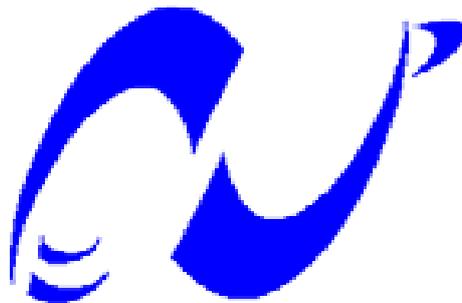


République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Département de Génie Mécanique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme
D'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique

Thème :

**SIMULATION PAR LA METHODE DE
DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT DE LA
DEGRADATION EN SURFACE PAR FISSURATION
EN MILIEU SEMI-INFINI**

Présenté par :
NAILI Ghani

encadré par :
M. Y.BELKACEMI

Juin 2012

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A ma mère.

A mon frère et ma sœur.

A toute ma famille et mes amis.

Remerciement

En premier lieu je remercie le Dieu qui m'a
aidé à compléter ce travail.

Je tiens particulièrement à exprimer mes
remerciements et mes profonds respects à
monsieur BELKACEMI qui a proposé et
dirigé ce travail, pour son suivi et ces conseils.

Je remercie également l'ensemble des membres
du jury qui ont acceptés d'examiner mon
travail.

Enfin je remercie tous qui ont participés dans
ce travail.

Résumé

L'objectif de ce travail est la simulation numérique des problèmes de fissuration dans les corps semi-infinis par la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

La réalisation d'un programme basé sur cette méthode nous a permis de calculer les facteurs d'intensité de contrainte.

Les exemples traités nous ont permis de comparer les résultats du programme à des résultats analytiques et numériques des différentes références.

Mots clés: mécanique de la rupture, fissure, méthode de discontinuité de déplacement, facteurs d'intensité de contrainte.

Abstract

The objective of this work is the numerical simulation of the problems of cracking in the semi-infinite bodies by the method of discontinuity of displacement into two-dimensional.

The construction of a program based on this method us a makes it possible to calculate the stress intensity factors.

The treated examples us a makes it possible to compare the results of the program with analytical and numerical results found the front share in different reference.

Key words: fracture mechanics, crack, displacement discontinuity method, stress intensity factor.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو التطابق العددي للأوساط المتشققة بواسطة طريقة الانتقالات الغير المستمرة في الأوساط ثنائية الأبعاد

في بداية الأمر قمنا بإنشاء برنامج بفضل هذه الطريقة لحساب معامل شدة الاجهادت بفضل دراسة بعض بعض الأمثلة قمنا بمقارنة النتائج التي تحصلنا عليها بنتائج حصل عليها حسابيا و عدديا في مراجع مختلفة

Sommaire

Introduction générale..... 1

I) Principes fondamentaux de la mécanique de la rupture.

I-1) Introduction.....	3
I-3) Mode de rupture	3
I-4) Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure	4
I-5) Équation des champs de contrainte et de déplacement en front de fissure.....	5
I-6) Facteurs d'Intensité de Contraintes.....	7
I-8) Mode mixte de rupture.....	7
I-8-1) Champ de contrainte et déplacement.....	7
I.5) Conclusion.....	8

II) Présentation de la méthode.

II.1) Introduction.....	9
II.2) Méthode indirecte.	9
II.2.1) Identité de Somigliana.....	9
II.3) Le principe de la méthode de discontinuité de déplacement.....	10
II.4) Problème intérieur et Problème extérieur	13
II.4.1) Convention de signe	13
II.5) Les solutions analytiques donnés par la (MDD).....	14
II.6) Procédure numérique	19
II.7) Conditions de symétrie	20
II.8) Conclusion.....	21

III) Exemples, résultats et interprétations.

III.1) Introduction.....	22
III.2) La structure de programme	22
III.3) Les exemples traités	24
III.3.1) Fissure dans un corps semi-infini avec un chargement à l'infini.....	24
III.3.2) Quatre fissures inclinées dans un corps semi-infini soumis à un chargement à l'infini	28
III.3.3) Quatre fissures perpendiculaires à l'axe de chargement dans un plan semi-fini.....	30

Sommaire

III.3.4) Fissure inclinée avec des forces appliquées sur ces frontières.....	33
III.3.5) Deux fissure émanant d'un trou circulaire dans un plan semi-infini.....	35
III.3.6) Fissure en arc de cercle dans un plan semi-infini.....	36
III.4) Conclusion	38
Conclusion générale.....	39
Bibliographie.	

Sommaire des figures

Fig (I.1)	<i>Accident du Boeing 737 d'Aloha Airlines (avril 1988)</i>	1
Fig (I.2)	Les trois modes de rupture.....	4
Fig (I.3)	Zone délimitant le voisinage d'une pointe de la fissure.....	4
Fig (1.5)	Fissure inclinée dans une plaque en traction.....	8
Fig (II .1)	Représentation d'un maillage par FEM et par BEM.....	9
Fig(II.2)	Domaine D- intérieur repéré par le signe (-)	11
Fig(II.3)	Domaine D+ extérieur repéré par le signe (+)	12
Fig (II.2)	Schématisation d'un problème intérieur et extérieur.....	14
Fig (II.3)	discontinuité de déplacement.....	14
Fig (II.4)	Les coordonnées d'une discontinuité de déplacement orientée arbitrairement dans un plan infini et son image	5
Fig (II.5)	Représentation de la discrétisation d'un segment en N éléments.....	19
Fig (II .7)	Symétrie par rapport à l'axe $y=y'$	21
Fig (III.1)	Fissures perpendiculaire à l'axe de chargement dans un corps semi-infini.	24
Fig (III.1.b)	Profil de déplacement pour un nombre d'élément (N=20).....	25
Fig (III.2.a)	Fissures inclinées avec un angle $\alpha=\frac{\pi}{3}$ dans un corps semi-infini.....	26
Fig (III.2.a)	Le profil de déplacement pour un nombre d'élément (N=20).....	26
Fig (III.3)	Fissures inclinées avec un angle $\alpha=\frac{\pi}{6}$ dans un corps semi-infini.....	27
Fig (III.3.b)	Profil de déplacement pour (N=20).....	28
Fig (III.4)	Quatre fissures inclinées dans un corps semi-infini.....	29
Fig (III.5)	Quatre fissures perpendiculaires à l'axe de chargement.....	30
Fig (III.6)	Fissures inclinées avec un chargement sur la frontière dans un corps semi-infini.....	30
Fig(III.5)	Les variations de H_1 en fonction de $\frac{L}{b}$	31
Fig(III.5)	Les variations de H_1 en fonction de $\frac{L_2}{b}$ Pour le cas $\frac{L_1}{b} = 0$	32
Fig(III.5)	Les variations de H_1 en fonction de $\frac{L_2}{b}$ Pour le cas $L_1 = L_2$	33
Fig(III.6)	Les variations de K_1 en fonction de β	34

Fig(III.7)	Deux fissures émanant d'un trou circulaire dans un plan semi-infini...	35
Fig(III.8)	variations des facteurs d'intensités en fonction de la distance d_1	36
Fig(III.9)	Fissure en arc de cercle dans un plan semi-infini.....	36
Fig(III.10)	variations de Sen fonction de $\frac{\delta}{l}$.....	37

Sommaire des tableaux

Tab(III.1)	Variation de K_i en fonction de N et D_i	25
Tab(III.2)	Variation de K_i en fonction de N et D_i	26
Tab(III.3)	Variation de K_i en fonction de N et D_i	28
Tab(III.4)	Variation de H_i en fonction de $\frac{L}{b}$	29
Tab(III.5)	Variation de H_1 en fonction de $\frac{L_2}{b}$	31
Tab(III.6)	Variation de H_1 en fonction de $\frac{L_2}{b}$	32
Tab(III.7)	Variation de K_i en fonction de β	33
Tab(III.8)	variations K_i fonction de la distance d_1	35
Tab(III.9)	variations de Sen fonction de $\frac{\delta}{1}$	37

Nomenclature :

σ_{ij}	Champ de contrainte	(N/mm^2)
u_i	Champ de déplacement	(mm)
r	Rayon au voisinage de la pointe de fissure	(mm)
KI	Facteur d'intensité de contrainte en mode I	$Mpa\sqrt{m}$
KII	Facteur d'intensité de contrainte en mode II	$Mpa\sqrt{m}$
KIII	Facteur d'intensité de contrainte en mode III	$Mpa\sqrt{m}$
E	Module d'élasticité	Mpas
ν	Coefficient de poisson	-
		$\frac{J}{mm^2}$
G	Taux de restitution d'énergie	
W_p	Energie potentielle totale	J
$2A_gS$	Energie de surface	J
T_i	Forces surfacique	N
μ	Module de cisaillement	Mpas
β	Angle d'inclinaison de la fissure	°
α	Direction de propagation de la fissure	°
G_{max}	Le maximum de taux de restitution d'énergie	$\frac{J}{mm^2}$
N	Nombre des segments	-
F_n	Force normale	N
F_s	Force tangentielle	N
B_{ij}, A_{ij}	Coefficients d'influence	-
D_i	Discontinuité de déplacement	mm

Introduction générale

Dans la plupart des cas, l'homme a cherché à maîtriser la durée de vie de ses créations, soit par une meilleure connaissance des phénomènes qui président à leur dégradation, en phase de conception, d'adapter les caractéristiques de la machine à son environnement, soit en s'enquérant régulièrement de l'état général de celle-ci à travers des opérations de maintenance et d'inspection. Comme on peut le ressentir, cette maîtrise n'est malheureusement pas complète, beaucoup de phénomènes sont de nature aléatoire et leurs modélisation (phénomènes physiques) ou parfois même leur formulation pose de réelles difficultés.

Parmi ces phénomènes, la rupture par fatigue et par fissuration des éléments structuraux qui sont omniprésents. Les fissures (ou criques) apparaissent dans les zones de concentration de contrainte, et croissent sous l'effet des charges de service. La rupture catastrophique a lieu lorsque les fissures atteignent une taille critique compte tenu des sollicitations envisagées. En effet, l'accident du Boeing 737 de la compagnie Aloha en 1988 nous rappelle que cette menace est toujours d'actualité. L'enquête a révélé que la jonction soudaine d'un grand nombre de fissures initiées dans une rangée de fixations (Phénomène de la multi fissuration) était à l'origine de cet accident [KEB-98].

La connaissance de ce problème revient à connaître les paramètres influents sur la fissure.



Fig (1)-Accident du Boeing 737 d'Aloha Airlines (avril 1988)

Deux principales méthodes numériques sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de structures en mécanique, la méthode des éléments finis[YAN-86], et la méthode des équations intégrales de frontière (la Méthode des discontinuités de déplacements) [CRO-83]. Cette dernière est adoptée pour notre étude.

Ainsi le travail est structuré comme suit :

Introduction générale

On s'intéresse dans le premier chapitre au rappel des principes de base de la mécanique linéaire de rupture.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode de discontinuité de déplacement et son application pour les domaines semi-infinis.

Le troisième chapitre est axé sur la présentation du code utilisé pour la simulation numérique, et englobe les résultats et les interprétations de l'application de la méthode des discontinuités de déplacement pour une variété d'exemples en domaine semi infini.

Principes fondamentaux de la mécanique de la rupture.

I -1) Introduction

I-3) Mode de rupture

I-4) Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure

I-5) Équation des champs de contrainte et de déplacement en front de fissure

I-6) Facteurs d'Intensité de Contraintes

I-8) Mode mixte de rupture

I-8-1) Champ de contrainte et déplacement

I.5) Conclusion

I.1) introduction:

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures. Cela revient notamment à déterminer le champ de contrainte et de déformation au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permet de juger la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré [BAR-80]. Dans cette étude, nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture

On constate deux approches d'analyse utilisées en mécanique de la rupture :

1. L'analyse du champ des contraintes en tête de fissure, c'est l'approche par les facteurs d'intensité de contraintes dite «approche locale».
2. L'analyse énergétique proposée par « GRIFFITH 1920 » [BAR-80] qui procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissure dans la structure.

Selon la nature du matériau et les conditions d'exploitation on distingue deux types de rupture :

1. La rupture ductile : est celle qui s'accompagne de grandes déformations locales non négligeable avant et durant la propagation de la fissure (mécanique non linéaire de la rupture).
2. La rupture fragile : cette rupture est celle qui se produit sous déformation permanente appréciable, ces déformation sont négligeable (mécanique linéaire de la rupture) [LEB-03].

Dans cette étude nous nous intéressons uniquement au calcul du facteur d'intensité de contrainte.

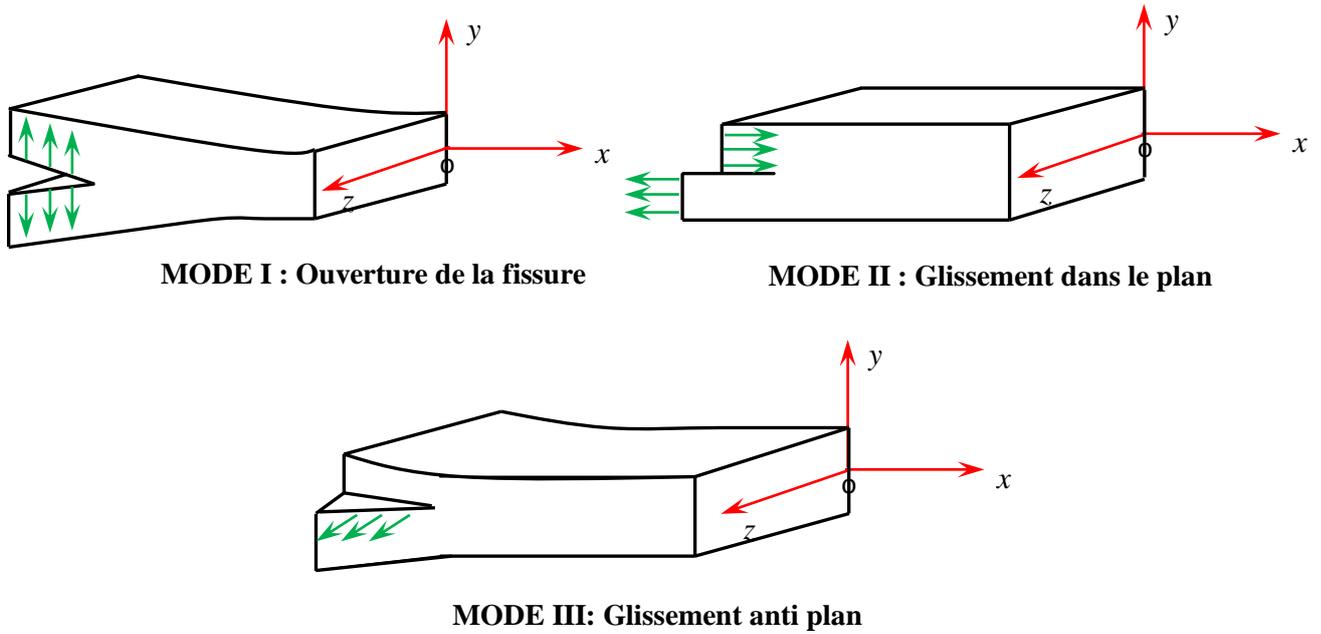
I.2) Les modes de rupture:

La propagation de fissure peut être superposée de trois modes [LAB-86] :

MODE I : Mode d'ouverture de la fissure, le chargement est perpendiculaire au plan de la fissure

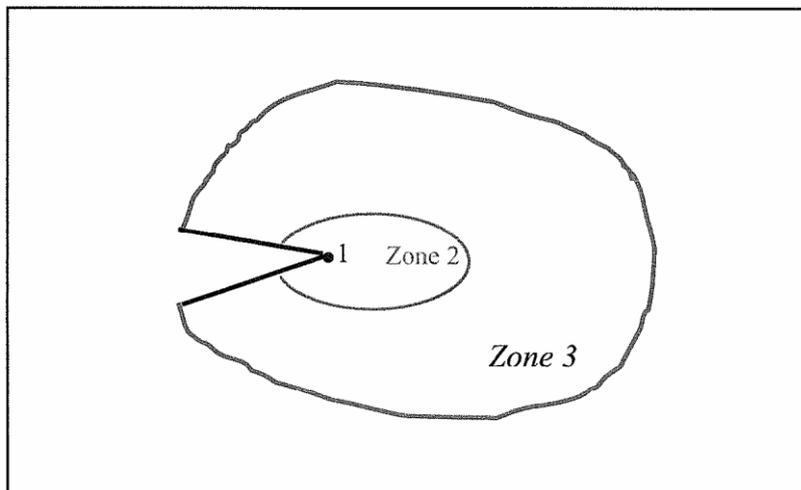
MODE II : mode de cisaillement plan, le chargement est parallèle au plan et perpendiculaire au front de la fissure

MODE III : mode de cisaillement anti plan, le chargement est parallèle au plan et au front de la fissure.



(Fig.I.1)-Les trois modes de rupture

I.3) Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure:



(Fig.I.2)- Zone délimitant le voisinage d'une pointe de la fissure

L'objectif de la mécanique de la rupture est de caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide des paramètres quantifiable au sens de l'ingénieur, notamment la contrainte, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau [BAR-80].

1. **La zone d'élaboration (zone 1):** Elle se trouve à la pointe de la fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.

2. **La zone singulière (zone 2):** Dans laquelle les champs de déplacements, déformations et contraintes sont considérés continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. On démontre que dans cette zone les composantes de champs de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$)

3. **Zone 3:** extérieure comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charge et en déplacements. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu.

I.4) Équation des champs de contrainte et de déplacement en front de fissure :

Les résultats de la théorie de l'élasticité permettent d'écrire qu'en un point de coordonnées polaires r et θ , les contraintes et les déplacements au voisinage de l'extrémité d'une fissure sollicitée de la manière la plus générale sont donnés par les expressions suivantes [7]:

Mode I:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (I.1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ u_x &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [k_1 - \cos \theta]\end{aligned}\quad (I.2)$$

$$u_y = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [k_1 - \cos \theta]$$

Avec $k_1 = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ en contrainte plane et $k_1 = 3 - 4\nu$ en déformation plane

La discontinuité ou saut de déplacement $[u_y]$:

$$[u_y] = u_y(r, \pi) - u_y(r, -\pi) = \frac{8K_I}{E} k_2 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (I.3)$$

Avec $k_2 = 1$ en contraintes planes $k_2 = 1 - \nu^2$ en déformations planes.

Mode II :

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} [2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (I.4)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}]$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} [k_1 + 2 + \cos \theta] \quad (I.5)$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \cos \frac{\theta}{2} [k_1 - 2 + \cos \theta]$$

La discontinuité ou saut de déplacement $[u_x]$:

$$[u_x] = u_x(r, \pi) - u_x(r, -\pi) = \frac{8K_{II}}{E} k_2 \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (I.6)$$

Mode III :

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (I.7)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$$

$$u_z = \frac{4K_{III}}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} (1 + \nu) \sin \frac{\theta}{2} \quad (I.8)$$

$$u_y = u_x = 0$$

La discontinuité ou saut de déplacement $[u_z]$ selon l'axe \vec{x}_3 est :

$$u_z = u_z(r, \pi) - u_z(r, -\pi) = \frac{8K_{III}}{E} (1 + \nu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (I.9)$$

K_I , K_{II} , K_{III} : Ce sont les facteurs d'intensité de contrainte qui correspondent aux trois modes de base de déplacement relatif des lèvres de la fissure.

I.5) Facteurs d'intensité des contraintes :

Les facteurs d'intensité de contrainte peuvent être déterminés si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et déplacements. Ils dépendent de la longueur de la fissure, de la géométrie et des charges appliquées. Ils déterminent à eux seuls les champs asymptotiques de contrainte. Pour cette raison, ce sont ces facteurs qui interviendront dans les critères de fissuration.

Les facteurs d'intensité de contrainte de fissure sont donnés par [BOU-07] :

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2r\pi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right) \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yx} \sqrt{2r\pi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right) \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yz} \sqrt{2r\pi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_z] \right) \end{aligned} \quad (I.10)$$

Dans cette étude, nous utilisons la formulation exprimant les facteurs d'intensité de contrainte en fonction de la discontinuité de déplacement.

I.6) Mode mixte de rupture :

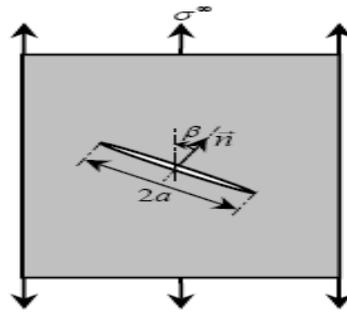
La figure (I.3) représente une fissure inclinée traversant une plaque soumise à une traction simple. Si la fissure n'était pas inclinée ($\beta = 0^\circ$), le chargement appliqué conduirait à du mode I pur. Pour montrer comment l'inclinaison de la fissure entraîne le mode II [SCH-07], nous calculons le vecteur contrainte dans le plan de la fissure. Ce vecteur s'écrit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = (\sigma^\infty \cos \beta) \vec{y} \quad (I.18)$$

Le vecteur contrainte peut être exprimé avec la contrainte normale et tangentielle.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \sigma^\infty \cos \beta \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\infty \cos^2 \beta \\ \sigma^\infty \cos \beta \sin \beta \end{pmatrix} \quad (I.19)$$

Nous remarquons que le vecteur contrainte dans le plan de fissure se décompose en une contrainte normale σ (traction) et une contrainte tangentielle T (cisaillement), Dans le cas présent, nous nous sommes au mode I pur et mode mixte (I +II).



(Fig.1.3)- Fissure inclinée dans une plaque en traction

I.5) Conclusion :

Dans cette étude, nous nous limitons au calcul du facteur d'intensité de contrainte. Les cas du mode I, II purs et du mode mixte, selon le chargement et la géométrie, sont considérés dans le cas de milieux semi infinis fissurés.

La présentation de la méthode

II.1) Introduction.

II.2) Méthode indirecte.

II.2.1) Identité de Somigliana.

II. 3) Le principe de la méthode de discontinuité de déplacement

II.4) Problème intérieur et Problème extérieur.

II.4.1) Convention de signe.

II.5) Les solutions analytiques données par la (MDD).

II.6) Procédure numérique.

II.7) Coefficients d'influences.

II.8) Conditions de symétrie.

II.9) Conclusion.

II .1) Introduction:

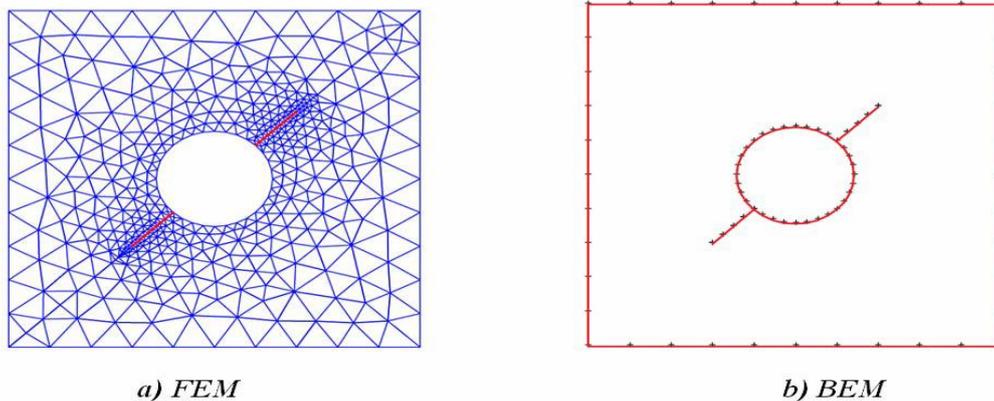
Beaucoup de problèmes pratiques dans les différentes disciplines de l'ingénierie tels que, la mécanique de la rupture, celle des solides, les transferts thermiques et de masse et autres phénomènes peuvent être représentés par des équations aux dérivés partielles régissant un domaine Σ délimité par un contour, sur lequel des conditions aux limites sont prescrites.

Pour approcher les solutions analytiques de ces problèmes, qui sont souvent difficiles à déterminer par une résolution directe des équations différentielles, de nombreuses méthodes numériques ont été mises en place, parmi ces méthodes :

1. La Méthode des Eléments Finis « FEM » [YAN-86]: qui exige la discrétisation du domaine entier pris en considération par une maille, dans laquelle les équations élastiques de champ sont rapprochées par un système d'équations algébriques.

La « FEM » a des avantages définis dans beaucoup de cas, mais pour les matériaux homogènes la nécessité de discrétiser le domaine entier doit être vue comme une imperfection, car la discrétisation de tout le domaine conduit à un système d'équations grand, en particulier dans des problèmes tridimensionnels.

2. La Méthode des Eléments de Frontières « BEM » [CRO-83] : qui exige que seulement des frontières du domaine soient discrétisées
La « BEM » contrairement à la « FEM » mène à un système d'ordre algébrique inférieur, les équations reliant seulement des contraintes et des déplacements de frontière et réduisent par conséquent un problème tridimensionnel à bidimensionnel (ou un problème bidimensionnel à l'unidimensionnel).



(FIG II .1) – Représentation d'un maillage par FEM et par BEM

La Méthode des Eléments de Frontières appelée aussi Méthode des Equations Intégrales, a été développée de deux manières distinctes. L'une des deux est une approche plus mathématique. Elle est basée sur certains théorèmes fondamentaux qui reliant directement les inconnues du contour aux conditions limites. Cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Directes. L'autre approche est une approche physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités placées tout au long du contour discrétisé en segments de droites et de calculer les paramètres aux limites désirés, cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Indirectes (la Méthode des Discontinuités de Déplacements) [CRO-76]. Ces méthodes sont divisées en méthodes directes et méthodes indirectes. Dans notre étude, la méthode indirecte est limitée à la présentation de la méthode des discontinuités de déplacement.

Dans ce chapitre nous allons faire une présentation détaillée de la Méthode de Discontinuité de Déplacement en milieu semi infini étant donné que c'est la méthode choisie dans notre étude.

II.2) Méthode indirecte :

II.2.1) Identité de Somigliana :

Considérons deux états élasto-statiques $\left[\bar{\sigma}, \bar{u}, \bar{F} \right]$ et $\left[\bar{\sigma}^*, \bar{u}^*, \bar{F}^* \right]$ définis sur le même domaine borné D de frontière Γ et reprenons le théorème de Maxwell-Betti écrit pour les deux états élastiques qui s'écrivent :

$$(I.1) \int_{\partial D} \bar{T}(M, \bar{n}) \bar{u}^* dS + \int_D \bar{F} \bar{u}^* dV = \int_{\partial D} \bar{T}^*(M, \bar{n}) \bar{u} dS + \int_D \bar{F}^* \bar{u} dV$$

Soit D, supposé une partie du domaine infini et chargé au point P par une force unitaire dans la direction i . Nous pouvons écrire à partir de l'équation (I.1) et de la distribution de Dirac pour un point P à l'intérieur du domaine D, ce qui suit :

$$u_i(P) + \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j(M) dS = \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j(M) dS + \int_D F_j(M) U_{ij}(M, P) dV \quad (II.2)$$

Connue sous le nom d'identité de Somigliana.

En l'absence de forces de volumes, l'équation (II.2) présente la forme simplifiée suivante :

$$(II.3) u_i(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j(M) dS$$

Lorsque le point P est sur le contour, les intégrales sont singulières. Celles-ci sont intégrées au sens des valeurs principales de Cauchy.

Dans le cas du plan, il est montré par [Dom-1987], pour un point P appartenant à la surface, que l'équation (II.3) devient:

$$(II.4) \quad c_{ij}u_i(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P)u_j(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P)T_j(M) dS$$

est un terme libre qui dépend de la régularité du contour. c_{ij}

On a $c_{ij} = \frac{1}{2}$ pour un contour lisse au point P

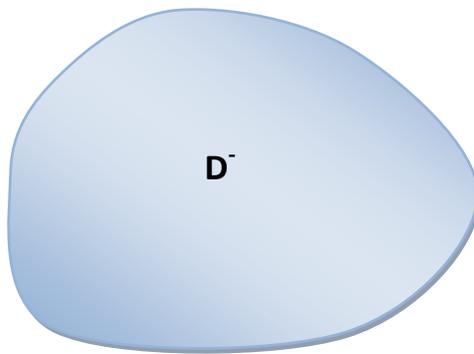
Pour P à l'extérieur du domaine. $c_{ij} = 0$

L'identité de Somigliana est commune comme une représentation intégrale directe donnant les contraintes et les déplacements en un point du domaine à partir des conditions appliquées à la frontière en terme de contrainte et déplacement.

Il existe des représentations où les déplacements et les contraintes sont des fonctions de certaines quantités qui ne sont ni les déplacements ni contraintes appliqués. Ces techniques sont appelées méthodes indirectes.

Celles-ci peuvent être introduites comme suit en supposant avoir à résoudre deux problèmes : un problème intérieur (borné) et un problème extérieur (infini).

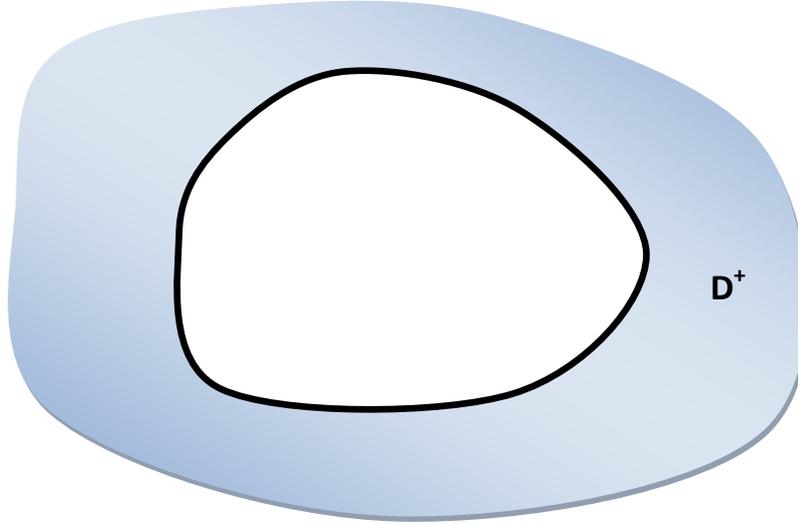
Pour le problème intérieur (borné), on écrit l'identité de Somigliana pour ce problème (Fig.II.2)



(Fig. II.2). Domaine D^- intérieur repéré par le signe (-)

Le domaine (-) est le domaine réel occupé par la structure et sa solution est $\left[\begin{matrix} \vec{\sigma}^- \\ \vec{u}^- \end{matrix} \right]$.

On considère le domaine complémentaire à D^- , soit D^+ . Pour ce problème la solution est $\left[\vec{\sigma}^+, \vec{u}^+ \right]$.



(Fig.II.3). Domaine D^+ extérieur repéré par le signe (+)

Appliquons le théorème de la réciprocité entre l'état (+) et la solution fondamentale, lorsque la charge concentrée est dans le domaine D^- . Nous obtenons l'identité de Somigliana comme suit :

$$(II.5) \quad 0 = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j^+(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j^+(M) dS$$

En soustrayant membre à membre (II.5) et l'équation (II.3) écrite pour le domaine D^- , nous obtenons :

$$(II.6) \quad u_i^-(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) (u_j^- - u_j^+) (M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) (T_j^- - T_j^+) (M) dS$$

La solution dans D^+ peut être choisie arbitrairement.

Choisissons, sur la frontière la condition suivante :

$$T_j^+ = T_j^-$$

En posant:

$$D_j = u_j^+ - u_j^-, \quad j = 1, 2$$

Alors, il reste :

$$(II.7) u_i^-(P) = \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P)(u_j^+ - u_j^-)(M) dS = \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) D_j dS$$

Ce résultat est connu sous le nom de potentiel de double couche avec la densité D_j . Cette méthode a été introduite en premier par Crouch (1976) sous le nom de méthode des discontinuités de déplacement.

II.3) Principe de la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) :

Une discontinuité de déplacement peut être assimilée comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes, se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre.

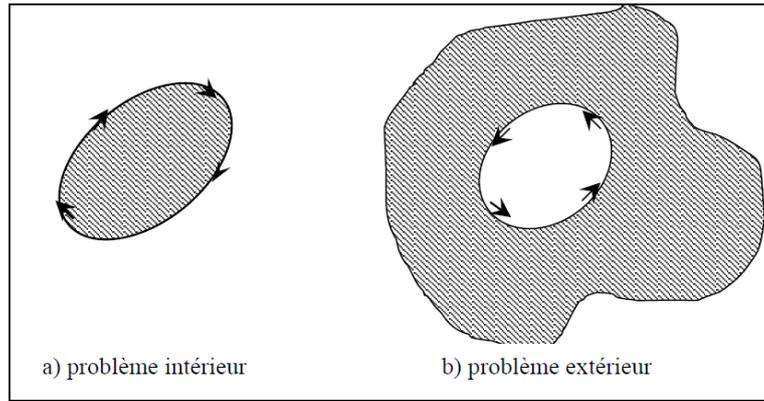
La méthode de discontinuité de déplacement est basée sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser le segment de droite en une série de N éléments reliés les uns aux autres. Ainsi, connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments [CRO-76].

II.3.1) Problème intérieur et Problème extérieur :

Dans le cas d'un domaine fini, limité par un contour (disque) on a affaire à un problème intérieur, et lorsque le domaine à étudier est fini (une cavité à l'intérieur d'un domaine infini) on est dans le cas d'un problème extérieur. Nous rencontrons aussi des applications en domaine semi infini. Et c'est particulièrement à ce type de problèmes que la BEM est utile, puisque l'étude se limite seulement à une discrétisation de la frontière (Fig. II.2) [CRO-76].

II.3.2) Convention de signe :

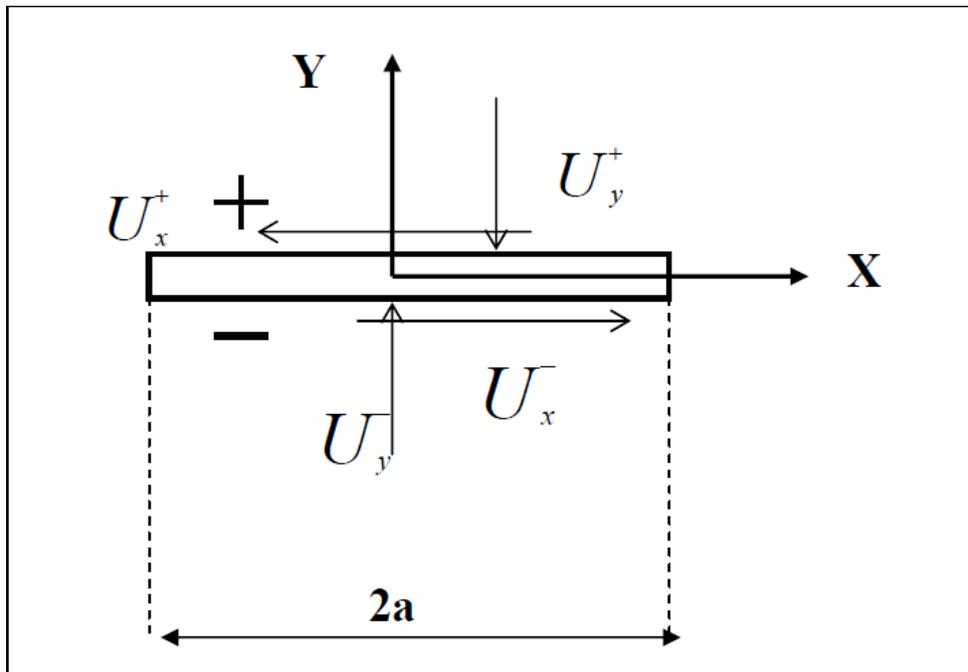
Le contour d'un domaine fini (problème intérieur) est traversé suivant le sens horaire, tandis que le contour d'un domaine infini (problème extérieur) est traversé selon le sens trigonométrique (Fig. II.4) [CRO-76].



(Fig II.4) Schématisation d'un problème intérieur et extérieur

II.4) Les solutions analytiques donnés par la MDD :

Si on considère le segment (Fig. II.5) comme une fissure droite dans un plan semi-infini on peut distinguer deux surface une à $(y = 0^+)$ et l'autre à $(y = 0^-)$, sachant que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment $-a < x < a$ et $y=0$.



(Fig II.5) discontinuité de déplacement

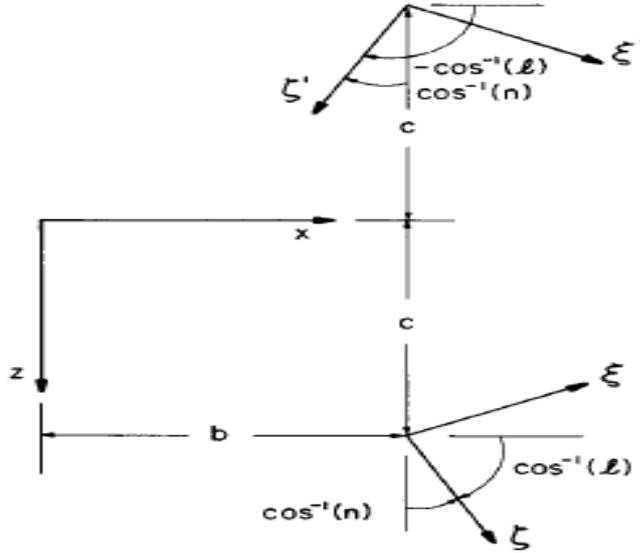
La discontinuité de déplacement D_i est définie comme étant la différence de déplacement entre les deux surfaces du segment, ainsi on peut écrire [10] :

$$D_i = U_i(x, 0^-) - U_i(x, 0^+) \quad (II.8)$$

$$\begin{cases} D_x = U_x(x, 0^-) - U_x(x, 0^+) \\ D_y = U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) \end{cases} \quad (II.9)$$

A noter que D_X et D_Y sont constants dans notre cas.

Les solutions d'une discontinuité de déplacement orienté arbitrairement dans un plan semi-infini en contraintes et en déplacements sont données par Crouch. Elles sont construites par superposition de trois solutions différentes :



(Fig.II.6) Les coordonnées d'une discontinuité de déplacement orientée arbitrairement dans un plan infini, et les coordonnées de son image.

La première : c'est la solution d'une discontinuité de déplacement orientée arbitrairement dans un plan infini, les équations donnant les déplacements et les contraintes sont :

$$\begin{aligned} \bar{U}_X = & \frac{D_X}{4\pi(1-\nu)} [\{l^2 + (l^2 - n^2)(1 - 2\nu)\}F_1(\xi, \zeta) + nl(3 - 4\nu)F_2(\xi, \zeta) - \{nF_3(\xi, \zeta) - \\ & lF_4(\xi, \zeta)\}] + \frac{D_Y}{4\pi(1-\nu)} [nl(3 - 4\nu)F_1(\xi, \zeta) + \{n^2 + (n^2 - l^2)(1 - 2\nu)\}F_2(\xi, \zeta) + \\ & \{lF_3(\xi, \zeta) + nF_4(\xi, \zeta)\}] \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_Y = & \frac{D_X}{4\pi(1-\nu)} [nl(3 - 4\nu)F_1(\xi, \zeta) + \{n^2 + (n^2 - l^2)(1 - 2\nu)\}F_2(\xi, \zeta) + \{lF_3(\xi, \zeta) + \\ & nF_4(\xi, \zeta)\}] + \frac{D_Y}{4\pi(1-\nu)} [\{l^2 + (l^2 - n^2)(1 - 2\nu)\}F_1(\xi, \zeta) + nl(3 - 4\nu)F_2(\xi, \zeta) - \\ & \{nF_3(\xi, \zeta) - lF_4(\xi, \zeta)\}] \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_{XX} = \frac{GD_X}{2\pi(1-\nu)} [2nlF_3(\xi, \zeta) + (n^2 + l^2)F_4(\xi, \zeta) + \{lF_5(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta)\}]$$

$$+ \frac{GD_Y}{2\pi(1-\nu)} [2n^2F_3(\xi, \zeta) - 2nlF_4(\xi, \zeta) + \{nF_5(\xi, \zeta) - lF_6(\xi, \zeta)\}]$$

$$\bar{\sigma}_{YY} = \frac{GD_X}{2\pi(1-\nu)} [2nlF_3(\xi, \zeta) + (n^2 + l^2)F_4(\xi, \zeta) + \{lF_5(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta)\}]$$

$$+ \frac{GD_Y}{2\pi(1-\nu)} [2l^2F_3(\xi, \zeta) - 2nlF_4(\xi, \zeta) + \{nF_5(\xi, \zeta) - lF_6(\xi, \zeta)\}] \quad (II. 11)$$

$$\bar{\sigma}_{XY} = \frac{GD_X}{2\pi(1-\nu)} \{lF_5(\xi, \zeta) + nF_6(\xi, \zeta)\} + \frac{GD_Y}{2\pi(1-\nu)} [\{lF_5(\xi, \zeta) - nF_6(\xi, \zeta)\}]$$

Avec: $F_1(\xi, \zeta), F_2(\xi, \zeta), F_3(\xi, \zeta), F_4(\xi, \zeta), F_5(\xi, \zeta), F_6(\xi, \zeta)$ sont les dérivés de la fonction $f(\xi, \zeta)$

$$F_1(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial X}, F_2(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial Z}, F_3(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z}, F_4(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 Z}, F_5(\xi, \zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z^2}$$

$$F_6(\xi, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial Z^2}$$

$$f(\xi, \zeta) = \frac{4\pi(1-\nu) \phi(\xi, \zeta)}{D_X}$$

$$\phi(\xi, \zeta) = \frac{D_X}{2\pi(1-\nu)} \left[\xi \tan^{-1} \left(\frac{\xi+a}{\zeta} \right) - \xi \tan^{-1} \left(\frac{\xi-a}{\zeta} \right) \right] + \xi(\xi+a) \log[(\xi+a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}} - (\xi - a) \log[(\xi-a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}} \quad (II. 12)$$

$$\xi = n(X-b) - l(z-C)$$

$$\zeta = l(X-b) - n(z-C) \quad (II. 13)$$

La deuxième : c'est la solution de l'image de la discontinuité précédente, les équations donnant les déplacements et les contraintes sont :

$$\bar{U}_X = \frac{D_X}{4\pi(1-\nu)} [\{l^2 + (1-2\nu)\} \bar{F}_1(\xi', \zeta') - nl \bar{F}_2(\xi', \zeta') + \{(3-4\nu)(l-C) + (1-2l^2)z\} \bar{F}_3(\xi', \zeta') - l\{(3-4\nu) + 2nz\} \bar{F}_4(\xi', \zeta') + 2z\{(l\xi-C) \bar{F}_5(\xi', \zeta') + l \bar{F}_6(\xi', \zeta')\}] -$$

$$\frac{D_Y}{4\pi(1-\nu)} [-nl \bar{F}_1(\xi', \zeta') + \{n^2 + (1-2\nu)\} \bar{F}_2(\xi', \zeta') + l\{(3-4\nu) + 2nz\} \bar{F}_3(\xi', \zeta') - \{(3-4\nu)(l\xi-C) - (1+2l^2)z\} \bar{F}_4(\xi', \zeta') + 2z\{\zeta l \bar{F}_5(\xi', \zeta') - (l\xi-C) \bar{F}_6(\xi', \zeta')\}] - U_X^*$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_Y = & \frac{D_X}{4\pi(1-\nu)} [nl\bar{F}_1(\xi', \zeta') + \{n^2 - (1 + 2n^2) + (1 - 2\nu)z\}\bar{F}_2(\xi', \zeta') + l\{(3 - 4\nu) - \\ & 2\}\bar{F}_3(\xi', \zeta') - \bar{F}_4(\xi', \zeta') + 2z\{(l\xi - C)\bar{F}_5(\xi', \zeta') + l\bar{F}_6(\xi', \zeta')\}] - \frac{D_Y}{4\pi(1-\nu)} [\{l^2 + \\ & (1 - 2\nu)\}\bar{F}_1(\xi', \zeta') - nl\bar{F}_2(\xi', \zeta') - (1 + 2l^2)z + (3 - 4\nu) - (l\xi - C)\bar{F}_5(\xi', \zeta') \\ & + l\xi\bar{F}_6(\xi', \zeta')] + U_Y^* \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{XX} = & \frac{GD_X}{4\pi(1-\nu)} [2nl\bar{F}_3(\xi', \zeta') - (n^2 - l^2)\bar{F}_4(\xi', \zeta') + l(3 + 4nz)\bar{F}_5(\xi', \zeta') - \{(1 - 4l^2)z + \\ & 3(l\xi - C)\}\bar{F}_6(\xi', \zeta') + 2z\{\zeta l\bar{F}_7(\xi', \zeta') - (l\xi - C)\bar{F}_8(\xi', \zeta')\}] - \frac{GD_Y}{4\pi(1-\nu)} [2(1 + l^2)\bar{F}_3(\xi', \zeta') - \\ & 2nl\bar{F}_4(\xi', \zeta') + \{(1 + 4l^2)\bar{F}_5(\xi', \zeta') - l(3 + 4nz)\bar{F}_6(\xi', \zeta') - 2z\{(l\xi - C)\bar{F}_7(\xi', \zeta') + \\ & l\bar{F}_8(\xi', \zeta')\}\}] - \sigma_{XX}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{YY} = & \frac{GD_X}{4\pi(1-\nu)} [2nl\bar{F}_3(\xi', \zeta') - (n^2 - l^2)\bar{F}_4(\xi', \zeta') + l(\zeta + 4nz)\bar{F}_5(\xi', \zeta') + \{(1 - 4l^2)z + \\ & 3(l\xi - C)\}\bar{F}_6(\xi', \zeta') + 2z\{l\bar{F}_7(\xi', \zeta') - (l\xi - C)\bar{F}_8(\xi', \zeta')\}] - \frac{GD_Y}{4\pi(1-\nu)} [2l^2\bar{F}_3(\xi', \zeta') - \\ & 2nl\bar{F}_4(\xi', \zeta') + \{(1 + 4l^2)z + (l\xi - C)\bar{F}_5(\xi', \zeta') - l(\zeta - 4nz)\bar{F}_6(\xi', \zeta') + 2z\{(l\xi - \\ & C)\bar{F}_7(\xi', \zeta') + l\bar{F}_8(\xi', \zeta')\}\}] - \sigma_{YY}^* \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{XY} = & \frac{GD_X}{4\pi(1-\nu)} [\{(1 - 4l^2)z + (l\xi - C)\}\bar{F}_5(\xi', \zeta') + l(\zeta + 4nz)\bar{F}_6(\xi', \zeta') + 2z\{(l\xi - \\ & C)\bar{F}_7(\xi', \zeta') + l\bar{F}_8(\xi', \zeta')\}] - \frac{GD_Y}{4\pi(1-\nu)} [\bar{F}_4(\xi', \zeta') + l(\zeta + 4nz)\bar{F}_5(\xi', \zeta') + \{(1 + 4l^2)z - \\ & (l\xi - C)\}\bar{F}_6(\xi', \zeta') + 2z\{l\bar{F}_7(\xi', \zeta') - (l\xi - C)\bar{F}_8(\xi', \zeta')\}] - \sigma_{XY}^* \end{aligned}$$

Avec $\bar{F}_1(\xi', \zeta')$, $\bar{F}_2(\xi', \zeta')$, $\bar{F}_3(\xi', \zeta')$, $\bar{F}_4(\xi', \zeta')$, $\bar{F}_5(\xi', \zeta')$, $\bar{F}_6(\xi', \zeta')$ sont les dérivés de la fonction $f(\xi', \zeta')$:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(\xi', \zeta') = \frac{\partial f}{\partial X}, \bar{F}_2(\xi', \zeta') = \frac{\partial f}{\partial Z}, \bar{F}_3(\xi', \zeta') = \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z}, \bar{F}_4(\xi', \zeta') = \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}, \bar{F}_5(\xi', \zeta') = \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z}, \bar{F}_6(\xi', \zeta') = \frac{\partial f}{\partial Z^2} \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } f(\xi', \zeta') = \frac{4\pi(1-\nu)\phi(\xi', \zeta')}{D_X}$$

$$\phi(\xi', \zeta') = \frac{D_X}{2\pi(1-\nu)} \left[\xi' \tan^{-1} \left(\frac{\xi'+a}{\zeta} \right) - \xi \tan^{-1} \left(\frac{\xi'-a}{\zeta} \right) \right] + \xi'(\xi' + a) \log[(\xi' + a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}} - (\xi' - a) \log[(\xi' - a)^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}} \quad (II.16)$$

$$\xi' = n(X - b) + l(z + C)$$

$$\zeta' = \zeta = -l(X - b) + n(z + C) \quad (II.17)$$

La troisième solution est trouvée à partir des conditions aux limites imposées sur le plan semi-infini $z \geq 0$, les équations donnant les déplacements et les contraintes sont :

$$U_X^* = - (1- 2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial X} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 Z}$$

$$U_Z^* = 2 (1- \nu) \frac{\partial \phi}{\partial Z} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 Z} \quad (II.18)$$

$$\sigma_{XX}^* = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 Z} + z \frac{\partial^3 \phi}{\partial^3 Z} \right)$$

$$\sigma_{YY}^* = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 Z} - z \frac{\partial^3 \phi}{\partial^3 Z} \right)$$

$$\sigma_{XY}^* = 2G z \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial^2 Z \partial X} \right)$$

avec

$$\phi(x, y) = \frac{D_Y}{4\pi(1-\nu)} \left[z \tan^{-1} \left(\frac{X+1}{z} \right) - z \tan^{-1} \left(\frac{X-1}{z} \right) + (X + a) \log[(X + a)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} - (X - a) \log[(X - a)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (II.19)$$

La solution pour un milieu semi infini est obtenue par sommation de ces trois résultats. La solution finale d'une discontinuité de déplacement orientée arbitrairement dans un plan semi-infini est donc:

$$U_X = \bar{U}_X + \bar{\bar{U}}_X + U_X^*$$

$$U_Y = \bar{U}_Y + \bar{\bar{U}}_Y + U_Y^* \quad (II.20)$$

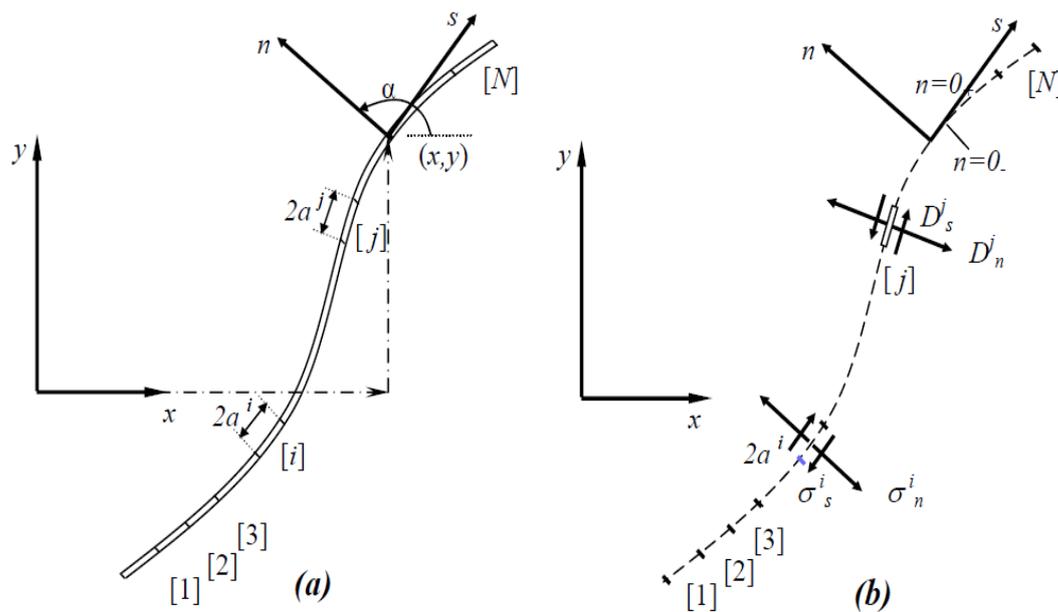
$$\sigma_{XX} = \bar{\sigma}_{XX} + \bar{\bar{\sigma}}_{XX} + \sigma_{XX}^* \quad (II.21)$$

$$\sigma_{YY} = \bar{\sigma}_{YY} + \bar{\bar{\sigma}}_{YY} + \sigma_{YY}^*$$

$$\sigma_{XY} = \bar{\sigma}_{XY} + \bar{\bar{\sigma}}_{XY} + \sigma_{XY}^*$$

II.5) Procédure numérique :

Comme nous l'avons dit précédemment, la M.D.D est construite à partir d'une solution analytique qui exprime les déplacements et les contraintes (2.13) et (2.14) d'une discontinuité constante dans un milieu élastique infini. Le principe de la procédure est de discrétiser une ligne de courbure quelconque en N éléments, parfaitement reliés les uns aux autres, comme schématisé sur la figure (II.7).



(Fig.II.7) Représentation de la discrétisation d'un segment en N éléments

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local (s, n) comme le montre la figure (Fig. II.5).

Les composantes normales et tangentielles de la discontinuité de déplacement du $i^{\text{ème}}$ élément notées respectivement D_n^i et D_s^i sont exprimées en fonction des déplacements discontinus des deux lèvres par:

$$D_n^i = U_{ni}^- - U_{ni}^+ \quad (II.22)$$

$$D_s^i = U_{si}^- - U_{si}^+$$

U_{ni}^+ et U_{si}^+ sont le déplacement normal et tangentiel pour $Y = 0^+$.

U_{ni}^- et U_{si}^- sont les déplacements pour $Y = 0^-$.

Les contraintes normales et tangentielles au milieu d'un élément « i » peuvent être exprimées en fonction des composantes de la discontinuité de déplacement du j^{ème} élément par les relations suivantes :

$$\sigma_s^i = A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \quad \text{avec } i = 1, n \quad (\text{II.23})$$

$$\sigma_n^i = A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j$$

$A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$: sont les coefficients d'influence des contraintes.

En appliquant le principe de superposition, et tenant compte de l'influence des N éléments, nous obtenons le système à résoudre suivant :

$$\sigma_s^i = \sum_j A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_j A_{sn}^{ij} D_n^j \quad \text{avec } i = 1, n \quad (\text{II.24})$$

$$\sigma_n^i = \sum_j A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_j A_{nn}^{ij} D_n^j$$

De manière identique on établit le champ de déplacement [CRO-76]:

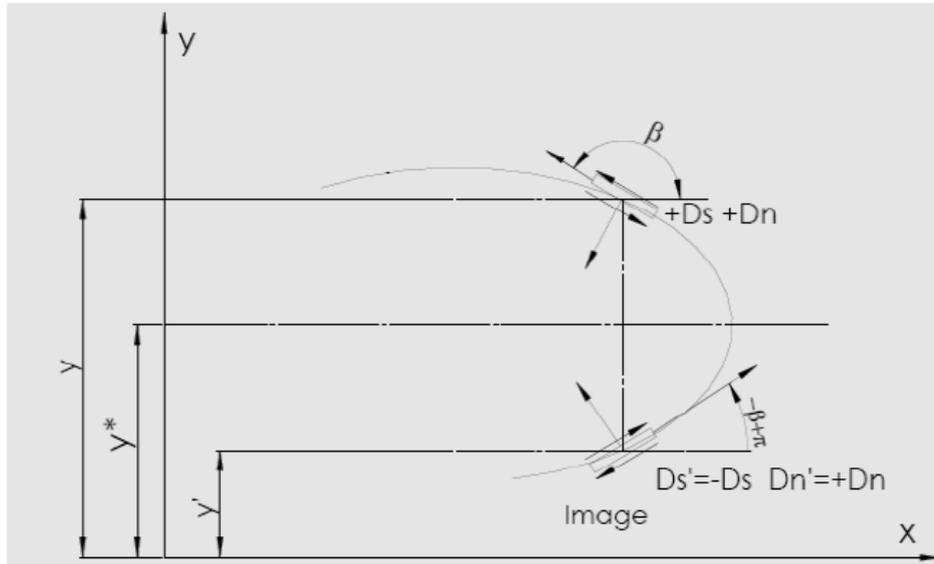
$$U_s^i = \sum_j B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_j B_{sn}^{ij} D_n^j \quad \text{avec } i = 1, n \quad (\text{II.25})$$

$$U_n^i = \sum_j B_{nn}^{ij} D_n^j + \sum_j B_{ns}^{ij} D_s^j$$

Avec $B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}$ sont les coefficients d'influence pour les déplacements.

II.6) Conditions de symétrie :

La symétrie pour un solide par rapport à un axe, n'est satisfaite que lorsque les propriétés élastiques, la configuration géométrique et les conditions aux limites de ce solide sont tous symétriques par rapport à cet axe. L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes par la méthode des discontinuités de déplacement est d'une grande importance, quand on sait que le système d'équations est réduit de moitié dans le cas de la simple symétrie (Fig. II .6). Dans notre cas la symétrie peut être obtenue pour l'axe x=0.



(Fig. II.8) Symétrie par rapport a l'axe $y=y'$

Etant symétrique, l'élément « j » et son image « j' » ont des discontinuités de déplacement tangentielles égales mais de signe opposées, tandis que les discontinuités de déplacement normales sont de même signe et même valeur. Ceci se traduit par les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} D_n^j = D_n^{j'} & \sigma_n^j = \sigma_n^{j'} & U_n^j = U_n^{j'} \\ D_s^j = -D_s^{j'} & \sigma_s^j = -\sigma_s^{j'} & U_s^j = -U_s^{j'} \end{array}$$

II.7) Conclusion :

La méthode des discontinuités de déplacement est parmi les autres familles de méthode intégrales permettant de simuler les milieux fissurés.

C'est une méthode qui a l'avantage de pouvoir traiter les milieux infinis et semi-infini.

Exemples, résultats et Interprétations

III.1) Introduction.

III.2) La structure de programme.

III.3) Les exemples traités.

III.3.1) Fissure dans un corps semi-infini avec un chargement à l'infini.

III.3.2) Quatre fissures inclinées dans un corps semi-infini soumis à un chargement à l'infini.

III.3.3) Quatre fissures perpendiculaires à l'axe de chargement dans un plan semi- infini.

III.3.4) Fissure inclinée avec des forces appliquées sur ces lèvres.

III.3.5) Deux fissure émanant d'un trou circulaire dans un plan semi-infini avec un chargement à l'infini.

III.3.6) Fissure en arc de cercle dans un plan semi-infini.

III.4) Conclusion.

III.1) Introduction:

Dans ce chapitre, nous allons montrer la structure du programme utilisé pour la simulation numérique, et nous traitons un nombre d'exemples des corps semi-infini pratiques en mécanique de la rupture qui peuvent être simulés numériquement par la méthode des discontinuités des déplacements (MDD) en bidimensionnel. Certains tests peuvent être exploités pour quantifier la dégradation des matériaux en surface.

III.2) La structure de programme :

Le programme utilisé a été repris à partir des travaux de Crouch. Un module a été introduit pour la discrétisation automatique de contour circulaire et pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte. Il est réalisé avec le langage de programmation FORTRAN 90. Sa compilation et son exécution sont faite dans le compilateur F32 sous Windows. Le programme est constitué de trois parties:

1. La première partie est la lecture des données du problème où sont données les caractéristiques mécanique et le chargement. La discrétisation du corps à étudier, l'affectation de la position pour chaque élément, son orientation et ses conditions aux limites sont faites dans cette partie.
2. Dans la deuxième partie, le calcul des coefficients d'influences de chaque élément de la frontière du corps fait appel à la subroutine COEFF. La résolution du système pour trouver les discontinuités est obtenue avec la subroutine SOLVE. Les résultats de cette partie sont sauvegardés dans un fichier pour l'utilisation dans les autres parties comme une base de données.
3. La troisième partie, traite les problèmes en présence de fissure où le facteur d'intensité de contrainte peut être déterminé en utilisant une approche locale à n'importe quel bout de fissure par les relations (1.10) obtenues en chapitre I.

La structure simplifiée du programme est la suivante:

Chapite III: Exemples traités

Lecture des données :

- Le module de Young
- Le chargement à l'infini
- Le type de problème (corps semi-infini, fini ou infini)
- La condition de symétrie

Maillage du contour de problème :

Le nombre maximum d'itération à tenir compte pour résoudre le système d'équation.

Le facteur de relaxation pour résoudre les équations par itération.

La position de chaque segment (les coordonnées de début et de fin) pour les segments droites et (les coordonnées du centre, le rayon, l'angle de début et l'angle de fin) pour les contours circulaires.

Le nombre d'éléments constitutifs de chaque segment.

Les conditions aux limites de chargement ou de déplacement

- Le nombre maximum d'itération à tenir compte pour résoudre le système d'équation.

Formation de système d'équation initial par la subroutine
COEFF

$[A_i]\{X_i\} = \{B_i\}$ et la résolution Par la subroutine SOLVE

Calcul de champ des déplacements et des contraintes sur le contour

Calcul des facteurs d'intensité de contrainte

Calcul du champ de déplacement et de contrainte en des points choisis dans le domaine

Affichage des résultats

III.3) Les exemples traités :

Pour pouvoir faire une comparaison des résultats obtenus par notre code, nous nous sommes basés sur les travaux des références [CRO-76], [FRE-76], [CHE-01], [EXA-10]. L'exemple (III.3.5) est proposé dans cette étude sans pouvoir obtenir des résultats de travaux pour confronter nos résultats.

III.3.1) Fissure dans un corps semi-infini avec un chargement à l'infini :

Pour cet exemple, la méthode de discontinuité de déplacement est employée pour examiner le problème d'un corps semi-infini, sous une tension uniforme à l'infini $\sigma_{xx} = T = 100 \text{ N}$. Le domaine présente une fissure droite de longueur $b = 1 \text{ mm}$ débouchant à la surface et inclinée avec un angle $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des abscisses. Le coefficient de poisson est égal à $\nu = 0.1$ et le module de Young $E = 100 \text{ GPa}$.

Pour chaque configuration, les résultats ont été obtenus pour une discrétisation utilisant 20 et 30 éléments.

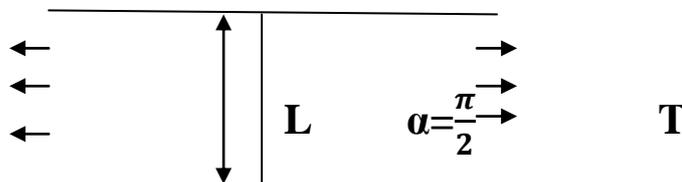
Nous donnons dans les trois cas, les facteurs d'intensités de contrainte obtenus en utilisant les discontinuités de déplacement normales et tangentielles trouvées numériquement.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2r\pi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} D_n \right)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yx} \sqrt{2r\pi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} D_T \right)$$

r est la demi-longueur du dernier élément sur la fissure

-Le premier cas ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) :



(Fig.III.1.a) - fissures perpendiculaire a l'axe de chargement dans un corps semi-infini

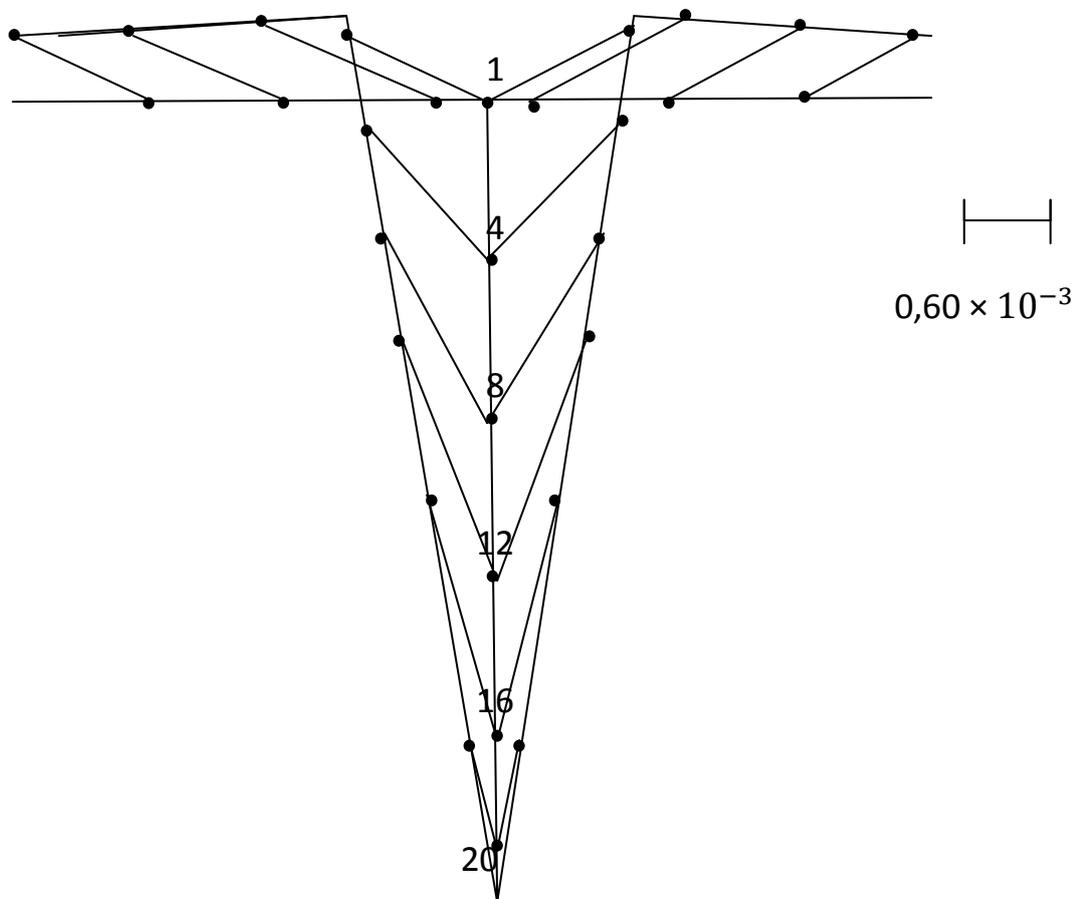
Chapite III: Exemples traités

Le tableau ci-dessus nous donne les coefficients d'influence en fonction des discontinuités de déplacement (tangentielle et normales), et de nombre d'élément.

Tableau(III.1) Variation de K_i en fonction de N et D_i

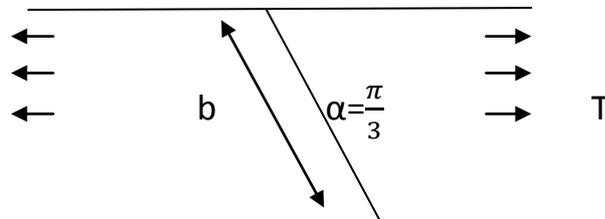
N	D_T	D_N	K_1 Mpas \sqrt{mm}	K_2 Mpas \sqrt{mm}
20	0	$1,2414 \cdot 10^{-3}$	175.7	0
30	0	$1,0144 \cdot 10^{-3}$	175.8	0

Le profil de déplacement pour un nombre d'élément (N=20) :



(Fig. III.1.b) Profil de déplacement pour un nombre d'élément (N=20) :

-Le deuxième cas ($\alpha = \frac{\pi}{3}$) :

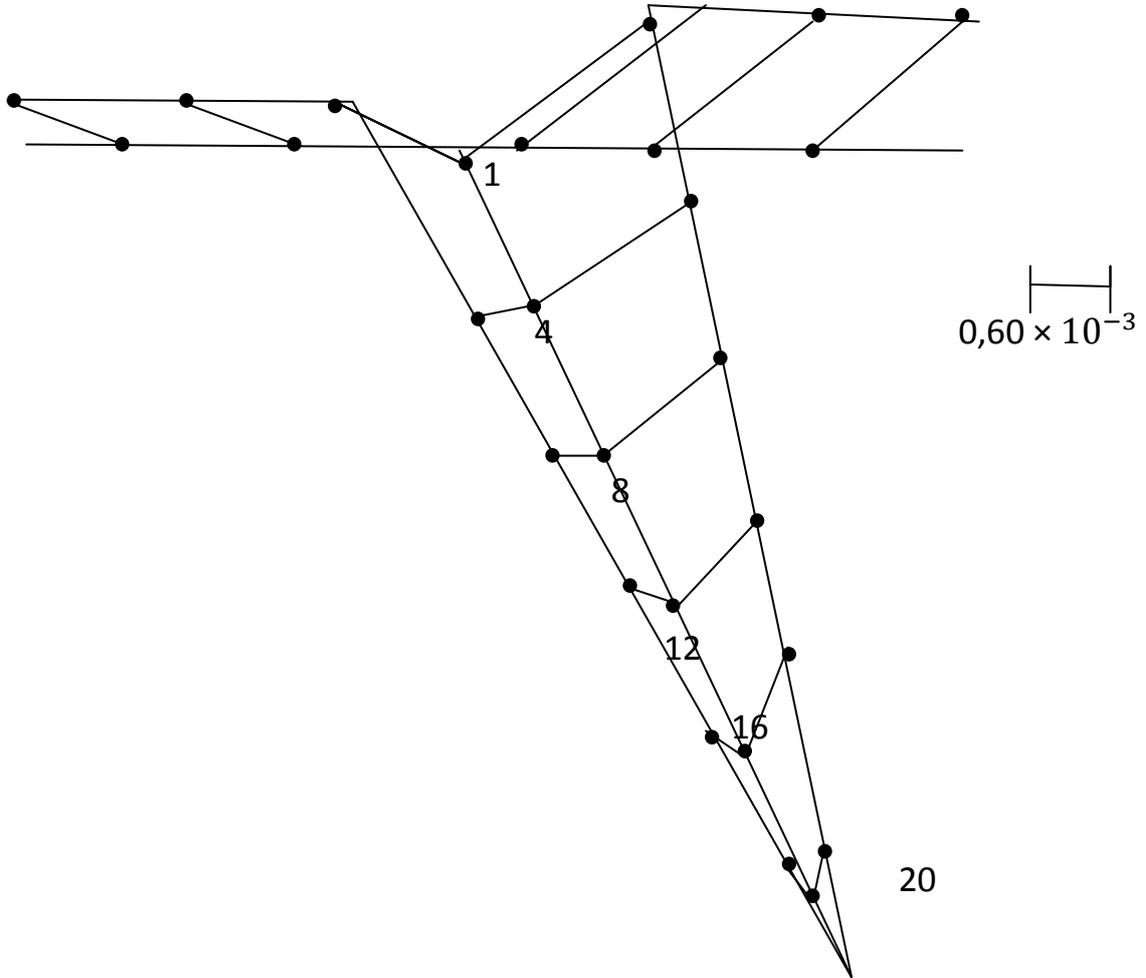


(Fig.III.2.a)- fissures inclinées avec un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ dans un corps semi-infini

Le tableau ci-dessus nous donne les coefficients d'influence en fonction des discontinuités de déplacement (tangentielle et normales), et de nombre d'élément.

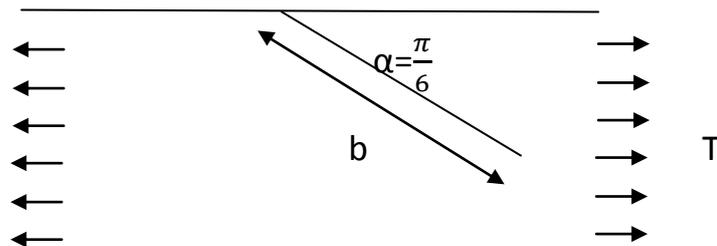
Tableau(III.1) Variation de K_i en fonction de N et D_i

N	D_T	D_N	K_1	K_2
20	$3,3375 \cdot 10^{-4}$	$1,0291 \cdot 10^{-3}$	145,6	47,2
30	$2,7412 \cdot 10^{-4}$	$8,3948 \cdot 10^{-4}$	145,5	47,5



(Fig III.2.a) Le profil de déplacement pour un nombre d'élément (N=20)

-Le troisième cas ($\alpha = \frac{\pi}{6}$) :



(Fig.III.3.a)- fissures inclinées avec un angle $\alpha = \frac{\pi}{6}$ dans un corps semi-infini

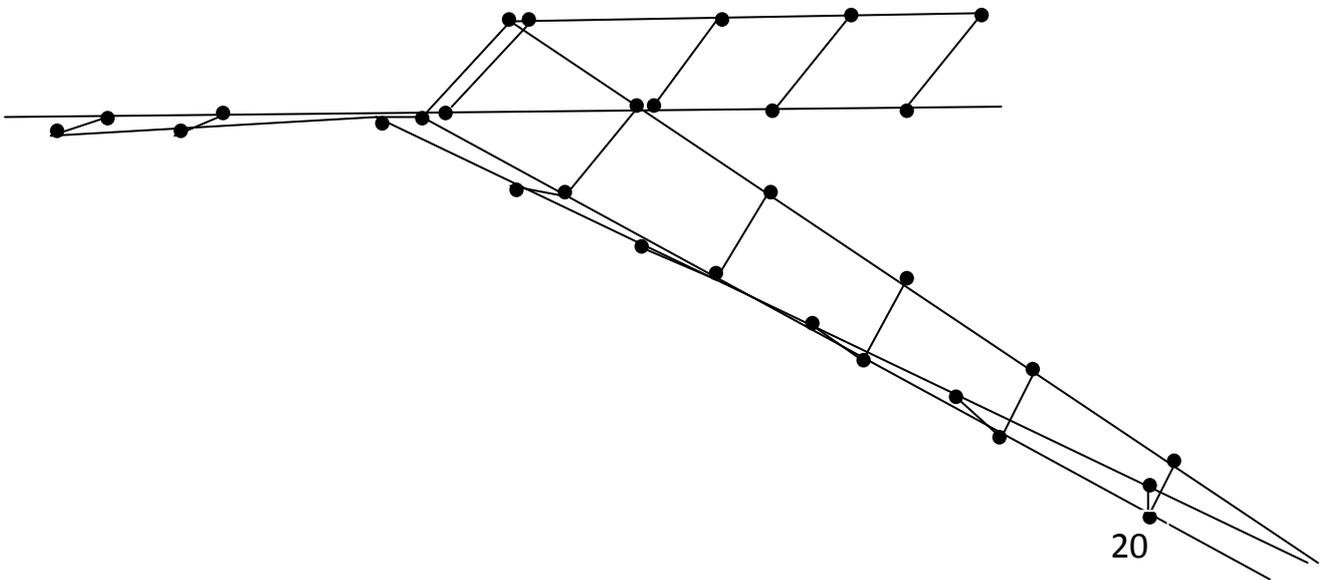
Chapite III: Exemples traités

Le tableau ci-dessus nous donne les coefficients d'influence en fonction des discontinuités de déplacement (tangentiels et normales), et de nombre d'élément.

Tableau(III.3) Variation de K_i en fonction de N et D_i

N	D_T	D_N	$K_{I\max}$	$K_{II\max}$
20	$3,7808 \times 10^{-4}$	$5,1347 \times 10^{-4}$	72,65	53,49
30	$3,0788 \times 10^{-4}$	$4,1856 \times 10^{-4}$	72,53	53,35

Le profil de déplacement pour un nombre d'élément (N=20) :



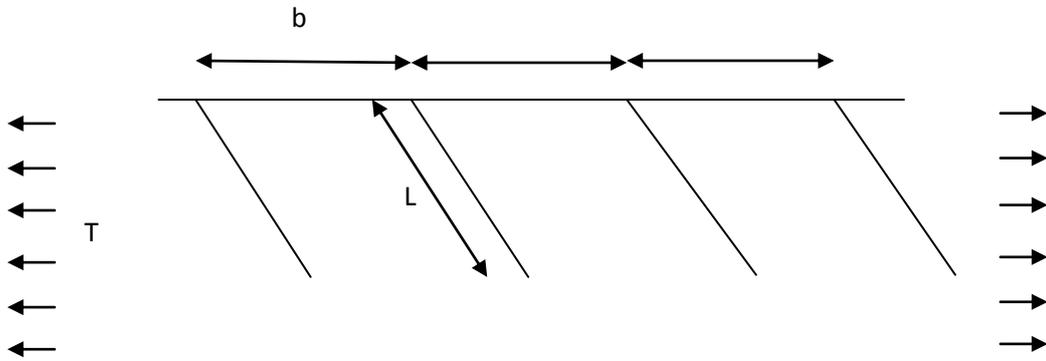
(Fig.III.3.b) Profil de déplacement pour N=20.

Les résultats des discontinuités de déplacement de cet exemple sont comparés à la référence [CRO-76]. Le mode mixte est bien mis en évidence. Le mode 2 est obtenu pour l'inclinaison maximum. La discrétisation a une plus grande influence sur le mode II par rapport au mode I.

III.3.2) Quatre fissures inclinées dans un corps semi-infini sous un chargement à l'infini :

Chapite III: Exemples traités

Ce test peut être exploité pour quantifier la dégradation des matériaux en surface. Considérons quatre fissures dans un corps semi-infini soumis à une traction à l'infini T . Les quatre fissures présentent la même inclinaison β . Elles sont équidistantes l'une de l'autres comme l'indique la figure (Fig.III.4).

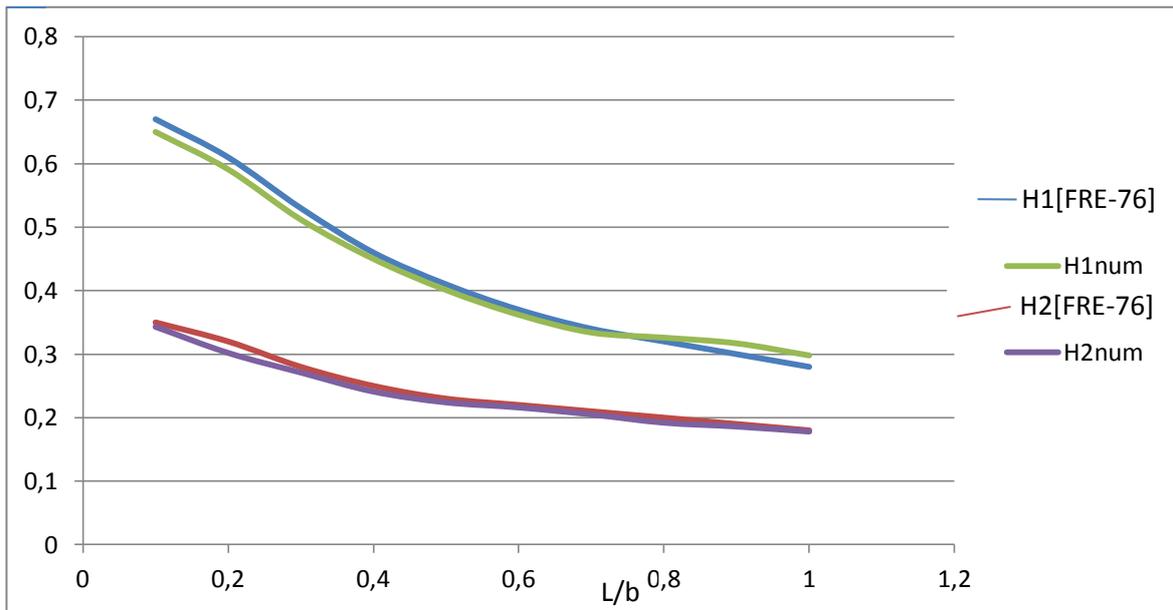


(Fig.III.4) - Quatre fissures inclinées dans un corps semi-infini

Pour les applications numériques: $\nu=0.1$, $E=100000$ Mpa, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $b=\pi$ mm, $T=100$ N Les résultats des facteurs d'intensité sont présentés avec une forme non-dimensionnelle ($H = \frac{K}{T\sqrt{L}}$), pour différent rapport de $\frac{L}{b}$ ($0.1 \leq \frac{L}{b} \leq 1$), comme le montre La figure (Fig.III.5) et le tableau(III.4).

Tableau(III.4) Variation de H en fonction de $\frac{L}{b}$

$\frac{L}{b}$	H_1 [FRE - 76]	H_2 [FRE-76]	H_1 num	H_2 num
0,1	0,67	0,35	0,650	0,343
0,2	0,61	0,32	0,591	0,302
0,3	0,53	0,28	0,512	0,271
0,4	0,46	0,25	0,450	0,241
0,5	0,41	0,23	0,401	0,224
0,6	0,37	0,22	0,362	0,216
0,7	0,34	0,21	0,334	0,205
0,8	0,32	0,20	0,326	0,192
0,9	0,30	0,19	0,317	0,186
1,0	0,28	0,18	0,298	0,178

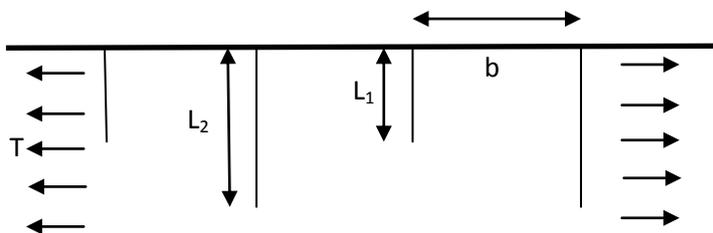


(Fig.III.5) –Les variations de H en fonction de $\frac{L}{b}$

Les résultats obtenus sont proches aux résultats numériques de la référence [FRE-76], ils sont très acceptables. Les positions critiques sont obtenues pour L/b pour les deux modes

III.3.3) Quatre fissures perpendiculaires à l'axe de chargement dans un plan semi-infini :

Dans cet exemple les quatre fissures sont perpendiculaires à l'axe de chargement. Ce chargement ne génère que le mode I pur. Elles sont séparées par une longueur b , et les longueurs de chaque une (L_1, L_2) respectivement.



(Fig.III.5)-Quatre fissures perpendiculaires à l'axe de chargement

Nous reprenons données 2^{ème} exemple pour les applications numériques. Les résultats des facteurs d'intensités sont exprimés avec une forme non-dimensionnelle ($H_1^2 = \frac{K_1^2}{T\sqrt{L_2}}$), On donnera les résultats pour ($\frac{L_1}{b} = 0, L_1 = L_2$).

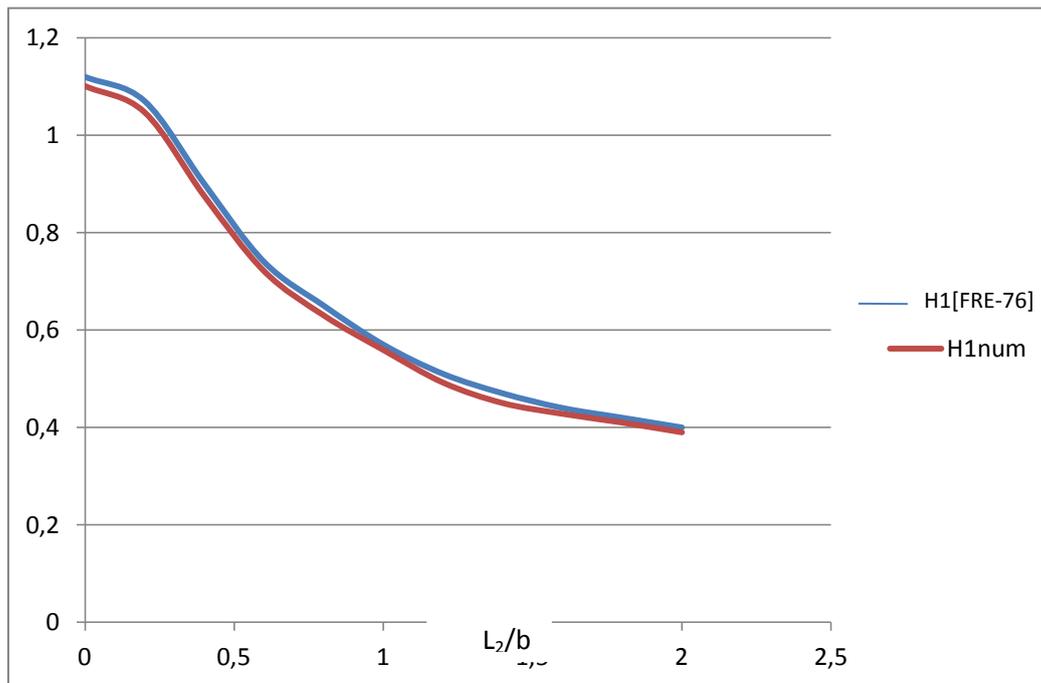
Chapite III: Exemples traités

- Pour le cas $\frac{L_1}{b} = 0$:

Dans ce cas le problème devient, un problème de deux fissures perpendiculaires à l'axe de chargement, et de longueur L_2 . Les résultats sont présentés dans Tableau(III.5) et (Fig.III.5).

Tableau(III.5) Variation de H_1 en fonction de $\frac{L_2}{b}$

$\frac{L_2}{b}$	H_1 [FRE-76]	H_1 num
0	1,12	1,108
0,2	1,07	1,047
0,4	0,90	0,875
0,6	0,74	0,721
0,8	0,65	0,630
1,0	0,57	0,559
1,2	0,51	0,492
1,4	0,47	0,450
1,6	0,44	0,428
1,8	0,42	0,410
2,0	0,40	0,391



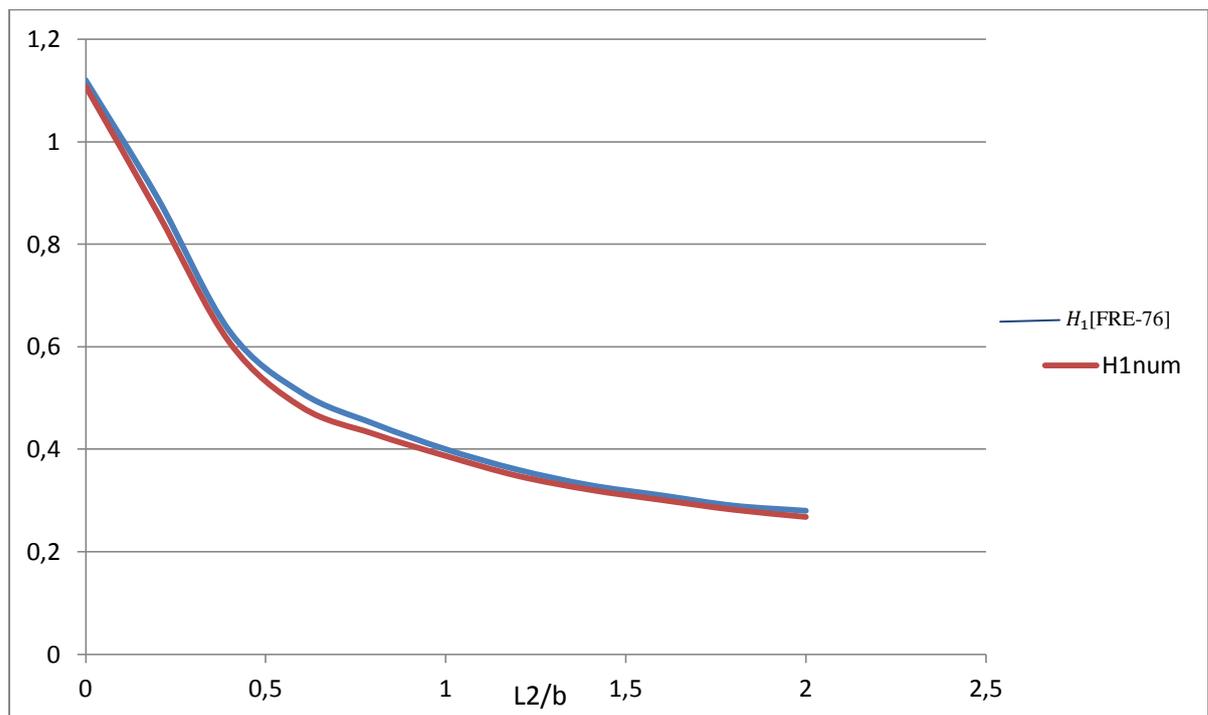
Chapite III: Exemples traités

-Pour le cas $L_1 = L_2$:

Dans ce cas, nous avons un problème de quatre fissures perpendiculaires à l'axe de chargement et de même longueur. L'évolution du facteur d'intensité adimensionnel est montré dans le Tableau(III.6) et (Fig.III.5).

Tableau(III.6) Variation de H_1 en fonction de $\frac{L_2}{b}$

$\frac{L_2}{b}$	H_1 [FRE-76]	H_1 num
0	1,12	1,108
0,2	0,89	0,861
0,4	0,63	0,608
0,6	0,51	0,482
0,8	0,45	0,430
1,0	0,40	0,387
1,2	0,36	0,348
1,4	0,33	0,321
1,6	0,31	0,301
1,8	0,29	0,282
2,0	0,28	0,268



(Fig.III.5) –Les variations de H_1 en fonction de $\frac{L_2}{b}$ Pour le cas $L_1 = L_2$

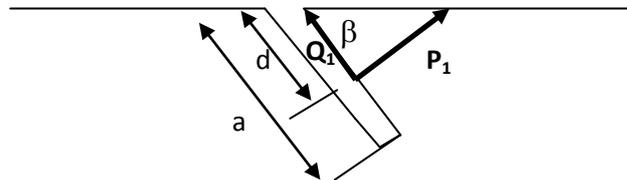
Dans cet exemple la discontinuité de déplacement tangentielle est nul ($D_T = 0$) ce qui fait l'annulation de H_2 . Dans les deux cas les nos résultats sont appréciables.

III.3.4) Fissure inclinée avec des forces appliquées sur ses lèvres:

Dans cet exemple, les forces concentrées P_1, Q_1 sont appliquées sur le bord de la fissure à une distance d comme le montre la figure (Fig.III.6). Les facteurs d'intensités de contrainte au bout C sont donnés analytiquement par :

$$K_{1C} = E_{1C}(\beta, \frac{d}{a}) Q_1 (\pi a)^{-\frac{1}{2}} + F_{1C}(\beta, \frac{d}{a}) P_1 (\pi a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$K_{2C} = E_{2C}(\beta, \frac{d}{a}) Q_1 (\pi a)^{-\frac{1}{2}} + F_{2C}(\beta, \frac{d}{a}) P_1 (\pi a)^{-\frac{1}{2}}$$



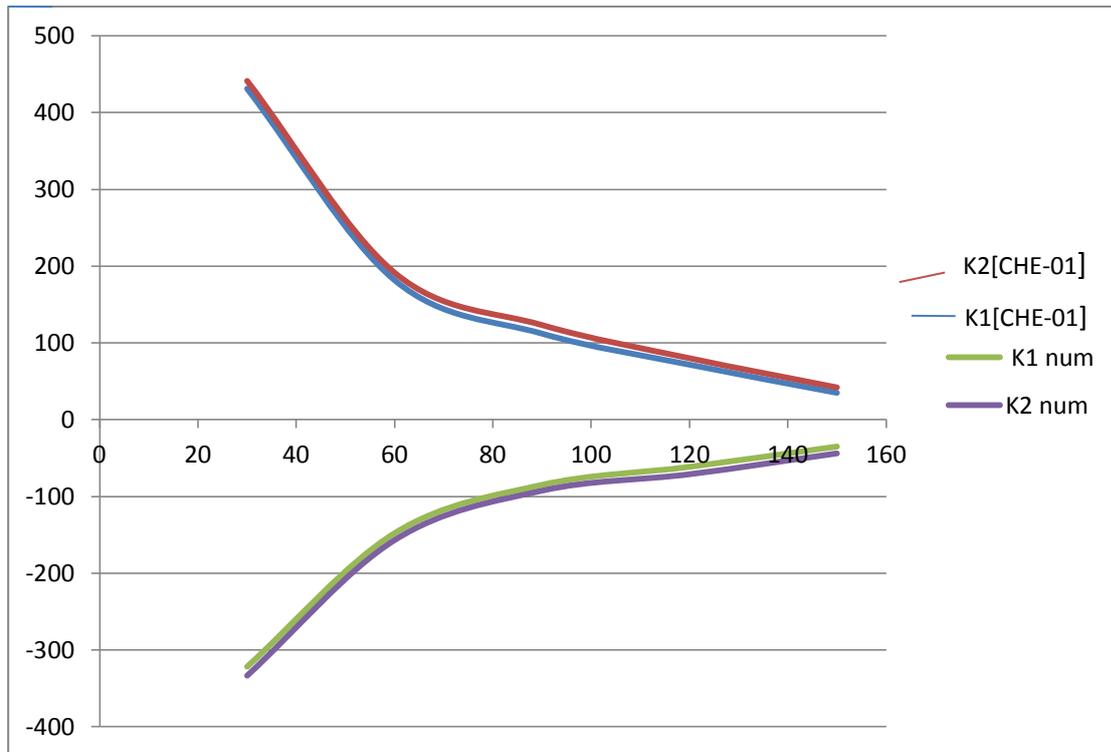
(Fig.III.6) - fissure inclinée débouchante avec un chargement concentré sur sa frontière dans un corps semi-infini

Pour les applications numériques, nous prenons: $P_1=100$ N, $Q_1 = 80$ N, $a=1$, $\frac{d}{a} = 0.5$, $E=210000$ MPa, $\nu=0.3$

Le Tableau(III.7) et (Fig.III.6) montre les variations des facteurs d'intensités en fonction de l'angle d'inclinaison β .

Tableau(III.7) Variation de K_i en fonction de β

β	K_1 [CHE-01]	K_2 [CHE-01]	K_1	K_2
30	431,12	-321,63	438,23	-327,32
60	181,70	-147,83	187,45	-149,78
90	112,07	-84,86	118,23	-89,39
120	71,66	-61,42	76,08	-65,03
150	34,98	-34,98	37,03	-37,89



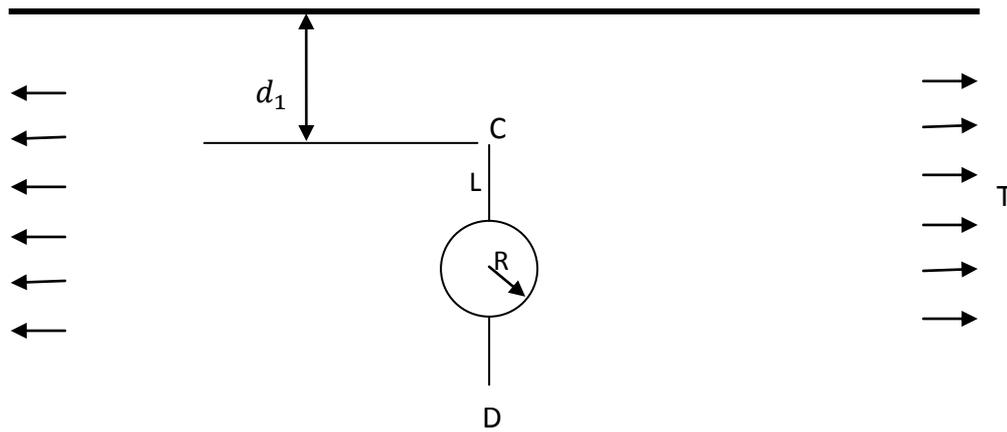
(Fig.III.6) –Les variations de K_i en fonction de β .

Nous constatons à partir des exemples traités la performance de la méthode de discontinuité de déplacement, et la fiabilité du programme de calcul qui donne des résultats très proches aux résultats numériques de la (MDD) des références [CRO-76], [FRE-76], [CHE-01]. Pour le chargement imposé, le chargement critique se situe autour d'une inclinaison de 30° .

III.3.5) Deux fissure émanant d'un trou circulaire dans un plan semi-infini :

Le but de ce test est de trouver la position critique de la profondeur critique d'une lacune circulaire présentant deux fissures. Considérons un plan semi-infini, contenant deux fissures émanant d'une lacune circulaire comme représenté sur la figure (Fig.III.6). Nous notons $L=50$ mm la longueur de la fissure, et $R=40$ mm le rayon du cercle. Le module de Young du matériau est égal à 180000 Mpa et le coefficient de poisson est égal à 0.44. Le chargement à l'infini est égal à 150 N.

Chapite III: Exemples traités



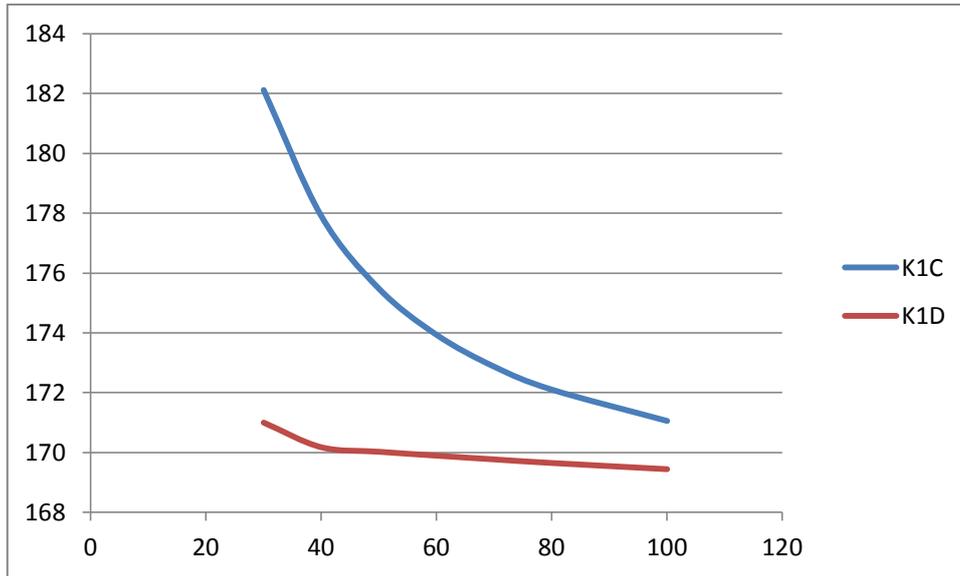
(Fig.III.7) – Deux fissures émanant d’un trou circulaire dans un plan semi-infini.

Dans cet exemple, nous faisons varier la distance d_1 ($30 < d_1 < 100$) et calculons les facteurs d’intensité aux têtes de fissure C et D.

Le Tableau(III.8) et la (Fig.III.7) montrent l’évolution des facteurs d’intensité en fonction de la distance d_1

Tableau(III.8) variations des facteurs d’intensités en fonction de la distance d_1 .

d_1 (mm)	K_{1C} (Mpa \sqrt{mm})	K_{2C} (Mpa \sqrt{mm})	K_{1D} (Mpa \sqrt{mm})	K_{2D} (Mpa \sqrt{mm})
30	182,12	0	171,00	0
40	177,91	0	170,18	0
50	175,45	0	170,03	0
60	173,94	0	169,90	0
70	172,87	0	169,77	0
80	172,10	0	169,65	0
100	171,06	0	169,44	0

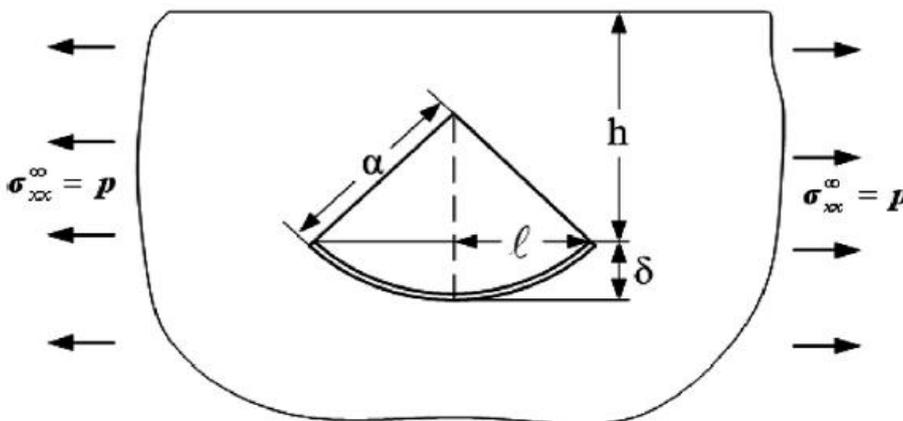


(Fig.III.8) variations des facteurs d'intensités en fonction de la distance d_1 .

Le facteur d'intensité critique est donné pour une distance d_1 de plus en plus proche de la surface du domaine semi infini. Dans le cas où le matériau est bien identifié, la profondeur critique peut être trouvée.

III.3.6) Fissure en arc de cercle dans un plan semi-infini :

Considérons une fissure en arc de cercle dans un plan semi-infini et soumise au chargement à l'infini, représentée par la (Fig.III.9)



(Fig.III.9) Fissure en arc de cercle dans un plan semi-infini.

Pour les applications numériques, nous prenons : $P_1=80$ N, $a=10$ mm, $\frac{l}{h} = 0.5$, $E=210000$ Mpa, $\nu=0.19$.

Chapite III: Exemples traités

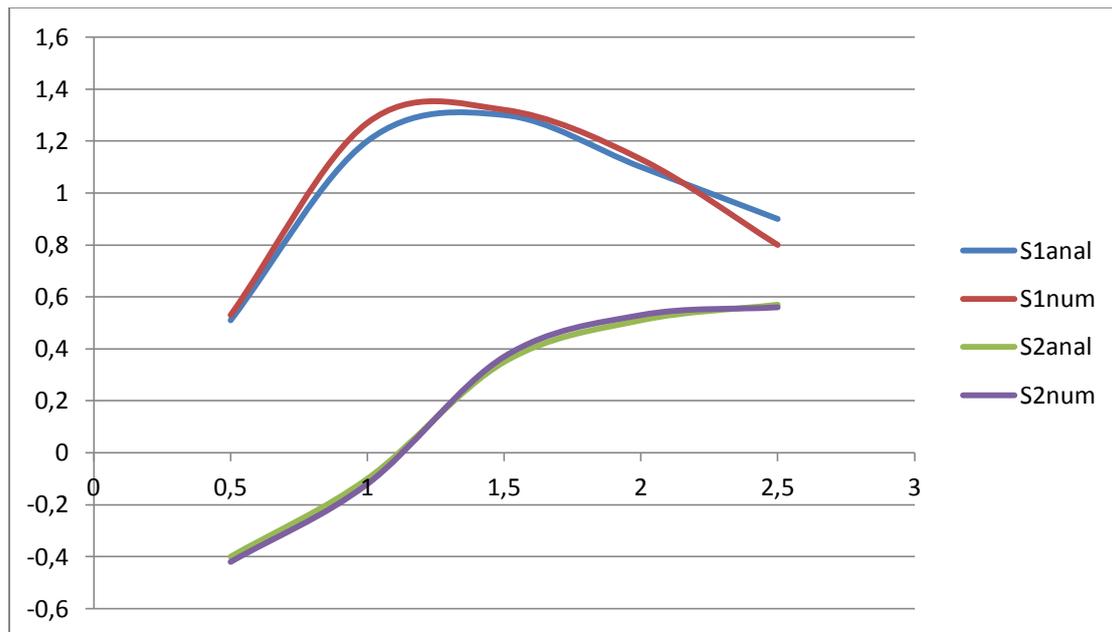
Les facteurs d'intensités de contrainte sont exprimés avec une forme non-dimensionnelle ($S = \frac{K}{p\sqrt{a}}$),

Les applications sont faites en faisant varier $\frac{\delta}{l}$ de 0,5 à 2,5 par pas de 0,5.

Le Tableau(III.9) et la (Fig.III.10) montrent l'évolution des facteurs d'intensités en fonction de $\frac{\delta}{l}$.

Tab(III.9) variations de S_{en} fonction de $\frac{\delta}{l}$.

$\frac{\delta}{l}$ (mm)	S_{1anal}	S_{2anal}	S_{1num}	S_{2num}
0,5	0,51	-0,4	0,53	-0,39
1	1,2	-0,1	1,29	-0,12
1,5	1,3	0,35	1,32	0,37
2	1,1	0,51	1,13	0,50
2,5	0,9	0,57	0,7	0,56



(Fig.III.10) variations de S_{en} fonction de $\frac{\delta}{l}$.

Ces résultats sont en parfaite concordance avec ceux obtenus par [EXA-10].

L'auteur de l'article a utilisé la même approche numérique basée sur la méthode des discontinuités de déplacement. Ce qui explique la satisfaction des résultats. Des

Chapite III: Exemples traités

Solutions analytiques sont disponibles aussi et elles sont données. Dans ce test, nous remarquons un extremum pour le facteur d'intensité de contrainte en mode I. Ceci est expliqué par la courbure de l'arc.

III.4) Conclusion :

Les résultats permettent de conclure que les distances entre fissures à la surface du milieu semi infini peuvent aboutir à quantifier le degré d'endommagement.

Les profondeurs critiques de fissures émanant de cavité peuvent être trouvées connaissant le facteur d'intensité critique. En tous les cas, le facteur d'intensité de contrainte augmente lorsque la fissure s'approche de la surface. Dans le cas de fissure en arc de cercle, nous remarquons un extremum pour le facteur d'intensité de contrainte en mode I. Ceci est expliqué par la courbure de l'arc.

Conclusion générale

Ce travail montre les grandes possibilités d'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture, et de l'élasticité en bidimensionnel, en particulier dans notre cas, les problèmes semi-infinis.

Sachant la difficulté de la résolution analytique de ce genre de problème, la construction d'un code de calcul basé sur cette méthode est utile pour la modélisation des milieux continus ou fissurés.

Les exemples traités montrent la performance de la méthode de discontinuité de déplacement.

Les résultats permettent de conclure que les distances entre fissures à la surface du milieu semi infini peuvent aboutir à quantifier le degré d'endommagement.

Les profondeurs critiques de fissures émanant de cavité peuvent être trouvées connaissant le facteur d'intensité critique. En tous les cas, le facteur d'intensité de contrainte augmente lorsque la fissure s'approche de la surface.

Dans le cas de fissure en arc de cercle, nous remarquons un extremum pour le facteur d'intensité de contrainte en mode I. Ceci est expliqué par la courbure de l'arc.

Le mode II est plus sensible au maillage que le mode I.

Conclusion générale

Références bibliographiques

- [BAR-80] **Barthélémy B**, « Notions pratiques de mécanique de la rupture ». Edition Eyrolles, 1980.
- [BOU-07] **Boukhalkhal A**, « Extension de la méthode de discontinuité de déplacements pour la simulation de la rupture dans les Multicouches ». Mémoire de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, (2007).
- [BRE-86] **Brebbia C.A, Dominguez J**, « Boundary elements: an introductory course ». Mc Graw-Hill, Ind Edition, (1989).
- [CHE-01] **Chen Yi - Zhou** «An edge crack problem in a semi-infinite plane subjected to concentrated forces» Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, Vol 22, No 11, Nov 2001)
- [CRO-76] **Crouch S.L**, «Solution of plane elasticity problem by displacement discontinuity method». Int .j. Num. Methods Eng.10, pp 301-343, 1976.
- [CRO-83] **Crouch S.L, Starfield A.M**, «Boundary Element Method in Solid Mechanics with application in Rock Mechanics and Geological Mechanics». London, Allen & Unwin, Boston, 1983
- [Dom-1987] Dominguez. « *Elastostatics in boundary element methods in structural Analysis* ». Beskos Ed. ASCE 1987
- [FRA-78] **François D**, «Comportement mécanique des matériaux». Edition Masson, 1978
- [FRE-76] **C.E. Freese** «Periodic edge cracks of unequal length in a semi-infinite tensile sheet». International Journal of Fracture, Vol. 12, No. 1, February 1976
- [EXA-10] G. Exadaktylos *, G. Xiroudakis «The G2 constant displacement discontinuity method – Part II: Solution of half-plane crack problems» International Journal of Solids and Structures, 47 (2010) 2578–2590.
- [KEB-98] **Kebir H**, « Approches déterministe et probabiliste de la prévision de la durée de vie de structure aéronautique à l'aide de la méthode des équations intégrales duales ». Thèse de doctorat, université de technologie de Compiègne, France, 1998
- [LAB-86] **René Labbens**, « Introduction à la mécanique de la rupture ». Edition pluralis.
- [LEB-03] **Leblond J.B**, « Mécanique de la rupture fragile et ductile ». Hermès science publications, (2003).

Références bibliographiques

[SCH-07] **Schanz M, Steinbach O**, « Boundary element analysis ». Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (2007).

[SHO-95] **Shou K.J, Crouch S.L**, A «Higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems». Int. J. Rock Mech. Min. Sci. et Geomech. Abstr. Vol. 32, No. 1, pp 49-55, (1995).

[YAN-86] **Yang T.Y**, « Finite element structural analysis ». Prentice Hall, Inc.1986

[ZIE-05] **Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Zhu J.Z**, « The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals ». Butterworth-Heinemann, Sixth edition, (2005).