

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**



DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

*Pour l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique*

**Thème:**

## Contribution à l'Exploitation Optimale d'un Robot Parallèle à 3ddl

**Présenté par :**

M.BOUNEDJAR Mohamed Tarik

**Proposé et dirigé par :**

M . M. BOUAZIZ

**-Promotion Juin 2011-**

---

E.N.P- 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El Harrach, Alger

## DEDICACES

*A ceux qui n'ont jamais cessé de m'encourager et  
de me soutenir, à ceux qui leur amour m'a donné*

*la volonté d'aller toujours de l'avant*

*à ceux qui ont sacrifié tout pour moi*

*A mes très chers parents, que Dieu les protège*

*A mes très chers frères*

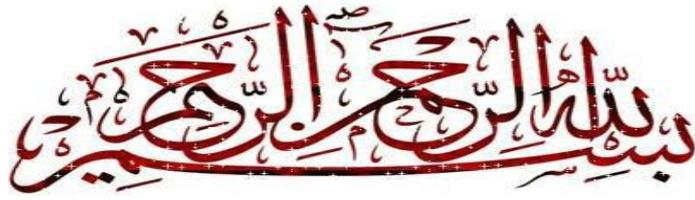
*A toute ma famille*

*A tous mes amis*

*Et A tous mes collègues*

*Je dédie ce modeste travail*

*Tarik*



## REMERCIEMENTS

*En premier lieu je remercie Dieu qui m'a aidé*

*à compléter ce travail*

*Je tiens particulièrement à exprimer mes*

*remerciements et mes profonds respects à*

*Mr.MOUSSA HADDAD et Mr.MOHAMED BOUAZIZ, qui ont*

*proposé et dirigé*

*ce travail, pour leur suivi et leurs conseils*

*Je remercie également Monsieur le président H.BELHANECHÉ*

*et M.M. MADANI pour avoir accepté d'examiner mon travail*

*Enfin je remercie tous ceux qui ont participés dans ce*

*travail*

يهدف هذا العمل إلى حل مسألة الإستعمال الأمثل لروبوت متوازي ذو ثلاث درجات من الحرية, قمنا بعرض طريقة جديدة لحل مشكلة تنظيم الحركات و لكن التمثيل الديناميكي قبل هذا من اجل ايجاد عزم المزدوجة. تعتبر المنهجية المقترحة لحل هذه المسألة امتدادا لطريقة الأشكال العشوائية للمسارات (RPA), تعتمد هذه المنهجية على تحويل المسألة الأصلية إلى مسألة توكي الأمثل بعوامل تحت شروط. حيث أن أحد العوامل المجهولة يتمثل في زمن إنجاز العملية المطلوبة.

**الكلمات المفتاحية:** الإستعمال الأمثل, تخطيط المسارات, توكي الأمثل, النمط العشوائي.

---

**Résumé**

Le présent travail a pour but la résolution du problème d'exploitation optimale des robots parallèles à 3ddl, et on présente une nouvelle méthode de planification de trajectoire mais avant on doit calculer le modèle dynamique pour trouver les couples.

L'approche proposée est l'approche des profils aléatoires de trajectoires (RPA). Elle est basée sur la transformation du problème original en un problème d'optimisation paramétrique sous contraintes dans lequel l'un des paramètres est la durée d'exécution de la tâche.

**Mots clés :** exploitation optimale, planification de trajectoires, optimisation, profils aléatoire.

---

**Abstract**

This work aims to solve the problem of optimal exploitation of a parallel robot in three degree of freedom, and we present a new method of point to point movement planning but before we should compute the dynamic model to find the couples.

The proposed approach is the Random-Profile Approach (RPA). This versatile approach is based on the transformation of the original problem into a constrained parametric optimization in which one of the parameters is the execution time of the task.

**Key words :** optimal exploitation, trajectory planning, optimization, random profile.

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Etat de l'art et Formulations mathématiques</b> .....	3
<b>1.1 Introduction</b> .....	3
<b>1.2 Historique</b> .....	3
<b>1.3 Quelques définitions de base</b> .....	5
1.3.1 La structure mécanique articulée (SMA) .....	5
1.3.2 Un mécanisme .....	5
1.3.3 Une chaîne cinématique .....	5
1.3.4 Un manipulateur .....	5
1.3.5 Degrés de liberté .....	5
1.3.6 Jambe .....	6
1.3.7 Mécanisme plan .....	6
1.3.8 Articulation.....	6
<b>1.4 Les différents robots parallèles</b> .....	6
1.4.1 Les robots plans .....	6
1.4.1.1 Robots plans à 2ddl.....	6
1.4.1.2 Robots plans à 3ddl.....	7
1.4.2 Les robots spatiaux.....	8
1.4.2.1 Robots à 3ddl.....	9
1.4.2.1.1 Robots translateurs.....	9
1.4.2.1.2 Robots pour rotation.....	11
1.4.2.2 Robots à six ddl.....	12
1.4.2.3 Robots à plus de 6ddl.....	14
<b>1.5 Avantages respectifs robot sériel/robot parallèle</b> .....	15
<b>1.6 Tendances et perspectives de la recherche en robotique parallèle</b> .....	16
1.6.1 Optimisation de la conception des robots parallèles à très haute précision.....	16
1.6.2 Conception de robots reconfigurables.....	16
<b>1.7 Formulation mathématique du problème</b> .....	17
1.7.1 Critère de performance.....	17
1.7.2 Contraintes.....	18
1.7.2.1 Contraintes liées au manipulateur mobile.....	18
1.7.2.2 Contraintes liées à la tâche.....	18
1.7.2.3 Contraintes liées à l'environnement.....	18
<b>1.8 Conclusion</b> .....	19

<b>Chapitre 2 : Modélisation Dynamique</b> .....	20
<b>2.1 Introduction</b> .....	20
<b>2.2 Génération de mouvements</b> .....	21
2.2.1 Génération de mouvement dans l'espace articulaire.....	21
2.2.2 Génération de mouvement dans l'espace opérationnel.....	21
2.2.3 Génération de mouvement entre deux points de l'espace articulaire.....	21
2.2.3.1 Interpolation polynomiale.....	22
<b>2.3 Modélisation des systèmes multi-corps</b> .....	27
2.3.1 Systèmes multi corps à chaîne arborescente.....	27
2.3.2 Systèmes multi corps à chaîne fermée .....	28
<b>2.4 Formalisme de Lagrange</b> .....	35
2.4.1 Application au robot parallèle à 3 ddl.....	36
<b>2.5 Résultats</b> .....	44
<b>2.6 validation des résultats avec Solid-dynamics</b> .....	49
<b>2.7 Conclusion</b> .....	55

<b>Chapitre 3 : Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire</b> .....	56
<b>3.1 Introduction</b> .....	56
<b>3.2 Les méthodes couramment utilisées pour résoudre ce genre de   problèmes</b> .....	57
3.2.1 Le principe du maximum de Pontriaguine.....	57
3.2.2 Méthode de plan de phase.....	57
3.2.3 L'approximation polynomiale.....	58
<b>3.3 Approche des profils aléatoires de trajectoire (RPA)</b> .....	59
3.3.1 Idée directrice.....	60
3.3.2 Trajectoire : forme et temps de transfert.....	60
3.3.3 Les contraintes.....	62
3.3.3.1 Contraintes sur les débattements .....	63
3.3.3.2 Les contraintes cinématiques.....	63
3.3.3.3 Contraintes sur les couples moteurs .....	64
3.3.3.4 Contraintes dues à la présence des obstacles dans l'espace de travail.....	64
<b>3.4 Caractéristiques et insuffisances de RPA</b> .....	64
<b>3.5 Principe de l'approche RPA</b> .....	66
3.5.1 Reformulation des équations.....	66
3.5.2 Traitement des contraintes du problème.....	68
3.5.3 Critères de performance à temps minimal.....	71
<b>3.6 Technique d'optimisation</b> .....	73
<b>3.7 Stratégie globale et application de RPA</b> .....	75
<b>3.8 Conclusion</b> .....	78

<b>Conclusion Générale.....</b>	<b>79</b>
<b>Bibliographie</b>	

## LISTE DES FIGURES

---

<b>Figure 1.1</b> : Schéma provenant du brevet de Pollard.....	3
<b>Figure 1.2</b> : Photo d'origine de la plate-forme de Gough .....	4
<b>Figure 1.3</b> : Robots plans à 2 ddl.....	7
<b>Figure 1.4</b> : Exemples de robots plans à 3 ddl le 3-RPR et le 3-RRR.....	8
<b>Figure 1.5</b> : Manipulateur de Lee .....	9
<b>Figure 1.6</b> : <i>Le robot delta</i> .....	10
<b>Figure 1.7</b> : Le 3-UPU.....	10
<b>Figure 1.8</b> : <i>Le RAF</i> .....	11
<b>Figure 1.9</b> : poignet de Hayward.....	11
<b>Figure 1.10</b> : <i>Poignet de Gosselin</i> .....	12
<b>Figure 1.11</b> : <i>Plateforme de Stewart</i> .....	13
<b>Figure 1.12</b> : <i>Plateforme 6-3</i> .....	13
<b>Figure 1.13</b> : <i>Le robot 2 delta</i> .....	14
<b>Figure 1.14</b> : <i>Le Logabex</i> .....	14
<b>Figure 1.15</b> : <i>Un robot sériel et un robot parallèle</i> .....	15
<b>Figure 2.1</b> : <i>Interpolation linéaire sur une articulation <math>A_j</math> donnée</i> .....	23
<b>Figure 2.2</b> : Loi polynômiale de degré trois.....	24
<b>Figure 2.3</b> : <i>Loi polynômiale de degré cinq</i> .....	25
<b>Figure 2.4</b> : Les deux branches d'une boucle fermée .....	31
<b>Figure 2.5</b> : schéma d'un robot parallèle à 3ddl .....	36
<b>Figure 3-1.a)</b> :Trajectoires articulaires de même forme.....	61
<b>Figure 3.1-b)</b> : Forme normalisée de la trajectoire .....	61
<b>Figure 3-2</b> : Schéma du meilleur temps de transfert pour une forme donnée $Q(\xi)$ .....	71
<b>Figure 3-3</b> : Critère de performance avec durée de transfert minimale.....	72
<b>Figure 3-4</b> : Organigramme général de l'approche SCA.....	76

<b>Figure 3.5</b> : forme optimisé de $q(\xi)$ trouvé par RPA .....	77
<b>Figure 3-6</b> : Allure du mouvement optimale trouvée par RPA.....	77
<b>Figure 3-7</b> : Allure du mouvement optimale trouvée par Chen.....	77

## LISTE DES PHOTOS

---

<b>Photo 2.1</b> : Le robot parallèle réalisé sous solid-dynamics.....	49
<b>Photo 2.2</b> :Graphe des positions des angles $\theta_1, \theta_3, \theta_5$ .....	50
<b>Photo2.3</b> : Graphe de position de $\theta_4$ .....	51
<b>Photo2.4</b> : Graphe de position de $\theta_2$ .....	51
<b>Photo2.5</b> : Graphe des vitesses angulaires $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_5$ .....	52
<b>Photo2.8</b> : Graphe des accélérations $\ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_4$ .....	53
<b>Photo2.9</b> : Graphe des couples $\Gamma_1, \Gamma_3$ .....	54
<b>Photo2.10</b> : Graphe de couple $\Gamma_5$ .....	55

## LISTE DES TABLES

---

<b>Table 1.1</b> : Structures possibles des jambes d'un robot plan à 3 ddl .....	8
<b>Table 2.1</b> : avantage et inconvénients de la génération de mouvement dans EA .....	21
<b>Table 2.2</b> : avantage et inconvénients de la génération de mouvement dans EO.....	21

---

# **INTRODUCTION GENERALE**

---

# Introduction générale

---

Les robots sont des machines capables d'exécuter de multiples tâches et de manipuler différents objets avec une précision optimale. Ils sont désormais exploités dans plusieurs domaines. Dans le domaine de la santé, le robot est devenu un assistant aux diagnostics et aux gestes chirurgicaux. Dans le domaine de l'industrie, il est capable de mouvoir des pièces et d'exécuter des tâches hostiles à l'homme.

Toutefois, plusieurs critères de sélection d'un robot s'imposent afin que la capacité de travail soit pleinement utilisée. En effet, un robot idéal est un mécanisme qui peut manœuvrer des objets sans contrainte de poids et qui peut les déplacer rapidement et avec précision. On trouve plusieurs types de robots : robots marcheurs, robots manipulateurs, etc.

Les robots manipulateurs auquel notre travail s'oriente sont de deux types : les robots parallèles et les robots sériels.

Les robots sériels ne sont pas appropriés pour certaines tâches qui nécessitent un effort considérable pour le déplacement des charges lourdes tout en ayant besoin d'une haute précision et d'une bonne répétabilité de positionnement. Ces contraintes ont limité l'utilisation de ces architectures classiques de type série pour la construction des robots manipulateurs, ce qui a conduit les chercheurs à s'intéresser à des structures alternatives capables d'effectuer des tâches de plus en plus complexes et variées demandant de meilleures performances, d'où vient l'idée des robots parallèles, qui peuvent être considérés comme une mise en coopération de plusieurs bras sériels.

Les manipulateurs parallèles typiques sont généralement constitués d'une plateforme fixe (base) reliée à une plate-forme mobile (nacelle) par l'intermédiaire de segments. Ces manipulateurs paraient être les plus adaptés à des tâches demandant de hautes performances telles que la rapidité et la précision qui peuvent être assurées par ces structures qui procurent un bon rapport charge utile/masse du robot du fait que la charge est distribuée sur les segments parallèles.

Tout en étant plus rapide et plus répétable, cela permet d'envisager des applications diverses : Usinage à Grande Vitesse, transporteurs de charges lourdes, simulateurs de vol, etc. Cependant, les robots parallèles sont des structures articulées complexes souvent difficiles à modéliser. Une classe spéciale de robot à architecture parallèle qui est caractérisée par l'addition de quelques contraintes gagne réellement une grande attention. Ces contraintes sont dues à l'addition de quelques segments passifs et/ou joints passifs dans l'architecture parallèle classique de robot. Dans ce type des robots parallèles, le nombre de solutions est limité par

# Introduction générale

---

rapport aux robots parallèles non contraints pour lesquelles les solutions peuvent être nombreuses, réduisant ensuite la difficulté pour déterminer la solution du modèle géométrique.

Les efforts consacrés à l'amélioration des performances de ces robots sont canalisés dans deux grandes voies, distinctes mais complémentaires. La première vise à optimiser la conception. La deuxième voie, dans laquelle s'inscrit notre travail, vise à exploiter de façon optimale les capacités déjà disponibles de ces robots lors de l'exécution d'une tâche prescrite. L'objectif principal dans ce cas est de déterminer la meilleure trajectoire. Pour un robot parallèle à 3ddl auquel nous nous intéressons, on va étudier, selon une approche donnée, l'exécution d'une tâche (trajectoire) assignée tout en assurant le bon fonctionnement de l'ensemble du système.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré, d'une part, à l'état de l'art et, d'autre part, à la formulation mathématique du problème de planification de trajectoires.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la modélisation dynamique en utilisant le formalisme de Lagrange pour déterminer les couples.

Le troisième chapitre est consacré pour la résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire (Random Profile Approach « RPA »).

---

# CHAPITRE 1

---

---

# ETAT DE L'ART ET FORMULATIONS MATHEMATIQUES

---

## 1.1 INTRODUCTION

Dans ce premier chapitre nous commençons par rappeler un bref historique des robots à structure parallèle avant de présenter quelques définitions de base pour faciliter la compréhension de ce projet. Ensuite nous présentons les robots parallèles à différents degrés de libertés, après on fait une petite comparaison entre les robots parallèles et sériels, on s'intéresse aussi à la planification de trajectoire des robots parallèles, ensuite on présente les tendances actuelles de la recherche dans le domaine de la robotique parallèle, nous terminerons ce chapitre par des formulations mathématiques de notre problème.

## 1.2 HISTORIQUE

Un ingénieur en automobile nommé Pollard fut réellement le précurseur de la robotique parallèle en déposant son brevet de mécanisme pour peindre automatiquement les carrosseries de voitures en 1938. Il ne put compléter son idée parce qu'il n'avait pas de moyens électroniques et informatiques adéquats pour le commander. On peut même dire que c'est la première idée de robot industriel. Il a mis au point une structure à trois chaînes cinématiques que l'on nomme maintenant Tripodes. Son principe assurait les mobilités d'orientations en ajoutant un poignet à trois degrés de liberté en série avec la structure parallèle. Son idée préfigure bien ce que vont faire la plupart des concepteurs de robots classiques : trois degrés de liberté pour localiser l'extrémité du robot et trois autres distincts pour l'orienter.

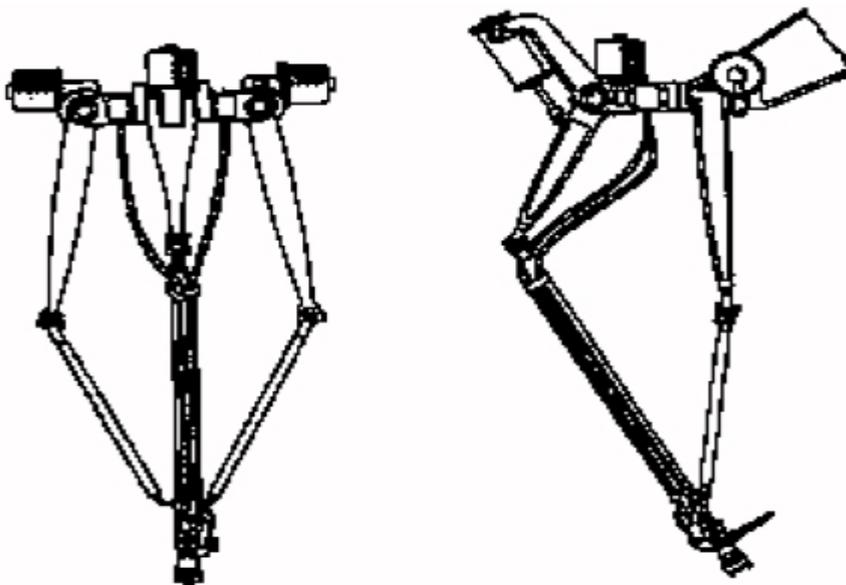


Figure 1.1. Schéma provenant du brevet de Pollard

## Chapitre 1 :Etat de l'art et formulations mathématiques

---

A la fin des années cinquante, Gough, [Gou 57] un ingénieur mécanicien en aéronautique proposa et réalisa, le premier, un mécanisme a structure parallèle pour tester les pneus des avions à l'aide d'une plate-forme mobile. Il est le premier à avoir mis au point une structure à six chaînes cinématiques que l'on nomme maintenant Hexapode.

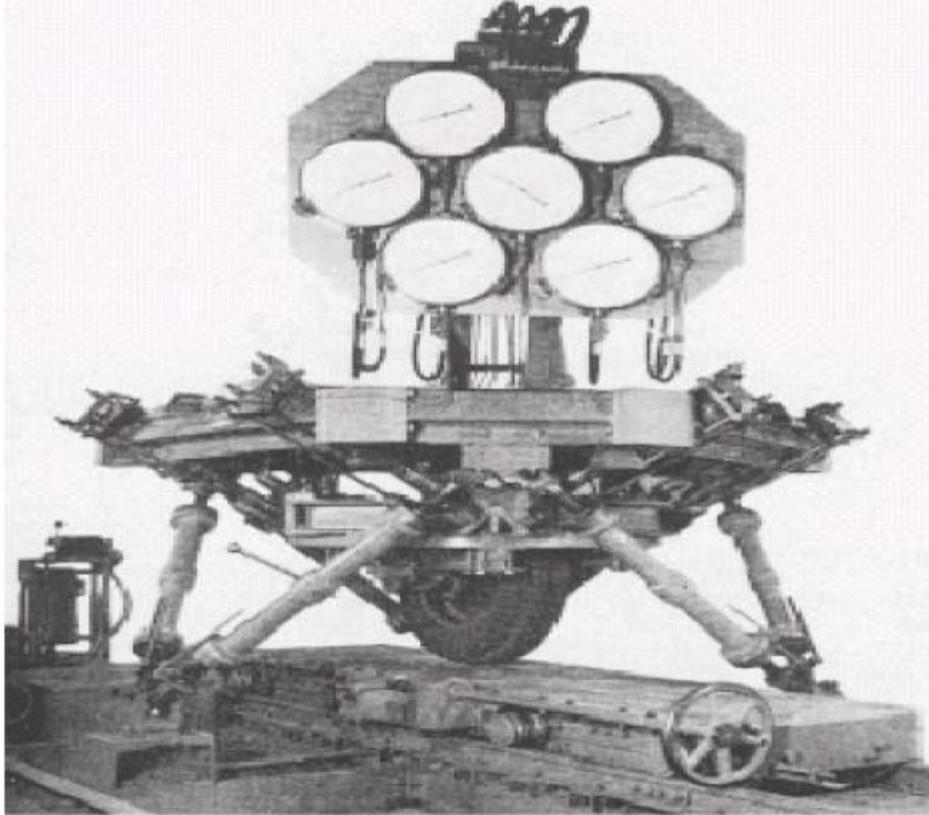


Figure 1.2. Photo d'origine de la plate-forme de Gough

On prête à Stewart d'avoir adapté la plate-forme de Gough au domaine des simulateurs de vols en proposant une structure parallèle commandée comme base mobile.

Dans les deux dernières décennies, il y a eu des développements très intéressants dans le domaine des mécanismes parallèles parce qu'ils peuvent être employés en tant que robots industriels [Cle 93], simulateurs, capteurs de force et de couple, micromanipulateurs, et les machines-outils parallèles. Pierrot et Company ont présenté une nouvelle famille des robots parallèles avec 4 ddl, qui sont trois translations et une rotation. Kim et autres ont proposé un mécanisme parallèle à 6ddl appelé Eclipse-II, qui a l'avantage de permettre une rotation de 360 degrés de la plate-forme mobile.

Joshi a étudié une structure parallèle à trois degrés de liberté et quatre barres. Kim [Kim 03], Karricato, Stock et Callergari ont développé la cinématique d'un manipulateur parallèle à 3 d.d.l en translation pure.

## 1.3.QUELQUES DEFINITION DE BASE

Avant de présenter quelques références importantes relatives aux robots parallèles à trois degrés de liberté, nous allons rappeler quelques définitions de base que nous allons trouver dans ce projet pour faciliter la compréhension.

### 1.3.1 La structure mécanique articulée (SMA) :

Un robot manipulateur est constitué généralement par deux sous ensembles distincts un organe terminal qui est le dispositif destiné à manipuler des objets, et une structure mécanique articulée (SMA), constituée d'un ensemble de solides reliés entre eux, généralement les uns à la suite des autres où chaque solide est mobile par rapport au précédent. Cette mobilité s'exprime en terme de degrés de liberté.

**1.3.2.Un mécanisme** : est un assemblage de pièces conçu afin de convertir des mouvements et/ou des efforts.

**1.3.3.Une chaîne cinématique** : est un ensemble de pièces liées par des liaisons mécaniques. On appelle chaîne cinématique simple toute chaîne cinématique où chaque pièce a une ou deux liaisons seulement. On appelle chaîne cinématique complexe toute chaîne cinématique contenant une pièce (ou plusieurs pièces) ayant trois liaisons ou plus.

**1.3.4.Un manipulateur** : est un robot utilisé pour la manipulation. Dans la littérature, les robots sériels et les robots parallèles sont considérés comme étant des robots manipulateurs par opposition aux robots mobiles. On note aussi qu'il existe des robots manipulateurs mobiles.

**1.3.5.Degrés de liberté** : On appelle degrés de liberté d'un système mécanique (qu'on note ddl) les mouvements indépendants qui restent possibles. Le ddl d'une liaison mécanique entre deux pièces correspond au nombre de translations et de rotations indépendantes entre ces deux pièces. Ainsi une liaison pivot et une liaison glissière ont chacune un seul ddl, alors qu'une liaison pivot glissant a deux ddl et une liaison rotule en a trois.

# Chapitre 1 :Etat de l'art et formulations mathématiques

---

**1.3.6.Jambe :** Dans un robot parallèle, on appelle jambe, une chaîne cinématique indépendante reliant l'organe terminal à la base fixe.

**1.3.7.mécanisme plan :** un mécanisme ayant des mouvements plans. Les mouvements plans sont des mouvements qui s'effectuent dans un plan, ils se décomposent en deux translations d'axes parallèles au plan et en une rotation d'axe perpendiculaire au plan.( Un mécanisme qui n'est pas plan est dit spatial).

**1.3.8.Articulation :** Les chaînes cinématiques ouvertes sont habituellement décrites par l'ordre d'apparition de leurs joints qui sont aussi appelés des articulations, notées de la façon suivante :

- **P** : Prismatique
- **R** : Rotoïde
- **S** : Sphérique
- **H** : Vis ou glissière hélicoïdale
- **Pa** : articulation de type parallélogramme

## 1.4 LES DIFFERENTS ROBOTS PARALLELES

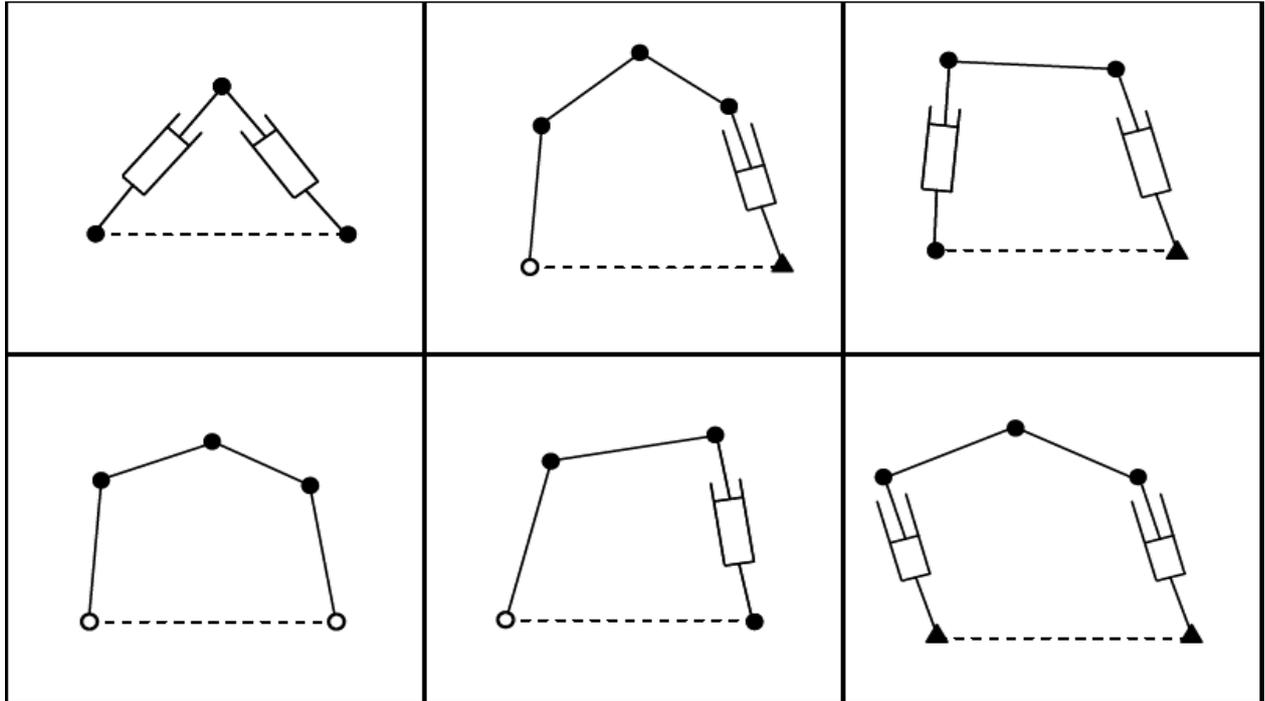
Dans cette étude, nous présentons quelques types de robots parallèles intéressants, Nous distinguons deux catégories de robots parallèles : les robots plans et les robots spatiaux. Puis, dans ces deux catégories nous classons les robots parallèles selon leur nombre de ddl.

Nous remarquons que dans le cas des robots pleinement parallèles, le nombre de ddl ne peut excéder trois pour les robots plans et ne peut excéder six pour les robots spatiaux.

**1.4.1.Les robots plans :** on considère que le cas des robots plans pleinement parallèles qui sont soit à deux ddl soit à trois ddl.

### 1.4.1.1.Robots plans à 2ddl :

Dans le cas où l'on ne considère que les robots constitués d'articulations de types rotoïdes et prismatiques, McCloy a démontré qu'il pouvait y avoir vingt architectures différentes. Ce nombre se réduit à six si l'on suppose que les actionneurs sont attachés au sol, qu'il n'y a pas d'articulation prismatique passive et qu'aucun actionneur ne supporte le poids d'un autre actionneur. Ces architectures sont montrées sur la figure 1.3. Les articulations rotoïdes actives sont représentées par des cercles blancs à l'intérieur tandis que les articulations rotoïdes passives sont représentées par des cercles noirs pleins.



*Figure 1.3. Robots plans à 2 ddl*

### 1.4.1.2. Robots plans à 3 ddl :

Hayes et Husty ont étudié les plateformes généralisées planes à trois chaînes, ces robots sont composés d'une plateforme mobile reliée par trois chaînes cinématiques. Chaque chaîne contient trois articulations qui peuvent être, soit de type rotoïde (R), soit de type prismatique (P). Ainsi, les types de chaînes possibles sont les séquences suivantes : RRR, RPR, RRP, RPP, PRR, PPR, PRP. Les chaînes de type PPP sont à exclure puisqu'elles imposent une orientation particulière à la plateforme mobile. En d'autres termes, aucune combinaison de translations dans le plan ne permet d'avoir un changement de l'orientation.

Il y a alors sept types de chaînes utilisés. Dans chaque chaîne il n'y a qu'une seule liaison actionnée. Le tableau 1.1 montre les 18 chaînes possibles. Les liaisons actionnées sont soulignées. Les chaînes passives sont de type RR, PR, RP, ou bien PP. Les chaînes passives de type PP sont à rejeter, puisqu'une plateforme ayant une chaîne pareille soit n'est pas contrôlable, soit elle est difficilement assemblable quand les liaisons actives sont spécifiées. Parmi ces 18 chaînes, il y a 8 paires de chaînes symétriques. Ce qui amène certains auteurs à enlever les chaînes marquées dans le tableau 1, lors de l'étude des différentes architectures possibles. Ceci rend le nombre de chaînes à étudier égal à 10. Si on considère que le sens de montage des chaînes entre la base et l'organe terminal est important nous considérons les 18

## Chapitre 1 :Etat de l'art et formulations mathématiques

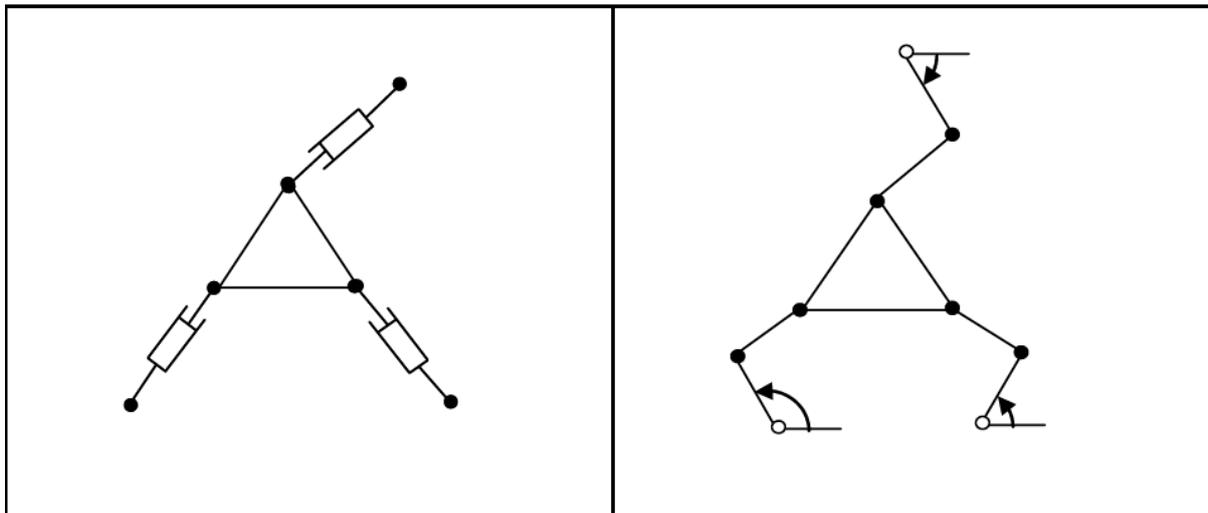
chaînes pour calculer le nombre total de plateformes possibles. Ce nombre correspond à la somme du cas où toutes les chaînes sont identiques plus le cas où il y a deux chaînes identiques plus le cas où il y a trois chaînes différentes :

$$c_{18}^1 + 2 \cdot c_{18}^2 + c_{18}^3 = 1140$$

Chaîne passive RR	Chaîne passive PR	Chaîne passive RP
<u>RRR</u>	<u>RPR</u>	<u>RRP</u>
<u>RRR</u>	<u>PRR</u>	<u>RRP</u> <sup>~</sup>
<u>RRR</u> <sup>~</sup>	<u>PRR</u> <sup>~</sup>	<u>RPR</u> <sup>~</sup>
<u>PRR</u>	<u>PPR</u>	<u>PRP</u>
<u>RPR</u>	<u>PPR</u> <sup>~</sup>	<u>RPP</u>
<u>RRP</u> <sup>~</sup>	<u>PRP</u> <sup>~</sup>	<u>RPP</u> <sup>~</sup>

Table 1.1. Structures possibles des jambes d'un robot plan à 3 ddl

On montre dans la figure 1.4, deux exemples de robots plans à trois ddl ayant trois chaînes identiques.



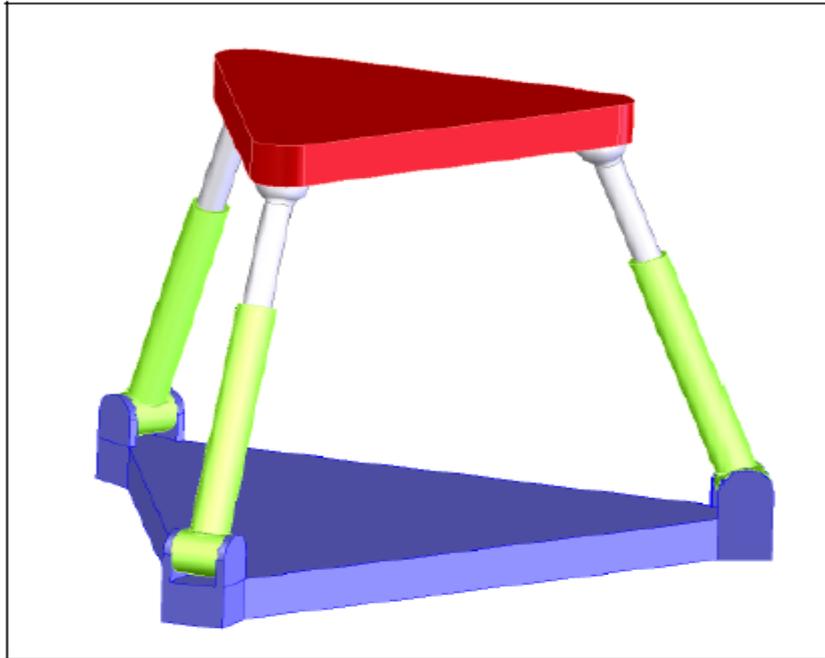
*Figure 1.4. Exemples de robots plans à 3 ddl le 3-RPR et le 3-RRR*

### 1.4.2. Les robots spatiaux :

Les robots à mouvements spatiaux se décomposent principalement en robots à trois ddl et en robots à six ddl. Il existe évidemment des robots à quatre ddl et des robots à cinq ddl. Ici l'objectif étant de montrer les robots parallèles les plus pertinents. Il existe aussi des robots à mouvements spatiaux qui ont plus de 6 ddl.

## 1.4.2.1 Robots à 3 ddl :

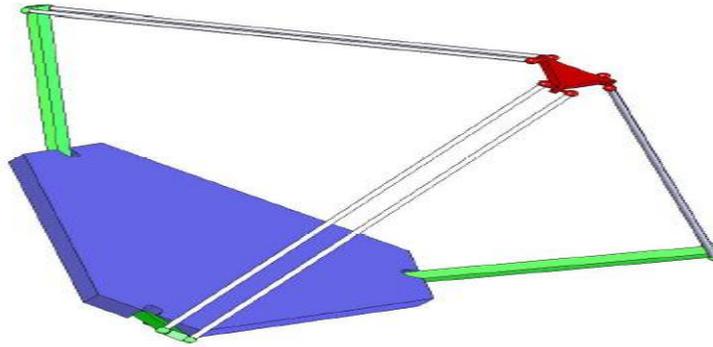
Les robots parallèles à trois ddl se décomposent principalement en robots translateur et en robots pour la rotation. Il existe aussi des robots qui présentent à la fois des rotations et des translations comme c'est le cas du manipulateur de Lee par exemple (voir figure I.5). Ce manipulateur permet une translation sur l'axe vertical et deux rotations : une de roulis et une de tangage.



*Figure I.5. Manipulateur de Lee*

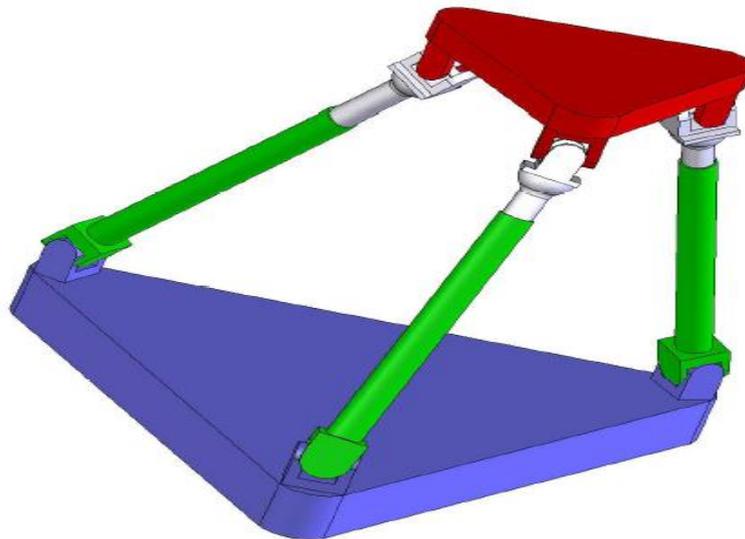
### 1.4.2.1.1. Robots translateurs :

Ce sont des robots ayant trois ddl de translation. Ils présentent un intérêt important pour les opérations de transfert. Ces robots sont largement utilisés dans les applications de conditionnement dans la mesure où dans ces applications, les trois translations sont suffisantes. Un mouvement de rotation selon l'axe z est souvent rajouté à l'organe terminal. Le robot delta (figure 1.6) a été proposé par Clavel [Cla 88]. Ce robot utilise des actionneurs rotatifs. Il est basé sur une propriété intéressante des parallélogrammes pour ne garder que des translations de la plateforme mobile.



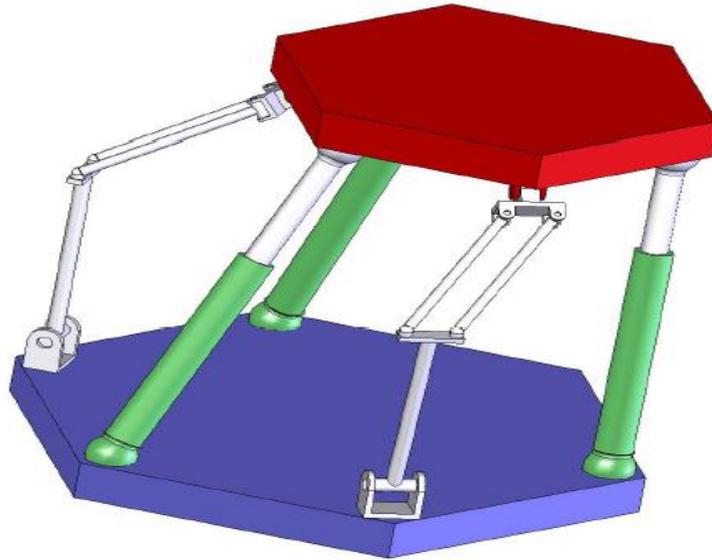
*Figure 1.6. Le robot delta*

Le robot 3UPU (figure 1.7) est constitué de trois chaînes composées de deux joints de cardans reliés par un actionneur prismatique. Un choix judicieux des axes des joints de cardan peut empêcher la rotation de la plateforme mobile.



*Figure 1.7. Le 3-UPU*

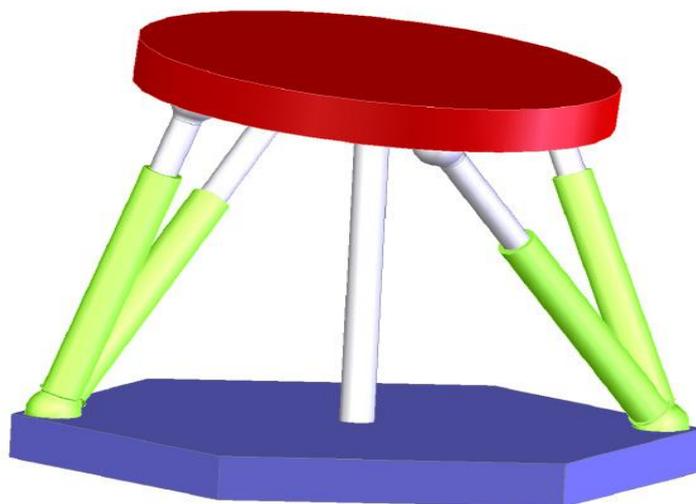
Romdhane a proposé un translateur RAF (voir figure 1.8). Ce translateur comporte trois jambes SPS et deux chaînes passives qui éliminent les rotations. Une jambe SPS est composée de deux liaisons sphériques reliées par un actionneur prismatique.



*Figure 1.8. Le RAF*

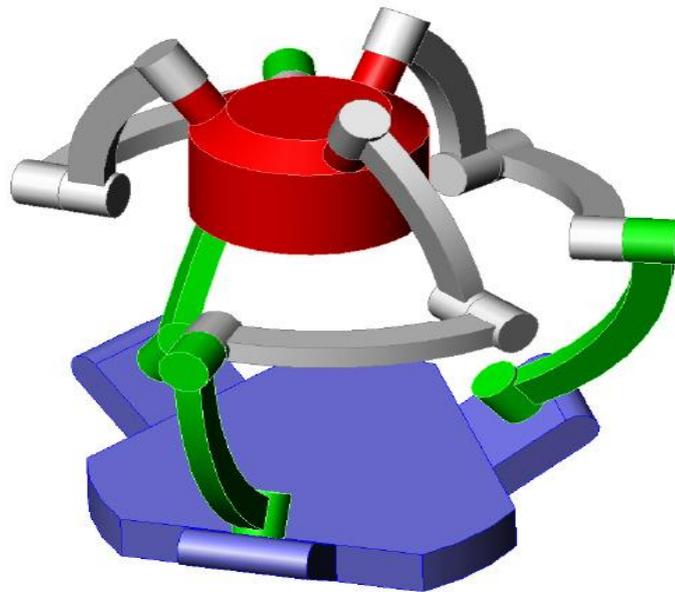
### **1.4.2.1.2.Robots pour rotation :**

Ces manipulateurs sont une alternative intéressante aux poignets utilisés dans les robots sériels, ils permettent les trois rotations autour d'un point. La figure 1.9 montre le poignet de Hayward . Ce robot se compose de 4 actionneurs prismatiques qui permettent d'orienter un plateau monté sur rotule.



*Figure 1.9. Le poignet de Hayward*

Le poignet sphérique de Gosselin est montré dans la figure10. Ce poignet comporte trois chaînes à actionneurs rotatifs dont les axes sont concourants au centre du plateau mobile.

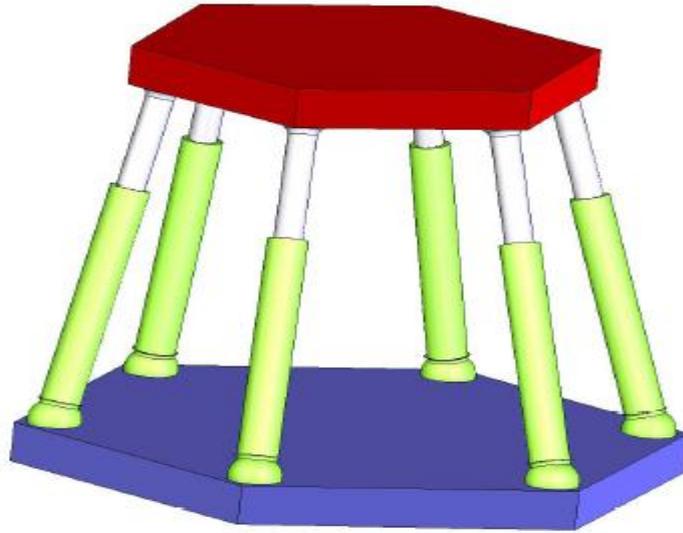


*Figure I.10. Poignet de Gosselin*

### **1.4.2.2. Robots à six ddl :**

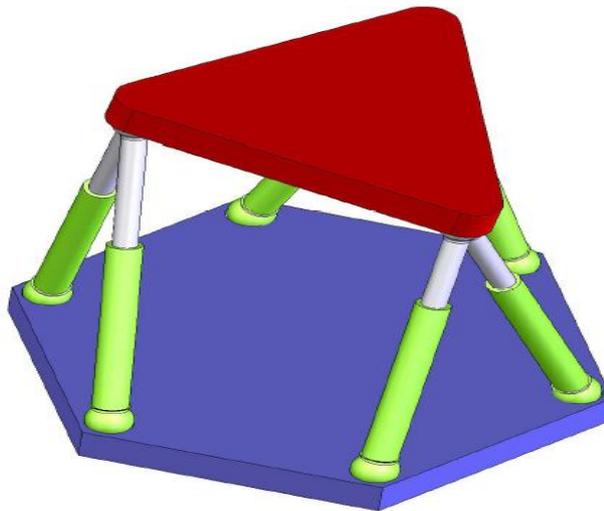
La plateforme de Stewart (figure I.11) permet de déplacer et d'orienter la plateforme mobile à l'aide de six vérins. Cette structure est très utilisée dans les simulateurs de vols et dans les cinémas dynamiques. Les avantages de cette structure sont les bonnes propriétés dynamiques et les inconvénients sont les positions singulières fréquentes et l'espace de travail réduit.

Dans la littérature, ce qui est communément appelé plateforme de Stewart avait été proposé en réalité par Gough en 1956 [Gou 56] afin de tester les pneus. Stewart a proposé une autre architecture en 1965 pour un simulateur de vol et cela sans mentionner la plateforme de Gough. Un des correcteurs de l'article de Stewart a fait remarquer la ressemblance typologique avec la plateforme de Gough et depuis, paradoxalement la plateforme de Gough est devenue populaire sous le nom de plateforme de Stewart.



*Figure 1.11. Plateforme de Stewart*

Il existe beaucoup de variantes possibles de la plateforme de Stewart. La figure I.12 montre un cas particulier où les points d'attache sur la plateforme mobile sont confondus deux à deux. Ce robot est appelé la plateforme 6-3 car il y a six points d'attache sur la base et trois sur la plateforme mobile.



*Figure 1.12. Plateforme 6-3*

Gao et al. ont défini la plateforme de Stewart généralisée, comme étant deux pièces rigides liés par six contraintes de distances et/ou angulaire, entre des points, des liaisons et/ou des plans appartenant à la base et à la plateforme mobile respectivement. Ils ont montré qu'il y a 3850 formes possibles de plateforme de Stewart généralisée. Ils donnent une borne supérieure au nombre de solutions du modèle géométrique direct de toutes les plateformes de Stewart généralisés.

Lallemand a proposé un robot à 6 ddl composé de deux robots delta (figure I.13). Un premier robot delta permet le positionnement, le deuxième permet l'orientation de l'organe terminal. Ce robot est intéressant dans la mesure où il permet de découpler la position et l'orientation.

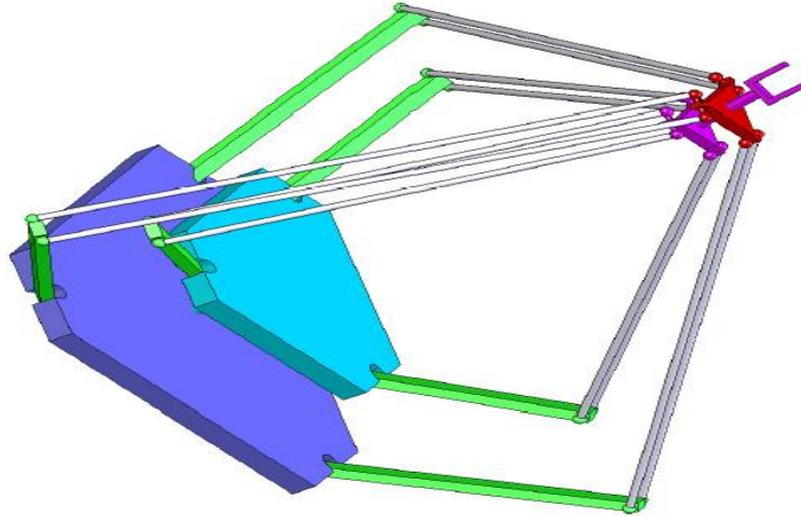


Figure I.13. Le robot 2 delta

### 1.4.2.3 Robots à plus de 6 ddl :

Parmi les robots parallèles ayants plus de six ddl, nous nous intéressons au Logabex .Ce robot est composé de 4 plateformes de Stewart (voir figure I.14). Le Logabex dispose de 24 ddl, il est utilisé pour les interventions dans les sites nucléaires.

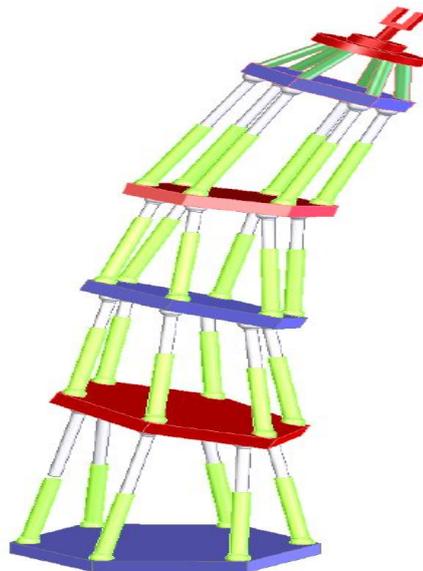


Figure I.14. Le Logabex

### 1.5.AVANTAGES RESPECTIFS ROBOT SERIEL/ROBOT PARALLELE

Les robots paralleles sont caracterises par des chaines cinematiques fermees, ce qui permet une repartition des charges entre les diferents actionneurs et rend ce type de mecanisme rigide et capable d'effectuer des mouvements a grande vitesse.

En revanche, dans le cas des robots seriels, la chaine cinematique est assez longue, chaque moteur doit supporter tous les elements en aval. Cela diminue la rigidite et peut engendrer la fatigue des articulations .

Un autre avantage des robots paralleles est leur meilleure repetabilite qui ne se presente pas dans le cas seriel etant donne que la succession des elements cinematiques accumule les erreurs et limite la repetabilite du systeme.

Malgre ces avantages, il s'avere que le volume de travail d'un robot parallele est restreint. De plus, du fait de la fermeture des chaines cinematiques, un mouvement d'une jambe entraine le mouvement des autres. Par consequent, un fort couplage existe entre les mouvements des chaines cinematiques. Dans ces conditions, la tache la plus difficile est la coordination avec precision des differentes chaines cinematiques en une unique configuration desiree. Cela necessite des modeles complexes et une puissance de calcul importante pour la commande. Par contre, la succession des chaines cinematiques, dans le cas d'un robot seriel, lui offre un bon espace de travail.

L'architecture simple de ce robot simplifie son modele de commande et reduit la puissance de calcul requise.

Cependant, les recherches actuelles s'orientent vers l'exploitation des avantages des robots paralleles qui sont en plein essor dans le monde industriel. A cet egard,il est pertinent de trouver une methode d'identification et de commande specifiquea ces types de mecanismes.



Figure 1.15. Un robot sériel et un robot parallèle

### **1.6. TENDANCE ET PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE EN ROBOTIQUE PARALLELE**

La recherche contemporaine en robotique parallèle s'oriente vers l'optimisation de la conception des robots à très haute précision, le développement des robots contraints en menant des investigations pour la détermination des espaces de travail et des singularités, la conception de machines outils à structure parallèles et en fin la multi-configuration pour aboutir à l'auto-configuration.

#### **1.6.1. Optimisation de la conception des robots parallèles à très haute précision :**

Dans l'industrie de la haute précision, la plupart des opérations exigent l'intervention de robots pouvant fournir des mouvements très précis et hautement répétables. Or, pour garantir l'exactitude du mouvement c'est à dire avoir une précision absolue, il est indispensable de limiter, voire d'éliminer, les effets de différentes sources d'erreur qui provoquent l'imprécision de l'organe terminal du robot, souvent à l'aide d'un calibrage.

Cependant, un calibrage ne peut pas être appliqué pour compenser des erreurs parasites, erreurs suivant les degrés de liberté non souhaités, des robots comme, par exemple, les variations angulaires subies par l'organe terminal d'un robot à trois degrés de liberté en translation. Les principales orientations des travaux dans ce domaine de recherche est d'identifier et de classer ces différentes sources d'erreur selon leur importance et d'établir des règles de conception de robots parallèles à articulations flexibles afin d'assurer une précision absolue optimale par la limitation des erreurs parasites, ces robots seront destinés pour des application médicales .

#### **1.6.2. Conception de robots reconfigurables :**

Les robots reconfigurables sont des systèmes intelligents qui peuvent changer de façon autonome leur configuration pour s'adapter aux changements d'environnement et de tâche.

Les avantages de développer des systèmes reconfigurables incluent le comportement d'adaptabilité, de réutilisabilité, de convertibilité et de compacité . La recherche sur des systèmes reconfigurables est principalement en activité en robotique . L'idée principale de développer des systèmes reconfigurables est basée sur l'utilisation des composants modulaires comme modules . Dans le secteur de la robotique, plusieurs robots modulaires intéressants reconfigurables ont été proposés, et ils peuvent être classés dans deux catégories: self-configuration et manuelle-configuration.

Les robots à configuration manuelle sont en fait les robots modulaires. Ils peuvent seulement être reconfigurés avec une certaine forme d'aide manuelle. Les unités modulaires sont

habituellement établies avec les contrôleurs incorporés et l'ordinateur principal a les possibilités pour identifier rapidement la nouvelle configuration et pour produire automatiquement des équations cinématiques et dynamiques pour la commande. [CHE 07]

### 1.7 Formulation mathématique du problème :

Pour un manipulateur mobile peut être formulé sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes *Déterminer la trajectoire généralisée  $\mathbf{q}(t)$ , la durée  $T$  de cette trajectoire ainsi que les couples  $\Gamma(t)$  à appliquer aux actionneurs du système, de façon à minimiser un coût  $J$ , tout en respectant les contraintes imposées.*

Dans ce problème, le comportement dynamique du manipulateur mobile est décrit à tout instant  $t \in [0, T]$ .

#### 1.7.1 Critère de performance :

Le critère de performance représente un coût à minimiser lors de la réalisation de la tâche assignée. Ce coût est généralement défini par une expression incluant des paramètres liés au comportement dynamiques du robot, à l'efficacité et/ou au gain économique. Le critère le plus utilisé est celui qui correspond à une minimisation du temps d'exécution de la tâche. Il reflète exclusivement la rapidité d'exécution de la tâche.

Dans ce cas, la fonction coût  $J$  est donnée par la relation suivante :

$$J = \int_0^T dt$$

Cependant, ce critère ne prend pas en compte le comportement dynamique du robot manipulateur. Ceci conduit, en général, à des commandes optimales discontinues, de type bang-bang (couples saturés). En conséquence, la trajectoire ainsi engendrée peut être inadaptée au bon fonctionnement du système. Des critères plus appropriés doivent donc être définis pour quantifier les caractéristiques pertinentes de la trajectoire à engendrer.

Une façon de réaliser cet objectif est d'employer une formulation pondérée pour  $J$ . Par exemple, on peut adopter une pondération entre le temps de déplacement  $T$ , la moyenne quadratique des efforts des actionneurs et de la puissance consommée.

### 1.7.2 Contraintes :

Pour que la trajectoire planifiée soit réalisable, il est nécessaire que l'on tienne compte des contraintes imposées. Elles sont de diverses natures et elles peuvent être classées en trois catégories : les contraintes liées au manipulateur mobile, les contraintes liées à la tâche à réaliser et les contraintes liées à l'état de l'environnement dans lequel évolue le système. Ces contraintes se traduisent souvent par une restriction de l'espace de recherche des solutions.

#### 1.7.2.1 Contraintes liées au bras manipulateur :

un bras manipulateur en mouvement est soumis aux différentes contraintes suivantes : les contraintes liées aux débattements articulaires, les contraintes liées aux capacités cinématiques, les contraintes liées aux capacités dynamiques et la contrainte de stabilité dynamique. Une autre contrainte liée au robot concerne l'auto-collision. Elle sera incluse avec la contrainte d'évitement d'obstacles.

#### 1.7.2.2 Contraintes liées à la tâche :

Ces contraintes sont définies par les conditions aux limites en position et en vitesse et par les exigences liées à la tâche. En ce qui concerne les conditions aux limites en vitesse, elles sont les mêmes pour tous les types de tâches cités précédemment. Ces conditions sont exprimées par la relation suivante :

$$\dot{q}(t = 0) = 0 \text{ et } \dot{q}(t = T) = 0$$

Par contre, les autres contraintes varient selon la catégorie de la tâche à réaliser.

#### 1.7.2.3 Contraintes liées à l'environnement :

Les contraintes émanant de l'environnement concernent essentiellement la non collision du manipulateur mobile avec les obstacles fixes encombrant l'environnement de la tâche à réaliser. Ces contraintes prennent la forme générale suivante :

$$\forall t \in [0, T] \text{ col}(q(t)) = \text{faux}$$

où  $Col$  est une fonction booléenne qui indique si le bras manipulateur, à la configuration  $q(t)$ , est en collision avec l'un des obstacles présents dans son environnement. On peut inclure dans cette contrainte l'auto-collision du robot.

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dressé un état de l'art sur les mécanismes à architectures parallèles. Les différents thèmes abordés dans ce chapitre donnent une bonne idée des divers problèmes qui attendent le concepteur d'un robot parallèle, de haute précision et à dynamique élevée.

Cependant, ce qui n'apparaît pas, c'est le lien qui existe entre ces différentes problématiques. C'est ce que va mettre en évidence le chapitre suivant.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les robots parallèles et les notions qui s'y rapportent. Ces robots sont très diversifiés, nous avons rappelé qu'il existe 1140 architectures possibles de robots plans et dans le seul cas où on n'utilise que les articulations de type rotoïde ou de type prismatique. Nous avons rappelé aussi que dans le cas des robots spatiaux, il existe 3850 formes possibles de plateformes de Stewart généralisées. Toutes ces architectures ne sont pas évidentes à modéliser comme il n'existe pas de méthode systématique permettant de le faire. En plus de ces difficultés de modélisation, il existe des configurations singulières à éviter. Ces configurations singulières rendent la simulation des robots parallèles très compliquée. Il existe plusieurs méthodes permettant de détecter ces singularités. Parmi ces méthodes, il y a la méthode analytique qui se base sur l'analyse des matrices cinématiques. Cette analyse permet de classer les singularités en singularités parallèles, singularités sérielles et singularités parallèles/sérielles. La méthode analytique ne prend pas en considération les variables passives, vu que ces variables ont été éliminées du modèle cinématique étudié. Il a été démontré qu'il existe des singularités particulières qu'on peut détecter en prenant en compte les articulations passives.

Les méthodes de planification de trajectoire dans le cas général pour les robots parallèles, s'intéressent soit à l'évitement des singularités, soit à l'évitement des collisions conjointement. Les méthodes qui évitent les singularités et les collisions à la fois sont rares, ce qui va nous ramener à trouver une des meilleures méthodes dans le chapitre trois pour la résolution de notre problème.

---

## **CHAPITRE 2**

---

---

# **MODELISATION DYNAMIQUE DU SYSTEME**

---

### 2.1 INTRODUCTION

Un robot parallèle peut être considéré comme étant un Système Multi-Corps (SMC) à chaîne complexe. Pour simuler le comportement dynamique d'un tel système, il est nécessaire d'établir les modèles dynamiques qui seront utiles à la compréhension et à la résolution de ce problème. Les modèles développés dans ce chapitre sont basés sur des formalismes couramment utilisés en robotique.

Dans un poste de travail le robot est amené à réaliser trois grandes tâches. Des déplacements purs, des efforts purs en statiques et des tâches combinant des déplacements et des efforts. Lors du déplacement, nous attendons du manipulateur qu'il suive, avec une loi horaire donnée, une trajectoire définie par une suite de points, correspondant aux situations successives de l'organe terminal ou de configurations articulaires. Ces points peuvent être :

- Programmés par apprentissage.
- Donnés en ligne par un capteur extéroceptif.
- Issue d'une base de données d'un système de CAO...

Le problème de génération de mouvement est de calculer les consignes de référence en position, vitesse et accélération qui sont des fonctions du temps qui assurent le passage du robot par ces points.

Plusieurs classes de mouvements peuvent être distinguées :

- Mouvement entre deux points avec trajectoire libre entre les points
- Mouvements entre deux points avec points intermédiaires spécifiés en particulier pour éviter les obstacles, et trajectoire libre entre les points intermédiaires
- Mouvement entre deux points avec trajectoire contrainte entre les points ; par exemple trajectoire rectiligne
- Mouvement entre deux points avec points intermédiaires, et trajectoire contrainte entre points intermédiaires.

### 2.2 GENERATION DE MOUVEMENTS

#### 2.2.1 GENERATION DE MOUVEMENT DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"><li>• Elle nécessite moins de calcul en ligne car il n'y a pas d'appel au modèle géométrique direct et inverse</li><li>• Le mouvement peut être effectué sans passage par les configurations singulières</li><li>• Les contraintes de vitesse et de couples maximaux sont déduites directement des limites physiques des actionneurs</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• La géométrie de la trajectoire de l'organe terminal est imprévisible : risque de collisions lorsque le robot évolue dans un environnement très encombré</li></ul>

Table 2.1 avantage et inconvénients de la génération de mouvement dans EA

#### 2.2.2 GENERATION DE MOUVEMENT DANS L'ESPACE OPERATIONNEL

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"><li>• Maîtrise de la trajectoire</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Transformation de coordonnées de chaque point de la trajectoire</li><li>• Possibilité de mise en échec quand la trajectoire passe par un point singulier</li><li>• Possibilité de mise en échec si les points de la trajectoire ne sont pas dans le volume accessible du robot ou chaque fois que la trajectoire nécessite une reconfiguration du robot</li><li>• Les limites en vitesse et en couple du robot varient en fonction de la configuration. On impose en général ces limites en terme de performances moyennes valables quelle que soit la configuration. On travaille donc en deçà des capacités réelles du robot.</li></ul>

Table 2.2 avantage et inconvénients de la génération de mouvement dans EO

**Remarque :** le choix de l'espace de génération de mouvement dépend fortement de l'application considérée. Chacune des méthodes a ses propres limites, inhérentes au fait que les contraintes sont exprimées soit dans l'espace articulaire (butées, vitesse et couple maximum), soit dans l'espace opérationnel (précision, prise en compte des obstacles).

#### 2.2.3 GENERATION DE MOUVEMENT ENTRE DEUX POINTS DE L'ESPACE ARTICULAIRE

## Chapitre 02 : Modélisation Dynamique du système

On considère un robot à  $n$  degrés de liberté. Soit  $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(0)$  et  $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(t_f)$  les vecteurs de coordonnées articulaires correspondant aux configurations initiale et finale. On désigne respectivement par  $\mathbf{Kv}$  et  $\mathbf{Ka}$  les vecteurs des vitesses et accélérations maximales. Les paramètres  $Kv_j$  sont généralement calculés de façon exacte à partir des caractéristiques des actionneurs et des rapports de réduction des organes de transmissions. Tandis que les paramètres  $Ka_j$  sont approchés par le rapport des couples moteurs maximaux aux inerties maximales vues par les articulations.

Le mouvement, interpolé entre  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{q}_f$  ces en fonction du temps  $t$ , est décrit par l'équation suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_i + r(t) \cdot \mathbf{D} \quad t \in [0 \quad t_f] \quad (7.1)$$

Où

- $r(t)$  est une fonction d'interpolation qui satisfait  $r(0) = 0$  et  $r(t_f) = 1$
- $\mathbf{D} = \mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i$

Le temps minimum  $(t_f)_j$  pour une articulation  $A_j$  doit saturer la vitesse et/ou l'accélération de cette articulation. Le temps global minimal pour passer de la configuration  $\mathbf{q}_i$  à la configuration  $\mathbf{q}_f$  est le temps mis par l'articulation contraignante, articulation pour la quelle le temps minimal est le plus grand. On en déduit que :

$$t_f = \text{Max}(t_{f1}, t_{f2}, \dots, t_{fn}) \quad (7.2)$$

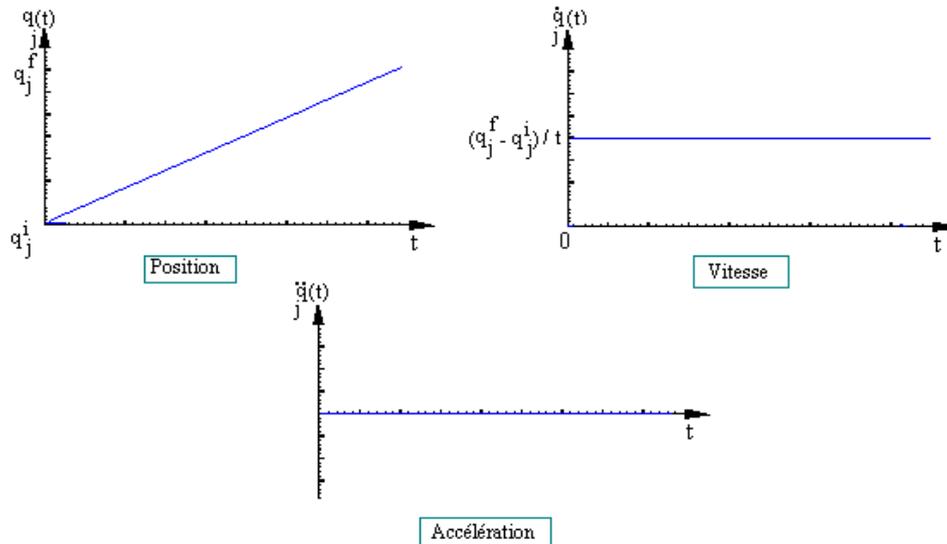
Plusieurs fonctions permettent de satisfaire le passage par  $\mathbf{q}_i$  à  $t = 0$  et par  $\mathbf{q}_f$  à  $t = t_f$ . Nous étudions successivement l'interpolation polynômiale, la loi Bang–Bang et la loi Bang–Bang avec palier de vitesse ou loi trapèze. Ce sont les méthodes d'interpolation les plus utilisées en robotiques.

### 2.2.3.1 Interpolation polynômiale

#### a) Interpolation linéaire

$$\text{On a : } \begin{cases} r(t) = \frac{t}{t_f} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_i + \frac{t}{t_f} \cdot \mathbf{D} \end{cases} \quad (7.3)$$

Le temps minimum  $t_f$  est égale :  $\text{Max}(|D_j|/Kv_j)$



**Figure 2. 1**

*Interpolation linéaire sur une articulation  $A_j$  donnée*

Cette loi est continue en position, par contre elle est discontinue en vitesse :  $\dot{\mathbf{q}}(0-) = \vec{0}$  et

$\dot{\mathbf{q}}(0+) = \frac{1}{t_f} \cdot \mathbf{D}$ . Elle provoque des à-coups sur le robot.

### b) Polynôme d'interpolation de degré trois

Si l'on impose une vitesse nulle aux points de départ et d'arrivée. Nous ajoutons deux contraintes aux contraintes de position. Le degré minimal du polynôme qui satisfait ces quatre contraintes est de degré trois et a pour forme générale :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot t + \mathbf{a}_2 \cdot t^2 + \mathbf{a}_3 \cdot t^3$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(0) = \vec{0} \\ \dot{\mathbf{q}}(t_f) = \vec{0} \end{cases}$$

La détermination des coefficients est obtenue par la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_0 = \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}(t_f) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot t_f + \mathbf{a}_2 \cdot t_f^2 + \mathbf{a}_3 \cdot t_f^3 \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{a}_1 = 0 \\ \dot{\mathbf{q}}(t_f) = \mathbf{a}_1 + 2 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot t_f + 3 \cdot \mathbf{a}_3 \cdot t_f^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_0 = \mathbf{q}_i \\ \mathbf{a}_1 = \vec{0} \\ \mathbf{a}_2 = \frac{3}{t_f^2} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{a}_3 = -\frac{2}{t_f^3} \cdot \mathbf{D} \end{cases}$$

Ce qui conduit à la fonction d'interpolation suivante :

## Chapitre 02 : Modélisation Dynamique du système

$$r(t) = 3 \left( \frac{t}{t_f} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 \quad (7.4)$$

Pour une articulation quelconque  $A_j$ , la vitesse est maximum lorsque  $t = t_f/2$ . Elle a pour valeur :

$$|\dot{q}_{j_{max}}| = \frac{3|D_j|}{2t_f}$$

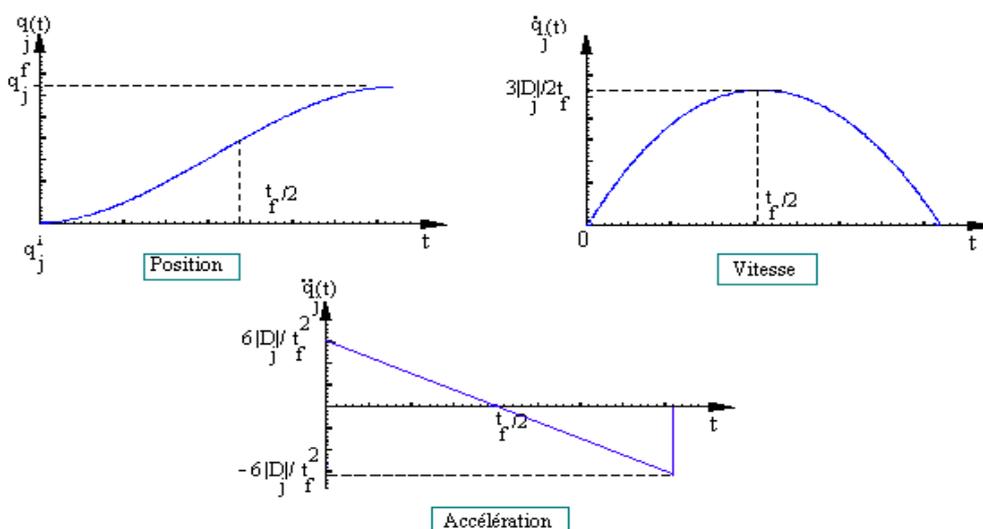
et l'accélération est maximale à  $t = 0$  et à  $t = t_f$  est égale à :

$$|\ddot{q}_{j_{max}}| = \frac{6|D_j|}{2t_f^2}$$

Le temps minimum  $t_f$  est donné par :  $t_f = \text{Max}(t_{f1}, \dots, t_{fn})$

$$\text{Avec: } t_{f_j} = \text{Max} \left[ \frac{3|D_j|}{2kv_j}, \sqrt{\frac{6|D_j|}{ka_j}} \right] \quad (7.5)$$

Cette loi de mouvement assure la continuité des vitesses mais pas celle des accélérations. En pratique, les robots industriels sont suffisamment rigides pour que cette discontinuité soit filtrée par la mécanique.



**Figure 2. 2**  
*Loi polynômiale de degré trois*

## Chapitre 02 : Modélisation Dynamique du système

### c) Polynôme de degré cinq

Nous avons vu que l'interpolation de degré trois assure la continuité en vitesse, si l'on recherche en plus la continuité des accélérations, il faut satisfaire six contraintes et le polynôme d'interpolation doit être de degré cinq. Et en plus nous choisissons :

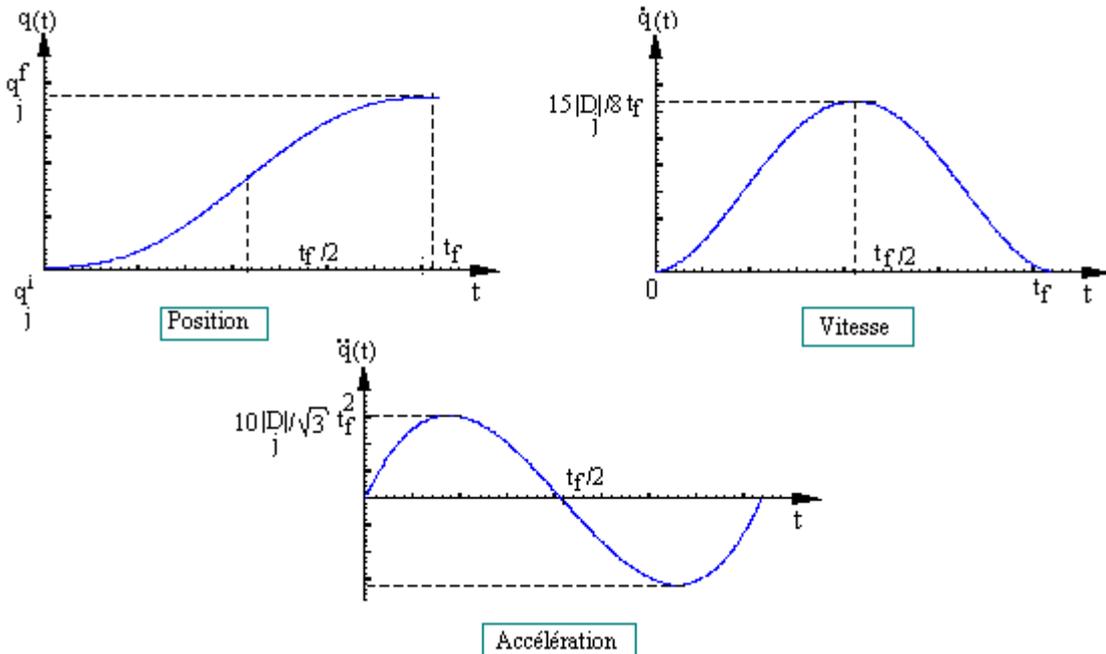
$$\begin{cases} q(0)=0 \\ q(t_f)=0 \end{cases}, \begin{cases} \dot{q}(0)=0 \\ \dot{q}(t_f)=0 \end{cases}, \begin{cases} \ddot{q}(0)=0 \\ \ddot{q}(t_f)=0 \end{cases}$$

Donc : 
$$r(t) = 10 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{t}{t_f}\right)^5$$

Les vitesses et accélérations maximales sont :  $|\dot{q}_j \max| = \frac{15|D_j|}{8t_f}$  ;  $|\ddot{q}_j \max| = \frac{10|D_j|}{\sqrt{3}t_f^2}$

Le temps minimum est donné par :  $t_f = \text{Max}(t_{f1}, \dots, t_{fn})$

Avec : 
$$t_{fj} = \text{Max} \left[ \frac{15 \cdot |D_j|}{8 \cdot kv_j}, \sqrt{\frac{10 \cdot |D_j|}{\sqrt{3} \cdot ka_j}} \right]$$



**Figure 2.3**  
*Loi polynomiale de degré cinq*

$$t_{fj} = \frac{kv_j}{ka_j} + \frac{|D_j|}{kv_j} = \tau_j + \frac{|D_j|}{kv_j} \quad (7.11)$$

Cette partie a permis de présenter les méthodes de génération de mouvement couramment utilisées en robotique. Différents modes d'interpolations ont été étudiés,. Pour chacun, on a donné l'expression de temps minimum, temps à partir duquel on peut réaliser la coordination articulaire.

### 2.3 Modélisation des systèmes multi-corps

Dans cette section, nous nous intéressons à la description géométrique et à la modélisation dynamique des SMC à chaîne arborescente ou fermée ayant une base fixe ou mobile. L'approche multi corps utilisée est constituée par les étapes suivantes: (i) la description géométrique du système, (ii) la génération des équations de contraintes (dans le cas d'un SMC à chaîne fermée), (iii) le traitement des équations de contraintes, (iv) la génération des équations du mouvement et (v) l'intégration de ces équations du mouvement pour la simulation du comportement dynamique du système. Les hypothèses simplificatrices de cette approche sont les suivantes :

- Les corps sont supposés parfaitement rigides,
- Les liaisons sont supposées sans jeu mécanique.

#### 2.3.1 Systèmes multi corps à chaîne arborescente

##### A) Description géométrique

Afin de modéliser les SMC à chaîne arborescente de façon systématique, il est nécessaire d'utiliser une méthode de description géométrique adéquate. La méthode la plus utilisée pour ce type de systèmes est celle établie par W. Khalil et J. Kleinfinger . Cette méthode, dite de Denavit et Hartenberg Modifiée (DHM), permet une description homogène, avec un nombre minimum de paramètres géométriques, des SMC à chaîne ouverte simple ou fermée.

Dans cette méthode, la configuration d'un SMC à chaîne arborescente est définie par le vecteur  $\mathbf{q}$ , de  $n$  coordonnées indépendantes, appelé vecteur des coordonnées généralisées du système.

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \quad (2.1)$$

La variable articulaire  $q_j$  associée à la  $j^{\text{ème}}$  articulation (notée  $A_j$ ) du système est définie par :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j \text{ avec } \bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$$

Où :

$\sigma_j = 0$  si l'articulation  $A_j$  est rotoïde.

$\sigma_j = 1$  si l'articulation  $A_j$  est prismatique.

### B) Modélisation dynamique

On appelle modèle dynamique, d'un SMC à chaîne arborescente, le système d'équations qui permet d'exprimer le vecteur des efforts généralisés (forces et/ou couples) appliqués au niveau des actionneurs en fonction des variables cinématiques généralisées du système et des efforts extérieurs appliqués par les organes terminaux sur l'environnement. On représente ce modèle par une relation de la forme :

$$\Gamma = F(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_{ext}) \quad (2.2)$$

Avec  $\Gamma$  : vecteur des efforts généralisés,

$f_{ext}$  : torseur des efforts extérieurs appliqués par les organes terminaux sur l'environnement

Plusieurs formalismes sont utilisés pour établir le modèle dynamique d'un SMC. Les plus souvent utilisés sont : le formalisme de Lagrange et celui de Newton-Euler. Le formalisme le plus adapté pour l'établissement du modèle dynamique dédié à l'analyse et la simulation des SMC est celui de Newton-Euler. Ceci pour les deux raisons suivantes : (1) ce formalisme est caractérisé, par rapport à celui de Lagrange, par un nombre d'opérations (additions et multiplications) relativement réduit, ce qui se traduit par un gain en temps de calcul, et (2) le calcul du torseur de tous les efforts appliqués sur le système, qui est nécessaire pour l'analyse de la structure du SMC.

### 2.3.2 Systèmes multi corps à chaîne fermée

#### A) Description géométrique

Un système multi-corps à chaîne fermée est constitué de  $n+1$  corps, la base étant le corps  $C_0$ , éventuellement de plusieurs organes terminaux et dispose de  $L$  articulations ( $L > n$ ). Le nombre de boucles fermées est donné par la relation :  $B = L - n$ . Parmi les  $L$  articulations,  $N$  seulement sont motorisées. On suppose que la structure est compatible avec les contraintes de fermeture des boucles, que le nombre de degrés de liberté du système est égal au nombre d'articulations motorisées  $N$  et que la connaissance des  $N$  variables articulaires correspondantes permet de déterminer la configuration du système, c'est-à-dire la situation de tous les corps du système. Pour distinguer entre les articulations motorisées et non motorisées, on introduit le paramètre  $\mu_j$  telle que :

- $\mu_j = 1$  si l'articulation  $A_j$  est motorisée (active),
- $\mu_j = 0$  si l'articulation  $A_j$  est non motorisée (passive).

## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

---

Pour déterminer les paramètres géométriques d'un tel système, on suit les trois étapes suivantes :

**Première étape :** on construit d'abord une structure arborescente équivalente comportant  $n$  articulations et  $n$  corps mobiles en coupant virtuellement chacune des boucles sur l'une de ses articulations (généralement passive). On place ensuite les repères sur les corps et on détermine les paramètres géométriques de la structure arborescente équivalente en appliquant les règles et les conventions de la méthode employée pour la description géométrique d'un SMC à chaîne arborescente.

**Deuxième étape :** on numérote les articulations coupées à partir de  $n+1$  jusqu'à  $L$ . Pour chaque articulation coupée  $A_k$ , on définit un repère  $\mathfrak{R}_k$  fixe par rapport à l'un des corps supportant cette articulation,  $C_j$  par exemple (Figure 2.6). On suppose que l'axe  $\mathbf{z}_k$  est porté par l'axe de l'articulation  $A_k$ , l'axe  $\mathbf{x}_k$  est porté par la perpendiculaire commune à  $\mathbf{z}_k$  et  $\mathbf{z}_j$  (Figure 2.6). À partir des quatre (ou six) paramètres usuels indicés  $k$ , on peut décrire la transformation entre les repères  $\mathfrak{R}_i$  et  $\mathfrak{R}_k$ ,  $i = a(k)$  désignant l'autre corps connecté à l'articulation  $A_k$ .

**Troisième étape :** le repère  $\mathfrak{R}_k$  étant fixe par rapport au corps  $C_j$ , on peut définir des paramètres géométriques constants exprimant la transformation entre  $\mathfrak{R}_j$  et  $\mathfrak{R}_k$ . Pour éviter toute confusion, cette transformation constante sera notée  ${}^j\mathbf{T}_{k+B}$ , avec  $j = a(k+B)$  et les paramètres de la transformation seront indicés  $k+B$  (pour  $k = n+1, \dots, L$ ). Ceci revient à dire que le repère  $\mathfrak{R}_{k+B}$  est confondu avec  $\mathfrak{R}_k$  mais leurs antécédents sont différents. Étant donné que  $\mathbf{x}_{k+B}$  est perpendiculaire à l'axe  $\mathbf{z}_j$  donc  $r_{k+B} = 0$  et  $O_{k+B} = 0$  (Figure 2.3).

Ainsi, la description d'un SMC à chaîne fermée se ramène à celle d'un système à chaîne arborescente obtenu en coupant chaque boucle sur une de ses articulations passives et en ajoutant deux repères à ce point de coupure, ce qui donne un total de  $n + 2B$  repères. La configuration du système est définie par le vecteur  $\mathbf{q}$  de  $L$  variables articulaires :

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_L]^T \quad (2.5)$$

### B) Contraintes géométriques du système

Un SMC à chaîne fermée est caractérisé, par rapport à un système à chaîne arborescente, par des équations de contraintes exprimant les conditions de fermeture des boucles. Ces conditions sont des équations algébriques généralement non-linéaires et dans lesquelles le temps n'intervient pas explicitement. Elles sont données par :

$${}^{k+B}\mathbf{T}_j \dots {}^i\mathbf{T}_k = \mathbf{I}_4 \quad (2.6)$$

Ces équations peuvent être réécrites sous la forme d'un système de  $L-N$  équations non linéaires :

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Leurs dérivées premières seront :

$$\dot{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

avec  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  est la matrice Jacobienne, de dimension  $((L-N) \times L)$ , associée aux équations de contraintes du système. Deux méthodes sont envisageables pour calculer la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  :

- par différentiation directe des équations de contraintes données dans (2.7) par rapport aux variables articulaires,
- par l'utilisation d'une méthode fondée sur le calcul des vitesses linéaires et angulaires des repères  $\mathfrak{R}_k$  et  $\mathfrak{R}_{k+B}$  associés aux articulations coupées.

C'est cette deuxième méthode que nous utilisons dans ce travail. Pour la mettre en œuvre, on calcul depuis la racine de la boucle les contributions des vitesses articulaires de la boucle sur les vitesses des repères  $\mathfrak{R}_k$  et  $\mathfrak{R}_{k+B}$  et on écrit l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_k \\ \mathbf{W}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k+B} \\ \mathbf{W}_{k+B} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_k(\mathbf{q}_{b1})\dot{\mathbf{q}}_{b1} = \mathbf{J}_{k+B}(\mathbf{q}_{b2})\dot{\mathbf{q}}_{b2} \quad (2.9)$$

$\mathbf{q}_{b1}$  et  $\mathbf{q}_{b2}$  étant les vecteurs des vitesses des articulations appartenant à chacune des deux branches de la boucle, notées  $b1$  et  $b2$ . L'équation (2.9) s'écrit encore :

$$\mathbf{J}_k(\mathbf{q}_{b1})\dot{\mathbf{q}}_{b1} - \mathbf{J}_{k+B}(\mathbf{q}_{b2})\dot{\mathbf{q}}_{b2} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Pour chaque boucle, en notant  $e$  et  $d$  les premières articulations de chaque branche (Figure 2.4), ce qui permet d'exprimer  $\mathbf{J}_k$  et  $\mathbf{J}_{k+B}$  comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_k(\mathbf{q}_{b1}) = \begin{bmatrix} \sigma_e \mathbf{z}_e + \bar{\sigma}_e (\mathbf{z}_e \times {}^e\mathbf{P}_k) & \cdots & \sigma_k \mathbf{z}_k + \bar{\sigma}_k (\mathbf{z}_k \times {}^k\mathbf{P}_k) \\ \bar{\sigma}_e \mathbf{z}_e & \cdots & \bar{\sigma}_k \mathbf{z}_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{k+B}(\mathbf{q}_{b2}) = \begin{bmatrix} \sigma_d \mathbf{z}_d + \bar{\sigma}_d (\mathbf{z}_d \times {}^d\mathbf{P}_{k+B}) & \cdots & \sigma_j \mathbf{z}_j + \bar{\sigma}_j (\mathbf{z}_j \times {}^j\mathbf{P}_{k+B}) \\ \bar{\sigma}_d \mathbf{z}_d & \cdots & \bar{\sigma}_j \mathbf{z}_j \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.11)$$

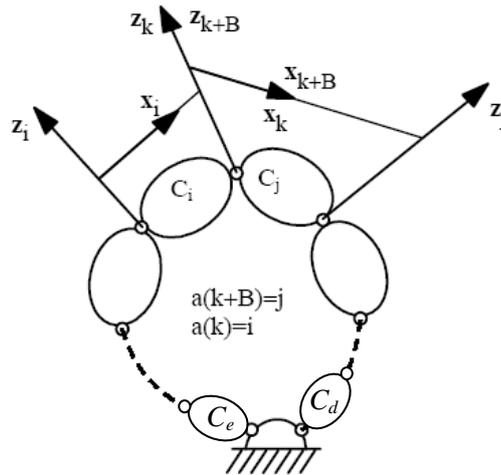


Figure 2.4. Les deux branches d'une boucle fermée

On projette les deux matrices Jacobiennes  $J_k$  et  $J_{k+B}$  respectivement dans les repères  $\mathfrak{R}_k$  et  $\mathfrak{R}_{k+B}$  ou bien dans le repère de la racine de la boucle. Par la suite, en regroupant les équations du type (2.10) de toutes les boucles, on obtient une relation de la forme (2.8).

En dérivant l'équation (2.8) par rapport au temps, on obtient les équations de contraintes sur les accélérations articulaires :

$$\ddot{h}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J(q)\ddot{q} + \psi(q, \dot{q}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Le terme  $\psi(q, \dot{q})$  regroupe les éléments quadratiques en vitesses articulaires de type  $\dot{J}(q)\dot{q}$ . Pour une boucle donnée, ce terme est calculé en utilisant la méthode récursive exprimée dans la figure 2.1 pour le calcul des accélérations linéaire ( $\dot{V}_k$ ) et angulaire ( $\dot{w}_k$ ) du corps  $C_k$  et en imposant que les accélérations articulaires de la première branche ( $\ddot{q}_{b1}$ ) et de la deuxième branche ( $\ddot{q}_{b2}$ ) de la boucle soient nulles :

$$\begin{bmatrix} {}^k\dot{V}_k(\ddot{q}_{b1} = \mathbf{0}) \\ {}^k\dot{w}_k(\ddot{q}_{b1} = \mathbf{0}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{k+B}\dot{V}_{k+B}(\ddot{q}_{b2} = \mathbf{0}) \\ {}^{k+B}\dot{w}_{k+B}(\ddot{q}_{b2} = \mathbf{0}) \end{bmatrix} = {}^k J_k \dot{q}_{b1} - {}^{k+B} J_{k+B} \dot{q}_{b2} \quad (2.13)$$

Le vecteur  $\psi(q, \dot{q})$  est calculé en regroupant les équations (2.13) de toutes les boucles et en les mettant dans le même ordre que celui donné aux équations de vitesse (2.8).

**Remarques :**

1. dans le cas où deux corps de la chaîne fermée sont reliés par une rotule (liaison sphérique) idéale, il est plus intéressant d'ouvrir la chaîne au niveau de la rotule que de

couper une liaison simple (rotoïde ou prismatique) de la chaîne. Les équations de contraintes d'une chaîne fermée coupée au niveau d'une rotule sont uniquement des contraintes de translation qui imposent une position identique aux points  $O_k$  et  $O_{k+B}$ . ce qui permet de réduire le nombre des équations de contraintes.

2. dans le cas où la fermeture d'une boucle est définie par des conditions de roulement et de pivotement sans glissement d'un corps du système sur un autre, les équations de contraintes du système, pour cette boucle, sont définies par les contraintes de non-holonomes calculées au points de contact des deux corps considérés. Ces équations peuvent être réécrites sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

### C) Traitement des équations de contraintes du système

Comme nous l'avons déjà dit, un SMC à chaîne fermée est caractérisé par des équations de contraintes. La méthode la plus utilisée pour le traitement de ces équations de contraintes est celle basée sur le partitionnement des coordonnées. Cette méthode est constituée de deux étapes :

- (i) subdiviser le vecteur des coordonnées généralisées,  $\mathbf{q}$ , en deux vecteurs : un vecteur des coordonnées généralisées indépendantes, noté  $\mathbf{q}_u$  de dimension  $(N \times 1)$ , et un vecteur des coordonnées généralisées dépendantes, noté  $\mathbf{q}_v$  de dimension  $((L-N) \times 1)$ .
- (ii) déduire, à partir des  $(L-N)$  équations de contraintes du système, les composantes du vecteur  $\mathbf{q}_v$  (et leurs dérivées) en fonction des composantes du vecteur  $\mathbf{q}_u$  et leurs dérivées.

La question qui se pose concerne le choix des composantes indépendantes du système. Ce choix doit permettre le calcul de toutes les coordonnées généralisées du vecteur  $\mathbf{q}_v$  et/ou de ses dérivées sans introduire des problèmes de singularités. En pratique, ce choix est dicté par les variables des articulations commandées (actives) du système.

Avec ce partitionnement des coordonnées, les équations de contraintes en vitesses (2.8) et en accélérations (2.12) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

- Equations de contraintes en vitesses :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_u(\mathbf{q}) & \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

- Equations de contraintes en accélérations :

$$[J_u(q) \ J_v(q)] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_u(q, \dot{q}) \\ \Psi_v(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Pour exprimer  $q_v$  en fonction de  $q_u$ , le cas le plus simple est celui où la relation (2.7) peut se mettre sous la forme explicite suivante :

$$q_v = g(q_u) \quad (2.17)$$

Si ce passage est difficile analytiquement, il faut utiliser la méthode numérique fondée sur le modèle différentiel inverse. Cette méthode, nécessite une bonne estimation initiale de la valeur des coordonnées dépendantes  $q_v$ . Les valeurs précises de ces coordonnées sont calculées de façon itérative par la formule suivante :

$$(q_v)_{k+1} = (q_v)_k - J_v^{-1}(q) J_u(q) dq_u \quad (2.18)$$

Le calcul des vitesses et des accélérations des variables dépendantes en fonctions des vitesses et des accélérations des variables indépendantes peut se faire, à partir des équations de contraintes (2.15) et (2.16), de la manière suivante :

$$\dot{q}_v = -J_v^{-1}(q) J_u(q) \dot{q}_u \quad (2.19)$$

$$\ddot{q}_v = -J_v^{-1}(q) (J_u(q) \ddot{q}_u + \Psi(q, \dot{q})) \quad (2.20)$$

**Remarque :** si le système est compatible, la matrice  $J_v(q)$  est inversible en dehors des positions singulières.

### D) Modèle dynamique :

On appelle modèle dynamique, d'un SMC à chaîne fermée, le système d'équations qui permet d'exprimer le vecteur des efforts généralisés (forces et/ou couples) appliqués au niveau des articulations motorisées du système en fonction des variables cinématiques généralisées et des efforts extérieurs appliqués par les organes terminaux sur l'environnement. L'une des méthodes utilisées pour calculer ces efforts, est celle basée sur le calcul des efforts généralisés de la chaîne arborescente équivalente,  $\Gamma_{ar}$ , majorés par les efforts articulaires nécessaires pour respecter les contraintes de la fermeture des boucles  $\Gamma_c$ . Soit  $\Gamma$  le vecteur des efforts généralisés de la chaîne fermée, ce vecteur est obtenu par la relation suivante :

$$\Gamma = \Gamma_{ar}(q, \dot{q}, \ddot{q}) + J^t(q) \lambda \quad (2.21)$$

## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

---

avec :  $\Gamma$ : le vecteur  $((L-N) \times 1)$  contenant les multiplicateurs de Lagrange associés aux équations de contraintes. Ce vecteur représente les efforts transmis par les liaisons coupées pour respecter les contraintes de fermeture des boucles.

$\Gamma_{ar}$  : le vecteur des efforts généralisés obtenu par le modèle dynamique de la chaîne arborescente équivalente. Sa forme générale est donnée par :

$$\Gamma_{ar} = \begin{bmatrix} \Gamma_u \\ \Gamma_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uv} \\ A_{vu} & A_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_u(q, \dot{q}) \\ H_v(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Pour éliminer les multiplicateurs de Lagrange, nous utilisons une méthode qui tient compte du fait que les efforts généralisés des articulations passives du SMC à chaîne fermée sont nuls, ce qui permet d'écrire que :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_u \\ \Gamma_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_u^t(q) \cdot \lambda \\ J_v^t(q) \cdot \lambda \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$\Gamma_m$  contenant les efforts généralisés délivrés par les  $N$  actionneurs du système.

On a donc un système de  $L$  équations où les inconnues sont les composantes des deux vecteurs  $\Gamma_m$  et  $\lambda$ . De la partie inférieure de l'équation (2.23), on déduit  $\lambda$  comme suit :

$$\lambda = -[J_v^t(q)]^{-1} \Gamma_v \quad (2.24)$$

On obtient le vecteur des efforts des actionneurs  $\Gamma_m$  par substitution de  $\lambda$ , par son expression (2.24), dans la première rangée de l'équation (2.23). Ce qui donne :

$$\Gamma_m = \Gamma_u - J_u^t(q) \cdot [J_v^t(q)]^{-1} \Gamma_v = \begin{bmatrix} I_N & -J_u^t(q)[J_v^t(q)]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_u \\ \Gamma_v \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

expression qui peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_m = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial q_u}{\partial q_u} \right]^T & \left[ \frac{\partial q_v}{\partial q_u} \right]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_u \\ \Gamma_v \end{bmatrix} = \mathbf{G}^T \Gamma_{ar} \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{G}$  la Jacobienne des coordonnées généralisées du système par rapport aux variables indépendants (variables des articulations motorisées du système).

### 2.4 FORMALISME DE LAGRANGE

Le formalisme de Lagrange est décrit par les équations du mouvement en terme de travail d'énergie du système ce qui se traduit, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Avec :

L : force de Lagrange du système, égale à E – U.

E : énergie cinétique totale du système.

U : énergie potentielle totale du système.

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [A] [\dot{q}]$$

Ou A est la matrice ( $n \times n$ ) de l'énergie cinétique d'élément générique  $A_{ij}$  appelé aussi matrice d'inertie robot, qui est symétrique et définie positive. Ses éléments sont fonction de variables articulaires  $q$ .

L'énergie potentielle étant, elle aussi, fonction des variables articulaires  $q$ , le couple  $\Gamma_i$  pour chaque articulation peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma_i = [A_{i1}\ddot{q}_1 + \dots + A_{in}\ddot{q}_{1n}] + [B_i^{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + B_i^{1n}\dot{q}_1\dot{q}_n + B_i^{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + \dots + B_i^{(n-1)n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n] + [B_i^{11}\dot{q}_1^2 + \dots + B_i^{nn}\dot{q}_n^2] + Q_i$$

Sous la forme matricielle :

$$\Gamma_i = [A_i] [\ddot{q}] + \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [B_i] [\dot{q}] + Q_i$$

Avec :

$[A_i]$  : Vecteur ligne de dimension n.

$[B_i]$  : Matrice des termes centrifuge de Coriolis, d'élément générique  $B_i^{jk}$ , elle est de dimension ( $n \times n$ ).

$$[\dot{q}] = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n]^T$$

$$[\ddot{q}] = [\ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_n]$$

On calcule les éléments de B et Q par les relations suivantes :

$$B_i^{jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}$$

$$B_i^{jj} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Les éléments de A, B et Q s'appellent les coefficients dynamiques du robot, ils sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Les équations dynamiques d'un système mécanique articulé forment donc un système de n équations différentielles du second ordre couplées et non linéaires.

### 2.4.1 Application au robot parallèle à 3 ddl

D'après la description précédente notre robot parallèle sera paramétré de la façon suivante :

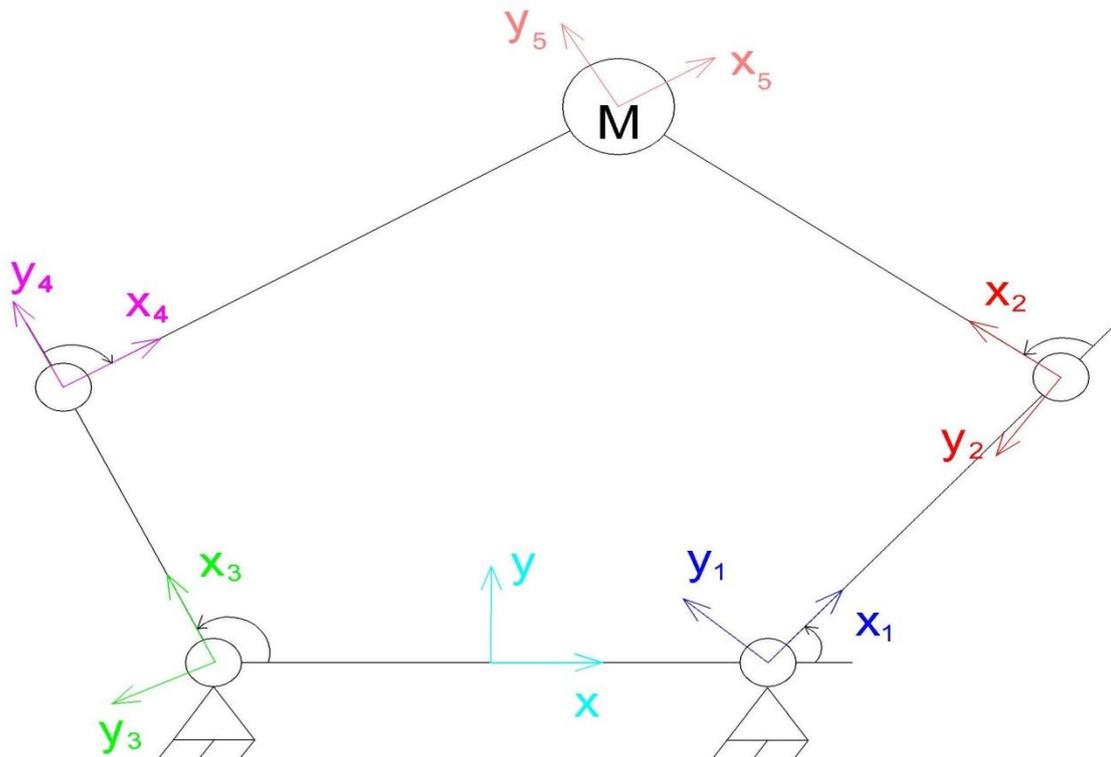


Figure2.5 schéma d'un robot parallèle à 3ddl

$\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  rotation autour de  $\vec{z}_1$

$\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  rotation autour de  $\vec{z}_2$

## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

---

$\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$  rotation autour de  $\vec{z}_3$

$\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4)$  rotation autour de  $\vec{z}_4$

$\theta_5 = (\vec{x}_4, \vec{x}_5)$  rotation autour de  $\vec{z}_5$

$\vec{\omega}_i^o$  = Vitesse de angulaire

$\Pi_{Gi}^{ci}$  = Tenseur d'inertie

**Forme générale des équations dynamiques :**

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{Gi}^{ot} \cdot \vec{v}_{Gi}^{ot} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^{ot} \cdot \Pi_{Gi}^{ci} \cdot \vec{\omega}_i^{ot}$$

Tel que :

$$\vec{v}_G^{o2} = \vec{v}_G^{ot} \cdot \vec{v}_G^o$$

et :

$$\Pi_{Gi}^{ci} = \begin{matrix} I_{xxi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yyi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_i} \end{matrix}$$

Donc on obtient l'énergie cinétique pour chaque corps :

- corps 1 :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \left( I_{zz1} + m_1 \cdot \frac{l_1^2}{4} \right) \cdot \dot{\theta}_1^2$$

- corps 2 :

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \left[ m_2 \left( l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \right) + I_{zz2} \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ m_2 \cdot \left( \frac{l_2^2}{4} \right) + I_{zz2} \right] \cdot \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \left[ m_2 \cdot \left( \frac{l_2^2}{2} + l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \right) + 2 \cdot I_{zz2} \right] \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2$$

- corps 3 :

$$E_{C3} = \frac{1}{2} \left( I_{zz3} + m_1 \cdot \frac{l_1^2}{4} \right) \cdot \dot{\theta}_3^2$$

- corps 4 :

$$E_{C4} = \frac{1}{2} \left[ m_2 \left( l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \right) + I_{332} \right] \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} \left[ m_2 \cdot \left( \frac{l_2^2}{4} \right) + I_{332} \right] \cdot \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} \left[ m_2 \cdot \left( \frac{l_2^2}{2} + l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_4 \right) + 2 \cdot I_{332} \right] \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4$$

- corps 5 (masse 5) :

$$E_{C5} = \frac{1}{2} \left[ m_5 (l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2) + I_{335} \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left[ m_5 \cdot l_2^2 + I_{335} \right] \cdot \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \left[ m_5 \cdot (2 \cdot l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2) + 2 \cdot I_{335} \right] \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \cdot I_{335} \cdot \dot{\theta}_5^2 + I_{335} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_5 + I_{335} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_5$$

donc on obtient l'énergie cinétique totale suivante :

on sait que :

$$E_{CT} = E_{C1} + E_{C2} + \dots + E_{Cn}$$

donc

$$E_{CT} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} B_1 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (e_1 + e_2 \cos \theta_4) \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} f_1 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2 \cos \theta_4) \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + I_{335} \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_5 + I_{335} \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_5 + \frac{1}{2} I_{335} \dot{\theta}_5^2$$

tel que :

$$A_1 = I_{331} + I_{332} + I_{335} + m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 \left( l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \right) + m_5 (l_1^2 + l_2^2)$$

$$A_2 = m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 + 2m_5 \cdot l_1 \cdot l_2$$

$$d_1 = m_2 \frac{l_2^2}{2} + 2m_5 l_2^2 + 2(I_{332} + I_{335})$$

$$d_2 = (2m_5 + m_2) l_1 \cdot l_2$$

$$f_1 = I_{332} + m_2 \frac{l_2^2}{4}$$

$$g_1 = 2I_{332} + m_2 \frac{l_2^2}{2}$$

$$g_2 = m_2 \cdot l_1 \cdot l_2$$

$$e_1 = I_{331} + I_{332} + m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 \left( l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} \right)$$

$$e_2 = m_2 \cdot l_1 \cdot l_2$$

on a :

$$E_p = 0$$

et pour obtenir les équations de contrainte on a :

$$\vec{o}_0 o_1 + \vec{o}_1 o_2 + \vec{o}_2 E = \vec{o}_0 o_3 + \vec{o}_3 o_4 + \vec{o}_4 E$$

$$\begin{cases} d + l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} = \begin{cases} -d + l_1 \cdot \cos \theta_3 + l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4) \\ l_1 \cdot \sin \theta_3 + l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) \end{cases}$$

qui donne :

$$\Phi_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 2d + l_1(\cos \theta_1 - \cos \theta_3) + l_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_3 + \theta_4))$$

$$\Phi_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = l_1(\sin \theta_1 - \sin \theta_3) + l_2(\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_3 + \theta_4))$$

on peut calculer lagrange maintenant

1)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & (A_1 + A_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot \ddot{\theta}_1 - A_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cdot \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ & - \frac{1}{2} \cdot d_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + I_{335} \cdot \ddot{\theta}_5 + \lambda_1 \cdot (-l_1 \cdot \sin \theta_2 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ & + \lambda_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & B_1 \cdot \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cdot \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \lambda_1 l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ & + \lambda_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + I_{335} \ddot{\theta}_5 \end{aligned}$$

3)

$$\Gamma_3 = (e_1 + e_2 \cdot \cos \theta_4) \cdot \ddot{\theta}_3 - e_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2 \cdot \cos \theta_4) \ddot{\theta}_4 - \frac{1}{2} \cdot g_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_4^2 + \lambda_1 \cdot (l_1 \cdot \sin \theta_3 + l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4)) - \lambda_2 \cdot (l_1 \cdot \cos \theta_3 + l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4))$$

4)

$$\Gamma_4 = f_1 \cdot \ddot{\theta}_4 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2 \cdot \cos \theta_4) \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_3^2 + \lambda_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) - \lambda_2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

5)

$$\Gamma_5 = I_{335} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_5)$$

on a 2 et 4 des liaisons passives donc on aura

$$\Gamma_2 = \Gamma_4 = 0$$

donc on peut calculer les coefficients de frottements  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

$$\Gamma_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda_2 l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + \lambda_1 l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = B_1 \cdot \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cdot \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + I_{335} \ddot{\theta}_5 + \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2$$

on pose :

$$K = \frac{B_1 \cdot \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (d_1 + d_2 \cdot \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + I_{335} \ddot{\theta}_5 + \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2}{l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

On aura :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \cot(\theta_1 + \theta_2) + K$$

Et

$$\Gamma_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2 l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4) - (\lambda_2 \cdot \cot(\theta_1 + \theta_2) + K) l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) = f_1 \cdot \ddot{\theta}_4 + \frac{1}{2} (g_1 + g_2 \cdot \cos \theta_4) \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_3^2$$

On pose aussi :

$$L = \frac{f_1 \cdot \ddot{\theta}_4 + \frac{1}{2}(g_1 + g_2 \cdot \cos \theta_4) \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot \sin \theta_4 \cdot \dot{\theta}_3^2}{l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4)}$$

on aura

$$\lambda_2 \cdot \cot(\theta_3 + \theta_4) - \lambda_2 \cdot \cot(\theta_1 + \theta_2) - K = L$$

donc nos résultats sont :

$$\lambda_1 = \frac{L + K}{\cot(\theta_3 + \theta_4) - \cot(\theta_1 + \theta_2)} \cot(\theta_1 + \theta_2) + K$$

et

$$\lambda_2 = \frac{L + K}{\cot(\theta_3 + \theta_4) - \cot(\theta_1 + \theta_2)}$$

des équations de contrainte on peut calculer  $\theta_2$  et  $\theta_4$

$$\begin{cases} l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) = \alpha + l_2 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4) \dots \dots 1 \\ l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = \beta + l_2 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) \dots \dots 2 \end{cases}$$

tel que

$$\alpha = l_1(\cos \theta_3 - \cos \theta_1) - 2d$$

$$\beta = l_1(\sin \theta_3 - \sin \theta_1)$$

$$1^2 + 2^2 \Leftrightarrow A + B \cos(\theta_3 + \theta_4) + C \sin(\theta_3 + \theta_4) = 0$$

tel que

$$A = \alpha^2 + \beta^2$$

$$B = 2\alpha l_2$$

$$C = 2\beta l_2$$

en faisant le changement trigonométrique :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}$$

$$\sin x = \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2}$$

et en posant :

## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

---

$$y = \tan\left(\frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right)$$

donc on aura l'équation de 2eme degre suivante :

$$(A - B)y^2 + 2Cy + A + B = 0$$

on

sait

que :

$$\Delta = C^2 - A^2 + B^2$$

donc :

$$y_1 = \frac{-C - \sqrt{\Delta}}{A - B}$$

$$y_2 = \frac{-C + \sqrt{\Delta}}{A - B}$$

on prend  $y_1$  comme solution car il ne donne  $\theta_2$  negative et  $\theta_4$  positive

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} y_1 - \theta_3$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left[\frac{\beta}{\alpha} + \tan(\theta_3 + \theta_4)\right] - \theta_1$$

Le jacobien :

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_4} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} = -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_3} = l_1 \sin \theta_3 + l_2 \sin(\theta_3 + \theta_4)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_4} = l_2 \sin(\theta_3 + \theta_4)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_3} = -l_1 \cos \theta_3 - l_2 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_4} = -l_2 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$J_u = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{21} & J_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_v = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{14} \\ J_{22} & J_{24} \end{bmatrix}$$

le jacobien va nous permettre de calculer les vitesses et les accélérations des liaisons passives  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_4$  et  $\ddot{\theta}_2$ ,  $\ddot{\theta}_4$  en utilisant les relations suivantes :

$$J_u \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + J_v \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = -J_v^{-1} \cdot J_u \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

$$J_u \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + J_v \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} + J_u \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + J_v \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} = -J_v^{-1} [J_u \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + J_u \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + J_v \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}]$$

et pour le calcul numérique on prend :

$$\theta_1 = \theta_1^i + r(t) \cdot (\theta_1^f - \theta_1^i)$$

$$\theta_3 = \theta_3^i + r(t) \cdot (\theta_3^f - \theta_3^i)$$

$$\theta_5 = \theta_5^i + r(t) \cdot (\theta_5^f - \theta_5^i)$$

donc les vitesses seront en dérivant par rapport à t :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{r}(t) \cdot (\theta_1^f - \theta_1^i)$$

$$\dot{\theta}_3 = \dot{r}(t) \cdot (\theta_3^f - \theta_3^i)$$

$$\dot{\theta}_5 = \dot{r}(t) \cdot (\theta_5^f - \theta_5^i)$$

et en dérivant une 2ème fois par rapport au temps on a les accélérations suivantes :

$$\ddot{\theta}_1 = \ddot{r}(t) \cdot (\theta_1^f - \theta_1^i)$$

$$\ddot{\theta}_3 = \ddot{r}(t) \cdot (\theta_3^f - \theta_3^i)$$

$$\ddot{\theta}_5 = \ddot{r}(t) \cdot (\theta_5^f - \theta_5^i)$$

tel que :

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot{r}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\ddot{r}(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

et on prend les conditions suivantes :

$$\theta_1^i = \pi/3 \text{ rd}$$

$$\theta_1^f = \pi/2 \text{ rd}$$

$$\theta_3^i = \pi/2 \text{ rd}$$

$$\theta_3^f = 2\pi/3 \text{ rd}$$

$$\theta_5^i = 0 \text{ rd}$$

$$\theta_5^f = \pi/2 \text{ rd}$$

et a  $t=2,52s$  on a ces conditions :

$$r(0) = 0$$

$$r(t) = 1$$

$$\dot{r}(0) = 0$$

$$\dot{r}(t) = 0$$

$$l_1 = l_2 = 0.7 \text{ m}$$

$$m_1 = m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$m_5 = 5 \text{ kg}$$

$$d = 0.4 \text{ m}$$

$$I_{331} = I_{332} = I_{335} = 0.02 \text{ kg.m}^2$$

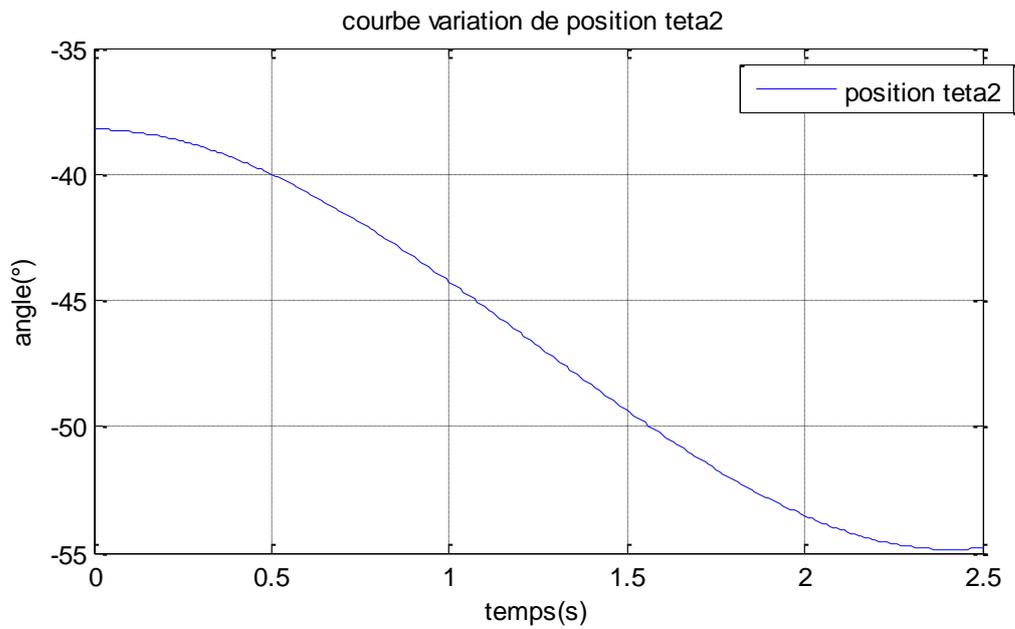
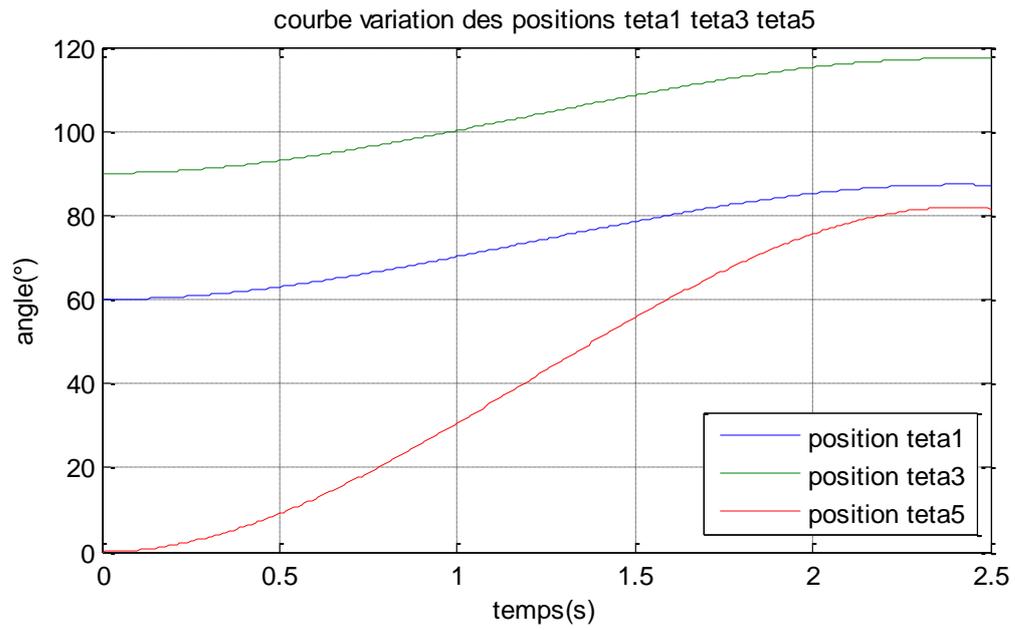
et on obtient les résultats suivants qui sont traduits en graphe :

### 2.5 RESULTATS

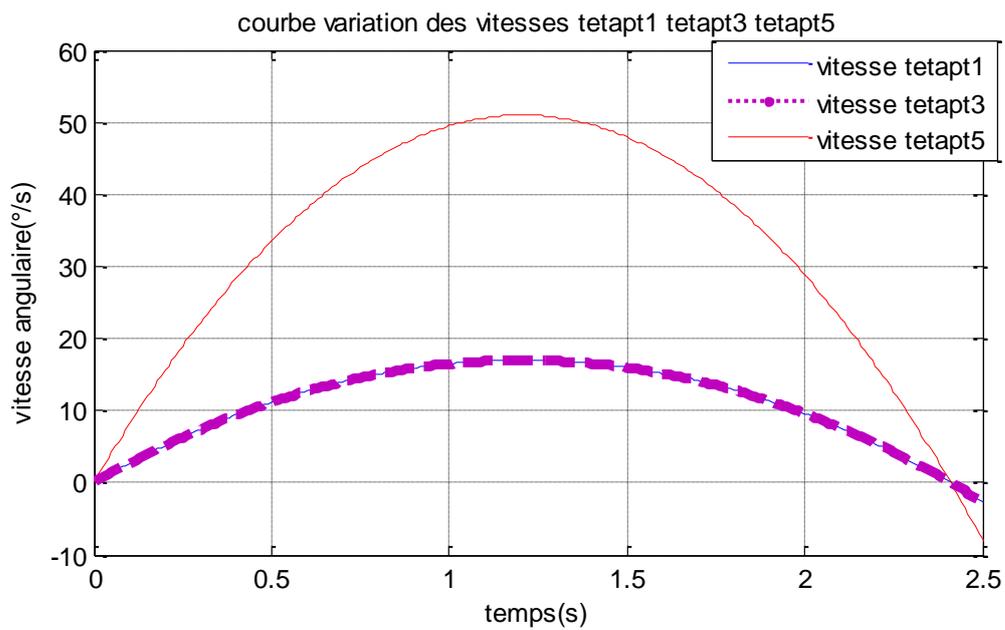
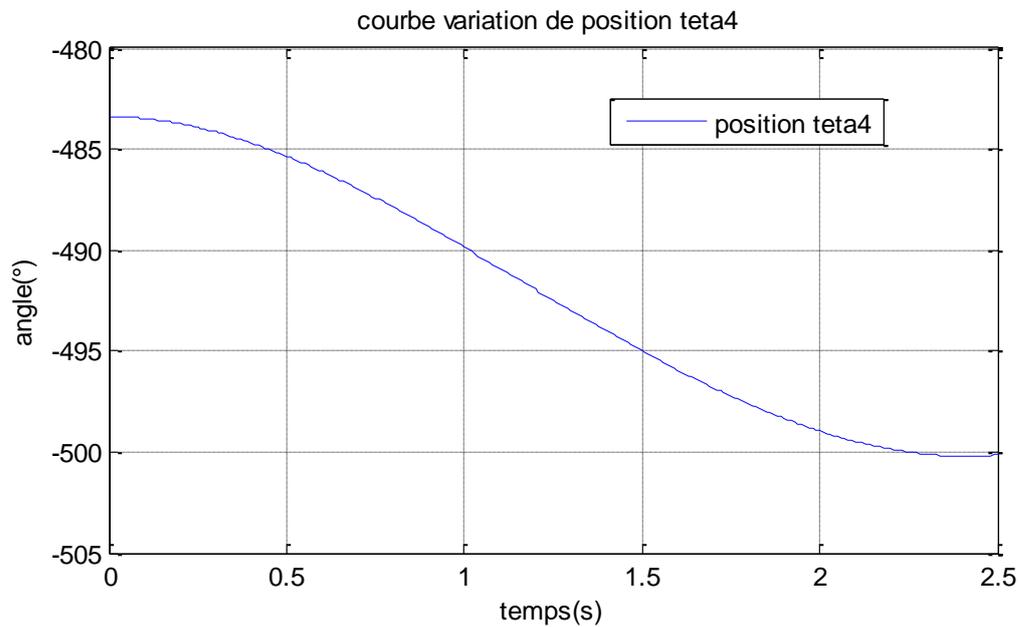
Les graphes ont été calculés sous programme MATLAB (annex1) :

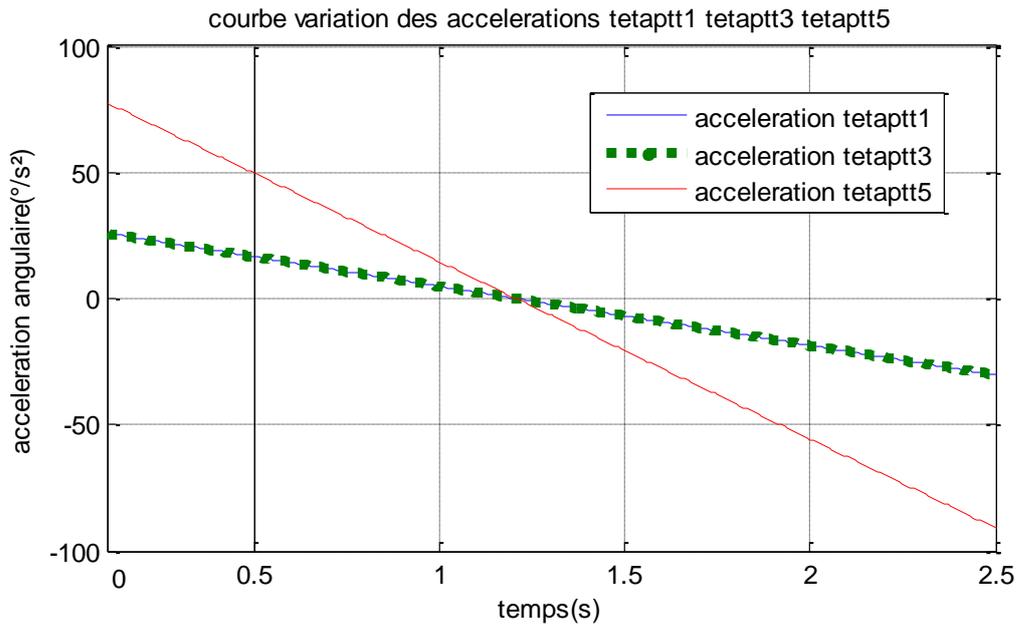
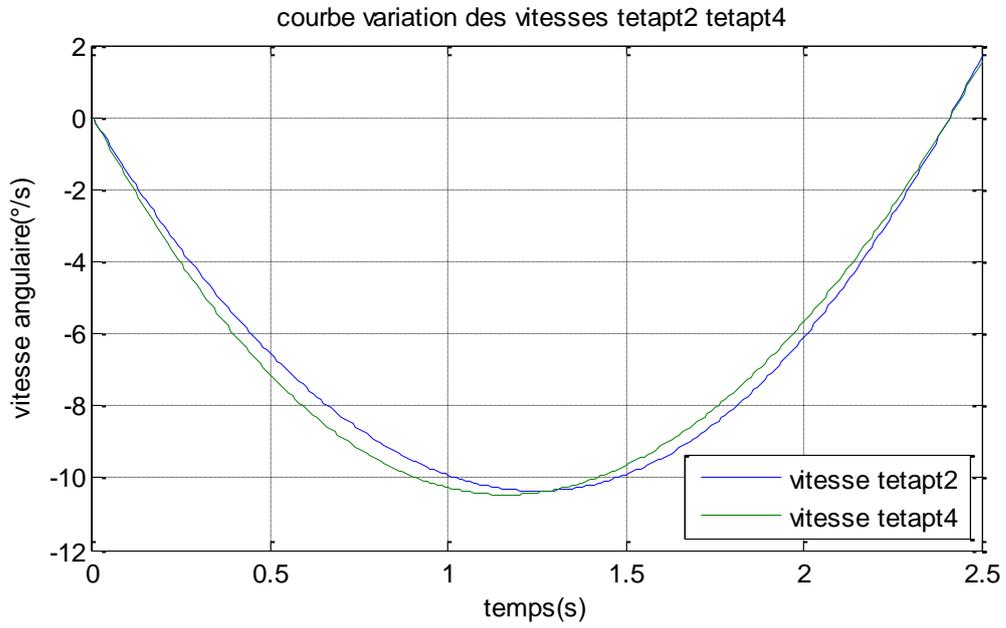
## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

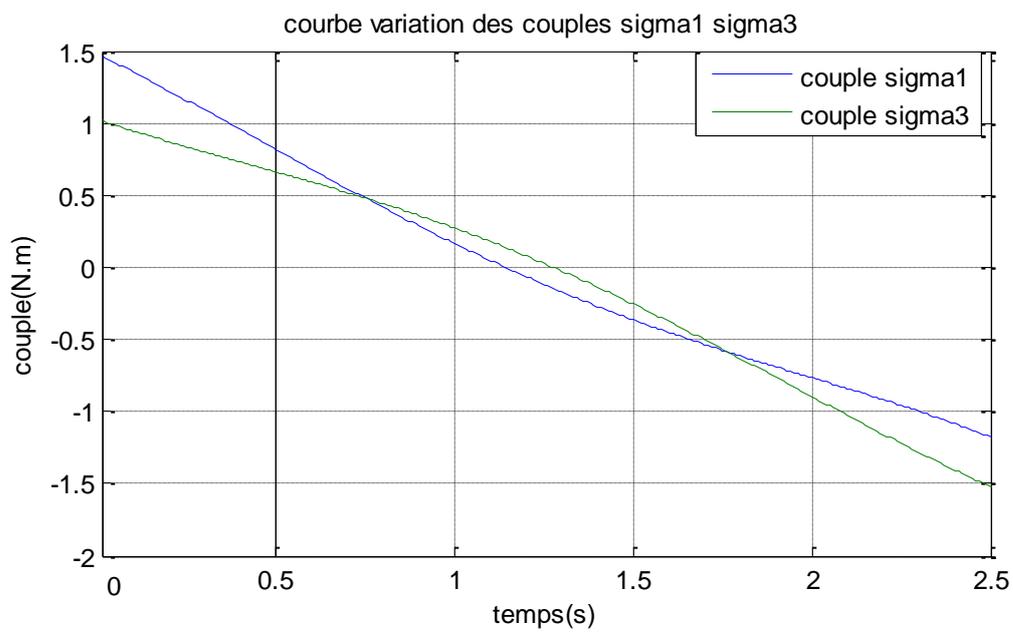
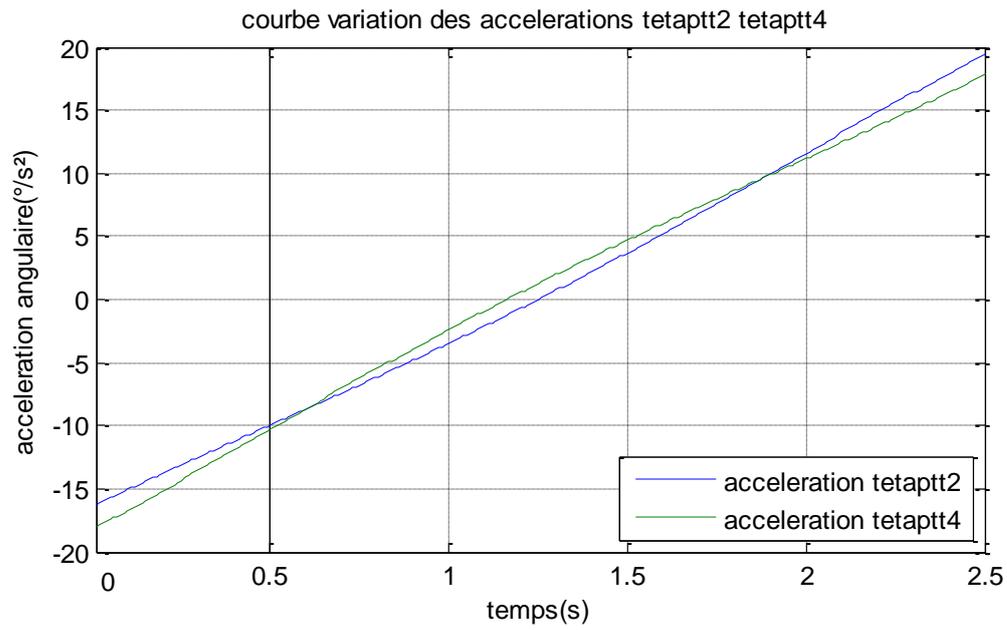
---

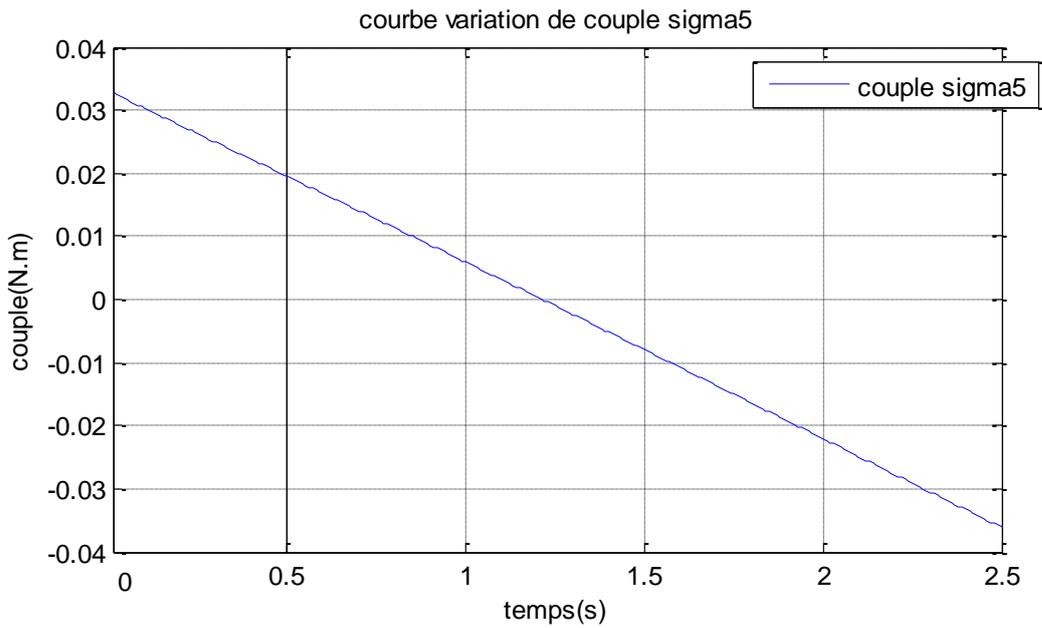


## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système









## 2.6 validation des résultats avec Solid-dynamics

C'est un logiciel utilisé pour la validation de nos résultats, on dessine notre robot à 3ddl, après on lui donne les conditions et les contraintes exigées et il nous donne directement le résultat.

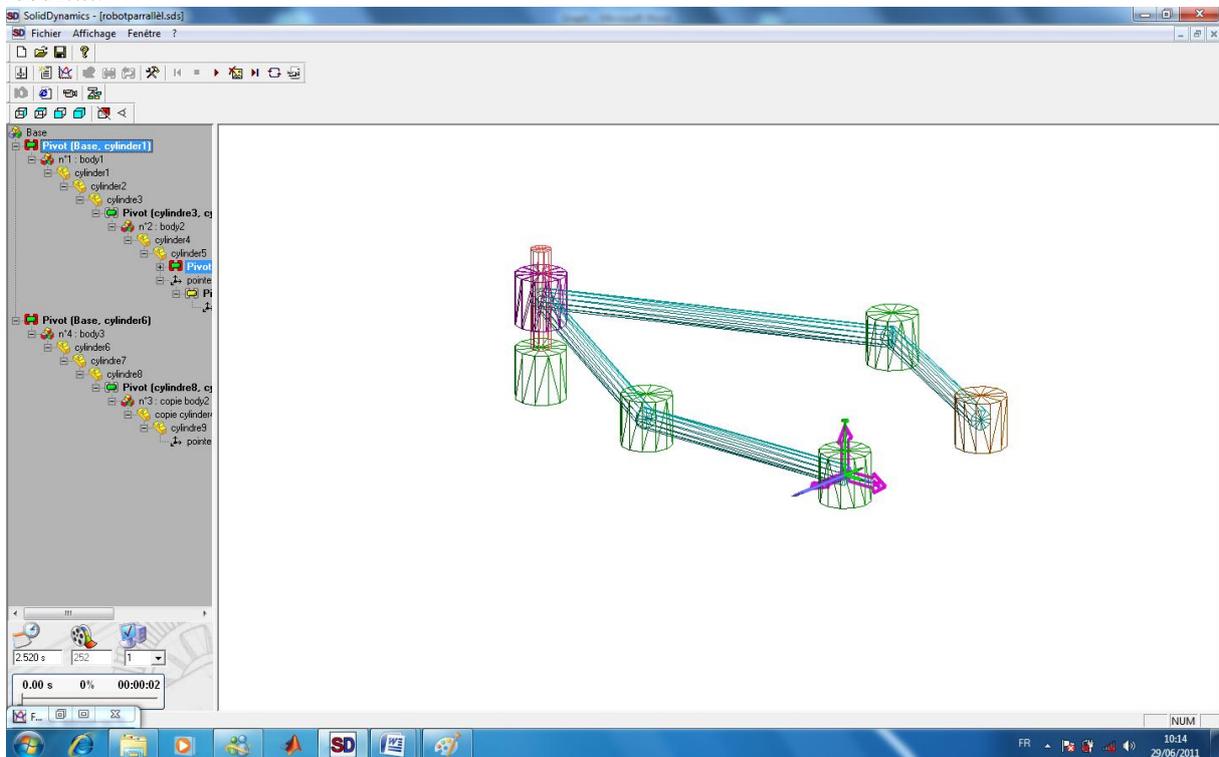


Photo 2.1 Le robot parallèle réalisé sous solid-dynamics

## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

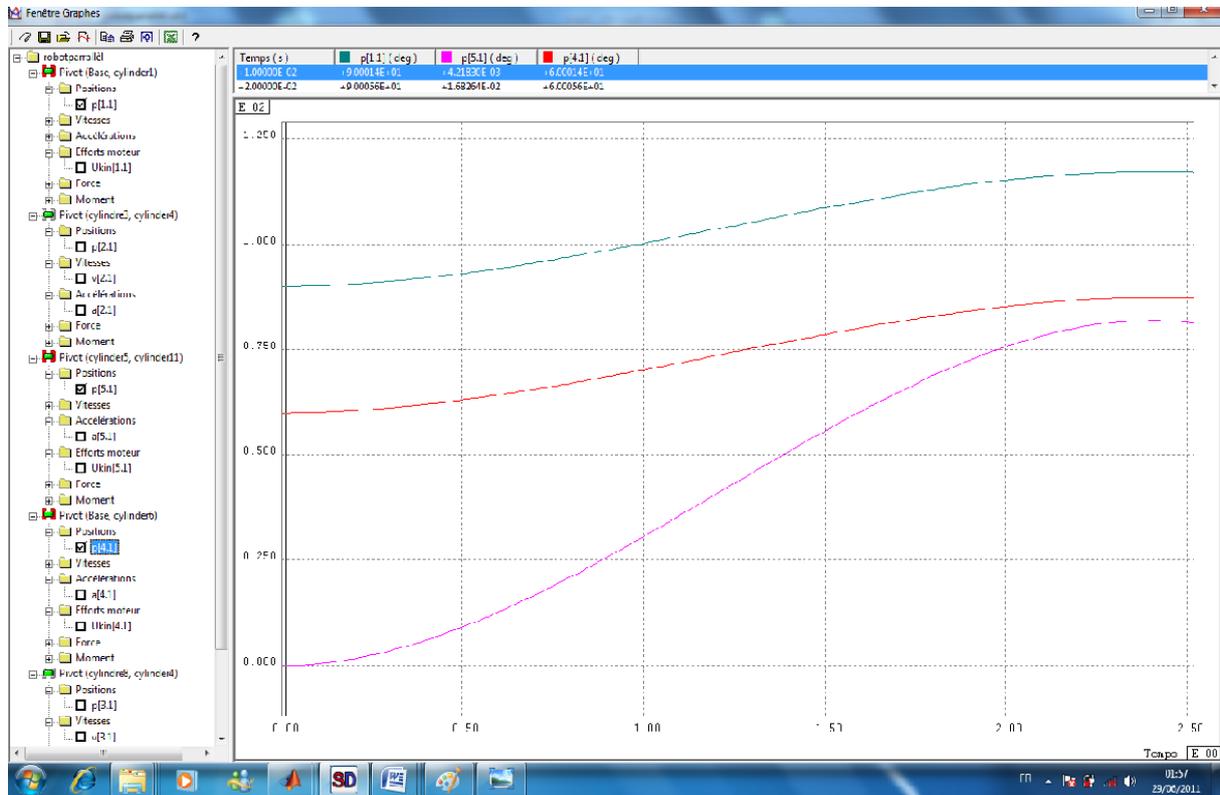


Photo 2.2 Graphe des positions des angles  $\theta_1$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_5$

--- $\theta_3$

--- $\theta_1$

--- $\theta_5$

# Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

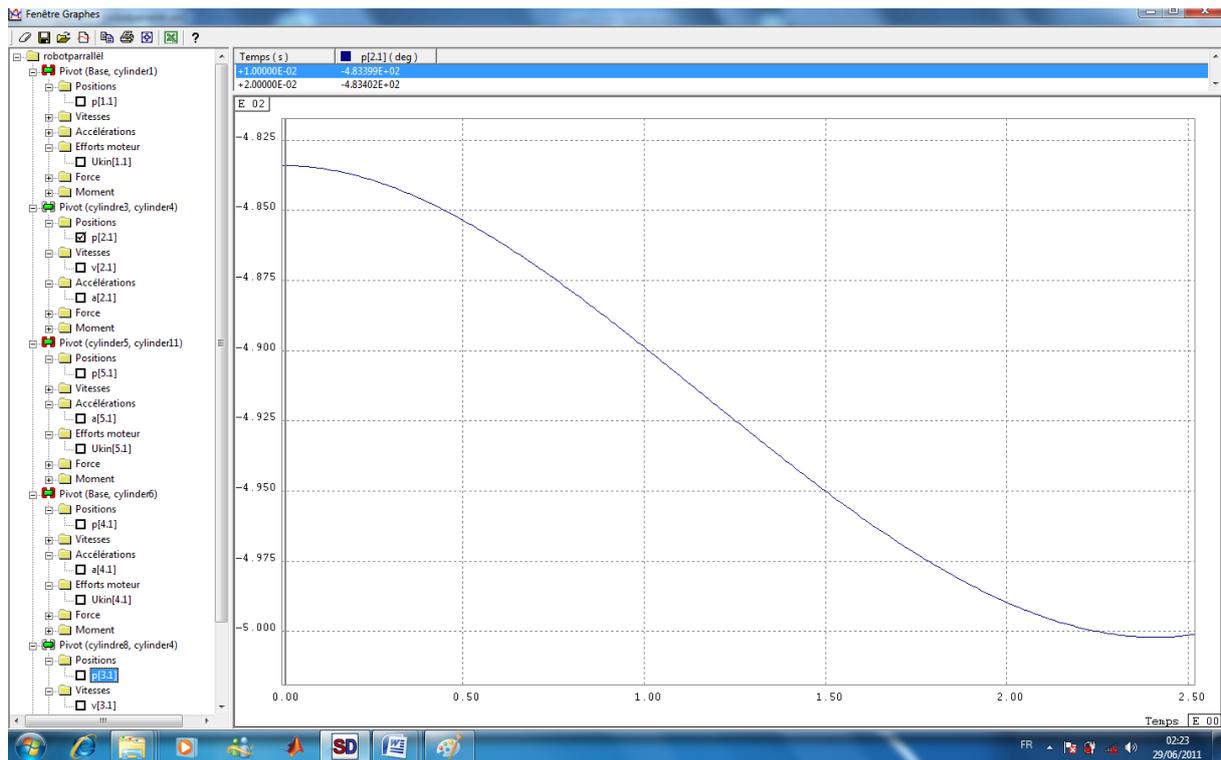


Photo2.3 Graphe de position de  $\theta_4$

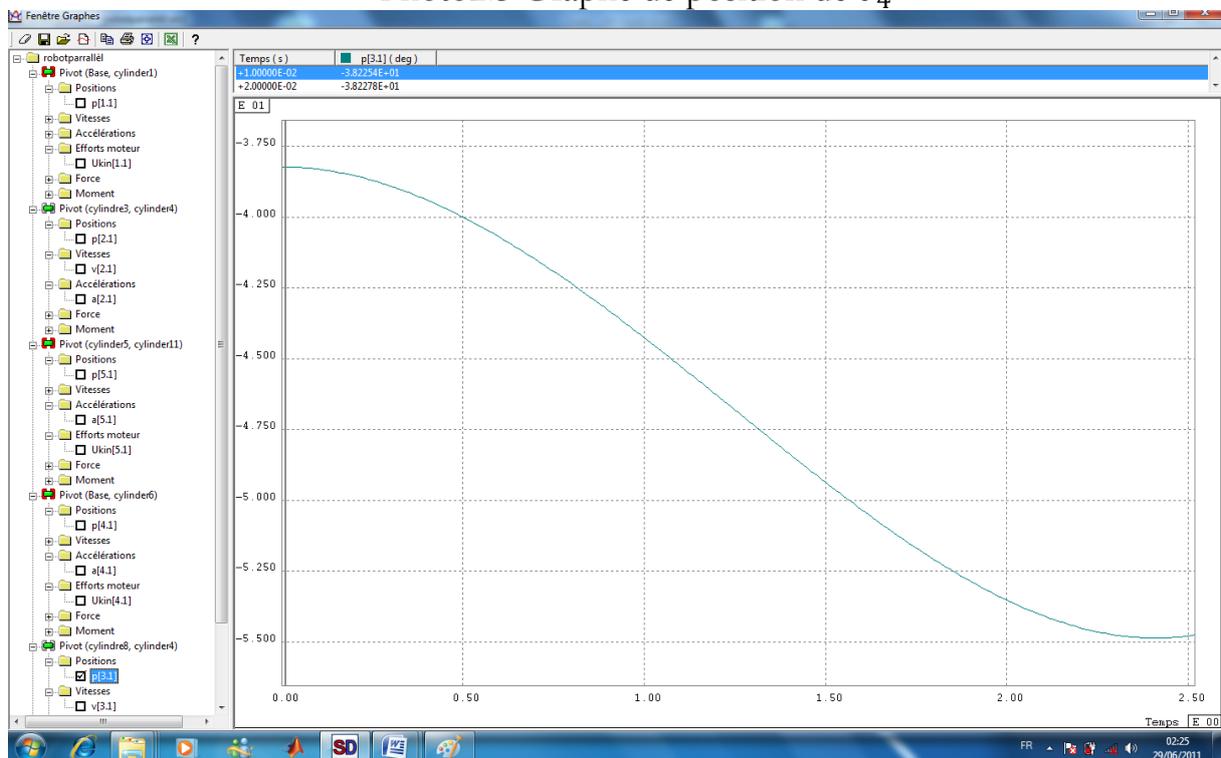


Photo2.4 Graphe de position de  $\theta_2$

# Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

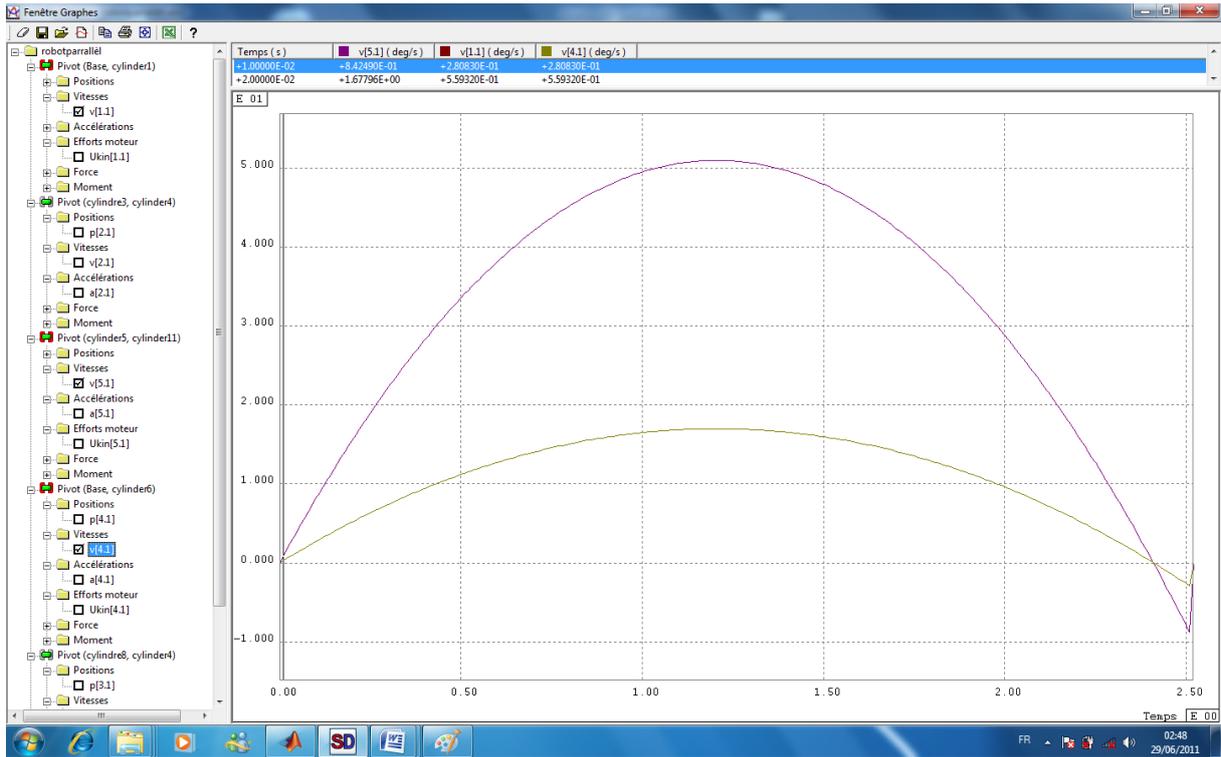


photo.2.5 Graphe des vitesses angulaires  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_3$  et  $\dot{\theta}_5$ .  
 ---  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_3$       ---  $\dot{\theta}_5$ .

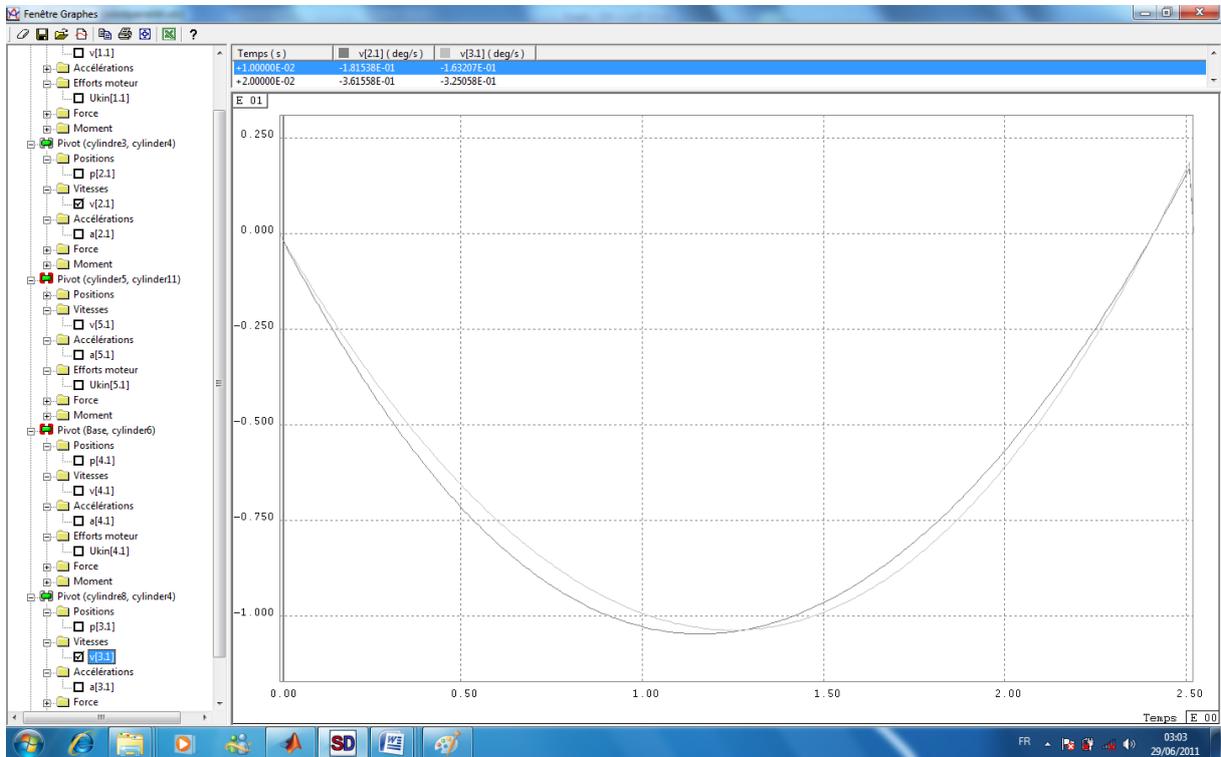


Photo2.6 Graphe des vitesses angulaires  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_4$   
 ---  $\dot{\theta}_2$       ---  $\dot{\theta}_4$

# Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

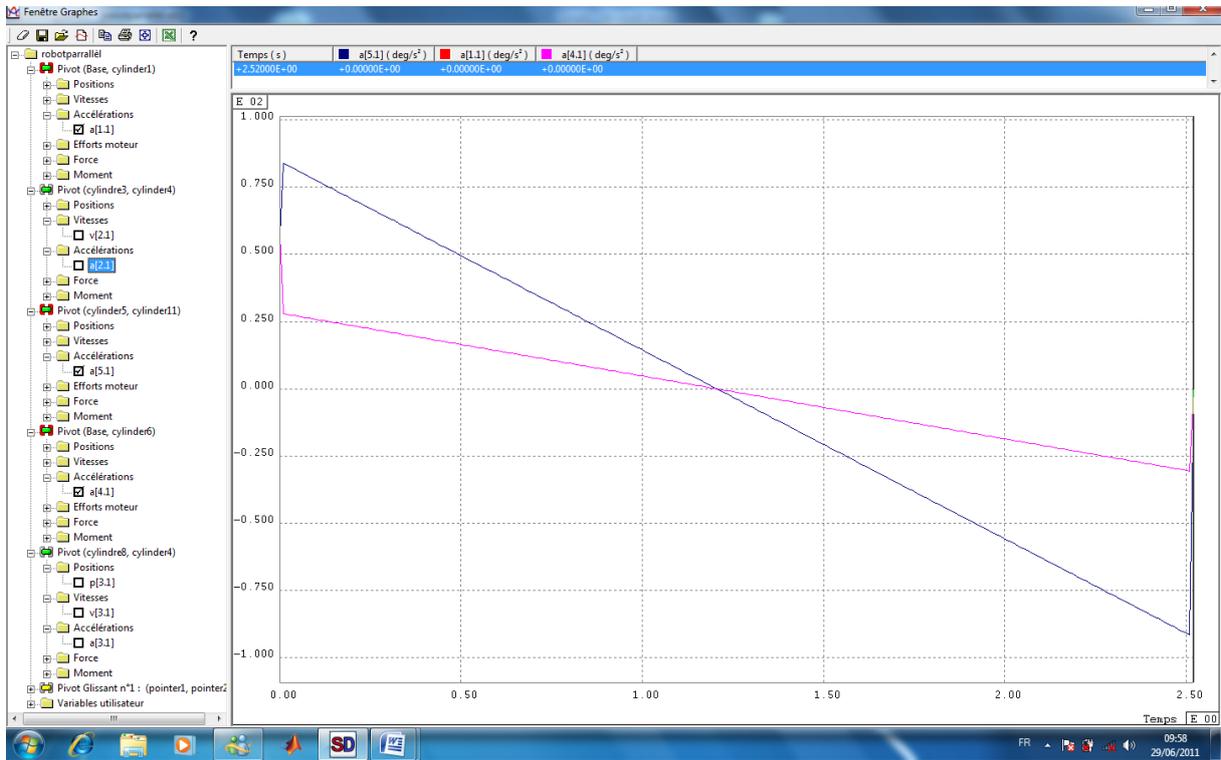
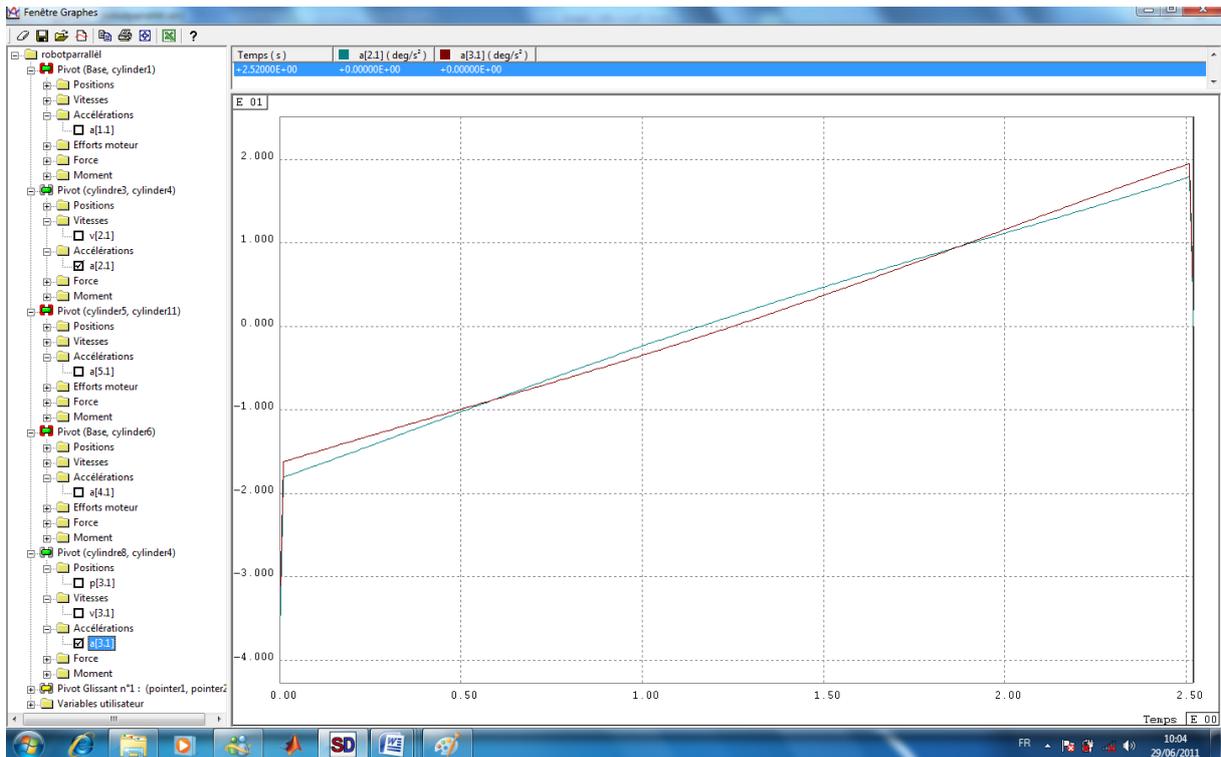


Photo2.7 Graphe des accélérations angulaires  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_3$  et  $\ddot{\theta}_5$

$$-\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_3 \quad -\ddot{\theta}_5$$



## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

Photo2.8 Graphe des accélérations  $\ddot{\theta}_2$ ,  $\ddot{\theta}_4$

--- $\ddot{\theta}_2$       --- $\ddot{\theta}_4$

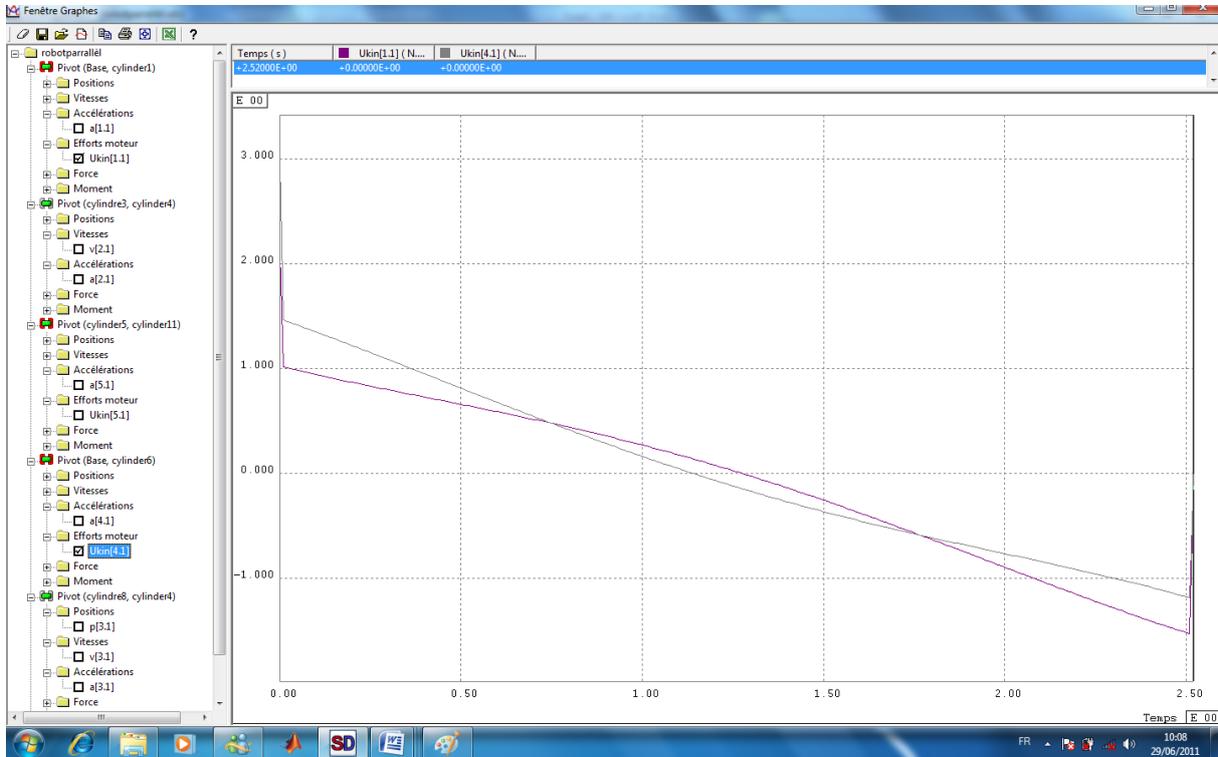


Photo2.9 Graphe des couples  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$

--- $\Gamma_1$       --- $\Gamma_3$

## Chapitre 02 : Modélisation dynamique du système

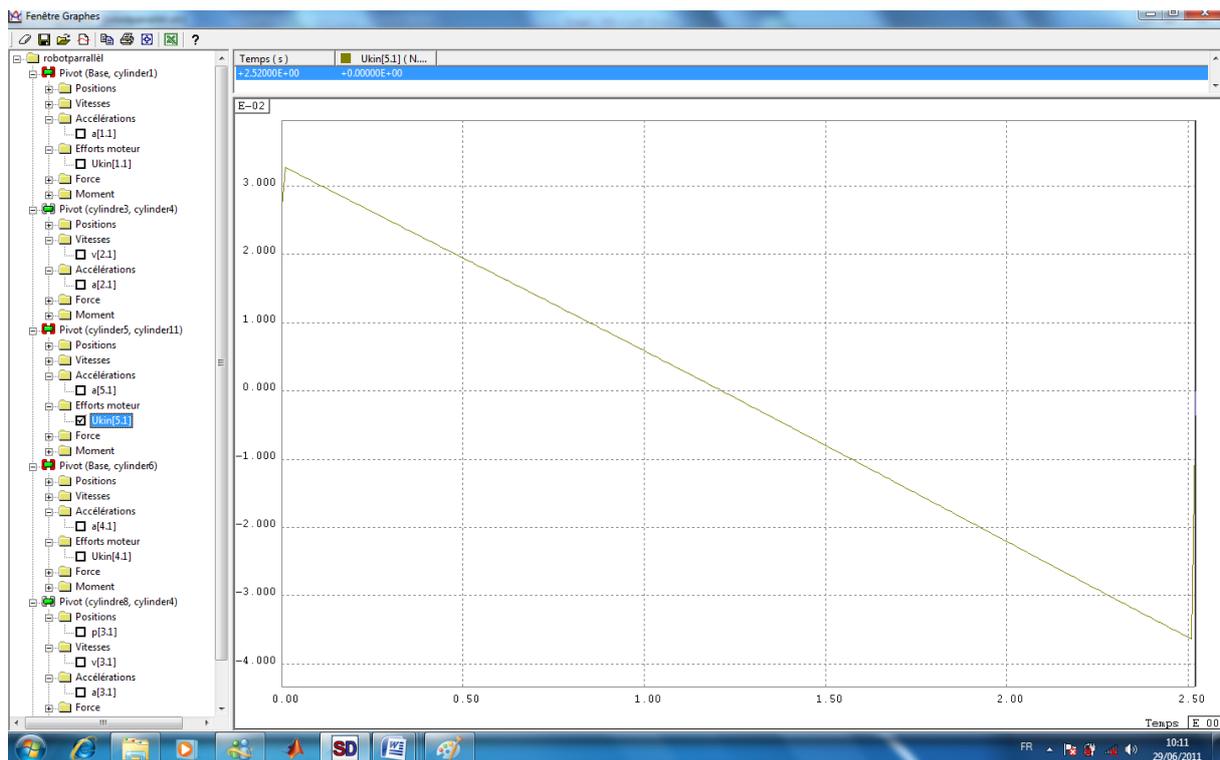


Photo2.10 Graphe de couple  $T_5$

### 2.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les des formalismes les plus connus pour le calcul du modèle dynamique des robots et les deux les plus utilisés sont :

le formalisme de Newton-Euler et celui de Lagrange. Nous avons montré comment établir un modèle dynamique complet en montrant les différentes étapes à suivre. Le formalisme qu'on a utilisé c'est le formalisme de Lagrange parceque c'est simple et on trouve rapidement les résultats qu'on a besoin (les couples) et apres on a utilisé le Jacobien pour calculer les vitesses et les accélérations des liaisons passives .La dernière partie de ce chapitre a été consacré a l'application numérique du modèle dynamique .

---

# CHAPITRE 3

---

---

## RESOLUTION DU PROBLEME PAR L'APPROCHE DES PROFILS ALEATOIRES DE TRAJECTOIRE

---

# Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

## 3.1 INTRODUCTION

La planification de trajectoire est un sujet d'étude très important en robotique. Elle se base sur trois domaines scientifiques variés. Ces domaines sont la robotique, l'intelligence artificielle et le contrôle. Le problème étudié par la planification de trajectoire, consiste à trouver un chemin « sûr » qui emmène un robot d'une position initiale à une position finale désirée pour effectuer une tâche. Par « sûr » on entend que le robot ne doit pas entrer en collision ni avec les autres objets qui peuvent se trouver sur son chemin, ni avec lui-même. Il ne doit pas non plus passer par des singularités qui risquent de l'endommager ou de faire perdre sa contrôlabilité. Ce problème est très vaste et admet plusieurs variantes comme la planification de trajectoire pour les robots , la coopération de plusieurs robots, la planification sous contraintes différentielles et la planification des mécanismes à chaînes fermées. Il peut être appliqué dans d'autres domaines que la robotique, tel que la chimie par exemple pour la modélisation des molécules.

De nombreux travaux de recherche dans le domaine de la robotique ont été réalisés dans le but d'apporter des solutions à ce problème de planification de trajectoires. Diverses méthodes ont été développées dans ce sens. On peut citer les méthodes basées sur le Principe de Maximum de Pontryagin (PMP) , les méthodes basées sur la technique dite du plan de phase, la méthode des champs de potentiel ainsi que d'autres méthodes plus spécialisées qui, elles, ciblent des cas particuliers. Ces méthodes peuvent donner des solutions satisfaisantes; certaines peuvent même garantir une solution optimale (par exemple, les méthodes basées sur le PMP). Malheureusement, elles ne sont pas toujours applicables. Elles exigent, en général, des développements analytiques préalables qui sont spécifiques au problème traité. De ce fait, la mise en oeuvre peut s'avérer pénible ou même irréalisable, surtout lorsque le nombre de degrés de libertés du système augmente car dans ce cas la prise en compte de la dynamique sera particulièrement ardue en raison de la forte non linéarité du problème.

En conséquence, il existe un réel besoin d'une méthode suffisamment générale pour être applicable à une large catégorie de problèmes et dont la mise en oeuvre ne demande pas des efforts exorbitants de développement selon la complexité du problème à traiter.

Une telle méthode sera certainement utile en pratique même si, en définitive, elle ne fournirait que des solutions sous optimales.

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

### 3.2. les méthodes couramment utilisées pour résoudre ce genre de problèmes

Avant d'entamer le développement de notre approche, nous allons passer en revue les méthodes couramment utilisées pour résoudre ce genre de problèmes.

#### 3.2.1 LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRIAGUINE (PMP)

Le problème générique de recherche des mouvements libres définit typiquement un problème de commande optimale. L'outil mathématique privilégié pour le traiter dans ce cas est *le principe du maximum de Pontriaguine*. Il permet une prise en compte directe et exacte des contraintes de bornes sur toute variable de commande qui est, dans la plupart des travaux utilisant ce principe, l'effort actionneur. En effet, l'une des conditions de maximalité de ce principe assure l'appartenance de la commande optimale au domaine des commandes admissibles.

Mais Cette approche pose également un problème particulièrement ardu en ce qui concerne la prise en compte directe des contraintes sur l'état du système, dues par exemple à la présence d'obstacles dans l'environnement du robot. D'où la nécessité d'introduire des artifices afin de pouvoir traiter le problème dans sa totalité.

Sur le plan numérique, le système différentiel est difficile à traiter directement par les méthodes classiques (méthode de tir, différences finies,...). Il nécessite, en général, une procédure d'initialisation d'une grande précision afin de garantir la convergence de la méthode de résolution vers un optimum global

#### 3.2.2 METHODE DU PLAN DE PHASE

Cette méthode repose sur l'idée fondamentale de reformuler tout le problème du transfert libre d'un bras manipulateur en fonction d'un seul paramètre qui est l'abscisse curviligne. Cette méthode, conçue initialement pour les problèmes de suivi de trajectoires , a été étendue par la suite pour traiter les mouvements libres. Ainsi, les deux configurations initiale et finale définies dans l'espace opérationnel seront raccordées par une trajectoire initiale paramétrée. Durant le processus d'optimisation, elle sera perturbée afin de trouver la meilleure trajectoire au sens d'un critère prédéfini. En général, cette méthode est spécialement utilisée dans la planification des mouvements en temps minimal.

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

Malgré les avantages que présente cette méthode, en particulier, la réduction de la dimension du problème, des inconvénients sont à souligner. On peut les résumer en ceci :

- ❑ la méthode n'est valable que lorsque la fonction objectif à minimiser se limite à la durée de transfert,
- ❑ la méthode ne traite que les contraintes qui peuvent être transcrites en termes de l'abscisse curviligne et de ses dérivées,
- ❑ le fait que la méthode passe forcément par l'inversion du modèle géométrique en tout point de la trajectoire risque de nous introduire dans des problèmes de singularité qui sont loin d'être faciles à traiter,
- ❑ la définition des points de tirs dans le plan de phase implique l'usage de méthodes approximatives affectant la qualité du résultat final.

### 3.2.3 L'APPROXIMATION POLYNOMIALE

L'idée générale de cette approche est de relier les deux configurations initiale et finale par des fonctions  $q(t, \alpha)$  paramétrées dans l'espace articulaire.  $\alpha$  est le vecteur de paramètres qui sera déterminé par le processus d'optimisation de sorte que les fonctions  $q(t, \alpha)$  engendrent un coût inférieur à tout autre coût engendré par une fonction de même type. Le choix des fonctions  $q(t, \alpha)$  le plus répandu pour ce type de problèmes se fait dans l'espace des fonctions polynomiales.

Malgré la simplicité de la démarche basée sur l'approximation polynomiale et en dépit du nombre important de problèmes qu'elle peut aborder, les résultats que l'on peut obtenir sont généralement sub-optimaux quels que soient les raffinements apportés au processus de calcul.

Ceci est dû essentiellement aux inconvénients suivants :

- ❑ les fonctions polynomiales ne permettent pas d'explorer la totalité de l'espace des solutions faisables,
- ❑ le choix du degré maximal des fonctions polynomiales reste subjectif
- ❑ un degré  $d$  trop élevé induira un comportement oscillatoire de la trajectoire qui devient irréaliste.

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

D'une manière générale, les limitations et les inconvénients concernant les différentes approches évoquées précédemment se manifestent sous forme de deux problèmes majeurs fréquemment rencontrés en pratique. D'une part, la complexité de mise en œuvre s'accroît sensiblement avec le nombre de degré de liberté du robot, d'autre part, pour chaque nouveau cas ou contrainte introduite, ces méthodes imposent souvent la reformulation du problème ainsi que la modification des programmes de résolution numérique.

### 3.3 APPROCHE DES PROFILS ALEATOIRE DE TRAJECTOIRE (RPA)

Dans ce qui suit, nous allons présenter une nouvelle approche conçu dans le but de réduire ces difficultés rencontrées lors de la planification des mouvements libres des robots parallèles et dont la mise en œuvre reste facile même dans les cas complexes. L'approche des profils aléatoires de trajectoires, proposée par Chettibi et Lehtihet, tente justement de répondre à ce type de besoin mais dans le contexte plus restreint des bras manipulateurs à base fixe. Cette approche, ci-après appelée RPA (*Random-Profile Approach*), se distingue par quelques propriétés intéressantes :

**la versatilité** : Elle peut être utilisée pour traiter divers cas de problèmes de planification de trajectoires pour des bras manipulateurs plans ou spatiaux, redondants ou non, avec ou sans évitement d'obstacles, avec prise en compte de contraintes cinématiques et/ou dynamiques, en satisfaisant un critère de performance basé sur la durée d'exécution de la tâche et/ou la moyenne quadratique des efforts actionneurs.

**l'efficacité** : Elle donne des solutions de très bonne qualité dans des temps de calculs raisonnables et sans exiger pour autant que le modèle dynamique soit préalablement simplifié.

**la simplicité de mise en oeuvre** : Elle convertit le problème de planification de trajectoires en la recherche de la position optimale de quelques points de contrôle définis dans des espaces bornés. **[HAD 08]**

Le travail de recherche présenté dans ce projet est une contribution à la résolution du problème d'exploitation optimale des robots parallèles. Il aborde exclusivement le cas où ces robots évoluent dans un environnement plan structuré.

Nous allons commencer tout d'abord par une description de l'approche des profils aléatoires de trajectoire. Ensuite, nous allons souligner les nombreuses difficultés auxquelles nous seront

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

confrontés si nous essayons de mettre en oeuvre cette méthode dans des problèmes de robotique parallèle.

### 3.3.1 Idée directrice

Les inconnues d'un problème de planification de trajectoires sont :

- $q(t)$  : l'évolution dans le temps du vecteur des coordonnées généralisées,
- $T$  : la durée d'exécution de la tâche assignée,
- $\Gamma(t)$  : l'évolution du vecteur des efforts actionneurs (la commande  $\tau$ ).

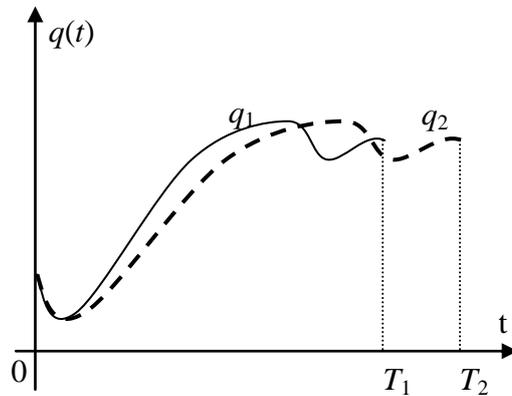
RPA considère que  $q(t)$  et  $T$  sont les inconnues principales du problème, le vecteur  $\Gamma(t)$  pouvant être facilement déduit via le modèle dynamique inverse dès que la trajectoire  $q(t)$  et ses dérivées par rapport au temps sont déterminées.

Une des difficultés rencontrées avec cette procédure réside dans la définition des bornes de recherche de l'inconnue  $T$ . Cet inconvénient apparaît, généralement, dans la nécessité de connaître préalablement une solution approximative du problème pour permettre aux algorithmes numériques de converger vers la solution optimale. De ce fait, il devient intéressant de transformer le problème d'une recherche sur des intervalles à bornes indéfinies vers un autre équivalent dont les bornes de recherche sont complètement connues et qui sera alors plus simple à résoudre.

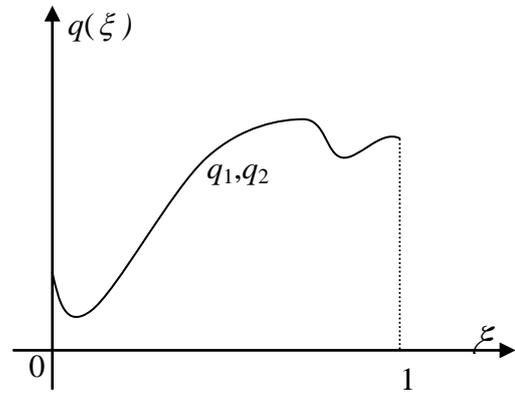
Dans cet esprit, et afin d'assurer certains avantages qui seront détaillés par la suite, les auteurs de [5] proposent de transformer le problème d'optimisation à bornes libres en un problème équivalent avec des bornes (de recherche) fixes. Cette transformation repose sur une idée fondamentale qui consiste à *dissocier la recherche de la forme optimale de la trajectoire  $q(t)$  de celle du temps de transfert  $T$* . Ce dernier ne sera pas traité comme une variable du problème d'optimisation, mais plutôt comme un paramètre *dépendant* qui serait déduit, de façon simple, directe et univoque pour toute *forme* donnée de trajectoires. Mais il faut, d'abord préciser ce que l'on entend par *forme de trajectoire*.

### 3.3.2 Trajectoire : forme et temps de transfert

L'évolution de la coordonnée articulaire  $q$  entre les deux instants  $t_i = 0$  et  $t_f = T$  et la représentation de cette évolution par une courbe dans un plan articulaire  $(t, q)$  donnent la trajectoire associée  $q(t)$ .



**Figure 3-1.a) Trajectoires articulaires de même forme**



**Figure 3.1-b) Forme normalisée de la trajectoire**

Considérons deux trajectoires  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  qui passent par les mêmes coordonnées  $q$  mais à des instants  $t$  différents (Fig. 3.1a). La première se termine à l'instant  $T_1$  et la deuxième à l'instant  $T_2 \neq T_1$ . Les deux trajectoires  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$ , bien que complètement différentes dans le plan articulaire, correspondent à la même trajectoire dans l'espace cartésien. Nous disons ainsi que  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  ont la même forme mais avec des temps de transfert différents. Ceci sous-entend que la même tâche présentée par une trajectoire opérationnelle dans l'espace cartésien peut être exécutée par plusieurs trajectoires articulaires de même forme  $q$  mais avec des vitesses  $\dot{q}$  et accélérations  $\ddot{q}$  différentes et, par conséquent, dans des durées  $T$  différentes.

Toutes les trajectoires  $q(t)$  de même forme se superposent lorsqu'on les représente dans un plan normalisé (Fig. 3.1b). Nous pouvons alors définir chaque trajectoire articulaire en donnant une forme  $q(\lambda)$  et un temps de transfert  $T$  (ceci par homothétie pour passer de l'intervalle  $[0, T]$ , pour la variable  $t$ , à l'intervalle  $[0,1]$  pour la variable  $\xi$ ). Ainsi, RPA compte traiter le problème de planification de trajectoires sans devoir intégrer le système d'équations différentielles issu du modèle dynamique. Néanmoins, obtenir la trajectoire optimale  $q(t)_{best}$  sur l'intervalle  $[0, T_{best}]$  reste un problème d'autant plus difficile que la borne supérieure de cet intervalle n'est pas connue. Afin de faciliter la recherche de la solution optimale, RPA effectue une normalisation de l'échelle du temps et introduit la notion de profil de trajectoire transformant alors le problème sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

Soit  $\mathbf{q}(t)$  une trajectoire donnée, réalisable ou non, de durée  $T$  quelconque. Il est toujours possible d'exprimer cette trajectoire de la façon suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\xi) \circ \xi(t) \quad 3.1$$

Le symbole  $\circ$  représente l'opérateur de composition de fonctions. La normalisation de l'échelle du temps est une fonction linéaire définie par  $\xi(t) = t / T$  de sorte que  $\xi \in [0, 1]$ . La fonction vectorielle  $\mathbf{q}(\xi)$  constitue le profil de la trajectoire considérée. Ce profil décrit complètement la succession des configurations prises par le système lorsque celui-ci exécute la trajectoire considérée depuis le départ ( $\xi = 0$ ) jusqu'à l'arrivée ( $\xi = 1$ ).

Il est clair que si  $\mathbf{q}(t)$  et  $T$  sont donnés alors le profil  $\mathbf{q}(\xi)$  correspondant sera déduit de façon unique via (3.1). En revanche, si un profil  $\mathbf{q}(\xi)$  est donné, il ne désignera pas une trajectoire unique mais plutôt une classe unique de trajectoires. Les trajectoires qui sont membres d'une même classe  $\mathbf{q}$  possèdent toutes le même profil  $\mathbf{q}$  et ne se distinguent les unes des autres que par leur durée d'exécution  $T$ ; le profil lui-même n'étant qu'un membre particulier ( $T \equiv 1$ ), il joue le rôle de représentant unique de la classe à laquelle il appartient.

Ci-après, nous utiliserons indistinctement les termes *profil de trajectoire* et *classe de trajectoire*.

Nous retiendrons pour le moment que RPA, comme son nom le suggère, va échantillonner aléatoirement l'espace des classes (et non pas celui des trajectoires individuelles) pour rechercher directement la classe  $\mathbf{q}_{best}$  contenant la trajectoire optimale  $\mathbf{q}(t)_{best}$ . Avant cela, il nous faut d'abord examiner comment les contraintes du problème sont prises en considération.

### 3.3.3 Les contraintes

Les diverses contraintes du problème sont classées en deux groupes distincts. Les contraintes du premier groupe sont celles qui peuvent être vérifiées indépendamment de la durée d'exécution. Elles ne concernent donc que le profil de la trajectoire et non pas la trajectoire elle-même. Il s'agit, en l'occurrence, des contraintes sur les débattements articulaires, celles sur l'évitement des obstacles ainsi que celles imposées aux limites de la tâche assignée. Quant aux contraintes du deuxième groupe, elles concernent non seulement le profil de la trajectoire mais également sa durée d'exécution. On compte dans ce deuxième groupe toutes les contraintes cinématiques et dynamiques.

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

### 3.3.3.1 Contraintes sur les débattements

Les articulations des robots sont conçues pour permettre une certaine liberté entre les solides rassemblés par cette liaison. Il est inhérent que les débattements articulaires des corps soient limités par des butées mécaniques ou même par la conception de la liaison elle-même. Par conséquent, tout mouvement dépassant les capacités tolérées de l'articulation risque de l'endommager. De ce fait, les mouvements planifiés doivent obligatoirement respecter cette contrainte.

La formulation explicite des contraintes sur les débattements articulaires est conditionnée par :

$$\forall t \in [0, T] \quad |q_i(t)| \leq q_i^{\max} \quad \text{avec } i = 1 \dots n$$

La valeur  $q_i^{\max}$  est une donnée intrinsèque au robot, qui présente la limite maximale de la position articulaire permise par la  $i^{\text{ème}}$  articulation.

### 3.3.3.2 Les contraintes cinématiques

De même pour les caractéristiques cinématiques des mouvements articulaires, les vitesses et les accélérations permises sont bornées. Ces limitations sont dues principalement à la conception de la liaison et à la technologie des actionneurs motorisant les liaisons actives. Dans certains cas particuliers, des limitations cinématiques supplémentaires peuvent être imposées par la nature de la tâche à exécuter. C'est le cas notamment lorsque les objets manipulés par le robot sont sensibles aux survitesses ou aux chocs de démarrage (accélération) et de freinage (décélération), on peut citer l'exemple de transport des contenants déversants.

Les contraintes cinématiques s'écrivent de la manière suivante :

- Pour les vitesses :

$$\forall t \in [0, T] \quad |\dot{q}_i(t)| \leq \dot{q}_i^{\max} \quad \text{avec } i = 1 \dots n$$

- Pour les accélérations :

$$\forall t \in [0, T] \quad |\ddot{q}_i(t)| \leq \ddot{q}_i^{\max} \quad \text{avec } i = 1 \dots n$$

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

Les valeurs limites  $\dot{q}_i^{\max}$  et  $\ddot{q}_i^{\max}$  peuvent être imposées par les caractéristiques techniques intrinsèques au robot ou par la nature de la tâche à réaliser.

### 3.3.3.3 Contraintes sur les couples moteurs

Ces contraintes traduisent les capacités maximales des actionneurs. Elles sont imposées par la technologie de chaque actionneur. Pour la  $i^{\text{ème}}$  articulation, la contrainte couple s'écrit :

$$\forall t \in [0, T] \quad |\tau_i(t)| \leq \tau_i^{\max} \quad \text{avec } i = 1 \dots n$$

où  $\tau_i^{\max}$  représente la valeur maximale tolérée.

### 3.3.3.4 Contraintes dues à la présence des obstacles dans l'espace de travail

Le robot travaille généralement dans des sites encombrés : sur des machines ou avec d'autres robots et il est rare qu'il soit placé dans un espace dégagé. La planification des mouvements doit bien évidemment tenir compte de l'existence de ces obstacles. Le mouvement optimal, dans ce cas, doit nécessairement *éviter* tout risque de *collision*.

Les contraintes d'évitement d'obstacles prennent la forme générale suivante :

$$g(q(t)) \leq 0$$

Où  $g$  est une fonction traduisant, habituellement, la distance entre les différents corps constituant la structure du robot et les différents obstacles présents dans son environnement. Ce genre de contraintes rend le problème de planification optimale des mouvements libres d'un robot très complexe.

## 3.4 CARACTERISTIQUES ET INSUFFISANCE DE RPA

L'approche de base que nous avons présentée dans la section précédente se distingue par sa versatilité, par sa remarquable simplicité de mise en oeuvre et par l'efficacité de son processus

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

d'optimisation imbriquée. En prévision de l'extension de cette approche à la robotique , nous récapitulons ci-dessous, d'une part, les caractéristiques les plus intéressantes qu'il serait souhaitable de conserver et nous énumérons, d'autre part, les insuffisances qu'il faudra combler. Les caractéristiques principales de RPA sont les suivantes :

- Elle ne nécessite pas de résoudre les équations différentielles issues du modèle dynamique .
- Elle effectue une recherche par classe de trajectoires et non pas par trajectoires individuelles, ce qui réduit de façon significative les temps de calculs .
- Elle transforme les contraintes cinématiques et dynamiques en des bornes sur la durée d'exécution de la tâche pour un profil donné de trajectoire .
- Elle traite les contraintes d'une façon séquentielle. Si nous traitons en priorités les plus contraignantes, nous pouvons éliminer au plus tôt toute tentative qui ne mènerait pas à une solution acceptable, réduisant ainsi les temps de calcul .
- Elle parvient à extraire explicitement le temps d'exécution qui minimise la fonction coût pour une classe donnée de trajectoire, permettant alors d'identifier directement la trajectoire optimale de cette classe .
- Elle transforme le problème en la recherche de la position de quelques points de contrôle dans l'espace des configurations. Ceci est un avantage certain puisque l'espace de recherche est limité par les débattements articulaires .
- Elle donne des résultats qui sont directement exploitables sur le plan pratique du moment que la solution est modélisée par des fonctions paramétriques.

De plus, ces résultats sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus par des méthodes indirectes basées sur PMP et les temps de calculs sont raisonnables, elle n'a besoin de connaître que les valeurs numériques de la fonction coût et n'utilise pas les diverses dérivées de cette fonction. De ce fait, elle reste applicable même si le nombre de degrés de liberté est important ou si le modèle de comportement du robot est discontinu (prise en compte des frottements par exemple), elle peut converger vers un optimum global et elle reste peu sensible aux choix des conditions initiales .

Cependant, l'utilisation de RPA pour résoudre le problème de planification de trajectoire des robots parallèles présente quelques difficultés de mise en oeuvre dont les principales sont énumérées ci-dessous :

La méthode est basée sur un processus qui consiste à engendrer des profils aléatoires des trajectoires dans l'espace des configurations du robot. Si nous appliquons directement ce

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

même processus dans le cas des robots parallèles, il sera très peu probable qu'un profil construit aléatoirement puisse vérifier les contraintes.

### 3.5 PRINCIPE DE L'APPROCHE RPA

La détermination de la trajectoire optimale revient à chercher la meilleure forme trajectoire  $q(\xi)$  et le temps de transfert  $T$  qui lui correspond. Si l'on parvient à traiter  $T$  comme un paramètre dépendant, l'effort de calcul sera alors orienté essentiellement vers la détermination de la meilleure forme de trajectoire. La mise en œuvre de cette approche nécessite de partager le problème en trois parties importantes :

- la première concerne la reformulation des équations pour en extraire explicitement le temps de transfert  $T$ .
- La deuxième a trait au choix de la technique à utiliser pour modéliser les formes de trajectoire  $q(\xi)$ .
- La troisième est en rapport avec la résolution proprement dite du problème par le biais d'une technique appropriée d'optimisation.

Ces trois aspects sont distincts, mais néanmoins indissociables car interdépendants.

#### 3.5.1 Reformulation des équations

Le but envisagé par cette reformulation constitue le fond de l'approche RPA. Pour dissocier la détermination du temps de transfert  $T$  de la recherche de la forme optimale de la trajectoire, nous devons faire apparaître le paramètre  $T$  explicitement dans toutes les équations. Pour ce faire, on a :

$$\forall t \in [0, T] : t = \xi \cdot T \text{ avec } \xi \in [0, 1] \quad (\text{III-1}),$$

#### Traitement du critère de performance

Le critère de performance (I-1) à limite droite libre sera réécrit sous la forme :

$$J = T \int_0^1 L(X(\xi), U(\xi), T) d\xi \quad (\text{III-2})$$

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

Le problème d'optimisation à temps final libre est ainsi transformé en un problème équivalent sur un intervalle à bornes fixes.

Les variables articulaires de position  $q(t)$ , de vitesse  $\dot{q}(t)$  et d'accélération  $\ddot{q}(t)$  du vecteur d'état  $X$  qui entrent dans la formulation du lagrangien du critère de performance seront aussi réécrites en fonction du paramètre  $T$  :

$$q(t) = q(\xi T) = q(\xi) ; \quad (3-2)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{T} q'(\xi) ; \quad (3-3)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \dot{q}(t)}{\partial \xi} = \frac{1}{T^2} q''(\xi) ; \quad (3-4)$$

Si  $q(t)$  est une trajectoire articulaire quelconque sur  $[0 T]$ , la fonction  $q(\xi)$  sera la forme de cette trajectoire reproduite dans l'intervalle normalisé  $[0 1]$ . Une trajectoire articulaire de forme normalisée  $q(\xi)$  peut être réalisée par le robot dans des durées  $T$  différentes et la meilleure trajectoire est celle qui est exécutée dans la durée  $Tq$  minimisant le critère  $Jq$ .

Sachant que pour chaque forme particulière  $Q(\xi)$  de  $q$  les fonctions  $Q'(\xi)$  et  $Q''(\xi)$  sont définies sans ambiguïtés et sont connues sur  $[0 1]$ , donc le critère de performance s'écrit uniquement en fonction du paramètre  $T$ . Soit :

$$J(Q(x), Q'(x), Q''(\xi), T) = J_Q(T)$$

Le meilleur temps  $T_Q$  qui correspond à cette forme particulière,  $Q(\xi)$ , est celui qui minimise le critère  $J_Q$ . Soit :

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

$$J_Q(T_Q) = \min_{T>0} J_Q(T)$$

Nous verrons plus loin que la détermination de la durée  $T_Q$  est souvent faite de manière directe. Ainsi apparaît un premier avantage de l'idée de dissociation de la durée  $T$  : si nous arrivons à trouver la meilleure forme de la trajectoire  $q(\xi)$ , le problème de planification sera réduite à la minimisation d'une simple fonction à une variable. Et si nous arrivons à générer toutes les formes possibles de trajectoire, le problème se réduira à la minimisation d'une suite de fonctions à une seule variable.

### 3.5.2 Traitement des contraintes du problème

Un autre avantage non négligeable, qu'offre cette reformulation, concerne la réduction considérable des difficultés relatives au traitement des contraintes du problème de planification. En extrayant le paramètre  $T$  et en utilisant les formules de transformation (3-4), (3-5), toutes les contraintes cinématiques et dynamiques peuvent être réécrites en termes de conditions sur les bornes de l'intervalle dans lequel la solution  $T_Q$  de l'équation est recherchée.

#### a) Les contraintes géométriques

Les contraintes de type géométrique restent comme des conditions sur la forme  $q(\xi)$

- *Contraintes sur les positions articulaires (débattements) :*

$$|q_i(t)| \leq q_i^{\max} \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow |q_i(\xi)| \leq q_i^{\max} \quad \forall \xi \in [0,1] \quad (3-5)$$

Chaque forme de trajectoire  $q(\xi)$  doit être dans l'intervalle permis par les débattements . Il suffit pour respecter cette contrainte de vérifier que :

$$\forall \xi \in [0,1] \quad \max q_i(\xi) \in [q_i^{\min}, q_i^{\max}]$$

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

- *Contraintes relatives aux obstacles :*

Les contraintes liées à l'environnement dans lequel travaille le robot s'écrivent en général sous la forme :

$$E(q(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow E(q(\xi), T) \leq 0 \quad \forall \xi \in [0, 1] \quad (3-6)$$

Le traitement de cette contrainte dépend de la structure des obstacles (définie par les fonctions  $E / \xi$ ) et de la manière de les représenter dans l'espace articulaire.

### **b) Les contraintes cinématiques**

- *Contraintes sur les vitesses :*

$$|\dot{q}_i(t)| \leq \dot{q}_i^{\max} \Rightarrow \frac{1}{T} |q'_i(\xi)| \leq \dot{q}_i^{\max} \Rightarrow T \geq \frac{|q'_i(\xi)|}{\dot{q}_i^{\max}}$$
$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \xi \in [0, 1]$$

soit :

$$T \geq T_v$$

Dans notre cas on trouve  $T=2.9$  s

Où  $T_v$  définit la limite inférieure des temps de transfert respectant la contrainte sur les vitesses.

Elle est choisie tel que :

$$T_v = \text{Max}_{i=1, n} \left[ \max_{[0, 1]} \frac{[q'_i(\xi)]}{\dot{q}_i^{\max}} \right] \quad (3-7)$$

- *Contraintes sur les accélérations :*

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

$$|\ddot{q}_i(t)| \leq \ddot{q}_i^{\max} \Rightarrow \frac{1}{T^2} |q_i''(\xi)| \Rightarrow \ddot{q}_i^{\max} \Rightarrow T \geq \left( \frac{|q_i''(\xi)|}{\ddot{q}_i^{\max}} \right)^{1/2}$$

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \xi \in [0, 1]$$

soit :

$$T \geq T_a \quad (3-8)$$

Où  $T_a$  défini la limite inférieure des temps de transfert respectant la contrainte sur les accélérations. Elle est choisie tel que :

$$T_a = \max_{i=1,n} \left[ \max_{[0,1]} \left( \frac{|q_i''(\xi)|}{\ddot{q}_i^{\max}} \right)^{1/2} \right] \quad (3-9)$$

Dans notre cas on trouve  $T_a=4.1s$

Les deux contraintes cinématiques sont ainsi transformées en une borne inférieure des valeurs permises pour  $T$ . Donc, pour une forme particulière  $Q(\xi)$ , le temps optimale  $T_Q$  doit satisfaire les contraintes cinématiques :

$$T_Q \geq T^* \quad (3-10)$$

avec :

$$T^* = \max(T_v, T_a) \quad (3-11)$$

### c) Contraintes dynamiques (sur les couples moteurs)

$$|\tau_i(t)| \leq \tau_i^{\max} \Rightarrow \left| \frac{1}{T^2} H_i(\xi) + \bar{G}_i(\xi) \right| \leq 1 \quad (3-12)$$

Selon le signe de  $H$  et  $\bar{G}$  et dans le cas le plus général, cette contrainte devient :

$$T_L \leq T \leq T_r \quad (3-13)$$

Elle définit une borne inférieure  $T_L$  et une borne supérieure  $T_r$  sur les valeurs des solutions admissibles de  $T_Q$  vérifiant (III-12).

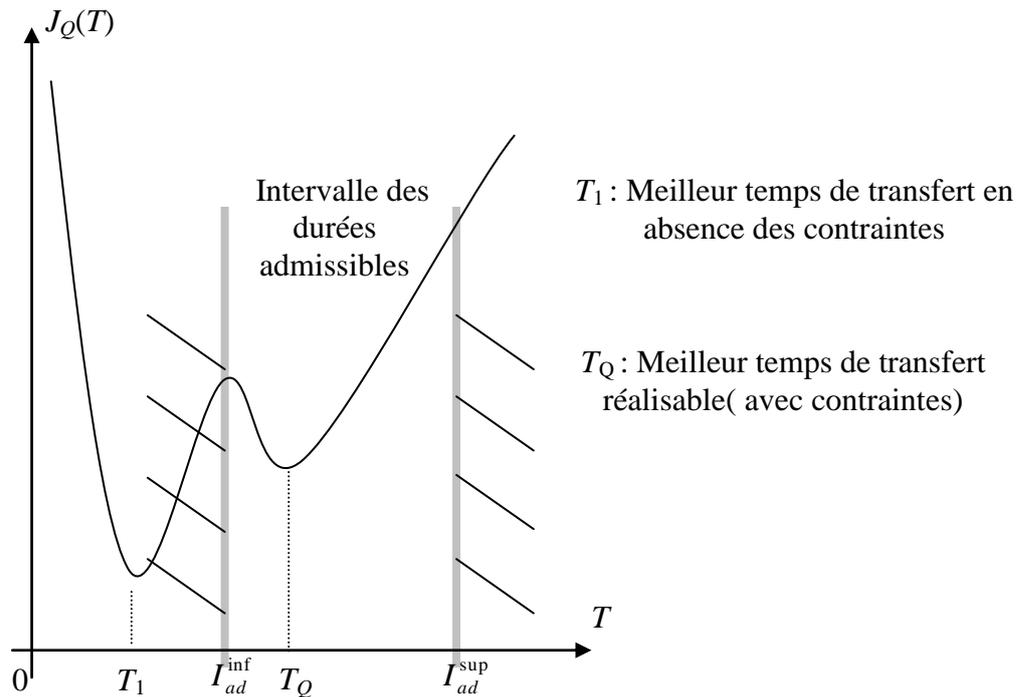
## Chapitre 03 : Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

Par la suite, nous appelons  $I_{ad}$ , l'intervalle des durées  $T$ , pour lesquelles une forme donnée  $Q(\xi)$  de temps optimal  $T_Q$  vérifie l'ensemble des contraintes cinématiques et dynamiques.

Soit :

$$I_{ad} = [T^*, \infty[ \cap [T_l, T_r] = [I_{ad}^{inf}, I_{ad}^{sup}] \quad (3-14)$$

Quand  $I_{ad} = \{\emptyset\}$  cela se traduit par une forme non réalisable par le robot, quelle que soit la valeur du temps de transfert  $T$ .



**Figure 3-2 : Schéma du meilleur temps de transfert pour une forme donnée  $Q(\xi)$**

Il est très important de remarquer que les contraintes, dans leur ensemble, telles qu'elles sont formulées sont indépendantes les unes des autres. Par conséquent, nous pouvons vérifier si une forme donnée est réalisable ou non, en traitant ces contraintes l'une après l'autre de manière séquentielle et dans un ordre quelconque. Si l'une des contraintes est violée, la forme  $Q(\lambda)$  sera rejetée directement sans qu'il soit nécessaire de tenir compte des autres contraintes. Ceci aura pour conséquence de simplifier considérablement la résolution du problème de planification.

### 3.5.3 Critères de performance à temps minimal :

## Chapitre 03 : Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

Le Lagrangien normalisé lié à ce critère s'écrit :

$$L(q(\xi), q'(\xi), q''(\xi), T) = 1$$

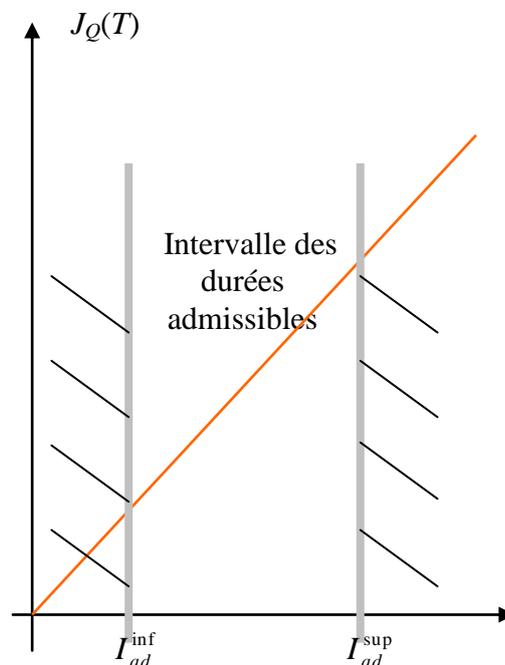
soit :

$$J = T \int_0^1 d\xi = T \tag{3-15}$$

Pour chaque forme particulière  $Q(\xi)$ , la meilleure durée  $T_Q$  qui minimise ce critère est :

$$T_Q = \min_{T>0} J_Q = \min_{T>0} (T) \tag{3-16}$$

Coïncide avec une valeur particulière sur la bissectrice du plan  $(J_Q, T)$



**Figure 3- 3: Critère de performance avec durée de transfert minimale**

Pour un robot de vitesses, accélérations et couples théoriquement non limités, la valeur de  $T_Q$  sera donc nulle. Cependant, les limitations et les contraintes cinématiques imposent une durée minimale pour l'exécution de la tâche correspondant à la forme  $Q(\lambda)$ . Cette limite est déterminée par :

$$T_{\min} = \min( [T^*, \infty[ \cap [T_p, T_r] ) = I_{ad}^{\inf} \tag{III-27}$$

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

Dans le cas où  $[T^* \cap [T_L, T_r]] = \emptyset$ , le robot ne pourra jamais, avec les capacités cinématiques et dynamiques qu'il possède, parcourir la trajectoire qui a la forme  $Q(\xi)$ . Ceci est quelle que soit la durée  $T$  du transfert. En d'autres termes, les contraintes seront toujours violées. La forme de trajectoire  $Q(\xi)$  correspondante est, dans ce cas, non réalisable.

### 3.6 TECHNIQUE D'OPTIMISATION

Afin que notre approche soit complète et utilisable, il est nécessaire d'avoir un moyen efficace pour la recherche de la meilleure forme possible en utilisant le modèle de trajectoire proposé.

Chercher la meilleure forme revient à résoudre un problème d'optimisation. Ici, il s'agit de trouver *la bonne forme*  $Q^*(\xi)$  dans l'ensemble  $\Omega$  de toutes les formes possibles et accessibles au modèle. Déjà, à chaque forme particulière  $Q(\xi)$  correspond une fonction  $J_Q(T)$  à partir de laquelle on peut (en tenant compte des contraintes et du critère de performance) tirer la valeur optimale  $v = J_Q(T_Q)$ . Cette valeur optimale est elle-même une fonction implicite de la forme  $Q(\xi)$ . Il faut maintenant trouver la bonne forme  $Q^*(\xi)$  qui fournira  $v^*$  la plus petite valeur de  $v$  dans l'ensemble  $\Omega$  des formes accessibles. Soit :

$$v^* = \min_{\Omega}(v)$$

Les variables de ce problème sont les ordonnées des nœuds libres dans l'espace articulaire et la fonction objectif à optimiser est définie par :

$$F_{\text{objectif}} = v(Q(\xi))$$

Nous pouvons en résumer le principe général de la manière suivante : ceci revient à générer aléatoirement des formes  $Q(\xi)$  en rejetant celles qui ne vérifient pas les contraintes géométriques. Chaque forme ainsi retenue fournira une valeur  $v$  et en répétant cette opération un grand nombre de fois en retiendra, à la fin, la forme ayant donné la plus petite valeur de  $v$ . Cette forme, avec le temps de transfert correspondant, sera considérée comme une solution approchée de la trajectoire optimale. Notons qu'il est possible d'utiliser des techniques

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

déterministes pour résoudre ce même problème. En outre les techniques déterministes sont capables, dans certains cas, de fournir des solutions de meilleure qualité en des temps de calcul plus courts. Néanmoins, les techniques déterministes traitent, en général, les contraintes de façon globale et nécessitent, de ce fait, une reformulation du problème très contraignante puisque dans chaque cas étudié on doit à la réécriture des codes de calcul. .

D'un autre côté, les techniques stochastiques offrent l'avantage d'un traitement beaucoup plus général du problème et profiteront, en outre, comme on le verra de la possibilité de traiter les contraintes séquentiellement. Par ailleurs, la mise en œuvre des techniques stochastiques est beaucoup plus facile et ne nécessitent pas une réécriture des codes de calcul lorsqu'on change les particularités du problème. L'inconvénient des méthodes stochastiques est qu'elles nécessitent, en général, un grand nombre de tentatives avant de fournir des résultats acceptables. Toutefois, ces méthodes n'ont besoin de connaître que les valeurs numériques de la fonction objectif et ne font pas appel, comme c'est le cas avec les techniques déterministes, aux diverses dérivées de cette fonction. En outre, les techniques stochastiques peuvent converger vers un optimum global et sont peu sensibles aux choix des conditions initiales. Ceci est en contraste avec les techniques déterministes qui nécessitent une bonne estimation initiale de la solution et donc une bonne connaissance du problème parce qu'elles ne peuvent converger que vers un optimum local.

Un autre avantage indéniable des techniques stochastiques, et c'est la raison pour laquelle elles sont mises en œuvre, c'est leur habilité d'aborder les problèmes de grande dimension (par exemple un nombre important de *d.d.l.* et de nœuds de raccordement). Ce qui n'est pas le cas pour les techniques déterministes dont la mise en œuvre tend à devenir une tâche fastidieuse.

Ayant retenu les techniques stochastiques comme moyen de résolution, tous les efforts de mise en œuvre seront orientés vers l'allègement du temps de calcul. Ceci se fera principalement par deux moyens :

- Le premier consiste à profiter du traitement séquentiel des contraintes, offert par la reformulation du problème. On ordonne ces contraintes selon un ordre de difficultés croissant de manière à rejeter au plus tôt toute tentative qui ne mènerait pas à une solution acceptable.

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

---

- Le deuxième, plus difficile à mettre en œuvre, consiste à élaborer une stratégie parmi les nombreuses possibilités de façon à transformer la recherche purement aléatoire en une recherche aléatoire plus ou moins guidée. Il s'agit essentiellement de faire en sorte que les diverses tentatives soient effectuées dans une partie du domaine offrant ainsi plus de chance d'apporter des améliorations en évitant ainsi les tentatives inutiles qui ne consommeraient que du temps de calcul sans apporter d'amélioration.

### 3.7 STRATEGIE GLOBALE ET APPLICATION DE RPA

L'approche consiste donc à générer aléatoirement (selon une technique stochastique d'optimisation) une forme  $q(\xi)$  puis, l'évaluer et la comparer avec une autre considérée comme la meilleure trouvée. Les contraintes sont vérifiées par ordre de difficulté. Une forme qui viole une des contraintes ou qui n'améliore pas le coût de tâche sera automatiquement rejetée. Cette opération est répétée suffisamment de fois jusqu'à la satisfaction d'un critère de convergence imposé à l'avance.

Organigramme de l'approche SCA

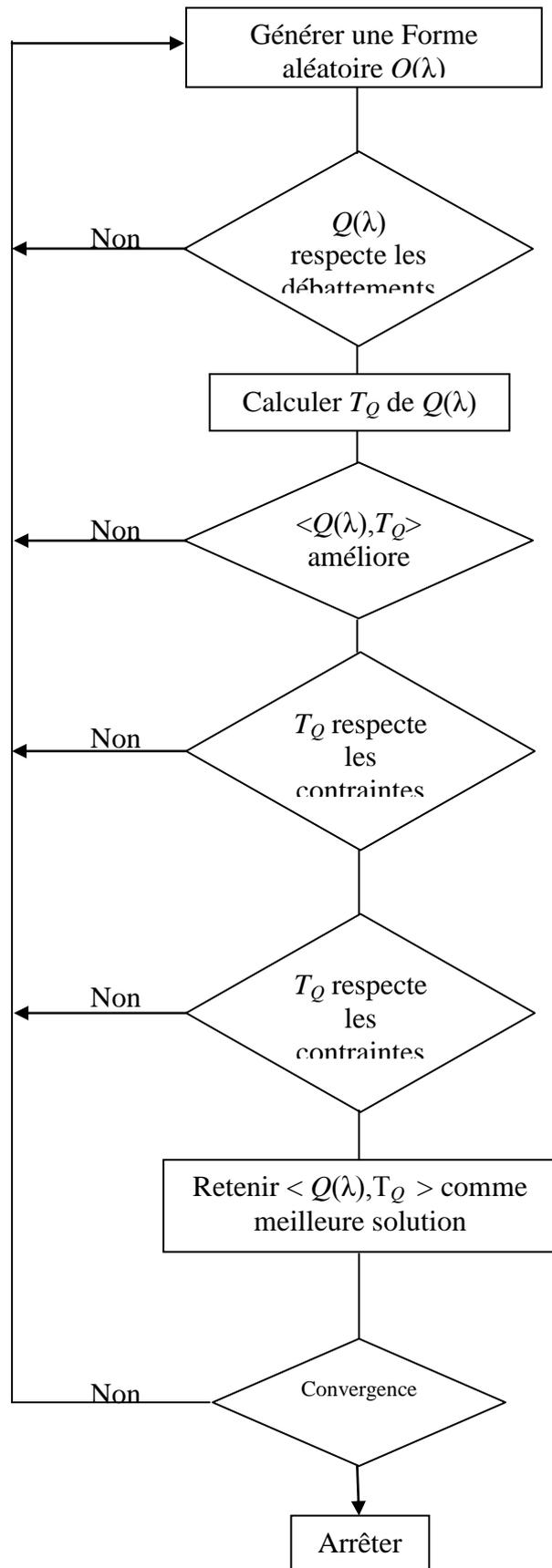


Figure 3-4 : Organigramme général de l'approche SCA.

## Chapitre 03 :Résolution du problème par l'approche des profils aléatoires de trajectoire

### APPLICATION

La mise en œuvre de la méthode nécessite de choisir une technique stochastique d'optimisation à appliquer. La technique qui offre en même temps une simplicité de mise en œuvre avec une convergence accélérée est celle de Monte Carlo avec réduction du voisinage de recherche.

Donc en appliquant cette technique on obtient les résultats suivants :

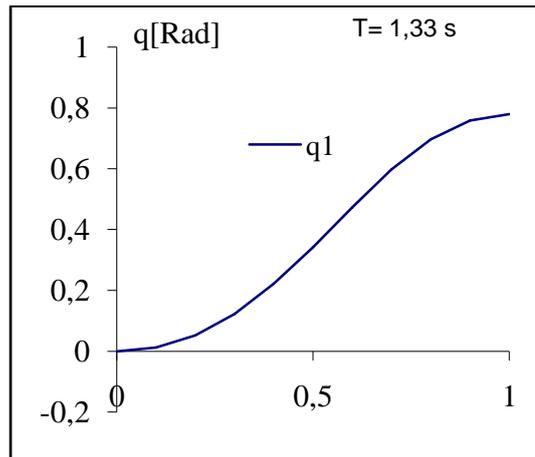


Figure 3.5 forme optimisé de  $q(\xi)$  trouvé par RPA

Donc notre allure optimale ça sera :

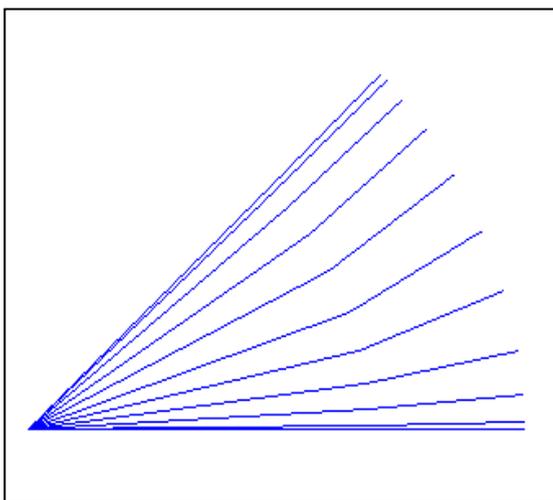


Figure 3-6 : Allure du mouvement optimale trouvée par RPA

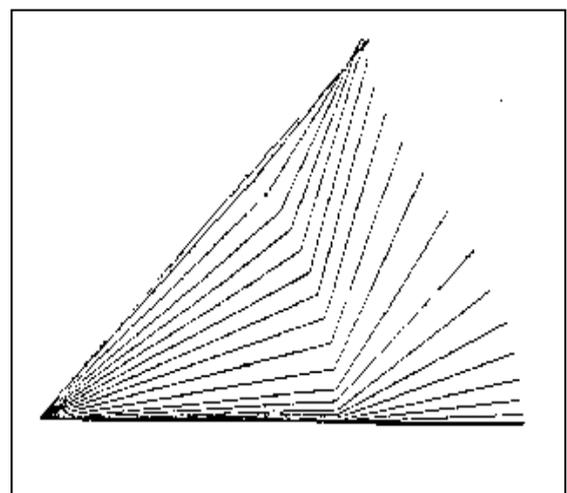


Figure 3-7 : Allure du mouvement optimale trouvée par Chen

### 3.8 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exposé le principe de l'approche des profils aléatoires de trajectoires, et on remarque que le problème de planification de trajectoires est transformé en un problème d'optimisation paramétrique sous contraintes.

malgré que RPA a des insuffisances qui sont très probables à atteindre, elle reste la meilleur approche à appliquer,et d'après les résultats qu'on a obtenu on remarque bien que cette approche nous donne une trajectoire optimale.

---

# **CONCLUSION GENERALE**

---

## Conclusion générale

---

Dans ce travail, nous nous sommes fixés comme objectif, l'étude de la planification de trajectoires pour les robots parallèles à 3ddl. Nous avons commencé par étudier les robots parallèles et les notions qui s'y rapportent. Cette modélisation n'est pas évidente étant donnée la diversité des architectures des robots parallèles et le manque de méthodes permettant de générer le modèle géométrique de ces robots. Les modèles géométriques sont soit générés au cas par cas, soit générés numériquement. La difficulté est de pouvoir exprimer automatiquement les variables opérationnelles en fonction des seules variables actionnées en éliminant les variables passives du modèle. Le modèle cinématique de ces robots est également étudié; il peut au choix, soit s'écrire comme la dérivée par rapport au temps du modèle géométrique, soit s'écrire directement en fonction des torseurs de vitesses associés aux liaisons. L'étude de ce modèle permet d'analyser l'état du robot et de détecter les positions singulières à éviter.

On a choisit d'utiliser la méthode de Lagrange pour la modélisation dynamique du fait de sa simplicité et sa rapidité pour arriver a nos résultats qui sont les couples.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la planification de trajectoires. Le problème de planification d'un mouvement optimal le long d'une tâche de transfert est formulé mathématiquement sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte et dont l'objectif est de minimiser une quantité physique représentée par un critère de performance tout en respectant certaines limitations et exigences de nature technologique liées au robot, à la tâche et à l'environnement. La résolution de ce problème conduit à la détermination de la trajectoire optimale que le robot doit suivre et pour cela on a choisit l'approche des profils aléatoires.

Cette dernière utilise une technique déterministe d'optimisation unidimensionnelle sous contraintes qui obtient le meilleur temps d'exécution de la tâche pour un profil donné de trajectoire.

L'étude que nous avons menée n'est que préliminaire. On recommande que d'autres études soient menées en continuité de cet axe et qui englobent les thèmes suivants :

- 1) Réalisation d'un prototype réel du robot étudié.
- 2) Optimisation par une autre approche plus simple et plus précise.
- 3) Généralisation de l'étude à des robots plus compliqués (4ddl, 5ddl et 6ddl).

# Références Bibliographiques

**[BOR 06] D.BOROJENI**, 'Modélisation cinématique et dynamique des systèmes poly-articulé à chaînes ouvertes ou fermées.cas des robots parallèles' , Thèse de doctorat soutenue le 3 Juillet 2006 à l'université Paris 7.VALENCE DE MARNE.

**[BOU 10] M.BOUAZIZ**, 'équations de Lagrange formalisme de Lagrange ' Cours 2010 à ENP Alger.

**[CHE 07] A.CHERFIA** , 'Analyse cinématique des robots parallèles',thèse de doctorat soutenue le 24 Juin 2007 à l'université Mentouri Constantine, faculté des sciences de l'ingénieur , département de génie mécanique.

**[Cla 88] R.Clavel**, "DELTA, a Fast Robot with Parallel Geometry",Proceedings of the 18th International Symposium of Robotic Manipulators, IFR Publication, pp. 91-100, 1988.

**[Cle 93] K. Cleary and T. Brooks**, "Kinematics analysis of a novel 6-DOF parallel manipulator," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, TX, pp. 708–713, 1993.

**[Gou 56] V. E. Gough**, « Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance », Proceedings Auto Div. Inst. Mech. Eng,1956-1957.

**[GUE 02] S.GUEGAN ,W.KHALIL**, 'Modélisation dynamique d'un robot parallèle à 3 ddl :l'Orthoglide', article publié dans « CIFA Nantes :France 2002 ».

**[HAD 08] M.HADDAD**, 'Exploitation optimale des plates-formes mobiles et des manipulateurs mobiles à roues. Extension de l'approche des profils aléatoires de trajectoires' , Thèse de doctorat soutenue le 3 Mai 2008 à l'EMP d'Alger.

**[ HUB 10 ] J.HUBERT** , 'Manipulateurs parallèles singularités et analyse statique', thèse de doctorat soutenue le 28 Octobre 2010 à l'école doctorale des mines de Paris-Paristech INRIA Sophia\_Antipolis.

**[Kim 03] D. Kim et W. K. Chung**, " Kinematic condition analysis of tree dof pure traslational parallèl manipulators", *Journal of mechanical design* vol 125, pp. 323-331, 2003.

## Annexe A

---

Voici les programmes qu'on a utilisé sur MatLab :

```
function [a0,a1,a2,a3]= fonctionr0123(ri,rpti,rf,rptf)
```

```
%programme1
```

```
%fonction pour le calcul de r(t)
```

```
a0=ri;a1=rpti;a2=1/4*(-2*rptf-4*rpti+3*rf-3*ri);a3=1/4*(rptf+rpti+ri-rf);
```

```
end
```

```
function
```

```
[r,teta1,teta3,teta5]=grapheposition135(tetai1,tetaf1,tetai3,tetaf3,tetai5,tetaf5,a0,a1,a2,a3)
```

```
%programme2
```

```
%programme visant a tracer les graphes teta1 et teta3 en fct du temps
```

```
t=0:1/1000:2;
```

```
r=a0+a1*t+a2*t.^2+a3*t.^3;
```

```
teta1=tetai1+r*(tetaf1-tetai1);
```

```
teta3=tetai3+r*(tetaf3-tetai3);
```

```
teta5=tetai5+r*(tetaf5-tetai5);
```

```
plot(t,v1','r')
```

```
hold on
```

```
plot(t,v3','g')
```

```
plot(t,v5','b')
```

```
xlabel('temps');ylabel('vitesse');title('courbe variation des vitesse teta1t teta3t teta5t');end
```

```
function
```

```
[rpt,tetapt1,tetapt3,tetapt5]=graphevitesse135(tetai1,tetaf1,tetai3,tetaf3,tetai5,tetaf5,a1,a2,a3)
```

```
%programme3
```

```
%programme visant a tracer les graphes tetapt1 et tetapt3 en fct du temps
```

```
t=0:1/1000:2;
```

```
rpt=a1+2*a2*t+3*a3*t.^2;
```

```
tetapt1=rpt*(tetaf1-tetai1);
```

```
tetapt3=rpt*(tetaf3-tetai3);
```

```
tetapt5=rpt*(tetaf5-tetai5);plot(t,tetapt1,'^r')
```

## Annexe A

---

```
hold on
plot(t,tetapt3,'*g')
plot(t,tetapt5,'+b')
xlabel('temps');
ylabel('vitesse');
legend('vitesse tetapt1' , 'vitesse tetapt3','vitesse tetapt5','Location','NorthWest');
title('courbe variation des vitesses tetapt1 tetapt3 tetapt5');end

function
[rptt,tetaptt1,tetaptt3,tetaptt5]=grapheacceleration135(tetai1,tetaf1,tetai3,tetaf3,tetai5,tetaf5,a2
,a3)

%programme4

%programme visant a tracer les graphes tetaptt1 et tetaptt3 en fct du temps

t=0:1/1000:2;
rptt=2*a2+6*a3*t;
tetaptt1=rptt*(tetaf1-tetai1);
tetaptt3=rptt*(tetaf3-tetai3);
tetaptt5=rptt*(tetaf5-tetai5);
plot(t,tetaptt1,'^r')
hold on
plot(t,tetaptt3,'*g')
plot(t,tetaptt5,'+b')
xlabel('temps');
ylabel('acceleration');
legend('acceleration tetaptt1' , 'acceleration tetaptt3','acceleration tetaptt5');
title('courbe variation des accelerations tetaptt1 tetaptt3 tetaptt5');end

function [alpha,beta]=progalphabeta(teta1,teta3,l1,d)

%programme5.1

%fonction donnant les valeurs de alpha et beta
```

## Annexe A

---

```
alpha=l1*(cos(teta3)-cos(teta1))-2*d;
beta=l1*(sin(teta3)-sin(teta1));end
function [A,B,C]=progABC(alpha,beta,l2)
%programme5.2
%fonction donnant les valeurs de A B et C aidant à résoudre l'equation du
%second degres
% [alpha,beta]=prog1(teta1,teta3,l1,l2,d);
A=(alpha).^2+(beta).^2;
B=2*alpha.*l2;
C=2*beta.*l2;end
function [y1,y2]=equadeuxvecteur(A,B,C)
%programme5.3
%fonction donnant le résultat de l'equation de second degres contraintes
%géométriques
k=zeros(2,length(A));
for i=1:length(A)
k(:,i)=roots( [ A(i)-B(i) 2*C(i) A(i)+B(i)]);
end
y1=k(1,:);
y2=k(2,:);
function [teta4]=angleteta4(teta3,y1)
%programme5
%teta4 vecteur ligne
%fonction donnant teta4en fonction de teta3graphe

teta4=2.*atan(y1)-teta3;
teta4=teta4;

t=0:1/1000:2;plot(t,teta4)
```

## Annexe A

---

```
xlabel('temps')
ylabel('angle teta4')
title('graphe variation de la valeur de l angle teta4')end
function [teta2]=angleteta2(alpha,beta,teta1,teta3,teta4)
%programme6
%teta2 vecteur ligne
%fonction donnant teta2
teta2=atan((beta/alpha)+tan(teta3+teta4))-teta1;
t=0:1/1000:2;
plot(t,teta2,'g')
xlabel('temps')
ylabel('angle teta2')
title('graphe variation de la valeur de l angle teta2') ;end
function [teta2pt,teta4pt]=vitesses24(teta1,teta2,teta3,teta4,l1,l2,tetapt1,tetapt3)
%programme8
%fonction délivrant les valeurs des vitesses teta2pt et teta4pt scalaires
teta1pt=tetapt1;
teta3pt=tetapt3;
Jn=[-l1*sin(teta1)-l2*sin(teta1+teta2)
l1*sin(teta3)+l2*sin(teta3+teta4);l1*cos(teta1)+l2*cos(teta1+teta2)      -l1*cos(teta3)-
l2*cos(teta3+teta4)];
Jv=[-l2*sin(teta1+teta2) l2*sin(teta3+teta4); l2*cos(teta1+teta2) -l2*cos(teta3+teta4)];

k=-inv(Jv)*Jn*[teta1pt;teta3pt];
teta2pt=k(1,:);
teta4pt=k(2,:);
end
function
[sigma1]=couple1(A1,A2,d1,d2,lambd1,lambd2,l1,l2,teta1,teta2,tetapt1,teta2pt,tetaptt1,teta
2ptt,iz5,tetaptt5)
%programme14
```

## Annexe A

---

```
%calcul du lagrangien 1
```

```
teta1pt=tetapt1;
```

```
teta1ptt=tetaptt1;
```

```
sigma1=(A1+A2*cos(teta2)).*teta1ptt-  
A2*sin(teta2).*teta1pt.*teta2pt+0.5*(d1+d2*cos(teta2)).*teta2ptt-  
0.5*d2*sin(teta2).*(teta2pt).^2+lambd1.*(-l1*sin(teta1)-  
l2*sin(teta1+teta2))+lambd2.*(l2*cos(teta1+teta2)+l1*cos(teta1))+iz5*tetaptt5;
```

```
t=0:1/1000:2;
```

```
plot(t,sigma1,'r')
```

```
xlabel('temps')
```

```
ylabel('sigma1')
```

```
title('graphe variation de sigma1 ');end
```