

D0001/02B

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

LABORATOIRE DE RECHERCHE EN ELECTROTECHNIQUE  
EQUIPE MACHINES ELECTRIQUES

## THESE

Présentée à

L'Ecole Nationale Polytechnique

En vue de l'obtention du grade de

### DOCTORAT d'ETAT

Discipline : Génie Electrique

Spécialité : Electrotechnique

Par

**Riyad KECHROUD**

Magister en Electrotechnique

## CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES MACHINES ELECTRIQUES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ASSOCIEE AUX MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

Soutenue publiquement le Mercredi 03 Avril 2002 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

A. Zergueras  
R. Ibtouen  
O. Touhami  
A. Boubakeur  
S. Mekhtoub  
B. Chetate  
M. Ouadjaout  
R. Debaili  
B. Trabelsi

Pr à l'ENP  
Pr à l'ENP  
Pr à l'ENP  
Pr à l'ENP  
MC à l'ENP  
MC à l'Université de Boumerdès  
Chargé de recherches  
P-DG Electro-Industries (Azazga)  
P-DG EDIEL (El-Achour)

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Invité  
Invité  
Invité

---

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

LABORATOIRE DE RECHERCHE EN ELECTROTECHNIQUE  
EQUIPE MACHINES ELECTRIQUES

---

## THESE

Présentée à

L'Ecole Nationale Polytechnique

En vue de l'obtention du grade de

### DOCTORAT d'ETAT

Discipline : Génie Electrique

Spécialité : Electrotechnique

Par

**Riyad KECHROUD**

Magister en Electrotechnique

---

## CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES MACHINES ELECTRIQUES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ASSOCIEE AUX MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

---

Soutenu publiquement le Mercredi 03 Avril 2002 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

A. Zergueras	Pr à l'ENP	Président
R. Ibtouen	Pr à l'ENP	Rapporteur
O. Touhami	Pr à l'ENP	Rapporteur
A. Boubakeur	Pr à l'ENP	Examineur
S. Mekhtoub	MC à l'ENP	Examineur
B. Chétate	MC à l'Université de Boumerdès	Examineur
M. Ouadjaout	Chargé de recherches	Invité
R. Debaili	P-DG Electro-Industries (Azazga)	Invité
B. Trabelsi	P-DG EDIEL (El-Achour)	Invité

---

## Résumé

Les différentes techniques de prise en compte du mouvement dans la modélisation électromagnétique des machines électriques requièrent un temps de calcul très onéreux. Dans une première phase, un modèle numérique à base d'éléments finis, reposant sur un calcul séparé des champs électromagnétiques dans les domaines statorique et rotorique, est développé. Le couplage de ces champs est assuré au niveau d'une interface, située dans l'entrefer, grâce aux multiplicateurs de Lagrange. Cette technique permet de simuler le mouvement sans avoir à effectuer de remaillage et permet d'imposer le nombre d'harmoniques d'espace. Sa validité a été montrée par la comparaison des performances électromagnétiques, d'un prototype de machine auto-synchrone à aimants permanents à induit sans encoches, prédéterminées numériquement et analytiquement à l'aide des modèles développés, avec ceux relevées expérimentalement. Dans une deuxième phase, un modèle de calcul de machines asynchrones basé sur les éléments finis est développé. Ce modèle repose sur l'hypothèse de la prédominance du premier harmonique d'espace du flux dans l'entrefer de ces machines. Les performances d'un prototype de moteur asynchrone à rotor massif prédéterminées à l'aide de ce modèle sont également confrontées à ceux issues d'un calcul numérique ainsi qu'à ceux relevées expérimentalement.

**Mots Clés :** Equations de Maxwell, Problème Magnétodynamique, Concept d'Euler, Concept de Lagrange, Éléments Finis, Multiplicateurs de Lagrange, Machine Synchrone à Aimants Permanents à Induit sans Encoches, Moteur Asynchrone à Rotor Massif Lisse.

## Abstract

The different ways used to take into account the movement in the dynamic modeling of electrical machines are time expensive. This is due to the re-meshing of the air gap in order to follow the movement and field diffusion. In a first stage, a finite element model, where the electromagnetic fields in both stator and rotor are calculated separately, is developed. The fields are then linked together in the air gap thanks to Lagrange's multipliers. This method allows following the movement of the rotor without re-meshing and the flux space harmonic number in the air gap can be imposed. The comparison of experimental data of a slotless PMSM prototype with the results obtained from the developed numerical and analytical models show good agreement. In a second stage, a finite element model of induction machines is developed. The main assumption is that only the fundamental space component of the flux is present in the air gap. The harmonic of higher order vanish at a suitable interface localized between the stator and the rotor. The experimental data of a solid rotor induction motor prototype are compared with those predicted with the developed numerical model and those obtained from a fixed mesh finite element model. The results show good agreement.

**Key Words:** Maxwell Equations, Magnetodynamic Problem, Euler Concept, Lagrange Concept, Finite elements, Lagrange Multipliers, Slotless permanent magnet synchronous motor, Solid rotor induction motor.

## ملخص

عدة تقنيات تم وضعها من طرف الباحثين حتى يمكن تتبع حركة الدوار عند محاكاة الماكينات الكهربائية بواسطة الحاسب إلا أن هذه التقنيات مكلفة من الوقت. تم في هذه الدراسة تطوير نموذج عددي يعتمد على طريقة "العناصر المنتهية" أين يتم حساب الحقل الكهرومغناطيسي في الدوار و الساكن بطريقة مستقلة. ربط الحقلين يتم في الثغرة الهوائية بواسطة عوامل "لاغرانج". النتائج المحصل عليها بواسطة النموذج التحليلي و العددي المطورين تتوافق مع تلك التي تم قياسها على ماكينة ذاتية التزامن ذات مغناطيس دائم. تم أيضا تطوير نموذج عددي يعتمد أيضا على العناصر المنتهية لحساب المحركات اللامتزامنة. هذا النموذج يعتمد على فرضية أن التدفق في الثغرة الهوائية جيبي. يتم مقارنة النتائج المحصل عليها مخبريا بواسطة محرك لا ترامي ذو دوار متجانس و أملس مع تلك المتنبأ بها بواسطة النموذج العددي المطور و كذا مع المحصل عليها بواسطة نموذج عددي أين يفترض أن الدوار ساكن. النتائج المحصل عليها مشجعة.

## AVANT- PROPOS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à remercier en premier lieu Dieu le tout puissant pour nous avoir donné la force et la patience pour mener à terme ce travail.

Le travail que nous présentons dans cette thèse a été effectué au sein du Laboratoire de Recherche en Electrotechnique, Equipe Machines Electriques de l'Ecole Nationale Polytechnique.

Nous tenons à remercier Monsieur R. Ibtouen et Monsieur O. Touhami, Professeurs à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour la confiance qu'ils nous ont témoignée en nous accueillant dans leur groupe de recherche.

Nous nous devons de souligner leur grande disponibilité qu'ils ont sans cesse manifestée à notre égard. Bien qu'il soit difficile d'exprimer ici toute notre reconnaissance, qu'ils trouvent en cette thèse le témoignage de notre profonde reconnaissance. C'est un honneur qu'ils soient rapporteurs de nos travaux.

Nous présentons nos plus vifs remerciements à Monsieur A. Zergueras, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour l'honneur et le plaisir qu'il nous fait en présidant notre jury de soutenance.

Nous tenons à remercier Monsieur A. Boubakeur, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, Monsieur S. Mekhtoub, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique, et Monsieur B. Chetate, Maître de Conférences à l'Université de Boumerdès, pour avoir honoré de leur présence le jury et d'avoir accepté d'être examinateurs de nos travaux.

Nous remercions Monsieur M. OUADJAOUT, Chargé de Recherches à l'Ecole Nationale Polytechnique, Monsieur R. Debaili, PDG d'Electro-Industries, et Monsieur B. Trabelsi, PDG d'EDIEL, qui nous honorent de leur présence parmi les membres du jury.

Que Monsieur S. Bouazabia, Directeur du Laboratoire d'Electronique de Puissance et de Machines Electriques de la faculté de Génie Electrique et d'Informatique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, soit sûr de notre reconnaissance pour tous les moyens qu'il a mis à notre disposition.

Que Monsieur R. Djellouli, « Assistant-Professor » à l'Université du Colorado (Boulder), soit sûr de notre reconnaissance pour sa disponibilité et son aide.

Nous remercions Monsieur M. Zaim, Professeur à l'IUT de Saint-Nazaire, pour son aide amicale.

Nous remercions nos collègues et amis de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene et de l'Université de Médéa.

Nous remercions nos amis, Belkacem, Daoud, Abdelkader, Kamel, Smail, Mohamed, etc. je ne pourrais les citer tous ici, pour l'aide qu'ils nous ont apportée.

Nous tenons à remercier particulièrement Belkacem, les Frères Ayad, Madame Ahlem, son Mari, Nadia et Samia de l'aide qu'ils m'ont apportée dans les moments critiques.

Nous remercions Monsieur L. Achir, ex PDG de la Société Algéro- Japonaise d'Engineering et de Construction (SAJEC), son nouveau PDG, Monsieur Mizushina, et les agents de cette société, pour nous avoir accueilli au sein de leur groupe et pour les moyens mis à notre disposition.

Nous remercions nos frères et amis de la mosquée « Larbi El Tebessi » pour le soutien moral et logistique.

Les grandes qualités humaines qui émanent de l'équipe Machines Electriques ont joué un rôle majeur dans l'accomplissement de ce travail de thèse.

Je ne saurais enfin exprimer tout ce que je dois à mon père, ma mère, mes frères, sœurs, et ma famille pour son soutien moral et financier sans limites.

# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	1
<b>CHAPITRE I:</b>	
<b>MODELISATION ELECTROMAGNETIQUE DES MACHINES ELECTRIQUES</b>	6
I.1 INTRODUCTION	7
I.2 DESCRIPTION LAGRANGIENNE DES EQUATIONS DE MAXWELL	7
I.2.1 Equations de Maxwell	7
I.2.2 Lois constitutives des milieux	8
I.2.3 Equations de Maxwell sous l'hypothèse de quasi-stationnarité	9
I.2.4 Conditions d'interface	9
I.2.5 Formulation A-V des équations de Maxwell	9
I.3 DESCRIPTION EULERIENNE DES EQUATIONS DE MAXWELL	11
I.3.1 Lois constitutives des milieux	12
I.3.2 Conditions d'interface	12
I.3.3 Formulation A-V des équations de Maxwell	12
I.4 DESCRIPTION 2D DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE AU NIVEAU DES MACHINES ELECTRIQUES	15
I.5 MODELISATION DE L'ENTREFER DES MACHINES ELECTRIQUES	16
I.5.1 Cas de la méthode des différences finies	16
I.5.2 Cas de la méthode des éléments finis	17
I.5.2.1 La Topologie constante	17
I.5.2.2 La Ligne de glissement	18
I.5.2.3 La Bande de roulement	19
I.5.2.4 Le Macro-Elément	19
I.5.2.5 Méthode du double entrefer	21
I.5.2.6 Méthode des multiplicateurs de Lagrange	22
I.5.3 Cas des méthodes hybrides	24
I.5.3.1 Couplage éléments finis- solution analytique	24
I.5.3.2 Couplage éléments finis- méthode des équations intégrales de frontières	24
I.6 CONCLUSION	25
REFERENCES	26
<b>CHAPITRE II:</b>	
<b>MODELISATION DYNAMIQUE DES MOTEURS SYNCHRONES A AIMANTS PERMANENTS</b>	29
II.1 INTRODUCTION	30
II.2 MODELISATION ELECTROMAGNETIQUE	30
II.2.1 Hypothèses	30
II.2.2 Domaine d'étude et mise en équations	31
II.3 RESOLUTION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	34
II.3.1 Formulation du type Galerkin et de Ritz de l'équation de diffusion	35
II.3.2 Discrétisation spatiale par éléments finis	36
II.3.3 Discrétisation temporelle de l'équation de diffusion	41
II.3.4 Linéarisation de l'équation de diffusion du champ magnétique	42
II.4 COUPLAGE DES CHAMPS STATORIQUE ET ROTORIQUE	43
II.4.1 Equations de couplage	43
II.4.2 Techniques de couplage	45
II.4.2.1 Technique de transformation	45
II.4.2.2 Technique des multiplicateurs de Lagrange	46

II.4.2.3 Technique de pénalisation	47
II.5 STOCKAGE ET RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS	48
II.6 DETERMINATION DES GRANDEURS CARACTERISTIQUES	49
II.6.1 Expressions des différentes grandeurs locales	49
a) Potentiel vecteur magnétique	49
b) Composantes et module de l'induction magnétique	49
c) Perméabilité magnétique	49
d) Champ magnétique	50
e) Energie magnétique	50
II.6.2 Expression des différentes grandeurs globales	50
a) Calcul du flux et de la force contre électromotrice (f.c.e.m.)	50
b) Calcul des pertes	51
c) Les puissances	52
d) Couple électromagnétique	53
II.7 CONCLUSION	54
REFERENCES	55

### CHAPITRE III:

<b>MODELISATION DES MOTEURS ASYNCHRONES RAPIDES</b>	<b>58</b>
III.1 INTRODUCTION	58
III.2 CONTRAINTES LIEES AU DEVELOPPEMENT DES MOTEURS RAPIDES	59
III.2.1 Contraintes mécaniques	59
III.2.2 Limitations d'ordre thermique	61
III.2.3 Combinaison de ces limitations	62
III.3 LES SOLUTIONS POSSIBLES	62
III.3.1 Machines synchrones	63
III.3.1.1 Machines synchrones à aimants permanents	63
III.3.1.2 Machines synchrones à réluctance variable	64
III.3.2 Machines Asynchrones	64
III.3.2.1 Structures à rotor massif homogène	65
III.3.2.2 Structures à rotor massif hétérogène	65
III.4 MODELES DE CALCUL DES MACHINES ASYNCHRONES EN REGIME PERMANENT	68
III.4.1 Méthode analytique	68
III.4.2 Méthode des Intégrales de Frontières	68
III.4.3 Méthode des Différences Finies	69
III.4.4 Méthode des Eléments Finis	69
III.4.5 Méthode du double entrefer	71
III.4.6 Méthode du double entrefer avec approximation du premier harmonique	71
III.5 MODELISATION ELECTROMAGNETIQUE DES MOTEURS ASYNCHRONES RAPIDES	72
III.5.1 Hypothèses	72
III.5.2 Domaine d'étude et Mise en équations	73
III.6 RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE LA MAGNETODYNAMIQUE COMPLEXE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	75
III.6.1 Formulation du type Galerkin et de Ritz de l'équation de la magnétodynamique complexe.	75
III.6.2 Discrétisation spatiale par éléments finis	76
III.6.3 Limites de l'étude en régime linéaire	78
III.7 COUPLAGE DES CHAMPS STATORIQUE ET ROTORIQUE	80
III.7.1 Equations de couplage	80
III.7.2 Techniques de couplage	81

III.7.2.1 Technique de transformation	81
III.7.2.2 Technique des multiplicateurs de Lagrange	81
III.7.2.3 Technique de pénalisation	82
III.8 STOCKAGE ET RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS	82
III.9 ANALYSE DU REGIME PERMANENT	83
III.10 DETERMINATION DES PERFORMANCES ELECTROMAGNETIQUES	83
III.10.1 Expression des différentes grandeurs locales	84
a) Potentiel vecteur magnétique	84
b) Composantes et module de l'induction magnétique	84
III.10.2 Expression des différentes grandeurs globales	85
a) Calcul du flux embrassé par encoche et par phase, de la force contre- électromotrice et de l'impédance par phase	85
b) Calcul des pertes	85
c) Les puissances	86
d) Couple Electromagnétique	86
e) Facteur de Puissance	86
III.11 CONCLUSION	87
REFERNCES	88
<b>CHAPITRE IV:</b>	
<b>VALIDATION DES MODELES ELEMENTS FINIS-MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE</b>	<b>90</b>
IV.1 INTRODUCTION	91
IV.2 PROTOTYPE DE LA MACHINE SYNCHRONE A AIMANTS PERMANENTS ETUDIEE	91
IV.2.1 Description de la maquette	91
IV.2.1.1 Constitution du Rotor	92
IV.2.1.2 Bobinage statorique	92
IV.2.2 Génération des courants d'alimentation	93
IV.2.3 Banc de mesure du couple	94
IV.3 MODELISATION ANALYTIQUE DE LA STRUCTURE ETUDIEE	95
IV.3.1 Potentiel vecteur magnétique dû aux densités de courants superficielles situées sur les flancs radiaux	96
IV.3.2 Potentiel vecteur magnétique dû aux densités de courants superficielles situées sur les flancs azimutaux	97
IV.3.2.1 Potentiel dû aux densités de courant situées en $r_1$	98
IV.3.2.2 Potentiel dû aux densités de courants situés en $r_2$	98
IV.4 VALIDATION DES MODELES NUMERIQUES ET ANALYTIQUE	100
IV.4.1 Etude à vide	100
IV.4.2 Etude en charge	104
IV.4.3 Etude en considérant uniquement le fondamental d'espace du potentiel vecteur magnétique	106
IV.5 VALIDATION DU MODELE ELEMENTS FINIS COMPLEXE UTILISANT LE COUPLAGE AVEC LE PREMIER HARMONIQUE D'ESPACE	108
IV.5.1 Prototype de la machine asynchrone a rotor massif lisse utilisé	108
IV.5.2 Comparaison des résultats obtenus	109
IV.6 CONCLUSION	113
REFERNCES	114
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>116</b>

## GLOSSAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
 المكتبة  
**BIBLIOTHEQUE** — المكتبة  
**Ecole Nationale Polytechnique**

- $\vec{E}$  Vecteur champ électrique.
- $\vec{H}$  Vecteur champ magnétique.
- $\vec{D}$  Vecteur déplacement électrique.
- $\vec{B}$  Vecteur l'induction magnétique.
- $\rho$  Densité volumique de charge.
- $\vec{J}$  Vecteur densité de courant.
- $\vec{B}_r$  Vecteur induction magnétique rémanente.
- $\mu_0$  Perméabilité magnétique du vide.
- $\epsilon_0$  Permittivité du vide.
- $\mu_r$  Perméabilité magnétique relative.
- $\epsilon_r$  Permittivité électrique relative.
- $\sigma$  Conductivité électrique.
- $\vec{J}_s$  Vecteur densité de courant imposée par une source extérieure.
- $\vec{v}$  Vecteur vitesse.
- $\vec{\omega}$  Vecteur vitesse angulaire.
- $\vec{j}$  Densité de courant surfacique.
- $\vec{A}$  Potentiel vecteur magnétique.
- $A_s$  Potentiel vecteur magnétique dans un référentiel statorique.
- $A_r$  Potentiel vecteur magnétique dans un référentiel rotorique.
- $V$  Potentiel scalaire électrique.
- $\vec{M}$  Vecteur aimantation.
- $\theta_s$  Position angulaire par rapport à un référentiel statorique.
- $\theta_r$  Position angulaire par rapport à un référentiel rotorique.
- $\delta_0$  Position du rotor par rapport au stator à l'instant  $t=0$ .
- $\Omega_s$  Domaine statorique (Stator + une partie de l'entrefer).
- $\Omega_r$  Domaine rotorique (Rotor + l'autre partie de l'entrefer).
- $\Gamma$  Interface stator- rotor.
- $p$  Nombre de paire de pôles.
- $\Pi$  Fonctionnelle.
- $\Pi'$  Fonctionnelle modifiée.
- $v$  Fonction poids ou de projection.
- $\bar{v}$  Fonction complexe de projection
- $N_i$  Fonction de forme liée au nœud  $i$ .
- $\lambda$  Multiplicateur de Lagrange.
- $[vS]$  Matrice réductivité.
- $[\sigma T]$  Matrice conductivité.
- $\omega$  Pulsation des courants statoriques.
- $\Omega$  Vitesse de rotation angulaire.
- $g$  Glissement.
- $\beta_i$  Demi- ouverture angulaire du barreau aimanté d'indice  $i$ .
- $\alpha_i$  Position angulaire de l'axe de symétrie du barreau aimanté d'indice  $i$ .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## INTRODUCTION GENERALE

Jusqu'à la fin des années 70, le marché des entraînements électriques à vitesse variable était dominé par les entraînements par moteurs à courant continu [1]. L'utilisation des moteurs électriques alternatifs industriels était conforme à un usage établi : Le moteur asynchrone à cage était considéré comme le moteur à usage général ; le moteur synchrone était utilisé pour les grandes puissances de l'ordre de plusieurs mégawatts quant au moteur à courant continu, il était plus particulièrement destiné aux entraînements électriques à vitesse variable.

Aujourd'hui, cette classification n'est plus respectée en toute rigueur. De nombreux moteurs alternatifs synchrones ou asynchrones sont alimentés par l'intermédiaire de convertisseurs statiques de fréquence. Cette conversion peut être directe grâce aux cycloconvertisseurs ou indirecte grâce à des ensembles redresseur-filtre-commutateur de courant ou onduleur de tension. Les entraînements électriques se substituent ainsi de plus en plus aux entraînements mécaniques et aux entraînements électriques à courant continu. Les pompes, compresseurs et ventilateurs sont ainsi entraînés à vitesse variable par des moteurs à courant alternatif. Les moteurs à courant continu, dans les procédés industriels tels que le laminage (exemple du groupe Ward-Léonard) ou la traction ferroviaire, sont remplacés par des moteurs à courant alternatif à vitesse variable.

Il y a donc, sur le plan industriel, une véritable mutation des entraînements par des moteurs à courant continu vers les entraînements par des moteurs à courant alternatif. Il y a aussi une extension du domaine d'application des moteurs électriques à d'autres types d'entraînements [1]. Dans le domaine des grandes vitesses, les turbines à vapeur ou à gaz, destinées à l'entraînement des compresseurs, sont remplacées par des moteurs synchrones ou asynchrones. Alors que dans le domaine des forts couples à très basse vitesse, les moteurs électriques alternatifs se substituent aux moteurs hydrauliques.

Les machines électriques à courant alternatif ont fait et font encore l'objet de nombreux travaux de recherche visant à améliorer leur modélisation et à optimiser leurs conceptions, ce qui est également l'objet de notre travail. Si les modèles externes permettaient d'avoir une approche globale des performances de ces machines par des considérations globales sur les flux, les énergies, les couples, etc., ils ne pouvaient donner des résultats appréciables au niveau des grandeurs locales (saturations, échauffements, courants induits, etc.) sans une somme considérable de travail et de réflexion.

L'évolution de l'informatique et l'abaissement du coût en temps de calcul ont conduit les concepteurs à un usage de l'ordinateur de plus en plus intensif (CAO). Le développement des méthodes numériques de résolution des équations de la physique a permis l'étude locale des champs électromagnétiques et thermiques [2] ainsi que le calcul des contraintes mécaniques. L'élaboration de ces modèles internes permet désormais de prédéterminer avec une grande fiabilité les conditions de fonctionnement des prototypes et des machines définitives. Cependant, la modélisation dynamique des machines électriques à l'aide de ces modèles est délicate lorsqu'il s'agit en même temps de suivre le mouvement du rotor et l'évolution des grandeurs électromagnétiques. Dans les différentes techniques utilisées à ce jour, le champ magnétique est déterminé à chaque pas de temps pour l'ensemble de la machine. Les maillages étant attachés séparément à chacun des domaines, la connexion des potentiels vecteurs dans l'entrefer fait appel à différentes techniques à savoir :

- Le macro-élément [3];

- 
- Les méthodes des équations intégrales de frontière dans l'entrefer [4];
  - Le remaillage de l'entrefer à chaque pas de temps [5];
  - La ligne d'entrefer [6];
  - Et la continuité par multiplicateurs de Lagrange [7].

Ces méthodes qui peuvent être qualifiées de méthodes temporelles par opposition aux méthodes fréquentielles sont très performantes. Elles ont cependant l'inconvénient d'imposer des pas de temps très courts pour prendre en compte les effets de dentures; les temps de calculs sont donc très longs. Une méthode alternative développée par le GREEN (Groupe de Recherche en Electronique et en Electrotechnique de Nancy) [8, 9] baptisée « méthode du double entrefer » conduit à des temps de calcul nettement réduits.

Nous proposons, dans le cadre de notre travail, une méthode dérivant de la technique de continuité par multiplicateurs de Lagrange où le mouvement du rotor est suivi tout en gardant la topologie des maillages rotorique et statorique fixes [10].

- Le premier Chapitre de notre travail porte sur le traitement des équations de Maxwell selon les concepts d'Euler et de Lagrange ainsi que sur les techniques courantes de prise en compte du mouvement au niveau des modèles numériques des machines électriques.

En effet, les modèles internes reposent sur la formulation des équations de Maxwell dans des domaines comprenant des matériaux ferromagnétiques et/ou des matériaux conducteurs [11]. Certains domaines peuvent être animés d'un mouvement par rapport aux autres. Ce mouvement relatif doit être pris en compte dans la technique de résolution du problème posé par la formulation des équations.

- Au niveau du deuxième Chapitre, une modélisation dynamique des moteurs synchrones à aimants permanents, reposant sur une analyse temporelle du problème mais en séparant les domaines statorique et rotorique tout en cherchant le moyen pratique de les coupler, est développée.

Nous présentons donc un modèle de calcul numérique des machines synchrones autopilotées à aimants permanents [10]. Ce modèle repose sur une résolution séparée, basée sur la méthode des éléments finies, des équations gouvernant la diffusion du champ électromagnétique dans le stator et dans le rotor. La continuité du champ électromagnétique entre les parties fixe et mobile est assurée pour n'importe quelle position relative du rotor par rapport au stator grâce à la technique des multiplicateurs de Lagrange. Nous cherchons à montrer que le couplage peut être effectué en considérant l'ensemble des harmoniques d'espace ou en considérant uniquement le fondamental du potentiel vecteur magnétique.

- Au niveau du troisième Chapitre, nous examinons les lois de la physique gouvernant la conception des moteurs rapides. Nous insistons par la suite sur la modélisation électromagnétique des moteurs asynchrones à rotor massif. Les applications des machines rapides et des différentes technologies développées ainsi que les avantages et les contraintes qu'elles présentent font également l'objet de ce chapitre.

L'étude dynamique des moteurs rapides est complexe, en particulier celle des moteurs asynchrones, à cause notamment du mouvement différentiel entre le rotor et le stator. Nous développons ainsi une méthode de calcul des machines asynchrones classiques ou rapides en régime permanent, basée sur la méthode des éléments finis. Cette méthode repose sur une hypothèse fondamentale, à savoir que seules deux fréquences sont en présence dans la

---

---

machine : La fréquence  $f$  des courants statoriques au niveau du domaine fixe (stator) et la fréquence des courants statoriques  $gf$  au niveau du domaine mobile (rotor) ( $g$  étant le glissement). Cette méthode est basée sur une séparation des domaines en mouvement relatif et sur un couplage des champs, électromagnétiques statorique et rotorique, grâce aux multiplicateurs de Lagrange en ne considérant que le fondamental du champ électromagnétique dans l'entrefer. Ce modèle dérive du modèle développé par R.Kechroud et Al. [12] où l'ensemble des harmoniques d'espace est pris en considération lors du couplage des champs statorique et rotorique. L'emploi des éléments finis complexes conduit cependant à une prise en considération de la saturation par l'introduction de la notion de perméabilité effective.

Nous présentons donc, dans ce chapitre, une méthode alternative de couplage des champs statorique et rotorique reposant sur une association de la méthode des éléments finis et de la technique des multiplicateurs de Lagrange où seul le premier harmonique d'espace est considéré. Les autres harmoniques sont éliminés au niveau d'une interface située dans l'entrefer.

- Dans le quatrième et dernier Chapitre de notre travail, les résultats et les validations des modèles numériques développés précédemment dans le cas de la modélisation des machines synchrones à aimants et de celle des machines asynchrones à rotor massif avec une prise en compte du mouvement rotorique sont présentés. Ce Chapitre comprend deux parties :

- Dans une première partie, nous développons un modèle de calcul analytique des machines synchrones à aimants permanents et à induit sans encoches. Ce modèle est utilisé comme moyen de validation du modèle numérique développé au Chapitre II. Une comparaison avec les résultats expérimentaux d'un prototype hexapolaire de moteur autosynchrone à aimants permanents à induit sans encoches est également présentée. La maquette choisie [13] étant de petite puissance, nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux performances électromagnétiques du prototype étudié tant d'un point de vue quantitatif que qualitatif. Les résultats expérimentaux relevés par B.Nogaredo et Al. [13] sont confrontés à ceux obtenus à l'aide du modèle numérique que nous avons établi au Chapitre II et à ceux du modèle analytique que nous développons dans ce chapitre.

- Dans une deuxième partie, nous présentons les résultats et les validations numérique et expérimentale du modèle numérique développé au Chapitre III. Cette validation est réalisée à l'aide d'un modèle basé sur la méthode des éléments finis où le rotor est considéré comme bloqué et une comparaison expérimentale avec un prototype tétrapolaire de moteur asynchrone à rotor massif lisse. Pour atteindre ce but, un prototype d'un moteur asynchrone à rotor en acier massif lisse, réalisé avec l'aide d'ELECTRO-INDUSTRIES (Azazga) et disponible au niveau de notre Laboratoire à l'ENP, a été également adopté [14]. Les résultats expérimentaux obtenus par R.Ibtiouen [14] sont comparés à ceux issus du modèle numérique établi au Chapitre III ainsi qu'à ceux issus du modèle basé sur les éléments finis dit «à rotor bloqué».

---

---

**REFERENCES**

- [1] J. Dhers, «Moteurs Electriques : Une extension rapide de leurs domaines d'utilisation», Revue Générale d'Electricité, RGE No.3, Mars 1987, pp. 1-10.
  - [2] S. Mezani, R. Ibtouen, R. Kechroud, O. Touhami, « Finite element thermal modelling of an induction motor», Electric Power Components and Systems, No. 29, 2001, Taylor & Francis, pp.821-834.
  - [3] A. A. Abdelrazek, J. L. Coulomb, M. Feliachi, J. C. Sabonnadiere, "Conception of an air gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 18, No. 2, March 1982, pp. 655-659.
  - [4] S. J. Salon, J. D'Angelo, "Application of the hybrid finite element method in electromagnetic", IEEE Transactions On Magnetic, Vol. MAG-24, No. 1, January 1988, pp. 80-85.
  - [5] S. Ratnajeevan, H. Hoole, "Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery", IEEE Transactions On Magnetic, Vol. 21, No.6, Nov. 1985, pp. 2292-2295.
  - [6] T. W. Preston, A. B. J. Reece, P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time stepping techniques", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 24, No.1, January 1988, pp. 471-473.
  - [7] Y. Maréchal, G. Meunier, J. L. Coulomb, H. Magnin, " A general purpose tool for restoring inter-element continuity", IEEE Transactions On Magnetic, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1728-1731.
  - [8] B. Laporte, G. Vinsard, J. C. Mercier, " A computation method for induction motors in steady state", Mathematics and Computers in Simulation, 38 (1995), pp. 369-376.
  - [9] J. P. Bock, B. Laporte, G. Vinsard, « Détermination des régimes transitoires des moteurs à induction par une nouvelle méthode de couplage des champs magnétiques du stator et du rotor », Journal de Physique III, No. 5, 1995, pp. 1661-1669.
  - [10] R. Kechroud R. Ibtouen S.Mezani, O. Touhami B. Laporte "Modelling of a slotless permanent magnet machine with motion consideration", Archives of Electrical Engineering, index, 351660, ISBN 0004-0746, Vol. XLIX, No. 3-4/2000, pp. 377-393.
  - [11] J. C. Sabonnadière, «Conception des machines électriques : la modélisation facilite l'optimisation», Revue Générale d'Electricité, RGE N. 3, Mars 1987, pp. 11-20.
  - [12] R. Kechroud, R. Ibtouen, O. Touhami "Coupled non-linear complex finite element analysis of solid rotor induction motor" IEEE- International Compumag Society, Team Workshop and Application Forum, Evian, France, July 6, 2001, pp. 16-17.
  - [13] B. Nogarede, M. Lajoie-Mazenc, B. Davat, «Modélisation analytique des machines à aimants à induit sans encoches», Revue Phys. Appl., 5 Juillet 1990, pp. 707-720.
  - [14] R. Ibtouen, "Etude d'un moteur d'induction à rotor massif lisse pour différentes largeurs d'entrefer : Performances sous divers régimes d'alimentation - Comportement thermique, thèse de Magister , ENP, Mai 1984, Alger
-

# **CHAPITRE I**

## **MODELISATION ELECTROMAGNETIQUE DES MACHINES ELECTRIQUES**

## I. 1 INTRODUCTION

L'étude des systèmes électromagnétiques fait appel, principalement, à l'analyse des circuits électriques et magnétiques ainsi qu'à celle de la conversion électromécanique. Traités dans un domaine macroscopique, ces aspects sont caractérisés par l'ensemble des équations de Maxwell. En conséquence, il est fait abstraction de la structure atomique et moléculaire des matériaux. Seuls les effets de cette structure sont pris en considération.

Il est bien connu que les équations de Maxwell sont covariantes par la transformation de Lorentz [1, 2, 3, 4]. Sous l'hypothèse de la quasi-stationnarité, les courants de déplacement sont négligés devant les courants de conduction et il n'y a donc, de toute évidence, pas de propagation d'onde. La vitesse de la lumière est supposée infiniment grande et la transformation de Lorentz se réduit à celle de Galilée. Le temps devient ainsi une grandeur absolue.

Pour les fréquences utilisées en Electrotechnique (quelques dizaines de kHz), les équations de Maxwell et les lois constitutives des milieux sont sujettes à la relativité Galiléenne [4]. Les accélérations mises en jeu dans les systèmes « Electrotechnique » sont tellement petites que l'on peut considérer leur mouvement comme quasi-stationnaire vis à vis des phénomènes électrodynamiques. Ainsi un repère rattaché à un système donné est considéré comme inertiel (se déplaçant à vitesse constante) par rapport à un repère fixe (absolu) lié au laboratoire. Les diverses grandeurs électromagnétiques, hormis le champ électrique, sont ainsi invariantes lorsqu'on passe d'un repère fixe à un repère mobile.

Pour l'analyse des problèmes électrodynamiques avec prise en considération du mouvement, il y a un libre choix du repère de référence, à condition que le mouvement soit considéré comme quasi-stationnaire vis à vis des phénomènes électrodynamiques. Ce qui est souvent le cas dans la pratique [4].

## I. 2 DESCRIPTION LAGRANGIENNE DES EQUATIONS DE MAXWELL

La modélisation des dispositifs électromécaniques nécessite une résolution couplée des équations du champ électromagnétique et mécanique. Si le mouvement est connu à l'avance, une description Lagrangienne des équations de Maxwell est possible. Cette description se réfère à un repère attaché au milieu considéré. L'observateur décrit les changements électromagnétiques en jeu de son propre point de vue.

### I. 2. 1 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell définissent les propriétés macroscopiques locales associées aux grandeurs électriques et magnétiques vectorielles. Il s'agit du vecteur champ électrique  $\vec{E}$ , du vecteur champ magnétique  $\vec{H}$ , du vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  et du vecteur l'induction magnétique  $\vec{B}$ . Dans un référentiel lié au milieu étudié, ces équations prennent la forme suivante :

## a/ Premier groupe

## 1. Loi de Maxwell-Farady

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I. 1})$$

## 1. Loi de Gauss magnétique

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I. 2})$$

## b/ Deuxième groupe

## Loi de Maxwell-Ampère

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I. 3})$$

## Loi de Gauss électrique

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho \quad (\text{I. 4})$$

Où  $\rho$  et  $\vec{J}$  désignent respectivement la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant.

**I. 2. 2 Lois constitutives des milieux**

Les équations de Maxwell doivent être complétées par les relations constitutives caractérisant les différents matériaux utilisés:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{I. 5})$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (\text{I. 6})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{I. 7})$$

Où  $\vec{B}_r$ ,  $\mu_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_r$ ,  $\epsilon_r$ ,  $\sigma$ , et  $\vec{J}_s$  désignent respectivement le vecteur induction magnétique rémanente, la perméabilité magnétique du vide, la permittivité du vide, la perméabilité magnétique relative, la permittivité électrique relative, la conductivité électrique et le vecteur densité de courant imposée par une source extérieure.

Dans le cas général, la perméabilité magnétique, la permittivité électrique et la conductivité électrique sont des tenseurs. Dans tout ce qui suit, nous allons considérer que les matériaux sont isotropes et donc  $\mu_0$ ,  $\mu_r$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$ , et  $\sigma$  sont des fonctions scalaires.

### I. 2. 3 Equations de Maxwell sous l'hypothèse de quasi-stationnarité

Dans le cadre de l'étude des phénomènes associés à la conversion électromécanique de l'énergie, les fréquences mises en jeu sont relativement faibles. Elles ne dépassent pratiquement jamais quelques dizaines de kHz. Dans ces conditions, les courants électriques de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  sont négligés devant les courants de conduction : c'est l'hypothèse de la quasi-stationnarité. Par ailleurs, la densité volumique de charge est nulle. Les équations de Maxwell se réduisent alors à :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I. 8})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I. 9})$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{I. 10})$$

### I. 2. 4 Conditions d'interface

Les conditions d'interfaces, permettant le passage entre deux milieux de perméabilité magnétique et de conductivité électrique différentes, représentent les formes dégénérées des équations (I. 8), (I. 9) et (I. 10). Elles traduisent respectivement :

1. La discontinuité du champ magnétique tangentiel au passage d'une interface contenant une densité de courant surfacique  $\vec{j}$  (I. 11),
2. La continuité de l'induction magnétique normale au passage d'une interface séparant deux milieux de perméabilités magnétiques différentes (I. 12),
3. La conservation du champ électrique tangentiel au passage d'une interface séparant deux milieux de conductivités électriques différentes (I. 13).

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j} \quad (\text{I. 11})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{I. 12})$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0} \quad (\text{I. 13})$$

Où  $\vec{n}$  est le vecteur normal sortant vis à vis de l'interface considérée.

### I. 2. 5 Formulation A-V des équations de Maxwell

Le premier groupe des équations de Maxwell admet une intégrale première qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (\text{I. 14})$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}(V) \quad (\text{I. 15})$$

Où  $\vec{A}$  et  $V$  désignent respectivement le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique.

Les équations (I. 8), (I. 9) et (I. 10) sont équivalentes à :

$$\text{rot}(v \text{rot}(\vec{A})) = \vec{J} + \text{rot}(v \vec{B}_r) \quad (\text{I. 16})$$

$$\text{div}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{I. 17})$$

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \left( -\text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (\text{I. 18})$$

Où  $v$  désigne la réductivité magnétique (inverse de la perméabilité magnétique).

La relation (I. 17) est implicitement contenue dans la relation (I. 16). En effet, elle peut être obtenue en prenant la divergence des deux membres de l'équation (I. 16). Cependant, elle doit être exprimée explicitement car l'équation (I. 16) met en évidence quatre inconnues (les trois composantes du potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire).

Les conditions d'interface (I. 11), (I. 12) et (I. 13) peuvent être exprimées à nouveau en termes de potentiel vecteur magnétique et scalaire comme suit :

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \quad (\text{I. 19})$$

$$-\left( v_{1r} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} + \vec{n} \times \vec{B}_{1r} \right) + \left( v_{2r} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} + \vec{n} \times \vec{B}_{2r} \right) = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{I. 20})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad (\text{I. 21})$$

$$V_1 = V_2 \quad (\text{I. 22})$$

On distingue alors deux cas :

- Les milieux dont la densité de courant volumique est imposée par les sources extérieures. C'est l'exemple des conducteurs du stator qui sont finement subdivisés; on a alors  $\vec{J} = \vec{J}_s$ .

- Les milieux dont la densité de courant volumique est induite par la variation du champ magnétique. C'est l'exemple des milieux massifs du rotor; on a alors

$$\vec{J} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Les potentiels  $\vec{A}$  et  $V$  ne sont pas uniques, on pourrait effectuer une transformation de jauge sous la forme :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}(\varphi) \quad (\text{I. 23})$$

$$V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{I. 24})$$

Il est nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire qui est habituellement la jauge de Coulomb (I. 25). Cette jauge assure non seulement l'unicité de la solution mais conditionne la stabilité et la convergence des méthodes numériques de résolution. Elle doit donc être vérifiée en tout point du milieu et sur ses frontières.

$$\text{div}(\vec{A}) = 0 \quad (\text{I. 25})$$

La conservation des courants étant vérifiée, cette jauge permet de découpler partiellement  $\vec{A}$  et  $V$  lorsque les conductivités des différents matériaux constituant la machine sont constantes. D'après l'équation (I. 17), il vient :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{I. 26})$$

Le potentiel électrique  $V$  [5, 6] peut être de deux natures différentes :

- D'une part, il existe un champ électrique de nature électrostatique dans les machines électriques qui résulte des potentiels auxquels sont portés les conducteurs par rapport aux armatures. On l'obtient après résolution du problème en  $\vec{A}$  ;
- D'autre part, un champ électrique entre les barres aux extrémités du rotor. Ce champ crée un courant dans les couronnes de court-circuit. On peut en tenir compte partiellement en modifiant la conductivité électrique.

### I. 3 DESCRIPTION EULERIENNE DES EQUATIONS DE MAXWELL

La description Eulerienne des équations de Maxwell se réfère à un repère fixe (lié au laboratoire). L'observateur décrit le mouvement des corps et les changements électromagnétiques du point de vue du laboratoire. A cause du mouvement, les effets physiques pris en considération sont :

1. Les conducteurs en mouvement sont le siège d'une f.e.m. de vitesse. La force de Lorentz sur les charges mobiles doit être prise en compte dans la loi d'Ohm par le terme de transport  $\vec{v} \times \vec{B}$ .
2. Les sources d'excitation telles que les bobinages inducteurs ou les aimants permanents peuvent être en mouvement. Cela signifie que ces sources sont des grandeurs spatio-temporelles.
3. Les propriétés physiques en un point de l'espace peuvent changer à cause du mouvement des corps. La perméabilité ou la conductivité dans un point de l'espace à un instant  $t$  n'est pas nécessairement la même à un instant  $t + \Delta t$  plus tard, car le corps en question s'est déplacé.
4. Le champ électromagnétique doit obéir aux conditions d'interfaces entre milieux en mouvement différentiel.
5. La présence des contacts glissants exige un traitement particulier [7].

Sous l'hypothèse de la quasi-stationnarité, les équations de Maxwell relatives à un milieu matériel se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport à un repère fixe s'écrivent :

$$\text{rot}(\vec{E}') = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I. 27})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I. 28})$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{I. 29})$$

Les vecteurs  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{J}$  sont des invariants relativistes du premier ordre. Seul est modifié le vecteur champ électrique  $\vec{E}'$  de la manière suivante :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{I. 30})$$

### I. 3. 1 Lois constitutives des milieux

Les équations (I. 27), (I. 28) et (I. 29) doivent être complétées par les relations exprimant les lois constitutives du milieu:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{I. 31})$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \vec{J}_s \quad (\text{I. 32})$$

L'équation (I. 32) est la forme appropriée de la loi d'Ohm pour les corps en mouvement.

### I. 3. 2 Conditions d'interface

Les équations d'interface peuvent être déduites des équations (I. 27 à 30) pour se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j} \quad (\text{I. 33})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{I. 34})$$

$$\vec{n} \times ((\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_1) - (\vec{E}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{B}_2)) = \vec{0} \quad (\text{I. 35})$$

### I. 3. 3 Formulation A-V des équations de Maxwell

En introduisant le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et le potentiel scalaire électrique  $V$ , les équations (I. 27 à 32) sont équivalentes à :

$$\text{rot}(\text{vrot}(\vec{A})) = \vec{J} + \text{rot}(\text{v}\vec{B}_r) \quad (\text{I. 36})$$

$$\text{div}(\vec{J}) = 0 \quad (\text{I. 37})$$

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \left( -\text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \text{rot}(\vec{A}) \right) \quad (\text{I. 38})$$

Les conditions d'interface associées à ce problème sont identiques à celles traduites par les équations (I. 19 à 22).

Nous venons de définir un problème de "Diffusion-Transport" difficile à résoudre. La résolution analytique n'est envisageable qu'au prix de simplifications contestables [8]. Pour les structures dont les parties mobiles sont lisses (machines synchrones rapides, machines asynchrones à rotor massif, freins à courants de Foucault, etc.), ce problème peut être discrétisé par la méthode des éléments finis ou par celle des différences finies sur un maillage fixe [4, 7, 9]. Le système d'équations obtenu à partir de cette discrétisation n'est pas symétrique, rendant ainsi les techniques de stockage et les algorithmes d'inversion développés pour les systèmes d'équations symétriques inutilisables. Le temps de résolution est donc plus long et l'espace mémoire requis est plus important.

Dans le cas de la méthode des différences finies, les schémas de discrétisation symétriques (différences centrées) sont instables [10]. Le choix d'un schéma décentré en amont permet de remédier à ce problème [11].

Dans le cas de la méthode des éléments finis, un phénomène similaire mais moins sensible que dans le cas des différences finies peut être mis en évidence en choisissant des fonctions de projection égales aux fonctions d'interpolation (schéma de Galerkin). Une oscillation des

résultats est observée selon la discrétisation choisie. La stabilité n'est obtenue qu'au prix de maillages très fins afin de maintenir les nombres de Péclet locaux,  $Pe = 0,5 (\mu\sigma v h)$  (où  $h$  est un paramètre de discrétisation dans la direction du mouvement), inférieurs à 1. Cependant, un tel procédé est gourmand en temps de calcul et en espace mémoire. Des études particulières [12, 13, 14, 15] ont conduit à l'utilisation des schémas de discrétisation de Petrov-Galerkin (éléments finis décentrés).

A ces difficultés d'ordre numérique, s'ajoute, comme le montrent S. Kurz, J. Fetzer, G. Lehen, et W. M. Rucker [4], le fait que la méthode des éléments finis nodaux ne permet pas, dans le cas général des problèmes tridimensionnels mettant en jeu les mouvements des corps solides (translation + rotation), de tenir compte du mouvement en remaillant uniquement. En effet, l'équation (I. 38) peut être transformée en introduisant la notion de différentielle totale exacte du potentiel vecteur magnétique (I. 39) et en exploitant l'identité vectorielle (I. 40).

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A} \quad (\text{I. 39})$$

$$\text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times \text{rot}(\vec{A}) + (\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{v} + \vec{A} \times \text{rot}(\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{A} \quad (\text{I. 40})$$

Si la vitesse  $\vec{v}$  est constante, les termes  $(\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{v}$  et  $\vec{A} \times \text{rot}(\vec{v})$  du second membre de l'équation (I. 40) sont nuls. Dans ce cas, l'équation (I. 38) s'écrit ainsi :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \left( -\text{grad}(V^*) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right) \quad (\text{I. 41})$$

Avec :  $V^* = V - \vec{A} \cdot \vec{v}$  [4].

Lorsque nous considérons le mouvement d'un corps rigide dans un cas général (mouvement de translation et de rotation), les termes  $(\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{v}$  et  $\vec{A} \times \text{rot}(\vec{v})$  de l'identité (I. 40) ne sont plus nuls. Leur somme vectorielle est égale à [4] :

$$\vec{A} \times \vec{\omega} = (\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{v} + \vec{A} \times \text{rot}(\vec{v}) \quad (\text{I. 42})$$

Où  $\vec{\omega}$  est le vecteur vitesse angulaire.

En tenant compte des équations (I. 39), (I. 40) et (I. 42), l'équation (I. 38) s'écrit alors ainsi :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \left( -\text{grad}(V^*) - \frac{d\vec{A}}{dt} - \vec{A} \times \vec{\omega} \right) \quad (\text{I. 43})$$

Lorsque ce type de problème est traité par la méthode des éléments finis nodaux, en remaillant à chaque pas de temps et en substituant  $V$  par  $V^*$ , la f.e.m. de vitesse est prise automatiquement en compte car  $\vec{A} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ . C'est le cas des problèmes 2D et 3D où il n'y a pas de mouvement de rotation. Par contre, dans le cas général, le remaillage n'est pas suffisant et

cela n'est pas généralement mentionné par la littérature car  $\vec{A} \times \vec{\omega} \neq \vec{0}$ . Dans de tels cas, Le recours aux éléments finis du type "arêtes" s'avère nécessaire car ces derniers prennent automatiquement en compte la f.e.m de vitesse lors du remaillage [4].

## I. 4 DESCRIPTION 2D DU CHAMP ELECTRO-MAGNETIQUE AU NIVEAU DES MACHINES ELECTRIQUES

Le calcul du champ magnétique dans une machine électrique tournante est un problème tridimensionnel. Néanmoins, sur une longueur importante de la machine, on peut considérer que les champs magnétiques sont situés dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la machine et que les courants inducteurs et induits sont parallèles à cet axe. Toutefois, l'approximation 2D ne permet pas de prendre en compte les effets d'extrémités.

Les vecteurs induction magnétique  $\vec{B}$  et champ magnétique  $\vec{H}$  étant contenus dans le plan de l'étude, on peut choisir alors un potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  n'ayant qu'une seule composante suivant l'axe de la machine. Cette composante ne dépend que des coordonnées  $x, y$  et du temps  $t$ .

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A(x,y,t) \end{pmatrix} \quad (\text{I. 44})$$

Le potentiel vecteur magnétique, grâce à la représentation (I. 44), vérifie la jauge de Coulomb de façon implicite. L'induction magnétique  $\vec{B}$ , dérivant de ce potentiel (I. 14), a pour composantes :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} +\frac{\partial A}{\partial y} \\ -\frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I. 45})$$

Grâce à la représentation (I. 44), les équations gouvernant la diffusion du champ électromagnétique (I. 16 à 18) sont équivalentes à l'équation (I. 46).

$$\text{div}(\text{vgrad}(\vec{A})) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + J_s = 0 \quad (\text{I. 46})$$

où  $J_s$  désigne la densité de courant source.

En l'absence de la densité de courant superficielle, les conditions de passage (I. 19 et 20) entre les deux milieux (1) et (2) deviennent :

$$A_1 = A_2 \quad (\text{I. 47})$$

$$v_1 \frac{\partial A_1}{\partial n} = v_2 \frac{\partial A_2}{\partial n} \quad (\text{I. 48})$$

Dans le cas où il y a un mouvement différentiel entre les milieux 1 et 2, le potentiel vecteur magnétique et le champ magnétique tangentiel conservent leurs continuités (invariants relativistes du premier ordre) de sorte que si le milieu (1), référencé par  $R_1$ , est animé à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au milieu (2), référencé par  $R_2$ , il vient :

$$A_1(\vec{x} + \vec{v}t, t) \Big|_{R_1} = A_1(\vec{x}, t) \Big|_{R_2} = A_2(\vec{x}, t) \Big|_{R_2} \quad (\text{I. 49})$$

$$v_1 \frac{\partial A_1}{\partial n}(\vec{x} + \vec{v}t, t) \Big|_{R_1} = v_1 \frac{\partial A_1}{\partial n}(\vec{x}, t) \Big|_{R_2} = v_2 \frac{\partial A_2}{\partial n}(\vec{x}, t) \Big|_{R_2} \quad (\text{I. 50})$$

## I. 5 MODELISATION DE L'ENTREFER DES MACHINES ELECTRIQUES

Plusieurs techniques ont été mises au point afin de tenir compte du mouvement dans le cas de problèmes dynamiques [16 à 21 et 24 à 33]. Ces techniques diffèrent selon qu'il s'agisse de modéliser l'entrefer par la méthode des différences finies ou par la méthode des éléments finis ou enfin par les méthodes hybrides.

### I. 5. 1 Cas de la méthode des différences finies

La subdivision de l'entrefer évolue lors du mouvement du rotor. Pour tenir compte d'une telle évolution, la méthode des différences finies procède par une interpolation linéaire des valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique sur la ligne de rotation [16]. Les régions correspondant au rotor et au stator sont subdivisées séparément. Au niveau de l'entrefer, on a une ligne nodale commune (ligne de rotation) Fig. I. 1 sur laquelle les nœuds des deux découpages peuvent ne pas coïncider entre eux. Il s'ensuit alors que les valeurs du potentiel A doivent être déterminées par une interpolation linéaire. Ainsi dans l'exemple de la Fig. I. 1,

$$A_2 = (1 - \xi)A_{10} + \xi A_{11} \quad \text{Où } \xi = \frac{x_2 - x_{10}}{x_{11} - x_{10}}$$

Dans cette méthode, l'interpolation linéaire entraîne une diminution de la précision de calcul du potentiel A. La validité de cette méthode fait qu'on doit procéder à un découpage très fin de l'entrefer mais le coût des opérations peut devenir prohibitif.

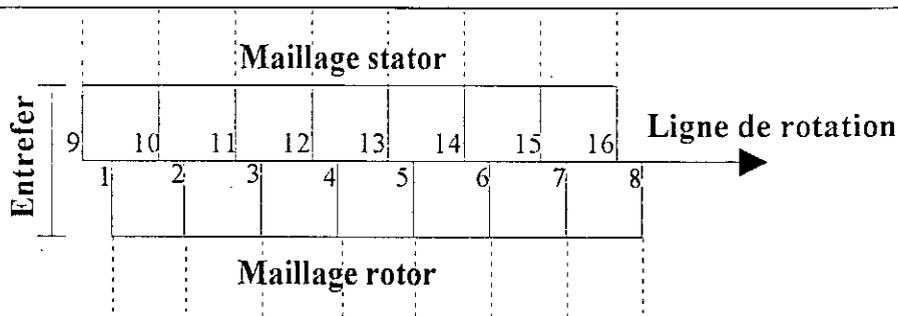


Fig. I. 1 Prise en compte du mouvement dans la méthode des différences finies

## I. 5. 2 Cas de la méthode des éléments finis

En adoptant une approche Lagrangienne, les équations, gouvernant la diffusion du champ électromagnétique, sont résolues numériquement et de façon indépendante par rapport à deux référentiels l'un fixe lié au stator et l'autre mobile lié au rotor. Le lien entre les deux référentiels est imposé par le mouvement du rotor. En se référant à la méthode des éléments finis, le domaine d'étude est maillé et une forme faible des équations aux dérivées partielles est obtenue en utilisant la méthode des résidus pondérés. Ensuite, le potentiel vecteur magnétique ou scalaire est approximé par l'utilisation des fonctions de base (de forme) liées aux nœuds ou aux arrêtes du maillage. Les dérivées temporelles sont discrétisées par une technique, basée sur les différences finies, appropriée. Le résultat est un système symétrique et bande d'équations algébriques, qui peut être résolu avec les méthodes numériques dites "standards". Il est utile de noter que les matrices obtenues sont dépendantes du temps car celui-ci apparaît explicitement dans les équations. Donc, à chaque fois qu'il y a un mouvement, les matrices doivent être réassemblées.

Parmi les tentatives de prise en compte du mouvement dans le cas d'une modélisation par éléments finis, nous pouvons distinguer celles prenant en considération le mouvement du rotor ; à savoir

- La topologie constante;
- La ligne de glissement;
- La bande de roulement;
- Le macro-élément;
- La méthode du double entrefer
- Et enfin la continuité par les multiplicateurs de Lagrange.

### I. 5. 2. 1 La Topologie constante

En gardant la même topologie de subdivision du domaine de résolution lors du mouvement du rotor, les éléments modélisant l'entrefer se déforment. Cela se traduit par une mauvaise précision numérique dans la détermination des valeurs du potentiel A [16] et la limite de rotation est rapidement atteinte (Fig. I. 2).

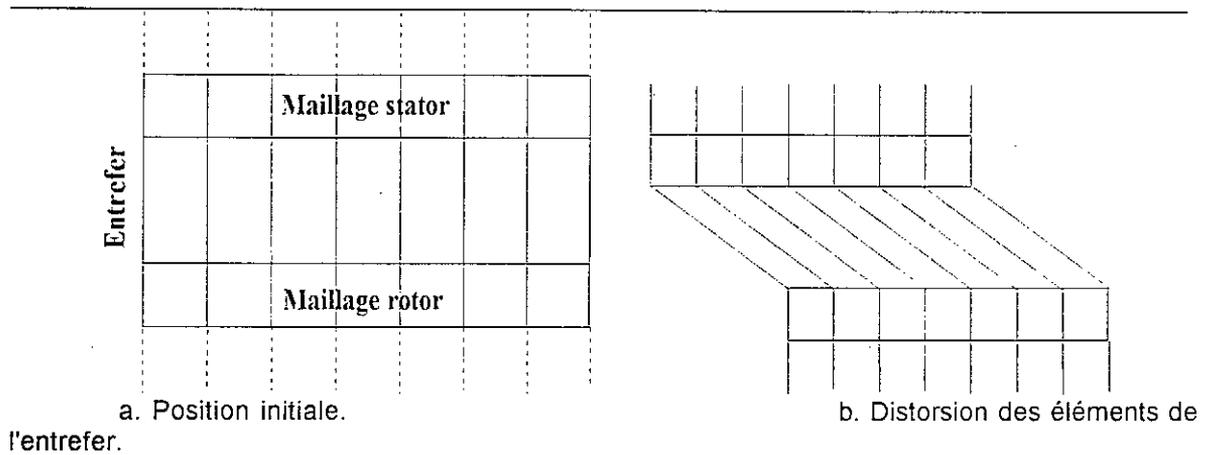


Fig. I. 2 Topologie constante.

**I. 5. 2. 2 La Ligne de glissement**

La ligne de glissement est une technique à topologie variable. Dans cette topologie (Fig. I. 3), les maillages du rotor et du stator sont réalisés indépendamment l'un de l'autre. Ils sont liés par l'intermédiaire de la ligne de rotation (ligne de glissement en 2D [16] et surface de glissement en 3D [17]). Ainsi, le mouvement du rotor ne provoque pas la distorsion des éléments discrétisant l'entrefer. Cette technique est donc de mise en œuvre aisée [18]. Cependant, pour faire coïncider les nœuds des subdivisions des régions, rotor et stator, au niveau de la ligne de rotation pour chacune des positions relatives du stator et du rotor, le déplacement de ce dernier doit se faire par pas fixe. Ce pas de déplacement impose dès le départ le pas de calcul [19]. Cette méthode présente donc l'inconvénient de donner lieu à un déplacement discontinu du rotor. De plus, elle doit procéder à un maillage régulier de la région de l'entrefer.

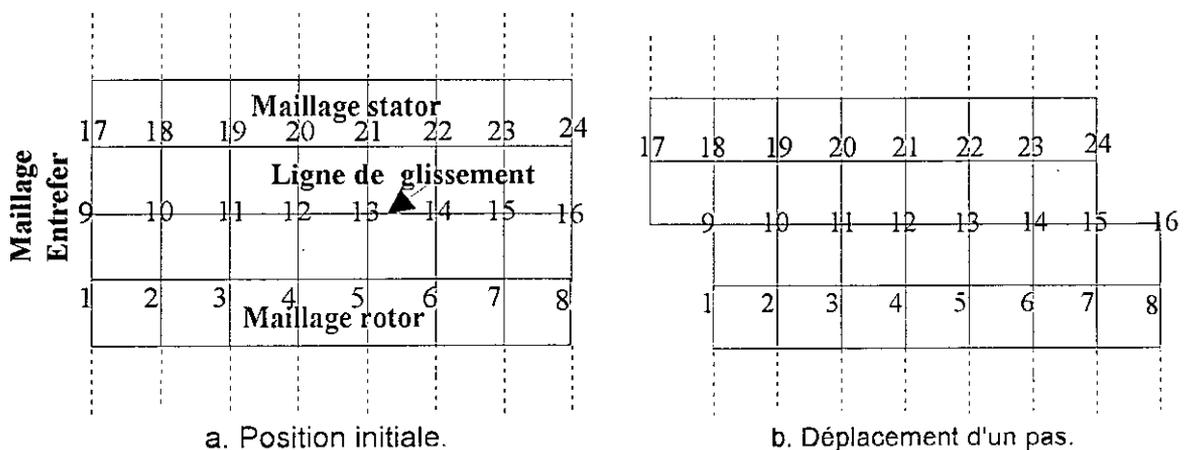


Fig. I. 3 Topologie variable.

### I. 5. 2. 3 La Bande de roulement

La bande de roulement est une technique dont la topologie est intermédiaire entre la topologie constante et la topologie variable [16]. On commence par considérer la première topologie et, lorsque la limite de distorsion des éléments modélisant l'entrefer est atteinte à cause du mouvement du rotor, on modifie le découpage de l'entrefer Fig. I. 4. Pour conserver la largeur de bande quasi-constante au niveau des matrices du système d'équations tout au long des calculs, on doit renuméroter les nœuds grâce à un algorithme d'optimisation topologique de la largeur de bande (de Cuthill- MacKee, par exemple). Le temps de remaillage est plus long mais celui de la résolution est conservé. Si les connectivités des éléments ne sont pas redéfinies, ce qui correspond à des temps de maillage courts, le système d'équations a par contre une largeur de bande croissante au fur et à mesure des itérations. Le temps de calcul augmente progressivement. On peut aussi procéder à un remaillage de la bande de roulement à chaque rotation élémentaire en appliquant la triangulation de Delaunay [20]. Bien qu'elle permette un déplacement continu du rotor, une telle topologie présente l'inconvénient de nécessiter un découpage régulier de la région entrefer. En effet, la déformation asymétrique de la bande de mouvement tend à introduire des erreurs lors du calcul du couple électromagnétique [19]. De plus, un rapport important entre le pas de calcul et le pas de maillage le long de la bande de mouvement peut conduire à des bruits numériques importants dans le calcul de la force électromotrice [19].

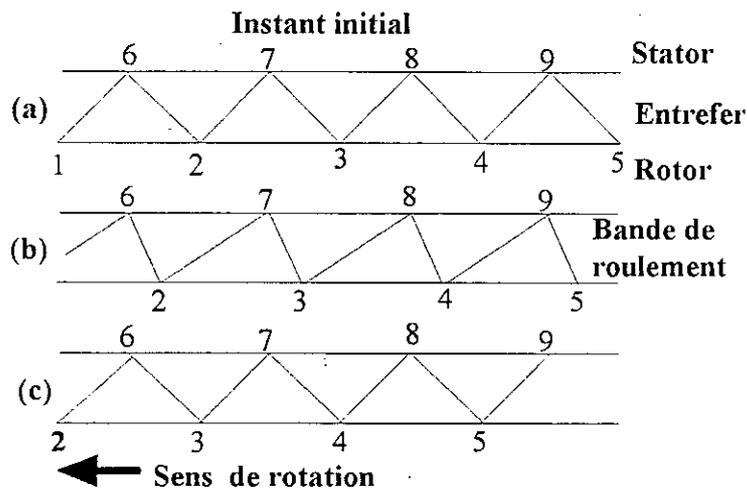


Fig. I. 4 Topologie mixte ((a) Position initiale, (b) Distorsion des éléments, (c) Modification du découpage)

### I. 5. 2. 4 Le Macro-Elément

Pour parer aux difficultés engendrées par les topologies précédentes, M. Feliachi, A. Abdelrazek, J. L. Coulomb et J. C. Sabonnadiere, [16, 21] ont conçu un élément fini particulier intitulé Macro-Elément (ME). Celui-ci est constitué de la partie de largeur uniforme de l'entrefer (PLUE) et permet de tenir compte automatiquement du mouvement du rotor tout en gardant une topologie constante. La PLUE étant constituée d'un milieu linéaire sans source (l'air), le potentiel  $A$  y est régi par l'équation de Laplace. La résolution d'une telle équation est effectuée analytiquement dans un espace bidimensionnel en utilisant

la méthode de séparation des variables. Ainsi, la solution est représentée par une série de Fourier.

Sur les frontières latérales de la PLUE (Fig. I. 5), les valeurs du potentiel vecteur magnétique  $A$  sont liées par des conditions de périodicité. Les fonctions choisies pour le calcul des coefficients de Fourier sont prises identiques à celles définies sur les interfaces des éléments classiques. Ainsi la compatibilité (continuité de la fonction représentant le potentiel  $A$ ) entre les éléments et la PLUE est assurée. La PLUE peut être considérée comme un élément fini (Macro-Elément) caractérisée par :

- Le potentiel  $y$  est donné par une formule exacte;
- Le nombre de nœuds  $y$  est relativement élevé ;
- Les valeurs du potentiel  $A$  sur les limites latérales  $y$  sont liées par une condition de périodicité.

Pour pouvoir assembler le ME avec les éléments classiques subdivisant les régions rotor et stator, les chercheurs cités ci-dessus [16, 21, 22] déterminent sa matrice de raideur. Les expressions du potentiel  $A$  dans la PLUE et celle de la matrice du ME sont données par des formules exactes. La précision de détermination du potentiel  $A$  dans la PLUE ne dépend que de la qualité de subdivision des régions rotor et stator.

D'autre part, l'utilisation du ME permet d'éviter la subdivision de la PLUE. Toutefois, le temps de calcul utilisé dans la résolution du système algébrique est approximativement deux fois plus élevé dans le cas d'utilisation du ME que dans celui de la subdivision de la PLUE en éléments classiques. Ceci est dû à l'augmentation de la taille de la matrice du système. Cette augmentation est due à la taille du macro-élément (ME) qui est égale au nombre de ses nœuds.

Cependant, l'utilisation du ME, contrairement à celle de la bande de mouvement, s'affranchit des erreurs et des bruits numériques lors du calcul du couple et de la force électromotrice [19]. Les conditions de périodicité du ME imposent l'utilisation d'un domaine constitué d'un nombre entier de pas polaire [21, 22, 23].

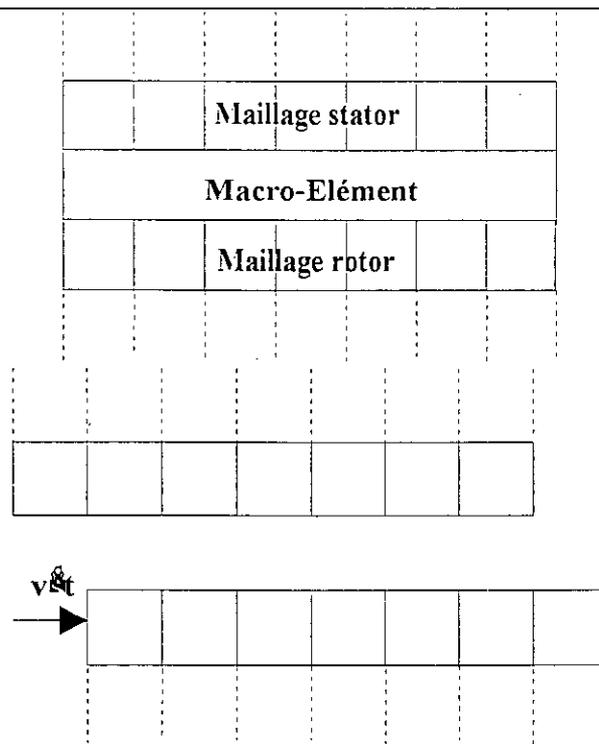


Fig. I. 5 Macro-Elément

### I. 5. 2. 5 Méthode du double entrefer

Dans les différentes techniques vues ci-dessus, le champ électromagnétique est déterminé à chaque étape pour l'ensemble de la machine. Les maillages étant attachés séparément à chacun des domaines, la connexion des potentiels vecteurs dans l'entrefer fait appel à différentes techniques. Ces méthodes qualifiées de méthodes temporelles par opposition aux méthodes fréquentielles sont très performantes. Elles imposent cependant des pas de temps très courts pour prendre en compte les effets d'encoches. Les temps de calcul sont donc très longs. Une méthode alternative (la méthode du double entrefer) mise au point au GREEN (Groupe de Recherche en Electrotechnique et en Electronique de Nancy) conduit à des temps de calcul nettement plus réduits et évite le problème de remaillage. Le principe de la méthode est que seul le premier harmonique d'espace du potentiel vecteur sur une armature sert de source dans le domaine qui lui fait face. Une sorte de double transformation de Park est effectuée. Le calcul s'effectue ainsi en deux étapes (Fig. I. 6) à savoir :

- l'étape dans le domaine statorique,
  - et l'étape dans le domaine rotorique.
- Dans le domaine rotorique, l'équation de diffusion du champ électromagnétique est résolue en prenant comme condition aux limites une condition du type Dirichlet ( ou de Neumann) sur la frontière  $\Gamma_S$  (stator) déduite du problème statorique.

- Dans le domaine statorique, l'équation de Poisson est résolue en prenant comme condition aux limites une condition du type Dirichlet (ou de Neumann) sur la frontière  $\Gamma_r$  (rotor) déduite du problème rotorique.

Le potentiel vecteur magnétique est considéré comme nul sur la frontière extérieure  $\Gamma_{ext}$ . Si les harmoniques d'ordre supérieur sont négligés lorsque les conditions de Dirichlet (ou de Neumann) sont imposées, on parle alors d'approximation du premier harmonique. La méthode a été validée dans le cas du calcul des régimes permanents des moteurs asynchrones à cage à rotor massif [24, 25, 26]. Ensuite, elle le fut pour l'étude des régimes transitoires à vitesse constante de ces mêmes moteurs alimentés par des onduleurs de tension ou par des commutateurs de courant [27, 28]. Cette technique ne peut cependant être généralisée aux convertisseurs linéaires à induction. Le spectre d'harmoniques du champ électromagnétique dans ces structures est riche en fréquences et continu ce qui nécessite un traitement particulier [29].

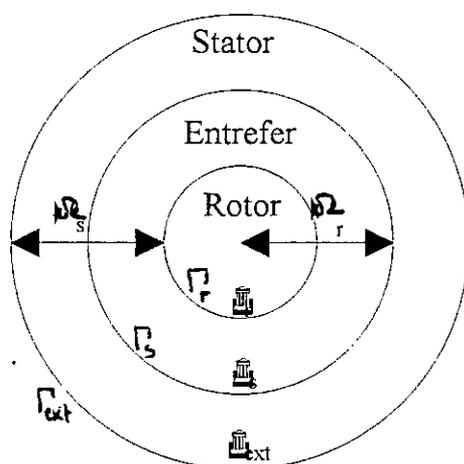


Fig. I. 6 Domaine d'étude: méthode du double entrefer

### I. 5. 2. 6 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La continuité de la variable d'état (potentiel vecteur ou scalaire) est naturellement assurée à l'interface entre deux éléments finis nodaux. Par contre, lorsqu'on couple des éléments de type hexaédriques et tétraédriques par exemple dans un maillage donné, les éléments prismatiques sont nécessaires pour assurer la liaison entre ces deux types d'éléments ; ce qui conduit à plusieurs difficultés d'ordre pratique. C'est aussi cette contrainte qui impose un pas de calcul fixe dans la technique de la ligne de glissement.

Afin de restaurer la continuité naturelle des grandeurs physiques sur l'interface de couplage où la position et le nombre de nœuds sont différents de chaque côté de celle-ci, une méthode basée sur la modification de la fonctionnelle à minimiser est utilisée.

Une première méthode pour modifier la fonctionnelle originale  $\Pi$  consiste à introduire les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  [30, 31, 32, 33]. Cette méthode, générale, peut être appliquée à n'importe quel type de formulation. La fonctionnelle modifiée  $\Pi'$  s'écrit ainsi :

$$\Pi' = \Pi + \int_{\Gamma} \lambda^T C d\Omega \quad (I. 49)$$

où C représente les contraintes de couplage.

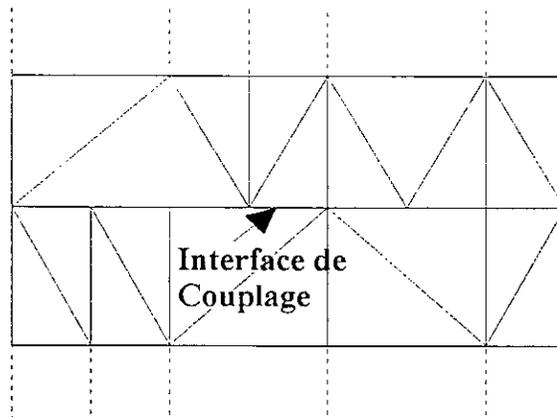


Fig. I. 7 Couplage d'interface

L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange dans la pratique présente des inconvénients. Ces multiplicateurs doivent être discrétisés ce qui augmente le nombre d'inconnues dans le système final sans oublier que le calcul numérique des intégrales de couplage est assez complexe [34]. Si la fonctionnelle  $\Pi$  est une forme quadratique et si C est un ensemble d'équations linéaires, le système d'équations obtenu est mal conditionné à cause de la présence de termes nuls sur sa diagonale. La méthode indirecte de résolution telle que la méthode du gradient conjugué avec factorisation incomplète de Cholesky peut diverger dans certains cas [34] et converger dans d'autres [35]. Une méthode directe de résolution telle que celle de Cholesky est nécessaire mais celle-ci exige un grand espace mémoire. Pour surmonter ces difficultés, il est possible d'utiliser une fonction de pénalisation [30, 31]. La fonctionnelle modifiée  $\Pi'$  prend alors la forme suivante :

$$\Pi' = \Pi + \alpha \int_{\Gamma} C^T C d\Omega \quad (I. 50)$$

Où  $\alpha$  est un nombre positif relativement grand de pénalisation.

Comme toute procédure, cette démarche présente un inconvénient d'ordre purement numérique. En effet, si  $\alpha$  est trop grand, le système d'équations a tendance à devenir mal conditionné.

En dépit de cela, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est une alternative intéressante à envisager lors de la prise en compte du mouvement. En effet, dans ce cas précis, les maillages indépendants du stator et du rotor libres de translater ou de tourner sont couplés ensemble. Ce qui autorise un suivi continu du mouvement sans avoir à remailler. Dans les différentes positions, seuls les termes de la matrice C sont altérés.

---

### **I. 5. 3 Cas des méthodes hybrides**

Les méthodes hybrides sont des compositions entre la méthode des éléments finis avec une solution analytique ou bien avec la méthode des équations intégrales de frontières. La méthode des éléments finis est alors utilisée pour modéliser les milieux non linéaires tels que le stator ou le rotor alors que l'entrefer est modélisé par la méthode qui lui est associée. Le principal avantage de ces méthodes est qu'elles se dispensent de mailler l'entrefer tout en permettant de suivre le mouvement sans contraintes de pas.

#### **I. 5. 3. 1 Couplage éléments finis- solution analytique**

La composition d'une solution analytique dans l'entrefer avec les éléments finis pour le reste de la machine a été proposée par Lee [36]. Cette technique élimine le besoin d'éléments finis pour modéliser l'entrefer, ce qui facilite la modélisation du mouvement du rotor et permet en même temps d'avoir une solution précise du calcul du champ dans l'entrefer. Le système d'équations final, dont la dimension est égale au nombre de nœuds plus quatre fois le rang de l'harmonique supérieur de la série de Fourier utilisée pour la solution analytique, est bande et symétrique. Le domaine d'étude doit comprendre nécessairement un nombre entier de pas polaires car ses limites sont liées par des conditions de périodicité ou d'anti-périodicité. Cependant, un tel procédé ne peut être généralisé. En effet, il est difficile de trouver une solution analytique de l'équation de Laplace pour les géométries complexes de l'entrefer.

#### **I. 5. 3. 2 Couplage éléments finis- méthode des équations intégrales de frontière**

Pour des entrefers de géométries quelconques, il serait judicieux, comme le proposent F. Bouillaut et A. Razek [37], de tenir compte du mouvement en combinant la méthode des éléments finis avec la formulation indirecte de la méthode des équations intégrales de frontière directe appelée communément méthode de Trefftz. Cette association permet d'éliminer les bruits numériques, lors du calcul de la force électromotrice, constatés avec la bande de roulement. On peut aussi envisager le couplage de la méthode des éléments finis et de la méthode des équations intégrales de frontière dans sa formulation directe [38]. Les inconvénients dus à l'utilisation des méthodes intégrales sont liés principalement au calcul d'intégrales singulières nécessitant un traitement particulier et un système d'équations plein et asymétrique.

---

---

## I. 6 CONCLUSION

La modélisation électromagnétique des dispositifs « Electrotechnique » tenant compte du mouvement peut être formulée selon l'approche directe dite " d'Euler " ou indirecte dite de " Lagrange ".

La formulation Lagrangienne présente toutefois des avantages sur celle Eulerienne, à savoir :

- d'un point de vue analytique, le domaine de définition est fixe et le terme de transport est absent dans les équations que se soit en statique ou en dynamique,
- et d'un point de vue numérique, la présence du terme de transport fait apparaître deux types de difficultés ; le système d'équations est asymétrique et la présence de modes numériques parasites dans sa solution.

Il est utile de rappeler que la méthode de projection de Galerkin conduit à la résolution d'un système symétrique d'équations. Cette propriété permet d'utiliser des techniques de stockage et des algorithmes d'inversion de matrices puissants. Les avantages sont bien sûr l'économie de l'espace mémoire et des temps de résolution plus courts. Ces avantages disparaissent lorsque le terme de transport est présent. Cela veut dire que pour des ressources mémoires données, des problèmes de taille limitée peuvent être traités en comparaison au cas où ce terme est absent. De toute évidence, ce problème n'apparaît pas dans la formulation Lagrangienne car le terme de transport n'apparaît pas explicitement dans les équations, il est pris en compte automatiquement par une modélisation adéquate de l'entrefer (Ligne d'entrefer, bande de roulement, macro-élément...).

Le problème des modes numériques parasites consiste en l'oscillation de la solution du système d'équations quand le terme de transport dépasse une certaine limite liée au nombre de Péclet. Pour prévenir ce genre de problème, un certain nombre de solutions ont été proposées dans le cadre de la méthode des éléments finis. La plus usuelle des techniques est celle qui a recours à l'utilisation des fonctions tests asymétriques (méthode de projection de Petrov-Galerkine). Ces fonctions sont cependant fortement dépendantes de la direction préférentielle du mouvement. Lorsque l'approche Lagrangienne est adoptée, ce problème n'affecte pas la solution car le mouvement est automatiquement suivi et aucune direction préférentielle de celui-ci n'est à prendre en considération.

Au vu des ces avantages et en dépit de sa relative complexité c'est donc la formulation Lagrangienne que nous allons adopter en lui associant la technique des multiplicateurs de Lagrange pour suivre le mouvement.

---

---

## REFERENCES

- [1] M. Alonso, E. Finn, "Physique générale: tome II champs et Ondes", InterEditions, Paris 1977.
  - [2] M. Tahiri, D. Auguie, "Relativité restreinte et électromagnétisme", Collection le cours de physique, OPU 1988.
  - [3] B. Yavorski, A. Detlaf, "Aide mémoire de physique", Editions Mir, Moscou, 1975.
  - [4] S. Kurz, J. Fetzer, G. Lehen, W. M. Rucker, "A novel formulation for 3d eddy current problems with moving bodies using a Lagrangian description and BEM-FEM coupling", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 34, No. 5, Sept. 1998, pp. 3068-3073.
  - [5] M. E. Zaim, "Contribution à la conception des machines asynchrones à rotor massif", Thèse de Doctorat d'état ès Sciences, Nov. 1989, Ecole Nationale Polytechnique.
  - [6] J. P. Bock, "Modélisation et calcul couplé des champs électromagnétiques dans les machines asynchrones en régime transitoire", Thèse de Docteur Ingénieur, INPL, Nancy, Sept. 1996.
  - [7] D. Rodger, P. J. Leonard, T. Karaguler, "An optimal formulation for 3D moving conductor eddy current problems with smooth stator", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 26, No.5, Sept. 1990, pp. 2359-2363.
  - [8] R. Bonnefille, M. Kant, "Application de la théorie du champ électromagnétique aux machines linéaires à induction", Revue de Physique Appliquée, Tome 5, Oct. 1970, pp. 743-757.
  - [9] J. C. Sabonnadière, " Conception des machines électriques: La modélisation facilite la conception", RGE, No. 3, Mars 1987, pp. 11-20.
  - [10] J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière, "CAO en Electrotechnique", Hermes Publishing 1985.
  - [11] B. Davat, Z. Ren, M. Lajoie-Mazenc, "The movement in field modeling", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. Mag-21, No. 6, Nov. 1985, pp. 2296-2298.
  - [12] J. J. Westerink, D. Shea, " Consistent higher degree Petrov6galerkin Methods for the solution of the transient convection diffusion equation", International Journal for Numerical Methods in Engineering (INJNME), Vol. 28, 1989, pp. 1077-1101.
  - [13] C. C. Yu, J. C. Heinrich, "Petrov Galerkin method for multidimensionnal time dependent convective diffusion equations", International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), Vol. 24, pp. 2201-2215, 1987.
  - [14] S. Y. Hahn, J. Bignon, J. C. Sabonnadière, "An upwind finite element method for electromagnetic field problems in moving media" INJME, Vol. 24, 1987, pp. 2071-2068.
  - [15] Y. Maréchal, G. Meunier, H. B. Harara, " Modélisation du mouvement en trois dimensions des courants induits dus au mouvement par la méthode des éléments finies", RGE, No. 2/92, Fev. 1992, pp. 39-46.
-

- 
- [16] M. Feliachi, A. Abdelrazek, "Considération du mouvement du rotor de machines électriques dans une modélisation par éléments finis", RGE 10/82, Oct. 1982, pp. 673-679.
- [17] B. Boualem, F. Piriou, "Modélisation 3D du circuit électrique et du mouvement: Application à la machine asynchrone", European Phys. Jour. Apr. 1, 1998, pp. 67-71.
- [18] T. W. Preston, A. B. J. Reece, P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time stepping techniques", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 24, No. 1, January 1988, pp. 471-473.
- [19] F. Piriou, Y. Lefevre, B. Davat, "Couplage magnétique électrique pour la modélisation des machines électriques et de leur alimentation", RGE, No. 2/92, Fev. 1992, pp. 8-16.
- [20] S. Ratnajeevan, H. Hoole, "Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 21, No. 6, Nov. 1985, pp. 2292-2295.
- [21] A. A. Abdelrazek, J. L. Coulomb, M. Feliachi, J. C. Sabonnadiere, "Conception of an air gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 18, No. 2, March 1982, pp. 655-659.
- [22] B. Boualem, F. Piriou, "Modelling of induction motor accounting for skewed slots effects", Proc. of Inter. Conf. on Electrical Machines (ICEM), 5-8 September 1994, Paris, France, pp. 699-704.
- [23] F. Bouillaut, A. Razek, "Calcul des courants de Foucault dans les parties massives des systèmes électromagnétiques en mouvement", RGE 3/85 Mars 1985, pp. 233-238.
- [24] G. Vinsard, B. Laporte, "A new formulation for induction machine computation", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 30, No. 5, 1994, pp. 3693-3696.
- [25] B. Laporte, G. Vinsard, J. C. Mercier, "A computation method for induction motors in steady state", Mathematics and Computers in Simulation, 38 (1995), pp. 369-376.
- [26] J. C. Mercier, "Contribution à l'étude par éléments finis du comportement électromagnétique des machines asynchrones rapides", Thèse de Docteur Ingénieur, INPL, Nancy, Sept. 1993.
- [27] J. P. Bock, B. Laporte, G. Vinsard, "Détermination de régimes transitoires des moteurs à induction par une nouvelle méthode de couplage des champs magnétiques du stator et du rotor", J. Phys. III, France, Octobre 1995, pp. 1661-1669.
- [28] C. Barnetche, "Calcul numérique de machines asynchrones en régime transitoire en tenant compte de la saturation magnétique", Thèse de Docteur Ingénieur, INPL, Nancy, Oct. 1997.
- [29] N. Takarobet, "Optimisation de l'alimentation des convertisseurs électromagnétiques linéaires à induction", Thèse de Docteur Ingénieur, INPL, Nancy, Dec. 1996.
- [30] M. V. K. Chari, P. P. Silvester, "Finite elements in electrical and Magnetic field problems", John Wiley and Sons Ltd. 1980.
- [31] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, "The finite element method", 4th ed., McGraw-Hill, 1989.
-

- 
- [32] R. Kechroud, R. Ibtouen, S. Mezani, O. Touhami, B. Laporte "Modelling of a slotless permanent magnet machine with motion consideration", Archives of Electrical Engineering, index, 351660, ISBN 0004-0746, Vol. XLIX, No. 3-4/2000, pp. 377-393.
- [33] R. Kechroud, R. Ibtouen, O. Touhami "Coupled non-linear complex finite elements analysis of solid rotor induction motor" *International Compumag Society, Team Workshop and Application Forum*, Evian, France, July 6, 2001, pp. 16-17.
- [34] Y. Maréchal, G. Meunier, J. L. Coulomb, H. Magnin, "A general purpose tool for restoring inter-element continuity", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1728-1731.
- [35] D. Rodger, P. J. Lai, P. J. Leonard, "Coupled elements for problems involving movement", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1990, pp. 548-550.
- [36] K. Lee, M. J. DeBertoli, M. J. Lee, S. J. Salon, "Coupling finite elements and analytical solution in the air gap of electrical machines", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 27, No. 5, September 1991, pp. 3955-3957.
- [37] F. Bouillaut, A. Razek, "Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 24, No. 1, January 1988, pp. 259-261.
- [38] S. J. Salon, J. D'Angelo, "Application of the hybrid finite element method in electromagnetics", IEEE Transactions On Magnetics, Vol. MAG-24, No. 1, January 1988, pp. 80-85.
-

## II. 1 INTRODUCTION

Au chapitre précédent, nous avons présenté la mise en équation des problèmes électromagnétiques bidimensionnels formulés en potentiel vecteur magnétique dans des domaines ferromagnétiques et/ ou conducteurs et exprimés par rapport à leurs référentiels propres. Le point délicat de cette étude était la prise en compte du mouvement du rotor. Ce problème était traité, dans la plupart des modélisations déjà proposées, à l'aide d'itérations dans le temps et grâce à des rotations élémentaires du rotor entre chaque pas de calcul. Ceci nécessite souvent un remaillage partiel de la structure. D'un point de vue pratique, ces méthodes sont performantes. Cependant, elles sont lourdes à mettre en œuvre et exigent des temps de calcul très longs.

Nous présentons, dans ce deuxième chapitre, une modélisation dynamique des moteurs synchrones à aimants permanents reposant sur une analyse temporelle du problème mais en séparant les domaines statorique et rotorique et en cherchant le moyen pratique de les coupler.

## II. 2 MODELISATION ELECTROMAGNETIQUE

### II. 2. 1 Hypothèses

L'étude du comportement électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents est en principe un problème 3D. Cependant, on adopte des hypothèses simplificatrices qui restent toutefois concordantes avec l'objectif visé afin de pouvoir se ramener à un problème 2D. Pour la structure étudiée, les hypothèses adoptées sont :

1. Le modèle d'étude est bidimensionnel ; l'étude des moteurs synchrones à aimants permanents est effectuée dans un plan perpendiculaire à la direction axiale de la structure. On considère que le problème est invariant dans toute translation parallèle à l'axe de rotation de la machine. Les effets d'extrémités sont de ce fait négligés.
1. Le stator des moteurs étudiés est généralement constitué de tôles feuilletées qui empêchent la circulation de courants induits suivant l'axe de la machine. La conductivité électrique est donc considérée nulle au niveau de la culasse statorique.
2. La densité de courant  $J_s$  dans les enroulements de l'induit est supposée uniformément répartie. Cette densité est imposée par l'onduleur de tension contrôlé en courants alimentant la structure étudiée. Elle est déterminée par les caractéristiques de la structure étudiée (bobinage, courants, forme des encoches...). Pour une encoche de section  $S$  comportant  $N$  conducteurs et traversée par un courant instantané de valeur  $i$ , elle s'écrit ainsi :

$$J_s = \frac{Ni(t)}{S} \quad (\text{II. 1})$$

Dans la pratique, afin d'uniformiser la répartition spatiale de la densité de courant sur la section, les bobines statoriques sont constituées de conducteurs finement subdivisés. De plus, pour éviter les éventuels déséquilibres des forces électromotrices induites dans les différents conducteurs, ceux-ci sont transposés de manière à occuper toutes les positions dans les encoches.

3. Le phénomène d'hystérésis est négligé.
4. Les aimants modernes utilisés, à base de terres rares, présentent une aimantation  $\vec{M}$  rigide et uniforme [1, 2, 3]. Ils sont caractérisés par une courbe de désaimantation linéaire dans la zone normale d'utilisation [1, 2, 3]. L'induction magnétique  $\vec{B}$ , le champ magnétique  $\vec{H}$  et l'aimantation sont liés par :

$$\vec{B} = \mu_p(\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{II. 2})$$

où  $\mu_p$  désigne la perméabilité de recul des aimants ( $\mu_p \approx \mu_0$ ).

Ces aimants sont eux-mêmes composés de barreaux élémentaires juxtaposés en forme de tuiles (Fig. II. 1). Chaque barreau présente sensiblement une aimantation radiale parallèle à son axe de sorte que :  $\text{rot}(\vec{M}) = \vec{0}$ . Le modèle ampérien [4, 5, 6, 7] permet de remplacer chaque barreau par des densités de courants superficielles équivalentes  $\vec{j}_r$  situées au niveau de leurs flancs exprimées ainsi :

$$\vec{j}_r = \vec{M} \wedge \vec{n} \quad (\text{II. 3})$$

Toutefois, cette analogie n'est pas obligatoire et la distribution superficielle de courant (II. 3) peut être considérée comme équivalente à une distribution volumique de courant au sens mathématique des distributions [8]. Par la suite, nous allons montrer que cette densité superficielle de courant est équivalente à une densité volumique  $\vec{J}_r$  [9].

## II. 2. 2 Domaine d'étude et mise en équations

Considérons une machine synchrone cylindrique à aimants permanents ayant  $p$  paires de pôles (Fig. II. 2), alimentée par un onduleur de tension contrôlé en courant délivrant des courants triphasés équilibrés de pulsation  $\omega$ , tournant à la vitesse angulaire supposée constante  $\Omega$ . Dans une telle machine, le rotor en mouvement par rapport au stator, deux référentiels peuvent être considérés :

1. Un référentiel fixe lié au stator;
2. Un référentiel tournant par rapport au précédent et lié au rotor.

Ces deux référentiels sont liés à chaque instant  $t$  par :

$$\theta_s = \theta_r + \Omega t + \delta_0 \quad (\text{II. 4})$$

Où  $\theta_s$  et  $\theta_r$  désignent respectivement les positions angulaires d'un point donné de la machine par rapport au stator et au rotor. Quant à  $\delta_0$ , elle désigne la position angulaire du rotor par rapport au stator à l'instant  $t = 0$ .

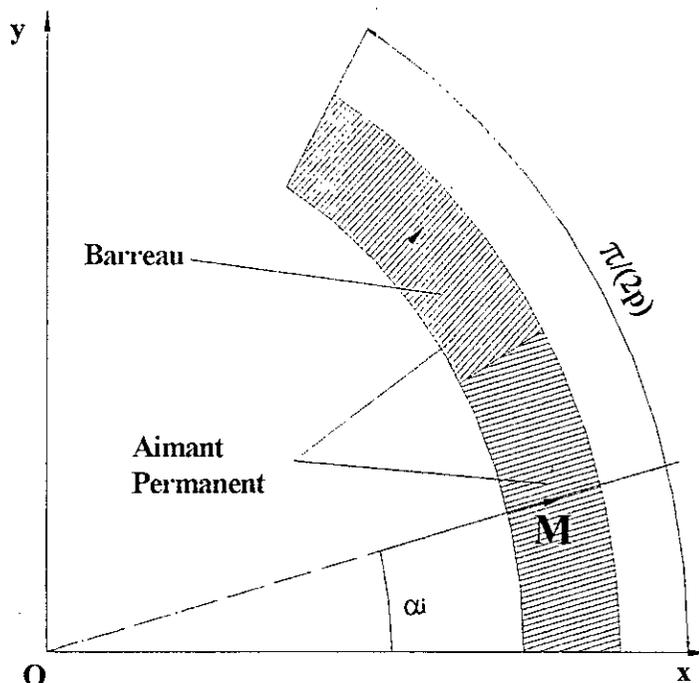


Fig. II. 1 Aimant permanent composé de deux barreaux dont l'aimantation est radiale parallèle.

Par rapport à ces deux référentiels, le potentiel vecteur magnétique est noté par :

$A_s(r, \theta_s, t)$  S'il est exprimé dans le référentiel lié au stator,

Et par :

$A_r(r, \theta_r, t)$  S'il est exprimé dans le référentiel lié au rotor.

Le passage du potentiel  $A_r$  au potentiel  $A_s$  se fait en tenant compte de la relation (II. 4) par changement de référentiel :

$$A_r(r, \theta_s - \Omega t - \delta_0, t) = A_s(r, \theta_s, t) \quad (\text{II. 5})$$

D'autre part, les domaines du stator et du rotor seront notés respectivement  $\Omega_s$  et  $\Omega_r$ . Les équations du champ seront exprimées selon le formalisme Lagrangien où les domaines sont fixes par rapport à leurs référentiels. L'entrefer joue un rôle particulier, il est à la fois incorporé dans  $\Omega_s$  et  $\Omega_r$ . dans la mesure où l'équation du champ dans ce domaine particulier est réduite à l'équation de Laplace. L'entrefer, scindé virtuellement en deux, est ainsi partagé entre les deux domaines. Les domaines considérés par la suite sont donc les suivants :

1. Le domaine rotorique comprenant le rotor et une partie de l'entrefer;
2. Le domaine statorique comprenant le stator et l'autre partie de l'entrefer.

Ainsi, les équations aux dérivées partielles gouvernant la diffusion du champ magnétique s'écrivent d'après (I. 46) :

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_s} \operatorname{grad}(A_s)\right) + J_s = 0 \quad \text{Dans } \Omega_s \quad (\text{II. 6})$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_r} \operatorname{grad}(A_r)\right) - \sigma_r \frac{\partial A_r}{\partial t} + J_r = 0 \quad \text{Dans } \Omega_r \quad (\text{II. 7})$$

Les équations précédentes et l'adjonction des conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma_{\text{ext}}$  permettent de définir complètement le problème au sens mathématique. Mais le fait de découpler les domaines rotorique et statorique et de créer deux domaines différents implique la création de l'interface artificielle  $\Gamma$ . Sur cette interface, il est nécessaire d'imposer les conditions de passage adéquates afin de coupler les champs électromagnétiques rotorique et statorique

$$A_r(r_e, \theta_s - \Omega t - \delta_0, t) = A_s(r_e, \theta_s, t) \quad \text{Sur } \Gamma \quad (\text{II. 8})$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial n}(r_e, \theta_s - \Omega t - \delta_0, t) = \frac{\partial A_s}{\partial n}(r_e, \theta_s, t) \quad \text{Sur } \Gamma \quad (\text{II. 9})$$

La culasse de la machine étudiée est supposée suffisamment large pour pouvoir estimer qu'aucun flux ne sort de son enceinte. Aussi, le potentiel vecteur est considéré nul sur la frontière extérieure du stator.

$$A_s = 0 \quad \text{Sur } \Gamma_{\text{ext}} \quad (\text{II. 10})$$

La condition sur la frontière extérieure étant définie, les équations (II. 6 à 10) forment à priori un système complet pour déterminer le potentiel vecteur magnétique  $A$  si on ajoute les conditions initiales.

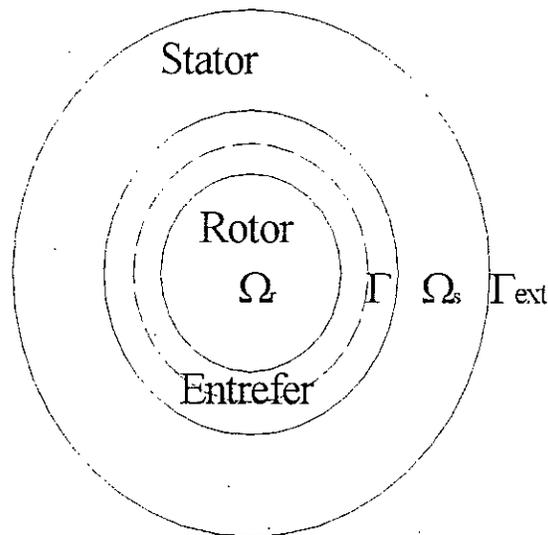


Fig. II. 2 Structure étudiée

Finalement, nous avons à résoudre l'équation de diffusion dans le rotor où la conductivité électrique n'est pas nulle. Cette équation se réduit à celle de Laplace dans l'entrefer et à celle de Poisson dans le stator. Les champs électromagnétiques dans le domaine statorique et rotorique sont couplés grâce aux conditions de continuité du champ électromagnétique. Pour « fermer » le problème au sens mathématique, une condition du type Dirichlet a été imposée sur la frontière extérieure du domaine d'étude. La prochaine étape est consacrée à la résolution numérique de ces équations par la méthode des éléments finis

## II. 3 RESOLUTION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La plus puissante des méthodes numériques semble être la méthode des éléments finis qui d'un point de vue mathématique peut être considérée comme étant une extension des techniques de Rayleigh-Ritz/ Galerkin de construction de fonctions dont la combinaison approxime la solution. Cette méthode a été introduite en grande partie par O. Zienkiewicz [10] et développé en électromagnétisme par P. Silvester et M. V. K. Chari en 1970 [11].

Elle consiste à découper le domaine étudié en éléments de forme simple, appelés éléments finis. Dans chaque élément, l'inconnue (potentiel vecteur magnétique par exemple) est donc approximée par des fonctions simples, qui sont généralement des polynômes de degré un ou deux. L'approximation vérifie les équations aux dérivées partielles à résoudre de manière faible. Ces équations sont alors transformées en un système d'équations algébriques qu'il convient de résoudre pour obtenir la solution du problème posé.

Pour obtenir ce système, on peut utiliser la méthode variationnelle ou la méthode des résidus pondérés. La méthode variationnelle consiste à rendre extrémale une fonctionnelle définie par une intégrale faisant appel à la fonction inconnue et ses dérivées. Souvent, cette fonctionnelle est désignée par fonctionnelle énergie. La deuxième méthode, celle des résidus pondérés, consiste à chercher la solution du problème en partant directement des équations aux dérivées partielles. D'un point de vue mathématique, les deux méthodes sont équivalentes, la solution de l'une vérifie l'autre.

### II. 3. 1 Formulation du type Galerkin et de Ritz de l'équation de diffusion

L'équation de diffusion du champ électromagnétique se prête difficilement à un traitement numérique direct par la méthode des éléments finis. Il est indispensable de la reformuler en faisant appel à la méthode des résidus pondérés ou à celle des fonctionnelles. La méthode des résidus pondérés ou méthode de Galerkin suppose que l'on peut trouver une solution approchée  $\tilde{A}$  minimisant un résidu que l'on définit par [12, 13] :

$$\text{Res} = \text{div}\left(\frac{1}{\mu} \text{grad}(\tilde{A})\right) - \sigma \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + J \quad (\text{II. 11})$$

Si  $\tilde{A}$  représentait la solution exacte alors  $A = \tilde{A}$  et le résidu (II. 11) est nul ( $\text{Res} = 0$ ). Comme une solution exacte est pratiquement impossible à trouver, on se contente généralement d'une solution approximative. Afin que l'approximation  $\tilde{A}$  soit proche de la solution exacte  $A$ , il faut alors que l'intégrale du résidu pondéré dans la région concernée soit nulle. L'idée est de multiplier le résidu par une fonction poids  $v$  et d'intégrer sur la région concernée en supposant que le résultat de cette intégration est nul, soit :

$$\iint_{\Omega} (v \text{Res}) dx dy = 0 \quad (\text{II. 12})$$

En intégrant par parties (II. 12), on est conduit à :

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad} v \cdot \text{grad} \tilde{A} dx dy + \iint_{\Omega} \sigma v \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} dx dy - \iint_{\Omega} v J dx dy - \oint_{\partial \Omega} \frac{1}{\mu} v \frac{\partial \tilde{A}}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{II. 13})$$

Où  $n$  est la normale sortante vis à vis de la frontière du domaine considéré.

En supposant que la trace de la fonction poids  $v$  est nulle sur la frontière du domaine, on annule le dernier membre de l'équation (II. 13). La condition de Neumann du type homogène devient implicite dans la formulation ce qui nous amène à l'expression suivante :

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad} v \cdot \text{grad} \tilde{A} dx dy + \iint_{\Omega} \sigma v \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} dx dy - \iint_{\Omega} v J dx dy = 0 \quad (\text{II. 14})$$

La condition (II. 9) est ainsi satisfaite dans un sens moyen dans un formalisme type éléments finis. Par contre, les conditions du type Dirichlet doivent être imposées explicitement.

Cette équation représente la formulation de l'équation de diffusion selon le concept de Galerkin. Par contre, dans la méthode de Ritz, on procède d'une façon différente en cherchant la fonctionnelle associée au problème de diffusion. Si on choisit la fonction poids  $v$  identique à la première variation de l'approximation  $\tilde{A}$ , soit  $v = \delta \tilde{A}$ , l'équation (II. 14) représenterait alors la première variation de la fonctionnelle  $\Pi$ . Celle-ci est alors définie par [14] :

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \int_0^B h db - 2JA + 2\sigma A \frac{\partial A}{\partial t} \right) dx dy \quad (\text{II. 15})$$

A chaque instant  $t$ , le potentiel vecteur magnétique doit s'ajuster de façon à ce que  $\delta\Pi = 0$ . Si les grandeurs  $A$ ,  $\frac{\partial A}{\partial x}$  et  $\frac{\partial A}{\partial y}$  subissent des variations alors que  $\frac{\partial A}{\partial t}$  est supposée constante, la minimisation de  $\Pi$  est équivalente à la résolution de l'équation de diffusion.

### II. 3. 2 Discrétisation spatiale par éléments finis

Le domaine d'étude est subdivisé en petits éléments de forme triangulaire (Fig. II. 3). Chaque triangle est repéré par ses trois sommets. Cette subdivision exclusivement triangulaire du premier ordre a l'avantage de s'adapter à toute configuration géométrique et permet un numérotage systématique des points à l'aide d'algorithmes simples [15, 16, 17].

Les maillages du stator (Fig. II. 3.a) et du rotor (Fig. II. 3.b) sont indépendants et ne coïncident pas dans l'entrefer. Dans chaque élément (e) (Fig. II. 4), le potentiel vecteur magnétique est approché par un polynôme du premier degré en  $x$  et  $y$  sous la forme [10, 12, 18, 19] :

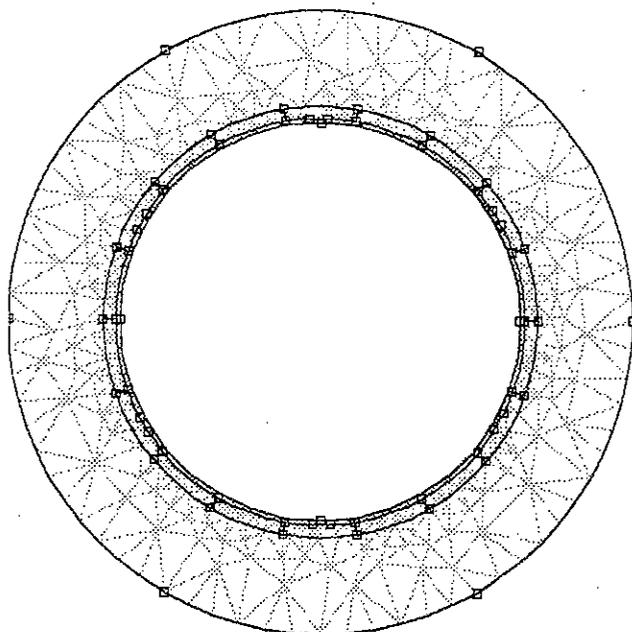
$$A(x,y,t) = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (\text{II. 16})$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont des coefficients qui dépendent des coordonnées des sommets du triangle et des potentiels correspondants.

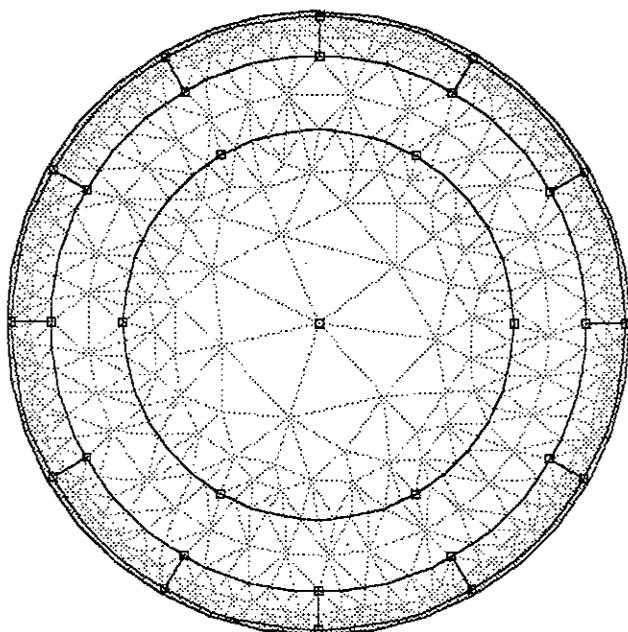
De l'équation (II. 16), nous constatons que l'induction est constante à l'intérieur de chaque élément et, par conséquent, la perméabilité magnétique l'est également, ce qui facilite l'intégration analytique de l'équation (II. 14). Le potentiel en tout point de l'élément (e) est parfaitement défini à partir des valeurs des potentiels en ses trois sommets, la relation (II. 16) peut s'écrire ainsi [20] :

$$\tilde{A}(x, y, t) = \sum_1^3 N_i(x, y) A_i(t) \quad (\text{II. 17})$$

Sous forme matricielle, cette relation peut se mettre sous la forme:  $\tilde{A} = \langle N \rangle \{A_e\}$  où  $\langle N \rangle$  est un vecteur ligne dont les composantes sont les fonctions d'interpolation (fonctions de forme)  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et  $\{A_e\}$  est un vecteur colonne dont les composantes sont les potentiels vecteurs magnétiques aux nœuds  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).



a. Maillage du domaine statorique



b. Maillage du domaine rotorique.

Fig. II. 3 Maillage de la structure étudiée.

Afin d'assurer la continuité de la variable d'étude, qui est dans notre cas le potentiel vecteur magnétique, entre éléments adjacents, les fonctions de forme doivent vérifier les conditions suivantes [20] :

$$N_i(x, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i=j) \\ 0 & \text{si } (i \neq j) \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{II. 18})$$

Tous calculs faits et en désignant par  $i, k, l$  toute permutation circulaire des indices 1, 2, 3 assignés dans le sens trigonométrique, ces fonctions s'écrivent sous la forme suivante [20] :

$$N_i = \frac{P_i + Q_i x + R_i y}{2\Delta_e} \quad (\text{II. 19})$$

Les paramètres  $P_i, Q_i, R_i$  et  $\Delta_e$ , intervenant dans l'équation (II. 19), sont des fonctions des coordonnées des nœuds :

$$P_i = x_k y_l - x_l y_k \quad (\text{II. 20})$$

$$Q_i = y_k - y_l \quad (\text{II. 21})$$

$$R_i = x_l - x_k \quad (\text{II. 22})$$

$$\Delta_e = \frac{1}{2}(P_i + P_k + P_l) \quad (\text{II. 23})$$

où  $\Delta_e$  représente la surface de l'élément (e).

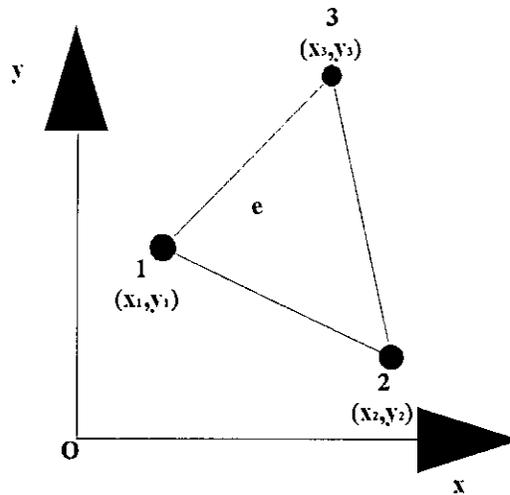


Fig. II. 4 Elément fini à 3 nœuds

Les composantes du gradient du potentiel vecteur magnétique sont obtenues en dérivant l'expression (II. 17) en tenant compte des expressions (II. 19 à 23)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 24})$$

Avec :

$$[D] = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

La première conséquence de l'expression (II. 24) est que l'induction magnétique est constante au niveau de chaque élément. La seconde est que la perméabilité magnétique, qui est fonction de cette induction dans le cas des milieux non linéaire, est constante. Le calcul des intégrales apparaissant dans l'expression (II. 14) peut être mené analytiquement. Le choix de

l'approximation du potentiel vecteur étant effectué, il reste à définir les fonctions de projection  $v$ . En effet, le conditionnement du système d'équations final et donc sa convergence dépendent étroitement de ce choix [18]. Dans la méthode de Galerkin, ce choix consiste à prendre ces fonctions identiques aux fonctions de forme (expression II. 19).

$$v = N_i \quad i = 1,2,3 \tag{II. 25}$$

En substituant les expressions (II. 25) et (II. 17) dans l'expression (II. 14), nous obtenons :

$$\sum_e \left( \iint_{\Omega_e} v \text{grad} N_i \cdot \text{grad} \left( \sum_{j=1}^3 N_j A_j \right) dx dy + \iint_{\Omega_e} \sigma N_i \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^3 N_j A_j \right) dx dy - \iint_{\Omega_e} N_i J dx dy \right) = 0 \tag{II. 26}$$

Où  $v$  désigne la réluctivité magnétique, inverse de la perméabilité  $\mu$ .

Sous forme matricielle, la relation (II. 26) s'écrit :

$$\sum_e v_e [S_e] \{A(t)\}_e + \sigma_e [T_e] \left\{ \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\}_e - [Q_e] \{J_e\} = \{0\} \tag{II. 27}$$

Où l'indice  $e$  se réfère à un élément fini donné.

Les éléments typiques des matrices  $[S_e]$ ,  $[T_e]$  et  $[Q_e]$  sont donnés respectivement par les expressions (II. 28), (II. 29) et (II. 30) :

$$[S_e] = \Delta_e [D]^T [D] \tag{II. 28}$$

$$[T_e] = \frac{\Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{II. 29}$$

$$[Q_e] = \frac{\Delta_e}{3} [1 \quad 1 \quad 1] \tag{II. 30}$$

L'expression (II. 30) n'est valable que lorsque les densités de courants mises en jeu sont constantes comme c'est le cas avec les densités de courants statoriques. Le traitement des densités de courants superficielles équivalentes aux aimants (expression II. 3) mérite un traitement particulier. Au sens de la méthode des éléments finis, ces densités sont équivalentes à des densités volumiques [9]. Pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser l'identité vectorielle suivante :

$$\text{rot}(v\vec{M}) = v\text{rot}(\vec{M}) + \text{grad}(v) \wedge \vec{M} \tag{II. 31}$$

En intégrant les deux membres de la relation (II. 31) sur le domaine élémentaire  $\Omega_e$  en tenant compte du théorème de Stokes et de l'hypothèse que l'aimantation  $\vec{M}$  est uniforme, nous obtenons :

$$\oint_{\partial\Omega_e} N_i \vec{j}_r d\Gamma = \iint_{\Omega_e} \text{grad}(N_i) \wedge \vec{M} dx dy \quad (\text{II. 32})$$

La quantité  $\text{grad}(N_i) \wedge \vec{M}$  joue ainsi le rôle d'une densité de courant volumique  $\vec{j}_r$  que la littérature désigne par la densité d'aimantation. Comme cette densité est constante sous les hypothèses adoptées, la matrice  $[Q_e]$  est dans ce cas égale à :

$$[Q_e] = \Delta_e [1 \quad 1 \quad 1] \quad (\text{II. 33})$$

Il est clair que, s'il n'y a pas de remaillage de la structure étudiée afin de tenir compte du mouvement du rotor, les matrices  $[S_e]$ ,  $[T_e]$  et  $[Q_e]$  sont indépendantes du temps. Elles ne dépendent que de la géométrie des éléments d'où le gain de temps significatif lors de la résolution d'un problème dynamique ou statique. Ce qui n'est pas le cas avec les techniques de prise en compte du mouvement utilisant les remaillages où à chaque pas de temps il est nécessaire de reconstruire ces matrices.

La discrétisation spatiale du problème de diffusion du champ magnétique résultant de l'application de la méthode de Galerkin conduit finalement à la résolution du système d'équations différentielles du premier ordre suivant [13, 14] :

$$v[S]\{A(t)\} + \sigma[T]\left\{\frac{\partial A(t)}{\partial t}\right\} = [Q]\{J\} \quad (\text{II. 34})$$

Parallèlement, le système (II. 34) peut aussi être obtenu en minimisant la forme discrète (relation II. 35) de la fonctionnelle Ritz (relation II. 15) associée à l'équation de diffusion

$$\Pi = \frac{1}{2} \{A\}^T v[S]\{A\} + \{A\}^T \left\{ \sigma[T] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} - [Q]\{J\} \right\} \quad (\text{II. 35})$$

Le système (II. 34) est non-linéaire du fait de la dépendance de la réluctivité  $v$  du potentiel vecteur  $A$ . Résoudre un tel système consiste donc à trouver un ensemble de valeurs  $\{A(t)\}$  qui vérifient (II. 34) à tout instant  $t$  ainsi qu'aux conditions initiales imposées à  $t = 0$ . Deux types de méthodes sont utilisés pour résoudre ce système [12]:

- les méthodes d'intégration directes;
- et les méthodes de superposition.

Les méthodes d'intégration directes consistent à construire numériquement à partir du vecteur valeurs initiales  $\{A(0)\}$  une suite de valeurs de la solution aux instants successifs  $\Delta t$ ,  $2\Delta t, \dots, n\Delta T, \dots$

Ces méthodes utilisent des approximations des dérivées  $\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}$  de type différences finies. Il est également possible d'utiliser une approximation par éléments finis pour discrétiser le système différentiel (II. 34) [21].

Par contre, dans les méthodes de superposition modales, le système d'équations couplées (II. 34) est transformé en un système d'équations découplées. Chacune des équations ainsi obtenues est alors intégrée explicitement ou numériquement. La solution cherchée est une combinaison linéaire des solutions des équations découplées. Cependant, cette méthode reste valable uniquement lorsque le système (II. 34) est linéaire.

### II. 3. 3 Discrétisation temporelle de l'équation de diffusion

Parmi les méthodes d'intégration directes, notre choix s'est porté sur la méthode d'Euler semi-implicite [12] communément appelé «  $\theta$ - method » [21]. L'algorithme d'Euler repose sur l'approximation suivante [13]:

$$\beta \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t} + (1-\beta) \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 36})$$

La valeur du paramètre  $\beta$  détermine la nature du schéma de discrétisation :

1. Schéma d'Euler explicite ou de différences finies décentrées à gauche correspond à  $\beta=0$ .
2. Schéma d'Euler implicite  $\beta=1$  ou de différences finies décentrées à droite correspond à  $\beta=1$ .
3. Schéma d'Euler semi-implicite correspond à  $0 < \beta < 1$ . La valeur particulière  $\beta=1/2$  correspond au schéma de Cranck- Nicholson ou de différences finies centrales.

Les dérivées  $\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t}$  et  $\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t$  étant inconnues, le but est de trouver  $\{A\}^{t+\Delta t}$ . En multipliant les deux membres de la relation (II. 34) respectivement par  $\beta$  et  $\beta-1$ , nous pouvons tirer les deux identités suivantes :

$$\beta \sigma [T] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^{t+\Delta t} = -\beta \nu [S] \{A\}^{t+\Delta t} + \beta [Q] \{J\}^{t+\Delta t} \quad (\text{II. 37})$$

$$(1-\beta) \sigma [T] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\}^t = -(1-\beta) \nu [S] \{A\}^t + (1-\beta) [Q] \{J\}^t \quad (\text{II. 38})$$

En sommant membre à membre les expressions (II. 37) et (II. 38) et en substituant l'expression (II.36) dans l'expression générale obtenue, nous déduisons l'expression (II. 39).

$$\left[ \beta v[S] + \frac{\sigma[T]}{\Delta t} \right] \{A\}^{t+\Delta t} = \left[ -(1-\beta)v[S] + \frac{\sigma[T]}{\Delta t} \right] \{A\}^t + (1-\beta)[Q]\{J\}^t + \beta[Q]\{J\}^{t+\Delta t} \quad (\text{II. 39})$$

Ce système est non-linéaire et ne peut être résolu que par une méthode itérative telle que la méthode de substitution successive ou celle de Newton-Raphson.

### II. 3. 4 Linéarisation de l'équation de diffusion du champ magnétique

La méthode de substitution successive est de mise en œuvre facile. Cependant sa convergence est lente [12]. Ceci conduit souvent à des temps de calcul importants. Généralement, c'est la méthode de Newton-Raphson qui est adoptée dans la littérature [10, 12, 14]. Sa convergence est quadratique si la solution de départ est proche de la solution exacte. Supposons que la réluctivité magnétique  $v$  est une fonction lissée du carré de l'induction magnétique  $B$ , le système (II. 39) peut être linéarisé grâce à la procédure de Newton-Raphson. La forme incrémentale de ce système d'équations peut se mettre sous la forme [13]:

$$[K]_{k+1}^{t+\Delta t} \{\Delta A\}_{k+1}^{t+\Delta t} = \{R\}_{k+1}^{t+\Delta t} \quad (\text{II. 40})$$

avec :

$$[K]_{k+1}^{t+\Delta t} = \left[ \beta[G] + \frac{\sigma[T]}{\Delta t} \right] \quad (\text{II. 41})$$

$$\{R\}_{k+1}^{t+\Delta t} = - \left[ \beta v_k^{t+\Delta t} [S] + \frac{\sigma[T]}{\Delta t} \right] \{A\}_k^{t+\Delta t} + \left[ -(1-\beta)v^t [S] + \frac{\sigma[T]}{\Delta t} \right] \{A\}^t + (1-\beta)[Q]\{J\}^t + \beta[Q]\{J\}^{t+\Delta t} \quad (\text{II. 42})$$

$$[G] = v_k^{t+\Delta t} [S] + \frac{2}{\Delta_e} \left( \frac{\partial v}{\partial B^2} \right) ([S]\{A\}_k^{t+\Delta t}) ([S]\{A\}_k^{t+\Delta t})^T \quad (\text{II. 43})$$

$$\{\Delta A\}_{k+1}^{t+\Delta t} = \{A\}_{k+1}^{t+\Delta t} - \{A\}_k^{t+\Delta t} \quad (\text{II. 44})$$

De la relation (II. 40), nous pouvons déduire la forme incrémentale de la fonctionnelle, soit :

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \{\Delta A\}^T [K] \{\Delta A\} - \{\Delta A\}^T \{R\} \quad (\text{II. 45})$$

Dans ces conditions, la forme incrémentale de la fonctionnelle  $\Pi$ , que l'on peut associer à la structure étudiée, peut être mise sous la forme suivante :

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{s2} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{s2} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{s2} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 46})$$

Où les indices  $s_1, s_2, r_3$  et  $r_4$  se réfèrent aux nœuds du domaine statorique sauf ceux appartenant à la frontière  $\Gamma$ , aux nœuds du domaine statorique appartenant à cette frontière, aux nœuds du domaine rotorique appartenant également à cette frontière et aux nœuds du domaine rotorique excepté ceux appartenant à la frontière  $\Gamma$ .

## II. 4 COUPLAGE DES CHAMPS STATORIQUE ET ROTORIQUE

### II. 4. 1 Equations de couplage

Il est clair, à partir de la relation (II. 46), que les potentiels vecteurs  $A_s$  et  $A_r$  des domaines  $\Omega_r$  et  $\Omega_s$  sont indépendants. Or ces derniers sont liés par les relations (II. 8) et (II.9) qui traduisent les conditions de continuité entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes. Nous devons donc modifier la forme discrète (II. 46) afin de tenir compte de cette contrainte.

Au niveau de la méthode des éléments finis, la continuité de la dérivée normale de l'inconnue du problème (le potentiel vecteur magnétique dans notre cas) est assurée au sens faible et par conséquent la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est assurée implicitement. Par contre, la continuité du potentiel vecteur magnétique (et donc la composante normale de l'induction magnétique) doit être assurée au sens fort c'est à dire de façon explicite. C'est cette contrainte qui va être exploitée pour coupler les champs électromagnétiques statorique et rotorique.

A chaque instant  $t$ , chaque potentiel  $A_{s_2}^j$  d'un nœud  $j$  (Fig. II. 5) de  $\Omega_s$ , appartenant à la frontière  $\Gamma$  est lié aux potentiels  $A_{r_3}^i$  des nœuds  $i$  de  $\Omega_r$ , appartenant à cette frontière par une relation linéaire du type (II. 47) [7, 22] qui est compatible avec l'approximation (II. 17) choisie [22].

$$A_{s_2}^j(\theta_s) = \sum_i \alpha_i(\theta_r) A_{r_3}^i \quad (\text{II. 47})$$

Où  $\theta_s$  et  $\theta_r$  représentent respectivement les positions angulaires du nœud  $j$  par rapport aux repères statorique et rotorique. Ces positions sont liées par la relation (II. 4).

Les fonctions  $\alpha_i$  sont des polynômes de degrés un, obtenus à partir des fonctions de formes des éléments T3. Elles sont définies comme suit :

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{\theta_r - \theta_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} & \text{si } \theta_{i-1} \leq \theta_r \leq \theta_i \\ \frac{\theta_r - \theta_{i+1}}{\theta_i - \theta_{i+1}} & \text{si } \theta_i \leq \theta_r \leq \theta_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II. 48})$$

Où  $\theta_r, \theta_{i-1}, \theta_i$  et  $\theta_{i+1}$  représentent les positions angulaires par rapport au repère rotorique des nœuds d'indices  $j, i-1, i$  et  $i+1$ .

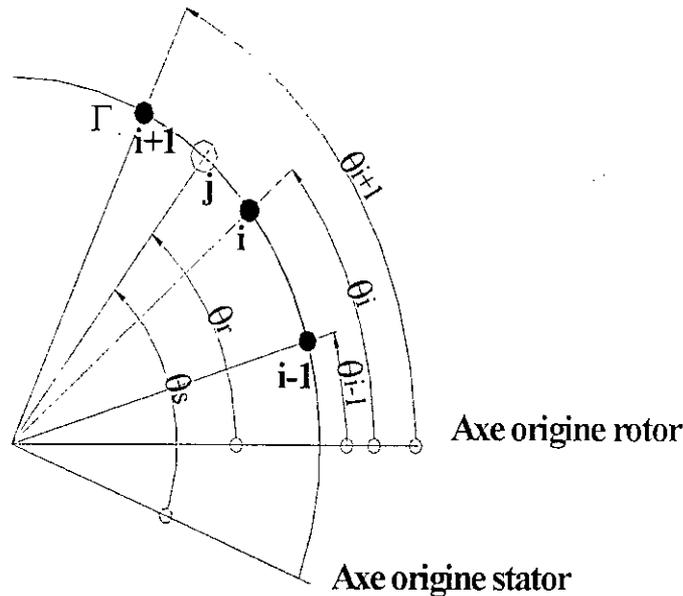


Fig. II. 5 Disposition des nœuds statoriques et rotoriques à la frontière  $\Gamma$ .

En couplant les champs statorique et rotorique grâce à l'expression (II. 47), l'ensemble des harmoniques d'espace du potentiel vecteur magnétique est transmis à travers l'interface  $\Gamma$  imposant ainsi l'adoption de pas de temps petits pour pouvoir les suivre. Dans les machines électriques classiques, les enroulements sont conçus de façon à ce que le fondamental du champ électromagnétique soit prépondérant. Les harmoniques d'ordre pair sont généralement nuls [23].

L'idée est de choisir un nombre restreint d'harmoniques d'espace pour coupler ces champs. Ceci permet d'adopter des pas de temps, lors des simulations, beaucoup plus importants réduisant ainsi les temps de calcul.

Le potentiel vecteur magnétique, périodique dans l'entrefer (de période  $\theta_0 = \frac{2\pi}{p}$ ), peut être décomposé en série de Fourier. L'expression (II. 47) peut être mise sous la forme suivante :

$$A_{r3}(\theta_r) = \sum_i \left( \frac{1}{2} a_{oi} + \sum_k a_{ki} \cos(kp\theta_r) + b_{ki} \sin(kp\theta_r) \right) A_{r3}^i \quad (\text{II. 49})$$

Les coefficients de Fourier d'ordre  $k$  sont donnés par :

$$a_{oi} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{\theta_0} \quad (\text{II. 50})$$

$$a_{ki} = -\frac{4}{\theta_0(kp)^2} \left[ \frac{1}{\theta_i - \theta_{i-1}} \sin\left(\frac{kp}{2}(\theta_i + \theta_{i-1})\right) \sin\left(\frac{kp}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})\right) + \frac{1}{\theta_i - \theta_{i+1}} \sin\left(\frac{kp}{2}(\theta_{i+1} + \theta_i)\right) \sin\left(\frac{kp}{2}(\theta_{i+1} - \theta_i)\right) \right] \quad (\text{II. 51})$$

$$b_{ki} = \frac{4}{\theta_0 (kp)^2} \left[ \frac{1}{\theta_i - \theta_{i-1}} \sin\left(\frac{kp}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})\right) \cos\left(\frac{kp}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})\right) + \frac{1}{\theta_i - \theta_{i+1}} \sin\left(\frac{kp}{2}(\theta_{i-1} - \theta_i)\right) \cos\left(\frac{kp}{2}(\theta_{i+1} - \theta_i)\right) \right] \quad (\text{II. 52})$$

L'ensemble des équations de couplage (II. 47) ou (II. 49), liant les potentiels vecteurs  $A_{s2}$  et  $A_{r3}$  des domaines statorique et rotorique, peuvent être mises sous la forme matricielle suivante :

$$\{A_{s2}\} = [C]\{A_{r3}\} \quad (\text{II. 53})$$

Où  $[C]$  est la matrice de couplage ou des contraintes. C'est une matrice fonction du temps à cause du mouvement du rotor par rapport au stator.

La relation (II. 53) peut être mise sous la forme incrémentale suivante :

$$\{\Delta A_{s2}\} = [C]\{\Delta A_{r3}\} \quad (\text{II. 54})$$

## II. 4. 2 Techniques de couplage

Il est clair à ce stade qu'il faut modifier la forme incrémentale de la fonctionnelle  $\Pi$  afin de tenir compte des contraintes (II. 54). Cette modification est possible grâce aux techniques suivantes [10, 12, 14] :

- Technique de transformation;
- Technique des multiplicateurs de Lagrange;
- Technique de pénalisation.

### II. 4. 2. 1 Technique de transformation

La technique de transformation [10, 12, 14] est un moyen d'imposer des combinaisons linéaires entre les potentiels vecteurs des nœuds de la structure étudiée. Pour chaque équation (contrainte), une inconnue (potentiel vecteur) peut être éliminée. Ainsi, cette technique permet de réduire le nombre d'équations. En contre partie, un nombre considérable de manipulations de matrices est nécessaire. La technique des multiplicateurs de Lagrange, que nous allons voir par la suite, requiert beaucoup moins d'opérations mais conduit par contre à une augmentation du nombre d'inconnues.

La technique de transformation repose sur les étapes suivantes :

1. Définir une matrice de transformation  $Z$  telle que :

$$\begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{s2} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix} = [Z] \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 55})$$

Avec :

$$[Z] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{II. 56})$$

Et [I] est la matrice identité dépendant de la région.

2. Modification de la forme incrémentale de la fonctionnelle  $\Pi$  en tenant compte de la relation (II. 54) soit :

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix}^T [Z]^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} [Z] \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix}^T [Z]^T \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

3. Minimisation de la nouvelle forme incrémentale de la fonctionnelle  $\Pi$  qui conduit à la résolution du système d'équations, bande, symétrique et définie positive suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}C & 0 \\ C^T K_{21} & K_{33} + C^T K_{22} C & K_{34} \\ 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 + C^T R_2 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 58})$$

Le réarrangement et l'ensemble des opérations matricielles sont onéreux à effectuer à l'échelle globale c'est pourquoi ceux-ci sont exécutés à l'échelle élémentaire. Cela suppose que l'on dispose des équations de contraintes avant l'opération d'assemblage des systèmes d'équations élémentaires.

#### II. 4. 2. 2 Technique des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est une technique utilisée pour rechercher le maximum ou le minimum d'une fonction dont les variables sont liées par une relation donnée. C'est également une méthode générale qui peut être utilisée pour restaurer la continuité du potentiel vecteur magnétique ou du potentiel scalaire entre deux maillages qui ne coïncident pas [7, 19, 22, 24]. La fonction, dans notre cas, est la forme incrémentale de la fonctionnelle soit  $\Delta \Pi$  dont les variables sont les  $\{\Delta A\}$ . Les inconnues du problème deviennent donc ces dernières variables en plus des multiplicateurs de Lagrange  $\{\lambda\}$ .

La technique est de mise en œuvre relativement facile. Nous réécrivons l'équation (II. 54) sous la forme de l'équation homogène (II. 59) suivante :

$$\{\Delta A_{s2}\} - [C]\{\Delta A_{r3}\} = \{0\} \quad (\text{II. 59})$$

Cette équation est ensuite multipliée à gauche par le vecteur ligne  $\{\lambda\}^T$  dont la dimension est égale au nombre de contraintes. Le résultat obtenu est enfin rajouté à la forme incrémentale  $\Delta\Pi$  pour obtenir une nouvelle forme incrémentale  $\Delta\Pi'$  (II. 60). Bien qu'elles soient égales, ces deux formes sont de natures différentes. La forme  $\Delta\Pi$  est définie positive alors que la forme  $\Delta\Pi'$  ne l'est pas.

$$\Delta\Pi' = \Delta\Pi + \{\lambda\}^T \{ \{\Delta A_{s2}\} - [C]\{\Delta A_{r3}\} \} \quad (\text{II. 60})$$

La minimisation de cette fonctionnelle conduit alors à la résolution du système d'équations bande et symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & I^T \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & C^T \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 \\ 0 & I & C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{s2} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 61})$$

La dernière équation apparaissant dans le système (II. 61) représente l'équation de contrainte. La résolution de ce système permet d'accéder aux inconnues  $\{\Delta A\}$  et  $\{\lambda\}$ . Toutefois, l'arrangement ci-dessus des équations accroît la largeur de bande du système au maximum. Par contre, si chaque  $\Delta A_i$  est suivi de son  $\lambda_i$  correspondant, cette largeur peut être minimisée de façon significative sans jamais atteindre la largeur de bande avant l'introduction des multiplicateurs de Lagrange. Il est utile de remarquer que les multiplicateurs de Lagrange sont actifs à l'échelle globale alors que les équations de transformations peuvent être appliquées à l'échelle globale ou élémentaire pourvue que l'on dispose des équations de contraintes avant l'assemblage.

### II. 4. 2. 3 Technique de pénalisation

La technique de pénalisation [10, 12, 14] repose, comme celle des multiplicateurs de Lagrange, sur la modification de la forme incrémentale de la fonctionnelle. L'équation des contraintes (II. 59) est réécrite en introduisant les nouvelles variables  $\{y\}$ . Si ces nouvelles variables sont nulles alors les équations de contraintes sont satisfaites.

$$\{y\} = \{\Delta A_{s2}\} - [C]\{\Delta A_{r3}\} \quad (\text{II. 62})$$

Afin d'imposer la relation ci-dessus, la forme incrémentale de la fonctionnelle associée au système étudié est « pénalisée » par la fonction dite de pénalité:  $\frac{1}{2} \{y\}^T [\alpha] \{y\}$ . La matrice  $[\alpha]$  désigne une matrice diagonale des coefficients de pénalité  $\alpha_i$ . La forme incrémentale pénalisée  $\Delta\Pi_p$  peut s'écrire ainsi :

$$\Delta\Pi_p = \Delta\Pi + \frac{1}{2} \{y\}^T [\alpha] \{y\} \quad (\text{II. 63})$$

En substituant (II. 62) dans (II. 63), la minimisation de  $\Delta\Pi_p$  conduit à la résolution du système symétrique, bande et définie positive suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} + \alpha & -\alpha C & 0 \\ 0 & -C^T \alpha & K_{33} + C^T \alpha C & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A_{s1} \\ \Delta A_{s2} \\ \Delta A_{r3} \\ \Delta A_{r4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 64})$$

Ce système d'équations est très sensible vis à vis du choix des coefficients  $\alpha_i$ . En effet, si ces coefficients augmentent, la solution évolue de façon à ce que les contraintes soient de plus en plus satisfaites. Cependant, si ces coefficients sont trop grands, la précision diminue car le système devient trop rigide. Le choix des coefficients est donc assez délicat et repose beaucoup plus sur l'expérimentation numérique.

En comparaison avec les multiplicateurs de Lagrange, les fonctions de pénalité ont l'avantage de n'introduire aucune nouvelle variable et ne requiert aucun artifice quant à son implémentation.

## II. 5 STOCKAGE ET RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

Le système d'équations étant symétrique et bande, son stockage par la technique « sky-Line » ou ligne de ciel est le plus approprié pour les traitements numériques [10, 12]. Il permet en effet d'économiser de l'espace mémoire et de réduire le temps de résolution du système d'équations. Cette technique, utilisant la notion de pointeurs de hauts de colonne de la matrice, permet de stocker cette dernière sous la forme d'un vecteur.

Concernant l'aspect résolution, nous avons choisi la méthode directe de Gauss-Crout [12]. La matrice  $K$  est assemblée et décomposée sous la forme suivante :

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (\text{II. 65})$$

Où  $[L]$  est une matrice triangulaire inférieure et  $[D]$  est une matrice diagonale.

La résolution est alors réalisée en deux temps :

- Une première phase de triangularisation
- Et une seconde phase de substitution.

## II. 6 DETERMINATION DES GRANDEURS CARACTERISTIQUES

La connaissance du potentiel vecteur magnétique dans les différentes zones du domaine d'étude permet d'accéder aux grandeurs électromagnétiques caractérisant le fonctionnement de la machine étudiée telles que :

- induction,
- flux,
- couple, ...

### II. 6. 1 Expressions des différentes grandeurs locales

#### a) Potentiel vecteur magnétique

Le potentiel vecteur magnétique en tout point de coordonnées (x,y) d'un élément fini donné est évalué en utilisant la relation (II. 17).

#### b) Composantes et module de l'induction magnétique

Les composantes  $B_x$  et  $B_y$  du vecteur induction magnétique  $\vec{B}$  au niveau de chaque élément peuvent être obtenues par simple dérivation de l'expression du potentiel vecteur dans cet élément soit :

$$B_x = + \frac{\sum^3 R_i A_i}{2\Delta_e} \quad (\text{II. 66})$$

$$B_y = - \frac{\sum^3 Q_i A_i}{2\Delta_e} \quad (\text{II. 67})$$

Ces deux composantes étant constantes, le module  $B$  du vecteur induction magnétique est constant sur toute la surface de l'élément, soit :

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (\text{II. 68})$$

#### c) Perméabilité magnétique

La perméabilité magnétique est constante au niveau de chaque élément fini. Elle est inversement proportionnelle à la réductivité, soit :

$$\mu = \frac{1}{v(B^2)} \quad (\text{II. 69})$$

### d) Champ magnétique

Le champ magnétique, comme l'induction magnétique, est constant au niveau de chaque élément fini. Il est évalué en utilisant les relations (II. 68) et (II. 69), avec :

$$H = vB \quad (\text{II. 70})$$

### e) Energie magnétique

L'énergie magnétique emmagasinée par élément fini peut être évaluée en utilisant l'intégrale (II. 71); soit :

$$W_e = L_u \iint_{\Omega_e} \left( \frac{1}{2} \int_0^{B^2} v(B^2) d(B^2) \right) dx dy \quad (\text{II. 71})$$

Où  $L_u$  désigne la longueur utile de la machine.

L'énergie magnétique stockée par la structure étudiée est alors la somme des énergies magnétiques stockées par les éléments.

## II. 6. 2 Expression des différentes grandeurs globales

### a) Calcul du flux et de la force contre électromotrice (f.c.e.m.)

L'enroulement de la machine étudiée est caractérisé par une densité de conducteurs  $n_c$  égale au rapport du nombre de conducteurs  $N$  par encoche et de la section  $S_{enc}$  de celle-ci. Le flux embrassé par phase, à un instant  $t$ , est évalué en évaluant en premier lieu le flux embrassé par encoche  $\phi_e$  :

$$\phi_e(t) = L_u \iint_{S_{enc}} A(t) n_c dx dy \quad (\text{II. 72})$$

Le calcul de l'intégrale (II. 72) est étendu à tous les éléments appartenant à l'encoche en question, soit :

$$\phi_e(t) = L_u \sum_{e \in \text{encoche}} n_c A_{\text{moy}} \Delta_e \quad (\text{II. 73})$$

Où  $A_{\text{moy}}$  représente la valeur moyenne du potentiel vecteur magnétique, soit :

$$A_{\text{moy}}(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 A_i \quad (\text{II. 74})$$

Le flux embrassé par phase s'obtient alors aisément en sommant les flux embrassés par les encoches aller et retour appartenant à celle-ci, soit :

$$\Psi(t) = \sum_{\text{encoches aller}} \phi_e - \sum_{\text{encoches retour}} \phi_e \quad (\text{II. 75})$$

La force contre-électromotrice par phase est obtenue en dérivant par rapport au temps  $t$  le flux embrassé par phase, soit :

$$e(t) = \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{II. 76})$$

Comme nous ne disposons pas de l'expression du flux à tout instant  $t$  mais à des intervalles de temps discrets, l'expression ci-dessus prend alors la forme suivante :

$$e(t) = \frac{\Psi(t + \Delta t) - \Psi(t)}{\Delta t} \quad (\text{II. 77})$$

La tension aux bornes de chaque phase statorique est obtenue en sommant la f.c.e.m. calculée ci dessus et les chutes de tension résistive et inductive, soit :

$$v(t) = e(t) + Ri(t) + l_f \frac{i(t + \Delta t) - i(t)}{\Delta t} \quad (\text{II. 78})$$

Où  $R$  et  $l_f$  désignent respectivement la résistance d'une phase et l'inductance de fuites des têtes de bobines de celle-ci. Ces paramètres sont généralement déterminés expérimentalement ou estimés à l'aide d'expressions empiriques [25, 26]. L'inductance de fuites permet, dans une certaine mesure, de tenir compte des effets d'extrémités.

## b) Calcul des pertes

Les pertes dans les machines électriques sont de natures diverses; on rencontre les pertes par effet Joule dans le bobinage, les pertes fer statoriques et éventuellement rotoriques et les pertes par ventilation dans l'entrefer ou par frottements des paliers. Seules les pertes Joule dans les matériaux conducteurs sont évaluées dans le cadre de cette étude ; les autres pertes peuvent être obtenues à partir de formules plus ou moins empiriques ou à partir d'abaques.

Les pertes Joule dans la machine étudiée sont de deux types :

1. Celles dissipées dans les conducteurs du stator.
2. Celles dues aux courants induits dans les matériaux conducteurs du rotor.

Si  $q$  désigne le nombre de phases au stator, les pertes Joule dans les conducteurs du stator sont définies par :

$$P_{js} = qRi^2 \quad (\text{II. 79})$$

Les pertes Joule dans les matériaux conducteurs du rotor sont évaluées en calculant l'intégrale (II. 80) :

$$P_{jr} = L_u \iint_{\Omega_r} \sigma_r \left( \frac{A_r(t + \Delta t) - A_r(t)}{\Delta t} \right)^2 dx dy \quad (\text{II. 80})$$

### c) Les puissances

Des grandeurs importantes dans le cahier de charge d'une machine électrique telles que la puissance active, réactive, ou transmise peuvent être évaluées à tout instant  $t$ .

1. La puissance absorbée par la machine est exprimée par :

$$P_{abs}(t) = \sum_{j=1}^q v_j(t) i_j(t) \quad (\text{II. 81})$$

2. La puissance électromagnétique transmise au rotor et à l'entrefer l'est par :

$$P_{trans}(t) = \sum_{j=1}^q e_j(t) i_j(t) \quad (\text{II. 82})$$

3. La puissance réactive instantanée, en régime linéaire, est évaluée grâce à :

$$P_{réact}(t) = 2\omega W_{mag}(t) + \sum_{j=1}^q q l_f i_j^2(t) \quad (\text{II. 83})$$

où  $\omega$  désigne la pulsation des courants statoriques

L'énergie magnétique emmagasinée dans la machine est définie par :

$$W_{mag}(t) = \sum_c W_e \quad (\text{II. 84})$$

4. La puissance mécanique instantanée, qui en l'absence de frottements coïncide avec la puissance utile sur l'arbre, est donnée par :

$$P_{méc}(t) = P_{trans} - \frac{W_{mag}(t + \Delta t) - W_{mag}(t)}{\Delta t} - P_{jr}(t) \quad (\text{II. 85})$$

### d) Couple électromagnétique

Le couple électromagnétique de la machine étudiée peut être déterminé de différentes façons :

#### 1. Calcul par la puissance

Le couple électromagnétique instantané est déterminé à partir de la puissance électromagnétique transmise à travers l'entrefer :

$$\Gamma(t) = \frac{P_{\text{Trans}}}{\Omega} \quad (\text{II. 86})$$

#### 2. Calcul par le tenseur de Maxwell

Le couple électromagnétique instantané peut être évalué à partir du tenseur des contraintes de Maxwell. Pour cela, il suffit de choisir une surface cylindrique C de Rayon  $R_0$  située dans l'entrefer de la machine. Le couple est dans ces conditions déterminé par :

$$\Gamma(t) = \frac{R_0 L_u}{\mu_0} \int_C \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta \quad (\text{II. 87})$$

Il est à signaler des difficultés d'ordre numérique inhérentes au calcul direct du tenseur de Maxwell sur les éléments finis.

#### 3. Calcul par les forces de Laplace

Le couple électromagnétique peut aussi se calculer directement en effectuant la sommation sur l'ensemble du bobinage statorique des moments des forces s'exerçant sur les conducteurs, soit :

$$\Gamma(t) = L_u \iint_{\text{surface bobinage}} J_s \frac{\partial A}{\partial \theta} r dr d\theta \quad (\text{II. 86})$$

#### 4. Calcul par travaux virtuels [27, 28]

Le couple électromagnétique peut aussi être évalué en appliquant le théorème des travaux virtuels. C'est donc la dérivée par rapport à la position angulaire de l'énergie magnétique, soit :

$$\Gamma(t) = - \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \theta} \quad (\text{II. 87})$$

---

## II. 7 CONCLUSION

Une méthode de résolution numérique du problème de diffusion du champ électromagnétique avec prise en compte du mouvement a été développée dans le cas des moteurs synchrones à aimants permanents alimentés par des onduleurs de tension contrôlés en courant.

Cette méthode, reposant sur le formalisme Lagrangien des équations de Maxwell, comporte trois phases :

- Dans une première phase, l'équation de diffusion du champ statorique est discrétisée à l'aide de la méthode des éléments finis en considérant un référentiel fixe par rapport au stator.
- Dans une deuxième phase, l'équation de diffusion du champ rotorique est discrétisée à l'aide de la même méthode en considérant cette fois-ci un référentiel fixe par rapport au rotor.
- Les champs électromagnétiques dans les domaines statorique et rotorique sont couplés, dans une dernière phase, au niveau de l'entrefer grâce à la technique des multiplicateurs de Lagrange. Lors de ce couplage, le nombre d'harmoniques d'espace peut être imposé.

Cette méthode quoique complexe permet la simulation du mouvement tout en évitant le remaillage ce qui permet un gain de temps de calcul appréciable.

Elle peut constituer de ce fait un outil efficace lors de la simulation dynamique des machines électriques.

---

---

## REFERENCES

- [1] G. Lacroux, «Les aimants permanents », *Ed. Techniques et Documentation*, 1989.
  - [2] P. Brissonneau, «Matériaux Magnétiques pour l'électrotechnique », Cours non édité, INP de Grenoble (France).
  - [3] P. Brissonneau, «Aimants permanents : Principes et circuits magnétiques», *Techniques de l'Ingénieur D2090*, pp. 1-20.
  - [4] E. Durand, «Magnétostatique», *Ed. Masson et Cie*, 1968.
  - [5] R. Ibtiouen L. Hadjout R. Kechroud and B. Laporte "Torque analysis of permanent magnets synchronous motors" *IEEE-PES/KTH, paper SPT EM12-02-0456. Vol. Electrical Machines and Drives, Stockholm Sweden June 18-22, 1995*, pp. 334-339.
  - [6] R. Kechroud K. Boughrara et R. Ibtiouen "Calcul numérique d'une machine à aimants permanents avec pièces polaires et concentration de flux" *AJOT-COMAE'96 Tlemcen, Vol. 3, Machines Electriques- Réseaux Electriques et Haute Tension, ISSN 1111-357X, Décembre 1996*, pp. 144-148.
  - [7] R. Kechroud R. Ibtiouen S.Mezani, O. Touhami B. Laporte "Modelling of a slotless permanent magnet machine with motion consideration", *Archives of Electrical Engineering, index, 351660, ISBN 0004-0746, Vol. XLIX, No. 3-4/2000*, pp. 377-393.
  - [8] R. Ibtiouen L. Hadjout R. Kechroud and B. Laporte "Torque analysis of permanent magnets synchronous motors" *ACEMP Conference on Electrical Machines and Drives, Ankara, June 7-8, 1995*, pp. 582-586.
  - [9] K. J. Binns, M. A. Jabbar, W. R. Barnard, «Computation of the magnetic field of permanent magnets in iron core», *Proceedings IEE*, Vol. 122, No. 12, Dec. 1975, pp. 1280-1284
  - [10] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, « The finite element method: Basic formulation and linear problems», Vol.1, *Ed. Mc Graw-Hill*, England 1989.
  - [11] P. Silvester, R. L. Ferrari, «Finite element for electrical engineer», *Cambridge University Press*, Second Edition, 1990.
  - [12] G. Touzot, G. Dhatt, «Une présentation de la méthode des éléments finis», *Ed. Laloine* 1984.
  - [13] S. J. Salon, M. J. Debortoli, R. Palma, «Coupling of transient fields, circuits and motion using finite element analysis», *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol.4, No.11, 1990, pp.1077-1106.
  - [14] R. D. Cook, «Concepts and applications of finite element analysis», Second Edition, John Wiley & Sons, 1981.
  - [15] J. C. Sabonnadière, J. L. Coulomb, «Eléments finis et CAO», Ed. Hermès, Paris, 1986.
  - [16] J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière, «CAO en électrotechnique», Hermès Publishing, 1985.
  - [17] M. V. K. Chari, P. P. Silvester, «Finite elements in electrical and magnetic problems», John
-

---

Wiley & Sons Ltd, 1985.

- [18] J. C. Sabonnadière, J. L. Coulomb, «Calcul des champs électromagnétiques », *Techniques de l'Ingénieur*, D3020, 1989.
  - [19] R. Kechroud R. Ibtouen and O. Touhami "The use of the association of the finite element method-Lagrange's method of undetermined multipliers in the dynamic modeling of rotating electrical device", *ICEL'2000. International Conference on Electrotechnics*, Oran (Algeria), November 13-15, 2000.
  - [20] T. Lecompte « Conception assistée par ordinateur (CAO) : Machine Synchrone», *Techniques de l'Ingénieur*, D3595, 1989
  - [21] A. Bossavit, C. Emson, I. D. Mayergoyz, «Méthodes numériques en electromagnétisme: Géométrie différentielle, éléments finis, modèles d'hystérésis», Ed. Eyrolles, 1991.
  - [22] D. Rodger, H. C. Lai and J. Leonard, «Coupled Elements for problems involving movement», *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 26, No. 2, March 1990, pp. 548-550.
  - [23] B. Laporte, «Enroulements des machines à courant alternatif », Cours non édité, ENSEM, Nancy (France).
  - [24] Y. Maréchal, G. Meunier, J. L. Coulomb, H. Magnin, " A general purpose tool for restoring inter-element continuity", *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1728-1731.
  - [25] A. Foggia, «Méthodes de calcul des inductances de fuites», *Techniques de l'Ingénieur*, D3440, pp. 1-20.
  - [26] A. Belot, «Calcul des fuites et inductances de fuites de l'induit », *Techniques de l'Ingénieur*, D440, pp. 1-16.
  - [27] J. L. Coulomb, «A methodology for the determination of global electromagnetic quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness», *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. Mag-19, No. 6, Nov. 1983, pp. 2514-2519.
  - [28] J. L. Coulomb, G. Meunier, «Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation», *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. Mag-20, No. 5, Sept. 1984, pp. 1894-1896.
-

**CHAPITRE III**

**MODELISATION DES MOTEURS  
ASYNCHRONES RAPIDES**

---

### III. 1 INTRODUCTION

Ces deux dernières décades ont vu, dans le monde industriel, une demande de moteurs électriques de grande puissance (de l'ordre de quelques mégawatts) et de vitesse de rotation élevée (supérieure à 3600 tr/min). Ces moteurs, permettant l'attaque directe des organes entraînés, peuvent se substituer aux machines utilisant les énergies fossiles telles que les turbines à vapeur ou à gaz, etc.. Ils apportent non seulement une compacité, donc une réduction de la taille et du poids mais également une amélioration du rendement des systèmes entraînés.

Bien que certaines demandes puissent être satisfaites avec des moteurs extrapolés à partir des techniques traditionnelles (moteurs synchrones bipolaires de conception analogue à celle des turboalternateurs) alimentés à des fréquences supérieures à la fréquence industrielle, les moteurs traditionnels sont limités en puissance aux grandes vitesses par la tenue mécanique des rotors (circuits magnétiques et bobinage). En effet, la vitesse périphérique maximale admissible dans ces machines, où le rotor est constitué de tôles feuilletées, se situe aux alentours de 150 m/s. L'utilisation d'artifices de construction comme une frette ou des tirants longitudinaux permet d'atteindre une vitesse de l'ordre de 150 m/s. Cette vitesse est considérée usuellement, dans l'industrie, comme la limite entre les machines classiques et les machines rapides. Ainsi, une machine est dite rapide quand sa vitesse périphérique se situe au-dessus de 150 m/s. Les trois principaux moteurs rapides retenus sont [1] :

- Moteurs synchrones pour les applications de grande puissance (inférieure ou égale à 30 MW) et de vitesse moyenne (inférieure ou égale à 9000 tr/mn);
- Moteurs asynchrones pour les applications de puissances inférieures à 2 MW et de vitesse élevée (inférieure ou égale à 100000 tr/mn);
- Moteurs synchrones à aimants permanents pour les applications de petites puissances (inférieure ou égale à 15 kW).

En allant dans le sens des très grandes vitesses de rotation, les industriels sont confrontés à deux difficultés techniques [2] :

- Pour les convertisseurs de fréquence, l'aptitude à la commutation rapide des semi-conducteurs et circuits associés [5];
- Pour la conception des moteurs, la prise en compte des contraintes liées à la vitesse tangentielle élevée, à la raideur des paliers (vitesse de fonctionnement éloignée des vitesses critiques de la ligne d'arbre) et aux pertes diverses dues à la vitesse ou la fréquence.

Ce chapitre est consacré aux contraintes liées au développement des moteurs rapides. Les différentes structures, synchrones ou asynchrones, sont également examinées. Nous insistons par la suite sur la modélisation électromagnétique des moteurs asynchrones à rotor massif.

L'étude dynamique des moteurs rapides est complexe, en particulier celle des moteurs asynchrones, à cause notamment du mouvement différentiel entre le rotor et le stator. Une modélisation reposant sur un schéma équivalent de Steinmetz ou sur celui de Park n'est plus possible et le recours aux équations de Maxwell afin de modéliser de telles structures s'avère indispensable.

L'étude des régimes transitoires est menée grâce au modèle magnétodynamique [3]. Ce modèle consiste à travailler dans le cadre espace-temps. La carte du champ électromagnétique est calculée à chaque pas de temps en considérant à la fois la diffusion du champ électromagnétique et le mouvement du rotor. Cependant, un tel modèle nécessite des temps de calcul importants pour prendre en compte simultanément la diffusion lente du champ et la grande vitesse de rotation. La conséquence est que le recours à ce modèle devient subjectif si l'objectif visé est de l'utiliser dans l'optimisation d'une structure donnée.

Pour l'étude des régimes permanents, le modèle découplant le temps et l'espace est plus approprié [3]. C'est le modèle magnétodynamique complexe où la pulsation au stator est imposée égale à la pulsation de la source  $\omega$  tandis que celle au rotor est imposée égale à  $g\omega$  ( $g$  étant le glissement). Si le rotor est fixe, les continuités du potentiel vecteur magnétique et de sa dérivée normale sont assurées. Le modèle est ainsi établi. Une interprétation équivalente est que le mouvement est modélisé en multipliant les conductivités rotoriques par le glissement  $g$ . D'un point de vue numérique, l'implémentation de ce modèle est simple. Cependant, ce modèle repose sur une hypothèse principale d'après laquelle tous les harmoniques d'espace évoluent avec la même pulsation ce qui ne correspond pas à la réalité si le glissement est faible. En particulier, les harmoniques de denture d'ordre supérieur sont la source de bruits numériques.

Les enroulements statoriques sont généralement conçus de façon à ce que le fondamental d'espace soit prédominant et les harmoniques d'ordre supérieur ne jouent pratiquement aucun rôle. Les erreurs numériques dues aux harmoniques de denture subsistent cependant et leur influence ne peut être minimisée que si l'on effectue une moyenne des résultats obtenus pour plusieurs positions du rotor par rapport au stator sur un pas dentaire.

L'équipe du GREEN [4] a imaginé une méthode de calcul des moteurs asynchrones. C'est la méthode du double entrefer avec approximation du premier harmonique où le couplage du champ électromagnétique statorique et rotorique est effectué à l'aide du premier harmonique d'espace. Toutefois, cette méthode fait appel à une double résolution dans l'entrefer et la prise en compte de la saturation est assez difficile.

Nous présentons dans ce chapitre, une méthode alternative de couplage des champs statorique et rotorique reposant sur une association de la méthode des éléments finis et de la technique des multiplicateurs de Lagrange où seul le premier harmonique d'espace est considéré. Les autres harmoniques sont éliminés au niveau d'une interface situé dans l'entrefer.

## III. 2 CONTRAINTES LIEES AU DEVELOPPEMENT DES MOTEURS RAPIDES

Les lois fondamentales de la physique imposent des contraintes au développement des moteurs électriques de vitesses élevées. Les contraintes auxquelles sont soumis ces moteurs peuvent être classées comme suit :

### III. 2. 1 Contraintes mécaniques

En allant dans le sens des vitesses élevées, les contraintes d'ordre mécanique résultent à la fois des forces centrifuges, des problèmes dynamiques dus aux vitesses

critiques et de l'écoulement du gaz présent dans l'entrefer. A grande vitesse, la première limitation vient des forces inertielles qui engendrent des déplacements et des contraintes qui ne doivent pas dépasser les limites d'élasticité admissible situées entre 500 et 700 MPa. Cette contrainte limite ainsi le diamètre et le choix des matériaux rotoriques. Le diamètre des turbo-générateurs ayant deux pôles ne dépasse pas actuellement 1250 mm à 3000 tr/mn ce qui correspond à une vitesse tangentielle de 196 m/s et à une accélération centripète de  $61681 \text{ m/s}^2$  soit 6287 fois l'accélération de la pesanteur. Chaque gramme de matière à la périphérie du rotor est soumis à une force de 6,3 N.

Pour surmonter cet obstacle, on a fait appel aux rotors homogènes en acier magnétique de haute tenue mécanique (limite élastique jusqu'à 1000 MPa) ou à ceux en alliage conducteur. Toutefois, leurs caractéristiques électriques globales sont considérablement dégradées par rapport aux moteurs classiques (facteur de puissance de l'ordre de 0,7).

Pour les rotors cylindriques en matériau homogène, il a été démontré que la contrainte maximale est proportionnelle au carré de la vitesse périphérique [1].

Le diamètre limite peut donc être déterminé en fonction de cette contrainte critique. Cette limite est par contre beaucoup plus difficile à déterminer pour les rotors hétérogènes (meilleures d'un point de vue électrique) du fait de la complexité de la géométrie du rotor, d'une part, et des concentrations de contraintes au niveau des extrémités, d'autre part. Ce qui nécessite le recours à certains artifices de construction tels qu'un ré-usinage des barres de cuivre au niveau de la cage pour une machine asynchrone ou un frettage imposant pour les autres types de machines. Ce frettage conduit nécessairement à une augmentation de l'entrefer magnétique.

Sur le plan dynamique, la longueur des moteurs rapides est limitée par les vitesses critiques de la ligne d'arbre. En effet dans le cas où cette ligne est longue, elle doit supporter les sollicitations mécaniques dues au franchissement d'une ou de deux vitesses critiques pour atteindre la vitesse nominale. Ces phénomènes peuvent être déplacés vers des fréquences plus élevées à condition de rigidifier le rotor et ses appuis. Pour éviter les problèmes liés aux vitesses critiques, les tôles feuilletées doivent donc céder leur place à de l'acier massif. Néanmoins, cette technologie implique d'autres problèmes liés aux pertes de surface, par exemple.

De surcroît, les fortes contraintes subies par les rotors, au voisinage des vitesses critiques, tendent à les déformer. Ce genre de déformations risque d'entraîner le frottement du rotor contre le stator notamment dans les machines du type asynchrone où l'entrefer est faible. Les effets combinés des différentes contraintes mécaniques conduisent à une fatigue de certaines pièces mécaniques tels que les roulements qui voient ainsi leur durée de vie fortement diminuée. La plupart des machines classiques tournent à des vitesses inférieures au premier mode propre mais certaines comme les turboalternateurs peuvent fonctionner en régime hypercritique et c'est le cas en particulier pour la quasi-totalité des machines rapides. Ces machines doivent offrir une bonne réponse mécanique aux problèmes soulevés. Le choix des paliers doit être adapté aux vitesses et aux puissances de la machine.

Des paliers classiques (roulement à billes ou à rouleaux) ou à coussinets sont utilisés dans les machines de petite et moyenne puissances. Dans la gamme des grandes puissances, les constructeurs ont de plus en plus recours à l'utilisation de paliers magnétiques actifs [6, 7]. Ce type de palier, fonctionnant par lévitation magnétique, offre de grandes possibilités de développement puisqu'ils n'entraînent pas d'usure, qu'ils ne nécessitent pratiquement pas d'entretien et qu'ils améliorent le comportement dynamique du rotor. Cependant, leur

utilisation n'est pas très répandue à cause du volume de l'installation qui leur est associée et du coût élevé. Un autre problème mécanique apparaît lorsque la vitesse périphérique est élevée c'est celui de l'écoulement du gaz présent dans l'entrefer (air ou gaz tel que l'hydrogène).

### III. 2. 2 Limitations d'ordre thermique

Le problème du refroidissement des machines électriques augmente en général avec leurs tailles. La surface à travers laquelle la chaleur est évacuée croît approximativement comme le carré des dimensions alors que, dans le même temps, la chaleur générée par les pertes est approximativement proportionnelle au cube des dimensions. Le problème est particulièrement épineux dans le cas des machines de forte puissance où l'économie, les exigences mécaniques, le transport et l'installation demandent une compacité et c'est le cas en particulier des pièces forgées rotoriques. Même pour les machines de taille modérée, ayant une puissance de quelques centaines de kVA, un système de ventilation fermée est usuellement utilisé. Le refroidissement des moteurs électriques rapides est beaucoup plus complexe que celui des moteurs à vitesse faible à cause des puissances volumiques et des vitesses périphériques élevées mises en jeu. Des systèmes de ventilation évolués doivent être utilisés dans ce cas pour assurer un refroidissement efficace. Ces systèmes dérivent en grande partie des techniques de refroidissement directe et indirecte des turboalternateurs :

- **Action sur le stator**

Le refroidissement du stator, s'il est chemisé, peut être réalisé à l'aide de la circulation d'un lubrifiant tel que l'huile ou l'eau. Ces réfrigérants peuvent également circuler dans des canaux circulaires percés dans la partie supérieure de la tôle statorique. Il y a cependant un évident avantage à mettre en contact direct le cuivre des conducteurs et le fluide refroidisseur (eau déminéralisée, air ou hydrogène). On y parvient en prévoyant des cannelures au niveau des barres statoriques parcourues par ce fluide. Il n'y a plus, dans ce cas, d'interposition de matériau thermiquement peu conducteur. L'intérêt du refroidissement direct prend toute sa valeur en utilisant l'hydrogène. Beaucoup moins visqueux que l'air, ce dernier produit moins de frottements aux grandes vitesses et, pour une même surélévation de température, il absorbe une quantité de chaleur 14 fois plus grande. L'hydrogène prévient toute oxydation des isolants et prolonge ainsi leur durée de vie. Cependant, les systèmes à refroidissement à hydrogène sont très élaborés et demandent un entretien permanent. Son emploi n'est donc justifiable que pour les grandes puissances. D'un point de vue sécuritaire, les explosions dans l'hydrogène sont impossibles même en présence d'un arc pourvu que la concentration en oxygène ne dépasse pas les 10 %. D'autres techniques de refroidissement directes des barres, utilisant la technique d'évaporation d'un liquide, sont en train d'être également développées. Les fréons II et II3 peuvent être utilisés en raison de leur faible température de saturation et de leurs propriétés d'isolants [8]. La protection de l'environnement privilégie cependant d'autres composés. Ce mode de refroidissement conduit à un gain de 15 à 30 % par rapport au refroidissement à l'air et semble préférable à celui à eau en raison de la faible pression et du pouvoir isolant du composé. Une disposition

verticale de la machine permet en outre de supprimer la pompe de circulation permettant ainsi d'accroître la fiabilité.

- **Refroidissement grâce au fluide d'entrefer**

Le fluide d'entrefer est généralement l'air. Celui-ci est réfrigéré par un brouillard d'huile ou par pressurisation. Les pertes par friction augmentent pour cette deuxième solution mais elles sont plus faciles à évacuer. Pour les puissances unitaires élevées, l'hydrogène ou l'hélium sous pression remplace l'air ce qui permet de diminuer les pertes par ventilation. Il faut toutefois régler les problèmes d'étanchéité du système de ventilation fermé. Une autre solution consiste à créer un vide partiel (0,3 Bar) à l'intérieur de la machine de façon à diminuer les coefficients d'échange thermique et les pertes par friction.

- **Action sur le rotor**

La carte thermique du rotor doit être analysée soigneusement. Une distribution de température inégale peut conduire à un balourd thermique accentuant les problèmes de vibrations. Le refroidissement du rotor est généralement plus délicat que celui du stator à cause de la vitesse de rotation élevée. Pratiquement les mêmes techniques de refroidissement du stator vues précédemment sont utilisées au niveau du rotor. Cependant les sollicitations centrifuges interdisent la disposition de canaux de ventilation aux endroits où ils seraient les plus bénéfiques, c'est à dire près des conducteurs rotoriques. Le système de refroidissement génère, en principe, deux flux du fluide réfrigérant : Un pour le stator et un pour le rotor de façon à ce que la température maximale ne dépasse pas 200°C au rotor et 120°C au stator selon les recommandations de la CEI. Cette gestion interdit la transmission du fluide réfrigérant du stator au rotor ou vice versa.

### **III. 2. 3 Combinaison de ces limitations**

La composition des phénomènes mécaniques et thermiques et l'augmentation de la fréquence entraînent une très forte augmentation des pertes mécaniques des machines rapides par rapport aux machines classiques. Ces machines doivent être étudiées soigneusement de ces points de vue et d'une façon générale, le point de fonctionnement nominal doit être éloigné le plus possible d'un mode propre afin d'éviter la fatigue de certaines pièces. L'appréhension des phénomènes mécaniques statiques et dynamiques ainsi que la prévention de risques qu'ils induisent font actuellement l'objet de recherches.

### **III. 3 LES SOLUTIONS POSSIBLES**

Les applications industrielles à vitesse variable sont assurées principalement par deux types d'entraînements : Les entraînements mécaniques et les entraînements électriques. Les entraînements mécaniques sont assurés par les turbines à gaz ou à vapeur, par des moteurs diesels, etc. Quant aux entraînements électriques, ils peuvent être groupés soit en entraînements à vitesse faible et à vitesse élevée soit suivant le type de moteurs : synchrone

ou asynchrone. Les autres types de moteurs ne sont pas utilisés au niveau industriel dans la gamme des grandes puissances ( $> 1$  MW) et sont restés à l'état de prototype.

Les moteurs synchrones ont une conception identique à celle des turbo-générateurs. Ils ne sont utilisés, d'une part, que pour les très grandes puissances à cause de leur prix élevé en comparaison avec celui des moteurs à induction et à cause de leur vitesse de rotation limitée, d'autre part. La vitesse de rotation des moteurs synchrones de très grande puissance est en effet limitée à 7000 tr/mn à cause de l'intégrité mécanique de l'inducteur (pont tournant à diodes). Ces moteurs sont alimentés par l'intermédiaire de groupes redresseur-commutateur de courant à commutation naturelle. Ce genre de commutateurs est le plus simple à réaliser car c'est la machine elle-même qui assure la commutation des thyristors. A l'arrêt et à faible vitesse, la machine est incapable d'assurer les commutations qui doivent donc être forcées.

Les moteurs asynchrones sont intrinsèquement moins complexes. Ils ont moins de composants et sont donc moins onéreux que les moteurs synchrones. Ils sont utilisés jusqu'à une puissance de 15 MW. Rustiques, ces moteurs permettent d'atteindre des vitesses de rotation élevées. Contrairement aux moteurs synchrones, les moteurs asynchrones sont généralement alimentés par l'intermédiaire de groupes redresseurs- onduleurs de tension à commutation forcée. Ces alimentations sont plus difficiles à construire du fait de la nécessité d'associer des condensateurs dans la commande afin de forcer les commutations.

Par ailleurs, ces alimentations apportent naturellement une solution au problème du démarrage des moteurs de grande puissance en ne provoquant pas d'appel de courant sur le réseau puisqu'elles peuvent être commandées en fréquence ou à flux constant. Elles contribuent à une certaine augmentation du coût des installations mais l'ensemble convertisseur- machine offre un rendement global supérieur à celui des entraînements mécaniques.

### III. 3. 1 Machines synchrones

Ce sont des machines rapides, bipolaires ou tétrapolaires, accouplées à des turbines à vapeur ou à gaz (turboalternateurs) ou à des compresseurs centrifuges (turbomoteurs). Du fait des contraintes mécaniques très élevées dues à la vitesse de rotation, le rotor doit être de forme cylindrique en acier forgé à haute résistance mécanique. On ne dépasse guère un diamètre de 1250 mm à 3000 tr/mn (50 Hz) de sorte que ces rotors présentent toujours une forme très allongée. Alimentés par un commutateur de courant à commutation naturelle, les moteurs synchrones rapides peuvent développer une puissance comprise entre 2 et 25 MW pour des vitesses pouvant atteindre 8000 tr/mn. Des stations de compression de gaz, à base de moteurs synchrones rapides communément appelés « supersynchrones » d'une capacité de 38 MW à 4200 tr/mn, sont déjà opérationnelles en Hollande [6]. Le constructeur ABB [7] commercialise des moteurs synchrones «WMT» d'une puissance de 2 à 14 MW dont la vitesse atteint 6400 tr/mn.

Cette technologie reste toutefois limitée en vitesse périphérique sur le plan mécanique à cause du redresseur tournant.

#### III. 3. 1. 1 Machines synchrones à aimants permanents

Pour pallier les problèmes mécaniques à très grande vitesse, certaines machines synchrones ont été réalisées avec des aimants permanents au rotor. L'utilisation des aimants

a pour but d'accroître la puissance massique donc de diminuer le diamètre rotorique ce qui réduit d'autant plus la vitesse tangentielle pour une puissance donnée et recule la limite de faisabilité. Les pertes par effet Joule rotoriques ainsi que les problèmes liés au redresseur tournant sont en même temps éliminés. Le rotor est toutefois assez fragile d'un point de vue mécanique car l'assemblage des aimants avec des tôles ou des matériaux massifs n'est pas d'une très bonne rigidité. Ce problème est d'ailleurs amplifié par le fait que les aimants sont souvent des matériaux friables et difficiles à usiner. Afin de garantir un bon comportement mécanique, les rotors de ces machines sont renforcés par des frettages importants, quelquefois au détriment des performances électriques. Il est à noter que l'utilisation des aimants ne peut se faire que sur les petits volumes à cause du prix des aimants d'une part, et de la difficulté de leur mise en œuvre sur des surfaces importantes, d'autre part. Les puissances fournies par ces machines sont inférieures à celles des machines à rotor bobiné. Cette technologie permet néanmoins d'obtenir de plus grandes vitesses de rotation et répond ainsi à un besoin différent (puissance faible mais vitesse élevée). En effet, les moteurs synchrones à aimants permanents de grande puissance, 125 kW à 30000 tr/mn ou 100 kW à 48000tr/mn par exemple, sont restés à l'état de prototypes [9]. Les deux types de structures rencontrés dans cette technologie sont ceux de l'inducteur à pôles lisses et de l'inducteur à pôles saillants [10].

### III. 3. 1. 2 Machines synchrones à réluctance variable

Il existe deux types de machines à réluctance variable [11]: Les machines dites à réluctance pure et celles à réluctance excitées.

- Les machines pures sont dépourvues d'enroulement d'excitation que ce soit au rotor ou au stator. Elles sont donc moins performantes du point de vue électrique que les machines synchrones classiques mais en plus elles sont plus simples. Elles sont utilisées de ce fait dans des cas spéciaux en particulier dans les entraînements à grande vitesse.
- Les machines excitées ont une géométrie particulière. Elles ne possèdent pas d'enroulement d'excitation au rotor. Tous les enroulements, inducteurs ou induits, sont au stator. Les rotors sont donc très simples et peuvent être réalisés en acier massif pour les très grandes vitesses. Il y a lieu de citer deux autres types de structures aptes à fonctionner à vitesse élevée : la structure à pans coupés et la structure de Lyndell [12].

### III. 3. 2 Machines Asynchrones

Les moteurs asynchrones traditionnels sont limités en vitesse périphérique par la tenue mécanique de la cage d'écureuil et de la tôlerie magnétique du rotor. Les premières machines asynchrones rapides furent donc des consolidations mécaniques de machines classiques. Ces machines autorisent des puissances de 600 à 4200 kW pour des vitesses allant de 6 000 à 16000 tr/mn. La vitesse périphérique de la tôle avoisine alors 180 m/s. Pour atteindre des vitesses périphériques plus élevées, la tôle doit être remplacée par des

matériaux massifs en acier ou en matériaux composites [1]. Une des solutions possibles consiste à utiliser un rotor massif lisse.

### III. 3. 2. 1 Structures à rotor massif homogène

Les structures les plus simples sont celles à rotors massifs lisses. Deux types de rotors ont été envisagés :

- *Rotor massif amagnétique*

La structure à rotor massif cylindrique amagnétique et conducteur favorise le développement de courants induits dans le rotor. Le courant magnétisant est alors très important si l'on souhaite une induction d'entrefer satisfaisante. L'emploi de cette technologie nécessite un refroidissement très efficace des enroulements statoriques ce qui risque de se répercuter sur les performances globales de l'installation.

Sur la base de cette technologie, la société GEC-ALSTHOM MOTEURS [13] a construit un prototype industriel un peu particulier. En effet, ce prototype dispose d'un enroulement hélicoïdal placé dans l'entrefer. Cet enroulement génère ainsi un champ électromagnétique hélicoïdal et ne propose pas d'autre solution que d'installer un rotor massif lisse. Ce mode de bobinage permet de supprimer les têtes de bobines et on peut ainsi alimenter la machine avec un courant important permettant d'augmenter le champ sans être limité par la saturation des dents statoriques. Néanmoins, le facteur de forme ainsi que le rendement sont très fortement diminués. La machine réalisée a été construite avec un rotor en Au4G (alliage à base d'Aluminium) et a tourné à 26000 tr/mn soit une vitesse périphérique de 250 m/s [13].

- *Rotor massif magnétique*

La machine à rotor massif en acier magnétique est la meilleure d'un point de vue mécanique [12, 14]. Elle favorise le développement de la composante normale de l'induction dans l'entrefer. Cependant, les performances électriques du moteur sont limitées par l'effet pelliculaire, lequel est néanmoins réduit, d'une part par le fait que les fréquences de glissement sont relativement faibles (mais restent importantes en comparaison avec ceux des machines asynchrones classiques) et, d'autre part, par la saturation [14]. Ces performances peuvent être améliorées en aménageant des rainures axiales (Fig. III. 1) à la périphérie du rotor sans toutefois dégrader les caractéristiques mécaniques [15]. D'éventuelles rainures circonférentielles peuvent être usinées afin de réduire les pertes de surface. Toutefois, le facteur de puissance d'une telle structure ne peut excéder 0,7 conduisant à un volume d'électronique de puissance important où les commutations sont donc nécessairement forcées. Il est possible de concevoir, avec cette technologie, des machines d'une puissance de 3 MW à 14000 tr/mn. La société Jeumont-Schneider a déjà mis au point un prototype industriel d'une puissance de 1 MW à 20 000 tr/mn.

### III. 3. 2. 2 Structures à rotor massif hétérogène

Les structures homogènes ne peuvent apporter un bon compromis électrique et mécanique. Les développements des machines asynchrones rapides se sont orientés vers les

structures hétérogènes où, dans une certaine mesure, on mélange les matériaux magnétiques et conducteurs. La première solution que l'on rencontre est celle du rotor massif chemisé, quant à la deuxième, c'est celle du rotor massif à cage d'écureuil.

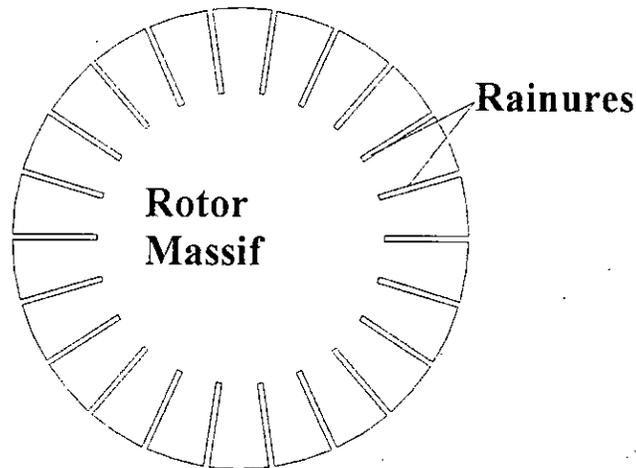


Fig. III. 1 Structure du rotor rainuré d'une machine asynchrone

- *Rotor massif chemisé*

Ce rotor est constitué d'un noyau magnétique massif chemisé par une couche uniforme d'un matériau conducteur dont le but est de faciliter le développement des courants induits. Cette chemise est le siège d'une très forte densité de courant. On est confronté à divers problèmes à savoir : Tenue mécanique de cette chemise de moins bonne rigidité et sa réfrigération. En effet, les échauffements induits peuvent ramollir la couche conductrice et mettre en péril son intégrité mécanique.

Globalement, cette technique permet d'améliorer le comportement électrique de la machine mais la fixation de la chemise sur l'acier et les échauffements considérables de cette dernière soulèvent des difficultés dont la résolution n'est pas aisée.

- *Rotor massif avec cage d'écureuil*

Cette technique dérive de celle utilisée dans les machines asynchrones à cage d'écureuil classique. Toutefois, dans la configuration machine rapide, la tôle est remplacée par de l'acier massif et les encoches sont du type semi-ouvert (Fig. III. 2) pour assurer le maintien de la cage. Le rotor doit cependant être freiné et il faut assurer la tenue mécanique des couronnes conductrices assurant le court-circuit des barres aux extrémités. Cette solution peut être envisagée sans difficultés d'ordre électrique ou mécanique jusqu'à 30000 tr/mn et 300 kW pour des moteurs bipolaires alimentés à 500 Hz [13].

Une autre possibilité est de disposer la cage d'écureuil dans des encoches fermées [16, 17] usinées à l'intérieur du rotor massif (Fig. III. 3). Cette technique permet de supprimer la plupart des problèmes mécaniques puisque le rotor a un comportement beaucoup plus homogène. Néanmoins la fermeture des encoches implique la possibilité pour le flux de se re-boucler directement au droit des barres.

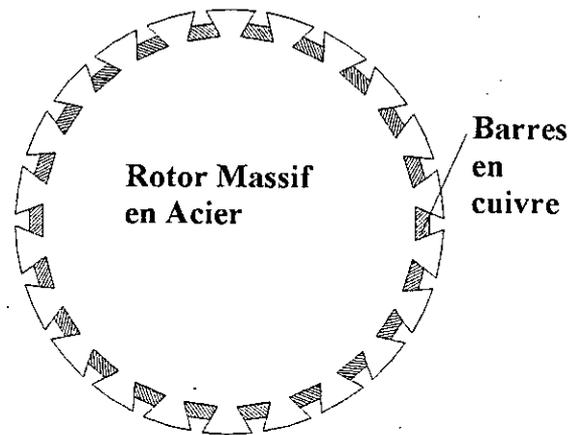


Fig. III. 2 Structure du rotor d'une machine asynchrone à encoches trapézoïdales

C'est pourquoi, pour affiner le comportement électrique d'une telle machine, il peut être judicieux de concevoir le rotor avec un acier facilement saturable. Ainsi, les lignes de flux, après avoir saturé l'isthme, contourneront l'encoche et créeront un courant induit dans les barres. Le problème délicat de cette étude reste le calcul de la profondeur à laquelle on doit placer les barres afin d'obtenir un compromis entre les comportements électrique et mécanique de la machine.

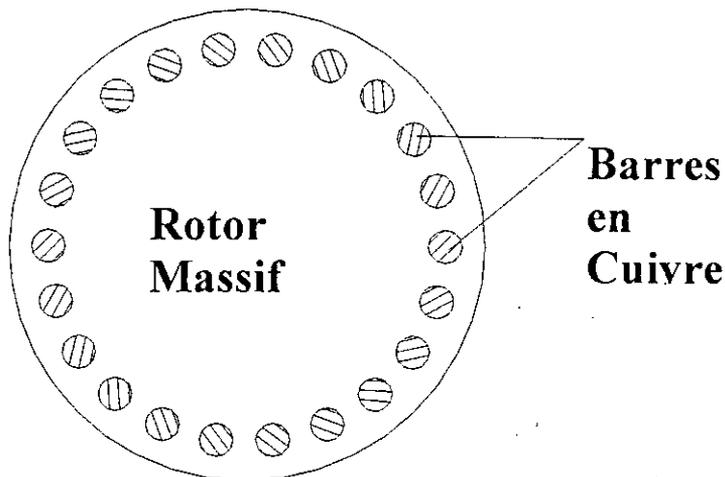


Fig. III. 3 Structure du rotor d'une machine asynchrone à encoches fermées

En se basant sur cette technologie, le constructeur ABB a développé toute une série de moteurs rapides « UQM) » [7] d'une puissance de 1,5 à 6 MW dont la vitesse atteint 5900 tr/mn. Sa nouvelle gamme « HISPIN » [18], destinée à remplacer les turbines à gaz et l'entraînement des compresseurs et des pompes, couvre la gamme de puissance de 2 à 15 MW pour des vitesses de rotation de 3800 à 15 000 tr/mn.

### III. 4 MODELES DE CALCUL DES MACHINES ASYNCHRONES EN REGIME PERMANENT

Le calcul exhaustif des machines asynchrones en général et ceux à rotor massif nécessite la résolution de l'équation de diffusion du champ électromagnétique dans des domaines non-linéaires, conducteurs et tridimensionnel. Ce qui constitue un des problèmes importants de l'électrotechnique. Parmi les méthodes de résolution envisagées, nous pouvons citer les méthodes analytiques pour les structures simples ou moyennant des hypothèses très simplificatrices et les méthodes numériques plus récentes.

#### III. 4. 1 Méthode analytique

Le calcul du champ électromagnétique dans une machine asynchrone par une méthode analytique est basé sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices à savoir :

- Le rayon de courbure de la structure est fréquemment supposé infini ; pour éviter de devoir faire intervenir dans le calcul les fonctions de Bessel. Dans ce cas, on peut limiter l'étude à une structure développée [14, 15]. Cette hypothèse est acceptable tant que le rapport de l'épaisseur de l'entrefer au pas polaire est élevé et que la profondeur de peau est faible [14].
- La perméabilité du stator est infinie et sa conductivité nulle selon l'axe de la machine.
- L'enroulement statorique est à répartition sinusoïdale et il est alimenté par des courants à variation sinusoïdale par rapport au temps, ce qui permet de se limiter au premier harmonique d'espace et du temps à la surface du stator.
- L'acier rotorique ne présente pas de phénomène d'hystérésis.
  
- Dans le cas d'un rotor massif rainuré, un modèle simplifié distingue deux régions dans le rotor : un milieu équivalent anisotrope remplace la zone encochée et un milieu isotrope représente le fer resté massif. On se ramène ainsi à un modèle lisse. La principale difficulté réside dans le choix des caractéristiques physiques du milieu anisotrope équivalent [14]. En effet, la hauteur du milieu équivalent est différente de celle rainurée.

Bien que les modèles analytiques soient rapides à mettre en œuvre, ils ne permettent pas la prise en compte de tous les phénomènes spécifiques à la machine asynchrone, en particulier la saturation. En outre, le moteur à rotor lisse est le seul qui se prête à un calcul analytique complet dans l'hypothèse d'une perméabilité constante.

#### III. 4. 2 Méthode des Intégrales de Frontières

La méthode des intégrales de frontières constitue un outil efficace lorsqu'on s'intéresse à l'optimisation d'une structure à symétrie cylindrique dans la mesure où on peut admettre en première analyse que les domaines ferromagnétiques sont à caractéristique linéaire. C'est une application numérique de l'identité de Green. La solution y est décrite par une représentation intégrale. Cette méthode est particulièrement intéressante pour résoudre les équations de la magnétodynamique complexe dans un domaine de géométrie complexe.

Les avantages d'une telle méthode sont :

- Recherche des inconnues uniquement sur la frontière
- Méthode assez précise pour peu d'inconnues
- Programmation facile en particulier pour une géométrie simple
- Possibilités d'introduire de façon très simple une solution analytique partielle (semi-numérique)

Les inconvénients inhérents à cette méthode sont :

- La programmation est plus difficile pour des structures complexes et des domaines multiples.
- La prise en compte de la saturation ne peut être que globale.

### III. 4. 3 Méthode des Différences Finies

La résolution de l'équation de diffusion par le biais de la méthode des différences finies, en ayant recours aux représentations complexes, permet de tenir compte des sources de courants sinusoïdaux et de la présence de courants induits dans les parties massives et conductrices de la structure étudiée. L'une des applications envisageables, est de pouvoir déterminer l'impédance à rotor bloqué d'une machine, pour une fréquence d'alimentation donnée. Cette impédance permettant par exemple d'étudier le comportement de la machine vis à vis des harmoniques d'une alimentation par convertisseur classique. En général, les courants induits circulent dans des zones d'épaisseur faible vis à vis des dimensions de la structure étudiée. Des études de convergence sont à effectuer afin de vérifier la stabilité des résultats en fonction du nombre de mailles placées dans la zone de pénétration des courants. Le maillage dont les mailles sont de formes rectangulaires doit être régulier.

### III. 4. 4 Méthode des Eléments Finis

Les premiers modèles du type éléments finis des moteurs asynchrones comme ceux à base de différences finies utilisent un maillage du rotor fixe vis à vis du maillage stator [3]. Ces modèles sont développés principalement pour déterminer les performances des machines alimentées par des sources sinusoïdales et opérant à vitesse constante. L'hypothèse admise alors est que les courants et les champs électromagnétiques sont à variation sinusoïdale du temps. Il faut donc se limiter au cas d'une alimentation parfaitement sinusoïdale en temps, ce qui élimine les harmoniques temporels dans les grandeurs électromagnétiques.

Les effets de la rotation du rotor sont introduits en utilisant une transformation appropriée. Tout se passe alors au rotor comme si ce domaine avait une conductivité égale à sa conductivité propre multipliée par le glissement. Une autre façon équivalente à celle-ci est de considérer que les fréquences au stator et au rotor sont égales au produit de la fréquence de la source d'alimentation et du glissement.

L'hypothèse de la variation sinusoïdale des grandeurs électromagnétiques a des avantages et des inconvénients. Le grand avantage est évidemment l'utilisation des variables complexes. L'utilisation de l'analyse complexe implique que la solution du problème ne nécessite pas d'itérations temporelles conduisant à un gain de temps considérable en comparaison avec le modèle pas à pas. Le grand inconvénient est que la saturation magnétique ne peut être prise en considération que dans un sens moyen.

L'absence de mouvement relatif entre le stator et du rotor implique que les effets produits par le mouvement des dents rotoriques ne sont pas considérés. Cela ne veut pas nécessairement dire que ces effets sont négligeables dans le calcul des performances. Les amplitudes des harmoniques d'ordre supérieur peuvent toutefois être déterminées grâce à une analyse de Fourier du flux d'entrefer.

Les avantages de ce modèle sont :

- Calcul des performances, en régime permanent, sans faire intervenir la dimension temps ; les dérivées temporelles sont remplacées par des représentations complexes. Les paramètres du circuit électrique équivalent peuvent être déduits du calcul par éléments finis.
- Les effets de peau dans les barres rotoriques sont pris en considération.
- Les performances sont calculées à partir d'une procédure ayant une seule étape.
- Une solution non-linéaire est requise pour chaque vitesse rotorique et/ou tension d'alimentation

Les inconvénients de ce modèle sont :

- Il induit des erreurs systématiques quant à la prise des harmoniques d'espace. En effet, en plus des harmoniques temporels dus à l'alimentation des harmoniques d'espace de deux types différents apparaissent dans les machines : des harmoniques de bobinage et des harmoniques de denture. L'erreur effectuée par le calcul à rotor bloqué ne revient pas à prendre en compte seulement le premier harmonique d'espace mais à forcer tous les autres harmoniques à tourner à la vitesse  $g\Omega_s$  dans un référentiel lié au rotor alors qu'en réalité, pour un fonctionnement à  $g$  voisin de zéro, les harmoniques de bobinage de rang 5 et 7 créent des courants de fréquence voisine de  $6f$  au rotor. Les couples ainsi créés sont très faibles alors que dans le modèle à rotor bloqué où les courants sont à la fréquence  $gf$ , ils deviennent plus importants. De plus, les harmoniques de denture conduisent à une dépendance du calcul du couple de la position relative du rotor par rapport au stator. Pour éliminer l'effet des harmoniques de denture, il est possible pour chaque calcul d'effectuer plusieurs résolutions correspondant à plusieurs positions relatives du stator et du rotor puis d'effectuer la moyenne de l'ensemble des résultats ainsi obtenus. L'erreur due aux harmoniques du bobinage est toutefois systématique et ne peut être corrigée ; ce qui amoindrit la fiabilité de la méthode dans le cas où l'effet de ces harmoniques ne peut être considéré négligeable.
- Le modèle n'est pas adéquat pour modéliser les machines où les forces magnéto-motrices sont riches en harmoniques (e.g. machine monophasé ou machine dont l'alimentation est déséquilibrée).
- Le biais rotorique n'est pas pris en compte.

A côté de ce modèle standard, S. Williamson [3] a par ailleurs développé un modèle «éléments finis» des machines asynchrones dit à maillage réduit (le maillage rotorique couvre seulement un pas dentaire rotorique et le maillage statorique couvre seulement un tiers d'un pôle dans le cas d'une machine triphasé).

Les avantages de ce type de modèle sont :

- Utilisation de maillages réduits pour le rotor et pour le stator. Les maillages utilisés sont donc fins sans jamais conduire à la résolution de systèmes d'équations de grande dimension.
  - Il est basé sur les circuits équivalents.
- Les inconvénients sont :
- Il est limité aux machines polyphasées équilibrées
  - Les asymétries ne peuvent être prises en considération

### III. 4. 5 Méthode du double entrefer

Plutôt que de figer le domaine d'étude en bloquant le rotor sur une position fixe, la méthode du «double entrefer mise au point au GREEN considère les domaines statorique et rotorique comme deux domaines indépendants discrétisés une fois pour toute [4]. Les équations de Maxwell sont résolues séparément dans chaque domaine et le couplage entre les deux calculs s'effectue grâce aux conditions aux limites sur chaque domaine déduites du calcul du potentiel vecteur dans l'autre domaine. Pour cela, il est commode d'inclure la frontière du domaine statorique (respectivement rotorique) dans le domaine rotorique (respectivement statorique). Le domaine rotorique représentera l'ensemble rotor + entrefer et le domaine statorique l'ensemble stator + entrefer.

Dans le cas linéaire, il est, de plus, possible d'utiliser le principe de superposition dans le domaine statorique en séparant le calcul du potentiel vecteur induit par le domaine rotorique du calcul du potentiel vecteur généré par les courants sources.

On peut vérifier par cette méthode, pour une alimentation sinusoïdale et un glissement faible, que les harmoniques de bobinage de rang 5 et 7 créent des courants de fréquence voisine de  $6f$  au rotor. L'ensemble des couples asynchrones peut être théoriquement calculé.

### III. 4. 6 Méthode du double entrefer avec approximation du premier harmonique

La méthode du double entrefer permet de résoudre les équations du champ dans une machine asynchrone en régime permanent et dans le cas linéaire en tenant compte des harmoniques temporels et spatiaux.

Toutefois, pour une machine convenablement conçue, on peut en effet admettre comme cela se fait dans les modèles externes que les harmoniques d'espace sont négligeables devant le fondamental. En conséquence, seul le premier harmonique du potentiel vecteur provenant de la résolution au stator sert de source aux courants induits dans le rotor [13]. Cela revient à annuler les harmoniques de rang supérieur au fondamental sur la frontière du domaine rotorique. De même, seul le premier harmonique du potentiel vecteur rotorique est transmis au rotor via l'entrefer.

La méthode du premier harmonique repose donc sur une analyse harmonique spatiale et temporelle du champ dans l'entrefer. La formulation de type Dirichlet revient à sous-estimer l'effet des harmoniques d'espace et la formulation de type Neumann entraîne au contraire une surestimation de cet effet. Ce qui permet une évaluation de l'erreur introduite par l'hypothèse du premier harmonique.

## III. 5 MODELISATION ELECTROMAGNETIQUE DES MOTEURS ASYNCHRONES RAPIDES

### III. 5. 1 Hypothèses

L'étude de la diffusion du champ électromagnétique dans les machines asynchrones est un problème tridimensionnel complexe. Nous admettons dans ce qui suit des hypothèses simplificatrices de façon à ramener cette étude à un problème bidimensionnel de la magnétodynamique complexe. Les principales hypothèses sont:

- Le modèle d'étude est bidimensionnel ; l'étude du moteur asynchrone est effectuée dans un plan perpendiculaire à la direction axiale. Le problème est donc invariant dans toute translation parallèle à l'axe de rotation de la machine. Les effets d'extrémités sont de ce fait négligés.
- Le stator est constitué de tôles feuilletées qui empêchent la circulation de courants induits. La conductivité électrique est donc nulle au niveau du stator.
- Les densités de courant dans les bobinages statoriques sont supposées uniformément réparties. En effet, pour une machine rapide de grande puissance, les enroulements sont réalisés à l'aide de barres Roebell composées de plusieurs brins. Cette technique permet d'obtenir une répartition pratiquement homogène des courants dans les encoches. Ces densités sont déterminées par les caractéristiques de la structure étudiée (bobinage, courants, forme des encoches, etc.). Pour une encoche de section  $S$  comportant  $N$  conducteurs et traversée par un courant instantané de valeur efficace complexe  $\bar{I}$ , La densité de courant complexe s'écrit ainsi :

$$\bar{J}_s = \frac{N\bar{I}}{S} \quad (\text{III. 1})$$

- Le phénomène d'hystérésis est négligé.
- Les milieux ferromagnétiques sont supposés linéaires dans un premier temps. L'effet de la saturation est pris en compte par la suite par l'introduction de la notion de perméabilité magnétique effective.
- L'alimentation de la structure étudiée est assurée par un onduleur de tension délivrant des tensions triphasées équilibrées.
- Deux pulsations temporelles existent. La pulsation dans le stator est  $\omega$  alors que la pulsation dans le rotor est  $g\omega$  où  $g$  désigne le glissement étant donné que seul le premier harmonique d'espace peut traverser l'entrefer.

- La géométrie bidimensionnelle du problème permet l'introduction des potentiels vecteurs magnétiques  $a_s$  dans le stator  $\Omega_s$  et  $a_r$  dans le rotor  $\Omega_r$  ayant une seule composante. Ces deux potentiels, exprimés par rapport à des référentiels liés respectivement au stator et au rotor, peuvent être représentés par :

$$a_s(r, \theta_s, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\bar{A}_s \exp(j\omega t)) \quad \text{Dans } \Omega_s \quad (\text{III. 2})$$

$$a_r(r, \theta_r, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\bar{A}_r \exp(jg\omega t)) \quad \text{Dans } \Omega_r \quad (\text{III. 3})$$

### III. 5. 2 Domaine d'étude et Mise en équations

Dans une machine asynchrone cylindrique (Fig. III. 4), ayant  $2p$  pôles et tournant à une vitesse angulaire constante  $\Omega$ , deux référentiels peuvent être considérés :

- Un référentiel fixe lié au stator ;
- Et un référentiel tournant par rapport au précédent et lié au rotor.

En désignant par  $\delta_0$ , la position angulaire du rotor par rapport au stator à l'instant  $t = 0$ , ces deux référentiels sont liés à tout instant  $t$  par :

$$\theta_s = \theta_r + \Omega t + \delta_0 \quad (\text{III. 4})$$

Le passage du potentiel rotorique  $a_r$  au potentiel statorique  $a_s$  se fait par changement de référentiel, soit :

$$a_r(r, \theta_s - \Omega t - \delta_0, t) = a_s(r, \theta_s, t) \quad (\text{III. 5})$$

L'entrefer, scindé en deux par une interface artificielle  $\Gamma$ , partage le domaine d'étude en deux domaines (Fig. III.4) :

- Un domaine rotorique  $\Omega_r$  constitué du rotor et d'une partie de l'entrefer;
- Et un domaine statorique  $\Omega_s$  constitué du stator et de l'autre partie de l'entrefer.

La notation complexe permet de passer d'un problème spatio-temporel à un problème de la magnétodynamique complexe où le temps et l'espace sont découplés. Le champ électromagnétique est alors gouverné dans les domaines statorique et rotorique par les équations suivantes :

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_s} \operatorname{grad}(\bar{A}_s)\right) + \bar{J}_s = 0 \quad \text{Dans } \Omega_s \quad (\text{III. 6})$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_r} \operatorname{grad}(\bar{A}_r)\right) - jg\omega\sigma_r \bar{A}_r = 0 \quad \text{Dans } \Omega_r \quad (\text{III. 7})$$

Les champs électromagnétiques dans les domaines statorique et rotorique sont couplés, au niveau de l'interface  $\Gamma$ , grâce aux conditions traduisant la continuité du potentiel vecteur magnétique complexe et de sa dérivée normale.

$$\bar{A}_r = \bar{A}_s \quad \text{Sur } \Gamma \quad (\text{III. 8})$$

$$\frac{\partial \bar{A}_r}{\partial n} = \frac{\partial \bar{A}_s}{\partial n} \quad \text{Sur } \Gamma \quad (\text{III. 9})$$

Le potentiel vecteur magnétique est considéré nul sur la surface extérieure du stator, soit :

$$\bar{A}_s = 0 \quad \text{Sur } \Gamma^{\text{ext}} \quad (\text{III. 10})$$

Les équations (III. 6 à 10) forment a priori un système complet pour déterminer le potentiel vecteur magnétique complexe  $\bar{A}$ . Nous avons donc à résoudre l'équation de la magnétodynamique complexe dans le rotor. Cette équation se réduit à l'équation de Laplace complexe dans l'entrefer et à celle de Poisson complexe dans le stator. Les champs électromagnétiques dans le domaine statorique et rotorique sont couplés grâce aux conditions de continuité du potentiel vecteur magnétique et de sa dérivée normale. Une condition du type Dirichlet a été imposée sur la frontière extérieure du domaine d'étude. L'étape suivante est consacrée à la résolution numérique de ces équations par la méthode des éléments finis complexes.

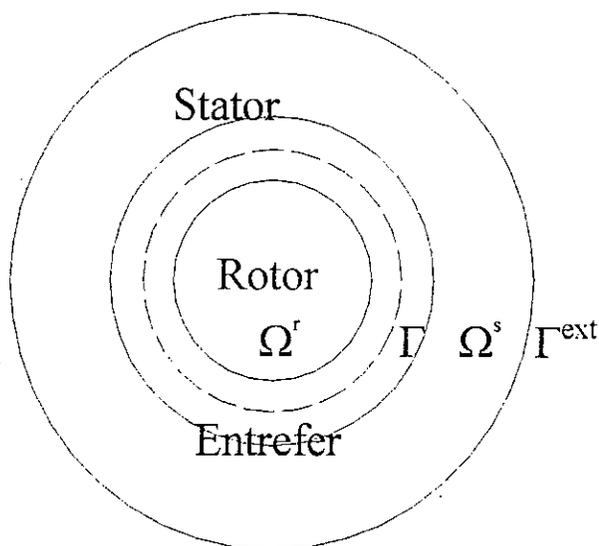


Fig. III. 4 Structure étudiée : Moteur asynchrone

### III. 6 RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE LA MAGNETODYNAMIQUE COMPLEXE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### III. 6. 1 Formulation du type Galerkin et de Ritz de l'équation de la magnétodynamique complexe.

Comme l'équation de diffusion du champ magnétique, l'équation de la magnétodynamique complexe se prête difficilement à un traitement numérique direct par la méthode des éléments finis. Cette équation doit être réécrite sous forme intégrale dite faible grâce à la méthode des résidus pondérés ou à celle des fonctionnelles.

La méthode des résidus pondérés ou méthode de Galerkin suppose que l'on peut trouver une solution approchée  $\tilde{\bar{A}}$  minimisant un résidu que l'on définit sous la formulation générale [19, 20] :

$$\bar{\text{Res}} = \text{div}\left(\frac{1}{\mu} \text{grad}(\tilde{\bar{A}})\right) - \sigma j \omega \tilde{\bar{A}} + \bar{J} \quad (\text{III. 11})$$

Si le champ  $\tilde{\bar{A}}$  est égal au champ solution, le résidu (III.11) est évidemment nul. Une telle solution est pratiquement impossible à trouver. On se contente généralement d'une solution approchée. L'approximation  $\tilde{\bar{A}}$  peut être rendu proche de la solution du problème  $\bar{A}$ , en projetant ce résidu sur une base de fonctions complexes  $\bar{v}$ , soit :

$$\iint_{\Omega} (\bar{v} \bar{\text{Res}}) dx dy = 0 \quad (\text{III. 12})$$

L'intégration par parties de la relation (III.12), conduit à la forme intégrale faible (III. 13).

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad} \bar{v} \text{grad} \tilde{\bar{A}} dx dy + j \iint_{\Omega} \sigma \omega \bar{v} \tilde{\bar{A}} dx dy - \iint_{\Omega} \bar{v} \bar{J} dx dy - \oint_{\partial \Omega} \frac{1}{\mu} \bar{v} \frac{\partial \tilde{\bar{A}}}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{III. 13})$$

Où  $n$  est la normale sortante vis à vis de la frontière du domaine considéré.

En choisissant la trace de la fonction poids  $\bar{v}$  nulle sur la frontière du domaine d'étude, la relation ci-dessus se réduit à la relation (III. 14).

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \text{grad} \bar{v} \text{grad} \tilde{\bar{A}} dx dy + j \iint_{\Omega} \sigma \omega \bar{v} \tilde{\bar{A}} dx dy - \iint_{\Omega} \bar{v} \bar{J} dx dy = 0 \quad (\text{III. 14})$$

La condition (III. 9) est ainsi satisfaite implicitement alors que les conditions (III. 8) et (III. 10) doivent être imposées.

La résolution du problème la magnétodynamique complexe que l'on vient d'établir est équivalente à la minimisation d'une fonctionnelle complexe  $\bar{\Pi}$  [21]. Cette fonctionnelle, définie par l'expression (III. 15), peut être obtenue aisément à partir de la relation (II. 15) en remplaçant l'opérateur dérivation  $\frac{\partial}{\partial t}$  par le nombre complexe  $j\omega$ .

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} (\text{grad} \bar{A})^2 + 2j\sigma \bar{A}^2 - 2\bar{J} \cdot \bar{A} \right) dx dy \quad (\text{III. 15})$$

### III. 6. 2 Discrétisation spatiale par éléments finis

Le principe de cette discrétisation consiste à définir une partition du domaine d'étude (décomposition en sous-domaines triangulaires dans notre cas, sans recouvrement ni intersection) appelée découpage. Chaque sous-domaine triangulaire (élément fini) est repéré par trois nœuds (Fig. II. 4). Les maillages du stator (Fig. III. 5a) et du rotor (Fig. III. 5b) sont indépendants et ne coïncident pas au niveau de l'interface stator-rotor  $\Gamma$ . Le maillage rotorique doit en outre être adapté à la pulsation rotorique afin de tenir compte l'effet de peau.

Dans chaque élément fini (e), le potentiel vecteur magnétique complexe est approximé par un polynôme du premier degré, soit :

$$\bar{A}(x, y) = N_1(x, y)\bar{A}_1 + N_2(x, y)\bar{A}_2 + N_3(x, y)\bar{A}_3 \quad (\text{III. 16})$$

Les fonctions  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont choisies dans ce qui suit égales aux fonctions définies par la relation (II. 19) afin d'assurer la continuité du potentiel vecteur magnétique complexe entre éléments finis adjacents.

Les composantes du vecteur gradient du potentiel vecteur magnétique complexe peuvent être, dans ce cas, déduites de aisément de l'expression (II. 24) en substituant le potentiel vecteur magnétique complexe  $\bar{A}$  au potentiel vecteur  $A$ .

$$\text{grad} \bar{A} = [D] \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 17})$$

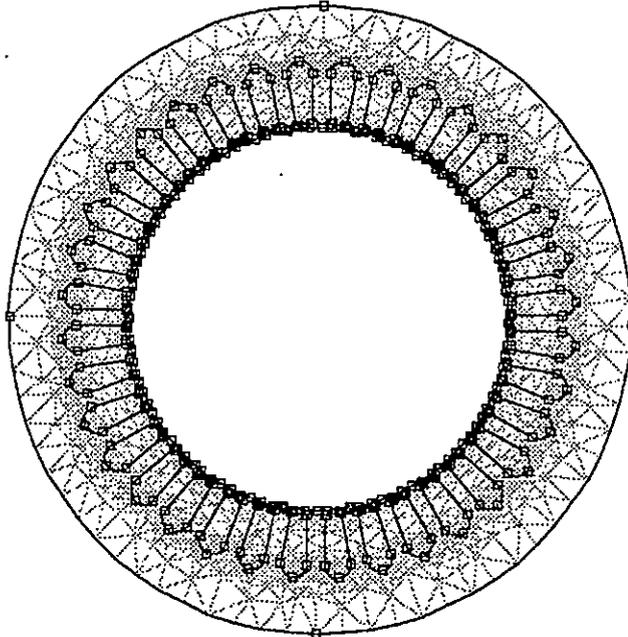
En choisissant les fonctions de projection  $\bar{v}$  identiques aux fonctions d'approximation  $N_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) et substituant (III. 16) et (III. 17) dans (III. 14), nous obtenons :

$$\sum_e \left( \iint_{\Omega_e} v \text{grad} N_i \cdot \text{grad} \left( \sum_{j=1}^3 N_j \bar{A}_j \right) dx dy + \iint_{\Omega_e} \sigma N_i j\omega \left( \sum_{j=1}^3 N_j \bar{A}_j \right) dx dy - \iint_{\Omega_e} N_i \bar{J} dx dy \right) = 0 \quad (\text{III. 18})$$

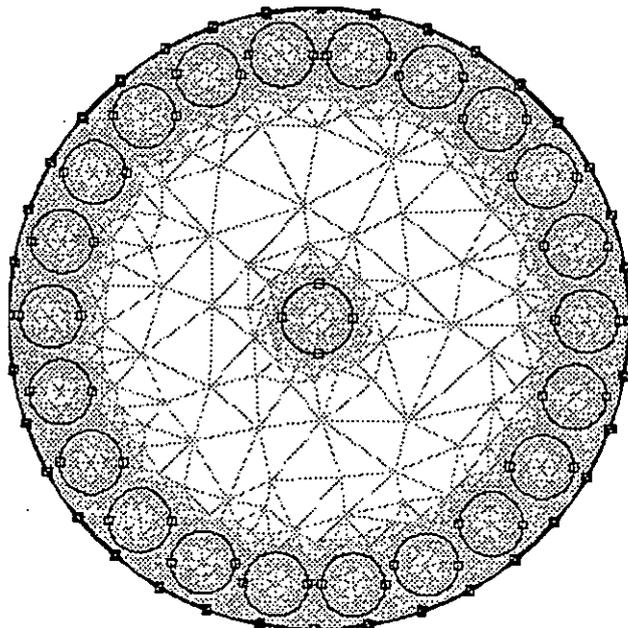
Cette relation peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\sum_e v_e [S_e] \{A_e\} + j\omega\sigma_e [T_e] \{A_e\} - [Q_e] \{J_e\} = \{0\} \quad (\text{III. 19})$$

Où l'indice e se réfère à un élément fini donné.



a. Maillage du domaine statorique



b. Maillage du domaine rotorique

Fig. III. 5 Maillage de la Structure étudiée

Les éléments typiques des matrices élémentaires  $[S_e]$ ,  $[T_e]$  et  $[Q_e]$  sont donnés respectivement par les expressions (II. 28), (II. 29) et (II. 30).

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles (III. 6) et (III. 7) revient à la résolution du système linéaire d'équations complexes suivant :

$$[v[S] + jw\sigma[T]]\{\bar{A}\} = [Q]\{\bar{J}\} \quad (\text{III. 20})$$

Ce système peut aussi être obtenu en minimisant la forme discrète (III. 21) de la fonctionnelle complexe de Ritz (III. 15).

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \{\bar{A}\}^T [v[S] + jw\sigma[T]] \{\bar{A}\} - \{\bar{A}\}^T [Q] \{\bar{J}\} \quad (\text{III. 21})$$

### III. 6. 3 Limites de l'étude en régime linéaire

Les matériaux massifs de la machine étudiée sont le siège de non-linéarités magnétiques. Or jusqu'ici la caractéristique magnétique de tels matériaux est considérée comme linéaire, par conséquent leur perméabilité magnétique est constante. Or celle-ci est fonction de l'induction magnétique dans le cas où ces matériaux sont saturés ce qui est le cas dans la pratique. De plus, toutes les grandeurs électromagnétiques sont supposées varier de façon sinusoïdale en fonction du temps. Toutefois, la réponse à une induction magnétique sinusoïdale n'est pas un champ magnétique sinusoïdal si les matériaux magnétiques ne sont plus linéaires. La réciproque est également vraie et dans le cas général ni le champ magnétique ni l'induction magnétique ne varient de façon sinusoïdale en fonction du temps.

Un moyen de contourner ce problème dans le cadre des représentations complexes est de définir une réductivité magnétique effective en définissant une loi de milieu équivalente  $v_{eq}$

( $|\bar{B}|^2$ ). On peut ainsi rechercher une approximation limitée au premier harmonique du

potentiel vecteur afin de conserver les notations complexes qui ont l'avantage d'éliminer la variable temps. Cependant, la définition de cette réductivité effective n'est pas unique et les auteurs des travaux référencés [22, 23, 24] définissent chacun à sa manière celle-ci.

Dans le cadre de notre travail, nous avons adopté la définition proposée par Laporte [25] qui suppose que l'induction et le champ magnétiques peuvent être approximés par leur premier harmonique de temps et se mettent sous la forme :

$$b(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\bar{B}e^{j\omega t}) \quad (\text{III. 22})$$

$$h(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\bar{H}e^{j\omega t}) \quad (\text{III. 23})$$

Le problème est alors de déterminer la réductivité équivalente  $v_{eq}$  rapport des premiers harmoniques temporels du champ et de l'induction magnétique.

$$v_{eq} = \frac{h(t)}{b(t)} \quad (\text{III. 24})$$

La réductivité magnétique  $v$  du milieu ferromagnétique est exprimée sous la forme d'un polynôme pair fonction du carré de l'induction magnétique  $b(t)$ .

$$v = a_0 + a_1 b^2 + a_2 b^4 + a_3 b^6 + a_4 b^8 + a_5 b^{10} + a_6 b^{12} \quad (\text{III. 25})$$

Où les coefficients  $a_i$  sont déterminés en utilisant la méthode des moindres carrés.

Un calcul assez complexe conduit à l'expression suivante de la réductivité magnétique équivalente [13] :

$$v_{eq} = a_0 + \frac{3}{2} a_1 |\bar{B}|^2 + \frac{5}{2} a_2 |\bar{B}|^4 + \frac{35}{8} a_3 |\bar{B}|^6 + \frac{63}{8} a_4 |\bar{B}|^8 + \frac{231}{2} a_5 |\bar{B}|^{10} + \frac{429}{16} a_6 |\bar{B}|^{12} \quad (\text{III. 26})$$

Dès lors que la réductivité magnétique n'est plus constante, le système d'équations (III. 20) est non-linéaire. La linéarisation de ce système par la procédure de Newton- Raphson mène à la résolution d'un système linéaire suivant :

$$[\bar{K}]_{k+1} \{\Delta \bar{A}\}_{k+1} = \{\bar{R}\}_{k+1} \quad (\text{III. 27})$$

Avec :

$$\{\bar{R}\}_{k+1} = [Q] \{\bar{J}\} - [v_{eq} [S] + j\omega\sigma [T]] \{\bar{A}\}_k \quad (\text{III. 28})$$

$$[\bar{K}]_{k+1} = v_{eq_k} [S] + \frac{2}{\Delta_e} \left( \frac{\partial v_{eq}}{\partial |B|^2} \right) \left( [S] \{\bar{A}\}_k \right) \left( [S] \{\bar{A}\}_k \right)^T + j\omega\sigma [T] \quad (\text{III. 29})$$

$$\{\Delta \bar{A}\}_{k+1} = \{\bar{A}\}_{k+1} - \{\bar{A}\}_k \quad (\text{III. 30})$$

La résolution du problème magnétodynamique étudié revient finalement à la minimisation de la forme incrémentale complexe  $\Delta \bar{\Pi}$  définie par :

$$\Delta \bar{\Pi} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{A}_{s1} \\ \Delta \bar{A}_{s2} \\ \Delta \bar{A}_{r3} \\ \Delta \bar{A}_{r4} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & 0 & 0 \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} \\ 0 & 0 & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{A}_{s1} \\ \Delta \bar{A}_{s2} \\ \Delta \bar{A}_{r3} \\ \Delta \bar{A}_{r4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta \bar{A}_{s1} \\ \Delta \bar{A}_{s2} \\ \Delta \bar{A}_{r3} \\ \Delta \bar{A}_{r4} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 31})$$

Où l'indice  $s_1$  se réfère aux nœuds du domaine  $\Omega_s$  excepté ceux appartenant à la frontière  $\Gamma$ . L'indice  $s_2$  se réfère aux nœuds de ce domaine et appartenant à  $\Gamma$ . L'indice  $r_3$  se réfère aux nœuds du domaine  $\Omega_r$  appartenant à  $\Gamma$  et  $r_4$  aux nœuds de ce domaine excepté ceux appartenant à la frontière  $\Gamma$ .

## III. 7 COUPLAGE DES CHAMPS STATORIQUE ET ROTORIQUE

### III. 7. 1 Equations de couplage

La forme incrémentale  $\Delta\bar{\Pi}$  montre clairement que les potentiels vecteurs complexes  $\bar{A}_s$  et  $\bar{A}_r$  sont indépendants. Ces potentiels sont cependant liés par la relation (III. 8) traduisant la continuité du potentiel vecteur magnétique à travers l'interface domaine statorique- domaine rotorique. La forme discrète (III. 31) de la fonctionnelle doit donc être modifiée afin d'inclure cette condition.

Le potentiel vecteur magnétique  $\bar{A}_{r3}$  sur la frontière  $\Gamma$  peut être considéré comme une combinaison linéaire des potentiels vecteurs  $\bar{A}_{r3}^i$  des nœuds  $i$  de  $\Omega_r$  appartenant à cette frontière. En désignant par  $\theta_r$  la position angulaire par rapport au référentiel rotorique, cette combinaison, compatible avec l'approximation (III. 16) du potentiel vecteur magnétique complexe, s'écrit:

$$\bar{A}_{r3}(\theta_r) = \sum_i \alpha_i(\theta_r) \bar{A}_{r3}^i \quad (\text{III. 32})$$

Dans le modèle classique éléments finis dit à rotor est bloqué, l'ensemble des harmoniques d'espace du potentiel vecteur magnétique est transmis à travers l'interface  $\Gamma$ . Ces harmoniques sont à l'origine d'erreurs numériques dans le calcul du couple lorsque les glissements sont faibles. Ces derniers correspondent aux glissements nominaux des moteurs asynchrones rapides étudiés. Pour éviter de telles erreurs, une alternative proposée dans le cadre de ce travail consiste à coupler les champs électromagnétiques statorique et rotorique en considérant uniquement le fondamental du potentiel vecteur magnétique complexe. Cette hypothèse est justifiée par l'optimisation du pas de bobinage de ces machines qui rend les harmoniques de rang supérieur négligeables devant l'amplitude du fondamental [26].

La période spatiale du potentiel vecteur magnétique complexe est égale à  $\frac{2\pi}{p}$ . Il est donc décomposable en série de Fourier. L'expression (III. 32) peut donc réécrite sous la forme suivante :

$$\bar{A}_{r3}(\theta_r) = \sum_i \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_{ik} e^{jkp\theta_r} \right) \bar{A}_{r3}^i \quad (\text{III. 33})$$

Le couplage des champs électromagnétiques statorique et rotorique peut s'effectuer en considérant uniquement le fondamental du champ électromagnétique si l'ordre  $k$  des harmoniques dans l'expression (III. 33) est limité à celui du fondamental. Dans ces conditions, la condition de continuité du potentiel vecteur magnétique complexe (III. 8) est traduite par la relation (III. 34).

$$\bar{A}_{s2}(\theta_s) = \sum_i \bar{c}_{i,-1} \bar{A}_{r3}^i e^{-jp\theta_s} \quad (\text{III. 34})$$

En désignant par  $[\bar{C}]$  la matrice complexe des contraintes, les équations de couplage, liant les potentiels vecteurs magnétiques complexes statorique et rotorique, peuvent être mises sous la forme d'une équation matricielle homogène, soit :

$$\{\bar{A}_{s2}\} - [\bar{C}]\{\bar{A}_{r3}\} = \{\bar{0}\} \quad (\text{III. 35})$$

Sous forme incrémentale, cette relation matricielle prend la forme suivante :

$$\{\Delta\bar{A}_{s2}\} - [\bar{C}]\{\Delta\bar{A}_{r3}\} = \{\bar{0}\} \quad (\text{III. 36})$$

### III. 7. 2 Techniques de couplage

En modifiant la forme incrémentale de la fonctionnelle  $\bar{\Pi}$ , les contraintes qu'on vient de définir peuvent être prise en considération lors de la résolution du système d'équations final. Les trois techniques couramment employées et que nous avons déjà présentées au chapitre précédent, sont :

- Technique de transformation
- Technique des multiplicateurs de Lagrange
- Technique de pénalisation

#### III. 7. 2. 1 Technique de transformation

Cette technique permet, comme cela a été déjà mentionné, de réduire l'ordre du système d'équations. Elle nécessite cependant un nombre important de transformations matricielles. Le système complexe, symétrique et bande, à résoudre est dans ce cas de la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12}\bar{C} & 0 \\ \bar{C}^T\bar{K}_{21} & \bar{K}_{33} + \bar{C}^T\bar{K}_{22}\bar{C} & \bar{K}_{34} \\ 0 & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{A}_{s1} \\ \Delta\bar{A}_{r3} \\ \Delta\bar{A}_{r4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{C}^T\bar{R}_2 + \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 37})$$

#### III. 7. 2. 2 Technique des multiplicateurs de Lagrange

Cette technique, dont la mise en œuvre est relativement facile [27, 28, 29], a l'inconvénient d'augmenter l'ordre du système.

L'équation matricielle (III.36), multipliée à gauche par le vecteur ligne  $\{\bar{\lambda}\}^T$  dont les composantes désignent les multiplicateurs de Lagrange, est sommée à la forme incrémentale complexe  $\Delta\bar{\Pi}$  pour obtenir la forme incrémentale modifiée  $\Delta\bar{\Pi}'$ .

$$\Delta \bar{\Pi}' = \Delta \bar{\Pi} + \{\bar{\lambda}\}' \{ \{ \Delta \bar{A}_{s2} \} - [\bar{C}] \{ \Delta \bar{A}_{r3} \} \} \quad (\text{III. 38})$$

La minimisation de cette nouvelle fonctionnelle conduit à la résolution du système symétrique et complexe d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & 0 & 0 & I^T \\ 0 & 0 & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} & \bar{C}^T \\ 0 & 0 & \bar{K}_{41} & \bar{K}_{44} & 0 \\ 0 & I & \bar{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{A}_{s1} \\ \Delta \bar{A}_{r2} \\ \Delta \bar{A}_{r3} \\ \Delta \bar{A}_{r4} \\ \bar{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 39})$$

### III. 7. 2. 3 Technique de pénalisation

Cette technique présente l'avantage de conserver l'ordre du système d'équations. La minimisation de la fonctionnelle mène dans ces conditions à la résolution du système complexe d'équations, bande et symétrique, suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & 0 & 0 \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} + \alpha & -\alpha \bar{C} & 0 \\ 0 & -\bar{C}^T \alpha & \bar{K}_{33} + \bar{C}^T \alpha \bar{C} & \bar{K}_{34} \\ 0 & 0 & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{A}_{s1} \\ \Delta \bar{A}_{s2} \\ \Delta \bar{A}_{r3} \\ \Delta \bar{A}_{r4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 40})$$

Ce système d'équations reste toutefois sensible vis à vis du choix des coefficients de pénalisation  $\alpha_i$ .

## III. 8 STOCKAGE ET RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

Le système complexe d'équations (III.39) est symétrique et bande. La technique «sky-Line» permet de le stocker sous la forme d'un vecteur. La méthode directe de résolution de Gauss-Crout permet, dans une première phase, de décomposer la matrice  $[\bar{K}]$  sous la forme du produit matricielle (III. 41). Les inconnues sont déterminées, dans une seconde phase par substitution.

$$[\bar{K}] = [\bar{L}][\bar{D}][\bar{L}]^T \quad (\text{III. 41})$$

Où  $[\bar{L}]$  et  $[\bar{D}]$  sont respectivement des matrices complexes triangulaire inférieure et diagonale.

### III. 9 ANALYSE DU REGIME PERMANENT

L'objectif de l'analyse du régime permanent des moteurs asynchrones rapides est de prédéterminer leurs performances durant la phase de conception. Ces moteurs ne peuvent être modélisés par les schémas classiques de Steinmetz. En effet, la présence de courants induits dans le rotor massif rend la modélisation par des circuits couplés imprécise. Le recours à un modèle numérique tel que celui à base d'éléments finis que nous avons choisi s'avère donc nécessaire. La structure étudiée étant alimentée par un onduleur de tension, la densité de courant (III. 1) est à priori inconnue. La résolution des systèmes d'équations (III. 37), (III. 39) et (III. 40), issus de la modélisation par éléments finis, doit être menée en parallèle avec l'équation électrique par phase du moteur asynchrone étudiée. Cette équation électrique peut s'écrire ainsi :

$$\bar{V} = r_s \bar{I} + jx_s \bar{I} + \bar{E} \quad (\text{III. 42})$$

Où  $\bar{V}$  désigne la tension efficace complexe appliquée à la phase statorique considérée.  $\bar{I}$  désigne le courant efficace complexe absorbé.  $r_s$  désigne la résistance par phase du bobinage statorique et  $x_s$  la réactance de fuites.  $\bar{E}$  est la force contre électromotrice ( $\bar{E} = \bar{Z}\bar{I}$ ).

La résistance et la réactance de fuites d'une phase statorique sont déterminées expérimentalement ou par le biais d'expressions empiriques [30].

Le processus itératif de résolution fait appel aux trois étapes suivantes [29, 31] :

1. Calcul de l'impédance  $\bar{Z}$  par la méthode des éléments finis en considérant les milieux ferromagnétiques linéaires pour une valeur donnée du courant statorique. Déterminer l'estimation initiale du courant statorique grâce à la relation (III. 42)
2. Utiliser ce courant comme source du champ électromagnétique dans le modèle éléments finis. Calculer la nouvelle impédance  $\bar{Z}$  résultant du calcul de champ.
3. Recalculer le courant statorique absorbé par phase et le comparer au courant estimé initialement et vérifier la convergence. Si la convergence est satisfaisante, calculer la puissance absorbée, le facteur de puissance, le couple, etc. à partir du schéma équivalent. Sinon revenir à la deuxième étape.

### III. 10 DETERMINATION DES PERFORMANCES ELECTROMAGNETIQUES

Les grandeurs électromagnétiques, caractérisant le fonctionnement de la machine étudiée, peuvent être déterminées une fois le potentiel vecteur magnétique complexe est déterminé dans les domaines statorique et rotorique.

### III. 10. 1 Expression des différentes grandeurs locales

#### a) Potentiel vecteur magnétique

Le potentiel vecteur magnétique complexe en tout point de coordonnées (x,y) d'un élément fini donné est évalué grâce à la relation (III. 16).

#### b) Composantes et module de l'induction magnétique

Les composantes complexes  $\bar{B}_x$  et  $\bar{B}_y$  de l'induction magnétique complexe  $\bar{B}$ , au niveau de chaque élément fini, peuvent être obtenues directement à partir des composantes du vecteur gradient du potentiel vecteur magnétique complexe (III.17) :

$$\bar{B}_x = + \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \quad (\text{III. 43})$$

$$\bar{B}_y = - \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \quad (\text{III. 44})$$

Le module  $|\bar{B}|$  de l'induction magnétique complexe est constant au niveau de chaque élément et il est défini par :

$$|\bar{B}| = \sqrt{|\bar{B}_x|^2 + |\bar{B}_y|^2} \quad (\text{III. 45})$$

#### c) Energie magnétique élémentaire et globale

L'énergie magnétique emmagasinée par un élément fini peut être évaluée grâce à l'expression (III. 46), soit :

$$W_e = L_u \{ \bar{A}_e^* \}^T v_{eq} [S] \{ \bar{A}_e \} \quad (\text{III. 46})$$

Où  $L_u$  désigne la longueur utile de la machine.

L'énergie magnétique stockée par la structure étudiée est alors la somme des énergies magnétiques stockées par les éléments.

$$W_{mag} = \sum_e W_e \quad (\text{III. 47})$$

### III. 10. 2 Expression des différentes grandeurs globales

#### a) Calcul du flux embrassé par encoche et par phase, de la force contre- électromotrice et de l'impédance par phase

En désignant par  $n_c$  la densité uniforme des conducteurs du bobinage statorique, le flux complexe embrassé par encoche est calculé grâce à la relation (III. 48).

$$\bar{\phi}_{\text{encoche}} = L_u \sum_e \frac{n_c}{3} \sum_{i=1}^3 \bar{A}_{ie} \Delta_e \quad (\text{III. 48})$$

Où  $e$  désigne un élément fini appartenant à l'encoche en question.

Le flux complexe embrassé par phase est alors la différence des flux complexes embrassés par les encoches « aller » et « retour ».

$$\bar{\Psi} = \sum_{\substack{\text{encoches} \\ \text{aller}}} \bar{\phi}_e - \sum_{\substack{\text{encoches} \\ \text{retour}}} \bar{\phi}_e \quad (\text{III. 49})$$

La force contre-électromotrice complexe  $\bar{E}$  est obtenue en effectuant le produit complexe de l'opérateur complexe  $j\omega$  par le flux complexe par phase  $\bar{\Psi}$  :

$$\bar{E} = j\omega \bar{\Psi} \quad (\text{III. 50})$$

L'impédance complexe par phase est définie comme le rapport de la force contre-électromotrice complexe et du courant complexe  $\bar{I}$  :

$$\bar{Z} = j\omega \bar{\Psi} / \bar{I} \quad (\text{III. 51})$$

#### b) Calcul des pertes

Les pertes dans les machines électriques sont de natures diverses. On rencontre les pertes par effet Joule dans le bobinage, les pertes fer statorique et éventuellement rotorique, les pertes par ventilation dans l'entrefer ou par frottements des paliers. Seules les pertes Joule dans les matériaux conducteurs sont évaluées dans le cadre de cette étude. Les autres pertes peuvent être obtenues à partir de formules plus ou moins empiriques ou d'abaques.

Les pertes Joule dans la machine étudiée sont de deux types :

1. Celles dissipées dans les conducteurs du stator;
2. Celles dues aux courants induits dans les matériaux conducteurs du rotor.

Pour une machine  $q$ -phasée, les pertes cuivre dans les enroulements statoriques sont données par :

$$P_{js} = q r_s |\bar{I}|^2 \quad (\text{III. 52})$$

Les pertes Joule dans les matériaux conducteurs du rotor sont évaluées grâce à l'expression (III. 53) :

$$P_{jr} = L_{\sigma} g \omega \sum_e \{ \overline{A_e^*} \}^T \sigma_r [T] \{ \overline{A_e} \} \quad (\text{III. 53})$$

### c) Les puissances

Des grandeurs importantes dans le cahier de charge d'une machine électrique telles les puissances active et réactive absorbées ou transmises peuvent être évaluées grâce aux expressions ci-dessous.

1. La puissance absorbée par la machine :

$$P_{abs} = q \operatorname{Re}(\overline{VI^*}) \quad (\text{III. 54})$$

2. La puissance électromagnétique transmise au rotor et à l'entrefer :

$$P_{Trans} = q \operatorname{Re}(\overline{EI^*}) \quad (\text{III. 55})$$

3. La puissance réactive :

$$P_{Réact} = q \operatorname{Im}(\overline{VI^*}) \quad (\text{III. 56})$$

4. La puissance mécanique, en l'absence de frottements, coïncide avec la puissance utile sur l'arbre. Elle est donnée par la relation suivante :

$$P_{Méc} = P_{Trans} - P_{jr} \quad (\text{III. 57})$$

### d) Couple Electromagnétique

Le couple électromagnétique, développé par la structure étudiée, est déterminé à partir de la puissance électromagnétique transmise à travers l'entrefer, soit :

$$\Gamma = p \frac{P_{Trans}}{\omega} \quad (\text{III. 58})$$

### e) Facteur de Puissance

Le facteur de puissance d'une machine asynchrone est calculé à partir du rapport des puissances active et apparente.

$$\cos(\varphi) = \frac{P_{abs}}{qVI} \quad (\text{III. 59})$$

---

### III. 11 CONCLUSION

Les développements industriels des entraînements électriques à grande vitesse tendent de plus en plus à remplacer les entraînements mécaniques classiques à base de turbines à gaz ou à vapeur. De tels développements ne sont devenus possibles que grâce à l'évolution de l'électronique de puissance et de commande.

Au cours de ce chapitre, les différentes technologies, synchrones ou asynchrones, envisageables en fonction de la puissance et de la vitesse ont été abordées. Ces technologies posent de véritables problèmes pour ne pas dire des challenges. Les domaines spécifiques d'étude sont en effet très nombreux; thermique, mécanique des solides et des fluides, électrotechnique, modélisation, électronique de puissance et de commande, etc.

Sur le plan électromagnétique, l'analyse des moteurs asynchrones reste plus complexe que celle des moteurs synchrones. Cette complexité résulte de la faible diffusion du champ électromagnétique associée à une vitesse de rotation élevée. Une analyse par les modèles éléments finis « pas à pas » dans le temps quoique performante reste très gourmande en temps de calcul surtout s'il s'agit de l'optimisation d'une structure donnée.

Le modèle établi, sur la base d'éléments finis complexes, permet la détermination des performances des moteurs asynchrones rapides en régime permanent. Ce modèle repose sur l'hypothèse que le premier harmonique d'espace est largement prépondérant dans l'entrefer et que le moteur en question est alimenté par un onduleur de tension contrôlé en courant délivrant des tensions sinusoïdales équilibrées afin que le courant présente un seul harmonique de temps. Les équations de la magnétodynamique complexe sont résolues par rapport à des référentiels fixes par rapport au stator et au rotor et la saturation est prise en compte dans un sens moyen. Le couplage des champs électromagnétiques statorique et rotorique est effectué dans l'entrefer grâce à la technique des multiplicateurs de Lagrange en considérant uniquement le fondamental du potentiel vecteur magnétique complexe.

La validation des modèles numériques établis dans ce chapitre et le chapitre précédent fait l'objet du prochain chapitre.

---

---

## REFERNCES

- [1] G. Pasquarella, K. Reichert, « Development of solid rotors for a high speed induction machine with magnetic bearings », *ICEM*, Cambridge, Massachussets, USA, 13-15 August 1990, pp. 464-469.
  - [2] J. Dhers, « Moteurs électriques : une extension rapide de leurs domaines d'utilisation », *RGE* n°3, Mars 1987, pp. 1-10.
  - [3] S. Williamson, « Induction motor modelling using finite elements », *RGE* No. 8/94, Sept. 1994, pp. 1-8.
  - [4] B. Laporte, G. Vinsard, J. C. Mercier, « A computation method for induction motors in steady state », *Mathematics and Computer in Simulation*, Vol. 38, 1995, pp. 369-376.
  - [5] E. I. Carroll, «Quels composants de puissance pour les applications de très forte puissance ? », *Revue ABB*, No. 2/99, pp. 1-9.
  - [6] F. Kleiner, « Electric motors drive turbocompressors », *Hydrocarbon Engineering*, Vol. 5, No. 12, Dec. 2000, pp. 58-60.
  - [7] M. Ahrens, B. Frei-Spreiter, R. Wieser, « Cost-efficient electric high speed drives for gaz compression », *Proceedings of International Pipeline Conference IPC 2000*, Oct. 1-5, 2000 Calgary, Alberta, Canada, pp. 1-7.
  - [8] J. M.Kauffmann, B. Laporte, « Analyse des performances des machines électriques », *RGE*, No. 8/94, Sept. 94, pp. 36-40.
  - [9] J. P. Pouillange, « Moteurs cylindriques à aimants permanents : de bonnes performances aux moyennes et grandes vitesses », *RGE* No. 3, Mars 1987, pp. 62-64.
  - [10] G. Lacroux, «Les aimants permanents », *Ed. Techniques et Documentation* 1989.
  - [11] A. Mailfert, « Machines à réluctance variable », *Techniques de l'Ingénieur* 1986, D550, pp. 1-20.
  - [12] J. Saint-Michel, « Rotor ferromagnétique massif : un moyen pour obtenir de fortes puissances à de grandes vitesses », *RGE* No.3, Mars 1987, pp. 45-47.
  - [13] J. C. Mercier, « Contribution à l'étude par éléments finis du comportement électromagnétique des machines asynchrones rapides », *Thèse de Doctorat*, INPL, Nancy, Septembre 1993.
  - [14] M. E. Zaim, « Contribution à la conception des machines asynchrones à rotor massif », *Thèse d'Etat es Sciences*, ENP d'Alger 1989.
  - [15] M. E. Zaim, « Contribution à l'étude des machines asynchrones à rotor massif rainuré », *Thèse de Docteur-Ingénieur*, INPL 1979.
  - [16] J. P. Bock, « Modélisation et calcul couplé des champs électromagnétiques dans les machines asynchrones en régime transitoire », *Thèse de Doctorat*, INPL, Nancy, Septembre 1996.
-

- 
- [17] C. Barnetche, « Calcul numérique de machines asynchrones en régime transitoire en tenant compte de la saturation magnétique », *Thèse de Doctorat* de l'INPL, Nancy, Octobre 1997.
- [18] Rédaction de la revue ABB «Entraînements électriques de puissance : La révolution de la grande vitesse », *Revue ABB* No. 1/20001, pp. 26-27.
- [19] P. Silvester, R. L. Ferrari, «Finite element for electrical engineer», *Cambridge University Press*, Second Edition 1990.
- [20] M. V. K. Chari, P. P. Silvester, «Finite elements in electrical and magnetic problems», *John Wiley & Sons Ltd*, 1985.
- [21] E. E. Kriezis, T. D. Tsiboukis, S. M. Panas, J. Tegopoulos, «Eddy Currents: Theory and Applications», *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 80, No. 10, October 1992, pp. 1559-1589.
- [22] J. Luomi, A. Niemenmaa, A. Arkkio, «On the use of effective reluctivities in magnetic field analysis of induction motors fed from a sinusoidal voltage source», *International Conference on Electrical Machine ICEM*, Munich 1986, pp. 706-709.
- [23] E. Vassent, G. Meunier, J. C. Sabonnadière, «Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements », *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. 25, No. 4, July 1989, pp. 3064-3066
- [24] Du Terrail, J. C. Sabonnadière, « Nonlinear complex finite elements of electromagnetic field in steady state AC devices », *IEEE Transactions On Magnetics*, Vol. Mag-20, No. 4, July 1984, pp. 549-552.
- [25] B. Laporte, «Etude du comportement d'un matériau ferromagnétique isotrope dans un champ glissant», *RGE*, Tome 83, N°3, Mars 1974.
- [26] B. Laporte, «Enroulements des machines à courant alternatif », Cours non édité, ENSEM, Nancy (France).
- [27] R. Kechroud, R. Ibtouen, O. Touhami "Coupled non-linear complex finite elements analysis of solid rotor induction motor" *International Compumag Society*, Team Workshop and Application Forum, Evian, France, July 6, 2001, pp. 16-17.
- [28] R. Kechroud R. Ibtouen S. Mezani, O. Touhami B. Laporte "Modelling of a slotless permanent magnet machine with motion consideration", *Archives of Electrical Engineering*, index, 351660, ISBN 0004-0746, Vol. XLIX, No. 3-4/2000, pp. 377-393.
- [29] R. Kechroud R. Ibtouen and O. Touhami "The use of the association of the finite element method-Lagrange's method of undetermined multipliers in the dynamic modeling of rotating electrical device", *ICEL'2000. International Conference on Electrotechnics*, Oran (Algeria), November 13-15, 2000.
- [30] P. Alger, « Induction Machines », *Gordon Beach Sciences Publishers* (New York). 1970.
- [31] S. Willimanson, L. H. Lim, M. J. Robinson, « Finite element models for cage induction motor analysis », *IEEE Transactions On Industry Applications*, Vol. 26, No. 6, Nov/Dec 1990, pp. 1007-1017.
-

## **CHAPITRE IV**

# **VALIDATION DES MODELES ELEMENTS FINIS-MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE**

---

## IV. 1 INTRODUCTION

Nous abordons, dans le présent chapitre, l'aspect « validation » des modèles numériques, mis au point dans les chapitres II et III.

Afin de valider le modèle numérique établi au Chapitre II, une maquette d'une machine synchrone à aimants permanents, à induit sans encoches et de faible puissance a été choisie [1]. Les dimensions et les caractéristiques de ce prototype ainsi que le banc d'essai qui permet de relever les performances électromagnétiques sont présentés. Nous nous intéressons plus particulièrement à ses performances tant d'un point de vue quantitatif que qualitatif. Des résultats expérimentaux, obtenus par B.Nogarede et Al. [1] à l'aide de ce dispositif, sont confrontés à ceux obtenus à l'aide du modèle numérique établi au Chapitre II et à ceux du modèle analytique que nous développons dans ce chapitre.

La validation du modèle numérique établi au Chapitre III est effectuée grâce à un prototype de moteur asynchrone à rotor en acier massif lisse de faible puissance [2]. Les dimensions et les caractéristiques de ce prototype sont également présentées dans la seconde partie de ce Chapitre. Les résultats expérimentaux sont comparés à ceux obtenus à l'aide du modèle numérique établi au Chapitre III et à ceux du modèle basé sur les éléments finis dit « à rotor bloqué ».

## IV. 2 PROTOTYPE DE LA MACHINE SYNCHRONE A AIMANTS PERMANENTS ETUDIEE

Le prototype en question et son alimentation ainsi que le banc d'essai, ayant permis de relever l'induction magnétique, la force électromotrice et le couple électromagnétique, ont été réalisés au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique Industrielle de Toulouse (LEEIT), France [1].

### IV. 2. 1 Description de la maquette

Les diverses parties constitutives de la structure, décrites ci-dessus, sont repérées sur le schéma simplifié de la figure (IV. 1). Les dimensions principales de cette structure sont indiquées sur la figure suivante (Fig. IV. 2). La longueur de la machine suivant son axe est de 40mm.

Le prototype étudié comporte comme la plupart des machines électriques deux parties bien distinctes :

- Une partie fixe, à savoir un stator sans encoches et donc lisse;
  - Une partie mobile, à savoir un rotor portant des aimants permanents.
-

### IV. 2. 1. 1 Constitution du Rotor

Le rotor de la machine est constitué d'un empilement de tôles circulaires, formant la culasse intérieure de la structure magnétique. Sur ce rotor sont disposés les aimants inducteurs (Fig. IV.1). Ces aimants, taillés en forme de tuiles de 10 mm d'épaisseur assemblées jointivement, sont du type Samarium-Cobalt. La valeur typique de leur aimantation, donnée par le constructeur, est de 0,9T. Chaque pôle est réalisé au moyen de deux barreaux juxtaposés et aimantés parallèlement à leurs axe de symétrie. La culasse rotorique est suffisamment surdimensionnée afin d'éviter la saturation du matériau magnétique.

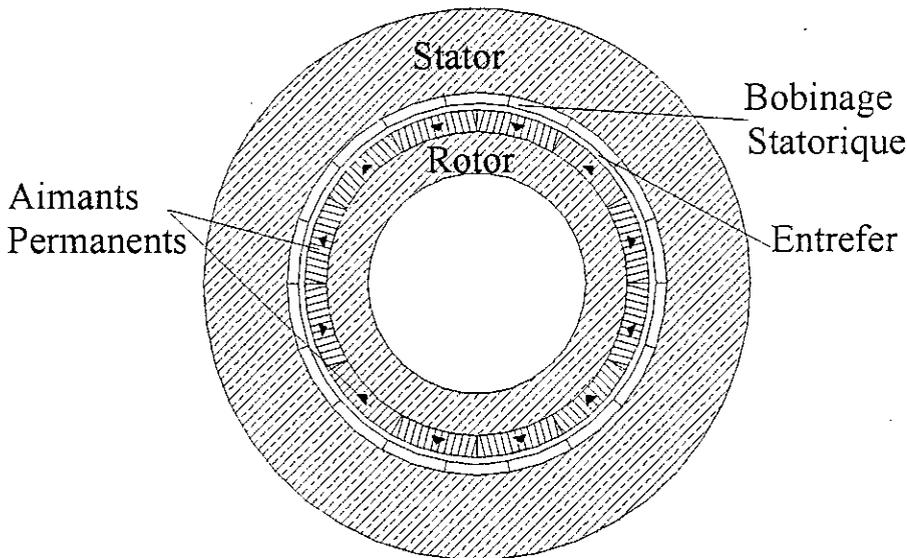


Fig. IV. 1 Prototype de la machine synchrone à aimants permanents étudiée

### IV. 2. 1. 2 Bobinage statorique

Le bobinage statorique est du type « Gramme » dit également en « anneau » où la tenue mécanique des conducteurs est assurée intrinsèquement. Ce bobinage est composé de 36 bobines élémentaires enroulées autour de la culasse statorique. Chacune de ces bobines est elle-même subdivisée en deux couches superposées comportant 23 spires. Chaque bobine est guidée à l'extérieur de la zone active par le biais d'encoches pratiquées dans la carcasse. Les différentes bobines sont indépendantes du point de vue électrique et sont accessibles à partir de la plaque à bornes disposée à cet effet contre un des flasques de la machine.

Cette structure conduit à un entrefer magnétique parfaitement lisse à l'intérieur duquel les conducteurs, de 1 mm de diamètre, sont jointifs et forment une couche homogène de 5 mm d'épaisseur.

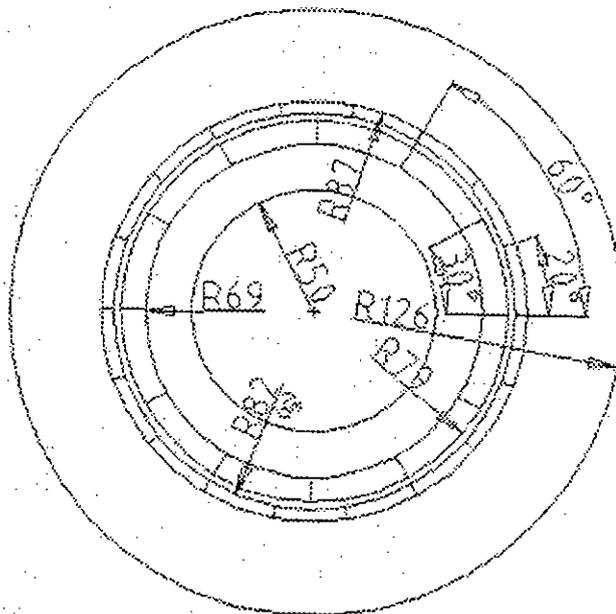


Fig. IV. 2 Dimensions principales de la machine synchrone à aimants permanents étudiée

#### IV. 2. 2 Génération des courants d'alimentation

La machine étudiée est alimentée à partir d'un onduleur triphasé, contrôlé en courant, à base de transistors et à commande de modulation de largeur d'impulsion (MLI). A partir de l'information de position délivrée par un capteur de position de haute résolution (resolver), un dispositif particulier génère les références de courants de l'onduleur. Ce système converti, dans un premier temps, l'angle de la position mécanique  $\theta_m$ , en angle électrique  $\theta_e$ . Pour ce faire, si  $p$  désigne le nombre de paires de pôles de la machine, il effectue numériquement sur (13 bits) l'opération :

$$\theta_e = p\theta_m + \psi \text{ modulo}[2\pi]$$

L'angle  $\psi$  permet de régler le calage des courants par rapport aux forces électromotrices. A partir de l'angle  $\theta_e$ , un ensemble de mémoires numériques est adressé. Le contenu de celles-ci définit la forme d'onde des courants générés. Ces mémoires étant programmables, on peut redéfinir leur contenu de façon à disposer d'une alimentation de type rectangulaire ou sinusoïdale. La dernière étape consiste à convertir l'information numérique (codée sur 10 bits) délivrée par les mémoires, en niveaux analogiques représentant l'amplitude instantanée des courants de références. Cette association onduleur de tension contrôlé en courant-machine à aimants permet d'atteindre d'excellentes performances en régime dynamique, limitées uniquement par la constante de temps électrique de l'induit et par la technique de contrôle employée. Ce dispositif permet, par l'intermédiaire de sa boucle d'asservissement, de contrôler les courants en amplitude et en phase comme il peut permettre d'imposer leurs formes d'ondes. Il donne ainsi l'avantage de choisir la forme d'onde du courant la plus adéquate en fonction des caractéristiques de la machine. Le choix de ce type d'alimentation

constitue la solution la plus avantageuse pour les applications de petite et moyenne puissances.

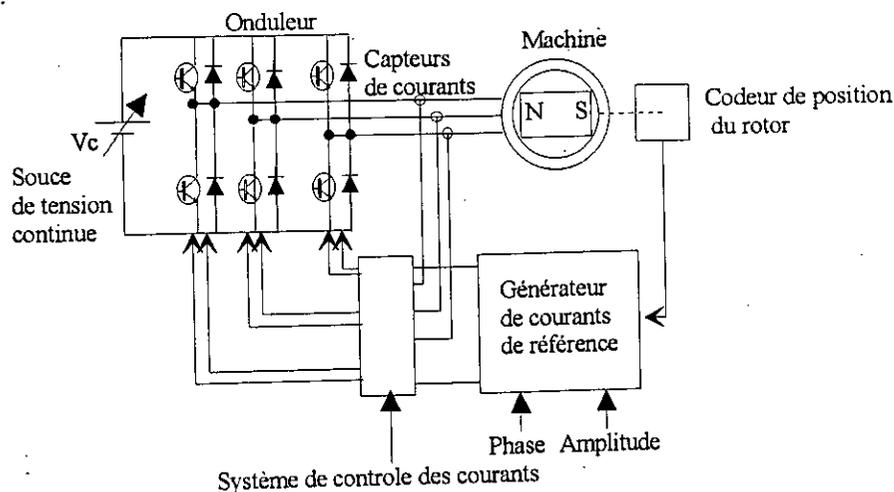


Fig. IV. 3 Onduleur de tension contrôlé en courant

### IV. 2. 3 Banc de mesure du couple

Le banc de mesure de couple est un banc spécifique développé par l'équipe du Laboratoire de Toulouse dans le but d'étudier expérimentalement le couple des machines électriques, tant d'un point de vue quantitatif que qualitatif [1]. Ce dispositif est piloté par micro-ordinateur. Il permet de mesurer et d'enregistrer le couple délivré par la machine en essai, en fonction de la position angulaire de son rotor. Les essais peuvent correspondre à différents types d'alimentation (courants continus, synchrones de la position, etc.), suivant le type de grandeur étudiée (couple statique, couple résultant, etc.). Le dispositif d'alimentation est intégré au système.

Le principe de mesures est le suivant :

le rotor de la machine testée est entraîné à très basse vitesse à l'aide d'une motorisation auxiliaire. En mesurant, à l'aide d'une jauge de force, la réaction du stator sur le châssis supportant le dispositif d'entraînement, on en déduit, connaissant le bras de levier, le couple au niveau de l'arbre de la machine. Par ailleurs un codeur optique, solidaire du système d'entraînement, permet de lire la position du rotor. La résolution de ce codeur, relativement élevée (6144 points par tour de mandrin d'entraînement) assure une précision largement suffisante à l'échelle d'un pas polaire, compte tenu du nombre de paires de pôles de la machine étudiée ( $p = 3$  correspond à 2048 points par période électrique). Le micro-ordinateur est donc en mesure d'enregistrer simultanément l'angle correspondant à la position du rotor et la valeur du couple correspondante.

Un essai à courants nuls correspond au relevé du couple de détente développé par la machine étudiée. Dans la mesure où celle-ci ne fait intervenir aucun effet de réductance, cet essai ne peut, dans ce cas, mettre en évidence que le couple dû aux frottements. Ces frottements sont extrêmement faibles aux vitesses et fréquences mises en jeu lors des essais. Si d'autre part, la machine est alimentée par des courants continus, les enregistrements obtenus correspondent aux courbes du couple statique de la machine, grandeur bien évidemment alternative. Si enfin les courants d'alimentation sont des fonctions de la position du rotor, on peut accéder à la forme d'onde du couple utile délivré par la machine.

### IV. 3 MODELISATION ANALYTIQUE DE LA STRUCTURE ETUDIEE

Nous présentons, dans cette partie, une méthode de calcul analytique d'une machine synchrone à aimants permanents à induit sans encoches dont la structure relativement simple se prête à ce type de calcul. Le calcul en deux dimensions que nous présentons s'applique aux structures électromagnétiques susceptibles d'être subdivisées en un certain nombre de zones concentriques, d'épaisseur et de perméabilité constantes, dans lesquelles sont disposés les matériaux magnétiques et où interviennent les sources du champ; aimants ou courants. Le prototype étudié répond tout fait à cette définition. Bien qu'il soit tout à fait possible de tenir compte des culasses de perméabilité magnétique de valeur constante et finie, elles sont, dans ce qui suit, supposées de perméabilités infinies afin de simplifier la modélisation en diminuant de deux le nombre de zones à prendre en considération.

Dans le même esprit, le bobinage stator n'est décrit ici que par une seule zone concentrique et les conductivités électriques sont considérées nulles que ce soit au stator ou au rotor. Quant aux aimants à base de Samarium-Cobalt, ils sont représentés par leur modèle ampérien [3-11] et leur perméabilité magnétique est considérée égale à celle du vide [12]. On définit ainsi des distributions superficielles de courants périodiques sur l'ensemble de la machine, ce qui nous permet de restreindre l'étude sur un pas polaire.

Dans le cadre de ces hypothèses, il est commode de traiter le problème en utilisant le potentiel vecteur magnétique. En effet, ce dernier ne présente qu'une seule composante  $A(r,\theta)$  suivant l'axe Oz confondue avec l'axe de rotation de la machine. Le comportement électromagnétique de la structure étudiée est alors gouverné par l'équation de Poisson.

Au rotor, l'axe origine est l'axe interpolaire d'une paire de pôles Nord-Sud. Du fait de la périodicité géométrique et magnétique du problème traité, l'étude est limitée à un pas polaire où on distingue les zones concentriques suivantes (Fig. IV. 4) :

- Une zone (1), contenant les aimants et comprise entre les rayons  $r_1$  et  $r_2$ .
- Une zone (2), représentant l'entrefer magnétique et comprise entre les rayons  $r_2$  et  $r_4$ .

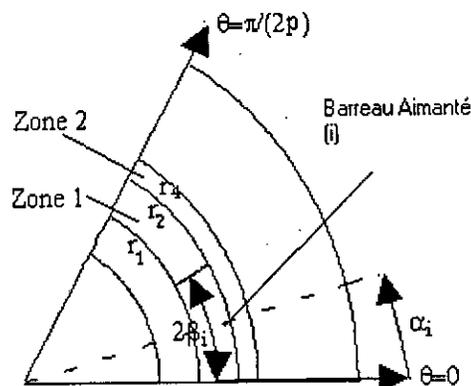


Fig. IV. 4 Domaine d'étude sur un pas polaire utilisé dans la modélisation analytique

Comme les aimants utilisés sont composés de barreaux élémentaires, aimantés dans une

direction radiale parallèle, les densités superficielles de courant, équivalentes à un barreau donné  $i$  (Fig. IV. 4) dont l'ouverture est égale  $2\beta_i$  et dont l'axe médian est repéré par  $\alpha_i$ , ont les expressions suivantes :

$$\mu_0 j_s = \begin{cases} + M \cos(\beta_i) & \text{pour } \theta = \alpha_i + \beta_i \\ - M \cos(\beta_i) & \text{pour } \theta = \alpha_i - \beta_i \end{cases} \quad (\text{IV. 1})$$

sur les flancs radiaux et,

$$\mu_0 j_s = \begin{cases} + M \sin(\theta - \alpha_i) & \text{pour } r = r_2 \\ - M \sin(\theta - \alpha_i) & \text{pour } r = r_1 \end{cases} \quad (\text{IV. 2})$$

sur les flanc azimutaux.

De plus, nous supposons que l'aimantation  $M$  est à divergence nulle [13]. Ainsi,  $M$  varie en  $1/r$  soit :

$$M = \frac{(r_1 + r_2)}{2r} M_m \quad (\text{IV. 3})$$

où  $M$  est la valeur de l'aimantation au milieu du barreau  $i$ .

### IV. 3. 1 Potentiel vecteur magnétique dû aux densités de courants superficielles situées sur les flancs radiaux

Les distributions de courants superficielles situées sur les flancs radiaux des barreaux sont équivalentes, au sens mathématique des distributions, à des distributions volumiques de courants [13]. Ces dernières étant périodiques, nous pouvons facilement les développer en série de Fourier. Pour l'ensemble des barreaux sous un pôle soit  $n_b$ , nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\mu_0 J = \sum_{i=1}^{n_b} \sum_k \frac{s_k^i}{r^2} \sin((2k+1)p(\theta - \alpha_i)) \quad (\text{IV. 4})$$

Avec:

$$s_k^i = \frac{2p}{\pi} M_m (r_1 + r_2) \cos(\beta_i) \sin((2k+1)p\beta_i)$$

Dans la zone (1), le potentiel vecteur  $A_1$  est solution de l'équation de Poisson. Sa dérivée normale est nulle en  $r = r_1$ . L'expression du potentiel vecteur  $A_1$  dans cette zone s'écrit

ainsi :

$$A_1(r,\theta) = \sum_{i=1}^{nb} \sum_k \left( 2b_k^i \cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r}{r_1} \right) \right) + c_k^i \right) \sin((2k+1)p(\theta - \alpha_i)) \quad (IV.5)$$

Avec :

$$c_k^i = \frac{s_k^i}{(2k+1)^2 p^2}$$

Dans la zone (2), le potentiel vecteur est solution de l'équation de Laplace. Sa dérivée normale est nulle en  $r = r_4$ . L'expression du potentiel  $A_2$  dans cette zone s'écrit ainsi :

$$A_2(r,\theta) = \sum_{i=1}^{nb} \sum_k \left( 2a_k^i \cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r}{r_4} \right) \right) \right) \sin((2k+1)p(\theta - \alpha_i)) \quad (IV.6)$$

La continuité du potentiel vecteur magnétique et de sa dérivée normale sur l'interface séparant les zones (1) et (2) permet de déterminer les constantes  $a_k^i$  et  $b_k^i$  soit :

$$a_k^i = + \frac{c_k^i}{2} \frac{\sinh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right)}{\sinh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_4}{r_1} \right) \right)} \quad (IV.7)$$

$$b_k^i = - \frac{c_k^i}{2} \frac{\sinh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_4}{r_2} \right) \right)}{\sinh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_4}{r_1} \right) \right)} \quad (IV.8)$$

### IV. 3. 2 Potentiel vecteur magnétique dû aux densités de courants superficielles situées sur les flancs azimutaux

Les densités de courants superficielles, situées sur les flancs azimutaux des barreaux aimantés, définissent des distributions périodiques de courants que nous pouvons, également, développer en série de Fourier. Pour  $n_b$  barreaux, sous un pôle, nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\mu_{0j_s} = \sum_{i=1}^{nb} \sum_k \mu_{0j_{sk}}^i \sin((2k+1)p(\theta - \alpha_i)) \quad (IV.9)$$

Avec :

$$\mu_{0j_{sk}}^i = \begin{cases} \mu_{0j_{s1k}}^i \\ \mu_{0j_{s2k}}^i \end{cases}$$

$$\mu_{0j_{s1k}}^i = \begin{cases} -\frac{2pM(r_1)}{\pi} \left[ \frac{\sin(((2k+1)p-1)\beta_i)}{(2k+1)p-1} - \frac{\sin(((2k+1)p+1)\beta_i)}{(2k+1)p+1} \right] & \text{si } (2k+1)p \neq 1 \\ -\frac{2pM(r_1)}{\pi} \left[ \beta_i - \frac{\sin(2\beta_i)}{2} \right] & \text{si } (2k+1)p = 1 \end{cases}$$

$$\mu_{0j_{s2k}}^i = \begin{cases} +\frac{2pM(r_2)}{\pi} \left[ \frac{\sin(((2k+1)p-1)\beta_i)}{(2k+1)p-1} - \frac{\sin(((2k+1)p+1)\beta_i)}{(2k+1)p+1} \right] & \text{si } (2k+1)p \neq 1 \\ +\frac{2pM(r_2)}{\pi} \left[ \beta_i - \frac{\sin(2\beta_i)}{2} \right] & \text{si } (2k+1)p = 1 \end{cases}$$

#### IV. 3. 2. 1 Potentiel dû aux densités de courant situées en $r_1$

Que ce soit dans la zone (1) ou dans la zone (2), le potentiel vecteur  $A_1$  est solution de l'équation de Laplace. Sa dérivée normale est nulle en  $r = r_4$ . L'expression du potentiel vecteur est identique dans les zones (1) et (2) et s'écrit ainsi :

$$A_{1,2}(r,\theta) = \sum_{i=1}^{nb} \sum_k \left( 2d_k^i \cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r}{r_4} \right) \right) \right) \sin((2k+1)p(\theta - \alpha_i)) \quad (IV.10)$$

Avec :

$$d_k^i = -\frac{\mu_{0j_{s1k}}^i}{2(2k+1)p} \frac{r_1}{\sinh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_1}{r_4} \right) \right)}$$

#### IV. 3. 2. 2 Potentiel dû aux densités de courants situés en $r_2$

Les potentiels vecteurs  $A_1$  et  $A_2$  des zones (1) et (2) sont, dans ce cas, solutions de l'équation de Laplace. Leurs dérivées normales étant nulles respectivement en  $r = r_1$  et en  $r = r_4$ , leurs expressions sont données par :

$$A_1(r,\theta) = \sum_{i=1}^{nb} \sum_k \left( 2e_k^i \cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r}{r_1} \right) \right) \right) \sin((2k+1)p(\theta - \alpha_i)) \quad (IV.11)$$

$$A_2(r, \theta) = \sum_{i=1}^{nb} \sum_k \left( 2f_k^i \cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r}{r_4} \right) \right) \right) \sin \left( (2k+1)p(\theta - \alpha_i) \right) \quad (IV.12)$$

Les expressions des coefficients  $e_k^i$  et  $f_k^i$ , obtenues en imposant les conditions de passage en  $r = r_2$  entre les zones (1) et (2), sont données par :

$$e_k^i = + \frac{\mu_0 j_{s2k} r_2}{(2k+1)p} \frac{\cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_4}{r_2} \right) \right)}{\sinh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_4}{r_1} \right) \right)} \quad (IV.13)$$

$$f_k^i = + \frac{\mu_0 j_{s2k} r_2}{(2k+1)p} \frac{\cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \right)}{\sinh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_4}{r_1} \right) \right)} \quad (IV.14)$$

La connaissance du potentiel vecteur dans les différentes zones du domaine d'étude permet d'accéder aux grandeurs électromagnétiques caractérisant le fonctionnement de la machine étudiée, telles que : induction, flux et couple. Nous nous intéressons en particulier à la composante radiale de l'induction magnétique à vide à la surface interne du bobinage statorique (Fig. IV. 2) ; c'est à dire au niveau rayon  $r = r_3$ . L'expression de cette induction s'obtient par dérivation du potentiel vecteur de la zone (2) soit :

$$B_2(r_3, \theta) = \sum_{i=1}^{nb} \sum_k \left( \frac{2(2k+1)p}{r_3} (a_k^i + d_k^i + f_k^i) \cosh \left( (2k+1)p \log \left( \frac{r_3}{r_4} \right) \right) \right) \cos \left( (2k+1)p(\theta - \alpha_i) \right) \quad (IV.15)$$

Nous pouvons aussi déterminer les forces électromotrices  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) induites aux bornes des phases du bobinage de l'induit en dérivant, par rapport au temps, les flux  $\Psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) couplés à ces trois phases soit :

$$e_i(t) = - \frac{\partial \Psi_i(t)}{\partial t} \quad (IV.16)$$

Le couple électromagnétique instantané  $\Gamma$ , développé par la structure étudiée, est calculé en effectuant le rapport entre la puissance électromagnétique  $P_{em}$  et la vitesse de rotation mécanique  $\Omega$  soit :

$$\Gamma(t) = \frac{P_{em}(t)}{\Omega} \quad (IV.17)$$

---

## IV. 4 VALIDATION DES MODELES NUMERIQUES ET ANALYTIQUE

En vue de valider les modèles numérique et analytique, dans le cas du prototype étudié sous les hypothèses simplificatrices adoptées, les résultats obtenus à l'aide de ces deux modèles sont comparés avec les résultats expérimentaux [1]. Le prototype hexapolaire expérimentale est celui décrit par la Fig. IV. 1 dont les dimensions géométriques sont indiquées sur la Fig. IV. 2.

Les résultats obtenus, à l'aide du modèle numérique, et présentés ci-dessous ont été obtenus à l'aide d'un maillage comprenant un pôle du prototype étudié composé de 3600 nœuds. Les calculs des séries de Fourier intervenant dans le modèle analytique ont été limités au rang  $k = 21$  pour assurer leurs convergences d'une part et en raison du contenu harmonique de la forme d'onde de l'induction magnétique d'autre part.

### IV. 4. 1 Etude à vide

La répartition de l'induction, due aux aimants, au niveau du rayon intérieur du bobinage statorique c'est à dire sur le rayon  $r_3 = 82$  mm (Fig. IV. 5 et Fig. IV. 6 ), montre une bonne concordance entre les résultats obtenus numériquement, analytiquement et expérimentalement tant sur le plan qualitatif que quantitatif. Ces résultats montrent la validité de la modélisation proposée.

Les faibles écarts entre les résultats obtenus numériquement et analytiquement sont dus au fait que nous avons supposé que l'aimantation est à divergence nulle lors de la résolution analytique. La forme d'onde particulière de cette onde est la conséquence de la réalisation de l'inducteur au moyen de deux barreaux aimantés parallèlement à leurs axes et juxtaposés [1].

---

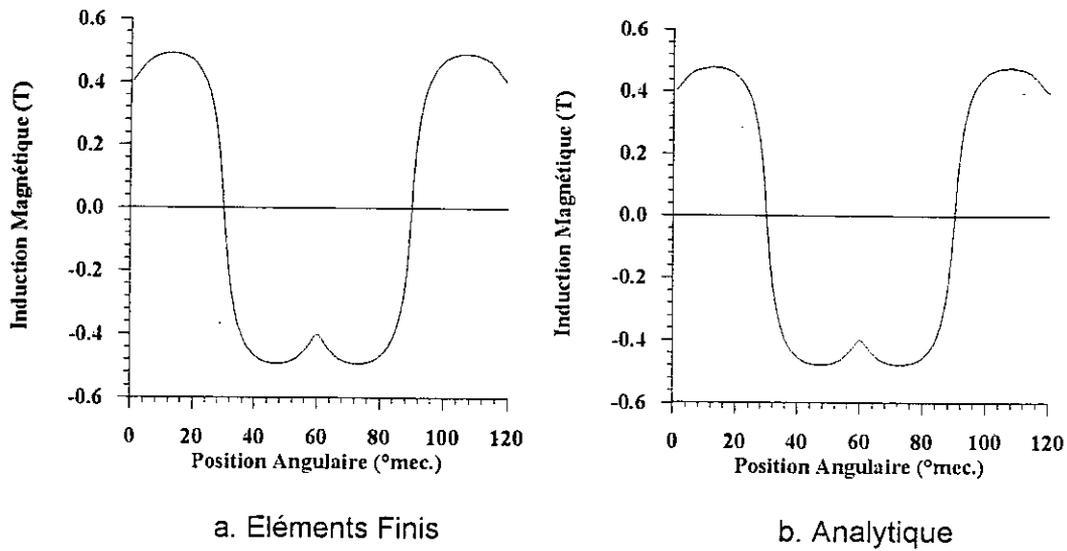


Fig. IV. 5 Répartitions de l'induction magnétique radiale dues aux aimants au niveau du rayon  $r_3 = 82$  mm obtenus à l'aide des méthodes analytique et des éléments finis associés aux multiplicateurs de Lagrange

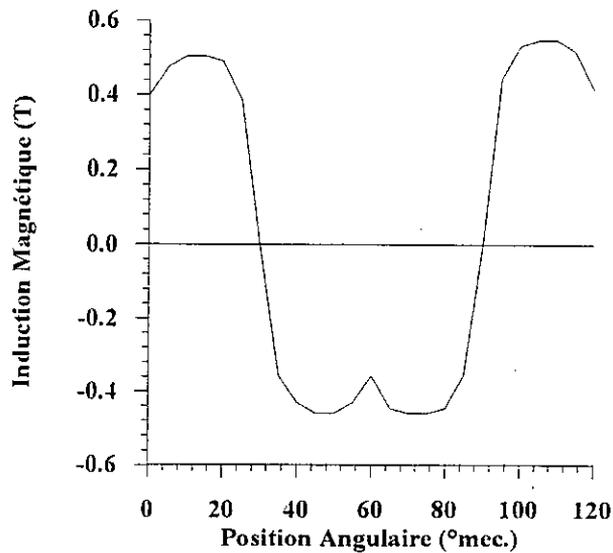


Fig. IV. 6 Répartition de l'induction magnétique radiale due aux aimants au niveau du rayon  $r_3 = 82$  mm, obtenue expérimentalement [1]

Pour différentes positions du stator par rapport au rotor, la Fig. IV. 7 montre la répartition de l'induction magnétique radiale au niveau du rayon  $r_3$ . Ces répartitions ont été obtenues en gardant le maillage du domaine d'étude fixe. Pour n'importe quelle position du stator par rapport au rotor, la répartition de l'induction radiale s'obtient à partir de celle de la position initiale par une simple translation ce qui était d'ailleurs prévisible vu l'uniformité du circuit magnétique du prototype étudié.

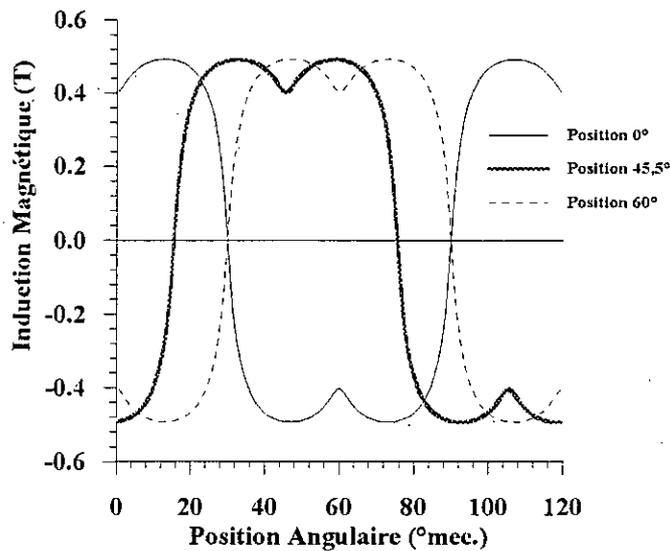


Fig. IV. 7 Répartitions de l'induction magnétique radiale, dues aux aimants au niveau du rayon  $r_3 = 82$  mm, obtenues à l'aide de la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange pour différentes positions du stator par rapport au rotor

Les figures IV. 8 et IV. 9 représentent les cartes de champ obtenues pour différentes positions du stator par rapport au rotor. Elles montrent notamment que les lignes de champ magnétique au rotor sont fixes alors que celles au stator subissent une rotation correspondant au décalage imposé au stator. La discontinuité des lignes de champ pour des positions particulières du stator par rapport au rotor s'explique par le fait que dans la technique utilisée, les champs magnétiques au stator et au rotor sont indépendants. En effet, ces champs ne sont liés que par les contraintes d'interface.

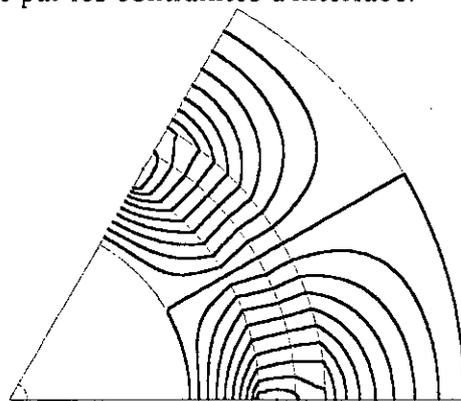


Fig. IV. 8 Carte des lignes de champ dues aux aimants pour la position initiale du stator par rapport au rotor

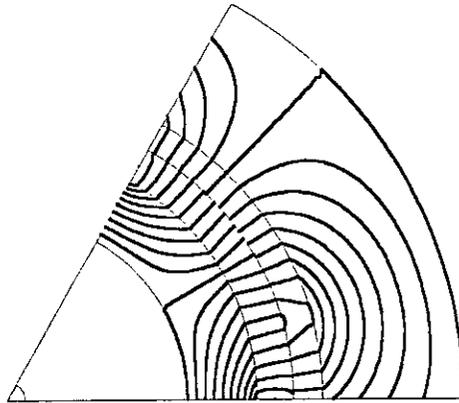
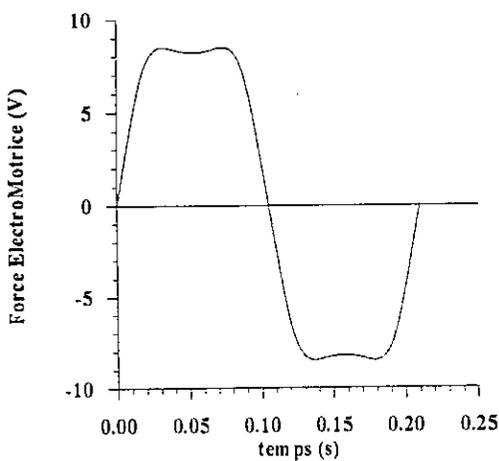
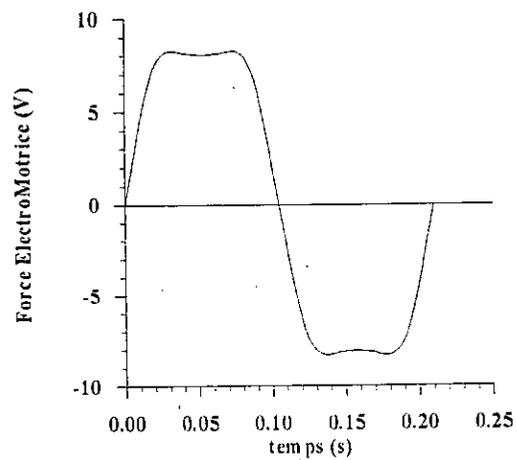


Fig. IV. 9 Carte des lignes de champ dues aux aimants pour une position du stator décalée de  $15,5^\circ$  par rapport au rotor

Les figures IV. 10 et IV. 11 représentent la force électromotrice aux bornes d'une phase du bobinage triphasé statorique. L'allure de cette f.e.m. est directement liée à la forme de l'induction délivrée par l'inducteur et à la répartition des conducteurs. La concordance des résultats obtenus numériquement, analytiquement et expérimentalement est bonne tant sur le plan qualitatif que quantitatif.



a. Eléments Finis



b. Analytique

Fig. IV. 10 Force électromotrice aux bornes d'une phase obtenue à l'aide de la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange et de la méthode analytique

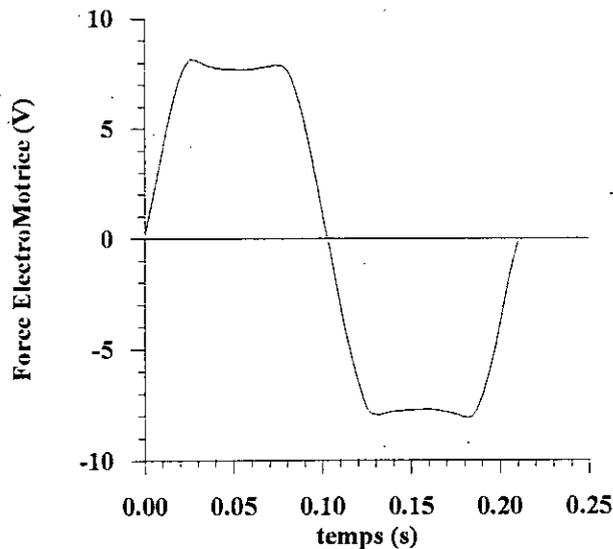


Fig. IV. 11 Force électromotrice aux bornes d'une phase obtenue expérimentalement

#### IV. 4. 2 Etude en charge

L'induit étant alimenté par un système triphasé de courants sinusoïdaux, les figures IV.12 et IV.13, représentant le couple développé par le prototype étudié. Elles montrent une nouvelle fois la bonne concordance entre les résultats obtenus numériquement, analytiquement et expérimentalement tant sur le plan qualitatif que quantitatif. Une légère différence existe cependant entre les résultats obtenus avec la méthode des éléments finis et ceux issus de la méthode analytique. Cette différence est due, comme cela a été signalé plus haut, au fait que la divergence de l'aimantation est nulle au niveau du modèle analytique. Il est à signaler que le couple développé par le prototype étudié présente des ondulations relativement importantes qui sont liées directement à la structure du rotor. L'analyse harmonique [1] du signal de la figure IV. 13 montre que ce signal est riche en harmoniques. En effet, en plus des raies de rang 6 et 12 dont la présence est prévisible théoriquement, il existe des raies de rang impairs 1, 3, 5, 7, 9 et 11 dont les amplitudes sont respectivement égales à 0,0176 N.m, 0,0066 N.m, 0,0088 N.m, 0,0132 N.m, 0,0033 N.m et à 0,0044 N.m et des harmoniques de rangs pairs 2, 4, 8, 10 dont les amplitudes sont respectivement égales à 0,024 N.m, 0,0044 N.m, 0,0044 N.m et à 0,0026 N.m. Ce résultat est dû d'une part, à la dispersion au niveau de l'aimantation des blocs constituant les pôles qui présentent des dissymétries et, d'autre part, à la forme d'onde des courants statoriques qui n'est pas parfaitement sinusoïdale. Ceci explique la dissymétrie des formes d'onde de l'induction (Fig. IV. 6) et de la f.e.m. (IV. 11) relevées expérimentalement. Par ailleurs, Les amplitudes des harmoniques de rang 6 et 12 sont quant à elles égales à 0,196 N.m et à 0,024 N.m.

Par contre, l'analyse harmonique des formes d'onde du couple électromagnétique obtenues à l'aide des modèles numérique et analytique ne font intervenir que des harmoniques de rangs multiple de 6 principalement de rang 6 et 12. Les amplitudes des harmoniques de rang 6 et 12 du signal de la Fig. IV. 12.a sont respectivement égales à 0,184 N.m et à 0,029

N.m. ce qui correspond à des erreurs absolues relatives respectivement égales à 6,12% et à 20,83%.

Quant au signal de la Fig. IV. 12.b, l'analyse harmonique montre que les amplitudes des raies de rangs 6 et 12 sont respectivement égales à 0,194 N.m et à 0,014 N.m ce qui correspond à des erreurs absolues relatives respectivement égales à 1,02% et à 41,66%.

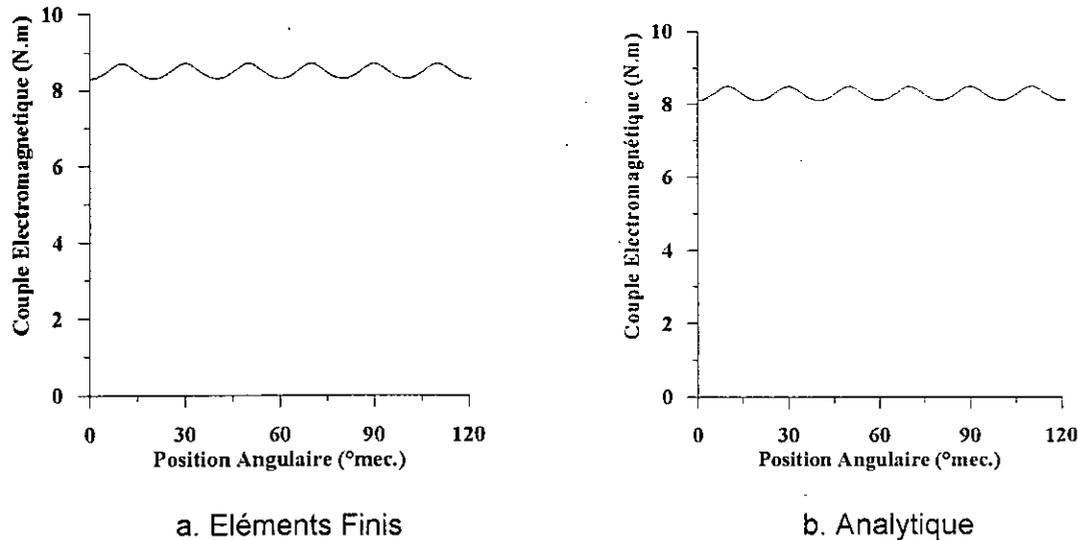


Fig. IV. 12 Couple instantané développé par le prototype, étudié obtenu à l'aide de la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange et de la méthode analytique

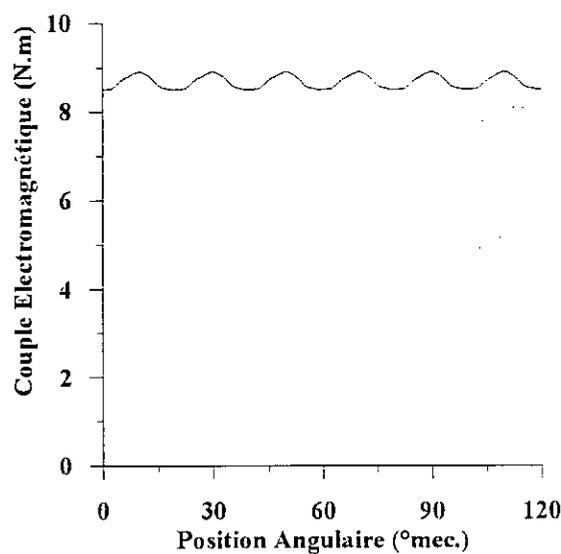


Fig. IV. 13 Couple instantané développé par le prototype étudié obtenu expérimentalement

### IV. 4. 3 Etude en considérant uniquement le fondamental d'espace du potentiel vecteur magnétique

L'analyse électromagnétique, à l'aide du modèle numérique développé et appliqué au prototype étudié en considérant uniquement le fondamental du potentiel vecteur magnétique dans le couplage des champs électromagnétiques statorique et rotorique, permet la détermination des grandeurs électromagnétiques moyennes en adoptant des pas de temps plus grands que ceux adoptés en considérant l'ensemble des harmoniques. Cependant, cette analyse ne peut rendre compte des effets des harmoniques d'ordre supérieur.

La Fig. IV. 14 représente la forme d'onde de la force électromotrice induite dans une phase de la structure étudiée obtenue à l'aide des modèles numérique et analytique. Elle montre une très bonne concordance tant du point qualitatif (forme d'onde sinusoïdale ce qui est prévisible) que quantitatif des résultats obtenus à l'aide de ces modèles. Les amplitudes maximales de la f.e.m. obtenues sont égales à 9,97 V et à 9,74 V ce qui correspond à une erreur relative absolue de 2,3%. Le calcul numérique de l'amplitude du fondamental de la f.e.m, relevée expérimentalement (Fig. IV. 11), montre qu'elle est égale à 9,31 V. L'erreur relative absolue des modèles numérique et analytique est égale ainsi à 7,1% et à 4,61%.

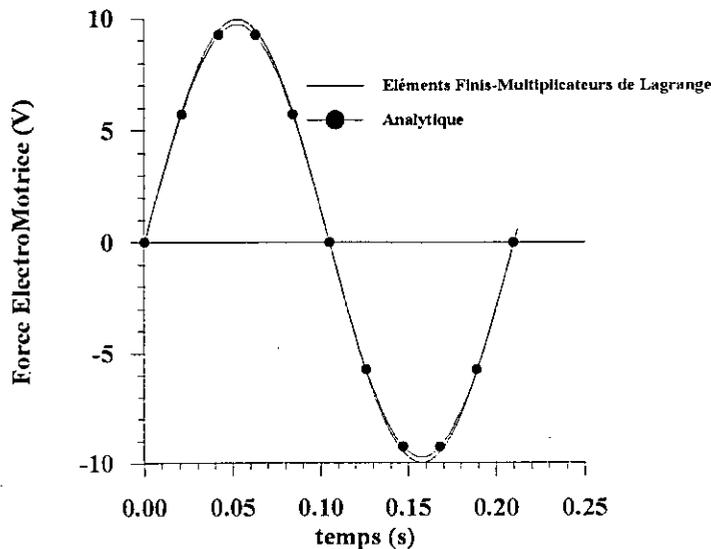


Fig. IV. 14 Force électromotrice aux bornes d'une phase obtenue à l'aide de la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange et de la méthode analytique (Seul le fondamental d'espace du potentiel vecteur est pris en considération)

La Fig. IV. 15 représente la forme d'onde du couple électromagnétique développé par le prototype étudié obtenue également à l'aide des modèles numérique et analytique. Elle montre une très bonne concordance entre les résultats obtenus à l'aide de ces modèles tant du point de vue qualitatif (couple constant ce qui était prévisible) que quantitatif. Les valeurs du couple obtenues à l'aide des modèles numérique et analytique sont respectivement égaux à 8,49 N.m et à 8,28 N.m. Ce qui représente une erreur relative absolue de 2,47%. Ces valeurs correspondent aux valeurs moyennes des formes d'ondes du couple

électromagnétiques des figures IV. 12a et IV. 12b. Le calcul numérique de la valeur moyenne du couple électromagnétique relevé expérimentalement (Fig. IV. 13) montre qu'elle est égale à 8,68 N.m. L'erreur relative absolue des modèles numérique et analytique est ainsi respectivement égale à 2,19% et à 4,6%.

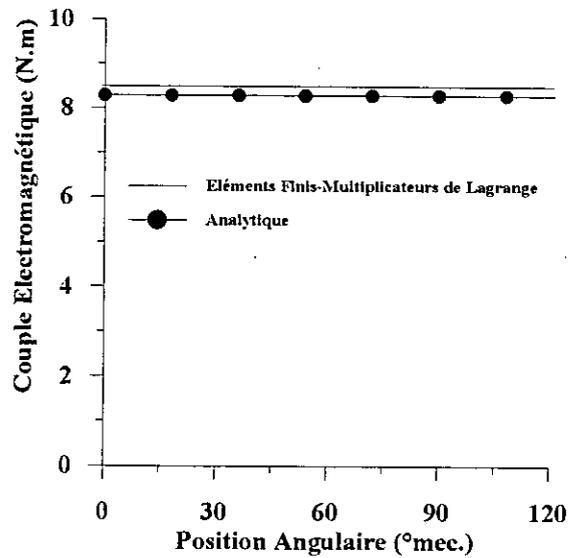


Fig. IV. 15 Couple instantané développé par le prototype étudié obtenu à l'aide de la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange et de la méthode analytique (seul le fondamental d'espace du potentiel vecteur est pris en considération)

## IV. 5 VALIDATION DU MODELE ELEMENTS FINIS COMPLEXE UTILISANT LE COUPLAGE AVEC LE PREMIER HARMONIQUE D'ESPACE

### IV. 5. 1 PROTOTYPE DE LA MACHINE ASYNCHRONE A ROTOR MASSIF LISSE UTILISE

Le stator du prototype utilisé est de forme cylindrique (Fig. IV. 16). A l'origine, Il est conçu pour un moteur asynchrone triphasé classique à cage d'écureuil commercialisé par ELECTRO-INDUSTRIES à Fréha (Azazga). La plaque signalétique portent les caractéristiques suivantes : 2,2 kW ; 220/380 V ; 9/5,2 A ; 1410 tr/mn ; 50Hz ;  $\cos(\phi) = 0,8$ . Le stator comporte 36 encoches, 4 pôles et 37 conducteurs par encoche.

Les principales dimensions sont:

- longueur du noyau : 110 mm ;
- diamètre externe : 145mm ;
- diamètre interne : 88,50 mm.

La résistance par phase du bobinage statorique, mesurée [2] à 75°C, est égale à 3,4  $\Omega$ . La mesure de la réactance de fuite de l'enroulement statorique est délicate à effectuer étant donné qu'elle tient compte des flux de fuite dus, aux têtes de bobines, aux dents et aux harmoniques d'ordre supérieur. Un essai homopolaire a permis [2] de l'évaluer à 10  $\Omega$  sous une fréquence de 50 Hz.

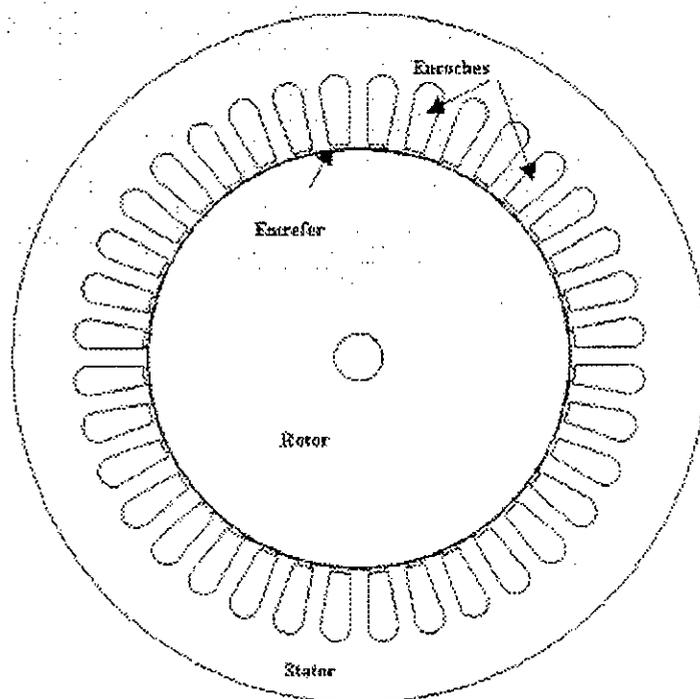


Fig. IV. 16 Prototype de la machine asynchrone à rotor massif lisse étudiée

Le rotor est un cylindre homogène en acier XC18 dont la longueur et le diamètre sont égaux respectivement à 110 mm et à 87,70 mm. La largeur de l'entrefer du prototype étudiée est donc égale à 0,4 mm. La caractéristique magnétique de l'acier rotorique (Fig. IV. 17) a été relevée au Laboratoire de machines électriques de l'ENP par [2] grâce à deux perméamètres d'Illiovisi type C et type K.

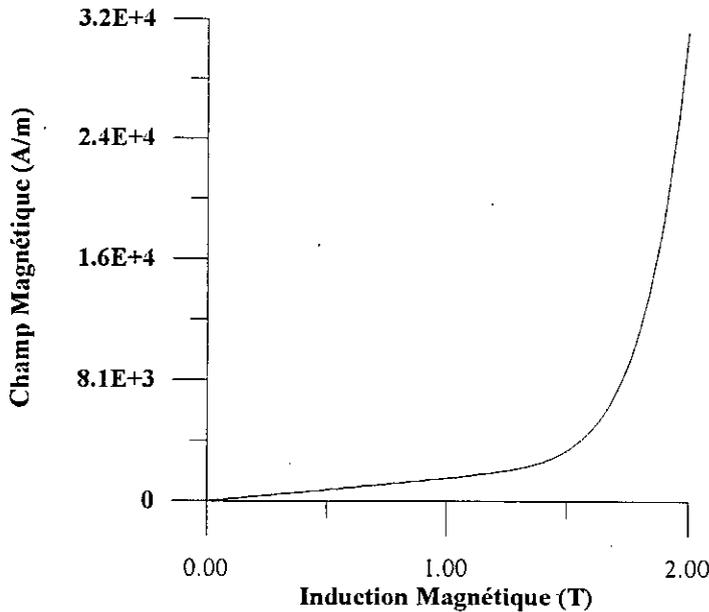


Fig. IV. 17 Caractéristique Magnétique de l'acier rotorique XC18 [2]

Cette caractéristique peut être approximée, en utilisant la méthode des moindres carrés, par un polynôme impair de degré 11 dont l'équation est la suivante :

$$H=15.127B^{11}-5.175B^9+1512.7B$$

A partir de cette équation, on peut aisément déduire la réductivité magnétique en fonction du carré de l'induction magnétique B.

La résistivité de l'acier XC18, mesurée à l'aide d'un double pont de précision, est égale à  $1,87 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$ .

Le prototype est alimentée par un autotransformateur, une dynamo- balance constitue la charge.

## IV. 5. 2 COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS

La Fig. IV.18 montre la variation du courant absorbé par le prototype étudié à vide, sous une fréquence constante, en fonction de la tension d'alimentation. Les résultats obtenus grâce au modèle numérique développé et ceux issus du calcul par éléments finis en considérant le rotor comme bloqué concordent avec les mesures relevées par [2]. L'erreur relative maximale en faisant référence aux mesures expérimentales est égale à 7% pour le modèle éléments finis élaboré et atteint 9% pour le modèle éléments finis classique. Ces

erreurs sont dues d'une part, à l'imprécision dans l'évaluation de la réactance de fuite et, d'autre part, à la définition même de la réductivité effective adoptée.

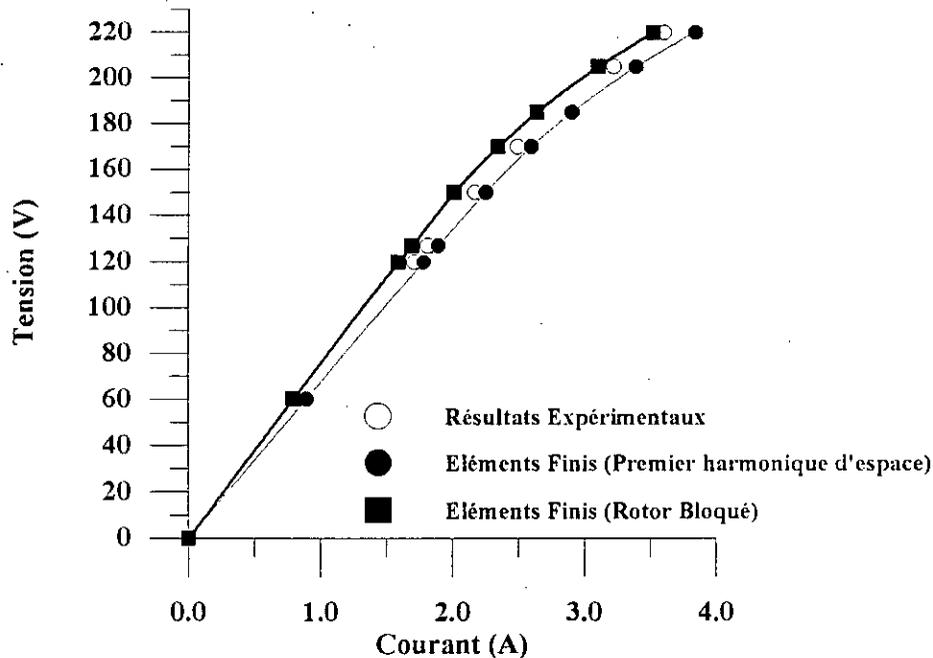


Fig. IV. 18 Variation du courant absorbé à vide par le prototype étudié en fonction de la tension d'alimentation sous une fréquence fixe de 50Hz obtenue expérimentalement [2], à l'aide du modèle éléments finis (rotor bloqué) et du modèle éléments finis avec couplage à l'aide du premier harmonique d'espace

La Fig. IV. 18 montre les variations du courant absorbé par le moteur asynchrone à rotor massif lisse étudié alimenté sous tension constante de valeur efficace 220V et de fréquence égale à 50Hz. Les résultats obtenus, grâce au modèle mis au point, concordent dans l'ensemble avec ceux déterminés à l'aide du calcul éléments finis où le rotor est bloqué [14] et avec ceux relevés par R. Ibtouen [2].

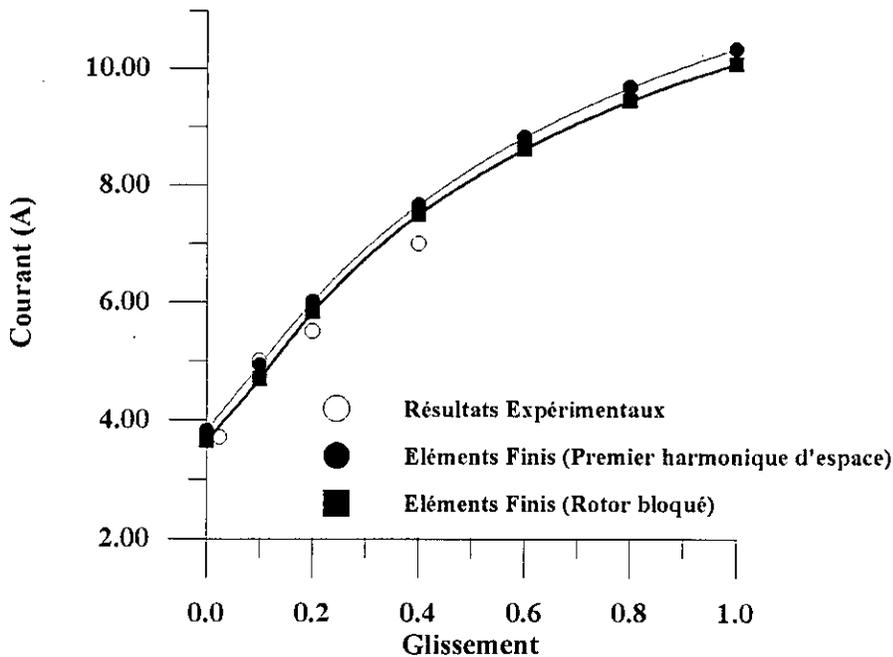


Fig. IV. 19 Variation du courant absorbé par le prototype étudié en fonction du glissement sous une tension efficace de 220V et une fréquence de 50Hz obtenue expérimentalement [2], à l'aide du modèle éléments finis à rotor bloqué et du modèle éléments finis avec couplage à l'aide du premier harmonique d'espace

L'erreur commise sur la prédétermination du courant absorbé, en charge, par le moteur étudié, grâce au modèle éléments finis où seul le premier harmonique d'espace est pris en compte, reste inférieure à 2% pour les glissements faibles (inférieurs à 0,1) et atteint 10% pour les glissements plus élevés. L'erreur commise lorsqu'on se réfère au modèle éléments finis où le rotor est supposé bloqué atteint 6% pour les faibles glissements et 7% pour les forts glissements. A titre d'exemple et pour un glissement de 0,1 le courant relevé expérimentalement en régime thermique établi est égale à 5A. La valeur du courant prédéterminé grâce au modèle éléments finis développé est égale à 4,92 A, ce qui correspond à une erreur relative de 1,47%. La valeur du courant prédéterminée grâce au modèle éléments classique est égale à 4,69 A ce qui correspond à une erreur relative égale à 6,11%.

La Fig. IV. 20 montre la variation du couple développé par la structure étudiée sous une tension fixe de valeur efficace 220V pour une fréquence de 50Hz. Elle montre une bonne concordance des résultats obtenus à l'aide des modèles numériques et des résultats expérimentaux relevés par [2]. L'erreur relative maximale est inférieure à 11%.

Pour un glissement de 0,2, la valeur du couple mesurée en régime thermique établi est égale à 8,45 N.m; celle prédéterminée à l'aide du modèle numérique développé est égale à 9,23 N.m ce qui correspond à une erreur relative de 9,21%. La valeur du couple prédéterminée à l'aide du modèle éléments finis classique est égale à 9,34 N.m ce qui correspond à une erreur relative de 10,53%.

Les erreurs subsistant au niveau des modèles numériques mises à part celles évoquées plus haut peuvent être attribuées à diverses causes. En premier lieu, le rotor étant légèrement excentré, les variations de l'entrefer introduisent un déséquilibre des courants statoriques

dans les trois phases. En second lieu, l'échauffement du rotor se traduit par une modification des coefficients physiques, ce qui peut aussi expliquer certaines erreurs dans le calcul.

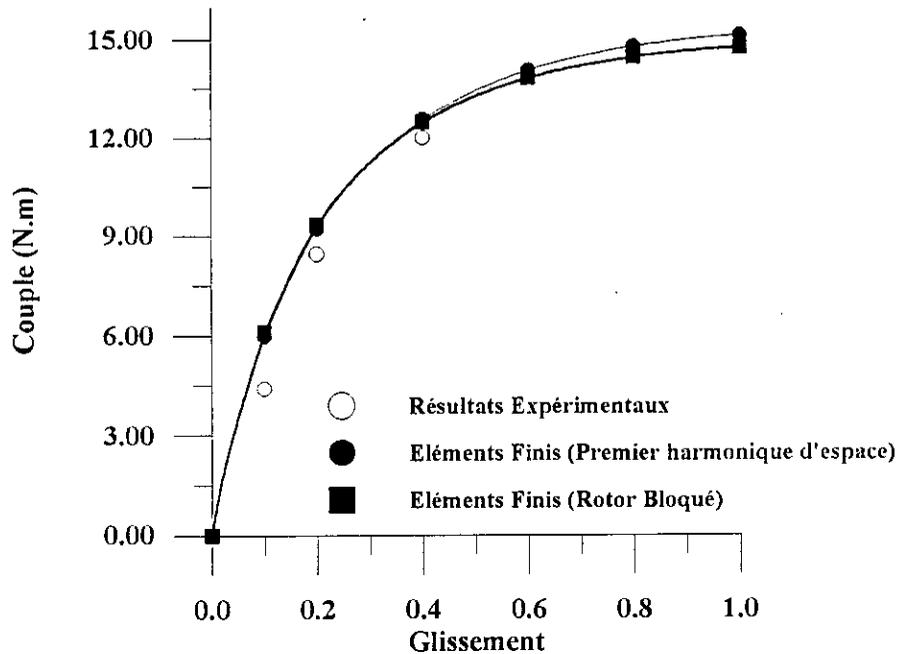


Fig. IV. 20 Variation du couple développé par le prototype étudié en fonction du glissement obtenue expérimentalement [2], à l'aide du modèle éléments finis (rotor bloqué) et du modèle éléments finis avec couplage à l'aide du premier harmonique d'espace

On peut constater à partir des figures IV. 19 et IV. 20 que le rotor lisse n'offre pas des caractéristiques intéressantes bien qu'il représente la meilleure solution du point de vue mécanique. En effet, le glissement nominal étant très élevé, les pertes rotoriques sont très fortes. Le couple n'ayant pas de maximum aux faibles glissements, les moteurs asynchrones à rotor massif lisse ne supportent que difficilement les variations de charge.

## IV.6 CONCLUSION

Dans la première partie de ce Chapitre, un modèle analytique, basé sur les développements en série de Fourier, a été développé afin de valider le modèle éléments finis associée à la technique des multiplicateurs de Lagrange établi au Chapitre II et ce dans le cas d'un prototype de machine synchrone à aimants permanents à induit sans encoches. Les grandeurs électromagnétiques prédéterminées grâce au modèle numérique concordent d'une part avec ceux obtenus à l'aide du modèle analytique et d'autre part avec ceux déterminés expérimentalement par [1].

La technique proposée permet ainsi de déterminer les performances électromagnétiques d'une structure donnée tout en gardant le maillage de celle-ci figé. Elle peut constituer de ce fait un outil efficace lors de la simulation dynamique des machines électriques.

Dans une seconde partie, une méthode de calcul des machines asynchrones en régime de fonctionnement permanent reposant sur l'hypothèse que le premier harmonique d'espace est prépondérant dans l'entrefer de ces machines, a été validée dans le cas d'un prototype d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse. Cette hypothèse, justifiée par l'optimisation du pas de bobinage, rend l'amplitude des harmoniques de rangs supérieurs négligeables devant l'amplitude du fondamental. Par ailleurs, ces machines sont supposées être alimentées par une source triphasée sinusoïdale équilibrée afin que le spectre du courant ne présente qu'un seul harmonique de temps.

Une comparaison entre les résultats du modèle numérique établi au Chapitre III et ceux d'un calcul à rotor bloqué ainsi que ceux issus de l'expérience [2] a été effectuée. Cette comparaison permet de constater deux aspects :

- La bonne coïncidence entre les calculs et l'expérience pour les faibles glissements. L'écart maximum par rapport aux valeurs mesurées est de l'ordre de 11%. Les calculs par éléments finis (rotor bloqué) et par la méthode développée utilisée conjointement permettent donc d'obtenir des précisions sur le comportement des machines électriques asynchrones grâce à un traitement approprié de la saturation.
- Des écarts importants sont constatés, lorsque le glissement est proche de 1. En effet, pour des glissements forts, l'hypothèse qu'un seul harmonique d'espace est présent dans l'entrefer n'est plus valide car les harmoniques d'espace de rang 5, 7, 11 et 13 ne sont plus négligeables devant le fondamental. Cet écart n'est pas dû, comme on pourrait le supposer, à la finesse du maillage. En effet, des maillages adaptatifs (tenant compte du glissement) n'ont pas permis l'amélioration des résultats. Le modèle établi n'est donc pas fiable pour les forts glissements et doit être affiné.

---

## REFERENCES

- [1] B. Nogarede, M. Lajoie-Mazenc, B. Davat, «Modélisation analytique des machines à aimants à induit sans encoches», *Revue Phys. Appl.*, 5 Juillet 1990, pp. 707-720.
  - [2] R. Ibtouen, « Etude d'un moteur d'induction à rotor massif lisse pour différentes largeurs d'entrefer : Performances sous divers régimes d'alimentation - Comportement thermique », *thèse de Magister*, ENP, Mai 1984, Alger.
  - [3] Durand, «Magnétostatique», *Ed. Masson et Cie*, 1968.
  - [4] R. Kechroud R. Ibtouen S. Mezani, O. Touhami B. Laporte "Modelling of a slotless permanent magnet machine with motion consideration", *Archives of Electrical Engineering*, index, 351660, ISBN 0004-0746, Vol. XLIX, No. 3-4/2000, pp. 377-393.
  - [5] R. Kechroud R. Ibtouen and O. Touhami "The use of the association of the finite element method-Lagrange's method of undetermined multipliers in the dynamic modeling of rotating electrical device", *ICEL'2000. International Conference on Electrotechnics*, Oran (Algeria), November 13-15, 2000.
  - [6] R. Kechroud R. Ibtouen and O. Touhami "Calcul analytique des performances électromagnétiques d'une PMSM à aimants permanents à induit sans encoches", *ICEL'2000. International Conference on Electrotechnics*, Oran (Algeria), November 13-15, 2000.
  - [7] Y. Boutora R. Ibtouen R. Kechroud "Calcul de champ pour machines synchrones à poles lisses à aimants permanents à aimantation parallèle" *AJOT-COMAE'98 Béjaïa, Machines Electriques- Réseaux Electriques et Haute Tension*, ISSN 1111-357X, Décembre 1998, pp. 232-235.
  - [8] R. Ibtouen O. Touhami R. Kechroud K. Boughrara "Dimensionnement géométrique de deux actionneurs à aimants permanents utilisant deux matériaux différents" *First Arab Mechanics Congress*, Damascus June 1-3, 1997, Vol.3, pp. 182-187.
  - [9] R. Kechroud K. Boughrara et R. Ibtouen "Calcul numérique d'une machine à aimants permanents avec pièces polaires et concentration de flux" *AJOT-COMAE'96 Tlemcen, Vol. 3, Machines Electriques- Réseaux Electriques et Haute Tension*, ISSN 1111-357X, Décembre 1996, pp. 144-148.
  - [10] R. Ibtouen L. Hadjout R. Kechroud and B. Laporte "Torque analysis of permanent magnets synchronous motors" *IEEE-PES/KTH, paper SPT EM12-02-0456, Vol. Electrical Machines and Drives, Stockholm Sweden June 18-22, 1995*, pp. 334-339.
  - [11] R. Ibtouen L. Hadjout R. Kechroud and B. Laporte "Torque analysis of permanent magnets synchronous motors" *ACEMP Conference on Electrical Machines and Drives*, Ankara, June 7-8, 1995, pp. 582-586.
  - [12] N. Boules, «Prediction of no load flux density distribution in Permanent Magnet Machines», *IEEE Transactions On Industry Applications*, Vol. IA-21, No. 4, May/June 1985.
  - [13] B. Laporte, R. Ibtouen et M. Chabane, «Recherche de performances optimales pour une machine synchrone à aimants insérés par une méthode intégrale mettant en jeu une solution analytique», *J. Physique III, France (2)*, Octobre 1992, pp. 1891-1904.
-

- 
- [14] R. Kechroud, R. Ibtouen, O. Touhami "Coupled non-linear complex finite elements analysis of solid rotor induction motor" *International Compumag Society, Team Workshop and Application Forum*, Evian, France, July 6, 2001, pp. 16-17.
-

## **CONCLUSION GENERALE**

L'étude menée dans le cadre de ce travail nous a permis, dans un premier temps, d'analyser la modélisation électromagnétique des machines électriques selon les concepts de Lagrange et d'Euler. Diverses techniques de prise en compte du mouvement ont été comparées. Ces techniques, bien que performantes, restent toutefois coûteuses en temps de calcul. La prise en compte du mouvement du rotor lors de la mise en équation des problèmes électromagnétiques 2D, formulés en potentiel vecteur magnétique, est traité, dans la plupart des modélisations déjà proposées, à l'aide d'itérations dans le temps et grâce à des rotations élémentaires du rotor entre chaque pas de calcul. Ceci nécessite souvent un remaillage partiel de la structure. D'un point de vue pratique, ces méthodes sont performantes. Cependant, elles sont lourdes à mettre en œuvre et exigent donc des temps de calcul très longs.

La formulation Lagrangienne présente des avantages sur celle Eulerienne. Pour des ressources mémoires données, les problèmes de taille limitée n'apparaissent pas dans la formulation Lagrangienne car le terme de transport n'apparaît pas explicitement dans les équations. Il est pris en compte automatiquement par une modélisation adéquate de l'entrefer (Ligne d'entrefer, bande de roulement, macro-élément...). Lorsque l'approche Lagrangienne est adoptée, le problème des modes numériques parasites, qui consiste en l'oscillation de la solution du système d'équations quand le terme de transport dépasse une certaine limite liée au nombre de Péclet, n'affecte pas la solution car le mouvement est automatiquement suivi et aucune direction préférentielle de celui-ci n'est à prendre en considération. Avec l'approche Lagrangienne, le gain de temps de calcul lors de la résolution des problèmes dynamique ou statique est significatif par rapport aux techniques de prise en compte du mouvement utilisant les remaillages où à chaque pas de temps il est nécessaire de reconstruire les matrices. Ainsi, malgré sa relative complexité, nous avons opté pour la formulation Lagrangienne en lui associant la technique des multiplicateurs de Lagrange afin de suivre le mouvement rotorique des machines étudiées.

Dans une deuxième étape, nous avons donc développé un modèle numérique pour les machines synchrones à aimants permanents où le mouvement est pris en compte en associant la méthode des éléments finis aux multiplicateurs de Lagrange. Cette technique permet l'analyse des phénomènes de diffusion du champ électromagnétique et le suivi du mouvement du rotor grâce à des maillages des domaines statorique et rotorique fixes. Ainsi, une opération en deux étapes est effectuée en séparant les maillages du stator et du rotor. Nous avons assuré le couplage des champs électromagnétiques statorique et rotorique grâce aux multiplicateurs de Lagrange au niveau d'une interface située dans l'entrefer. Cette association éléments finis - multiplicateurs de Lagrange permet non seulement de suivre le mouvement et la diffusion du champ électromagnétique mais également de choisir un nombre d'harmoniques d'espace restreint lors du couplage des champs électromagnétiques statorique et rotorique.

La technique proposée permet ainsi de déterminer les performances électromagnétiques d'une structure donnée tout en gardant le maillage de celle-ci figé. Elle peut constituer de ce fait un outil efficace lors de la simulation dynamique des machines électriques.

A la troisième étape, nous avons développé une méthode de calcul numérique en régime permanent pour ce type de machine. Le modèle établi, sur la base d'éléments finis complexes, permet la détermination des performances des moteurs asynchrones rapides en régime permanent. Ce modèle repose sur l'hypothèse que le premier harmonique d'espace

est largement prépondérant dans l'entrefer. En effet, l'optimisation du pas de bobinage, rend les amplitudes des harmoniques de rang supérieur négligeables devant l'amplitude du fondamental. Par ailleurs, ces machines sont supposées être alimentées par une source triphasée sinusoïdale équilibrée afin que le spectre du courant ne présente qu'un seul harmonique.

Les équations de la magnétodynamique sont résolues par rapport à des référentiels fixes par rapport au stator et au rotor et la saturation est prise en compte dans un sens moyen. Le couplage des champs électromagnétiques statorique et rotorique est effectué dans l'entrefer grâce à la technique des multiplicateurs de Lagrange en considérant donc uniquement le fondamental du potentiel vecteur magnétique complexe.

Dans la dernière partie de ce travail, la méthode de calcul développée pour les machines synchrones a été validée dans le cas d'un prototype de machine synchrone à aimants permanents à induit sans encoches. Une bonne concordance entre les résultats obtenus expérimentalement par B. Nogaredo et Al. et ceux prédéterminés à l'aide des modèles numérique et analytique a été constatée. Quant à la méthode développée pour le calcul des machines asynchrones, elle a été validée dans le cas d'un prototype de machine asynchrone à rotor massif lisse fabriquée par Electro-Industries (Azazga).

Une comparaison entre les résultats issus de cette méthode avec les résultats expérimentaux obtenus par R. Ibtouen et ceux issus d'un calcul par éléments finis (rotor bloqué) a été effectuée. Pour de faibles glissements, la concordance obtenue est bonne. L'écart maximum par rapport aux valeurs mesurées est de l'ordre de 11%. Les calculs par éléments finis et par la méthode développée utilisée conjointement permettent donc d'obtenir des précisions sur le comportement des machines électriques asynchrones grâce à un traitement approprié de la saturation. Par contre, lorsque le glissement s'approche de l'unité, on obtient des écarts importants. En effet, pour des glissements forts, l'hypothèse qu'un seul harmonique d'espace est présent dans l'entrefer n'est plus valide car les harmoniques d'espace de rang 5, 7, 11 et 13 ne sont plus négligeables devant le fondamental. Cet écart n'est pas dû, comme on pourrait le supposer, à la finesse du maillage. En effet, des maillages adaptatifs, c'est à dire tenant compte du glissement, n'ont pas permis l'amélioration des résultats. Le modèle établi n'est donc pas fiable pour les forts glissements et doit être affiné.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange demeure une alternative intéressante à envisager lors de la prise en compte du mouvement. En effet, dans ce cas précis, les maillages indépendants du stator et du rotor libres de translater ou de tourner sont couplés ensemble. Ce qui autorise un suivi continu du mouvement sans avoir à remailler. Dans les différentes positions, seuls les termes de la matrice C sont altérés.

Enfin, le travail que nous avons effectué n'est pas exhaustif et les modèles que nous avons développés peuvent être affinés pour, entre autres, prendre en compte la spécificité des problèmes 3D.

### Résumé

Les différentes techniques de prise en compte du mouvement dans la modélisation électromagnétique des machines électriques requièrent un temps de calcul très onéreux. Dans une première phase, un modèle numérique à base d'éléments finis, reposant sur un calcul séparé des champs électromagnétiques dans les domaines statorique et rotorique, est développé. Le couplage de ces champs est assuré au niveau d'une interface située dans l'entrefer grâce aux multiplicateurs de Lagrange. Cette technique permet de simuler le mouvement sans avoir à effectuer de remaillage et permet d'imposer le nombre d'harmoniques d'espace. Sa validité a été montrée par la comparaison des performances électromagnétiques d'un prototype de machine auto-synchrone à aimants permanents à induit sans encoches, prédéterminées numériquement et analytiquement à l'aide des modèles développés, avec ceux relevées expérimentalement. Dans une deuxième phase, un modèle de calcul de machines asynchrones basé sur les éléments finis est développé. Ce modèle repose sur l'hypothèse de la prédominance du premier harmonique d'espace du flux dans l'entrefer de ces machines. Les performances d'un prototype de moteur asynchrone à rotor massif prédéterminées à l'aide de ce modèle sont également confrontées à ceux issues d'un calcul numérique ainsi qu'à ceux relevées expérimentalement.

### Abstract

The different ways used to take into account the movement in the dynamic modelling of electrical machines are time expensive. This is due to the re-meshing of the air gap in order to follow the movement and field diffusion. In a first stage, a finite element model, where the electromagnetic fields in both stator and rotor are calculated separately, is developed. The fields are then linked together in the air gap thanks to Lagrange's multipliers. This method allows following the movement of the rotor without re-meshing and the flux space harmonic number in the air gap can be imposed. The comparison of experimental data of a slotless PMSM prototype with the results obtained from the developed numerical and analytical models show good agreement. In a second stage, a finite element model of induction machines is developed. The main assumption is supposed that only the fundamental space component of the flux is present in the air gap and the harmonic of higher order vanish at an interface localized between the stator and the rotor. The experimental data of a solid rotor induction motor prototype are compared with those predicted with the developed numerical model and those obtained from a fixed mesh finite element model and a good agreement are found in the working range of such motor.

## Résumé

Les différentes techniques de prise en compte du mouvement dans la modélisation électromagnétique des machines électriques requièrent un temps de calcul très onéreux. Dans une première phase, un modèle numérique à base d'éléments finis, reposant sur un calcul séparé des champs électromagnétiques dans les domaines statorique et rotorique, est développé. Le couplage de ces champs est assuré au niveau d'une interface, située dans l'entrefer, grâce aux multiplicateurs de Lagrange. Cette technique permet de simuler le mouvement sans avoir à effectuer de remaillage et permet d'imposer le nombre d'harmoniques d'espace. Sa validité a été montrée par la comparaison des performances électromagnétiques, d'un prototype de machine auto-synchrone à aimants permanents à induit sans encoches, prédéterminées numériquement et analytiquement à l'aide des modèles développés, avec ceux relevées expérimentalement. Dans une deuxième phase, un modèle de calcul de machines asynchrones basé sur les éléments finis est développé. Ce modèle repose sur l'hypothèse de la prédominance du premier harmonique d'espace du flux dans l'entrefer de ces machines. Les performances d'un prototype de moteur asynchrone à rotor massif prédéterminées à l'aide de ce modèle sont également confrontées à ceux issues d'un calcul numérique ainsi qu'à ceux relevées expérimentalement.

**Mots Clés :** Equations de Maxwell, Problème Magnétodynamique, Concept d'Euler, Concept de Lagrange, Éléments Finis, Multiplicateurs de Lagrange, Machine Synchrone à Aimants Permanents à Induit sans Encoches, Moteur Asynchrone à Rotor Massif Lisse.

## Abstract

The different ways used to take into account the movement in the dynamic modeling of electrical machines are time expensive. This is due to the re-meshing of the air gap in order to follow the movement and field diffusion. In a first stage, a finite element model, where the electromagnetic fields in both stator and rotor are calculated separately, is developed. The fields are then linked together in the air gap thanks to Lagrange's multipliers. This method allows following the movement of the rotor without re-meshing and the flux space harmonic number in the air gap can be imposed. The comparison of experimental data of a slotless PMSM prototype with the results obtained from the developed numerical and analytical models show good agreement. In a second stage, a finite element model of induction machines is developed. The main assumption is that only the fundamental space component of the flux is present in the air gap. The harmonic of higher order vanish at a suitable interface localized between the stator and the rotor. The experimental data of a solid rotor induction motor prototype are compared with those predicted with the developed numerical model and those obtained from a fixed mesh finite element model. The results show good agreement.

**Key Words:** Maxwell Equations, Magnetodynamic Problem, Euler Concept, Lagrange Concept, Finite elements, Lagrange Multipliers, Slotless permanent magnet synchronous motor, Solid rotor induction motor.

## ملخص

عدة تقنيات تم وضعها من طرف الباحثين حتى يمكن تتبع حركة الدوار عند محاكاة الماكينات الكهربائية بواسطة الحاسب إلا أن هذه التقنيات مكلفة من الوقت. تم في هذه الدراسة تطوير نموذج عددي يعتمد على طريقة "العناصر المنتهية" أين يتم حساب الحقل الكهرومغناطيسي في الدوار و الساكن بطريقة مستقلة. ربط الحقلين يتم في الثغرة الهوائية بواسطة عوامل "لاغرانج". النتائج المحصل عليها بواسطة النموذج التحليلي و العددي المطورين تتوافق مع تلك التي تم قياسها على ماكينة ذاتية التزامن ذات مغناطيس دائم. تم أيضا تطوير نموذج عددي يعتمد أيضا على العناصر المنتهية لحساب المحركات اللامتزامنة. هذا النموذج يعتمد على فرضية أن التدفق في الثغرة الهوائية جسي. يتم مقارنة النتائج المحصل عليها مخبريا بواسطة محرك لا تزامني ذو دوار متجانس و أملس مع تلك المتنبأ بها بواسطة النموذج العددي المطور و كذا مع المحصل عليها بواسطة نموذج عددي أين يفترض أن الدوار ساكن. النتائج المحصل عليها مشجعة.