

## Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

**THESE**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Pour l'obtention du Diplôme de

## MAGISTER EN GENIE CIVIL

Présentée par

**Nourredine MEZOUER**

Ingénieur d'État en Génie Civil, ENP Juillet 1993

---

# ANALYSE SISMIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DES STRUCTURES SOUMISES A DES EXCITATIONS D'APPUIS MULTIPLES

---

Soutenue publiquement en Juillet 1997 devant le jury composé de:

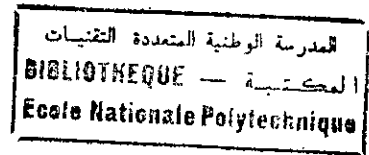
MM.	<b>B. TILIOUINE</b>	<b>Professeur, ENP</b>	<b>Président</b>
	<b>H. AFRA</b>	<b>Chargé de Recherches, CGS</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>K. SILHADI</b>	<b>Maitre Assistant, ENP</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>S. RECHAK</b>	<b>Professeur, ENP</b>	<b>Examineur</b>
	<b>M. HAMMOUTENE</b>	<b>Chargé de Cours, ENP</b>	<b>Examineur</b>
	<b>Y. BELKACEMI</b>	<b>Chargé de Cours, ENP</b>	<b>Examineur</b>
	<b>M. BELAZOUGUI</b>	<b>Maitre de Recherches, CGS</b>	<b>Invité</b>



### *DEDICACES*

A mes parents, ma seule raison d'être  
A mes frères et sœurs  
A ma belle sœur, mes nièces et mon neveu  
A toi Samir à qui je dois beaucoup ainsi que ta famille  
A vous karima, Halim, Bouzid, Salim, Lamia, Souad  
A toi...

# REMERCIEMENTS



Je tiens à remercier très chaleureusement *MM. M. BELAZOUGUI, Maître de Recherches et Directeur Général du CGS et H. AFRA*, chargé de recherches au CGS et Maître de conférences associé à l'USTHB, qui ont été à l'origine de ce travail, pour la confiance qu'il m'ont témoignée tout au long de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie vivement *M. K.SILHADI* chargé de cours à l'ENP pour son souci de voir ce travail achevé, qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.

Je tiens à exprimer mes remerciements à toutes les personnes qui ont accepté de faire partie du jury d'examen.

J'exprime ma vive gratitude à Monsieur le Professeur *B. TILIOUINE* pour l'honneur qu'il me fait en président le jury.

Que Monsieur le Professeur *S. RECHAK*, trouve ici ma respectueuse gratitude pour avoir bien voulu examiner ce travail.

Je tiens à remercier également *M. M. HAMMOUTENE*, chargé de cours à l'ENP pour avoir accepté de siéger dans le jury comme examinateur. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde sympathie.

J'exprime mes vifs remerciements à *M. Y.BELKACEMI*, chargé de cours à l'ENP d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Qu'il trouve ici ma respectueuse gratitude.

J'exprime ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation sans oublier Monsieur le professeur *A. BALI* pour son impatience de me voir soutenir et pour l'assistance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes remerciement vont tout particulièrement à mes amis: *Samir Flici* à qui je souhaite du fond de mon cœur, *Ouafi Saha, Nasreddine Amoura, Samia Attif, Samir Gadoum, Yamina Aimene*, qui par la bonne ambiance qu'ils ont su créer et leur complicité, ont donné un sens aux années qu'on a passé ensemble.

Je ne saurais oublié *H. Airouche, M. Boudour, A. Naitseghir, S.Bouziane, D. Zendagui et M. Hadid* pour leur sympathie, leurs encouragements et leur impatience à voir ce travail terminé.

Ce travail doit également beaucoup au personnel du Centre de Calcul et particulièrement à *Karima Benbessi*, au personnel de la Bibliothèque de qui par leur dévouement et compréhension m'ont aidé. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

Dans le soucis de n'oublier personne, tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral, trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma profonde gratitude.

**Résumé:** L'évaluation de la réponse sismique des structures , suppose que tous ses appuis sont animés de mouvements identiques et synchrones. Cette hypothèse classique n'est plus valable lorsque les dimensions en plan des structures sont relativement importantes par rapport à la longueur d'onde sismique. Par conséquent, ces structures sont soumises à des excitations multiples d'un point d'appui à un autre. Cette situation se produit pour les structures étendues telles que les ponts ou les grands bâtiments industriels.

Le même phénomène est rencontré également dans les installations industrielles et plus exactement pour les tuyauteries. Du fait même de leur fonction, elles se trouvent reliées à plusieurs points de la structure environnante et soumises, par conséquent, à une excitation variable.

Dans le cadre de ce travail, un programme de calcul basé sur une modélisation en éléments finis a été élaboré, tenant compte de l'aspect variable de l'excitation sismique. Les excitations sollicitant une structure étendue sont ainsi générées numériquement par la méthode de représentation spectral. Une étude paramétrique a été menée, prenant en considération l'influence du type du sol, de la rigidité de la structure et de la distance entre appuis, pour vérifier les limites de l'application de l'hypothèse classique (excitation uniforme).

**ملخص -** إن الرّد الديناميكي للمنشآت تحت تأثير الهزات الزلزالية يقيم عادة بفرض أن كل أسسها معرضة لنفس الحركة الزلزالية. هذه الفرضية تسقط عندما تكون أبعاد المنشآت كبيرة نسبيا إلى طول الموجة الزلزالية. حينئذ تكون هذه المنشآت تحت تأثير هزات مختلفة من أساس لأخر. هذه الحالة تحصل في المنشآت الطويلة كالجسور الكبيرة أو المباني الصناعية. نفس الحالة (أي تغيير التأثير الزلزالي) نجدها في المراكز الصناعية و بالضبط في القنوات. بحكم وظيفتها فقد نجدها مثبتة في عدة أماكن من العمارة الحاملة و نقط تثبيتها لها رّد ديناميكي مختلف. في إطار هذه الدراسة، كتبنا برنامج حسابي يأخذ بعين الاعتبار الهزات المتغيرة من أساس لأخر التي تخضع إليها المنشآت الطويلة لتقييم الرّد الديناميكي. هذه الهزات مولدة حسابيا بطريقة التمثيل الطيفي. و قمنا بدراسة وسطية باعتبار تأثير طبيعة التربة و صلابة المنشآت لإيجاد المسافات بين الأسس التي إذا اعتبرنا الطريقة الكلاسيكية تعطينا نتائج دقيقة بالمقارنة طبعاً مع الحركة الزلزالية المتغيرة.

**Abstract:** The seismic response evaluation of structures suppose that all its supports are subjected to identical and synchronous ground motion. This classical hypothesis is not valid when the structure's dimensions are important relatively to the seismic wavelength. Consequently, extended structures in plane such as bridges and important industrial buildings, will be subjected to multiple support excitation.

The same phenomena is observed in some industrial equipment like tubes witch are connected in one or several points of structure and excited by the structure response in these points.

In this work, a finite element computing code is developed taking into consideration the spatial variability aspect of seismic excitation, generated using the spectral representation method.

In order to verify the application limits of the classical hypothesis (uniform excitation hypothesis) a parametric study is presented taking in account the influence of kind of soil, structure stiffness and the distance between supports.

## SOMMAIRE

### CHAPITRE I: INTRODUCTION GENERALE

I.1. Introduction	1
I.2. Organisation du mémoire.	2
I.3. Revue des travaux antérieurs.	2

### CHAPITRE II: ELEMENTS DE SISMOLOGIE DE L'INGENIEUR.

II.1 Eléments de sismologie de l'Ingénieur.	5
II.1.1 Naissance des séismes	5
II.1.2 Paramètres caractéristiques du mouvement sismique	5
II.2 Eléments de propagation d'ondes sismiques	6
II.2.1 Propagation d'ondes dans un milieu élastique, isotrope	6
II.2.2 Propagation des ondes planes en milieu élastique semi-infini	9
II.3 Variabilité spatiale de l'onde sismique	15
II.3.1 Effets d'incohérence	15
II.3.2 Effets de passage d'onde	16
II.3.3 Effets d'atténuation	16
II.3.3 Effets de site	16
II.4 Représentation analytique de l'action sismique	16
CONCLUSION	17

### CHAPITRE III: CALCUL DES STRUCTURES SOUMISES A DES EXCITATIONS D'APPUI MULTIPLES.

III.1 Introduction	18
III.2 Exemples de structures soumises à des excitations d'appuis multiples.	18
III.2.1 Ouvrages de grande longueur	18
III.2.2 Réseaux de tuyauterie	21
III.3 Réponse d'une structure soumise à des excitations d'appuis infinis	23
III.4 Réponse d'une structure soumise à des excitations d'appuis multiples	24
CONCLUSION	26

### CHAPITRE IV: METHODE DE RESOLUTION, METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV.1 Rappels de la théorie de la théorie de l'élasticité linéaire	27
IV.1.1 Contraintes	27
IV.1.2 Déformations	27
IV.1.3 Equation d'équilibre	28
IV.1.4 Loi de comportement.	28
IV.2 Introduction aux méthodes variationnelles	29
IV.2.1 Définitions	29
IV.2.2 Approche cinématique	29
IV.2.3 Approche équilibre	30
IV.3 Méthode des élément finis	31

IV.3.1	Approximation par élément finis	31
IV.3.2	Expression de l'énergie potentielle	32
IV.3.3	Energie de déformation, matrice de rigidité	33
IV.3.4	Energie cinétique - matrice de masse	38
IV.3.5	Transformation de coordonnées	40
IV.3.6	Assemblage	44
IV.3.7	Prise en compte des conditions aux limites	45
IV.4.	Eléments finis en dynamique.	45
IV.4.1.	Formulation des équations du mouvement	46
IV.4.1.1	Principe de Hamilton	46
IV.4.1.2	Equation de Lagrange	47
IV.4.2	Problème de l'amortissement	49
IV.5.	Méthodes d'analyse numérique des problèmes dynamiques	50
IV.5.1	Introduction	50
IV.5.2	Classes de problèmes numériques rencontrés en analyse dynamique	51
IV.5.3	Méthodes de calculs des fréquences propres et modes propres	51
IV.5.4	Transformation du domaine temps	52
IV.5.5	Intégration des équations du mouvement	52
CONCLUSION		53

## **CHAPITRE V: MISE EN OEUVRE NUMERIQUE ET VALIDATION.**

V.1.	Introduction.	54
V.2.	Présentation du programme.	55
V.3.	Validation du programme.	58
V.3.1	Cas statique	58
V.3.2.	Cas dynamique.	59
V.3.2.1.	Chargement harmonique.	59
V.3.2.2.	Chargement quelconque.	60
V.3.2.3.	Chrgement sismique uniforme.	61
V.3.2.4.	Chargement sismique multi-appuis.	64
V.4.	Application aux tuyauteries.	67

## **CHAPITRE VI: ETUDE PARAMETRIQUE**

VI.1.	Introduction	69
VI.2.	Génération des séismes artificiels.	70
VI.2.1.	Génération de processus stochastiques stationnaires 1D-1V	70
VI.2.2.	Génération de processus stochastiques unidimensionnels variables spatialement	71
VI.2.2.1	Cas de deux points de supports	73
VI.3	Etude paramétrique	77

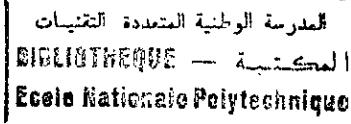
CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS POUR TRAVAUX FUTURS.	93
---	----

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction générale

## I 1. INTRODUCTION



Une onde sismique se propage dans le sol avec une vitesse finie qui dépend très fortement du type d'onde et du milieu de propagation. La nature du sol (non homogène, discontinu, anisotrope) apporte des modifications en fréquence et en amplitude du signal entre la source et la surface libre; La topographie de la surface, surtout au voisinage de l'ouvrage peut avoir une forte influence sur les caractéristiques dynamiques du site et sur le comportement sismique de la structure. Les ondes sismiques sont ainsi modifiées par déphasage et amplification au voisinage de la structure (effet de site), et il se peut que les caractéristiques de l'excitation sismique traduites par des spectres de réponse d'oscillateurs varient notablement d'un point d'appui de la structure à un autre.

C'est le cas de certaines structures étendues comme les barrages ou les ponts où l'onde sismique nécessite un temps significatif pour exciter tous les points d'appuis de l'ouvrage. Si ces points sont excités avec les mêmes signaux mais avec un retard, on parle d'une excitation asynchrone, et si en plus les signaux sont différents, on parle d'une excitation multi appuis.

Le même phénomène se retrouve également dans les installations industrielles comme par exemple dans les centrales nucléaires. Cette situation se produit en particulier pour les tuyauteries qui cheminent d'un équipement à un autre avec des supports très divers, ancrés dans plusieurs points d'un bâtiment. Ces points d'appuis sont soumis à différentes excitations traduites par le mouvement du bâtiment en ces différents points.

Les méthodes d'analyse, et de dimensionnement des structures sous chargement sismique sont en général limitées au cas de l'excitation uniforme des points de liaison de la structure avec le milieu extérieur. Dans le cas des structures étendues, le calcul en excitation uniforme devient très imprécis. Une prise en compte effective du caractère multiple de l'excitation présente un intérêt certain.

La formulation des équations de mouvement de la structure soumise à des excitations d'appuis multiples est différente de la formulation classique traitant de l'excitation uniforme où tous les appuis sont supposés animés d'un même mouvement. Le mouvement différentiel des appuis induit, par conséquent, des contraintes pseudo-statiques dans la structure qui doivent donc être prises en compte et ajoutées à la réponse dynamique de la structure.



## I.2. ORGANISATION

L'analyse des structures soumises à des excitations d'appui multiples est un domaine très large de la discipline du génie parasismique. Afin de bien cerner le problème que nous cherchons à résoudre à savoir l'élaboration d'un programme qui détermine la réponse de toutes les structures modélisables en éléments finis de poutre 3D, sujette à des excitations d'appuis multiples, plusieurs notions ont été revues et présentées dans ce travail. Dans le premier chapitre, une synthèse de quelques travaux antérieurs est faite. Les excitations aux appuis sont d'origine sismique, le but du deuxième chapitre est alors de présenter des notions de propagation des ondes à partir de la source jusqu'à la surface libre. La nature du sol et la géométrie de la structure font en sorte que le signal sismique en surface libre varie d'un point à l'autre, les causes de cette variabilité sont aussi revues dans ce chapitre. Dans le troisième chapitre, le problème de vibration sismique des structures et la formulation des équations du mouvement sont traités. La réponse de telles structures est déterminée.

Les structures à étudier sont modélisées en éléments finis de poutre. C'est pour cela qu'une partie du quatrième chapitre est consacrée à rappeler succinctement des notions générales de l'élasticité linéaire, des méthodes variationnelles et de la méthode des éléments finis. Le reste de ce chapitre est une application à l'élément fini de poutre avec extension à l'élément tube pour enfin présenter brièvement les méthodes numériques d'analyse des problèmes dynamiques.

Dans le cinquième chapitre, le programme développé est présenté, puis validé avec des applications pratiques aux structures de portiques et aux tuyauteries.

Dans le sixième chapitre, une étude paramétrique est réalisée sur la base de l'influence de la nature du sol (ferme et meuble), de la rigidité de la structure, du type de l'excitation et de la longueur entre appuis.

Enfin, nous présenterons une conclusion de l'ensemble des travaux avec les recommandations et suggestions relatives à un certain nombre de paramètres.

## I.3. REVUE DES TRAVAUX ANTERIEURS :

L'analyse des structures soumises à des excitations d'appuis multiples a été évoquée pour la première fois par Bogdanoff et Al [30]. La réponse de la structure (analyse temporelle ou dans le domaine des fréquences) est obtenue quand le mouvement en surface libre du sol dans les différents supports est supposé connu d'une manière déterministe. A cette époque, par défaut de l'outil informatique, les exemples de structures étudiés sous cet aspect étaient assez simples et on n'arrivait pas à distinguer la différence entre la réponse d'une excitation uniforme et la réponse sous excitation multiple.

Plusieurs études ont suivi, en se basant sur la détermination de la réponse à une excitation décrite par un spectre de réponse ou modélisée comme un processus stochastique. La mise en équation d'un tel système est effectué sous plusieurs formes par plusieurs auteurs [4] [6] [14] [18] [21] [38] [40].

Clough et Penzien [12] ont considéré la structure ayant un comportement dynamique linéaire et supposée liée au sol par un certain nombre de degrés de liberté (ddl) et chaque point de liaison avec le sol est animé d'un mouvement. Dans ce cas, la réponse totale de

la structure soumise à une excitation appliquée à un seul appui est différente de la formulation classique traitant l'excitation uniforme où tous les points d'appuis sont supposés animés d'un même mouvement. Par conséquent, le mouvement différentiel des appuis induit des contraintes pseudo-statiques dans la structure et doivent donc être prises en compte et ajoutées à la réponse dynamique de la structure .

Le développement de l'équation traduisant un tel système peut se réduire à une équation qui peut être résolue de la même manière et avec les mêmes outils que l'équation qui traduit l'excitation classique uniforme .

Pour chaque mouvement d'appui, une réponse partielle est déterminée. Sous l'hypothèse du comportement linéaire, la réponse dynamique totale (composantes dynamiques et pseudo-statiques) est obtenue en faisant la superposition de toutes les réponses partielles. Ces sommations correspondent à tous les points d'excitation, mais pour une seule direction. Le même principe de calcul s'applique pour les trois directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Les trois résultats seront ensuite cumulés.

Sollogoub [35] a considéré tous les points d'appuis animés à la fois pour formuler l'équation gouvernante du mouvement. L'analyse modale est utilisée pour la résolution Le mouvement de la structure est décomposé en un mouvement d'entraînement correspondant à une réponse statique instantanée et un mouvement relatif par rapport à celui-ci. Cette décomposition correspond à une généralisation la plus simple et la plus naturelle du processus utilisé en excitation uniforme, d'ailleurs, on peut considérer l'excitation uniforme comme un cas particulier de l'excitation multiple. Le calcul de la réponse instantanée constitue un élément nouveau car il est évident qu'une excitation multiple ne peut être caractérisée uniquement par des spectres, mais correspond également à des déplacements différentiels imposés. De plus, la séparation des deux types d'excitations dans le calcul de la réponse ne permet pas d'utiliser des processus classiques mais correspond à la pratique courante en analyse des contraintes.

Le calcul de la réponse maximale est obtenu par la superposition quadratique de chaque réponse due à chaque excitation d'un appui. Cette sommation est très critiquée car elle n'est bien vérifiée que pour une excitation uniforme à la base, sinon, l'excitation est filtrée par la structure support et l'hypothèse d'indépendance devient beaucoup plus discutable. La sommation en valeurs absolues conduit nécessairement à un résultat majorant.

Milovanovitch [27] a admis l'indépendance des directions ainsi que la sommation mixte. En analyse modale, l'excitation multiple introduit une incertitude supplémentaire sur la nature des superpositions. Afin de minimiser cette incertitude, Berrah et Kausel [6] [7] [8] Der Kiureghian et Neuenhofer [14] ont développé des règles de combinaison modale qui tiennent compte du caractère multiple de l'excitation sismique.

Dans son étude, Milovanovich [27], a décomposé les ddl de la structure en ddl de réponse et ddl d'excitation, la structure étudiée est un barrage étendu. Si le sol n'est pas modélisé, les ddl d'excitation sont les ddl sur la surface du contact sol-structure, par contre si le sol est modélisé, ils sont sur la surface du contact modèle-espace semi-fini. Les ddl de réponse sont les ddl de la structure, du sol et du fluide qui définissent la réponse du modèle. les ddl contiennent donc les déplacements de la structure avec le sol, la pression dans le fluide, le potentiel de déplacement et le déplacement de la surface libre du fluide. Pour introduire la possibilité d'avoir des analyses avec des ondes qui se propagent avec des vitesses finies en tenant compte des effets de site (déphasage,

amplification), une représentation des ondes sismiques avec des fonctions de forme est utilisée. Les fonctions de forme définissent les déformées de la surface d'excitation du modèle qui lui sont imposées.

L'une des difficultés majeures pour l'analyse sismique des structures étendues soumises à des excitations d'appuis multiples est la caractérisation de l'input sismique. La caractérisation de chaque excitation passe par l'analyse de plusieurs phénomènes de modification de signal sismique par des conditions de site, l'effet de passage d'onde, de l'incohérence et de l'atténuation. Cette analyse donnera l'excitation qui animera chaque appui.

En ne considérant que l'effet de passage d'ondes, les recommandations AFPS90 [32] (Association Française de Génie Parasismique) préconisent une méthode simplifiée. Elles définissent une longueur  $L_m$  au delà de laquelle les mouvements de deux points d'appuis de l'ouvrage peuvent être considérés comme indépendants. Cette longueur, elle même, étant fonction du type de sol sur lequel repose la structure. Lorsque la longueur de la structure est inférieure au  $\frac{3}{4} L_m$ , un même accélérogramme peut être appliqué sous réserve d'observer un décalage dans le temps égal au temps de propagation du mouvement tout en supposant que la distance maximale entre deux appuis successifs ne dépasse pas  $L_m/4$  sinon un autre accélérogramme est à utiliser. Si la longueur totale de la structure dépasse  $3L_m/4$ , la structure est décomposée en plusieurs tronçons de longueur ne dépassant pas  $L_m/4$  auxquels sont appliqués des accélérations distinctes présentant un certain coefficient d'intercorrélacion.

Nous remarquons que, malgré que cette méthode soit simple et déterministe, elle possède dans son fondement un caractère aléatoire.

Il existe des méthodes de caractérisation de la variabilité spatiale de l'excitation sismique purement statistique. L'une des premières méthodes consiste à interpréter par des méthodes statistiques les données de deux réseaux d'accélérogrammes [20] [1] [2]. De tels réseaux furent déployés en certains sites tels que SMART1 (Strong Motion Array Taiwan n° 1) ou le ChiboArray. Parallèlement à cette démarche d'autres auteurs ont proposé des modèles semi-empiriques d'analyse de la variabilité spatiale de l'input sismique. Ils présentent des modélisations probabilistes des valeurs maximales de déplacement du sol et de déplacement relatif entre deux points de la surface ou encore de la distance qui les sépare à partir des données expérimentales. L'approche expérimentale est limitée par le fait que les résultats obtenus ne sont appliqués que pour les sites où le réseau est déployé. Par conséquent, des méthodes purement analytiques ont été proposées.

Der kiureghian [13] a proposé un modèle analytique pour évaluer la fonction de cohérence qui détermine la variabilité en tenant compte des effets: d'incohérence, de site, de passage d'onde et d'atténuation.

Zerva [41] a analysé la variabilité à partir de la magnitude du séisme, la vitesse de propagation des ondes de volume et la localisation des divers points par rapport à la faille où l'on veut estimer les coefficients de corrélation.

La caractérisation de la variabilité spatiale de l'excitation sismique associée au calcul dynamique des structures multi appuis font l'objet de plusieurs travaux. Les travaux [6] [14] [18] [40] traitent un modèle simple pouvant représenter un pont ou une canalisation (poutre à deux travées). L'effet de l'incohérence spatiale sur la réponse (déplacements et moments) d'une poutre à deux ou trois travées pour différentes longueurs a été examiné.

Eléments de  
sismologie de  
l'ingénieur

## II.1 Introduction:

Le séisme représente l'un des plus importantes sollicitations dynamiques auxquelles une structure est soumise durant sa durée de vie. Ainsi, dans le calcul et le dimensionnement des bâtiments d'habitation et des ouvrages stratégiques tels que les ponts de grandes portées, les centrales nucléaires et leurs équipements industriels ou les barrages, la prise en compte de l'excitation sismique est obligatoire. Pour effectuer ce calcul, il faut connaître le mécanisme de génération de séisme ainsi que les caractéristiques du mouvement sismique.

### II.1.1. Naissance des séismes :

Un tremblement de terre est un mouvement d'une partie de la surface de la terre, il est provoqué par des processus de déformation et rupture à l'intérieur de la croûte terrestre. Les contraintes qui s'y développent, ainsi que la concentration d'énergie de déformation en des points particuliers conduisent à un niveau critique qui engendre une dislocation. Simultanément, l'énergie de déformation est libérée et les vibrations engendrées se propagent dans toutes les directions. Ces vibrations cessent quand toute l'énergie de déformation est épuisée.[11]

D'après leurs origines, les tremblements de terre sont : tectoniques, volcaniques ou dus aux effondrements à l'intérieur de la terre.[37]

### II.1.2. Paramètres caractéristiques du mouvement sismique :

L'énergie libérée lors d'un séisme se transmet en partie par la vibration de sol. A partir du foyer, les vibrations se propagent dans toutes les directions sous forme d'ondes sismiques de divers types. Compte tenu de l'hétérogénéité du milieu de propagation, elles engendrent à la surface du sol un mouvement complexe. Dans les milieux isotropes, homogènes et parfaitement élastiques, la propagation d'ondes sismiques est le résultat de deux mécanismes différents qui donnent naissance à deux types d'ondes se propageant de manières indépendantes: les ondes de compression, appelées ondes de dilatation (les ondes primaires P) et les ondes de cisaillement, appelées ondes de distorsion (ondes secondaires S).[15], [29].

Les ondes primaires sont généralement à hautes fréquences et sont les premiers à atteindre la surface libre. Tandis que les ondes secondaires sont à basses fréquences mais possèdent de plus grandes amplitudes et sont responsables des dégâts les plus importants. On distingue essentiellement :

#### \* *Ondes de surface:*

Les particules du sol qui sont sollicitées par ce type d'ondes ont des trajectoires très complexes. On distingue principalement :

-Les ondes de Rayleigh «R»: Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation. Ce mouvement entraîne des compressions-tractions ainsi que des cisaillements dans le sol.

-Les ondes de Love «Q»: Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface perpendiculairement à la direction de propagation. Ces ondes engendrent des contraintes de cisaillement uniquement.

## II.2.ELEMENTS DE PROPAGATION D'ONDES SISMIQUES :

Il s'agit de déterminer les caractéristiques du mouvement sismiques au voisinage de la surface du sol à partir d'une propagation dans un milieu continu. On se limitera essentiellement au cas très utile et pratique de propagation d'ondes planes (ondes de cisaillement SH et ondes de surface) [29].

### II.2.1 Propagation d'ondes dans un milieu élastique, isotrope :

#### II.2.1.1 Equation de propagation :

Dans un problème tridimensionnel, on obtient l'équation de propagation en appliquant les équations de la théorie de l'élasticité sous l'hypothèse d'un milieu isotrope. L'équation d'équilibre s'écrit, en négligeant les forces de volume:

$$\operatorname{div}\sigma = \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (\text{II.1})$$

$\sigma$ : tenseur des contraintes.

$\rho$ : masse volumique du milieu de propagation.

$x$ : vecteur déplacement de composante (u,v,w).

Dans le cas d'un milieu isotrope, la loi de comportement ( $\sigma - \varepsilon$ ) ne fait intervenir que deux coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  dit coefficient de Lamé. Cette loi a pour expression :

$$\sigma = \lambda(\operatorname{trace}\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu\varepsilon \quad (\text{II.2})$$

$\varepsilon$ : tenseur des déformations.

Portant (II.2) dans (II.1), l'équation ayant pour inconnu  $x$  (u,v,w) s'écrit :

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}x) + \mu\Delta x - \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.3})$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur Laplacien.

La solution générale de cette équation peut être obtenue en décomposant le déplacement  $x$  en la somme d'un mouvement irrotationnel  $\underline{x}_1$  dérivant d'un potentiel scalaire  $\phi$ :

$$\underline{x}_1 = \operatorname{grad} \phi \quad (\text{II.4})$$

et d'un mouvement rotationnel  $\underline{x}_2$  dérivant d'un potentiel vecteur  $\underline{\Omega}$ :

$$\underline{x}_2 = \operatorname{rot} \underline{\Omega} \quad (\text{II.5})$$

avec  $\operatorname{div}\underline{\Omega} = 0$

Si on pose :

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{II.6})$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{II.7})$$

L'équation du mouvement peut alors être découplée en deux équations aux dérivées partielles satisfaites par  $\phi$  et  $\underline{\Omega}$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\Delta\underline{\Omega} - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \underline{\Omega}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.9})$$

### II.2.1.2. Onde monochromatique plane :

Pour une onde monochromatique stationnaire, de pulsation  $\omega$ , une solution générale des équations (II.8) et (II.9) est donnée par :

$$\Phi = A \exp\left[\frac{i\omega}{v_p}(v_p t - l_x x - l_y y - l_z z)\right] \quad (\text{II.10})$$

$$\underline{\Omega} = \underline{B} \exp\left[\frac{i\omega}{v_s}(v_s t - l_x x - l_y y - l_z z)\right] \quad (\text{II.11})$$

avec  $|\underline{l}| = 1$  ,  $\underline{l} \cdot \underline{B} = 0$  et  $i^2 = -1$

Dans le cas où toutes les composantes du vecteur  $\underline{l}$  sont réelles, elles représentent les cosinus directeurs de la direction de propagation des ondes.

A un instant donné  $t_0$  ,  $\phi$  est constant sur tout plan normal à  $\underline{l}$  d'équation :

$v_p t_0 - l_x x - l_y y - l_z z = \text{constante}$  et varie sinusoidalement le long de la direction  $\underline{l}$ . En tout point de l'espace,  $\phi$  est périodique de période  $2\pi/\omega$ .

Ces ondes sont des ondes de volume. Elles sont les seules à exister dans un milieu infini.

Dans le cas où l'une des composantes de  $\underline{l}$  est imaginaire, l'interprétation de  $\underline{l}$  est alors différente. Supposons que  $l_x$  et  $l_y$  sont réels et  $l_z$  imaginaire pur, les solutions des équations (II.10) et (II.11) représentent alors des ondes se propageant dans le plan (x,y) dont l'amplitude décroît exponentiellement suivant z. Ces ondes sont appelées ondes de surface généralisées. Les ondes de Love correspondant aux cas où seules des déformations de cisaillement sont accompagnées de déformations volumiques.

A partir des solutions (II.10) et (II.11) et des relations (II.4) et (II.5), on obtient les composants de déplacement, posant:

$$f_p = \exp\left[\frac{i\omega}{v_p}(v_p t - l_x x - l_y y - l_z z)\right] \quad (II.12)$$

$$f_s = \exp\left[\frac{i\omega}{v_s}(v_s t - l_x x - l_y y - l_z z)\right]$$

Ces composantes ont pour expressions:

-Ondes longitudinales:

$$\underline{x}_1 = -\frac{i\omega A}{v_p} f_p \underline{l} = A_p f_p \underline{l} \quad (II.13)$$

-Ondes transversales:

$$\underline{x}_2 = \frac{i\omega}{v_s} f_s \underline{B} \otimes \underline{l} \quad (II.14)$$

$\otimes$  désigne le produit vectoriel des deux vecteurs  $\underline{B}$  et  $\underline{l}$ .

Les expressions (II.13) et (II.14) montrent que, pour les ondes longitudinales, le déplacement a lieu dans le sens de la direction de propagation, pour les ondes transversales, le mouvement prend place dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

On distingue le cas particulier où  $l_x = l_y = 0$  et  $l_z = \pm 1$ , C'est à dire que la direction de propagation coïncide avec l'axe  $oz$ , on décompose le mouvement engendré par les ondes de cisaillement en un mouvement dans un plan horizontal (SH) et un mouvement dans un plan vertical (SV).

On définit:

$$A_{SH} = \frac{i\omega}{v_s} \frac{B_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \quad (II.15)$$

$$A_{SV} = \frac{i\omega}{v_s} \frac{l_x B_y - l_y B_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$$

On obtient:

$$\begin{aligned} U_{SH} &= A_{SH} f_s \\ U_{SV} &= A_{SV} f_s \end{aligned} \quad (II.16)$$

$A_{SH}$  et  $A_{SV}$  représentent les amplitudes respectives du mouvement des ondes SH et SV.



### II.2.1.3. Réflexion et réfraction des ondes planes à une interface:

Lorsqu'une onde, heurte une surface de discontinuité, il se produit des phénomènes de réflexion ou de réfraction. De plus, il se produit des changements de mode : une onde incidente donne en général naissance à des ondes longitudinales et à des ondes de cisaillement, éventuellement à des ondes de surface.

Les conditions de continuité, de la contrainte et du déplacement, fournissent les équations nécessaires à la détermination des amplitudes des ondes, réfléchies et réfractées, en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.

### II.2.1.4 Ondes sphériques dans un milieu infini :

Dans ce qui a précédé, nous avons donné une solution à l'équation de propagation sous la forme d'une onde plane.

Ceci est valable à grande distance d'une source ponctuelle où la courbure du front d'onde est suffisamment faible pour assimiler l'onde à une onde plane. Par contre au voisinage immédiat d'une source, le front d'onde ne peut être considéré comme plan. C'est le cas par exemple d'une structure au voisinage du foyer d'un séisme.

Dans ce cas la solution peut être obtenue en transformant les équations (II.8) et (II.9) en coordonnées sphériques, le front d'onde est constitué par une sphère centrée à la source. En se propageant, le front d'onde se déforme et l'amplitude du déplacement décroît.

### II.2.2. Propagation d'ondes planes en milieu élastique semi-fini:

Le problème de la propagation d'ondes sismiques est un problème essentiellement tridimensionnel. En considérant la source comme constituée d'une faille et en se plaçant à une certaine distance de celle ci, le problème devient bidimensionnel.

La solution générale pour une onde stationnaire plane ( $l_y = 0$ ) est :

$$\begin{aligned} U_x &= A_p f_p l_x + A_{SV} f_s l_z \\ U_y &= A_{SH} f_s \\ U_z &= A_p f_p l_z - A_{SV} f_s l_x \end{aligned} \quad (II.18)$$

Si  $l_x$  et  $l_z$  sont réels, ils représentent les cosinus directeurs de la direction de propagation ( $l_x = \sin \alpha, l_z = \cos \alpha$ ).

Les équations (II.18) montrent que, dans le cas d'ondes planes, le déplacement suivant oy est découplé des déplacements suivant ox et oz. Il ne résulte que la propagation d'ondes SH, alors que les déplacements selon ox et oz sont fonction des ondes P et SV. Si la direction de propagation est verticale parallèle à l'axe oz ( $l_z = 1$ ), le problème devient unidimensionnel, chacune des composantes du mouvement est découplée des autres:

$$\begin{aligned} U_x &= A_{SV} f_s \\ U_y &= A_{SH} f_s \\ U_z &= A_p f_p \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \downarrow y \\ z \end{array} \quad (\text{II.19})$$

**II.2.2.1. Ondes SH dans un milieu semi infini:**

Le déplacement d'une onde SH incidente est donnée par l'équation (18) dans le cas où la propagation se fait dans le sens des z négatifs et en formant un angle  $\alpha$  avec l'axe oz:

$$U_{yi} = A_{SH} \exp \left[ \frac{i\omega}{v_s} (v_s t - x \sin \alpha + z \cos \alpha) \right] \quad (\text{II.20})$$

En heurtant la surface libre ( $z = 0$ ), l'onde SH incidente donne naissance à une onde SH réfractée formant un angle  $\alpha$  avec la direction oz et se propageant dans le sens des z positifs.

Le déplacement associé à cette onde réfractée est:

$$U_{yr} = A'_{SH} \exp \left[ \frac{i\omega}{v_s} (v_s t - x \sin \alpha - z \cos \alpha) \right] \quad (\text{II.21})$$

La condition de nullité de la contrainte à la surface libre ( $\sigma_{yz} = 0$ ) s'écrit :

$$\frac{\partial U_y}{\partial z}(0) = 0 \Rightarrow A_{SH} = A'_{SH} \quad (\text{II.22})$$

L'amplitude de l'onde incidente est égale à l'amplitude de l'onde réfléchie. En tout point du milieu, le déplacement est la combinaison des équations (II.21) et (II.22), soit:

$$U_y = 2A_{SH} \cos \left[ \frac{\omega z \cos \alpha}{v_s} \right] \exp \left[ \frac{i\omega}{v_s} (v_s t - x \sin \alpha) \right] \quad (\text{II.23})$$

**II.2.2.2. Ondes SH dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un semi-espace:**

On considère le cas relativement fréquent dans la pratique où une couche homogène d'épaisseur  $h$  surmontant un semi-espace représentant le rocher sous-jacent (fig.II.1)

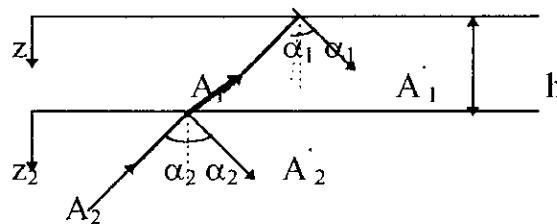


fig. II.1: Réflexion et réfraction d'une onde SH dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un semi-espace.

A et A' désignent les amplitudes des ondes incidentes et réfractées.

L'indice 1 désigne les paramètres relatifs à la couche du sol.

L'indice 2 désigne les paramètres relatifs au demi-espace.

Le déplacement horizontal dans chaque couche s'écrit d'après les équations (II.20) et (II.21):

$$U_n = [A_n \exp(ip_n z_n) + A'_n \exp(-ip_n z_n)] f_n(x, t) \quad ; \quad n = 1, 2 \quad (\text{II.24})$$

avec

$$p_n = \frac{\omega \cos \alpha_n}{v_{sn}}$$

$$f_n(x, t) = \exp \left[ \frac{i\omega}{v_{sn}} (v_{sn} t - x \sin \alpha_n) \right]$$

La condition de surface libre conduit à  $A_1 = A'_1$

Les conditions de compatibilité à l'interface de deux milieux, qui doivent être vérifiées pour tout x et t, s'écrivent:

$$U_1(h) = U_2(0) \quad (\text{II.25})$$

$$\sigma_{yz1}(h) = \sigma_{yz2}(0) \quad (\text{II.26})$$

La relation (II.25) conduit à :

$$A_1 (e^{ip_1 h} + e^{-ip_1 h}) f_1(x, t) = (A_2 + A'_2) f_2(x, t) \quad (\text{II.27})$$

soit

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_{s1}} = \frac{\sin \alpha_2}{v_{s2}} \quad (\text{II.28})$$

et à :

$$A_1 (e^{ip_1 h} + e^{-ip_1 h}) = (A_2 + A'_2) \quad (\text{II.29})$$

La relation (II.26) s'écrit:

$$G_1 \frac{\partial U_1}{\partial z}(h) = G_2 \frac{\partial U_2}{\partial z}(0) \quad (\text{II.30})$$

soit :

$$A_1 G_1 P_1 (e^{ip_1 h} - e^{-ip_1 h}) = G_2 P_2 (A_2 - A'_2) \quad (\text{II.31})$$

En posant

$$q = \sqrt{\frac{\rho_1 G_1 \cos \alpha_1}{\rho_2 G_2 \cos \alpha_2}} \quad (\text{II.32})$$

Les relations (II.29) et (II.31) permettent de déterminer les amplitudes  $A_2$  et  $A'_2$  en fonction de  $A_1$  :

$$A_2 = \frac{1}{2} A_1 [(1+q)e^{ip_1 h} + (1-q)e^{-ip_1 h}] \quad (II.33)$$

$$A'_2 = \frac{1}{2} A_1 [(1-q)e^{ip_1 h} + (1+q)e^{-ip_1 h}] \quad (II.34)$$

Le rapport  $q$  de l'équation (II.32) est appelé le rapport d'admittance ente la couche du sol et le semi-espace.

### Fonction de transfert:

On appelle fonction de transfert la fonction reliant l'amplitude du déplacement à la surface de la couche du sol à l'amplitude du déplacement à l'interface. Soit  $T_{1,2}$  cette fonction.

D'après les relations (II.24), (II.25) et (II.26) :

$$T_{1,2}(\omega) = \frac{2A_1}{A_2 + A'_2} = \frac{1}{\cos p_1 h} \quad (II.35)$$

La fonction de transfert ne dépend pas des propriétés du semi-espace sous-jacent, elle correspond à l'hypothèse d'une assise infiniment rigide où le déplacement est imposé. Cette fonction devient infini pour la valeur:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{v_{s_1}}{h \cos \alpha_1} \quad (II.36)$$

### II.2.2.3. Onde SH dans un milieu stratifié surmontant un semi-espace:

Le cas d'un profil de sol stratifié horizontalement et surmontant un demi-espace représente une schématisation plus générale et plus importante dans la pratique. Les conditions de continuité du déplacement et de la contrainte à chaque interface permettent d'écrire les relations de récurrence reliant les amplitudes des ondes incidente et réfléchie dans la couche  $n+1$  aux mêmes amplitudes dans la couche  $n$ . On obtient des équations analogues des relations (II.32), (II.33) et (II.34):

$$q_m = \sqrt{\frac{\rho_m G_m}{\rho_{m+1} G_{m+1}} \frac{\cos \alpha_m}{\cos \alpha_{m+1}}} \quad (II.37)$$

$$A_{m+1} = \frac{1}{2} A_m (1+q_m) e^{ip_m h_m} + \frac{1}{2} A'_m (1-q_m) e^{-ip_m h_m} \quad (II.38)$$

$$A'_{m+1} = \frac{1}{2} A_m (1-q_m) e^{ip_m h_m} + \frac{1}{2} A'_m (1+q_m) e^{-ip_m h_m} \quad (II.39)$$

Par récurrence, en tenant compte de la condition de surface libre ( $A_1 = A'_1$ ), on peut exprimer les amplitudes des ondes incidente et réfléchie de la couche  $m$  ou en fonction de celles de la couche de surface :

$$A_m = e_m(\omega) A_1 \quad (\text{II.40})$$

$$A'_m = f_m(\omega) A_1 \quad (\text{II.41})$$

Si l'amplitude de l'onde incidente  $A_{SH}$  dans le demi-espace ( $n = N$ ) est connue, les relations précédentes permettent de calculer les amplitudes des ondes incidentes réfléchies dans chaque couche en tenant compte de :

$$A_1 = \frac{A_{SH}}{e_N(\omega)} \quad (\text{II.42})$$

### Fonction de transfert :

La fonction de transfert est une généralisation de la définition du paragraphe (2.2.2), c'est le rapport des amplitudes des déplacements au toit de deux couches  $m$  et  $n$  quelconques d'après les relations (II.24), (II.40) et (II.41) :

$$T_{n,m}(\omega) = \frac{e_m(\omega) + f_m(\omega)}{e_n(\omega) + f_n(\omega)} \quad (\text{II.43})$$

#### II.2.2.4. Ondes de surface dans un milieu semi-infini homogène:

Il est possible de trouver, pour une onde plane, une solution à l'équation de propagation des ondes, satisfaisant les conditions à la limite de la surface libre .

Si  $l_z$  est imaginaire, dans ces conditions  $l_x=1$  et les potentiels  $\phi$  et  $\Omega$  prennent la forme:

$$\Phi = A e^{-az} \exp \left[ i \frac{\omega}{v} (vt - x) \right] \quad (\text{II.44})$$

$$\underline{\Omega} = \underline{B} e^{-bz} \exp \left[ i \frac{\omega}{v} (vt - x) \right] \quad (\text{II.45})$$

Pour satisfaire aux équations (II.8) et (II.9), les paramètres  $A$  et  $B$  doivent vérifier les relations :

$$a^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \quad (\text{II.46})$$

$$b^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \quad (\text{II.47})$$

où  $k = \omega / v$  est le nombre d'ondes et  $v$  la vitesse de propagation de l'onde. Les déplacements sont données par :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} \quad (\text{II.48})$$

$$v = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} \quad (\text{II.49})$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} \quad (\text{II.50})$$

La condition de surface libre impose l'annulation des contraintes sur le plan  $z = 0$ , il en résulte ( $\sigma_{yz} = 0$ ) que le déplacement  $v$  suivant l'axe  $y$  est identiquement nul :  $v = 0$ .

L'annulation des contraintes suivantes :

$$\sigma_{zz}(0) = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} = A[(\lambda + 2\mu)\alpha^2 - \lambda k^2] - 2i\mu kb B_2 = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$\sigma_{xx}(0) = \mu \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] = 2ikaA + (b^2 + k^2)B_2 = 0 \quad (\text{II.52})$$

Posant  $\alpha^2 = v^2/v_s^2$ ,  $\alpha^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$

L'éliminations de  $A$  et  $B_2$  entre les deux relations précédentes conduit à l'équation :

$$x^6 - 8x^4 + (24 - 16\alpha^2)x^2 + 16(\alpha^2 - 1) = 0 \quad (\text{II.53})$$

$\alpha^2 = (1 - 2\gamma)/(2 - 2\gamma)$  ,  $\nu$  coefficient de poisson du milieu.

La vitesse de propagation de l'onde de surface est légèrement inférieure à la vitesse de propagation de l'onde de cisaillement.

$$\begin{aligned} v &= 0.955 v_s && \text{pour } \nu = 0.5 \\ v &= 0.919 v_s && \text{pour } \nu = 0.25 \end{aligned}$$

Tenant compte des relations (II.48), (II.50) et (II.52), les déplacements prennent la forme :

$$U = Aki \left[ \frac{2ab}{k^2 + b^2} e^{-bz} - e^{-az} \right] \exp[i(\omega t - kx)] \quad (\text{II.54})$$

$$W = Ak \left[ \frac{2ak}{k^2 + b^2} e^{-bz} - \frac{a}{k} e^{-az} \right] \exp[i(\omega t - kx)] \quad (\text{II.55})$$

La présence du terme  $i$  dans l'expression du terme horizontal  $u$ , montre que cette composante est déphasée de  $90^\circ$  par rapport au déplacement vertical ( $w$ ). Les trajectoires des particules de sol décrivent des ellipses.

### II.2.2.5. Ondes de surface dans un milieu stratifié:

Les équations (II.54) et (II.55) se généralisent pour un milieu stratifié. Pour les ondes de Rayleigh, les expressions des déplacement devient :

$$U = \sum_{j=1}^N R_j f_j(z) e^{i(\omega t - k_j x)} \quad w = \sum_{j=1}^N R_j g_j(z) e^{i(\omega t - k_j x)} \quad (\text{II.56})$$

Dans un milieu stratifié, des ondes ne faisant intervenir que les déformations de cisaillement peuvent exister. Ce sont les ondes de Love dont le déplacement a pour expression :

$$v = \sum_{j=1}^N L_j h_j(z) e^{i(\omega t - k_j x)} \quad (\text{II.57})$$

$L_j$  et  $R_j$  sont les amplitudes des déplacements.

$k_j = \omega/v_j$  représente le nombre d'onde.

$f_j$ ,  $g_j$  et  $h_j$  sont des vecteurs propres.

### II.3. Variabilité spatiale de l'onde sismique:

La complexité caractérisant la structure souterraine des sols (non homogénéité, anisotropie, présence d'aspérités,...) est à l'origine des diverses altérations que subissent les ondes sismiques durant leur propagation depuis la source du seisme jusqu'à la surface du sol. Ainsi, plusieurs phénomènes contribuant à la variation spatiale des mouvements des sols ont été identifiés jusque là. Il est possible de les regrouper dans les quatre points suivants [13]:

#### II.3.1. Effets d'incohérence:

Il s'agit de la perte de cohérence que subissent les ondes sismiques au cours de leurs trajet du foyer au site considéré, cet effet peut être attribué à:

-Reflexions et réfractions (dispersions) qui affectent les ondes sismiques dans un milieu hétérogène qui est le sol (à chaque interface).

-Géométrie de la source: principalement lorsque les ondes sont issues d'une source étendue (faille). Ceci a pour effet d'induire une interface entre les arrivées simultanées des ondes provenant des divers points de la faille, résultant en une différence dans la procédure de superposition des ondes au niveau des différentes stations d'enregistrement. Ce phénomène est d'autant plus accentué que le site considéré est proche de la source.

### **II.3.2 Effets de passage d'onde :**

Il s'agit de la différence des temps d'arrivée de l'onde sismique à deux stations séparées. Cet effet s'identifie grâce aux différences enregistrées au niveau de différentes régions. En général, il est représenté par un modèle fonction de la fréquence, de la distance interstation et de la vitesse apparente de propagation de l'onde sismique.

### **II.3.3 Effets d'atténuation :**

L'atténuation, du à la géométrie 'spreading', l'amortissement du sol ainsi que la dissipation, diminue l'amplitude de l'onde sismique. En général, ces effets sont traduits par une fonction liée à la fréquence et la distance parcourue par l'onde à partir de la source.

### **II.3.4. Effets de site:**

En un même site, les conditions locales peuvent varier d'une station à une autre, les enregistrements correspondants exhibent alors des amplitudes spectrales et des contenus fréquentiels différents.

La description mathématique de la variation spatiale des ondes sismiques peut se faire par le biais de nombreux paramètres notamment la corrélation et la cohérence. La corrélation est une mesure dans le domaine temporel alors que la cohérence est une mesure dans le domaine fréquentiel. C'est pourquoi souvent, la cohérence est utilisée pour déduire la variation spatiale. La mesure de la cohérence spatiale requiert des enregistrements provenant des systèmes de mesure dispersés en réseaux denses.

## **II.4. Représentation analytique de l'action sismique:**

Plusieurs descriptions mathématiques pour représenter l'action sismique existent [11]. Parmi elles, celle qui utilise l'histoire temporelle de l'input sismique. Cette représentation peut procurer des informations utiles relatives à la variabilité de la réponse sismique; Seulement, le volume des calculs requis par cette analyse compromet son utilisation en pratique. D'autre part, la fonction de densité spectrale constitue une autre distribution du chargement sismique. Toutefois, ce mode de représentation n'est pas fréquemment adopté en pratique car son utilisation nécessite une analyse probabiliste. En revanche, le spectre de réponse est le moyen le plus utilisé pour la représentation de l'excitation sismique.

Le spectre de réponse en accélération, vitesse ou déplacement permet de faire intervenir la notion de contenu en fréquence du signal sismique. A cet effet, on étudie le comportement dynamique d'oscillateurs ayant mêmes caractéristiques dynamiques (période, amortissement) que les structures réelles et sollicités par un processus vibratoire conforme à un accélérogramme réel ou artificiel et on en déduit les spectres de réponse qui donnent les valeurs maximales des accélérations, vitesses ou déplacements de l'oscillateur en fonction de sa période et de son amortissement.



Ces courbes peuvent être utilisées directement pour le calcul des structures, cette approche est souvent très imprécise. Une approche non déterministe est utilisée pour déterminer la courbe spectrale qu'il faut utiliser pour le calcul des constructions. Elle se base sur l'étude des spectres de réponses associés à plusieurs tremblements de terre et sur le calcul des réponses correspondant à différents enregistrements de mouvements forts. Il est possible de déduire les règles qui permettent de construire les spectres typiques de calcul utilisables pour la conception des structures.

**Conclusion:**

Quelques éléments de sismologie de l'Ingénieur ont été revues. La complexité de la structure du sol, la géométrie du site au voisinage de la structure, la dispersion des ondes et la différence entre les stations d'enregistrement sont à l'origine de diverses altérations que subissent les ondes sismiques depuis la source jusqu'à la surface libre. Plusieurs méthodes décrivant l'action sismique existent, on retiendra essentiellement de ces descriptions, celle qui utilise l'histoire temporelle de l'input sismique (accélérogrammes). Ces accélérogrammes seront utilisés pour spécifier l'excitation de la structure à étudier.

Calcul des structures  
soumises à des  
excitations d'appuis  
multiples

### **III.1-INTRODUCTION:**

L'action sismique consiste en un mouvement vibratoire du sol dont le caractère est aléatoire et l'amplitude est forte, elle correspond à une propagation d'onde de perturbation ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre. Sa durée varie notablement d'un séisme à l'autre mais elle est toujours courte (quelques secondes à quelques dizaines de secondes).

Ce mouvement excite chaque point du sol et lui donne un déplacement de translation dans les trois directions de l'espace. Dans le cas où deux points sont très voisins et par raison de continuité, ils seront animés de mouvements pratiquement identiques et synchrones; Par contre, s'ils sont distants d'une longueur finie, leur mouvements seront décalés dans le temps d'une durée égale au temps de propagation du front d'onde entre les points considérés, en outre ces mouvements seront animés l'un par rapport à l'autre de déplacements différentiels. Cette différence est d'autant plus importante que la distance qui sépare les points est plus grande.

Le mouvement d'un point quelconque du sol est connu au moyen d'accélérogrammes des trois composantes, c'est à dire les enregistrements qui donnent pour chacune d'elle les accélérations en fonction du temps. Avant de les utiliser, ces enregistrements subissent quelques corrections. Il faut noter que les vitesses et les déplacements se déduisent par intégrations successives.

### **III.2. EXEMPLES DE STRUCTURES SOUMISES A DES EXCITATIONS D'APPUIS MULTIPLES :**

L'analyse et le dimensionnement des structures vis à vis du séisme sont basés sur l'hypothèse que le mouvement sismique le long des fondations est uniforme. Cette hypothèse devient non réaliste pour les structures étendues telles que les ponts, les barrages et les tuyauteries. Ces structures sont sujettes à différentes excitations devant un tremblement de terre, ceci est dû au fait que les appuis sont tellement espacés dans le sens parallèle du mouvement sismique si bien que l'excitation traduites par des accélérogrammes ne soit plus la même d'un appui à l'autre, c'est le cas des barrages et des ponts étendus. Par ailleurs, pour les tuyauteries, les points d'excitation correspondent aux lieux d'ancrage dans différents niveaux d'un ou de plusieurs bâtiments. Ces points seront par conséquent, soumis à la réponse de ces bâtiments en ces points d'ancrage. Ce qui traduit clairement la variation de l'excitation d'un appui à un autre.

#### **III.2.1. Ouvrages de grande longueur :**

L'hypothèse d'excitation uniforme n'est valable que si les dimensions à la base de la structure sont relativement faibles par rapport à la longueur d'onde sismique à laquelle est soumise cette structure. Prenons comme exemple le cas d'une onde sismique dont la longueur est de l'ordre de 500m agissant sur une structure ayant une base de dimension égale à 30m dans le sens de propagation de l'onde. Cette structure sera soumise essentiellement au même mouvement sur toute sa base, c'est à dire

chaque appui est animé du même mouvement. Par contre un pont suspendu ou un grand bâtiment industriel de dimension égale à 400m, par exemple, sujet à une excitation sismique ayant une même longueur d'onde, les mouvements seront nécessairement fortement différents le long de la base. Donc, pour certaines structures (ponts, barrages, grands bâtiments industriels...), il se peut que les caractéristiques de l'excitation sismique varient notablement d'un appui à l'autre et dans ces conditions, le calcul en excitation uniforme devient imprécis. Par conséquent il est important de développer une méthode de calcul pouvant prendre en compte le caractère multiple de l'excitation sismique pour les ouvrages de grande longueur.

Les ouvrages de grande longueur, selon les normes AFPS90 [32] sont définis comme suit:

### III.2.1.1. Définition :

Sont considérés comme ouvrages de grande longueur, les ouvrages continus dans lesquels la distance entre points d'appuis extrêmes est supérieure au quart de la longueur  $L_m$ .  $L_m$  étant la distance au delà de laquelle les mouvement de deux points peuvent être considérés comme indépendants. Elle est donnée dans le tableau ci dessous (tab III.1) en fonction de la classe du site :

Site	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>
$L_m$ (m)	600	500	400	300

Tab III.1 La distance  $L_m$  en fonction de la classe du site.

Cette définition ne concerne pas les ouvrages construits sur un radier monolithe. Les distances s'étendent entre les centre de gravité des sections horizontales des appuis (semelles, caissons, groupes de pieux...).

### III.2.1.2. Variabilité du mouvement sismique entre appuis :

Afin de traiter cette variabilité, trois cas principaux sont à distinguer :

#### Cas n°1 :

La longueur totale de l'ouvrage est inférieure à  $3/4L_m$  . Dans ce cas, le même mouvement sismique peut être appliqué à chaque point d'appui sous réserve d'observer en chacun de ces points un décalage dans le temps égal au temps de propagation de l'onde sismique. Cette dernière est supposée se propager dans le sens longitudinal de l'ouvrage.

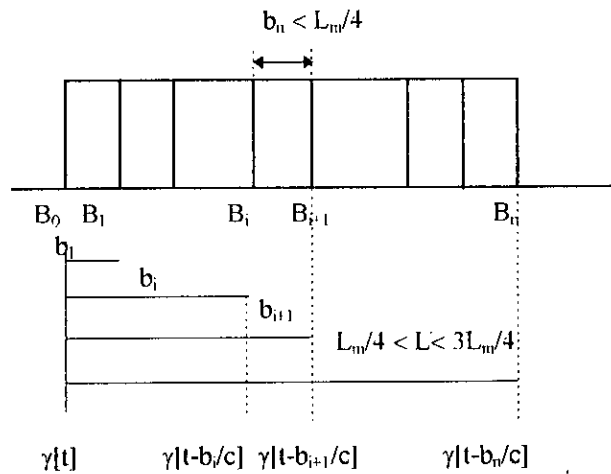


Fig III.1: Structure à travées inférieures à  $L_m/4$ .

$\gamma(t)$ : Accélérogramme.

$c$ : vitesse de propagation du mouvement suivant l'axe de l'ouvrage.

**cas n° 2:**

La longueur totale de l'ouvrage étant toujours inférieure à  $3/4L_m$  mais dans le cas où deux points d'appuis successifs sont distants d'une longueur supérieure à  $1/4L_m$ . Dans ce cas, il doit être fait usage en ces deux points d'accélérogrammes distincts présentant une valeur moyenne de la fonction d'intercorrélation inférieure à environ 0,2.

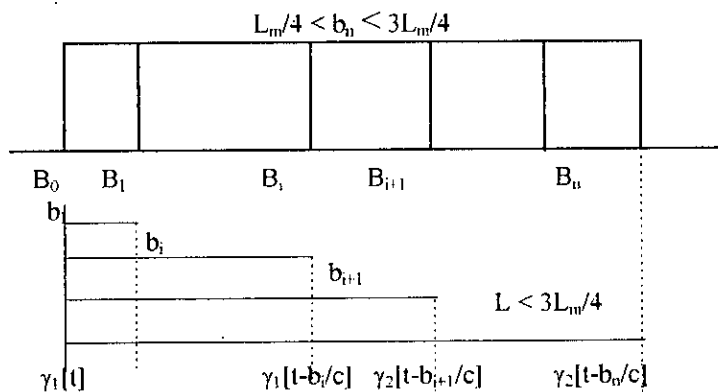


Fig III.2: Structure à travées supérieures à  $L_m/4$ .

$\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ : Accélérogrammes distincts.

**cas n° 3:**

Si la longueur totale de l'ouvrage est supérieure à  $3/4L_m$  sans que ce dernier comporte pour autant de travées de porte supérieure à  $L_m/4$ , la structure est fictivement décomposée en tronçons où sont appliqués des mouvements décorréllés présentant un coefficient d'intercorrélation au plus égal à 0.25 de l'un à l'autre.

### III.2.2. RESEAUX DE TUYAUTERIES.

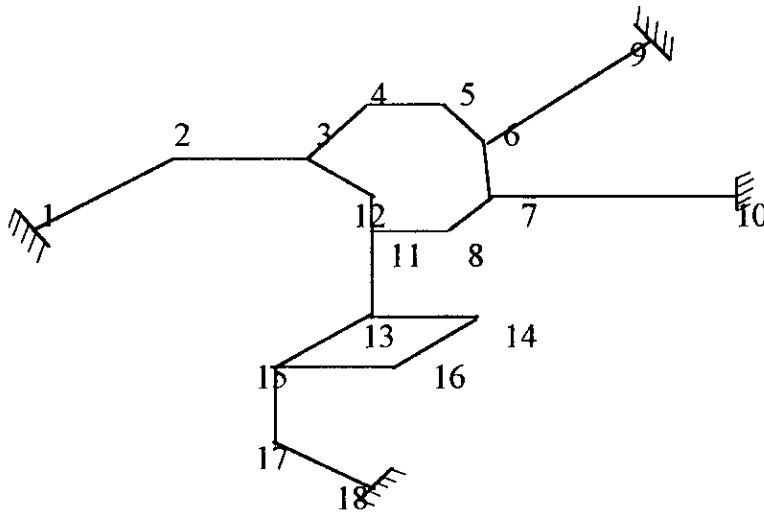


Fig III.3 Exemple d'un réseau de tuyauterie.

#### III.2.2.1. Définition :

Les tuyauteries sont des parties importantes de toute installation industrielle. leur fonction est de véhiculer un fluide, sous une pression et à une température donnée. On doit donc assurer un service satisfaisant durant toute la période de fonctionnement prévue.[3] [9] [25]

Une tuyauterie forme une structure tridimensionnelle dans l'espace qui durant sa vie se trouve soumise à un certain nombre d'actions qui engendrent des contraintes. Ainsi, en plus des chargements classiques propres à toute réalisation industrielle, toutes sortes d'agressions qui pourraient survenir durant la vie de l'équipement sont considérées et étudiées afin de se prémunir contre leurs effets.

Parmi ces agressions figure, en bonne place, le séisme qui constitue un risque notable. Dans l'étude des tuyauteries, on doit tenir compte, pour le dimensionnement des sollicitations suivantes :

- La pression intérieure ou extérieure
- L'effet de la pesanteur
- Les variations de température
- Les sollicitations d'origine climatiques
- Les vibrations
- Les mouvements du sol et des bâtiments.(séisme, tassement)

Les contraintes dues aux pressions intérieures ainsi qu'au gradient de température de la paroi des tuyauteries nous permettent de déterminer l'épaisseur qui garantit la résistance au risque de déformation excessive. On vérifie ensuite la stabilité à l'effondrement sous l'effet des contraintes de pressions extérieures. Ce calcul est valable pour les éléments droits. Certaines dispositions particulières doivent être prises en considération dans les coudes et les parties cintrées (épaisseur à l'intrados plus

importante dans les coudes) vu que c'est des zones de perturbation de pression. Ces perturbations se retrouvent également dans les branchements de dérivation et pièces de connexion. Les surtensions qui apparaissent seront compensées par l'utilisation d'un matériau ductile.

Le supportage des tuyauteries qui est l'ensemble des dispositifs destinés à maintenir les contraintes, les efforts sur les ancrages, et les déformations, quelle qu'en soit leur origine, à un niveau admissible, doit être étudié.

Pour une analyse sismique, on doit avoir impérativement un tracé de tuyauterie prédimensionnée comme précédemment.

Traditionnellement, la technique utilisée pour déterminer la réponse de la structure lors du dimensionnement des tuyauteries au séisme est celle de l'analyse spectrale.

Cette technique consiste à déterminer pour une excitation en un point donné puis à combiner ces différentes réponses modales pour obtenir la réponse réelle. Les excitations peuvent être uniformes ou multiples. Dans le cas où les différents supports seraient reliés à un même niveau de plancher, l'excitation peut être supposée uniforme. Dans le cas où une même tuyauterie possède des supports reliés à plusieurs planchers de niveaux différents, l'excitation est multiple.

Si un support est relié à un point intermédiaire entre deux planchers, la réponse du plancher supérieur est prise comme excitation.

### **III.2.2.2. Enchaînements des calculs :**

L'analyse des tuyauteries répond à un ensemble d'objectifs :

- garantir la tenue en contrainte de la tuyauterie.
- déterminer en les minimisant les efforts dans différents points de la tuyauterie.
- minimiser le coût du supportage par une double action sur le nombre et l'emplacement de ces supports.

Un premier calcul est effectué, sous chargement de pression, pour dimensionner les tuyaux font en vérifiant la stabilité thermique et sous chargement du poids propre pour dimensionner les supports. Ensuite une analyse dynamique (sismique) est effectuée.

Il est d'usage dans les codes qui servent de base à l'élaboration de projets, de séparer le calcul d'épaisseur (dimensionnement des tuyaux ) des vérifications des contraintes, permettant de garantir le fonctionnement.

Les diverses actions prises pour le calcul des épaisseurs sont:

#### a)Pression intérieure :

Le tuyau est sollicité en traction par des contraintes transversales  $\sigma_t$ , des contraintes longitudinales lorsque le tuyau est fermé à ses extrémités  $\sigma_l$  et des contraintes radiales  $\sigma_r$ .

Les contraintes transversales sont les plus prépondérantes par rapport aux contraintes

$$(\sigma_t = 2\sigma_l ; \sigma_l > \sigma_r).$$

#### b)Pression extérieure :

En plus de la vérification des contraintes directes ( $\sigma_t$ ,  $\sigma_l$  et  $\sigma_r$ ) les sollicitations des pressions extérieures entraînent l'étude de la stabilité. Les contraintes directes

sollicitent le tuyau en compression, ce qui fait perdre au tuyau sa stabilité quand il est à paroi mince. De circulaire, la section tend à devenir elliptique pour finir par s'affaisser complètement. La théorie de flambement d'un anneau s'applique à l'étude de voilement d'un tube mince de grande longueur soumis à une pression externe. Cette théorie nous permet de calculer la pression critique. cette dernière ne doit en aucun cas dépasser la pression de calcul.

Pour étudier le supportage, il est de pratique courante de prendre les charges dues à la pesanteur. Il est à considérer d'une part, la masse de divers éléments de réseau (sans le fluide) y compris les revêtements éventuels, et d'autre part la charge due au fluide véhiculé. Il faut tenir compte des effets de la variation de température. Cette variation est à l'origine de contraintes thermiques. Celles-ci apparaissent lorsque la dilatation ou la contraction de tuyau se trouve partiellement ou totalement empêché par le réseau d'ancrage.

Après les calculs, un schéma de tuyauterie est à proposer à partir de ce schéma, l'analyse sismique s'effectue. Un modèle aux éléments finis de poutre est élaboré en plaçant un noeud à tout support, soudure, croisement, ...les excitations aux différents points d'ancrage sont données par l'analyse sismique de la structure génie civil qui supporte cette tuyauterie. Les excitations se traduisent par la réponse de la structure en les différents points d'ancrage. On calcule alors, pour chaque. direction, la réponse de la tuyauterie les résultats de ces calculs dans les trois directions sont cumulés

Les résultats vont nous orienter vers:

- L'ajout de support aux endroits même d'ancrage lorsque les efforts exercés sont excessifs.
- L'introduction si nécessaire d'autre supports dont la fonction principale est de limiter la flèche des tuyauterie.

De plus, des modifications du tracé peuvent être proposées.

### **III.2. REPONSE D'UNE STRUCTURE SOUMISE A DES EXCITATIONS D'APPUI UNIFORMES:**

Les mouvements sismiques induisent dans les structures des actions dynamiques dues principalement aux forces d'inertie apparaissant dans les masses lorsqu'un mouvement est imposé au niveau des supports. Les forces d'inerties sont en fonction de la réponse dynamique de cette structure et ne sont donc pas connues a priori.[12]

Dans le cas où les autres actions induites par l'excitation sismique (déformations imposées par les déplacements différentiels entre appuis) sont nulles, la formulation généralement utilisée, pour le problème dynamique de l'action sismique sera la suivante:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -\gamma(t)[M]\{I\} \quad (III.1)$$

où

-{u} est le vecteur déplacement relatif des points nodaux de la structure par rapport à un repère mobile lié au support où est imposé le mouvement sismique.



- $\{\dot{u}\}$  et  $\{\ddot{u}\}$  sont respectivement les vecteurs vitesses et accélérations relatives.
- $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices masse, d'amortissement et de rigidité de la structure.
- $\gamma(t)$  est l'accélérogramme définissant le mouvement sismique imposé aux supports.
- $\{I\}$  est un vecteur d'influence dans la direction considérée pour le mouvement sismique.

L'équation (III.1) exprime l'équilibre entre les forces d'inertie  $[M](\{\ddot{u}\} + \gamma(t)\{I\})$  et la somme des forces internes résultant des déformations  $(-[K]\{u\})$  et des efforts d'amortissement  $(-[C]\{\dot{u}\})$ . Sa résolution en tenant compte des conditions initiales (en général  $\{u_0\} = \{0\}$  et  $\{\dot{u}\} = \{0\}$ ) permet de déterminer à chaque instants  $t$  le vecteur  $\{u\}$  des déplacements relatifs à partir de quoi on peut déduire les effort internes.

Le second membre de l'équation (III.1) correspond au cas où le mouvement sismique imposé aux supports est une translation dans une direction donnée et est le même pour tous les supports. L'idée de base est de traduire l'accélération du sol en terme de forces dynamiques  $(m; \gamma(t))$  appliquées à la structure.

Cependant, d'autres cas peuvent être rencontrés, le cas par exemple des structure dont les supports sont animés de mouvements différents ou plus précisément des structures soumises à des excitations d'appuis multiples.

### III.3. CALCUL DES STRUCTURES SOUMISES A DES EXCITATIONS D'APPUIS MULTIPLES :

La structure à étudier a un comportement dynamique linéaire [4] [12] [26]. Elle a  $n$  degrés de liberté et liée au sol par  $n_d$  points d'appuis. Chaque point est animé d'un mouvement

$$\ddot{d}_i(t), i = 1, n_d.$$

Dans ce cas, la réponse totale de la structure est obtenue en superposant toutes les réponses dues à chaque excitation d'appui agissant seule.

La formulation des équations du mouvement de la structure soumise à une excitation appliquée à un seul appui est différente de la formulation classique traitant l'excitation uniforme où tous les points d'appui sont supposés animés d'un même mouvement.

Dans le cas présent, seulement un point d'appui, à un instant  $t$  donné, peut se déplacer et tous les autres sont considérés bloqués. Le mouvement différentiel des appuis induit, par conséquent, des contraintes pseudo statiques dans la structure et doivent donc être prises en compte et ajoutées à la réponse dynamique de la structure.

Lorsque le mouvement d'un seul point d'appui en un instant  $t$ , est permis et noté  $v_g$ , l'équation du mouvement s'écrit :

$$[M]\{\ddot{v}'\} + \{M_g\}\ddot{v}_g + [C]\{\dot{v}'\} + \{C_g\}\dot{v}_g + [K]\{v'\} + \{K_g\}v_g = 0 \quad (III.2)$$

où:

$[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  désignent respectivement les matrices globales de masse, d'amortissement et de rigidité.

$[M_g]$ ,  $[C_g]$  et  $[K_g]$  sont des vecteurs composés des termes extra diagonaux de  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  qui induisent un couplage entre le mouvement du support et les degrés de liberté de la structure. (Ils expriment aussi les forces actives développées dans les degrés de liberté, par le mouvement des support)

$\{v^1\}$  : vecteur déplacement absolu de tous les degrés de liberté.

$\{V_g\}$  : déplacement du support.

L'équation (III.2) peut s'écrire avec un second membre désignant un chargement sismique fictif:

$$[M]\{\ddot{v}'\} + [C]\{\dot{v}'\} + [K]\{v'\} = -\{M_g\}\ddot{v}_g - \{C_g\}\dot{v}_g - \{K_g\}v_g \quad (III.3)$$

Le déplacement pseudo statique  $v^s$  s'obtient à partir de l'équation d'équilibre statique de la structure c'est à dire en omettant les termes dynamiques dans l'équation (III.3).

$$[K]\{v^s\} = -\{K_g\}v_g \quad (III.4)$$

Soit:

$$\{v^s\} = -[K]^{-1}\{K_g\}v_g \quad (III.5)$$

$$\{v^s\} = \{r\}v_g$$

Où  $\{r\}$  désigne le vecteur d'influence pseudo statique et est donné par:

$$\{r\} = -[K]^{-1}\{K_g\} \quad (III.6)$$

Le déplacement total est la somme du déplacement relatif et du déplacement pseudo statique c'est à dire:

$$\{v'\} = \{v\} + \{v^s\} \quad (III.7)$$

$$\{v'\} = \{v\} + \{r\}v_g$$

En injectant l'expression (III.7) dans l'équation (III.3), on obtient l'équation d'équilibre dynamique de la structure:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} &= -\left([M]\{r\} + \{M_g\}\right)\ddot{v}_g - \left([C]\{r\} + \{C_g\}\right)\dot{v}_g \\ &= P_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (III.8)$$

On voit apparaître dans le second membre un chargement fictif dont la composante due à la rigidité de la structure s'annule car on a:

$$[K]\{r\} + \{K_g\} = 0 \quad (III.9)$$

**Remarques:**

-Si la matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice de rigidité, les termes dépendant de la vitesse  $\dot{v}_g$  s'annulent aussi. Dans ce cas la force sismique fictive qui agit sur la structure est:

$$P_{eff} = -\left([M]\{r\} + \{M_s\}\right)\ddot{v}_g$$

-Si encore, on modélise la structure en un système discret à masses concentrées, la force effective devient alors:

$$P_{eff} = [M]\{r\}\ddot{v}_g$$

Dans tous les cas, l'équation d'équilibre est:

$$[M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} = P_{eff} \quad (III.10)$$

Le vecteur  $\{r\}$  représente les déplacements induits à tous les degrés de liberté par un déplacement unitaire d'un seul appui. (les autres sont considérés bloqués).

La réponse dynamique de la structure au chargement  $P_{eff}$  est obtenue en intégrant directement l'équation (III.10) ou bien en faisant un calcul modal.

La réponse dynamique totale (composantes dynamique et pseudo statique) est obtenue en ajoutant à la composante relative  $\{v\}$  le déplacement pseudo statique  $\{v^s\}$ .

$$\begin{aligned} \{v'\} &= \{v\} + \{v^s\} \\ \{v'\} &= \{v\} + \{r\}v_g \end{aligned} \quad (III.11)$$

**Conclusion:**

La formulation des équations de mouvement des structures soumises à des excitations d'appuis multiples est une généralisation des équations de mouvement sismique classique (uniforme). Il est clair que l'excitation uniforme à la base d'une structure n'est qu'un cas particulier de l'excitation multi-appuis. Pour spécifier les différentes matrices de l'équation de mouvement, La méthode des éléments finis est choisie. Les structures à étudier sont modélisées en éléments finis de poutre tridimensionnels. Des rappels succincts de cette méthode feront l'objet d'une bonne partie du prochain chapitre, Ce dernier Sera conclu par les différentes méthodes d'analyse numérique des problèmes dynamiques.

Méthode de résolution :

Méthode des

éléments finis

## IV 1. RAPPELS DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE :

Soit un solide soumis à un chargement donné. La théorie de l'élasticité linéaire [42] a pour objet, l'étude des contraintes et des déformations qui résultent de l'effet du chargement en supposant que :

- Les déformations sont petites.
- Les lois de comportement reliant les contraintes aux déformations sont linéaires.

La méthode des éléments finis, pour l'analyse linéaire des problèmes statiques et dynamiques, fait appel aux équations générales de la théorie de l'élasticité linéaire. Par conséquent, dans ce chapitre, nous donnerons les principes fondamentaux de la théorie de l'élasticité.

### IV.1.1. Contraintes :

Considérons un cube élémentaire (fig.V.1) d'un corps solide déformable dont la géométrie définit un domaine  $V$  et une surface  $S$ .

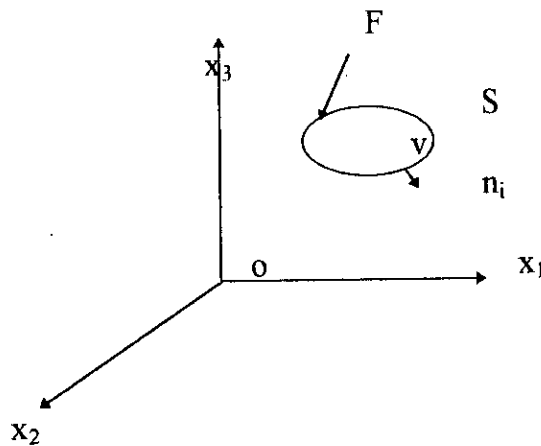


fig.IV.1 Cube élémentaire dans un repère  $(0, x_1, x_2, x_3)$

Chaque facette est soumise à une contrainte admettant trois composantes  $\sigma_{ij}$  lorsque:

$i = j$  :  $\sigma_{ij}$  est une contrainte normale.

$i \neq j$  :  $\sigma_{ij}$  est une contrainte tangentielle ou de cisaillement.

On dit que le cube est soumis à un tenseur de contraintes dont les composantes sont  $\sigma_{ij}$ . D'une manière générale, le tenseur de contrainte est symétrique.

### II.1.2. Déformations :

Soit  $U(u_1, u_2, u_3)$  le vecteur déplacement d'un point quelconque du domaine  $V$ . Les composantes du tenseur déformations ont pour expressions générales :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (IV.1)$$

Lorsque  $i = j$   $\varepsilon_{ij}$  est une déformation normale qui affecte le volume du corps.

$i \neq j$   $\varepsilon_{ij}$  est une déformation de cisaillement qui modifie la forme du corps.

Comme le tenseur de contraintes, le tenseur des déformations est symétrique.

Les six composantes  $\epsilon_{ij}$  dépendent des trois fonctions  $u_1, u_2$  et  $u_3$  du déplacement. Elles ne sont donc pas indépendantes entre elles. Elles sont liées par des équations dites de compatibilité. Les conditions de compatibilité assurent l'existence du champ de déplacement et son unicité.

### II.1.3. Equations d'équilibre :

Considérons l'équilibre d'un milieu  $V$  de frontière  $S$ . D'après la troisième loi de Newton on a, pour  $i$  donné :

$$\int_V f_i dv + \int_S S_i ds = 0 \quad (IV.2)$$

$f_i$  : ième composante du champ vectoriel des forces volumiques  $f$ .

$S_i$  : ième composante du champ vectoriel des forces surfaciques.

or:

$$S_i = \sigma_{ij} n_j \quad (IV.3)$$

d'où

$$\int_V f_i dv + \int_S \sigma_{ij} n_j ds = 0 \quad (IV.4)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) dv = 0 \quad (IV.5)$$

$V$  est une région arbitraire :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (IV.6)$$

Cette équation traduit l'équilibre en un point selon trois directions.

### II.1.4. Loi de comportement:

Dans le cas des matériaux à comportement linéaire élastique, la relation qui lie les contraintes aux déformations s'écrit:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (IV.7)$$

$C_{ijkl}$  : coefficient d'élasticité.

Dans le cas particulier des matériaux isotropes, les coefficients d'élasticité se réduisent à deux constantes indépendantes  $\lambda$  et  $\mu$  (soit  $E$  et  $\mu$ ).

Les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes connues sous le nom de loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{IV.8})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\gamma}{E} \sigma_{ij} - \frac{\gamma}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{IV.9})$$

avec :  $\lambda$  et  $\mu$  coefficients de Lamé.

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\lambda = \frac{E\gamma}{(1+\gamma)(1-2\gamma)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\gamma)}$$

E : module d'élasticité du matériau.

$\nu$  : coefficient de poisson.

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker.

## IV.2. INTRODUCTION AUX METHODES VARIATIONNELLES :

Les méthodes variationnelles nous permettent, selon qu'on considère une variation des déformations ou des contraintes, d'exprimer la variation de l'énergie potentielle totale ou l'énergie complémentaire totale du système, et donc de déterminer un champs de déplacements ou un champs de contraintes d'un corps en équilibre.[5], [19], [41]

Ainsi, pour une approche déplacement on aura à calculer le champs de déplacements, par contre pour une approche contrainte on devra chercher le champ de contraintes.

### IV.2.1. Définition :

- Un champ de déplacements cinématiquement admissible est un champ de déplacements qui vérifie les conditions aux limites en déplacements du problème.
- Un champ de contraintes statiquement admissible est un champ de contraintes qui vérifie les d'équations équilibre plus les conditions aux limites en contraintes à la surface.

### IV.2.2. Approche cinématique (déplacements) :

La solution (déplacements et contraintes) du problème de mécanique des solides est à la fois cinématiquement et statiquement admissible. Dans un premier temps, nous allons adopter l'approche déplacement pour chercher une formule énergétique à l'aide du champ de déplacements inconnus.

### IV.2.2.1. Principes des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie de déformation est égal à la somme des travaux virtuels des forces de volume et surface dans tout accroissement virtuel cinématique admissible du champ des déplacements.

$$\delta U = \int_V f_i \delta u_i dv + \int_S S_i \delta u_i ds \quad (IV.10)$$

$\delta U$  : accroissement virtuel de énergie de déformation.

$$\delta U = \delta \int_V W dv$$

### IV.2.2.2. Théorème de l'énergie potentielle en déplacement :

On appelle énergie potentielle en déplacement la fonctionnelle  $V$  définie par :

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dv - \int_V f_i u_i dv - \int_S S_i u_i ds \quad (IV.11)$$

Le premier terme de la fonctionnelle désigne l'énergie de déformation du solide, le second terme désigne le travail des forces volumiques et le troisième terme désigne le travail des forces surfaciques.

#### Théorème :

Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, le champ solution du problème est celui qui minimise l'énergie potentielle. Ceci exprime aussi bien l'extremum du potentiel total du système que l'équilibre du corps. En conséquent, l'état d'équilibre correspond au minimum du potentiel total du système.

### IV.2.3. Approche équilibre (contraintes) :

#### IV.2.3.1 Principe des travaux virtuels complémentaires :

Pour un corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie complémentaire de déformation est égal à la somme des travaux des champs virtuels des forces de volume et de surface dans le champ de déplacements réels.

$$\delta U_c = \int_V u_i \delta f_i dv + \int_S u_i \delta_i^* ds \quad (IV.12)$$

$\delta U_c$  accroissement virtuel de l'énergie complémentaire de déformation

$$\delta u_c = \delta \int_V w_c dv$$



**IV.2.3.2 Théorème de l'énergie potentielle en contraintes :**

On appelle énergie potentielle en contraintes, la fonctionnelle  $V^*$  définie par:

$$V^*(\sigma) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_y \varepsilon_y(\sigma_y) dV - \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS \tag{IV.13}$$

**Théorème:** parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, le champ des contraintes solution du problème est celui qui maximise l'énergie potentielle en contrainte  $V^*$ .

**IV.3.METHODE DES ELEMENTS FINIS :**

Dans son travail, l'ingénieur décrit le comportement de systèmes physique par équations aux dérivées partielles. Il a besoin de connaître la répartition des contraintes et des déformations au sein des structures qu'il envisage de réaliser [36]. La méthode des éléments finis (MEF) est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement les équations. La M.E.F est une idéalisation de la réalité. Elle consiste en la discretisation du milieu continu en éléments finis reliés entre eux uniquement par un nombre finis du points nodaux. Le problème devient donc discret et les connaissances des propriétés de chaque élément va nous permettre d'en déduire grâce à des techniques d'assemblage, les propriétés recherchées de toute la structure.

LA MEF consiste à chercher une solution approchée de l'équation en minimisant l'énergie potentielle  $V(u)$  sur un sous espace  $U_n$  des champs des déplacements cinématiquement admissible.  $U_n$  étant de dimension finie. En pratique,  $U_n$  est défini par la donné de  $n$  champs linéairement indépendants  $N_1, N_2, \dots, N_n$ .

Si on suppose que les déplacements imposés sont nuls, alors  $U_n$  est un espace vectoriel sur lequel tout champ  $U$  peut être projeté sous la forme :

$$U = \sum_i \lambda_i N_i \tag{IV.14}$$

**IV.3.1. Approximation par éléments finis :**

Pour construire la fonction approchée  $u(x)$  d'une fonction exacte  $u_{ex}(x)$  en utilisant la méthode d'approximation nodale, nous pouvons adopter la relation suivante [5]:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n \tag{IV.15}$$

avec

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u_{ex}(x_1) = u_1 \\ u(x_2) &= u_{ex}(x_2) = u_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ u(x_n) &= u_{ex}(x_n) = u_n \end{aligned}$$

$N_i(x)$  : fonction d'interpolation.

$U_i$  : variables nodales.

La méthode d'approximation nodale par sous domaine consiste à :

- Identifier un ensemble de sous domaine  $V^e$  du domaine  $V$ .
- Définir une fonction approchée  $u^e(x)$  différente sur chaque sous domaine  $V^e$  par la méthode d'approximation nodale.

La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous domaines qui présente les particularités suivantes :

- L'approximation sur chaque sous domaine  $V^e$  ne fait intervenir que les variables nodales attachées à ses noeuds situés sur  $V^e$  et sur sa frontière.
- Les fonctions approchées  $u^e(x)$  sur chaque sous domaine  $V^e$  sont construites de manière à être continues sur  $V^e$  et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous domaines.
- Les sous domaines  $V^e$  sont appelés éléments.
- Les points sur lesquels  $u^e(x)$  coïncide avec  $u_{ex}(x)$  sont appelés noeuds d'interpolation ou points nodaux.
- Les coordonnées  $x_i$  de ces noeuds sont les coordonnées nodales.

### II.3.2. Expression de l'énergie potentielle :

$$u = \sum_i \lambda_i N_i \quad (IV.16)$$

$$\sigma_y(u) = \sigma_y(\sum_k \lambda_k N_k) = \sum_k \lambda_k \sigma_y(N_k) \quad (IV.17)$$

$$\varepsilon_y(u) = \sum_i \lambda_i \varepsilon_y(N_i) \quad (IV.18)$$

l'énergie de déformation  $E(u)$

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_v \sigma_y(u) \varepsilon_y(u) dv \quad (IV.19)$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_v (\sum_k \lambda_k \sigma_y(N_k)) (\sum_i \lambda_i \varepsilon_y(N_i)) dv \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_i \lambda_k \lambda_i \int_v \sigma_y(N_k) \varepsilon_y(N_i) dv \end{aligned} \quad (IV.20)$$

Le travail des forces extérieures s'écrit :

$$\begin{aligned} W(u) &= \int_v f_k \sum_k \lambda_k N_k dv + \int_s s_k \sum_k \lambda_k N_k ds \\ &= \sum_k \lambda_k \left\{ \int_v f_k N_k dv + \int_s s_k N_k ds \right\} \end{aligned} \quad (IV.21)$$

On pose :

$$\{A\} = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}^T : \text{vecteur déplacement généralisé.}$$

$$[K] = [K_{ij}] = \int_V \sigma_{ij}(N_k) \varepsilon_{ij}(N_k) dv : \text{matrice de rigidité de composante générale } K_{ij}.$$

$$\{F\} = \{f_i\} = \int_V f_i N_i dv + \int_S s_i N_i ds : \text{vecteur chargement généralisé.}$$

avec ces notations, l'énergie potentielle  $V(u)$  s'écrit dans le cas statique :

$$V(u) = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\} - \{A\}^T \{F\} \quad (IV.22)$$

En appliquant le théorème de l'énergie potentielle en déplacement à  $V(u)$ , on obtient le système d'équation linéaire suivant :

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (IV.23)$$

A travers cette formulation, on voit apparaître clairement l'avantage de la MEF qui est une transformation des équations aux dérivées partielles régissant le problème en un système d'équations linéaires. Les paramètres inconnus du problème s'appellent les ddl nodaux.

#### IV.3.3. Energie de déformation, matrice de rigidité :

Soit la structure  $V$  discretisée comme indiquée précédemment par un ensemble d'éléments finis  $e_i$  ( $i = 1, n_e$ ),  $n_e$  étant le nombre d'éléments. Supposons qu'on ait  $n$  noeuds animés chacun d'un ddl. Nous aurons donc  $n$  inconnus.

Supposons que chaque élément  $e_i$  possède  $n_i$  noeuds donc  $n_i$  ddl.

Soit le vecteur  $U_i$  des ddl de l'élément  $e_i$  :

$$\{U_i\} = \{U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i}\}^T \quad (IV.24)$$

Le champ de déplacement à l'intérieur de l'élément  $e_i$  s'exprime sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base données et des ddl nodaux.

$$U_i = \sum_j N_j U_{ij} = \{N\}^T \{U_i\} \quad (IV.25)$$

l'énergie de déformation de l'élément s'écrit :

$$E_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (IV.26)$$

Le tenseur de contraintes de composantes  $\sigma_{ij}$  est lié au tenseur des déformations de composantes  $\varepsilon_{ij}$  par la loi de comportement :

$$[\sigma] = [A][\varepsilon] \quad (IV.27)$$

[A] : opérateur de Hooke.

Le tenseur de déformation est lié au vecteur déplacement par la relation :

$$[\varepsilon] = [B]\{U\} = [B][N]\{U_i\} = [D]\{U_i\} \quad (IV.28)$$

[B] : matrice qui lie les déformations aux déplacements.

En injectant (IV.28) dans (IV.26) on aura :

$$E_i = \frac{1}{2} \int_{v'} [A][D]\{U_i\}[D]\{U_i\} dv = \frac{1}{2} \{U_i\}' \left( \int_{v'} [D]'[A][D] dv \right) \{U_i\} \quad (IV.29)$$

On pose

$$[K_e] = \int_{v'} [D]'[A][D] dv \quad (IV.30)$$

$[k_e]$  représente la matrice de rigidité élémentaire de l'élément  $v^e$

$$E_i = \frac{1}{2} \{u_i\}' [K_e] \{u_i\} \quad (IV.31)$$

#### IV.3.3.1. Application à l'élément fini de poutre :

##### IV.3.3.1.1. Matrice de rigidité de l'élément en extension :

Soit l'élément fini de poutre sollicité en traction-compression, défini par deux noeuds i et j de coordonnées  $x_i$  et  $x_j$ .

Chaque noeuds est animé d'un ddl, soient  $u_i$  et  $u_j$ .

Le déplacement longitudinal de toutes les abscisses  $x$  s'exprime comme une combinaison linéaire de fonctions de base données et des variables nodales  $u_i$  et  $u_j$ .

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j = \{N\}' \{u\} \quad (IV.32)$$

avec

$$\{N\}' = \{N_i, N_j\}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

les fonctions de base sont de forme polynomiale et dans ce cas vérifiant deux conditions aux limites, ces fonctions sont :

$$\begin{aligned} N_i(x) &= a_i x + b_i \\ N_j(x) &= a_j x + b_j \end{aligned} \tag{IV.33}$$

avec les conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} N_i(x=0) &= 1 \Rightarrow b_i = 1 \\ N_i(x=l) &= 0 \Rightarrow a_i = -\frac{1}{l} \end{aligned} \right| \quad \text{donc } N_i(x) = -\frac{x}{l} + 1$$

de la même façon, on trouve  $N_j(x) = x/l$

Calculons l'énergie de déformation de l'élément :

$$E_i = \int_{v'} \sigma_y \varepsilon_y dv$$

En traction-compression, la contrainte normale est liée à la déformation longitudinal par la relation  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$   
 E : module de Young.

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{du(x)}{dx} = u(x)_{,x} = \{N\}'_{,x} \{u\}$$

avec  $\{N\}'_{,x} = \left\{ -\frac{1}{l}, \frac{1}{l} \right\}$

l'énergie de déformation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \int_{v'} E (\{N\}'_{,x} \{x\})^2 dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v'} E (\{N\}'_{,x} \{x\}) (\{N\}'_{,x} \{x\}) dv \\ &= \frac{1}{2} \{u\}' \left[ \int_{v'} E \{N\}_{,x} \{N\}'_{,x} dv \right] \{u\} \end{aligned}$$

on pose

$$[K_e] = \int_{v'} E \{N\}_{,x} \{N\}'_{,x} dv = \int_0^l EA(x) \{N\}_{,x} \{N\}'_{,x} dx \tag{IV.34}$$

ou  $A(x)$  désigne la section droite de l'élément à l'abscisse  $x$ .

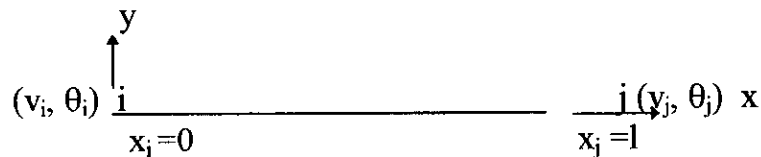
Si on suppose que  $E$  et  $S$  sont constant le long de l'élément, la matrice de rigidité de l'élément  $V^e$  s'écrit :

$$[K_e] = EA \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{Bmatrix} dx \quad (IV.35)$$

$$[K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

#### IV.3.3.1.2. Matrice de rigidité d'un élément en flexion simple :

Considérons une poutre en flexion simple dans un plan principal de flexion soit  $(x,y)$ .



L'interprétation de la flèche s'écrit ici sous la forme :

$$\{y(x)\} = \{N_1(x), N_2(x), N_3(x), N_4(x)\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \{N\}' \{u_0\}$$

Les conditions d'extrémité sont :

$$y(x=0) = v_1$$

$$y'(x=0) = \theta_1$$

$$y(x=1) = v_2$$

$$y'(x=1) = \theta_2$$

Les fonctions d'interpolation sont des polynômes du 3<sup>ème</sup> degré, c'est à dire :

$$N_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}x^2 + a_{i4}x^3$$

Après introduction des conditions d'extrémité on détermine les constantes  $a_{ik}$ .

On peut écrire :

$$[K_e] = EI_y \int_0^L \{N(x)\}'_x \{N(x)\}'_x dx$$

Soit

$$K_{ij} = EI_y \int_0^L N_{i,x}(x) N_{j,x}(x) dx$$

d'où après intégration on trouve :

$$[K_e] = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -1l & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (IV.36)$$

Si on considère une poutre en flexion simple dans l'autre plan principal soit (z,x), la matrice de rigidité d'un tel élément sera :

$$[K_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -1l & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (IV.37)$$

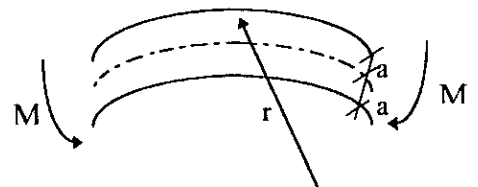
### Cas particulier de l'élément tube:

Les tubes courbes à parois relativement minces, se révèlent pendant la flexion, plus flexibles que les barres pleines courbes. Il faut tenir compte de la distorsion de la section pendant la flexion [35].

Sous l'effet du couple M, les sections initialement circulaires sont aplaties et deviennent elliptiques. Cet aplatissement affecte la déformation des fibres longitudinales du tube. Il a été démontré que l'aplatissement de la section provoque une diminution de la contrainte dans les fibres extrêmes. Ceci affecte la flexion du tube de la même manière qu'une diminution de son moment d'inertie. On utilisera pour le calcul des matrices de rigidité' des éléments tubes, la nouvelle inertie flexionnelle I' au lieu de I tel que: I' = k.I.

où k est un coefficient numérique, inférieur à l'unité qui tient compte de l'aplatissement. Ce coefficient dépend des proportions du coude et se calcule à l'aide de la formule approchée (formule de KARMAN):[34] [22]

$$k = 1 - \frac{9}{10 + 12 \left( \frac{k \cdot r}{a^2} \right)^2}$$



où: r: le rayon de courbure moyen du coude.  
a: le rayon du tube.

### IV.3.3.1.3. Matrice de rigidité d'un élément en torsion :

Considérons un élément de poutre sollicité en torsion, chaque noeud est animé d'un ddl, soient  $\theta_i$  et  $\theta_j$ .

$$\theta(x) = \{N\}' \{\theta\}$$

les fonctions de base sont de la forme :

$$\begin{aligned} N_i(x) &= a_i x + b_i \\ N_j(x) &= a_j x + b_j \end{aligned}$$

tel que les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} N_i(x=0) &= 1 \\ N_i(x=l) &= 0 \end{aligned} \right\} N_i(x) &= -\frac{x}{l} + 1 \\ \left. \begin{aligned} N_j(x=0) &= 0 \\ N_j(x=l) &= 1 \end{aligned} \right\} N_j(x) &= \frac{x}{l} \end{aligned}$$

La matrice de rigidité de l'élément  $V^e$  s'écrit :

$$[K_e] = \int_0^l GJ \{N\}_{,x} \{N\}'_{,x} dx$$

ou  $G$  : module de cisaillement de l'élément

$J$  : moment d'inertie torsionnel.

Si on suppose que  $G$  et  $J$  sont constants le long de l'élément, la matrice de rigidité de l'élément s'écrit :

$$[K_e] = \frac{JG}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV.38)$$

### Conclusion :

La matrice de rigidité pour un segment de poutre tridimensionnel est la superposition de la matrice de rigidité flexionnelle, la matrice de rigidité axiale et la matrice de rigidité torsionnelle.

Un élément poutre 3D possède donc 12 coordonnées nodales : trois translations suivis de trois rotations dans le premier noeud et le même nombre et type de ddl dans le second noeud.

### IV.3.4. Energie cinétique, matrice de masse :

L'énergie cinétique d'un élément  $V^{ei}$  est égale à :

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho [\dot{u}(x)]^2 dv \quad (IV.39)$$

tel que :

$T_i$  : énergie cinétique de l'élément  $V^{ei}$ .

$\rho$  : masse volumique du matériau constituant l'élément.

$$u(x) = \{N\}' \{u\}$$



$\{N\}$  étant indépendant du temps ce qui implique :

$$\dot{u}(x) = \{N\}' \{\dot{u}\}$$

l'énergie cinétique devient :

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho \{N\}' \{\dot{u}\}^2 dv \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{u}\}' \left[ \int_{V^e} \rho \{N\}' \{N\} dv \right] \{\dot{u}\} \end{aligned}$$

On pose :

$$[M_e] = \int_{V^e} \rho \{N\}' \{N\} dv$$

l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$T_i = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}' [M_e] \{\dot{u}\} \quad (\text{IV.40})$$

ou  $[M_e]$  désigne la matrice de masse de l'élément  $V^e$ .

#### IV.3.4.1. Application à l'élément fini de poutre :

Les fonctions de base  $N_i(x)$  sont indépendantes du temps, donc on peut prendre les mêmes expressions que celles correspondant au cas statique.

##### IV.3.4.1.1. Matrice de masse en extension :

$$[M_e] = \int_0^l \rho S(x) \{N\}' \{N\} dx \quad (\text{IV.41})$$

Si on suppose que  $\rho$  et  $S(x)$  sont constants le long de l'élément, la matrice de masse élémentaire de l'élément en extension s'écrit après intégration comme suit :

$$\begin{aligned} [M_e] &= \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [M_e] &= \frac{\bar{m} l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

où  $\bar{m}$  masse linéaire de l'élément.

##### IV.3.4.1.2. Matrice de masse de l'élément en flexion simple :

On considère l'élément de poutre en flexion simple dans le plan principal (x,y) et sachant que les fonctions de base sont identiques au cas statique, la matrice masse s'écrit :

$$[M_e] = \rho S \int_0^l N_i(x) N_j(x) dx \quad (IV.43)$$

après intégration, on obtient :

$$[M_e] = \frac{\bar{m}l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (IV.44)$$

La matrice masse cohérente élémentaire reste identique sous l'effet de la flexion simple dans l'autre plan principal de flexion (x,z).

#### IV.3.4.1.3. Matrice de masse en torsion :

On considère l'élément poutre sollicité en torsion, la matrice masse élémentaire s'écrit :

$$[M_e] = \int_0^l I_m N_i(x) N_j(x) dx \quad (IV.45)$$

ou  $I_m$  est le moment de masse polaire par unité de longueur, après intégration :

$$[M_e] = \frac{I_m l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (IV.46)$$

#### Conclusion :

La matrice masse pour un élément de poutre 3D est la superposition des différentes matrices : flexionnelle, axiale et torsionnelle.

#### IV.3.5 Transformation de coordonnées (Passage du repère local au repère global):[16]

Considérons le vecteur  $\underline{A}$  (figIV.2) et les deux systèmes d'axes orthogonaux  $(o, x_s, y_s, z_s)$  et  $(o, x_m, y_m, z_m)$ . Soient les cosinus directeurs de l'axe  $x_m$  par rapport à  $x_s, y_s$  et  $z_s$   $L_{11}, L_{12}$  et  $L_{13}$  respectivement. De même les cosinus directeur des deux autres axes  $y_m$  et  $z_m$ , respectivement  $L_{21}, L_{22}, L_{23}$  et  $L_{31}, L_{32}, L_{33}$ . Le vecteur  $\underline{A}$  peut être exprimé aussi bien dans le système d'axe  $(o, x_s, y_s, z_s)$  que dans  $(o, x_m, y_m, z_m)$ .

$$\begin{aligned}
 & A_s \begin{Bmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \\ A_{zs} \end{Bmatrix}, A_m \begin{Bmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \\ A_{zm} \end{Bmatrix} \\
 & A_m = \begin{Bmatrix} A_{xm} \\ A_{ym} \\ A_{zm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{xs} \\ A_{ys} \\ A_{zs} \end{Bmatrix} \\
 & A_m = R_1 A_s
 \end{aligned} \tag{IV.47}$$

Pour déterminer les cosinus directeurs  $L_{ij}$ , il suffit généralement d'avoir les coordonnées de 3 points : les deux points définissant les noeuds de l'élément et un 3<sup>ème</sup> point P se trouvant dans le plan local  $x_m y_m$  tel que y est un axe principal de la section droite de l'élément.

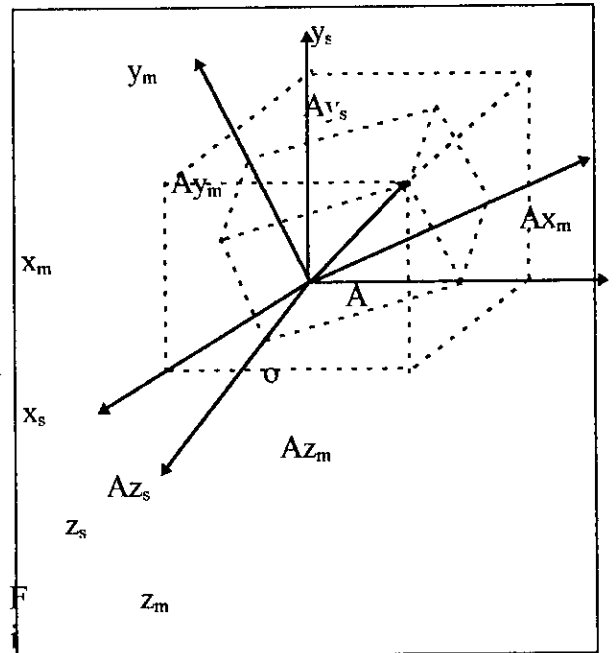
Les cosinus directeurs de l'axe  $x_m$  le long de l'élément sont définis par :

$$\lambda_{11} = C_x = \frac{x_k - x_j}{l}$$

$$\lambda_{12} = C_y = \frac{y_k - y_j}{l}$$

$$\lambda_{13} = C_z = \frac{z_k - z_j}{l}$$

$$l = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}$$



g  
Fig IV.2: Projections du vecteur  $\underline{A}$  dans deux systèmes d'axes.

#### Remarque :

Dans le cas d'un élément dans l'espace les  $L_{1i}$ ,  $i = 1, 3$  sont suffisant pour passer du repère local au repère global.

Dans le cas le plus général (poutre dans l'espace) deux solutions existent : la première qui ne fait pas appel au 3<sup>ème</sup> point P à condition que l'orientation des deux axes locaux  $y_m$  et  $z_m$  soit confondue avec les axes principaux de la section droite. Si ce cas ne peut pas se présenter, une forme indéterminé apparaît, d'où la nécessité d'un 3<sup>ème</sup> point P.

**1<sup>ère</sup> solution**

On choisit l'axe  $z_m$  dans le plan  $(x_s, z_s)$  puis on effectue une rotation d'un angle  $\beta$  autour de  $y_s$  pour faire confondre  $z_m$  avec  $z_s$ . On effectue ensuite une rotation d'un angle  $\gamma$  autour de  $z_m$  ( $z_s$ ) pour faire confondre  $y_m$  avec  $y_s$  ainsi que  $x_m$  et  $x_s$  ( $x_s$ ).

1<sup>ère</sup> rotation

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, A_\beta = R_\beta A_s \quad (\text{IV.48})$$

tel que

$$\cos \beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}, \sin \beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}$$

2<sup>ème</sup> rotation

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_m = R_\gamma R_\beta A_s \quad (\text{IV.49})$$

tel que

$$\cos \gamma = \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}, \sin \gamma = C_y$$

d'où

$$A_m = R_\gamma A_\beta = R_\gamma R_\beta A_s$$

$$R_1 = R_\gamma R_\beta = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & C_y & \frac{C_z C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

Si l'élément est vertical :

$$R_{vert} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

**2<sup>ème</sup> solution :**

Lorsqu'on ne peut pas choisir  $x_m$  dans le plan  $(x_s, z_s)$ , c'est le cas des sections droites inclinées par rapport à l'axe vertical conventionnellement pris (figIV.3). On effectue alors une première rotation  $\beta$  autour de  $y_s$  pour ramener  $x_s$  sous  $x_m$ , une deuxième

rotation  $\gamma$  autour de  $z_b$  pour que les axes  $x_b$  et  $x_m$  soient confondus et une troisième rotation  $\alpha$  autour de  $x_m$  pour coïncider  $y_m$  et  $z_m$  avec les axes principaux de la section droite.

1<sup>ère</sup> rotation :

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, A_\beta = R_\beta A_s \quad (IV.52)$$

2<sup>ème</sup> rotation :

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_\gamma = R_\gamma A_\beta \quad (IV.53)$$

3<sup>ème</sup> rotation :

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, A_m = R_\alpha A_\gamma \quad (IV.54)$$

$$A_m = R_\alpha R_\gamma R_\beta A_s$$

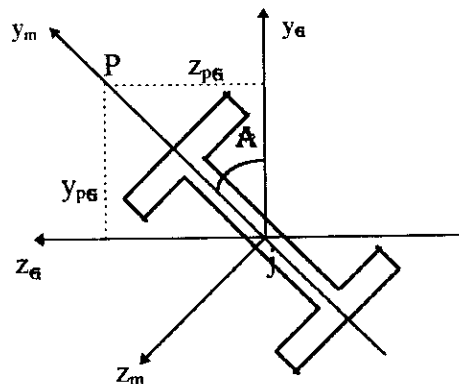
$$R_1 = R_\alpha R_\gamma R_\beta \quad (IV.55)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{-C_x C_y \cos \alpha - C_z \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \cos \alpha & \frac{-C_y C_z \cos \alpha + C_x \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \sin \alpha - C_z \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \sin \alpha & \frac{C_y C_z \sin \alpha + C_x \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix}$$

Pour calculer  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$ , il suffit d'introduire en plus des coordonnées des noeuds, les coordonnées d'un point P se trouvant dans le plan local  $x_m y_m$ .

$$\text{le noeud } j = \begin{Bmatrix} x_{js} \\ y_{js} \\ z_{js} \end{Bmatrix}$$

$$\text{le point } P = \begin{Bmatrix} x_{ps} \\ y_{ps} \\ z_{ps} \end{Bmatrix}$$



FigIV.3: Orientation de la section.

Tout calcul fait, on trouve :

$$\sin \alpha = \frac{z_{pr}}{\sqrt{y_{pr}^2 + z_{pr}^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{y_{pr}}{\sqrt{y_{pr}^2 + z_{pr}^2}}$$

avec

$$y_{pr} = -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ps} + \sqrt{C_x^2 + C_z^2} y_{ps} - \frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ps}$$

$$z_{pr} = -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ps} + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ps}$$

Si l'élément est vertical alors :

$$R_{vert} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (IV.56)$$

#### IV.3.6. Assemblage :

L'assemblage consiste à construire les matrices de rigidité [K], de masse [M] de la structure ainsi que le vecteur force {F} à partir des caractéristiques des différents éléments [K<sub>e</sub>], [M<sub>e</sub>] et {F<sub>e</sub>} préalablement calculées.

L'approche la plus générale pour cela est l'approche énergétique. L'énergie totale de déformation de la structure est égale à la somme des énergies de déformation de chacun des éléments, de même pour l'énergie cinétique totale.

$$\begin{aligned} E &= \sum E_i \\ T &= \sum T_i \end{aligned} \quad (IV.56)$$

tel que E et T sont respectivement les énergies de déformation et cinétique totales.

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \{u_i^*\}' [K_{eg}] \{u_i^*\} \\ T_i &= \frac{1}{2} \{\dot{u}_i^*\}' [M_{eg}] \{\dot{u}_i^*\} \end{aligned} \quad (IV.57)$$

ou [K<sub>eg</sub>] et [M<sub>eg</sub>] sont des matrices de rigidité et de masse dans le repère global.

Soit {u} un vecteur contenant l'ensemble des déplacements nodaux de la structure. Le vecteur {u<sub>i</sub><sup>\*</sup>} peut s'écrire en fonction du vecteur {u} comme suit :

$$\{u_i^*\} = [L_i] \{u\} \quad (IV.58)$$

ou  $[L_i]$  désigne une matrice appelée matrice de localisation ou matrice Booléenne dont les termes sont tous nuls sauf ceux correspondant aux composantes de  $\{u_i^*\}$  qui sont égaux à l'unité.

En remplaçant l'expression de  $\{u_i^*\}$  dans celle de l'énergie de déformation, on obtient:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \{ [L_i] \{u\} \}' [K_{eg}] \{ [L_i] \{u\} \} \\ &= \frac{1}{2} \{u\}' [L_i]' [K_{eg}] [L_i] \{u\} \end{aligned} \quad (IV.59)$$

l'énergie de déformation totale s'écrit :

$$\begin{aligned} E &= \sum \frac{1}{2} \{u\}' [L_i]' [K_{eg}] [L_i] \{u\} \\ &= \frac{1}{2} \{u\}' \left( \sum [L_i]' [K_{eg}] [L_i] \right) \{u\} \end{aligned} \quad (IV.60)$$

On pose

$$[K] = \sum [L_i]' [K_{eg}] [L_i] \quad (IV.61)$$

C'est la matrice de rigidité globale de la structure, de la même manière, on trouve la matrice masse globale de la structure.

$$[M] = \sum [L_i]' [M_{eg}] [L_i] \quad (IV.62)$$

#### IV.3.7. Conditions aux limites :

Pour résoudre le système d'équation d'équilibre, on doit modifier la matrice de rigidité et le vecteur force pour tenir compte des conditions aux limites en déplacement ( $u_i = \bar{u}_i$ ).

Les conditions aux limites peuvent être introduites de plusieurs manières dans le système d'équilibre. Nous avons choisi la méthode dite du terme diagonal dominant.

Elle consiste à changer les termes  $K_{ii}$  et  $F_i$  correspondant à la condition ( $u_i = \bar{u}_i$ ).

on remplace  $k_{ii}$  par  $k_{ii} + \mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_0$  étant un nombre très grand par rapport à tous les termes  $k_{ij}$ . (soit  $\mathbf{A}_0 = 10^{35}$ ) et  $F_i$  par  $\mathbf{A}_0 F_i$ .

#### IV.4. ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

De nombreux problèmes d'analyse de structures peuvent être traités par la méthode d'analyse statique. Cependant il existe également de nombreux cas où l'on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées dans le temps. Pratiquement, n'importe quelle structure est

susceptible de subir pendant sa durée de vie, un chargement dynamique sous une forme ou une autre. [12], [28]

Un problème dynamique se distingue du problème statique par :

- La nature évolutive du problème dynamique dans le temps comme le chargement et la réponse varient, il est évident qu'un problème dynamique n'a pas qu'une solution.
- Si le chargement est appliqué dynamiquement, l'accélération de la structure produit des forces d'inertie qui s'opposent à cette même accélération. Ces forces d'inertie constituent la caractéristique la plus distinctive des problèmes de dynamique des structures.

#### IV.4.1. Formulation des équations du mouvement :

Considérons un système élastique conservatif. Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (IV.63)$$

avec :

$\sigma_{ij,j}$  : tenseur des contraintes  
 $f_i$  : forces de volume

En élastostatique, les théorèmes de l'énergie ( principe des travaux virtuels ou théorème de l'énergie potentielle totale dans le cas d'un approche de type déplacement ) constituent une caractéristique énergétique de l'état d'équilibre.

En dynamique, il existe également une approche énergétique ou variationnelle pour l'étude du mouvement : c'est le principe de HAMILTON.

S'il n'y a pas d'autres forces de volume que les forces d'inertie, les forces  $f_i$  s'écrivent :

$$f_i = -\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 \quad (IV.64)$$

et les équations du mouvement deviennent :

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (IV.65)$$

##### IV.4.1.1. Principe de HAMILTON :

Dans le cas le plus générale des systèmes non conservatifs comme par exemple en présence des forces d'amortissement, le principe de HAMILTON s'écrit :

$$\int_1^2 \delta (T - V) dt + \int_1^2 \delta W' dt = 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0 \quad (IV.66)$$

avec T : énergie cinétique telle que

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dv \quad (IV.67)$$



v : énergie potentielle totale tel que

$$V = U - W = \frac{1}{2} \int_v \sigma_y \varepsilon_y dv - \int_s S_i u_i ds - \int_v f_i u_i dv \quad (IV.68)$$

c'est à dire la somme de l'énergie de déformation et du potentiel des forces conservatives de surface et de volume.

w\*: travail effectué par les forces non conservatives agissant sur le système.

δ: variation subie pendant l'intervalle de temps considéré [t<sub>1</sub> , t<sub>2</sub>].

#### IV.4.1.2. Equation de Lagrange :

En pratique, on cherche à obtenir des solutions approchées du problème continu en le réduisant à un problème discret à un nombre fini de degrés de liberté. Le plus souvent on définit une approximation de déplacement en séparant les variables d'espace et de temps en écrivant pour chaque composante de déplacement :

$$\tilde{u}_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) a_i(t) \quad (IV.69)$$

avec -φ<sub>i</sub>(x,y,z) : fonction de base de l'approximation définies dans le domaine V.

- a<sub>i</sub>(t) : coordonnées généralisées inconnues du temps.

On a de même pour les composants de vitesse :

$$\dot{\tilde{u}}_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) \dot{a}_i(t) \quad (IV.70)$$

On peut ainsi exprimer le Lagrangien L=T-V à l'aide des coordonnées généralisées et de leurs dérivées si l'on a effectué les intégrations des fonctions connues par rapport aux coordonnées d'espace :

$$\begin{aligned} L &= T(\tilde{u}_j) - V(\tilde{u}_j) \\ &= T(a_i) - V(a_i) \end{aligned} \quad (IV.71)$$

Pour les systèmes conservatifs, le principe de Hamilton s'énonce alors simplement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, n \quad (IV.72)$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, n \quad (IV.73)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial U}{\partial a_i} = Q_i \quad i = 1, n \quad (IV.74)$$

avec  $Q_i$  : forces généralisées correspondant à la coordonnée  $a_i$  et définies par le travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta W = Q_i \delta a_i \quad (IV.75)$$

Ces équations appelées équation de Lagrange ou encore équations d'Euler-Lagrange, sont les équations du mouvement du système discret défini par une approximation du système continu avec  $n$  coordonnées généralisées.

Pour le système non conservatif, le principe de Hamilton devient :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L[a_i, \dot{a}_i, t] dt + \int_{t_1}^{t_2} W^* dt = 0 \quad \forall \delta a_i \neq 0 \quad (IV.76)$$

Si le travail virtuel des forces non conservatives causé par les accroissements virtuels des coordonnées généralisées peut s'exprimer comme combinaison linéaire des  $\delta a_i$ ,

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^n Q_i^* \delta a_i \quad (IV.77)$$

les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial a_i} = Q_i^* \quad (IV.78)$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_i} = Q_i^* \quad (IV.79)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial U}{\partial a_i} = Q_i + Q_i^* \quad (IV.80)$$

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétiques, potentielle et de dissipation. Dans le cas des petits mouvements de systèmes élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment sous formes quadratiques symétriques des vitesses et des coordonnées généralisées respectivement :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{a}_i \dot{a}_j = \frac{1}{2} \dot{a}' A \dot{a} \\ U &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} a_i a_j = \frac{1}{2} a' B a \end{aligned} \quad (IV.81)$$

On va chercher une approximation de la solution en terme d'interpolation des déplacements aux noeuds, les déplacements aux noeuds  $u_i$  jouent le rôle de coordonnées généralisées.

Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

- Pour un système conservatif :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial U}{\partial u_i} = F_i(t) \quad (IV.82)$$

Pour les petits mouvements des systèmes élastiques, les énergies respectives cinétique et de déformation s'écrivent :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{U}_i M_{ij} \dot{U}_j = \frac{1}{2} \dot{U}' M \dot{U} \quad (IV.83)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_i K_{ij} U_j = \frac{1}{2} U' K U$$

Les équations de Lagrange deviennent :

$$M\ddot{U} + KU = F(t) \quad (IV.84)$$

- Pour un système non conservatif, avec amortissement visqueux, il faut ajouter au second membre le terme additionnel de force de dissipation visqueux :

$$F_i' = -C\dot{U} \quad (IV.85)$$

D'où les équations du mouvement :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F(t) \quad (IV.86)$$

#### IV.4.2. Prise en compte de l'amortissement :

Une grande différence dans l'absorption d'énergie des matériaux ,entre les différentes parties du modèle analysé ,va conduire à une distribution des forces d'amortissement différente de celle des forces élastiques et inertielles .Ce type de mécanisme d'amortissement est appelé non proportionnel. Il apporte un couplage entre les équations modales ;et la méthode de superposition modale classique n'est plus utilisable .L'évaluation de l'amortissement joue un rôle très important sur les amplitudes de la réponse sismique d'une structure.[24]

Dans l'analyse des structures longues où on est amené à prendre en compte l'interaction sol-structure, la prise en compte d'un amortissement non proportionnel est obligatoire.

L'amortissement non proportionnel exige la détermination de la matrice d'amortissement explicitement. La matrice d'amortissement proportionnel est définie comme une combinaison linéaire des matrices de raideur et de masse , mais au niveau des éléments finis .

$$C = \sum_i (\alpha_i M_i + \beta_i K_i) \quad (IV.87)$$

$C$  : matrice d'amortissement du système .

$\Sigma$  : assemblage des éléments finis .

$M$  : matrice de masse d'élément  $i$  .

$K$  : matrice de raideur de l'élément  $i$  .

$\alpha, \beta$  : coefficients associés à l'élément  $i$ , ils sont obtenus par la relation :

$$\xi_{ij} = \frac{\alpha_i}{2\omega_j} + \frac{\beta_i \omega_j}{2} \quad (j=1\dots p) \quad (IV.88)$$

$\xi_{ij}$ : coefficients d'amortissement du mode  $j$  qui correspond à l'amortissement pour l'élément.

$\omega_j$  : fréquence propre du mode  $j$  du système .

Dans notre cas où on ne tient pas compte de l'interaction sol structure, on peut choisir un type particulier d'amortissement et qui est le plus classique à savoir l'amortissement proportionnel où  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont constants et indépendants des éléments . Dans ce cas on a :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (IV.89)$$

## IV.5.METHODES D'ANALYSE NUMERIQUES DES PROBLEMES DYNAMIQUES

### III.5.1.Introduction:

Le calcul dynamique des structures a connu ses premiers développements dans les domaines tels que les chocs et les vibrations, les moteurs, les machines tournantes et l'aéronautique, dans lesquels les forces excitatrices sont le plus souvent bien connues.[31].

Les applications du calcul dynamique dans le domaine des séismes ont pendant longtemps été freinées par:

- Le faible nombre de données d'enregistrement disponibles pour les mouvements forts.
- Le grand doute concernant la représentativité des enregistrements pour des sites présentant des conditions géologiques et sismiques différentes de celles relatives aux lieux d'enregistrement.
- L'allure extrêmement irrégulière des mouvements sismiques, évoquant celle des signaux aléatoires et qui confère une allure quasi aléatoire à la réponse des structures.
- L'importance des effets non linéaires dans les structures soumises à des excitations sismiques de fort niveau.

- Les difficultés des études expérimentales de validation des modèles sur tables vibrantes, notamment en ce qui concerne le respect des conditions de similitude et du caractère multidirectionnel de l'excitation.

Depuis le début des années soixante dix, le développement des études liées aux ouvrages dont les impératifs de sécurité sont particulièrement stricts et l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants ont donné une impulsion remarquable aux applications sismiques du calcul dynamique. De nombreux problèmes, dont la solution apparaissait comme pratiquement hors de portée il y a dix ou quinze ans, ont pu être traités mais en parallèle, de nombreux problèmes se sont posés:

- Un ensemble de méthodes et de codes de calcul sont maintenant disponibles pour effectuer l'analyse sismique de la plupart des structures; Cet ensemble d'outils de dimensionnement et de vérification des structures conserve des aspects conventionnels (prise en compte des amortissements, définition et types d'ondes sismiques...)
- Les possibilités des méthodes de calcul sont en avance sur l'état des connaissances, sur les mouvements sismiques et sur les lois de comportement des matériaux, en sorte que des marges de sécurité par rapport à la ruine restent actuellement difficile à apprécier et constituent un thème de recherche important.

#### **IV.5.2. Classes de problèmes numériques rencontrés en analyse dynamique:**

La plupart des problèmes réels d'analyse sismique sont trop complexes pour pouvoir être résolus analytiquement et font donc appel à des approximations et résolutions numériques. Parmi la grande variété des méthodes numériques utilisées en analyse sismique, on ne retiendra que les méthodes les plus couramment utilisées pour la résolution des problèmes sismiques.

En général, on distingue deux classes de problèmes intervenant dans les processus de résolutions numériques:

a/ Les techniques de changement de variables ou de changement d'espace, qui sont utilisées pour transformer l'ensemble des équations et des inconnues du problème initial en un autre ensemble équivalent, plus facilement soluble. A cette classe de méthodes se rattachent:

- Les méthodes de calcul des fréquences propres et modes propres.
- Les méthodes de transformation du domaine temps au domaine fréquence.

b/ L'intégration proprement dite des équations de mouvement:

- Intégration temporelle par la méthode des différences finies et par la méthode pas à pas.
- Intégration temporelle par la méthode des éléments finis.

#### **IV.5.3 Les méthodes de calcul des fréquences propres et modes propres :**

Il existe un très grand nombre de méthodes pour résoudre le problème aux valeurs propres. La prise en compte des particularités du problème dans le cas de

l'analyse sismique vers les méthodes qui tiennent avantageusement compte des particularités suivantes :

- Le problème se pose sous forme dite généralisée  $\mathbf{K}\Phi = \omega^2 \mathbf{M}\Phi$  par opposition au problème standard  $\mathbf{A}\Phi = \lambda\Phi$ . Il faut éviter généralement l'utilisation des méthodes qui exigent une forme standard pour éviter l'inversion de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  qui est généralement coûteuse.
- Les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques et ont une structure bande, il faut rechercher donc des méthodes qui conservent ces propriétés.
- Il n'est pas nécessaire de recourir aux méthodes qui traitent le cas de valeurs propres nulles.
- Enfin, il faut accorder une préférence aux méthodes qui permettent un calcul sélectif des valeurs propres et vecteurs propres participant principalement à la réponse (les plus basses fréquences).

#### IV.5.4. Transformation du domaine temps:

Il est souvent utile en analyse dynamique, d'opérer une transformation sur les fonctions du temps qui interviennent dans les équations mécaniques, de telle sorte que les équations transformées soient résolues plus facilement. La transformation de Laplace et la transformation de Fourier sont les plus utilisées.

La transformation de Laplace substitue aux opérations de dérivation des opérateurs scalaires qui simplifie évidemment la forme des équations. Cette méthode est souvent utilisée pour la résolution de problèmes de réponse impulsionnelle. Cependant, la difficulté du calcul de la transformation inverse limite sérieusement son application à d'autres problèmes. Cette transformation est peu utilisée en analyse sismique.

Les opérateurs de dérivation sont également transformés en opérateurs scalaires; La transformation inverse est immédiate. La transformation de Fourier est très utilisée en analyse sismique surtout lorsqu'on passe au niveau discretisé. En pratique, les fonctions continues sont définies par des valeurs mesurées discrètes et dans ce cas la transformée de Fourier discrète est exactement égale à la transformé de Fourier continue, ce qui rend cette transformation très intéressante et plus utilisée. Il existe une transformée de Fourier rapide qui réduit considérablement le temps de calcul.

#### IV.5.5. Intégration des équations du mouvement:

L'intégration temporelle des équations du mouvement est au coeur de l'analyse dynamique des structures. Elle permet la résolution de l'équation du mouvement au fil du temps, il en est ainsi lorsque la vérification du dimensionnement implique la connaissance de l'histoire des mouvements et des sollicitations dans la structure ou lorsque la détermination détaillée des mouvements en certains points est requise pour pouvoir calculer la réponse dynamique de sous structures supportées en ces points. Les méthodes temporelles applicables au cas linéaire sont de deux types:

- -Les méthodes temporelles modales dans lesquelles la solution est recherchée sur la base des modes propres, il suffit alors pour chacun des modes retenus de résoudre l'équation différentielle régissant la réponse d'un oscillateur simple.

- -Les méthodes temporelles d'intégration directe qui utilisent les schémas de discrétisation dans le temps de l'équation du mouvement permettant de calculer la solution au temps  $t+\Delta t$  ( $\Delta t$  étant le pas de temps) à partir de l'état connu au temps  $t$ .

Nous distinguons trois classes de méthodes:

- Méthodes de différences finies.
- Intégration numérique «pas à pas».
- Méthode des éléments finis.

### **Conclusion:**

Après avoir déterminé les matrices caractéristiques de la structure (M,C,K), modélisée en éléments finis de poutre 3D, la méthode retenue pour résoudre l'équation gouvernante du mouvement dans la présente étude est celle qui implique la connaissance de l'histoire temporelle du mouvement de la structure où de certains de ces noeuds, ce choix est justifié d'une part pour comparer les résultats obtenues lorsque l'excitation sismique est uniforme à ceux obtenus dans le cas multiple et d'autre part pour pouvoir calculer la réponse dynamique de sous structures supportées par la structure en certains points (tuyauterie)

La méthode utilisée est celle de l'intégration numérique directe 'pas à pas' (schéma de NEWMARK).

Programmation

et

mise en œuvre

numérique



## V.1 .INTRODUCTION:

Le programme pour l'analyse des Structures Soumises à des Excitations d'appuis Multiples (SEM), a été élaboré en utilisant le langage FORTRAN. Il permet de déterminer la réponse temporelle, en tout point de toute structure modélisable en éléments finis de poutre à trois dimensions, quel que soit le type de chargement. En effet, le programme traite les chargements statiques et dynamiques. Ces derniers peuvent être harmoniques, quelconques, sismiques uniformes ou encore sismiques multiples.

Pour les chargements sismiques, la réponse est déterminée de deux manières différentes: uniforme traditionnellement admise où l'on suppose que le même signal sismique excite tous les points d'appuis de la structure. Cette dernière sera alors soumise uniquement aux effets inertiels. Le résultat est acceptable pour de faibles dimensions en plan de la structure par rapport à la longueur de l'onde sismique.

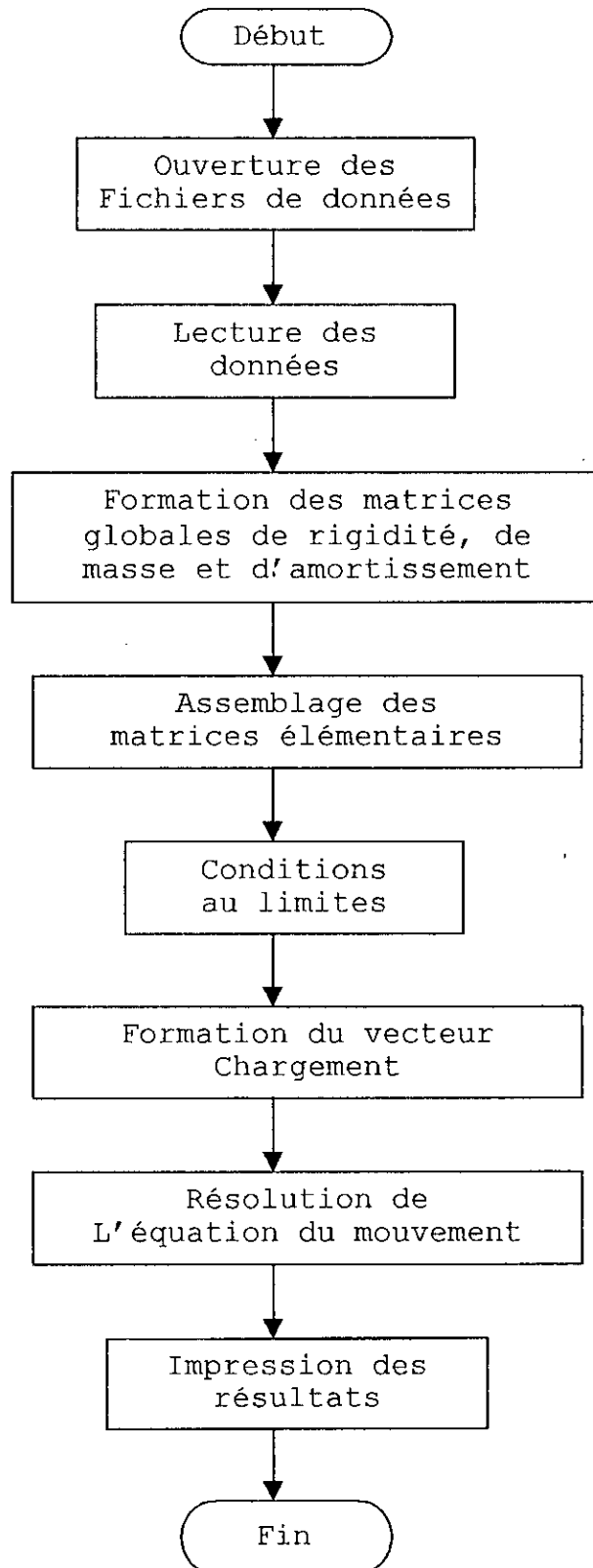
Lorsque les structures sont étendues, cette manière de faire devient imprécise, car dans ce cas la structure est non seulement soumise aux effets inertiels, mais également à ceux engendrés par la nature variable dans l'espace de la sollicitation sismique. Ce dernier aspect est le résultat d'une conjonction de facteurs fortement compliqués, il s'agit entre autres de facteurs liés au site géologique, au contenu fréquentiel de l'excitation, aux effets de passage d'onde....

L'effet de la variabilité spatiale de la sollicitation sismique est d'une importance essentielle pour la conception et le calcul des structures étendues telles que les ponts, barrages, centrales nucléaires,... pour lesquelles une excitation sismique multi-appuis pourrait engendrer des contraintes additionnelles substantielles. En conséquence, dans le cadre de calcul parasismique de ces structures, il est judicieux de développer une procédure de calcul qui tient compte de cette variabilité spatiale. C'est la seconde manière avec laquelle le programme développé traite le chargement sismique.

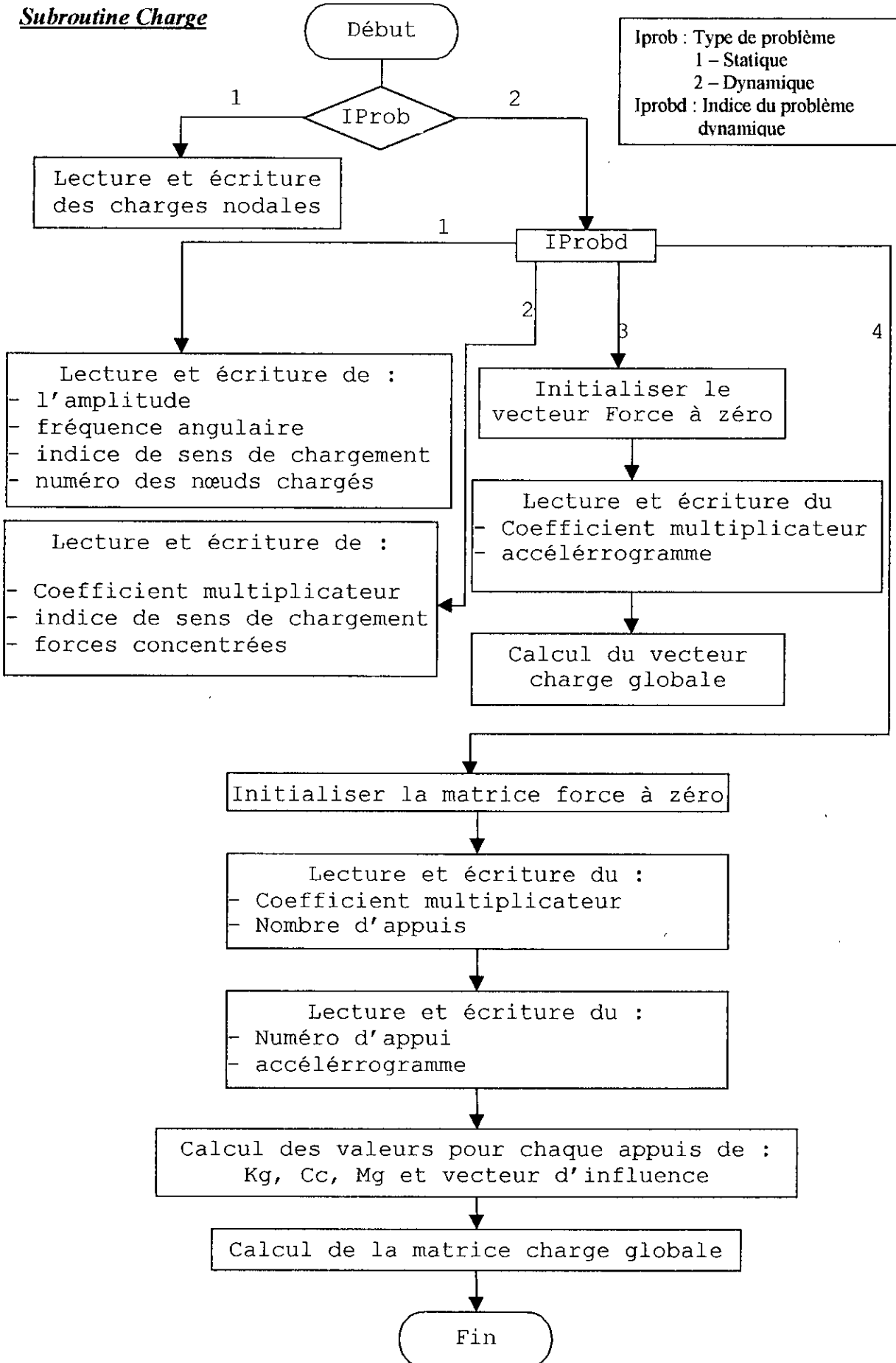
Une extension a été faite dans ce dernier volet pour traiter les tuyauteries. L'élément fini de poutre est convertible en élément tube par l'introduction de certains facteurs caractérisant la nature de l'élément tube. La nature de l'input sismique dans les tuyauteries est différente de celle des structures étendues. L'excitation se traduit par le mouvement de la structure où la tuyauterie est ancrée. En général, les structures de support sont étudiées en considérant qu'elles sont soumises à un mouvement sismique d'appuis uniforme.

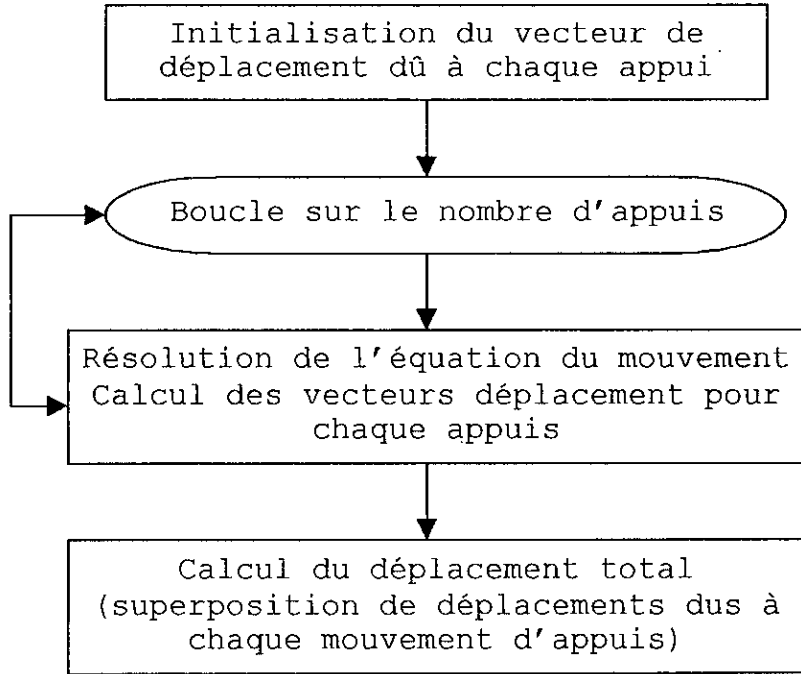
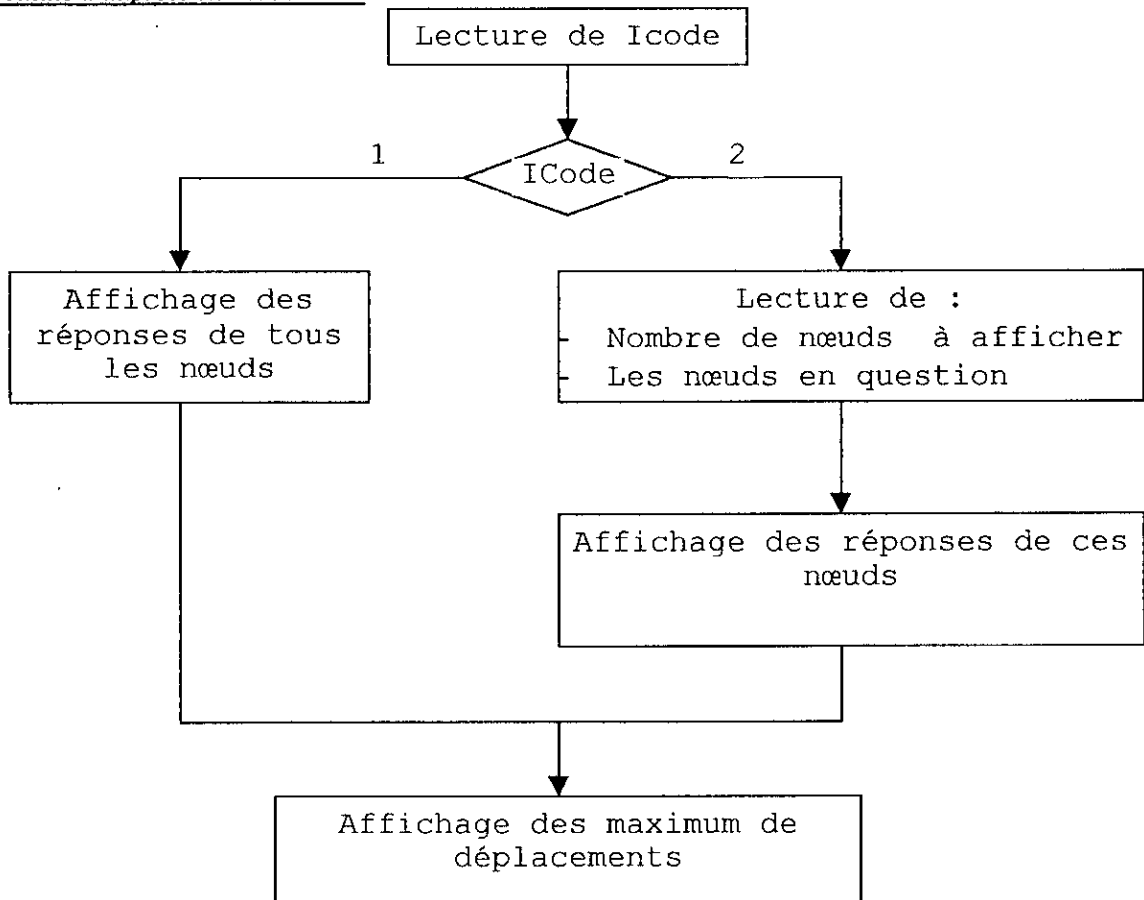
Pour la spécification de l'input sismique, des accélérogrammes sont utilisés. En guise de validation, l'accélérogramme d'ELCENTRO est utilisé. Cependant, pour mener à bien l'étude paramétrique, la génération d'accélérogrammes artificiels s'impose. Un programme de génération est élaboré en considérant le modèle stochastique proposé par Shinozuka et al [33] en une et deux stations à la surface du sol.

## V.2. PRESENTATION DU PROGRAMME :

Organigramme du programme principal

**Subroutine Charge**



**Subroutine Solution dynamique****Subroutine d'impression des résultats**

### V.3. VALIDATION DU PROGRAMME:

#### V.2.1. Cas statique:

Considérons la structure (fig V.1) supportant une charge uniformément répartie agissant le long de l'élément 1 et une charge concentrée appliquée au noeud 2 comme le montre la figure. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans (tab V.1) et on suppose que tous les éléments ont les mêmes caractéristiques.

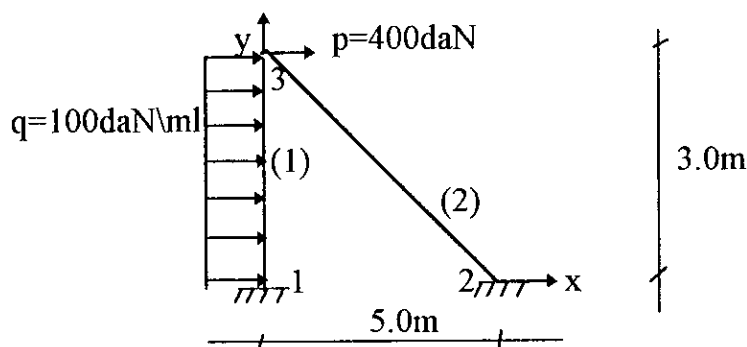


Fig V.1 Exemple d'application.

Module de Young	Coefficient de Poisson	Section droite	Moments d'inertie		
			$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$J$ (m <sup>4</sup> )
$12 \cdot 10^{10}$	0.3	$6 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$

Tab V.1: Caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure.

Les déplacements obtenus par le programme sont représentés dans (tab V.2) et comparés aux résultats exacts [23].

Noeuds	Dx (10 <sup>-4</sup> m)		Dy (10 <sup>-4</sup> m)		Rotz (10 <sup>-4</sup> rad)	
	SEM	Exact	SEM	Exact	SEM	Exact
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	3.5561	3.556	0.7127	0.713	-0.9231	-0.923
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tab V.2 : Déplacements nodaux.

**Remarque:** Ces déplacements ont été obtenus par SEM qui traite le cas le plus général à savoir les structures spatiales (3dim.). En effet, les déplacements suivant les autres degrés de liberté sont nuls.

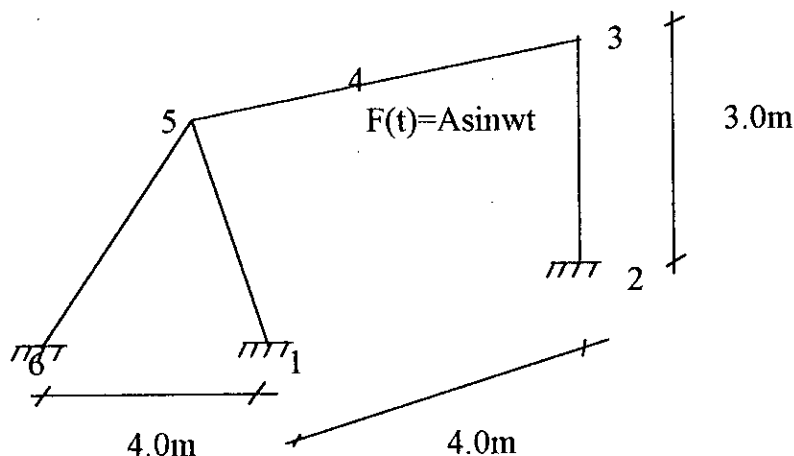
## V.2.2 Cas dynamique:

### V.2.2.1 Chargement harmonique:

Considérons la structure schématisée sur la (figV.2), supportant un chargement dynamique harmonique  $F(t) = 100\sin 30t$ , appliqué au noeud 4. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont représentées sur le (tabV.3)

Les déplacements du noeud 3, donnés sur (fig V.3), sont comparés à ceux obtenus par le logiciel de calcul de structure **SuperSap**.

Nous remarquons que les deux courbes se superposent.



FigV.2: Exemple d'application pour le cas harmonique

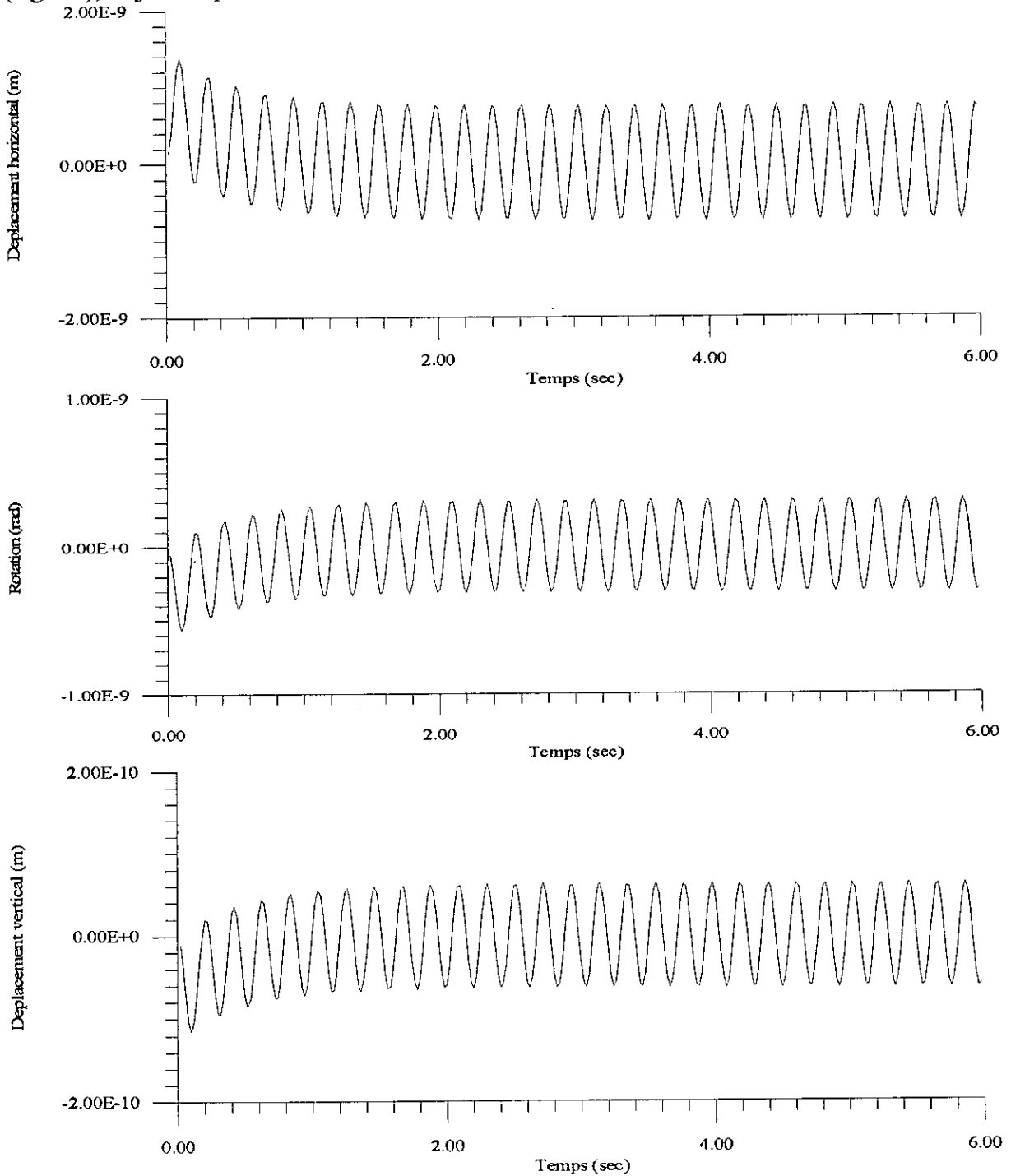
	Module de Young E (Pa)	Coefficient de Poisson	Section droite (m <sup>2</sup> )	Moment d'inertie I <sub>z</sub> (m <sup>4</sup> )	Moment d'inertie I <sub>y</sub> (m <sup>4</sup> )	Masse volumique Kg/m <sup>3</sup>
Éléments vert.	10 <sup>12</sup>	0.3	0.9	6.75 10 <sup>-4</sup>	6.75 10 <sup>-4</sup>	2.510 <sup>3</sup>
Éléments horiz.	10 <sup>12</sup>	0.3	0.12	1.6 10 <sup>-2</sup>	9.00 10 <sup>-4</sup>	2.510 <sup>3</sup>

TabV.3: Caractéristiques géométriques et mécaniques.

La réponse se produit de deux façons : une réponse transitoire de courte durée (1 sec) où la structure vibre autour d'un point autre que celui d'équilibre, avec une fréquence inférieure à celle de la force excitatrice. Ce point se déplace par la suite, pour retrouver la position initiale et vibrer autour, d'une manière harmonique avec la fréquence de la force excitatrice. Le sens du déplacement horizontal est positif, le déplacement vertical ainsi que la rotation sont négatifs.

### V.2.2.2.Chargement quelconque:

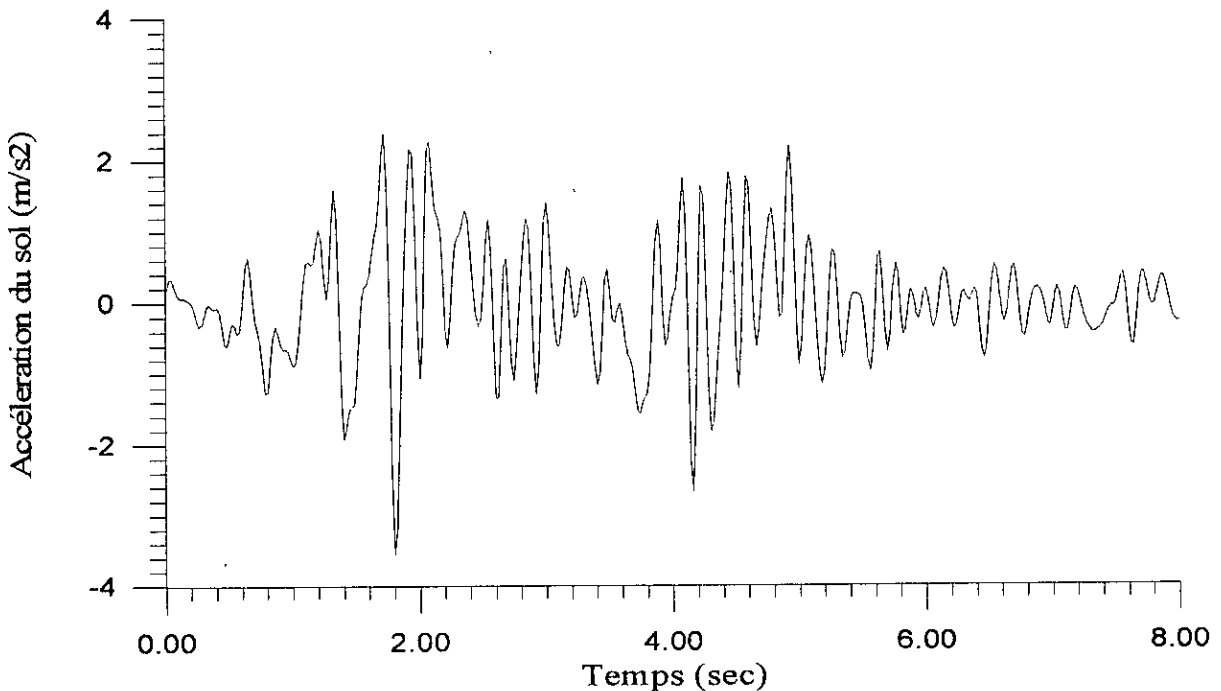
Sur la structure de la figure (figV.2), nous appliquons un chargement quelconque. Pour faciliter la comparaison, ce chargement est généré à partir de la même fonction de chargement que l'exemple précédent. Les déplacements obtenus sont identiques à ceux obtenus par un chargement harmonique dans l'application précédente. Les déplacements des noeuds 3 sont les mêmes que ceux des courbes de (figV.3), déjà comparés à ceux obtenus par SuperSap.



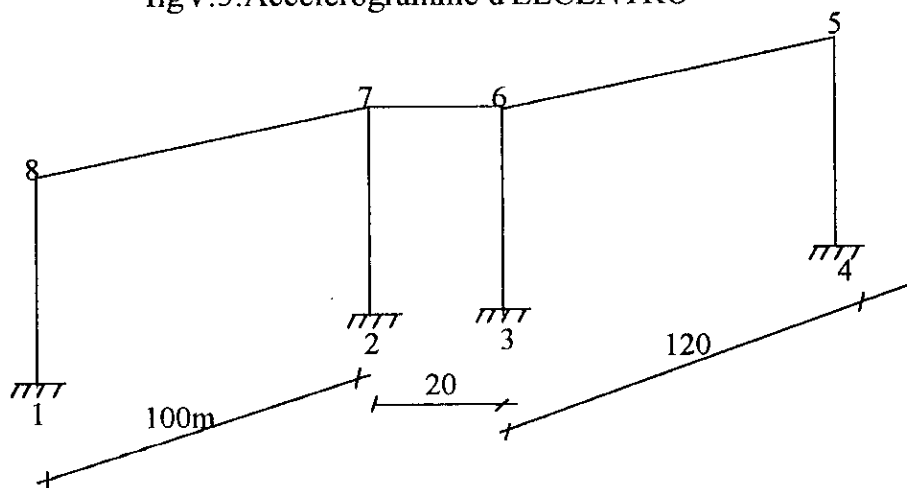
FigV.3: Réponse de la structure sous chargement harmonique

### V.2.2.3. Chargement sismique uniforme:

Considérons la structure 3D de la figure (figV.4) ayant les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques du tableau (tabV.3) qui va subir une excitation sismique uniforme, c'est à dire que tous les appuis sont animés du même accélérogramme: ELCENTRO (figV.5). Le fait de prendre cet accélérogramme se justifie par son pic maximum inférieur à  $0.4g$ , ce qui garantira le travail dans le domaine linéaire. Les déplacements en plusieurs noeuds ont été comparés à ceux obtenus par SuperSap. Les déplacements au noeud 6 sont représentés sur les figures (figV.6), (figV.7), (figV.8), (figV.9). On remarque une concordance admissible.

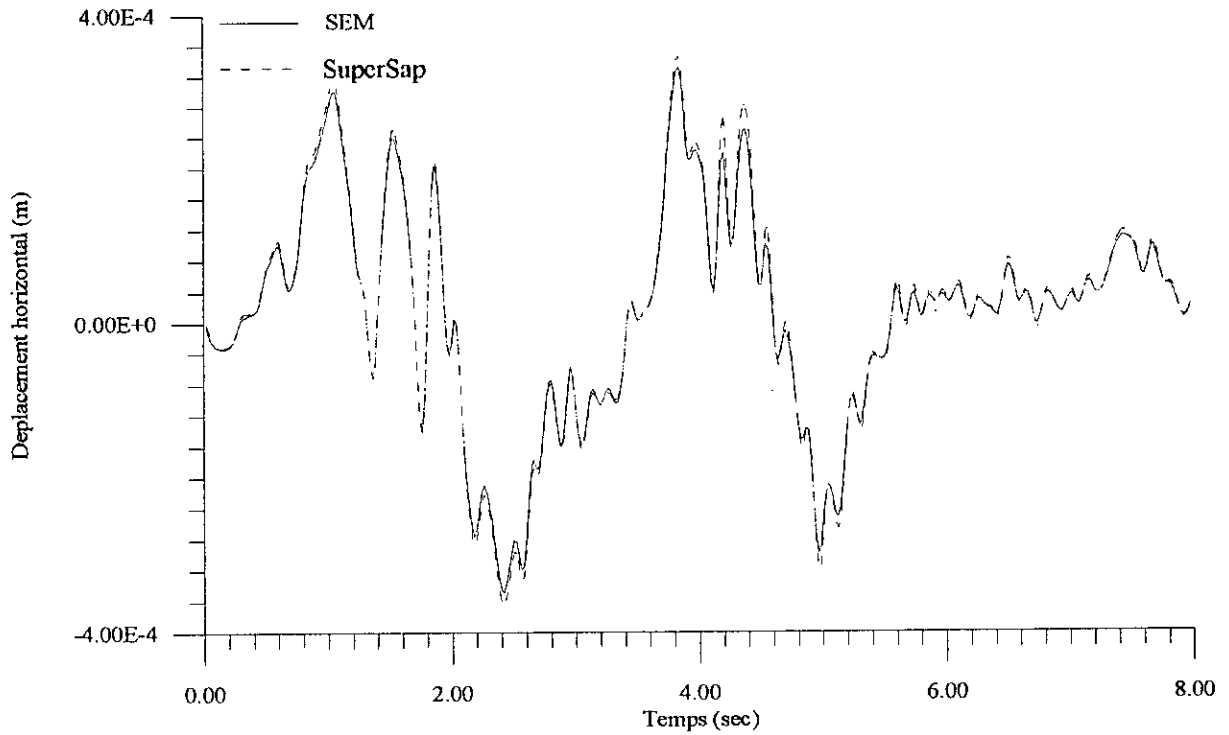


figV.5: Accélérogramme d'ELCENTRO

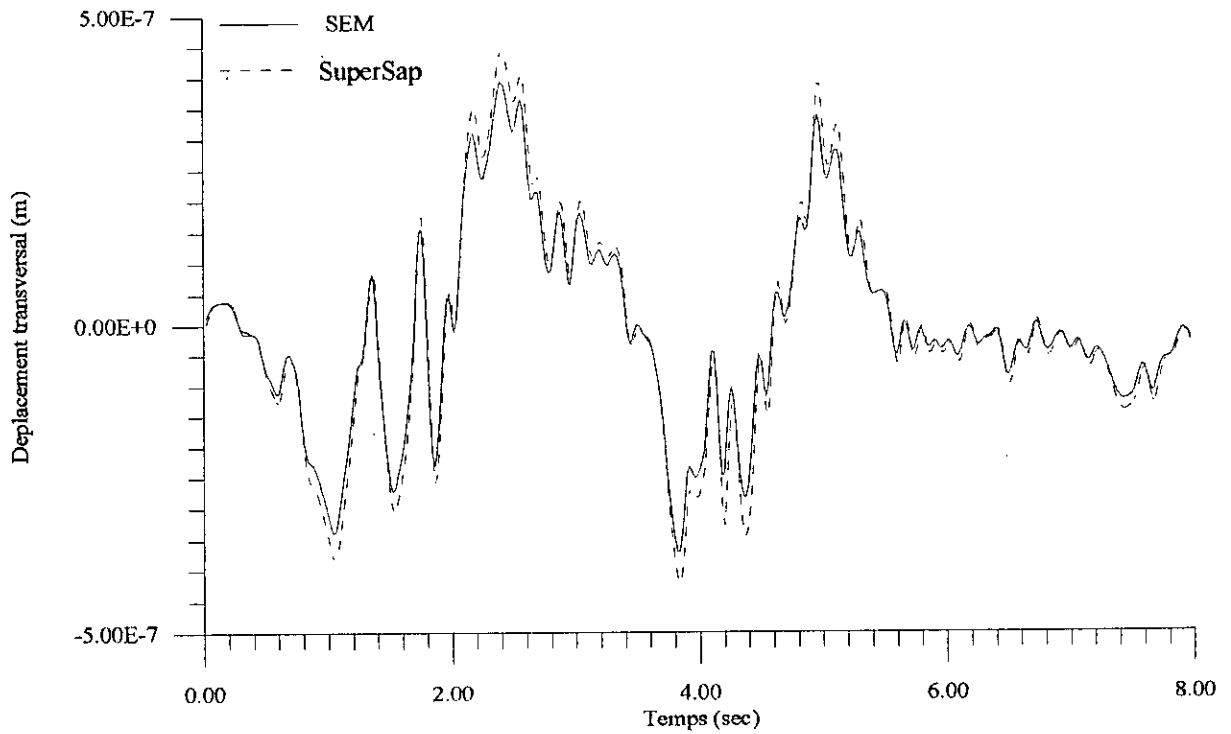


FigV.4 Exemple d'application pour le cas uniforme.

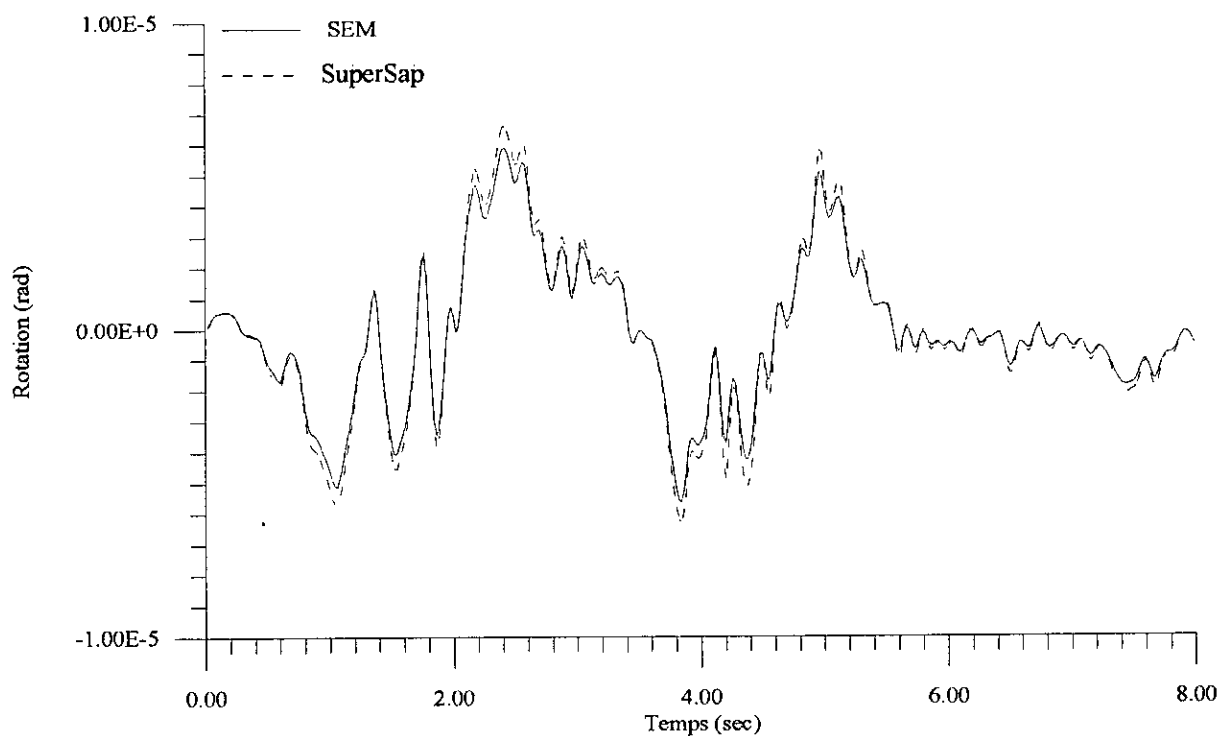




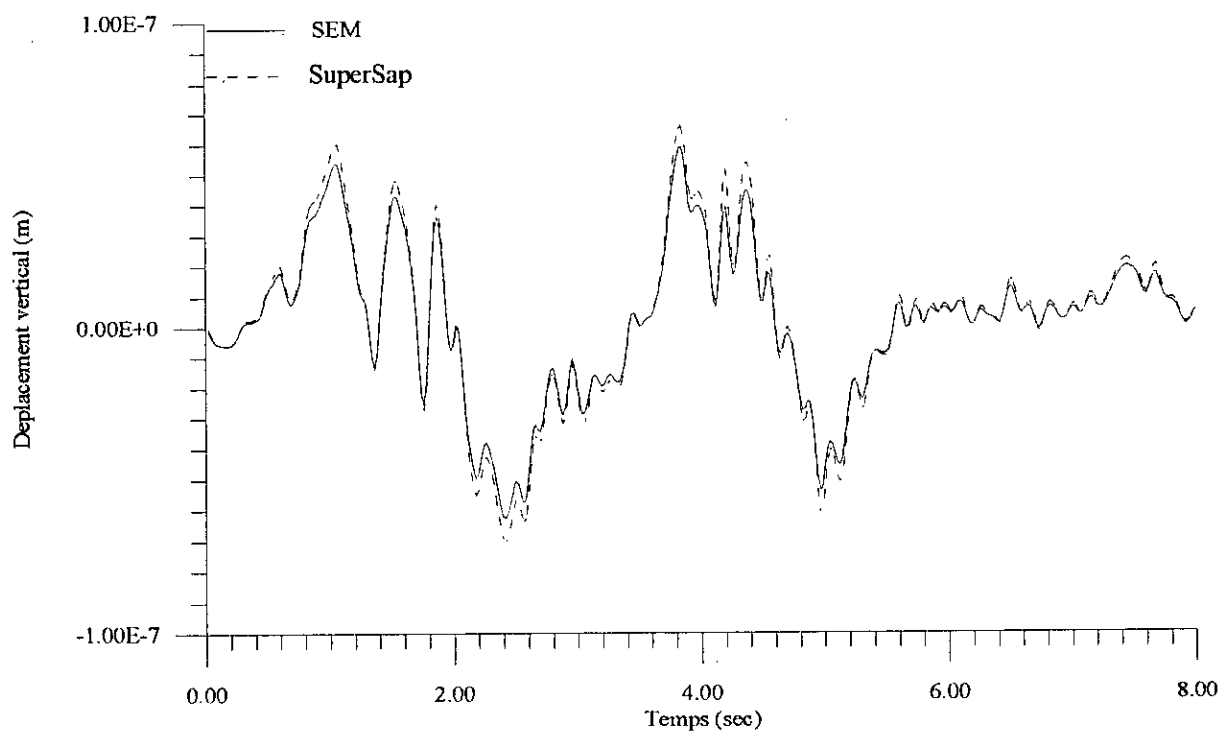
FigV.6: Comparaison des déplacements horizontaux.



FigV.7: Comparaison des déplacements transversaux.



FigV.8: Comparaison des rotations suivant Z.

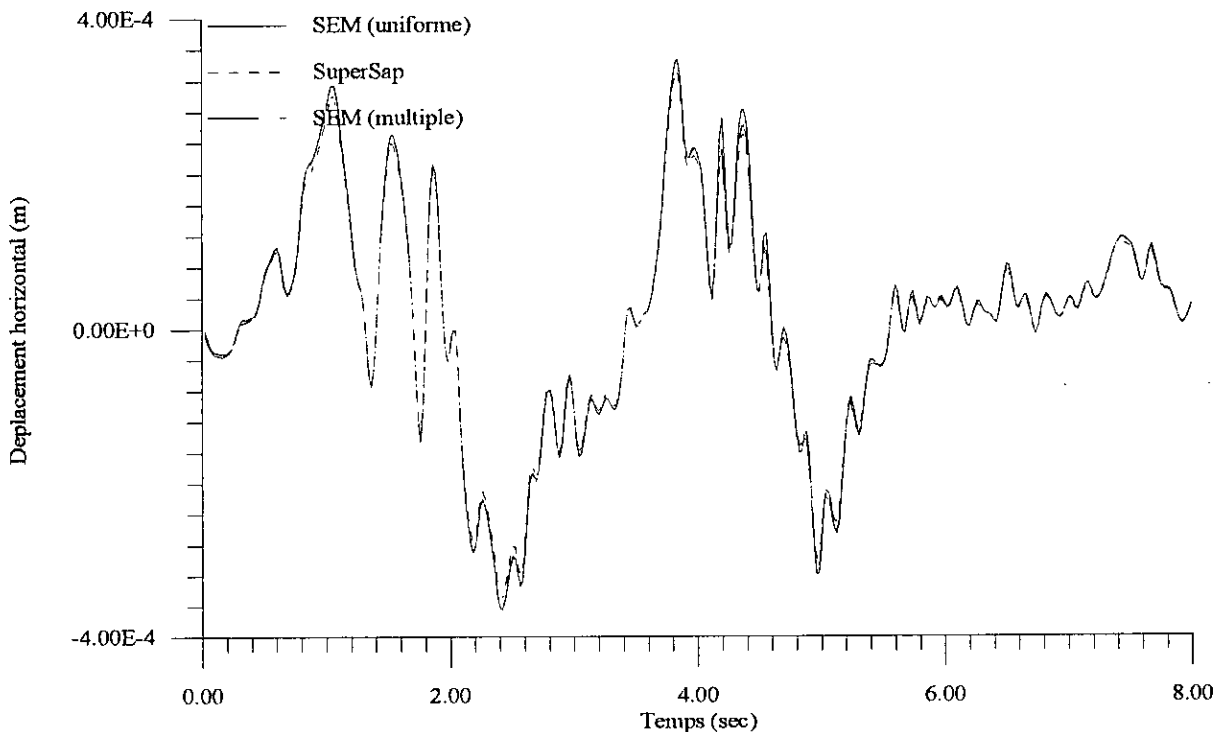


FigV.9: Comparaison des déplacements verticaux.

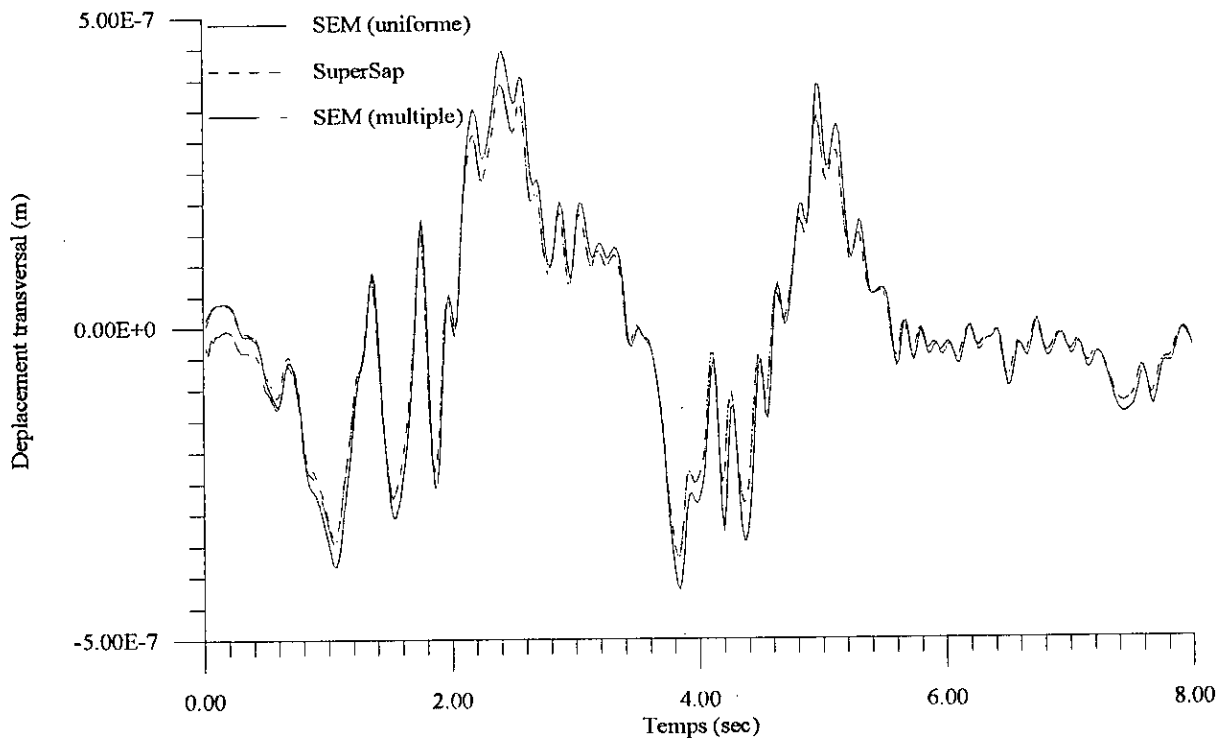
#### V.2.2.4.Chargement sismique multi-appuis:

Sachant que le chargement en excitation uniforme est un cas particulier de l'excitation multi-appuis [4] [12][26] [33], et à défaut d'exemples dans la littérature, cette particularité a été exploitée pour valider le programme développé pour calculer les structures soumises à des excitations d'appuis multiples. Une structure soumise à des excitations d'appuis identiques donnera en principe les mêmes déplacements que ceux obtenus dans le cas de chargements uniforme avec le même input sismique.

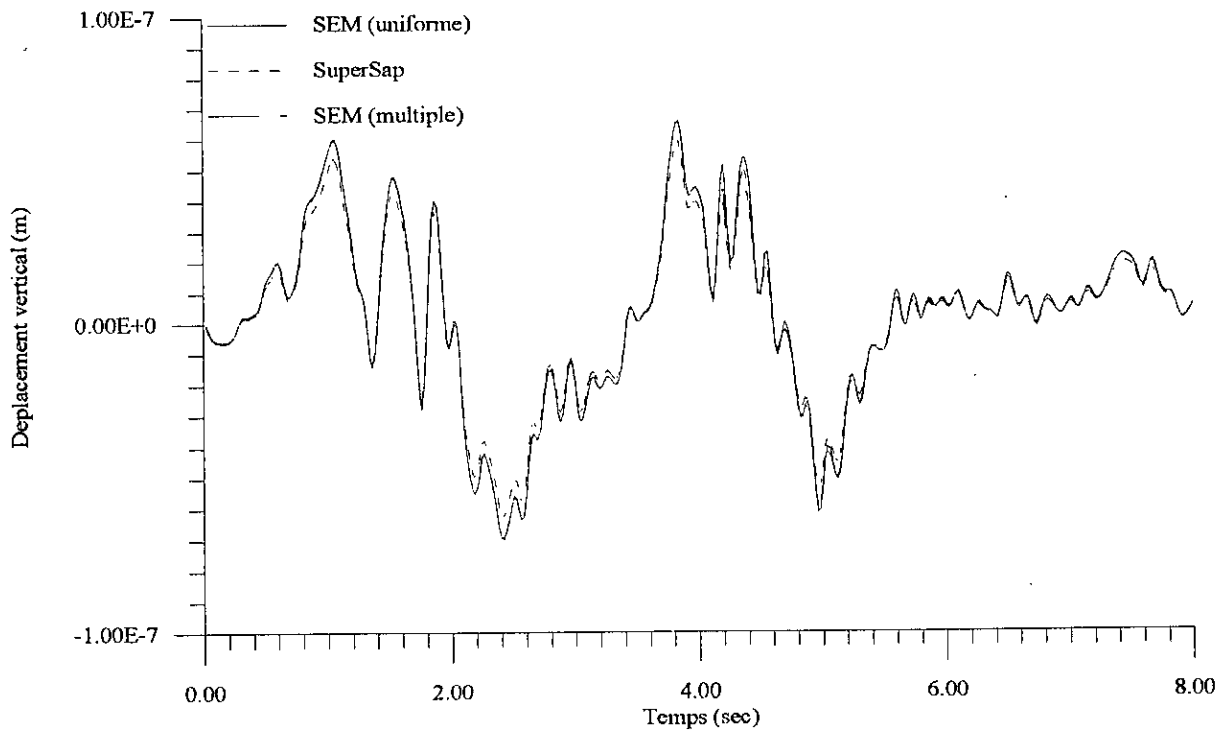
Considérons la structure (figV.4) à laquelle on applique le même accélérogramme aux appuis 1, 2 et 3. L'accélérogramme utilisé est celui d'ELCENTRO. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus en considérant l'excitation uniforme, déjà validée. Les résultats de cette comparaison sont représentés sur les figures (figV.10), (figV.11), (figV.12), (figV.13). On remarque une concordance entre le cas multiple et le cas uniforme dans toutes les directions.



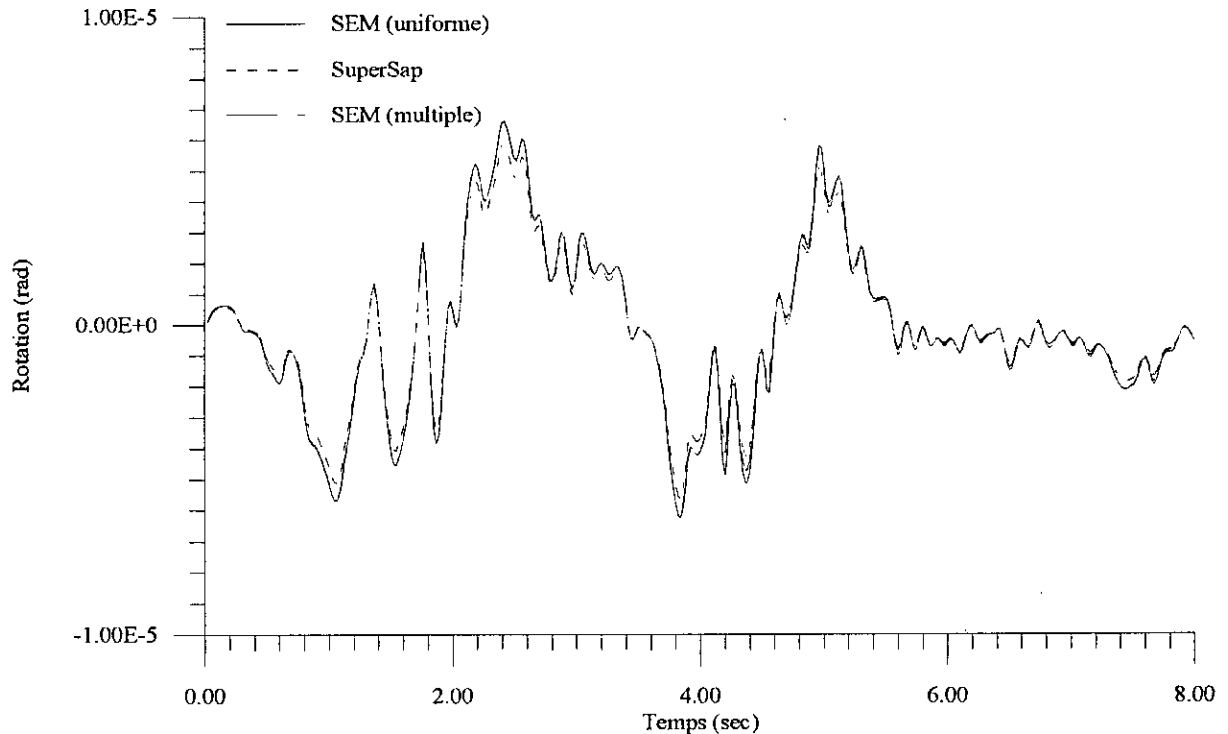
FigV.10: Comparaison des déplacements horizontaux.



FigV.11: Comparaison des déplacements transversaux.



FigV.12: Comparaison des déplacements verticaux.



FigV.13: Comparaison des rotations suivant Z.

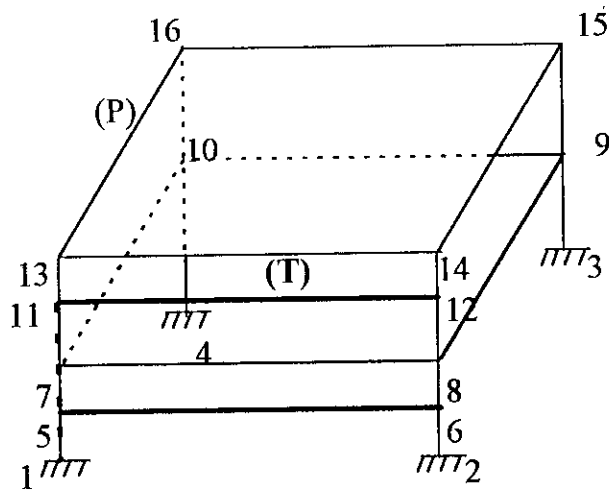
### V.3.Application aux tuyauteries:

Pour l'étude des tuyauteries, la spécification de l'input sismique est primordiale. Il est fréquent, du fait même de sa fonction, qu'une tuyauterie se trouve raccordée à plusieurs d'une structure ou même à plusieurs structures. Par conséquent, elle éprouve une excitation sismique caractérisée par des mouvements différents aux divers points de liaison avec la ou les structures porteuses. Traditionnellement, la méthode du spectre de planchers est la plus utilisée. Dans cette méthode, l'excitation est supposée uniforme si tous les supports sont reliés à un même niveau de plancher. Cette excitation est traduite par la réponse de la structure porteuse au plancher de supportage. Si la tuyauterie est ancrée en plusieurs niveaux, l'excitation est multiple. Dans le cas présent, nous allons considérer comme excitation de la tuyauterie la réponse de la structure porteuse au point d'ancrage sans passer par la réponse du plancher (spectre de plancher).

Un exemple d'application est présenté dans la figure (figV.14) et comprend :

- Une structure porteuse (P) ayant les mêmes caractéristiques que celles du tableau (tabV.3), soumise à une excitation à la base uniforme horizontale.
- Une tuyauterie (T) reliée aux noeuds de (P) et soumise à une excitation traduite par la réponse de (P) en ces noeuds d'ancrage.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de cette tuyauterie sont représentées sur le tableau (tabV.4)



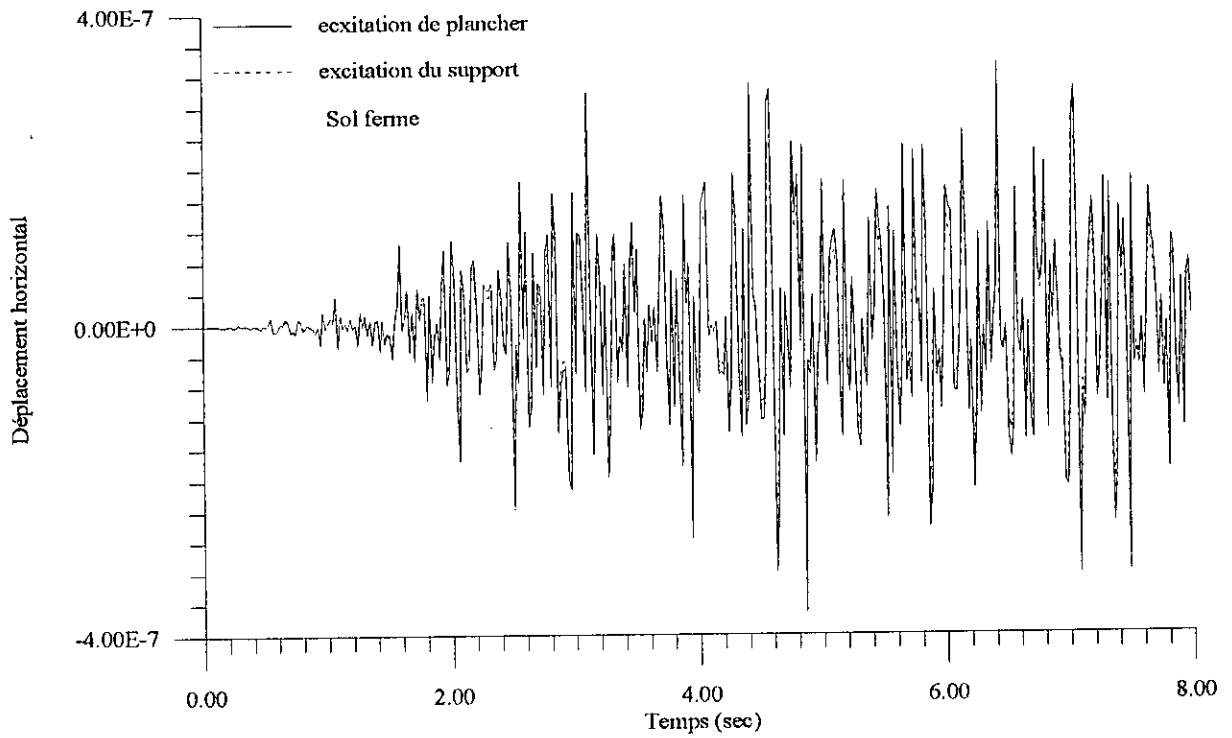
FigV.14 Exemple de tuyauterie ancrée dans une structure.

$R_{ext}$ (m)	$R_{int}$ (m)	Rayon de courbure (m)	E (Pa)	Coeff de Poisson	$\rho_{liquide}$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_{tuyauterie}$ (Kg/m <sup>3</sup> )
0.21	0.20	0.50	$2 \cdot 10^{12}$	0.3	3500	6500

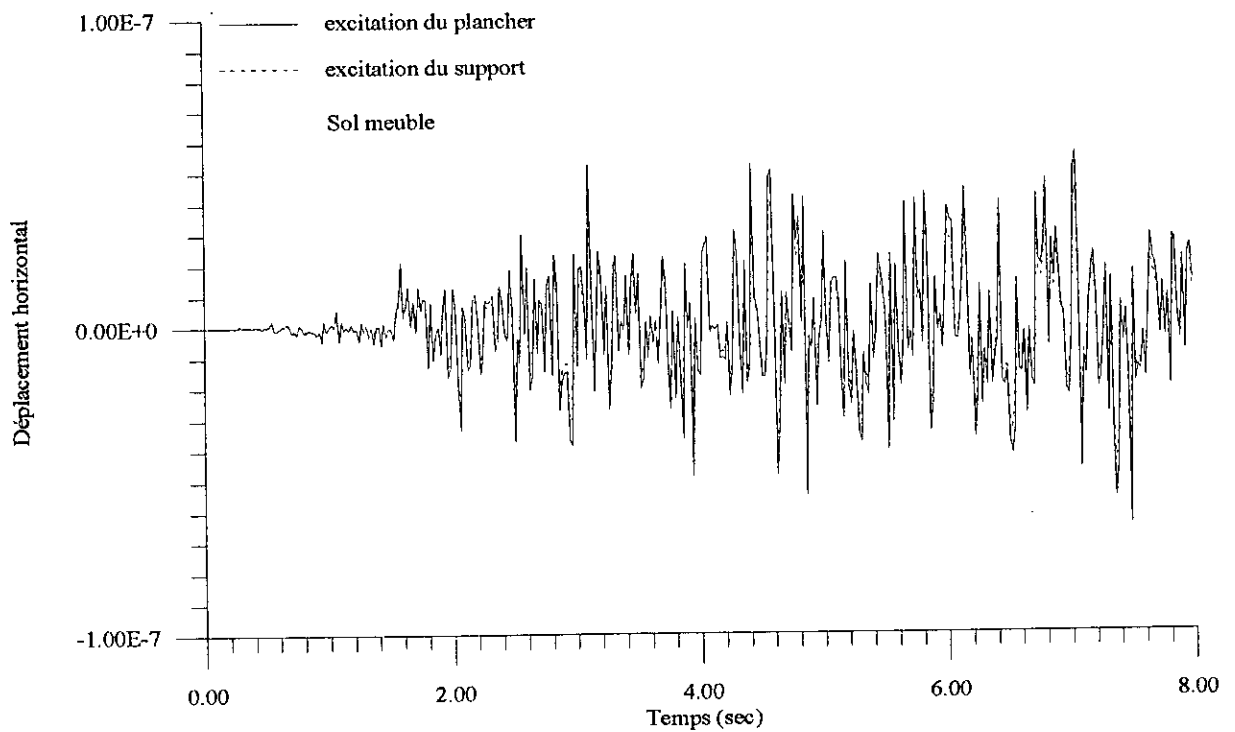
tabV.4: Caractéristiques géométriques et mécaniques de la tuyauterie

En ne considérant qu'un seul sens d'excitation (réponse horizontale de la structure (P) aux points de supportage), la réponse de la tuyauterie au noeud 7 est représentée sur les figures (figV.15), (figV.16). Ces dernières montrent les déplacements horizontaux de la tuyauterie lorsqu'on considère en premier lieu, l'excitation comme celle traduite par les réponses de la structure porteuse aux noeuds d'ancrage et en second lieu, celle de la réponse du plancher supérieur, aussi bien pour un sol ferme que pour un sol meuble. On remarque, et ce indépendamment du type de sol que la réponse sous le second chargement est surestimée par rapport à celle obtenue sous le premier. Une prise en compte effective de l'excitation réelle s'avère intéressante pour un dimensionnement économique.

La réponse lorsque le sol est ferme est supérieure que lorsque le sol est meuble, ce qui présente a priori une contradiction ; il n'en est rien, car la structure porteuse a joué le rôle du filtre et la tuyauterie est très rigide, ceci a fait que sa réponse est à haute fréquence, indépendamment du sol.



FigV.15: Comparaison de la réponse de la tuyauterie pour un sol ferme.



FigV.16: Comparaison de la réponse de la tuyauterie pour un sol meuble.

Etude  
paramétrique



## VI.1 INTRODUCTION:

La validation du programme dans le chapitre V est très importante pour mener l'étude paramétrique. Dans toute analyse dynamique des structures, une panoplie de paramètres à varier existe (rigidité, amortissement, nature du sol, discretisation de la structure, approche de résolution,...). Dans le cadre du travail présenté, un choix d'un certain nombre de paramètres s'impose.

Le programme développé détermine l'histoire temporelle du mouvement de la structure en tout point; Dans cette étude, les paramètres choisis sont:

- La nature du sol de propagation des ondes sismiques: deux types de sols sont sélectionnés:

\*Un sol meuble relativement flexible dont les caractéristiques sont:[14]

Fréquence naturelle  $\omega_g = 5 \text{ rad/s}$

Taux d'amortissement  $\zeta_g = 0.2$

Vitesse de propagation de l'onde SH considérée  $V=100\text{m/s}$

\*Un sol ferme relativement rigide dont les caractéristiques sont:[14]

Fréquence naturelle  $\omega_g = 15 \text{ rad/s}$

Taux d'amortissement  $\zeta_g = 0.6$

Vitesse de propagation de l'onde SH considérée  $V=500\text{m/s}$

L'onde se propageant dans les deux sols, véhicule un mouvement à amplitudes plus importantes lorsque le sol est de type meuble que lorsqu'il est de type ferme.

- La rigidité de la structure: Deux structures sont prises pour comparaison, l'une est rigide et l'autre est dix fois moins rigide.

La structure, un portique simple à deux appuis fig(VI.1) dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans le tableau (TabVI.1), est pris comme exemple. Ce portique peut représenter la structure d'un pont. Ce choix se justifie par la difficulté de générer des séismes pour plus de deux stations. La longueur maximale est prise égale à 250m. Au delà de cette longueur, les deux cas de chargements 2 et 3 (ci-dessous) ne seront plus applicables. Il y a perte de corrélation dans le cas 3 et le simple décalage dans le cas 2 n'est plus recommandé.

- La nature de l'excitation aux appuis. Elle est:

\*Uniforme, toute la base de la structure est soumise au même mouvement sismique.

\*Multiple déterministe, l'accélérogramme considéré dans le cas 1 est simplement décalé avec un temps égal au temps d'arrivée de l'onde sismique de l'appui 1 à l'appui 2. Cette approche est simple à obtenir et préconisée par les recommandations AFPS90.[32]

\*Multiple non déterministe, les accélérogrammes utilisés sont générés en considérant la méthode de représentation spectrale proposée par Shinozuka et al [33].

Afin de mener la comparaison, tous les accélérographes sont simulés numériquement par la méthode de représentation spectrale qu'on va développer dans le prochain paragraphe.

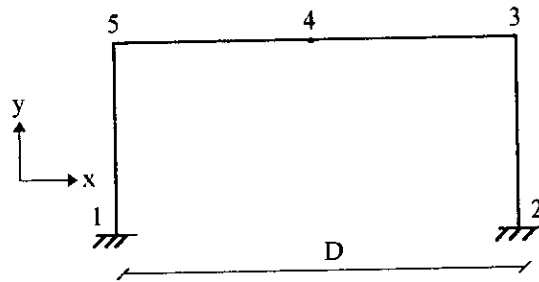


Fig.V.1. Structure considérée pour l'étude paramétrique

	M. d'Young E(Pa)	Coeff de Poisson	Section (m <sup>2</sup> )	M <sup>t</sup> d'inertie I <sub>z</sub> (m <sup>4</sup> )	M <sup>t</sup> d'inertie I <sub>y</sub> (m <sup>4</sup> )	M. vol. (Kg/m <sup>3</sup> )
Structure1	2.10 <sup>11</sup>	0.3	0.9	0.075	0.06	2500
Structure2	2.10 <sup>12</sup>	0.3	0.9	0.075	0.06	2500

TabVI.1. Caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure.

## VI.2.GENERATION DES SEISMES ARTIFICIELS:

Plusieurs modèles stochastiques de génération numérique d'accélération du sol ont été proposés et appliqués aux problèmes de structures. Parmi ces modèles, ceux de Tajimi, Cornell, Housner et Jennings, Shinozuka et Sato, Ruiz et Penzien, ...[33] Shinozuka et al [33] introduisent dans une série d'articles la méthode de représentation spectrale qui peut être facilement programmée pour la simulation numérique d'accélération ou de déplacements du sol.

### VI.2.1.Génération de processus stochastiques stationnaires 1D-1V:

L'histoire artificielle de l'accélération du sol peut être générée en multipliant une fonction enveloppe  $f(t)$  par un processus stationnaire Gaussien  $g(t)$ . La fonction enveloppe peut être de forme trapézoïdale ou exponentielle. Le processus Gaussien peut être obtenu en utilisant le spectre de Kanai-Tajimi ou le spectre modifié, comme fonction de densité spectrale de puissance (DSP). Le modèle de DSP considéré dans la présente étude est un modèle de Kanai-Tajimi modifié par Clough et Penzien[17]:

$$S(\omega) = S_0 \cdot \frac{1 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_f}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)^2 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_f}\right)^2\right)^2 + 4\zeta_f^2 \left(\frac{\omega}{\omega_f}\right)^2} \quad (VI.1)$$

où  $\omega_g$  et  $\zeta_g$  sont les caractéristiques dynamiques du sol (fréquence naturelle et taux d'amortissement).  $\omega_f$  et  $\zeta_f$  sont les paramètres du filtre correctif. Derkiureghian [17] a proposé des valeurs pour ces paramètres:

Sol ferme:  $\omega_g=15$  rad/s ;  $\zeta_g=0.6$  ;  $\omega_f=1.5$  rad/s ;  $\zeta_f=0.6$

Sol mou:  $\omega_g=5$  rad/s ;  $\zeta_g=0.2$  ;  $\omega_f=0.5$  rad/s ;  $\zeta_f=0.6$

$S_0$  est l'intensité du bruit blanc.

Le processus Gaussien  $g(t)$  peut être obtenu en utilisant la technique de Monte Carlo.

$$g(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \sqrt{G(\omega_k) \Delta\omega} \cos(\omega_k t - \phi_k) \quad (VI.2)$$

Où:

$\phi_k$  est la phase uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$ .

$\omega_k = k\Delta\omega$

$G(\omega_k) = 2S(\omega_k)$  est la densité spectrale de puissance unilatérale.

Pour générer des séismes artificiels, Shinozuka [33] suggère une relation entre l'intensité du bruit blanc  $S_0$  et le pic de l'accélération du sol (PGA) tel que:

$$\sigma_g^2 = E[\ddot{x}_g^2] = \int S(\omega) d\omega = \frac{S_0 \pi \omega_g (1 + 4\zeta_g^2)}{2\zeta_g} \quad (VI.3)$$

Le pic de l'accélération du sol peut s'écrire :

$$\text{PGA} = \alpha_g S_0^{1/2} \quad (VI.4)$$

où

$$\alpha_g = P_g \left[ \pi \omega_g \left( \frac{1}{2\zeta_g} + 2\zeta_g \right) \right]^{1/2} \quad (VI.5)$$

et  $P_g$  est le facteur pic pris égal à 0.3

### VI.2.2. Génération des processus stochastiques unidimensionnels variables spatialement:

La première étape de la méthode de représentation spectrale est la spécification de la matrice de densité interspectrale[8]:

$$[S(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & & & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & & & S_{2n}(\omega) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ S_{n1}(\omega) & & & S_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6})$$

où n est le nombre de stations (points de supports).

$S_{ij}(\omega)$  est la fonction de densité interspectrale entre les deux stations i et j.

Sous l'hypothèse de l'homogénéité, la matrice  $[S(\omega)]$  est Hermitienne. La méthode à suivre est de trouver une matrice  $H(\omega)$  telle que:

$$[S(\omega)] = [H(\omega)] [H^*(\omega)]^T \quad (\text{VI.7})$$

où \* indique le conjugué complexe et T la transposée.

Pour faciliter la détermination de  $[H(\omega)]$ , on suppose qu'elle est triangulaire inférieure. En d'autre terme, une décomposition de Cholesky est recherchée.

Les éléments de la matrice  $[H(\omega)]$  sont donnés par:

$$H_{kk}(\omega) = \left[ \frac{D_k(\omega)}{D_{k-1}(\omega)} \right]^{1/2}; \quad k=1,2,\dots,n \quad (\text{VI.8})$$

$D_k(\omega)$  est le  $k^{\text{ème}}$  mineur principal de  $[S(\omega)]$

$$H_{jk}(\omega) = H_{kk}(\omega) \frac{[S(\omega)] \begin{pmatrix} 1,2,\dots,k-1,j \\ 1,2,\dots,k-1,k \end{pmatrix}}{D_k(\omega)}; \quad \begin{matrix} k=1,2,\dots,n \\ j=k+1,\dots,n \end{matrix} \quad (\text{VI.9})$$

où  $[S(\omega)] \begin{pmatrix} 1,2,\dots,k-1,j \\ 1,2,\dots,k-1,k \end{pmatrix}$  est le déterminant de la sous matrice obtenue en éliminant tous les éléments sauf les  $(1,2,\dots,k-1,j)^{\text{ème}}$  lignes et les  $(1,2,\dots,k-1,k)^{\text{ème}}$  colonnes de  $[S(\omega)]$ . A noter que cette décomposition n'est valable que lorsque la matrice  $[S(\omega)]$  est Hermitienne et définie positive.

Une fois la matrice  $[H(\omega)]$  déterminée, la dernière étape de cette méthode est de simuler le champ  $u_j(t)$ ,  $j=1,2,\dots,n$  par les séries suivantes:

$$u_j(t) = 2 \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^m |H_{jm}(\omega_l)| \sqrt{\Delta\omega} \cos(\omega_l t + \theta_{jm}(\omega_l) + \phi_{ml}) \quad (\text{VI.10})$$

ù  $\Delta\omega$  est l'incrément fréquentiel.

$\omega_l = l \Delta\omega$

$\theta_{jm}(\omega_l)$  est la phase spectrale donnée par:

$$\theta_{jm}(\omega_l) = \tan^{-1} \left[ \frac{\text{Im}.H_{jm}(\omega_l)}{\text{Re}.H_{jm}(\omega_l)} \right] \quad (\text{VI.11})$$

$\phi_{mi}$  sont des angles de phase indépendants uniformément distribués sur  $[0, 2\pi]$ .

Il est à mentionner que la génération numérique des fonctions (VI.10) peut être très efficace en utilisant les transformées de Fourier rapides (FFT). Il est à noter enfin que les processus sont asymptotiquement Gaussien quand N est très grand en vertu du théorème de la limite centrale, ainsi que:

$$E[\ddot{u}_j(t)] = 0$$

$$E[\ddot{u}_j(t) \cdot \ddot{u}_k(t+\tau)] = R_{jk}(\tau) \text{ est la transformée de Wiener Khinchine de } S_{jk}(\omega).$$

### VI.2.2.1. Cas de deux points de support:

La situation qui nous intéresse dans la présente étude est qui est la plus simple est celle de structures à deux points de supports distant de D soumises à des excitations à la base. Les accélérations à la base  $\ddot{u}_1(t)$  et  $\ddot{u}_2(t)$  sont simulées en considérant la méthode de représentation spectrale.[8]

La matrice de densité interspectrale est donnée par:

$$[S(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.12})$$

Puisque la fonction d'autospectre en toute station en surface libre est commune alors:

$$\begin{aligned} S_{11}(\omega) &= S_{22}(\omega) = S(\omega) \\ S_{12}(\omega) &= S_{21}^*(\omega) = r_{12}(\omega, D_{12}) S(\omega) \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

où  $r_{12}$  est la fonction de cohérence.

En vertu des équations (VI.8), (VI.9), les éléments de la matrice  $[H(\omega)]$  sont donnés par:

$$\begin{aligned} H_{11}(\omega) &= \sqrt{S(\omega)} \\ H_{21}(\omega) &= \sqrt{S(\omega)} \cdot r_{12} \\ H_{22}(\omega) &= \sqrt{S(\omega)} \cdot \sqrt{1 - |r_{21}|^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

et l'équation (VI.10) montre que  $\ddot{u}_1(t)$  et  $\ddot{u}_2(t)$  peuvent être simulés par les séries:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1(t) &= 2 \sum_{j=1}^N |H_{11}(\omega_j)| \sqrt{\Delta\omega} \cdot \cos(\omega_j t + \phi_{1j}) \\ \ddot{u}_2(t) &= 2 \sum_{j=1}^N |H_{21}(\omega_j)| \sqrt{\Delta\omega} \cdot \cos(\omega_j t + \theta_{21}(\omega_j) + \phi_{1j}) + |H_{22}(\omega_j)| \sqrt{\Delta\omega} \cdot \cos(\omega_j t + \phi_{2j}) \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

où  $\omega_j = j \cdot \Delta\omega$

$$\theta_{21}(\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{\text{Im}.H_{21}(\omega)}{\text{Re}.H_{21}(\omega)} \right] \quad (\text{VI.16})$$

$\phi_{1j}$  et  $\phi_{2j}$  sont des angles de phase aléatoires uniformément distribués entre  $[0, 2\pi]$ .

Le modèle de la fonction de cohérence choisie dans la présente étude est celui proposé par Loh et Yeh [23 ] tel que:

$$r(\omega, D) = \exp\left(-\alpha \frac{\omega|D|}{2\pi V}\right) \exp\left(i\omega \frac{D}{V}\right) \quad (\text{VI.17})$$

avec  $\alpha$  pris égal à 0.125

D est la distance entre les deux points de support.

V est la vitesse apparente de propagation de l'onde dominante.

La FFT est utilisée pour la détermination de  $\ddot{u}_1(t)$  et  $\ddot{u}_2(t)$  (figVI.2), (figVI.3), (figVI.4), (figVI.5).

La fonction enveloppe choisie pour fenêtrer les histoires temporelles obtenues est la suivante: [1]

$$W(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{T_1}\right)^2 & 0 < t \leq t_1 \\ 1 & t_1 < t \leq t_2 \\ \exp[-c(T-t)] & t_2 < t \leq T \end{cases} \quad (\text{VI.18})$$

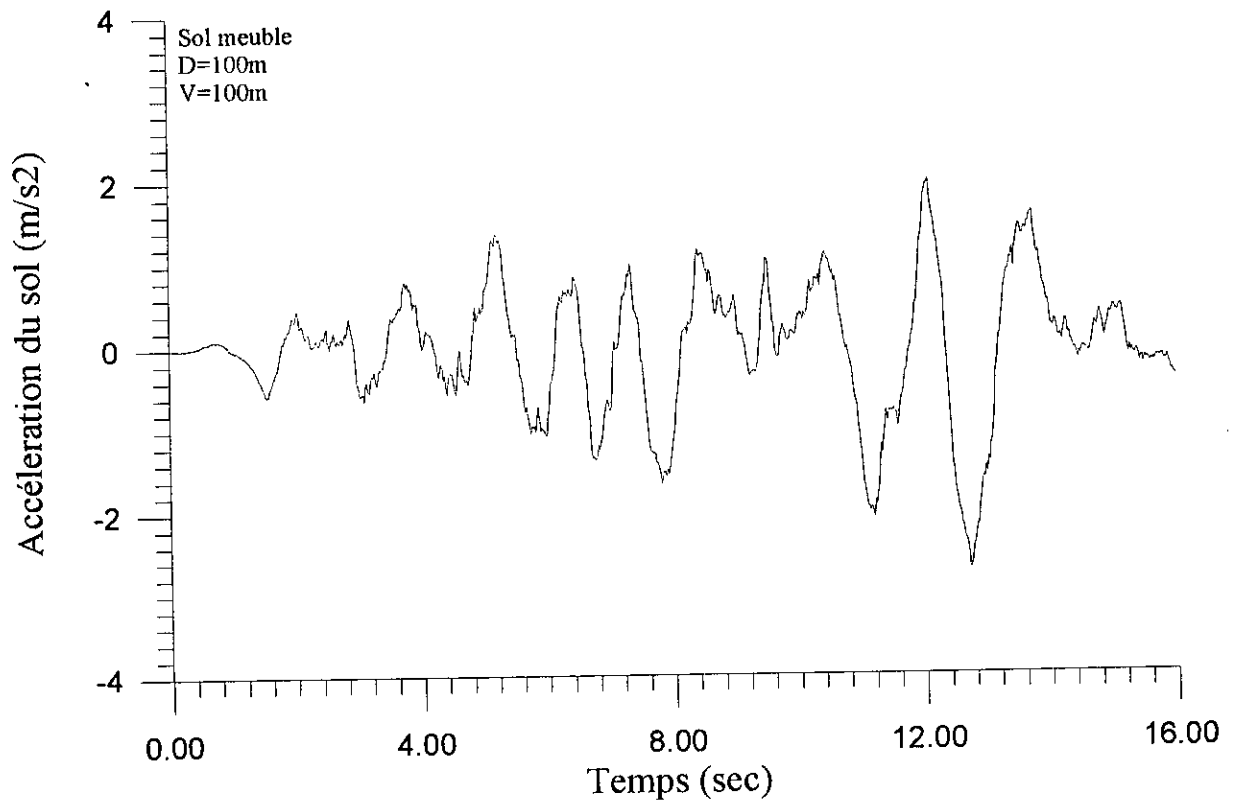
où T est la durée totale de l'histoire temporelle.

$t_1 = 3$  sec

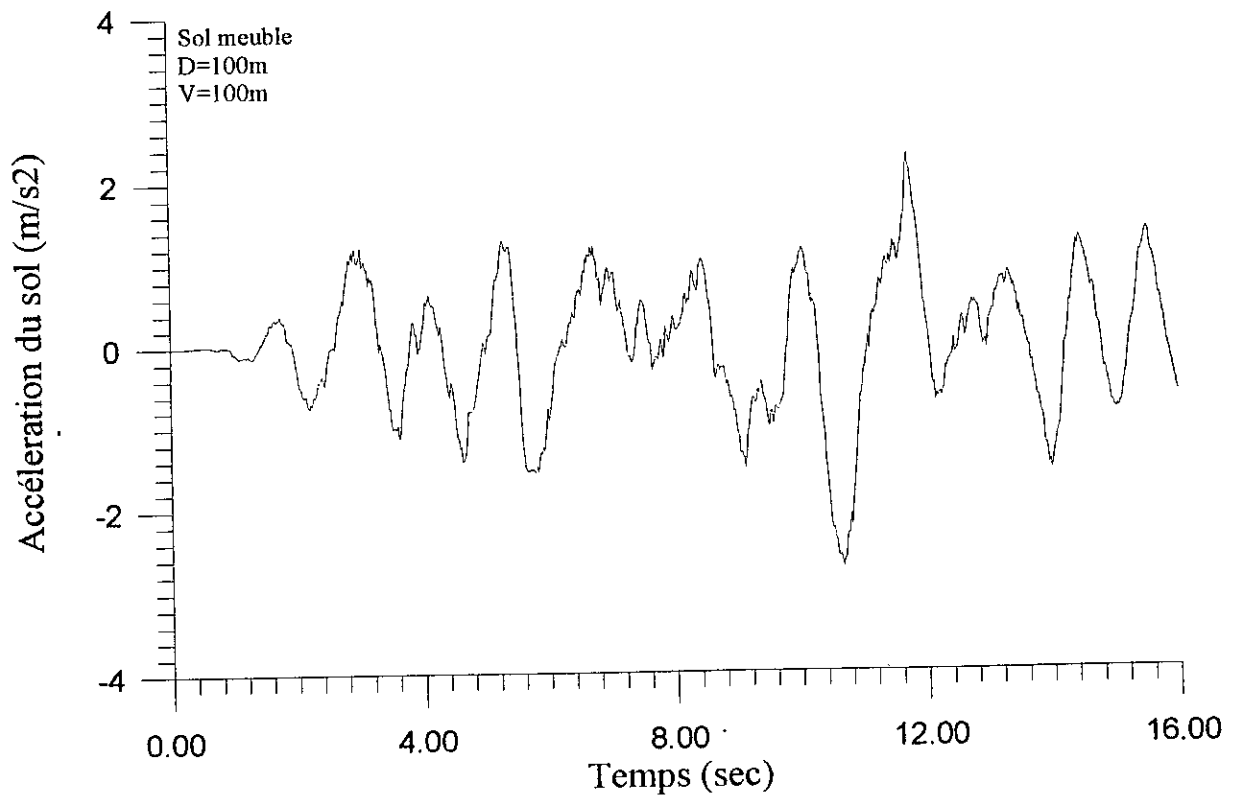
$t_2 = 13$  sec lorsque  $T = 16$  sec

$t_2 = 10$  sec lorsque  $T = 12$  sec

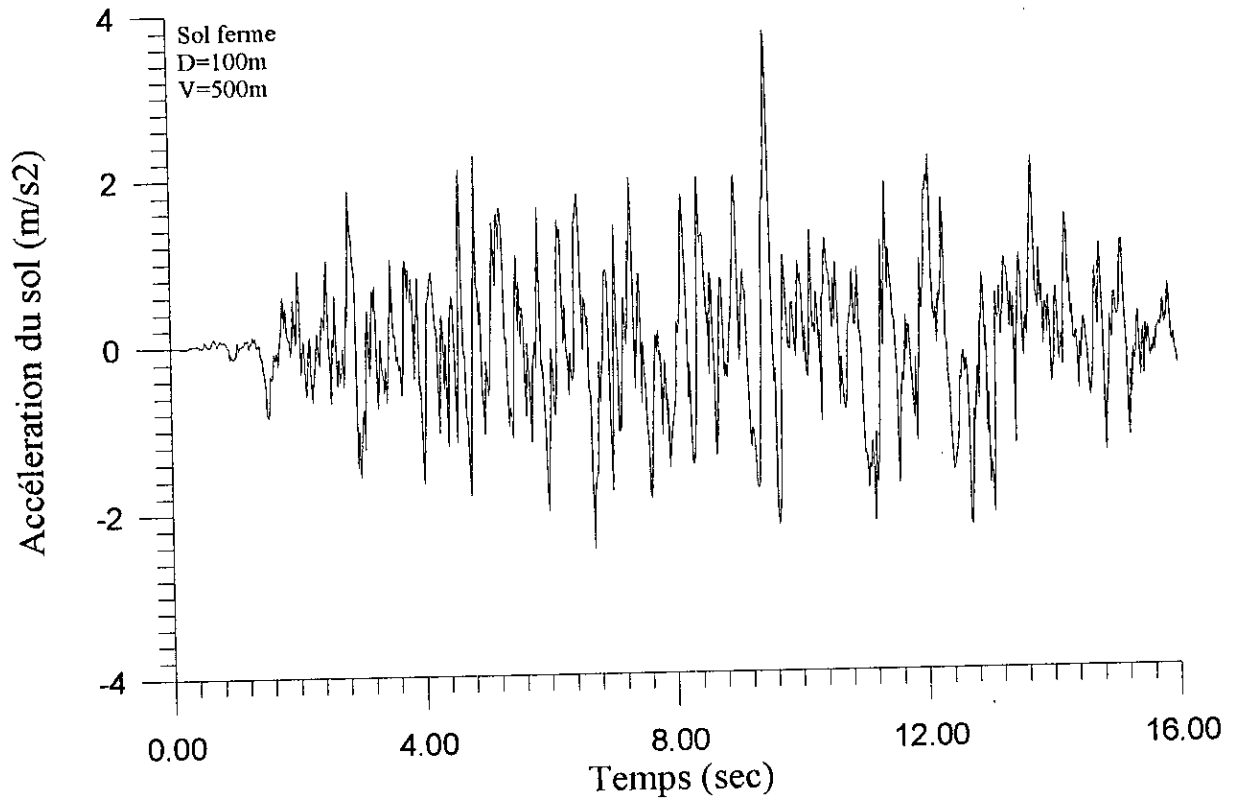
$c = 0.26$



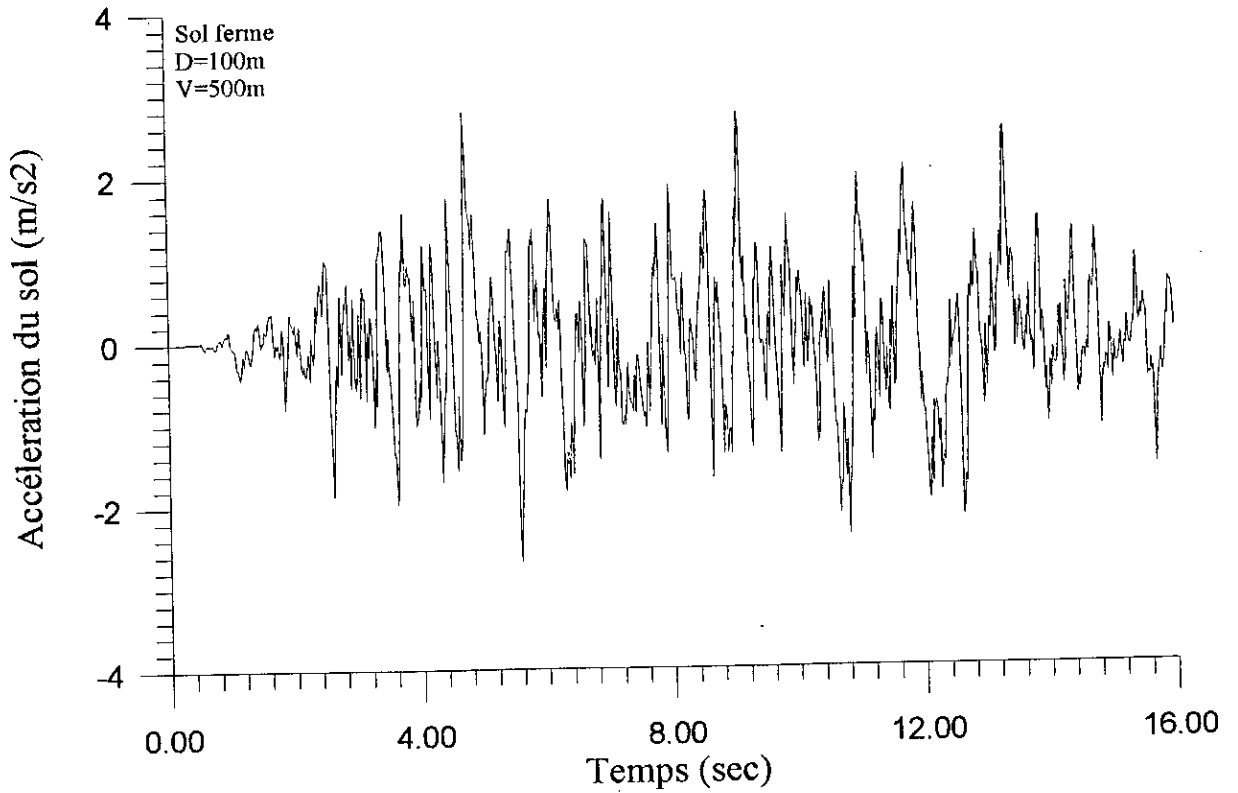
FigVI.2: Accélération à l'appui 1.



FigVI.3: Accélération à l'appui 2



FigVI.4: Accélération à l'appui 1



FigVI.5: Accélération à l'appui 2



### VI.3. ETUDE PARAMETRIQUE:

La première propriété à étudier est l'évolution de l'histoire temporelle de la réponse de la structure (figVI.1) au noeud 4, en fonction de la nature de l'input sismique aussi bien pour le sol ferme que pour le sol meuble. La distance entre appuis est fixée à 100m. Les excitations sismiques considérées sont:

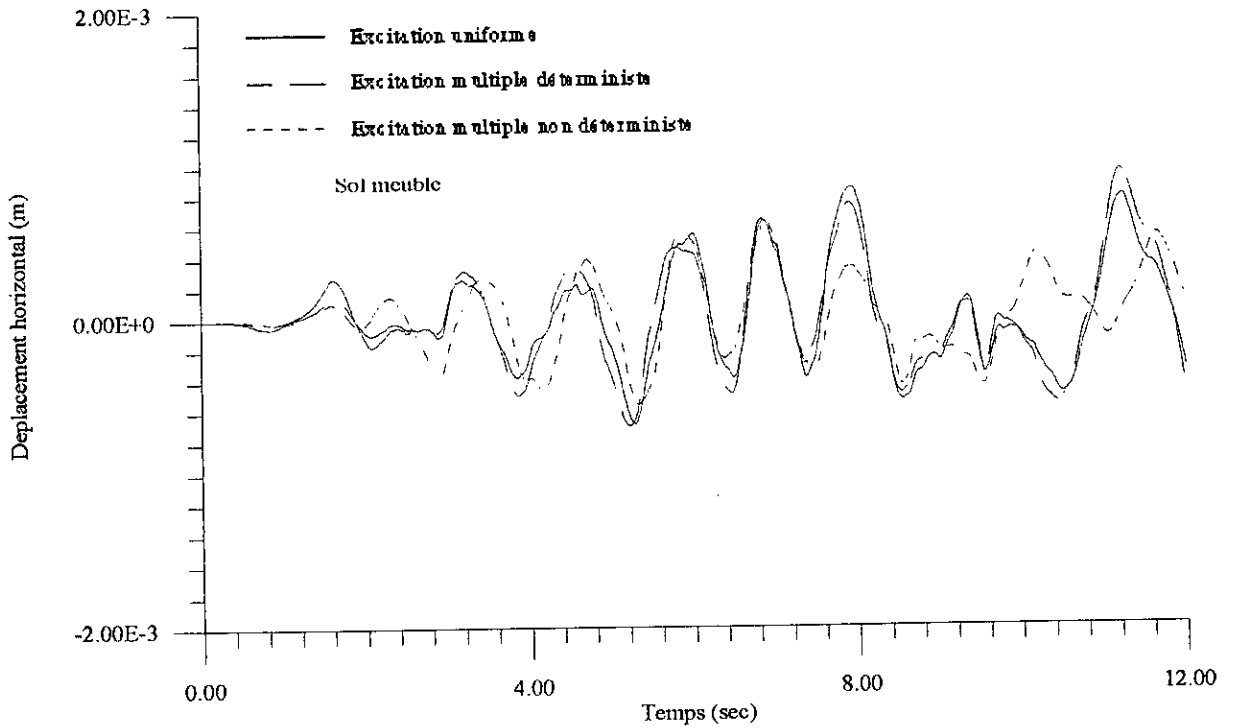
- Une excitation à la base uniforme (mono-excitation).
- Une excitation variable (excitation multiple) et observée par simple décalage dans le temps égal au temps de propagation de l'onde sismique considérée d'un appui à un autre (variabilité déterministe).
- Une excitation variable au sens large et obtenue en considérant la méthode de représentation spectrale (variabilité non déterministe).

De manière générale, les réponses sous ces trois excitations sont différentes. L'aspect uniforme de l'excitation sismique surestime la réponse de la structure. On remarque sur la figure (figVI.6) que la réponse sous ce dernier aspect enveloppe les réponses sous excitations multiples. La réponse sous excitation décalée présente des pics à amplitudes plus importantes que celles des pics de la réponse sous excitation variable au sens large. Ceci est remarqué lorsque le sol est meuble. Dans le cas d'un sol ferme, les réponses sous excitation uniforme ou décalée sont très comparables (figVI.7) et présentent des pics à amplitudes très importantes que celles des pics de la réponse sous excitation variable au sens large. Pour les deux types de sol, la différence entre les différentes réponses devient plus accentuée avec le temps.

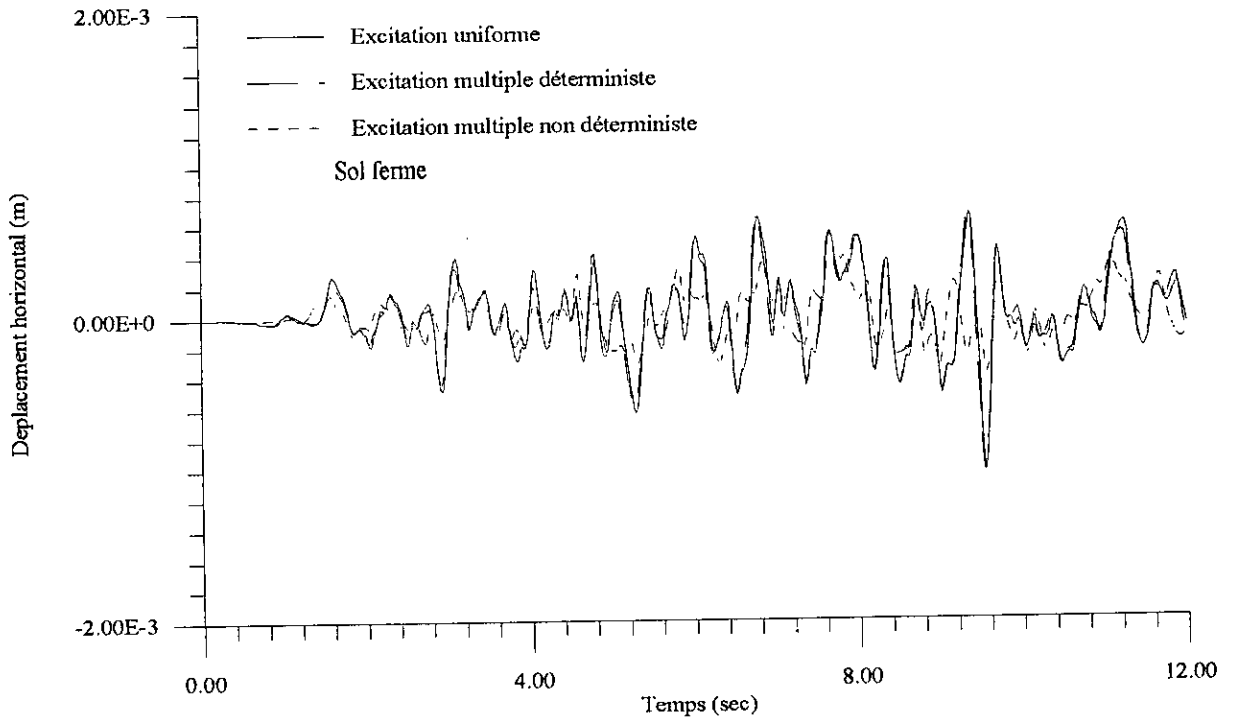
Les mêmes remarques restent valables pour une structure plus rigide (figVI.8) (figVI.9). C'est à dire que la réponse sous excitation uniforme diffère de celle sous excitation multiple. Cette différence est faible lorsque l'excitation est simplement décalée et devient importante lorsqu'elle est variable au sens large, surtout pour un sol ferme. Cette dernière remarque s'explique par le fait de décaler (par un temps égal au temps que met l'onde pour se propager de l'appui 1 à l'appui 2) ne reflète pas réellement ce qui se produit lors de cette propagation à savoir, le changement du contenu fréquentiel, atténuation, amplification...surtout lorsque le sol est ferme où la vitesse de propagation est plus importante, donc le retard est insignifiant. Ces effets sont beaucoup plus pris en charge dans la fonction de cohérence qui nous donne la variabilité au sens large. Les déplacements horizontaux dans la structure 2 sont plus faibles que ceux de la structure 1 qui est dix fois moins rigide. Pour les rotations de la structure (figVI.10) (figVI.11), les remarques précédentes restent valables.

Pour la composante verticale de la réponse, des remarques intéressantes sont à signaler. Le déplacement vertical est faible lorsque l'excitation est uniforme quelle que soit la structure et indépendamment du type de sol(hypothèse de l'excitation uniforme horizontale) et il devient plus important lorsque l'excitation est variable (figVI.12) (figVI.13) (figVI.14) (figVI.15). Ceci confirme que lorsque l'excitation est uniforme, le mouvement de la structure est un mouvement de translation horizontale. Par contre lorsqu'il est y a variation dans les excitations des appuis, les déplacements verticaux apparaissent plus importants du fait du mouvement différentiel entre appuis. Le déplacement vertical est maximum lorsque l'excitation est variable au sens large et le sol est de type meuble. Ceci est du au fait que le sol meuble est à basses fréquences donc à grandes amplitudes de mouvements. La réponse verticale diminue

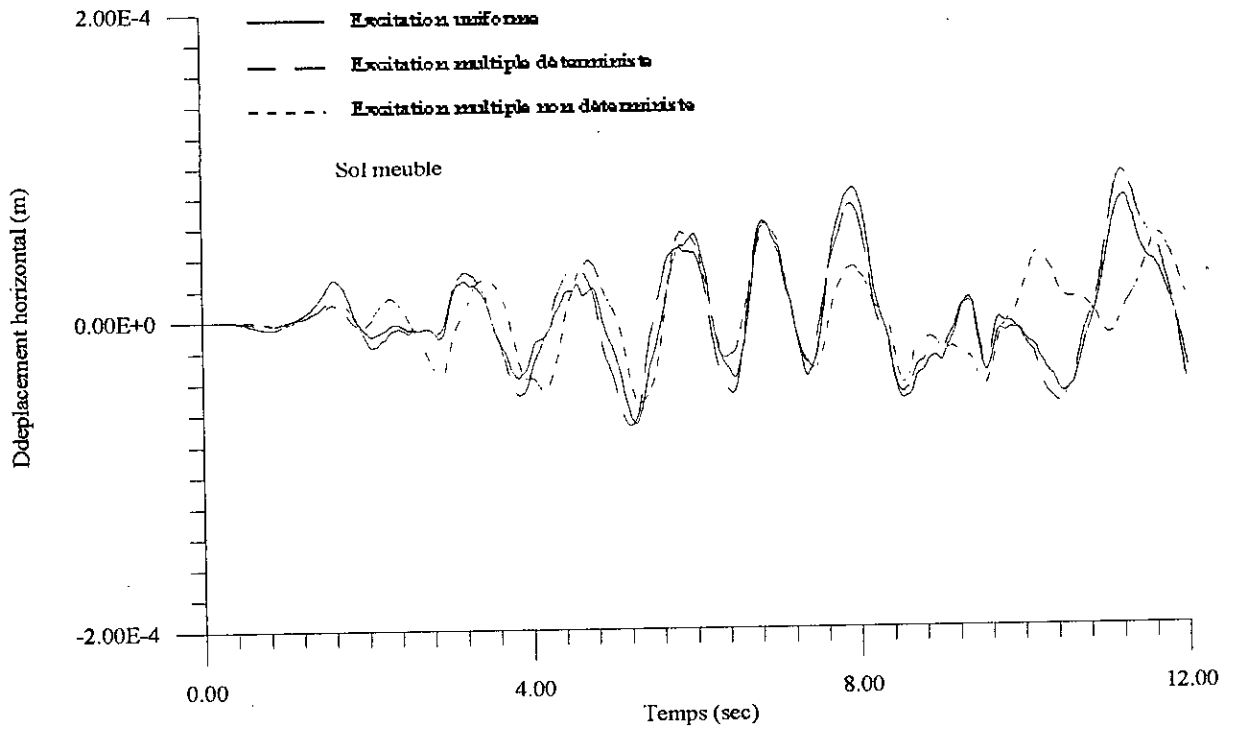
considérablement lorsque le sol est ferme (lorsque le sol est ferme, il y a presque superposition entre l'aspect uniforme et l'aspect décalé de l'excitation. Ces mouvements différentiels affectent beaucoup plus la structure 1 que la structure 2.



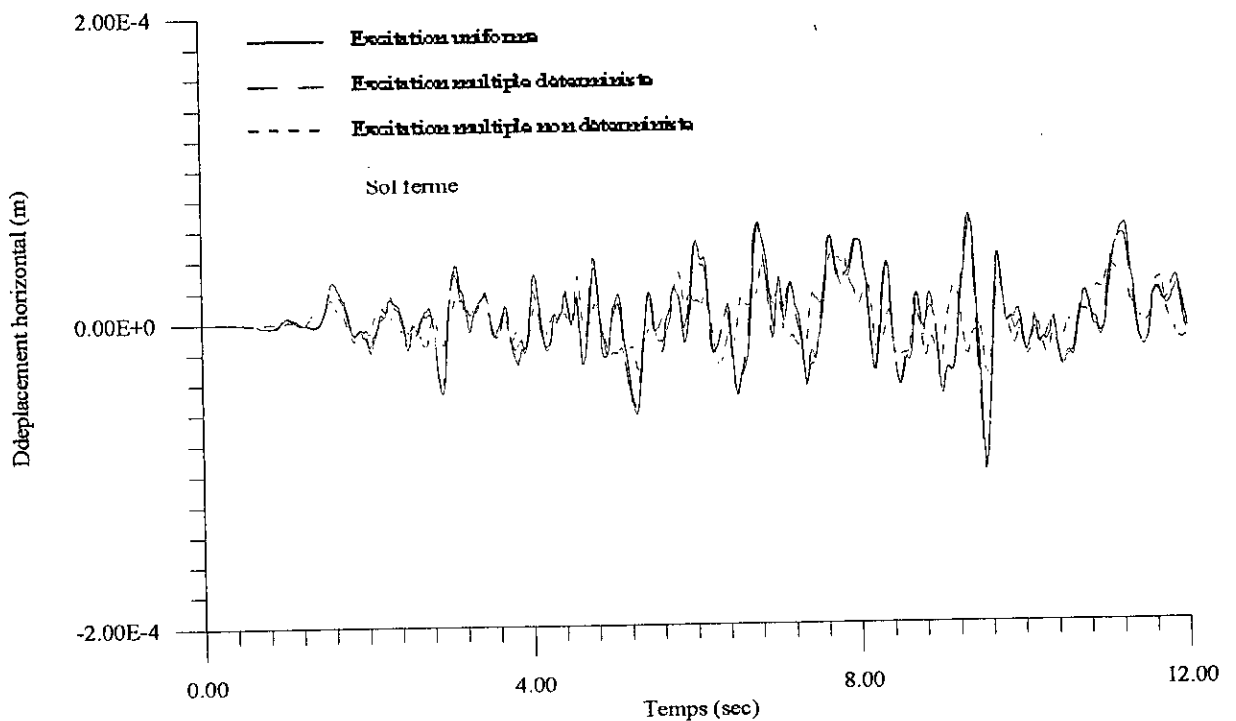
FigVI.6 Déplacements horizontaux de la structure 1.



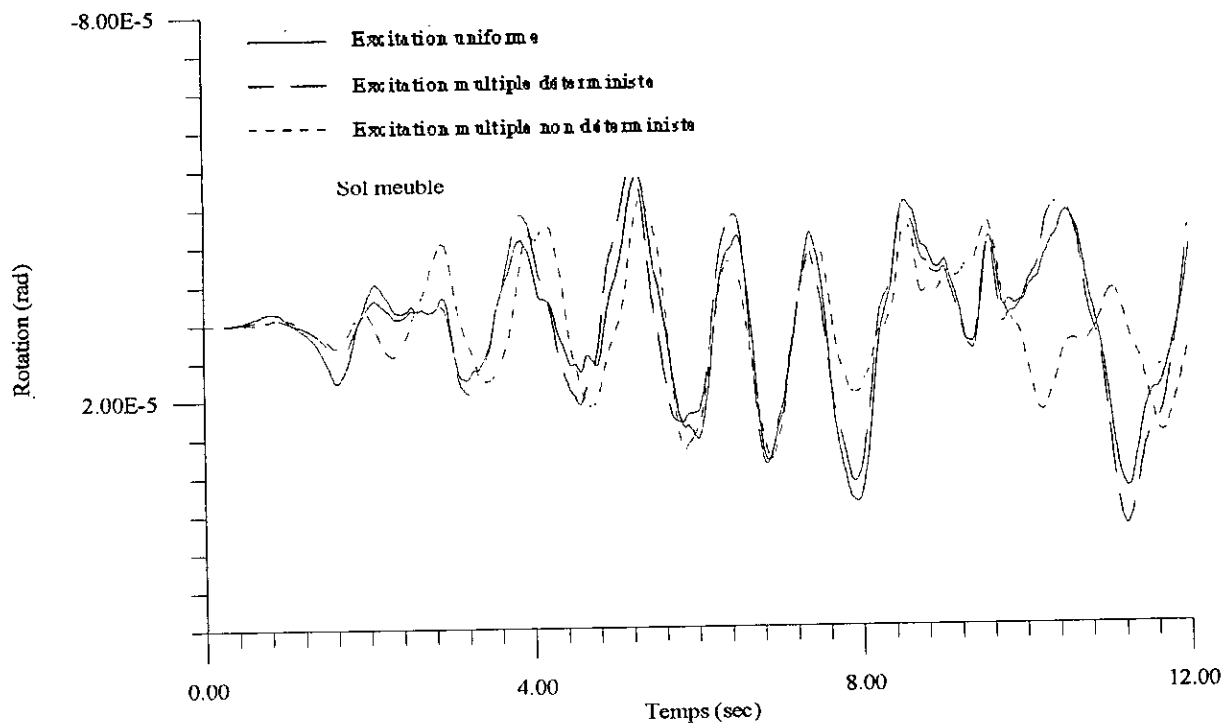
FigVI.7 Déplacements horizontaux de la structure 1.



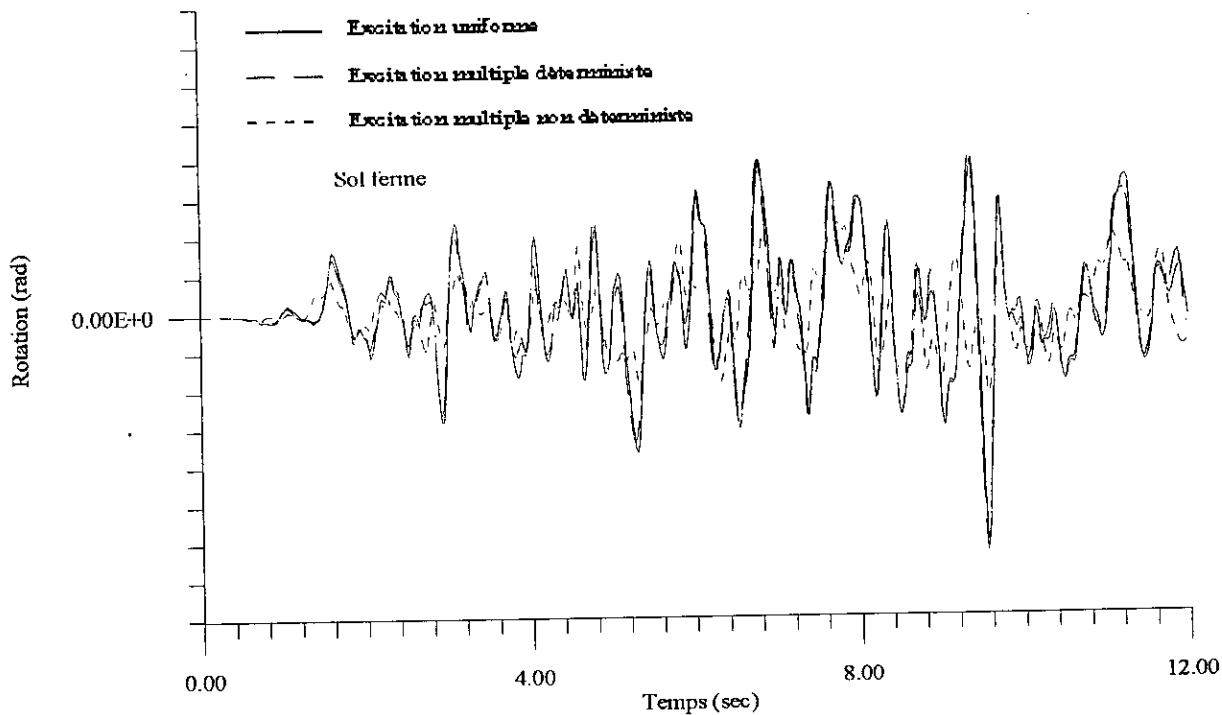
FigVI.8 Déplacements horizontaux de la structure 2.



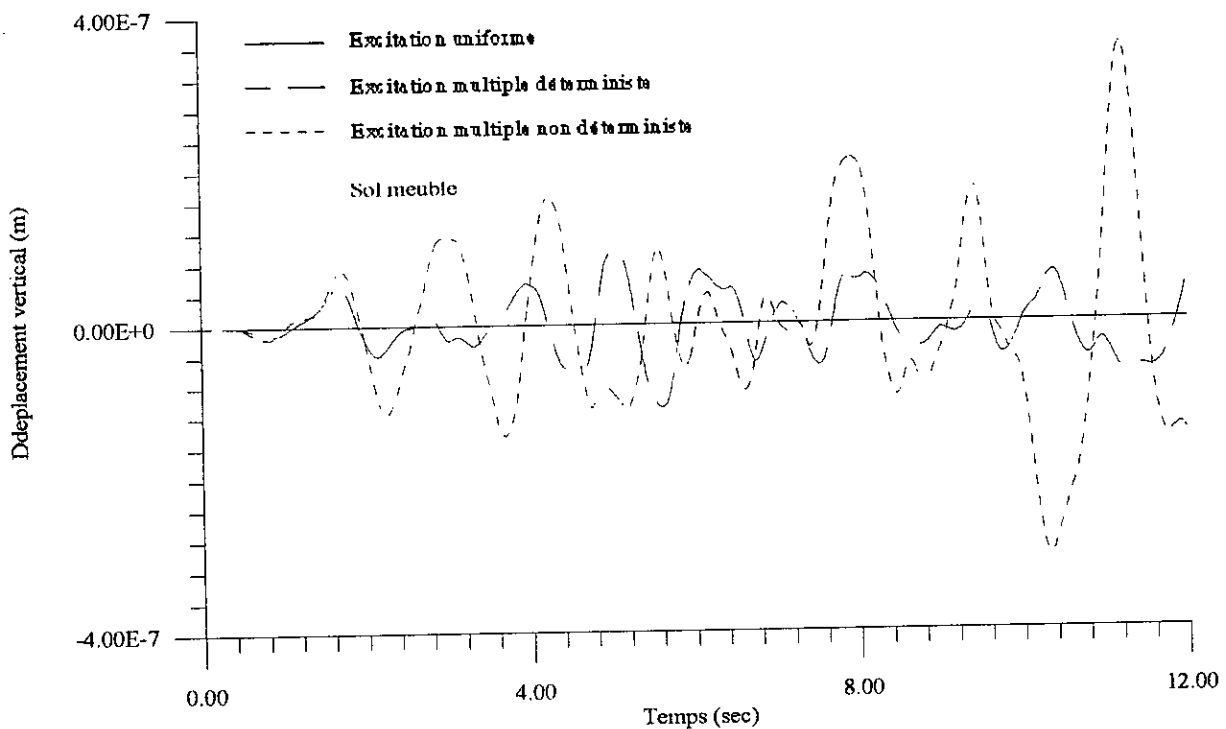
FigVI.9 Déplacements horizontaux de la structure 2.



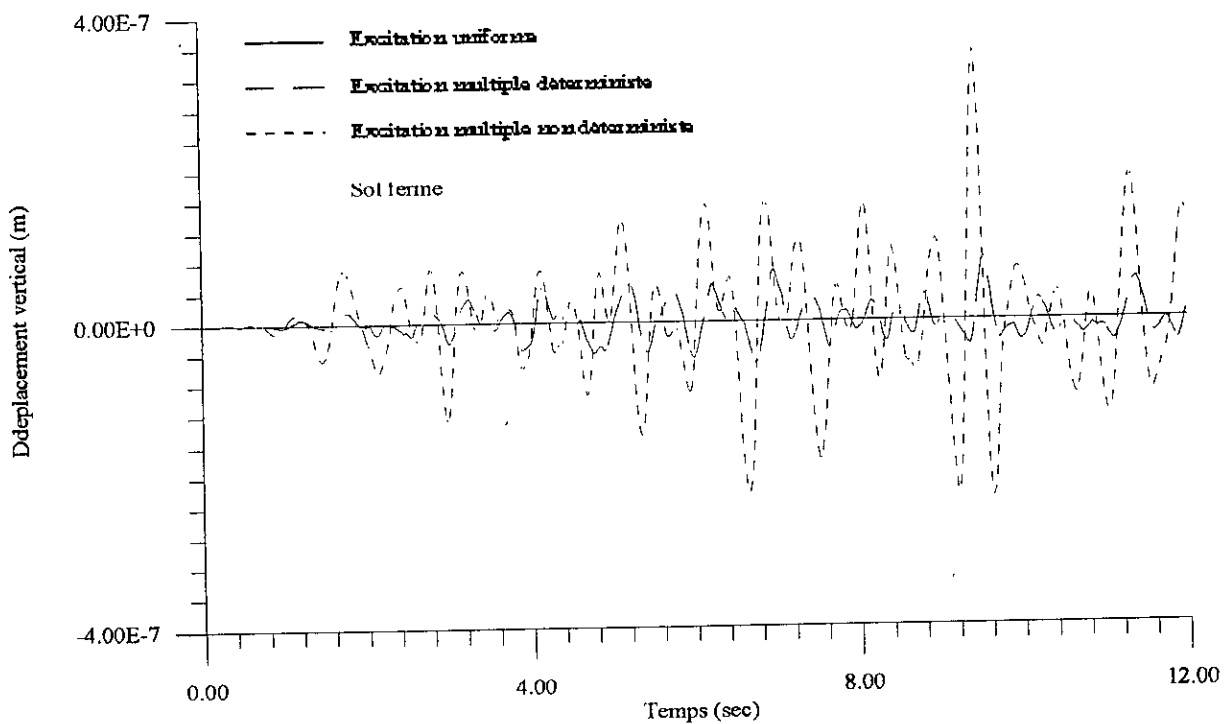
FigVI.10 Rotations de la structure 1.



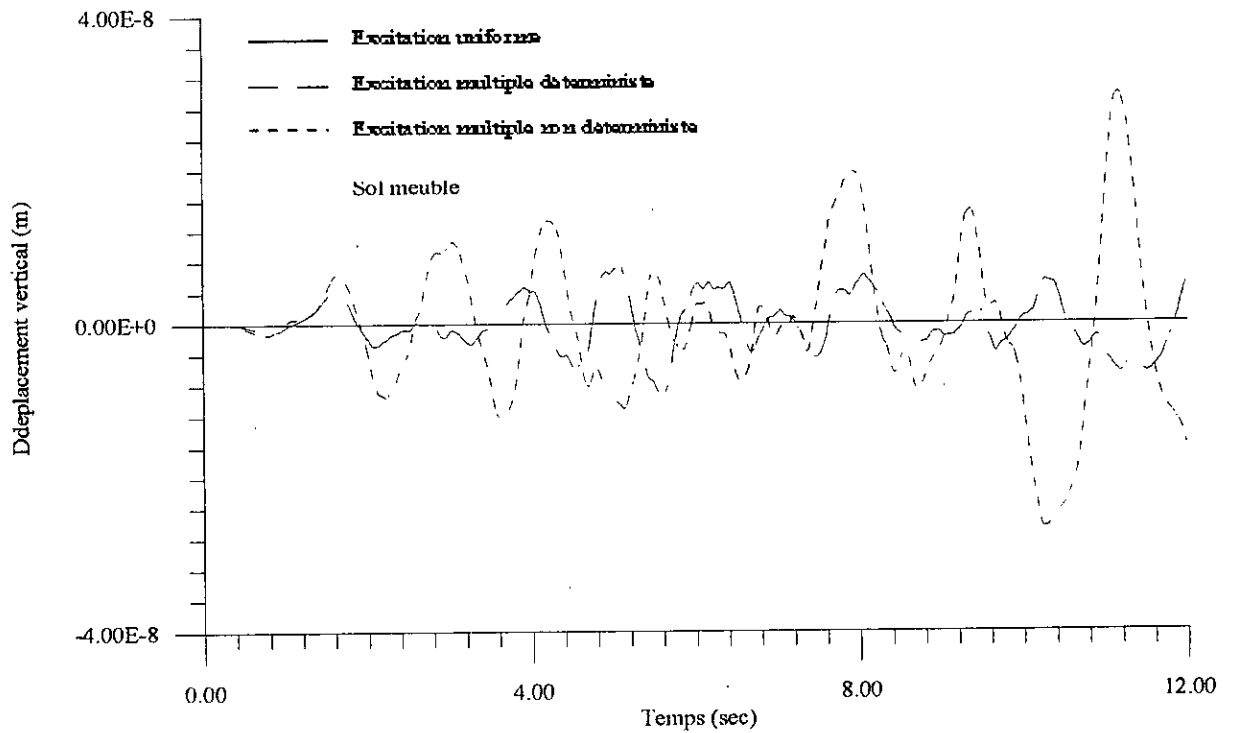
FigVI.11 Rotations de la structure 1.



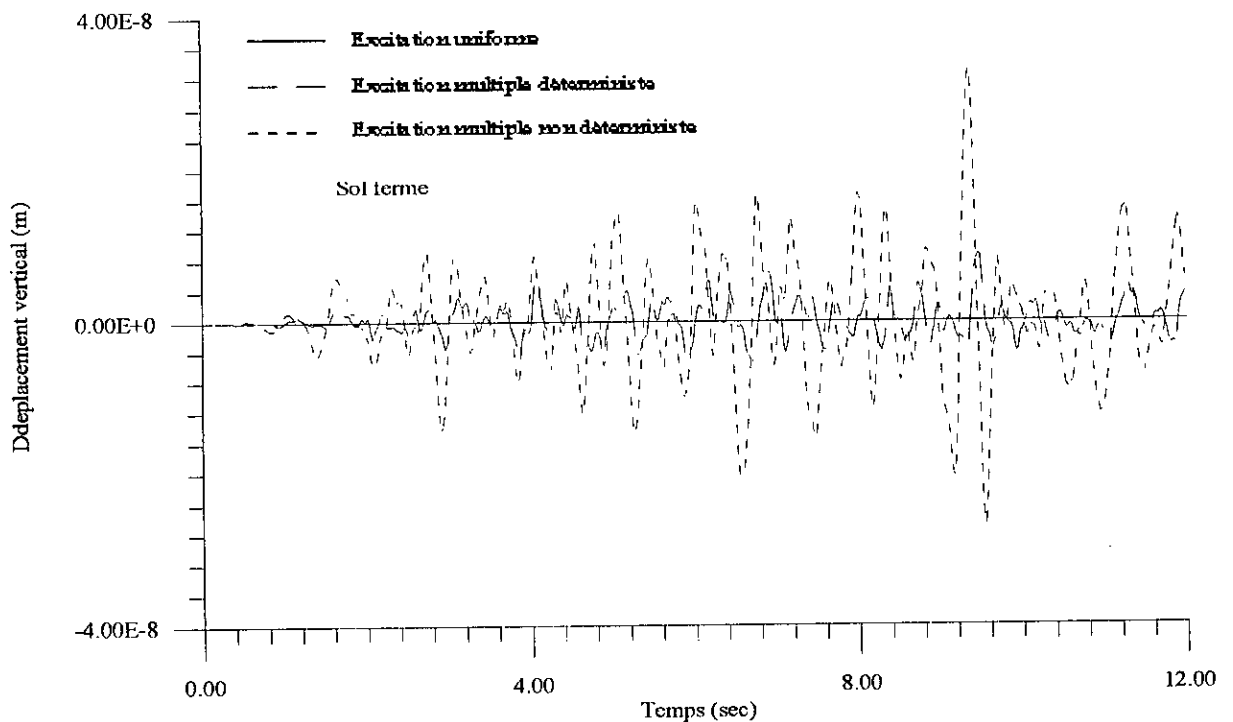
FigVI.12 Déplacements verticaux de la structure 1.



FigVI.13 Déplacements verticaux de la structure 1.



FigVI.14 Déplacements verticaux de la structure 2.



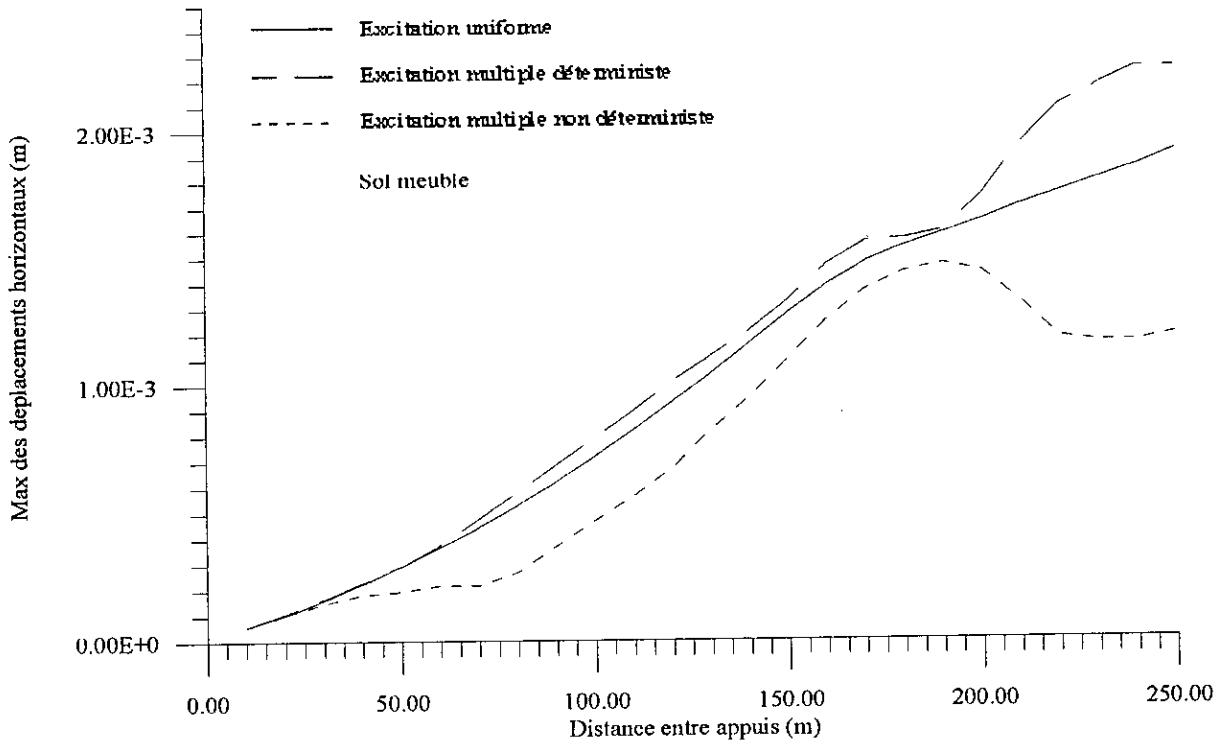
FigVI.15 Déplacements verticaux de la structure 2.

Pour mieux distinguer les différences entre les réponses sous les différents cas de chargements et voir jusqu'à quelle distance entre appuis, on peut confondre la solution sous les trois aspects d'excitation, les maximums de ces réponses (en valeurs absolues) en fonction de la distance entre appuis (D) sont montrés sur les figures ((FigVI.16 à 28)) pour les deux types de sol: meuble et ferme.

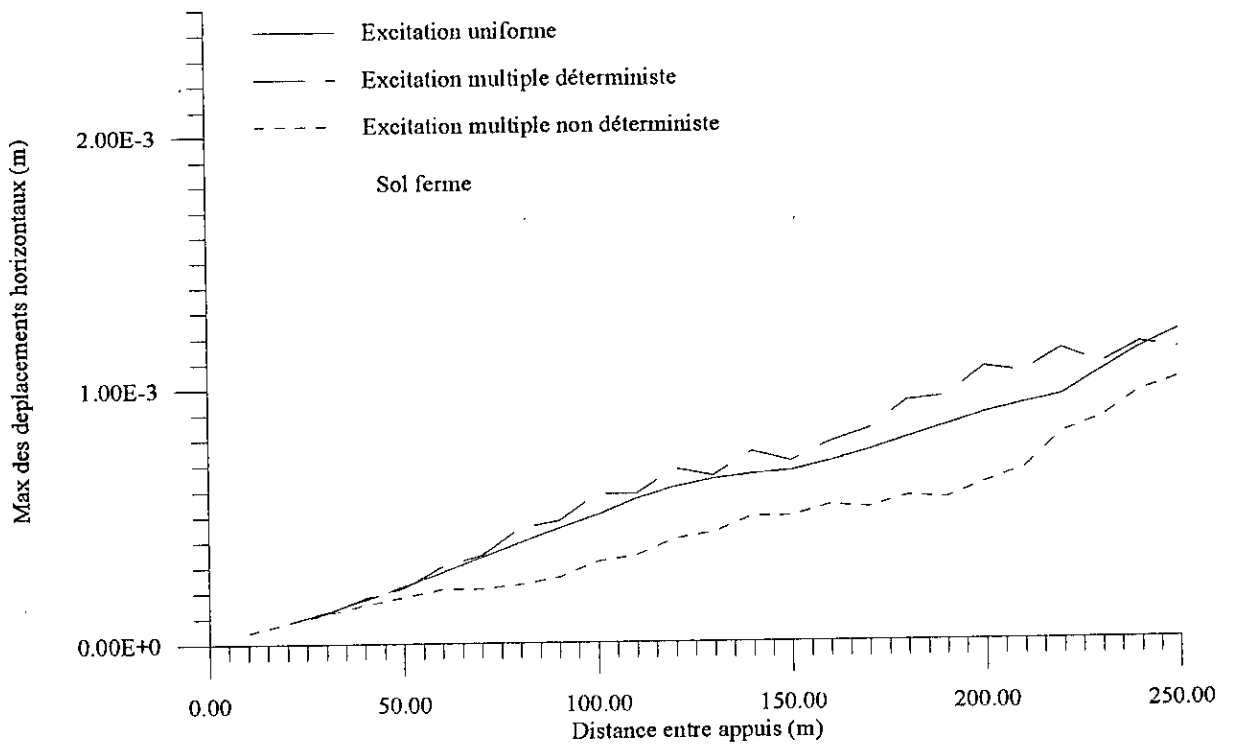
De manière générale, ces maximums augmentent en fonction de la distance. Pour ce qui est du maximum de la composante horizontale, les réponses sont importantes pour un sol meuble et encore plus pour la structure 1. Ceci est dû au fait qu'un sol meuble amplifie les amplitudes par rapport au sol ferme et que la structure résiste à l'excitation du fait de sa rigidité plus élevée par rapport à la structure 1.(FigVI.16) (FigVI.17) (FigVI.18) (FigVI.19). Les réponses sous les trois cas de chargements sont confondues jusqu'à des distances entre appuis allant jusqu'à 40m pour le sol ferme et un peu moins pour un sol meuble. Les exemples de structures prises n'affectent pas ces distances. Donc pour ces distances, l'analyse de manière classique (uniforme) fournit des résultats performants, puis la différence apparaît. Les maximums des réponses sous excitations non déterministes diminuent aussi bien pour un sol meuble que pour un sol ferme. Par contre, les deux autres courbes restent superposées jusqu'à des distances allant au double des distances précédentes. Ceci est contraire aux résultats escomptés d'après les recommandations de l'AFPS, car en principe, une différence doit être marquée à partir de ces distances entre appuis.

Les mêmes remarques restent valables pour les rotations (FigVI.20) (FigVI.21) (FigVI.22) (FigVI.23).

Pour les maximums de la composante verticale (FigVI.24) (FigVI.25) (FigVI.26) (FigVI.27), la première remarque est que les déplacements verticaux induits par les mouvements différentiels des appuis restent très faibles (presque nuls) jusqu'à des distances entre appuis très importantes (110m) pour la structure 1. et plus pour la structure 2 (FigVI.28) (FigVI.29) lorsque le sol est meuble. Lorsque le sol est ferme, cette remarque reste valable sauf que c'est la structure 2 qui est plus influencée. A partir de ces distances, les déplacements verticaux apparaissent et croissent rapidement surtout pour le troisième cas de chargement. Les figures (FigVI.28) (FigVI.29) (FigVI.30) montrent que les maximums sont toujours supérieurs pour un sol meuble en considérant le troisième cas de chargement ou le cas uniforme (figVI.31).

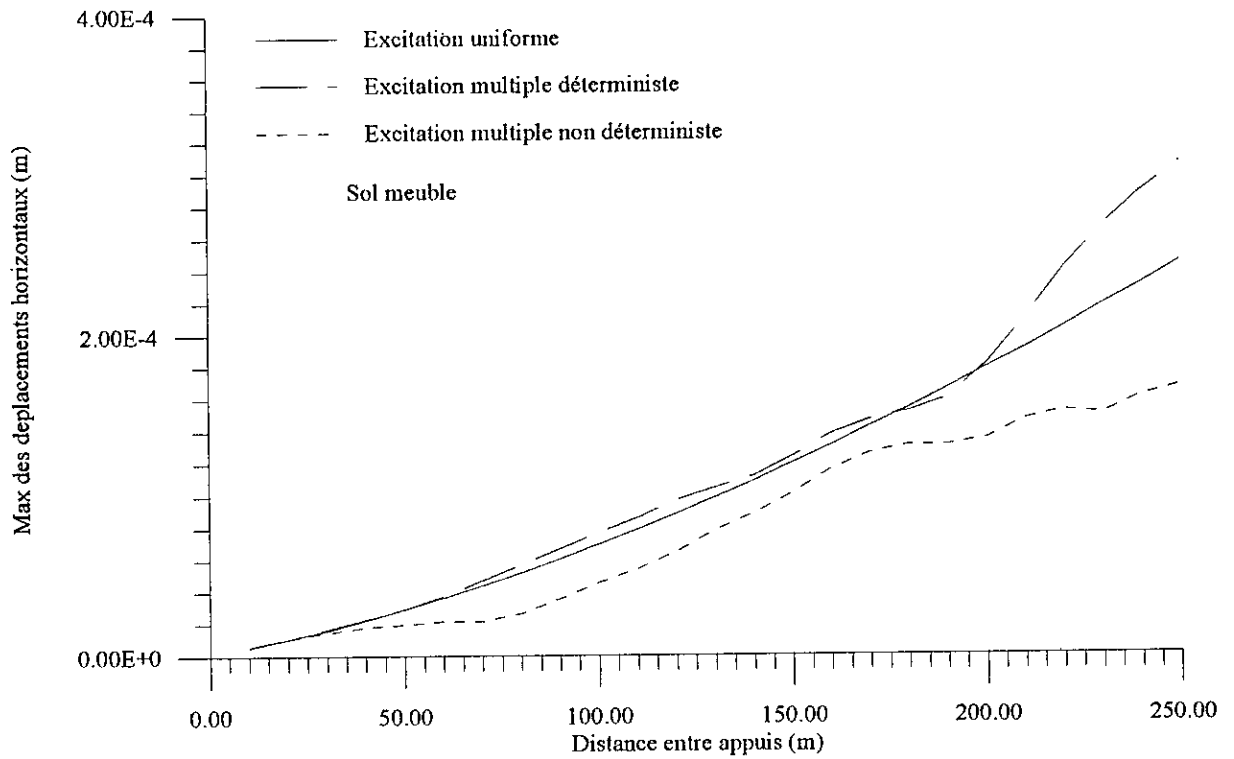


FigVI.16 Déplacements horizontaux max dans la structure 1

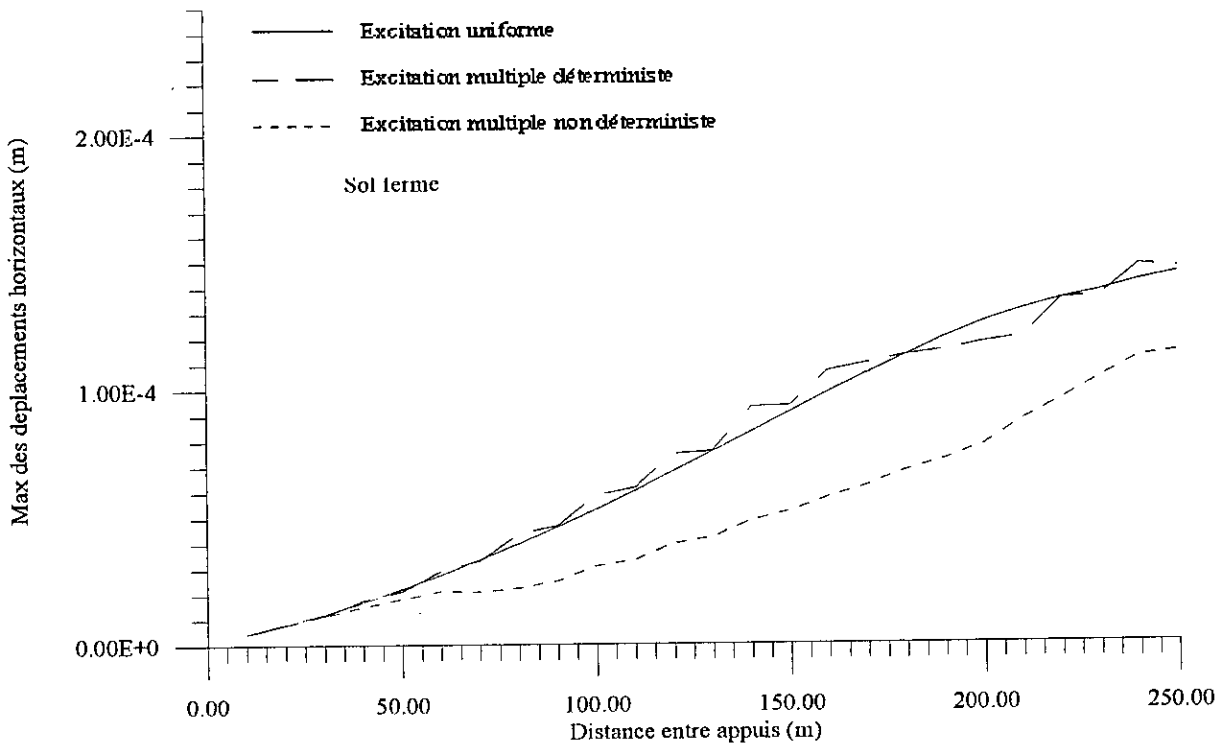


FigVI.17 Déplacements horizontaux max dans la structure 1

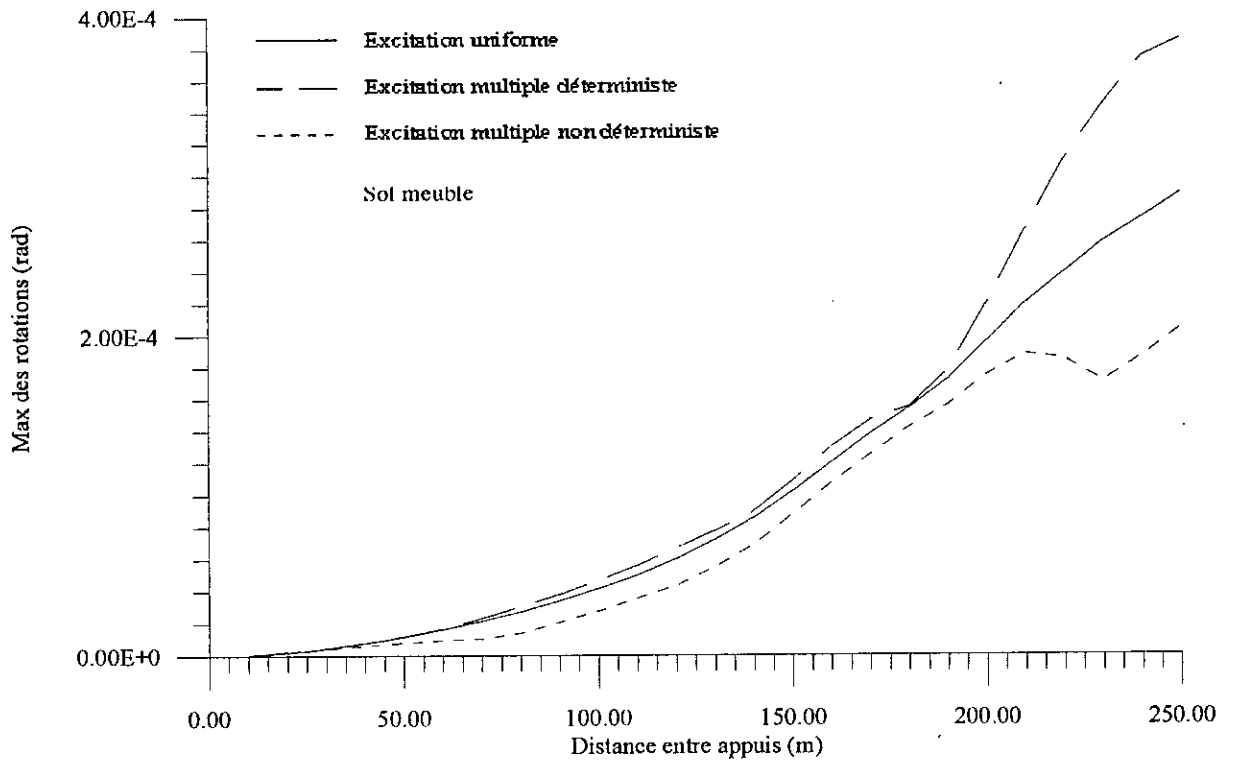




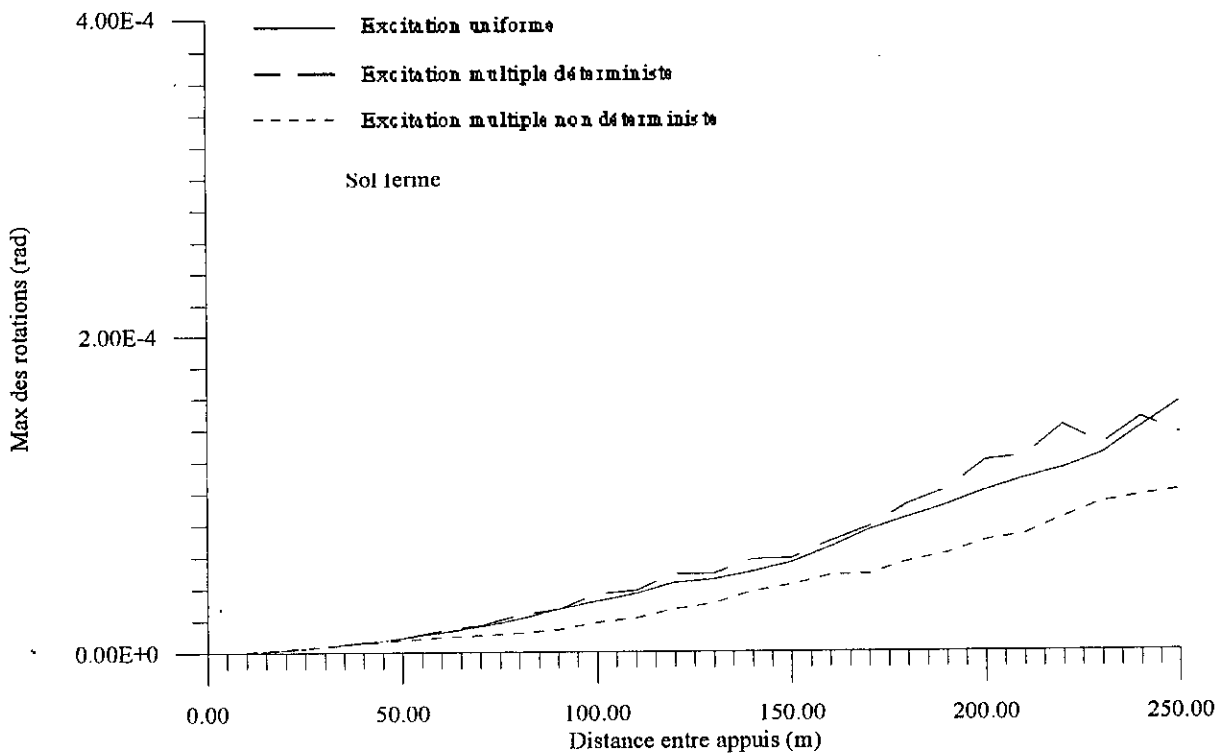
FigVI.18 Déplacements horizontaux max dans la structure 2



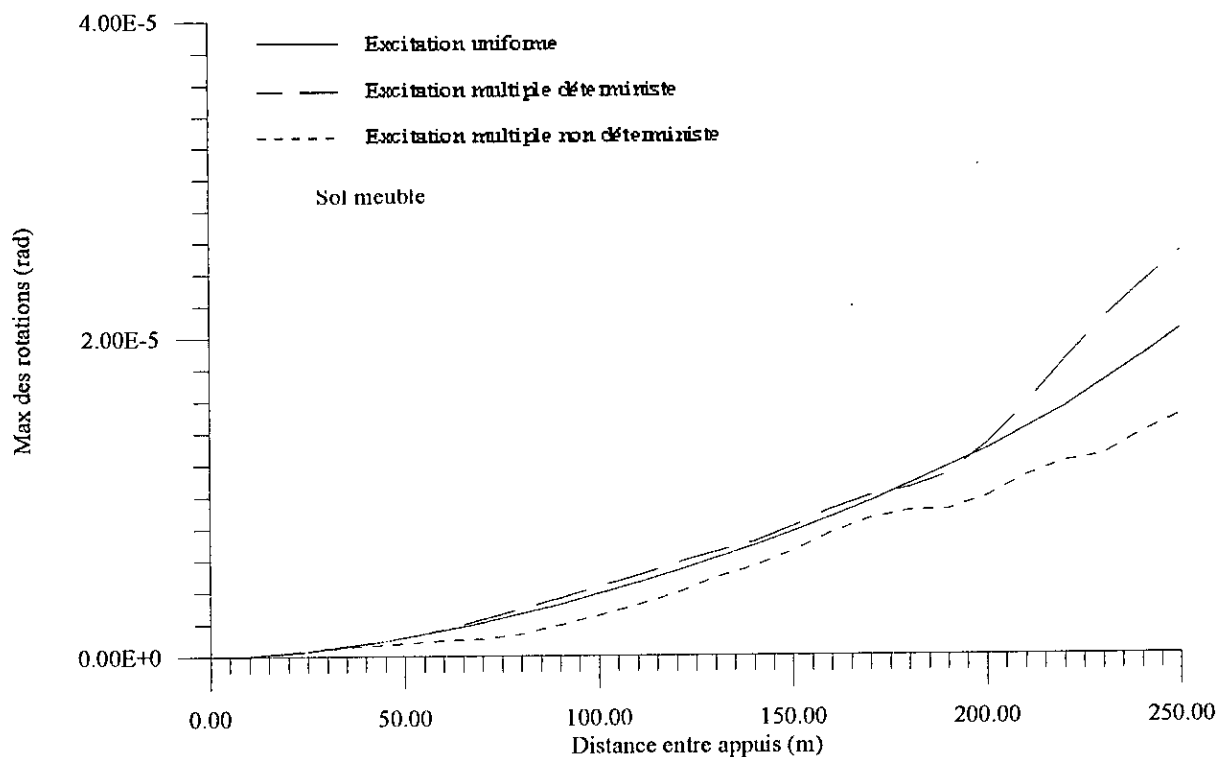
FigVI.19 Déplacements horizontaux max dans la structure 2



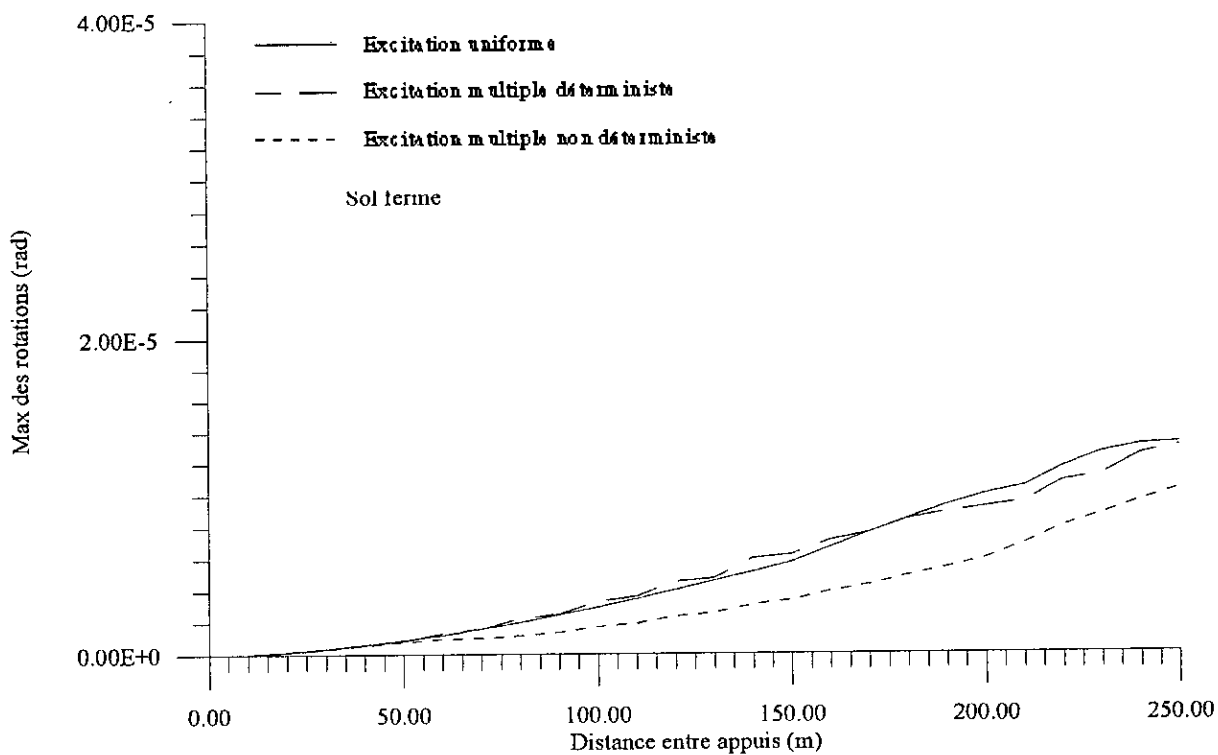
FigVI.20 Rotations max dans la structure 1



FigVI.21 Rotations max dans la structure 1



FigVI.22 Déplacements verticaux max dans la structure 2



FigVI.23 Rotations max dans la structure 2

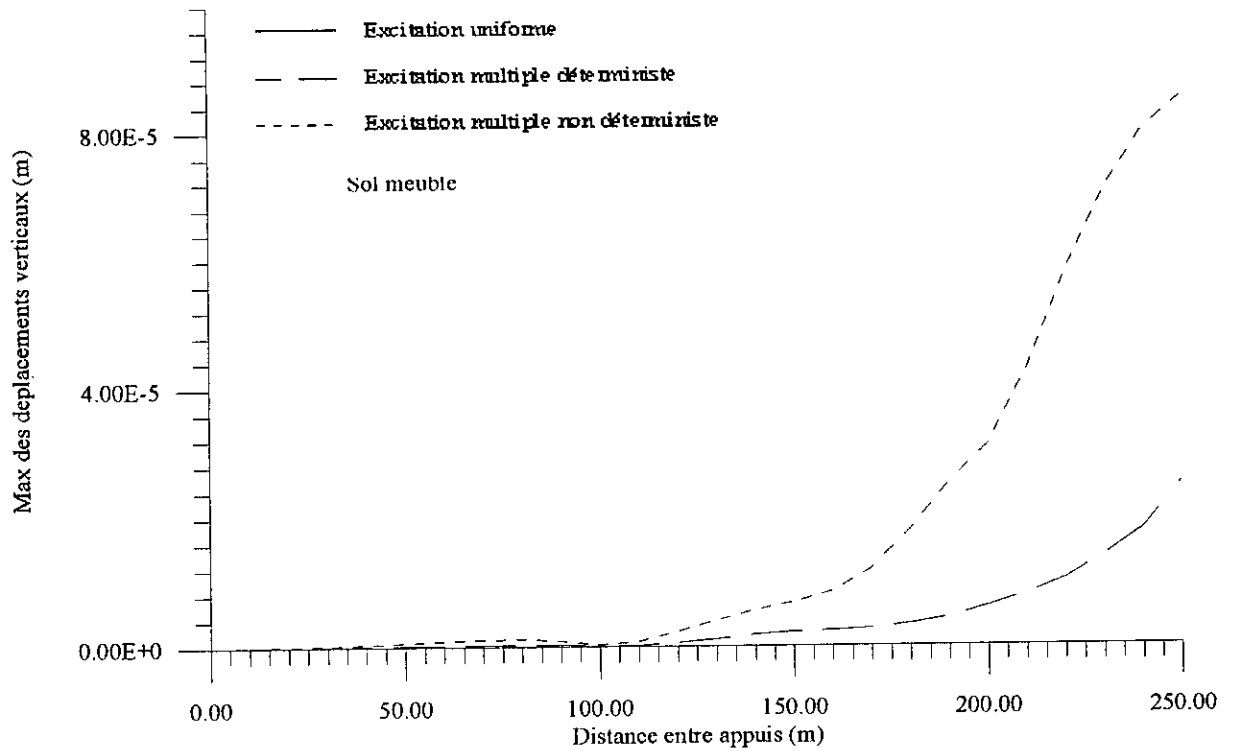


Fig.VI.24 Déplacements verticaux max dans la structure 1

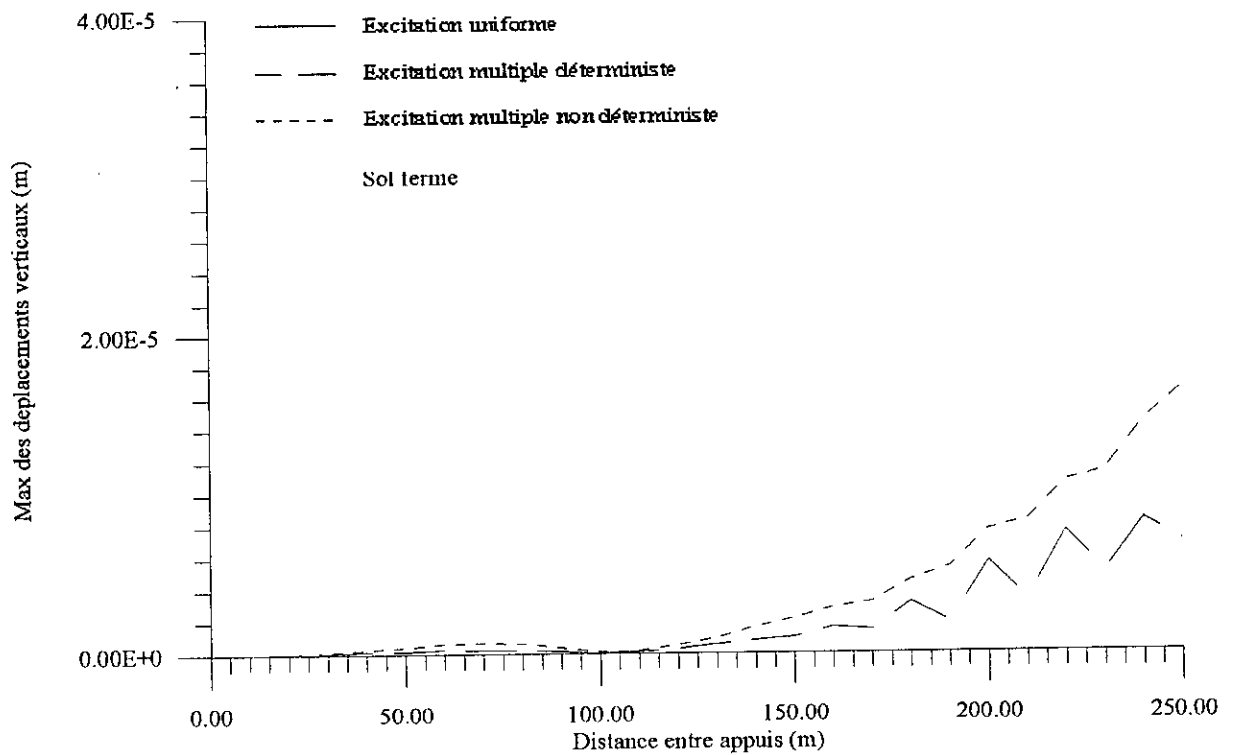
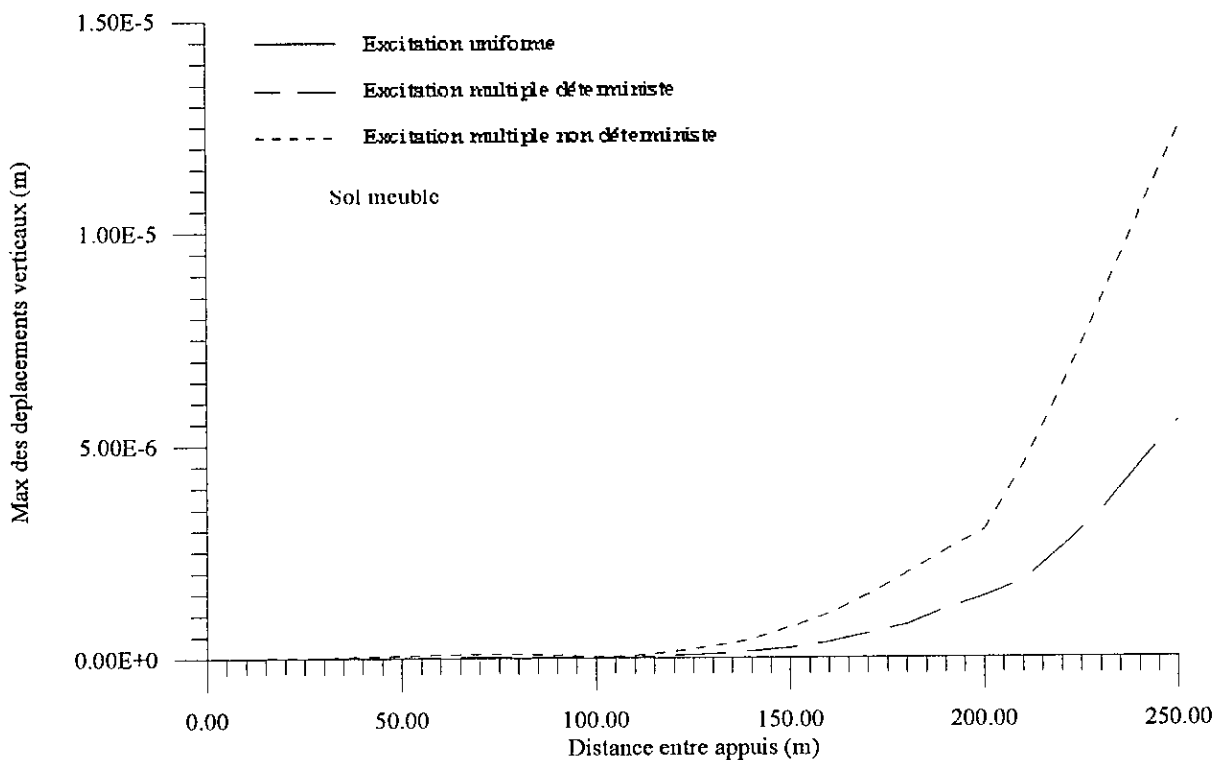
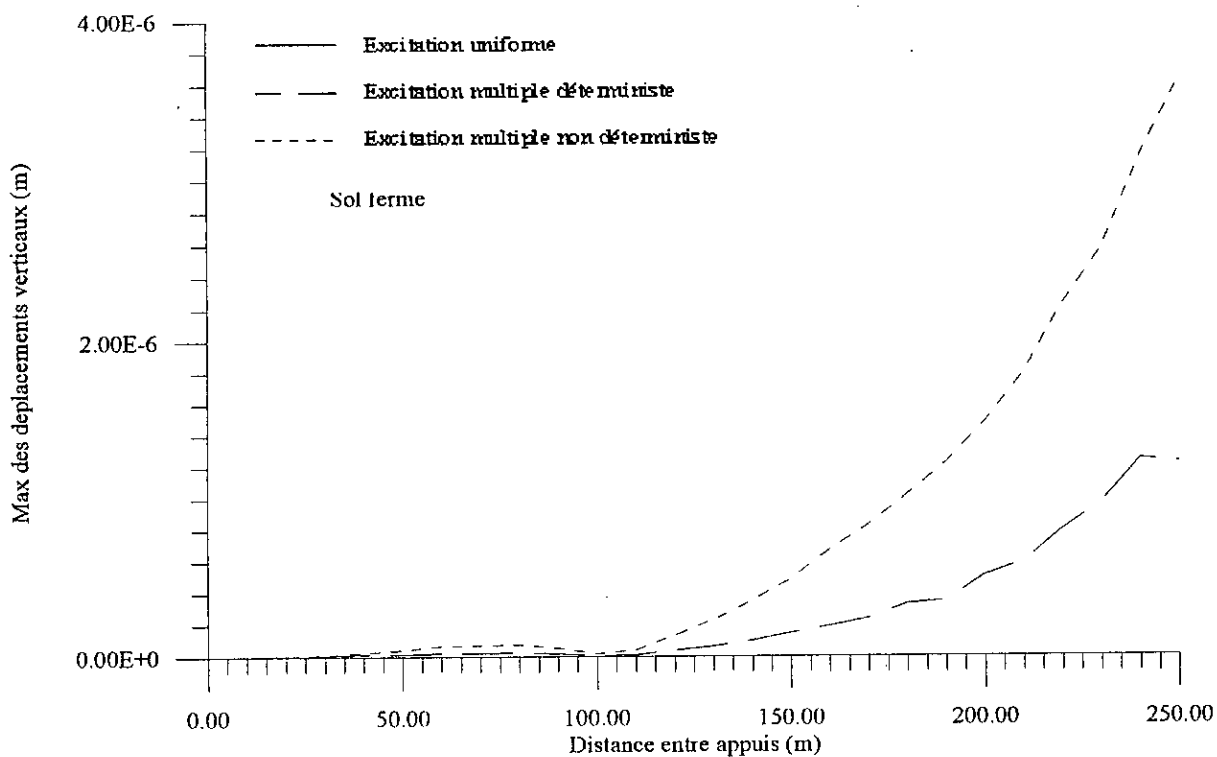


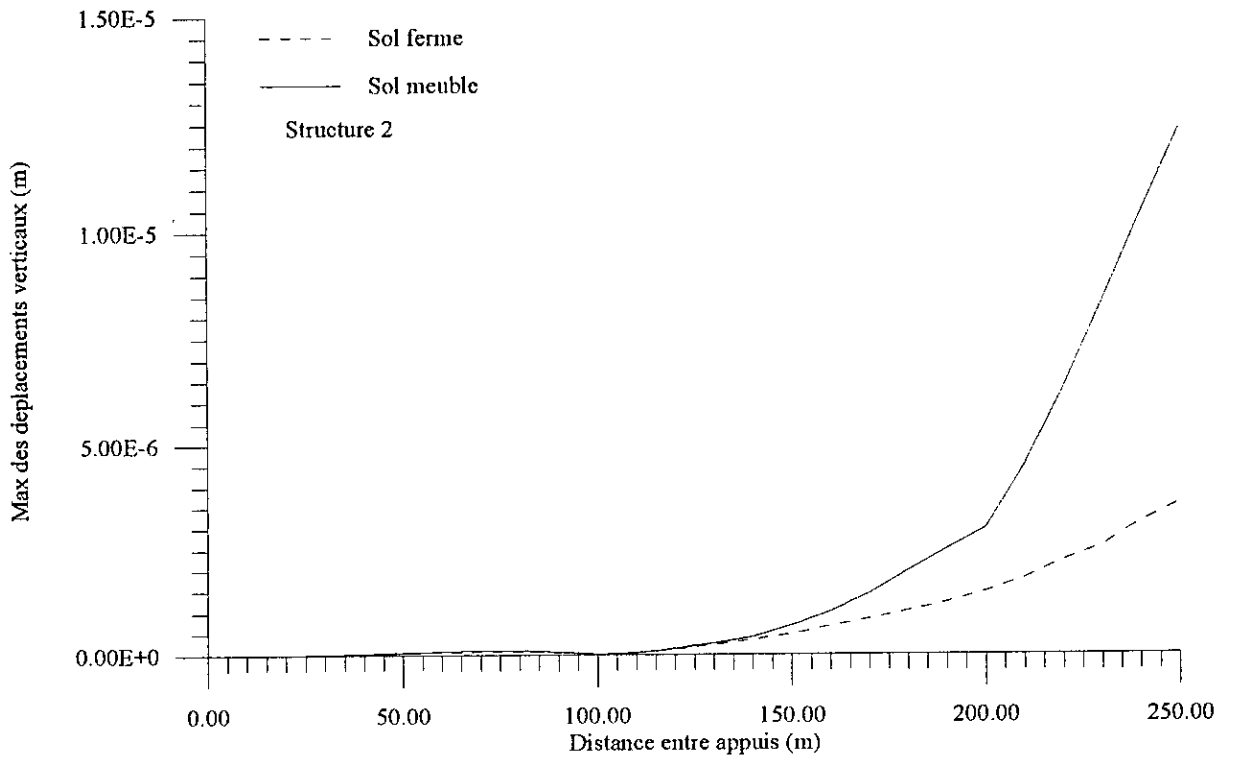
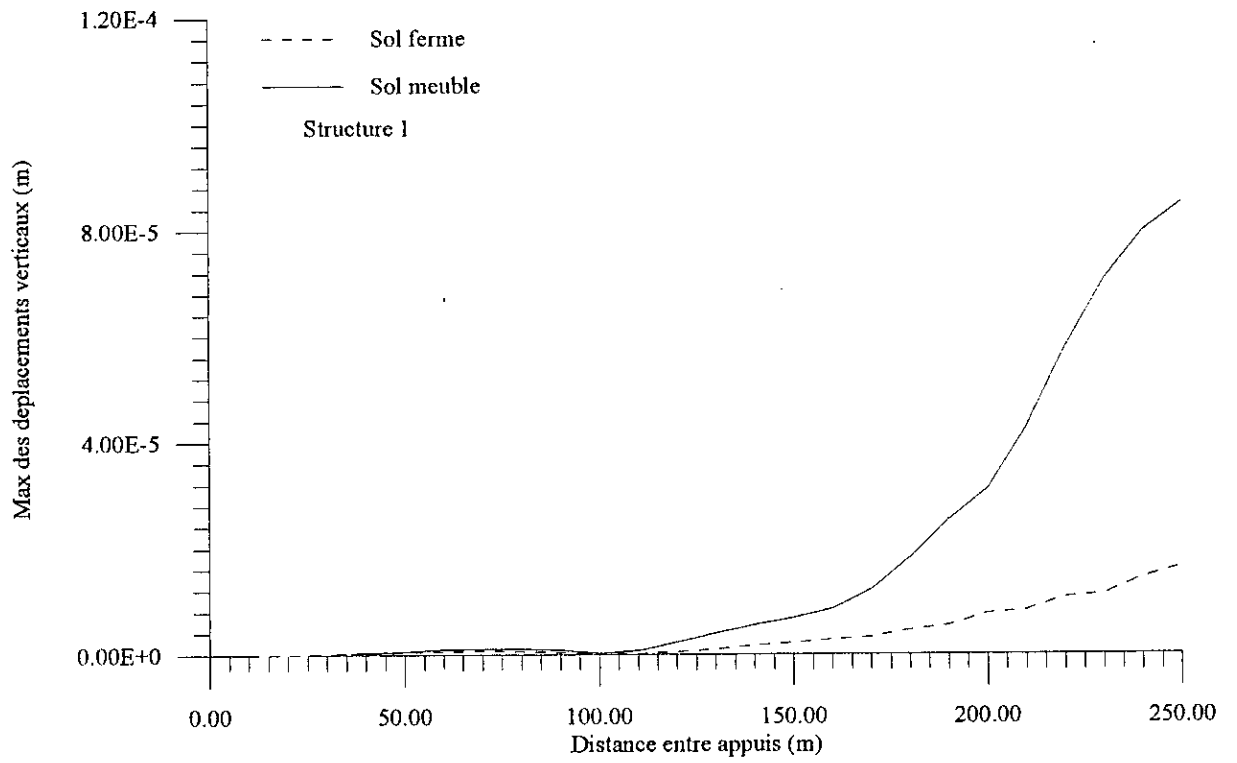
Fig.VI.25 Déplacements verticaux max dans la structure 1



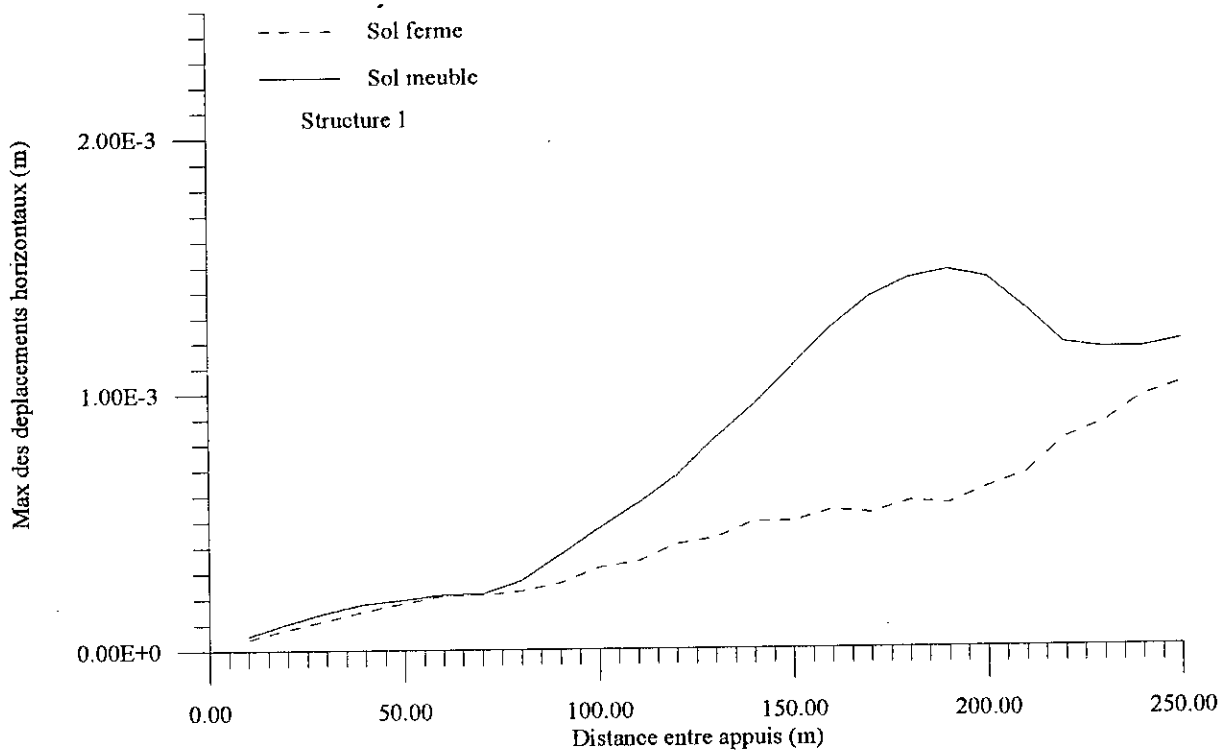
FigVI.26 Déplacements verticaux max dans la structure 2



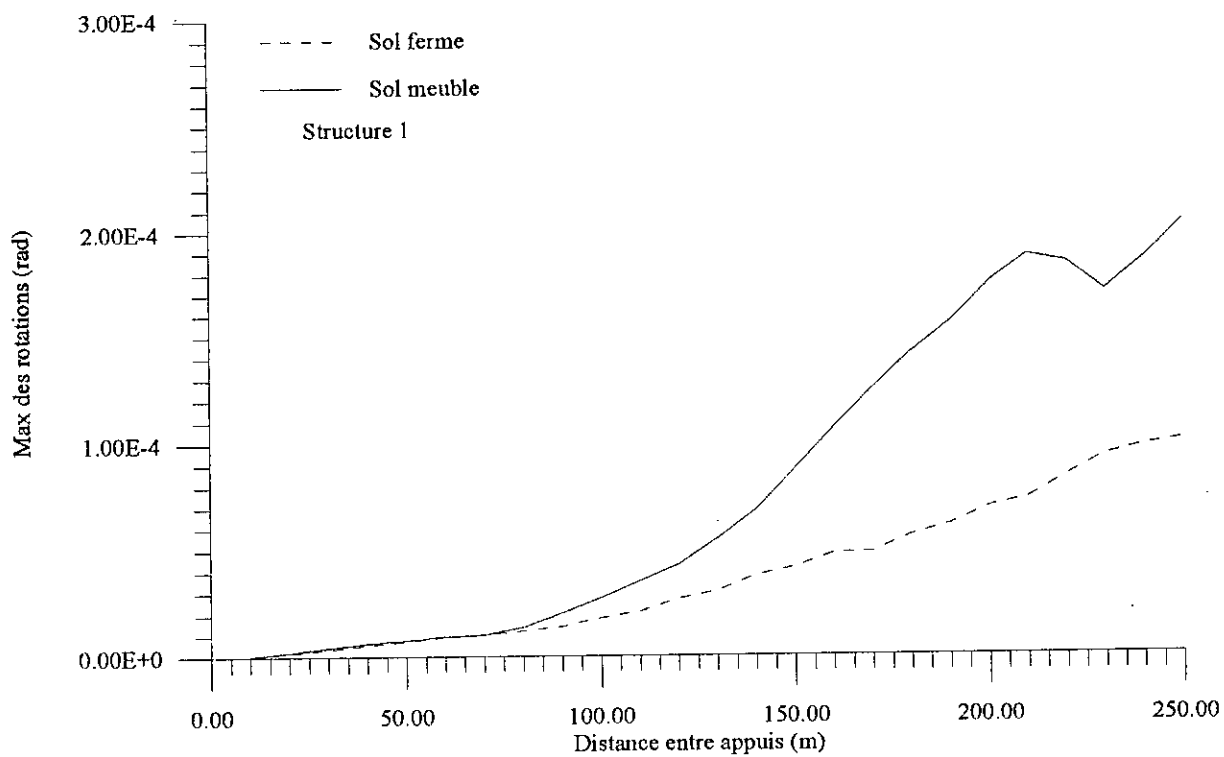
FigVI.27 Déplacements verticaux max dans la structure 2



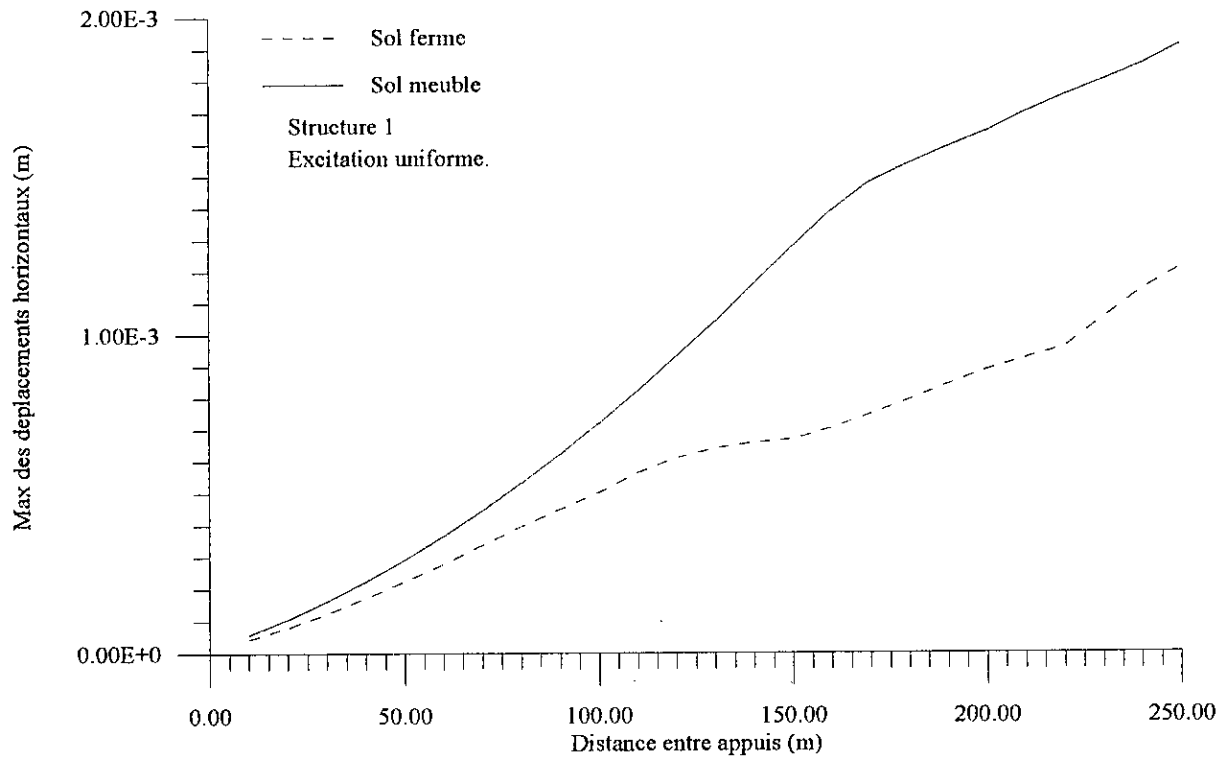
FigVI.28 Comparaison des déplacements verticaux max sous chargement multiple non déterministe



FigVI.29 Comparaison des déplacements horizontaux max sous chargement multiple non déterministe



FigVI.30 Comparaison des rotations max sous chargement multiple non déterministe



FigVI.31 Comparaison des déplacements horizontaux max sous chargement uniforme.



Conclusion générale  
et  
recommandations pour  
travaux futurs

Les méthodes d'analyse et de dimensionnement des structures sous chargement sismique sont en général limitées au cas de l'excitation uniforme des points de liaison de la structure avec le milieu extérieur. Dans le cas des structures étendues, comme les barrages ou les ponts, le calcul en excitation uniforme devient très imprécis. Une prise en compte de caractère multiple de l'excitation présente un intérêt certain. Cette variabilité est le résultat de phénomènes complexes. Plusieurs phénomènes ont été identifiés jusque là, il est possible de les regrouper dans les quatre points suivants: Effets d'incohérence, effets de passage d'ondes, effets d'atténuation et effets de site.

La formulation des équations de mouvement d'une structure soumise à des excitations multi-appuis est différente de la formulation classique traitant de l'excitation uniforme. Le mouvement différentiel des appuis induit des contraintes pseudostatiques dans la structure devant être prise en compte.

Un programme en éléments finis a été élaboré pour calculer les réponses des structures soumises à des excitations multi-appuis. Il a été démontré que les réponses dans le cas où l'excitation est uniforme, sont surestimées par rapport au cas où elles sont multiples. Cette surestimation est beaucoup plus significative lorsque les excitations sont non déterministes que lorsqu'elles sont uniquement décalées dans le temps (déterministe).

Les réponses des structures reposant sur un sol meuble sont plus importantes que lorsque le sol est ferme. Cela est dû au caractère flexible du sol meuble par rapport au sol ferme, favorisant ainsi l'amplification des amplitudes du mouvement.

Le programme développé s'applique aussi aux tuyauteries, sujettes à des excitations d'appuis multiples en différents points d'ancrage. En effet, du fait même de leur fonction, ces tuyauteries sont ancrées en différents points d'un ou plusieurs bâtiments, recevant ainsi comme excitations la réponse des points considérés.

Une étude paramétrique faisant intervenir différents paramètres d'influence dans le problème de l'excitation multi-appuis a été faite. La génération numérique de séismes artificiels en un et deux points distant de  $D$  s'impose afin de mener à bien cette étude. Des conclusions ont été énoncées à propos de la distance au delà de laquelle le calcul en excitation uniforme donne des résultats différents de ceux obtenus en excitation multiples.

Le programme développé peut faire l'objet d'un certain nombre d'extensions à savoir:

- L'extension à d'autres éléments finis, notamment les éléments plaques pour représenter les tabliers de ponts.
- La prise en considération d'autres composantes du mouvement sismique.
- L'extension du sous programme de génération de séismes à plus de deux stations pour analyser au mieux des structures à plusieurs travées.
- L'analyse de l'influence des corrélations entre mouvements des supports sur la réponse des structures.
- L'extension de l'étude aux structures ayant un comportement non linéaire.

Références

Bibliographiques

- [1] **N. Abrahamson**, 'Spatial Variation of Earthquake Ground Motion for Application to Reel Structure Interaction', Recherch Project 2978-1, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California. 1992.
- [2] **N. Abrahamson and B.A.Bolt**, 'The Spatial variation of the phasing of seismic Strong motion'. Bulletin of the Seismological Society of America, vol.75,N°5, 1247-1264, 1985.
- [3] **G. Anglaret et J.L. Beguin**, 'Calcul au séisme de tuyauteries Génie Parasismique' 869-881, Press de l'ENPC Paris 1985.
- [4] **H. Afra**, 'Analyse sismique des structures avec excitations d'appuis multiples', 5<sup>ème</sup> Séminaire Maghrébin du Génie Parasismique, vol2, 261-268 1993.
- [5] **K.J. Bathe**, Finite element procedures in engineering analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1982.
- [6] **M.k Berrah and E. Kausel**, 'Spectrum Analysis of a beam under non uniform Seismic Motion', Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.22, 791-800,1993.
- [7] **M.k Berrah and E. Kausel**, 'Response Spectrum Analysis of Structures Subjected to Spacially Varying Motions', Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.21,461-470, 1992.
- [8] **M.k Berrah**, Modified response structures model for the design of structures subjected to spatially varing seismic excitations, PHD Thesis, MIT, Departement of Civil Engineering, Cambridge, Massachusettes.
- [9] **L.Borsoi et P. Sollogoub**, 'Analyse sismique du circuit primaire des centrales nucléaires à eau pressurisée', Génie Parasismique, 883-896, Presse de l'ENPC, Paris 1985
- [10] **K. Boussaid et F. Abderrahmane**, 'Calcul des structures planes soumises à des excitations d'appuis multiples par la méthode des éléments finis', mémoire de fin d'études, ENTP Juin 1995.
- [11] **C. Cherfa**, 'Intercorrélation modale dans le cas déexcitations sismiques non uniformes', Thèse de Magister, ENP Alger, 1995.
- [12] **R.w Clough and J. Penzien**, Dynamics of structures, Mc Graw-Hill, NewYork 1975
- [13] **A. Der Kiurighian**, 'A coherency model for spacially varing ground motions',Earthquake Eng. and Struc. dyn., vol 25, 99-111, 1996.
- [14] **A.Der Kiureghian and A. Neuenhofer**, 'Response Spectrum Method for multiple support seismic excitation', Earthquake Eng. and Struct. Dyn., Vol.21, 713-740, 1992.
- [15] **W.M Ewing, W.S. Jardetzky and F.Press**, Elastic waves in layered media, Mc Graw-Hill, New York 1957.

- [16] **J.M .Gere and W.Weaver**, Analysis of framed structures, Van Nostrand Reuihold Companeey, 1965.
- [17] **R.s Harichandran and E.Vanmark**, 'Stochastic Variation of Earthquake Motion in Space and Time', J.Eng. Mech. Div. Asce, Vol.112, 154-174, 1986.
- [18] **R.S Harichandran and W.Wang**, ' Response of indeterminate tour-span beam to spatially varying seismic excitation', Earthquake Eng. and Struc. dyn., vol 19, 173-187, 1990.
- [19] **J.F. Imbert**, Analyse des structures par éléments finis, Cepadues éditions, 1979.
- [20] **T.Harada**, 'Probabilistic modeling of sptial variation of strong earthquake ground displacements', Proceeding of the 8th wold conference on earthgrate Engineering, vol2, 605-612 San Francis 1984.
- [21] **M. Kahan, R.j Gibert, P.Y. Bard**, 1996, ' Influence Of Seismic Waves Spatial Variabily On Bridges a sensitivily analysis ', EESD, Vol.25,pp.795-814.
- [22] **M. Kerguignas et G.Caigmant**, Resistance des matériaux, Dunod, Paris 1977.
- [23] **C.H Loh and Y T.Yeh**, 'Spatial variation and stochastic modeling of seismic differential ground motions', Earthquake Eng. and Struc. dyn., vol 16, 1583-596, 1988.
- [24] **J. Magandean et P.Sollogoub**, 'Calcul des structures soumises à des excitations multiples', Génie Parasismique, Presse de l'ENPC, 857-868,,Paris 1985.
- [25] **R.Martinet et B.Petrou**, 'Tuyauteries: Calcul de la resistance des éléments' Techniques de l'ingénieur,1980
- [26] **N. Mezouer, H. Afra et K. Silhadi**, 'Analyse sismique par la méthode des éléments finis des structures soumises à des excitations d'appuis multiples', Premier colloque national de Génie Parasismique, Alger les 04, 05 et 06 juin 1996.
- [27] **V. Milovanovitch et P.Thomas**, 'une méthode de calcul de la réponse sismique des structures étendues', Journées d'études AFPS-AFPC, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 17-18 jan1991.
- [28] **M.Paz**, Structural dynamics, Van Nostrand Reinhold Company, 1985.
- [29] **A. Pecker**, Dynamique des sols, Presses de l'ENPC, Paris 1984.
- [30] **F. Perrotti**, 'Structural response to non stationary multiple-support random excitation', Earthquake Eng. and Struct. dyn. Vol 19, 513-527, 1990
- [31] **P. Pouyet**, 'Méthodes d'analyse numérique des problèmes dynamiques', Génie Parasismique, Presse de l'ENPC, 397-404,,Paris 1985.
- [32] **Recommandations AFPS 90**, Presses de l'ENPC, 1996.

- [33] **M. Shinozuka, G. Deodatis and T. Harada**, 'Digital Simulation of Seismic Ground Motion'. Technical Report, NCEER-87-0017, 1987.
- [34] **P. Sollogoub**, 'Calcul d'une structure soumise à des excitations différentes à ses supports', Journées d'études AFPS-AFPC, Saint-Rémy-Lès-Chevreuse, 17-18 Jan 1991
- [35] **S. Timoshenko**, Resistance des matériaux, Tomes 1 et 2, Dunod, Paris 1968.
- [36] **R. Tinawé**, Introduction aux éléments finis, Presses de l'Ecole Polytechnique de Montreal, 1981.
- [37] **J.P. Wolf**, Soil-structure interaction analysis in time domain, Prentice-hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1988.
- [38] **N. Yamamura and H. Tanaka**, 'Response Analysis of Flexible MDF Systems for Multiple-Support Seismic Excitation', Earthquake Eng. Struct. Dyn. Vol 19, 345-357, 1990.
- [39] **D. Zendagui**, 'Contribution à l'étude la déconvolution stochastique des ondes sismiques', Thèse de Magister, ENP Alger, 1996.
- [40] **A. Zerva**, ' Response of multi-span beams to spatially incoherent seismic ground motions, Earthquake Eng. and strc. dyn., vol 19, 819-832, 1990.
- [41] **A. Zerva, H.S Alfredo, Y.k Wen**, 'Lifeline Response Of Spatially Variable Ground Motions', Earthquake Eng. and strct. dyn, Vol. 16, 361-379, 1988.
- [42] **O.C Zienkiewicz**, La Méthode des éléments finis, MC Graw-Hill Maidenhad, England 1977.