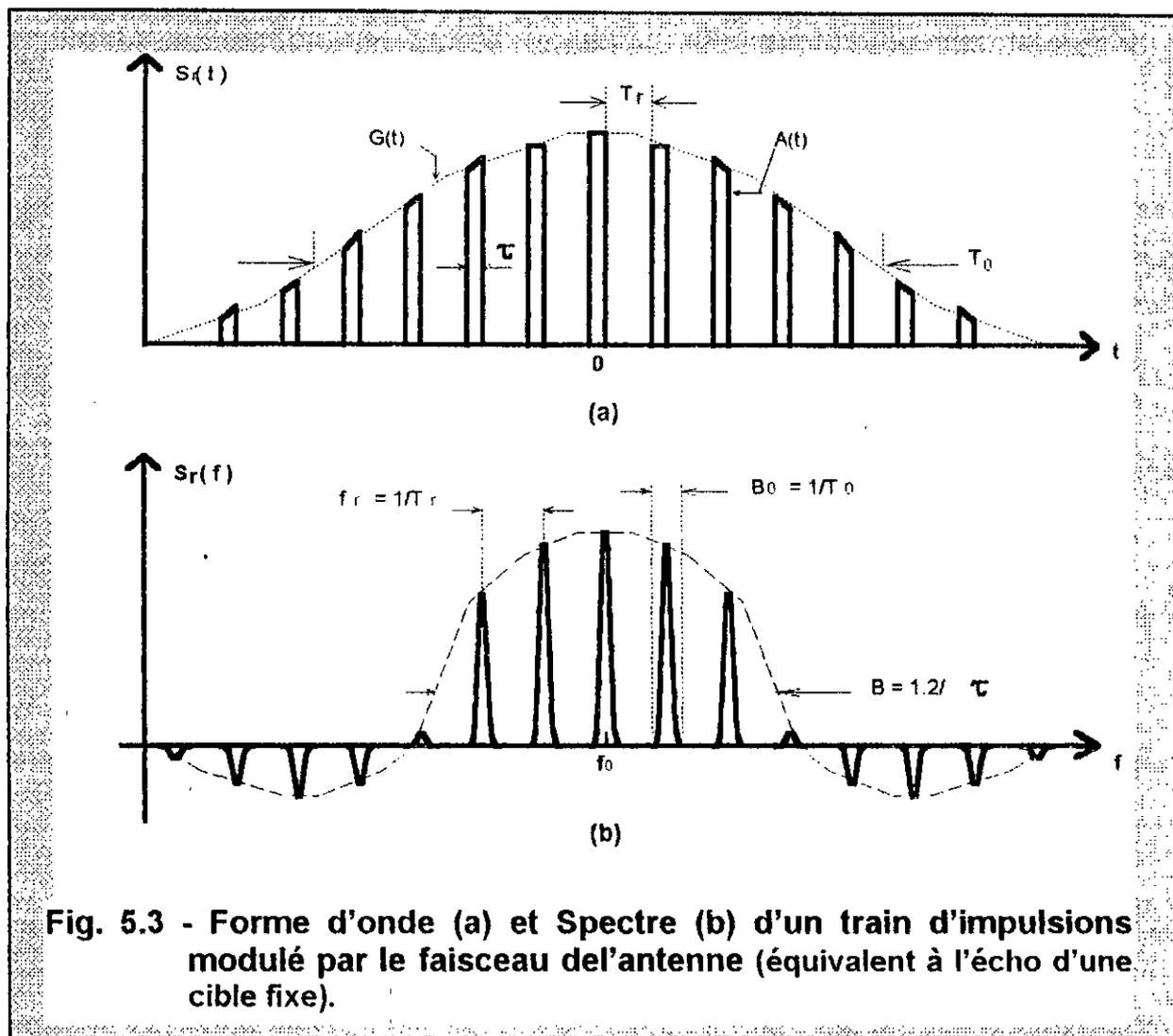
Comme le signal écho d'une cellule de résolution consiste en la superposition des échos de plusieurs points diffuseurs ayant des vitesses différentes (cf. Equation (5.11)), son spectre est aussi la superposition des spectres de ces diffuseurs, chacun décalé selon sa fréquence Doppler respective. Par conséquent, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, il faut que les fréquences Doppler (positives) de tous les diffuseurs qui se rapprochent ne dépassent pas $f_r/2$ et que les dopplers (négatifs) de tous les diffuseurs qui s'éloignent soient au-dessus de $-f_r/2$. Il faut donc avoir $|f_d| \leq f_r/2$, et donc la vitesse radiale maximale sans ambiguïté envisagée pour les cibles est:

$$v_{r \max} = \frac{\lambda f_r}{4}$$

L'information sur la distribution des vitesses des diffuseurs dans un écho est donc entièrement contenue dans n'importe quelle portion du spectre de largeur f_r . En général, il est d'usage de considérer comme spectre Doppler la portion centrale comprise entre $(f_0 - f_r/2)$ et $(f_0 + f_r/2)$. Comme l'écho est un signal complexe, il est évident que son spectre (dans la bande de base) n'est pas symétrique.

Deux cibles ayant des vitesses proches ne peuvent être séparées que si leurs raies respectives sont espacées d'au moins d'une largeur de raie B_0 , i.e., $\Delta f_d = f_r/N_c$, et par conséquent le pouvoir séparateur (ou la résolution) en vitesse est donnée par:

$$\Delta v_r = \frac{\lambda}{2} \Delta f_d = \frac{\lambda}{2 N_c T_r}$$



5.5.1 Cas d'un radar aéroporté

Lorsque le radar est porté par un avion, la vitesse propre v_a du porteur vient compliquer le problème. Les points du sol vus sous le même angle ψ par rapport à l'axe de l'avion présentent une même vitesse relative v_r telle que: [THOUREL, 84]

$$v_r = v_a \cos \psi$$

Pour un avion en vol horizontal et un sol plan, les points iso-vitesses forment des hyperboles car ils résultent de l'intersection avec le plan horizontal d'un cône d'angle au sommet 2ψ (et dont l'axe est celui de translation de l'avion) (cf. Fig. 5.4).

En effet, les échos de sol sont vus par le lobe principal et par les lobes secondaires du radar sous des angles différents, et donc le spectre des échos de sol (ou fixes) reçus s'étendent, *a priori*, de $-f_a$ à $+f_a$ (où $f_a = 2v_a/\lambda$) autour de chaque raie (cf. Fig. 5.5).

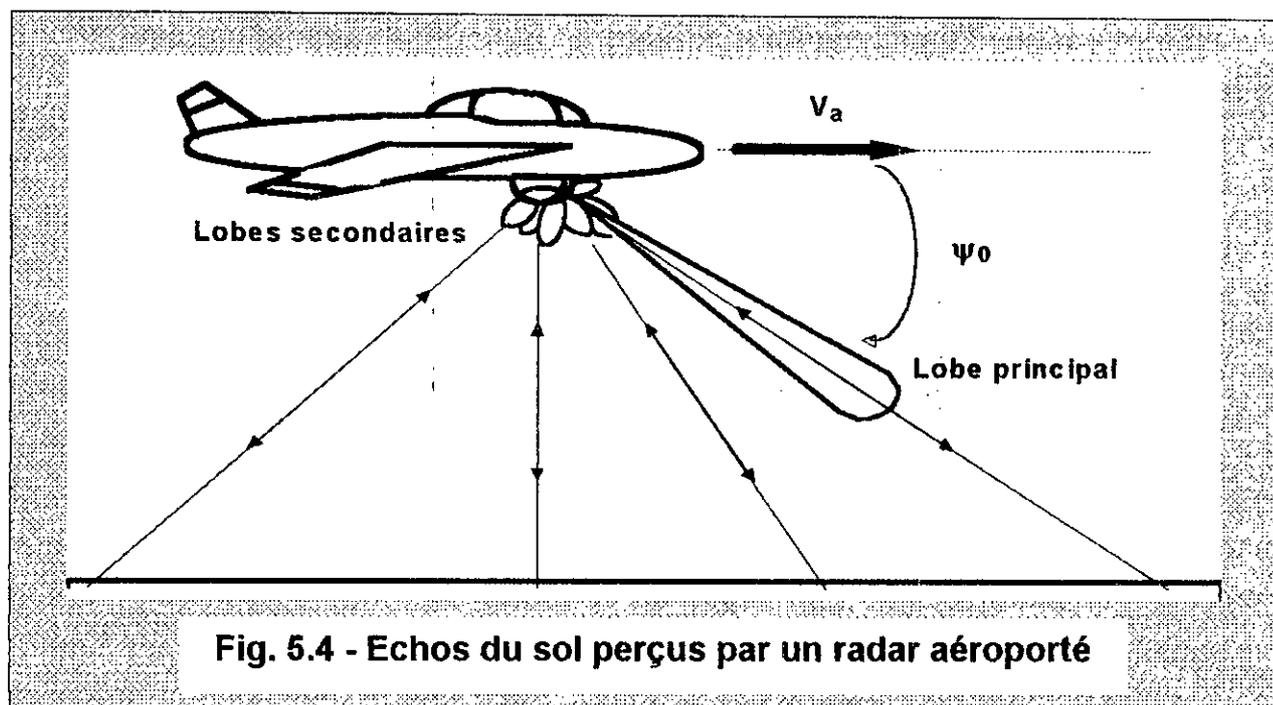


Fig. 5.4 - Echos du sol perçus par un radar aéroporté

Les échos vus par le lobe principal se présentent avec un maximum d'amplitude à la fréquence Doppler f_{dM} dépendant de l'angle de visée ψ_0 (i.e., l'angle entre l'axe de l'avion et l'axe de pointage du lobe principal) telle que:

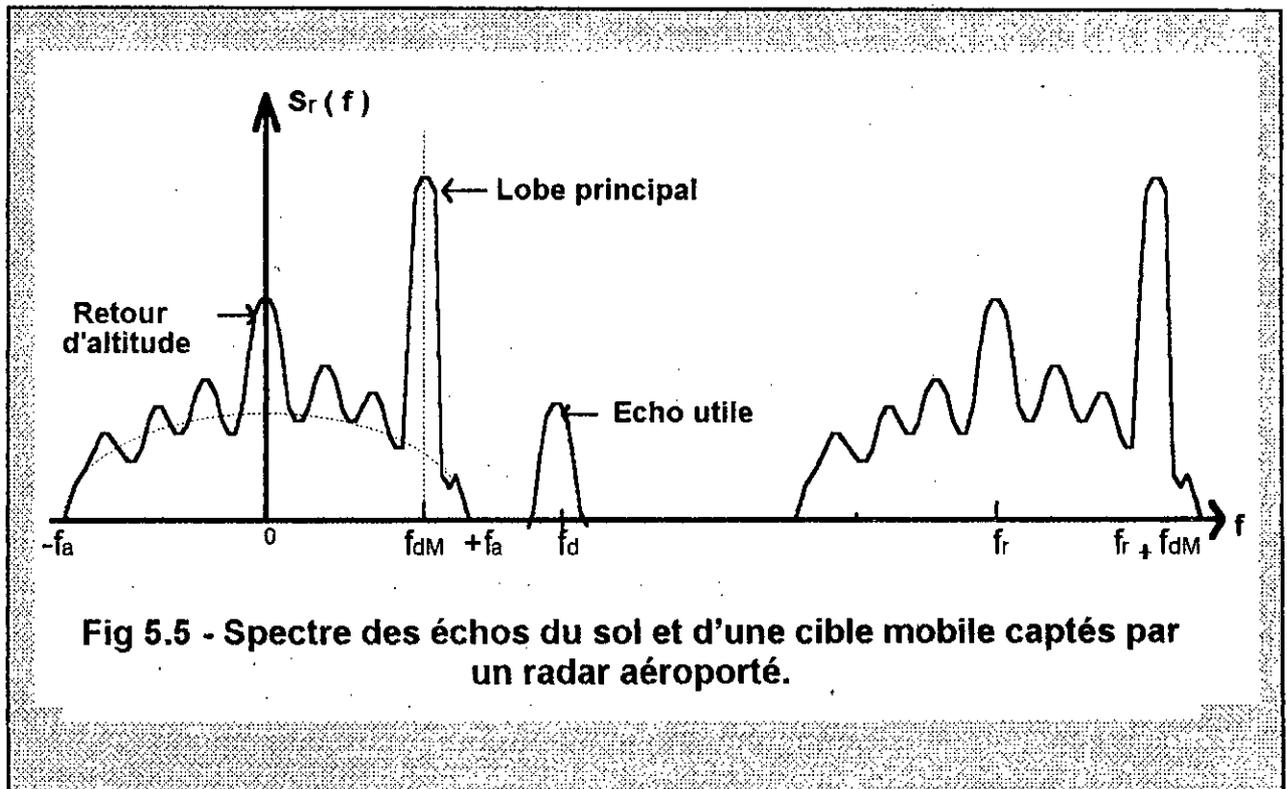
$$f_{dM} = \frac{2 v_a \cos \psi_0}{\lambda}$$

et leur étalement spectral augmente dès que l'axe de visée s'écarte de l'axe de translation de l'avion (cf. Fig. 5.5).

Les échos vus par les lobes secondaires et diffus sont atténués par rapport à ceux vus par le lobe principal. Ils sont relativement plus importants dans la direction de la verticale (ligne d'altitude) de l'avion pour laquelle le doppler est nul ($\psi = \pi/2$) car la réflectance du sol est plus importante à la verticale qu'aux incidences faibles et moyennes (Voir Fig. 5.5).

Une cible mobile apparaîtra avec son doppler f_d qui dépend des vitesses relatives de l'avion porteur du radar et de la cible; si l'avion et la cible font route à la même vitesse, $f_d = 0$ et l'écho utile sera centré sur f_0 ($\pm kf_r$). La vitesse maximale sans ambiguïté d'une cible vue par un radar embarqué est donnée par:

$$v_{r \max} = \frac{\lambda}{2} (f_r - f_{dM}) = \frac{\lambda}{2} f_{d \max}$$



et la bande utile du spectre est donnée par $B = 2 f_{d_{max}}$ centrée sur $f_0 + f_{dM} (\pm kf_T)$. Il suffit donc de considérer seulement la bande centrale (centrée sur $f_0 + f_{dM}$), les autres bandes ne sont que des reproductions de celle-ci [THOUREL, 84].

5.6 Conclusion

Des notions préliminaires sur le radar Doppler à impulsions ont été présentées dans ce chapitre. C'est, en fait, un passage en revue du fonctionnement de ce système, des caractéristiques de ses signaux, des propriétés spectrales de la suite chronologique complexe correspondante et de l'information utile à en extraire. Ceci devrait permettre de mieux cerner les conditions d'application de la modélisation paramétrique dans le domaine considéré dans ce qui suit ainsi que les résultats attendus.

CHAPITRE 6

MODELISATION ARMA DES ECHOS RADAR

6.1 Introduction

L'inconvénient majeur d'un radar est sa capacité limitée de déterminer les détails d'un objet et de percevoir les couleurs, surtout en comparaison avec les méthodes optiques. Il en résulte une interprétation souvent ambiguë des échos reçus qui ne permet pas de conclure sur divers objets [AVERY, 85].

En conséquence, un traitement des signaux est toujours nécessaire dans un système radar. Il doit être en mesure de fournir, à partir des échos reçus, des informations fiables sur la présence de cibles intéressantes dans l'environnement du radar, leurs natures, leurs positions et leurs vitesses. Afin d'atteindre la précision et la fidélité exigées et pour faire face aux besoins incessants de ce domaine, le traitement des signaux radar reste un domaine en évolution perpétuelle qui bénéficie souvent des développements réalisés dans les autres disciplines.

Dans ce chapitre, un aperçu sur la construction de la suite chronologique radar et son lien étroit avec le plan distance-azimut scruté est donné en premier lieu. Ensuite, les diverses sources de clutter se trouvant dans l'environnement radar et leurs caractéristiques y sont examinées en montrant la possibilité de les mettre en relief par une modélisation ARMA.

L'accent est surtout mis, dans ce chapitre, sur les différents aspects du traitement des signaux radar et les méthodes utilisées ainsi que les avantages que peut en apporter la modélisation ARMA. Ces avantages n'ont de sens que si la modélisation est accomplie efficacement dans les conditions réelles du radar. Cette condition peut être remplie par un usage intelligent des performances surprenantes des techniques TLS sur ce type de données. Cette thèse est appuyée par des exemples d'application de la procédure TLS à des situations radar types à la fin de ce chapitre.

Il est à noter que cette étude concerne surtout le cas courant des échos à bandes étroites; c'est à dire, le cas où la vitesse d'une cible est toujours très négligeable devant la vitesse de propagation des ondes de sorte que durant le temps de mesure le mouvement des cibles est imperceptible. Dans le cas contraire, pour les échos à bandes larges, le traitement à l'aide des transformées en ondelettes (ou wavelets) serait des plus convenables [WEISS, 94].

6.2 La suite chronologique radar

Le signal radar complexe reçu de la zone d'intérêt est échantillonné au rythme des sauts de distance, c'est à dire à la fréquence $1/\tau$ (τ est la durée d'une impulsions radar), et les échantillons peuvent être stockés dans une mémoire afin d'être analysés. La surface physique discrétisée est définie par sa position, son étendue en distance et en azimut et le nombre de balayages successifs effectués [HAYKIN et al., 82].

Le schéma de Fig. 6.1 montre un exemple d'une surface échantillonnée s'étendant sur 10 anneaux de distances constantes consécutifs de largeur δD chacun (cf. Fig 5.2 et l'équation (5.6)). Cette limite de $10 \times \delta D$ correspondrait à la distance maximale du radar sans ambiguïté. Les échantillons sont numérotés suivant l'ordre dans lequel ils sont obtenus. Les échantillons en distance sont pris suivant la cadence de la fréquence d'échantillonnage, alors que les échantillons en azimut pour une distance donnée sont pris à la fréquence de répétition des impulsions du radar, i.e., au pas du balayage radar. Durant le pas du balayage, le signal reçu correspond aux échos d'une impulsion radar.

La suite chronologique radar est, en fait, la suite des données obtenues à une distance constante, c'est à dire les échantillons prélevées à la fréquence de récurrence du radar. En pratique, chaque anneau de distance constante doit être associé à un processeur, car à chacun correspond une suite chronologique distincte. Tous les traitements se font alors en parallèle [THOMAS, 84].

A cause des contraintes de stationnarité relatives au nombre de coups par largeur du faisceau radar, N_c (cf. Section 5.4), un segment de données radar est défini comme étant N_c valeurs successives du pas de balayage à une distance donnée, il correspond à l'écho d'une seule cellule de résolution distance-azimut. Par exemple, pour $N_c=30$, les suites des échantillons numérotés 1,11,21,...,291; 11,21,31,...,301; 21,31,41,...,311;...etc, constituent des segments de données radar (voir Fig 6.2).

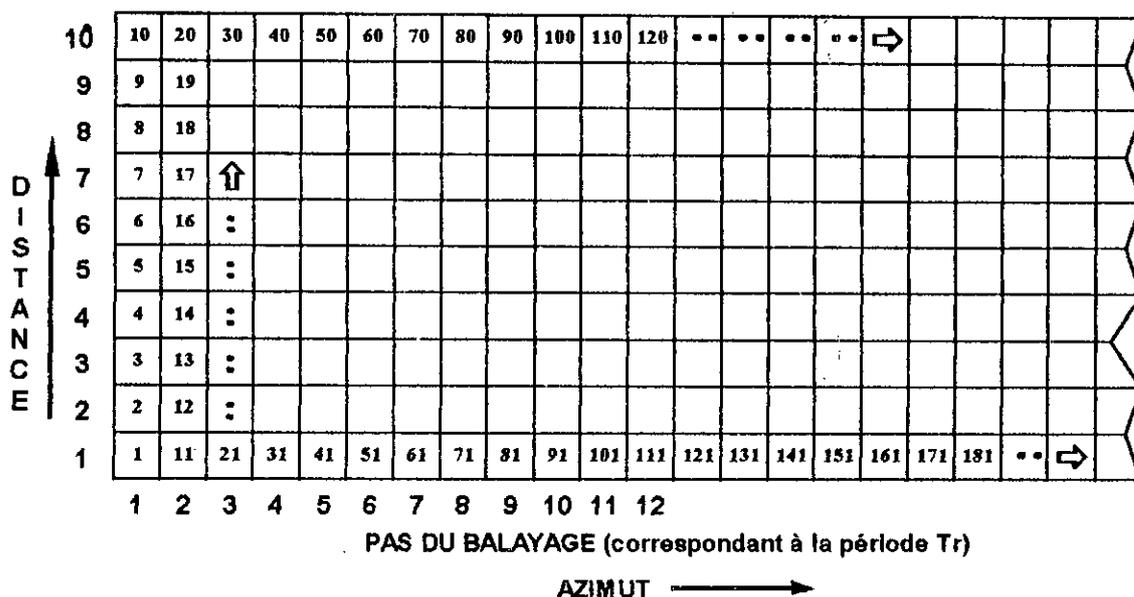


Fig. 6.1 - Correspondance entre les échantillons prélevés et la surface balayée par l'antenne radar.

Les positions des échantillons sont numérotées suivant leur ordre chronologique de période τ (ce qui correspond à un saut de distance). Le pas du balayage en azimut correspond à l'angle balayé pendant une durée égale à T_r (période de répétition des impulsions). Dans ce schéma, le rapport τ/T_r étant supposé égal à 10.

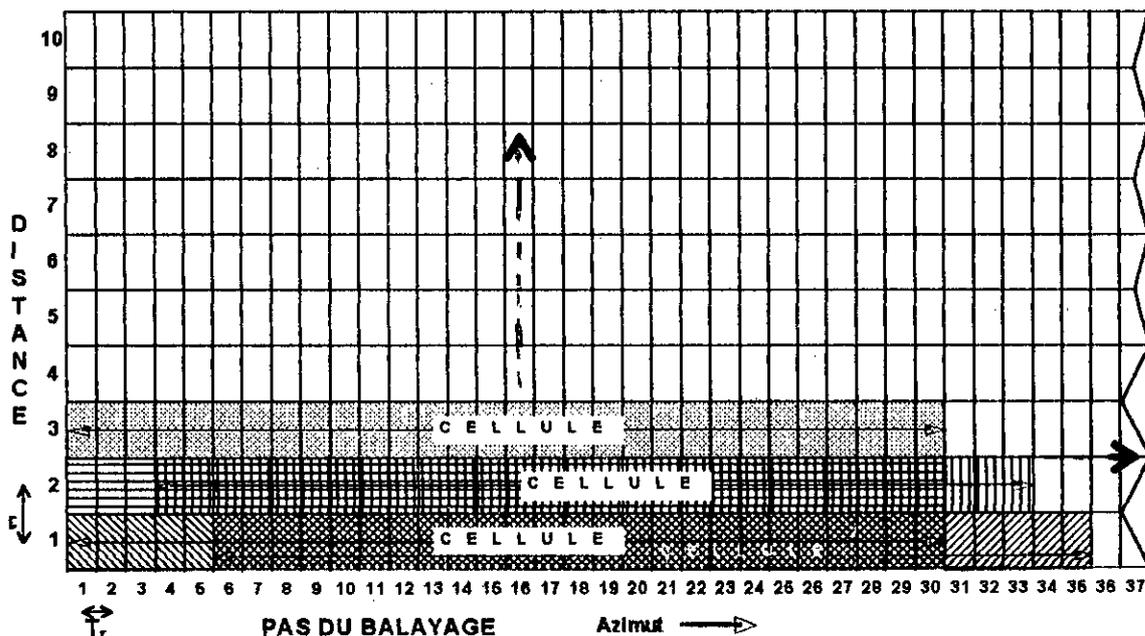


Fig. 6.2 - Segments de données correspondant aux échos renvoyés par une cellule de résolution distance-azimut en un seul balayage ($N_c=30$) et utilisés comme entrées pour le bloc de traitement.

6.3 L'environnement radar

Comme chaque objet dans l'environnement du radar renvoie à celui-ci des échos qui le représentent, le signal reçu à partir d'une cellule de résolution peut être issu d'un amalgame de réflecteurs qui ne sont souvent pas tous des cibles intéressantes. Ces échos confus très souvent indésirables, qui apparaissent sur l'écran radar et qui rendent la détection des cibles intéressantes difficile, sont baptisés en français du vocable de "*clutter*", il désigne normalement un amoncellement d'objets hétéroclites en fouillis [CARPENTIER, 90]. Les sources du clutter sont généralement: [HAYKIN et al., 82; THOMAS, 84; HAYKIN, 85]

- les objets fixes ou lentement mobiles tels que: les arbres, la végétation, les collines, la mer et les structures de construction humaines.
- les phénomènes météorologiques (et atmosphériques) comme les nuages orageux, le brouillard épais, la pluie, la neige, l'inversion atmosphérique et d'autres formes de précipitations.
- les volées d'oiseaux surtout durant les saisons de migration.

Le clutter se manifeste souvent sous deux aspects: l'un en cible isolée; i.e., comme un diffuseur ponctuel (e.g. un château d'eau), et l'autre en cible composite qui est le plus commun et est caractéristique de la plupart des clutter du sol, de l'atmosphère et des volées d'oiseaux. Le clutter composite consiste donc en un volume de plusieurs diffuseurs individuels de distribution aléatoire dont l'intensité des échos fluctue suivant les mouvements relatifs (ou agitations intrinsèques) des diffuseurs et son étendue spatiale peut être sur plusieurs cellules de résolution. Un tel clutter intense et étendu peut facilement masquer l'écho d'une cible intéressante (comme un avion).

Comme les caractéristiques physiques des mouvements des divers types clutter sont différentes, les spectres Doppler de leurs échos (i.e., les distributions de vitesses des diffuseurs qui les composent) le sont aussi.

En effet, les échos radar des objets de sol (stationnaires) ont une DSP concentrée dans une bande de fréquences très étroite autour de la fréquence Doppler zéro. La faible étendue spectrale du clutter du sol est due essentiellement à la modulation causée par le mouvement de l'antenne et, peut être, aux mouvements de la végétation (ou autres objets) causés par le vent.

D'autre part, les réflexions des nuages orageux, de la pluie, de la neige et d'autres conditions météorologiques ont une étendue spectrale plus grande que celle du clutter du sol à cause de leurs mouvements plus vigoureux. Dans le cas de vents forts, le mouvement global peut aussi introduire un décalage de la fréquence centrale de la DSP.

Pour le cas des échos d'une volée d'oiseaux migrateurs, la fréquence centrale de la DSP est sensiblement décalée de la fréquence Doppler zéro car la vitesse de la volée est importante et peut dépasser les 90 Km/h lors des vents favorables. La modulation due aux battements d'ailes et les mouvements relatifs des oiseaux dans la volée rendent la bande de fréquences de la DSP plus large que celle du clutter atmosphérique.

Comme le clutter atmosphérique est généré par la superposition des réflexions de plusieurs diffuseurs ponctuels à peu près identiques et indépendants (e.g., les gouttes de pluie) et d'après le théorème de la limite centrale, il est supposé que la distribution de vitesses du clutter atmosphérique soit gaussienne. D'une manière similaire, la DSP du clutter généré par une volée d'oiseaux tend vers une distribution gaussienne. D'autre part, à cause de la nature diversifiée des réflecteurs qui génèrent le clutter du sol, il n'est pas facile de caractériser ses statistiques. Les données expérimentales ont montré que l'enveloppe complexe est de distribution de Weibull [HAYKIN, 85].

Toutefois, il a été démontré empiriquement que les DSP dues aux différentes sources du clutter radar (e.g. cibles au niveau du sol, échos de la mer, nuages d'orage) peuvent être approximées par des fonctions gaussiennes dont les paramètres dépendent du type des diffuseurs. De plus, en se basant sur le fait que la fonction rationnelle qui s'adapte le mieux à une fonction gaussienne est la fonction tout-pôle d'ordre 2 ou 3, il a été donc vérifié et conclu qu'un processus de clutter radar peut être bien modélisé par un processus autoregressif (AR) d'ordre faible (2 ou 3) [HAYKIN et al., 82; HAYKIN, 85].

Cependant une paramétrisation compacte des DSP des échos résultant de la superposition de deux ou plusieurs processus de clutter et/ou cibles, ou de clutter et du bruit blanc gaussien du récepteur, (qui sont individuellement modélisables par des processus AR), est obtenue par un modèle ARMA [THOMAS, 84; THOMAS & HAYKIN, 86].

Dans le cas du clutter radar, l'ordre p du processus ARMA(p,q), qui représente le nombre de pics spectraux, indique aussi le nombre minimum des sources du clutter (ou des diffuseurs) qui interfèrent dans un même écho. Les q zéros du modèle qui représentent les creux et les vallées dans le spectre, n'ont aucune signification physique dans ce contexte, ils servent surtout à séparer des pics spectraux très rapprochés, à délimiter leurs bords et à réduire le niveau du bruit spectral. Les ordres ARMA possibles pour modéliser les échos représentant des situations probables de l'environnement du radar sont restreints à $p \leq 6$ et $q \leq 3$ [THOMAS, 84].

6.4 Utilité de la modélisation ARMA

Le rôle du clutter dans le traitement du signal radar est considérablement dépendant de l'application. Lorsqu'il s'agit d'obtenir une détection fiable d'une cible dans un environnement dominé par le clutter, le clutter est vu comme une source d'interférences et le traitement du signal est utilisé pour supprimer cet effet dégradant. D'un autre côté, le clutter est considéré comme une source d'information lorsqu'il s'agit d'identifier les zones à risques dans l'environnement du trafic aérien.

Le traitement des échos radar doit prendre en considération les caractéristiques suivantes:

- 1) le clutter est un processus stochastique à variations lentes et de statistiques inconnues
- 2) la largeur spectrale des échos d'une cible est plus faible que celles du clutter atmosphérique et du clutter d'oiseaux et elle est égale ou légèrement plus grande que celle du clutter du sol. Dans tous les cas, la présence d'une cible produit un changement brusque dans la DSP du signal radar.
- 3) Une cible est localisée dans une seule cellule de résolution alors que le clutter occupe plusieurs cellules suivant la distance et l'azimut.

La modélisation ARMA de la suite chronologique radar apporte une aide considérable au traitement des signaux radar. Son intérêt est présenté dans ce qui suit:

6.4.1 Classification du clutter

Dans un environnement de trafic aérien, les turbulences atmosphériques et les activités des oiseaux peuvent être de véritables menaces pour la sûreté de l'avion, surtout lorsque le clutter est supprimé des indicateurs (e.g., PPI: Plan Position Indicator) pour améliorer la détection des cibles mobiles (e.g., avion) comme dans le cas des radars MTI conventionnels.

Au lieu de rejeter le clutter comme un signal indésirable (du point de vue de la détection de cible), il est plutôt intéressant d'exploiter l'information qu'il contient sur les conditions de l'environnement. L'analyse du clutter permet d'identifier ses sources et de le classer suivant le niveau de danger qu'il représente pour le trafic aérien. Le traitement du clutter peut fournir une précieuse assistance pour un aiguillage sûr et efficace des avions autour des zones à risque.

Après que les premières tentatives de classification du clutter basées sur la distribution spatiale des amplitudes ont été sans succès, des travaux récents considèrent que le contenu spectral du clutter peut constituer une bonne base pour la classification [HAYKIN, 85]. En

effet, les différentes sources de clutter peuvent être facilement discriminées en fonction de leurs caractéristiques spectrales (cf. Section 5.3).

De plus, il a été montré dans [HAYKIN, 85] que la position du premier coefficient de réflexion du signal radar à l'intérieur du cercle unité peut indiquer le type de clutter (lorsqu'il est généré par une seule source). En effet, le déplacement radial du premier coefficient de réflexion par rapport au cercle unité est proportionnel à la largeur spectrale du processus et son déplacement angulaire par rapport à l'axe des réels est proportionnel au décalage Doppler.

La construction d'une base de données des situations possibles typiques de l'environnement radar sous forme de modèles ARMA est possible grâce à la parcimonie et à la haute résolution spectrale d'une telle paramétrisation. En obtenant le modèle ARMA correspondant aux données radar courantes sous analyse et en le comparant à ceux des situations typiques, le clutter peut être ainsi identifié et classé. La meilleure interprétation du clutter radar reste sûrement celle obtenue par la modélisation ARMA, même si, quelquefois, la distance entre les situations typiques n'est pas significative [THOMAS, 84].

6.4.2 Détection de cibles

Plusieurs problèmes de détection rencontrés en pratique peuvent être formulés comme étant la détection d'une cible dans un champ de bruit bidimensionnel dont une dimension représentant l'azimut et l'autre représentant la distance. Sous l'hypothèse de la stationnarité locale, le champ de bruit possède des statistiques locales invariantes. La présence d'une cible dans une cellule de résolution va rompre une telle homogénéité statistique et les statistiques de la cellule testée vont changer relativement à celles de ses voisines. De plus, il est généralement supposé que le champ de bruit est corrélé en azimut et pas en distance [ZHANG et al., 91].

La détection d'un écho de cible $s(t)$ en présence du clutter $c(t)$ et du bruit du récepteur $b(t)$ peut être décrite par le modèle:

$$\begin{aligned} \text{Hypothèse H1 (cible présente): } & x(t) = s(t) + c(t) + b(t) \\ \text{Hypothèse H2 (cible absente): } & x(t) = c(t) + b(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$t = l - N_c + 1, \dots, l$$

où $x(t)$ est le signal complexe reçu à partir de la $l^{\text{ème}}$ cellule distance-azimut. L'enregistrement des données $x(t)$ est obtenu à partir de l'échantillonnage de N_c échos radar consécutifs d'un anneau de distance constante spécifique lorsque le radar scrute la $l^{\text{ème}}$ cellule en azimut. N_c est le nombre d'impulsions illuminant la cellule distance-azimut et dépendant de la largeur du faisceau d'antenne.

Comme la DSP du processus du clutter n'est pas constante, le problème de la détection est un problème classique de la détection d'un signal dans un bruit additif coloré. Pour résoudre ce problème, le logarithme du rapport de vraisemblance défini par:

$$\text{LRV} = \text{Log} \left\{ \frac{f(x(t)/H1)}{f(x(t)/H2)} \right\}$$

est calculé et comparé à un seuil. $f(x(t)/H_i)$, $i=1,2$; est la fonction de densité de probabilité conditionnelle conjointe, sachant que H_i , $i=1,2$ est vraie. Le seuil est choisi de façon à avoir un taux de fausses alarmes constant. Si, pour un résultat du test LRV, le seuil est dépassé, il est décidé que la cible est présente; autrement, il est décidé qu'il n'y a pas de cible.

Dans une classe d'algorithmes de détection radar, dite MTD (Moving Target detector), le test LRV est calculé en supposant que le clutter est gaussien avec des caractéristiques spectrales moyennes [PORAT & FRIEDLANDER, 84; HAYKIN, 85]. Cependant, en réalité, l'algorithme MTD est sous-optimal car des changements brutaux dans les conditions de l'environnement peuvent rendre la DSP réelle du clutter très différente de la DSP moyenne supposée.

Une approche plus efficace est d'utiliser un algorithme de détection adaptatif qui répond aux variations du clutter. Un exemple d'un tel algorithme est proposé dans [HAYKIN, 85], il est basé sur les processus d'innovations (ou erreurs de prédiction) de $x(t)$ issus de l'application de ce signal aux filtres blanchisseurs correspondants aux modèles respectifs des situations $H1$ et $H2$ de (6.1). Cet algorithme est appelé IBDA (Innovations-Based Detection Algorithm), il est très général et très puissant dans son application aussi bien pour le problème du radar que pour les systèmes de communication et sonar.

Le test LRV du IBDA s'exprime en fonction des erreurs de prédiction de $x(t)$ pour chacune des situations $H1$ et $H2$; i.e. $e_p(t/H1)$ et $e_p(t/H2)$. et de leurs variances respectives $\sigma_{e_p}^2(t/H1)$ et $\sigma_{e_p}^2(t/H2)$ comme suit: [HAYKIN, 85]

$$\lambda_{\text{IBDA}}(l) = \frac{1}{2} \sum_{t=l-N_c+1}^l \left\{ \ln \left[\frac{\sigma_{e_p}^2(t/H2)}{\sigma_{e_p}^2(t/H1)} \right] + \frac{|e_p(t/H2)|^2}{\sigma_{e_p}^2(t/H2)} - \frac{|e_p(t/H1)|^2}{\sigma_{e_p}^2(t/H1)} \right\} \quad (6.2)$$

Si, par exemple, l'hypothèse $H2$ est vraie, la prédiction $\hat{x}(t/H2)$ est optimale au sens des moindres carrés alors que $\hat{x}(t/H1)$ ne l'est pas et la valeur quadratique de l'erreur de prédiction normalisée $|e_p(t/H2)|^2 / \sigma_{e_p}^2(t/H2)$ va être en moyenne plus petite

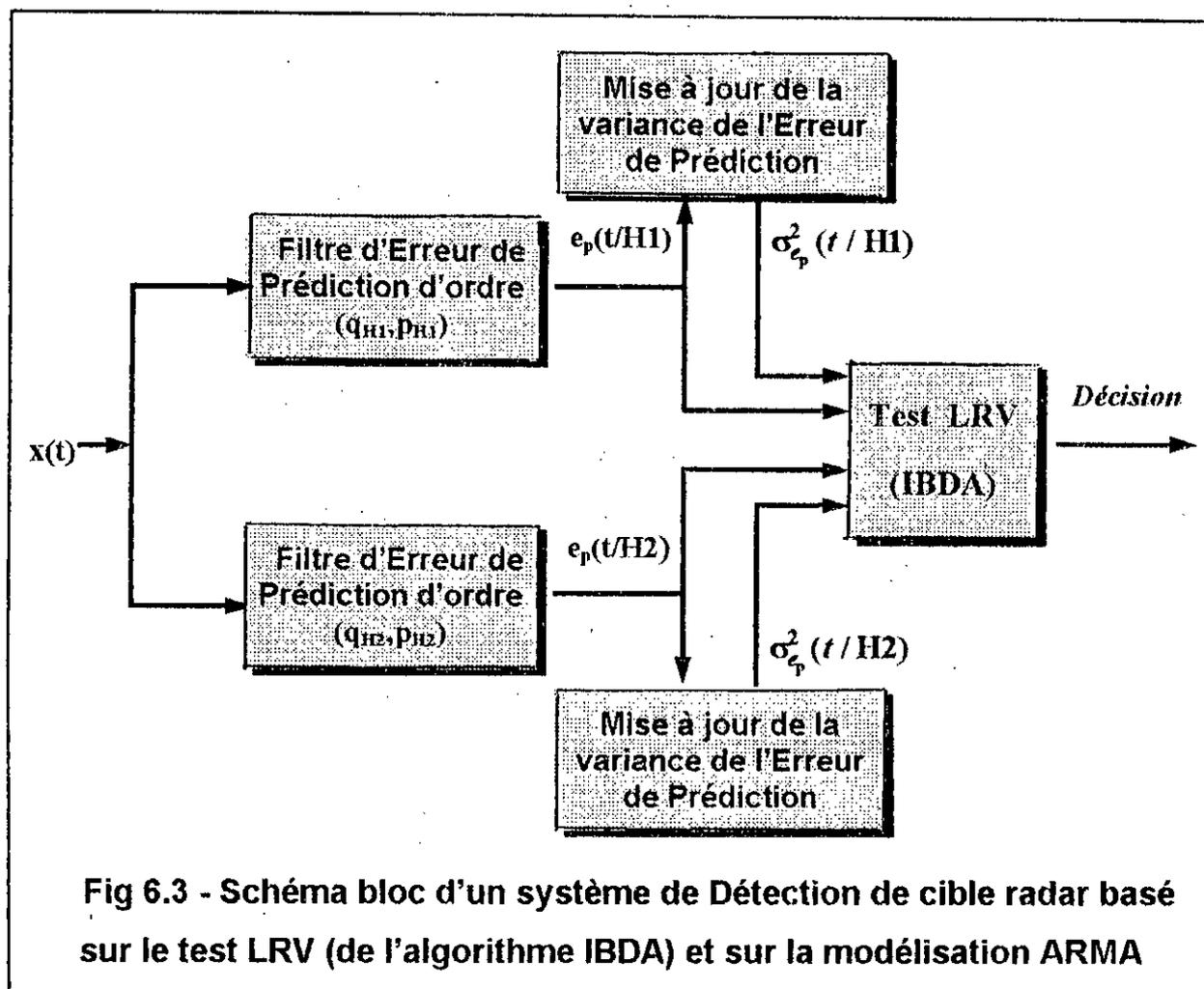
que $|e_p(t/H1)|^2 / \sigma_{e_p}^2(t/H1)$. La situation est inversée si l'hypothèse H1 est vraie. Cette différence dans les tailles relatives des puissances normalisées des erreurs de prédiction est le mécanisme de base par lequel le LRV du IBDA opère.

Les décisions de la détection pour l'algorithme IBDA doivent être faites non seulement sur la cellule distance-azimut représentée par la suite de données $x(t)$, $t = l-Nc+1, \dots, l$; mais aussi sur le reste des cellules. Celles-ci incluent les cellules précédente et suivante (le long des lignes de distance constante) représentées par les suites de données $x(t)$ pour $t = l-Nc, \dots, l-1$ et $t = l-Nc+2, \dots, l+1$ respectivement.

Les variances $\sigma_{e_p}^2(l/H1)$ et $\sigma_{e_p}^2(l/H2)$ $l=1,2, \dots$, sont estimées par une mise à jour récursive de la moyenne temporelle, de balayage en balayage, des valeurs de $|e_p(l/H1)|^2$ et $|e_p(l/H2)|^2$ obtenues le long de l'anneau de distance (i.e., pour chaque valeur de l). Les valeurs a priori de ces variances sont estimées en effectuant la moyenne des valeurs quadratiques des erreurs de prédiction d'un nombre assez grand de cellules de chaque côté (en azimut) de la cellule l considérée. Les meilleurs résultats d'estimation sont obtenus avec le IBDA en utilisant comme seuil l'estimée médiane des LRV $\lambda_{IBDA}(l)$ d'un nombre égal de cellules de part et d'autre de la cellule d'intérêt suivant les lignes d'azimut constant.

Dans [ZHANG et al., 91], un autre type de test statistique est proposé. C'est aussi un test LRV mais basé, cette fois, sur la comparaison des statistiques de la cellule de résolution testée avec celles d'un ensemble de cellules se trouvant le long de la même ligne d'azimut constant. La présence d'une cible dans une cellule testée se traduit par le fait que le modèle représentant celle-ci soit complètement différent du modèle moyen des autres cellules de même azimut.

En général, les algorithmes de détection utilisant le test LRV sont basés sur les processus d'innovations (ou d'erreurs de prédiction) issus de l'application du signal $x(t)$ aux filtres blanchisseurs correspondants aux modèles respectifs des situations H1 (cible présente) et H2 (cible absente) de (6.1).



En exploitant le fait que la modélisation ARMA du signal radar arrive à reproduire assez fidèlement les diverses situations de l'environnement du radar, son application dans les algorithmes de détection de cibles peut être très bénéfique. En effet, si pour chacune des hypothèses $H1$ et $H2$, est associé un filtre d'erreur de prédiction correspond à l'inverse du modèle $ARMA(p_{Hi}, q_{Hi})$; $i=1, 2$, adéquat à la situation (au lieu des modèles AR insuffisants) et si à la place d'une méthode de modélisation adaptative (pour le cas ARMA, qui n'est pas évidente), une méthode efficace et très rapide est utilisée, e.g., la procédure TLS, permettant un traitement parallèle de blocs de données durant le temps de silence radar, une fiabilité accrue des algorithmes de détection est sûrement obtenue. Un schéma blocs d'un tel système de détection est donné par Fig 6.3.

Il existe une méthode spectrale fiable pour détecter une cible dans un environnement dominé par un clutter intense. Cette méthode a été proposée par [TSAO et al., 91], elle est basée sur le développement de Gabor dans le domaine spectral. Ce développement de Gabor consiste en la décomposition d'un signal en signaux élémentaires gaussiens localisés en

fréquences et dans le temps, le calcul de ses coefficients peut se faire efficacement par plusieurs méthodes [QIAN & CHEN, 93; STEWART et al., 95; FRIEDLANDER & ZEIRA, 95]. La méthode de détection proposée part du principe que la composante cible du signal reçu est représentée par des bandes plus étroites que celles de la composante clutter. Pour détecter un signal à bande étroite interférant dans un bruit coloré large bande, le développement de Gabor est appliqué sur la DSP estimée pour les échos reçus. Dans ce contexte, la largeur de la fonction fenêtre de Gabor est traitée comme un paramètre de régulation. Les signaux dont la largeur spectrale est plus grande que cette fenêtre sont développés en des composantes DC dans les coefficients du développement. Ainsi, les signaux à bandes larges ou bruits peuvent être facilement supprimés. La performance et la précision de cette méthode sont certainement améliorées lorsqu'une modélisation ARMA est utilisée pour estimer la DSP du signal.

6.4.3 Simulation de l'environnement radar

Comme les suites chronologiques ARMA peuvent être générés en laboratoire pour simuler les échos radar en bande de base de toutes sortes de situations probables, des chercheurs ou des acquéreurs peuvent injecter ces données dans les systèmes radar pour les tester et évaluer leurs performances. Cette méthode de test est plus simple, plus rapide et moins coûteuse que l'installation et l'essai du système dans un environnement réel.

6.4.4 Identification de cibles

Cette application diffère des applications décrites précédemment par le fait que la suite chronologique considérée n'est pas une suite temporelle d'échos radar, mais un ensemble de mesures de la SER (ou d'amplitudes de l'écho) d'une cible donnée pour un nombre de fréquences d'émission équidistantes (généralement 20 fréquences suffisent) [CARRIERE & MOSES, 88].

Les modèles ARMA peuvent être utilisés pour estimer la réponse impulsionnelle (ou la signature) d'une cible radar. Le modèle ARMA décrit la cible comme un ensemble de points diffuseurs et dont les paramètres sont directement liés aux attributs physiques de ces centres. La modélisation ARMA des signatures radar est capable de distinguer entre différents avions et entre les aspects d'un même avion sous différents angles [CARRIERE & MOSES, 88]. Il est donc possible d'extraire des informations sur la forme (caractéristiques géométriques) et l'orientation d'une cible à partir des échos radar. Ces informations peuvent être comparées à une base de données (catalogue) afin de classer et d'identifier une cible inconnue.

6.5 Applications de la procédure TLS

L'adaptation de beaucoup d'algorithmes de modélisation des suites chronologiques de la littérature statistique et technique au problème du radar n'est pas évidente. Le problème du radar est conditionné par plusieurs facteurs. Ces derniers sont résumés ci-dessous.

- La démodulation cohérente est utilisée dans le radar Doppler à impulsion; les données sont complexes.
- Les segments de données à analyser de la suite chronologique radar sont très courts, de 10 à 50 échantillons (par cible ponctuelle). Si des segments plus longs sont traités, la stationnarité n'est plus assurée car les échos considérés proviennent de différentes sources. La plupart des techniques de modélisation présentées dans la littérature ont été implémentées avec des suites de 100 éléments et plus. Les algorithmes qui doivent être utilisés pour ce problème doivent être robustes pour des longueurs de données beaucoup plus faibles.
- La complexité de l'algorithme de traitement doit être assez faible pour permettre que tous les calculs nécessaires soient effectués durant T_r (période de répétition des impulsions de l'ordre d'une milliseconde) en supposant un traitement séquentiel.
- Comme le nombre total des paramètres du modèle doit être inférieur au nombre d'observations, (en pratique, il doit être moins que la moitié (cf. Chapitre 2)) et comme la longueur des données est très restreinte pour des raisons de stationnarité, l'ordre ARMA ne doit pas être grand.

Un ordre ARMA faible implique une perte de la résolution dans les DSP résultantes. Cependant, dans ces applications, l'objectif est de modéliser les échos radar issus des combinaisons typiques de situations probables de se produire dans un environnement d'un radar de surveillance, soit pour la classification du clutter ou pour la détermination des filtres d'erreur de prédiction appropriés pour les algorithmes de détection de cibles. La résolution n'est donc pas la première priorité. Des modèles ARMA d'ordres faibles offrent des avantages sur les modèles à haute résolution dans la complexité des calculs.

La procédure TLS paraît tout à fait indiquée pour le problème du radar par ses performances et ses caractéristiques (e.g., simplicité des calculs, rapidité de convergence et de traitement) comme il a été montré au Chapitre 4. Cette procédure est de loin plus attractive que les méthodes MV ou GKM utilisées dans ce contexte dans les travaux de [THOMAS, 84; THOMAS & HAYKIN, 86] et qui demandent énormément de calculs.

Comme il a été quasiment impossible d'obtenir des données radar réelles durant l'élaboration de ce travail (à cause de la conjoncture sécuritaire difficile), des données simulées pour le clutter et les cibles radar sont utilisées pour illustrer la performance de la procédure TLS dans leur modélisation ARMA.

6.5.1 Simulation des données

Il existe plusieurs méthodes de génération de données radar représentant les différents types de clutter et de cibles dans la littérature.

Babu et Naidu ont proposé une simple procédure [BABU & NAIDU, 87] pour générer un clutter composite bimodal (issu de deux sources différentes) en utilisant un processus ARMA(4,4) (ou ARMA(2,2) pour le cas complexe) dont les zéros se trouvent dans la même direction que les pôles.

Il est aussi possible de générer un clutter Weibull à partir d'un bruit blanc gaussien [LI & YU, 89]. En effet, étant donnée la structure de la FAC ou la DSP du clutter Weibull cherché, la FAC correspondante dans le domaine gaussien est retrouvée en résolvant un système d'équations non linéaire, celle-ci permettra de trouver les paramètres du filtre AR la caractérisant. Ainsi les données du clutter Weibull sont générées en injectant à l'entrée du filtre AR un bruit blanc gaussien et en appliquant à sa sortie les transformations non linéaires permettant le passage de la distribution de Gauss à celle de Weibull (cf. Annexe E).

Pour simuler les échos d'une cible comme un avion, [MARTIN & MULGREW, 90] envisagent deux modèles; l'un pour les échos de la cellule de l'avion et l'autre pour les échos produits par les pales de l'hélice. Souvent, pour des raisons de simplicité, seulement les échos de la cellule sont considérés dans les simulations de cible.

En général, le modèle générant le signal renvoyé par la cellule d'un avion (en bande de base) consiste en une exponentielle modulée en amplitude par une fonction gaussienne dépendant de l'ouverture du faisceau d'antenne [THOMAS, 84; THOMAS & HAYKIN, 86]. Le signal renvoyé par une cible est généralement donné par: [BARTON,88]

$$s(k) = \exp\left[-2.77 \frac{(k-k_0)^2}{N_c^2}\right] \exp(j2\pi f_d(k-k_0)) \quad (6.3)$$

de sorte que son amplitude est égale à 0.5 lorsque $|k-k_0|=N_c/2$ où k_0 est le compteur d'échantillons contenant le centre de la cible, et f_d est sa fréquence Doppler normalisée par rapport à la fréquence de répétition des impulsions f_r .

Pour illustrer l'efficacité des techniques TLS dans le traitement des données radar, quatre situations radar comprenant chacune deux sources de clutter sont simulées dans ce qui suit. Une situation radar créée par trois sources de clutter a été étudiée dans [SADI AHMED & DERRAS, 94]

Situation 1: Clutter Sol+Turbulence Atmosphérique

Le décalage Doppler du clutter sol étant nul et celui du clutter atmosphérique est de 0.20. Les largeurs spectrales de leurs DSP à -10dB sont de 0.05 et de 0.11 respectivement pour le clutter sol et le clutter atmosphérique.

Situation 2: Sol + volée d'oiseaux migrants

Le clutter sol étant le même que celui de *Situation 1*. Les échos renvoyés par la volée possèdent une fréquence Doppler de 0.275 et une étendue spectrale de 0.25 à -10dB.

Situation 3: Turbulence Atmosphérique+ volée d'oiseaux migrants

Dans cette situation les mouvements de la turbulence atmosphérique et des oiseaux sont de sens opposés. La turbulence avance radialement vers le radar avec une fréquence Doppler de 0.2 alors que la volée d'oiseaux s'en éloigne avec une fréquence de -0.125. Leurs étendues spectrales respectives à -10 dB de leur DSP sont 0.11 et 0.25.

Situation 4: Turbulence Atmosphérique+ Cible (un avion)

Dans ce cas, les échos reçus proviennent d'un avion noyé dans un clutter atmosphérique identique à celui des *Situations 1* et 3. La fréquence Doppler de l'avion est 0.35 et le rapport cible à clutter (RCC) étant de -6dB. Le RCC est un rapport de puissances ou d'énergies. Comme la cible possède une énergie finie (cf. (6.3)) et le clutter est un processus à puissance moyenne finie, le RCC est calculé, dans ce cas, en considérant soit la puissance moyenne de la cible ou l'énergie du clutter sur N_c éléments de données.

En prenant $N_c=30$, des segments de 30 données de 10 réalisations indépendantes sont considérés pour chacune des situations. Les 10 réalisations correspondraient aux enregistrements de 10 balayages successifs d'une même cellule distance-azimut. Des séquences de bruit blanc sont ajoutées à toutes les données avec un RSB de 3dB pour simuler le bruit thermique du récepteur radar.

6.5.2 Résultats

L'application de la procédure TLS aux segments de 30 données bruitées des différentes situations radar considérées a permis d'obtenir les résultats suivants.

Les modèles moyens sélectionnés par les critères FICM pour les 10 réalisations de toutes les situations sont présentés dans le Tableau 6.1 où les Critères 1 à 5 sont définis dans la Section 4.3.2.

Tableau 6.1 Modèles Sélectionnés par les critères FICM

	<i>Situation 1</i>	<i>Situation 2</i>	<i>Situation 3</i>	<i>Situation 4</i>
Critère 1	AR(4)	AR(5)	AR(3)	ARMA(6,2)
Critère 2	AR(6)	ARMA(5,1)	ARMA(3,1)	ARMA(6,2)
Critère 3	AR(4)	AR(5)	AR(6)	ARMA(6,2)
Critère 4	AR(5)	ARMA(5,1)	ARMA(3,1)	ARMA(6,2)
Critère 5	ARMA(4,1)	ARMA(5,1)	ARMA(3,1)	ARMA(6,1)

Pour les modèles ARMA ($q \neq 0$) sélectionnés, l'ordre m des modèles AR longs correspondants est le plus souvent $m=9$ ou 12 pour toutes les situations.

Les paramètres des modèles ARMA estimés pour chacune des situations sont déterminés en utilisant les techniques TLS; Technique I et Technique II. Les résultats moyens obtenus pour les 10 balayages sont montrés dans le Tableau 6.2. Comme il était attendu (cf. Chapitre 4), Technique II n'aboutit pas toujours à des modèles à phases minimales et sa convergence nécessite plus d'itérations en comparaison avec Technique I.

Les graphes des Fig. 6.4 à 6.7 représentent les différentes DSP des modèles moyens approximant les quatre situations radar.

D'après Fig 6.4, 6.5 et 6.6, des DSP satisfaisantes avec d'infimes biais sont obtenues en utilisant les modèles AR purs sélectionnés. Cependant, les modèles ARMA parviennent à offrir des DSP relativement plus précises pour ce qui est des positions des pics et de leurs largeurs spectrales. Ces DSP sont plus proches des DSP réelles. Pour le modèle ARMA(6,2) de la Situation 4, Fig 6.7 montre que la DSP fournie par Technique I est nettement meilleure que celle de Technique II.

Tableau 6.2 : Résultats moyens (sur 10 balayages) obtenus par les techniques TLS

	Modèle	Technique I				Technique II			
		# modèles phase min.	# itérations moyens	Pôles moyens	Zéros moyens	# modèles phase min.	# itérations moyens	Pôles moyens	Zéros moyens
Situation 1	ARMA(4,1)	10	10	.42 EXP(-j.15π) .60 EXP(j.29 π) .91 EXP(j.0 π) .89 EXP(j.40 π)	.30 EXP(j.19 π)	8	18	.38 EXP(-j.12 π) .65 EXP(j.33 π) .91 EXP(-j.01 π) .89 EXP(j.41 π)	.30 EXP(j.06π)
Situation 2	ARMA(5,1)	10	10	.76 EXP(j.41π) .68 EXP(j.00π) .66 EXP(j.43π) .89 EXP(j.00π) .81 EXP(-j.43π)	.34 EXP(j.44π)	7	15	.62 EXP(-j.41π) .67 EXP(j.03π) .69 EXP(j.45π) .89 EXP(j.0 π) .78 EXP(j.46π)	.19 EXP(j.46π)
Situation 3	ARMA(3,1)	10	11	.37 EXP(j.12 π) .82 EXP(j.38 π) .79 EXP(-j.18π)	.38 EXP(j.29π)	7	10	.81 EXP(j.39 π) .38 EXP(j.11 π) .79 EXP(-j.19π)	.29 EXP(j.30π)
Situation 4	ARMA(6,2)	10	13	.54 EXP(j.04π) .59 EXP(j.02π) .61 EXP(j.33π) .44 EXP(-j.29π) .90 EXP(j.40π) .92 EXP(-j.29π)	.18 EXP(j.40π) .56 EXP(-j.29π)	6	16	.68 EXP(j.08π) .71 EXP(-j.02π) .71 EXP(j.31π) .57 EXP(-j.34π) .84 EXP(j.40π) .89 EXP(-j.30π)	.07 EXP(j.42π) .46 EXP(-j.15π)

Comme le décalage Doppler et l'étendue spectrale constituent des critères d'identification des sources de clutter, les moyennes des positions et des largeurs spectrales des pics les plus importants obtenus pour chaque segment de données d'une situation radar sont calculées et présentées dans le Tableau 6.3 avec les écarts types correspondants.

D'après Tableau 6.3, les positions des pics des différents types de clutter sont assez proches des positions exactes pour la plupart des situations sauf pour le clutter sol de Situation 1. Dans la Situation 2, le clutter sol est identifiable par son très faible décalage Doppler et l'étroitesse de son étendue spectrale. De même que dans la Situation 3, le clutter est facilement classifiable en un clutter dû à l'atmosphère et un autre aux oiseaux par la différence entre les largeurs spectrales des deux pics. Dans la situation 4, les valeurs présentées par Tableau 6.3 indiquent la présence d'un pic étroit à la fréquence 0.139 et d'un pic plus large à la fréquence 0.324. Donc, a priori, ceci laisse à penser qu'il s'agirait d'une cible (pic étroit) se trouvant dans une turbulence atmosphérique (pic large) très violente ayant une vitesse beaucoup plus importante que celle de la cible.

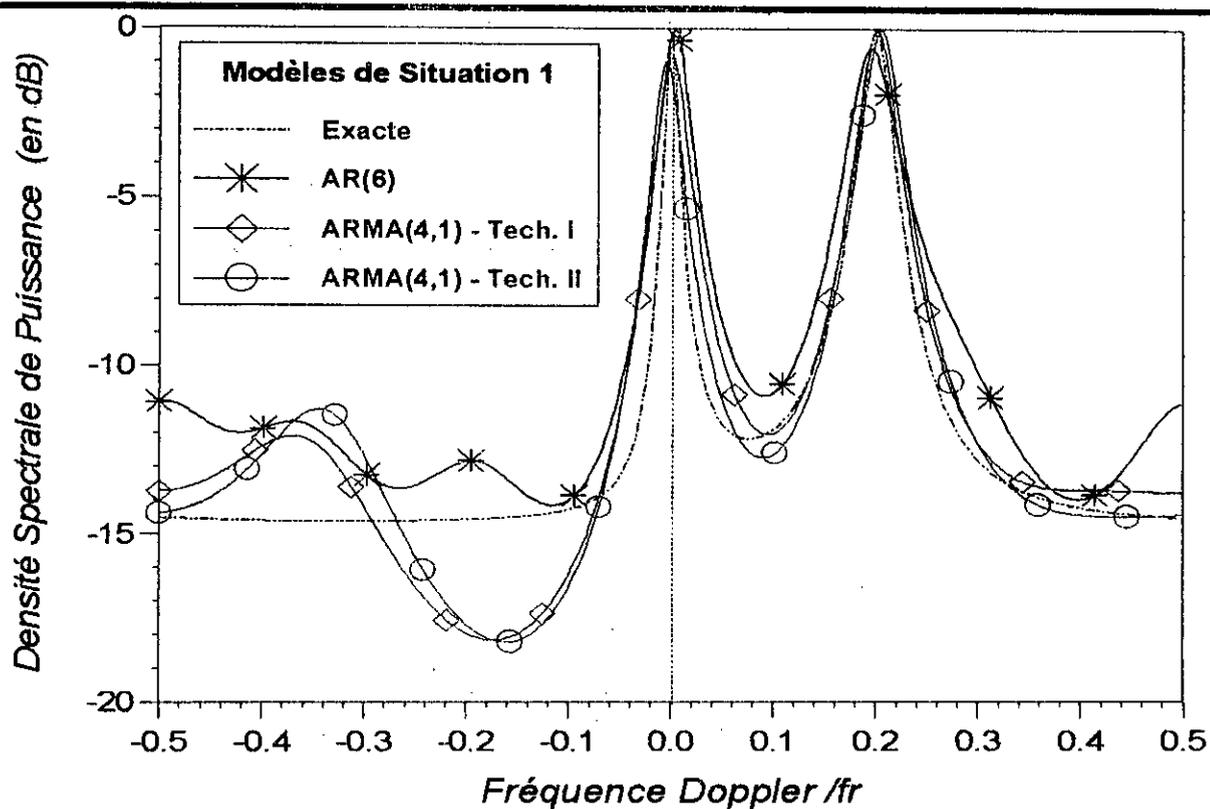


Fig. 6.4 - DSP moyennes estimées pour Clutter Sol + Turbulence Atmosphérique

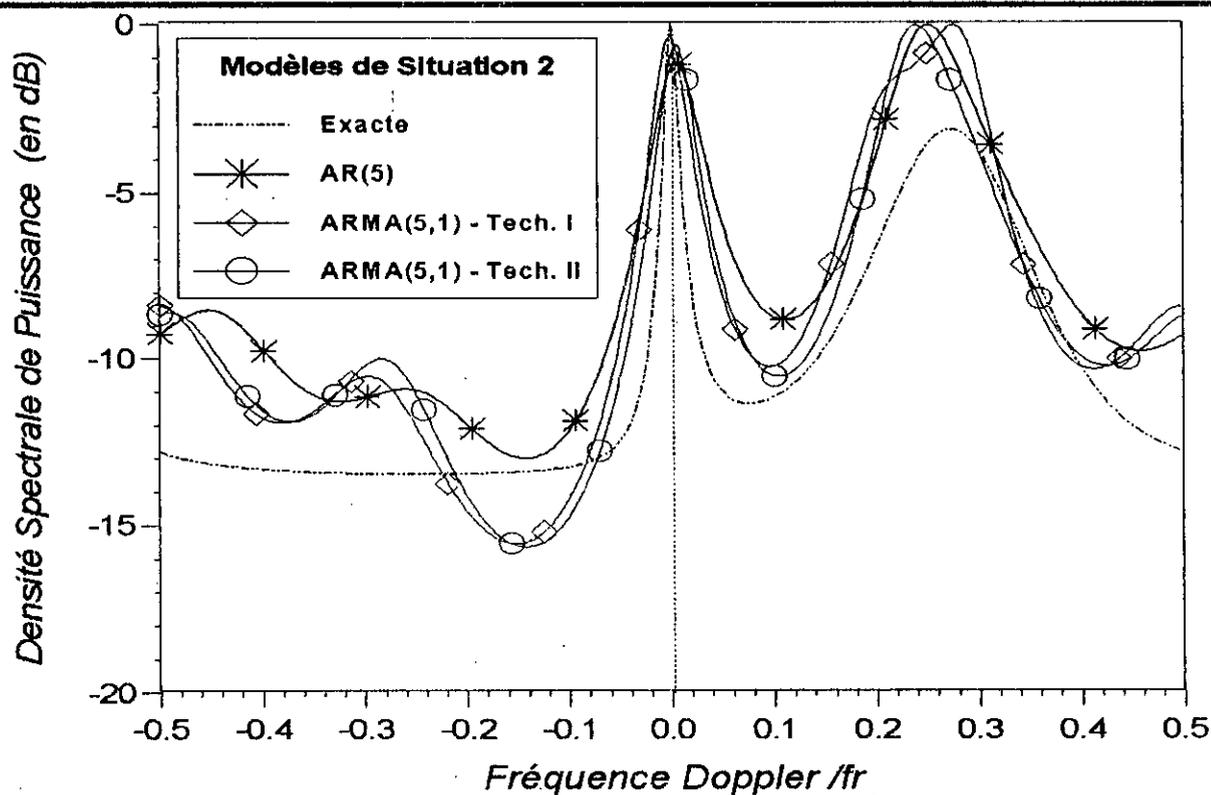


Fig. 6.5 - DSP moyennes estimées pour Clutter Sol + Volée d'oiseaux

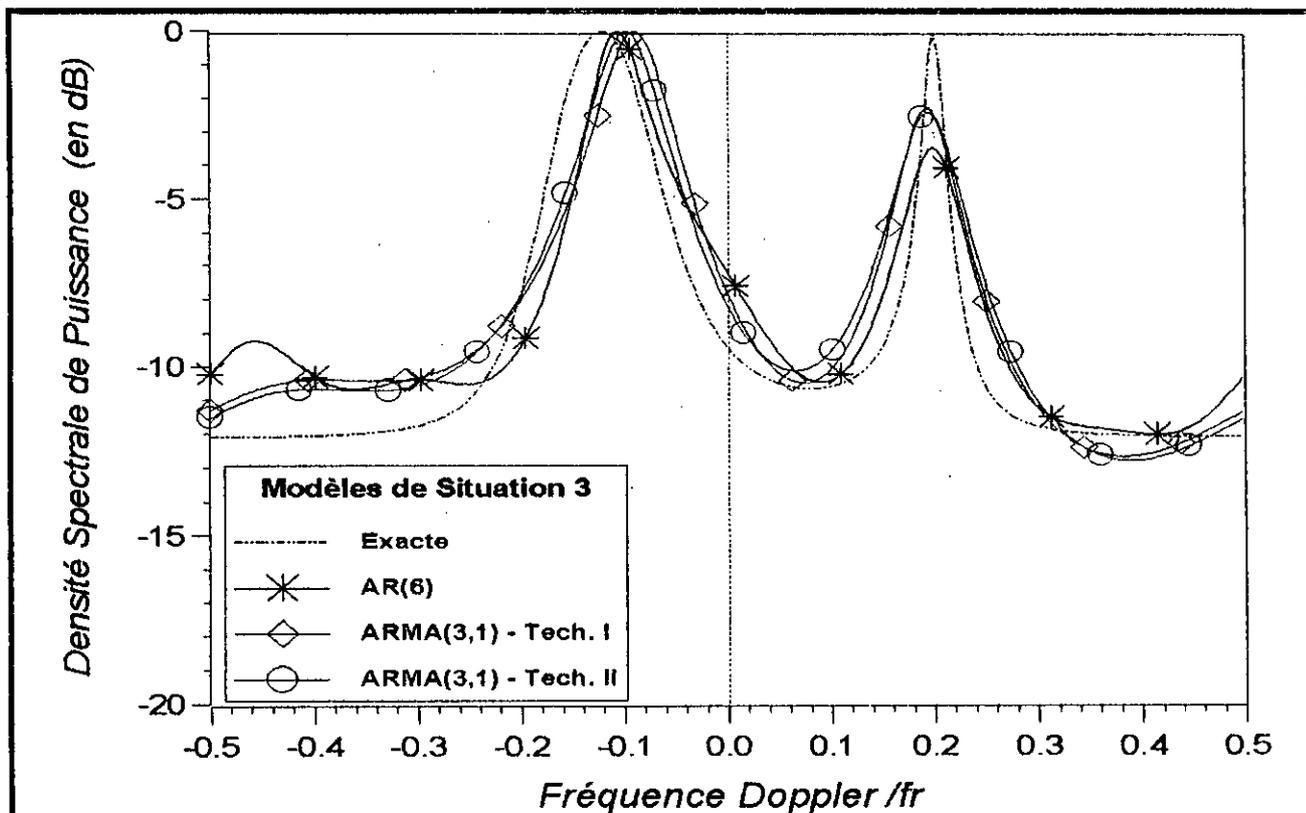


Fig. 6.6 - DSP moyennes estimées pour Clutter d'une turbulence Atmosphérique + Volée d'oiseaux migrateurs

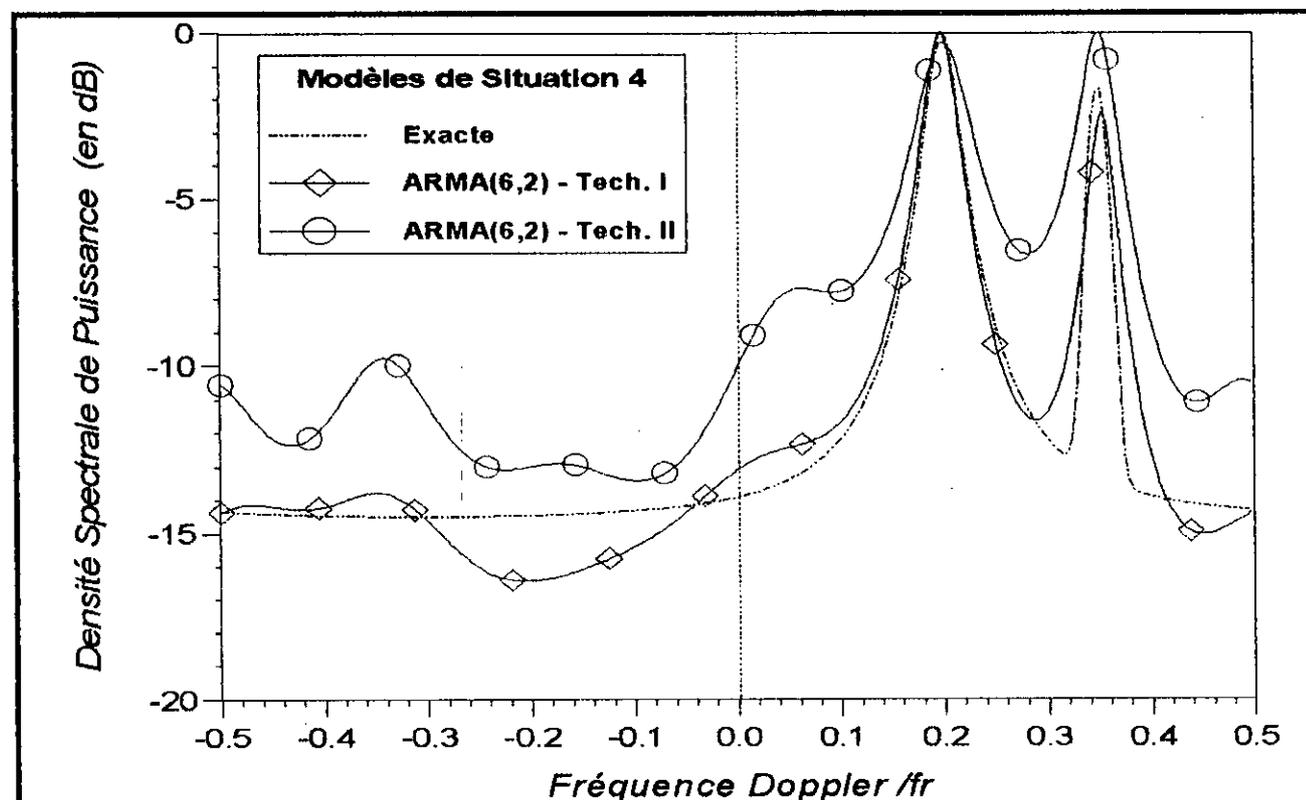


Fig. 6.7 - DSP moyennes estimées pour Clutter Atmosphérique + Cible

Tableau 6.3 : Moyennes des caractéristiques spectrales des quatres situations radar

<i>Source du clutter</i>	<i>Position exacte du pic</i>	<i>Position moyenne du pic</i>	<i>Ecart type de la position du pic</i>	<i>Largeur exacte du pic à -10dB</i>	<i>Largeur Moyenne du pic à -10 dB</i>	<i>Ecart type de la largeur du pic</i>
Situation 1						
SOL	0.000	-0.055	0.142	0.050	0.045	0.021
ATMOSPHERE	0.200	0.178	0.067	0.110	0.141	0.151
Situation 2						
SOL	0.000	0.002	0.020	0.050	0.051	0.015
OISEAUX	0.275	0.240	0.050	0.250	0.102	0.063
Situation 3						
ATMOSPHERE	0.200	0.143	0.132	0.110	0.150	0.186
OISEAUX	-0.125	-0.072	0.079	0.250	0.244	0.213
Situation 4						
ATMOSPHERE	0.200	0.139	0.169	0.110	0.063	0.034
CIBLE	0.350	0.324	0.076	0.030	0.101	0.108

L'utilisation des moyennes des caractéristiques spectrales des différents balayages d'une même situation dans la classification du clutter n'est donc pas fiable. Des anomalies sont constatées au niveau du Tableau 6.3 telles que le décalage Doppler important du clutter sol pour la Situation 1 et de la permutation des largeurs des pics pour la Situation 4. Ceci est sans doute dû aux erreurs d'approximations qui deviennent cumulatives lors de l'utilisation de courts segments de données individuellement. Il est évident que la qualité de la classification est nettement meilleure lorsque la DSP du modèle moyen obtenu à partir des modèles des différents balayages est utilisée. En effet, les DSP des Fig 6.4 à 6.7 sont plus concluantes que les valeurs du Tableau 6.3.

Une classification catégorique doit prendre en compte l'étendue spatiale des différents types de clutter qui est aussi un facteur discriminant (cf. Section 6.3). C'est pourquoi, dans l'analyse du clutter, plusieurs cellules contiguës en distance et en azimuth doivent être considérées et analysées en même temps après un certain nombre de balayages afin d'amoinrir le risque d'erreur sur les sources du clutter [HAYKIN et al., 82].

6.5 Conclusion

La modélisation ARMA des échos reçus par un radar cohérent en utilisant la procédure TLS est d'un apport bénéfique au traitement des signaux radar. En effet, cette procédure supporte bien les conditions sévères de l'application radar, et donne des résultats de qualité très satisfaisante surtout si la Technique I est utilisée.

Bien que la procédure TLS soit efficace du point de vue du volume mémoire nécessaire et du temps d'exécution, son implémentation dans le cas radar va être optimale si:

- ◆ des processeurs de traitement parallèle et/ou en pipeline sont utilisés. La vitesse du traitement sera considérablement augmentée, ce qui permettra beaucoup d'autres traitements durant le temps du silence radar.
- ◆ des traitements simultanés sont effectués sur plusieurs distances adjacentes, afin de diminuer la probabilité d'erreur dans les prises de décision de détection et d'identification.

CHAPITRE 7

CONCLUSIONS ET SUGGESTIONS

7.1 Conclusion générale

En dépit de sa grande latitude et sa parcimonie dans la modélisation des processus stationnaires, le modèle ARMA n'est pas aussi sollicité que les modèles AR et MA dans la plupart des applications pratiques. En effet, ce modèle est lésé par la complexité des méthodes relatives à sa construction (i.e. de sélection de l'ordre et d'estimation des paramètres) et par la quantité de données qui leur est nécessaire (cf. Chapitres 2 et 3).

Pour remédier à ce problème, une procédure intéressante et efficace basée sur les techniques TLS a été proposée dans la première partie de cette étude (cf. Chapitres 3 et 4). Elle permet de construire de bons modèles ARMA même lorsque seulement de petites séquences de données (i.e. de longueur inférieure à 100 données) sont disponibles. Cette procédure devrait donc faciliter l'accès au modèle ARMA et ainsi permettre d'accorder un plus grand intérêt plutôt à l'exploitation de ses performances et à l'élargissement de son champ d'application.

Les avantages de la procédure TLS se résument en ce qui suit:

- ☺ Pour les séquences courtes, la sélection de l'ordre est bien accomplie par la nouvelle technique proposée au Chapitre 4. Cette technique est basée sur les critères FICM. L'ordre sélectionné pour la partie AR du modèle ARMA n'est généralement pas affecté par la longueur de la séquence de données. Seulement lorsque les séquences deviennent très courtes (environ 20 données), cet ordre correspondra à celui d'un modèle AR pur. De même, il est constaté que les résultats obtenus par cette technique restent insensibles au bruit lorsque le RSB est supérieur à 3dB.
- ☺ Les techniques TLS donnent d'excellents résultats pour des séquences de données longues et moyennes (i.e. supérieures à 100 données). Les pôles et les zéros originaux des processus sont remarquablement retrouvés même si l'ordre utilisé est supérieur à l'ordre exact.
- ☺ En utilisant des séquences courtes, les DSP obtenus par ces techniques TLS sont très satisfaisantes pour les processus dont les bandes spectrales ne sont pas trop rapprochées.

☺ Un résultat surprenant de la procédure TLS est sa capacité de déceler des fréquences (ou exponentielles) noyées dans un bruit fort (blanc ou coloré) même si le nombre de données utilisées est faible. Pour ce type de processus le nombre des itérations est le plus faible de même que la probabilité d'obtenir des modèles stables est plus grande (surtout pour Technique II).

Dans la seconde partie de cette thèse, un domaine d'application de la modélisation ARMA et plus précisément, de la procédure TLS a été traité. Il s'agit de la modélisation ARMA dans le traitement des échos radar. Dans cette application, les contraintes physiques sont assez rigoureuses (e.g. suites complexes et de faibles longueurs, temps d'exécution très court) et les erreurs peuvent être capitales (la sécurité des avions en dépend).

Des notions essentielles ont été introduites sur le fonctionnement du radar Doppler à impulsions et sur la nature et la forme de l'information qu'il peut fournir au Chapitre 5. Comme les échos renvoyés par les différentes sources du clutter peuvent être différenciés par leurs décalages Doppler, largeurs spectrales et leurs étendues spatiales, un traitement adéquat des signaux reçus permet l'analyse et l'interprétation de l'environnement radar. Les méthodes et les techniques utilisées dans la suppression et la classification du clutter et dans la détection de cibles ont été examinées au Chapitre 6 de cette thèse. Le concours d'une modélisation ARMA dans ces méthodes est très bénéfique dans l'amélioration de la qualité de leurs résultats. De plus, d'autres applications sont permises grâce à ces modèles telles que la simulation du clutter et l'évaluation des systèmes radar (cf. Chapitre 6).

Il est évident que, d'après la première partie de cette étude, la procédure TLS possède des prédispositions à l'application radar. La procédure a été testée, dans un but illustratif, sur quelques exemples de simulation de situations radar. Les situations traitées représentent des cas de combinaison deux sources physiques de clutter. Ce cas de clutter composite est plus complexe à modéliser que le cas de clutter de source unique pour lequel des modèles AR purs suffisent. Des segments de 30 données avec un niveau de bruit assez important ($RSB = 3\text{dB}$) ont été utilisés. La procédure TLS a réussi à retrouver l'allure des DSP des différentes situations à partir du modèle ARMA moyen de dix balayages consécutifs. Bien que les positions et/ou les largeurs absolues de quelques pics spectraux ne soient pas exactement retrouvées, les biais sont assez faibles et les proportions des largeurs des pics sont conservées. Une bonne classification et identification des sources du clutter est toujours possible lorsque les fourchettes allouées aux positions et largeurs des pics spécifiques à chaque source sont

respectées. Le risque d'erreur et de confusion dans l'identification des sources de clutter est considérablement diminué si l'information sur l'étendue spatiale des échos de chaque source est prise en compte. C'est pourquoi, il est nécessaire durant l'analyse d'un point (i.e. d'une cellule distance-azimut) de l'environnement radar de considérer en même temps les cellules distance-azimut environnantes suivant la distance et l'azimut.

7.2 Suggestions pour des recherches ultérieures

Pour le développement et la continuation du travail entrepris dans cette thèse, plusieurs thèmes de recherche sont recommandés. Ils sont présentés dans ce qui suit.

1. La performance des techniques TLS pour des enregistrements courts de données doit être améliorée. Des méthodes simples autres que la méthode MLS peuvent être investiguées; car il est très intéressant de trouver une méthode donnant toujours un modèle initial stable qui permet aux techniques TLS de réaliser leurs meilleures performances en moins d'itérations.
2. Comme la technique de sélection de l'ordre ARMA proposée dans cette thèse est simple et donne de bons résultats, il est utile de trouver une base théorique formelle qui valide les critères FICM et permet d'en dériver d'autres versions plus efficaces.
3. Pour faciliter et avantager l'utilisation de la procédure TLS, il est très utile de concevoir son implantation dans un système multiprocesseur. Ainsi, en organisant les algorithmes de la procédure pour un traitement en parallèle, l'obtention du modèle ARMA deviendra instantanée.
4. Des tests de la procédure TLS sur des données radar réels sont nécessaires pour confirmer son efficacité dans cette application. Les données doivent représenter les divers types de clutter et leurs différentes combinaisons. Une étude rigoureuse doit être menée sur les performances et les limitations de la procédure dans la détection de cible en faisant varier, pour des cibles réelles, la vitesse et le RCC.
5. Pour des domaines d'application moins contraignants que celui du radar, la procédure TLS est, sans doute, un outil très puissant pour la modélisation ARMA. Elle peut être utilisée dans pratiquement tous les domaines pour lesquels le modèle AR reste insuffisant.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[ABDELOUEL, 93]

L. Abdelouel, "Estimation Spectrale Basée sur la Modélisation Autoregressive: Application à la Détection des Périodicités Cachées dans les Phénomènes Aléatoires", *Thèse de Magister*, Département d'Electronique, ENP, 1993.

[ABDELOUEL & DERRAS, 92]

L. Abdelouel & B. Derras, "Choix Récursif de l'Ordre AR Basé sur le Critère de Blanchissement de l'Erreur de Prédiction", *Proceedings du 1er Séminaire National des signaux, systèmes et automatisme*, Vol. 2, Blida, December 1992, pp. 436-446.

[AGNEL, 84]

J.F. Agnel, *Méthodes Paramétriques en Traitements du Signal: Modélisation AR, MA et ARMA*, ENST, France, 1984.

[AKAIKE, 74]

H. Akaike, "A New Look at the Statistical Model Identification", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, N°6, December 1974, pp. 234-241.

[ARDALAN & FABER, 88]

S.H. Ardalan & L.J. Faber, "A Fast ARMA Transversal RLS Filter Algorithm", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 36, N°3, March 1988, pp. 349-358.

[ASTROM, 80]

K.J. Astrom, "Maximum Likelihood and Prediction Error Methods", *Automatica*, Vol. 16, 1980, pp. 551-574.

[AVERY, 85]

S.K. Avery, "Radar and Remote Sensing", *Lecture Notes ECE 525*, Electrical and Computer Engineering Department, University of Colorado, Boulder, Colorado, USA, Fall Semester 1985.

[BABU & NAIDU, 87]

KVS.A. Babu & P.S. Naidu, "A New Design Procedure for Generating Multiple Clutter Data by ARMA Modelling", *ISSPA 87, Signal Processing, Theories, Implementations and Applications*, Brisbane, Australia, August 24-28, 1987, pp. 522-525.

[BALLANCE, 84]

W.P. Ballance, "The Singular Value Decomposition: An Introduction", *Proc. XVIIIth Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, California, USA, November 1984.

[BARTON, 88]

D.K. Barton, *Modern Radar System Analysis*, Artech House Inc., Norwood, Massachusetts, USA, 1988.

[BENSIDI-SLIMANE, 92]

A. Bensidi-Slimane, "Analyse Spectrale ARMA et Application au traitement de la parole", *Thèse de Magister*, Institut d'Electronique, USTHB, 1992.

[BENVENISTE & CHAURE, 81]

A. Benveniste & C. Chaure, "AR and ARMA Identification Algorithm, Levinson Type; An Innovation Approach", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-26, N°6, December 1981, pp. 1245-1261.

[BOITE & KUNT, 87]

R. Boite et M. Kunt, *Traitement de la parole*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, Suisse, 1987.

[BOX & JENKINS, 76]

G.E.P. Box & G.M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Revised edition, Prentice-Hall, Englewood, New Jersey, USA, 1976.

[BROERSEN, 85]

P.M.T. Broersen, "Selecting the Order of Autoregressive Models from Small Samples", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-33, N°4, August 1985, pp. 974-979.

[BROERSEN & WENSINK, 93]

P.M.T. Broersen & H.E. Wensink, "On Finite Sample Theory for Autoregressive Model Order Selection", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 41, N°1, January 1993, pp. 194-204.

[BRUZZONE & KAVEH, 84]

S.P. Bruzzone & M. Kavch, "Information Tradeoffs in Using The Sample Autocorrelation Function in ARMA Parameter Estimation", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-32, N°4, August 1984, pp. 701-715.

[BURG, 67]

J.P. Burg, "Maximum Entropy Spectral Analysis", *Proceedings of the 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, 1967, pp. 34-41.

[BURG, 72]

J.P. Burg, "The Relationship between Entropy Spectra and Maximum Likelihood Spectra", *Geophys.*, Vol. 37, April 1972, pp. 375-376.

[CADZOW, 76]

J.A. Cadzow, "Recursive Digital Filter Synthesis Via Gradient Based Algorithms", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-24, N°25, October 1976, pp. 349-355.

[CADZOW, 80]

J.A. Cadzow, "High Performance Spectral Estimation - A New ARMA Method", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, N°5, October 1980, pp. 524-529.

[CADZOW, 82]

J.A. Cadzow, "Spectral Estimation: An overdetermined Rational Model Equation Approach", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 70, N°9, September 1982, pp. 907-938.

[CARPENTIER, 90]

M.H. Carpentier, *Radars : Bases Modernes*, Edition Masson, France, 1990.

[CARRIERE & MOSES, 88]

R. Carriere & R.L. Moses, "Autoregressive Moving Average Modeling of Radar Target Signatures", *1988 National Radar Conference*, April 20-21, 1988, Ann Arbor, USA, pp. 225-229.

[CHAN & LANGFORD, 82]

Y.T. Chan & R.P. Langford, "Spectral Estimation via the High Order Yule-Walker Equations", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-30, N°5, October 1982, pp. 689-698.

[CHAN & WOOD, 84]

Y.T. Chan & J.C. Wood, "A New Order Determination Technique for ARMA Processes", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-32, N°3, June 1984, pp. 517-521.

[CHAPMAN & RAHMAN, 90]

R. Chapman & M.A.A. Rahman, "Chebyshev-Polynomial-Based Shur Algorithm", *IEE Proceedings*, Vol. 137, Pt. F, February 1990, pp. 11-14.

[CHARBIT, 90]

M. Charbit, *Éléments de théorie du signal: Signaux aléatoires*, Ellipses, France, 1990.

[CHEN ET AL., 94]

B.-S. Chen, J.-M. Chen & S. Shern, "An ARMA Robust System Identification Using A Generalized l_p Norm Estimation Algorithm", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, N°5, May 1994, pp. 1063-1073.

[CIFTCIOGLU ET AL., 94]

O. Ciftcioglu, J.E. Hoogenboom & H. Van Dam, "A Consistent Estimator for the Model Order of an Autoregressive Process", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, N°6, June 1994, pp. 1471-1477.

[COMBETTES & TRUSSELL, 92]

P.L. Combettes & H.J. Trussell, "Best Stable and Invertible Approximations for ARMA Systems", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 40, N°12, December 1992, pp. 3066-3069.

[COULON, 86]

F. Coulon, *Signal Theory and Processing*, Dunod Editions, 1986.

[CUPO, 85]

R.L. Cupo, "The Iterative NCDE Algorithm for ARMA System Identification and Spectral Estimation", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-33, N°4, August 1985, pp. 1021-1024.

[DEGERINE, 93]

S. Degerine, "A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of the Maximum Likelihood Estimation in Autoregressive Model", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 41, N°2, February 1993, pp. 988-990.

[DEMEURE & MULLIS, 89]

C.J. Demeure & C.T. Mullis, "The Euclid Algorithm and the Fast Computation of Cross-Covariance and Autocovariance Sequences", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-37, N°4, April 1989, pp. 545-552.

[DERRAS, 88]

B. Derras, "The Approximation of Discrete Time Linear Systems Based on the Use of Projections", *Ph.D. Thesis*, University of Colorado, Boulder, Colorado, USA, 1988.

[DERRAS, 93]

B. Derras, "ARMA Modeling of Time-Series Based on the Autocovariance Sequence", *Advances in Modelling and Analysis*, B, AMSE Press, Vol.27, N°4, 1993, pp. 1-41.

[DUGRE ET AL., 82]

J.P. Dugré, C.J. Gueguen, N. Moreau, L.L. Sharf, "Topics in Parametric Spectrum Analysis: The ARMA Case", *Proceedings of the Institute of Acoust. Spectral Analys. & its use in Underwater Acoust.: Underwater Acoust. Group Conf.*, Imperial College, London, 29-30 April 1982, pp. 2.1-10.

[EVANS & FISHL, 73]

A.G. Evans & R. Fishl, "Optimal Least-Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters", *IEEE Trans. Audio and Electroacoust.*, Vol. AU-21, N°1, February 1973, pp. 61-65.

[FRIEDLANDER, 82A]

B. Friedlander, "Efficient Computation of an ARMA Spectral Estimate", *Proceedings of the Institute of Acoust.: Underwater Acoust. Group Conf.*, Imperial College, London, 29-30 April 1982, pp. 7.1-8.

[FRIEDLANDER, 82B]

B. Friedlander, "Instrumental Variable Methods for ARMA Spectral Estimation", *1982 ICASSP Record*, Paris, France, May 3-8, 1982, pp. 248-251.

[FRIEDLANDER, 82c]

B. Friedlander, "Lattice Filters for Adaptive Processing", *IEEE Proceedings*, Vol. 70, N°8, August 1982, pp. 829-867.

[FRIEDLANDER & PORAT, 84A]

B. Friedlander & B. Porat, "The Modified Yule-Walker Method for ARMA Spectral Estimation", *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-20, N°2, March 1984, pp. 158-172.

[FRIEDLANDER & PORAT, 84B]

B. Friedlander & B. Porat, "A Spectral Matching Techniques for ARMA Parameter Estimation", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-32, N°2, April 1984, pp. 338-343.

[FRIEDLANDER & ZEIRA, 95]

B. Friedlander & A. Zeira, "Oversampled Gabor Representation of Transient Signals", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 43, N°9, September 1995, pp. 2088-2094.

[GIANNAKIS & TSATSANIS, 91]

G.B. Giannakis & M.K. Tsatsanis, "HOS or SOS for Parametric Modeling ?", *ICASSP 91 Proceedings*, Vol. 5, May 14-15, Toronto, Ontario, Canada, 1991, pp. 3097-3100.

[GIANNAKIS & TSATSANIS, 94]

G.B. Giannakis & M.K. Tsatsanis, "Time Domain Tests for Gaussianity and Time reversability", *IEEE Trans Signal Processing*, Vol. 42, N° 12, December 1994, pp. 3460-3472.

[GINGRAS & MASRY, 88]

D.F. Gingras & E. Masry, "Autoregressive Spectral Estimation in Additive Noise", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 36, N°4, April 1988, pp. 490-501.

[GOLUB & KAHAN, 65]

G. Golub & W. Kahan, "Calculating the Singular Values and Pseudo-inverse of a Matrix ", *J. SIAM Numerical Analysis*, Ser. B, Vol. 2, N°2, USA, 1965, pp. 205-224.

[GOLUB & VAN LOAN, 83]

G.H. Golub & C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, the Johns Hopkins University Press, Maryland, USA, 1983.

[GOUGH, 94]

P.T. Gough, "A Fast Spectral Estimation Based on the FFT", *IEEE Trans Signal Processing*, Vol. 42, N°6, June 1994, pp. 1317-1322.

[GUSTOWSKI ET AL., 78]

P.R. Gustowski, E.A. Robinson & S. Treitel, "Spectral Estimation Fact or Fiction", *IEEE Trans. Geosc. Electron.*, Vol. GE-16, N°2, April 1978, pp. 49-53.

[HARNETT, 75]

D.L. Harnett, *Introduction to Statistical Methods*, Addison-Wesley Publishing Comp., Philippines, 1975.

[HAYKIN, 85]

S. Haykin, "Radar Signal Processing". *IEEE ASSP Magazine*, April 1985, pp. 2-18.

[HAYKIN ET AL., 82]

S. Haykin, B.W. Currie & S.B. Kesler, "Maximum Entropy Spectral Analysis of Radar Clutter ", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 70, N°9, September 1982, pp. 953-962.

[HELME & NIKIAS, 85]

B.I. Helme & C.L. Nikias, "Improved Spectrum Performance Via a Data-Adaptive Weighted Burg Technique". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-33, N°4, August 1985, pp. 903-910.

[JENKINS & WATTS, 68]

G.M. Jenkins & D.G. Watts, *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day, San Francisco, California, USA, 1968.

[JONES, 76]

R.H. Jones, "Autoregressive Order Selection", *Geophys.*, Vol. 41, August 1976, pp. 771-773.

[KARALAMANGALA, 84]

A.S.M. Karalamangala, "A Principal Components Approach to Approximate Modeling and ARMA Spectral Estimation", *Ph.D. Thesis*, University of Southern California, Los Angeles, California, USA, 1984.

[KAY, 80]

S.M. Kay, "A New ARMA Spectral Estimator". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-28, N°5, October 1980, pp. 585-588.

[KAY, 84]

S.M. Kay, "Accurate Frequency Estimation at Low Signal to Noise Ratio", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-32, N°3, June 1984, pp. 540-546.

[KAY, 88]

S.M. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood, New Jersey, USA, 1988.

[KAY & MARPLE, 81]

S.M. Kay & S.L. Marple, "Spectrum Analysis - A Modern Perspective", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, N°11, November 1981, pp 1380-1418.

[KLEMA & LAUB, 80]

V.C. Klema & A.J. Laub, "The Singular Value Decomposition: Its Computation and some Applications", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-25, N°2, April 1980, pp. 164-176.

[LEE, 80]

L.D.T. Lee, "Canonical Ladder from Realizations and Fast Estimation Algorithms", *Ph.D. Thesis*, Stanford University, Stanford, California, USA, 1980.

[LI & DICKINSON, 86]

S. Li & B.W. Dickinson, "An Efficient Method to Compute Consistent Estimates of the AR Parameters of an ARMA Model", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-31, N°3, March 1986, pp. 275-278.

[LI & DICKINSON, 88]

S. Li & B.W. Dickinson, "Application of the Lattice Filter to Robust Estimation of AR and ARMA Models", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 36, N°4, April 1988, pp. 502-512.

[LI & YU, 89]

G. Li & K.K.B. Yu, "Modelling and Simulation of Coherent Weibull Clutter", *IEE Proceedings*, Vol. 136, Pt.F, N°1, February 1989, pp. 2-12.

[MAKHOUL, 75]

J. Makhoul, "Linear Prediction: A Tutorial Review", *Proceedings of the IEEE*, April 1975, pp. 99-118.

[MAKHOUL, 77]

J. Makhoul, "Stable and Efficient Lattice Methods for Linear Prediction", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-25, October 1977, pp. 256-261.

[MARPLE, 87]

S.L. Marple, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood, New Jersey, USA 1987.

[MARTIN & MULGREW, 90]

J. Martin & B. Mulgrew, "An airborne Pulse Doppler Radar Model", *Signal Processing V: Theories & Applications*, Elsevier Science Publishers S.V., 1990, pp. 1787-1790.

[MARTINELLI ET AL., 85]

G. Martinelli, G. Orlando & P. Burrascano, "ARMA Estimation by the Classification Predictor", *IEEE Trans. Circuits & Systems*, Vol. CAS-32, N°5, May 1985, pp. 506-507.

[MCBRIDE ET AL., 66]

L.E. McBride, H.W. Schaeffgen & K. Steiglitz, "Time-Domain Approximation by Iterative Methods", *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-13, N°4, December 1966, pp. 381-387.

[MEHRA, 71]

R.K. Mehra, "On-line Identification of Linear Dynamic Systems with Applications to Kalman Filtering", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-16, N°1, February 1971, pp. 12-22.

[MONIN & SALUT, 94]

A. Monin & G. Salut, "Exact ARMA Lattice Predictors From Autocorrelation Functions", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, N°4, April 1994, pp. 877-886.

[MORF ET AL., 77]

M. Morf, B. Dickinson, T. Kailath & A. Vieira, "Efficient Solution of Covariance Equation for Linear Prediction", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-25, N°5, October 1977, pp. 269-273.

[MOSES ET AL., 85]

R.L. Moses, J.A. Cadzow & A.L. (Louis) Beex, "A Recursive Procedure for ARMA Modeling", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-33, N°3, October 1985, pp. 1188-1196.

[MULLIS, 85]

C.T. Mullis, "Optimization of Stochastic Processes", *Lecture Notes of ECE 566*, University of Colorado, Boulder, Colorado, Fall 1985.

[MULLIS & DEMEURE, 86]

C.T. Mullis & C.J. Demeure, "The Jury Matrix and a Newton-Raphson Procedure for MA Spectral Factorization", *Proc. XLIXth Asilomar Conf. on Signals, Systems & Comp.*, Pacific Grove, California, November 1986, pp. 635-639.

[MULLIS & ROBERTS, 76]

C.T. Mullis & R.A. Roberts, "The Use of Second Order Information in the Approximation of Discrete-time Linear Systems", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-24, N° 3, Juin 1976, pp. 226-238.

[NEHORAI, 85]

A. Nehorai, "A Minimal Parameter Adaptive Notch Filter with Constrained poles and zeros", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-33, N°4, August 1985, pp. 983-996.

[PAPOULIS, 81]

A. Papoulis, "Maximum Entropy and Spectral Estimation: A Review", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-29, N°6, December 1981, pp. 1176-1186.

[PAPOULIS, 84]

A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, USA, 1984.

[PAPOULIS, 85A]

A. Papoulis, "Levinson's Algorithm, Wold's Decomposition and Spectral Estimation". *SIAM Review*, Vol. 27, N°3, September 1985, pp. 405-440.

[PAPOULIS, 85B]

A. Papoulis, "Predictable Processes and Wold's Decomposition: A Review". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-33, N°4, August 1985, pp. 933-938.

[PARZEN, 74]

E. Parzen, "Some Recent Advances in Time Series Modeling", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, N°6, December 1974, pp. 226-235.

[PILLAI ET AL., 92]

S.U. Pillai, T.H. Shim & M.H. Benteftifa, "A New Spectrum Extension Method That maximizes the Multistep Minimum Prediction Error - Generalization of the Maximum Entropy Concept", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 40, N°1, January 1992, pp. 142-158.

[POLITIS, 93]

D.N. Politis, "ARMA Models, Prewhitening and Minimum Cross Entropy", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 41, N°2, February 1993.

[PORAT & FRIEDLANDER, 84]

B. Porat & B. Friedlander, "Parametric Techniques for Adaptive Detection of Gaussian Signals". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-32, N°4, August 1984, pp. 780-790.

[PROCEEDINGS IEEE, 82]

Proceedings of the IEEE, *Special Issue on Spectral Estimation*, Vol. 70, N° 9, September 1982.

[QIAN & CHEN, 93]

S. Qian & D. Chen, "Discrete Gabor Transform", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 41, N°7, July 1993, pp. 2429-2428.

[REGALIA, 94]

P.A. Regalia, "An Unbiased Equation Error Identifier and Reduced-Order Approximations", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, N°6, June 1994, pp. 1397-1412.

[RIALAN & SCHARF, 88]

C.P. Rialan & L.L. Scharf, "Fast Algorithms for Computing QR And Cholesky Factors of Toeplitz Operators", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 36, N°11, November 1988, pp. 1740-1748.

[ROBERTS & MULLIS, 87]

R.A. Roberts & C.T. Mullis, *Digital Signal Processing*, Chapter 11, Addison-Wesley Publishing Comp., Massachusetts, USA, 1987.

[ROBINSON, 79]

E.A. Robinson, "Iterative Least Squares Procedure for ARMA Spectral Estimation", *Topics in Applied Physics*, Vol. 34, *Non linear Methods of Spectral Analysis*, 1979.

[ROBINSON, 83]

E.A. Robinson, *Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Programs*, Goose Pond Press, Houston, Texas, USA, 1983.

[SADI AHMED & DERRAS, 94]

N. Sadi-Ahmed & B. Derras, "Iterative True Least Squares Algorithms for ARMA Modeling of Radar Time-Series", *ICSS'94 Proceedings*, Vol. 1, Section III, International Conference on Signals & Systems, September 24-26, Algiers, 1994, pp. 159-163.

[SCHARF & LUBY, 79]

L.L. Scharf & J.C. Luby, "Statistical Design of autoregressive-Moving Average Digital Filters", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-27, N°3, June 1979, pp. 240-247.

[SODERSTROM, 74]

T. Soderstrom, "On the Generalized Least Squares Method. Counter Examples to General Convergence", *Automatica*, Vol. 10, 1974, pp. 681-683.

[STEFANSKI & WEYGANDT, 71]

A. Stefanski & C.N. Weygandt, "Extension of the Steiglitz and McBride Identification Technique", *IEEE Trans on Automatic Control (Technical Notes & Correspondences)*, October 1971, pp. 503-504.

[STEIGLITZ & McBRIDE, 65]

K. Steiglitz & L.E. McBride, "A Technique for the Identification of Linear Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-10, October 1965, pp. 461-464.

[STEWART ET AL., 95]

D.F. Stewart, L.C. Potter & S.C. Ahalt, "Computationally Attractive Real Gabor Transforms", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 43, N°1, January 1995, pp. 77-84.

[STOICA & NEHORAI, 86]

P. Stoica & A. Nehorai, "An Asymptotically Efficient ARMA Estimator Based on Sample Covariance", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-31, N°11, November 1986, pp. 1068-1071.

[STOICA & SODERSTROM, 81]

P. Stoica & T. Soderstrom, "The Steiglitz-McBride Identification Algorithm Revisited - Convergence and Accuracy Aspects", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-26, N°3, June 1981, pp. 712-717.

[STROBACH, 88]

P. Strobach, "Recursive Covariance Ladder Algorithms for ARMA System Identification", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 36, N°4, April 1988, pp. 560-580.

[THOMAS, 84]

P. Thomas, "ARMA Modelling of Base-Band Radar Returns", *Master of Engineering Thesis*, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, 1984.

[THOMAS & HAYKIN, 86]

P. Thomas & S. Haykin, "Stochastic Modelling of Radar Returns", *IEE Proceedings*, Vol. 133, Pt. F, N°5, August 1986, pp. 476-481.

[THOUREL, 84]

L. Thourel, *Initiation aux techniques modernes des radars*, SUP'AERO, Toulouse, France, 1984.

[TONG, 75]

H. Tong, "Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike Information Criterion", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. IT-21, July 1975, pp. 476-480.

[TSAO ET AL., 91]

J. Tsao, W.J. Shyu & J. Mar, "Detection of Narrowband Signals by Gabor's Expansion of spectrum", *ICASSP 91 Proceedings*, Vol. 5, May 14-17, Toronto, Ontario, Canada, 1991, pp. 3201-4.

[TSAY & TIAO, 84]

R.S. Tsay & G.C. Tiao, "Consistent Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models", *J. Amer. Statist. Assoc.*, March 1984, pp. 84-96.

[TUGNAIT, 91]

J.K. Tugnait, "Inverse Filter Criterion for Estimation of Linear Parametric Models Using High Order Statistics", *ICASSP 91 Proceedings*, Vol. 5, May 14-17, Toronto, Ontario, Canada, 1991, pp. 3101-4.

[WANG & LIBERT, 94]

L. Wang & G.A. Libert, "Combining Pattern Recognition Techniques with Akaike's Information Criteria for Identifying ARMA Models", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, N°6, June 1994, pp. 1388-1396.

[WEISS, 94]

L.G. Weiss, "Wavelets and Wideband Correlation Processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, January 1994, pp. 13-32.

[WILSON, 69]

G.T. Wilson, "Factorization of The Covariance Generating Function of a pure MA Process", *SIAM J. NUMER. ANAL.*, Vol. 6, N°1, March 1969, pp. 1-7.

[YARMAN-VURAL, 85]

F. Yarmen-Vural, "An Efficient and Order-Recursive Algorithm for Estimating Stationary ARMA Models", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-33, N°4, August 1985, pp. 1054-1058.

[ZHANG & DUHAMEL, 92]

H.-M. Zhang & P. Duhamel, "On the Methods for Solving Yule-Walker Equations", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 40, N°12, December 1992, pp. 2987-3000.

[ZHANG ET AL., 91]

Q.T. Zhang, S. Haykin & K.M. Wong, "Target Detection in a Non Stationary Noise Field : A Comparison-Based Approach", *ICASSP 91 Proceedings*, Vol. 5, May 14-17, Toronto, Ontario, Canada, 1991, pp. 3549-3552.

[ZHANG & TAKEDA, 87]

X. Zhang & H. Takeda, "An Approach to Time Series Analysis and ARMA Spectral Estimation", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-35, N°9, September 1987, pp. 1303-1313.

ANNEXES

ANNEXE A

ALGORITHME DE JURY

Etant donnés les paramètres d'un modèle AR(p), cet algorithme a pour but de calculer la FAC du processus et les paramètres de tous les modèles AR(n) (n < p).

La récursion de Levinson pour le passage d'un modèle d'ordre (n-1) à l'ordre n est donnée par:

$$\mathbf{a}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_n \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}_n \mathbf{a}^{(n-1)*} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbf{a}^{(n)} = (1 \ a_1^{(n)} \dots a_n^{(n)})^T$ et $\mathbf{a}^{(n-1)} = (1 \ a_1^{(n-1)} \dots a_{n-1}^{(n-1)})^T$

\mathbf{J}_n est la matrice d'échange, de dimensions $n \times n$, définie par

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad \mathbf{J}_n \mathbf{J}_n = \mathbf{I}_n \quad (\text{A.2})$$

et ρ_n est le nième coefficient de réflexion donné par:

$$\rho_n = \alpha_n^{(i)} = -\frac{v_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \quad \text{où} \quad v_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n-1)} R_x(n-i) \quad (\text{A.3})$$

et où α_n est la variance de l'erreur de prédiction à l'ordre n (cf. (2.29) et (3.7)) telle que:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} (1 - |\rho_n|^2) \quad (\text{avec} \quad \alpha_0 = R_x(0)) \quad (\text{A.4})$$

En combinant (A.1) avec son conjugué complexe prémultiplié par \mathbf{J}_{n+1} , une expression récursive pour le passage des paramètres d'ordre n aux paramètres d'ordre (n-1) est obtenue telle que:

$$(1 - |\rho_n|^2) \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}^{(n)} - \rho_n \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{a}^{(n)*} \quad (\text{A.5})$$

C'est la récursion de Jury (ou Levinson inverse). L'algorithme de Jury est donc comme suit:

Etant donnés les paramètres \mathbf{a} et b_0 d'un modèle AR(p):

Début de l'algorithme:

Initialisation:

$$\alpha_p = |b_0|^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^{(p)} = \mathbf{a} \quad (\text{avec} \quad \alpha_0^{(p)} = \alpha_0 = 1).$$

Récursion rétrograde:

(cf. (A.3-5))

Pour $n=p$ jusqu'à 1, faire:

$$\rho_n = a_n^*$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n / (1 - |\rho_n|^2)$$

$$v_{n-1} = -\rho_n \alpha_{n-1}$$

Pour $i=0$ jusqu'à $n-1$, faire:

$$a_i^{(n-1)} = (a_i^{(n)} - \rho_n a_{n-i}^{(n)*}) / (1 - |\rho_n|^2)$$

Fin de boucle en i

Fin de boucle en n

Calcul de la FAC:

(cf. (A.3))

$$R_x(0) = \alpha_0$$

$$R_x(1) = v_0$$

Pour $j=1$ jusqu'à p , faire:

$$R_x(j+1) = v_j - \sum_{i=1}^j a_i^{(j)} R_x(j-i+1)$$

Fin de boucle en j

Fin de l'algorithme.

ANNEXE B

ALGORITHME DE MULLIS-ROBERTS

Pour trouver la solution MLS (3.53), l'algorithme efficace proposé par [MULLIS & ROBERTS 76] peut être utilisé pour résoudre le système: (cf. (3.3) et (3.4b))

$$\mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{R}_p - \mathbf{H}_1^H \mathbf{H}_1) \hat{\mathbf{a}} = \eta \mathbf{u}_1$$

mis sous la forme particulière suivante: $\mathbf{K}_p \mathbf{J}_{p+1} \hat{\mathbf{a}} = \eta \mathbf{u}_{p+1}^T$ (B.1)

avec $\mathbf{u}_{p+1} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$ de dimensions $1 \times (p+1)$,

et où \mathbf{J}_{p+1} est la matrice d'échange, de dimensions $(p+1) \times (p+1)$, définie par (A.2) et la matrice \mathbf{K}_p est telle que:

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{J}_{p+1} \mathbf{H}_2^H \mathbf{H}_2 \mathbf{J}_{p+1} = \mathbf{J}_{p+1} (\mathbf{R}_p - \mathbf{H}_1^H \mathbf{H}_1) \mathbf{J}_{p+1} \quad (\text{B.2})$$

de sorte que : $\mathbf{H}_p^H \mathbf{H}_p = \mathbf{H}_1^H \mathbf{H}_1$ avec $\mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix}^{p+1}$

où \mathbf{H}_p est une matrice carrée $(p+1) \times (p+1)$ triangulaire inférieure de la forme de Toeplitz constituée par:

$$[\mathbf{H}_p]_{i,j} = h'(i-j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i-j < p-q \\ h'(i-j), & \text{si } i-j \geq p-q \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Comme $\mathbf{J}_{p+1} \mathbf{R}_p \mathbf{J}_{p+1} = \mathbf{R}_p^T$, $\mathbf{J}_{p+1} \mathbf{H}_p^H = \mathbf{H}_p^* \mathbf{J}_{p+1}$ et $\mathbf{H}_p \mathbf{J}_{p+1} = \mathbf{J}_{p+1} \mathbf{H}_p^T$

alors la matrice \mathbf{K}_p peut aussi s'écrire:

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{R}_p^T - \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_p^T \quad (\text{B.4})$$

Pour $0 \leq n \leq p$, deux formes récursives sont possibles pour $\mathbf{K}_n = \mathbf{R}_n^T - \mathbf{H}_n^* \mathbf{H}_n^T$;

en notant: $\mathbf{r}_n = (R_x(1) \ R_x(2) \ \dots \ R_x(n))^T$ et $\mathbf{h}_n = (h'(1) \ h'(2) \ \dots \ h'(n))^T$

la première forme est:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n+1} &= \begin{pmatrix} R_x(0) & \mathbf{r}_{n+1}^T \\ \mathbf{r}_{n+1}^* & \mathbf{R}_n^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h'^*(0) & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \mathbf{h}_{n+1}^* & \mathbf{H}_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'(0) & \mathbf{h}_{n+1}^T \\ 0 & \mathbf{H}_n^T \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_x(0) & \mathbf{r}_{n+1}^T \\ \mathbf{r}_{n+1}^* & \mathbf{K}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h'^*(0) \\ \mathbf{h}_{n+1}^* \end{pmatrix} (h'(0) \ \mathbf{h}_{n+1}^T) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

et la seconde forme est:

$$\mathbf{K}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_n & \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{g}_{n+1} \\ \mathbf{g}_{n+1}^H \mathbf{J}_{n+1} & \mathbf{g}_{n+1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

où $\mathbf{g}_n = \mathbf{r}_n - \mathbf{H}_{n-1}^H \mathbf{h}_n$ et $\mathbf{g}_n = |h'(0)|^2 + \mathbf{h}_n^H \mathbf{h}_n$

Pour trouver le vecteur $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{(p)}$ solution du système (B.1) en utilisant sa récursivité dans l'ordre, deux autres vecteurs sont nécessaires (cf. Section 3.6.3). Soient donc, en plus de $\mathbf{a}^{(n)}$, $\mathbf{c}^{(n)} = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_n)^\top$ et $\mathbf{d}^{(n)} = (d_0 \ d_1 \ \dots \ d_n)^\top$ de sorte que, pour $0 \leq n \leq p-1$,

$$\mathbf{K}_{n+1} \mathbf{J}_{n+2} \mathbf{a}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{c}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{d}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} h^*(0) \\ \mathbf{h}_{n+1}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

La première forme récursive (B.5) permet d'écrire:

$$\mathbf{K}_{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{a}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{n+1}^\top \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{a}^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^*(0) \\ \mathbf{h}_{n+1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^*(0) & \mathbf{h}_{n+1}^\top \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

de même que (B.6) permet d'écrire:

$$\mathbf{K}_{n+1} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{g}_{n+1}^* \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{c}^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{n+1} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^*(0) \\ \mathbf{h}_n^* \\ \mathbf{g}_{n+1}^H \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{d}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

En supposant que la solution $\mathbf{a}^{(n+1)}$ est une combinaison linéaire des trois vecteurs $\mathbf{a}^{(n)}$, $\mathbf{c}^{(n)}$ et $\mathbf{d}^{(n)}$ telle que,

$$\mathbf{J}_{n+2} \mathbf{a}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{a}^{(n)} \end{pmatrix} - \beta_n \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} - \gamma_n \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

la substitution de (B.10) dans (B.7) en utilisant les relations (B.8) et (B.9) permet de trouver que:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \mathbf{r}_{n+1}^\top \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{a}^{(n)} \\ \gamma_n &= -\mathbf{h}_{n+1}^\top \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{a}^{(n)} \\ \eta_{n+1} &= \eta_n - \theta_n \beta_n - \psi_n \gamma_n \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

où $\theta_n = \mathbf{g}_{n+1}^H \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{c}^{(n)}$ et $\psi_n = \mathbf{g}_{n+1}^H \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{d}^{(n)} - h^*(n+1)$

De la même manière, en supposant que les vecteurs $\mathbf{c}^{(n+1)}$ et $\mathbf{d}^{(n+1)}$ sont des combinaisons linéaires de $\mathbf{a}^{(n+1)}$ et de respectivement $\mathbf{c}^{(n)}$ et $\mathbf{d}^{(n)}$, et en utilisant (B.7) et (B.9), les équations récurrentes suivantes sont obtenues:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(n+1)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\theta_n}{\eta_{n+1}} \mathbf{J}_{n+2} \mathbf{a}^{(n+1)} \\ \mathbf{d}^{(n+1)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\psi_n}{\eta_{n+1}} \mathbf{J}_{n+2} \mathbf{a}^{(n+1)} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Une expression plus simple pour le calcul de θ_n et ψ_n est alors donnée par:

$$\begin{pmatrix} \theta_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^{(n)*} & d_0^{(n)*} \\ d_0^{(n)} & \tau_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_n^* \\ \gamma_n^* \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \tau_n = 1 + \begin{pmatrix} h^*(0) & \mathbf{h}_n^H \end{pmatrix} \mathbf{d}^{(n)*} \quad (\text{B.13})$$

L'algorithme de Mullis-Roberts est donc comme suit:

Etant données les séquences $\{R_x(0), R_x(1), \dots, R_x(p)\}$ et $\{h(0), h(1), \dots, h(p)\}$

Début de l'algorithme:

Initialisation:

$$\eta_0 = R_x(0) - |h'(0)|^2$$

$$a_0^{(0)} = 1$$

$$c_0^{(0)} = 1/\eta_0$$

$$d_0^{(0)} = h'^*(0)/\eta_0$$

$$\tau_0 = 1 + |h'(0)|^2/\eta_0$$

Récursion:

Pour $n=0$ jusqu'à $p-1$, faire:

$$\beta_n = 0$$

$$\gamma_n = 0$$

Pour $i=0$ jusqu'à n , faire:

$$\beta_n = \beta_n + a_i^{(n)} R_x(\mu+1-i)$$

$$\gamma_n = \gamma_n + a_i^{(n)} h'(n+1-i)$$

Fin de boucle en i

$$\theta_n = \beta_n^* c_0^{(n)*} + \gamma_n^* d_0^{(n)*}$$

$$\psi_n = \beta_n^* d_0^{(n)*} + \gamma_n^* \tau_n$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n - \beta_n \theta_n - \gamma_n \psi_n$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n + |\psi_n|^2 / \eta_{n+1}$$

$$a_{n+1}^{(n)} = 0$$

$$c_{n+1}^{(n)} = 0$$

$$d_{n+1}^{(n)} = 0$$

Pour $j=0$ jusqu'à $n+1$, faire:

$$a_j^{(n+1)} = a_j^{(n)} - \beta_n c_{n+1-j}^{(n)} - \gamma_n d_{n+1-j}^{(n)}$$

$$c_j^{(n+1)} = c_j^{(n)} - \frac{\theta_n}{\eta_{n+1}} a_{n+1-j}^{(n+1)}$$

$$d_j^{(n+1)} = d_j^{(n)} - \frac{\psi_n}{\eta_{n+1}} a_{n+1-j}^{(n+1)}$$

Fin de boucle en j

Fin de boucle en n

Fin de l'algorithme.

Une fois les paramètres $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{(p)}$ obtenus, les paramètres $\hat{\mathbf{b}}$ sont à leur tour calculés en utilisant simplement:

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{cf. (3.44)})$$

ANNEXE C

ALGORITHME DE DEMEURE-MULLIS

Soit un système linéaire $\mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{v}$ (C.1)

où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont des vecteurs $(n_1+n_2) \times 1$, tels que: $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n_1+n_2})^T$ et $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n_1+n_2})^T$, et dont \mathbf{M} est une matrice carrée $(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)$ possédant la forme particulière suivante:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \dots & c_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & \dots & c_{n_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_1 & \dots & c_{n_2} \\ \hline d_{n_1} & d_{n_1-1} & \dots & d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{n_1} & d_{n_1-1} & \dots & d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{n_1} & d_{n_1-1} & \dots & \dots & d_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \quad (n_1 \geq n_2) \quad (C.2)$$

Soient deux polynômes:

$$D_{n_1}(z) = \sum_{i=0}^{n_1} d_{n_1-i} z^{-i} = (1 z^{-1} z^{-2} \dots z^{-n_1}) \mathbf{d}_{n_1} \quad (d_0 = 1)$$

$$C_{n_2}(z) = \sum_{i=0}^{n_2} c_i z^{-i} = (1 z^{-1} z^{-2} \dots z^{-n_2}) \mathbf{c}_{n_2} \quad (c_0 = 1)$$

avec

$$\mathbf{d}_{n_1} = (d_{n_1}^{(n_1)} \ d_{n_1-1}^{(n_1)} \ \dots \ d_1^{(n_1)} \ 1)^T \quad \text{où } \{d_i^{(n_1)} = d_i, \ 0 \leq i \leq n_1\}$$

$$\mathbf{c}_{n_2} = (1 \ c_1^{(n_2)} \ c_2^{(n_2)} \ \dots \ c_{n_2}^{(n_2)})^T \quad \text{où } \{c_i^{(n_2)} = c_i, \ 0 \leq i \leq n_2\}$$

Demeure et Mullis proposent un algorithme efficace pour la résolution du système (C.1) en effectuant une factorisation de \mathbf{M} basée sur des divisions euclidiennes successives entre les polynômes $D_{n_1}(z)$ et $C_{n_2}(z)$ [DEMEURE & MULLIS 89]. Cette factorisation se fait en deux étapes:

1^{ère} Etape de la factorisation de \mathbf{M}

En un premier lieu, (n_1-n_2) divisions euclidiennes de $D_{n_1}(z)$ par $C_{n_2}(z)$ sont réalisées telles que:

$$\left. \begin{aligned} D_{n_1}(z) &= d_{n_1}^{(n_1)} C_{n_2}(z) + D_{n_1-1}(z) \\ D_{n_1-1}(z) &= d_{n_1-1}^{(n_1-1)} C_{n_2}(z) + D_{n_1-2}(z) \\ &\vdots \\ D_{n_2+1}(z) &= d_{n_2+1}^{(n_2+1)} C_{n_2}(z) + D_{n_2}(z) \end{aligned} \right\} (n_1 - n_2) \text{ fois}$$

Ainsi le vecteur \mathbf{d}_{k-1} des paramètres du polynôme reste $D_{k-1}(z)$ s'exprime en fonction des vecteurs \mathbf{d}_k et \mathbf{c}_{n_2} des polynômes dividende $D_k(z)$ et diviseur $C_{n_2}(z)$, respectivement, de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{d}_{k-1} \end{pmatrix} = \mathbf{d}_k - d_k^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{n_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{avec } n_1 \leq k \leq (n_2 + 1) \quad (C.3)$$

En utilisant (C.3) pour $k=n_1$, la matrice \mathbf{M} peut s'écrire:

$$M = \left(\mathbf{I}_{n_1+n_2} + d_{n_1}^{(n_1)} \mathbf{Z}_{n_1+n_2}^{n_1} \right) \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \dots & \dots & c_{n_2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & \dots & \dots & c_{n_2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & c_1 & \dots & \dots & c_{n_2} & \\ \hline 0 & d_{n_1-1}^{(n_1-1)} & \dots & \dots & d_1^{(n_1-1)} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & d_{n_1-1}^{(n_1-1)} & \dots & \dots & d_1^{(n_1-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & d_1^{(n_1-1)} & \dots & \dots & \dots & d_1^{(n_1-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{Z}_{n_1+n_2}$ est la matrice $(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)$ de décalage (d'une ligne vers le bas) (cf. Section 3.6.3) telle que:

$$\mathbf{Z}_{n_1+n_2}^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{I}_{n_1+n_2-k} & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (C.4)$$

En poursuivant l'utilisation de (C.3) jusqu'à $k=n_2+1$, M peut alors s'écrire sous la forme:

$$M = L_{n_1} L_{n_1-1} \dots L_{n_2+1} M' \quad (C.5a)$$

avec

$$L_k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n_1-k} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2+k} + d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{n_2+k}^k \end{array} \right) \quad n_2 < k \leq n_1 \quad (C.5b)$$

et M' est donnée par:

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & c_1 & \dots & \dots & c_{n_2} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & \dots & \dots & c_{n_2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & c_1 & \dots & \dots & c_{n_2} & \\ \hline d_{n_2}^{(n_2)} & \dots & d_1^{(n_2)} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & d_{n_2}^{(n_2)} & \dots & d_1^{(n_2)} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & d_{n_2}^{(n_2)} & \dots & \dots & \dots & d_1^{(n_2)} & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ 1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_2 \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} (n_1+n_2) \\ \vdots \\ 1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_2 \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix} \quad (C.5c)$$

$\xleftarrow{2n_2} \mathbf{X}_{n_2} \xrightarrow{\quad}$

Comme:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{I}_{n_2+k} + d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{n_2+k}^k \right) \left(\mathbf{I}_{n_2+k} - d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{n_2+k}^k \right) = \mathbf{I}_{n_2+k} \\ \Leftrightarrow & \left(\mathbf{I}_{n_2+k} + d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{n_2+k}^k \right)^{-1} = \left(\mathbf{I}_{n_2+k} - d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{n_2+k}^k \right) \end{aligned}$$

alors

$$L_k^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n_1-k} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2+k} - d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{n_2+k}^k \end{array} \right) \quad n_2 < k \leq n_1 \quad (C.6)$$

et M' peut donc s'écrire:

$$M' = L_{n_2+1}^{-1} \dots L_{n_1-1}^{-1} L_{n_1}^{-1} M \quad (C.7)$$

2^{ème} Etape de la factorisation de M

En commençant par la sous-matrice \mathbf{X}_{n_2} de dimensions $2n_2 \times 2n_2$ de M' (cf. (C.5c)), des sous-matrices \mathbf{X}_k de dimensions $2k \times 2k$ sont à chaque fois considérées dans cette étape avec deux divisions euclidiennes de $D_k(z)$ par $C_k(z)$ et de $C_k(z)$ par $D_k(z)$ ($0 < k \leq n_2$) simultanément.

Ces sous-matrices se présentent sous la forme suivante:

$$\mathbf{X}_k = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & c_1^{(k)} & \dots & \dots & c_k^{(k)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c_1^{(k)} & \dots & \dots & c_k^{(k)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & c_1^{(k)} & \dots & \dots & c_k^{(k)} & \\ \hline d_k^{(k)} & \dots & \dots & \dots & d_1^{(k)} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & d_k^{(k)} & \dots & \dots & d_1^{(k)} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & d_k^{(k)} & \dots & \dots & \dots & d_1^{(k)} & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2 \end{matrix} \quad (0 < k \leq n_2) \quad (C.8)$$

et les deux divisions euclidiennes sont données par:

$$\begin{cases} D_k(z) = d_k^{(k)} C_k(z) + \lambda_k D_{k-1}(z) \\ C_k(z) = c_k^{(k)} D_k(z) + \lambda_k C_{k-1}(z) \end{cases} \quad k = n_2, n_2-1, \dots, 1 \quad (C.9)$$

où

$$\lambda_k = 1 - d_k^{(k)} c_k^{(k)}$$

Les vecteurs \mathbf{d}_k et \mathbf{c}_k des paramètres des polynômes respectifs $D_k(z)$ et $C_k(z)$ (de (C.9)) s'expriment en fonction des vecteurs \mathbf{d}_{k-1} et \mathbf{c}_{k-1} des polynômes restes $D_{k-1}(z)$ et $C_{k-1}(z)$, respectivement, de la façon suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{d}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{d}_{k-1} \end{pmatrix} + d_k^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} + c_k^{(k)} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{d}_{k-1} \end{pmatrix} \end{cases} \quad k = n_2, \dots, 1 \quad (C.10)$$

En remplaçant les paramètres $d_k^{(k)}$ et $c_k^{(k)}$ par leurs expressions (C.10) dans la matrice \mathbf{X}_k de (C.8) et en utilisant la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_1 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{Z}_{2k}^k + (\mathbf{Z}_{2k}^k)^T \right) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_k \text{ s'écrit alors:} \quad \mathbf{X}_k = \left(\mathbf{I}_{2k} + d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{2k}^k + c_k^{(k)} (\mathbf{Z}_{2k}^k)^T \right) \mathbf{X}_k' \quad (C.11a)$$

avec

$$\mathbf{X}_k' = \begin{pmatrix} 1 & c_1^{(k-1)} & \dots & c_{k-1}^{(k-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_1^{(k-1)} & \dots & c_{k-1}^{(k-1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_1^{(k-1)} & \dots & c_{k-1}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & d_1^{(k-1)} & \dots & d_1^{(k-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1^{(k-1)} & \dots & d_1^{(k-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_1^{(k-1)} & \dots & d_1^{(k-1)} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_1^{(k-1)} & \dots & c_{k-1}^{(k-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{X}_{k-1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & d_1^{(k-1)} & \dots & d_1^{(k-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad (C.11b)$$

En éliminant donc les premières et les dernières lignes et colonnes de \mathbf{X}_k' , la sous-matrice \mathbf{X}_{k-1} est obtenue (cf. (C.11b)). Celle-ci est, à son tour, factorisée de la même manière que \mathbf{X}_k .

En poursuivant cette procédure de factorisation jusqu'à atteindre $\mathbf{X}_1 = \mathbf{I}_2$, une factorisation de \mathbf{M}' est alors obtenue et elle est donnée par:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{L}_{n_2} \mathbf{L}_{n_2-1} \dots \mathbf{L}_1 \mathbf{M}' \quad (C.12a)$$

avec

$$\mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1-k} & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{2k} + d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{2k}^k + c_k^{(k)} (\mathbf{Z}_{2k}^k)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \mathbf{I}_{n_2-k} \end{pmatrix} \quad 0 < k \leq n_2 \quad (C.12b)$$

et

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \mathbf{L} \end{pmatrix} \quad (C.12c)$$

où \mathbf{U} et \mathbf{L} sont des matrices triangulaires respectivement supérieure et inférieure et de dimensions $n_1 \times n_1$ et $n_2 \times n_2$, telles que:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & c_1^{(n_2)} & \dots & c_{n_2}^{(n_2)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_1^{(n_2)} & \dots & c_{n_2}^{(n_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_1^{(n_2-1)} & \dots & c_{n_2-1}^{(n_2-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_1^{(n_2-2)} & \dots & c_{n_2-2}^{(n_2-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \quad (n_1, n_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_1^{(n_2)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n_2-2}^{(n_2-2)} & \dots & d_{n_2-2}^{(n_2-2)} & 1 & 0 & 0 \\ d_{n_2-1}^{(n_2-1)} & \dots & d_{n_2-1}^{(n_2-1)} & \dots & d_{n_2-1}^{(n_2-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad (C.12d)$$

Comme: $\left(\mathbf{I}_{2k} + d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{2k}^k + c_k^{(k)} (\mathbf{Z}_{2k}^k)^T \right) \left(\mathbf{I}_{2k} - d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{2k}^k - c_k^{(k)} (\mathbf{Z}_{2k}^k)^T \right) = \lambda_k \mathbf{I}_{2k}$

c'est à dire: $\left(\mathbf{I}_{2k} + d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{2k}^k + c_k^{(k)} (\mathbf{Z}_{2k}^k)^T \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_k} \left(\mathbf{I}_{2k} - d_k^{(k)} \mathbf{Z}_{2k}^k - c_k^{(k)} (\mathbf{Z}_{2k}^k)^T \right)$

alors

$$L_k^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{n_1-k} & \text{---} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (I_{2k} - d_k^{(k)} Z_{2k}^k - c_k^{(k)} (Z_{2k}^k)^T) / \lambda_k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \text{---} & I_{n_2-k} \end{array} \right) \quad 0 < k \leq n_2 \quad (C.13a)$$

et M'' peut donc s'écrire: $M'' = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n_2}^{-1} M'$ (C.13b)

L'algorithme de Demeure-Mullis est donc donné par:

Etant donné:

$$n_1 \geq n_2, \{d_0, d_1, \dots, d_{n_1}\} \text{ et } \{c_0, c_1, \dots, c_{n_2}\} \text{ avec } d_0 = c_0 = 1, \text{ et } \mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n_1+n_2})^T$$

La solution cherchée est $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n_1+n_2})^T$ de l'Equation (C.1) transcrite dans $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n_1+n_2})^T$

Début de l'algorithme:

Initialisation:

$$\{d_i^{(n_1)} = d_i, i = 0, 1, \dots, n_1\} \text{ et } \{c_i^{(n_2)} = c_i, i = 0, 1, \dots, n_2\}$$

Factorisation (1^{ère} étape):

Pour $k=n_1-1$ décroissant jusqu'à n_2 , faire:

Pour $i=k$ décroissant jusqu'à $k-n_2+1$, faire:

$$d_i^{(k)} = d_i^{(k+1)} - d_{k+1}^{(k+1)} c_{k-i+1}$$

Fin de boucle en i

Pour $i=k-n_2$ décroissant jusqu'à 1 , faire:

$$d_i^{(k)} = d_i^{(k+1)}$$

Fin de boucle en i

Fin de boucle en k

Factorisation (2^{ème} étape):

Pour $k=n_2-1$ décroissant jusqu'à 1 , faire:

$$\lambda = 1 - d_{k+1}^{(k+1)} c_{k+1}^{(k+1)}$$

Pour $j=k$ décroissant jusqu'à 1 , faire:

$$d_j^{(k)} = (d_j^{(k+1)} - d_{k+1}^{(k+1)} c_{k-j+1}^{(k+1)}) / \lambda$$

$$c_j^{(k)} = (c_j^{(k+1)} - c_{k+1}^{(k+1)} d_{k-j+1}^{(k+1)}) / \lambda$$

Fin de boucle en j

Fin de boucle en k

Calcul de $M'u = L_{n_2+1}^{-1} \dots L_{n_1-1}^{-1} L_{n_1}^{-1} v$:

Pour $k=n_1$ décroissant jusqu'à n_2+1 , faire:

Pour $j=n_1+1$ jusqu'à n_1+n_2 , faire:

$$v_j = v_j - d_k^{(k)} v_{jk}$$

Fin de boucle en j

Fin de boucle en k

Calcul de $M''u = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n_2}^{-1} v$:

Pour $k=n_2$ décroissant jusqu'à 1 , faire:

$$\lambda = 1 - d_k^{(k)} c_k^{(k)}$$

Pour $j=n_1-k+1$ jusqu'à n_1 , faire:

Temp = v_j

$$v_j = (v_j - c_k^{(k)} v_{j+k}) / \lambda$$

$$v_{j+k} = (v_{j+k} - d_k^{(k)} \text{Temp}) / \lambda$$

Fin de boucle en j

Fin de boucle en k

Résolution $u = M''^{-1} v$:

Pour $j=n_1+2$ jusqu'à n_1+n_2 , faire:

$$v_j = v_j - \sum_{i=n_1+1}^{j-1} d_{j-i}^{(j-n_1+1)} v_i$$

Fin de boucle en j

Pour $j=n_1-1$ décroissant jusqu'à 1 , faire:

$k = \min(n_1-j, n_2)$

$$v_j = v_j - \sum_{i=j+1}^{j+k} c_{j-i}^{(k)} v_i$$

Fin de boucle en j

Fin de l'algorithme.

ANNEXE D

ALGORITHME BICANAL DE LEVINSON

Soit à résoudre un système complexe $2(n+1) \times 2(n+1)$, dit Toeplitz par bloc, de la forme:

$$P \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

où les P_j ($1 \leq j \leq 4$) sont des matrices $n \times n$ de la forme de Toeplitz telles que:

$$P_j = \begin{pmatrix} P_j(0) & P_j(-1) & \dots & \dots & P_j(-n) \\ P_j(1) & P_j(0) & \dots & \dots & P_j(-n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P_j(n) & \dots & \dots & \dots & P_j(0) \end{pmatrix}$$

et les inconnus \mathbf{a} et \mathbf{b} sont tels que: $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)^T$ et $\mathbf{b} = (b_0 \dots b_n)^T$

En construisant $2n+1$ sous-matrices 2×2 , à partir des éléments de P , de la forme:

$$R(k) = \begin{pmatrix} P_1(k) & P_3(k) \\ P_2(k) & P_4(k) \end{pmatrix} \quad |k| \leq n$$

le système (D.1) devient (après transposition):

$$(1 b_0 \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_n \ b_n) \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & \dots & R(n) \\ R(-1) & R(0) & \dots & \dots & R(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R(-n) & \dots & \dots & \dots & R(0) \end{pmatrix} = (\eta \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (D.2)$$

R_n

La résolution de (D.2) est équivalente à la résolution de :

$$(I_2 \ A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n) R_n = (\alpha_n \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (D.3)$$

avec $\{\alpha_n, A_i, i=1, \dots, n\}$ des matrices 2×2 . Comme R_n est de la forme de Toeplitz par bloc 2×2 , il est possible d'utiliser l'algorithme bicanal de Levinson qui est récursif dans l'ordre et qui considère un second vecteur (de prédiction arrière) défini par:

$$(B_0 \ B_1 \ \dots \ B_{n-1} \ I_2) R_n = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \beta_n) \quad (D.4)$$

avec $\{\beta_n, B_i, i=0, \dots, n-1\}$ des matrices 2×2 . Ainsi, grâce à la forme récursive de R_n , (D.3) et (D.4) permettent d'écrire pour l'ordre $(n+1)$:

$$\begin{pmatrix} I_2 & A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \dots & A_n^{(n)} & 0 \\ 0 & B_0^{(n)} & B_1^{(n)} & \dots & B_{n-1}^{(n)} & I_2 \end{pmatrix} R_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 & 0 & \dots & 0 & X_n \\ Y_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix} \quad (D.5)$$

avec $X_n = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} R(n-i+1)$ et $Y_n = \sum_{i=0}^n B_i^{(n)} R(-i-1)$ ($A_0^{(n)} = B_n^{(n)} = I_2$)

En supposant que la solution à l'ordre $(n+1)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_2 & A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} & \dots & A_{n+1}^{(n+1)} \\ B_0^{(n+1)} & B_1^{(n+1)} & \dots & \dots & B_n^{(n+1)} & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & C_{n+1} \\ D_{n+1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \dots & A_n^{(n)} & 0 \\ 0 & B_0^{(n)} & B_1^{(n)} & \dots & B_{n-1}^{(n)} & I_2 \end{pmatrix} \quad (D.6)$$

alors:
$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \beta_{n+1} = \begin{pmatrix} I_2 & C_{n+1} \\ D_{n+1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 & 0 & \dots & 0 & X_n \\ Y_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{n+1} &= -X_n \beta_n^{-1} \\
\mathbf{D}_{n+1} &= -Y_n \alpha_n^{-1} \\
\alpha_{n+1} &= \alpha_n - X_n \beta_n^{-1} Y_n \\
\beta_{n+1} &= \beta_n - Y_n \alpha_n^{-1} X_n
\end{aligned}
\tag{D.7}$$

Remarque:

Si les sous-matrices de \mathbf{R}_n vérifient la relation:

$$\mathbf{R}(-k) = \mathbf{R}^H(k) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n,$$

alors:

- η est positif
- α_n et β_n sont hermitiennes avec des diagonales réelles positives.
- $X_n = Y_n^H$

L'algorithme bicanal de Levinson est donc:

Etant donnés $\mathbf{R}(k)$ pour $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$

Début de l'algorithme:

Initialisation:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \beta_0 = \mathbf{R}(0) \\
A_0^{(0)} &= B_0^{(0)} = \mathbf{I}_2 \\
X_0 &= \mathbf{R}(1) \\
Y_0 &= \mathbf{R}(-1)
\end{aligned}$$

Récursion :

Pour $k=0$ jusqu'à $n-1$, faire:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{k+1} &= -X_k \beta_k^{-1} \\
\mathbf{D}_{k+1} &= -Y_k \alpha_k^{-1} \\
\alpha_{k+1} &= \alpha_k + \mathbf{C}_{k+1} X_k \\
\beta_{k+1} &= \beta_k - \mathbf{D}_{k+1} Y_k
\end{aligned}$$

Pour $i=0$ jusqu'à $k+1$, faire:

$$\begin{aligned}
A_i^{(k+1)} &= A_i^{(k)} + \mathbf{C}_{k+1} B_{i-1}^{(k)} \\
B_i^{(k+1)} &= B_{i-1}^{(k)} + \mathbf{D}_{k+1} A_i^{(k)}
\end{aligned}$$

Fin de boucle en i

$$X_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} A_i^{(k+1)} \mathbf{R}(k-i+2)$$

$$Y_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} B_i^{(k+1)} \mathbf{R}(-i-1)$$

Fin de boucle en k

Fin de l'algorithme.

Une fois la solution de (D.3) connue, la solution du système (D.2) est retrouvée en résolvant, d'abord, le système suivant:

$$(1 \quad \tau) \alpha_n = (\eta \quad 0)$$

pour trouver les scalaires η et τ et ensuite en calculant \mathbf{a} et \mathbf{b} par:

$$(1 b_0 \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_n \ b_n) = (1 \quad \tau) (I_2 \ A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n) \tag{D.8}$$

ANNEXE E

LA DISTRIBUTION DE WEIBULL

Une variable aléatoire v suit la distribution de Weibull si sa densité de probabilité est donnée par:

$$p(v) = \begin{cases} \frac{c}{b} \left(\frac{v}{b}\right)^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{v}{b}\right)^c\right], & \text{pour } v > 0, b > 0 \text{ et } c > 0; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où c est le paramètre de forme et b est le facteur d'échelle de la distribution.

Pour le cas $c=2$, la distribution de Weibull est identique à la distribution de Rayleigh.

Passage de la distribution de Gauss à celle de Weibull

Un processus gaussien à variables aléatoires complexes dont l'enveloppe suit la distribution de Rayleigh est donc un cas particulier d'un processus de Weibull. En effet, si la variable aléatoire complexe $w = u + jv$ obéit à la loi de Weibull, u et v peuvent être générés à partir d'une variable aléatoire complexe gaussienne $g = x + jy$, comme suit:

$$\begin{aligned} u &= x (x^2 + y^2)^{\frac{1}{c} - \frac{1}{2}} \\ v &= y (x^2 + y^2)^{\frac{1}{c} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Si x et y sont des variables gaussiennes à moyenne jointe nulle avec une variance σ^2 , la densité de probabilité jointe de u et v est:

$$p(u, v) = \frac{1}{2} \frac{c}{2\pi\sigma^2} (u^2 + v^2)^{\frac{c}{2} - 1} \exp\left[-\frac{(u^2 + v^2)^{\frac{c}{2}}}{2\sigma^2}\right]$$

l'enveloppe $|w|$ possède alors une distribution de Weibull telle que:

$$p(|w|) = \frac{c}{2\sigma^2} |w|^{c-1} \exp\left[-\frac{|w|^c}{2\sigma^2}\right]$$