

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département de Génie Mécanique

**PROJET DE FIN D'ETUDE**  
Ingéniorat d'état en génie mécanique

**Thème**

**REALISATION D'UN PRE ET POST PROCESSEUR POUR LA  
VISUALISATION DES STRUCTURES  
SIMULATION PAR LA METHODE DE DISCONTINUTE DE  
DEPLACEMENT**

PROPOSE PAR  
MR Y.BELKACEMI

ETUDIE PAR  
MR S. HOUARI

DIRIGE PAR  
MR Y.BELKACEMI

PROMOTION

JUIN 2006

ENP 10 Avenue Hassen Badi – EL HARRACH - ALGER

## DEDICACES

*Je dédie se travail à*

*Ma mère et à mon père*

*Mes sœurs*

*Adlen et Kenza*

*Tous les membre de ma famille*

*Ainsi qu'à tous mes Amis*

## REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à **M<sup>r</sup> BELKACEMI** qui a proposé et dirigé ce travail, et dont les conseils m'ont beaucoup éclairé.

Je tiens également à dire un grand merci à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail , ne serait-ce que par des réflexions.

A tous ceux qui ont voulu que je réussisse, je dis merci du fond du cœur.

## ملخص

يتمثل هذا العمل في انجاز تعامل بياني لمشاهدة القطع الميكانيكية. و لهذا الغرض أختيرت طريقة الانقطاعات الانتقالية, فبهذه الطريقة يكفي تجزئة حدود القطعة و ذلك عكس طريقة الأجزاء المنتهية التي توجب تجزئة كل المساحة  
كلمات مفتاحية : طريقة الانقطاعات الانتقالية , تعامل بياني, لمشاهدة القطع الميكانيكية

### RESUME :

Le présent travail a pour objectif la réalisation d'un pré et post processeur pour la visualisation des structures. Afin de simuler les structures en déformation, le choix c'est porté sur la méthode des discontinuités de déplacement. En effet, au contraire de la méthode de élément finis qui nécessite un maillage total de la structure, la méthode des discontinuités de déplacement se limite à une discrétisation du contour.

Mots clés : Méthode de discontinuité de déplacement, interface graphique, visualisation des structures.

### ABSTRACT:

This work aims to the realization of a graphical interface for the visualization of the structures. In order to simulate the structures in deformation, we choose the displacement discontinuity method . Indeed, contrarily to the finite element method which requires a total grid of the structure, the displacement discontinuity method is limited to a discretization of the boundary.

Key words : Discontinuity displasment method, graphical interface, visualisation of structures.

# Sommaire

<i>Liste des figures</i> .....	6
<i>Introduction générale</i> .....	7
<i>Chapitre I La méthode de discontinuité de déplacement</i> .....	9
<b>I . 1 Introduction</b> .....	9
<b>I . 2 Problème intérieur / Problème extérieur</b> .....	10
<b>I . 3 Convention de signe</b> .....	10
<b>I . 4 Méthode de discontinuité de déplacement (M D D)</b> .....	11
I . 4 . 1 Solution analytique (pour la M D D) .....	11
I . 4 . 2 Utilisation de la solution analytique .....	13
I . 4 . 3 Procédure numérique .....	20
I . 4 . 4 Coefficients d'influences .....	22
I . 4 . 5 Conditions de symétrie .....	25
<i>Chapitre II Construction du post et pré processeur</i> .....	27
<b>II . 1 Introduction</b> .....	27
<b>II . 2 Algorithme du programme</b> .....	27
<i>Chapitre III Exemples d'illustrations</i> .....	35
<b>III . 1 Introduction</b> .....	35
<b>III . 2 Exemples</b> .....	35
<i>Conclusion générale</i> .....	51
<i>Annexe</i> .....	53
<i>BIBLIOGRGHIE</i> .....	55

## Liste des figures

Figure 1 : Représentation d'un maillage par F E M et par B E M .....	5
Figure 2 : Schématisation d'un problème intérieur et d' problème extérieur.....	6
Figure 3 : Schématisation des deux modes d'une discontinuité de déplacement.....	9
Figure 4 : Schéma d'une discontinuité de déplacement .....	10
Figure 5 : Représentation de la discrétisation d'un segment en N éléments.....	17
Figure 6 : Représentation de deux éléments sur un contour .....	18
Figure 7 : Représentation d'une simple symétrie .....	21
Figure 8 : Représentation d'une double symétrie .....	21
Figure 9 : Représentation schématique du domaine .....	31
Figure 10 : Représentation schématique du domaine .....	36
Figure 11 : Représentation schématique du domaine .....	42

## **Introduction générale**

Les exigences économiques de notre époque sont tels que les industriels font de plus en plus appel à l'ingénierie pour réduire les coûts de production.

Pour preuve, l'accroissement du nombre de partenariats entre les industries et les laboratoires de recherches

Afin d'atteindre leurs objectifs, les ingénieurs et les chercheurs s'appuient sur des méthodes mathématiques de modélisations et de simulations, qui sont beaucoup plus rentables que les méthodes classiques qui nécessite la réalisation de prototype souvent chers, destinés à subir des testes

Les codes des différentes méthodes mathématiques, comme ceux utilisées en mécanique de la rupture et mécanique des solides, domaines très sollicités par l'industrie, n'étaient pas interactifs, l'utilisateur de ces codes devait, en plus de ses connaissances en mécanique, avoir de solide compétences en informatique pour pouvoir faire fonctionner son code et interagir avec lui..

Nous avons tenté, dans cette étude d'aider l'ingénieur qui souhaite utiliser la méthode des discontinuités de déplacement pour simuler les structures en déformation, de développer une interface graphique en proposant une visualisation de la structure déformée.

La méthode des discontinuités de déplacement a fait ses preuves quant à sa fiabilité et dont le code de calcul a été validé par de nombreuses études. La méthode est présentée dans chapitre I

Le chapitre II est consacré à l'interface graphique et à sa structure.

Enfin dans le chapitre III des exemples sont traités pour mieux illustrer le code réaliser et sont mode d'emploi.

# LA METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT



## La méthode de discontinuité de déplacement

### 1.1 Introduction

Beaucoup de problèmes pratiques dans les différentes disciplines de l'ingénierie tels que, la mécanique de la rupture, celle des solides, les transferts thermiques et de masse et autres phénomènes peuvent être représentés par des « équations aux dérivés partielles régissant un domaine  $\Sigma$  délimité par un contour, sur lequel des conditions aux limites sont prescrites.

Pour approcher les solutions analytiques de ces problèmes, qui sont souvent difficiles à déterminer par une résolution directe des équations différentielles, de nombreuses méthodes numériques ont été mises en place, l'une de ces méthodes est la méthode des équations intégrales aux frontières BEM.

Contrairement à la méthode des éléments finis « F E M », qui nécessite un maillage total du domaine, chose qui peut devenir très compliquée lorsqu'il s'agit de domaines infinis ou évolutifs ; La B E M se limite seulement à une discrétisation de la frontière.

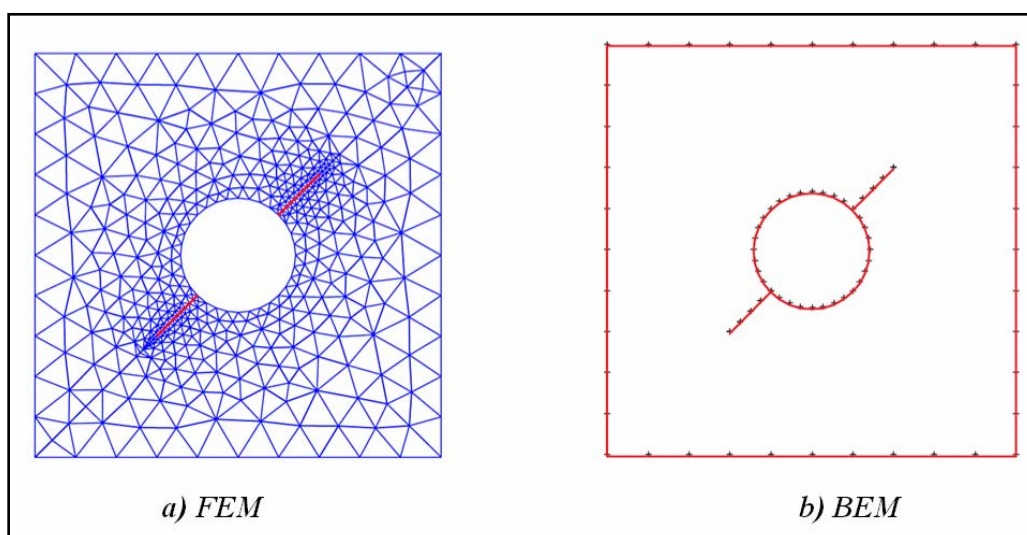


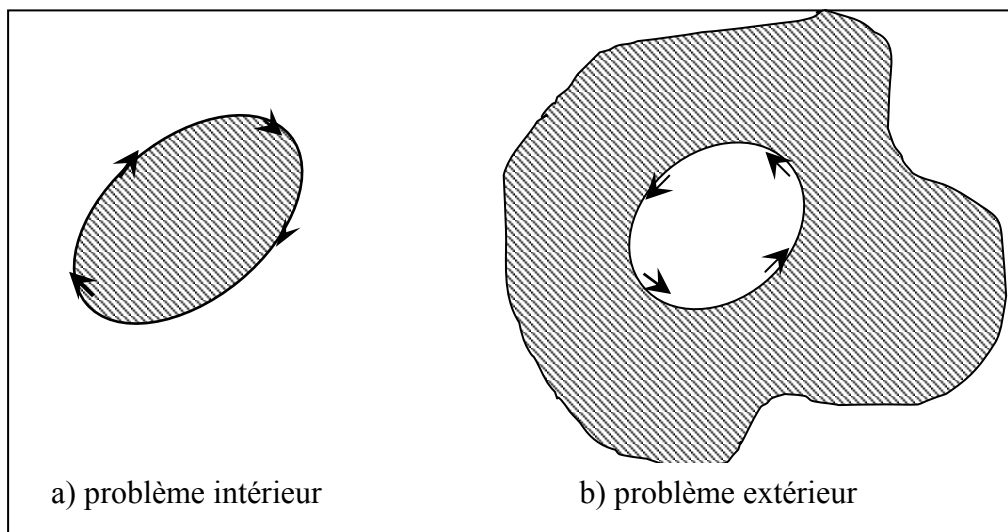
FIG 1 – Représentation d'un maillage par F E M et par B E M

### ***I. 2 Problème intérieur / Problème extérieur***

Un problème est dit intérieur lorsque le domaine à étudier est fini et est limité par un contour, c'est l'exemple d'un disque. Dans le d'un domaine infini, exemple d'une cavité à l'intérieur d'un domaine infini, on a affaire à un problème extérieur. Et c'est particulièrement à ce type de problèmes que la B E M est utile, puisque l'étude se limite seulement à une discrétisation de la frontière .(figure 2)

### ***I. 3 Convention de signe***

Le contour d'un domaine fini (problème intérieur ) est traversé suivant le sens horaire, tandis que le contour d'un domaine infini (problème extérieur) est traversé selon le sens trigonométrique. (figure 2)



**FIG 2– Schématisation d'un problème intérieur et d' problème extérieur**

#### I.4 Méthode de discontinuité de déplacement (M D D)

Une discontinuité de déplacement, peut être assimilée à une fissure rectiligne composée de deux lèvres disjointes se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre.

Une méthode d'éléments aux frontières permet de traiter ce type de problèmes, elle est appelée « **Méthode de Discontinuité de Déplacement** » ou **M.D.D.**

Cette méthode est basée sur la solution analytique du problème d'une discontinuité constante de déplacement d'un segment fini dans le plan (X, Y) d'un solide élastique infini.

#### Solution analytique (pour la M D D)

Soit l'équation de LAME :

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} = 0 \quad (1)$$

En considérant les forces volumiques nulles ;  $\vec{f} = 0$

$$\text{On obtient : } (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } U + \mu \Delta U = 0 \quad (2)$$

Cette équation, admet une solution suite à des représentations spéciales. Dans notre cas nous considérons la représentation de PAPKOVITCH (voir annexe) qui est formulée comme suit :

$$\vec{U} = \vec{B} - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{OM} \cdot \vec{B} + \beta) \quad (3)$$

Avec  $\Delta B = 0$  et  $\Delta \beta = 0$

En déformation plane, selon le plan (x,y), les composantes du champ de déplacement pour un corps élastique, isotrope et homogène s'écrivent [2] :

$$\begin{aligned} U_x &= B_x - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\partial / \partial x)(x B_x + y B_y + \beta) \\ U_y &= B_y - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\partial / \partial x)(x B_x + y B_y + \beta) \end{aligned} \quad (4)$$

Où  $B_x, B_y, \beta$  sont les fonctions de PAPKOVITCH, déterminées en considérant deux cas particuliers :

- dans le premier cas on considère le plan  $y=0$  libre de la traction libre
- Dans le second cas, on considère ce même plan libre de la traction normale.

Donc ceci revient à choisir  $B_x, B_y$  et  $\beta$  de telle façon que l'on ait sur le plan  $y=0$  ;  $\sigma_{xy} = 0$  et  $\sigma_{yy} = 0$ .

En remplaçant dans les équations *contraintes - déformations* on obtient [1] :

a. Si les fonctions de PAPKOVITCH sont telles que :

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 4 (1 - \nu) (\partial\Phi/\partial y) \\ \beta &= 4 (1 - \nu) (1 - 2\nu) \Phi \end{aligned} \quad (5)$$

Où  $\Delta\Phi=0$  ;  $\Phi$  est une fonction harmonique singulière.

Les champs de déplacements et de contraintes correspondants seront sous la forme suivante [1] :

$$\begin{aligned} U_x &= - (1 - 2\nu) (\partial\Phi/\partial x) - y (\partial^2\Phi/\partial y \partial x) \\ U_y &= 2 (1 - \nu) (\partial\Phi/\partial y) - y (\partial^2\Phi/\partial y^2) \end{aligned} \quad (6a)$$

Et

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 G [ (\partial^2\Phi/\partial y^2) + (\partial^3\Phi/\partial y^3) ] \\ \sigma_{yy} &= 2 G [ (\partial^2\Phi/\partial y^2) + (\partial^3\Phi/\partial y^3) ] \\ \sigma_{xy} &= - 2 G y (\partial^3\Phi/\partial x \partial y^2) \end{aligned} \quad (6b)$$

Où G est le module de cisaillement.

*Nota* : pour avoir ( $\sigma_{xy} = 0$ ) sur le plan  $y=0$  il faut que ( $\partial^3\Phi/\partial x \partial y^2$ ) soit finie sur ce même plan.

b. Si les fonctions de PAPKOVITCH sont telles que :

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 4 (1 - \nu) (\partial\Phi/\partial y) \\ \beta &= 8 (1 - \nu)^2 \int (\partial\Phi/\partial x) dy \end{aligned} \quad (7)$$

Les champs de déplacements et de contraintes qui correspondent à ce cas sont donnés comme suit [1] :

$$\begin{aligned} U_x &= 2 (1 - \nu) (\partial\Phi/\partial y) + y (\partial^2\Phi/\partial y^2) \\ U_y &= (1 - 2\nu) (\partial\Phi/\partial x) - y (\partial^2\Phi/\partial y \partial x) \end{aligned} \quad (8a)$$

Et

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 G [ (\partial^2\Phi/\partial y \partial x) + (\partial^3\Phi/\partial y^2 \partial x) ] \\ \sigma_{yy} &= - 2 G y (\partial^3\Phi/\partial y^2 \partial x) \\ \sigma_{xy} &= 2 G [ (\partial^2\Phi/\partial y^2) + y (\partial^3\Phi/\partial y^3) ] \end{aligned} \quad (8b)$$

De la façon pour avoir ( $\sigma_{yy} = 0$ ) sur le plan  $y=0$  il faut que ( $\partial^3\Phi/\partial x \partial y^2$ ) soit finie sur ce même plan.

*REMARQUE* : Une fonction est dite harmonique si elle vérifie l'équation de LAPLACE soit :  $\Delta f = 0$

## Utilisation de la solution analytique

Les solutions précédentes peuvent être utilisées pour construire des solutions à certains problèmes aux valeurs limites, comme c'est le cas pour une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite  $|x| < a$ , dans un corps infini.

Ce problème est résolu suivant deux modes, les modes I et II, correspondant respectivement à des discontinuités de déplacement normal  $U_y$ , et à des discontinuités transversal  $U_x$ .

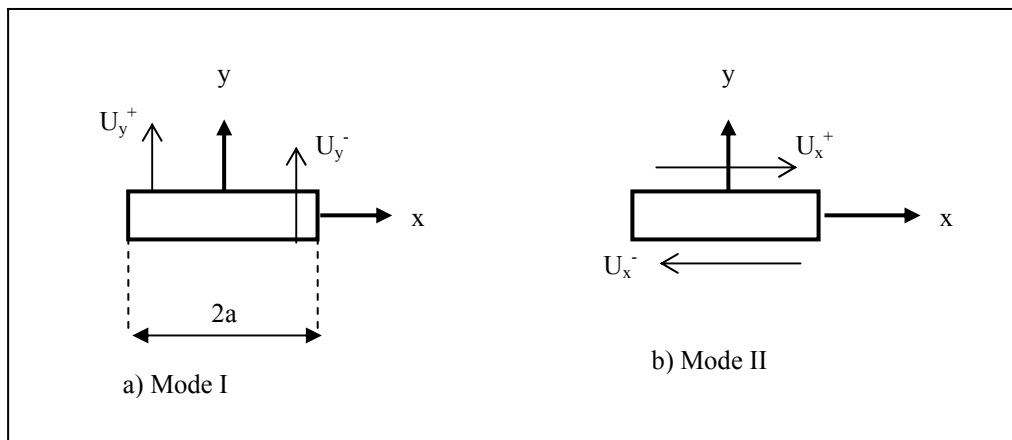


FIG 3 – Schématisation des deux modes d'une discontinuité de déplacement

La discontinuité de déplacement  $D_i$  est définie comme étant la différence de déplacement entre les deux surfaces du segment, ainsi on peut écrire [1] :

$$\begin{aligned} D_x &= U_x(x, 0^-) - U_x(x, 0^+) \\ D_y &= U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) \end{aligned} \quad (9)$$

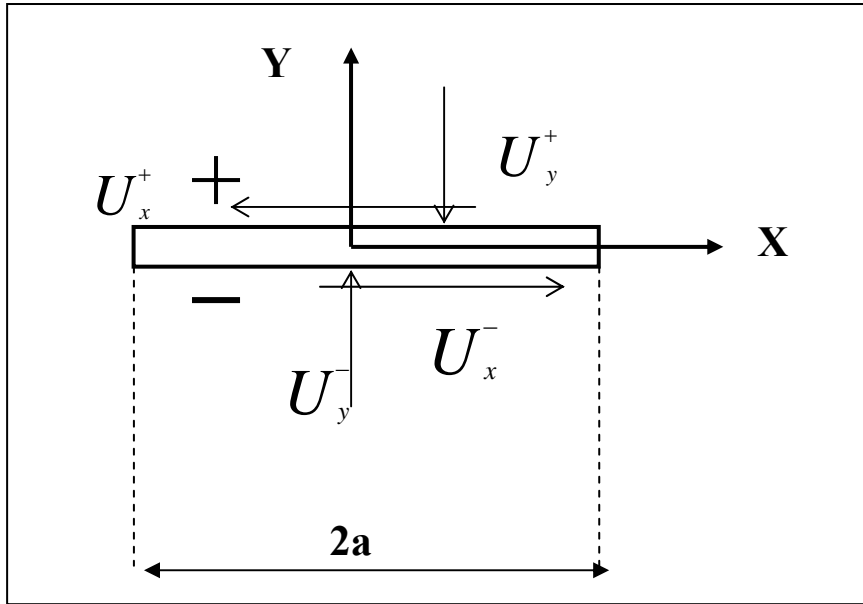


FIG 4 – Schéma d'une discontinuité de déplacement

A noter que  $D_x$  et  $D_y$  sont constantes.

En mode I :

Comme nous l'avons vu précédemment -équation (8a)-  $U_y$  s'écrit :

$$U_y = (1 - 2\nu) (\partial\Phi/\partial x) - y (\partial^2\Phi/\partial y \partial x)$$

Les conditions aux limites définies pour ce mode sont les suivantes [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x,0) &= 0 & -\infty < x < +\infty \\ U_y(x,0) &= 0 & |x| > a \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} U_y(x,y) - \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y(x,y) &= D_y & |x| < a \end{aligned} \quad (10)$$

En remplaçant  $U_y$  par son expression on trouve :

$$D_y = \begin{cases} 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_{y=0^-} - \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_{y=0^+} \right] & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (11)$$

et on obtient :

$$\left[ \frac{\partial\phi}{\partial y} \right]_{y=0^-} - \left[ \frac{\partial\phi}{\partial y} \right]_{y=0^+} = \frac{D_y}{2(1-\nu)} \quad \text{pour } |x| < a \quad (12)$$

le problème aux limites (10) est résolu facilement une fois la fonction harmonique  $\Phi$  convenablement choisie.

Pour ce fait, on choisi  $\Phi = \arctan(y/x)$  définie comme suit :

$$\arctan(y/x) = \underline{\arctan}(y/x) + k\pi \quad (\text{fonction harmonique})$$

Avec  $-\pi/2 < \underline{\arctan}(y/x) < \pi/2$  argument

$$\text{Et où : } k = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, y > 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0, y < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Ce qui signifie que :

$$\arctan(y/x) = \begin{cases} 0 & ; x > 0, y = 0^+ \\ 0 & ; x > 0, y = 0^- \\ \pi & ; x < 0, y = 0^+ \\ -\pi & ; x < 0, y = 0^- \end{cases} \quad \text{discontinuité} \quad (14)$$

on peut construire à partir de cette fonction une autre fonction définie par [2]:

$$h(x,y) = \arctan[ y/(x+a) ] - \arctan[ y/(x-a) ]$$

telle que :

$$\arctan[ y/(x+a) ] = \begin{cases} -\pi & \text{pour } x > -a, y = 0^- \\ \pi & \text{pour } x > -a, y = 0^+ \\ 0 & \text{pour } x < -a, y = 0_-^+ \end{cases} \quad (15a)$$

Et :

$$\arctan[ y/(x-a) ] = \begin{cases} -\pi & \text{pour } x < a, y = 0^- \\ \pi & \text{pour } x < a, y = 0^+ \\ 0 & \text{pour } x > a, y = 0_-^+ \end{cases} \quad (15b)$$

En combinant les équations (15a) et (15b), on obtient une fonction  $h(x,y)$  définie comme suit :

$$h(x,y) = \begin{cases} -\pi & \text{pour } |x| < a, y=0^- \\ \pi & \text{pour } |x| < a, y=0^+ \\ 0 & \text{pour } |x| > a, y=0_{-}^+ \end{cases} \quad (16)$$

On remarque que :

$$h(x,y)|_{y=0^-} - h(x,y)|_{y=0^+} = \begin{cases} 2\pi & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases} \quad (17)$$

En identifiant (17) à (12) on a sur  $|x| < a$  :

$$\frac{1}{2\pi} [h(x,y)|_{y=0^-} - h(x,y)|_{y=0^+}] = \frac{2(1-\nu)}{D_y} \left( \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0^-} - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0^+} \right) \quad (18)$$

Ce qui donne une expression de la fonction  $\Phi$  définie comme suit :

$$(\partial \Phi / \partial y) = (1/4\pi) [D_y / (1-\nu)] h(x,y)$$

Soit [1] :

$$\Phi(x,y) = (-1/4\pi) [D_y / (1-\nu)] \{ y [\arctan(y/(x-a)) - \arctan(y/(x+a))] - (x-a) \ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} + (x+a) \ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} \} \quad (19)$$

Sachant que :

$$\int \arctan(y/(x+a)) dy = y \arctan(y/(x+a)) - (x+a) \ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$\int \arctan(y/(x-a)) dy = y \arctan(y/(x-a)) - (x+a) \ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}$$

La fonction  $\Phi$  ainsi déterminée est harmonique, et produit des déplacements et des contraintes ( voir équations 6a et 6b ) qui s'annulent à l'infini, ces derniers, contraintes et ces déplacements sont continus partout dans le domaine, excepté sur le segment  $|x| < a$  pour les déplacements.



L'équation (19) peut être mise sous la forme [1]:

$$\Phi(x,y) = D_y f(x,y)$$

$$f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

En remplaçant  $\Phi(x,y)$  par sa nouvelle expression on aura des déplacements exprimés comme suit [5]:

$$\begin{aligned} U_x &= D_y \left[ - (1-\nu) f_{,x} - y f_{,xy} \right] \\ U_y &= D_y \left[ 2(1-\nu) f_{,y} - y f_{,yy} \right] \end{aligned} \quad (20a)$$

Et pour les contraintes on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G D_y \left[ f_{,yy} + y f_{,yyy} \right] \\ \sigma_{yy} &= 2G D_y \left[ f_{,yy} - y f_{,yyy} \right] \\ \sigma_{xy} &= 2G D_y \left[ - y \cdot f_{,yyy} \right] \end{aligned} \quad (20b)$$

Avec les dérivées de  $f$  définies comme suit :

$$f_{,x} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$f_{,y} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]$$

$$f_{,xy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$f_{,xx} = f_{,yy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{y^2}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$f_{,yyy} = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right]$$

En mode II :

Les conditions aux limites définies pour ce mode sont les suivantes [2] :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}(x,0) &= 0 & -\infty < x < +\infty \\
 U_x(x,0) &= 0 & |x| > a \\
 \lim U_x - \lim U_x &= D_y & |x| < a
 \end{aligned} \tag{21}$$

Et l'équation (8a) donne l'expression de  $U_x$  :

$$U_x = 2(1 - \nu) (\partial \Phi / \partial x) - y (\partial^2 \Phi / \partial y^2)$$

En procédant de façon analogue au mode I, on obtient  $\Phi$  telle que :

$$\begin{aligned}
 \Phi(x,y) &= (\frac{1}{4} \pi) [D_x / (1 - \nu)] \{ y [\arctan(y / (x+a)) - \arctan(y / (x-a))] - \\
 &\quad (x+a) \ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} + (x-a) \ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} \}
 \end{aligned} \tag{22}$$

$\Phi$  peut se mettre sous la forme :

$$\Phi(x,y) = D_x f(x,y)$$

La fonction  $f$  étant définie ci-dessus .

En remplaçant l'expression de  $\Phi$  dans les équations (8a) et (8b), on écrit les déplacements sous la forme suivante [5]:

$$\begin{aligned}
 U_x &= D_x [2(1 - \nu) f_{,y} - y f_{,yy}] \\
 U_y &= D_x [(1 - 2\nu) f_{,x} - y f_{,xy}]
 \end{aligned} \tag{23a}$$

Et les contraintes sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2G D_x [2 f_{,xy} + y f_{,xyy}] \\
 \sigma_{yy} &= -2G D_y f_{,xyy} \\
 \sigma_{xy} &= 2G D_x [f_{,yy} + y \cdot f_{,yyy}]
 \end{aligned} \tag{23b}$$

avec

$$f_{,xyy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right]$$

En utilisant le principe de superposition, on obtient pour une discontinuité de déplacement de composantes  $D_x, D_y$ , le champ es déplacements défini comme suit [5] :

$$\begin{aligned} U_x &= D_x [2(1-\nu)f_{,y} - \gamma f_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - \gamma f_{,xy}] \\ U_y &= D_x [(1-2\nu)f_{,x} - \gamma f_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - \gamma f_{,yy}] \end{aligned} \quad (24a)$$

Et le champ des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G'D_x [2f_{,xy} + \gamma f_{,xyy}] + 2G'D_y [f_{,yy} + \gamma f_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2G'D_x [-\gamma f_{,xyy}] + 2G'D_y [f_{,yy} - \gamma f_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2G'D_x [f_{,yy} + \gamma f_{,yyy}] + 2G'D_y [-\gamma f_{,xyy}] \end{aligned} \quad (24b)$$

Pour pouvoir exploité le principe de superposition et généraliser le calcul à toutes les discontinuités de déplacements, on doit exprimer les champs de déplacements et de contraintes dans un repère global (X,Y), t en supposant que le repère local (x,y) fait un angle  $\beta$  avec le repère global (X,Y) on obtient alors pour les déplacements [1] :

$$\begin{aligned} U_X &= D_x [-(1-2\nu)\sin\beta F_2 + 2(1-\nu)\cos\beta F_3 + \gamma(\sin\beta F_4 - \cos\beta F_5)] \\ &+ D_y [-(1-2\nu)\cos\beta F_2 - 2(1-\nu)\sin\beta F_3 - \gamma(\cos\beta F_4 + \sin\beta F_5)] \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} U_Y &= D_x [(1-2\nu)\cos\beta F_2 + 2(1-\nu)\sin\beta F_3 - \gamma(\cos\beta F_4 + \sin\beta F_5)] \\ &+ D_y [-(1-2\nu)\sin\beta F_2 + 2(1-\nu)\cos\beta F_3 - \gamma(\sin\beta F_4 - \cos\beta F_5)] \end{aligned}$$

et pour les contraintes [1] :

$$\begin{aligned} \sigma_{XX} &= 2GD_x [2\cos^2\beta F_4 + \sin 2\beta F_5 + \gamma(\cos 2\beta F_6 - \sin 2\beta F_7)] \\ &+ 2GD_y [-F_5 + \gamma(\sin 2\beta F_6 + \cos 2\beta F_7)] \\ \sigma_{YY} &= 2GD_x [2\sin^2\beta F_4 - \sin 2\beta F_5 - \gamma(\cos 2\beta F_6 - \sin 2\beta F_7)] \\ &+ 2GD_y [-F_5 - \gamma(\sin 2\beta F_6 + \cos 2\beta F_7)] \end{aligned} \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{XX} &= 2GD_x [2\sin^2\beta F_4 - \cos 2\beta F_5 + \gamma(\cos 2\beta F_6 + \sin 2\beta F_7)] \\ &+ 2GD_y [-\gamma(\sin 2\beta F_6 + \cos 2\beta F_7)] \end{aligned}$$

Avec :  $F_2 = f_{,x}$  ;  $F_3 = f_{,y}$  ;  $F_4 = f_{,xy}$  ;  $F_5 = f_{,xx} = f_{,yy}$  ;  $F_6 = f_{,xyy}$  ; ;  $F_7 = f_{,yyy}$  .

## Procédure numérique

Comme nous l'avons dit précédemment, la M.D.D est construite à partir d'une solution analytique qui exprime les déplacements et les contraintes (25a et 25b) d'une discontinuité constante dans un milieu élastique infini.

Le principe de la procédure est de discrétiser une ligne de courbure quelconque en  $N$  éléments, parfaitement reliés les uns aux autres ; comme schématisé sur la figure 5

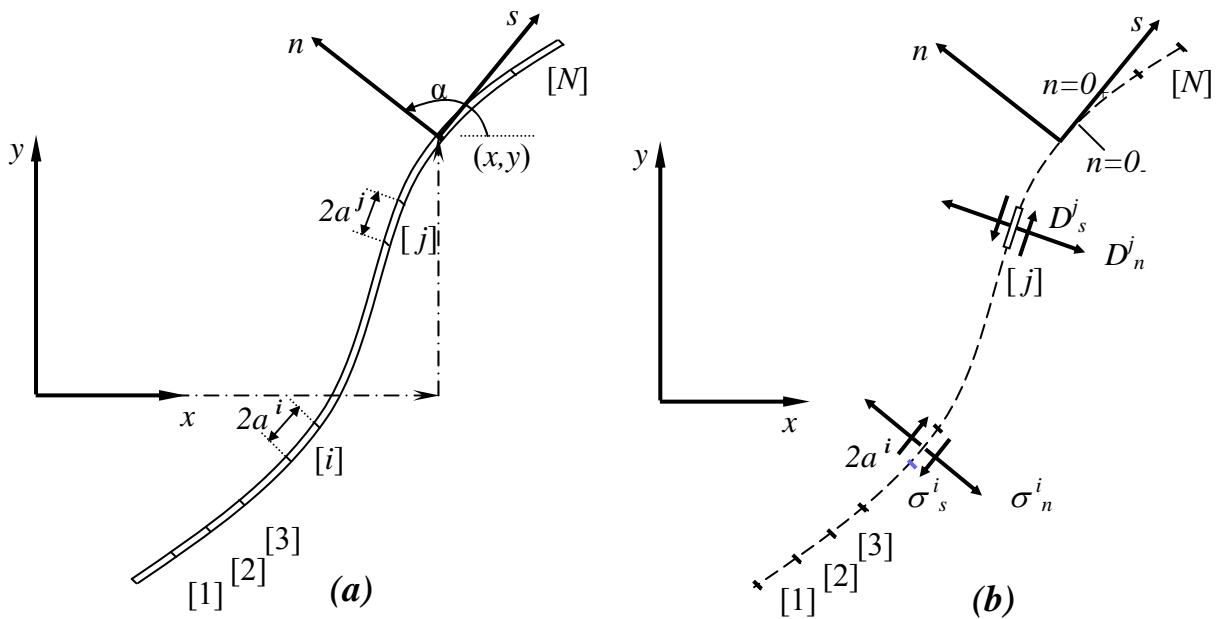


FIG 5- représentation de la discrétisation d'un segment en  $N$  éléments

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local  $(s, n)$  comme le montre la figure-5.

Les composantes normales et tangentielles de la discontinuité de déplacement du  $i^{\text{ème}}$  élément notées  $D_n^i$  et  $D_s^i$  respectivement sont exprimées en fonction des déplacements des deux lèvres de la discontinuité par la formule suivante :

$$\begin{aligned} D_n^i &= U_{ni}^- - U_{ni}^+ \\ D_s^i &= U_{si}^- - U_{si}^+ \end{aligned} \quad (26)$$

Où  $U_{ni}^+$  et  $U_{si}^+$  sont le déplacement normal et tangentiel pour  $y=0^+$  et,  $U_{ni}^-$  les déplacements pour  $y=0^-$ .

Les contraintes normales et tangentielles au milieu d'un élément « i » peuvent être exprimées en fonction des composantes de la discontinuité de déplacement du « j »<sup>ème</sup> élément par les relations suivantes [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} \cdot D_s^j + A_{sn}^{ij} \cdot D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} \cdot D_s^j + A_{nn}^{ij} \cdot D_n^j \end{aligned} \quad \text{Avec } i=1..n \quad (27)$$

Avec  $A_{ss}^{ij}$ ,  $A_{sn}^{ij}$ ,  $A_{ns}^{ij}$ ,  $A_{nn}^{ij}$  les coefficients d'influence des contraintes.

En appliquant le principe de superposition, et tenant compte de l'influence des N éléments, le champ de contraintes s'écrit [2] :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_j A_{ss}^{ij} \cdot D_s^j + \sum_j A_{sn}^{ij} \cdot D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_j A_{ns}^{ij} \cdot D_s^j + \sum_j A_{nn}^{ij} \cdot D_n^j \end{aligned} \quad \text{Avec } i=1..n \quad (28)$$

De manière identique on établit le champ de déplacement [2]:

$$\begin{aligned} U_s^i &= \sum_j B_{ss}^{ij} \cdot D_s^j + \sum_j B_{sn}^{ij} \cdot D_n^j \\ U_n^i &= \sum_j B_{ns}^{ij} \cdot D_s^j + \sum_j B_{nn}^{ij} \cdot D_n^j \end{aligned} \quad \text{Avec } i=1..n \quad (29)$$

Avec  $B_{ss}^{ij}$ ,  $B_{sn}^{ij}$ ,  $B_{ns}^{ij}$ ,  $B_{nn}^{ij}$  les coefficients d'influence des déplacements.

### Coefficients d'influences

Soit un contour  $\Omega$  discrétisé, sur lequel on considère deux éléments distincts « i » et « j », liés chacun à un repère local  $(x, y)$  et  $(x', y')$  respectivement. Les deux repères sont reliés par les relations suivantes :

$$x = x' \cos \gamma + y' \sin \gamma$$

$$y = -x' \sin \gamma + y' \cos \gamma$$

Où  $\gamma = \beta^i - \beta^j$  (inclinaison du  $i^{\text{ème}}$  élément par rapport au  $j^{\text{ème}}$  élément).

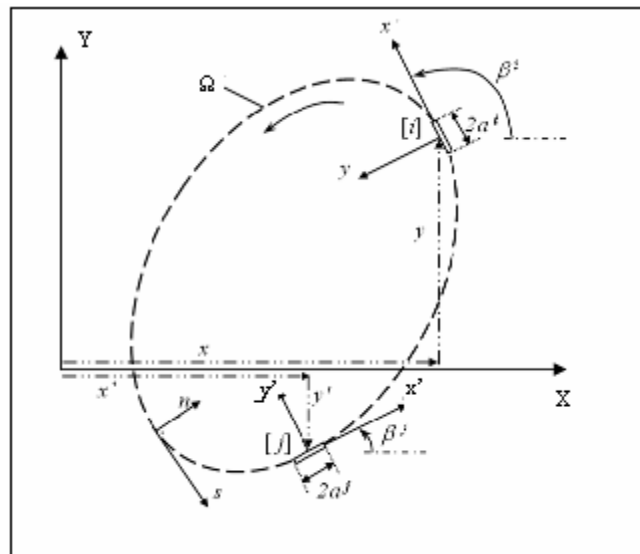


FIG 6 – Représentation de deux éléments sur un contour

De manière analogue aux équations (25a) et (25b) et en utilisant les composantes normales et tangentielles on trouve les expressions des déplacements [1] :

$$\begin{aligned} U_s^i = & D_s^j [-(1-2\nu)\sin \gamma F_2 + 2(1-\nu)\cos \gamma F_3 + y'(\sin \gamma F_4 - \cos \gamma F_5)] \\ & + D_n^j [-(1-2\nu)\cos \gamma F_2 - 2(1-\nu)\sin \gamma F_3 - y'(\cos \gamma F_4 + \sin \gamma F_5)] \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} U_n^i = & D_s^j [(1-2\nu)\cos \gamma F_2 + 2(1-\nu)\sin \gamma F_3 - y'(\cos \gamma F_4 + \sin \gamma F_5)] \\ & + D_n^j [-(1-2\nu)\sin \gamma F_2 + 2(1-\nu)\cos \gamma F_3 - y'(\sin \gamma F_4 - \cos \gamma F_5)] \end{aligned}$$

Et pour les contraintes [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_s^i = & 2GD_s^j [- 2 \sin 2\gamma F_4 - \cos 2\gamma F_5 - y'(\sin 2\gamma F_6 - \cos 2\gamma F_7)] \\ & + 2GD_n^j [- y'(\sin 2\gamma F_7 + \cos 2\gamma F_6)]\end{aligned}\quad (30b)$$

$$\begin{aligned}\sigma_n^i = & 2GD_s^j [2 \sin^2\gamma F_4 + \sin 2\gamma F_5 - y'(\cos 2\gamma F_6 + \sin 2\gamma F_7)] \\ & + 2GD_n^j [-F_5 + y'(\sin 2\gamma F_6 - \cos 2\gamma F_7)]\end{aligned}$$

Dans ces expressions les coefficients de  $D_s^j$  et  $D_n^j$  représentent les coefficients d'influences.

Les équations (30a) et (30b) peuvent être mises sous la forme suivante [2]:

$$u_s^i = B_{ss}^{ij} \cdot D_s^j + B_{sn}^{ij} \cdot D_n^j \quad (31a)$$

$$u_n^i = B_{ns}^{ij} \cdot D_s^j + B_{nn}^{ij} \cdot D_n^j$$

$$\sigma_s^i = A_{ss}^{ij} \cdot D_s^j + A_{sn}^{ij} \cdot D_n^j \quad (31b)$$

$$\sigma_n^i = A_{ns}^{ij} \cdot D_s^j + A_{nn}^{ij} \cdot D_n^j$$

Où :

$$B_{ss}^{ij} = [-(1-2\nu)\sin \gamma F_2 + 2(1-\nu)\cos \gamma F_3 + y'(\sin \gamma F_4 - \cos \gamma F_5)]$$

$$B_{sn}^{ij} = [-(1-2\nu)\sin \gamma F_2 + 2(1-\nu)\cos \gamma F_3 - y'(\sin \gamma F_4 - \cos \gamma F_5)]$$

$$B_{ns}^{ij} = [(1-2\nu)\cos \gamma F_2 + 2(1-\nu)\sin \gamma F_3 - y'(\cos \gamma F_4 + \sin \gamma F_5)]$$

$$B_{nn}^{ij} = [-(1-2\nu)\sin \gamma F_2 + 2(1-\nu)\cos \gamma F_3 - y'(\sin \gamma F_4 - \cos \gamma F_5)]$$

$$A_{ss}^{ij} = 2G [- 2 \sin 2\gamma F_4 - \cos 2\gamma F_5 - y'(\sin 2\gamma F_6 - \cos 2\gamma F_7)]$$

$$A_{sn}^{ij} = 2G [- y'(\sin 2\gamma F_7 + \cos 2\gamma F_6)]$$

$$A_{ns}^{ij} = 2G [2 \sin^2\gamma F_4 + \sin 2\gamma F_5 - y'(\cos 2\gamma F_6 + \sin 2\gamma F_7)]$$

$$A_{nn}^{ij} = 2GD_n^j [-F_5 + y'(\sin 2\gamma F_6 - \cos 2\gamma F_7)]$$

$B_{ss}^{ij}$  par exemple représente l'effet de la  $j^{\text{ème}}$  composante tangentielle de la discontinuité de déplacement,  $D_s$ , sur la composante tangentielle du déplacement  $U_s$ , au milieu du  $i^{\text{ème}}$  élément.

### Influence de l'élément sur lui-même

Ils représentent l'influence d'une discontinuité de déplacement se trouvant sur l'élément  $i$ , sur les contraintes et les déplacements au milieu de ce même élément

Ces éléments sont obtenus en posant :  $x'=0$ ,  $y'=0$  et  $\gamma=0$ , dans les relations (30a) et (30b) ; on obtient alors pour un élément  $i$  [1] :

$$U_s^i = D_s^j [2(1-\nu) F_3(0,0)] + D_n^j [-(1-2\nu) F_2(0,0)] \quad (32a)$$

$$U_n^i = D_s^j [(1-2\nu) F_2(0,0)] + D_n^j [2(1-\nu)\gamma F_3(0,0)]$$

Et

$$\sigma_s^i = 2GD_s^j [-F_5(0,0)] \quad (32b)$$

$$\sigma_n^i = 2GD_n^j [-F_5(0,0)]$$

Après calcul on trouve:

$$F_2(0,0) = 0 ;$$

$$F_3(0,0^+) = -\frac{1}{4(1-\nu)}$$

$$F_3(0,0^-) = \frac{1}{4(1-\nu)}$$

$$F_5(0,0^+) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)a^i} \quad ; a^i : \text{demi-largeur de l'élément } I$$

Donc :

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0 \quad ; B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \pm 1/2 \text{ pour } y'=0^+.$$

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \quad ; A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = \frac{G}{\pi(1-\nu)a^i}$$



## Conditions de symétrie

La symétrie pour un solide par rapport à un axe, n'est satisfaite que lorsque les propriétés élastiques, la configuration géométrique et les conditions aux limites de ce solide sont toutes symétriques par rapport à cet axe.

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problème par la méthode des discontinuités de déplacement est d'une grande importance, quand on sait que la système d'équations est réduit de moitié dans le cas de la simple symétrie (figure 7a et 7b ), et d'un quart dans le cas de la double symétrie (figure 8).

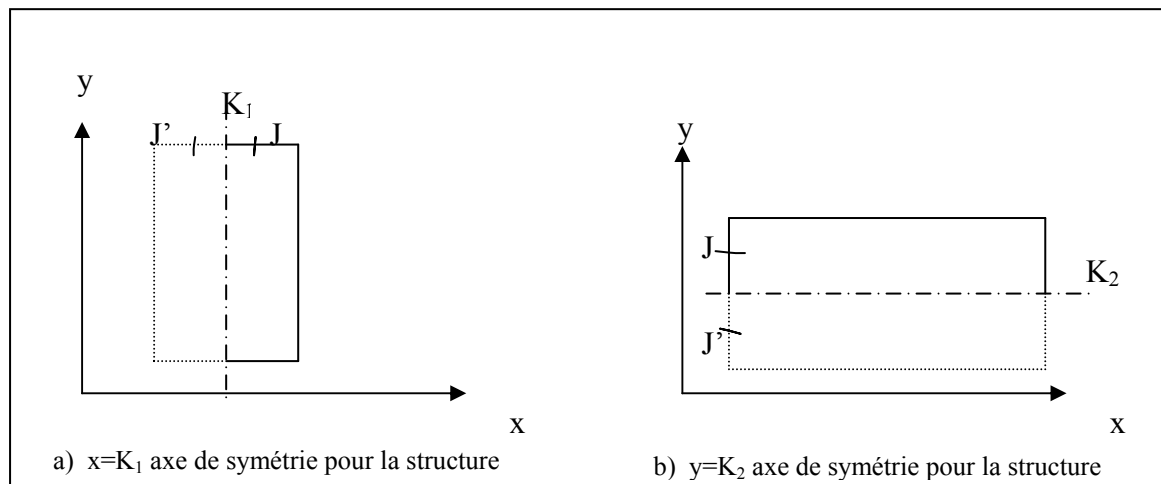


FIG 7 – Représentation d'une simple symétrie

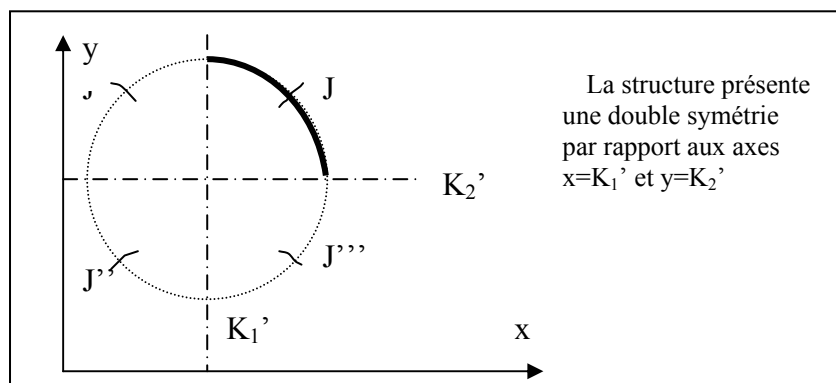


FIG 8 – Représentation d'une double symétrie

Etant symétrique, l'élément « j » et sont image « j' » auront des discontinuités de déplacement tangentielle égales mais de signe opposées, tandis que les discontinuités de déplacement normales seront de même signe, ceci se traduit par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} D_n^j &= D_n^{j'} & \sigma_n^j &= \sigma_n^{j'} & U_n^j &= U_n^{j'} \\ D_s^j &= - D_s^{j'} & \sigma_s^j &= - \sigma_s^{j'} & U_s^j &= - U_s^{j'} \end{aligned}$$

# **Construction du post et pré processeur**

## Construction du post et pré processeur

### 1.5 Introduction

Les post et pré processeur ou interfaces graphiques sont très importants dans l'exploitation et l'utilisation d'un programme.

L'interface facilite à l'utilisateur la manipulation du programme, elle rend le programme interactif.

Le code de la Méthode de Discontinuité de Déplacement (présentée dans le chapitre1) comme tous les codes de calculs se compose de trois parties :

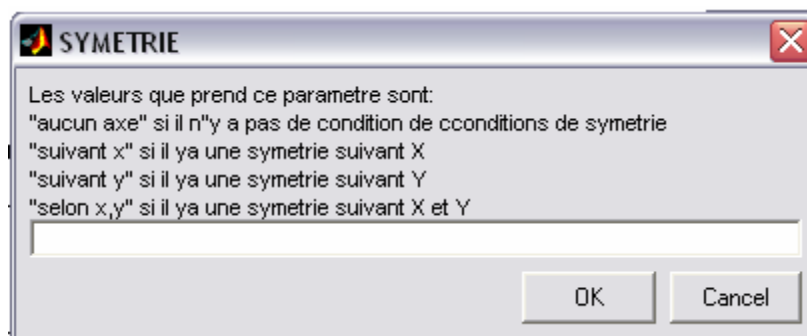
- Lecture de données
- Calculs
- Renvoi des résultats

Notre travail a essentiellement porté sur la première et la dernière étape et nous allons voir dans ce qui suit comment fonctionne le programme en présentant son algorithme.

### 1.6 Algorithme du programme

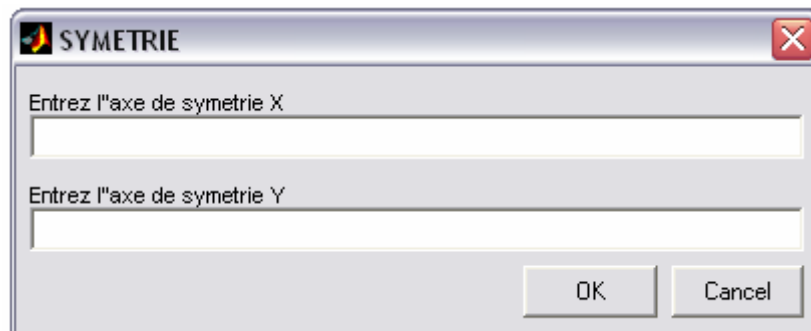
Quand le programme de visualisation des déformations des structures est exécuté, il suit les étapes suivantes :

Etape 1 : création de la boîte de dialogue « SYMETRIE »



Cette dernière invite l'utilisateur à choisir le type de symétrie du problème.

Etape 2 : le programme génère une boîte de dialogue qui invite l'utilisateur à introduire les axes de symétrie (s'ils existent)



on introduit les valeurs dans le champ approprié et on clic sur OK

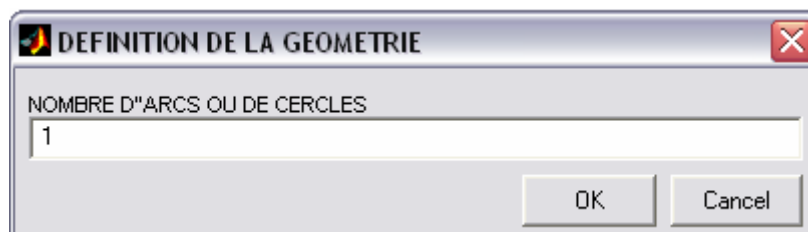
Etape 3 : on choisit la géométrie du domaine simplement en cliquant sur le bouton qui correspond



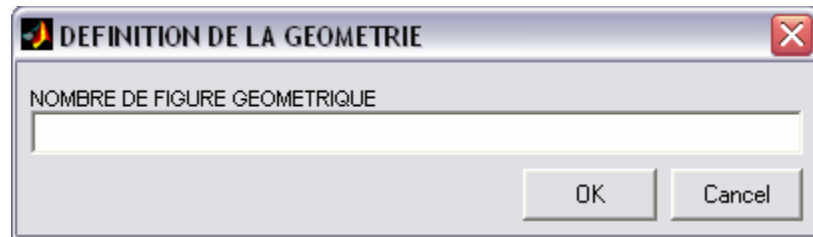
Après avoir sélectionné la géométrie le programme va créer une série de boîtes « DEFINITION DE LA GEOMETRIE », qui permettront de saisir les données géométriques dont le programme a besoin..

Etape 4 : on entre le nombre de figures géométriques qui définissent le domaine

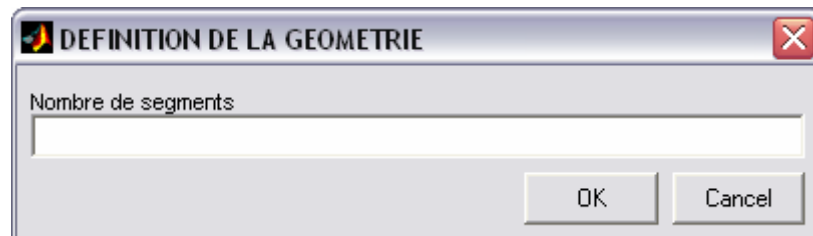
- Si on clic sur « ARCS OU CERCLES » le code retourne la boîte suivante



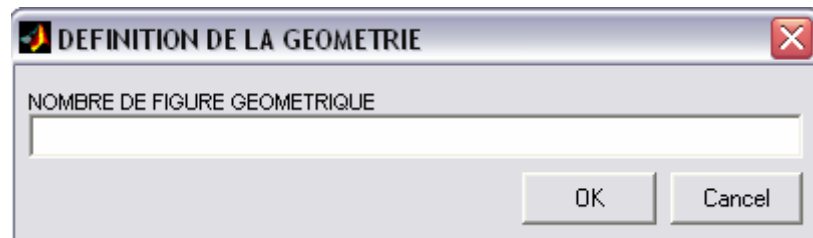
- Si on clic sur « SEGMENTS ET POLYGONES »le code retourne la boite qui suit :



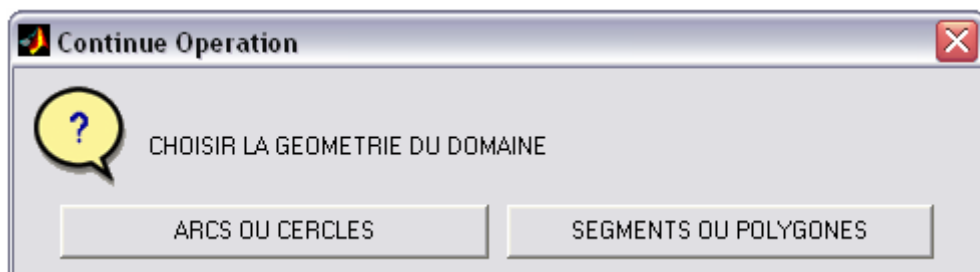
Après voir choisit le nombre de figure, il faut déterminer le nombre de segments que comporte chaque figure :



- Si on clic sur « ARCS ET SEGMENTS » le code renvoi la boite suivante :



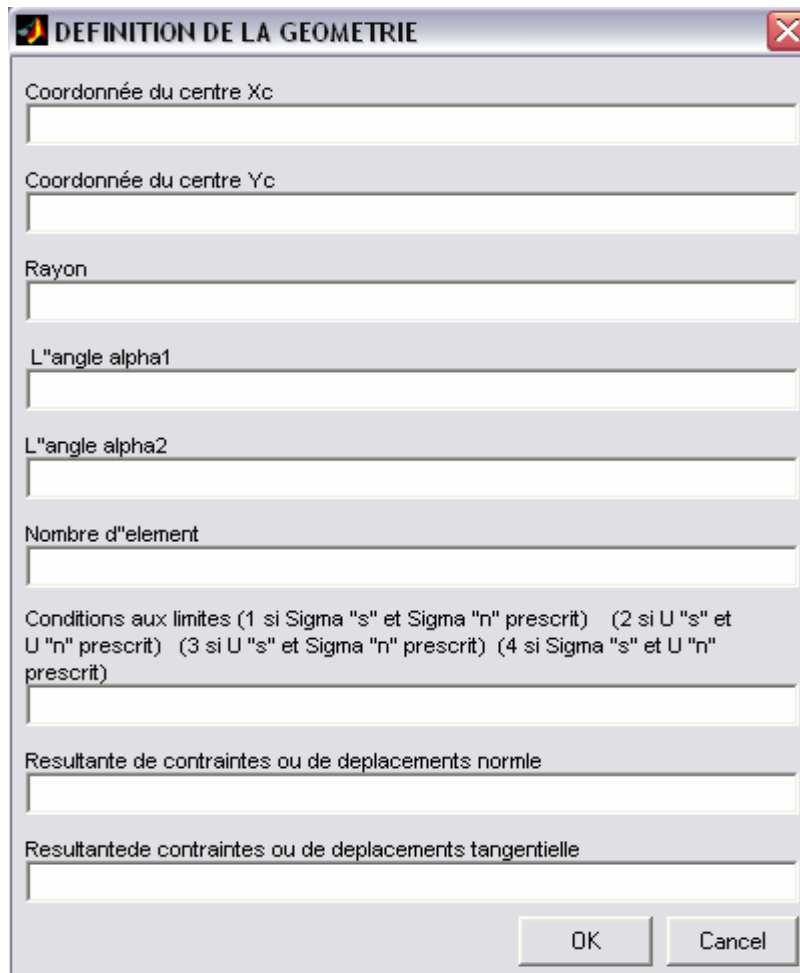
En choisissant le nombre e figure la boite suivante apparaît :



en cliquant sur l'un des deux bouton, on est renvoyé vers l'étape suivante.

Etape 5: La boîte qui est construite à ce moment du programme sert à entrer les paramètres concernant la figure géométrique, ainsi que les conditions aux limites prescrites sur cette dernière.

- Dans le cas « ARCS OU CERCLES » le code renvoi la boîte suivante :



The image shows a software dialog box titled "DEFINITION DE LA GEOMETRIE". It contains several input fields for defining geometric parameters:

- Coordonnée du centre Xc
- Coordonnée du centre Yc
- Rayon
- L'angle alpha1
- L'angle alpha2
- Nombre d'element
- Conditions aux limites (1 si Sigma "s" et Sigma "n" prescrit) (2 si U "s" et U "n" prescrit) (3 si U "s" et Sigma "n" prescrit) (4 si Sigma "s" et U "n" prescrit)
- Resultante de contraintes ou de déplacements normale
- Resultante de contraintes ou de déplacements tangentielle

At the bottom right, there are "OK" and "Cancel" buttons.

- Dans le cas « SEGMENTS ET POLYGONES » le code renvoi la boite suivante :

DEFINITION DE LA GEOMETRIE

Nombre d'éléments pour chaque segment

La valeur de Xdébut

La valeur de Ydébut

La valeur de X fin

La valeur de Yfin

Conditions aux limites (1 si Sigma "s" et Sigma "n" prescrit) (2 si U "s" et U "n" prescrit) (3 si U "s" et Sigma "n" prescrit) (4 si Sigma "s" et U "n" prescrit)

Resultante de contraintes ou de déplacements normale

Resultante de contraintes ou de déplacements tangentielle

OK Cancel

Etape 6 : Le code utilise les données saisies précédemment pour discrétiser le domaine, pour ce fait, et pour chaque figure, il fait appel aux fonctions de discrétisation appropriées.

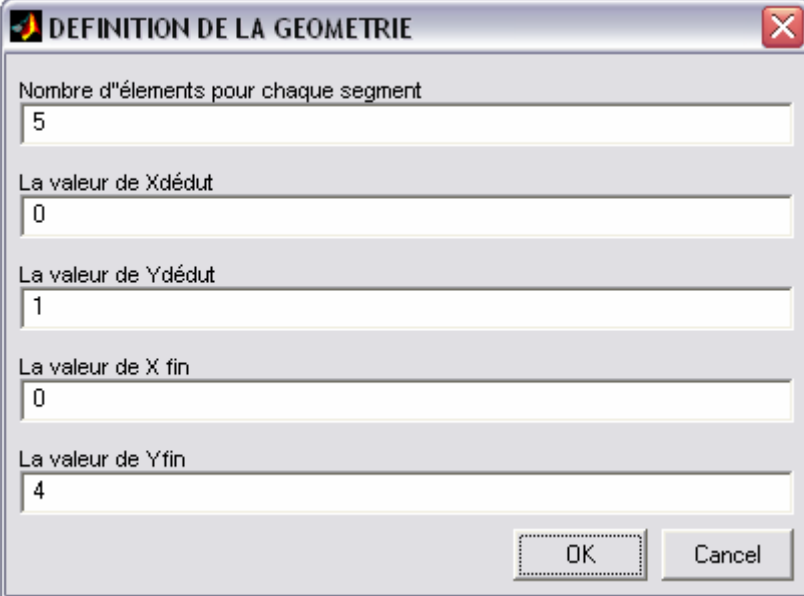
Etape 7 : Si on veut visualiser les déplacements sur des segments spécifiques hors du contour, on entre le nombre de ces derniers dans le champ qui est produit après la discrétisation du domaine ; ce champ sera affiché sous la forme suivante :

DEFINITION DE LA GEOMETRIE

Nombre de segments ( HORS DU CONTOUR) sur lesquels on veut effectuer le calcul

OK Cancel

Etape 8 : On entre les coordonnées des segments spécifiques via la boîte suivante :



DEFINITION DE LA GEOMETRIE

Nombre d'éléments pour chaque segment  
5

La valeur de Xdébut  
0

La valeur de Ydébut  
1

La valeur de X fin  
0

La valeur de Yfin  
4

OK Cancel

Cette boîte est la dernière de la série « DEFINITION DE LA GEOMETRIE ».

Etape 9 : Pour pouvoir effectuer le calcul, la géométrie et les conditions aux limites seuls ne suffisent pas, il faut introduire le chargement auquel est soumis le domaine, ainsi que ses caractéristiques (Module de YOUNG et coefficient de POISSON). La boîte qui est générée par le code à cet instant de l'exécution est prévue à cet effet.



CHARGEMENT

Module de YOUNG

Coefficient de POISSON

SIGMA XX

SIGMA YY

SIGMA XY

OK Cancel



Les boîtes de dialogues construites jusqu'à présent on servit à aider l'utilisateur à introduire tous les paramètres nécessaire au programme pour entamer les calculs, lesquels se dérouleront en suivant le schéma si après :

Etape 10: Calcul des coefficients d'influences et mise en place du système d'équations.

Etape 11 : Résolution du système d'équations et détermination de discontinuités de déplacement.

Etape 12 : Calcul des contraintes et des déplacements sur les éléments.

Etape 13 : Détermination des nouvelles coordonnées des centres des éléments.

Etape 14 : Evaluation du déplacement et des contraintes aux points spécifiques choisis.

Etape 15 : Calcul des nouvelles coordonnées pour les points spécifiques choisis.

Etape 16 : Appel de la fonction de dessin .

Etape 17 : Création d'une légende pour le dessin

Etape 18 : Affichage de la structure déformée.

L'affichage des résultats sera illustré dans le Chapitre III par des exemples concrets.

# **EXEMPLES D'ILLUSTRATION**

## Exemples d'illustrations

### I.7 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment fonctionne le code. Dans ce chapitre nous allons voir l'affichage des résultats en utilisant deux exemples tirés de la littérature.

### I.8 Exemples

#### Exemple 1

Soit un domaine infini, ayant les caractéristiques suivantes :

$E = 70000 \text{ MPa}$  (Module de YOUNG)

$\nu = 0.2$  (Coefficient de POISSON)

Ce domaine comporte une cavité de forme circulaire, de centre  $O(0,0)$  et de rayon  $R=1$ , il est soumis à un effort axial  $\sigma_{xx}=100 \text{ MPa}$ , et à une double symétrie suivant les axes  $X=0$  et  $Y=0$  comme le montre la figure 9

Les coordonnées des points spécifiques sont indiquées sur le schéma.

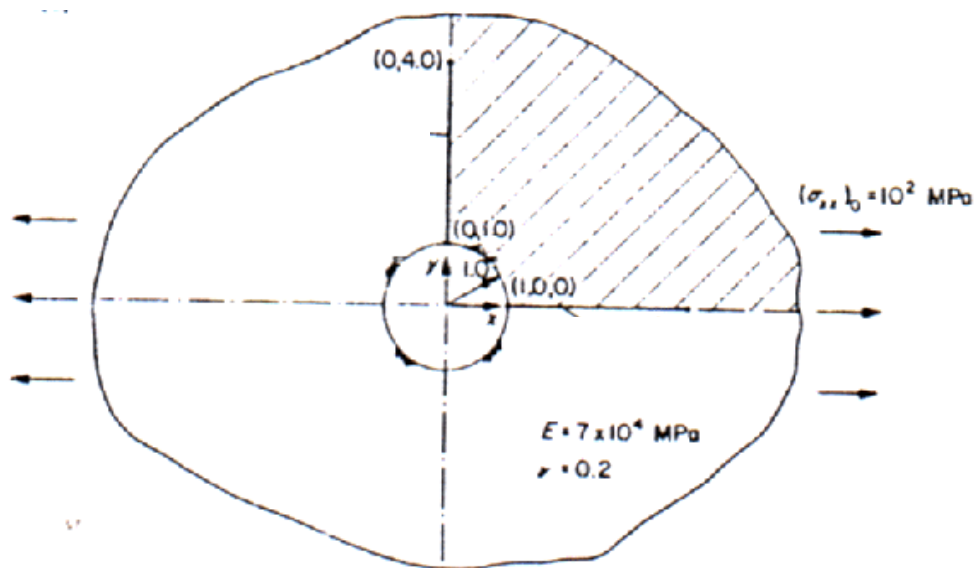
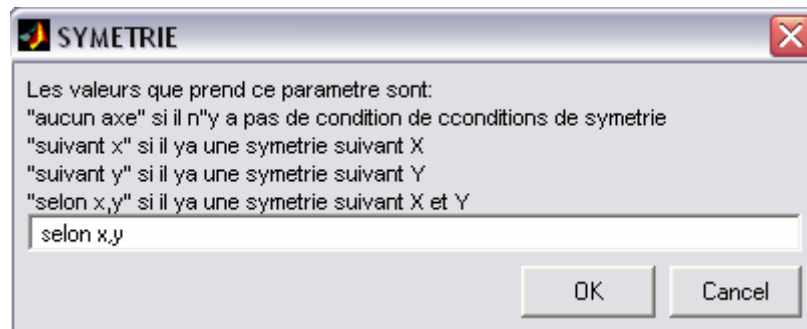


FIG 9 – Représentation schématique du domaine

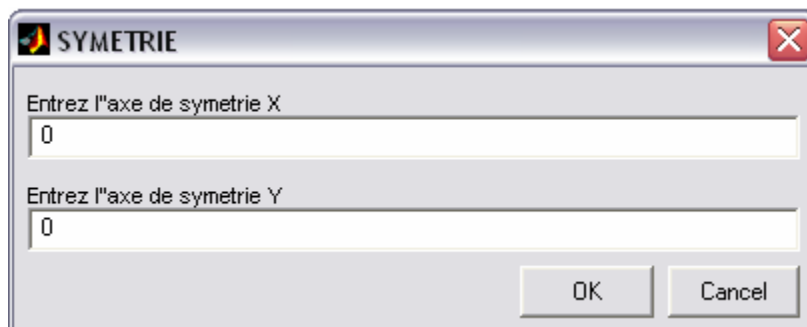
Etant donné la double symétrie, on n'introduira que le quart du domaine.

L'introduction des données pour ce problème ce fera de la manière suivante :

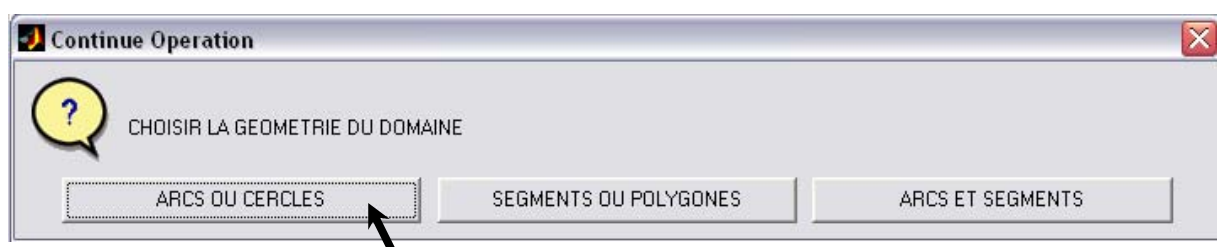
Choix de la symétrie :



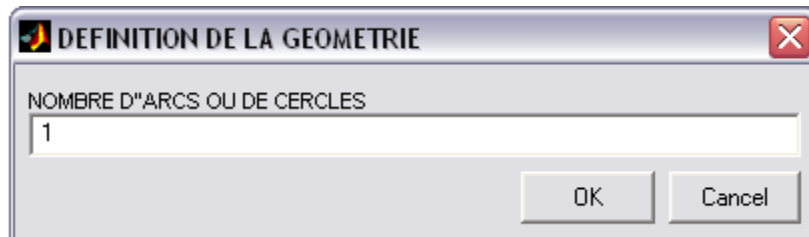
Introduction des axes de symétrie



Choix de la géométrie du domaine :



Introduction du nombre de figure :



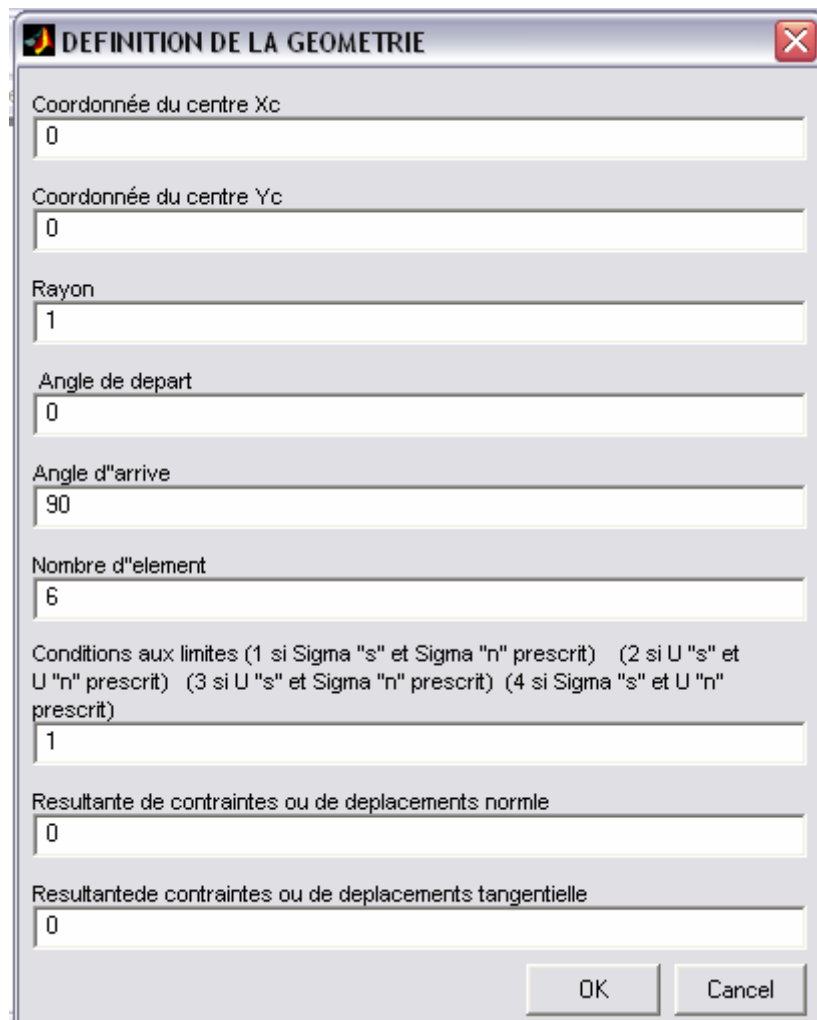
DEFINITION DE LA GEOMETRIE

NOMBRE D'ARCS OU DE CERCLES

1

OK Cancel

Saisie des paramètres relatifs à la cavité ( centre, rayon, angle de départ, angle d'arrivé, nombre d'éléments, conditions aux limites).



DEFINITION DE LA GEOMETRIE

Coordonnée du centre Xc

0

Coordonnée du centre Yc

0

Rayon

1

Angle de depart

0

Angle d'arrive

90

Nombre d'element

6

Conditions aux limites (1 si Sigma "s" et Sigma "n" prescrit) (2 si U "s" et U "n" prescrit) (3 si U "s" et Sigma "n" prescrit) (4 si Sigma "s" et U "n" prescrit)

1

Resultante de contraintes ou de déplacements norme

0

Resultantede contraintes ou de déplacements tangentielle

0

OK Cancel

On entre le nombre de segments sur lesquels on veut déterminer les déplacements et contraintes ainsi que leurs position et le nombre d'éléments qu'ils les composent .

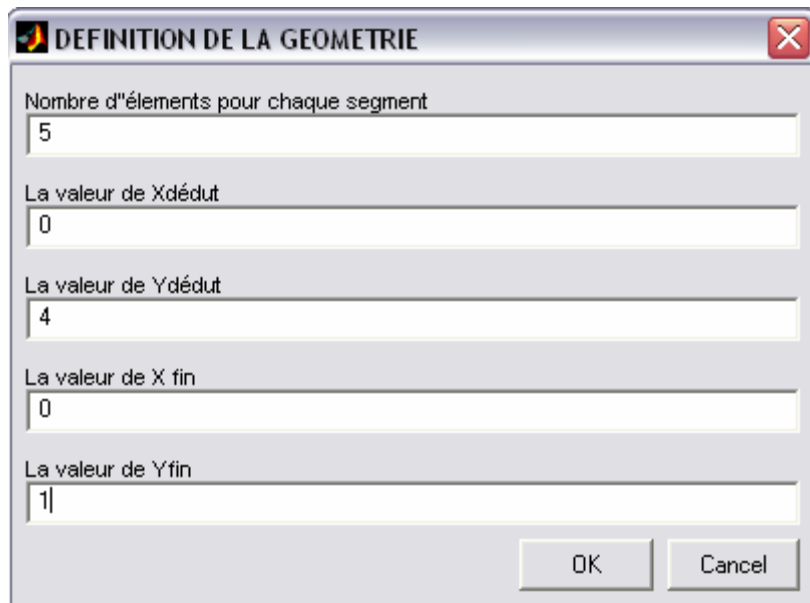


**DEFINITION DE LA GEOMETRIE**

Nombre de segments ( HORS DU CONTOUR) sur lesquels on veut effectuer le calcul

2

OK Cancel



**DEFINITION DE LA GEOMETRIE**

Nombre d'éléments pour chaque segment

5

La valeur de Xdébut

0

La valeur de Ydébut

4

La valeur de X fin

0

La valeur de Y fin

1

OK Cancel

On introduit les caractéristiques du domaine et le chargement.



**CHARGEMENT**

Module de YOUNG

70000

Coefficient de POISSON

0.2

SIGMA XX

100

SIGMA YY

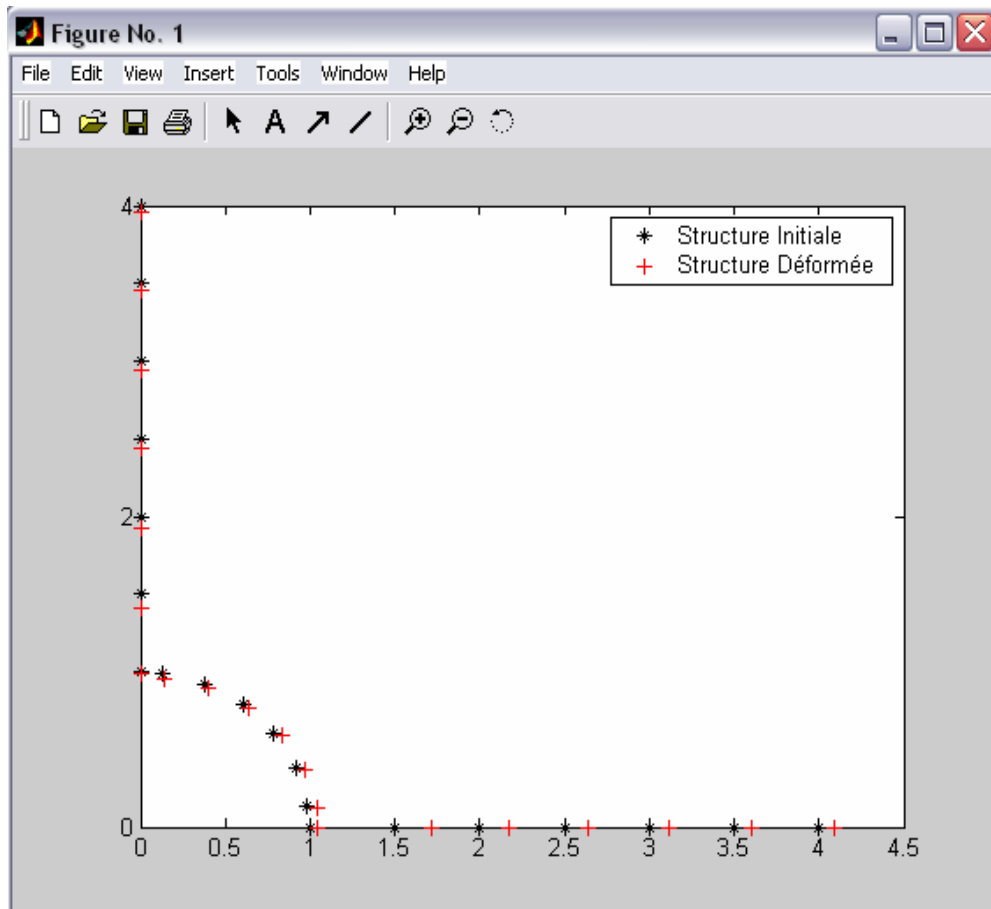
0

SIGMA XY

0

OK Cancel

Le programme retourne la fenêtre suivante :



**REMARQUE :**

Les déplacements représentés sur la figure ci-dessus ne sont pas les valeurs réelles des déplacements que subissent les centre des éléments, ils ont été amplifié juste pour pouvoir être visualisés, et les valeurs que retourne le code peuvent être résumés dans le tableau suivant :

ELEMENT	$D_S$	$D_N$	$U_X$	$U_Y$
1	-0.00070645	-0.0039735	0.00270876	-0.00013405
2	-0.0019461	-0.0032952	0.00254109	-0.00038498
3	-0.0026665	-0.0021188	0.00220598	-0.00059387
4	-0.0026714	-0.0007593	0.00171423	-0.00074602
5	-0.0019579	0.0004187	0.00108897	-0.00084098
6	-0.00071718	0.001099	0.00037386	-0.00088500

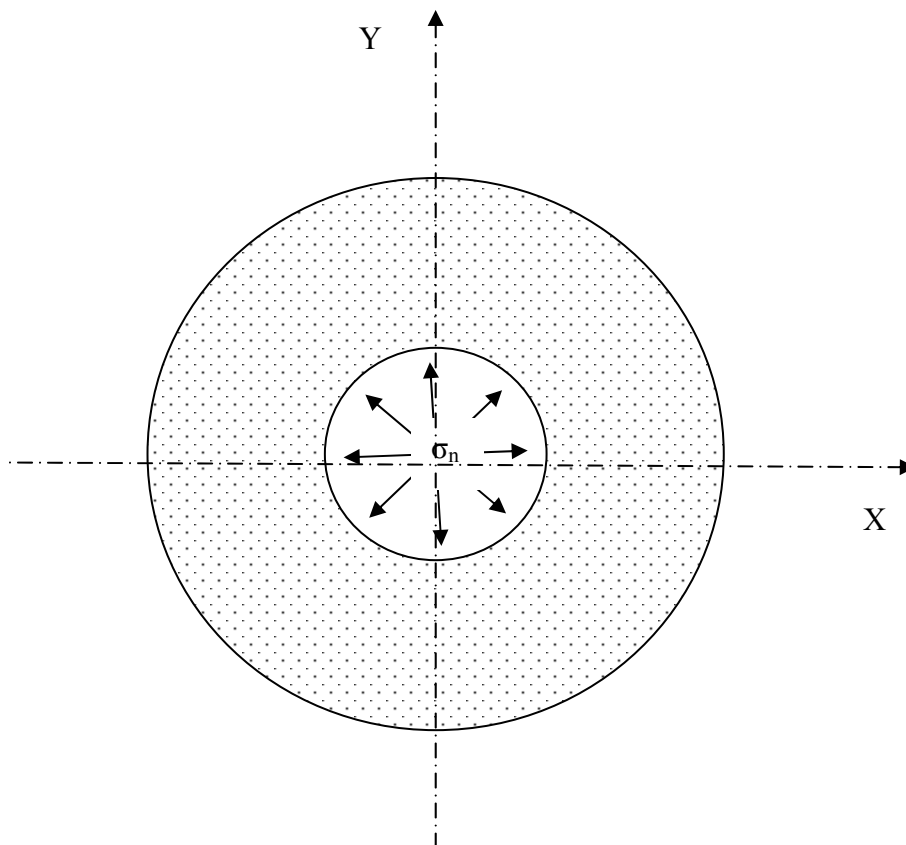
**Exemple 2**

Soit un domaine défini comme sur la figure 4 , ayant les caractéristiques suivantes :

$E= 70000$  MPa (Module de YOUNG)

$\nu =0.2$  ( Coefficient de POISSON)

Ce domaine est un tube de centre  $O(0,0)$ , de rayon intérieur  $R_i =1$  et de rayon extérieur  $R_e=2$ , l'intérieur est soumis à un effort normal  $\sigma_n=100$  MPa, et à une double symétrie suivant les axes  $X=0$  et  $Y=0$ .(figure 10)

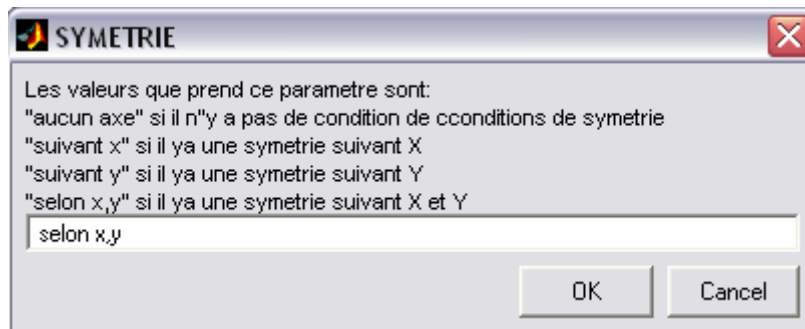


**FIG 10 – Représentation schématique du domaine**

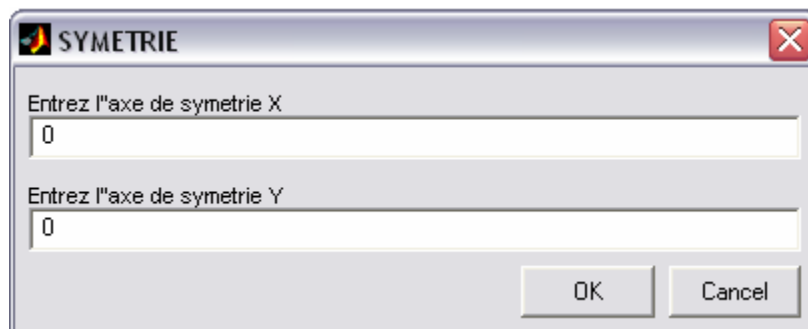


L'entrée des données pour ce problème se fait de la façon suivante :

Choix de la symétrie :



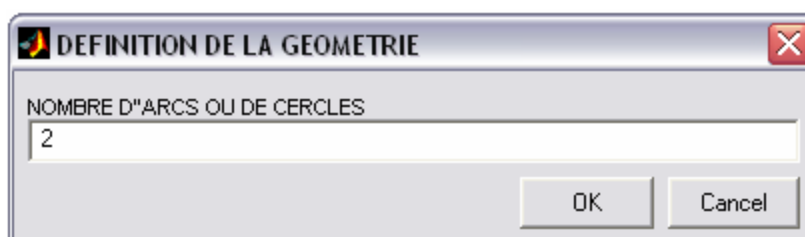
Introduction des axes de symétrie



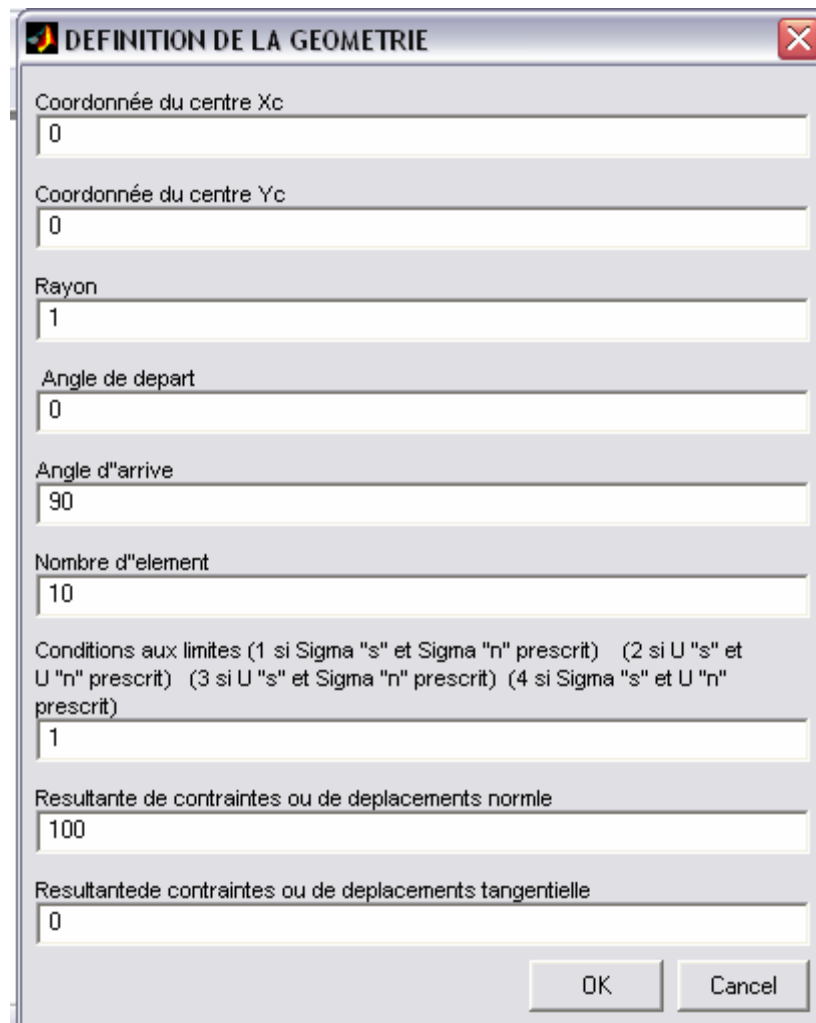
Choix de la géométrie du domaine :



Introduction du nombre de figure : dans ce cas nous avons deux cercles.



Saisie des paramètres relatifs au cercle intérieur tout en prenant en considération que c'est un problème extérieur.



The image shows a dialog box titled "DEFINITION DE LA GEOMETRIE" with a close button (X) in the top right corner. The dialog contains several input fields for defining geometric parameters:

- Coordonnée du centre Xc: 0
- Coordonnée du centre Yc: 0
- Rayon: 1
- Angle de depart: 0
- Angle d'arrive: 90
- Nombre d'element: 10
- Conditions aux limites (1 si Sigma "s" et Sigma "n" prescrit) (2 si U "s" et U "n" prescrit) (3 si U "s" et Sigma "n" prescrit) (4 si Sigma "s" et U "n" prescrit): 1
- Resultante de contraintes ou de déplacements normale: 100
- Resultante de contraintes ou de déplacements tangentielle: 0

At the bottom right, there are two buttons: "OK" and "Cancel".

Ensuite on entre les paramètres du cercle extérieur, qui lui représente le contour d'un domaine intérieur.

**DEFINITION DE LA GEOMETRIE**

Coordonnée du centre Xc  
0

Coordonnée du centre Yc  
0

Rayon  
2

Angle de depart  
90

Angle d'arrive  
0

Nombre d'element  
10

Conditions aux limites (1 si Sigma "s" et Sigma "n" prescrit) (2 si U "s" et U "n" prescrit) (3 si U "s" et Sigma "n" prescrit) (4 si Sigma "s" et U "n" prescrit)  
1

Resultante de contraintes ou de déplacements normale  
0

Resultante de contraintes ou de déplacements tangentielle  
0

OK Cancel

N'ayant pas choisi de points hors du contour pour y déterminer les déplacements, lorsque la boîte prévue à cet effet s'affiche on entre la valeur zéro.

**DEFINITION DE LA GEOMETRIE**

Nombre de segments ( HORS DU CONTOUR) sur lesquels on veut effectuer le calcul  
0

OK Cancel

Ne reste plus qu'à introduire les caractéristiques du domaine et le chargement

**CHARGEMENT**

Module de YOUNG  
70000

Coefficient de POISSON  
0.2

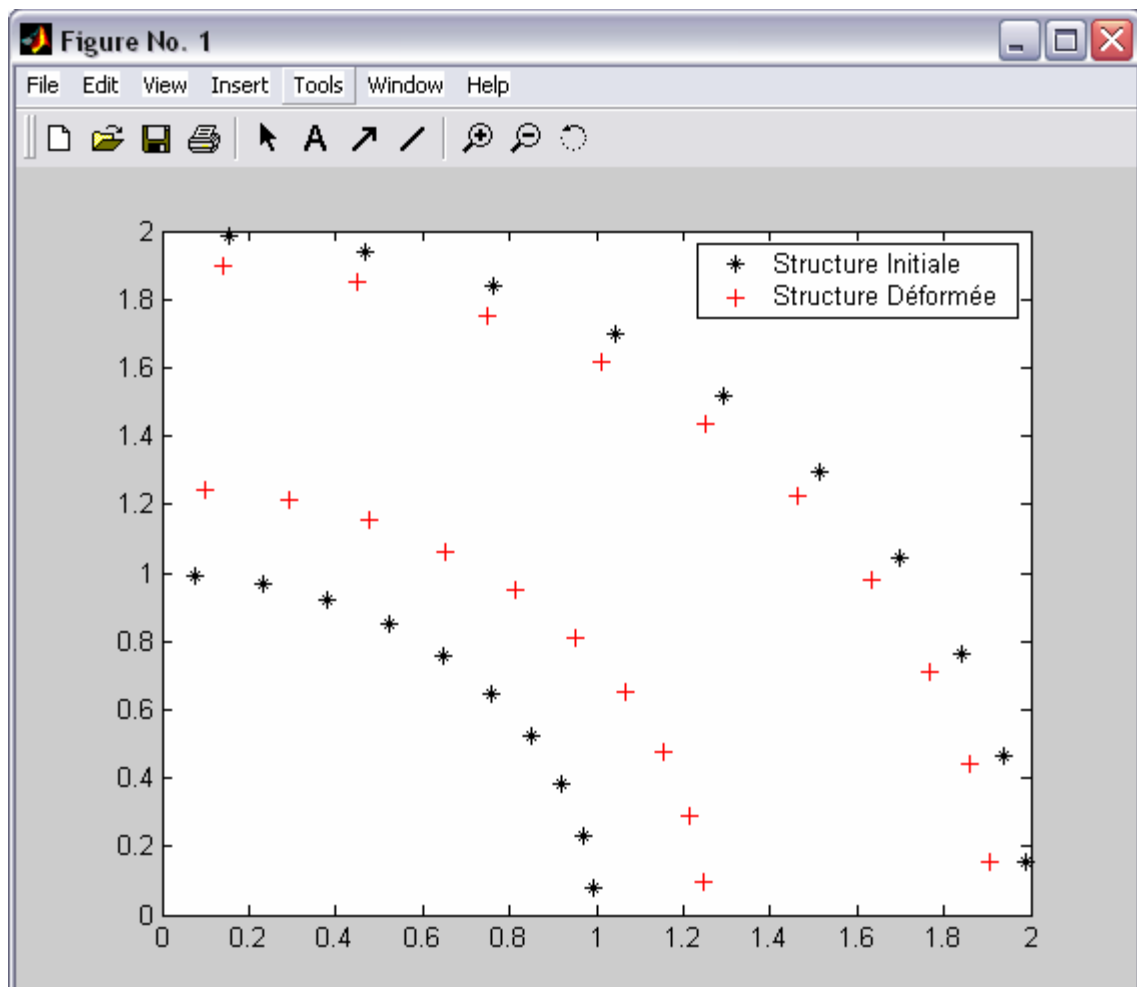
SIGMA XX  
0

SIGMA YY  
0

SIGMA XY  
0

OK Cancel

Le résultat à ce problème se présente sous la forme suivante :



Les valeurs calculées sont résumées dans le tableau suivant :

<b>ELEMENT</b>	<b>D<sub>S</sub></b>	<b>D<sub>N</sub></b>	<b>U<sub>X</sub></b>	<b>U<sub>Y</sub></b>
1	9.8548e-006	0.0029015	0.0025177	0.00018867
2	1.809e-005	0.0028997	0.0024586	0.00057253
3	2.1687e-005	0.002897	0.0023389	0.0008263
4	2.2034e-005	0.0028941	0.0021609	0.0012995
5	1.9986e-005	0.0028915	0.0019286	0.0016218
6	1.6342e-005	0.0028897	0.0016478	0.0019045
7	1.1915e-005	0.0028888	0.0013257	0.0021401
8	7.5088e-006	0.0028888	0.00097061	0.0023223
9	3.801e-006	0.0028894	0.00059178	0.0024464
10	1.0828e-006	0.00289	0.00019879	0.0025092
11	1.3658e-005	0.00013275	-0.00014037	-0.00092841
12	1.6124e-005	0.00013218	-0.00015194	-0.00090457
13	1.6004e-005	0.00013184	-0.00015952	-0.00088125
14	1.4229e-005	0.00013148	-0.00029545	-0.00084537
15	1.1456e-005	0.00013119	-0.00042328	-0.00078743
16	8.2369e-006	0.00013096	-0.00053998	-0.00070996
17	5.0839e-006	0.0001308	-0.00064298	-0.00061552
18	2.4623e-006	0.00013073	-0.00073012	-0.00050658
19	7.334e-007	0.00013076	-0.00078907	-0.00025528
20	2.7952e-008	0.00013083	-0.00080824	1.8665e-006

### Exemple 3

Soit un domaine infini, ayant les caractéristiques suivantes :

$E = 70000 \text{ MPa}$  (Module de YOUNG)

$\nu = 0.2$  (Coefficient de POISSON)

Ce domaine comporte une fissure rectiligne, de longueur  $2a=20$ , il est soumis à un effort axial, suivant l'axe Y  $\sigma_{yy}=100 \text{ MPa}$ , et à une simple symétrie suivant l'axe Y=0 comme le montre la figure 11

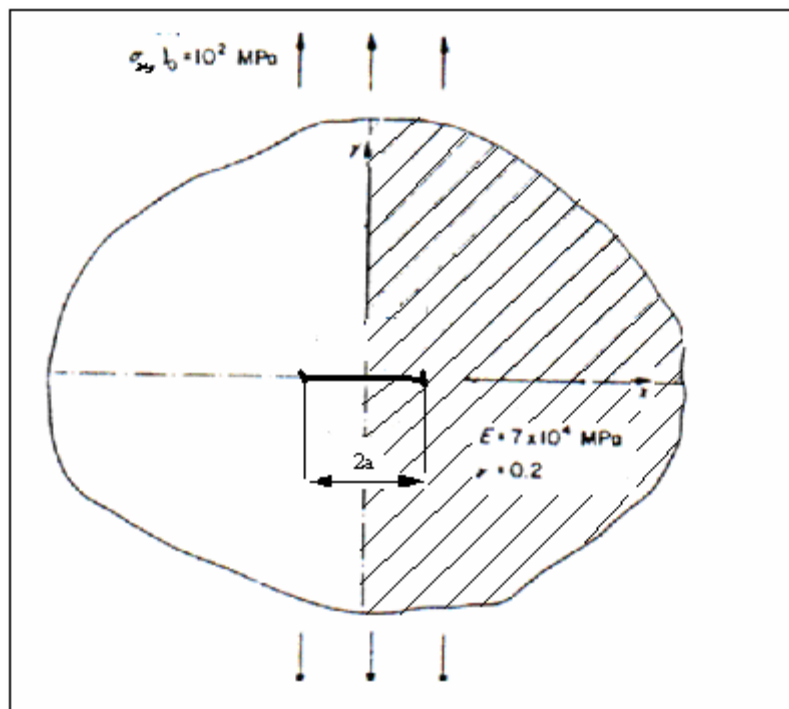
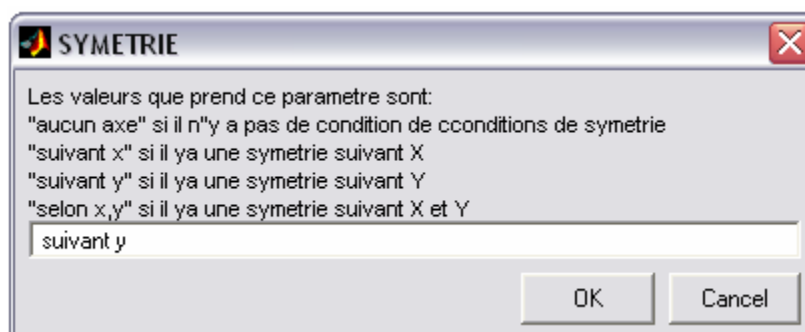


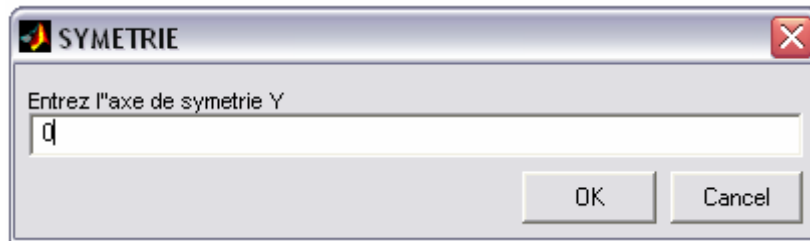
FIG 11– Représentation schématique du domaine

L'introduction des données pour ce problème se fera de la manière suivante :

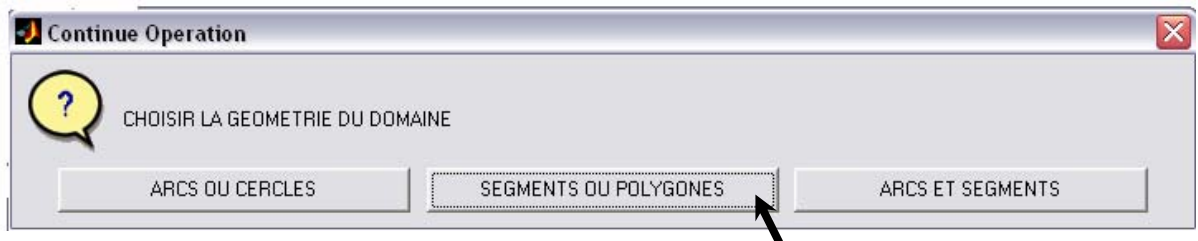
Choix de la symétrie :



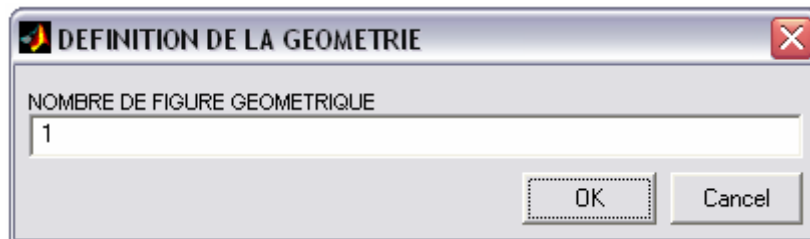
on entre l'axe de symétrie :



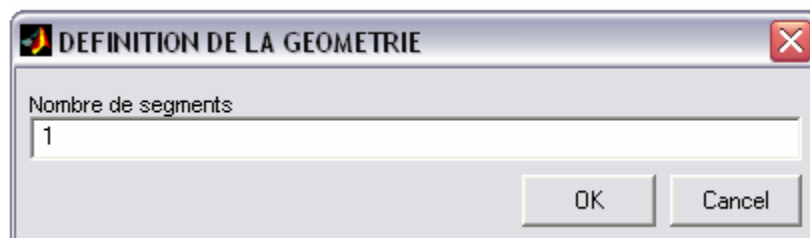
Choix de la géométrie du domaine



On entre le nombre de figure existants dans le domaine



Puis le nombre de segments :



On introduit les coordonnées du segment et les conditions aux limites

**DEFINITION DE LA GEOMETRIE**

Nombre d'éléments pour chaque segment  
10

La valeur de Xdébut  
0

La valeur de Ydébut  
0

La valeur de X fin  
10

La valeur de Y fin  
0

Conditions aux limites (1 si Sigma "s" et Sigma "n" prescrit) (2 si U "s" et U "n" prescrit) (3 si U "s" et Sigma "n" prescrit) (4 si Sigma "s" et U "n" prescrit)  
1

Resultante de contraintes ou de déplacements normale  
0

Resultante de contraintes ou de déplacements tangentielle  
0

OK Cancel

N'ayant pas choisi de points hors du contour pour y déterminer les déplacements, lorsque la boîte prévue à cet effet s'affiche on entre la valeur zéro.

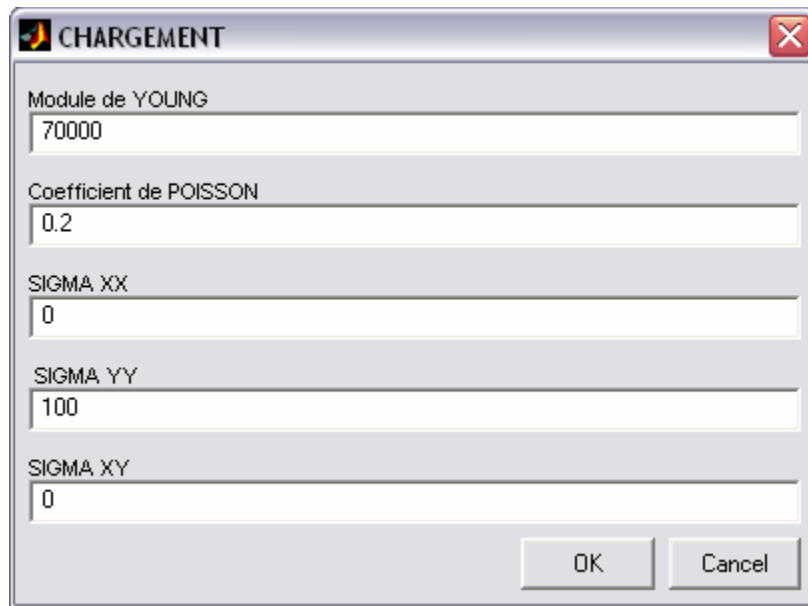
**DEFINITION DE LA GEOMETRIE**

Nombre de segments ( HORS DU CONTOUR) sur lesquels on veut effectuer le calcul  
0

OK Cancel



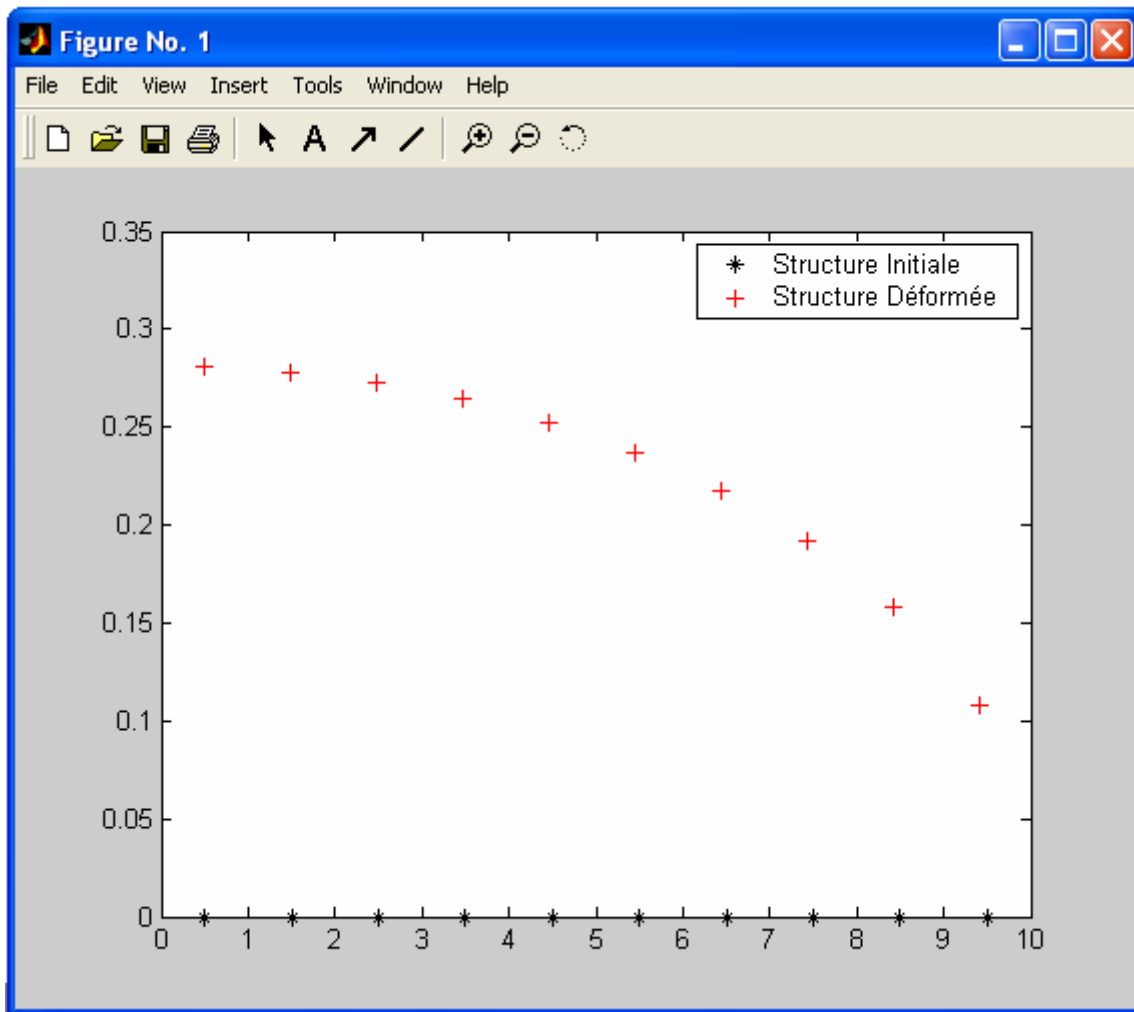
On introduit les caractéristiques du domaine et le chargement



A dialog box titled "CHARGEMENT" with a close button in the top right corner. It contains five input fields for material and loading parameters, and two buttons at the bottom: "OK" and "Cancel".

Paramètre	Valeur
Module de YOUNG	70000
Coefficient de POISSON	0.2
SIGMA XX	0
SIGMA YY	100
SIGMA XY	0

le programme renvoi les résultats comme suit :



# **CONCLUSION GENERAL**

## **Conclusion générale**

Cette étude nous a permis d'aborder la technique de visualisation des structures par imagerie synthétique, une technique qui présente de nombreux avantages surtout pour la conception des structures et leurs entretien.

Nous avons tenté, à travers ce travail de poser des bases pour un logiciel de simulation des structures qui soit aussi performant que possible, mais surtout facile d'utilisation, et dont les résultats sont aisément compréhensibles.

Nous espérons qu'à l'avenir ce programme sera repris, afin d'être amélioré et pour en faire dans un futur proche un logiciel, qui peut prendre en charge des structures complexes du type tridimensionnelles et pouvant en connaissant la position d'une fissure suivre son évolution quand la structure est soumise à n'importe quel type de chargement.

# **ANNEXES**

## Annexe

### REPRESENTATION DE PAPKOVITCH

La représentation de PAPKOVITCH est une manière de représenter le champ de déplacement  $\vec{u}$ , solution de l'équation de LAME, en fonction de certains paramètres vérifiant des conditions prescrites.

Considérons la représentation suivante de la solution de l'équation de LAME :

$$\vec{u} = \vec{B} + \vec{u}_0$$

où  $B$  est la solution de l'équation de POISSON vectorielle :

$$\Delta B + \mu f = 0$$

Et  $u_0$  est un vecteur correctif.

Cherchons  $u_0$  sous la forme :  $\vec{u}_0 = \text{grad } F$

En remplaçant  $u_0$  et  $B$  dans la première équation on trouve :

$$\Delta \vec{u} = -\mu^{-1} \vec{f} + \text{grad } \Delta F ; \quad \text{div } \vec{u} = \text{div } \vec{B} + \Delta F$$

L'équation de BELTRAMI-MICHEL devient, pour  $0 < \nu < 0.5$

$$\text{grad } (\Delta F + \frac{1}{2} (1 - \nu) \text{div } \vec{B}) = 0$$

Il suffit d'avoir comme solution pour cette équation :  $\Delta F = -\frac{1}{2} (1 - \nu)^{-1} \text{div } \vec{B} \dots \dots \dots (**)$

Evaluons  $\Delta(\vec{OM} \cdot \vec{B})$ , on a d'abord :

$$\Delta(\vec{OM} \cdot \vec{B}) = 2 \text{div } \vec{B} + \vec{OM} \cdot \Delta \vec{B}$$

On obtient finalement :

$$\text{Div } \vec{B} = \frac{1}{2} \Delta(\vec{OM} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{2} \mu^{-1} \vec{OM} \cdot \vec{B}$$

En remplaçant cette expression dans (\*\*), on trouve :

$$\Delta [ F + \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{B}) ] = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \mu^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{f})$$

$$\text{En posant : } F + \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{B}) = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} B_0$$

On obtient :

$$\Delta B_0 = \mu^{-1} (\vec{OM} \cdot \vec{f}).$$

Et on a :

$$F = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{B} + B_0)$$

Le terme correctif  $u_0$  est ainsi déterminé, et la solution  $u$  admet la représentation suivante :

$$u = B - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \text{grad}(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{B} + B_0)$$

Avec :  $\Delta B = -\mu^{-1} f$  ;  $\Delta B_0 = \mu^{-1} (\overrightarrow{OM} \cdot f)$ .

Cette représentation est connue sous le nom de représentation de PAPKOVITCH

## BIBLIOGRGHIE

- [1] **S.L.CROUCH** : *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method*  
(Int.J.Num.Methods 1976)
- [2] **S.L.CROUCH – A.M.STRFIELD** : *Boundary element methode in solid mechanics*  
(George Allen & Anwin 1983)
- [3] **M.GHOUALI** : *Modélisation par la méthode des discontinuités de déplacement des milieux multicouches élastiques et viscoélastiques*  
(PFE 1992-ENP)
- [4] **S.ATIF** : *Expérimentation sur le comportement viscoélastique des matériau - Simulation par la méthode des discontinuités de déplacement*  
(PFE Juin 1996-ENP)
- [5] **KEH-JIAN SHOU & J.A.L NAPIER** : *A two-dimensionl linear variation displacement discontinuity methode for three-layered elastic media*  
(International Journal of Rocjs mechanics and Mining Science 1999)

### Sources Internet:

[6] [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

[7] [www.developpe.com](http://www.developpe.com)