

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de génie mécanique



**PROJET DE FIN D'ETUDES**

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

Thème

***ETUDE COMPARATIVE PAR COSMOSWORKS ET LA  
METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT DANS  
LES MILIEUX ELASTIQUES NON HOMOGENES***

Proposé et dirigé par :

DR. Y. BELKACEMI

Présenté par :

BAFFA BOUBAKEUR

Promotion: 2009- 2010.

## *Dédicaces*

**Je dédie ce travail**

**A ma mère et à mon père**

**A mes frères et sœurs**

**A tout ma famille et mes amis**

## REMERCIEMENT

*Je remercie avant tout ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la volonté et le courage de réaliser ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Mr BELKACEMI qui a proposé et dirigé ce travail. Pour son suivi permanent et ses conseils qui m'ont beaucoup aidé.*

*Je remercie également l'ensemble des membres du jury qui ont accepté d'examiner mon travail.*

*Et enfin, mes remerciements vont en particulier à tous les enseignants et à ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail.*

## ملخص

الهدف من هذا العمل المتمثل في هذا المشروع هو دراسة التفاعل بين الإدراج باستخدام طريقة الانتقالات غير المستمرة ومقارنة نتائج هذه الطريقة مع نتائج

COSMOSWorks

تتم مقارنة النتائج المتحصل عليها من حيث الضغط مع تلك التي حصلنا عليها مع طريقة الانتقالات غير مستمرة.  
**كلمات البحث :** طريقة الانتقالات غير المستمرة ، والمرونة الإدراج

## RESUME

Le but du travail présenté dans ce projet est l'étude de l'interaction entre inclusions en utilisant la méthode de discontinuité de déplacement et comparé les résultats de cette méthode avec les résultats de COSMOSWorks

Les résultats obtenus en terme de contrainte sont confrontés à ceux obtenus par la méthode des discontinuités de déplacement.

**Mots clés :** Méthode de discontinuité de déplacement , élasticité, inclusion ,

## ABSTRACT

The aim of the work presented in this project is to study the interaction between inclusions using the displacement discontinuity method and compared the results of this method with the results of COSMOSWorks

the obtained results in terms of stress are compared with those obtained by the method of displacement discontinuities.

**Key word:** method of displacement discontinuities, elasticity, inclusion

## SOMMAIRE

<b>Introduction Générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I La méthode de discontinuité de déplacement</b> .....	<b>4</b>
I.1. Introduction .....	5
I.2. Principe de la méthode de discontinuité de déplacements .....	6
I.3. Procédure de le MDD dans un solide infini .....	6
I.4. Procédure numérique.....	10
I.5. Transformation de coordonnées .....	12
I.6. Coefficients d'influence .....	14
I.7. Conditions de symétrie.....	18
<b>Chapitre II application aux milieux non homogènes</b> .....	<b>19</b>
II.1. application de la méthode de discontinuité de déplacements au bi-matériaux .....	20
II.2. conditions sur l'interface .....	20
II.3. système d'équations .....	21
II.4. conclusion .....	24
<b>Chapitre III Exemples d'illustrations</b> .....	<b>25</b>
III.1. Introduction .....	26
III.2. exemples traites .....	26
III.2.1 plaque carrée avec quatre inclusions .....	26
III.2.1 1 Résultats pour $E_1=20\text{GPa}$ et $E_2 =200\text{GPa}$ .....	27
III.2.1 2 Résultats pour $E_1=200\text{GPa}$ et $E_2 =20\text{GPa}$ .....	29
III.2.2 plaque rectangulaire avec deux inclusions sur l'axe $x_1$ .....	30
III.2.2 1-résultats pour d=2D .....	31
III.2.2 2-résultats pour d=3D .....	33
III.2.2 3-résultats pour d=5D .....	35
III.2.3 plaque rectangulaire avec deux inclusions antisymétrique .....	37
III.2.3 1-résultats pour d=2D .....	38
III.2.3 2-résultats pour d=3D .....	41
III.2.3 3-résultats pour d=5D .....	44
III.3. Conclusion.....	47
<b>Conclusion Générale</b> .....	<b>48</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>50</b>

## SOMMAIRE DES FIGURES

<i>Fig.I.1. Méthode de discrétisation .....</i>	<b>5</b>
<i>Fig.I.2. Discontinuité de déplacement.....</i>	<b>6</b>
<i>Fig.I.3 Représentation d'une fissure quelconque en N segments.....</i>	<b>10</b>
<i>Fig.I.4. Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire .....</i>	<b>13</b>
<i>Fig.I.5. Position et orientation des éléments .....</i>	<b>14</b>
<i>Fig.II.1. Corps non homogène comprenant 2 milieux.....</i>	<b>20</b>
<i>Fig.III.1 Plaque carrée contenant quatre inclusions.....</i>	<b>26</b>
<i>Fig. III.2 Contrainte <math>\sigma_{yy}</math> en MPa.....</i>	<b>27</b>
<i>Fig.III.3 Contrainte <math>\sigma_{yy}(x,0)</math> en MPa.....</i>	<b>28</b>
<i>Fig.III.4 Contrainte <math>\sigma_{yy}(0,y)</math> en MPa .....</i>	<b>28</b>
<i>Fig. III.5 Contrainte <math>\sigma_{yy}</math> en MPa.....</i>	<b>29</b>
<i>Fig.III.6 Contrainte <math>\sigma_{yy}(x,0,075)</math> en MPa .....</i>	<b>29</b>
<i>Fig.III.7 Contrainte <math>\sigma_{yy}(0,075,y)</math> en MPa .....</i>	<b>30</b>
<i>Fig.III.8 plaque rectangulaire contenant deux inclusions sur l'axe <math>\vec{x}</math>.....</i>	<b>31</b>
<i>Fig. III.9 Contrainte <math>\sigma_{xx}</math> en MPa .....</i>	<b>31</b>
<i>Fig.III.10 Contrainte <math>\sigma_{xx}(x,0)</math> en MPa .....</i>	<b>32</b>
<i>Fig. III.11 Contrainte <math>\sigma_{yy}</math> en MPa .....</i>	<b>32</b>
<i>Fig.III.12 Contrainte <math>\sigma_{yy}(x,0)</math> en MPa .....</i>	<b>33</b>
<i>Fig. III.13 Contrainte <math>\sigma_{xx}</math> en MPa .....</i>	<b>33</b>
<i>Fig.III.14 Contrainte <math>\sigma_{xx}(x,0)</math> en MPa .....</i>	<b>34</b>
<i>Fig. III.15 Contrainte <math>\sigma_{yy}</math> en MPa .....</i>	<b>35</b>
<i>Fig.III.16 Contrainte <math>\sigma_{yy}(x,0)</math> en MPa .....</i>	<b>35</b>
<i>Fig. III.17 Contrainte <math>\sigma_{xx}</math> en MPa .....</i>	<b>36</b>
<i>Fig.III.18 Contrainte <math>\sigma_{xx}(x,0)</math> en MPa .....</i>	<b>36</b>
<i>Fig. III.19 Contrainte <math>\sigma_{yy}</math> en MPa .....</i>	<b>37</b>
<i>Fig.III.20 Contrainte <math>\sigma_{yy}(x,0)</math> en MPa .....</i>	<b>37</b>
<i>Fig.III.21 plaque rectangulaire contenant deux inclusions.....</i>	<b>38</b>
<i>Fig. III.22 Contrainte <math>\sigma_{xx}</math> en MPa .....</i>	<b>39</b>

<i>Fig.III.23</i> Contrainte $\sigma_{xx}(x,0)$ en MPa .....	39
<i>Fig. III.24</i> Contrainte $\sigma_{yy}$ en MPa .....	39
<i>Fig.III.25</i> Contrainte $\sigma_{yy}(x,0)$ en MPa .....	40
<i>Fig. III.26</i> Contrainte $\sigma_{xy}$ en MPa .....	41
<i>Fig.III.27</i> Contrainte $\sigma_{xy}(x,0)$ en MPa .....	41
<i>Fig. III.28</i> Contrainte $\sigma_{xx}$ en MPa .....	42
<i>Fig.III.29</i> Contrainte $\sigma_{xx}(x,0)$ en MPa .....	42
<i>Fig. III.30</i> Contrainte $\sigma_{yy}$ en MPa .....	42
<i>Fig.III.31</i> Contrainte $\sigma_{yy}(x,0)$ en MPa .....	43
<i>Fig. III.32</i> Contrainte $\sigma_{xy}$ en MPa .....	44
<i>Fig.III.33</i> Contrainte $\sigma_{xy}(x,0)$ en MPa .....	44
<i>Fig. III.34</i> Contrainte $\sigma_{xx}$ en MPa .....	45
<i>Fig.III.35</i> Contrainte $\sigma_{xx}(x,0)$ en MPa .....	45
<i>Fig. III.36</i> Contrainte $\sigma_{yy}$ en MPa .....	45
<i>Fig.III. 37</i> Contrainte $\sigma_{yy}(x,0)$ en MPa .....	46
<i>Fig. III.38</i> Contrainte $\sigma_{xy}$ en MPa .....	47
<i>Fig.III.39</i> Contrainte $\sigma_{xy}(x,0)$ en MPa .....	47

# Introduction générale

# Introduction générale

Le Calcul du déplacement et de la contrainte dans un plan élastique contenant des inclusions est un problème important en mécanique des solides. Ce problème a des applications directes pour déterminer l'efficacité des propriétés élastiques des matériaux et est également d'intérêt pour l'évaluation des facteurs de concentration des contraintes autour d'inclusions et l'identification des domaines de la défaillance des matériaux possible.

Deux principales méthodes numériques sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de structures en mécanique : la méthode des éléments finis [2] et la méthode des équations intégrales de frontière [3]. Fréquemment, nous relevons des études comparatives de l'efficacité de la méthode des éléments finis par rapport à la méthode des équations intégrales et nous relevons que l'on oppose l'une par rapport à l'autre.

Chacune des deux méthodes numériques a ses avantages. Cependant, la méthode des équations intégrales offre des avantages certains dans des configurations de problèmes dont :

- La résolution en domaines infinis.
- La résolution du processus de propagation de fissures.

La méthode des éléments finis étendus (XFEM) est aussi un outil qui a permis de montrer son efficacité.

Le dernier domaine d'application en tridimensionnel reste un champ d'étude en cours de développement.

Historiquement, la méthode des éléments de frontières appelée aussi méthode des équations intégrales a été développée de deux manières distinctes. L'une des deux est une approche plus mathématique. Elle est basée sur certains théorèmes fondamentaux qui relient directement les inconnues du contour aux conditions limites. Cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Directes. L'autre approche est une approche physique intuitive, qu'on appelle la méthode des discontinuités de déplacements [3-5].

Cette approche consiste à chercher en premier lieu les valeurs des perturbations fictives dont les effets sur le contour sont les conditions aux limites spécifiées, ensuite à calculer le reste des inconnues du contour comme étant les effets de ces perturbations "fictives" en ces points. Puisque les inconnues du contour sont obtenues indirectement, cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Indirectes (la Méthode des discontinuités de

déplacements), méthode retenue pour notre étude.

La formulation de la méthode des discontinuités de déplacements (MDD) est due à « Crouch (1976 & 1983) » [3,6].

Nous avons décomposé notre document en 3 chapitres:

Le premier chapitre est consacré à la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

Le deuxième chapitre est consacré à l'application de la méthode aux milieux non homogènes. Enfin dans le troisième chapitre des exemples sont traités. Ils concernent des plaques présentant des inclusions. Les paramètres étudiés sont la distance entre inclusion et les rapport des modules de Youngs. Les calculs ont été réalisés par la méthode des discontinuités de déplacement et le logiciel COSMOSWorks.

# CHAPITRE I

## Méthode de Discontinuité de Déplacement

# CHAPITRE I

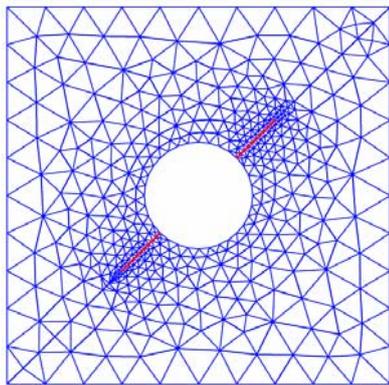
## Méthode de Discontinuité de Déplacement

### I.1. INTRODUCTION.

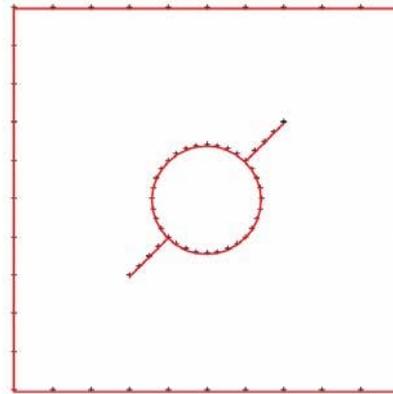
Pour approcher les solutions analytiques aux problèmes tels que, la mécanique des fluides, la mécanique des solides, celle de la rupture, l'élasto-statique et autres, souvent difficiles à déterminer par une résolution directe des équations différentielles. Plusieurs méthodes numériques ont été mises en places telles que la méthode des éléments finis et la méthode des différences finis.

Néanmoins, l'apparition d'une nouvelle technique, la Méthode des Eléments de Frontières (BEM), généralement connue sous le nom de la Méthode des Equations Intégrales de Frontières, ne cesse elle aussi de s'illustrer par sa simplicité et sa variété d'application.

Au contraire de la méthode des éléments finis qui nécessite une discrétisation totale du domaine en éléments, qui devient très compliqué lorsqu'il s'agit d'un domaine infini, la BEM se limite seulement à une subdivision de la frontière en éléments joints les uns aux autres (Fig.I.1).



*a) FEM*



*b) BEM*

**Fig.I.1. Méthode de discrétisation**

Cette méthode (BEM) a été développée suivant deux approches l'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel d'où la Méthode Directe. L'autre approche est physique et consiste à chercher les solutions pour des singularités, placées tout au long du contour. Cette méthode est connue sous le nom de Méthode Indirecte.

Deux formulations indirectes existent. La Méthode des Contraintes Fictives (MCF) et la Méthode de Discontinuité de Déplacement (MDD). Ces méthodes ont été développées par Crouch et Starfield en 1983 pour étudier les solides continus ou fissurés dans des problèmes en géomécaniques [3].

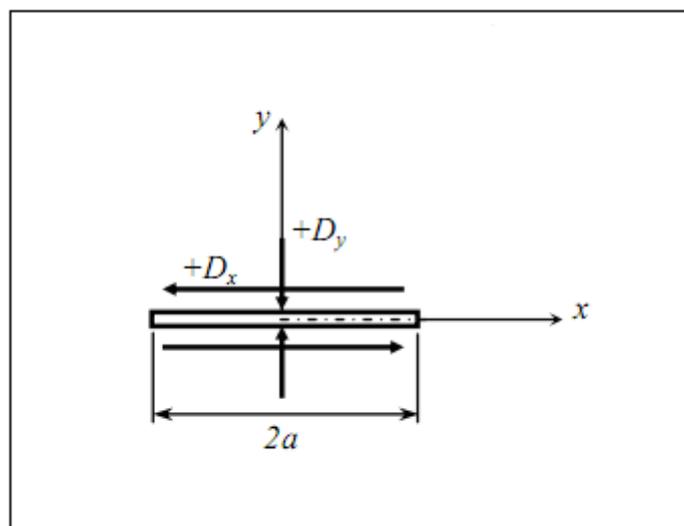
## **I.2. PRINCIPE DE LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT (MDD).**

Une discontinuité de déplacement peut être visualisée comme étant une fissure composée de deux surfaces (lèvres) disjointes, se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre.

La méthode de discontinuité de déplacement se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser (discrétiser) le segment de droite en une série de  $N$  éléments reliés les uns aux autres. Ainsi et connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique du problème donné, en sommant les effets de tous les éléments [3]

## **I.3. PROCEDURE DE LA MDD DANS UN SOLIDE INFINI.**

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite dans le plan  $x, y$  d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question (soit la partie  $a < x < a$ , pour  $y=0$ ) (voir Fig. I.2).



## Fig.I.2. Discontinuité de déplacement

Si on considère ce segment comme une fissure droite, on peut distinguer ses deux surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de  $y = 0$ , noté  $y = 0^+$  et que l'autre est sur le côté négatif de  $y = 0$ , noté  $y = 0^-$

.

On définit la discontinuité de déplacement  $D_i = (D_x, D_y)$  comme la différence de déplacement entre les deux côtés du segment :

$$D_i = u_i(x_1, 0_-) - u_i(x_1, 0_+) \quad (I.1)$$

ou

$$D_i = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \quad (I.2)$$

$$D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+)$$

La solution du problème posé en contraintes et en déplacements est donnée par Crouch (1976a,b) [6] :

$$u_x = D_x [2(1 - \nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1 - 2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \quad (I.3)$$

$$u_y = D_x [(1 - \nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + D_y [2(1 - \nu)f_{,y} - yf_{,yy}]$$

$$\sigma_{xx} = 2GD_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}]$$

$$\sigma_{yy} = 2GD_x [-yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \quad (I.4)$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2GD_y [-yf_{,xyy}]$$

Avec :  $G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (I.5)$$

Ces équations forment la base de la méthode de discontinuité de déplacement.

Les dérivées de fonction  $f(x,y)$  dans les équations (I.3) et (I.4) sont obtenues directement à partir de l'équation (I.5).

Les dérivées de  $f$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} f_{,x} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{[(x-a)^2 + y^2]} - \ln \sqrt{[(x+a)^2 + y^2]} \right] \\ f_{,y} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ f_{,xy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (I.6)$$

$$\begin{aligned} f_{,xx} = f_{,yy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ f_{,yyy} &= \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \\ f_{,xyy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \end{aligned}$$

Les déplacements le long de la droite  $y = 0$  sont :

$$u_x = \frac{1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (I.7)$$

$$u_y = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]$$

Les valeurs des limites des termes en arctangent sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, y = 0 \\ +\pi & |x| < a, y = 0^+ \\ -\pi & |x| < a, y = 0^- \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

On peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne  $y = 0$  :

1)  $|x| > a, y = 0$

$$u_x(x, 0) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (\text{I.9})$$

$$u_y(x, 0) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

2)  $|x| < a, y = 0^+$

$$u_x(x, 0^+) = -\frac{1}{2} - D_x \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (\text{I.10})$$

$$u_y(x, 0^+) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2} D_x$$

3)  $|x| < a, y = 0^-$

$$u_x(x, 0^-) = \frac{1}{2} - D_x \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (\text{I.11})$$

$$u_y(x, 0^-) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2} D_x$$

Les déplacements  $u_x$  et  $u_y$  sont continus pour  $|x| > a$  et  $y = 0$ , mais ont une discontinuité constante  $+D_x$  et  $+D_y$  pour  $|x| < a$ , les contraintes le long de la ligne  $y=0$ ,

d'après l'équation (I.4) peuvent être évaluées comme suite :

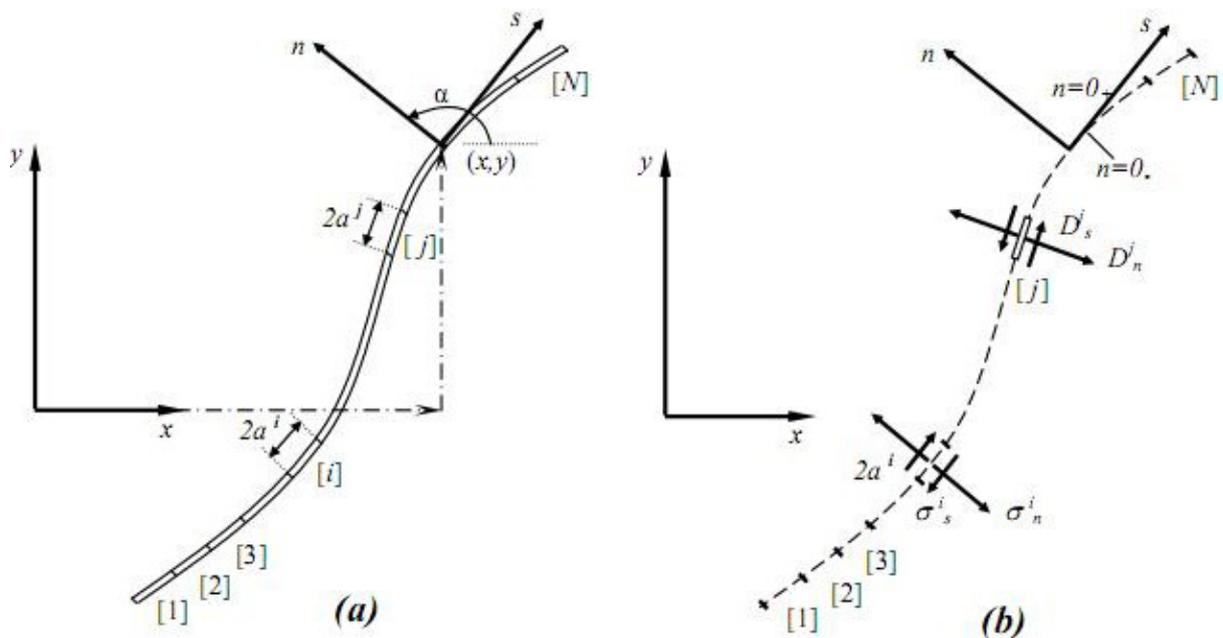
$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, 0) &= \frac{-G}{2\pi(1-\nu)} D_y \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2}\end{aligned}\tag{I.12}$$

Il est facile de vérifier que les contraintes sont continues partout sur  $y = 0$  sauf pour  $x = \pm a$  où on note une discontinuité et une singularité due à la présence du terme

$$1/(x^2 - a^2).$$

#### I.4. PROCEDURE NUMERIQUE.

La MDD est un moyen de trouver une approximation de la distribution régulière du déplacement et de contraintes. Pour une généralisation de cette procédure numérique, on considérera un ensemble de  $N$  segments de droites, parfaitement reliés les uns aux autres et formant une courbe quelconque comme représenté dans la figure (FigI.3). La longueur de chacun de ces segments est notée par  $2a^i$



**Fig.I.3 Représentation d'une fissure quelconque en  $N$  segments**

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local  $s, n$  comme le montre dans la figure (Fig.I.3.b) de l'élément  $j$  et dont les composantes  $D_s^j$  et  $D_n^j$  sont données par les expressions :

$$D_s^j = u_s^{j-} - u_s^{j+} \quad (I.13)$$

$$D_n^j = u_n^{j-} - u_n^{j+}$$

Où :  $u_s^j$  et  $u_n^j$  sont les déplacements normales et tangentielle de l'élément  $j$ .

Les contraintes normales et tangentielles au milieu de l'élément  $i$  peuvent être exprimées en fonction des composantes de discontinuité de déplacement de l'élément  $j$  comme suit :

$$\sigma_s^i = A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \quad i = 1, N \quad (I.14)$$

$$\sigma_n^i = A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j$$

En utilisant le principe de superposition, et tenant compte de l'effet de  $N$  éléments (discontinuités), on obtient le champ de contraintes :

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \quad i = 1, N \quad (I.15)$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j$$

de la même manière, on établit le champ de déplacements :

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j$$

$i = 1, N$  (I.16)

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j$$

ou :  $B_{ss} \dots$  sont les coefficients d'influences relatifs aux contraintes sur la frontière et  $B_{sn} \dots$  sont les coefficients d'influences relatifs aux déplacements sur la frontière.

En spécifiant les valeurs des contraintes  $\sigma_s^i$  et  $\sigma_n^i$  pour chaque élément, on aura alors un système de  $2N$  équations linéaires à  $2N$  inconnues, à savoir les composantes  $D_s^j$  et  $D_n^j$  des discontinuités de déplacements élémentaires. Une fois ces équations résolues, on peut exprimer les contraintes et les déplacements en chaque point du domaine par d'autres combinaisons linéaires des discontinuités de déplacements en utilisant la même procédure que précédemment.

❖ Il faut noter que la même procédure peut être suivie dans le cas où les éléments joints les uns aux autres forment un contour fermé (par exemple cas d'une cavité).

❖ Les conditions aux limites peuvent être en contraintes comme elles peuvent en déplacements ou les deux cas à la fois.

## I.5. TRANSFORMATION DE COORDONNEES :

La méthode de discontinuité de déplacement est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à étudier par rapport au repère local de chaque segment et l'orientation de ce repère par rapport au repère global.

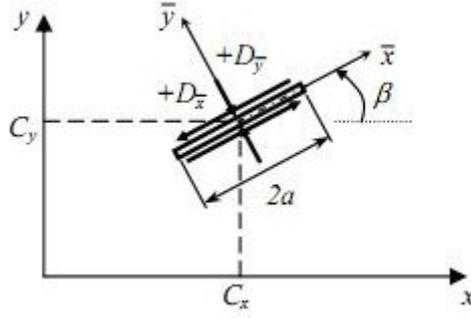


Fig. I.4. Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire.

Les coordonnées locales  $(\bar{x}, \bar{y})$  sont obtenues par une translation et une rotation par rapport au repère global  $(x, y)$  de système. Les composantes de translation sont  $C_x$  et  $C_y$  suivant  $x, y$  respectivement, tandis que la relation est définie par l'angle positif dans le sens trigonométrique.

Les expressions de transformation de coordonnées sont :

$$\bar{x} = (x - C_x) \cos \beta + (y - C_y) \sin \beta \quad (I.17)$$

$$\bar{y} = -(x - C_x) \sin \beta + (y - C_y) \cos \beta$$

Les déplacements et les contraintes dans les systèmes de coordonnées locale sont retrouvés en remplaçant  $(x, y)$  par  $(\bar{x}, \bar{y})$  dans les équations (I.3) et (I.4), avec :

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{F}_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{x}} = \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{y}} = \bar{F}_3(\bar{x}, \bar{y})$$

$$f_{,xy} = \bar{F}_4(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,xx} = -f_{,yy} = \bar{F}_5(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,xyy} = \bar{F}_6(\bar{x}, \bar{y})$$

$$f_{,yyy} = \bar{F}_7(\bar{x}, \bar{y})$$

Les coordonnées des déplacements et de contraintes dans le repère globale  $(x, y)$  de système, sont :

$$u_x = D_{\bar{x}}[-(1 - 2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5)] \\ + D_{\bar{y}}[-(1 - 2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5)] \quad (I.18)$$

$$u_y = D_{\bar{x}}[(1 - 2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5)]$$

$$+D_{\bar{y}}[-(1-2\nu)\sin\beta\bar{F}_2+2(1-\nu)\cos\beta\bar{F}_3-\bar{y}(\sin\beta\bar{F}_4-\cos\beta\bar{F}_5)]$$

$$\alpha_{xx} = 2GD_{\bar{x}}[2\cos^2\beta\bar{F}_4 + \sin 2\beta\bar{F}_5 + \bar{y}(\cos 2\beta\bar{F}_6 - \sin 2\beta\bar{F}_7)]$$

$$+2GD_{\bar{y}}[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta\bar{F}_6 + \cos 2\beta\bar{F}_7)]$$

$$\alpha_{yy} = 2GD_{\bar{x}}[2\sin^2\beta\bar{F}_4 - \sin 2\beta\bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\beta\bar{F}_6 - \sin 2\beta\bar{F}_7)]$$

$$+2GD_{\bar{y}}[-\bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\beta\bar{F}_6 + \cos 2\beta\bar{F}_7)]$$

(I.19)

$$\alpha_{xy} = 2GD_{\bar{x}}[2\sin 2\beta\bar{F}_4 - \cos 2\beta\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta\bar{F}_6 - \cos 2\beta\bar{F}_7)]$$

$$+2GD_{\bar{y}}[-\bar{y}(\cos 2\beta\bar{F}_6 - \sin 2\beta\bar{F}_7)]$$

On peut utilisée ces équations pour calculer les coefficients d'influence de la MDD.

## I.6. COEFFICIENTS D'INFLUENCE.

On considère un domaine infini contenant N segments de droites orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère global (x,y). On considère deux élément distincts « i » et « j » reliés chacun à un repère local ( $x^i, y^i$ ) et ( $x^j, y^j$ ) respectivement, et orientés de  $\beta^i$  et  $\beta^j$  (Voir Fig. I.5).

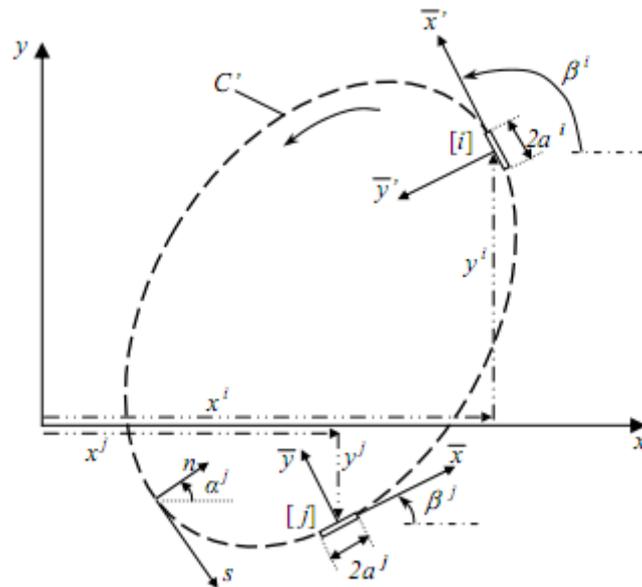


Fig. I.5. Position et orientation des éléments

Les coordonnées locales  $(\bar{x}, \bar{y})$  dans les équations (I.18) et (I.19) représentent celles du point  $(x,y)$  par rapport au milieu de l'élément  $i$ :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - x^j) \cos \beta^j + (y - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x - x^j) \sin \beta^j + (y - y^j) \cos \beta^j\end{aligned}\quad (\text{I.20})$$

Les déplacements et les contraintes en ce point dus aux discontinuités de déplacements sur les  $N$  éléments sont obtenus par la sommation des contributions de chaque élément.

En choisissant le point  $(x,y)$  comme étant le milieu de l'élément  $i$ , c'est-à-dire

$x = x^i$  et  $y = y^i$ , l'équation (I.20) devient :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j\end{aligned}\quad (\text{I.21})$$

Les composantes de déplacements et de contraintes relativement en repère local au point «  $i$  » sont  $x'$ ,  $y'$ . Les deux repères locaux de l'élément  $i$  et l'élément  $j$  sont reliés par les relations suivantes :

$$\bar{x}' = \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \quad (\text{I.22})$$

$$\bar{y}' = -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma$$

Où  $\gamma = \beta^i - \beta^j$  (orientation de l'élément  $j$  par rapport au l'élément  $i$ )

Les déplacements et les contraintes seront :

$$u_{\bar{x}'}^i = u_{\bar{x}}^i \cos \gamma + u_{\bar{y}}^i \sin \gamma \quad (\text{I.23})$$

$$u_{\bar{y}'}^i = -u_{\bar{x}}^i \sin \gamma + u_{\bar{y}}^i \cos \gamma$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{x}'\bar{x}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \cos^2 \gamma + 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \sin^2 \gamma \\
\sigma_{\bar{y}'\bar{y}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \sin^2 \gamma + 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \cos^2 \gamma \\
\sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i &= -(\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)
\end{aligned} \tag{I.24}$$

Les coefficients d'influence pour les déplacements et les contraintes sont obtenues des systèmes des équations (I.18), (I.19), (I.23) et (I.24) après avoir posé :

$$D_s^j = D_{\bar{x}}^j, \quad D_n^j = D_{\bar{y}}^j, \quad u_s^i = u_{\bar{x}'}^i, \quad u_n^i = u_{\bar{y}'}^i, \quad \sigma_s^i = \sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i \text{ et } \sigma_n^i = \sigma_{\bar{x}'\bar{x}'}^i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
u_s^i &= D_s^j [(1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5)] \\
&\quad + D_n^j [-(1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5)]
\end{aligned} \tag{I.25}$$

$$\begin{aligned}
u_n^i &= D_s^j [(1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1 - \nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5)] \\
&\quad + D_n^j [(1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_s^i &= 2GD_s^j [-\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2GD_n^j [-\bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 - \sin 2\gamma \bar{F}_7)]
\end{aligned} \tag{I.26}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_n^i &= 2GD_s^j [2\sin^2 \gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7)] \\
&\quad + 2GD_n^j [-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7)]
\end{aligned}$$

On peut écrire les équations (I.25) et (I.26) sous la forme suivante :

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j$$

$$i = 1, N \quad (I.27)$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j$$

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j$$

$$i = 1, N \quad (I.28)$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j$$

Les coefficients d'influences sont donnés par :

$$B_{ss}^{ij} = [(1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5)]$$

$$B_{sn}^{ij} = [-(1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5)]$$

$$B_{ns}^{ij} = [(1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1 - \nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5)]$$

$$B_{nn}^{ij} = [(1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5)]$$

$$A_{ss}^{ij} = 2G[-\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7)]$$

$$A_{sn}^{ij} = 2G[-\bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 - \sin 2\gamma \bar{F}_7)]$$

$$A_{ns}^{ij} = 2G[2\sin^2 \gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7)]$$

$$A_{nn}^{ij} = 2G[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7)]$$

### I.6-1 AUTO-INFLUENCE

Les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences, représente l'influence de l'élément sur lui-même. Les termes diagonaux sont :

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0 \quad , \quad B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \pm 1/2 \quad \text{pour } \bar{y} = 0^{\pm}$$

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \quad , \quad A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = + \frac{G}{\pi(1-\nu)a^i}$$

### I.7 CONDITION DE SYMETRIE

La symétrie pour un solide par rapport à un axe, n'est satisfaite que lorsque les propriétés élastiques, la configuration géométrique et les conditions aux limites de ce solide sont tous symétriques par rapport à cet axe.

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes par la méthode des discontinuités de déplacement est d'une grande importance, quand on sait que le système d'équations est réduit de moitié dans le cas de la simple symétrie, et d'un quart dans le cas de la double symétrie.

# Chapitre II

## Application aux milieux non homogènes

## Chapitre II

### Application aux milieux non homogènes

#### II.1. APPLICATION DE LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT AU BI-MATERIAUX .

Nous allons présenter un exemple simple de multi couches. On suppose que le corps à étudier est composé de deux milieux  $R_1$  et  $R_2$  présenté sur la figure (Fig.II.1). Chaque domaine est supposé isotrope, homogène et linéairement élastique avec des constantes élastiques  $\nu_1, E_1$  et  $\nu_2, E_2$  .

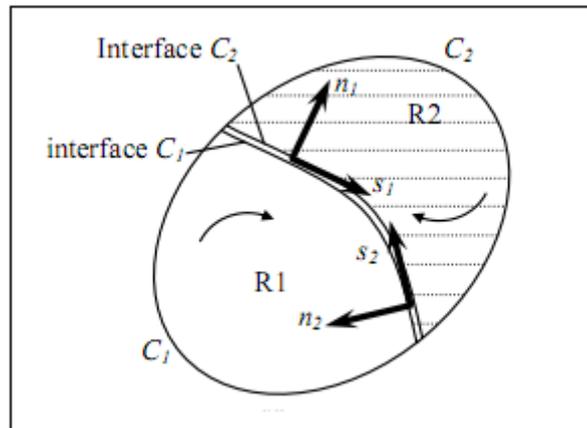


Fig.II.1. Corps non homogène comprenant 2 milieux

Les systèmes locaux des coordonnées sont associés aux deux contours et sont directement opposés le long de l'interface, c'est-à-dire:  $s_1 = -s_2$  et  $n_1 = -n_2$ . Pour la résolution de ce problème, on définit les conditions aux limites du problème dans le corps de la figure (Fig.II.1) par des conditions en déplacements et en contraintes pour la partie d'interface.

#### II.2 CONDITIONS SUR L'INTERFACE

Ces conditions de continuités sont définies pour un point Q de l'interface par :

$$\sigma_s^{i[1]}(Q) = \sigma_s^{i[2]}(Q) \tag{II.1}$$

$$\sigma_n^{i[1]}(Q) = \sigma_n^{i[2]}(Q)$$

$$u_s^{i[1]}(Q) = -u_s^{i[2]}(Q)$$

et

(II.2)

$$u_n^{i[1]}(Q) = -u_n^{i[2]}(Q)$$

Le signe moins qui apparaît dans l'équation (II.2) est dû à l'opposition des sens des systèmes,  $s_1, n_2$  et  $s_1, n_2$  le long de l'interface.

La procédure numérique de la méthode des discontinuités de déplacements est appliquée pour traiter le problème de la figure (Fig.II.1). Avec les deux milieux  $R_1$ , et  $R_2$ , nous avons deux problèmes qui sont liés entre eux par les conditions de continuités à l'interface. Comme on a déjà vu dans le cas monocouche, on va associer des discontinuités de déplacement  $D_s$  et  $D_n$  à chaque élément de  $C_1$  et  $C_2$ . Les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_1$  sont donnés en fonction  $D_s^{[1]}$  et  $D_n^{[1]}$  des  $N_1$  éléments du contour  $C_1$  et les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_2$ , sont donnés en fonction  $D_s^{[2]}$  et  $D_n^{[2]}$  des  $N_2$  éléments du contour  $C_2$ .

### II.3 SYSTEME D'EQUATIONS

Notre problème est de trouver les discontinuités de déplacements  $D_s$  et  $D_n$  dans chaque élément de frontière parmi les  $N=N_1+N_2$  éléments, si les conditions aux limites et les conditions de continuités sont prêtes pour la construction du système algébrique d'équations pour ce problème composé. Il est préférable de numérotter les éléments de frontières de deux milieux consécutivement par le milieu  $R_1$  de l'élément 1 jusqu'à l'élément  $N_1$  le long de  $C_1$  et pour le milieu  $R_2$  de l'élément  $N_1+1$  jusqu'à l'élément  $N_1+N_2=N$  le long de  $C_2$ . En se référant aux équations (I.15), les contraintes sur la frontière de  $R_1$  peuvent être :

$$\sigma_s^{i[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} A_{ss}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{i=1}^{N_1} A_{sn}^{ij(1)} D_n^{j(1)}$$

$$i = 1, N_1 + 1 \quad (\text{II.3})$$

$$\sigma_n^{i[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} A_{ns}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{i=1}^{N_1} A_{nn}^{ij(1)} D_n^{j(1)}$$

et les contraintes dans la frontière du milieu  $R_2$  peuvent s'écrire :

$$\sigma_s^{i[2]} = \sum_{j=N_1+1}^{N_2} A_{ss}^{ij(2)} D_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^{N_2} A_{sn}^{ij(2)} D_n^{j(2)}$$

$$i = N_1 + 1, N \quad (\text{II.4})$$

$$\sigma_n^{i[2]} = \sum_{j=N_1+1}^N A_{ns}^{ij(2)} D_s^j + \sum_{j=N_1+1}^N A_{nn}^{ij(2)} D_n^j$$

Et les déplacements sont :

$$u_s^{i[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} B_{ss}^{ij(1)} D_s^j + \sum_{i=1}^{N_1} B_{sn}^{ij(1)} D_n^j$$

$$i = 1, N_1 \quad (\text{II.5})$$

$$u_n^{i[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} B_{ns}^{ij(1)} D_s^j + \sum_{i=1}^{N_1} B_{nn}^{ij(1)} D_n^j$$

et les contraintes dans la frontière du milieu  $R_2$  peuvent s'écrire :

$$u_s^{i[2]} = \sum_{j=N_1+1}^N B_{ss}^{ij(2)} D_s^j + \sum_{j=N_1+1}^N B_{sn}^{ij(2)} D_n^j$$

$$i = N_1 + 1, N \quad (\text{II.6})$$

$$u_n^{i[2]} = \sum_{j=N_1+1}^N B_{ns}^{ij(2)} D_s^j + \sum_{j=N_1+1}^N B_{nn}^{ij(2)} D_n^j$$

Les coefficients d'influences dans les équations (II.3) à (II.6) sont calculés exactement de la même manière que le cas du milieu monocouche. Mais il est nécessaire d'utiliser les propriétés élastiques de chaque milieu.

Les équation (II.3) à (II.6) peuvent se mettre sous la forme d'un système algébrique de  $2N$  équations à  $2N$  inconnus:

$$b_s^i = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j$$

$$i = 1, N \quad (\text{II.7})$$

$$b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{i=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j$$

En conservant les conditions aux limites et les conditions de continuités comme suit:

a) l'élément  $i$  appartient à la partie libre de  $C_1$  et posons qu'on a des contraintes appliquées à cet élément est  $\sigma_s^{i[1]} = (\sigma_s^i)_0$  et  $\sigma_n^{i[1]} = (\sigma_n^i)_0$  donc:

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij} & j = 1, N_1 \\ 0 & j = N_1 + 1, N \end{cases}$$

et (II.8)

$$b_s^i = (\sigma_s^i)_0 \quad ; \quad b_n^i = (\sigma_n^i)_0$$

même chose pour  $C_{sn}^{ij}$ ,  $C_{ns}^{ij}$  et  $C_{nn}^{ij}$ .

b) l'élément  $i$  appartient à la partie libre de  $C_2$ . et si les conditions imposées sont en déplacement  $u_s^{i[1]} = (u_s^i)_0$  et  $u_n^{i[1]} = (u_n^i)_0$  donc:

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} 0 & j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij(2)} & j = N_1 + 1, N \end{cases}$$

et (II.9)

$$b_s^i = (u_s^i)_0 \quad ; \quad b_n^i = (u_n^i)_0$$

même chose pour  $C_{sn}^{ij}$ ,  $C_{ns}^{ij}$  et  $C_{nn}^{ij}$ .

Avec des relations similaires, nous pouvons exprimer les autres coefficients d'influence en combinant les deux conditions aux limites des deux milieux et en faisant un simple arrangement des équations (II.8) et (II.9) on obtient un seul système.

En deuxième temps, considérons que l'élément  $i$  est situé sur la portion d'interface et posons qu'il appartient à  $C_1$ . Nous aurons un élément  $i^*$  opposé directement à  $i$  et appartient à l'autre contour  $C_2$ . Nous obtenons donc quatre conditions à vérifier concernant les deux éléments face à face  $i$  et  $i^*$ , deux conditions de continuité de contraintes et deux de déplacements.

1) Les conditions de continuité en contraintes sont :

$$\sigma_s^{i[1]} - \sigma_s^{i^*[2]} = 0$$
(II.10)

$$\sigma_n^{i[1]} - \sigma_n^{i^*[2]} = 0$$

d'après (II.3) et (II.4), les quantités  $b_s^i, b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$ ...ect, dans de l'équation (II.7) deviennent:

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij(1)} & j = 1, N_1 \\ -A_{ss}^{i*j(2)} & j = N_1 + 1, N \end{cases}$$

et (II.11)

$$b_s^i = \sigma_s^{i(1)} - \sigma_s^{i*(2)} = 0 \quad ; \quad b_n^i = \sigma_n^{i(1)} - \sigma_n^{i*(2)} = 0$$

et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

2) Les conditions de continuité en déplacement sont :

$$u_s^{i[1]} - u_s^{i*[2]} = 0$$

(II.12)

$$u_n^{i[1]} - u_n^{i*[2]} = 0$$

d'après (II.5) et (II.6), les quantités  $b_s^i, b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$ ...ect, dans de l'équation (II.7) deviennent:

$$C_{ss}^{ij} = \begin{cases} B_{ss}^{i*j(1)} & j = 1, N_1 \\ -A_{ss}^{ij(2)} & j = N_1 + 1, N \end{cases}$$

et (II.13)

$$b_s^i = u_s^{i(1)} + u_s^{i*(2)} = 0 \quad ; \quad b_n^i = u_n^{i(1)} - u_n^{i*(2)} = 0$$

et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

### II.3 CONCLUSION

Les outils fournis dans ce chapitre nous permettent de traiter les problèmes d'interaction entre inclusions.

# CHAPITRE III

## EXEMPLES D'ILLUSTRATION

# CHAPITRE III

## EXEMPLES D'ILLUSTRATION

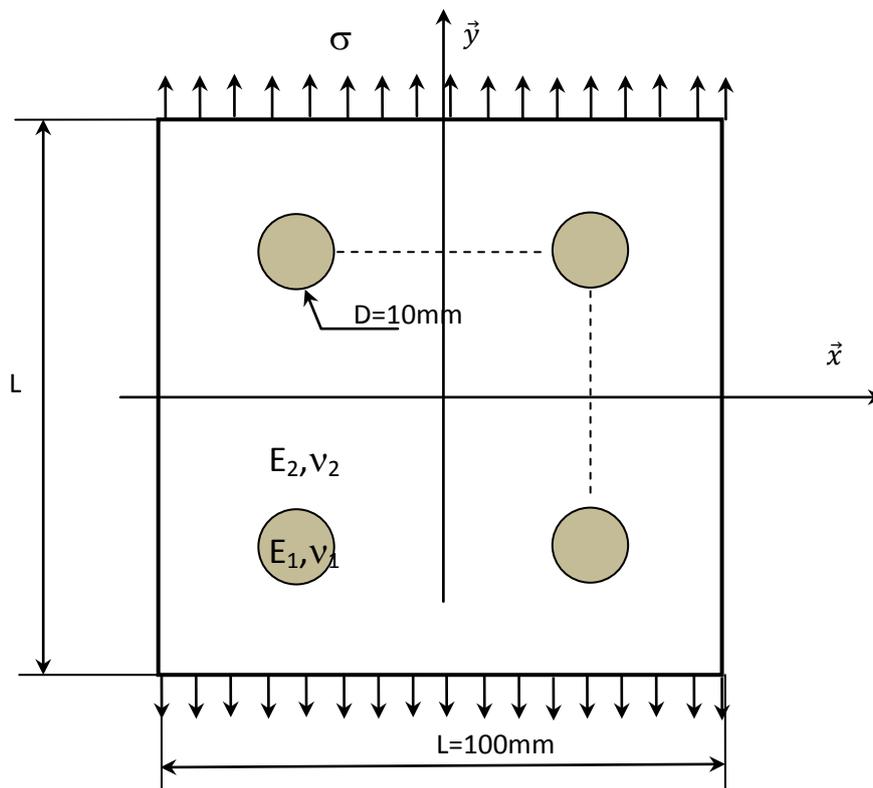
### III.1. INTRODUCTION

Il existe dans le domaine de la mécanique, une gamme importante de logiciels de simulation de problèmes en génie mécanique. Certains logiciels sont basés sur la méthode des éléments finis. Parmi ceux-ci nous pouvons citer ABAQUS, ANSYS, et COSMOSworks. Le logiciel BEASY est l'un des logiciels les plus performants utilisant la méthode des équations intégrales en 3D.

Dans ce chapitre, nous traitons des domaines présentant des inclusions et l'interaction entre elles. Trois exemples sont présentés avec différentes configurations. Nous avons adopté le logiciel COSMOSWorks pour sa simplicité. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux obtenus par la méthode des discontinuités de déplacement.

### III.2 EXEMPLES TRAITES

#### III.2.1 PLAQUE CARREE AVEC QUATRE INCLUSIONS



**Fig.III.1** Plaque carrée contenant quatre inclusions

Nous considérons dans cet exemple une plaque carrée contenant quatre inclusions soumise à un effort de traction en déformation planes comme l'indique la figure (Fig.III.1).

La plaque est carrée de côté L. L'inclusion a un diamètre  $D=2R$ .

Pour les calculs, nous prenons  $L=20R$ ,  $D=2R=10\text{mm}$ . La contrainte appliquée est égale à  $\sigma=100\text{ MPa}$ .

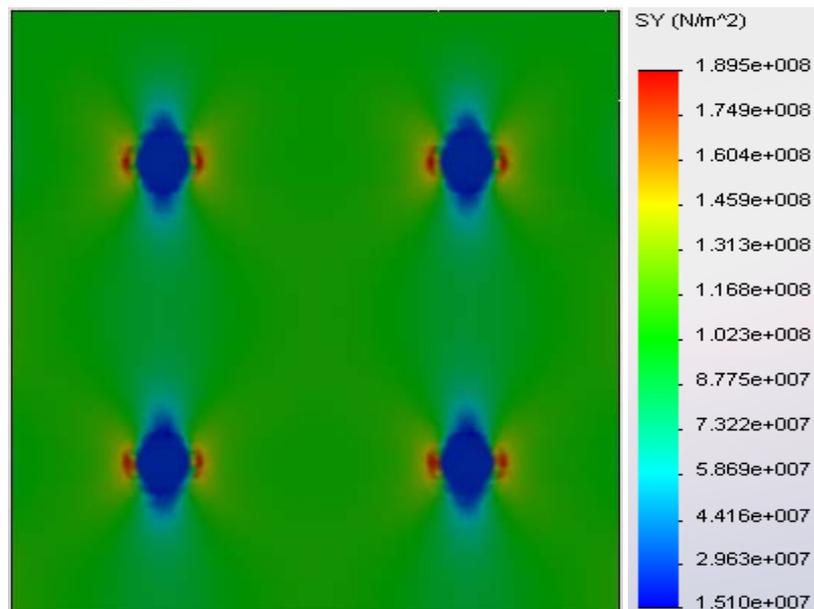
Les caractéristiques mécaniques sont : inclusion  $E_1=20\text{GPa}$ ,  $\nu_1=0.3$  et matrice  $E_2=200\text{GPa}$ ,  $\nu_2=0.3$  et inversement.

Les inclusions sont centrées dans chaque quadrant.

Pour cet exemple, nous nous intéressons au calcul des contraintes  $\sigma_{yy}$  sur les lignes pointillées mais traversant pas les inclusions. Les effets aux interfaces sont présentés dans les prochains exemples.

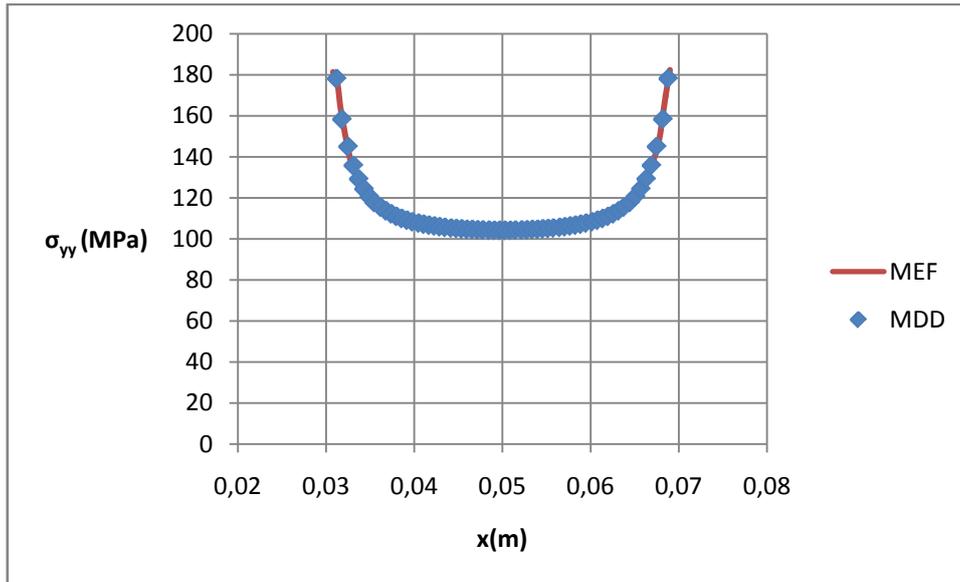
L'analyse par éléments finis a été réalisée en utilisant COSMOSWorks

### III.2.1.1 Résultats pour $E_1=20\text{GPa}$ et $E_2=200\text{GPa}$

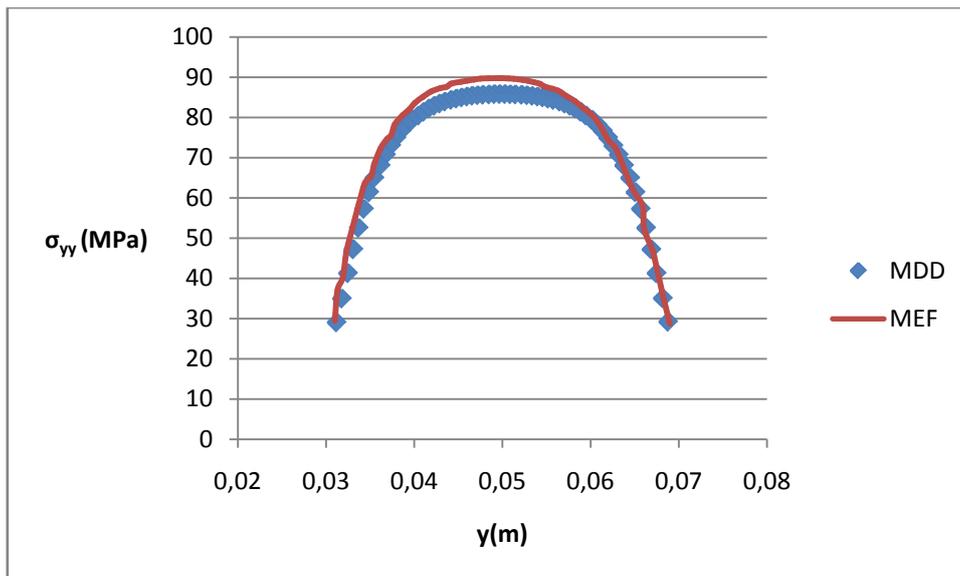


*Fig. III.2 Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa*

Les figures (Fig.III.3) et (Fig.III.4) représentent respectivement l'évolution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  le long du segment horizontal et du segment vertical en trait pointillé.



**Fig.III.3** Contrainte  $\sigma_{yy}$ (MPa) sur le segment en pointillé à  $y=0.25$

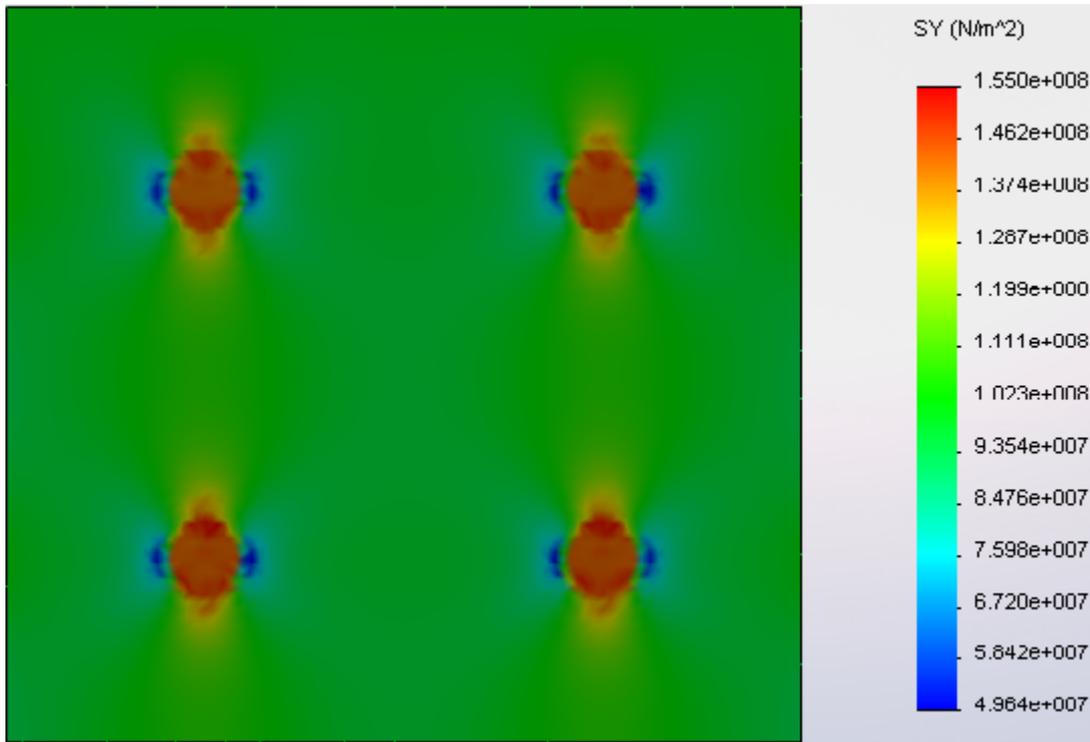


**Fig.III.4** Contrainte  $\sigma_{yy}$ (MPa) sur le segment en pointillé à  $x=0.25$

On constate que les résultats obtenus par COSMOSWorks est très proche des résultats de la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats obtenus sont très satisfaisants.

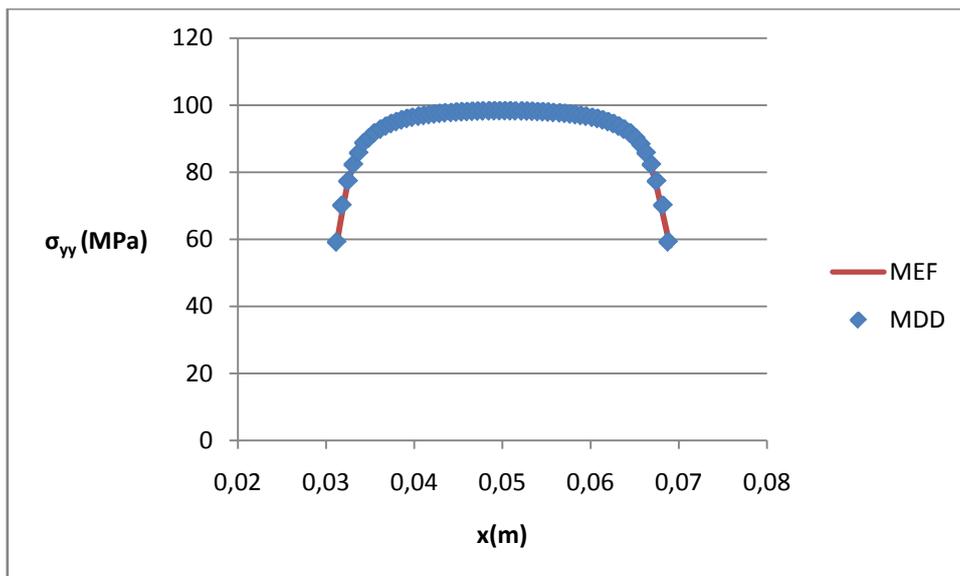
Nous remarquons qu'au milieu des points de calcul, nous retrouvons une valeur proche de la contrainte imposée. Ce qui correspond au problème. Une concentration de contrainte est remarquée au voisinage de l'inclusion qui peut être estimée à 1,8. Ce coefficient dépend du rapport des modules de Young, de la géométrie et du chargement..

### III.2.1.2 Résultats pour $E_1=200\text{GPa}$ et $E_2 =20\text{GPa}$

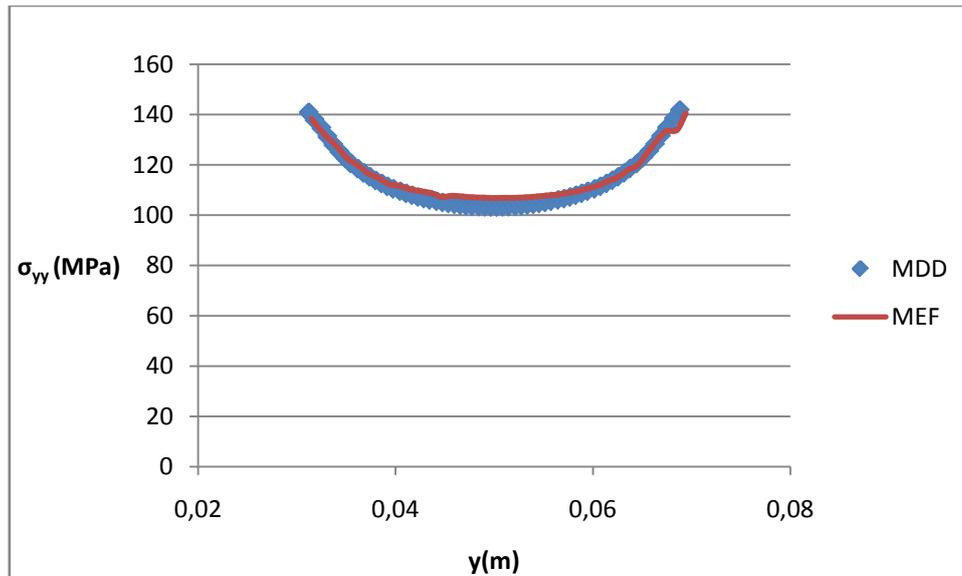


*Fig. III.5 Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa*

Les figures (Fig.III.6) et (Fig.III.7) représentent respectivement l'évolution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  le long du segment horizontal et du segment vertical en trait pointillé.



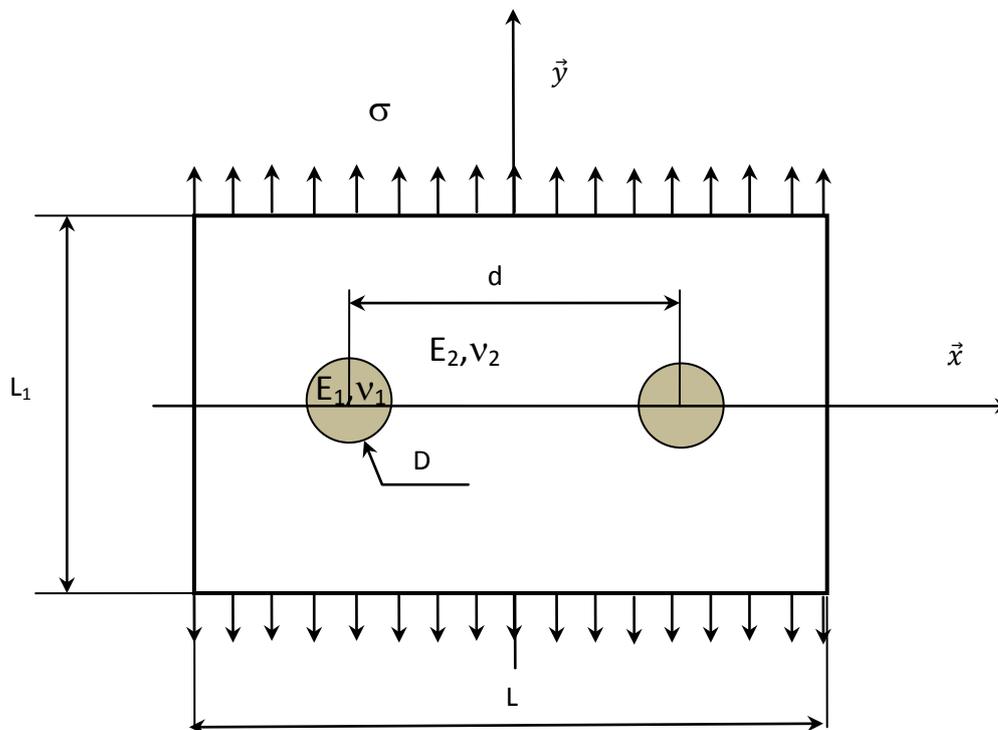
*Fig.III.6 Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa*



**Fig.III.7** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

On remarque que les résultats obtenus par COSMOSWorks est très proche des résultats de la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats obtenus sont aussi satisfaisant que précédemment. Avec le rapport des modules de Young, il y'a absence de concentration de contrainte.

### III.2.2 PLAQUE RECTANGULAIRE AVEC DEUX INCLUSIONS SUR L'AXE X



### **Fig.III.8 plaque rectangulaire contenant deux inclusions sur l'axe $\vec{x}$**

On considère dans cet exemple une plaque rectangulaire contenant deux inclusions soumise à un effort de traction. Les inclusions sont disposées sur l'axe  $\vec{x}$  comme l'indique la figure (Fig.III.8.). Le but de ce test est de mettre en évidence l'effet de la distance entre les inclusions.

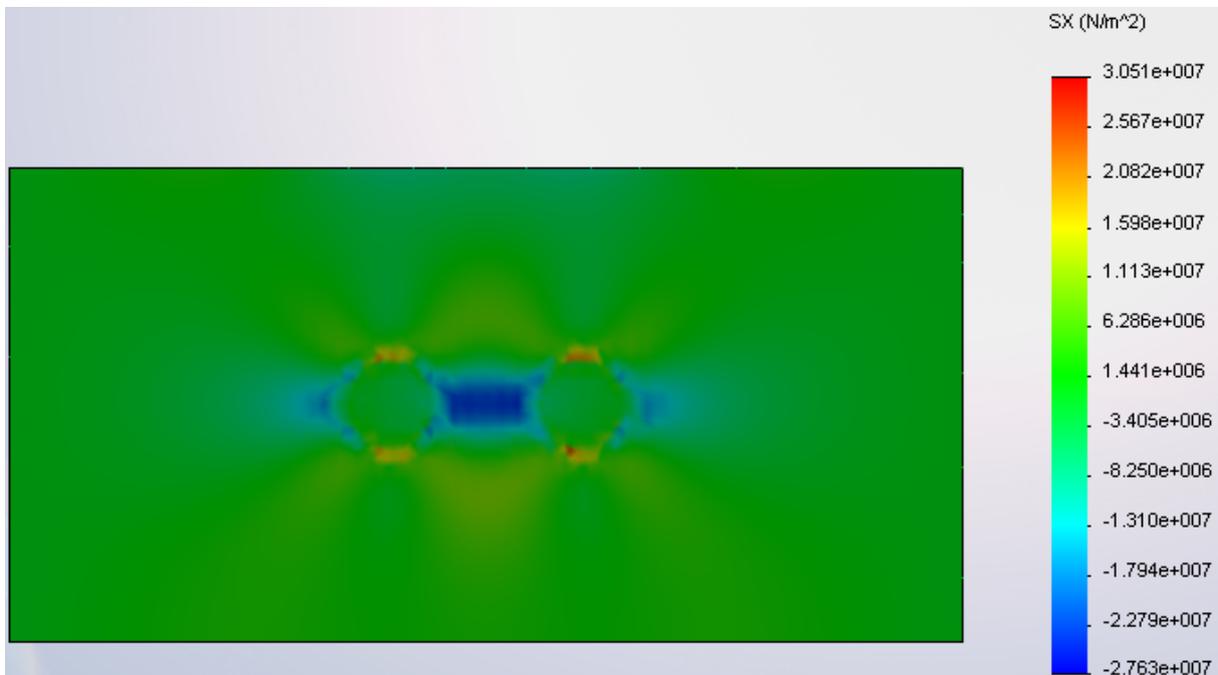
La plaque considérée est de largeur  $L_1$  et de longueur  $L_2$ . Les centres des inclusions sont distants de  $d$ . La plaque est soumise à une traction suivant  $y$ .

Pour les calculs, nous prenons  $L=20R$ ,  $L_1=L/2$ ,  $D=2R=10\text{mm}$ . La contrainte appliquée est égale à  $\sigma=100\text{ MPa}$ .

Pour ce test nous maintenons le module de Young de l'inclusion  $E_1=200\text{GPa}$  et celui de la matrice  $E_2=20\text{GPa}$ . Nous faisons trois tests avec  $d=2D$ ,  $3D$  et  $5D$ .

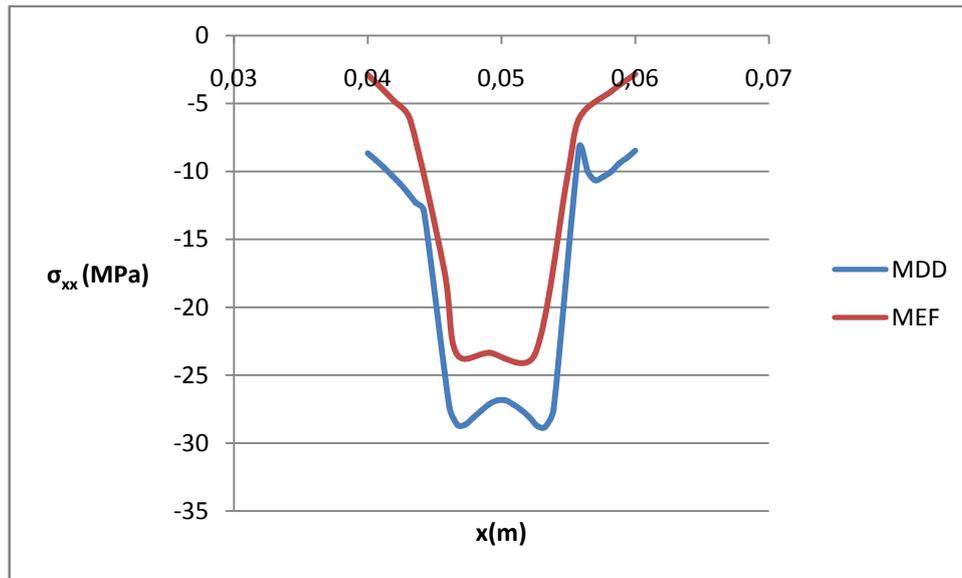
Nous nous intéressons aux contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  entre les centres des inclusions sur l'axe des  $y=0$  en faisant varier la distance entre ces centres. Ce test permet de mettre en évidence la discontinuité de contrainte  $\sigma_{yy}$  au niveau de l'interface.

#### **III.2.2.1-Résultats pour $d=2D$**



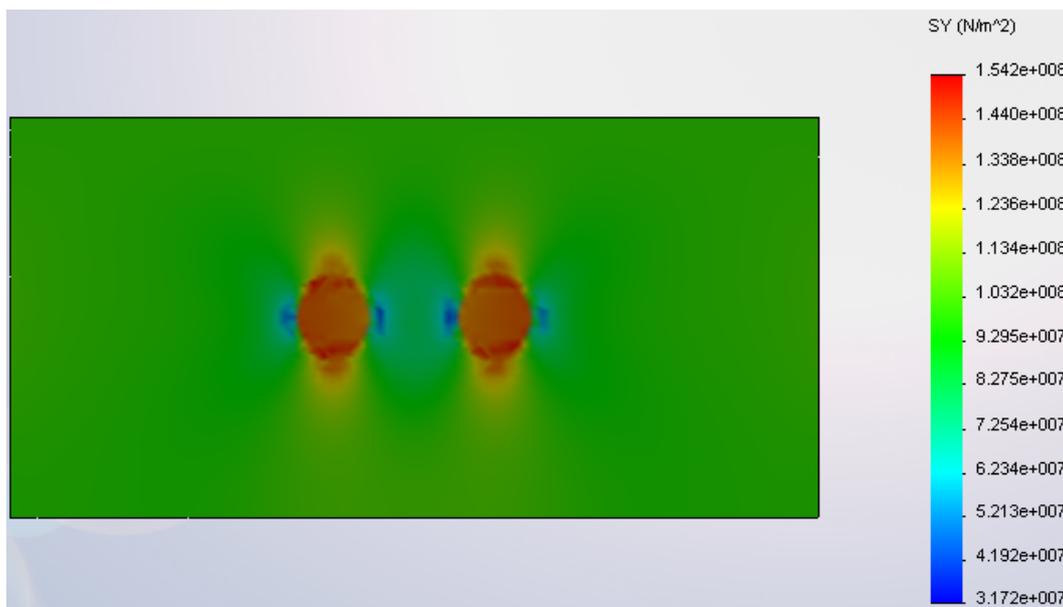
**Fig. III.9 Contrainte  $\sigma_{xx}$  en MPa**

La figure (Fig.III.10) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ )



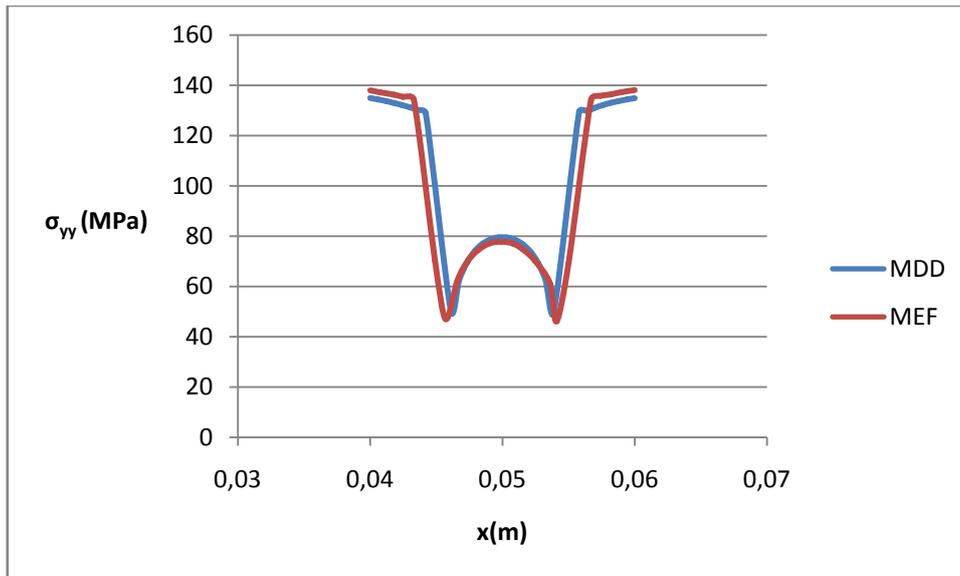
**Fig.III.10** Contrainte  $\sigma_{xx}$  (MPa)

Qualitativement, les résultats sont comparables. Ces calculs doivent être refaits pour affiner les résultats. La zone entre les inclusions est en compression lié à un confinement.



**Fig. III.11** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

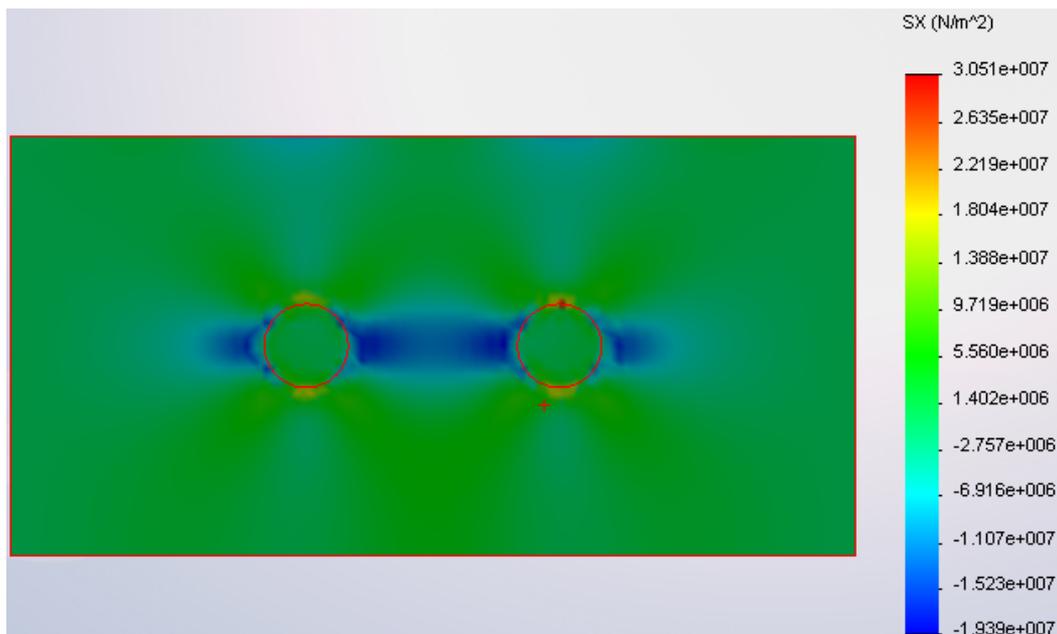
La figure (Fig.III.12) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  le long de la droite (y=0)



**Fig.III.12 Contrainte  $\sigma_{yy}(x,0)$  (MPa)**

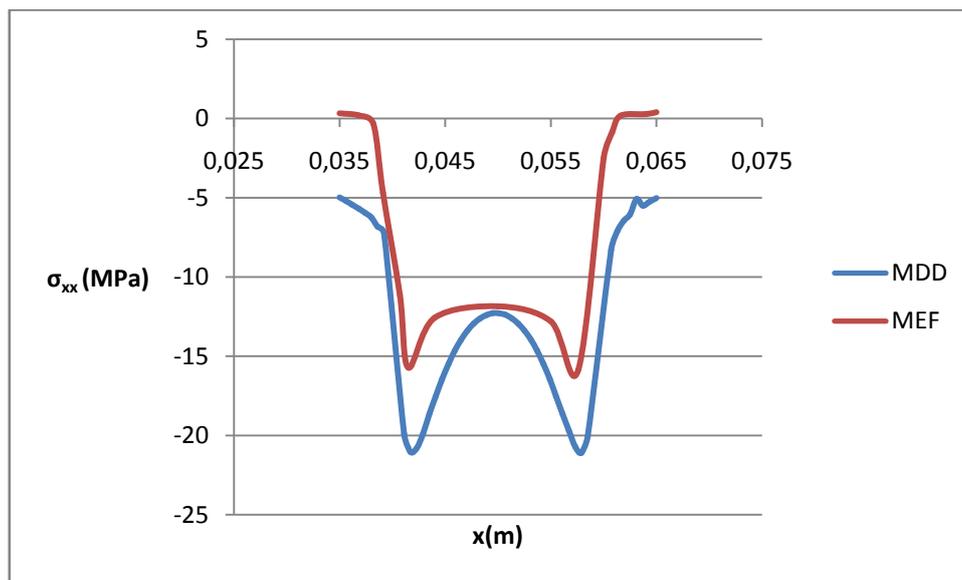
Pour cette contrainte, contrairement à  $\sigma_{xx}$ , les résultats obtenus par COSMOSWorks sont très proches des résultats obtenus par la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. La contrainte reste presque constante dans l'inclusion. La présence de discontinuité de la contrainte est mise en évidence.

### III.2.2.2-Résultats pour d=3D



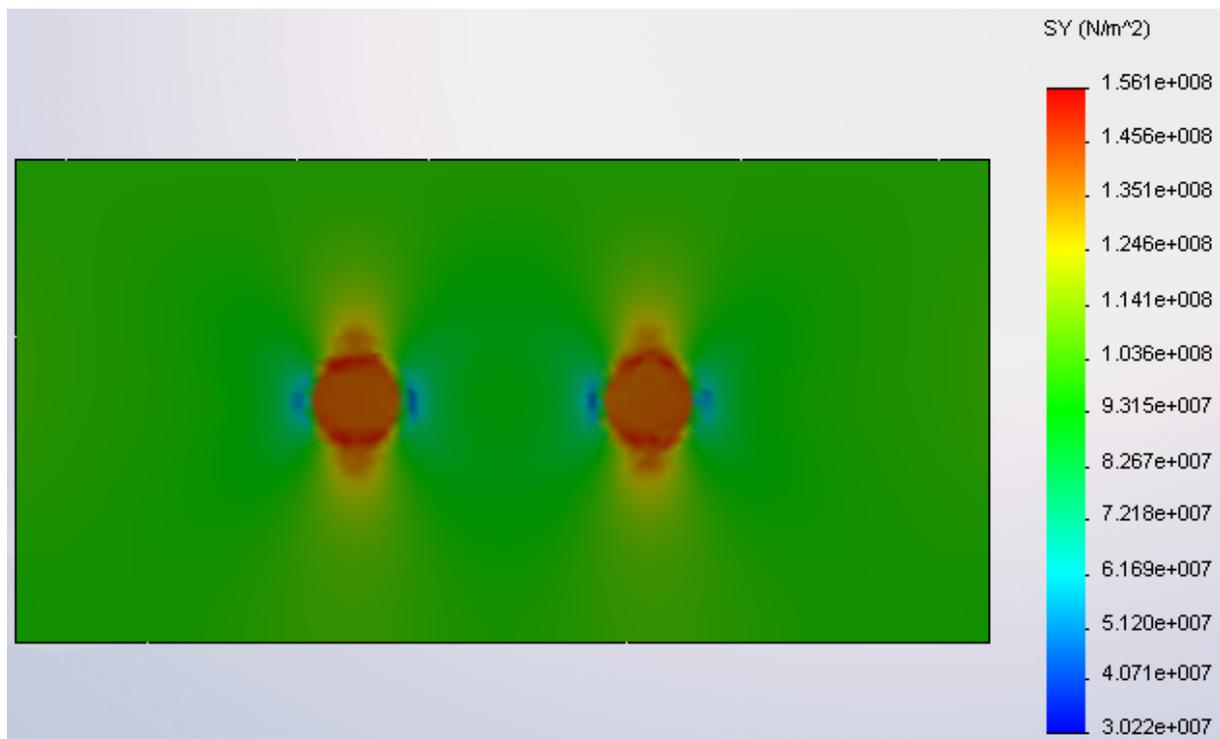
**Fig. III.13 Contrainte  $\sigma_{xx}$  en MPa**

La figure (Fig.III.14) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ )



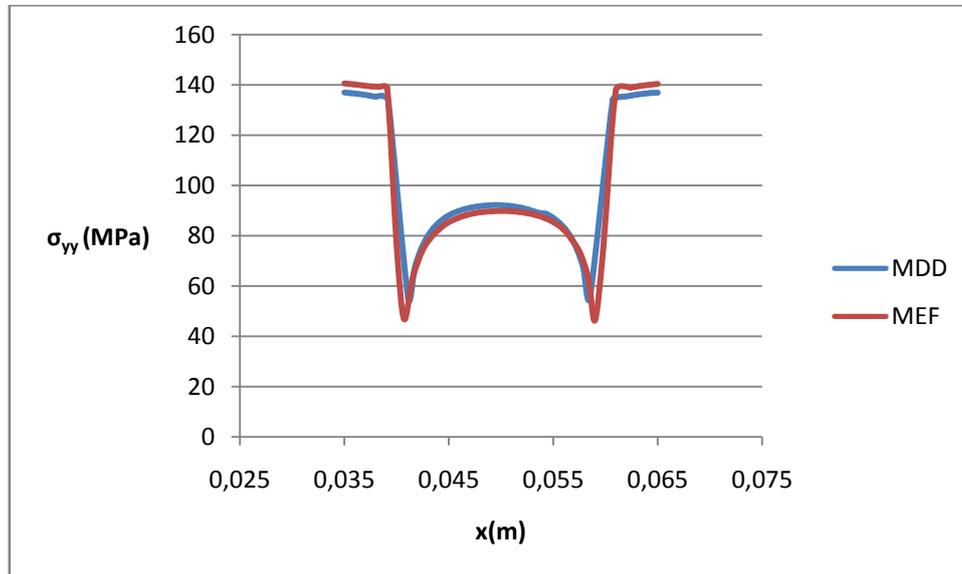
**Fig.III.14** Contrainte  $\sigma_{xx}$  (MPa)

Nous pouvons remarquer comme précédemment que, qualitativement, les résultats sont comparables. Mais ces calculs doivent être refaits pour affiner les résultats. Les contraintes de compression diminuent en intensité avec l'éloignement des inclusions. Ce qui correspond au problème.



**Fig. III.15** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

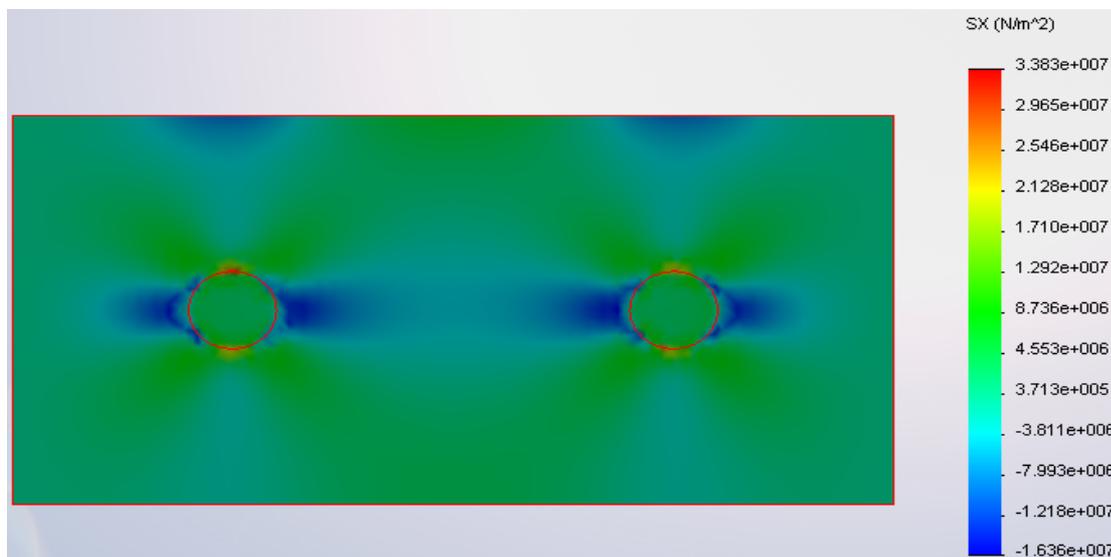
La figure (Fig.III.16) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ ) et comprise entre les centre des inclusions.



**Fig.III.16** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

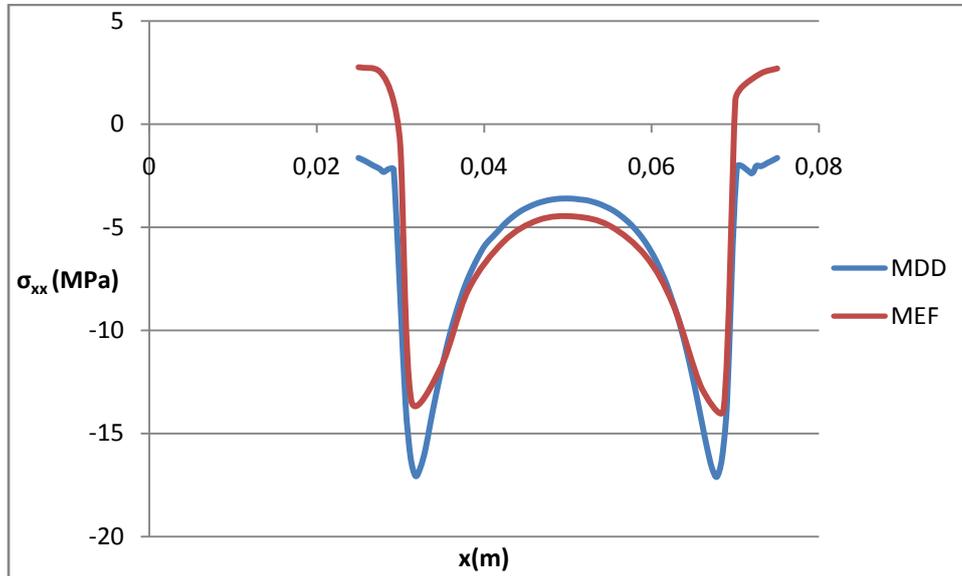
On constate que les résultats obtenus par COSMOSWorks sont très proche des résultats de la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats obtenus sont très satisfaisants pour cette contrainte. La contrainte est quasi constante dans l'inclusion. Elle représente 1,4 fois la contrainte appliquée. Nous remarquons la discontinuité de la contrainte au niveau de l'interface.

### III.2.2.3-Résultats pour d=5D



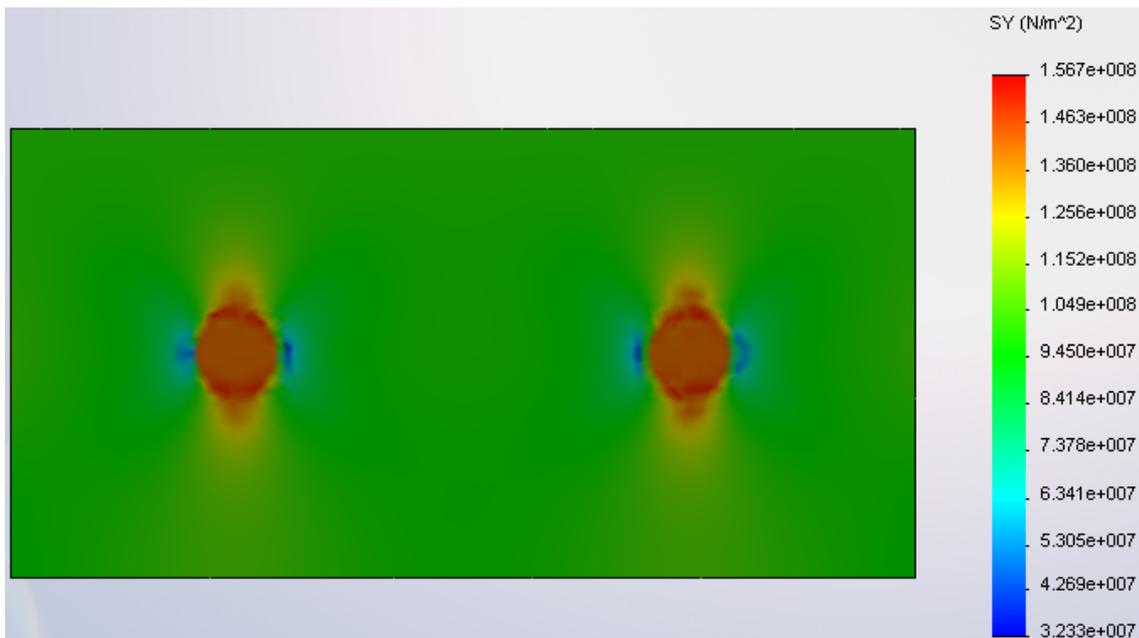
**Fig. III.17** Contrainte  $\sigma_{xx}$  en MPa

La figure (Fig.III.18) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ )



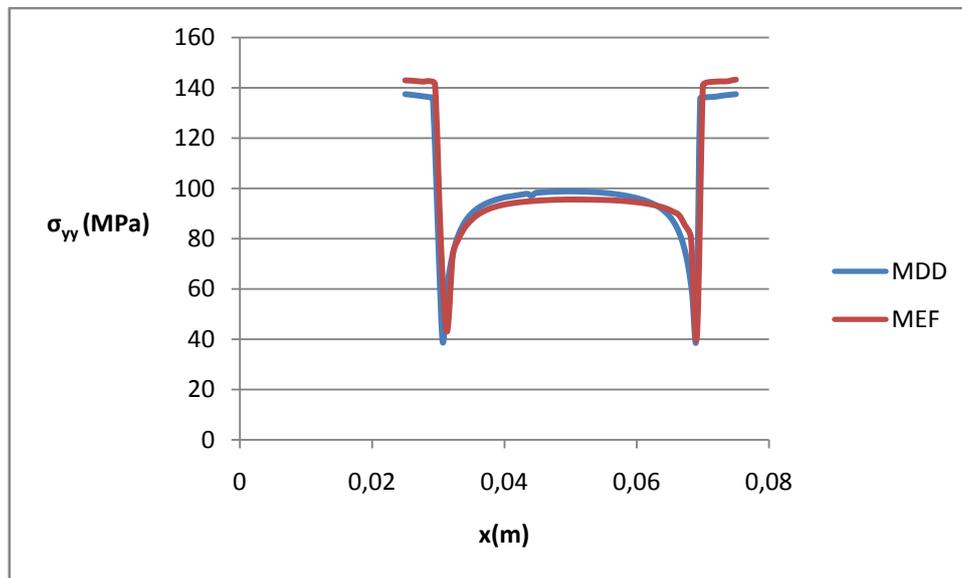
**Fig.III.18** Contrainte  $\sigma_{xx}(x,0)$  en MPa

Nous pouvons remarquer de nouveau que, qualitativement, les résultats sont comparables. Les contraintes de compression diminuent encore plus en intensité avec l'éloignement des inclusions.



**Fig. III.19** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

La figure (Fig.III.20) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ )



**Fig.III.20** Contrainte  $\sigma_{yy}(x,0)$  en MPa

Nous remarquons que les résultats obtenus par COSMOSWorks sont très proche des résultats de la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats obtenus sont très satisfaisants pour cette contrainte. La contrainte est quasi constante dans l'inclusion. Elle représente 1,4 fois la contrainte appliquée. Nous remarquons la discontinuité de la contrainte au niveau de l'interface. De plus, nous pouvons remarquer que, nous retrouvons la valeur imposée de 100 MPa sur une certaine zone entre les inclusions.

### **III.2.3 PLAQUE RECTANGULAIRE AVEC DEUX INCLUSIONS ANTISYMETRIQUE**

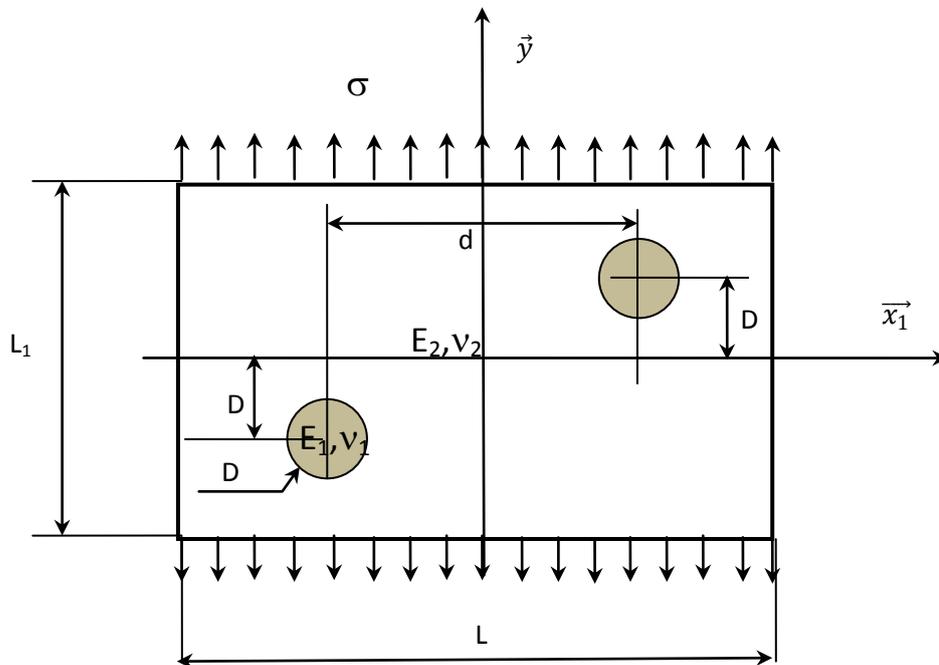
On considère dans cet exemple une plaque rectangulaire contenant deux inclusions soumise à une traction , comme l'indique la figure (Fig.III.8.)

On considère dans cet exemple une plaque rectangulaire contenant deux inclusions soumise à un effort de traction. Les inclusions sont disposées symétriquement par rapport à l'origine. Le but de ce test est de mettre en évidence l'effet de la distance entre les inclusions en tenant compte du décalage des inclusions par rapport à l'axe des x.

La plaque considérée est de largeur  $L_1$  et de longueur  $L_2$ . Les centres des inclusions sont distants de  $d$ . La plaque est soumise à une traction suivant  $y$ .

Pour les calculs, nous prenons comme précédemment,  $L=20R$ ,  $L_1=L/2$ ,  $D=2R=10\text{mm}$ . La contrainte appliquée est égale à  $\sigma=100\text{ MPa}$ .

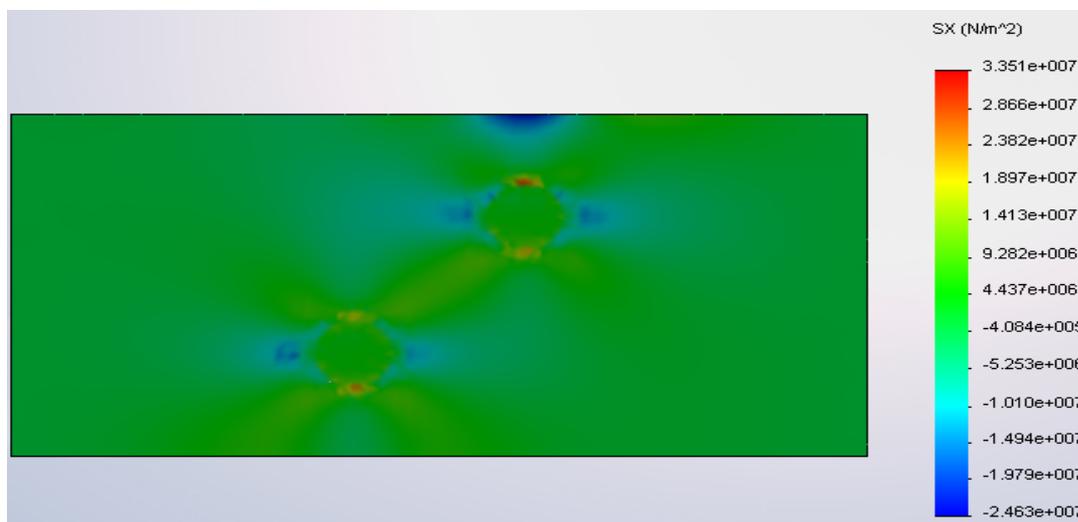
Pour ce test nous maintenons le module de Young de l'inclusion  $E_1=200\text{GPa}$  et celui de la matrice  $E_2=20\text{GPa}$ . Les coefficients de poisson sont égaux à 0,3. Nous faisons trois tests avec  $d=2D$ ,  $3D$  et  $5D$ .



**Fig.III.21 plaque rectangulaire contenant deux inclusions**

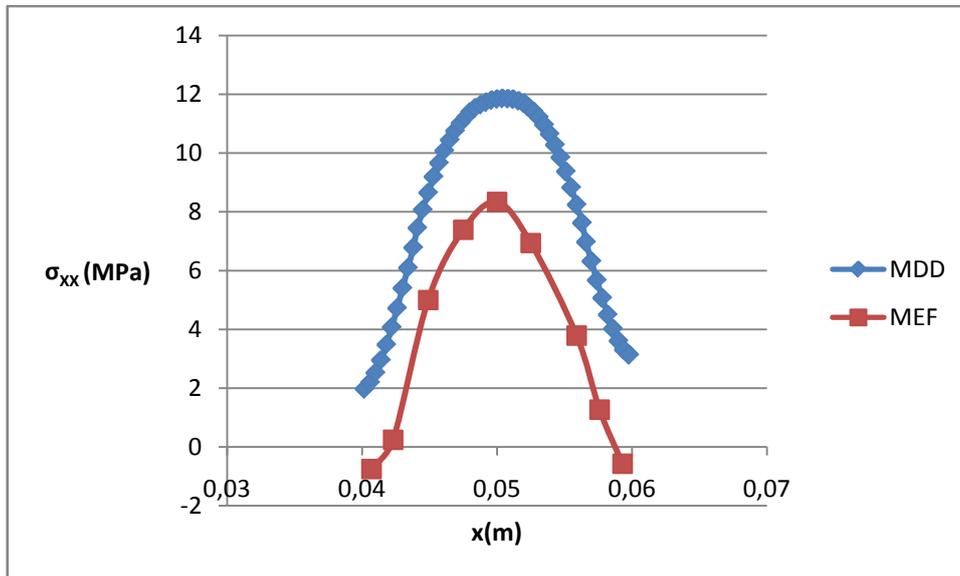
Nous nous intéressons aux contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  sur l'axe  $\vec{x}_1$  sur la distance  $d$ .

### III.2.3.1-Résultats pour $d=2D$



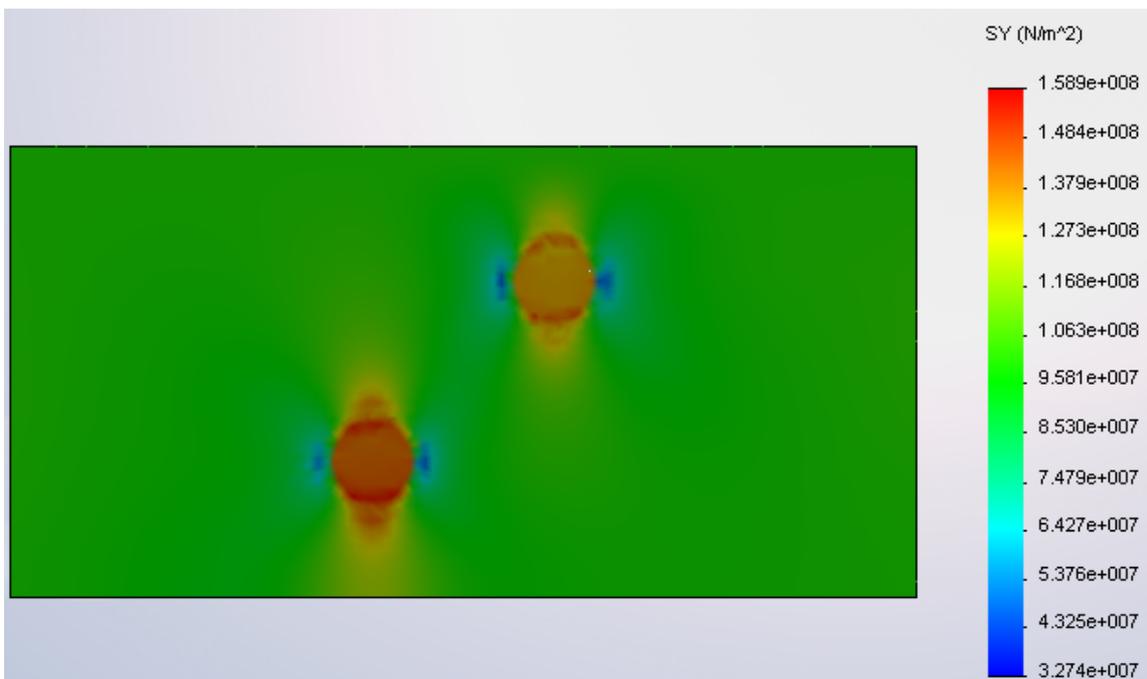
**Fig. III.22** Contrainte  $\sigma_{xx}$  en MPa

La figure (Fig.III.23) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ )



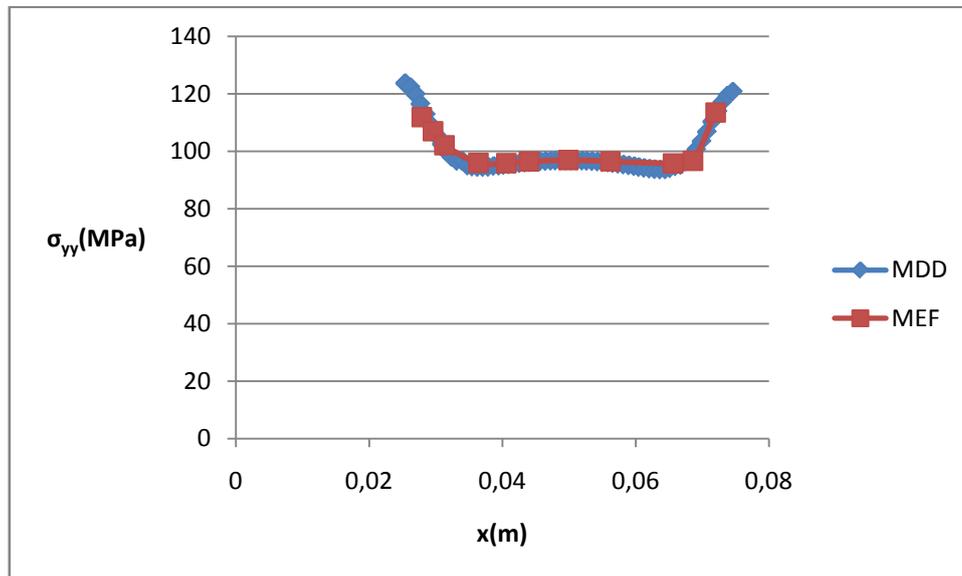
**Fig.III.23** Contrainte  $\sigma_{xx}(x,0)$  en MPa

Nous pouvons remarquer comme précédemment que, qualitativement, les résultats sont comparables. Nous constatons de plus qu'il ya moins de distorsion. Mais ces calculs doivent être refaits pour affiner les résultats.



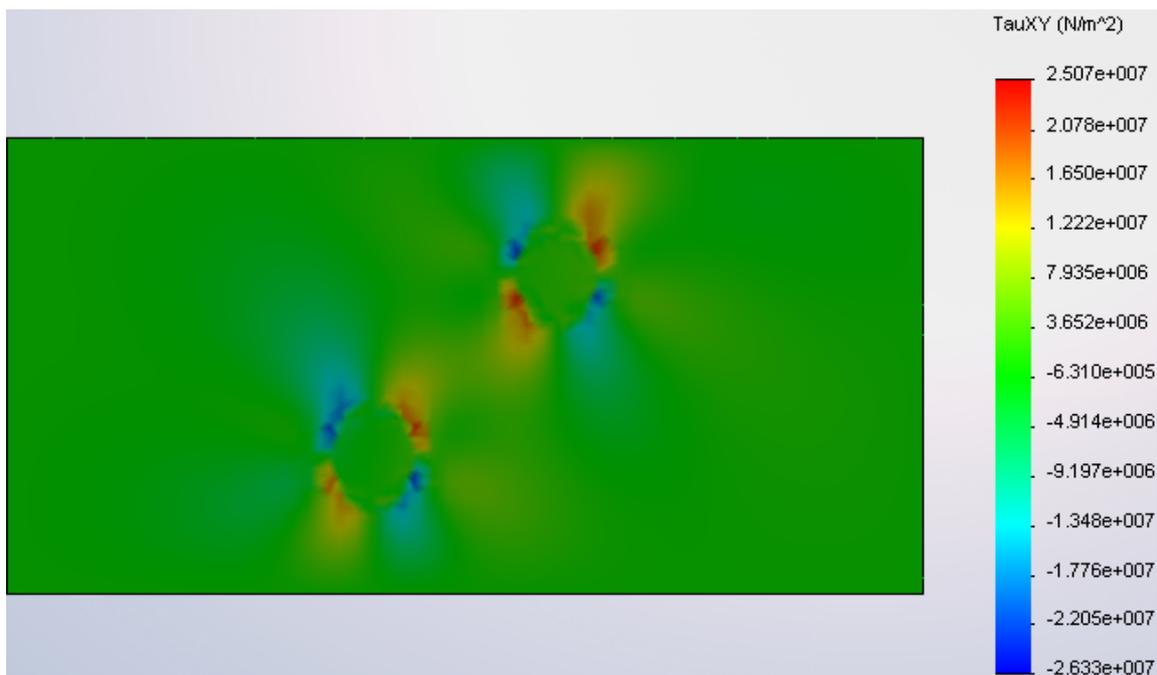
**Fig. III.24** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

La figure (Fig.III.25) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  le long de la droite ( $y=0$ ) sur la zone d.



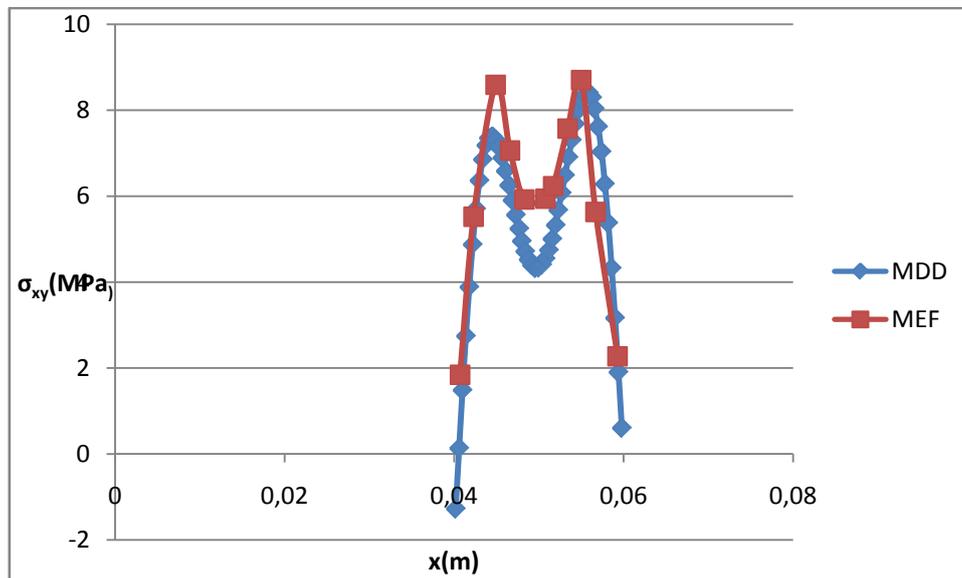
*Fig.III.25 Contrainte  $\sigma_{yy}(x,0)$  en MPa*

Nous remarquons de nouveau, que pour les contraintes  $\sigma_{yy}$ , les résultats obtenus par COSMOSWorks sont très proches des résultats de la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats obtenus sont très satisfaisants pour cette contrainte. Nous pouvons remarquer que, nous retrouvons la valeur imposée de 100 MPa sur une certaine zone entre les inclusions.



**Fig. III.26** Contrainte  $\sigma_{xy}$  en MPa

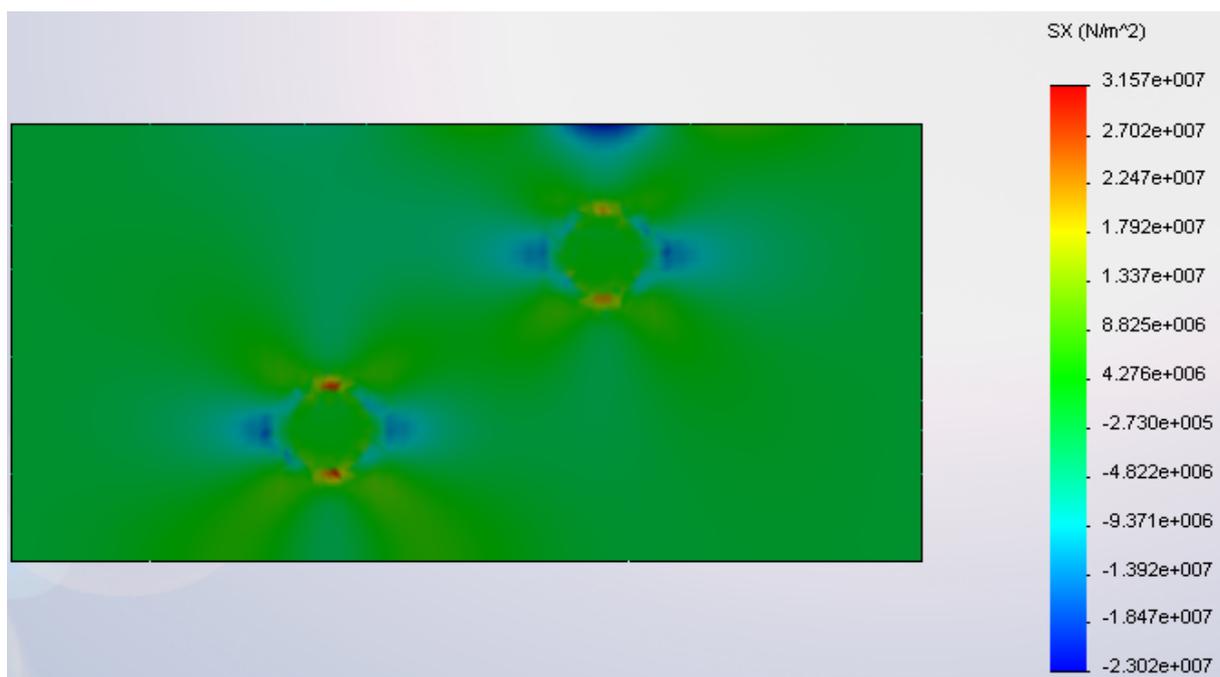
La figure (Fig.III.26) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xy}$  le long de la droite ( $y=0$ )



**Fig.III.27** Contrainte  $\sigma_{xy}(x,0)$  en MPa

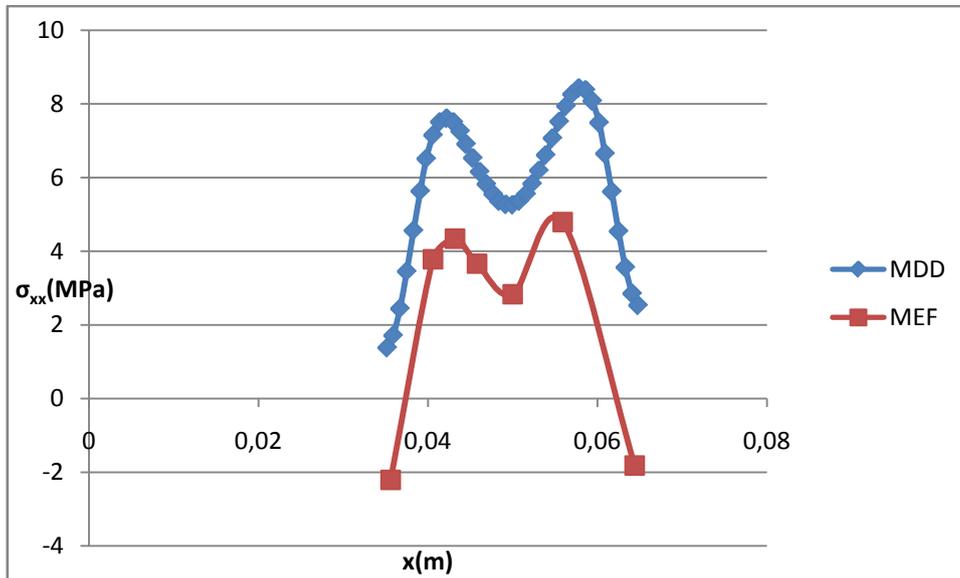
Nous pouvons remarquer comme précédemment que, qualitativement, les résultats sont comparables. Les fortes variations de cette contrainte demandent une forte discrétisation.

### III.2.3.2-Résultats pour d=3D



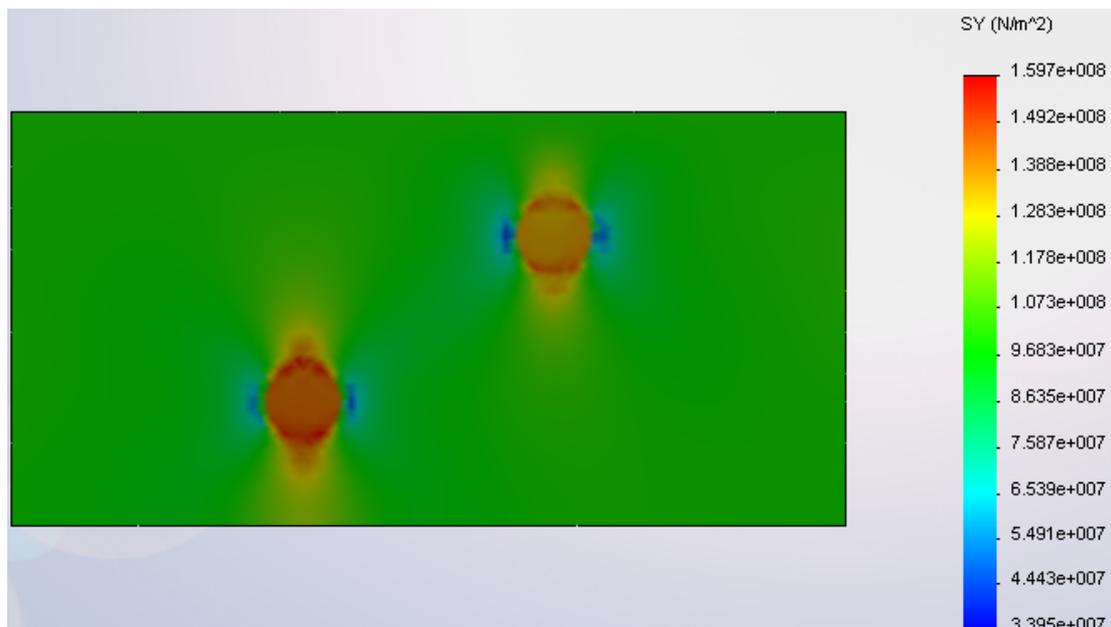
**Fig. III.28** Contrainte  $\sigma_{xx}$  en MPa

La figure (Fig.III.29) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ )



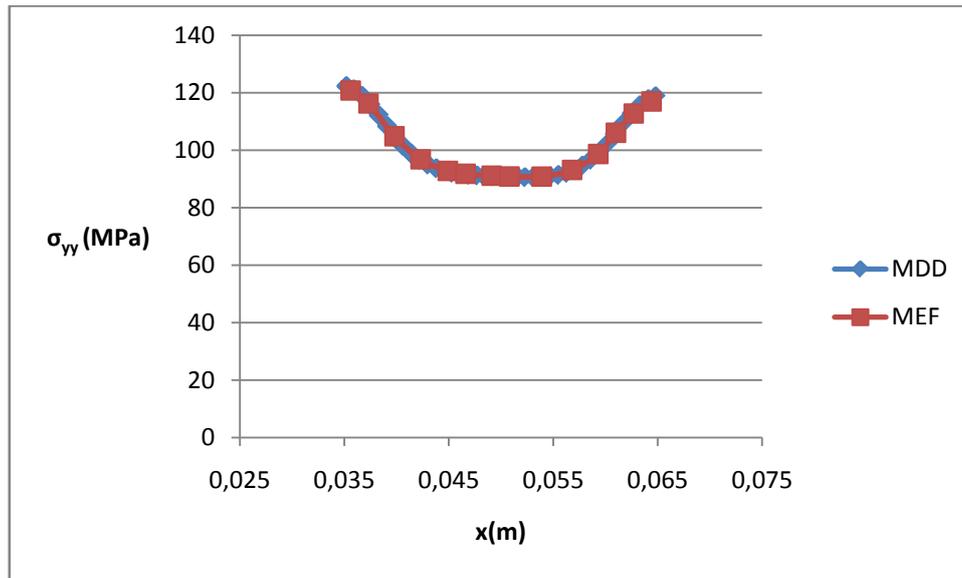
**Fig.III.29** Contrainte  $\sigma_{xx}(x,0)$  en MPa

Nous pouvons remarquer comme précédemment que, qualitativement, les résultats sont comparables. Il y a moins de distorsion et de points de singularité. Néanmoins, des calculs supplémentaires sont souhaitables.



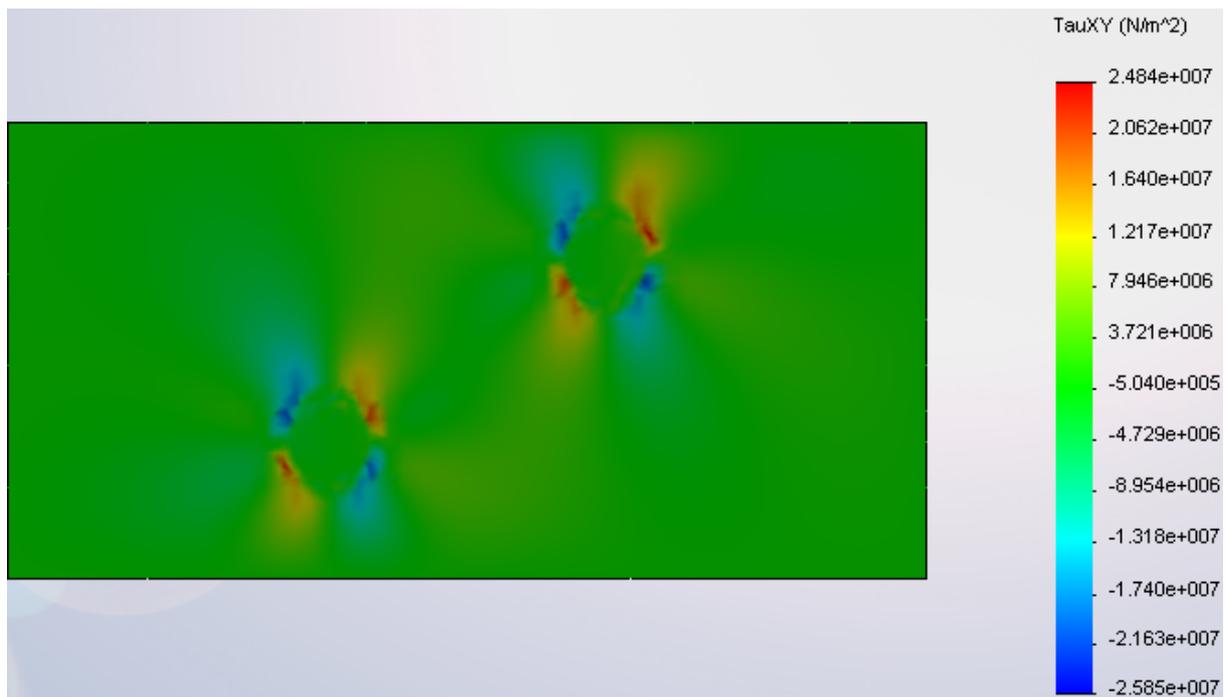
**Fig. III.30** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

La figures (Fig.III.31) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  le long de la droite ( $y=0$ )



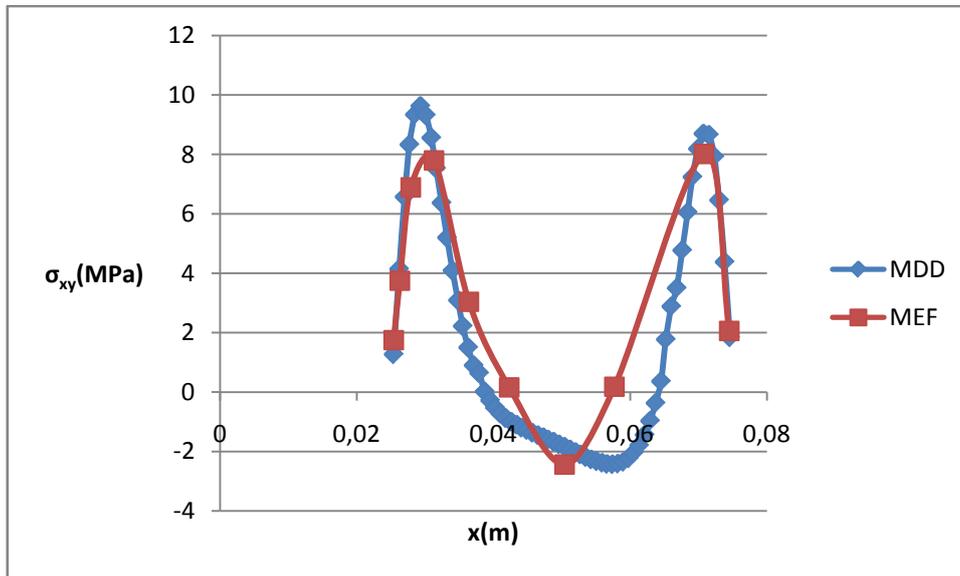
**Fig.III.31** Contrainte  $\sigma_{yy}(x,0)$  en MPa

Les résultats, sont de nouveau très satisfaisants concernant la contrainte  $\sigma_{yy}$ . Les résultats obtenus par COSMOSWorks sont très proches des résultats de la méthode de discontinuité de déplacement. Les résultats obtenus sont très satisfaisants pour cette contrainte. Nous pouvons remarquer que, au contraire, les inclusions en s'éloignant, la contrainte au milieu est inférieure à la contrainte imposée.



**Fig. III.32 Contrainte  $\sigma_{xy}$  en MPa**

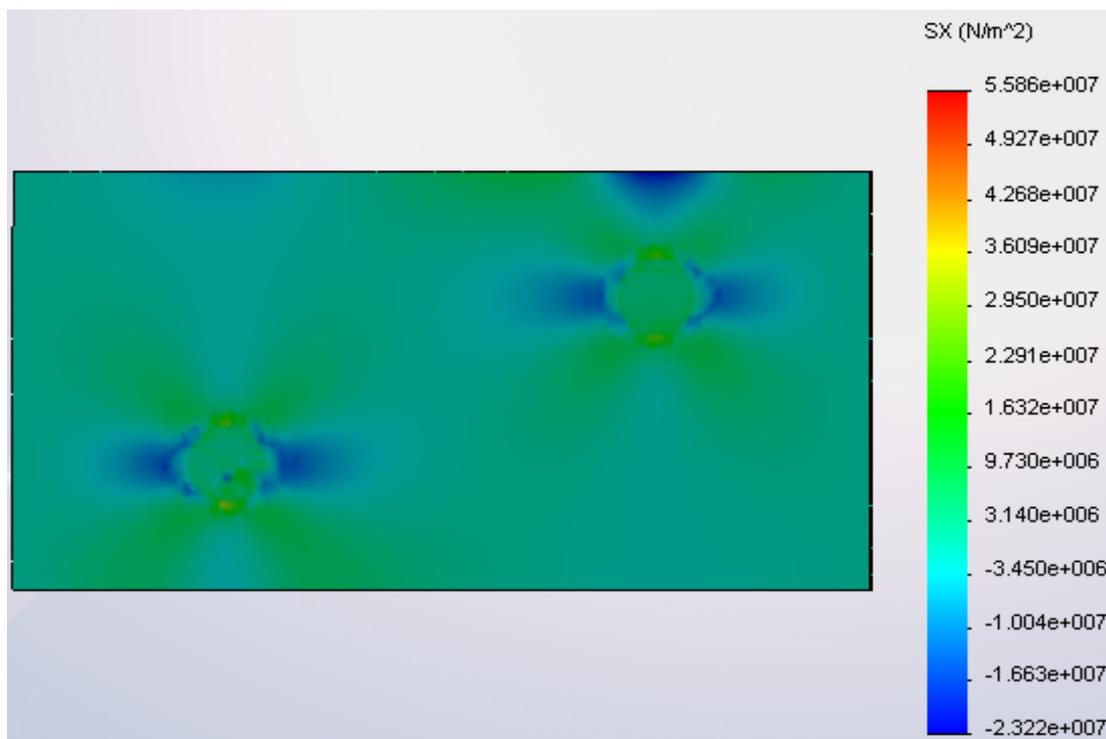
La figure (Fig.III.33) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xy}$  le long de la droite ( $y=0$ )



**Fig.III.33 Contrainte  $\sigma_{xy}(x,0)$  en MPa**

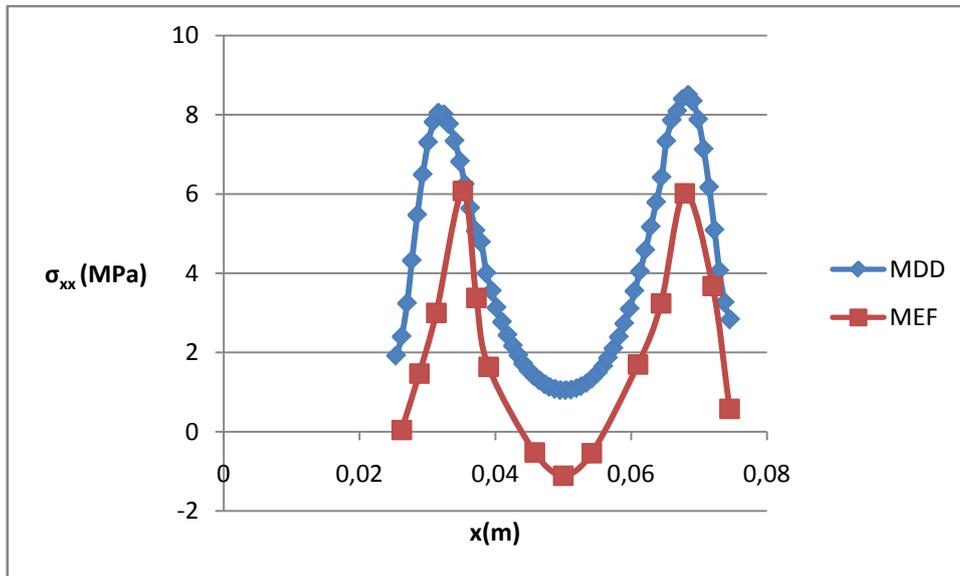
Les fortes variations de cette contrainte demandent une forte discrétisation. De plus le nombre de points de calcul réalisés par COSMOSWorks est faible relativement au nombre de points de calcul réalisés par la méthode de discontinuité de déplacement.

### III.2.3.3-Résultats pour d=5D



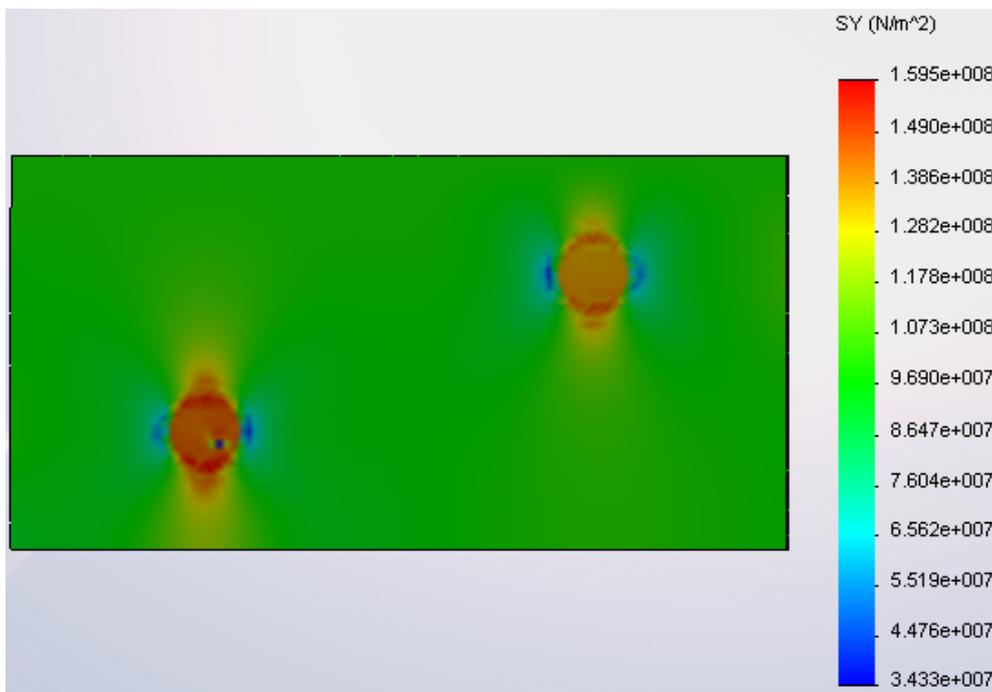
**Fig. III.34** Contrainte  $\sigma_{xx}$  en MPa

La figure (Fig.III.35) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la droite ( $y=0$ )



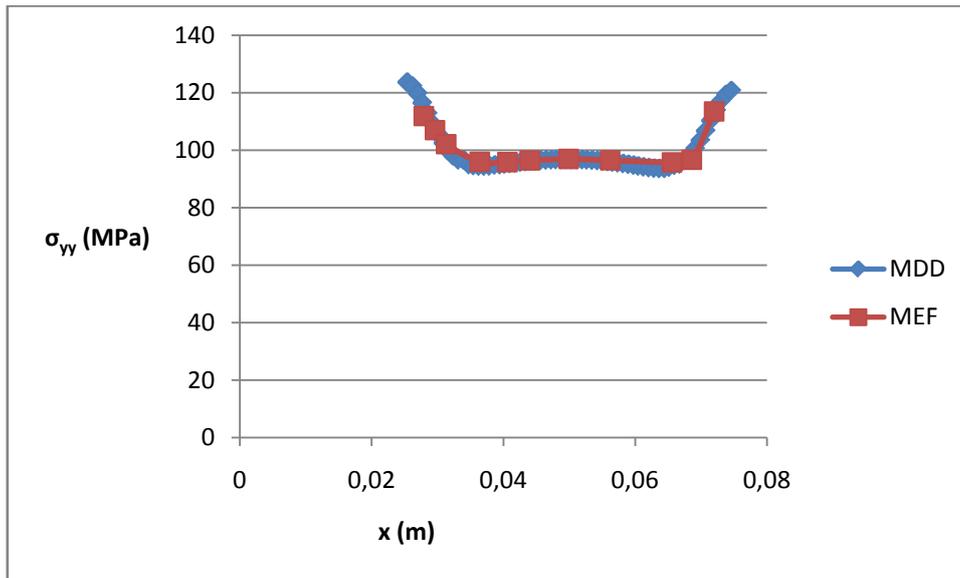
**Fig.III.35** Contrainte  $\sigma_{xx}(x,0)$  en MPa

Nous pouvons remarquer comme précédemment que, qualitativement, les résultats sont comparables. Néanmoins, des calculs supplémentaires sont souhaitables d'autant que le nombre de points de calcul par COSMOSWorks est faible.



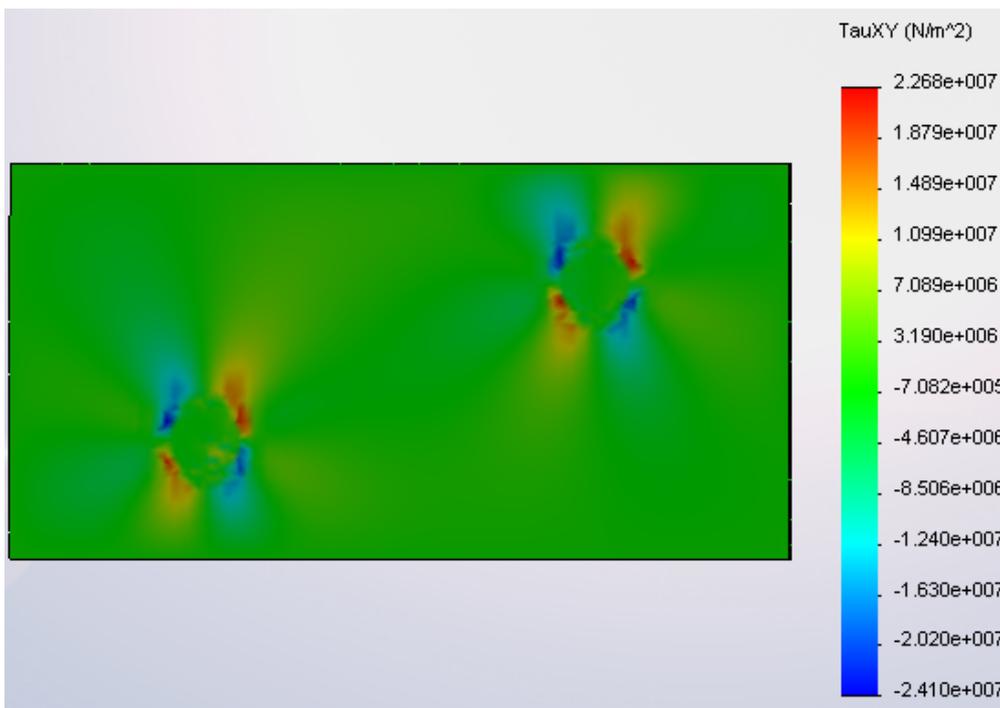
**Fig. III.36** Contrainte  $\sigma_{yy}$  en MPa

Le figure (Fig.III.37) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  le long de la droite ( $y=0$ )



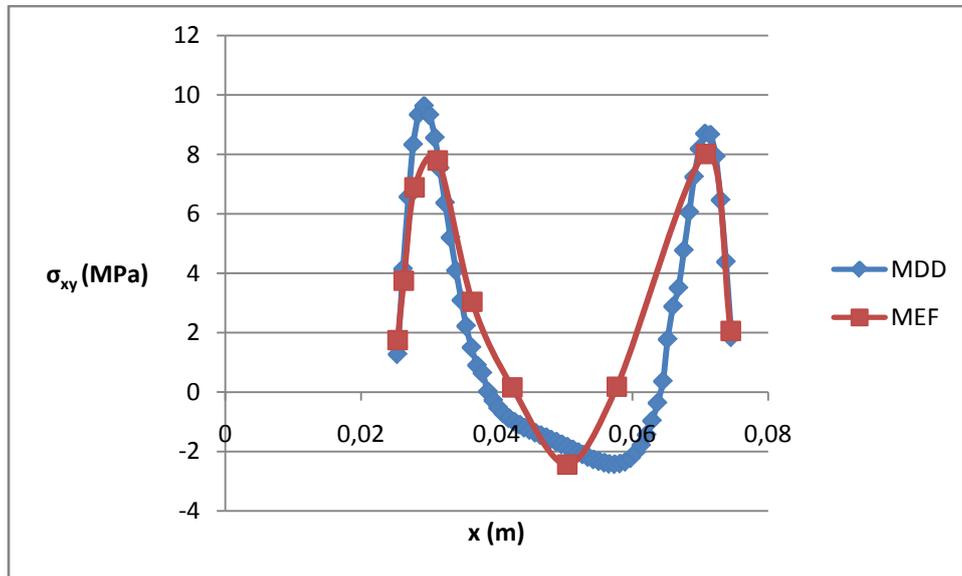
**Fig.III. 37** Contrainte  $\sigma_{yy}(x,0)$  en MPa

Les résultats, sont de nouveau très satisfaisants concernant la contrainte  $\sigma_{yy}$ . Les résultats obtenus par COSMOSWorks sont très proches des résultats de la méthode de discontinuité de déplacement. Nous retrouvons, comme pour le cas des deux inclusion sur l'axe des x, la contrainte imposée 100MPa. On peut noter un pseudo facteur d'intensité de contrainte sous l'inclusion.



**Fig. III.38** Contrainte  $\sigma_{xy}$  en MPa

La figure (Fig.III.39) représente l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xy}$  le long de la droite ( $y=0$ )



**Fig.III.39** Contrainte  $\sigma_{xy}(x,0)$  en MPa

Nous retrouvons la même allure de la figure III.35. Des calculs supplémentaires sont souhaitables d'autant que le nombre de points de calcul par COSMOSWorks est faible.

### III.3 CONCLUSION :

L'interaction des inclusions a été étudiée sur la base du calcul des contraintes. La contrainte  $\sigma_{yy}$  est bien prise en compte et nous obtenons une très bonne corrélation. La concentration de contrainte est plus élevée lorsque la matrice est plus souple que l'inclusion. Les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{xy}$  sont sensibles à la discrétisation. Les contraintes à l'intérieur les inclusions ne varient pas beaucoup.

# Conclusion générale

## Conclusion générale

Ce travail montre les grandes possibilités qu'offre la méthode de discontinuité de déplacements pour la résolution des problèmes de l'élasticité pour les matériaux non homogènes en bidimensionnel.

Dans ce travail, nous avons utilisé le COSMOSWorks qui est une implémentation directe de méthode des éléments fini afin d'étudier l'interaction entre les inclusions et comparer ses résultats à ceux obtenus par la méthode des discontinuités de déplacement.

Les cas traités concernent des plaques en traction présentant des inclusions.

Avec les tests réalisés où le chargement est parallèle à l'axe y, il en découle ce qui suit :

Nous obtenons une très bonne corrélation sur les résultats de  $\sigma_{yy}$ ,

La concentration de contrainte est plus élevée lorsque la matrice est plus souple que l'inclusion

Les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{xy}$  sont sensibles à la discrétisation.

Les contraintes à l'intérieur les inclusions ne varient pas beaucoup

# BIBLIOGRAPHIE

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Boukhalkhal A**, « *Extension de la méthode de discontinuité de déplacements pour la simulation de la rupture dans les Multicouches* ». Mémoire de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, (2007).
- [2] **Yang T.Y**, *Finite element structural analysis*. Prentice hall, Inc. 1986.
- [3] **Crouch S.L, Starfield A.M**, *Boundary Element Method in Solid Mechanics with Application in Rock Mechanics and Geological Mechanics*. London, Allen & Unwin, Boston, 1983.
- [4] **Brebbia C.A, Dominguez J**, *Boundary elements: an introductory course*. Mc Graw-Hill, Ind Edition, 1989.
- [5] **Bonnet M**, *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Edition Eyrolles, 1995.
- [6] **Crouch S.L**, *Solution of plane elasticity problems by displacement discontinuity method*. Int.J. Num. Methods Eng. 10, pp 301–343, 1976.
- [7] **Crouch S.L, Mogilevskaya S. G**. On the use of Somigliana's formula and Fourier series for elasticity problems with circular boundaries Int.J. Num. Methods Eng. 2003; 58:537–578
- [8] **Shou K.J, Crouch S.L**, *A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 32, No. 1, pp 49-55. 1995
- [9] **Dong C.Y, Kang Yong Lee**, *Numerical analysis of doubly periodic array of cracks/rigid-line inclusions in an infinite isotropic medium using the boundary integral equation method* Int.J. Num.. (2005) 133:389–405
- [10] **WANG Yin-bang**, *boundary element analysis of interaction between an elastic rectangular inclusion and a crack* Int.J. Num. 0253-4827 (2004)02-0152-06
- [11] **Timoshenko S.P, Goodier J.N**, *Theory of elasticity*. McGRAW-HILL, 1970.