

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DIRECTION DES ETUDES ET DE LA RECHERCHE DE GENIE ELECTRIQUE ET
INFORMATIQUE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



THESE DE MAGISTER

EN ELECTRONIQUE

Option : Acquisition et Traitement de l'Information

Intitulée :

ANALYSE ET SYNTHESE DE COMMANDES ROBUSTES: H_{∞} ET H_2

Présentée par : Melle RACHEDI Meryam
Ingénieur d'Etat en Electronique

Devant le Jury composé de MM. :

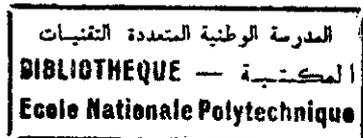
Président :	F. BOUDJEMA	Maître de conférence	ENP
Rapporteur :	A. ZERGUERRAS	Professeur	ENP
Rapporteur :	M.C. SOUAMI	PhD	ENP
Examineurs:	N.LOUAM	Maître de conférence	ENP
	C.LARBES	PhD	ENP
	M.S. AIT CHEIKH	Chargé de cours	ENP

Le 14 Décembre 1997

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A mes très chers parents

REMERCIEMENTS



Le travail présenté dans ce mémoire a été mené au Laboratoire d'Automatique du Département d'Electronique de l'Ecole Nationale Polytechnique. Il a été dirigé par Messieurs A. Zerguerras, Professeur et M.C. Souami, PhD à qui je témoigne toute ma gratitude pour leurs aide et conseils.

Mes remerciement s'adressent également à :

Mr Boudjema pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le Jury,
Messieurs Louam, Ait Cheikh, Larbes pour avoir eu l'amabilité d'examiner mon travail.

Mes profonds remerciements vont à mes chers parents qui n'ont pas cessé de m'encourager tout au long de ce travail.

Enfin, Je remercie les collègues de l'Institut Supérieur de Formation Ferroviaire, notamment Melle N. Baragh, et toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

ملخص:

إن الهدف الذي ترمي إليه هذه الأطروحة هو دراسة مسائل الإستقرار القوي، الأداء، و الحلول الوسطية للأنظمة الخطية الثابتة في الزمن و المعرضة لإرتيابات غير مهيكلة.

فتقدم في مرحلة أولى تحليلا لمسائل الإستقرار، تقليل الحساسية، تشكيل الحلقة و كذلك حل مشكل التحكم المثالي النمطي " H_{∞} ". ثم يتم تصميم تحكم قوي تحت المثالي " H_{∞} ". وتقارن النتائج المحصل عليها بنتائج التحكم الكلاسيكي المثالي الخطي الرباعي الغوسي "LQG" (أو نظرية H_2). و في الختام تطور تطبيقات "SISO" و "MIMO".

Summary:

The aim of this work is to study the problems of robustness stability, performance, and theirs associated compromises for linear time invariant systems with unstructured uncertainties.

Firstly, the analysis of internal stability, sensitivity minimization, loop shaping and the resolution of the standard H_{∞} optimal control problems is presented. Then The robust suboptimal H_{∞} controller will be designed, the results obtained are compared to those of the classical optimal Linear Quadratic Gaussian control LQG (or H_2 theory). Finally, SISO and MIMO applications are developed.

Résumé:

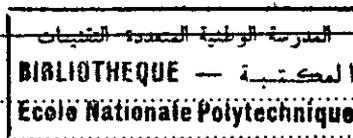
Le but de cette thèse est l'étude des problèmes de stabilité robuste, des performances, et de leurs compromis pour les systèmes linéaires invariants dans le temps soumis à des incertitudes non structurées.

Dans un premier temps, l'analyse des problèmes de stabilité interne, de minimisation de sensibilité, de conformation de boucle et aussi de résolution du problème d'optimisation H_{∞} standard sera présentée. Puis un contrôleur robuste sous - optimal H_{∞} sera synthétisé, les résultats obtenus sont comparés à ceux de la commande classique optimale Linéaire Quadratique Gaussienne LQG (ou la théorie H_2). A la fin, des applications SISO et MIMO seront développées.

SOMMAIRE

 المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
 المكتبة — BIBLIOTHEQUE
 Ecole Nationale Polytechnique

Notations et symboles.....	4
Chapitre I : Introduction	
I.1) Etat de l'art.....	5
I.2) Présentation du travail.....	11
I.3) Organisation de la thèse.....	12
 Chapitre II : Concepts mathématiques de la norme H^∞	
II.1) Introduction.....	13
II.2) L'espace des fonctions.....	13
II.2.1) L'espace de Banach et l'espace de Hilbert.....	13
II.2.2) Espaces dans le domaine temporel.....	14
II.2.3) Espace dans le domaine fréquentiel.....	14
II.3) Propriétés.....	16
II.4) Le modèle standard.....	16
 Chapitre III : Eléments d'analyse de la robustesse et des performances des systèmes linéaires invariants dans le temps	
III.1) Introduction.....	18
III.2) Loop shaping.....	18
III.2.1) Stabilité en boucle fermée.....	18
III.2.2) Stabilité robuste.....	18
III.2.3) Atténuation des perturbations et bande passante.....	24
III.2.4) Capacité du procédé, la fonction de sensibilité d'entrée.....	25
III.2.5) Bruit de mesure.....	26
III.2.6) La fonction de transfert en boucle fermée.....	26
III.2.7) Robustesse des performances.....	27
III.3) Les limites de performances.....	27
III.4) Conclusion.....	29
 Chapitre IV : Robustesse et performance des systèmes linéaires invariants dans le temps/ Problème H^∞ standard	
IV.1) Introduction.....	30
IV.2) Le principal modèle de perturbation.....	30
IV.2.1) Les différentes présentations des incertitudes d'un système bouclé.....	31
IV.3) Etude de la stabilité robuste.....	31
IV.3.1) Stabilité Interne.....	31
IV.3.2) La stabilité robuste du principal modèle de perturbation.....	32
IV.3.3) La stabilité robuste des systèmes à contre réaction.....	34
IV.3.4) Conclusion.....	39
IV.4) Compromis Robustesse / Performance.....	40
IV.4.1) Robustesse vis à vis des dynamiques négligées.....	40



IV.4.2) Performance.....	42
IV.4.3) Bilan des conditions obtenues et " Loop Shaping ".....	44
IV.4.4) Cas des systèmes multivariables.....	46
IV.4.5) Le Problème H_{∞} standard.....	48
IV.5) Conclusion.....	49

Chapitre V : Résolution du problème standard : Commande LQG et commande H_{∞}

V.1) Introduction.....	50
V.2) La commande LQG.....	50
V.2.1) Le contrôleur optimal LQ.....	50
V.2.2) Le filtre optimal de Kalman.....	51
V.2.3) Synthèse du contrôleur LQG.....	52
V.3) L'algorithme de Glover - Doyle simplifié.....	53
V.4) Conclusion.....	58

Chapitre VI : Applications

VI.1) Introduction.....	59
VI.2) Implémentation pratique.....	59
VI.3) Systèmes SISO.....	62
VI.3.1) Double intégrateur.....	62
VI.3.2) Contrôle d'un navire.....	82
VI.4) Système MIMO.....	97
VI.5) Discussions.....	108

Chapitre VII : Recherches en cours et prospectives / Conclusion générale

VII.1) Recherches en cours et prospectives.....	109
VII.2) Conclusion générale.....	110

ANNEXES:

Annexe A.....	113
Annexe B.....	115
Annexe C.....	119
Annexe D.....	121

Bibliographie.....	125
---------------------------	------------

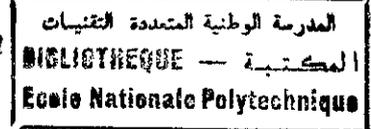
NOTATION ET SYMBOLES

\mathbf{R}	ensemble des nombres réels
\mathbf{C}	ensemble des nombres complexes
A^T	transposé de la matrice A
A^*	conjugué
A^{-1}	inverse de A
$ \alpha $	valeur absolue de α
$\text{Re}(\alpha)$	partie réelle de $\alpha \in \mathbf{C}$
$\det(A)$	déterminant de A
$\lambda(A)$	valeur propre de A
$\rho(A)$	rayon spectral de A
$\underline{\sigma}(A)$	vecteur des valeurs singulières de A
$\sigma(A)$	la plus grande valeur singulière de A
$\underline{\sigma}(A)$	la plus petite valeur singulière de A
$\sigma_i(A)$	la $i^{\text{ème}}$ valeur singulière de A
$L_2(-\infty, \infty)$	espace de Lebesgue dans le domaine temporel
$L_2(-\infty, 0)$	sous espace de $L_2(-\infty, \infty)$
$L_2(0, +\infty)$	sous espace de $L_2(-\infty, \infty)$
L_2	espace de Lebesgue dans le domaine fréquentiel
RL_2	sous espace de L_2 des fonctions réelles rationnelles
H_2	espace de Hardy: sous espace de L_2 des fonctions analytiques dans $\text{Re}(s) > 0$
RH_2	espace des vecteurs d'ordre n , réels, rationnels stables et strictement propres: (une fonction de transfert $H(s)$ est propre si $H(\infty)$ est finie).
H_2^\perp	complément orthogonal de H_2 dans L_2
RH_2^\perp	espace des vecteur à valeurs strictement propres, il n'ont pas de pôles sur l'axe imaginaire
L_∞	espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées
RL_∞	espace des matrices à valeurs propres, elles n'ont pas de pôles sur l'axe imaginaire
H_∞	espace de Hardy des fonctions analytiques dans $\text{Re}(s) > 0$
RH_∞	matrices à valeurs propres, stables
$\ A\ $	norme spectrale de A : $\ A\ = \sigma(A)$
$\ A\ _2$	norme H_2 de A
$\ A\ _\infty$	norme H_∞ de A
LIT	linéaire invariant dans le temps
SISO	système à une seule entrée et une seule sortie
MIMO	système à entrée et sortie multiples
BIBO	entrée bornée, sortie bornée
S	fonction de sensibilité
T	fonction de sensibilité complémentaire
M	fonction de sensibilité d'entrée
ARE	équation de Riccati algébrique
sup	valeur supérieure

Chapitre I :

INTRODUCTION

Chapitre I : Introduction



I.1) Etat de l'art:

Dans la plupart des problèmes de commande, l'objectif central est d'atteindre et de maintenir la stabilité et certaines performances malgré les perturbations ou incertitudes souvent pénalisantes du système à commander. Une commande est dite robuste quant elle présente de bonnes marges de stabilité, c'est à dire une faible sensibilité à des incertitudes, ou à des variations du processus par rapport à son modèle nominal.

Dans un contexte théorique plus strict, on ne saurait parler de robustesse sans avoir défini d'une part un critère d'évaluation des propriétés dont on souhaite la robustesse (parmi lesquelles, au premier rang, la stabilité) et d'autre part la classe des incertitudes ou variations possibles. La théorie de la robustesse est donc quantitative et déductive [Lar] à partir de données quantifiées sur les domaines d'incertitudes et les performances souhaitées, on doit pouvoir effectuer la synthèse de lois de commande satisfaisant les spécifications annoncées.

L'approche classique qui était utilisée vers les années 1960 était la théorie linéaire quadratique gaussienne LQG [Fri][Ber]. Dans cette approche les incertitudes étaient des perturbations additives modélisées comme des bruits blancs gaussiens possédant des covariances fixes.

Le contrôleur LQG garantissait la stabilité en boucle fermée et des performances satisfaisantes en présence de ces perturbations. Le problème majeur de cette approche est le manque de traitement des incertitudes dans le procédé lui même. En admettant que les bruits additives, la théorie stochastique ignore cette importante issue pratique: Les incertitudes dans le procédé lui même sont particulièrement critiques dans les problèmes de commande. C'est dans ce contexte que se situe la commande robuste H_∞ .

H_∞ est un membre de la famille des espaces H_p introduits par le mathématicien Hardy. C'est l'espace des fonctions analytiques et bornées dans le demi plan complexe droit. L'espace joue un rôle très important dans la résolution mathématique du problème de commande H_∞ .

Dans un système de commande, la norme H_∞ se présente comme un moyen très approprié pour évaluer aussi bien le niveau des incertitudes que le gain des entrées de perturbations vers les erreurs de sortie. Elle est donc appliquée principalement quant il s'agit de signaux de perturbations et des incertitudes propres au système lui même.

Cette théorie a été introduite pour la première fois par Zames en 1981 [Zam2]. Il a considéré le problème de minimisation de la norme H_∞ de la fonction de sensibilité d'un système SISO. Il a montré aussi que les incertitudes du procédé réduisent la capacité de la contre réaction pour réduire la sensibilité. Ce travail a été développé par la suite par Francis et Zames en 1984 dans [Fra3] et [Fra4]. Ils ont montré que cette théorie permet de traiter le problème de robustesse d'une manière plus directe que les autres méthodes d'optimisation. Elle a été étendue alors à d'autres problèmes de commande.

1-Le problème de commande optimale H_∞ "standard"

Ce problème est concerné par le bloc de diagramme suivant:

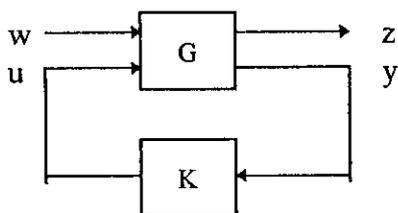


Fig. 1.1 : **Modèle standard**

où "w" représente les perturbations externes, "y" est la mesure accessible pour le contrôleur, "u" est la sortie du contrôleur, et "z" est le signal d'erreur qu'on souhaiterait garder petit. La matrice des fonctions de transfert G ne représente pas seulement le procédé conventionnel mais aussi les fonctions poids, incluses pour spécifier les performances souhaitées.

Le problème de commande optimale H_∞ est donc: la synthèse d'un contrôleur stabilisant K, minimisant le gain de transfert en boucle fermée de "w" vers "z", T_{zw} (ou $F_b(G,K)$), dans la norme H_∞ , où

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_w \overline{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) \tag{1.1}$$

Le contrôleur H_∞ minimise donc le maximum du gain d'énergie ($\|T_{zw}\|_\infty$), alors que le contrôleur LQG (H_2) minimise la valeur moyenne du gain ($\|T_{zw}\|_2$), à travers toutes les fréquences ω .

$$\|T_{zw}\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega))d\omega \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

La propriété importante de la norme H_∞ vient de l'application du théorème des petits gains, qui fait que lorsque $\|T_{zw}\|_\infty \leq 1$, le système avec le bloc de diagramme de la figure (1.2):

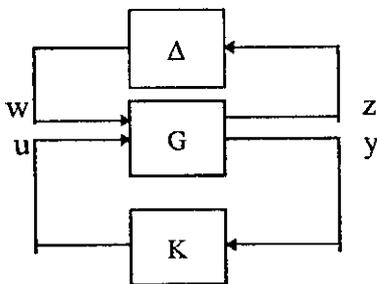


Fig. 1.2 : **Modèle standard avec perturbation Δ**

reste stable pour toute incertitude Δ stable, respectant la condition de norme suivante:

$$\|\Delta\|_\infty < 1.$$

Ces types d'incertitudes sont appelées "**incertitudes non structurées**", elles sont dues aux dynamiques négligées.

Ce résultat de stabilité robuste est la principale motivation du développement des différentes méthodes H_∞ .

2-Résolution du problème de commande optimale H_∞

La synthèse des contrôleurs réalisant les spécifications de la norme H_∞ est un problème mathématique bien défini, il a été objet de plusieurs travaux de recherches. Initialement les recherches ont été effectuées dans le domaine fréquentiel, utilisant les fonctions analytiques et les méthodes de la théorie des opérateurs. Malheureusement les approches fréquentielles standards pour H_∞ , dans le cas des systèmes MIMO, ont rencontré des obstacles mathématiques et computationnels plus significatifs que pour la théorie LQG (H_2).

A partir des années 1984, plusieurs travaux et méthodes sur la théorie de commande optimale H_∞ sont apparus, utilisant une mixture des techniques fréquentielles et temporelles, les plus importantes de ces méthodes sont:

- La Théorie "Modèle Matching" [Fra1], [Fra2]

J.C. Doyle a présenté en 1984, la première solution au problème de commande optimale H_∞ , général, MIMO. Il a montré que ce problème peut être transformé en un problème "Modèle Matching", qui cherche la matrice de fonctions de transfert $Q(s)$, minimisant la norme H_∞ d'une fonction $E(s)$ donnée par Francis et Doyle en 1987 dans [Fra1] et [Fra2]:

$$E(s) = T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s) \quad (1.3).$$

où T_1 , T_2 et T_3 sont des matrices de transfert stables données. Le contrôleur K à synthétiser est fonction de la matrice stable Q .

Pour résoudre ce problème, la procédure utilise l'espace d'état, les factorisations Inner/Outer et Copremière des matrices de transfert, puis elle est réduite en un problème de norme Nehari/Hankel solvable par les méthodes d'espace d'état. L'ordre très élevé des équations de Riccati à résoudre a conduit à de grandes difficultés computationnelles.

- La théorie de l'interpolation [Hun]

Pour résoudre le problème précédent, Hung dans [Hun] a suggéré de réduire le problème "Modèle Matching" en un problème d'interpolation. Mais cette approche ne peut traiter qu'un cas simplifié du "Modèle Matching", où T_2 et T_3 sont des matrices carrées.

- La théorie polynomiale [Tsy],[Kwa3]

Cette méthode commence par un polynôme de la factorisation co-première droite ou gauche de la matrice de transfert du système. Puis elle montre que le contrôleur qui minimise la norme H_∞ du système en boucle fermée est une solution d'égalisation d'un certain problème de minimisation. Pour obtenir un contrôleur stabilisant intérieurement la boucle fermée et minimisant sa norme H_∞ , des conditions sont données dans les termes d'équations de diophantine. Les recherches dans ce domaine essaient d'établir la relation existante entre ces équations de diophantine et les conditions trouvées dans d'autres méthodes.

- La théorie de factorisation J - spectrale [Gre1][Gre2]

Cette méthode est fortement basée sur l'approche du domaine fréquentiel, les conditions d'existence d'un contrôleur stabilisant intérieurement le système en boucle fermée et qui rendent sa norme H_∞ inférieure à une certaine borne donnée a priori, sont données dans les termes de matrices rationnelles, qui doivent avoir ce qui est appelé une factorisation J-spectrale. L'existence d'une telle fonction est vérifiée via la résolution d'une certaine équation de Riccati.

- L'approche du domaine temporel

La difficulté de la méthodologie du domaine fréquentiel, qui permet l'utilisation des fonctions complexes et les résultats de la théorie des opérateurs, a conduit les investigateurs dans le domaine de la commande optimale H_∞ , à s'intéresser au domaine temporel et à l'utilisation des résultats de la théorie de commande optimale classique. L'avantage de cette approche, est qu'elle permet des techniques de synthèses simples.

Cette approche considère la représentation d'état du système G du modèle standard de la figure(1.1) suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \tag{1.4}$$

Une solution simplifiée au problème de commande H_∞ dans l'espace d'état a été présentée dans un premier temps par Khargonekar, Petersen, Rotea, et Zhou [1987,1988]. Dans [Zho1], Zhou et Khargonekar considèrent le cas de l'information complète du problème standard, c'est à dire que les états du système sont accessibles pour la contre réaction ($C_2=I$, $D_{21}=0$ et $D_{22}=0$). Le problème revient à la résolution d'une seule équation de Riccati.

La résolution du problème H_∞ standard général a progressé d'une manière très importante en 1988 avec l'algorithme de Glover-Doyle [Glo1] qui donne une solution très proche de celle de la commande LQG. Cet algorithme permet de résoudre le problème sous - optimal H_∞ standard, qui cherche le contrôleur K stabilisant le transfert en boucle fermée T_{zw} et tel que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, pour toutes perturbations $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$. γ étant un paramètre supérieur à γ optimal. On aboutit à la fin à une classe de contrôleurs paramétrisés par une fonction de transfert Q ($\|Q\|_\infty < \gamma$). Pour $Q=0$, on obtient le "contrôleur central". Ce dernier n'est pas nécessairement le plus important parmi l'ensemble des contrôleurs définis par la paramétrisation. Pour γ tendant vers l'infini, le contrôleur H_∞ converge vers le contrôleur LQG.

Dans [Glo2], Glover, Limebeer, Doyle, Kasenelly et Safonov donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un contrôleur optimal H_∞ .

Tadmort dans [Tad], identifie le contrôleur d'ordre minimal.

3-Le problème de commande H_∞ à minimum d'entropie

La non unicité de la solution du problème sous - optimal H_∞ standard est évitée par Glover et Mustafa dans [Mus1],[Mus2]et [Mus3], en spécifiant que l'entropie de la fonction de transfert en boucle fermée T_{zw} doit être minimisée.

L'intérêt de la minimisation de la fonction d'entropie, est lié au fait qu'elle soit une borne supérieure de la norme H_2 [Sto3]. Donc sa minimisation vise à optimiser les performances via la norme H_2 . Ce problème est appelé par certains auteurs: Problème de sensibilité mixte LQG/ H_∞ ou H_2/H_∞ .

La fonction d'entropie de la fonction de transfert en boucle fermée du modèle standard de la figure (1.1) est définie au point $s_o \in \mathbb{C}$ comme suit:

$$I(T_{zw}, \gamma, s_o) = \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\det(I - \gamma^2 T_{zw}^*(j\omega) T_{zw}(j\omega))| \times \left[\frac{\text{Re } s_o}{|s_o - j\omega|} \right]^2 d\omega \tag{1.5}$$

Le problème de commande H_∞ à minimum d'entropie est donc: Chercher d'abord tous les contrôleurs K stabilisants G et satisfaisants $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, puis le contrôleur K minimisant l'entropie en boucle fermée $I(T_{zw}, \gamma, s_0)$ au point $s_0 \in \mathbb{C}$.

4-L'approche "μ - analyse" et "μ - synthèse"[Bou],[Lin],[Bal]

Elle permet de traiter le problème de **stabilité robuste** et de **performances robustes** des systèmes soumis à de multiples sources d'incertitudes, appelées "**incertitudes structurées**". Elles affectent la connaissance de certains paramètres bien localisés (masse, inertie, centre de gravité,...etc.).

L'analyse des performances robustes, utilisant la valeur singulière structurée "μ" comme une mesure de performances, a été introduite par Doyle en 1982. A la différence de l'approche précédente qui était fondée sur le théorème des petits gains, la "μ - analyse" est fondée sur le critère de Nyquist. Doyle a proposé ensuite une procédure de synthèse de contrôleurs, appelée "μ - synthèse". Le contrôleur synthétisé doit minimiser la valeur singulière μ.

- "μ - analyse"

Considérons la configuration standard suivante :

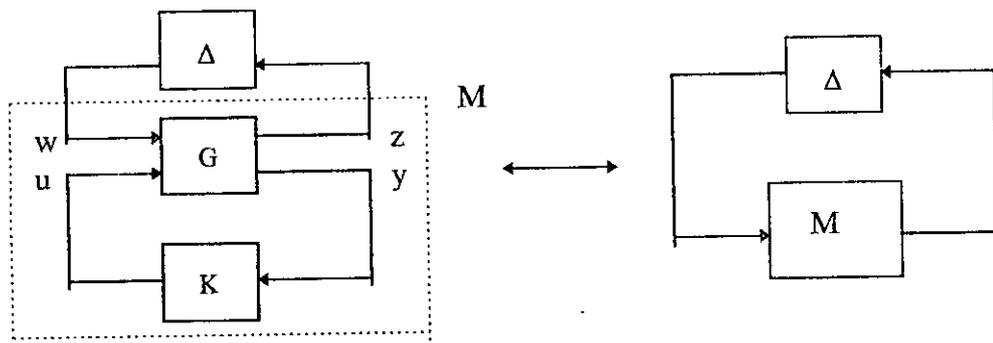


Fig. 1.3 : Transformation linéaire fractionnaire conduisant à M et μ ($M = T_{zw} = F_b(G,K)$)

Δ est une matrice de dimension $n \times n$, diagonale par bloc, elle représente les interactions entre les différents signaux de perturbations (incertitudes et performances). C'est un élément de l'ensemble :

$$\Delta = \left\{ \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f]; \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_f \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \right\} \tag{1.6}$$

où les s premiers blocs de la parenthèse sont des opérateurs scalaires de dimension r_i et où les f blocs suivants sont des opérateurs non structurés de dimension m_j , et

$$\sum_{i=1}^s r_i + \sum_{j=1}^f m_j = n \tag{1.7}$$

$\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$, donc Δ est un élément de l'ensemble borné: $B(\Delta) = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}$.

K est le contrôleur à synthétiser, et M est la matrice d'interconnexion entre G et K , donnée par la transformation fractionnaire:

$$F_b(G,K) = M = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \tag{1.8}$$

G est partitionnée selon les entrées et sorties de la figure (1.3).

La valeur singulière structurée de M associée à la structure Δ est définie par :

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min \left\{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0 \right\}} \quad (1.9).$$

La valeur de " μ " spécifie la norme de la plus petite matrice de Δ qui déstabilise le problème de synthèse en boucle fermée.

$\mu > 1$ implique que le contrôleur ne va pas réaliser les performances spécifiées, pour les incertitudes décrites plus haut et que le système contrôlé ne va pas être stable pour ces incertitudes particulières. Une valeur de $\mu \leq 1$ implique que le contrôleur va réaliser les performances spécifiées, pour les incertitudes données.

- " μ - synthèse"

Le problème de conception de performances robustes (μ - synthèse) peut être posé comme suit: Chercher le contrôleur K satisfaisant;

$$\inf_{K \text{ stabilisant}} \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \mu_{\Delta}(M) \quad (1.10).$$

Ce problème est difficile à résoudre, et aucune solution n'est accessible jusqu'à ce jour. Cependant, une solution approximée a été donnée par Doyle (1985), basée sur la borne suivante:

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (1.11).$$

où l'ensemble \mathbf{D} est défini par:

$$\mathbf{D} = \{ \text{diag}[D_1, \dots, D_s, d_1 I_{m_1}, \dots, d_r I_{m_r}] : D_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, D_i = D_i^*, d_i > 0 \} \quad (1.12).$$

L'idée est de chercher une solution à :

$$\inf_{K \text{ stabilisant}} \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (1.13).$$

La procédure approchée utilisée par Doyle pour résoudre ce problème est appelée la "D - K" itération. A l'étape n , la méthode consiste à se fixer un échantillonnage en fréquence $\{\omega_j, j=1, 2, \dots\}$, et à déterminer à chaque fréquence ω_j , une matrice D_j minimisant dans \mathbf{D} la quantité $\bar{\sigma}(D_j^{-1} (F_b(G, K_{n-1})(i\omega_j)) D_j)$, où K_{n-1} est le contrôleur qui a été calculé à l'étape $n-1$. On détermine ensuite une matrice de transfert D , stable, à inverse stable, faisant l'interpolation des D_j , c'est à dire $D(i\omega_j) = D_j$. Il reste alors à augmenter G par ce "scaling" D , puis calculer K_n en résolvant le problème standard.

La méthode de "D - K" itération ne dispose pas de garantie de convergences vers le minimum, néanmoins, elle offre une procédure systématique pour résoudre l'important problème de robustesse des performances. Concernant ce problème, plusieurs algorithmes sont disponibles sur le " μ - tools" de J.Balas [Bal].

5-Les systèmes à temps discrets :

L'application de la théorie H_{∞} au cas discret a connu moins d'intérêt que pour le cas continu. Or en pratique la plus part des applications concernent surtout les systèmes discrets. Pour cela, il suffit d'utiliser la transformation bilinéaire $z = (1+s/1-s)$ [Chi], elle relie les fonctions analytiques dans un demi plan à celles qui sont analytiques dans le disque unitaire. Sous cette transformation, la norme H_{∞} d'une fonction de transfert est invariante. Le contrôleur optimal H_{∞} est obtenu en utilisant la procédure suivante:

- 1- Transformer le procédé discret $G(z)$ en un procédé continue $\tilde{G}(s) = G((1+s)/(1-s))$.
- 2- Le contrôleur continue $\tilde{K}(s)$ est calculé puis transformé en un équivalent discret, en utilisant la transformation inverse.

Cependant, cette transformation exclue les systèmes ayant des pôles égales à 1.

Une autre approche dans l'espace d'état a été présentée dans [Igl] par Iglesias et Glover. Les résultats obtenus sont analogues à ceux du cas continue.

I.2) Présentation du travail:

Dans ce travail de thèse, nous allons étudier dans les détails les problèmes de stabilité robuste et des performances des systèmes linéaires invariants dans le temps soumis à des incertitudes non structurées.

Nous allons étudier les méthodes de représentation des incertitudes du procédé ainsi que les éléments permettant de faire l'analyse de la robustesse et des performances des systèmes LIT, à savoir la minimisation de la fonction de sensibilité S et de la fonction de sensibilité complémentaire T . Un choix convenable des fonctions poids correspondants à ces fonctions de sensibilité nous permet de réaliser ce qu'on appelle la notion de conformation de boucle "**Loop shaping**".

Nous allons expliquer le problème de stabilité interne et le théorème des petits gains sur lesquels est basée la théorie H_∞ . Sur la base de ce théorème l'approche H_∞ pourra traiter même le cas des systèmes non linéaires.

Dans cette étude une commande est robuste si elle réalise un bon compromis Robustesse/Performance. C'est pour cette raison là que tous les problèmes de robustesse et des performances vont être ramenés en un seul, celui de l'optimisation H_∞ standard.

Afin de souligner la similitude entre les deux commandes LQG et H_∞ nous allons donner un aperçu sur la commande classique LQG. En effet cette dernière avec quelques arrangements [Annexe C] peut être utilisée pour résoudre le modèle standard simplifié. Elle est aussi appelée: Commande H_2 par certains auteurs.

Pour résoudre le problème standard et synthétiser les contrôleurs H_∞ et H_2 , nous allons travailler dans le domaine temporel pour les raisons citées précédemment. Le programme "H-infini" que nous allons concevoir traite le cas le plus général du modèle standard (Annexe B). Il se base sur le principe de " **γ -itération**", pour déterminer le γ optimal au dessous duquel il n'existe pas de solution au problème "H ∞ standard". Nous développerons aussi un programme que nous appellerons "H2" pour synthétiser le contrôleur H_2 (LQG).

Les applications que nous allons choisir vont nous permettre d'illustrer toutes les notions difficiles de la théorie H_∞ . Elles sont composées de deux systèmes SISO soumis à des perturbations fractionnelles, et un système MIMO instable souvent utilisé dans la littérature (Avion de guerre) [Saf].

A titre comparatif, nous appliquerons à ces exemples la commande H_2 (LQG). Les objectifs que nous voulons atteindre par cette étude comparative, sont résumés dans les points suivants:

- 1- Etant donnée que la commande H_∞ vise à minimiser, à travers toutes les fréquences ω , la valeur maximale du transfert en boucle fermée des entrées de perturbations vers les sorties d'erreurs alors que la commande H_2 minimise la valeur moyenne de ce transfert, les pics des fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire de la commande H_∞ , devraient être moins importants que ceux de la théorie H_2 . En effet, ces pics peuvent être néfastes à la conception des systèmes de commande [Kwa1].
- 2- En présence des incertitudes non structurées, la commande H_∞ devrait être plus robuste que la commande H_2 . Car cette dernière ne considère que les bruits additives et ignore les incertitudes dans le système lui même.
- 3- La théorie H_∞ devrait mieux répondre aux spécification de robustesse et de performances que la théorie H_2 .

I.3) Organisation de la thèse:

Ce mémoire est organisé de la façon suivante:

- Le chapitre II présente les concepts mathématiques de base de la norme H_∞ , et définit la notion de modèle standard.
- Le chapitre III définit la stabilité robuste selon le critère de Nyquist et présente les problèmes de minimisation de sensibilité et sensibilité complémentaire.
- Le chapitre IV introduit les principes de base de la théorie H_∞ , et leur applications à des systèmes sous différents modèles d'incertitudes. La configuration standard qui réalise le meilleur compromis Robustesse/Performance en est déduite.
- Le chapitre V expose le contrôleur LQG et l'algorithme d'optimisation H_∞ simplifié.
- Le chapitre VI présente l'implémentation pratique des algorithmes d'optimisation H_∞ et H_2 , les différentes applications et les résultats obtenus.
- Le Chapitre VII présente une prospective des travaux de recherches en cours et une conclusion générale pour terminer.

Chapitre II :

***CONCEPTS MATHÉMATIQUES
DE LA NORME H^∞***

Chapitre II : *Concepts mathématiques de la norme H_∞*

II.1) Introduction:

Le but de ce chapitre est de présenter quelques concepts élémentaires de l'analyse fonctionnelle, de situer l'espace H_∞ dans l'espace des fonctions, puis de voir quelques propriétés de la norme H_∞ .

Nous exposerons à la fin du chapitre, le problème d'optimisation H_∞ standard. Tous les problèmes de robustesse et de performance des systèmes de commande peuvent être ramenés à ce problème d'optimisation; Sa résolution sera donnée ultérieurement.

II.2) L'espace des fonctions:[Fra 1].

II.2.1) L'espace de Banach et L'espace de Hilbert:

Définition 1: Norme d'un espace

Soit X un espace linéaire défini sur l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes. Une norme sur X est une fonction définie de:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbf{R} \quad (\mathbf{R} \text{ étant l'ensemble des réels}). \\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned}$$

possédant les 4 propriétés suivantes:

- (i) $\|x\| \geq 0$.
- (ii) $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$.
- (iii) $\|cx\| = |c| \|x\|$ $c \in \mathbf{C}$.
- (iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Propriétés d'un espace:

- Une séquence $\{x_k\}$ de X converge vers $x \in X$, si la séquence des nombres réels $\{\|x_k - x\|\}$ converge vers 0; On dit alors que la séquence est convergente.
- Une séquence $\{x_k\}$ est une séquence de Cauchy si
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \text{ un entier } n) i, k > n \Rightarrow \|x_i - x_k\| < \varepsilon$.
- Si chaque séquence de Cauchy est convergente, alors X est complet.

Définition 2: Espace de Banach

Un espace de Banach est un espace linéaire sur \mathbf{C} , complet et possédant une norme.

Définition 3 : Produit Intérieur

Soit X un espace linéaire sur \mathbf{C} . Un produit intérieur sur X est une fonction définie de :

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow \mathbf{C} . \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Ayant les quatre propriétés suivantes:

- (i) $\langle x, x \rangle$ est réel et ≥ 0 .
- (ii) $\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$.
- (iii) la fonction $y \rightarrow \langle x, y \rangle$ de X à \mathbf{C} est linéaire.
- (iv) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Ce produit intérieur sur X introduit une norme $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ avec une telle norme, X peut-être complet.

Définition 4: Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert complexe est un espace linéaire sur \mathbb{C} , complet et possédant un produit intérieur.

- Deux vecteurs $x, y \in$ à l'espace de Hilbert X , sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

II.2.2) Espaces de Hilbert dans le domaine temporel:

1 - L'espace \mathbb{C}^n :

Considérons la fonction $x:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$.
 $t \mapsto x(t)$.

On prend le cas où x est à carré intégrable,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|x\|^2 dt < \infty. \tag{2.1}$$

$$(\|x\| = (x^{*T} x)^{1/2}).$$

\mathbb{C}^n est un espace de Hilbert sous le produit intérieur $\langle x, y \rangle = x^* y$.

2 - L'espace $L_2(-\infty, +\infty)$:

L'ensemble de toutes les fonctions x à carré intégrable est un espace de Lebesgue $L_2(-\infty, +\infty)$, cet espace est un espace de Hilbert sous le produit intérieur;

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt.$$

La norme de x , notée:

$$\|x\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|x\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- Le sous espace $L_2 [0, +\infty)$: représente l'ensemble des fonctions causales (égales à zéro pour $t < 0$).
- Le sous espace $L_2 (-\infty, 0]$: représente l'ensemble des fonctions anticausales (égales à zéro pour $t > 0$).

II.2.3) Espaces de Hilbert dans le domaine fréquentiel:

1 - L'espace L_2 :

Considérons une fonction $x :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$.
 $\omega \mapsto x(j\omega)$.

à carré intégrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(j\omega)\|^2 d\omega < \infty$$

L'espace de ces fonctions est noté L_2 , c'est un espace de Hilbert sous le produit intérieur :

$$\langle x, y \rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega)^* y(j\omega) d\omega$$

Une norme dans L_2 est notée $\|x\|_2$.

2 - L'espace RL_2 :

L'espace RL_2 des fonctions réelles rationnelles de L_2 , consiste en des vecteurs d'ordre n. dont chaque composante est réelle rationnelle, strictement propre et ne possédant pas de pôles sur l'axe imaginaire.

3 - L'espace H_2 :

L'espace de Hardy H_2 est l'espace des fonctions $x(s)$, analytiques dans $Re(s)>0$, prennent des valeurs dans \mathbb{C}^n et vérifient la condition suivante:

$$\|x\|_2 = \left[\sup_{\xi > 0} (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(\xi + j\omega)\|^2 d\omega \right]^{1/2} < \infty .$$

$\|x\|_2$ est la norme H_2 .

4 - L'espace RH_2 :

C'est l'ensemble des fonctions réelles rationnelles, stables et strictement propres.

Pour de telles fonctions:

$$\|x\|_2 = \left[(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$$

5 - Complément orthogonal de H_2 :

Le complément orthogonal H_2^\perp de H_2 dans L_2 est l'espace des fonctions $x(s)$ ayant la propriété suivante:

$x(s)$ est analytique dans $Re s < 0$, $x(s)$ prend ses valeurs dans \mathbb{C}^n , et

$$\sup_{\xi > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(\xi + j\omega)\|^2 d\omega \text{ est fini.}$$

6 - L'espace L_∞ :

Une matrice $F(j\omega)$ $n \times m$ à valeurs complexes, appartient à l'espace de Lebesgue L_∞ ssi $\|F(j\omega)\|$ est essentiellement borné sur l'axe imaginaire ($\|F(j\omega)\|$: la valeur singulière maximale).

Donc la norme L_∞ est définie par:

$$\|F\|_\infty = \text{ess sup}_\omega \|F(j\omega)\|$$

L_∞ : est un espace de Banach.

7 - L'espace RL_∞

Une fonction F de l'espace L_∞ , appartient à l'espace RL_∞ ssi F est réelle rationnelle, propre et ne possédant pas de pôles dans l'axe imaginaire.

8 - L'espace H_∞ :

L'espace de Hardy H_∞ : est l'espace des fonctions $F(s)$ analytiques et bornées dans le demi-plan droit ($Re s > 0$), dans le sens $\sup \{ \|F(s)\| : Re s > 0 \} < \infty$

Le coté gauche représente la norme H_∞ de F .

Propriétés:

- H_∞ est un sous espace fermé de l'espace de Banach L_∞ .
- RH_∞ : représente l'ensemble des matrices réelles rationnelles stables et propres appartenant à l'espace H_∞ .

En résumé pour le cas rationnel :

- RL_2 : Des vecteurs, strictement propres et ne possédant pas de pôles sur l'axe imaginaire.
- RH_2 : Vecteurs, strictement propres et stables.
- RH_2^\perp : Vecteurs, strictement propres et pas de pôles dans $Re s < 0$.
- RL_∞ : Matrices, propres, pas de pôles sur l'axe imaginaire.
- RH_∞ : Matrices, propres et stables.

II.3) Propriétés:

a) **Théorème 1 [Fra1]:** La transformée de Fourier est un isomorphisme de l'espace de Hilbert:

$$\begin{aligned} \text{de } L_2(-\infty, +\infty) &\longrightarrow L_2. \\ L_2[0, \infty) &\longrightarrow H_2. \\ L_2(-\infty, 0] &\longrightarrow H_2^\perp. \end{aligned}$$

b) $\|FG\|_\infty \leq \|F\|_\infty \|G\|_\infty$.

c) Pour le cas SISO, la norme $\|F\|_\infty$ représente la distance entre l'origine et le point le plus loin du tracé de Nyquist.

d) considérons un signal causal $x(t)$ et sa transformé de Laplace $\hat{x}(s)$ et supposons que $\hat{x}(s) \in RH_2$.

D'après le théorème de Plancherel:

$$\int_0^\infty x(t)^2 dt = \|\hat{x}(s)\|_2^2$$

- Considérons un système avec une fonction de transfert:

$$F(s) \in RH_\infty \quad \begin{array}{l} x(t): \text{Entrée du système.} \\ y(t): \text{Sortie du système.} \end{array}$$

Puisque $\hat{x} \in RH_2$ et on suppose que $\|\hat{x}\|_2 = 1$

alors $\hat{y} \in RH_2$ et $\|\hat{y}\|_2 = \|\hat{x}\|_2 \|F\|_2 \leq \|F\|_\infty$.

Donc la norme H_∞ de $F(s)$ est une limite supérieure au gain du système.

$$\|F\|_\infty = \text{Sup} \{ \|\hat{y}\|_2 : \hat{x} \in RH_2, \|\hat{x}\|_2 = 1 \}.$$

D'une manière générale :

si $F \in H_\infty$ et $x \in H_2$, donc $Fx \in H_2$

$$\|F\|_\infty = \text{Sup} \{ \|Fx\|_2 : x \in H_2, \|x\|_2 = 1 \}.$$

II.4) Le modèle standard:[Fra1]

Un modèle standard est un bloc en boucle ouverte $G(s)$, qui inclut le modèle du processus proprement dit et le modèle générateur de bruits et perturbations (figure 2.1).

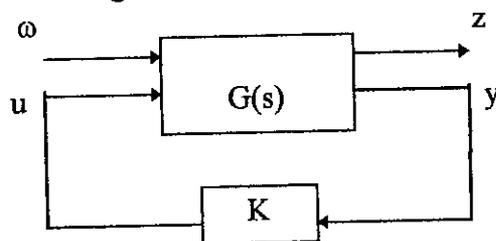


Fig 2.1: Configuration standard.

Les entrées se décomposent en deux catégories:

- Les entrées de Commandes u .
- Les entrées de Perturbations ω .

Les sorties se décomposent en deux classes

- Les écarts z (à annuler, borner ou minimiser).
- Les mesures qui se définissent comme l'ensemble de toutes les entrées du régulateur (noté $K(s)$), y compris les consignes.

Le retour $u = -K(s)y$ engendre le transfert en boucle fermée: $z = H(s)\omega$. On peut interpréter maintenant le problème de la commande, comme étant la recherche d'un régulateur qui minimise en un sens, le transfert $H(s)$.

Le concept de modèle standard se révèle être un instrument très souple, susceptible d'accueillir de multiples spécifications relatives à un problème de commande.

- Dans le vecteur " ω ", on pourra inclure des sources de perturbations de charge, et des bruits de capteurs.
 - Le vecteur " y " pourra inclure des mesures directes des perturbations ou certaines composantes d'état de charge, et des bruits de capteurs.
 - Le vecteur des écarts " z " pourra être augmenté, par exemple, de la commande u elle-même de façon à limiter la sollicitation des actionneurs.
- On peut inclure dans le modèle standard $G(s)$ des perturbations (ou pénalités à caractère fréquentiel) affectées aussi bien aux entrées qu'aux écarts " z ".

Après avoir inclus toutes les pénalités voulues dans le modèle standard $G(s)$, le problème de la synthèse se ramène à un problème mathématique bien posé qui est celui de chercher un régulateur K réel rationnel propre minimisant les normes H_∞ de la matrice de transfert entre ω et z sous la contrainte que K stabilise G .

$$K_{\text{opt}} = \text{Min}_K \|H\|_\infty.$$

La résolution du problème standard ne sera exposée qu'après avoir étudié la stabilité robuste et les performances des systèmes linéaires invariants dans le temps.

Chapitre III :

***ELEMENTS D'ANALYSE DE LA ROBUSTESSE
ET DES PERFORMANCES DES SYSTEMES
L.I.T.***

Chapitre III : *Éléments d'Analyse de la Robustesse et des Performances*

des Systèmes Linéaires Invariants Dans le temps

III.1) Introduction:

La conception d'un système de commande à contre réaction peut-être souvent vue comme un processus de conformation de boucle (Loop shaping) [Kwa1].

Le problème est de déterminer le compensateur C comme dans la figure (3.1) de sorte que la réponse fréquentielle du gain $L(j\omega)$ de la boucle ouverte ait une forme convenable.

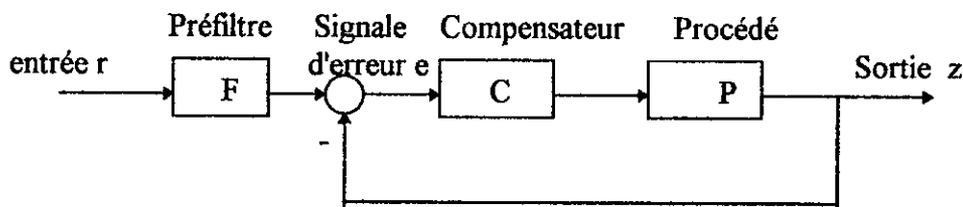


Fig.3.1: Système à contre réaction

Pour conformer la boucle, il faut considérer lors de la conception les points suivants:

- . Stabilité en boucle fermée.
- . Stabilité robuste.
- . Une atténuation des perturbations, sans limitation par :
 - . La capacité du procédé
 - . La corruption par le bruit de mesure

La considération de ces différents points va introduire différents éléments permettant l'analyse de la robustesse et des performances des systèmes bouclés.

III.2) Loop shaping:

III.2.1) Stabilité en boucle fermée (cas monovariable)

Le système à contre réaction de la figure (3.1) est supposé stable en boucle ouverte. D'après le critère de Nyquist, pour avoir la stabilité en boucle fermée, il faut que le tracé de Nyquist du gain L , n'encercle pas le point -1 .

III.2.2) Stabilité robuste (approche linéaire) [Bou]

Considérons le schéma de régulation de la figure (3.2), où "u" et "y" désignent respectivement l'entrée et la sortie du système.

"dy" et "du" sont des perturbations agissant respectivement sur l'entrée "u" et la sortie "y".

"b" est le bruit de mesure.

P et K désignent le système à régler, plus précisément, le modèle dont on dispose et le régulateur.

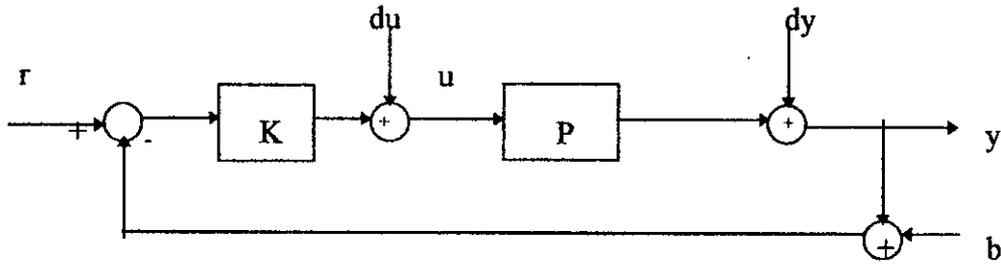


Fig.3.2: schéma de régulation.

La stabilité robuste est la propriété qui permet aux systèmes de rester stables malgré les perturbations qui agissent sur le procédé et sur le régulateur.

Dans ce qui suit, l'étude sera faite sur le cas monovarié.

Le gain en boucle ouverte est $L=PK$; P et K représentent des fonctions de transfert d'un système bouclé stable; \tilde{P} est le modèle perturbé.

a) Marges de stabilité:

Supposons que le lieu de Nyquist de L soit celui de la figure (3.3)

Le système en boucle fermée de la figure (3.2) reste stable sous l'effet des perturbations du gain L ssi le tracé de Nyquist du gain perturbé n'encercle pas le point -1.

La marge de gain est donc l'intervalle ouvert $Mg =]g_1, g_2[$; la signification de cette marge est la suivante : pour tout réel g appartenant à Mg, K stabilise \tilde{P} lorsque \tilde{P} est de la forme gP.

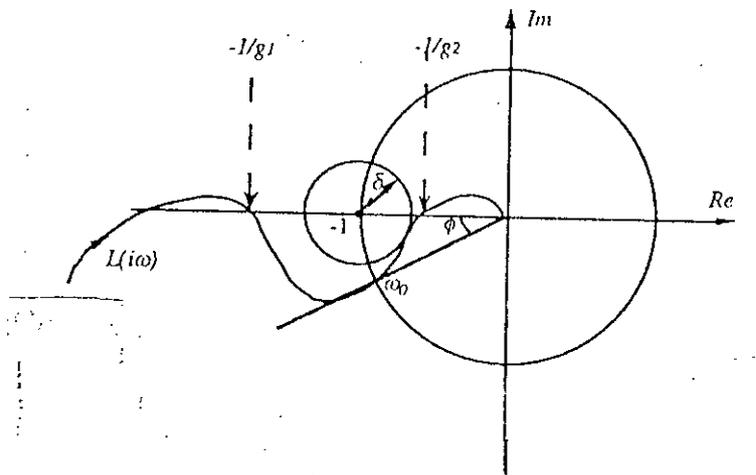


Fig. 3.3: Lieu de Nyquist de L

La marge de phase Mp est l'angle ϕ , compris entre 0 et 2π , tel que $\arg[L(i\omega_0)]=\pi+\phi$ modulo 2π , où ω_0 est la pulsation au gain unité, c'est à dire satisfaisant l'égalité $|L(i\omega_0)|=1$. S'il y a plusieurs pulsations au gain unité ω_j , correspondant à des arguments $\pi+\phi_j$ modulo 2π , il faut prendre $\phi=\min\{\phi_j\}$. D'une manière plus pertinente, cette marge pourrait être appelée la **marge de retard de phase** (M_{rp}); et la **marge d'avance de phase** (M_{ap}) pourrait être définie en remplaçant ci-dessus $\pi+\phi_j$ par $\pi-\phi_j$. La signification de la marge de retard (respectivement d'avance) de phase ϕ est la suivante : pour tout angle ψ tel que $0<\psi<\phi$, K stabilise \tilde{P} lorsque \tilde{P} est de la forme $e^{-i\psi}P$ (respectivement $e^{+i\psi}P$).

La **marge de retard** M_r est la borne supérieure de retards τ tel que K stabilise \tilde{P} lorsque \tilde{P} est de la forme $R_\tau P$.

R_τ est l'opérateur de retard. Pour un signal temporel x , on a $(R_\tau x)(t) = x(t-\tau)$.

La fonction de transfert de R_τ est $e^{-s\tau}$; cet opérateur produit un retard de phase $\tau\omega$ à la pulsation ω . S'il y a une seule pulsation au gain unité ω_0 , dans ce cas, d'après le critère de Nyquist, M_r se calcule suivant la formule :

$$M_r = \frac{M_{rp}}{\omega_0} \quad (3.1).$$

S'il existe plusieurs pulsations au gain unité ω_j , $j=1,2,\dots$, et $\arg(L(i\omega_j))=\pi+\phi_j$ (modulo 2π), avec $0<\phi_j<2\pi$. Dans ce cas, M_r se calcule par :

$$M_r = \left\{ \frac{\phi_j}{\omega_j}, j = 1, 2, \dots \right\}$$

Dans [Bou], on montre qu'une marge de retard suffisante assure une bonne robustesse vis à vis de dynamiques négligées ne présentant pas de résonances.

Marge de module : Les marges de gain, de phase et de retard ne suffisent pas pour assurer une bonne robustesse. Il peut arriver, en effet, que ces marges soient bonnes, mais que le lieu de Nyquist de L passe très près du point -1 . Dans ce cas une petite erreur du modèle (se traduisant par un autre effet, dans le plan de Nyquist, qu'une variation du gain ou de la phase) peut déstabiliser la boucle. Il est donc essentiel que la distance du lieu de Nyquist de L au point -1 soit suffisante (de l'ordre 0.5 par exemple). C'est cette distance que I.Landau a appelé la marge de module (M_m) (cette marge a souvent été appelée marge de gain-phase). Elle égale à la distance δ indiquée sur la figure (3.3), et elle se calcule par :

$$M_m = \inf \{ |1+L(i\omega)| : \omega \in \mathbf{R} \}$$

La marge de module garantit une certaine robustesse vis à vis de non linéarités non modélisées. Des minorants de la marge de gain et de la marge de phase peuvent être calculés à partir de la marge de module [Bou]:

$$\left] \frac{1}{1+M_m}, \frac{1}{1-M_m} \right[\subset M_g$$

$$M_p \geq 2\arcsin(M_m/2)$$

(avec $M_p = M_{rp}$ ou M_{ap}).

b) Limites de la robustesse:

L'étude se limite au cas monovariable.

En première instance, elle suppose l'existence d'un système nominal à contre réaction stable avec un gain L_0 . L'objectif est de garder le système à contre réaction stable lorsque le gain est perturbé de L_0 à un gain actuel L .

Ceci est montré dans la figure (3.4), le tracé de Nyquist du gain nominal L_0 n'encercle pas le point -1 . Le système en boucle fermée actuel est stable si le tracé de Nyquist du gain actuel L n'encercle pas le point -1 . Il est évident d'après la figure(3.4) que ceci est réalisé si :

$$|L(j\omega) - L_0(j\omega)| < |L_0(j\omega) + 1| \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.2).$$

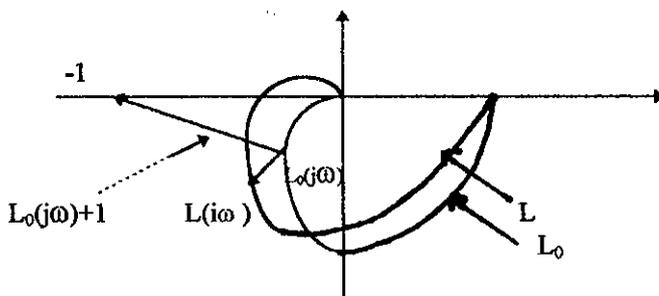


Fig. 3.4: Les tracés de Nyquist, nominal L_0 et perturbé L .

Ceci est équivalent à:

$$\frac{|L(j\omega) - L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|} \times \frac{|L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega) + 1|} < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.3).$$

Définissons la fonction de sensibilité complémentaire T_0 du système en boucle fermée nominal comme :

$$T_0 = \frac{L_0}{1 + L_0} \quad (3.4).$$

T_0 est appelée fonction de sensibilité complémentaire parce qu'elle complète la fonction de sensibilité S_0 . On a:

$$1 - T_0 = \frac{1}{1 + L_0} = S_0 \quad (3.5).$$

Nous verrons par la suite le rôle important que joue la fonction de sensibilité pour atténuer l'effet des perturbations sur le système à contre réaction.

Les équations précédentes conduisent à:

$$\frac{|L(j\omega) - L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|} < \frac{1}{|T_0(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.6).$$

Ce résultat sera discuté plus en détail au prochain chapitre où il sera étendu au cas MIMO: c'est le critère de stabilité de Doyle[Kwa1][Doy1]. La stabilité robuste a été obtenue avec l'hypothèse que le système en boucle ouverte est stable.

Elle peut être étendue aux systèmes en boucle ouverte instables, à la condition que, le nombre de pôles du demi-plan droit reste invariant sous l'effet de la perturbation. Donc, le critère de stabilité robuste de Doyle s'énonce comme suit:

Critère de stabilité robuste de Doyle:

Supposons que le système en boucle fermée de la figure (3.2) est stable à l'état nominal, il reste stable sous l'effet des perturbations qui n'affectent pas le nombre de pôles de la boucle ouverte si :

$$\frac{|L(j\omega) - L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|} < \frac{1}{|T_0(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.7).$$

La condition de stabilité robuste de Doyle est seulement suffisante, ce qui limite son champ d'application, elle devient aussi nécessaire en la modifiant comme suit :

Supposons que la perturbation relative est bornée de la forme:

$$\frac{L(j\omega) - L_0(j\omega)}{L_0(j\omega)} \leq |W(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.8).$$

Avec W une fonction donnée, la condition (3.7) est impliquée par l'inégalité;

$$|T_0(j\omega)| < \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.9).$$

Ainsi, si la condition (3.9) est vérifiée, la stabilité robuste est garantie pour toute perturbation satisfaisant (3.8).

L'équation (3.9) n'est pas seulement suffisante, mais nécessaire pour garantir la stabilité pour toute perturbation satisfaisant (3.8).

Résumé (stabilité robuste): Supposons que le système en boucle fermée de (la figure 3.2) est stable à l'état nominal. Il reste stable sous l'effet de toute perturbation n'affectant pas le nombre de pôles instables de la boucle ouverte satisfaisant la borne;

$$\frac{L(j\omega) - L_0(j\omega)}{|L_0(j\omega)|} \leq |W(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.10).$$

avec W une fonction donnée, ssi:

$$|T_0(j\omega)| < \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.11).$$

Détermination du lieu de Nyquist du gain perturbé L : Disques d'incertitude

Quant le gain de boucle est perturbé de L_0 à L , le lieu de Nyquist du gain perturbé L n'est pas connu, mais on sait qu'à la pulsation ω (équation (3.10)), l'écart entre ce lieu et celui de L_0 est majoré par $|W(i\omega) L_0(i\omega)|$:

$$|L(i\omega) - L_0(i\omega)| \leq |W(i\omega) L_0(i\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbf{R}$$

Autrement dit, $L(i\omega)$ appartient au disque ouvert de centre $L_0(i\omega)$ et de rayon $|W(i\omega) L_0(i\omega)|$ (Voir Fig. 3.5).

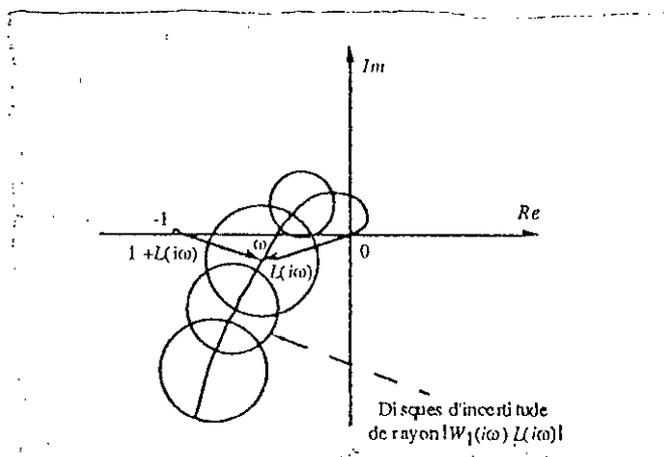


Fig. 3.5: Lieu de Nyquist de L_0 et disques d'incertitudes

D'après le critère de Nyquist, la condition nécessaire et suffisante pour que le système en boucle fermée reste stable pour toutes perturbations éventuelles du gain de boucle L , est que le point -1 n'appartienne à aucun disque d'incertitude, c'est à dire :

$$|1 + L_0(i\omega)| \geq |W(i\omega) L_0(i\omega)|$$

Cette condition est équivalente à celle de l'équation (3.11).

Perturbation du gain de boucle inverse

D'après le critère de Nyquist, le système en boucle fermée reste stable sous l'effet des perturbations tant que le tracé de Nyquist du gain de boucle ne coupe pas le point -1. Une autre définition équivalente à cette dernière est la suivante: le système en boucle fermée reste stable sous l'effet des perturbations, tant que l'inverse $1/L$ du gain de boucle ne coupe pas le point -1.

Donc, la condition (3.2) peut-être remplacée par:

$$\left| \frac{1}{L(j\omega)} - \frac{1}{L_0(j\omega)} \right| < \left| \frac{1}{L_0(j\omega)} + 1 \right| \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.12).$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\frac{1}{L(j\omega)} - \frac{1}{L_0(j\omega)}}{\frac{1}{L_0(j\omega)}} \right| < \left| \frac{\frac{1}{L_0(j\omega)} + 1}{\frac{1}{L_0(j\omega)}} \right| = |1 + L_0(j\omega)| = \left| \frac{1}{S_0(j\omega)} \right| \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.13).$$

Ceci conduit au critère suivant :

Critère de stabilité robuste du gain de boucle inverse [Kwa1]:

Supposons que le système en boucle fermée de (la figure 3.2) est stable à l'état nominal, il reste stable sous l'effet des perturbations n'affectant pas le nombre de zéros du demi-plan droit du gain de boucle L si:

$$\left| \frac{\frac{1}{L(j\omega)} - \frac{1}{L_0(j\omega)}}{\frac{1}{L_0(j\omega)}} \right| \leq \frac{1}{S_0(j\omega)} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.14).$$

Avec S_0 , la fonction de sensibilité nominale du système en boucle fermée. Comme précédemment, le critère cité ci-dessus est suffisant pour la stabilité robuste et non nécessaire; Pour rendre cette condition nécessaire on procède de la même manière et on aboutit au résultat suivant:

Robustesse de la stabilité sous l'effet des perturbations inverses

Partant de l'hypothèse que le système en boucle fermée de (la figure 3.2) est stable à l'état nominal, Il reste stable sous l'effet de toute perturbation n'affectant pas le nombre de zéros du demi-plan droit satisfaisant la borne:

$$\left| \frac{\frac{1}{L(j\omega)} - \frac{1}{L_0(j\omega)}}{\frac{1}{L_0(j\omega)}} \right| \leq |W(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.15).$$

avec W , une fonction donnée, ssi:

$$|S_0(j\omega)| < \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (3.16).$$

c) Conclusion:

D'après ce qui précède, nous avons vu que pour avoir une stabilité robuste, il est nécessaire de garder le tracé de Nyquist loin du point -1.

L'objectif est de réaliser des marges de gain et de phase convenables.

Conformer la boucle pour une stabilité robuste revient à fabriquer des fonctions de sensibilité

$$T = \frac{L}{1+L}, \quad S = \frac{1}{1+L} \quad \text{petites} \quad (3.17).$$

Ce qui permet d'avoir des perturbations relatives du gain de boucle et l'inverse gain de boucle respectivement large à la fréquence angulaire ω , sans risquer une instabilité.

A cause de la complémentarité, T et S ne peuvent pas être petites simultanément. La solution est donc de mettre T et S petites dans des régions de fréquences différentes.

Nous allons voir que dans certaines applications avec les autres objectifs de la conception, qu'il est plus consistant de mettre S petite en basse fréquence et T petite en haute fréquence.

II.2.3) Atténuation des perturbations et bande passante:

Pour étudier l'atténuation des perturbations, considérons (la figure 3.6) suivante:

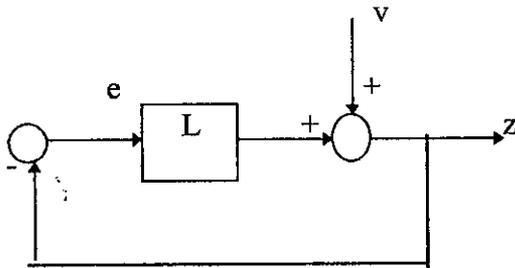


Fig. 3.6: système à contre réaction avec perturbation.

Nous avons:

$$z = \frac{1}{1+L} v = Sv. \quad (3.18).$$

S étant la fonction de sensibilité du système en boucle fermée.

L'atténuation des perturbations nécessite un $|S|$ petit, or $|S|$ est petit si $|L|$ est grand.

Donc pour atténuer les perturbations, il est nécessaire de conformer la boucle de sorte qu'elle soit large aux fréquences où l'atténuation de la perturbation est désirée.

L est mise généralement large à travers une bande de fréquence limitée, c'est la bande passe-bas, de la fréquence 0 à une fréquence maximale B.

B est appelée la bande passante de la boucle fermée. L'atténuation effective de la perturbation est réalisée seulement dans la bande B.

La figure (3.7) montre une forme idéale de la fonction de sensibilité, elle est petite aux basses fréquences et approche la valeur 1 en hautes fréquences.

Les valeurs supérieures à 1 et les pics sont à éviter, ceci arrive généralement près du point où la courbe atteint le niveau (0 dB).

La forme désirée pour la fonction de sensibilité S implique une forme bien déterminée pour la fonction de sensibilité complémentaire T=1-S.

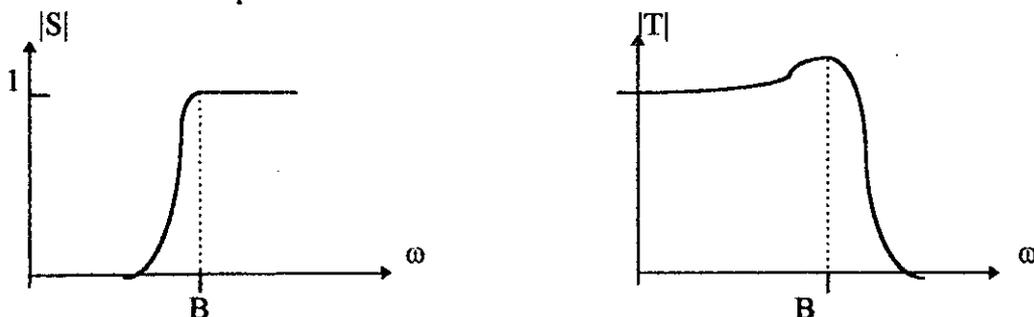


Fig. 3.7: La fonction de sensibilité "idéale" et la fonction de sensibilité complémentaire correspondante.

T doit être inférieure ou égale à 1 dans les basses fréquences et décroît vers 0 en hautes fréquences. La décroissance de T en fonction de la fréquence est appelée le " Roll off".

Comme on a vu précédemment, de petites valeurs de la fonction de sensibilité en basse fréquence assurent une protection contre les perturbations de l'inverse gain de boucle.

Ces perturbations sont souvent causées par les variations de charges et les changements de l'environnement.

Dans la région de croisement "Cross over region", ni S, ni T ne sont petites, c'est la région la plus critique dans la robustesse. Il est important d'éviter des pics dans S et T en cette région de fréquence.

III.2.4) Capacité du procédé, la fonction de sensibilité d'entrée:

Un procédé physique a une capacité limitée, c.à.d. qu'il peut absorber des entrées d'amplitudes limitées. Dans la configuration de la figure (3.8), nous avons:

$$u = \frac{C}{1 + CP} (Fr - m - v) \tag{3.19}$$

$$M = \frac{C}{1 + CP}$$

La fonction M détermine la sensibilité de l'entrée du procédé aux perturbations et au gain de commande r, elle est appelée la fonction de sensibilité d'entrée.

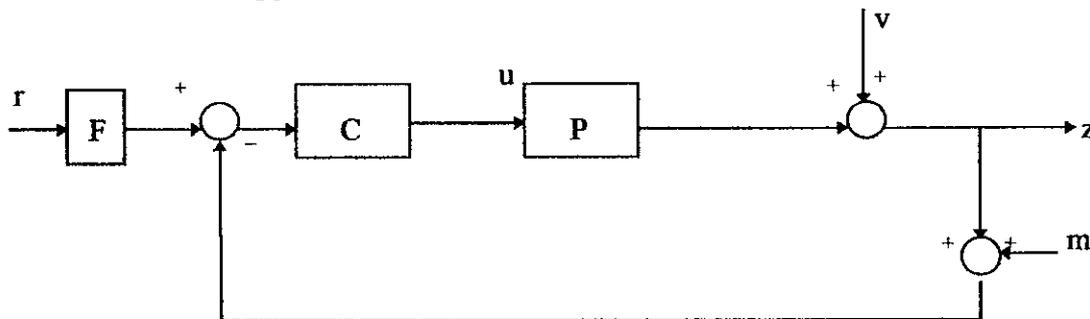


Fig.3.8: Système à deux entrées de liberté avec des perturbations et des bruits de mesure.

Si $L = CP$ est grand, on a $M \approx 1/P$.

La fonction de sensibilité d'entrée est liée à la fonction de sensibilité complémentaire par la relation suivante:

$$T = MP = \frac{CP}{1+CP} = \frac{L}{1+L} \quad (3.20).$$

Grâce à cette relation, pour une fonction de transfert P d'un procédé fixe, les exigences de la conception pour M peuvent être transférées à T et vice-versa.

Pour éviter des entrées de commandes "u" importantes, M ne doit pas être très importante. Nous allons voir alors le comportement de cette fonction en fonction de la fréquence, tout en prenant en considération les autres objectifs de la conception (S petite en basses fréquences, T petite en hautes fréquences):

- En basses fréquences, un gain L important est demandé pour avoir une faible sensibilité. Sans toutefois que M prenne des valeurs trop grandes, au point d'être inacceptable pour la conception, alors la capacité du procédé est inadéquate, dans ce cas, il faut, soit remplacer le procédé par un, plus puissant, soit alléger les spécifications.

- En hautes fréquences (fréquences en dehors de la bande passante), M doit décroître le plus rapidement possible. Ceci est compatible avec les spécifications de la robustesse qui exigent que T décroît rapidement.

III.2.5) Bruit de mesure:

Pour étudier l'effet des bruits de mesure sur la sortie de la boucle fermée, nous allons considérer aussi la figure(3.8) et on trouve l'équation suivante:

$$z = \underbrace{\frac{1}{1+PC}}_S v + \underbrace{\frac{PC}{1+PC}}_T Fr + \underbrace{\frac{PC}{1+PC}}_T m \quad (3.21).$$

Ceci montre que l'influence du bruit de mesure m sur la sortie de commande du système est déterminée par la fonction de sensibilité complémentaire T . Pour les basses fréquences à cause des autres spécifications, T doit être inférieure ou égale à 1, le bruit de mesure affecte entièrement la sortie. C'est pour cette raison qu'il faut avoir des capteurs à faible bruit.

III.2.6) La fonction de transfert en boucle fermée:

La réponse d'une configuration à 2 degrés de liberté de la figure (3.8) au signal de commande r est donnée par l'équation suivante:

$$z = \underbrace{\frac{PC}{1+PC}}_H F r \quad (3.22).$$

La fonction de transfert en boucle fermée H peut-être exprimée comme:

$$H = \frac{L}{1+L} F = T F \quad (3.23).$$

Un Loop shaping idéal nécessite une fonction de sensibilité complémentaire proche de 1 dans la largeur de la bande de fréquence, et transite doucement vers 0 en dehors de la bande. Donc avec un préfiltre F (avec $F=1$), la fonction de transfert en boucle fermée H est un passe-bas, sa bande passante est la bande où il y a une atténuation des perturbations.

Si cette bande est convenable, un préfiltre F n'est pas nécessaire. Et si elle est plus grande à ce qui est demandé pour la réponse au signal de commande r, alors le préfiltre F doit être utilisé pour réduire la largeur de la bande de la boucle fermée H; afin d'éviter des entrées de procédé trop grandes.

Et si la bande passante est plus petite à ce qui est demandé pour une bonne réponse au signal de commande r, le préfiltre F doit être utilisé pour compenser le manque.

III.2.7) Robustesse des performances:

Les performances d'un système à contre réaction sont déterminées par la fonction de sensibilité S, la fonction de sensibilité complémentaire T, la fonction de sensibilité d'entrée M et la fonction de transfert en boucle fermée H qui sont successivement données par:

$$S = \frac{1}{1+L} \quad , \quad T = \frac{L}{1+L} \quad (3.24).$$

$$M = \frac{C}{1+L} = S C \quad , \quad H = \frac{L}{1+L} F = T F \quad (3.25).$$

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que l'environnement du système est suffisamment contrôlé de sorte que C et F ne soient pas sujet à des perturbations.

Effet des perturbations sur S et T:

Soit L_0 le gain en boucle ouverte nominal, S_0 et T_0 les fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire nominales. On peut facilement démontrer que:

$$\frac{S - S_0}{S} = T_0 \frac{L - L_0}{L_0} \quad (3.26).$$

$$\text{et} \quad \frac{T - T_0}{T} = S_0 \frac{L - L_0}{L} \quad (3.27).$$

Ces relations montrent pour que S soit robuste, il faut que T_0 soit petite, et pour que T soit robuste, il faut qu'on ait S_0 petite. Or ces deux fonctions ne peuvent pas être petites simultanément. Donc il faut mettre chacune d'elles petite dans des régions de fréquences différentes. Comme présenté précédemment, les spécifications de la conception d'un système de commande normal demande que S_0 soit petite en basse fréquence, ce qui oblige T à être robuste en basse fréquence. De même T_0 doit être petite en haute fréquence, forçant S à être robuste en hautes fréquences.

Remarque:

Les différentes fonctions vues précédemment s'écrivent de la manière suivante dans le cas multivariable.

$$\begin{aligned} S &= (I + L)^{-1} \quad \text{avec} \quad L = P C. \\ T &= I - S = L (I + L)^{-1} = (I + L)^{-1} L. \\ M &= (I + C P)^{-1} C = C (I + C P)^{-1}. \\ H &= (I + L)^{-1} L F = T F. \end{aligned}$$

Avec I matrice identité unitaire de dimension convenable.

III.3) Les limites de performances: [Kwa1] [Bou]

La présence de pôles et de zéros instables dans la boucle ouverte d'un système de commande peut générer une dégradation des performances.

Pôles instables:

Supposons que le degré relatif de la fonction de transfert de la boucle ouverte L soit strictement supérieur à 1. Dans ce cas, un théorème dû à Bode et généralisé par Freudenberg et Looze montre qu'on a l'égalité:

$$\pi \sum_{j \in J} \operatorname{Re}(P_j) = \int_0^{\infty} \operatorname{Log}|S(i\omega)| \, d\omega. \tag{3.28}$$

où les $P_j, j \in J$ sont les pôles instables de L.

Cette formule montre en s'exprimant de manière approximative, que plus la boucle ouverte est instable (c.à.d. plus le membre gauche de (3.28) est grand), plus $|S(i\omega)|$ doit, en moyenne, être plus grand que 1. Ceci limite évidemment les performances.

Zéros instables:

Supposons que L ait au moins un zéro instable et des pôles instables $p_j, j \in J$.

Soit alors le produit de "Blaschke" des pôles instables de L :

$$B(s) = \prod_{j \in J} \frac{p_j - s}{\bar{p}_j + s} \tag{3.29}$$

On a $|B(s)| = 1$ (resp. < 1) si et seulement si $\operatorname{Re}(s) = 0$ (resp. > 0). On a la relation suivante:

$$\pi \operatorname{Log} |B^{-1}(z)| = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Log}|S(i\omega)| \, d\theta z(\omega) \, d\omega. \tag{3.30}$$

où θz est la fonction définie par $\theta z = \arctg\left(\frac{\omega - y}{x}\right)$ avec $z = x + iy$.

Le membre de gauche de (3.30) est positif, et la fonction θz est strictement croissante. L'existence du zéro instable z contraint donc $|S(i\omega)|$ à prendre des valeurs plus grandes que 1. On retrouve donc la même situation défavorable que celle rencontrée en présence d'un pôle instable.

Supposons maintenant que L ait un pôle instable p très voisin d'un zéro instable z. Alors, on a $B(z) \cong 0$, donc le membre de gauche de (3.29) est presque infini. Cette situation est donc extrêmement défavorable.

Enfin supposons (pour simplifier l'analyse) que L ait un seul zéros instable z ; on peut écrire L(s) sous la forme :

$$L(s) = \frac{z - s}{z + s} L'(s)$$

où L' est une fonction de transfert à minimum de phase (elle n'a pas de poles et de zéros dans le demi plan droit), et qui est telle que $|L(i\omega)| = |L'(i\omega)|$. On obtient immédiatement:

$$\frac{|L(i\omega) - L'(i\omega)|}{|L(i\omega)|} \ll 1 \text{ pour } \omega \ll \frac{|z|}{2}$$

par conséquent, au voisinage de la pulsation au gain unité ω_0 , le lieu de Nyquist de L sera très voisin de celui de L' si $\omega_0 \ll \frac{|z|}{2}$. Sous cette condition, la boucle ouverte aura donc des propriétés très semblables de celles d'une boucle ouverte à minimum de phase. Autrement dit,

un zéro instable est peu gênant à condition que son module soit suffisamment grand par rapport à ω_0 .

Finalement, cette analyse montre que la présence d'un zéro instable conduit à réduire suffisamment la pulsation au gain unité ω_0 , et donc de réduire les performances jusqu'à ce que ce zéro se situe dans les hautes fréquences par rapport à ω_0 .

III.4) Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons définis les éléments permettant de faire l'analyse de la robustesse et des performances des systèmes LIT soumis à des perturbations du gain de boucle et du gain de boucle inverse. Les critères de stabilité robustes de Doyle énoncés sont fondés sur le critère de Nyquist destiné uniquement pour traiter le cas linéaire.

Dans le prochain chapitre, l'analyse de la stabilité robuste sera fondée sur le théorème des "petits gains" qui pourra traiter même le cas des systèmes non linéaires soumis à des modèles d'incertitudes linéaires ou non linéaires. Les résultats présentés dans ce chapitre seront étendus au cas multivariable. Nous expliciterons alors la notion de "modèle standard" et de "loop shaping" multivariable.

Chapitre IV :

***ROBUSTESSE ET PERFORMANCES DES
SYSTEMES L.I.T./PROBLEME H_{∞} STANDARD***

Chapitre IV : Robustesse et Performances des Systèmes Linéaires

Invariants Dans le temps. Problème H_∞ standard.

IV.1) Introduction:

Dans le chapitre précédent nous avons introduit les différents éléments permettant de faire l'analyse de la robustesse et des performances d'un système bouclé.

Les éléments exposés n'étaient pas tous spécifiques à une approche H_∞ , mais ce sont des notions générales et applicables à un système bouclé quel qu'il soit.

Le théorème de base pour l'étude de la stabilité du système contrôlé était le critère de Nyquist, qui supposait que le système à régler est linéaire. Pour le cas non linéaire, le théorème de base pour l'étude de la stabilité du système contrôlé ne peut plus être le critère de Nyquist.[Bou]

Dans ce qui suit nous verrons les différentes présentations des incertitudes d'un procédé. Nous présenterons aussi d'autres éléments permettant l'analyse de la robustesse et des performances de ces systèmes, tel que la stabilité interne et le théorème des petits gains. Puis en se basant sur le théorème des petits gains, nous allons synthétiser un contrôleur réalisant un bon compromis Robustesse/Performances, en ramenant tous les problèmes de robustesse et de performances à un problème unique; Appelé problème H_∞ standard. La résolution de ce problème sera présentée dans le prochain chapitre.

IV.2) Le principal modèle de perturbation:

Le modèle dont on veut étudier la stabilité peut être soumis à deux types d'incertitudes .

Les incertitudes non structurées qui provoquent des changements importants dans la dynamique du système (Comportement en hautes fréquences, non linéarité, idéalisation des éléments de commande). Elles sont caractérisées par une certaine condition de gain.

Les incertitudes structurées qui affectent la connaissance de certains paramètres physiques généralement bien localisés (masses, inerties, centre de gravité ..etc). Elles sont dotées d'une certaine structure.

Dans la suite du travail , on considérera seulement les incertitudes non structurées. La figure (4.1) montre le bloc de diagramme du principal modèle de perturbation.

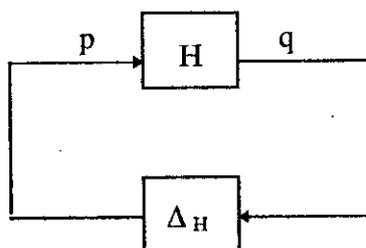


Fig. 4.1: Le principal modèle de perturbation.

Le bloc "H" est le système dont on veut étudier la robustesse.

Le bloc " Δ_H " représente une perturbation de la dynamique du système.

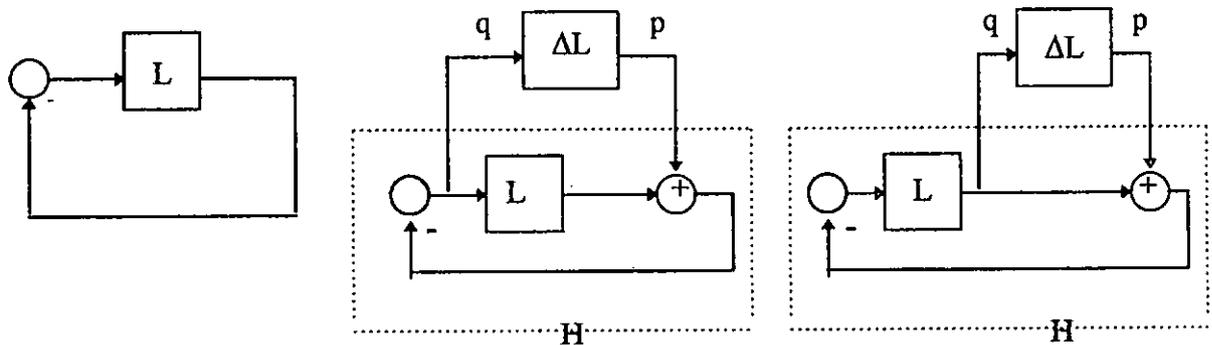
IV.2.1) Les différentes présentations des incertitudes d'un système bouclé: [R].

Nous pouvons considérer deux modèles de perturbations:

a) Le modèle de perturbation additive:

La figure (4.2.a) montre un système avec un retour unitaire, la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à L.

Après avoir perturbé le gain de L à $L+\Delta L$, le système à contre réaction peut être représenté comme dans la figure (4.2.b).



(a): Système nominal (b): Perturbation additive (c): Perturbation multiplicative

Fig. 4.2: Les différentes présentations des incertitudes d'un système bouclé.

On a:

$$\begin{aligned} q &= -p - Lq \quad ; \quad q = -(I+L)^{-1} p = S p \\ \Rightarrow H &= -(I+L)^{-1} = S. \end{aligned} \tag{4.1}$$

S: Fonction de sensibilité.

b) Le modèle de perturbation multiplicative:

La figure (4.2.c) montre le modèle de perturbation multiplicative; La fonction de transfert de la boucle ouverte est : $(I + \Delta L) L$.

On a:

$$\begin{aligned} q &= L (-p - q) \quad ; \\ q &= -(I+L)^{-1} L p = -T p \\ \Rightarrow H &= -(I+L)^{-1} L = -T. \end{aligned} \tag{4.2}$$

T: Fonction de sensibilité complémentaire.

IV.3) Etude de la stabilité robuste:

IV.3.1) Stabilité interne: [Kwa1] (Annexe D)

Considérons le système MIMO de la figure (4.3) avec la fonction de transfert linéaire Φ .

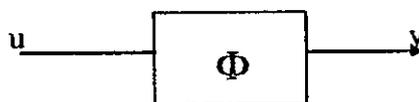


Fig. 4.3: Système avec entrée-sortie.

Si on a pour tout entrée bornée u une sortie bornée $y = \Phi u$, le système est dit stable au sens BIBO (entrée bornée - sortie bornée).

Si la norme considérée pour u et y est la norme H_2 , alors le système est BIBO stable, ssi sa norme ∞ est finie (voir chap. II).

Une autre notion de stabilité liée intimement à la stabilité BIBO concerne les systèmes construits d'interconnexions de plusieurs sous systèmes. Pour ces systèmes, il ne faut pas chercher seulement la stabilité BIBO du système global, mais aussi la stabilité BIBO de tous les sous-systèmes de l'interconnexion, ce qui définit la notion de stabilité interne [Kwa1] [Man].

L'étude qui suit s'intéresse particulièrement à la stabilité interne du système de la figure (4.4 a), qui n'a pas d'entrée-sortie externe.

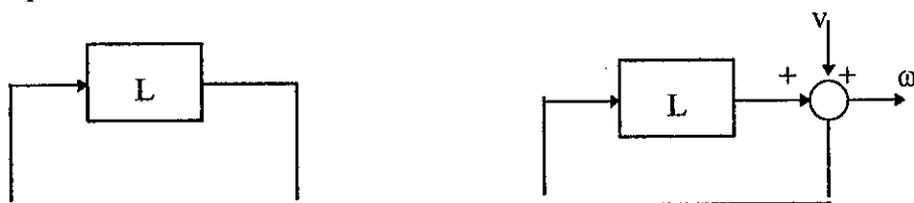


Fig. 4.4:a) Une boucle de contre réaction, b) Une boucle de contre réaction avec l'ajout d'une entrée et une sortie interne

L'ajout d'une entrée interne v et une sortie interne ω correspondante, aboutit au diagramme de la figure (4.4.b)

Par définition le système est dit stable intérieurement si le système d'entrée v et de sortie ω est stable au sens BIBO [Kwa1]. Une autre définition de la stabilité interne est donnée par le théorème des petits gains qui représente le résultat fondamental de la stabilité pour le principal modèle de perturbation.

Théorème des petits gains : [Kwa1] [Man.]

Dans la boucle de contre réaction de la figure (4.4.a), L est supposé stable au sens BIBO. La condition suffisante pour que la boucle de contre réaction de la figure (4.4.a) soit stable intérieurement est que:

$$\| L \|_\infty < 1. \tag{4.3}$$

Le théorème des petits gains est une condition suffisante pour la stabilité interne.

IV.3.2) La stabilité robuste du principal modèle de perturbation:

Soit à étudier la stabilité interne du principal modèle de perturbation de la figure (4.5 a).

Le système est supposé stable à l'état nominal, c.à.d. qu'il est intérieurement stable si $\Delta_H = 0$. La perturbation Δ_H est supposée stable au sens BIBO. L'introduction des entrées et des sorties internes conduit à la figure (4.5.b).

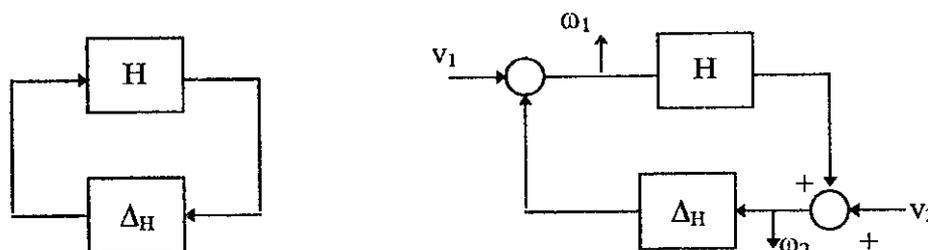


Fig. 4.5: a) Le principal modèle de perturbation b) Le principal modèle de perturbation avec des entrées-sorties ajoutées.

D'après la figure (4.5.b), nous avons:

$$\omega_1 = \Delta_H H \omega_1 + v_1 + \Delta_H v_2. \quad (4.4)$$

$$\omega_2 = H \Delta_H \omega_2 + H v_1 + v_2. \quad (4.5)$$

D'après le théorème du petit gain les équations précédentes ont des solutions ω_1 et ω_2 bornées pour toutes entrées v_1 et v_2 bornées si les inégalités:

$$\|\Delta_H H\|_\infty < 1. \quad \text{et} \quad \|H \Delta_H\|_\infty < 1. \quad (4.6)$$

Sont assurées.

Or

$$\|\Delta_H H\|_\infty = \text{Sup}_\omega \overline{\sigma}(H(j\omega) \Delta_H(j\omega)) \quad (4.7)$$

et

$$\overline{\sigma}(H(j\omega) \Delta_H(j\omega)) \leq \overline{\sigma}(H(j\omega)) \cdot \overline{\sigma}(\Delta_H(j\omega)) \quad [\text{Annexe A}] \quad (4.8)$$

Alors on a:

$$\overline{\sigma}(\Delta_H(j\omega)) < \frac{1}{\overline{\sigma}(H(j\omega))} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (4.9)$$

qui représente une condition suffisante pour la stabilité interne du système perturbé.

Un autre moyen pour reformuler la condition $\|\Delta_H H\|_\infty < 1$ et $\|H \Delta_H\|_\infty < 1$ est de la remplacer par la condition suffisante:

$$\|\Delta_H\|_\infty \|H\|_\infty < 1. \quad (4.10)$$

Cette condition est équivalente à:

$$\|\Delta_H\|_\infty < \frac{1}{\|H\|_\infty} \quad (4.11)$$

La condition (4.11) est rendue nécessaire et suffisante si les perturbations satisfont l'inégalité suivante:

$$\|\Delta_H\|_\infty \leq 1.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste est :

$$\|H\|_\infty < 1.$$

Principaux résultats:

Supposons que dans le principal modèle de perturbation de la figure (4.5.a), H et Δ_H soient stables au sens BIBO.

a) Pour la stabilité interne, il suffit:

$$\overline{\sigma}(\Delta_H(j\omega)) < \frac{1}{\overline{\sigma}(H(j\omega))} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (4.12)$$

b) Une autre condition suffisante pour la stabilité interne est que :

$$\|\Delta_H\|_\infty < \frac{1}{\|H\|_\infty} \quad (4.13)$$

c) En particulier une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste, sous l'effet de perturbations vérifiant $\|\Delta_H\|_\infty \leq 1$, est que $\|H\|_\infty < 1$.
 Dans la forme:

$$\|\Delta_H\|_\infty < \frac{1}{\|H\|_\infty} \tag{4.14}$$

Le résultat fondamental de la stabilité robuste peut être aussi appliqué aux systèmes non linéaires et variants dans le temps. En particulier, même pour des systèmes linéaires présentant des perturbations non linéaires et variants dans le temps [Kwa1].

IV.3.3) La stabilité robuste des systèmes à contre réaction:

Nous allons appliquer les résultats précédents à différents modèles de perturbations pour des systèmes à contre réaction à un degré de liberté. De là nous verrons la version originale MIMO du critère de stabilité robuste de Doyle (voir chapitre précédent).

IV.3.3.1) Perturbations proportionnelles: (perturbations multiplicatives).

Le schéma de la figure (4.6.a) représente une perturbation multiplicative:

$$L \longrightarrow (I + \Delta_L) L. \tag{4.15}$$

puisque : $q = -L(p + q)$
 $\Rightarrow q = -(I + L)^{-1} L p = -T p$

La matrice d'interconnexion $H = -(I + L)^{-1} L = -T$.

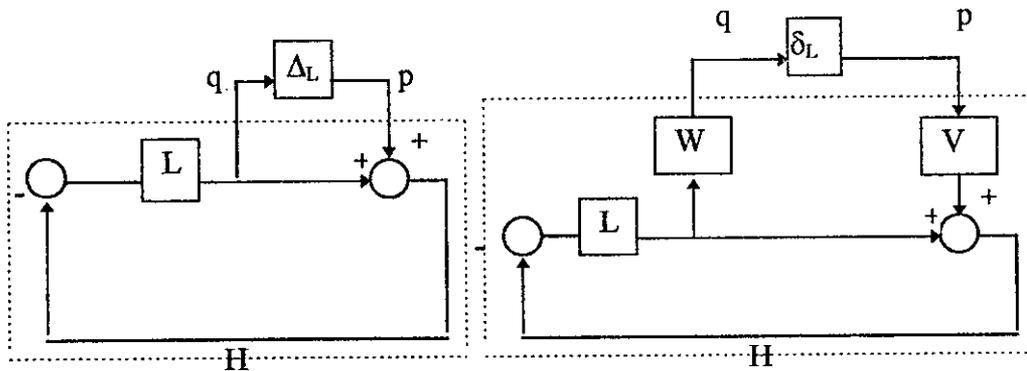


Fig. 4.6:a) perturbation proportionnelle b) perturbation proportionnelle paramétrisée

Avec $T = (I + L)^{-1} L = L (I + L)^{-1}$. La fonction de sensibilité complémentaire du système en boucle fermée.

Une paramétrisation de la perturbation proportionnelle transforme le bloc de diagramme de la figure (4.6.a) en (4.6.b).

La figure (4.6.b) représente une perturbation:

$$L \longrightarrow (I + V \delta_L W) L. \tag{4.16}$$

Où V et W sont accessibles pour les paramétriser tel que:

$$\|\delta_L\|_\infty \leq 1.$$

Pour cette configuration la matrice d'interconnexion $H = -W T V$.

L'application des résultats de (4.2) donne les résultats suivants:

a) Une condition suffisante pour que le système en boucle fermée soit stable sous l'effet des perturbations proportionnelles de la forme: $L \longrightarrow (I + \Delta_L) L$ est :

$$\overline{\sigma}(\Delta_L(j\omega)) < \frac{1}{\sigma(T(j\omega))} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (4.17).$$

avec $T = (I + L)^{-1} L = L (I + L)^{-1}$ la fonction de sensibilité complémentaire.

b) Dans le cas où on a $L \longrightarrow (I + V \delta_L W) L$, le système est stable pour toutes $\|\delta_L\|_\infty \leq 1$, ssi:

$$\|WTV\|_\infty < 1. \quad (4.18).$$

IV.3.3.2) Perturbations proportionnelles inverses:

Les résultats de la sous-section précédente confirment l'importance de la matrice (ou fonction) de sensibilité complémentaire pour la robustesse.

Nous allons compléter cela avec le résultat "dual" concernant la fonction de sensibilité. Pour cela considérons la figure (4.7.a), où la perturbation $\Delta_{L^{-1}}$ est incluse dans la boucle de réaction.

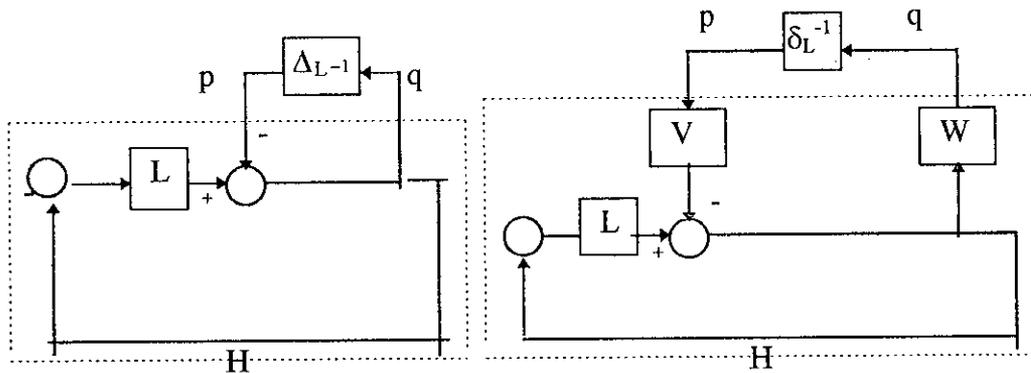


Fig. 4.7: a) perturbation proportionnelle inverse b) perturbation proportionnelle inverse paramétrisée

Le modèle de la figure (4.7.a) représente une perturbation

$$L \longrightarrow (I + \Delta_{L^{-1}})^{-1} L \quad (4.19).$$

Supposons que L possède un inverse L^{-1} , on aura alors

$$L^{-1} \longrightarrow L^{-1} (I + \Delta_{L^{-1}}) \quad (4.20).$$

D'après la figure (4.7.a), nous avons: $q = - (I + L)^{-1} p$.

Ce qui donne:

$$H = - (I + L)^{-1} = -S. \quad (4.21).$$

S est la matrice de sensibilité de la boucle de contre réaction.

Après une paramétrisation nous obtenons le modèle de la figure (4.7.b). Il représente une perturbation de la forme:

$$L^{-1} \longrightarrow L^{-1} (I + V \delta_{L^{-1}} W) \quad (4.22).$$

Nous choisissons V et W de sorte qu'à $\|\delta_{L^{-1}}\|_\infty \leq 1$.

La matrice d'interconnexion $H = -W S V$.

L'application de (4.2) donne les résultats suivants:

Supposons que le système à contre réaction de la figure (4.7) est stable à l'état nominal.

a) Sous l'effet des perturbations de la forme (4.20)

la condition suffisante pour la stabilité est que:

$$\overline{\sigma}(\Delta_{L^{-1}}(j\omega)) < \frac{1}{\sigma(S(j\omega))} \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (4.23)$$

Avec $S = (I + L)^{-1}$ la matrice de sensibilité de la boucle à contre réaction.

b) Pour les perturbations paramétrisées de la forme (4.22), le système fermé est stable pour toutes $\|\delta_{L^{-1}}\|_\infty \leq 1$ ssi:

$$\|W S V\|_\infty < 1. \quad (4.24)$$

Remarque: (Perturbations des procédés avec des pôles et zéros situés sur le demi-plan droit)
 Les tests de la stabilité robuste non structurée dérivent du théorème de Petit gain, et du fait que Δ_L est BIBO stable. Ceci est très restrictif si le gain L lui même est un système instable. Alors d'après [Kwa1] la supposition de stabilité des perturbations est relaxée à la supposition que le gain en boucle ouverte nominal et le gain en boucle ouverte perturbé ont le même nombre de pôles instables. Le même raisonnement pour le gain en boucle ouverte inverse est valable.

IV.3.3.3) Perturbations fractionnelles:

Un autre modèle de perturbation rencontré dans la littérature [Kwa1] est ce qu'on appelle les perturbations fractionnelles. Il combine les perturbations du gain de boucle et de l'inverse gain de boucle.

Dans cette analyse le gain de boucle L est représenté comme:

$$L = N D^{-1} \quad (4.25)$$

Où D est une matrice rationnelle non singulière carrée et le numérateur N est une matrice rationnelle. Toute matrice de transfert L peut être représenté par une équation (4.25). La figure (4.8) montre le modèle de perturbation fractionnelle.

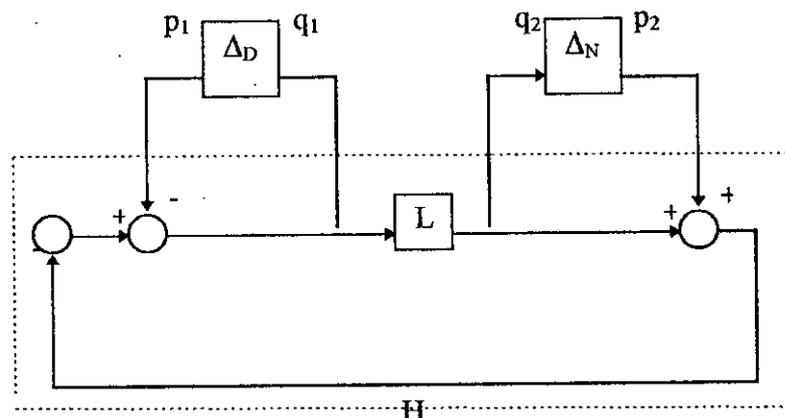


Fig 4.8: Modèle de perturbation fractionnelle.

La perturbation est donnée par :

$$L \longrightarrow (I + \Delta_N) L (I + \Delta_D)^{-1}. \quad (4.26)$$

Où

$$N D^{-1} \longrightarrow (I + \Delta_N) N D^{-1} (I + \Delta_D)^{-1}. \quad (4.27)$$

Avec

$$D^{-1} \longrightarrow D^{-1} (I + \Delta_D)^{-1}.$$

$$\text{et } N \longrightarrow (I + \Delta_N) N.$$

Donc Δ_D et Δ_N représentent les perturbations proportionnelles respectives du dénominateur et du numérateur.

Donc la configuration de la figure (4.8) est équivalente à celle de la figure (4.9.a) et (4.9.b).

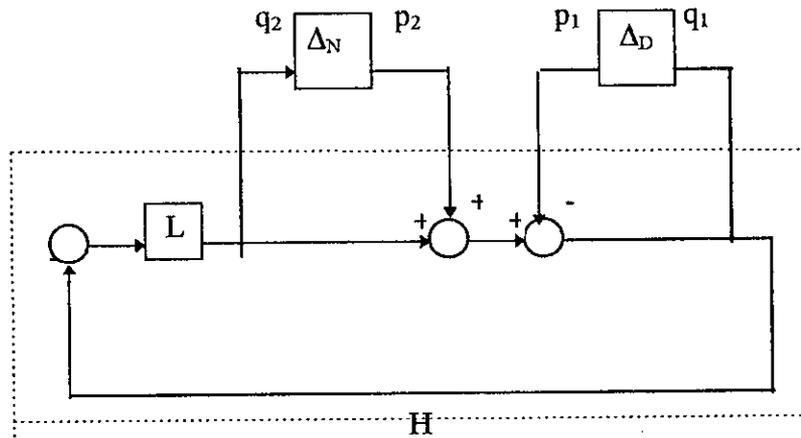
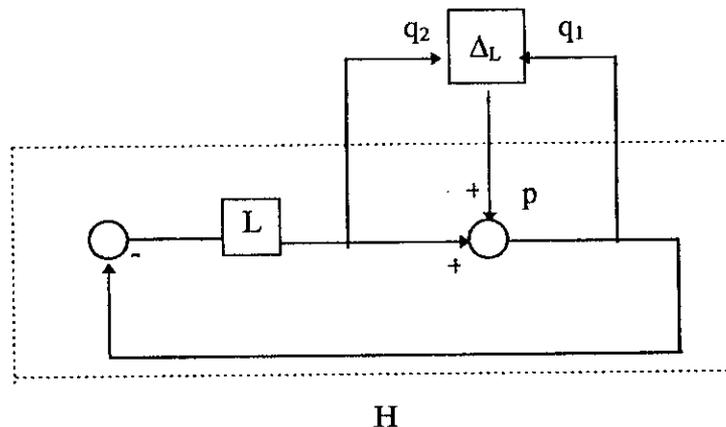


Fig. 4.9 : a) Configuration équivalente au modèle de perturbation fractionnelle



b) Configuration équivalente au modèle de perturbation fractionnelle

D'après la figure (4.9.b),

$$p = -p_1 + p_2 = -\Delta_D q_1 + \Delta_N q_2 = \Delta_L \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Avec:
$$\Delta_L = \begin{bmatrix} -\Delta_D & \Delta_N \end{bmatrix}$$

$$q_1 = (I + L)^{-1} p = S p. \tag{4.28}$$

$$q_2 = -L (I + L)^{-1} p = -T p. \tag{4.29}$$

$$S = (I + L)^{-1}$$

$$\text{et } T = L (I + L)^{-1}.$$

La matrice d'interconnexion est:

$$H = \begin{bmatrix} S \\ -T \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Après paramétrisation des perturbations Δ_D et Δ_N , nous obtenons la figure (4.10).

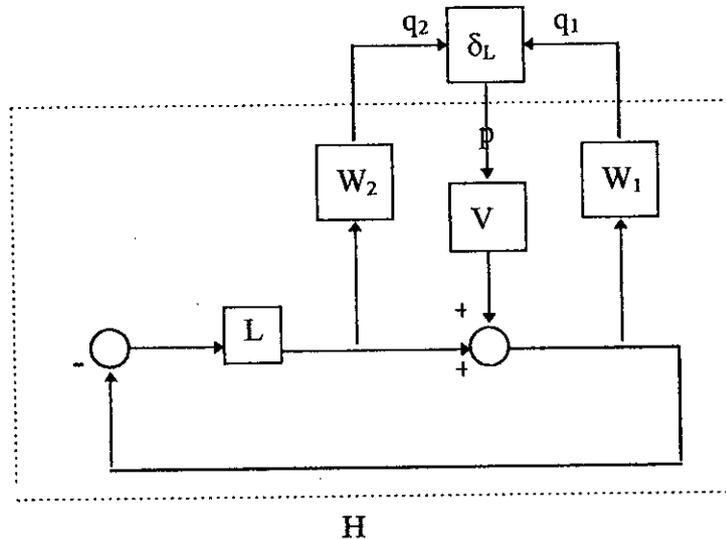


Fig 4.10: Perturbation fractionnelle avec une paramétrisation.

$$\Delta_D = V \delta_D W_1, \quad \Delta_N = V \delta_N W_2 \tag{4.31}$$

Où V , W_1 et W_2 sont des matrices rationnelles stables choisies convenablement de sorte que,

$$\|\delta_L\|_\infty \leq 1,$$

avec:

$$\delta_L = \begin{bmatrix} -\delta_D & \delta_N \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Ainsi la matrice d'interconnexion devient :

$$H = \begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 T V \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

Le système en boucle fermée de la figure (4.8) est stable pour toutes perturbations:

$$\delta_L = \begin{bmatrix} -\delta_D & \delta_N \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \|\delta_L\|_\infty \leq 1 \quad \text{ssi:} \tag{4.34}$$

$$\|H\|_\infty \leq 1.$$

avec H vérifiant la condition (4.33).

Nous verrons par la suite que la minimisation de la norme H_∞ de H est une version du problème de sensibilité mixte, qui est l'optimisation simultanée de la fonction de sensibilité S et de sa complémentaire T .

Dans le chapitre VI, nous allons montrer dans les exemples d'applications des systèmes soumis à des perturbations fractionnelles que la minimisation de la norme H_∞ de la matrice H est un cas particulier du problème d'optimisation H_∞ standard.

Ce problème est connu sous le nom de "**problème de sensibilité mixte de Kwakernaak**".

IV.3.4) Conclusion:

De cette étude nous pouvons retenir que l'application du théorème des petits gains sur le principal modèle de perturbation a abouti à la condition nécessaire et suffisante de la stabilité robuste des systèmes sous l'effet de perturbations satisfaisant $\|\Delta_H\|_\infty \leq 1$ et qui est $\|H\|_\infty < 1$. Comme nous l'avons dit précédemment (Chapitre I) ce résultat fondamental de la stabilité robuste est la principale motivation du développement de la théorie H_∞ .

Contrairement au critère de stabilité robuste de Nyquist développé au chapitre III, ce résultat peut être aussi appliqué aux systèmes non linéaires et variants dans le temps. En particulier, même pour des systèmes linéaires présentant des perturbations non linéaires et variants dans le temps [Kwa1].

IV.4) Compromis robustesse performance:

Dans cette partie, nous allons voir comment ramener les problèmes de robustesse et de performance à des problèmes H_∞ standard.

Pour le principal modèle de perturbation de la figure (4.11), le problème est de déterminer le contrôleur K qui permet d'obtenir un $\|H\|_\infty < 1$ (H étant le transfert de p vers q), pour toutes perturbations $\|\Delta_H\|_\infty < 1$ (théorème des petits gains).

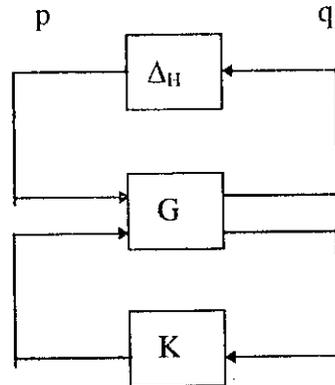


Fig. 4.11: Principal modèle de perturbation avec contrôleur K .

Dans un premier temps, nous allons considérer le schéma de régulation de la figure (4.12), et nous allons montrer que les performances peuvent être traitées de la même manière que les problèmes de la stabilité robuste. De là, nous verrons que l'approche H_∞ est un outil permettant de bien réaliser le compromis robustesse/performances [Bou].

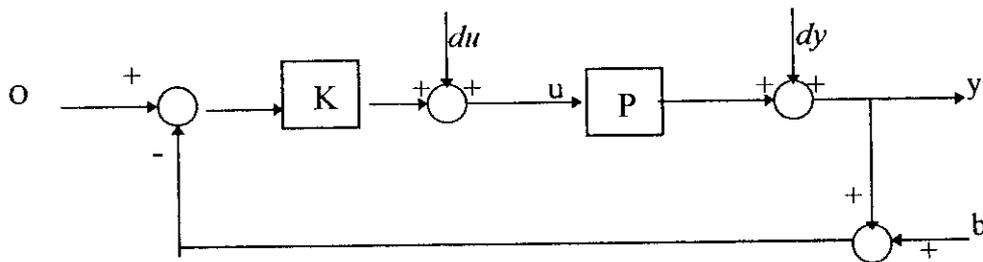


Fig. 4.12: Schéma de régulation.

Dans ce qui, suit l'étude sera consacrée au cas des systèmes monovariables, puis des modifications seront indiquées pour le cas multivariable

IV.4.1) Robustesse vis à vis de dynamiques négligées: [Bou]

Considérons le schéma de la figure (4.12). Pour des raisons de simplicité, nous n'allons pas considérer les perturbations. Envisageons tout d'abord le cas d'une erreur multiplicative sur le système P de sorte qu'on ait:

$$\tilde{P} = (I + E) P. \tag{4.35}$$

Nous supposons que \tilde{P} a le même nombre de pôles à parties strictement positives que P . E est l'erreur du modèle multiplicatif, elle est supposée stable. Supposons aussi qu'il existe une fonction W_1 appartenant à RH_∞ tel que:

$$E = \Delta W_1 \quad \text{où} \quad \|\Delta\|_\infty < 1 \tag{4.36}$$

Le schéma de régulation de la figure (4.12) se met alors sous la forme de la figure (4.13).

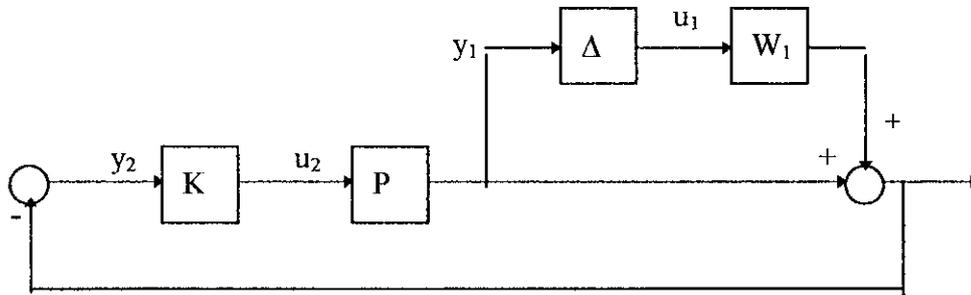


Fig. 4.13: Schéma de régulation avec erreur de modèle en sortie.

Ce schéma peut se mettre sous la forme indiquée sur la figure(4.14) que nous appellerons schéma standard. [Chapitre II]

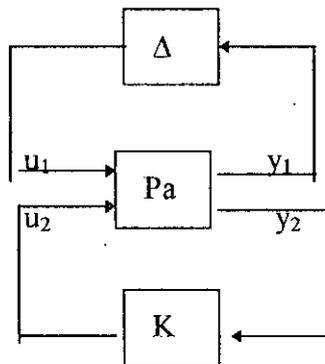


Fig. 4.14: Schéma standard.

Le système P_a ci-dessus est appelé le système augmenté, sa matrice de transfert dans l'exemple étudié ici est:

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 & P \\ -W_1 I & -P \end{pmatrix}$$

Soit $F_b(P_a, K)$ l'opérateur d'entrée u_1 et de sortie y_1 lorsque $\Delta = 0$, et $F_h(P_a, \Delta)$ l'opérateur d'entrée u_2 et de sortie y_2 lorsque $K = 0$.

Dans le cas général où $P_a = \begin{pmatrix} P_{a11} & P_{a12} \\ P_{a21} & P_{a22} \end{pmatrix}$, nous avons

$$F_b(P_a, K) = P_{a11} + P_{a12} K (I - P_{a22} K)^{-1} P_{a21} \tag{4.37}$$

$$F_h(P_a, \Delta) = P_{a21} \Delta (I - P_{a11} \Delta)^{-1} P_{a12} + P_{a22}$$

Dans le cas spécifique étudié ici, nous avons donc:

$$F_h(P_a, \Delta) = -(W_1 \Delta + I) P = -\tilde{P}, \text{ et}$$

$$F_b(P_a, K) = -PK (I + PK)^{-1} W_1 = -W_1 T.$$

Les transformations F_b et F_h ci-dessus sont appelées des transformations linéaires fractionnaires.

De façon générale, soit $B_1(P_a)$ l'ensemble des opérateurs Δ linéaires, stationnaires et de dimension fixe, dont la matrice de transfert Δ vérifie $\|\Delta\|_\infty < 1$.

De là peut s'énoncer le théorème (4.1) général fondé sur le théorème des petits gains et dont l'avantage réside dans le fait qu'il permet de traiter des problèmes non linéaires [Bou].

Théorème (4.1):

Supposons que K stabilise $F_h(P_a, 0)$, alors K stabilise $F_h(P_a, \Delta)$ pour tout Δ dans $B_1(P_a)$ ssi:

$$\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq 1. \tag{4.38}$$

Pour le cas étudié, la condition nécessaire et suffisante pour que K stabilise le système perturbé, pour tout Δ dans $B_1(P_a)$ et que:

$$\|W_1 T\|_\infty \leq 1. \tag{4.39}$$

IV.4.2) Performances: [Bou]

a)- Rejet de la perturbation sur la sortie:

Pour simplifier l'étude, il faut considérer dans le schéma de régulation de la figure (4.12) que la perturbation "dy", ce qui conduit au schéma de la figure (4.15).

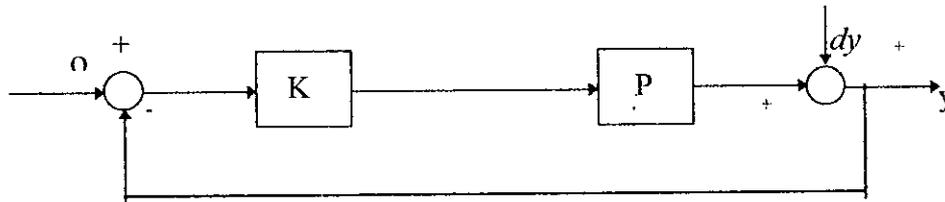


Fig. 4.15: Schéma de régulation avec perturbation sur la sortie.

La première performance qu'il est nécessaire de demander à la régulation est d'assurer un bon rejet de cette perturbation. Cela sera vérifié à condition que la fonction de transfert entre dy et y , à savoir la fonction de sensibilité S , soit suffisamment faible en module, aux fréquences où la perturbation dy est notable (Parag.III.2.3).

De façon générale, la théorie suppose l'existence d'une fonction de transfert W_2 , telle que le rejet de la perturbation dy est correctement effectué si:

$$|W_2(i\omega) S(i\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathfrak{R}.$$

Le système bouclé nominal doit évidemment être stable, donc S doit appartenir à H_∞ . La condition ci-dessus équivaut par conséquent à:

$$\|W_2 S\|_\infty \leq 1. \tag{4.40}$$

• Equivalence à un problème de stabilité robuste:

La condition (4.40), caractérisant le type de performance envisagé ici, est de la même forme que la condition de stabilité robuste.

En effet, considérons le système bouclé perturbé de la figure (4.16).

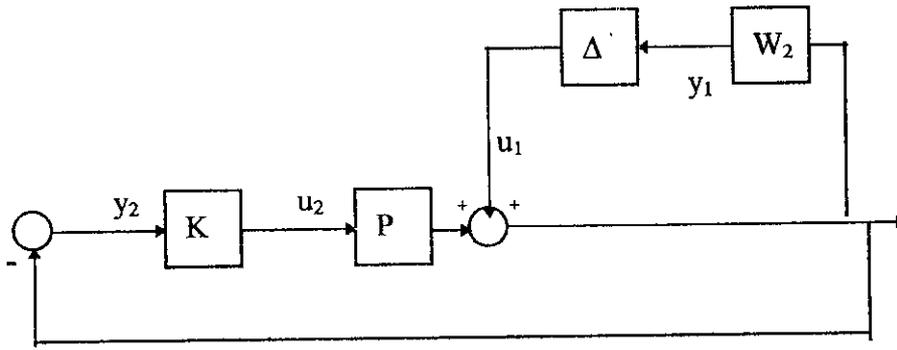


Fig.4.16: Système bouclé perturbé associé au problème de rejet de perturbation sur la sortie.

En utilisant le théorème (4.1), on montre immédiatement que ce système bouclé perturbé est stable pour toute Δ dans $B_1(P_s)$, si et seulement si la condition (4.40) est satisfaite.

De manière générale, tout problème de performance pouvant se mettre sous la forme :

$$\|F_b(P_s, K)\|_\infty \leq 1,$$

est d'après le théorème (4.1), équivalent à un problème de stabilité robuste.

Pour l'exemple étudié, le système augmenté:

$$P_a = \begin{pmatrix} W_2 & W_2 P \\ -I & -P \end{pmatrix}.$$

b)- Atténuation de l'effet de "du" sur "y": [Bou]

Il peut aussi advenir que la perturbation du de la figure (4.12) soit présente.

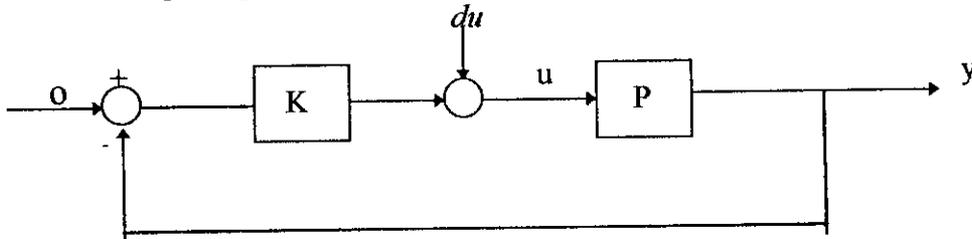


Fig. 4.17: Schéma de régulation avec perturbation sur l'entrée du procédé (du).

D'après ce schéma, nous avons:

$$y = P S du .$$

Donc la perturbation "du" n'affecte pas trop gravement la sortie "y", si la fonction de transfert PS a un module qui reste suffisamment faible aux fréquences où agit cette perturbation.

On définit alors une fonction de transfert stable W_3 telle que l'effet de "du" sur "y" soit suffisamment atténué si:

$$\|W_3 P S\|_\infty \leq 1 \tag{4.41}.$$

Une telle contrainte de performance a également pour effet d'empêcher une simplification entre un pôle presque instable de P et un zéro de K [Bou].

Cette contrainte est de même forme que (4.40), avec une pondération fréquentielle $W'_2 = W_3 P$. Elle est donc équivalente à une condition de stabilité robuste.

b)- Atténuation de l'effet de "b" sur "u": [Bou] [R]

D'après la figure (4.12), nous avons:

$$u = -K S b .$$

Il faut définir une nouvelle fonction de transfert W_4 , telle que l'effet du bruit de mesure "b" sur "u" soit convenablement atténué, d'où:

$$\| W_4 K S \|_\infty \leq 1 \tag{4.42}$$

Ce problème de performance est équivalent au problème de stabilité robuste du système bouclé de la figure (4.18).

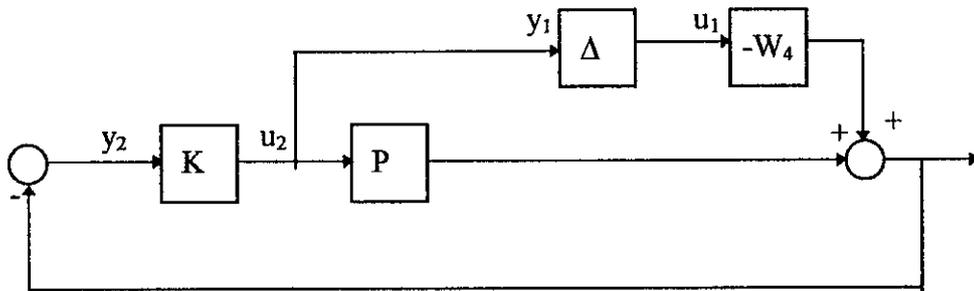


Fig. 4.18: Système bouclé perturbé associé au problème d'atténuation de l'effet du bruit de mesure "b" sur la commande.

On a dans ce cas:

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_4 & -P \end{pmatrix} .$$

IV.4.3) Bilan des conditions obtenues et "Loop shaping":

Pour assurer une bonne robustesse vis à vis des dynamiques négligées, le système bouclé nominal doit satisfaire la condition suivante:

$$\| W_1 T \|_\infty \leq 1 \tag{4.43}$$

Où $| W_1(i\omega) |$ est un majorant de l'erreur de modèle multiplicative.

Cette erreur est le plus souvent assez faible dans les basses fréquences, et importantes dans les hautes fréquences là où sont les dynamiques négligées.

Si on considère une pulsation ω pour laquelle on ait une importante erreur de modèle, c'est à dire:

$$| W_1(i\omega) | \gg 1 \tag{4.44}$$

Pour que la condition (4.43) soit satisfaite, il est nécessaire que:

$$| T(i\omega) | \ll 1 \tag{4.45}$$

Ce qui équivaut à : $| L(i\omega) | \ll 1$.

Pour $| L(i\omega) | \ll 1$, on a: $L(i\omega) \approx T(i\omega)$, et la condition (4.43) entraîne donc:

$$| L(i\omega) | \leq \frac{1}{| W_1(i\omega) |} \tag{4.46}$$

Revenons maintenant sur la question des performances, et en premier lieu sur le rejet d'une perturbation sur la sortie. Le système bouclé doit satisfaire la relation suivante:

$$\|W_2 S\|_\infty \leq 1 \tag{4.47}$$

Considérons une pulsation ω à laquelle il faut une performance élevée (c'est à dire à laquelle $|dy(i\omega)|$ peut être grand). A cette pulsation, on a donc:

$$|W_2(i\omega)| \gg 1 \tag{4.48}$$

Pour que la condition (4.47) soit satisfaite, il est nécessaire que: $|S(i\omega)| \ll 1$, et donc: $|L(i\omega)| \gg 1$. Ainsi, il est nécessaire que le gain de la fonction de transfert de la boucle ouverte soit grand aux fréquences où l'on veut un bon rejet de perturbation. Il est donc absolument impossible d'assurer un bon rejet de perturbation à une fréquence où l'erreur de modèle non

structurée est importante. Pour $|S(i\omega)| \ll 1$, on a: $|L(i\omega)| \approx \frac{1}{S(i\omega)}$, et la condition (4.47)

entraîne donc:

$$|L(i\omega)| \geq |W_2(i\omega)| \tag{4.49}$$

Les conditions qui viennent d'être obtenues ont leur traduction immédiate sur le lieu de Bode de L . Considérons par exemple le cas classique où le gain de $L(i\omega)$ est une fonction décroissante de ω . Alors on doit "conformer la boucle" de façon que le lieu de Bode ait l'allure indiquée sur la figure (4.19).

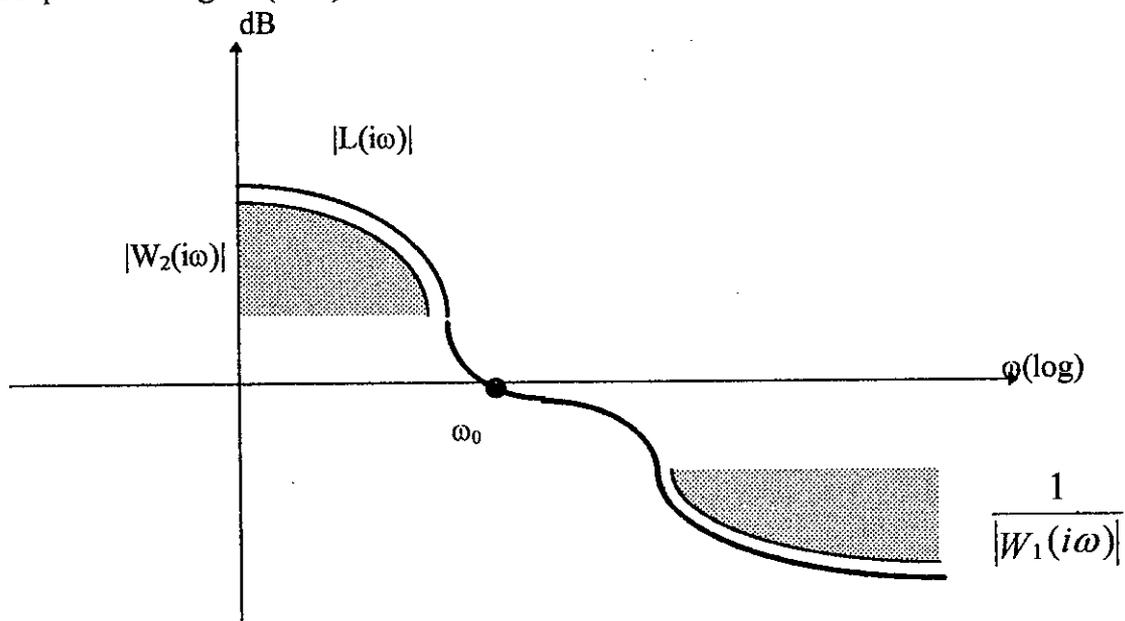


Fig. 4.19: "Loop shaping".

Il faut noter qu'un bon "Loop shaping" est nécessaire, mais non suffisant. En effet il reste encore à satisfaire les conditions suivantes:

$$\|W_3 P S\|_\infty \leq 1 \tag{4.50}$$

$$\|W_4 K S\|_\infty \leq 1 \tag{4.51}$$

La condition (4.50) impose de ne pas réaliser un "Loop shaping universel", comme celui de la figure (4.19), mais de réaliser un "Loop shaping" dépendant de P . En effet, si le gain de P présente un pic de résonance, l'absence de simplification du pôle correspondant impose que le gain de L ait le même pic de résonance.

Aux fréquences hautes, la condition (4.51) impose à ce que:

$$|K(i\omega)| \leq \frac{1}{|W_4(i\omega)|} \quad [\text{Bou}] .$$

Elle se traduit donc par une limitation du gain du régulateur dans les hautes fréquences.

IV.4.4) Cas des systèmes multivariables:

Dans le cas multivariables, des pondérations fréquentielles scalaires sont souvent insuffisantes.

La condition (4.43) sera donc remplacée par $\|W_1 T_i W_1\|_\infty \leq 1$, avec: $i=e$ ou $i=s$ suivant que l'erreur de modèle multiplicative est en entrée ou en sortie.

Remarque:

Dans le cas multivariable, les matrices de transfert P et K ne commutent pas. On doit donc distinguer la matrice de transfert de la boucle ouverte en entrée L_e et la matrice de transfert de la boucle ouverte en sortie L_s . Ces fonctions de transfert sont définies par:

$$L_e = KP, \quad L_s = PK.$$

De même, on est amené à distinguer les matrices de sensibilité en entrée et en sortie, S_e et S_s , ainsi que leurs matrices complémentaires respectives, T_e et T_s , définies par:

$$S_i = (I + L_i)^{-1}, \quad T_i = (I + L_i)^{-1} L_i .$$

avec: $i = e$ ou s . On a aussi: $S_i + T_i = I$.

Pour la figure (4.12), on a :

$$\begin{aligned} y &= S_s dy + S_s P du - T_s b \\ u &= S_e du - S_e K(b + dy) \end{aligned}$$

De même, la condition (4.47) sera remplacée par $\|W_2 S_s W_2\|_\infty \leq 1$.

De la même manière la condition (4.50) sera à remplacer par $\|W_3 S_s P W_3\|_\infty \leq 1$,

et la condition (4.51) par: $\|W_4 S_e K W_4\|_\infty \leq 1$.

Ces pondérations fréquentielles matricielles sont en général difficiles à déterminer.

L'extension du concept de "Loop shaping" au cas multivariable n'est pas toujours possible. Cette extension devient en revanche assez naturelle lorsque le problème de commande et le système à régler ont des caractéristiques telles que des pondérations fréquentielles scalaires peuvent être utilisées. L'idée consiste alors à remplacer le module de L par les valeurs singulières de L_s [Doy1].

Supposons, comme pour le cas monovariable, que l'erreur de modèle multiplicative (supposée en sortie) soit importante dans les hautes fréquences, et que les performances soient assignées dans les basses fréquences.

La condition (4.43) se traduira alors dans les hautes fréquences par:

$$\overline{\sigma}(L_s(i\omega)) \leq \frac{1}{|W_1(i\omega)|} \tag{4.52}$$

et la condition (4.47) se traduira dans les basses fréquences par:

$$\underline{\sigma}(L_s(i\omega)) \geq |W_2(i\omega)| \tag{4.53}$$

$\overline{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ sont les valeurs singulières maximale et minimale de $(L_s(i\omega))$ [Annexe A].

Ces deux inégalités se traduisent par le "Loop shaping" multivariable de la figure(4.20) comme pour le cas monovariable. Le "Loop shaping" est nécessaire mais non suffisant.

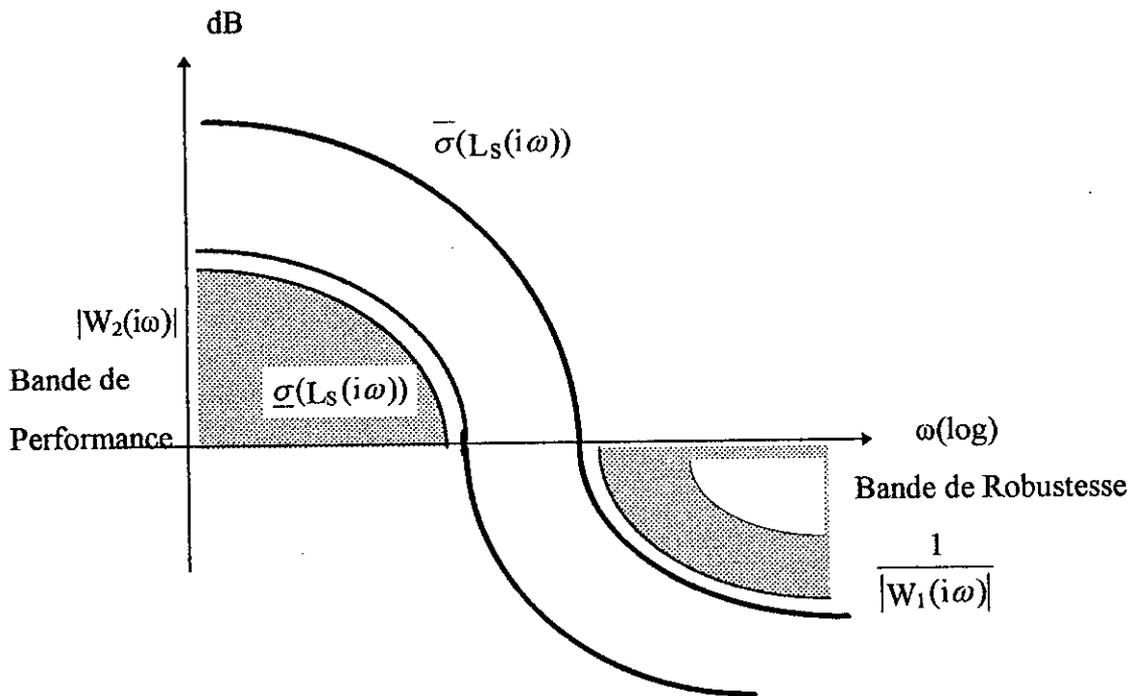


Fig. 4.20: Loop shaping multivariable.

De plus nous avons: $\underline{\sigma}(L_s(i\omega)) \approx \frac{1}{\sigma(S(i\omega))}$ dans les basses fréquences.
 et $\overline{\sigma}(L_s(i\omega)) \approx \overline{\sigma}(T(i\omega))$ dans les hautes fréquences.

Pour terminer cette section, signalons l'approche très intéressante développée par McFarlane et Glover, fondée sur la notion de factorisation copremière de la matrice de transfert P [Annexe D], et qui permet de réaliser un "loop shaping" multivariable respectant la condition de non simplification des pôles oscillants peu amortis de P par les zéros de K , ainsi que la condition de limitation du gain de K dans les hautes fréquences. L'exposé complet de cette approche nous mènerait trop loin, mais nous pouvons indiquer dans ce qui suit le principe de la procédure de conception [Zho2] :

- 1- Loop shaping : Utilisant un précompensateur W_1 et /ou un postcompensateur W_2 , les valeurs singulières du procédé nominal sont conformés pour donner la forme désirée à la boucle ouverte. Le procédé nominal P et les fonctions de conformation W_1 , W_2 sont combinés pour former le procédé conformé P_s , où $P_s = W_2 P W_1$. Nous supposons que W_1 et W_2 sont tel que P_s ne contient pas des modes cachés (conserve ses pôles oscillants).
- 2- Stabilité robuste : Dans cette approche la stabilité robuste est vérifiée en calculant un certain paramètre ϵ_{\max} qui est fonction des matrices \tilde{M}_s, \tilde{N}_s , de la factorisation copremière de P_s , où $P_s = \tilde{M}_s^{-1} \tilde{N}_s$.
 - (a) si $\epsilon_{\max} \ll 1$, il faut retourner vers (1) et ajuster W_1 et W_2 , car la forme spécifiée pour la boucle est compatible avec les conditions de la stabilité robuste
 - (b) Sinon, on calcule le contrôleur K_∞ [Zho2].
- 3- Le contrôleur final est égal à : $K = W_1 K_\infty W_2$.

Remarque : Dans cette procédure de conception, il est spécifié au départ que la forme souhaitée à la boucle ouverte est W_2PW_1 (P_s). Mais après l'étape (2), la forme de la boucle actuelle est réalisée par $W_1K_\infty W_2P$ (ou $PW_1K_\infty W_2$). Il est donc possible que l'inclusion de K_∞ dans la fonction de transfert de la boucle ouverte cause une détérioration à cette forme . Dans [Zho2], on montre que la dégradation de la forme de la boucle causée par le contrôleur K_∞ est limitée aux fréquences où la forme spécifiée pour la boucle est suffisamment large ou suffisamment petite. Donc la boucle ouverte conserve pratiquement sa forme spécifiée au départ (les pôles oscillants peu amortis de P réapparaissent dans la boucle).

IV.4.5) Le problème H_∞ standard: [Bou] [Kwa1] [Fra1]

Le problème de sensibilité mixte:

Le problème H_∞ standard qu'on a déjà présenté au chapitre II peut se définir de la manière suivante:

" Etant donné un système augmenté Pa , trouver un régulateur K tel que:

$$J(K) = \|F_b(Pa, K)\|_\infty$$

soit inférieur ou égal à 1".

On a vu dans ce qui précède que le problème de "stabilité robuste " était de cette nature (condition(4.39)) de même que les différents problèmes de performance envisagés (conditions (4.40), (4.41) et (4.42)).

Toute fois, en pratique, ces différents problèmes ne sont pas dissociés et nous verrons dans ce qui suit qu'on peut considérer globalement l'ensemble de ces problèmes, en les ramenant à un unique problème standard. Nous n'envisagerons que le cas monovariante.

En rassemblant sur un même schéma les bouclages perturbateurs des figures (4.13), (4.16) et (4.18), et en tenant compte de la contrainte (4.41), on parvient au système bouclé de la figure (4.21).

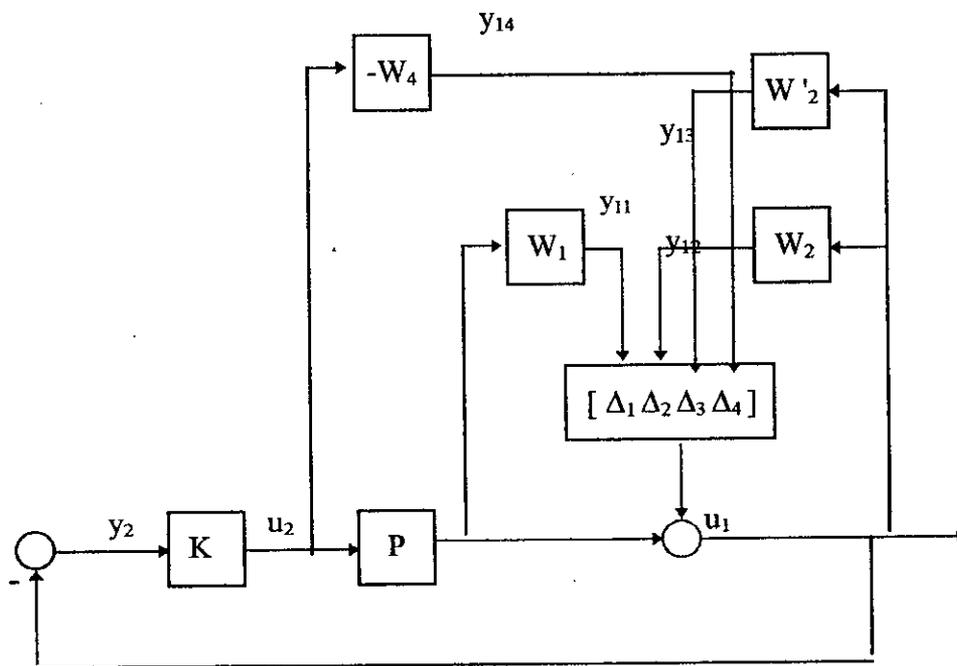


Fig. 4.21: Système contrôlé avec bouclages perturbateurs.

Le système bouclé se met sous la forme standard de la figure (4.14).

Le système augmenté P_a correspondant a une matrice de transfert:

$$P_a = \begin{pmatrix} P_{a11} & P_{a12} \\ P_{a21} & P_{a22} \end{pmatrix}.$$

Avec:

$$P_{a11} = \begin{pmatrix} 0 & W_2 & W_2' & 0 \end{pmatrix}^T.$$

$$P_{a12} = \begin{pmatrix} W_1 P & W_2 P & W_2' P & -W_4 \end{pmatrix}^T.$$

$$P_{a21} = -1.$$

$$P_{a22} = -P.$$

En appliquant (4.37), on obtient:

$$F_b(P_a, K) = \begin{pmatrix} -W_1 T \\ W_2 S \\ W_2' S \\ W_4 K S \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 4.1, la condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé de la figure (4.21) soit stable pour toute perturbation $\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4)$ appartenant à $B_1(P_a)$ est que l'inégalité:

$$\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq 1 \text{ soit satisfaite.}$$

Par conséquent, cette condition est suffisante pour que les conditions (4.39), (4.40), (4.41), (4.42) soient satisfaites.

IV.5) Conclusion:

Dans ce chapitre, on a montré que le problème fondamental qui consiste à synthétiser un régulateur réalisant un bon compromis Robustesse / Performance, se ramène à un problème H_∞ standard.

Nous avons illustrer aussi à partir des différentes conditions de la stabilité robuste et des performances, la notion de "loop shaping" monovariante et multivariante. L'objectif du "loop shaping" est de donner une certaine forme à la boucle ouverte de sorte qu'elle réalise en même temps les spécifications de la robustesse et des performances.

Dans le prochain chapitre, nous donnerons un aperçu sur la commande LQG, puis nous aborderons le problème de résolution du problème de commande H_∞ standard.

Chapitre V :

**RESOLUTION DU PROBLEME
STANDARD: COMMANDE LQG ET
COMMANDE H_{∞}**

Chapitre V: *Résolution du problème standard* *commande LQG et commande H_∞*

V.1) Introduction:

Ce chapitre est réservé à la résolution du problème H_∞ standard. L'algorithme qui sera présenté est l'algorithme de Glover-Doyle [Glo1], il utilise une représentation d'état et donne une solution très proche de la commande linéaire quadratique gaussienne, LQG.

Avant d'introduire cet algorithme de résolution, nous allons donner un aperçu sur le principe de la commande robuste LQG, ainsi nous pourrions distinguer la ressemblance mathématique qui existe entre la commande H_∞ et la commande LQG.

Etant donné que dans le cas générale, la solution du problème standard est assez complexe, nous allons présenter une solution pour un cas particulier où la solution est beaucoup plus simple, et où l'interprétation du résultat est beaucoup plus aisée. Le cas général, sera présenté dans l'annexe B, avec une simplification de l'algorithme pour des cas particuliers.

Des petites modifications peuvent être apportées sur la commande LQG pour lui permettre de résoudre le problème standard, ceci est présenté dans l'annexe C.

V.2) La commande LQG.:

Le but principal de la commande optimale LQG est d'optimiser les performances d'un système linéaire invariant dans le temps en présence des perturbations (Bruit Blanc).

La méthode LQG est une combinaison de deux méthodes différentes de synthèse du contrôleur: Le contrôleur linéaire quadratique (LQ) et le filtre optimal de Kalman - Bucy (KBF) [Fri].

V.2.1) Le contrôleur optimal LQ.:

Pour le contrôleur optimal LQ, il faut chercher une loi de commande optimale pour un système représenté par l'équation différentielle matricielle suivante:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (5.1)$$

où x : est le vecteur d'état,

u : l'entrée de commande.

A et B sont des matrices connues.

La loi de commande u doit être linéaire et égale à:

$$u(t) = -G x(t). \quad (5.2)$$

où G est la matrice gain minimisant l'indice de performance suivant:

$$J = \int_{\tau}^T \left[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)Ru(t) \right] dt \quad (5.3)$$

Q et R sont des matrices poids symétriques, leur choix dépend du système que le concepteur veut réaliser.

τ : temps initial.

T : temps final.

La résolution du problème optimal précédent [Fri] aboutit à un gain optimal \hat{G} donné par l'équation suivante:

$$\hat{G} = R^{-1} B^T \hat{M}. \quad (5.4).$$

\hat{M} est solution d'une équation connue sous le nom d'équation de Riccati.

$$-\dot{\hat{M}} = \hat{M} A + A^T \hat{M} - \hat{M} B R^{-1} B^T \hat{M} + Q. \quad (5.5).$$

En régime permanent (l'intervalle de commande est infini).

$\dot{\hat{M}}$ tend vers zéro et \hat{M} vers \bar{M} .

$$\text{Nous aurons: } \bar{G} = R^{-1} B^T \bar{M}. \quad (5.6).$$

avec:

$$0 = \bar{M} A + A^T \bar{M} - \bar{M} B R^{-1} B^T \bar{M} + Q. \quad (5.7).$$

L'équation algébrique de Riccati (5.7) admet alors une solution définie positive \bar{M} minimisant J_∞ ssi:

- a) Le système est asymptotiquement stable,
- b) Le système défini par les matrices (A,B) est contrôlable et celui défini par (A,C) (avec $C^T C = Q$) est observable.

La loi de commande $u = -R^{-1} B^T \bar{M} x$ est alors utilisée.

Cas général:

Dans la plupart des problèmes de commande LQG l'indice de performance est donné sous la forme de l'équation (5.3). Dans certains problèmes les performances sont spécifiées dans l'indice suivant:

$$V = \int_0^\infty (x^T Q x + x^T S^T u + u^T S x + u^T R u) d\tau. \quad (5.8).$$

le gain optimal pour ce problème est donné par

$$\bar{G} = R^{-1} (B^T \bar{M} + S). \quad (5.9).$$

où \bar{M} est solution de l'équation de Riccati suivante:

$$A^T \bar{M} + \bar{M} A - (\bar{M} B + S) R^{-1} (B^T \bar{M} + S^T) + Q = 0. \quad (5.10).$$

V.2.2) Le filtre optimal de Kalman:

Pour le filtre optimal de Kalman, le problème est posé comme suit:

Soit le processus dynamique donné par:

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + F v. \quad (5.11).$$

u est une entrée connue, et ayant des observations données par:

$$y = C \hat{x} + w. \quad (5.12).$$

v et w sont des bruits blancs de densités spectrales connues, nous avons:

$$\begin{aligned} E \{ v(t) v^T(\tau) \} &= V(t) \delta(t-\tau). \\ E \{ v(t) w^T(\tau) \} &= X(t) \delta(t-\tau). \\ E \{ w(t) w^T(\tau) \} &= W(t) \delta(t-\tau). \end{aligned} \quad (5.13).$$

Il faut chercher un observateur optimum (ou "estimateur d'état") pour l'état x .

La solution de ce problème est donnée par Kalman et Bucy. L'estimateur d'état optimal est un observateur qui peut être exprimé par l'équation différentielle:

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + \hat{K} (y - C \hat{x}) \quad (5.14).$$

Avec \hat{K} choisi d'une manière optimale.

D'après Kalman et Bucy l'état estimé \hat{x} est donné par:

$$\hat{x}(t) = E \{ x(t) / y(\tau) \quad \tau < t \}. \quad (5.15).$$

$E[x/y] = \hat{x}(t)$ est l'estimé qui minimise la matrice de covariance de l'erreur, $\hat{x}(t)$ est appelé aussi: Estimé "variance minimale".

Le problème revient donc à chercher le gain optimum $\hat{K}(t)$.

Dans [Fri], on montre que ce problème est dual au problème qui cherche le gain optimum pour la commande linéaire quadratique.

Nos aboutissons alors à l'équation suivante:

$$\hat{K} = (\hat{P} C^T + FX) W^{-1}. \quad (5.16)$$

\hat{P} est solution de l'équation de Riccati:

Avec:

$$\dot{\hat{P}} = \tilde{A} \hat{P} + \hat{P} \tilde{A}^T - \hat{P} C^T W^{-1} C \hat{P} + F \tilde{V} F^T. \quad (5.17)$$

Avec:

$$\tilde{A} = A - F X W^{-1} C. \quad (5.18)$$

$$\tilde{V} = V - X W^{-1} X^T. \quad (5.19)$$

si la densité spectrale X est nulle (c.à.d. v et w sont non corrélés):

$$\tilde{A} = A.$$

$$\tilde{V} = V.$$

Si le temps devient infini la solution de (5.17) devient constante.

Alors nous aurons:

$$\tilde{A} \bar{P} + \bar{P} \tilde{A}^T - \bar{P} C^T W^{-1} C \bar{P} + F \tilde{V} F^T = 0. \quad (5.20)$$

Cette équation admet une solution unique définie positive si:

- Le système est asymptotiquement stable,
- Le système défini par la paire (A, B) est observable et le système défini par la paire $[A, FV^{1/2}]$ est contrôlable. [Fri].

En résumé nous pouvons dire que:

- La loi de commande LQ est une loi "déterministe" optimale qui minimise l'indice de performance:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u + x^T S^T u + u^T S x) d\tau. \quad (5.21)$$

- Sous les suppositions que l'état x est accessible pour l'observation, et qu'il n'y a pas de perturbations aléatoires agissant sur le processus. Le filtre optimale de Kalman permet l'estimation des états en présence du bruit blanc sur les observations et les perturbations bruit blanc.

V.2.3) Synthèse du contrôleur LQG.:

Les deux méthodes citées précédemment permettent la synthèse d'une loi de commande stochastique, qui optimise les performances en présence des perturbations.

D'après le théorème de séparation [Fri], pour optimiser les performances en présence des perturbations, bruit blanc, il suffit de synthétiser le contrôleur déterministe optimum, tout en ignorant le bruit, puis utiliser le filtre de Kalman pour estimer les états qui ne sont pas accessibles.

Donc pour la synthèse du contrôleur LQG, le problème est posé comme suit:

Soit le système suivant:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fv. \quad (5.22)$$

$$y = Cx + w.$$

v et w sont des bruits blancs gaussiens.

Il faut synthétiser une loi de commande linéaire optimale qui minimise l'indice de performance:

$$\tilde{J} = E\{J\} = E\left\{\int_t^{\infty} (x^T Qx + x^T S^T u + u^T Sx + u^T Ru) d\tau\right\} \quad (5.23)$$

La solution est donnée par les étapes suivantes:

a) Il faut utiliser la loi de commande

$$u = -\bar{G} \hat{x}. \quad (5.24)$$

Où \hat{x} est la sortie de l'observateur linéaire:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \bar{K}(y - C\hat{x}) \quad (5.25)$$

b) chercher la matrice gain \bar{G} , solution du problème de commande déterministe optimal correspondant.

c) chercher la matrice gain \bar{K} de l'observateur, comme gain optimum du filtre de Kalman correspondant.

Le contrôleur: $K_{LQG} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ prend la forme d'un observateur.

$$\dot{\hat{x}} = (A - B\bar{G} - \bar{K}C)\hat{x} + \bar{K}y \quad (5.26)$$

$$u = -\bar{G} \hat{x}.$$

$$\bar{G} = R^{-1}(B^T \bar{M} + S). \quad (5.27)$$

\bar{M} solution de:

$$\bar{M}A + A^T \bar{M} - (\bar{M}B + S)R^{-1}(B^T \bar{M} + S^T) + Q = 0. \quad (5.28)$$

$$\bar{K} = (\bar{P}C^T + FX)W^{-1}. \quad (5.29)$$

\bar{P} solution de:

$$A\bar{P} + \bar{P}A^T - (\bar{P}C^T + FX)W^{-1}(C\bar{P} + (FX)^T) + FVF^T = 0. \quad (5.30)$$

D'où:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} y. \quad (5.31)$$

$$u = \hat{C} x.$$

Avec:

$$\hat{A} = A - BR^{-1}(B^T \bar{M} + S) - (\bar{P}C^T + FX)W^{-1}C. \quad (5.32)$$

$$\hat{B} = (\bar{P}C^T + FX)W^{-1}. \quad (5.33)$$

$$\hat{C} = -R^{-1}(B^T \bar{M} + S) = -\bar{G} \quad (5.34)$$

$$K_{LQG} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

V.3) L'algorithme de Glover-Doyle simplifié: [Bou] [Glo1]

Au chapitre III, le "problème standard" à été défini comme suit: "Etant donné le système augmenté P_a représenté dans la figure (5.1). Il faut trouver un régulateur stabilisant K tel que:

$J(K) = \|F_b(P_a, K)\|_\infty$ soit inférieur ou égal à 1.

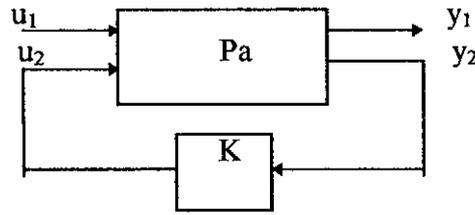


Fig. 5.1: Le problème standard.

Le système augmenté P_a correspond à une matrice de transfert:

$$P_a = \begin{pmatrix} P_{a11} & P_{a12} \\ P_{a21} & P_{a22} \end{pmatrix}$$

L'algorithme de Glover-Doyle résout ce problème à partir d'une représentation d'état du système augmenté P_a . Supposons que cette représentation d'état soit définie par les équations:

$$\dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2u_2.$$

$$y_1 = C_1x + D_{11}u_1 + D_{12}u_2. \tag{5.36}$$

$$y_2 = C_2x + D_{21}u_1 + D_{22}u_2.$$

Soit: $n_i = \dim(u_i)$, $p_i = \dim(y_i)$ et $n = \dim(x)$.

Hypothèses:

les hypothèses suivantes doivent-êtré satisfaites:

(H₁): (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable

(H₂): $\text{rang}(D_{12})=m_2$ et $\text{rang}(D_{21})=p_2$, ($p_1 \geq m_2$, $D_{12}=P_{a12}(\infty)$, $m_1 \geq p_2$, $D_{21}=P_{a21}(\infty)$).

(H₃): $\text{rang} \begin{pmatrix} A - i\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$

(H₄): $\text{rang} \begin{pmatrix} A - i\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$

Interprétation des conditions:

La condition (H₁) est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un régulateur K stabilisant.

La condition (H₂) est suffisante pour assurer que les contrôleurs sont propres.

La condition (H₃) signifie que le sous-système P_{a12} ne doit pas avoir de zéros de transmission sur l'axe imaginaire si: (C_1, A, B_2) est une réalisation minimale [Bou].

La condition (H₄) impose à ce que le système P lui même n'ait pas de pôles sur l'axe imaginaire. Puisque cette condition n'est pas imposée par la nature du problème, donc si P présente des pôles sur l'axe imaginaire, il conviendra de les stabiliser légèrement d'une manière artificielle.

Par exemple, pour stabiliser une fonction de transfert $P(s) = \frac{1}{s + j0.5}$, il faudrait la remplacer

par $P(s) = \frac{1}{s + j0.5 + \epsilon}$, où $\epsilon > 0$ est " suffisamment petit " pour que dans la bande passante qui nous

intéresse, $P(s)$ se comporte comme $\frac{1}{s + j0.5}$.

a) Cas de l'information complète

Nous supposons tout d'abord que l'état complet est accessible à la mesure, et donc que $y_2 = x$, soit encore $C_2 = I$, $D_{21} = 0$, $D_{22} = 0$. Dans ce cas, nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes :

(H₅): (C_1, A) est détectable

(H₆): $D_{11} = 0$

(H₇): $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$

L'hypothèse (H₅) signifie que tous les modes du système augmenté sont pondérés dans le critère $J(K)$. L'hypothèse (H₆), signifie qu'il n'y a pas de terme directe entre le signal perturbateur u_1 et la sortie pondérée y_1 . Enfin, l'hypothèse (H₇) signifie que $C_1 x$ et $D_{12} u_1$ sont orthogonaux, de sorte qu'il n'y ait pas dans $J(K)$ de pondérations sur des termes croisés en x et u_1 , et que de plus la pondération sur u_1 soit normalisée.

Le cas général est présenté dans l'annexe B.

Considérons alors l'équation algébrique de Riccati

$$A^T X + XA + X(\gamma^2 B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0. \quad (5.37).$$

Où γ désigne un réel > 0 . Cette équation est associée à la matrice hamiltonienne [FRI].

$$H = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix} \quad (5.38).$$

On a le résultat suivant [Bou].

- Théorème 5.1: [Glo1][Bou]

Sous les hypothèses (H₁) à (H₇), il existe un retour de sortie $u_2 = Kx$ stabilisant $Fb(Pa, K)$

et pour lequel $\|Fb(Pa, K)\|_\infty \leq \gamma$, si et seulement si:

(i) : H n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

(ii) : Il existe une solution unique $X_\infty \geq 0$ à l'équation (5.37).

(où " \geq " signifie matrice symétrique réelle semi-définie positive).

Un tel retour d'état est alors donné par :

$$K = -B_2^T X_\infty \quad (5.39).$$

On peut noter que cette solution a des rapports étroits avec la commande linéaire quadratique. En effet, lorsque γ tend vers l'infini, l'équation (5.37), la matrice (5.38) et le gain (5.39) deviennent respectivement l'équation de Riccati, la matrice hamiltonienne et la solution du problème linéaire quadratique.

b) Cas de l'information incomplète (La sortie y_2 est distincte de x):

Nous supposons que les hypothèses (H₁) à (H₇) sont satisfaites, et nous rajouterons les hypothèses suivantes:

(H₈): (A, B_1) est stabilisable

(H₉): $D_{22} = 0$

(H₁₀): $\begin{pmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$

Les hypothèses (H₈) et (H₁₀) sont duales des hypothèses (H₅) et (H₇) respectivement.

Considérons l'équation algébrique de Riccati

$$AY + YA^T + Y(\gamma^2 C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1 B_1^T = 0. \quad (5.40).$$

à laquelle est associée la matrice hamiltonienne

$$J = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{pmatrix} \quad (5.41).$$

On a le résultat suivant:

- Théorème 5.2 : [Bou][Glo1]

Sous les hypothèses (H_1) à (H_{10}) , il existe un retour de sortie $u_2 = K y_2$ stabilisant $F_b(P_a, K)$ et pour lequel $\|F_b(P_a, K)\|_\infty \leq \gamma$, si et seulement si

- les conditions (i) et (ii) du théorème 5.1 sont satisfaites

(iii) J n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire

(iv) il existe une unique solution $Y_\infty \geq 0$ à l'équation (5.40)

(v) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$. (rayon spectral)

Une solution est alors la synthèse retour d'état - observateur suivante :

$$u_2 = -B_2^T X_\infty \hat{x}. \quad (5.42).$$

Où \hat{x} est fourni par l'observateur.

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B_1 \hat{u}_1 + B_2 u_2 + Z_\infty L_\infty (C_2 \hat{x} - y_2). \quad (5.43).$$

Les matrices Z_∞ et L_∞ sont définies par:

$$L_\infty = -Y_\infty C_2^T. \quad (5.44).$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty)^{-1}. \quad (5.45).$$

et le signal \hat{u}_1 est défini par:

$$\hat{u}_1 = \gamma^2 B_1^T X_\infty \hat{x}. \quad (5.46).$$

Notons tout d'abord que le symbole ρ de la condition (v) désigne le rayon spectral.

$(\rho(A)) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, $\lambda_{i..n}$ sont les valeurs propres de la matrice carrée à coefficients réels A)

Une première remarque qu'appelle le théorème (5.2) est que le "régulateur H_∞ " qu'il définit vérifie de façon évidente le principe de séparation entre le problème de commande et le problème d'observation. D'autre part, \hat{x} s'interprète comme une estimée de l'état x . La différence majeure entre l'observateur (5.43) et le filtre de Kalman réside dans la présence du terme \hat{u}_1 , qui s'interprète comme une estimée de la pire perturbation possible u_{1p} .

Si γ tend vers l'infini les équations (5.41) et (5.42) tendent respectivement vers les équations de Riccati et la matrice hamiltonienne associées au filtre de Kalman (voir les équations (5.28) et (5.30) pour S et X nuls). Vu les hypothèses qui ont été prises, le problème linéaire quadratique admet une solution. De plus Z_∞ tend vers l'identité et \hat{u}_1 tend vers 0. Donc l'observateur (5.43) tend vers le filtre de Kalman.

Finalement le "régulateur H_∞ " défini par ce théorème, converge vers le régulateur LQG, minimisant le critère:

$$J = E \left\{ \int_t^\infty y_1^T(t) y_1(t) dt \right\}.$$

(voir Annexe C, pour la résolution du problème standard par la commande LQG).

Pour γ fini, le "régulateur H_∞ " a le même ordre que le régulateur LQG, ou encore que le système augmenté P_a .

Le théorème (5.2) donne un régulateur K parmi d'autres par lequel $\|F_b(P_a, K)\|_\infty < \gamma$ (si les conditions d'existence sont satisfaites). Ce régulateur particulier est appelé le **régulateur central**. A partir de ce régulateur particulier, il est possible de trouver tous les autres régulateurs K' , stabilisant $F_b(P_a, K')$, et pour lesquels on ait $\|F_b(P_a, K')\|_\infty \leq \gamma$.

- Théorème 5.3: [Bou]

Sous les conditions du théorème 5.1, l'ensemble des régulateurs K' , stabilisant $F_b(P_a, K')$, et pour lesquels on a : $\|F_b(P_a, K')\|_\infty < \gamma$, sont donnés par:

$$K' = F_b(K_a, Q) \tag{5.47}$$

Où Q est une matrice de transfert arbitraire appartenant à RH_∞ et satisfaisant la condition :

$$\|Q\|_\infty < \gamma.$$

Le régulateur central est obtenu pour $Q = 0$.

La paramétrisation (5.47) est illustrée par le schéma de la figure (5.2).

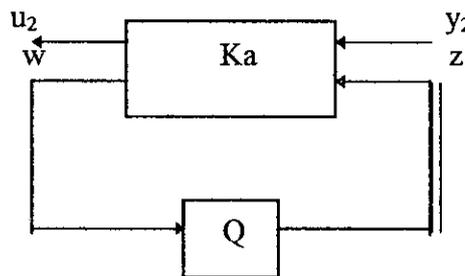


Fig 5.2: Paramétrisation du théorème 5.3.

z est une entrée supplémentaire.

w est une sortie supplémentaire.

Remarques:

- " Stabiliser $F_b(P_a, K')$ ", vise à obtenir la stabilité asymptotique de tous les états de P_a et de K' (doivent tendre vers zéro) lorsque $y_1=0$. On demande donc ici une propriété assez forte et cette exigence est souvent gênante en pratique. C'est elle qui interdit par exemple de choisir des pondérations ayant des pôles sur l'axe imaginaire; c'est pourquoi on ne peut pas obtenir, par l'algorithme de Glover - Doyle, de régulateur ayant rigoureusement un effet intégral.
- Le "régulateur central" n'est pas en général le plus intéressant parmi l'ensemble des régulateurs défini par la paramétrisation (5.47). En particulier, dans cet ensemble, il existe souvent des régulateurs d'ordre plus faible que le régulateur central. Et il serait très intéressant de pouvoir déterminer le régulateur d'ordre minimal. Ce problème était encore ouvert en 1993[Bou].
- Pour γ tendant vers l'infini, le " γ -problème" qui consiste à trouver un régulateur stabilisant K pour lequel $\|F_b(P_a, K)\|_\infty < \gamma$, admet une solution. En fait, il équivaut à un problème LQG. C'est donc que le γ -problème admet une solution pour γ suffisamment grand. Ceci justifie qu'il est souvent proposé de calculer de manière approchée, par dichotomies, la valeur optimale de γ , γ^* , au dessous de laquelle le γ -problème n'a pas de solution. Ces dichotomies sont appelées " γ -Itérations".

Toutefois, les spécifications qu'on s'est fixées au départ ne sont réalisées que si l'on obtient un γ égal à 1. Le principe des γ -itérations n'apparaît donc pas comme le meilleur. Il est souvent préférable de fixer une fois pour toutes les pondérations correspondant aux contraintes de robustesse (puisque celles-ci ne peuvent être relâchées) et itérer sur les pondérations permettant de fixer les performances, (chap VI, Exemple 3).

IV.4) Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons introduit un algorithme permettant de résoudre le problème H_∞ standard.

Il est présenté pour un cas particulier pour pouvoir le comparer à l'algorithme permettant la synthèse du contrôleur LQG.

L'algorithme général de Glover-Doyle est donné dans l'annexe B.

La résolution du problème standard par la commande LQG est présentée dans l'annexe C.

Dans le prochain chapitre nous allons appliquer ces notions sur des exemples d'application. Nous allons montrer comment spécifier les problèmes de robustesse et de performance des systèmes linéaires invariants dans le temps, puis comment les ramener à un problème standard et finalement résoudre ce problème par l'algorithme général de Glover-Doyle (pour la commande H_∞) ou bien par l'utilisation du contrôleur LQG.

Chapitre VI :

APPLICATIONS

Chapitre VI : Applications

VI.1) Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons illustrer par des exemples d'application, les différentes notions de la commande robuste H_∞ .

Sur ces exemples, nous allons voir comment spécifier la robustesse et les performances des systèmes linéaires invariants dans le temps, comment choisir les fonctions poids qui répondent à ces spécifications, puis enfin utiliser ces fonctions poids pour augmenter le système et aboutir à la configuration standard.

L'étude des exemples va s'orienter vers la synthèse d'une commande H_∞ . Néanmoins lors de la résolution du problème standard, nous appliquerons en plus de la commande H_∞ , la commande Linéaire Quadratique Gaussienne LQG (H_2). En effet cette dernière ne peut être utilisée que dans des cas bien particuliers du problème standard. Pour l'appliquer au cas général, il faut ignorer certaines données du problème (Annexe C). En ignorant ces données, nous allons constater si on peut aboutir aux mêmes résultats de la commande H_∞ . Nous pourrons distinguer ainsi la différence entre la commande H_∞ et la commande LQG.

Nous considérerons d'abord les systèmes SISO soumis à des perturbations fractionnelles. Nous illustrerons le problème de sensibilité mixte de Kwakernaak [Kwa1][Mei]. Nous montrerons que ce problème est équivalent à un problème standard. Nous verrons aussi le comportement de la commande H_2 face aux perturbations dans le système lui même. Nous passerons ensuite à un système MIMO. Les fonctions poids deviennent alors des matrices de fonctions. Le choix de ces matrices est plus compliqué que celui du cas SISO. Nous terminerons ce chapitre par une discussion sur les principaux résultats obtenus.

Avant d'aborder les différentes applications, nous allons donner un aperçu sur la structure des principaux programmes développés pour faire tourner la commande H_∞ et H_2 .

VI.2) Implémentation pratique:

Dans cette thèse, nous avons développé dans le logiciel Matlab, plusieurs programmes pour résoudre le problème de commande optimale H_∞ et H_2 . Les deux principaux programmes sont:

- . H-infini
- . H2

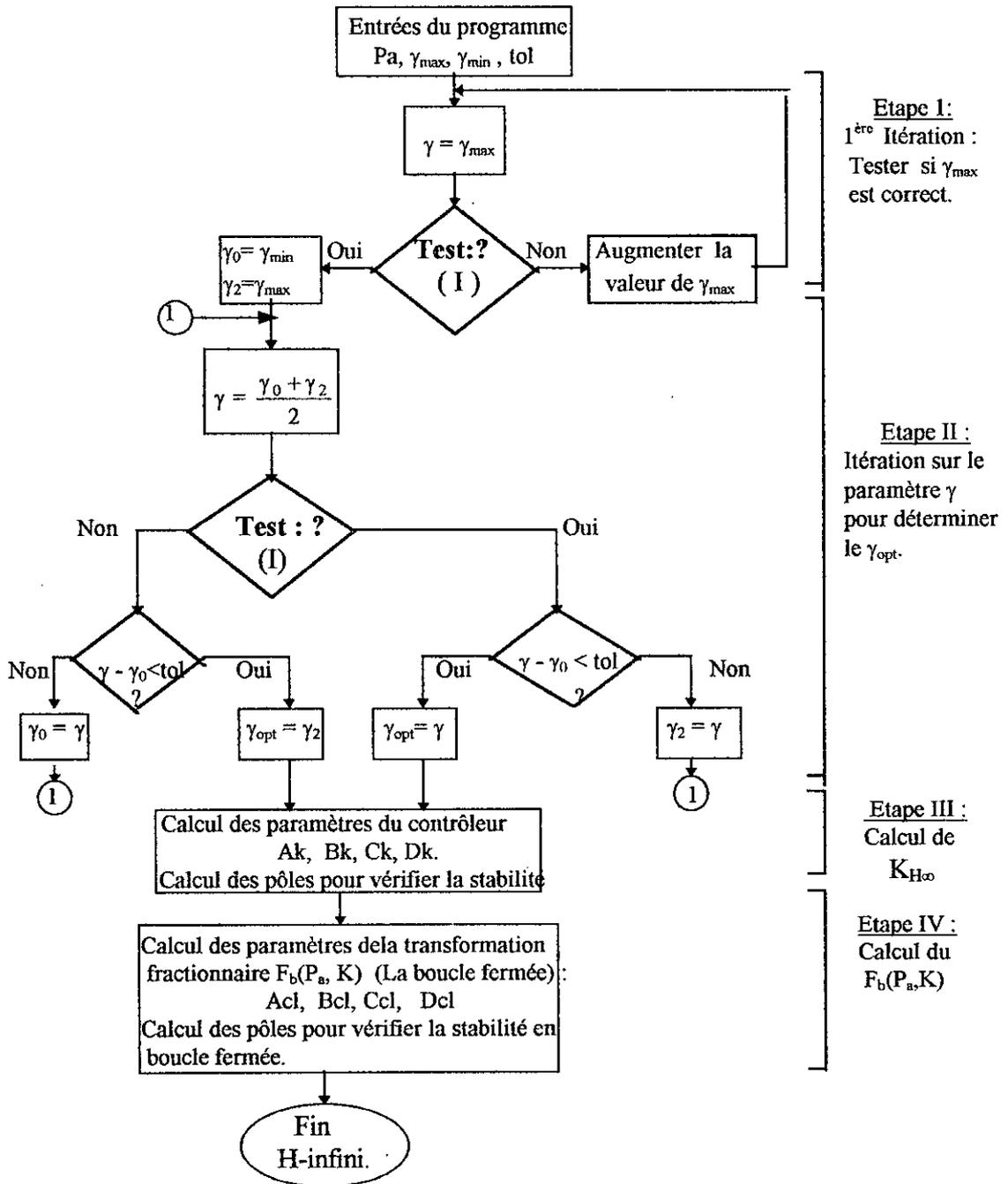
Les autres programmes sont spécifiques à chaque application, ils font appel à ces deux principaux programmes.

VI.2.1) H-infini:

Le programme " H-infini" se base sur l'algorithme qui traite le cas le plus général du problème standard (Annexe B). Il s'applique aussi bien pour les systèmes SISO que pour les systèmes MIMO. Il suppose que les hypothèses (H_1) à (H_5) du chapitre (V.3) sont vérifiées.

Pour un système augmenté P_a , un γ_{max} , un γ_{min} et une certaine tolérance tol , le programme "H-infini" itère par la méthode de bisection sur le paramètre γ , afin de se rapprocher le mieux possible à la synthèse d'une loi de commande optimale H_∞ . On aboutit à la fin, avec la tolérance tol , à un γ_{opt} optimal au dessous duquel il n'existe pas une solution au problème standard.

L'organigramme de base de ce programme est donné par la figure suivante:



Remarques :

* (I) : Ce test consiste à :

- 1 - Résoudre l'équation de Riccati relative au problème de Commande:
 - a - vérifier que l'hamiltonien H n'a pas de racines sur l'axe imaginaire
 - b - que la solution $X_{inf} \geq 0$.

- 2 - Résoudre l'équation de Riccati relative au problème de l'observation:
 - a - vérifier que l'hamiltonien J n'a pas de racines sur l'axe imaginaire
 - b - que la solution $Y_{inf} \geq 0$.

- 3 - Vérifier que $\rho (X_{inf} . Y_{inf}) < \gamma^2$.

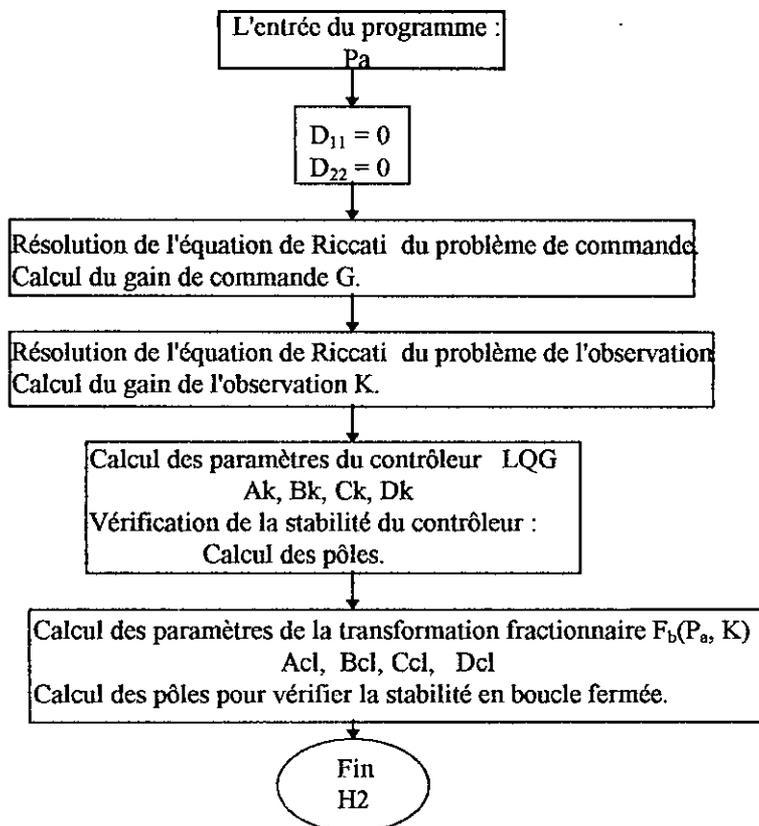
* Le γ_{opt} déterminé par le programme H-infini représente la norme H_{∞} de la boucle fermée $F_b(P_a, K)$.

VI.2.2) H2 :

Ce programme permet de calculer les paramètres du contrôleur optimal LQG. Les équations du contrôleur sont issues de l'annexe (C). Les hypothèses du chapitre (V.2) sont supposées vérifiées.

Si les matrices D_{11} et D_{22} du système augmenté P_a ne sont pas nulles, le programme H2 leur affecte la valeur 0.

L'organigramme du programme est donné par la figure suivante:



VI.2.3) Les programmes auxiliaires:

Les autres programmes dépendent de l'application considérée, ils sont fonction du procédé et des spécifications de la conception (pondérations fréquentielles). Ils calculent le système augmenté, ajustent ses matrices selon les hypothèses des algorithmes H_∞ et H_2 , calculent les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaires, permettent le tracé de ces fonctions avec les pondérations fréquentielles correspondantes, et enfin font des tests sur la stabilité robuste.

VI.3) Système SISO:**VI.3.1) Double intégrateur: [Kwa1]:**

L'exemple que nous allons considérer est suffisamment simple pour illustrer quelques notions difficiles de la commande robuste H_∞ (Spécifications de la robustesse et des performances, choix des fonctions poids, etc...).

Pour faciliter l'étude, des petites modifications peuvent être apportées au problème traité.

Lors de la résolution du problème standard, les résultats obtenus par les deux commandes seront présentés simultanément.

La fonction de transfert nominale du procédé SISO est donnée par l'équation (6.1) suivante:

$$P_0(s) = \frac{1}{s^2} \quad (6.1)$$

La fonction de transfert du procédé perturbé est :

$$P(s) = \frac{g}{s^2(1+s\theta)} \quad (6.2)$$

où g nominal est égal à 1, et θ nominal est égal à 0.

VI.3.1.1) Analyse de la robustesse et des performances:

Nous allons d'abord transformer le problème en un problème de perturbations fractionnelles vu dans le paragraphe(IV.3.3). Nous modélisons l'effet de la constante de temps parasite θ comme une perturbation du numérateur et les variations du gain g comme les perturbations du dénominateur, nous obtenons le système suivant:

$$P(s) = \frac{1/(1+s\theta)}{s^2/g} \quad (6.3)$$

ce qui donne les perturbations relatives du dénominateur et du numérateur suivantes:

$$\frac{D(s) - D_0(s)}{D_0(s)} = \frac{1}{g} - 1 \quad (6.4)$$

$$\frac{N(s) - N_0(s)}{N_0(s)} = \frac{-s\theta}{1+s\theta} \quad (6.5)$$

Les spécifications sont donc: Bande passante égale à 1, avec une fonction de sensibilité S petite en basse fréquences, une descente suffisamment rapide de la fonction de sensibilité complémentaire T en haute fréquences et une transition lisse dans la région de croisement.

Nous rappelons que dans le cas de perturbations fractionnelles, le problème est comme suit:

La fonction de transfert du système en boucle ouverte est de la forme:

$$L = ND^{-1} \longrightarrow [N(I + V\delta_N W_2)][(I + V\delta_D W_1)]^{-1} \quad (6.6).$$

Les matrices V , W_1 et W_2 sont fonction de la fréquence, elles sont choisies tel que :

$$\|\delta_p\|_{\infty} \leq 1.$$

Avec:

$$\delta_p = [-\delta_D \quad \delta_N].$$

et

$$H = \begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 T V \end{bmatrix}. \quad (6.7).$$

Donc le problème revient à minimiser la fonction $\left\| \begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 T V \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$ pour toutes perturbations

$\|\delta_p\|_{\infty} \leq 1$. Ce problème est appelé "le problème de sensibilité mixte de Kwakernaak". Il est identique à la minimisation de la fonction de sensibilité mixte modifiée:

$$\|H\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 U V \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (6.8).$$

avec $U = K(I + L)^{-1}$, (K étant le compensateur à synthétiser, W_2 de l'expression (6.8) étant différent de celui de (6.7)).

Pour le cas SISO ceci revient à minimiser :

$$\sup_{\omega \in \mathfrak{R}} (|W_1(j\omega) S(j\omega) V(j\omega)|^2 + |W_2(j\omega) U(j\omega) V(j\omega)|^2).$$

Pour le choix particulier des fonctions poids (en particulier, $W_1 V$ large en basses fréquences et $W_2 V$ large en hautes fréquences), la solution au problème de sensibilité mixte revient à avoir:

$$|S| \cong \frac{\gamma}{|W_1(j\omega) V(j\omega)|} \quad \text{pour } \omega \text{ petit.} \quad (6.9).$$

et

$$|U(j\omega)| \cong \frac{\gamma}{|W_2(j\omega) V(j\omega)|} \quad \text{pour } \omega \text{ grand.} \quad (6.10).$$

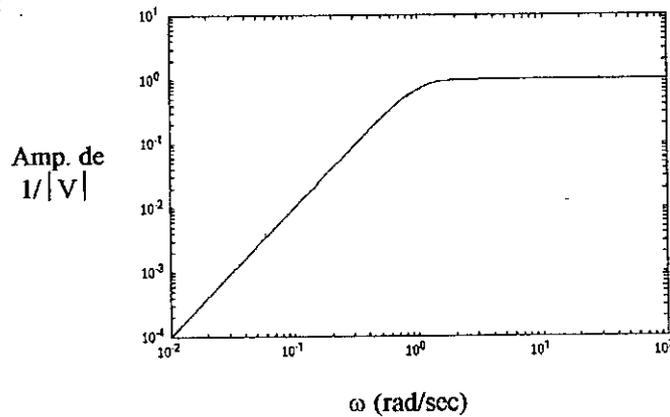
Où γ est une constante.

VI.3.1.2) Choix des fonctions poids:

Pour l'exemple traité, W_1 est fixé à 1 et V est donné par l'équation (6.11).

$$V(s) = \frac{s^2 + s\sqrt{2} + 1}{s^2}. \quad (6.11).$$

Ce qui donne l'allure suivante à $1/|V|$:

Fig 6.1: Tracé de Bode de l'amplitude de $1/V$.

D'après (6.9), l'amplitude de la fonction de sensibilité en basse fréquences est égale à:

$$|S(j\omega)| \cong |\lambda| \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + j\omega\sqrt{2} + 1} \quad \lambda: \text{cte.} \quad (6.12).$$

Pour les hautes fréquences la fonction V est constante et égale à 1.

D'après (6.10):

$$|U(j\omega)| \cong \frac{|\lambda|}{|W_2(j\omega)V(j\omega)|} \cong \frac{|\lambda|}{|W_2(j\omega)|}, \quad \text{pour } \omega \text{ grand.} \quad (6.13).$$

D'où la nécessité de choisir la fonction $W_2(j\omega)$ afin de conformer $U(j\omega)$.

Si on prend:

$$W_2 = c(1 + rs). \quad (6.14).$$

Avec r et c des constantes positives et c différent de 0, nous aurons pour les hautes fréquences, une amplitude de W_2 asymptotique à c (si: $r=0$) et à $c r \omega$ (si: $r \neq 0$).

Donc, pour $r=0$ la pente (Roll off) en hautes fréquences de U est égale à 0 (car $|U| \cong \frac{|\lambda|}{c}$)

et celle de T est égale à 2 décades/décade (40dB/décade) car nous avons:

$$|T| \cong |PU| \cong \frac{1}{s^2} \frac{|\lambda|}{c} \quad \text{pour } \omega \text{ grand} \quad (6.15).$$

Si: $r \neq 0$, la bande de transition de U est égale à 1décade/décade (20dB/décade), et celle de T à 3décades/décade (60dB/décade).

VI.3.1.3) Transformation du problème en un problème H_∞ standard:

Le problème d'optimisation de la sensibilité mixte d'un système soumis à des perturbations fractionnelles est un cas particulier du problème H_∞ standard.

Pour cela, il suffit de considérer le schéma de la figure suivante:

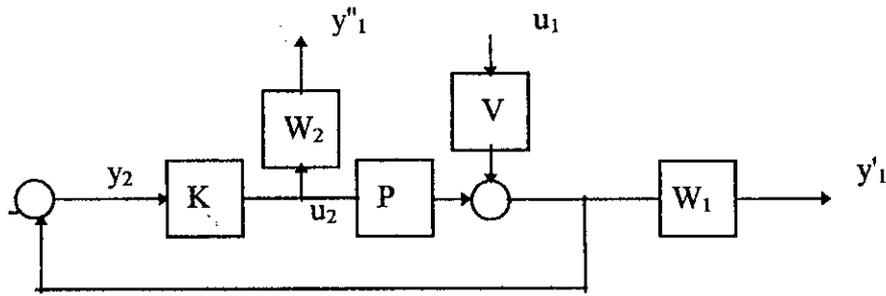
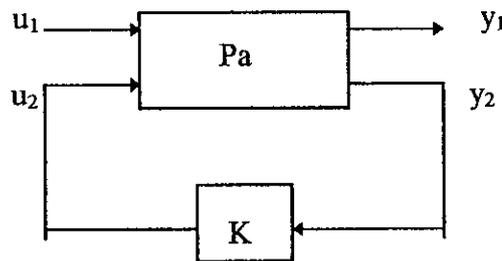


Fig. 6.2: Le problème de sensibilité mixte.

On a:

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_1'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 U V \end{bmatrix}}_H u_1. \tag{6.16}$$

Le schéma (6.2), transformé à un schéma standard donne:



Avec: $F_b(Pa, K) = H = \begin{bmatrix} W_1 S V \\ -W_2 U V \end{bmatrix}$ (6.17).

Donc le problème d'optimisation de la matrice H des systèmes soumis à des perturbations fractionnelles, revient à un problème d'optimisation H_∞ standard, avec la minimisation de la fonction $F_b(Pa, K)$.

Pour l'exemple traité, après avoir choisis les fonctions poids W_1 , W_2 et le spectre du filtre V, on aboutit au système augmenté Pa du système standard suivant:

$$Pa = \begin{bmatrix} W_1(s)V(s) & W_1(s)P(s) \\ 0 & W_2(s) \\ -V(s) & -P(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + s\sqrt{2} + 1}{s^2} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & c(1 + rs) \\ -\frac{s^2 + s\sqrt{2} + 1}{s^2} & -\frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

A cause de la fonction W_2 qui n'est pas propre, le système augmenté \tilde{P}_a n'est pas propre et ne peut avoir une représentation d'état. Pour remédier à cela; On transforme la figure (6.2) par la figure (6.3) [Kwa1].

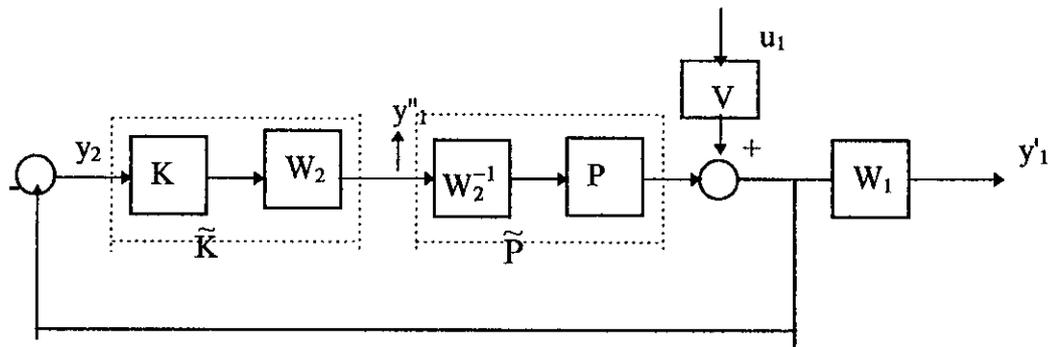


Fig. 6.3: **Modification de la configuration de la sensibilité mixte.**

La matrice de transfert en boucle fermée ne change pas pour ces modifications.

En introduisant la matrice de transfert du procédé modifié $\tilde{P} = PW_2^{-1}$ et la matrice de transfert du compensateur modifié $\tilde{K} = W_2K$, le diagramme de la figure (6.3) représentera le problème de sensibilité mixte, avec un système augmenté.

$$\tilde{P}_a = \begin{bmatrix} W_1V & W_1\tilde{P} \\ 0 & I \\ -V & -\tilde{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1V & W_1PW_2^{-1} \\ 0 & I \\ -V & -PW_2^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6.19).$$

\tilde{P}_a est propre, le compensateur \tilde{K} sera obtenu en résolvant le problème modifié.

Et K sera donné par: $K = W_2^{-1} \tilde{K}$.

L'inconvénient majeur de cette astuce est l'augmentation de l'ordre du procédé standard:

$$\tilde{P}_a = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + s\sqrt{2} + 1}{s^2} & \frac{1}{c(1+rs)s^2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{s^2 + s\sqrt{2} + 1}{s^2} & -\frac{1}{c(1+rs)s^2} \end{bmatrix}. \quad (6.20).$$

VI.3.1.4) Représentation d'état du système standard:

La représentation d'état du système augmenté donne :

Pour $r = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_1} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/c \end{bmatrix}}_{B_2} \tilde{u}_2. \\ y_1 &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_{11}} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{12}} \tilde{u}_2. \\ y_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2} x + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}}_{D_{21}} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{22}} \tilde{u}_2. \end{aligned} \quad (6.21).$$

Pour $r \neq 0$, on a:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/r \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/rc \end{bmatrix}. \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \\ C_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = -1, \quad D_{22} = 0. \end{aligned} \quad (6.22).$$

VI.3.1.5) Solution numérique: (commande H_∞ et LQG).

1^{er} cas: $r = 0$, c.à.d. $W_2 = c$.

Nous avons :

$$|T| \cong \frac{\lambda |P|}{|W_2(j\omega)V(j\omega)|} = |T_{app.}| = \frac{\lambda}{c|s^2 + s\sqrt{2} + 1|} \cong \frac{\lambda}{c|s^2|}. \quad \text{Pour } \omega \text{ grand.} \quad (6.23).$$

$$|S| \cong \frac{1}{|W_1(j\omega)V(j\omega)|} = \frac{1}{|V(j\omega)|}. \quad \text{Pour } \omega \text{ petit.} \quad (6.24).$$

L'équation (6.23), montre que pour ω grand, $|T|$ doit se comporter comme $|T_{app.}|$, et doit avoir une pente (roll off) de 40dB/décade. Pour vérifier cela, il suffit que la pente (ou le roll-off) de T en hautes fréquences soit parallèle à celle de $T_{app.}$

L'équation (6.24), montre que $|S|$ doit suivre l'allure de $1/|V|$, pour ω petit.

Les spécifications sont donc:

- Chercher un contrôleur K propre,
- une pente en haute fréquence de T (roll off) égale à 2 décades/décade (40dB/décade),
- et une bande passante égale à 1.

a) Contrôleur H_∞ :

Faisons varier les valeurs de c , nous obtenons les différentes courbes de la figure (6.4).

Les courbes montrent les fonctions de sensibilité optimales et les fonctions de sensibilité complémentaires correspondantes. On remarque que lorsque c augmente $|T|$ diminue et $|S|$ augmente. Ce résultat est tout à fait logique, car si c augmente, W_2 augmente et $|T|$ d'après l'équation (6.23) diminue pour ω grand.

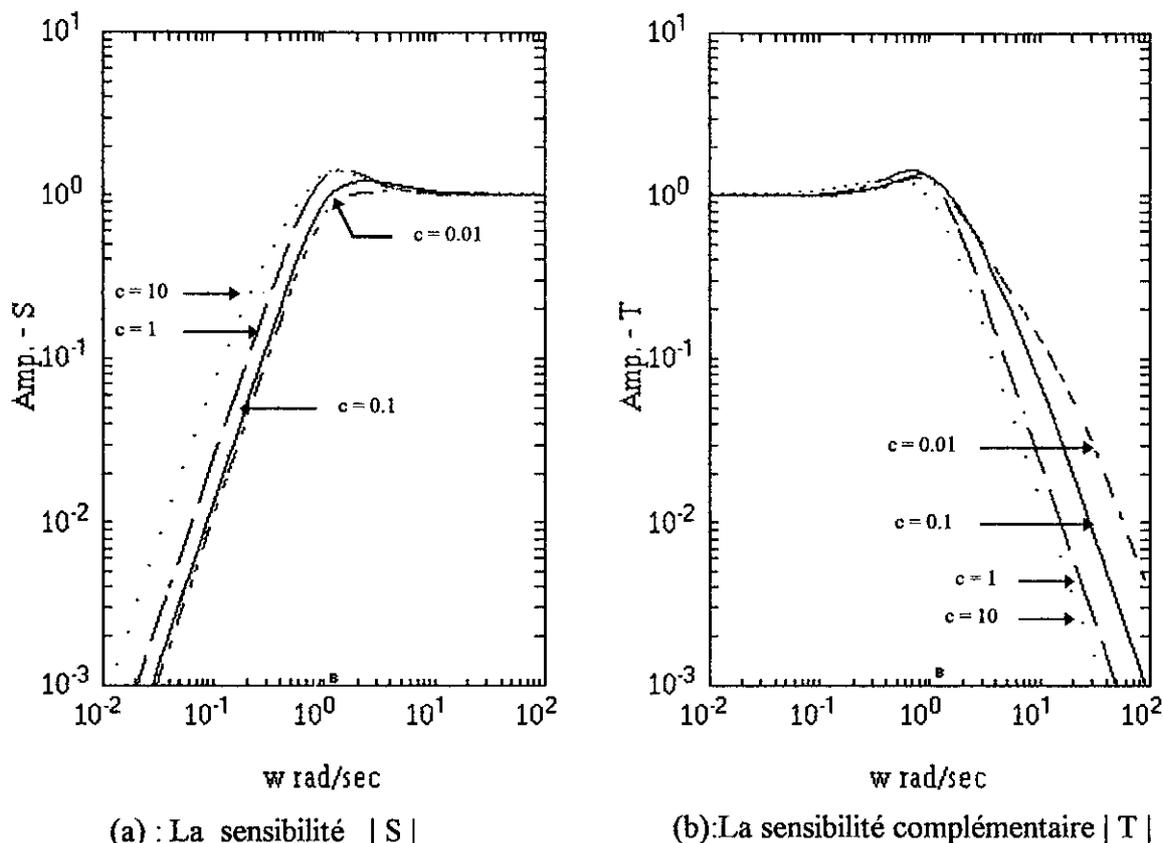


Fig. 6.4 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $r = 0$, pour la commande H_∞ .

Pour les différentes courbe de la figure (6.4), nous remarquons que la bande passante est à peu près égale à 1, la pente de T est de 2décade/décade.

Pour bien distinguer les différentes courbes de la figure (6.4), nous traçons dans la figure (6.5), pour chaque valeur de c , l'amplitude de S et de $1/V$, et dans la figure (6.6), l'amplitude de T et de T_{app} . Les figures (6.5) et (6.6) montrent que S suit bien l'allure de $1/V$, et T celle de T_{app} , ce qui confirme les équations (6.12) et (6.13) établies dans le problème de sensibilité mixte de Kwakernaak.

Nous allons choisir la plus petite valeur de c qui donne une fonction de sensibilité S à l'intérieur du tracé de la figure (6.1), un tracé T proche de celui de T_{app} et un pic de S et de T qui n'est pas très important dans la région de croisement (Cross-over region). Ceci est illustré dans les figures (6.5) et (6.6). Et nous remarquons que pour $c = 1/10$, la fonction de sensibilité S suit parfaitement l'allure du tracé de $1/V$, la pente de T est bien parallèle à celle de T_{app} , et dans la région de croisement les pics de S et de T sont relativement petits par rapport aux autres.

Donc prenant $c = 1/10$, et calculant les paramètres du contrôleur sous-optimal H_∞ .

Le programme "H-infini" nous permet de trouver des solutions sous optimales au problème H_∞ .

En démarrant par un : $\gamma_{\min} > \text{Max} (\bar{\sigma} [D_{1111} , D_{1112}], \bar{\sigma} [D^*_{1111} , D^*_{1121}])$ (Annexe B), un $\gamma_{\max} = 10$ et une tolérance de 0.001 et après plusieurs itérations sur le paramètre γ , nous aboutissons à un niveau sous optimal de $\gamma_{\text{opt}} = 1.2862$. Donc la norme H_∞ de la fonction de transfert en boucle fermée $F_b(P_a, K)$ est égale à γ_{opt} .

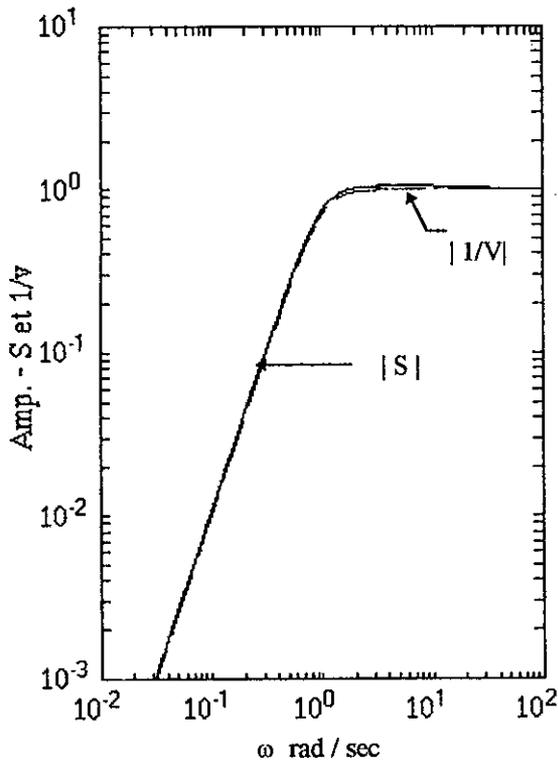
La fonction de transfert du compensateur sous optimal (pour le problème modifié) est égale à :

$$\tilde{K}_{H_\infty} = \frac{877.00s + 5434,3}{s^2 + 10849s + 69685} \quad (6.25).$$

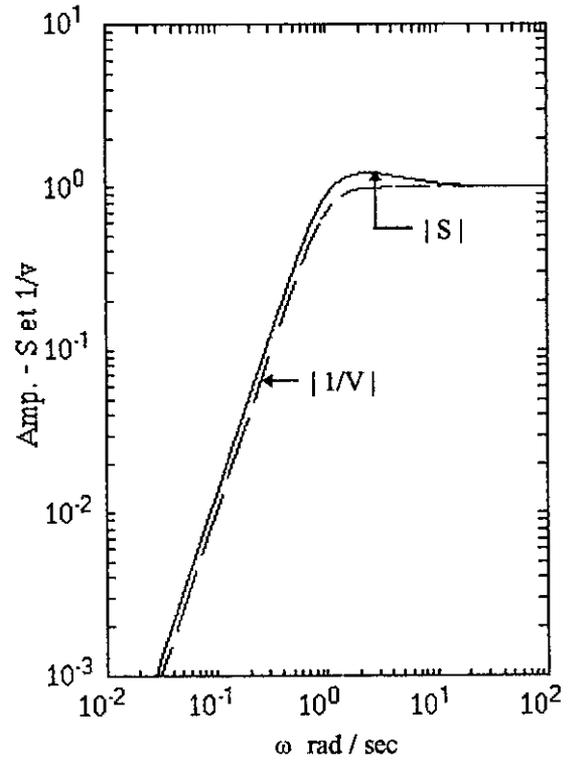
Le compensateur du problème de sensibilité mixte correspondant est :

$$K_{H_\infty} = \frac{\tilde{K}_{H_\infty}}{C} = 10 \tilde{K}_{H_\infty} \quad (6.26).$$

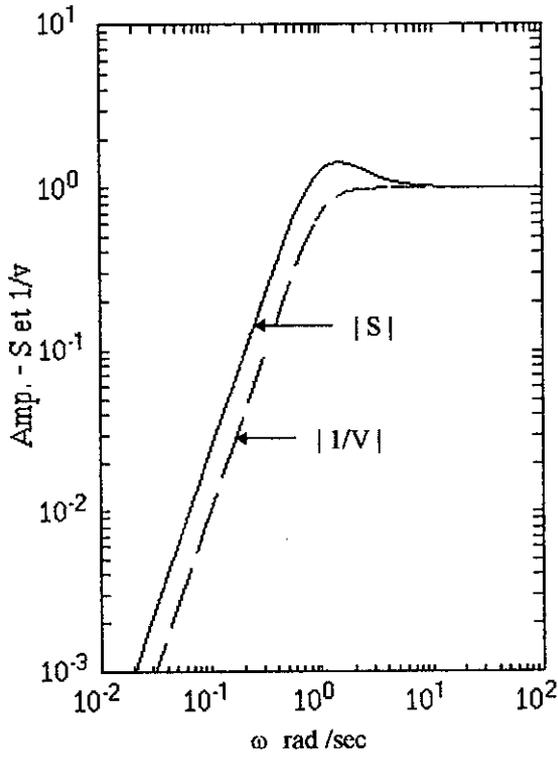
Le compensateur est propre, ses pôles sont stables, et les pôles en boucle fermée sont aussi stable.



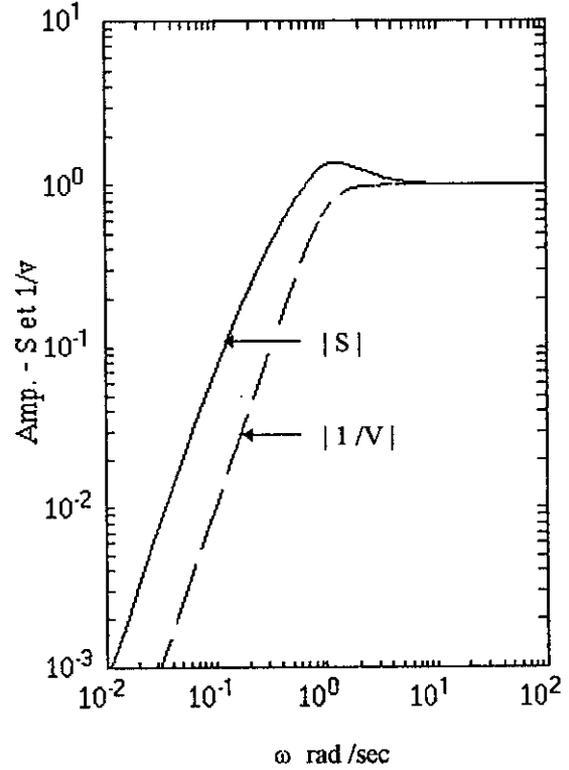
(a) : $c = 0.01$



(b) : $c = 0.1$

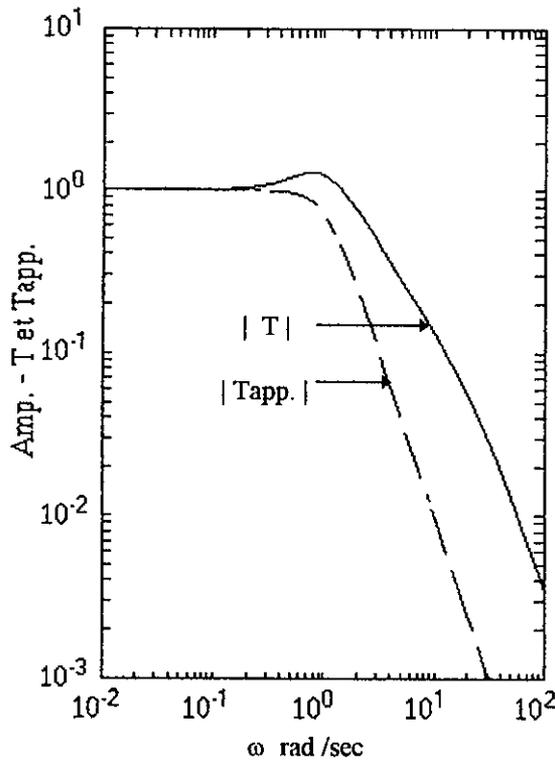


(c) : $c = 1$

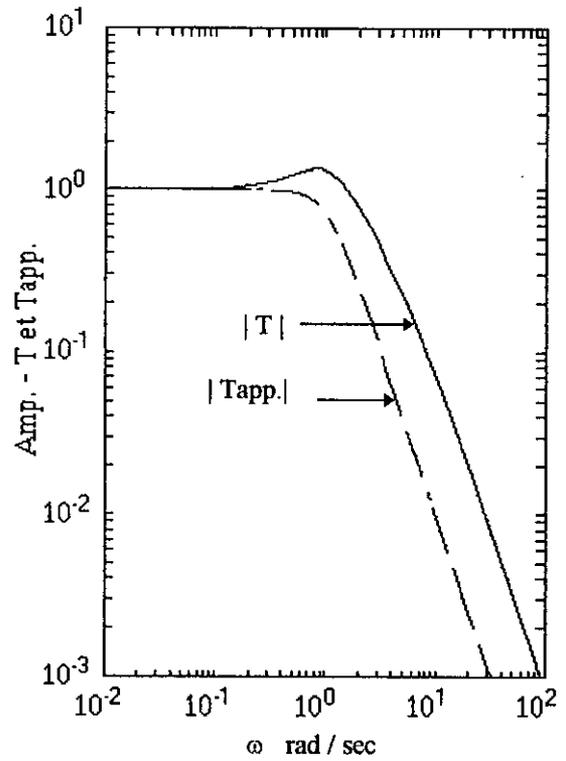


(d) : $c = 10$

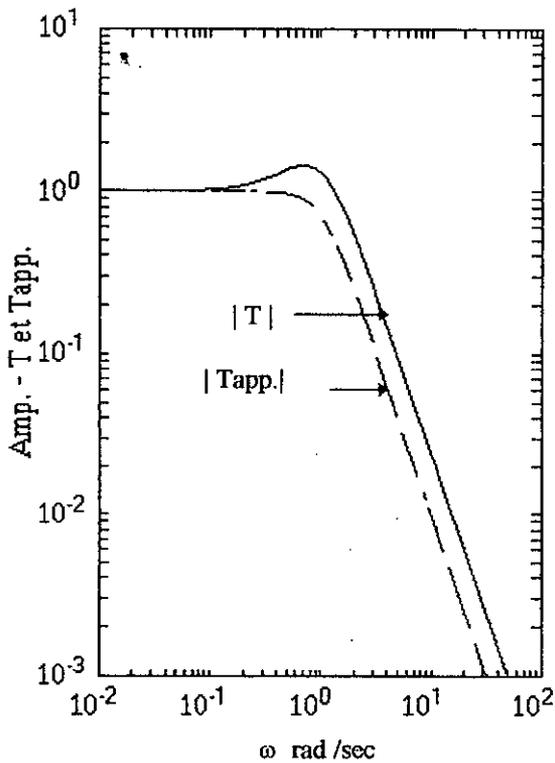
Fig. 6.5 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de 1/V pour $r = 0$, pour la commande H_∞ .



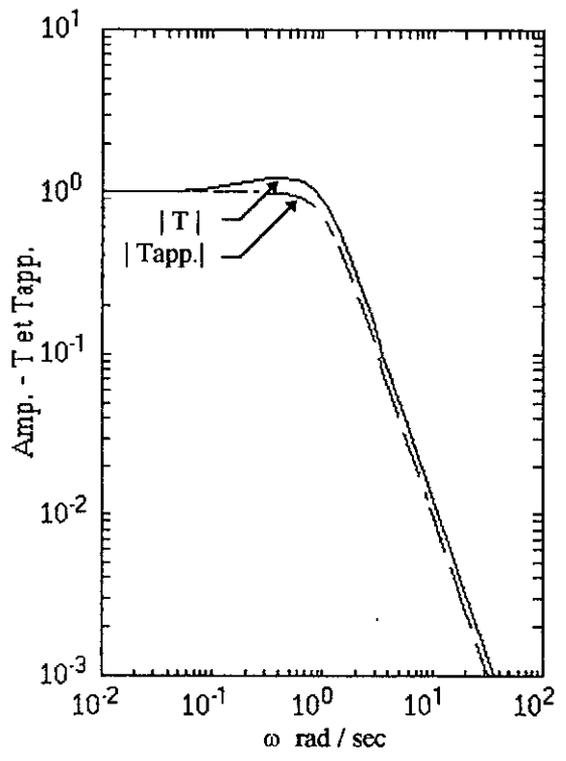
(a) : $c = 0.01$



(b) : $c = 0.1$



(c) : $c = 1$



(d) : $c = 10$

Fig. 6.6 : Tracé de bode de l'amplitude de T et de Tapp. Pour $r = 0$, pour la commande H_{∞} .

b) Contrôleur LQG:

Pour résoudre le problème standard par la commande LQG, D_{11} doit être égale à zéro (Annexe C). Si ce n'est pas le cas, le programme "H2" ignore D_{11} et calcule le contrôleur LQG comme si D_{11} est égal à zéro.

Comme pour le contrôleur H_∞ , faisons varier les valeurs de c , nous obtenons les courbes de la figure (6.7).

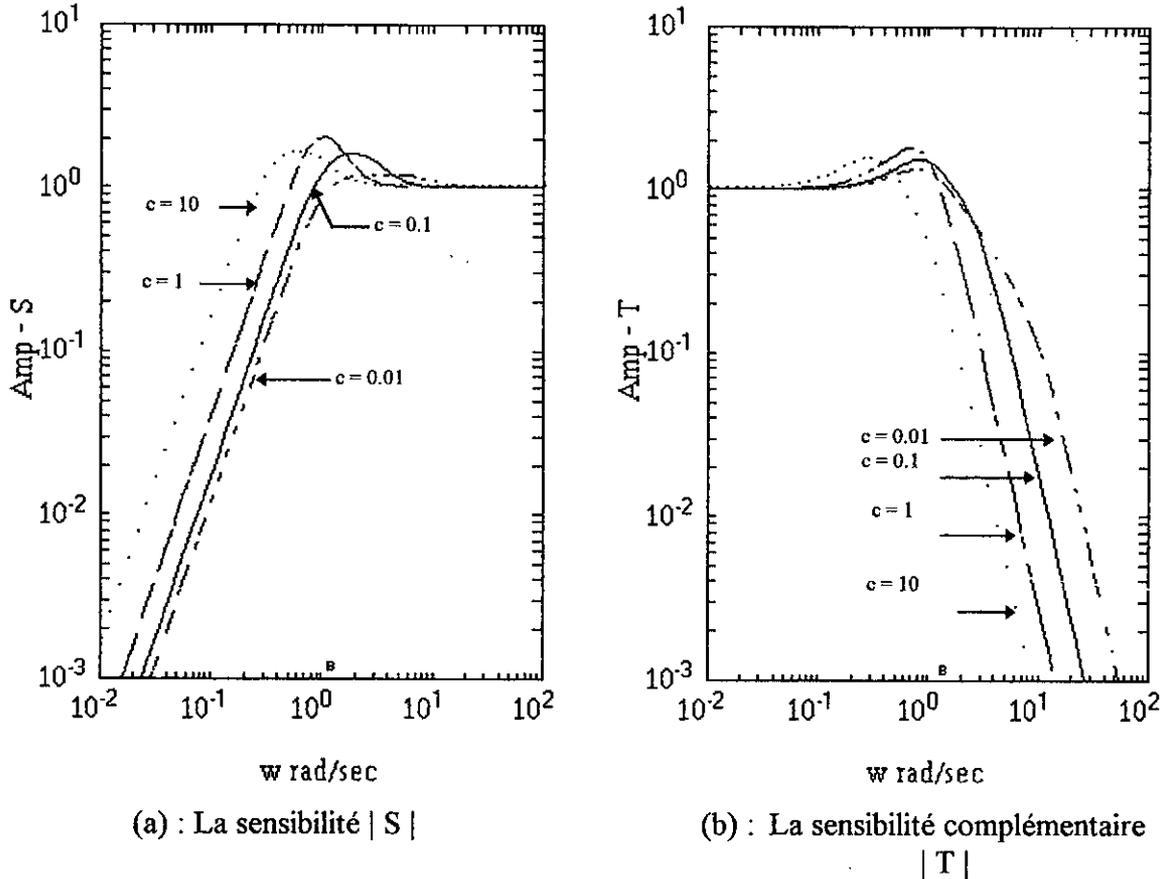


Fig. 6.7 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $r = 0$, pour la commande LQG.

Même remarque que pour la commande H_∞ , quand c augmente $|T|$ diminue et $|S|$ augmente, la bande passante est de 1rad/sec.

Les tracé de S et de $1/V$ dans la figure (6.8), de T et de T_{app} dans la figure (6.9) montrent, pour les quatre valeurs de c , que le pic de S et de T de la commande LQG est plus important que celui de la commande H_∞ (Fig. 6.5 et 6.6).

Dans la figure (6.9), on remarque aussi que le "roll off" (ou pente) de T en hautes fréquences n'est pas parallèle à celui de T_{app} . (T et T_{app} se coupent). Donc le "roll off" de T de la commande LQG est différent de 40dB/décade.

Pour calculer les paramètres du contrôleur optimal LQG, choisissons $c = 0.01$, le pic de S et de T pour cette valeur est moins important par rapport aux autres.

La fonction de transfert du contrôleur du problème modifié est:

$$\tilde{K}_{LQG}(s) = \frac{1.556 s + 1}{s^2 + 15.5563 s + 121} \quad (6.27).$$

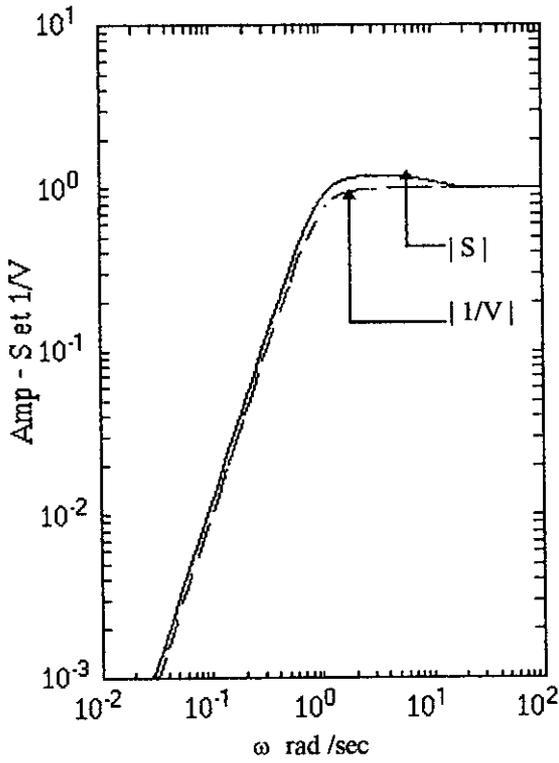
et

$$K_{LQG}(s) = \frac{\tilde{K}_{LQG}(s)}{c} = 100 \tilde{K}_{LQG}(s). \quad (6.28).$$

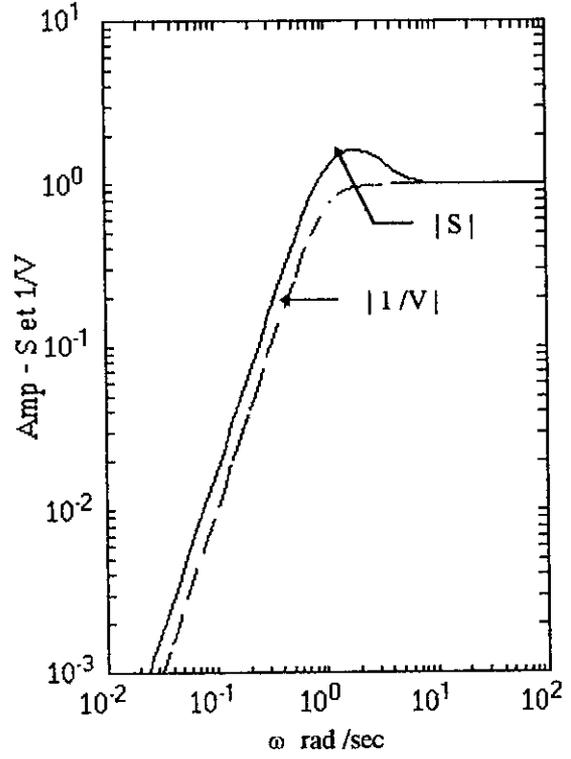
Le contrôleur LQG est propre et stable, ses pôles sont: $-7.7782 \pm 7.7782j$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont stables et égales à :

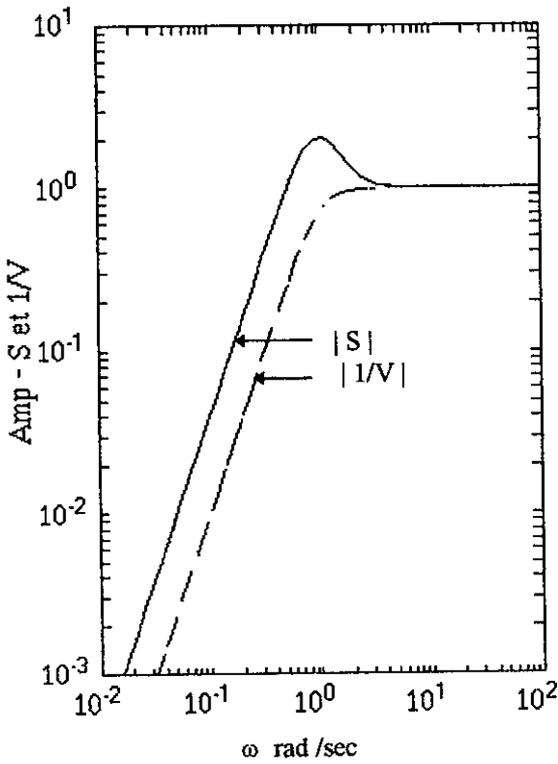
$$-7.77 \pm 7.77j, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm j).$$



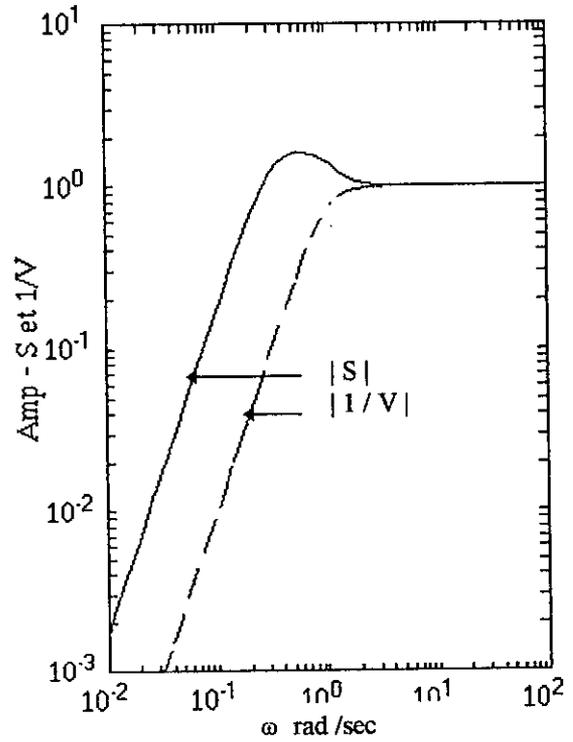
(a) : $c = 0.01$



(b) : $c = 0.1$

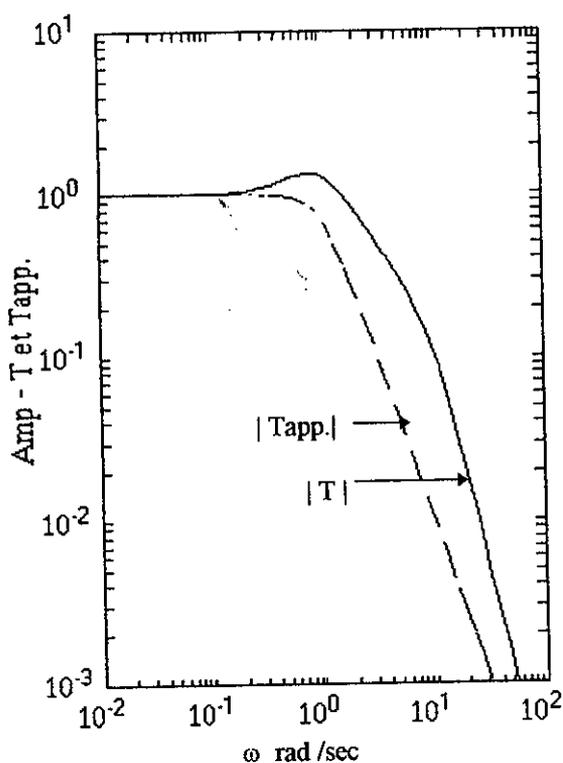


(c) : $c = 1$

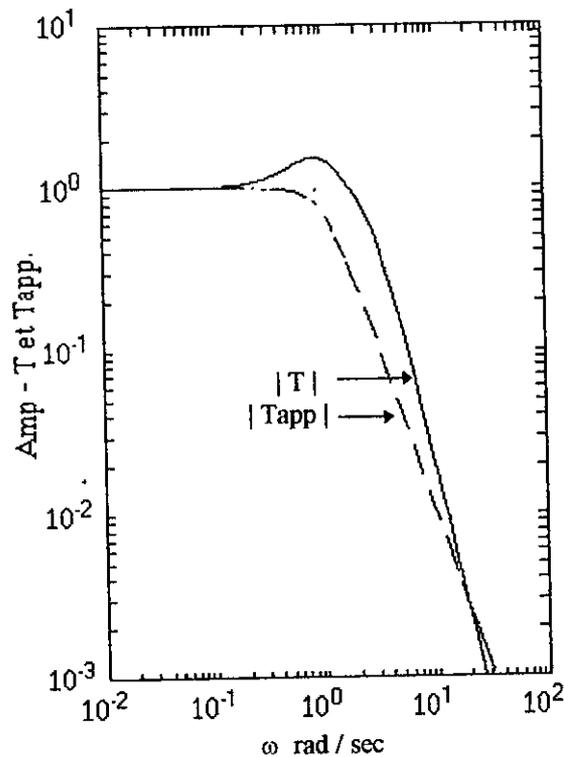


(d) : $c = 10$

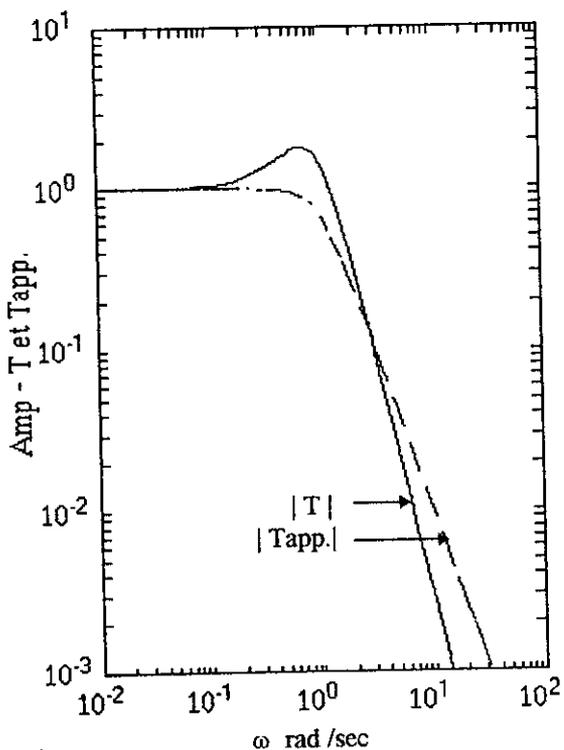
Fig. 6.8 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de 1/V pour $r = 0$, pour la commande LQG.



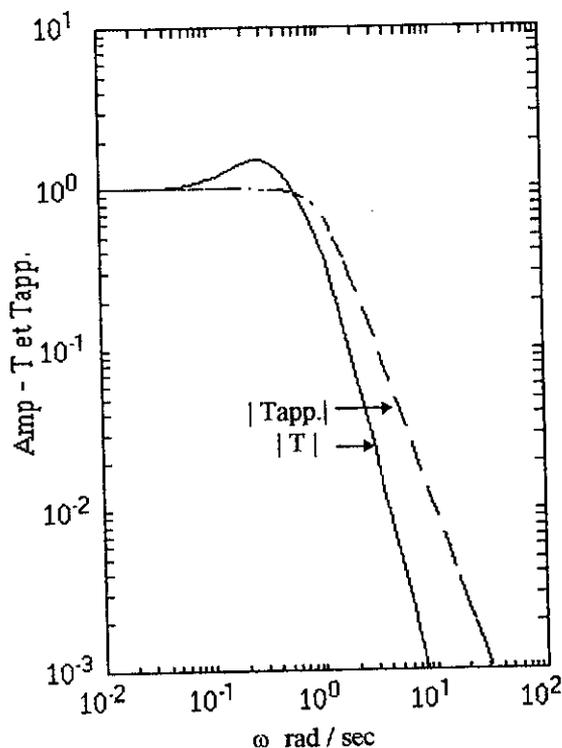
(a) : $c = 0.01$



(b) : $c = 0.1$



(c) : $c = 1$



(d) : $c = 10$

Fig. 6.9 : Tracé de bode de l'amplitude de T et de Tapp. Pour $r = 0$, pour la commande LQG.

2^{ème} cas: $r \neq 0$, c.à.d. $W_2 = c(1 + rs)$.

La robustesse contre les perturbations hautes fréquences, peut être améliorée en diminuant la fonction de sensibilité complémentaire T en hautes fréquences (descente plus rapide de T). Ceci sera réalisé en prenant r différent de zéro, ce qui donne un "roll off" de T de 60dB/décade. $|T_{app}|$ sera égale alors à :

$$|T_{app}| = \frac{\lambda}{c|1+rs||s^2 + s\sqrt{2} + 1|} \cong \frac{\beta}{|s^3|}, \text{ pour } \omega \text{ grand, et } \beta \text{ une constante donnée.} \tag{6.29}$$

On voit bien que T_{app} a un "roll off" de 60dB/décade.

Les spécifications sont donc:

- Chercher un contrôleur K propre,
- un "roll off" en haute fréquence de 60dB/décade,
- et une bande passante égale à 1.

a) Contrôleur H_∞ :

Nous fixons c à 1/10, pour les différentes valeurs de r , nous obtenons les courbes de la figure (6.10).

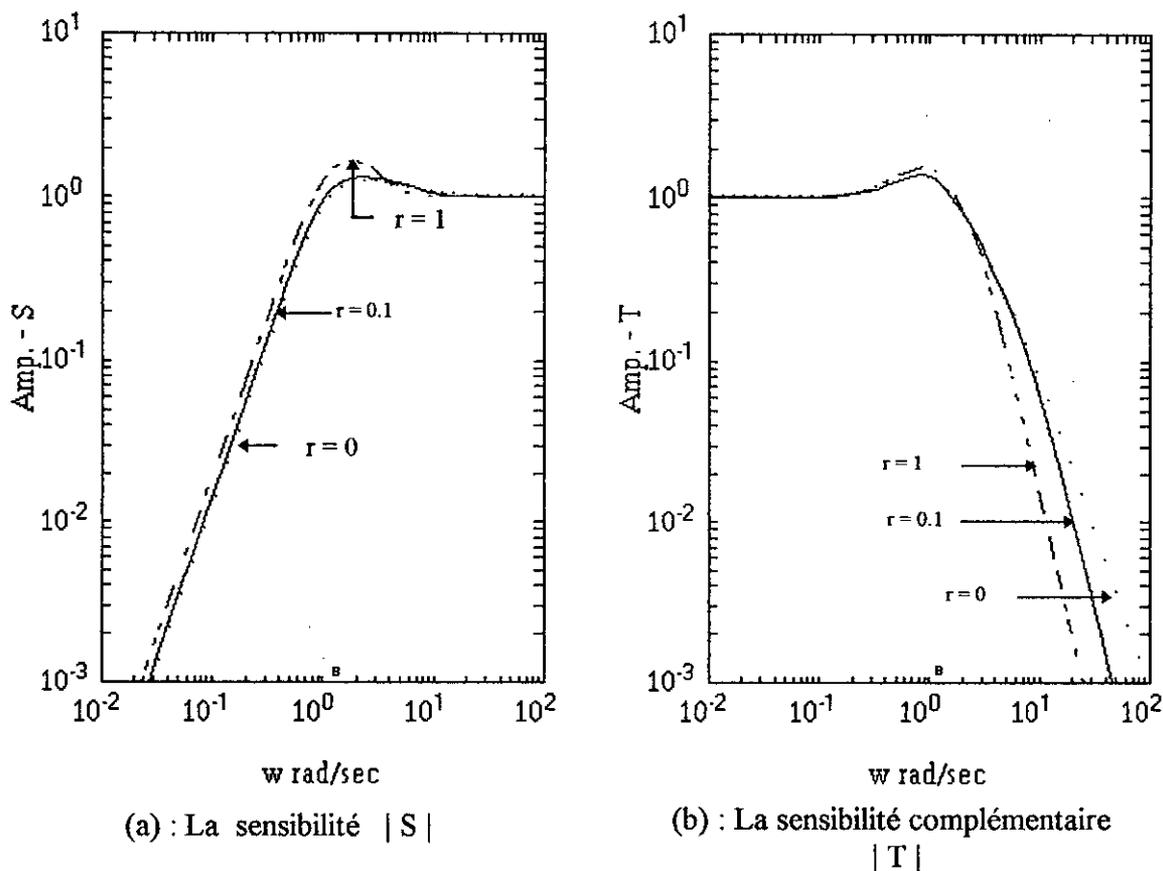


Fig. 6.10 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $c = 0.1$, pour la commande H_∞ .

Quand r augmente, $|T|$ diminue et $|S|$ augmente. Ceci est évident, vu l'équation (6.29). On remarque aussi que $|S|$ et $|T|$ ne sont pas très sensible à la variation de r . Pour les différentes courbes, la bande passante est de 1rad/sec.

Prenons $r=1/10$, pour cette valeur, le pic de $|S|$ et de $|T|$ est moins important que pour $r=1$, $|S|$ suit bien l'allure de $|1/V|$ et le "roll off" de T est bien égale à 60dB/décade (la pente de T est parallèle à celle de T_{app}). Ceci est bien illustrée dans (6.11) suivante:

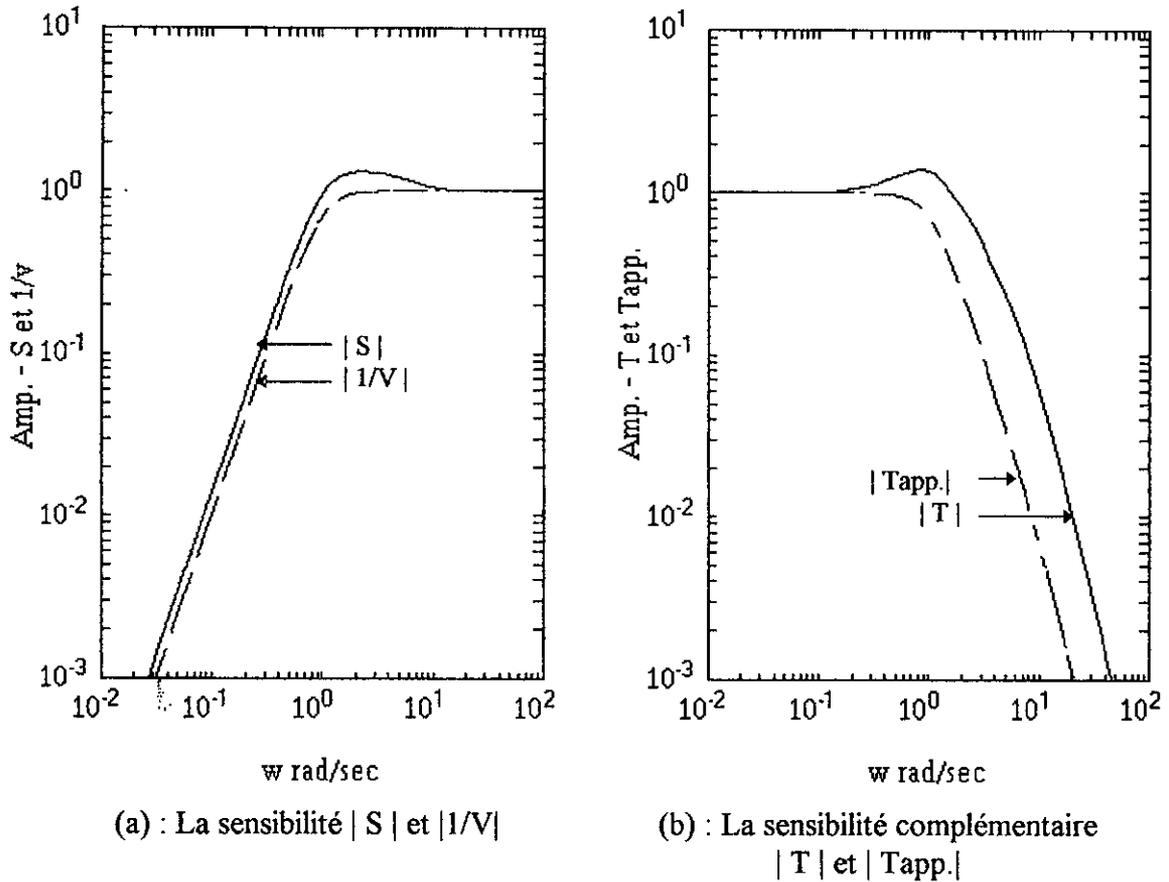


Fig.6.11 : Tracé de bode de l'amplitude de S , de $1/V$, de T et de T_{app} . Pour $c = 0.1$ et $r = 0.1$, de la commande H_∞ .

Calculons alors les paramètres du contrôleur sous optimal H_∞ , pour $r = 0.1$ et $c = 0.1$.

Après plusieurs itérations sur le paramètre γ , le programme H_∞ et pour $\gamma = 1.3834$:

$$\tilde{K}_{H_\infty}(s) = \frac{9780s^2 + 103864s + 58667}{s^3 + 10267s^2 + 164818s + 809491} \quad (6.30).$$

$$\begin{aligned} K_{H_\infty}(s) &= \tilde{K}_{H_\infty}(s) \cdot W_2^{-1} \\ &= \frac{979975s^2 + 10386420s + 5866709}{s^4 + 10277s^3 + 267490s^2 + 2457668s + 8094908} \end{aligned} \quad (6.31).$$

Les pôles de la fonction de transfert de la boucle fermée sont stables et égales à:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j), -7.33 \pm j, -10251, -10.$$

b) Contrôleur LQG:

Fixons c à $1/100$, faisons varier r , nous obtenons les courbes de la figure (6.12).

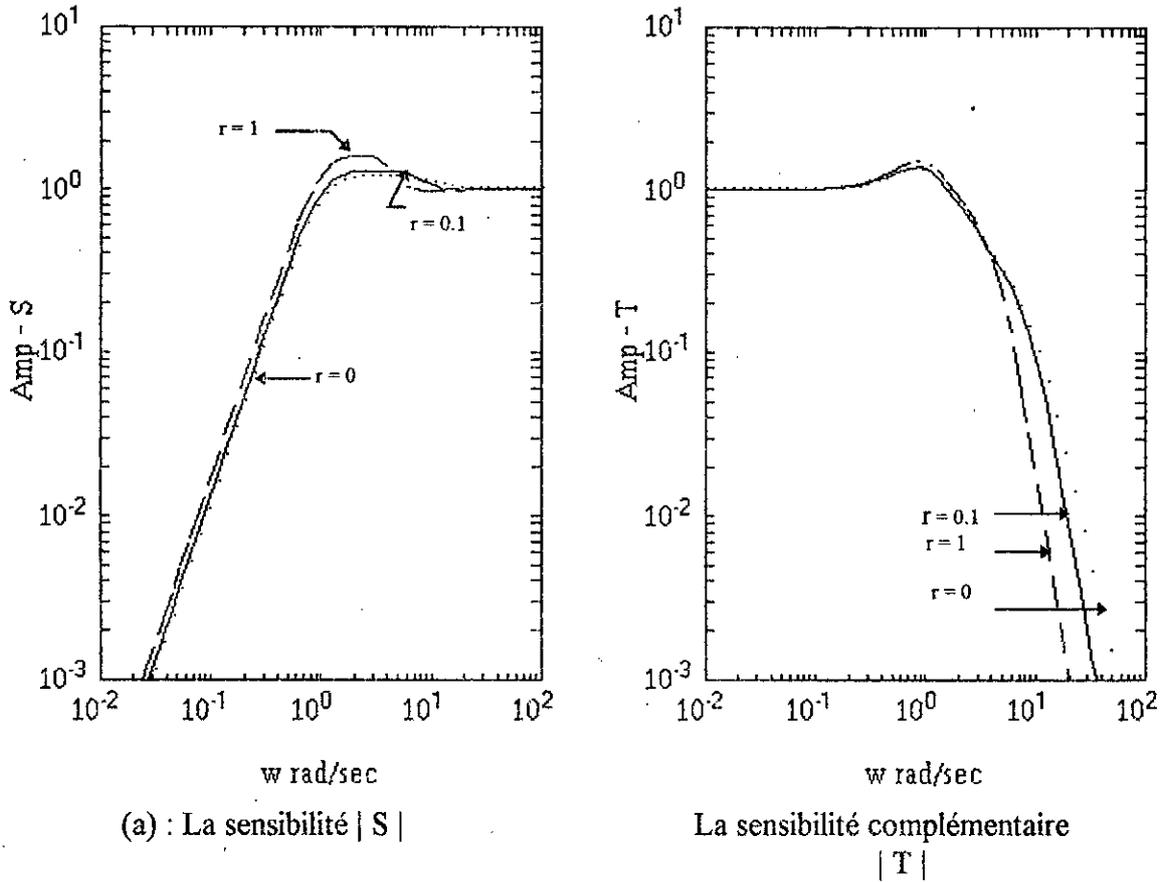


Fig. 6.12 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $c = 0.01$, pour la commande LQG.

Comme pour la commande H_∞ , quand r augmente, $|T|$ diminue et $|S|$ augmente.

Pour les différentes courbes, la bande passante est de 1 rad/sec .

Pour $r=0.1$, le pic de S dans la région de croisement "cross-over region" est moins important que pour $r = 1$.

Prenons alors, $r=1/10$, pour cette valeur, $|S|$ suit bien l'allure de $|1/V|$ (avec un léger pic aux environs de la fréquence 1 rad/sec), mais comme pour le cas précédent, la pente de T descend plus rapidement que celle de $T_{app.}$, ce qui donne un "roll off" différent de 60 dB/décade (la pente de T n'est pas parallèle à celle de $T_{app.}$). Ceci est bien illustrée dans (6.13) suivante:

Dans la région de croisement, on remarque des légers pics pour la fonction de sensibilité et sensibilité complémentaire. Ces pics ne sont pas très importants car le système est à minimum de phase. (il n'a pas de pôles et de zéros dans le demi plan droit) [Kwa2].

Pour le contrôleur LQG, nous remarquons que le système en boucle fermée est stable, les spécifications de la conception sont plus ou moins réalisées (la bande passante est égale à 1, le contrôleur est stable, propre, S et T sont petites dans leurs régions de fréquences respectives).

Seulement, on remarque pour le contrôleur H_2 , que les pics de S et T, sont plus importants que ceux du contrôleur H_∞ (Voir pour chaque valeur de c, les figures (6.5) et (6.8) pour S et les figures (6.6) et (6.9) pour T). Ce résultat est tout à fait logique, car la commande H_∞ est conçue spécialement pour minimiser, à travers toutes les fréquences ω , la valeur maximale de l'amplitude du transfert en boucle fermée des entrées de perturbations vers les sorties d'erreurs, alors que la commande H_2 minimise la valeur moyenne de ce transfert, elle n'est pas donc concernée par ce problème, qui risque d'être néfaste à la conception.

Ce qui est remarqué aussi pour le contrôleur H_2 (LQG), c'est qu'il n'arrive pas à avoir les pentes ou "roll-off" spécifiées en hautes fréquences (figures (6.9) et (6.13)), les spécifications de la robustesses, ne sont pas donc très bien réalisées pour cet exemple d'application.

Nous allons conclure cet exemple, avec une brève analyse pour vérifier si la robustesse de la théorie H_∞ , face aux perturbations dans le système lui même est réelle, comme il est espéré, on va la comparer aussi à celle de la commande LQG, qui n'est pas sensée prendre en charge ces perturbations lors de sa synthèse. Pour cela, prenons le compensateur:

$$K_{H_\infty} = Y/X, \text{ (même chose pour } K_{LQG}\text{)}$$

le polynôme caractéristique de la boucle fermée du système perturbé est:

$$D_{cl}(s) = D(s)X(s) + N(s)Y(s) = (1+s\theta)s^2X(s) + gY(s).$$

Le programme que nous avons développé " Robust " , nous permet de calculer les lieux des racines de D_{cl} en fixant un des deux paramètres g et θ et faire varier l'autre, la région de stabilité de la figure (6.14) peut être établie pour les compensateurs H_∞ et LQG, calculés précédemment ($c=0.1$ et $r=0.1$). Pour les autres compensateurs l'analyse est similaire.

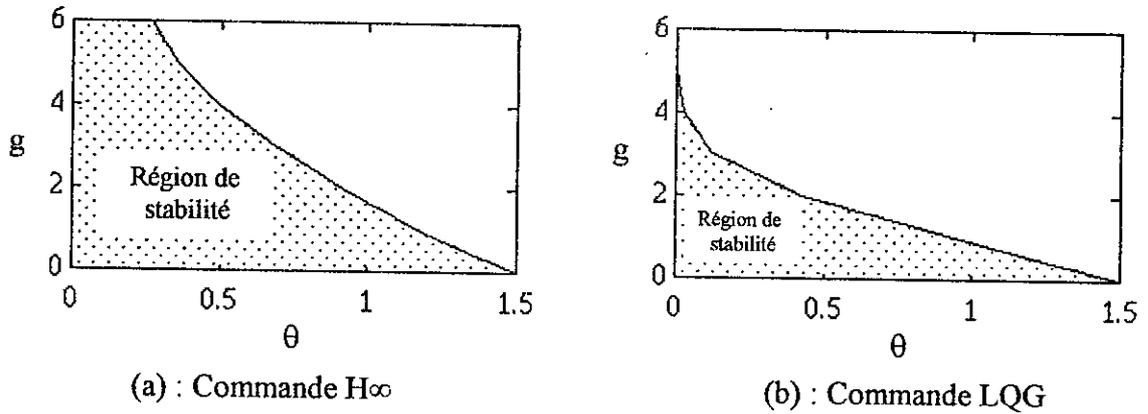


Fig. 6.14 : Région de stabilité

Le diagramme montre que pour $\theta=0$, le système en boucle fermée de la commande H_∞ est stable pour toutes les valeurs de $g > 0$, donc pour toutes perturbations relatives du dénominateur comprises entre : $-1 < 1/g - 1 < \infty$. Cette intervalle de stabilité est très large. Pour $g=1$, le système est stable pour : $0 \leq \theta < 1.179$, qui est aussi une large intervalle de stabilité. ($\theta_{nom} = 0$, $g_{nom} = 1$).

Pour la commande H_2 , nous remarquons pour $\theta = 0$, que le système en boucle fermée est stable pour les valeurs de g comprises entre $0 < g < 5$, ce qui correspond à : $-0.75 < 1/g - 1 < \infty$. Pour $g=1$, le système est stable pour : $0 \leq \theta < 0.957$.

Pour l'exemple considéré, et d'après ce qu'il précède, il est claire, que la théorie H_∞ est largement plus robuste que la théorie H_2 , elle supporte une large variation des perturbations dans le système lui même.

VI.3.2) Commande d'un cap de navire: (Ship Course Control)

Dans cette application, nous allons considérer un problème de conception beaucoup plus concret que l'exemple académique précédent. Il s'agit de la commande d'un cap de navire se déplaçant à une vitesse constante [Kwa1][Kwa2].

Comme pour l'exemple précédent, nous allons appliquer, le principe de conception de sensibilité mixte de Kwakernaak Après formulation des spécifications et transformation du problème en un problème standard, les deux commandes H_∞ et LQG seront appliquées respectivement.

La fonction de transfert de l'angle du gouvernail à celui du mouvement du navire est:

$$P(s) = \frac{(b_0 s + 1) b_1}{s(s + a_0)(s + a_1)} \quad (6.34).$$

Où les valeurs des paramètres b_0 , b_1 , a_0 , a_1 dépendent des conditions de fonctionnement.

La table 1 donne les valeurs des paramètres pour 5 conditions de fonctionnement, elle donne aussi les valeurs nominales du procédé (Ces valeurs sont issues de l'article [Kwa1]).

Conditions de fonctionnement	b_0	b_1	a_0	a_1
" nominales "	1	1	2	-0.5
1	1.07	0.75	1.96	-0.70
2	1.05	0.74	1.66	-0.59
3	0.93	0.85	1.86	-0.47
4	0.71	1.29	2.02	-0.21
5	0.89	1.83	2.35	0.05

Table 1: Les valeurs des paramètres de la fonction de transfert du navire.

Remarque:

Les résultats que nous allons présenter sont obtenus avec les valeurs nominales données par la table1, les mêmes résultats peuvent être obtenus, en utilisant les valeurs nominales de l'article [Kwa2],et qui sont respectivement égales à 0.98, 1.72, 2.13, -0.325. Ces valeurs n'ont pas une grande influence sur la synthèse du contrôleur, pour les deux cas, nous avons un pôle stable et un autre instable. Le système n'est pas à minimum de phase.

Les spécifications du cahier des charges de la conception sont formulées comme suit:

- 1) les perturbations de charges constantes agissant sur les entrées du procédé sont rejetées à la sortie.
- 2) Le système en boucle fermée est stable pour toutes les conditions de fonctionnement.

VI.3.2.1) Performances:

Nous allons discuter d'abord la spécification N°1 qui exige que les perturbations de charges constantes agissant à l'entrée du procédé soient rejetées à la sortie.

Dans la configuration de la figure (6.15), nous schématisons l'effet de ces perturbations par ω .

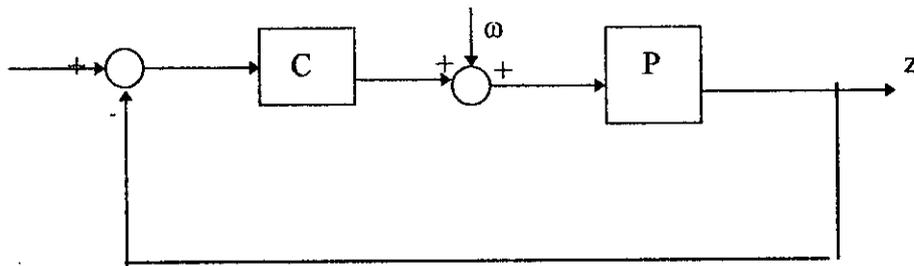


Fig. 6.15: Boucle de contre réaction avec perturbations de charges.

La fonction de transfert qui a pour entrée les perturbations de charges agissant à l'entrée du procédé et pour sortie, la sortie du système contrôlé est:

$$z = P (\omega - C z).$$

$$\iff z = \frac{P}{1+PC} \omega = R \omega \tag{6.35}$$

Avec:

$$R = P \frac{1}{1+PC} = P S. \tag{6.36}$$

D'après (6.34) la fonction de transfert P , se comporte aux basses fréquences comme $1/s$. Pour avoir la fonction R petite aux basses fréquences, il faut qu'elle se comporte comme s^k (k au minimum égale à 1). Si on prend $k = 1$, la fonction de sensibilité S se comporte aux basses fréquences comme s^2 car $S = R/P$.

De plus nous avons:

$$|S| \cong \frac{|\lambda|}{|W_1(j\omega)V(j\omega)|} \quad \text{pour } \omega \text{ petit.}$$

Donc W_1V doit se comporter comme $1/s^2$.

D'après [Kwa1]:

$$V(s) = \frac{M(s)}{D(s)} \tag{D(s) est le dénominateur de P.}$$

$$V(s) = \frac{M(s)}{s(s+\bar{a}_0)(s+\bar{a}_1)}. \tag{6.37}$$

(\bar{a}_0 et \bar{a}_1 sont les valeurs nominales de a_0 et a_1).

Pour avoir V propre, M devrait avoir le même degré que $D(s)$, c'est à dire un polynôme de degré égale à 3.

Les racines de $M(s)$ réapparaissent dans les pôles du système en boucle fermée, (ceci est appelé un partiel placement de pôle, Dans [Kwa1]), ils sont choisies alors stables:

$$M(s) = (s^2 + \sqrt{2} s + 1) (s + \bar{a}_0). \tag{6.38}$$

Pour que S se comporte comme s^2 , on prend:

$$W_1(s) = \frac{\omega_1 + s}{s} W_1(s) \tag{6.39}$$

Avec ω_1 la fréquence jusqu'à laquelle l'effet de l'intégration s'étend. On la choisit égale à 1, pour avoir une bande passante de 1.

\bar{W}_1 procure plus de liberté pour le choix de W_1 (pour cet exemple, $\bar{W}_1=1$).

Pour le choix de W_2 , nous prenons comme pour l'exemple précédent:

$$W_2(s) = c (1 + r s). \quad (6.40)$$

c et r sont à choisir ultérieurement.

VI.3.2.2) Robustesse de la stabilité:

Les perturbations des paramètres qui affectent les caractéristiques du procédé en basses fréquences, sont assignées au dénominateur, et celles qui affectent le procédé en hautes fréquences sont assignées au numérateur, nous aurons alors:

$$P(s) = \frac{b_0 s + 1}{\frac{a_0}{b_1} s \left(\frac{s}{a_0} + 1 \right) (s + a_1)} = \frac{b_0 s + 1}{\beta_1 s (\alpha_0 s + 1) (s + a_1)}. \quad (6.41)$$

Où :

$$\alpha_0 = \frac{1}{a_0}, \quad \beta_1 = \frac{a_0}{b_1}. \quad (6.42)$$

En incluant la variation de α_0 dans le numérateur. On réécrit la fonction de transfert du procédé comme:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\frac{b_0 s + 1}{\alpha_0 s + 1} (\bar{\alpha}_0 s + 1)}{\beta_1 s (s + a_1) (\bar{\alpha}_0 s + 1)}. \quad (6.43)$$

On détermine alors les perturbations relatives du numérateur et du dénominateur:

$$\frac{D(s) - D_0(s)}{D_0(s)} = \frac{\beta_1 (s + a_1)}{\beta_1 (s + \bar{a}_1)} - 1. \quad (6.44)$$

$$\frac{N(s) - N_0(s)}{N_0(s)} = \frac{(b_0 s + 1)(\bar{\alpha}_0 s + 1)}{(\bar{b}_0 s + 1)(\alpha_0 s + 1)} - 1. \quad (6.45)$$

La barre veut dire la valeur nominale.

La figure (6.16) montre l'amplitude des perturbations relatives du numérateur et du dénominateur. On remarque que ces perturbations ne sont pas très larges. Les perturbations relatives du dénominateur sont au-dessous de 1 avant la fréquence 1. C'est pour cette raison, qu'on espère une bande passante de 1. Si l'amplitude de la fonction de sensibilité S est plus petite que 1 jusqu'à cette fréquence, les perturbations relatives du dénominateur sont inoffensives. Les perturbations relatives du numérateur ne dépassent pas la valeur 0.25, elles ne sont pas donc très dangereuses.

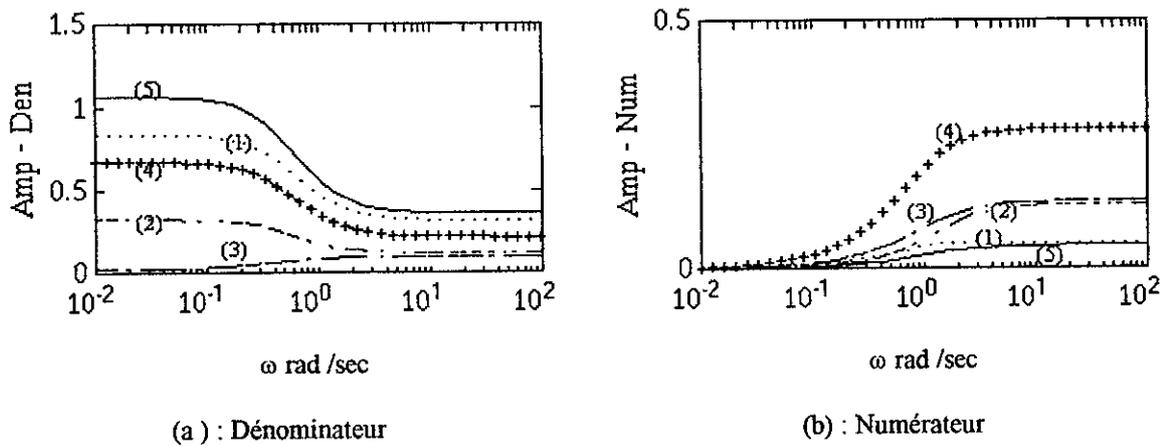


Fig. 6.16 : Perturbations relatives du numérateur et du dénominateur pour les différentes conditions de fonctionnement.

VI.3.2.3) Transformation du problème en un problème standard:

A cause du choix des fonctions poids W_1 et W_2 , le système augmenté Pa souffre de deux problèmes:

- 1) Il n'est pas stabilisable, car W_1 a un pôle en zéro.
- 2) Il n'est pas propre, car W_2 n'est pas propre pour $r \neq 0$.

Pour remédier à ce problème, nous transformons le problème de sensibilité mixte représenté par la figure (6.2) en un problème équivalent représenté par la figure(6.17).

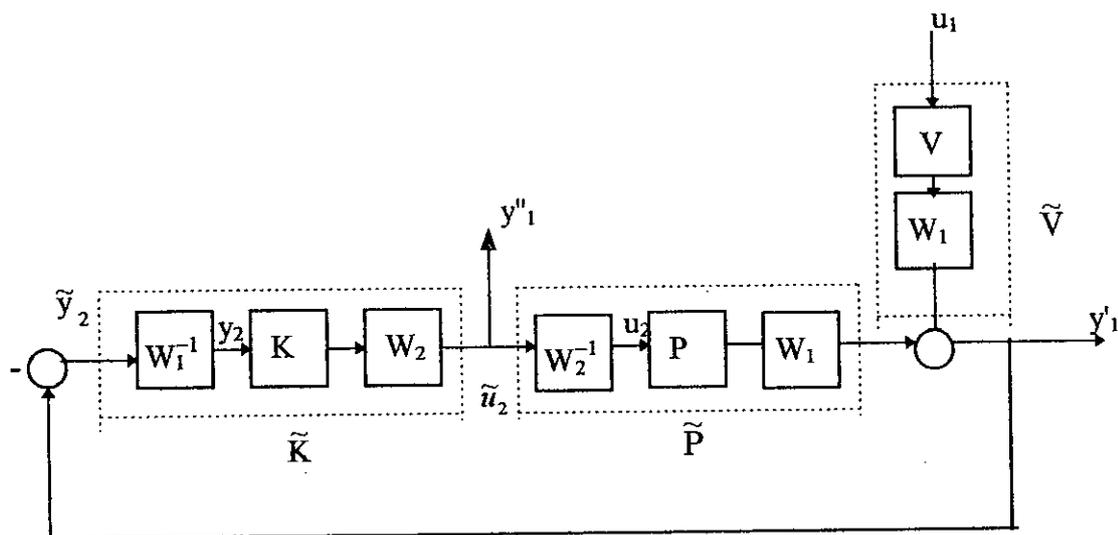


Fig. 6.17: Bloc de diagramme équivalent.

$$\tilde{P} = W_1 P W_2^{-1}, \quad \tilde{V} = W_1 V, \quad \tilde{W}_1 = I, \quad \tilde{W}_2 = I.$$

$$\tilde{K} = W_2 K W_1^{-1}.$$

Pour retrouver K il suffit de calculer:

$$K = W_2^{-1} \tilde{K} W_1. \tag{6.46}$$

VI.3.2.4) Conception des contrôleurs : H_∞ et LQG.

*1^{er} cas : $r = 0$.

Pour les hautes fréquences, la fonction de sensibilité complémentaire T est approximée à :

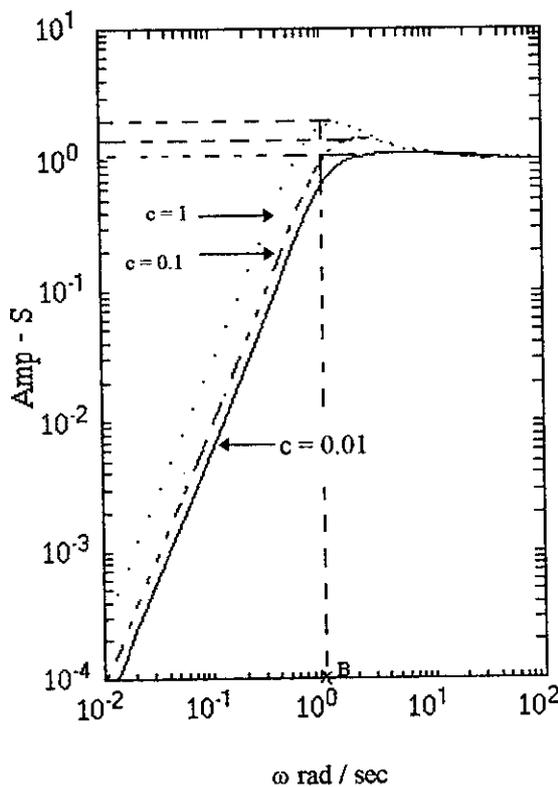
$$|T_{app.}| = |PU| \cong \frac{|\beta||P|}{|W_2U|} \cong \frac{|\beta| |(\bar{b}_0 s + 1) b_1|}{|c(s^2 + s\sqrt{2} + 1)(s + \bar{a}_0)|} \cong \frac{|\lambda|}{|s^2|} \quad (6.47).$$

β et λ sont des constantes.

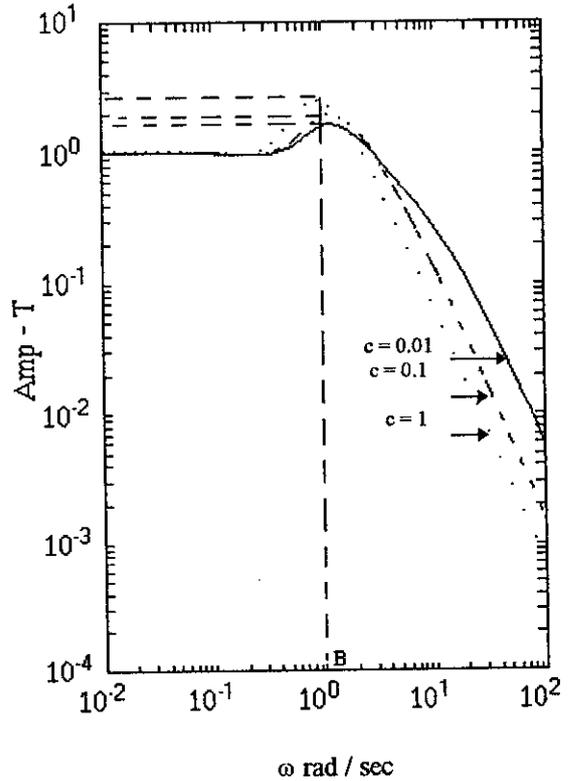
Vue l'équation (6.47), pour ω grand, la pente (ou roll off) de T souhaitée est donc bien égale à 40dB/décade. Dans ce qui suit pour vérifier si les fonctions de sensibilités complémentaires obtenues ont des pentes de 40dB/décade, on fait le tracé de |T| et |Tapp.|, les descentes des deux courbes doivent être parallèles.

a) Contrôleur H_∞ :

En faisant varier la valeur de c, nous obtenons les différentes courbes de la figure (6.18):



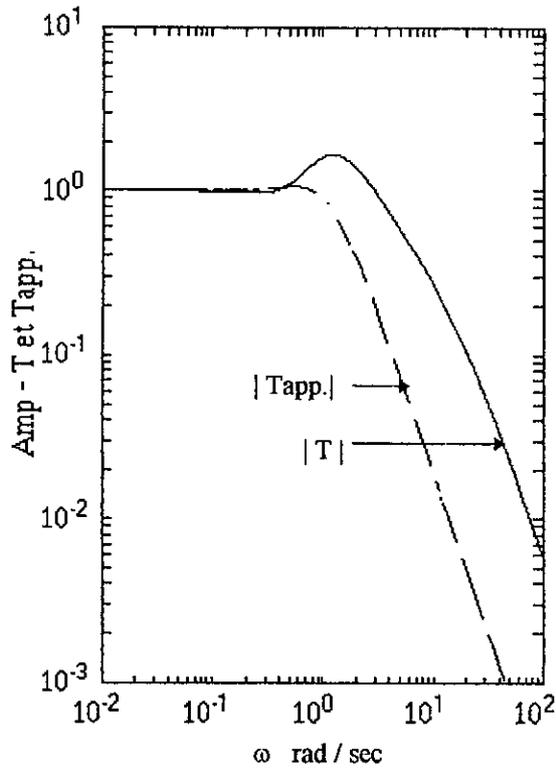
(a) : La sensibilité | S |



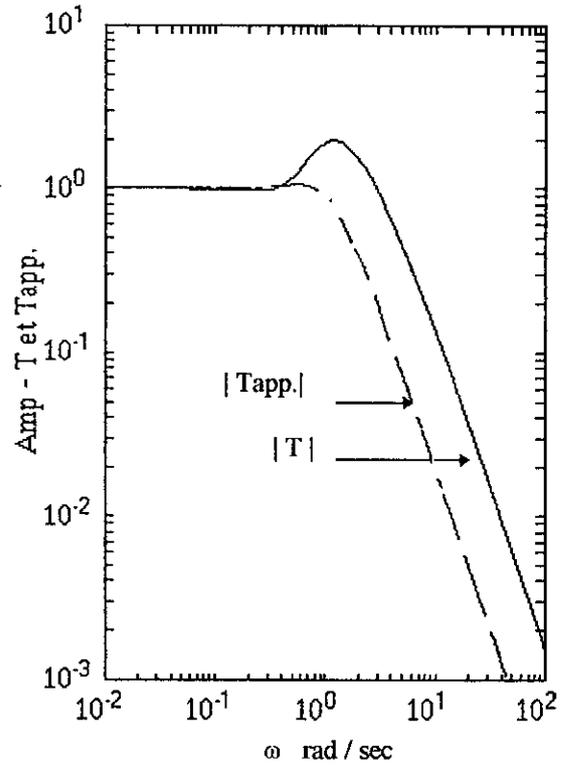
(b) : La sensibilité complémentaire | T |

Fig. 6.18: Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $r = 0$, pour la commande H_∞ .

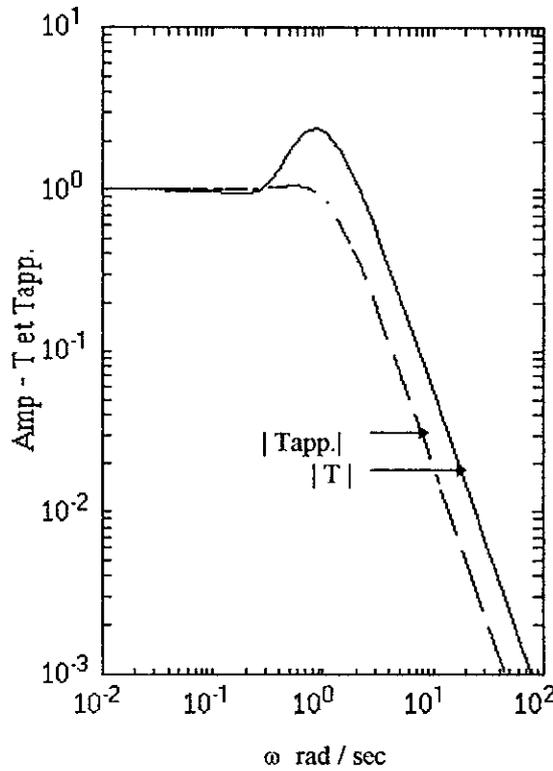
Comme pour l'exemple précédent, quand c augmente | S | augmente et | T | diminue, ceci est dû à l'équation (6.47). Pour les différentes valeurs de c, nous remarquons que la bande passante est égale à 1 (B=1). Pour vérifier si le "roll off" est de 40dB/décade, nous traçons les différentes courbes de la figure (6.19):



(a) : $c = 0.01$



(b) : $c = 0.1$



(c) : $c = 1$

Fig. 6.19 : Tracé de bode de l'amplitude de T et de Tapp. pour $r = 0$ de la commande H_∞ .

La figure (6.19), montre bien que le "roll off" de T en hautes fréquences est égale à 40dB/décade, comme il a été prévu.

Pour calculer le contrôleur sous-optimal H_∞ , prenons $c=0.01$. Pour cette valeur de c le pic de S et de T est plus petit que celui des autres. (Voir Fig. 6.18).

Pour $c=0.01$, nous obtenons après plusieurs itérations sur le paramètre γ , le contrôleur sous optimal suivant:

$$K_{H_\infty} = \frac{1659053.8s^4 + 6288249.5s^3 + 7782601.6s^2 + 4215865.3s + 1062459.4}{s^5 + 28522.6s^4 + 671759s^3 + 1257833.7s^2 + 614596.4s}$$

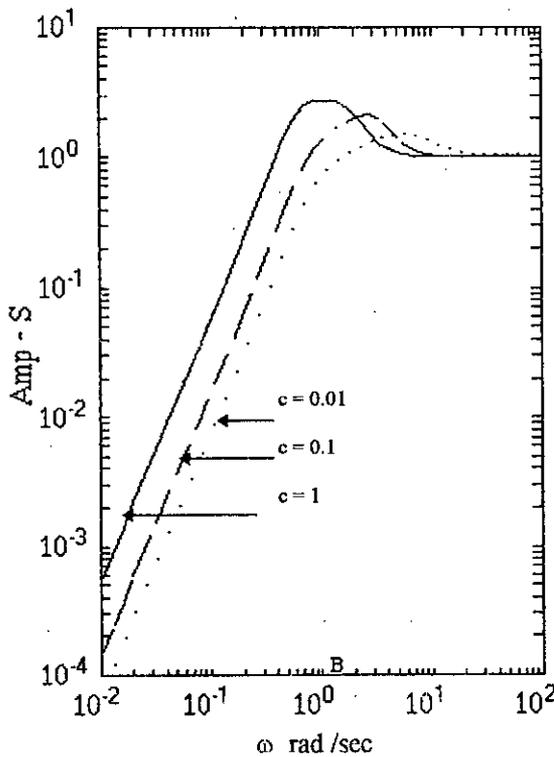
(γ_{opt} est de 1.1571) (6.48).

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $F_b(Pa,K)$ sont stables:

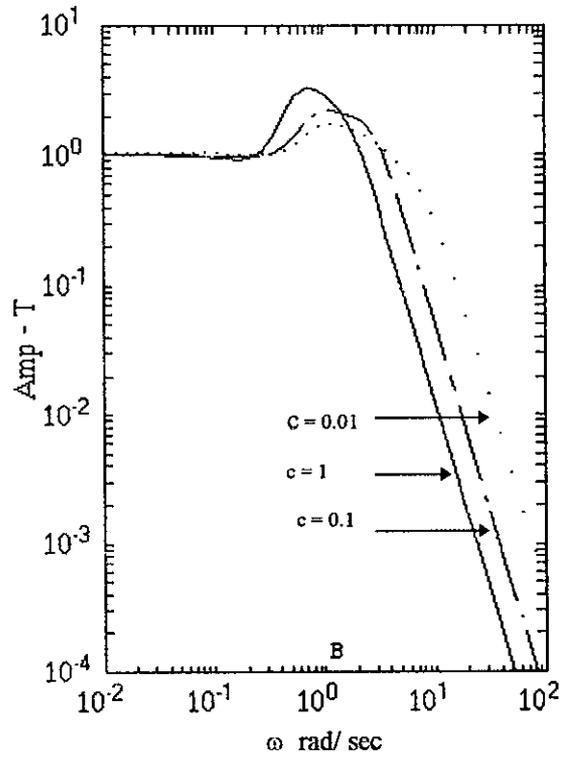
$$-28499, -18, -1, -1, -1, -2, -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j).$$

b) Contrôleur LQG :

Comme pour le contrôleur H_∞ , la variation de la valeur de c donne les différentes courbes de la figure (6.20):



(a) : La sensibilité $|S|$



(b) : La sensibilité complémentaire $|T|$

Fig 6.20 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $r=0$ pour la commande LQG.

Nous remarquons que S et T sont petites dans leurs régions de fréquences respectives, la bande passante est de 1rad/sec ($B = 1$). Les pics de ces fonctions sont plus importantes que ceux de la commande H_∞ . Pour $c = 1$, le pic de S est à peu près égal à 15dB.

Pour vérifier si le "roll off" est de 40dB/décade, nous traçons les différentes courbes de la figure (6.21).

Le Tracé de la figure (6.21) montre, pour les différentes valeurs de c, que la pente de T descend plus rapidement que celle de Tapp. (T et Tapp. ne sont pas parallèles). Donc comme pour l'exemple 1, le "roll off" spécifié n'est pas réalisé.

Prenons $c=0.01$, le pic dans la région de croisement (Cross-over region), pour cette valeur est plus petit que ceux des autres, calculons alors les paramètres du contrôleur LQG :

$$K_{LQG} = \frac{349.4s^4 + 1303.8s^3 + 1565.6s^2 + 811.3s + 200}{s^5 + 19.13s^4 + 180.56s^3 + 307.72s^2 + 145.3s} \quad (6.49).$$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $F_b(P_a, K)$ sont stables:

$$-7.2 \pm 7.03j; -2, -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j), -1, -1, -1.$$

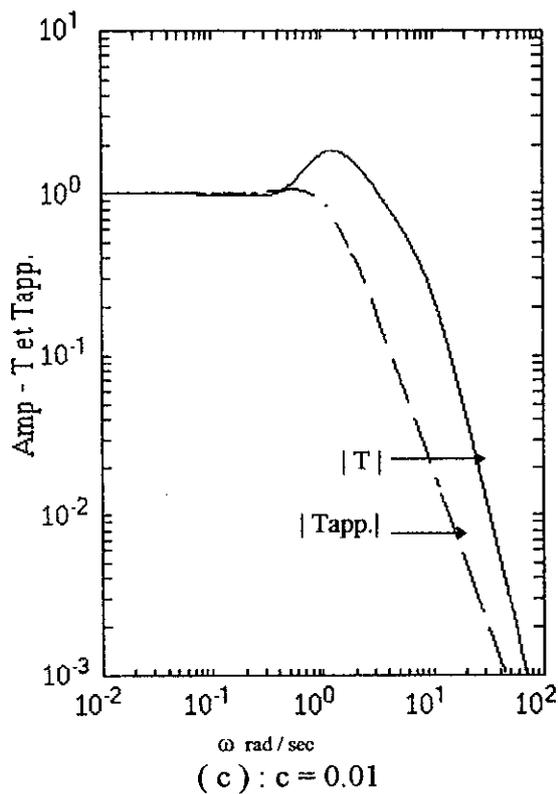
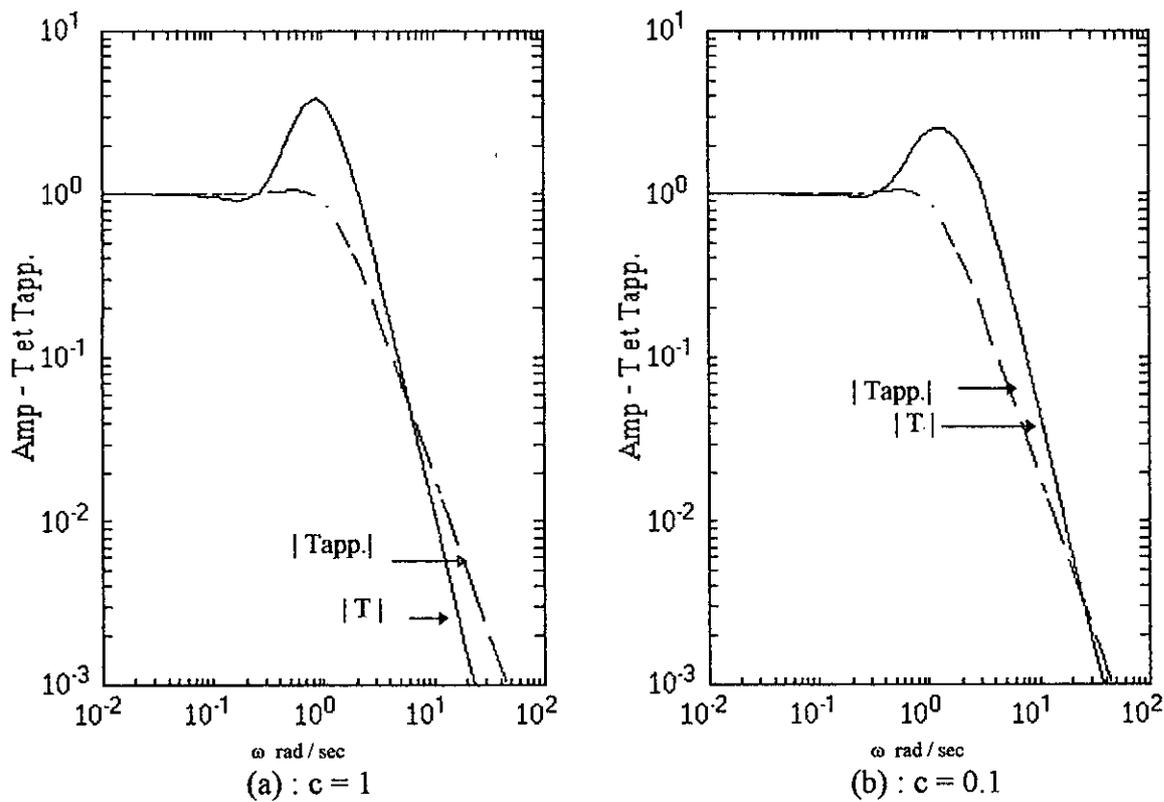


Fig. 6.21 : Tracé de bode de l'amplitude de T et de Tapp. pour $r = 0$ pour la commande LQG.

* 2^{ème} cas : $r \neq 0$

Nous avons :

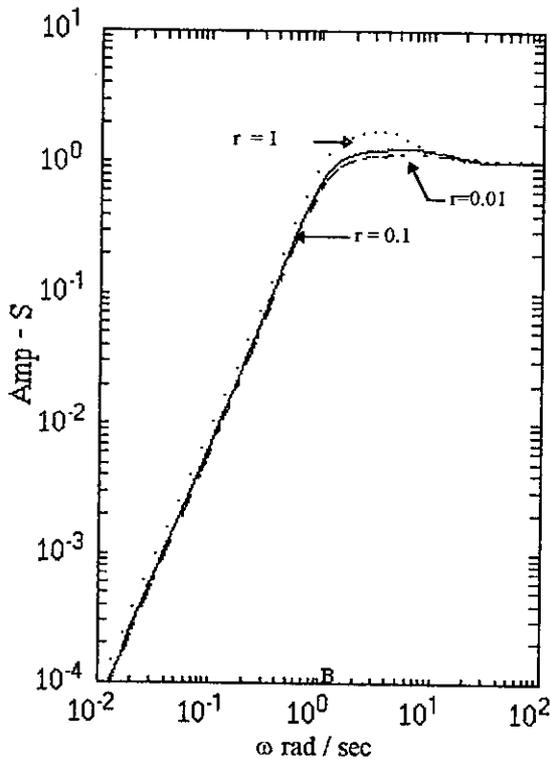
$$W_2 = c(1+rs) \tag{6.50}$$

$$|T_{app}| \cong \frac{|\beta||P|}{|W_2V|} \cong \frac{|\beta| |(b_0s+1)b_1|}{|c(1+rs)(s^2+s\sqrt{2}+1)(s+a_0)|}, \quad \text{pour } \omega \text{ grand} \tag{6.51}$$

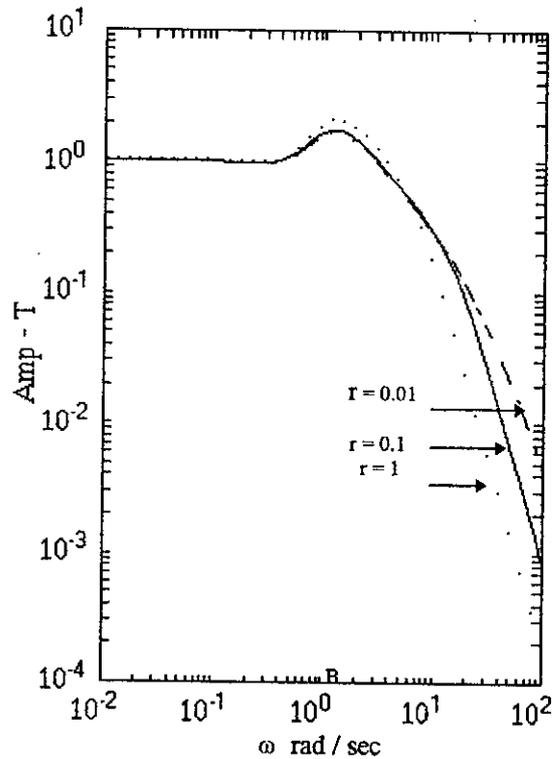
La pente de T souhaitée est de 60dB/décade.

a) Contrôleur H_∞

Nous fixons c à 0.01 et nous faisons varier r , nous obtenons les courbes de la figure (6.22).



(a) : La sensibilité | S |

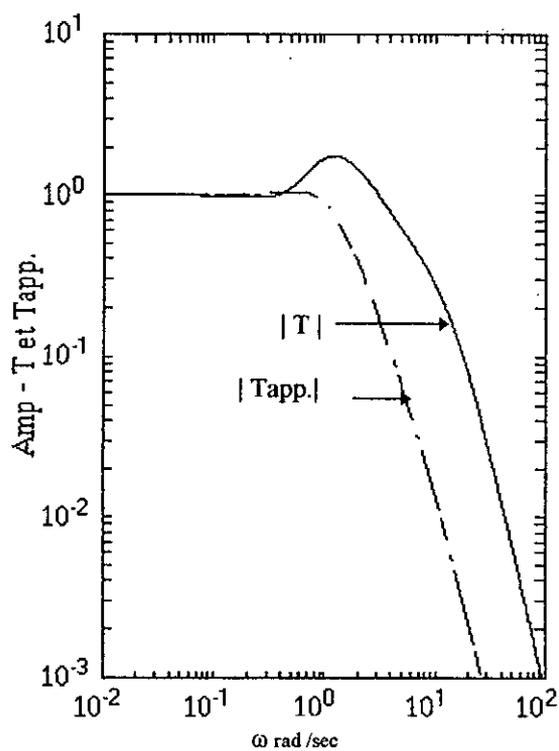


(b) : La sensibilité complémentaire | T |

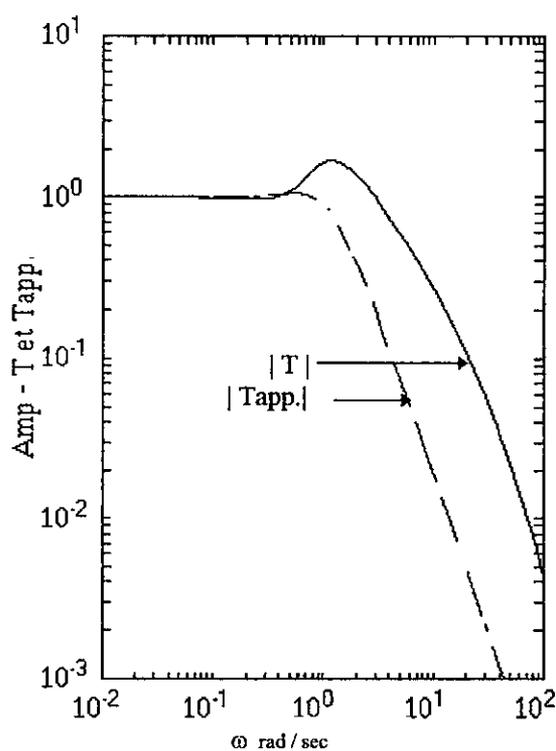
Fig. 6.22 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $c = 0.01$, pour la commande H_∞ .

En dehors de la région de croisement, les courbes de S et T ne sont pas très sensibles à la variation de r (les courbes se rapprochent l'une de l'autre). Le pic correspondant à la valeur $r=1$, est plus important que celui des autres.

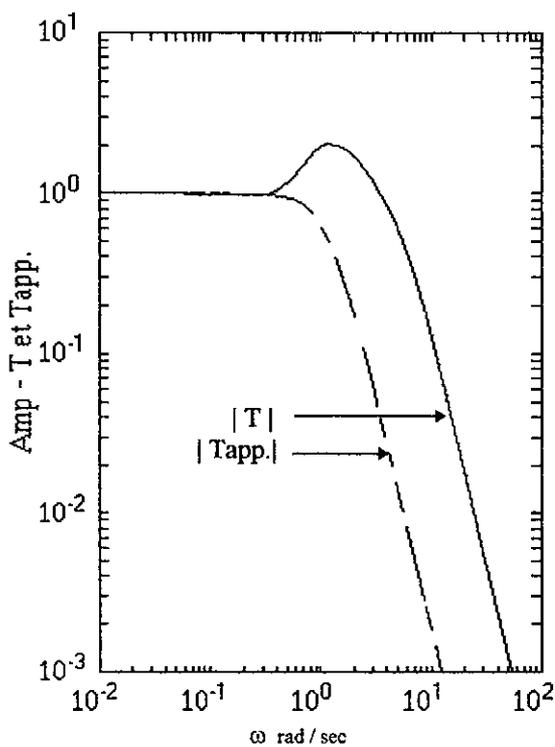
Pour les différentes valeurs de r, la largeur de la bande est de 1rad/sec, le "roll off" de T est de 60dB/décade. Ceci est confirmée dans la figure (6.23).



(a) : $r = 0.1$



(b) : $r = 0.01$



(c) : $r = 1$

Fig. 6. 23:Tracé de bode de l'amplitude de T et de Tapp. pour $c = 0.01$ de la commande H_{∞} .

Pour $c=0.01$ et $r=0.1$, on obtient un γ optimal de 1.341, le contrôleur sous optimal H_∞ correspondant est:

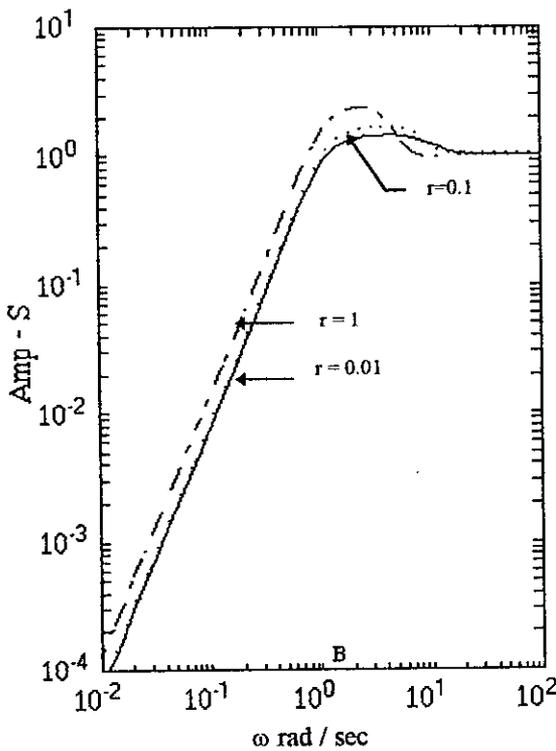
$$K_{H_\infty} = \frac{10^{10} (3.89s^5 + 53.53s^4 + 164.1s^3 + 187.71s^2 + 96.79s + 23.53)}{s^7 + 10^{10} (0.0047s^6 + 0.18s^5 + 3.17s^4 + 21.13s^3 + 33.44s^2 + 15.31s)} \quad (6.52).$$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont stables :

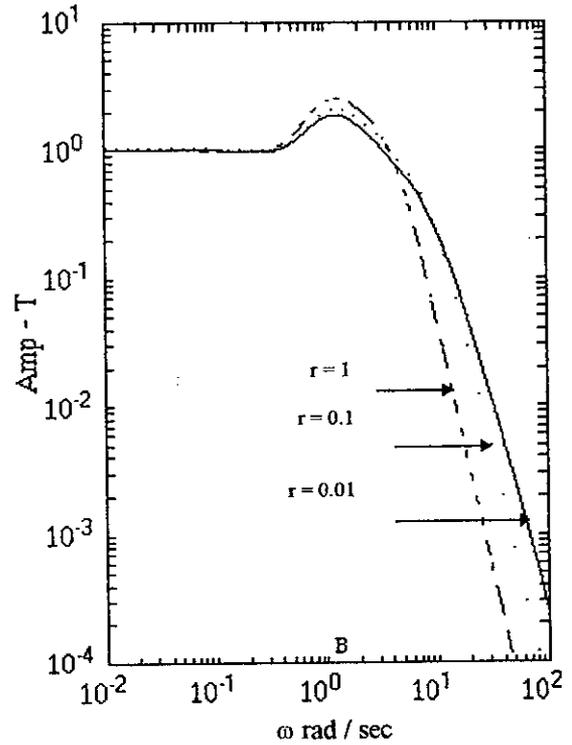
$$-12.3 \pm 10j, -10, -2, -1, -1, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm j).$$

b) Contrôleur LQG

c est fixé à 0.01, la variation de r donne les courbes de la figure (6.24):



(a) : La sensibilité | S |



(b) : La sensibilité complémentaire | T |

Fig. 6.24 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $c = 0.01$, pour la commande LQG.

Comme pour le cas précédent, la bande passante est de 1, les pics aux environs de la fréquence 1rad/sec sont plus importants que ceux de la commande H_∞ , ils s'étendent jusqu'à la fréquence 10. La pente de T est différente de 60dB/décade (T et T_{app} . ne sont pas parallèles). Ceci est illustré dans la figure (6.25).

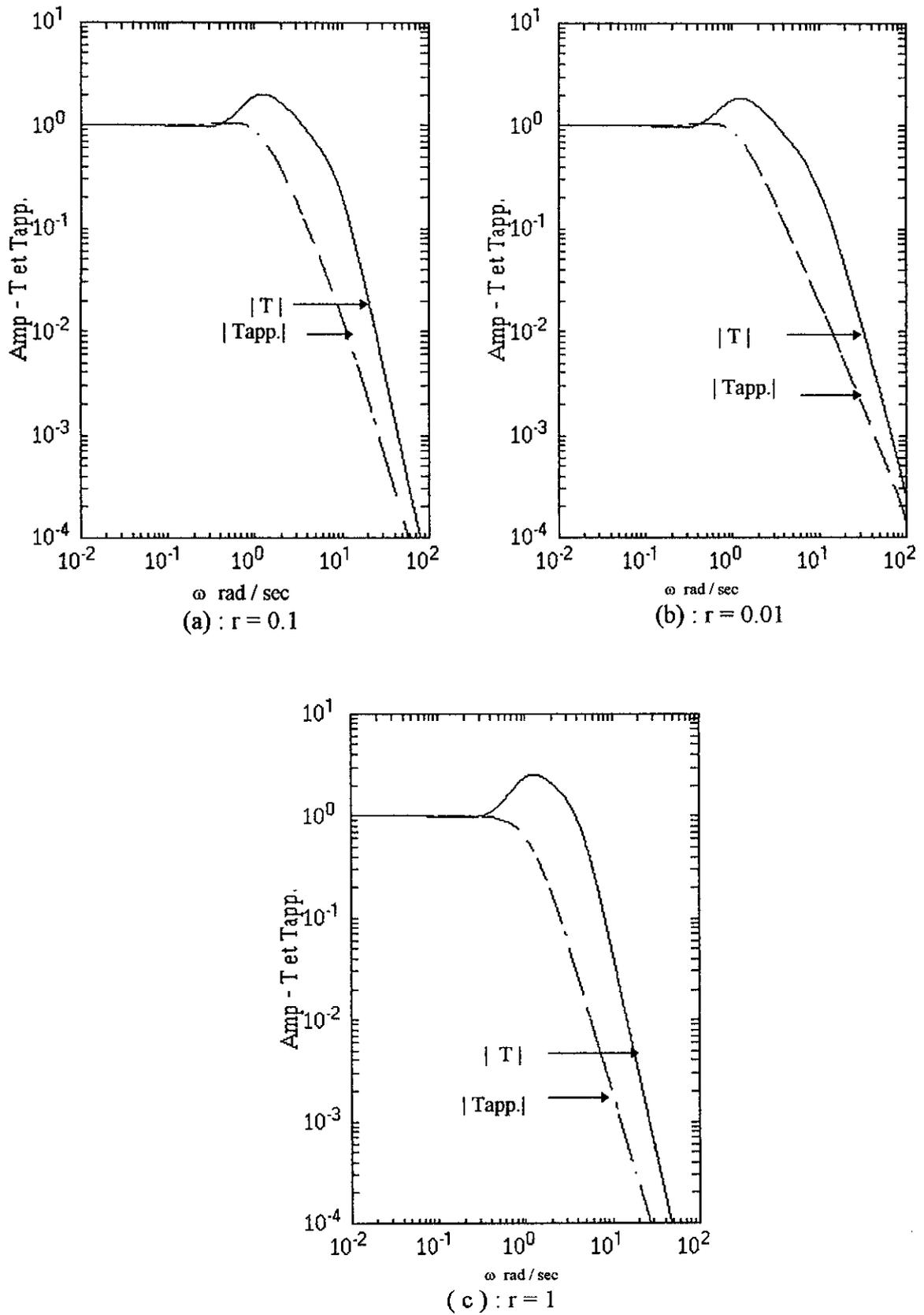


Fig. 6.25: Tracé de bode de l'amplitude de T et de Tapp. pour $c = 0.01$ de la commande LQG.

Pour $c=0.01$ et $r=0.1$, la fonction de transfert du contrôleur LQG est :

$$K_{LQG} = 10^3 \frac{3.82s^5 + 52.25s^4 + 157.33s^3 + 173.48s^2 + 84.59s + 20}{s^7 + 38s^6 + 620s^5 + 5714s^4 + 26914s^3 + 38981s^2 + 17198s} \quad (6.53).$$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont stables :

$$-10, -2, -12.12, -1, -1, -1, -5.48 \pm 7.2j, -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j).$$

VI.3.2.5) conclusion :

Les résultats obtenus par cet exemple, montrent que les spécifications de robustesse et de performances définies lors de la conception, sont bien réalisées pour le contrôleur H_∞ .

En effet la figure (6.26) montre le tracé d'amplitude de S et de T pour les différents points de fonctionnement. Pour ces différents points, les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée restent stables.

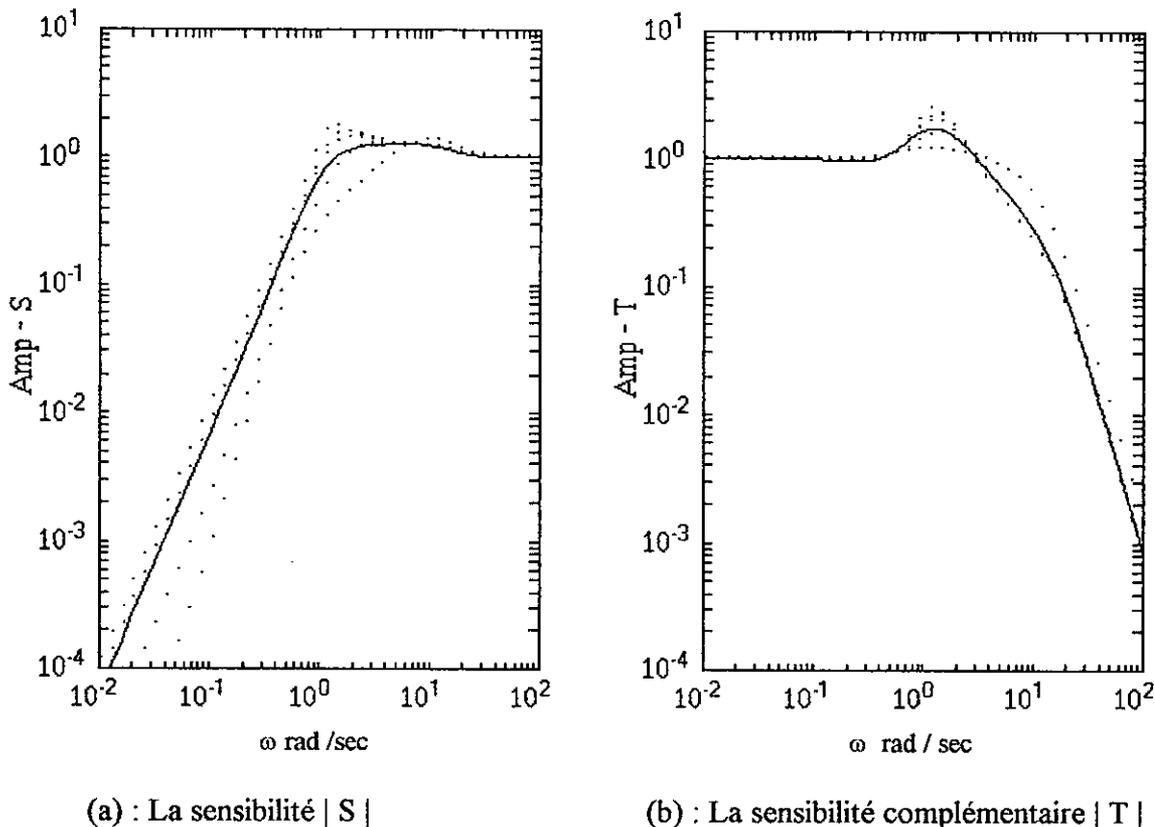
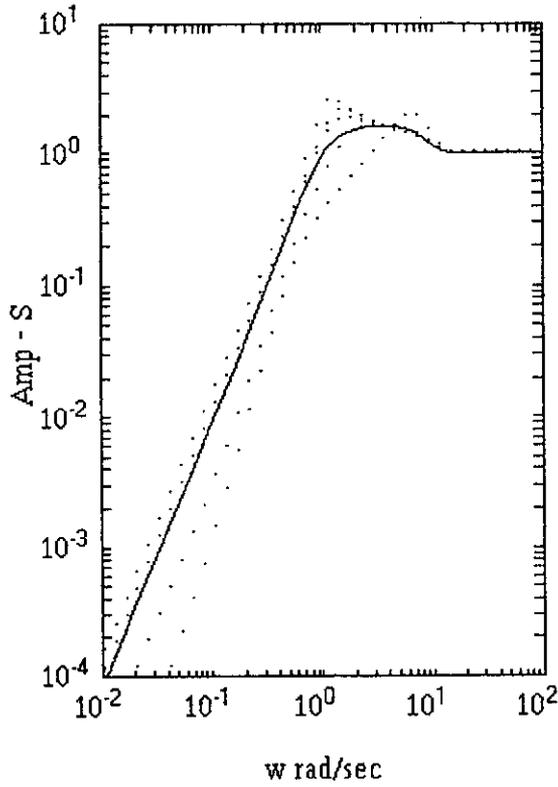


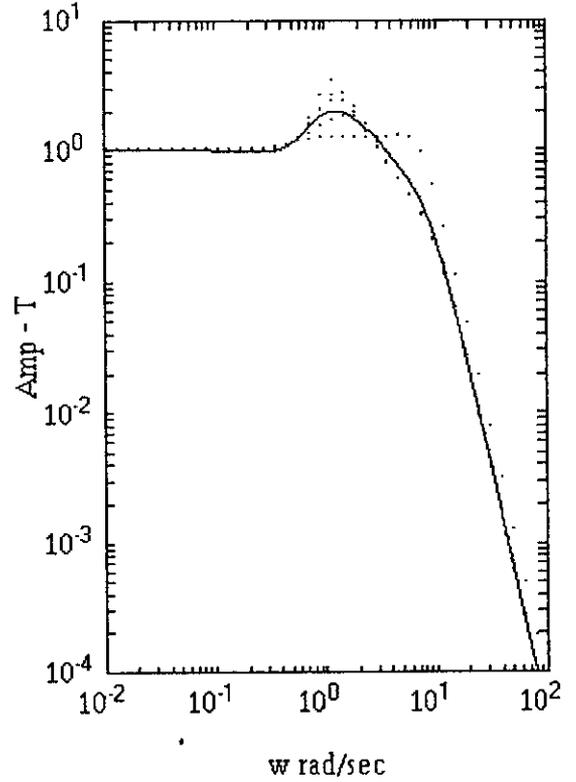
Fig. 6.26 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $c=0.01$ et $r = 0.1$ de la commande H_∞ .

Etat nominal : (—), état perturbé : (.....).

En ce qui concerne le contrôleur LQG (H_2), les remarques et interprétations présentées dans l'exemple 1 restent toujours valables. Ce contrôleur réagit de la même manière au problème de sensibilité mixte de Kwakernaak : Des pics plus importants que ceux de la commande H_∞ , les "roll off" obtenus ne correspondent pas à ceux qui sont spécifiés. Toutefois, pour cet exemple d'application, le test de stabilité robuste a été satisfaisant. Pour les différents points de fonctionnement, les pôles de la fonction de transfert restent stables. (Voir Fig. 6.27, pour le tracé de | S | et de | T | pour les différents points de fonctionnement).



(a) : La sensibilité $| S |$



(b) : La sensibilité complémentaire $| T |$

Fig. 6.27 : Tracé de bode de l'amplitude de S et de T pour $c=0.01$ et $r = 0.1$ de la commande LQG.

Etat nominal : (____), état perturbé : (.....).

VI.4) Système MIMO (Avion de guerre) : [Saf] [Chi] [Bal]

VI.4.1) Description du procédé

Le modèle du véhicule et les objectifs de la commande sont issus de l'article de Safonov [Saf]. Le véhicule est télécommandé (Remotely Piloted Véhicule (RPV)). C'est une version avancée d'un avion dont le vol a été testé en 1970 et qui est actuellement exposé sur le mur extérieur du musée des sciences de Los Angeles.

La conception du modèle considère uniquement la dynamique longitudinale qui est découplée de la dynamique de la direction latérale. Pour un point de fonctionnement correspondant à une vitesse de 0.9 mach et à une altitude de 25000 ft le modèle est instable et possède 2 modes sur le demi plan droit.

Le modèle linéaire représenté dans l'espace d'état est:

$$G(s) = C(Is-A)^{-1}B$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0226 & -366170 & -188970 & -320900 & 32509 & -0.7626 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.9831 & -0.0007 & -0.1708 & -0.0050 \\ 0.0123 & 11.7200 & -2.6316 & 0.0009 & -31.6040 & 22.3960 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -300000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les variables d'état sont :

δV : vitesse d'avant

α : l'angle d'attaque

q : degré de pente

θ : l'angle d'altitude

a_1 : actuateur n°1

a_2 : actuateur n°2

Les variables d'attaque sont : l'aileron (δe) et les actuateurs du canard (δc). Les variables de sortie sont : l'angle d'attaque (α) et l'angle (θ). (Voir Fig.6.28).

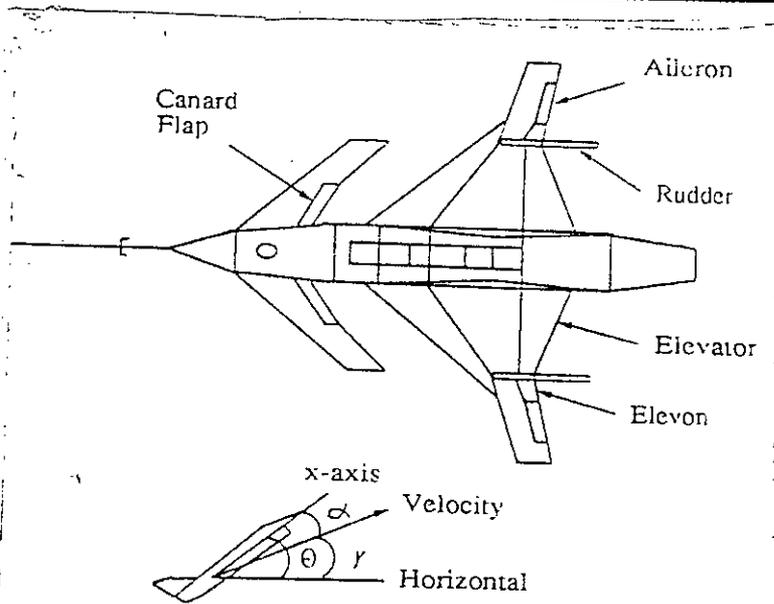


Fig.6.28 : Configuration de l'avion et géométrie verticale plane

Les pôles du procédé sont:

- 5.6757,
- $6.890 \cdot 10^{-3} + 2.4880 \cdot 10^{-3}i$,
- $6.890 \cdot 10^{-3} - 2.4880 \cdot 10^{-3}i$,
- $-2.5779 \cdot 10^{-3}$,
- $-3.0000 \cdot 10^3$,
- $-3.0000 \cdot 10^3$.

Le tracé de bode des valeurs singulières du système en boucle ouverte est donnée par la figure (6.29). Ce système est à deux entrées et deux sorties, donc il a deux valeurs singulières ($\bar{\sigma}(G)$, $\underline{\sigma}(G)$).

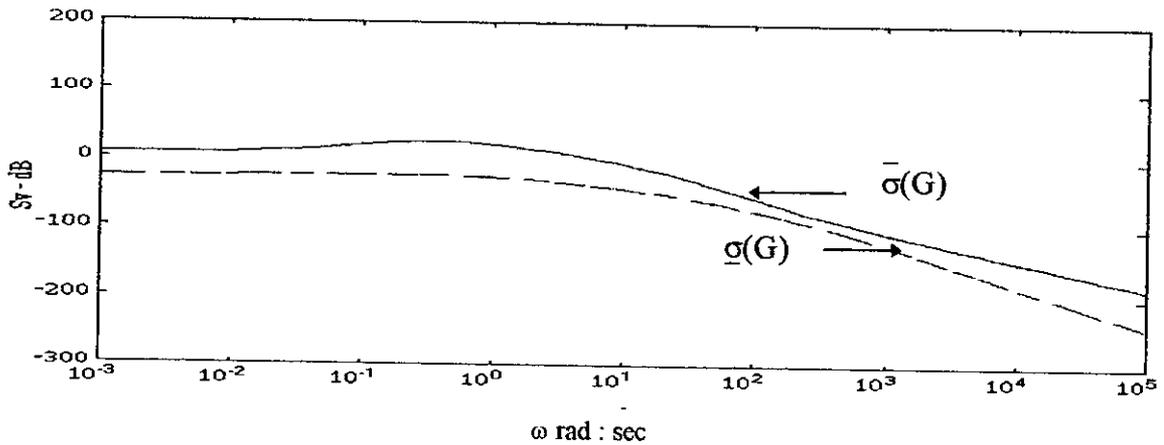


Fig. 6.29 :Tracé de bode des valeurs singulières $\bar{\sigma}(G)$ et $\underline{\sigma}(G)$ du système en boucle ouverte

VI.4.2) Cahier des charges:

Les spécifications de la conception des valeurs singulières sont:

- 1) Spécification de la robustesse : Une transition (roll-off) de -40dB/décade et une amplitude égale au minimum à -20dB à la fréquence de 100rad/sec.
- 2) Spécifications des performances : minimiser la fonction de sensibilité S le plus possible.

VI.4.3) Procédure de conception:

Les spécification précédentes vont être réalisées par le choix convenable des matrices de fonctions poids W_1 et W_2 de la figure (6.30). (Voir parag. IV.4).

W_1 : pénalise la sortie du procédé,

W_2 : pénalise le signal d'erreur.

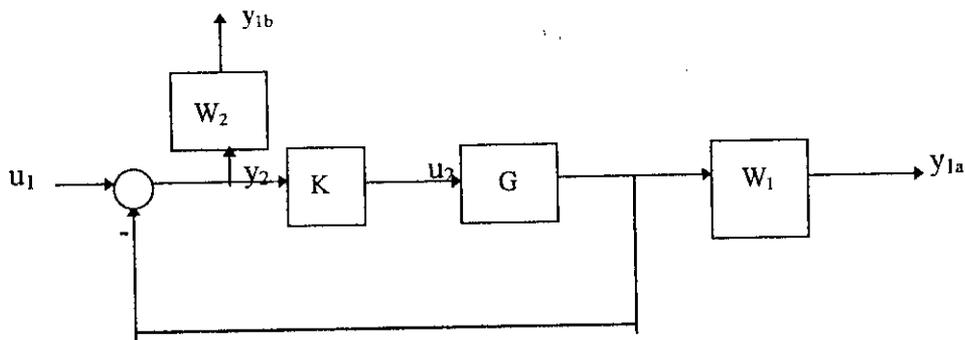


Fig.6.30: Représentation des fonctions poids sur le schéma de régulation.

En effet, nous avons :

$$\| W_1 T \|_{\infty} \leq 1 \Rightarrow |T| \leq |1/W_1|$$

$$\| W_2 S \|_{\infty} \leq 1 \Rightarrow |S| \leq |1/W_2|$$

On augmente le procédé G par les matrices de fonctions poids W_1 et W_2 pour former le procédé augmenté Pa(s).

- a) Les spécifications de la robustesse (c'est à dire les spécifications relatives à la fonction de sensibilité complémentaire T) sont réalisées en choisissant la matrice de fonctions poids égale à:

$$W_1 = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{s^2(\tau s + 1)}{1000} \end{bmatrix} \tag{6.54}$$

pour $\tau = 0$, $\bar{\sigma}(1/W_1)$ et $\underline{\sigma}(1/W_1)$ sont égales, leur "roll off " est de 40dB/décade,leur amplitude est égale à -20dB à la fréquence 100rad/sec.

Prenons $\tau=0,5 \cdot 10^{-3}$ sec, $\bar{\sigma}(1/W_1)$ et $\underline{\sigma}(1/W_1)$ sont égales jusqu'à la fréquence $1/\tau$ rad /sec (2000rad /sec), leur " roll off " est toujours égal à 40dB/décade, leur amplitude reste égale à -20dB à la fréquence 100rad/sec. (On prend $\tau \neq 0$, pour discerner qu'il y a deux valeurs

singulières de T , $\bar{\sigma}(T)$ va suivre $\bar{\sigma}(1/W_1)$ et $\underline{\sigma}(T)$ va suivre $\underline{\sigma}(1/W_1)$). Le tracé de bode des valeurs singulières de $(1/W_1)$ est illustré dans la figure (6.31).

b) Les spécifications de la sensibilité peuvent être réalisées en choisissant une matrice W_2 égale à :

$$W_2 = \gamma \begin{bmatrix} \frac{s+100}{100s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+100}{100s+1} \end{bmatrix} \quad (6.55).$$

Les deux valeurs singulières de W_2 sont égales.

Quand γ augmente, W_2 augmente et par conséquent la sensibilité diminue le plus possible. Donc l'objectif est d'obtenir un γ très important.

Dans le tracé de la figure (6.31), on remarque que $\sigma(1/W_1)$ et $\sigma(1/W_2)$ ont, à la fréquence 30rad/sec, une amplitude respective de 0dB, la bande passante est donc de 30 rad/sec.

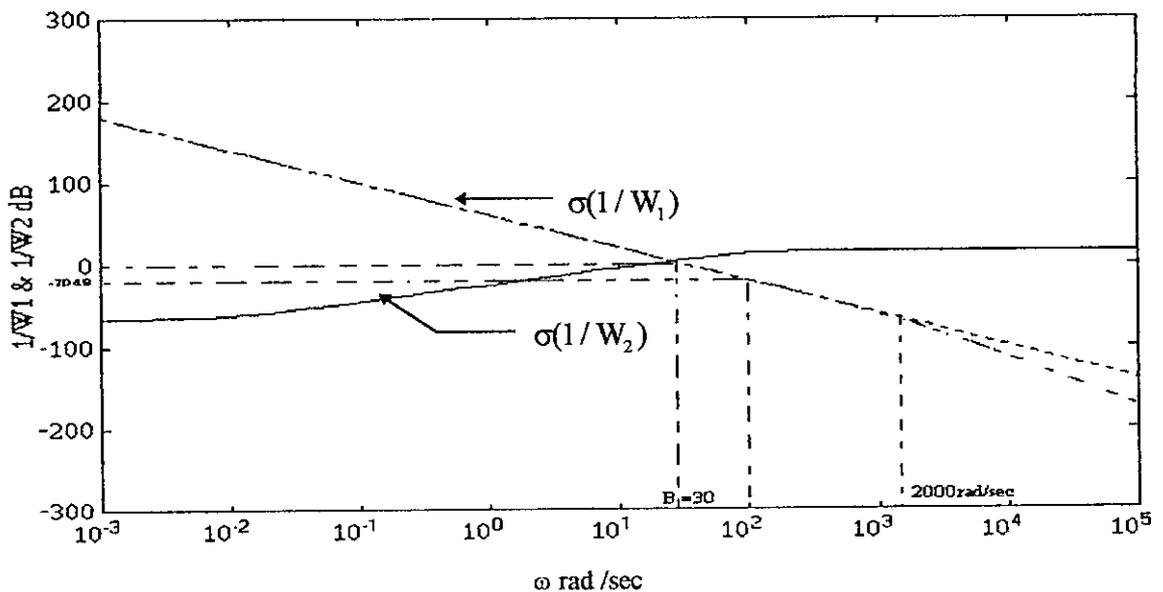


Fig.6.31 : Tracé de bode des valeurs singulières de $1/W_1$ et de $1/W_2$

- Spécifications de la robustesse ($1/W_1$)
- Spécification des performances ($1/W_2$)

Remarque:

Les pondérations fréquentielles W_1 et W_2 sont issues de l'article de [Chi].

Pour cet exemple, nous allons itérer sur la pondération γ de W_2 (les performances) pour chercher le régulateur stabilisant K , réalisant la condition de stabilité robuste suivante:

$$\|F_b(P_a, K)\|_\infty = \left\| \frac{W_1 T}{W_2 S} \right\|_\infty \leq 1 \quad (6.56).$$

Il est clair que si l'on demande des performances trop fortes (γ très grand), le "1-problème" sera sans solution; pour des performances faibles, ce problème aura bien une solution. (Parag.IV.3).

Nous allons commencer la synthèse par la commande LQG (H_2), nous allons voir ses limites (jusqu'où peut aller la valeur de γ), puis nous appliquerons la commande H_∞ , pour distinguer le degré d'atteinte des spécifications des deux commandes.

Pour chaque valeur de γ , nous allons faire le tracé de bode des valeurs singulières de $F_b(P_a, K)$ pour indiquer à quel point la conception est proche aux spécifications. Plus l'amplitude de ces valeurs est proche de la valeur 0 dB ($\forall \omega$), plus la fonction de sensibilité S se rapproche de $(1/W_2)$, et T de $(1/W_1)$. L'idéal est donc d'obtenir des valeurs singulières de $F_b(P_a, K)$, très serrées à la valeur 0dB, elles ne doivent en aucun cas dépasser cette valeur, vu l'équation (6.56).

a) Commande LQG :

Pour $\gamma = 1$, les résultats de la simulation sont données par les figures (6.32), (6.33) et (6.34).

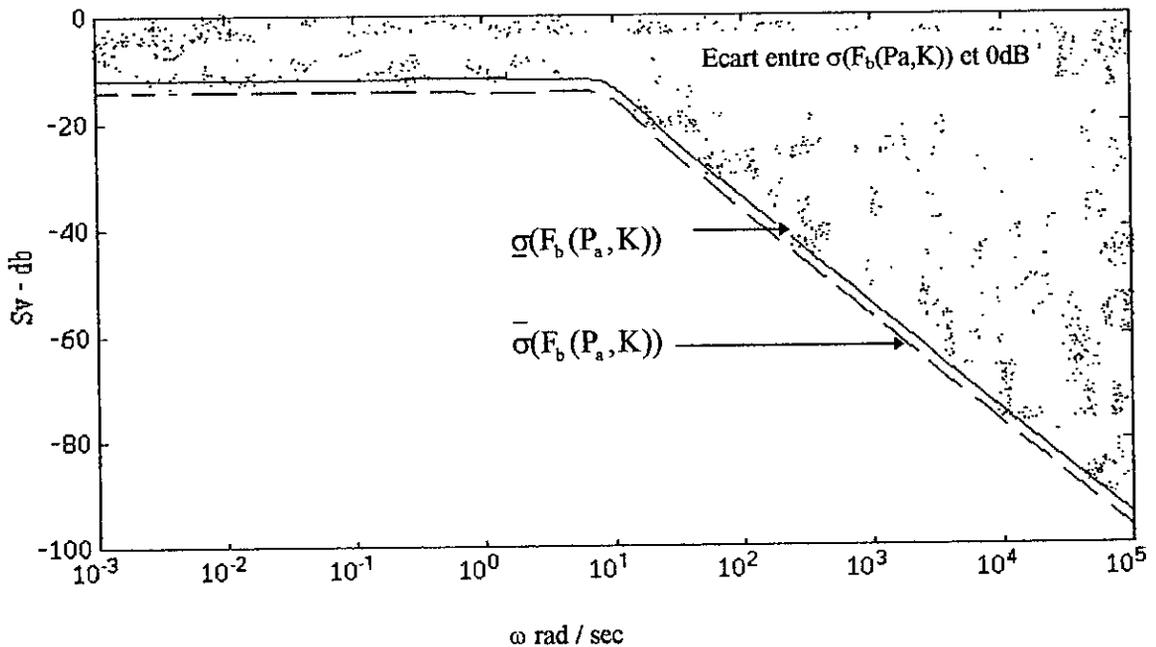


Fig. 6.32 : Tracé de bode des valeurs singulières de la transformation fractionnaire $F_b(P_a, K)$ pour $\gamma = 1$ de la commande LQG.

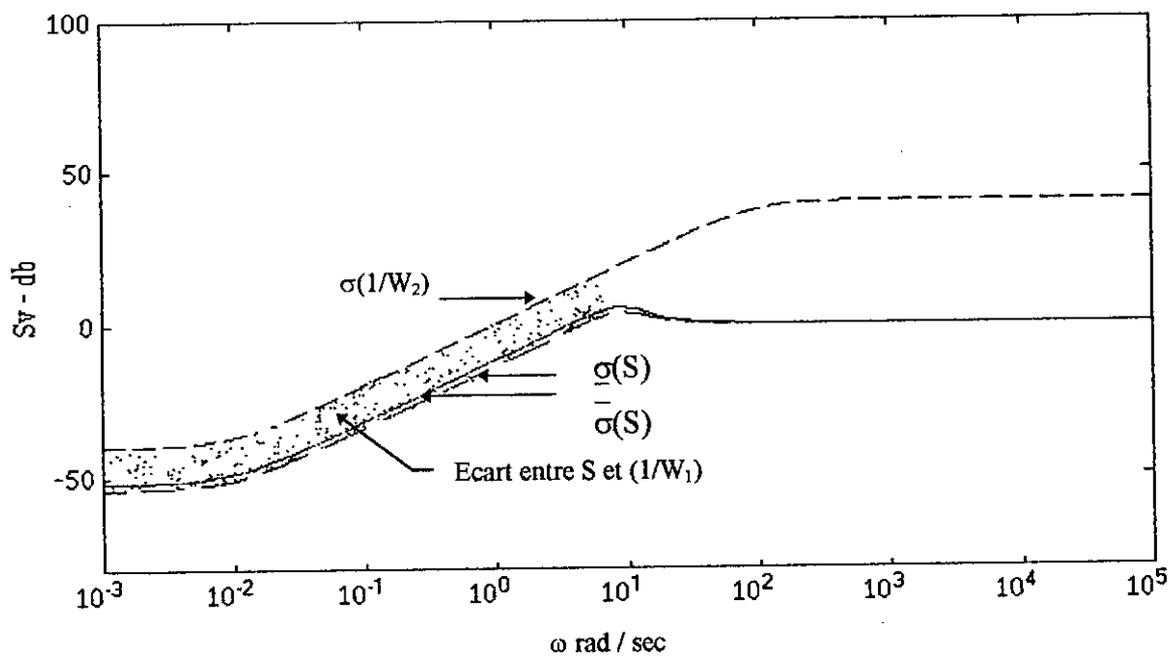


Fig. 6.33 : Tracé de bode des valeurs singulières de S et de $1/W_2$ pour $\gamma = 1$ de la commande LQG.

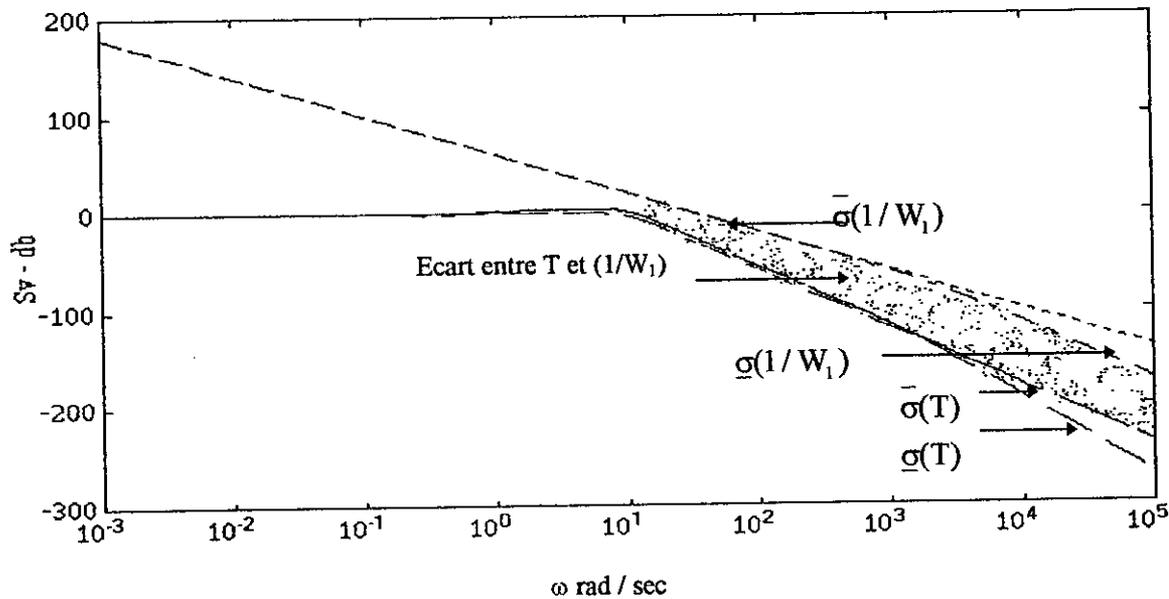


Fig. 6.34 : Tracé de bode des valeurs singulières de T et de $1/W_1$ pour $\gamma = 1$ de la commande LQG.

Ces figures montrent que les résultats de la conception ne sont pas très proches aux spécifications. les écarts entre $(1/W_2)$ et S , et entre $(1/W_1)$ et T sont assez importants (Fig.6.33 et Fig. 6.34).

Le tracé de bode des valeurs singulières n'atteint pas la forme limite 0dB (les valeurs singulières du $F_b(P_a,K)$ sont trop éloignées de la valeur 0dB). Voir Fig.6.32.

On augmente γ de 8.4 pour rapprocher le $F_b(P_a,K)$ à la limite de ses formes, on obtient la figure (6.35).

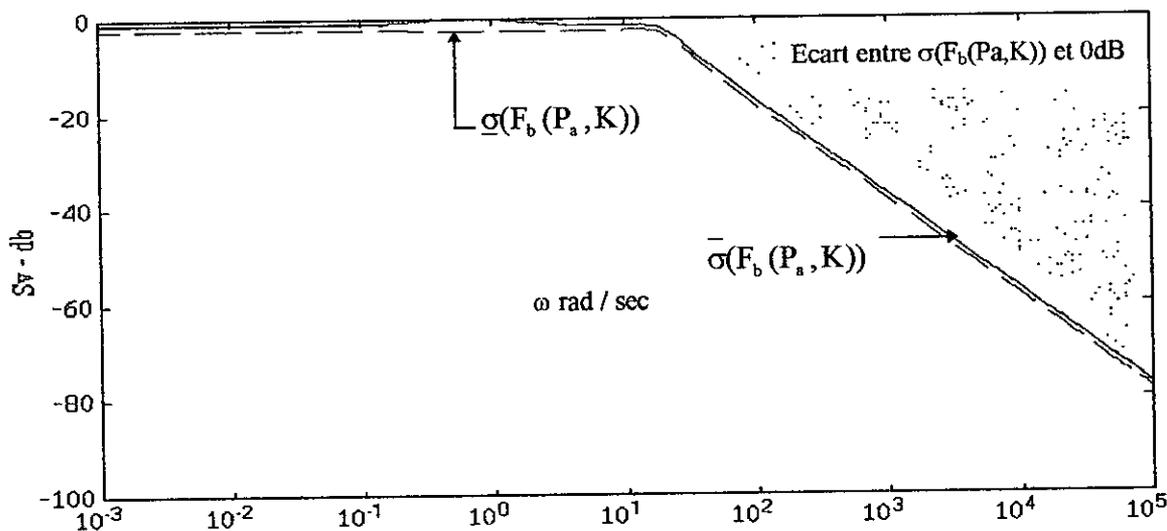


Fig. 6.35 : Tracé de bode des valeurs singulières de la transformation fractionnaire $F_b(P_a,K)$ pour $\gamma = 8.4$ de la commande LQG.

Cette valeur de γ représente la valeur limite pour la commande LQG, on ne peut plus aller au delà de cette valeur, car les valeurs singulières du $F_b(P_a,K)$ dépasseront la limite 0 dB.

Les fonctions S et T se rapprochent mieux des spécifications de performances et de robustesse respectives $(1/W_2)$ et $(1/W_1)$ (Fig.6.36, et Fig.6.37).

La synthèse par la commande LQG s'arrête à ce niveau, nous avons minimiser la fonction de sensibilité le mieux possible, tout en respectant la condition de stabilité robuste (6.56).

Nous allons alors appliquer la commande H_∞ , et voir jusqu'où peut être augmenté la valeur de γ relative à la minimisation des performances.

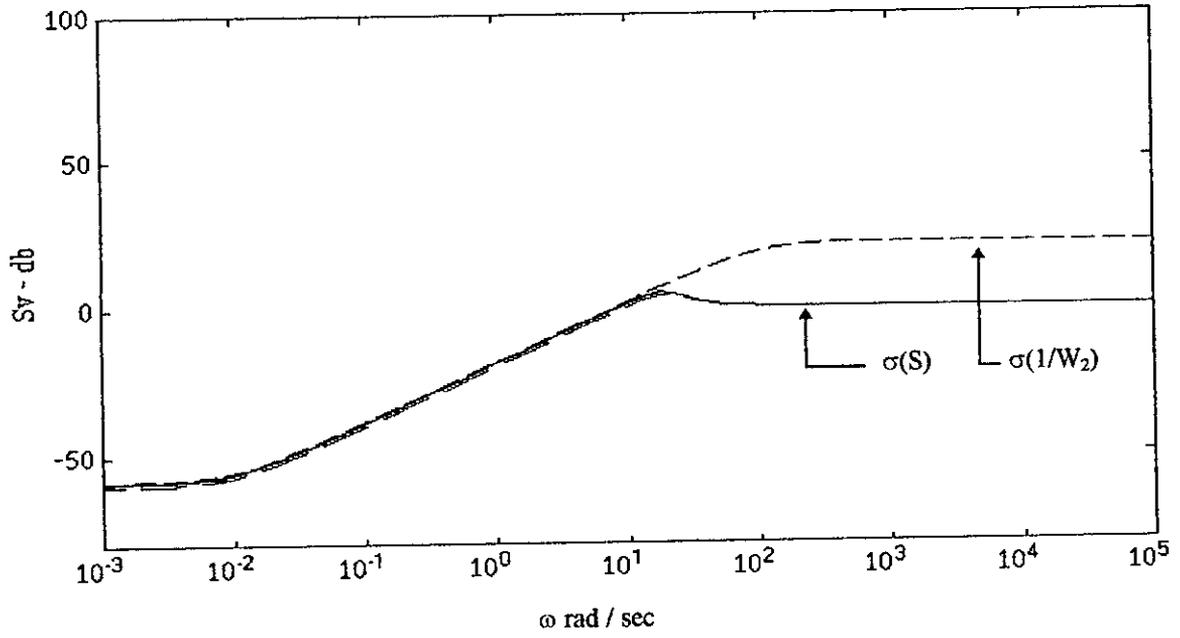


Fig. 6.36 : Tracé de bode des valeurs singulières de S et $1/W_2$ pour $\gamma = 8.4$ de la commande LQG.

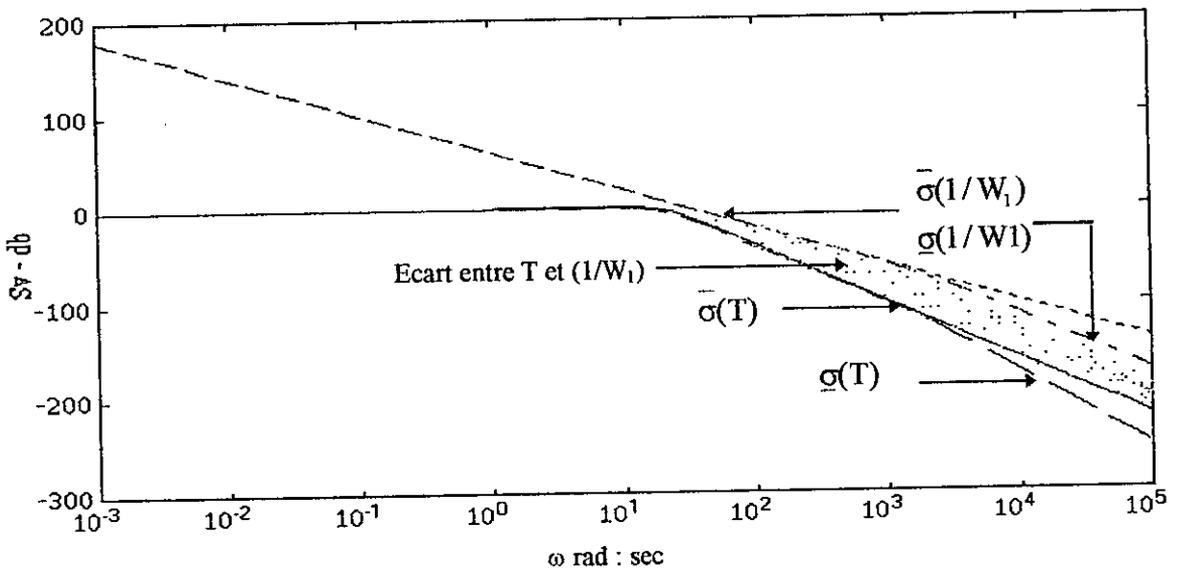


Fig. 6.37 : Tracé de bode des valeurs singulières de T et de $1/W_1$ pour $\gamma = 8.4$ de la commande LQG.

b) Commande H_∞ :

Après quelques itérations sur le paramètre γ , on trouve que γ peut être augmenté à 16.8, pratiquement le double de la valeur de la commande LQG. La forme des valeurs singulières est exactement la forme pré-spécifiée pour le domaine fréquentiel comme le montre la figure (6.38), le $F_b(P_a, K)$ est très proche à la limite 0dB, pour toutes les fréquences inférieures à 100 (rad/sec) et ne descend pas au dessous de -15dB pour les autres fréquences. Ceci implique que la fonction de sensibilité S s'est rapprochée plus à W_2^{-1} (dans la bande passante) et la sensibilité complémentaire T s'est serrée plus à la fonction poids W_1^{-1} qui lui est associée (en dehors de la bande passante). Ceci est illustré dans les figures (6.39) et (6.40).

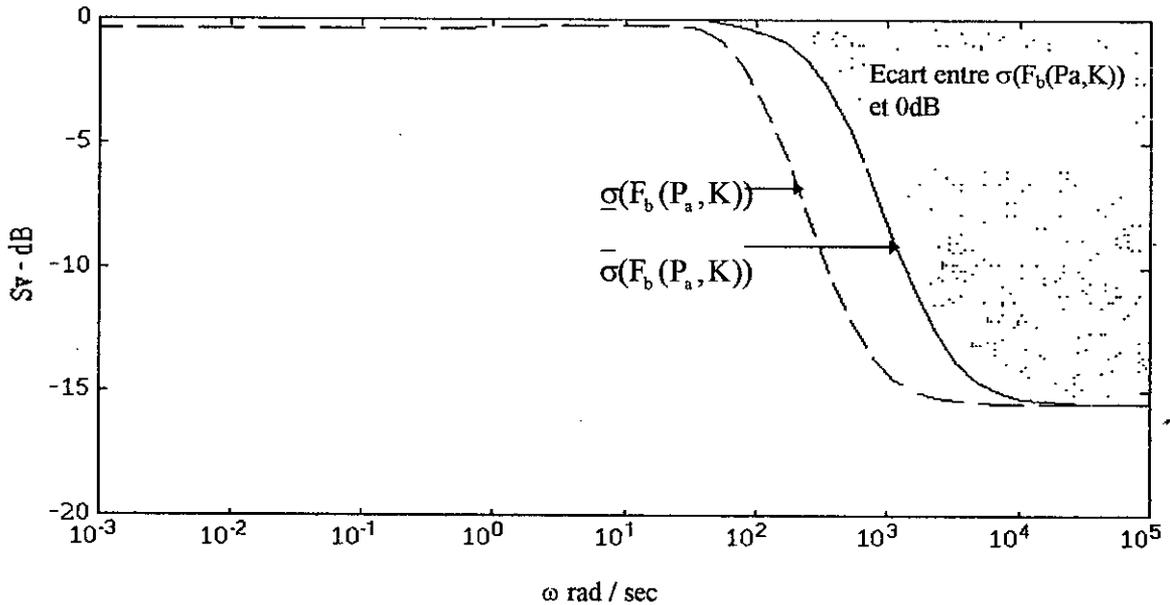


Fig.6.38 : Tracé de bode des valeurs singulières de la transformation fractionnaire $F_b(P_a, K)$ pour $\gamma = 16.8$ de la commande H_∞ .

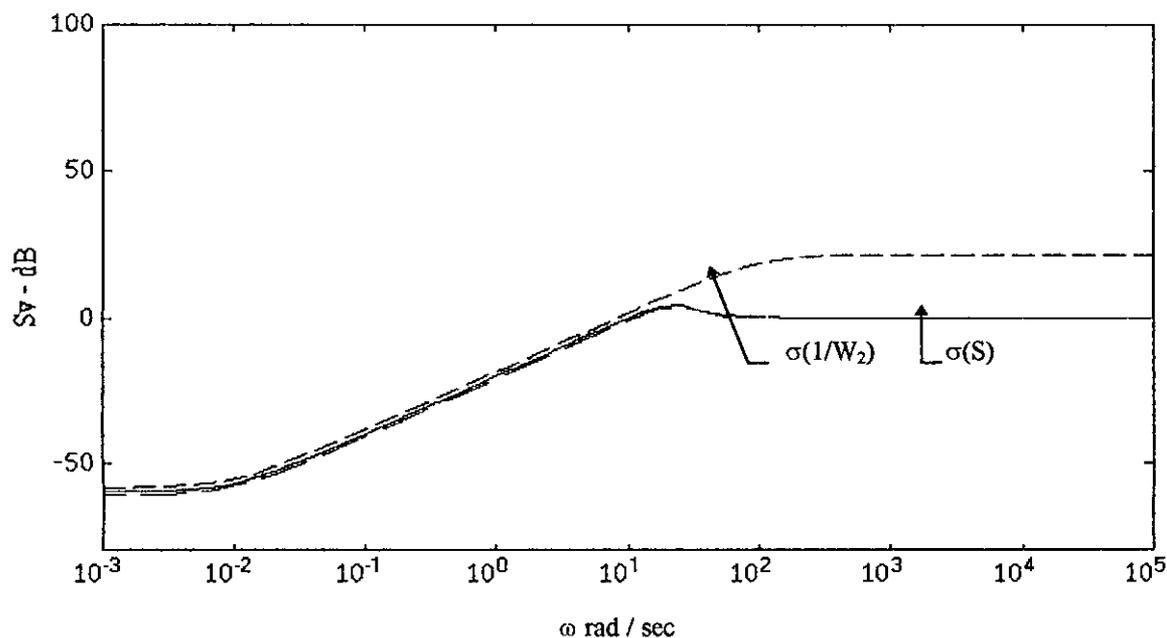


Fig. 6.39 : Tracé de bode des valeurs singulières de S et de $1/W_2$ pour $\gamma = 16.8$ de la commande H_∞ .

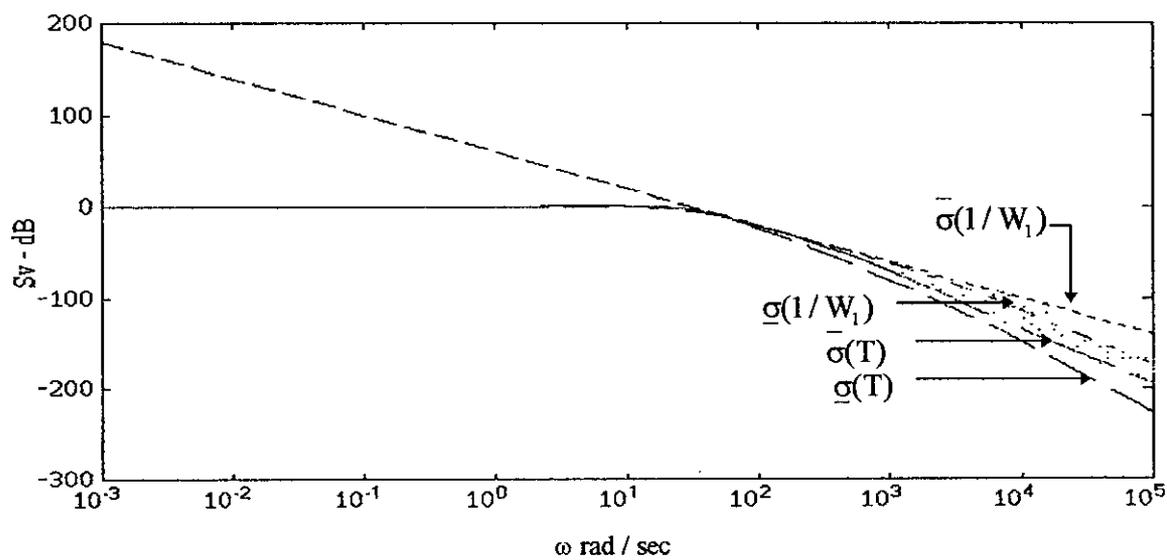


Fig. 6.40 : Tracé de bode des valeurs singulières de T et de $1/W_1$ pour $\gamma = 16.8$ de la commande H_∞ .

Les valeurs singulières du $F_b(P_a, K)$ de la commande H_∞ comparées à celles de la commande H_2 , sont très proches à la limite 0dB. Ceci est illustré dans le tracé comparatif de la figure (6.41). Comme nous l'avons dit précédemment, il est important que le $F_b(P_a, K)$ soit proche de cette limite, pour avoir les fonctions S et T assez proches des spécifications.

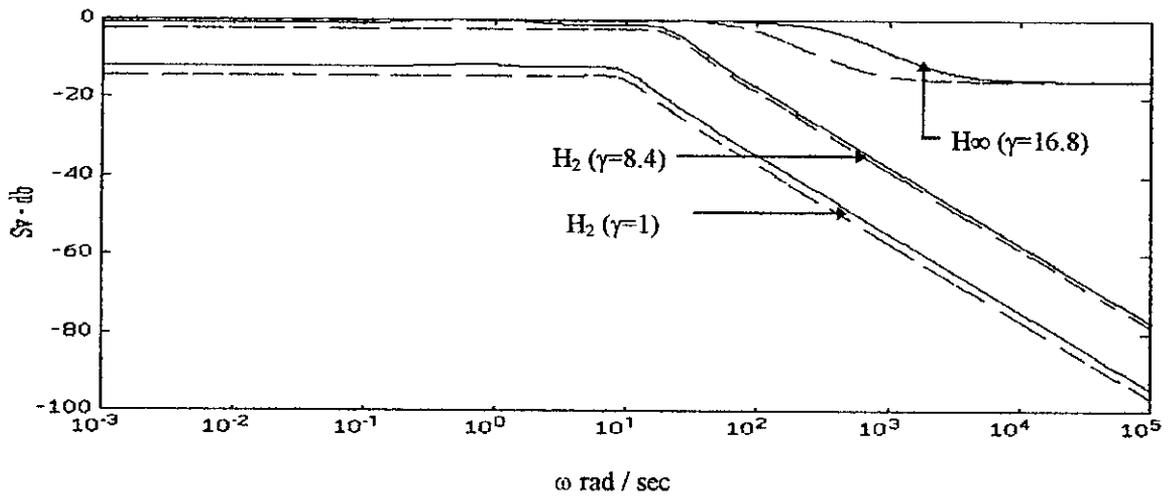


Fig.6.41 : Tracé de bode comparatif entre les valeurs singulières de la transformation fractionnaire $F_b(P_a, K)$ de la commande H_2 et la commande H_∞ .

Donc on peut dire que pour un cahier des charges particulier, la commande H_∞ répond mieux aux spécification que la commande LQG.

Pour $\gamma = 16.8$, les pôles du contrôleur sont stables et égales à :

-2.0001e+003
 -4.0562e+002
 -7.1390e+001+ 2.1193e+001i
 -7.1390e+001- 2.1193e+001i
 -5.1289e+001
 -2.0981e-002
 -1.0000e-002
 -1.0000e-002

les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $F_b(P_a, K)$ sont :

-1.0000e-002
 -1.0000e-002
 -2.0000e+003
 -4.0896e+002
 -9.5031e+001
 -2.3834e+001+ 2.0692e+001i
 -2.3834e+001- 2.0692e+001i
 -2.2705e+001+ 1.8444e+001i
 -2.2705e+001- 1.8444e+001i
 -5.6757e+000
 -6.8980e-001+ 2.4880e-001i
 -6.8980e-001- 2.4880e-001i
 -2.5779e-001
 -2.0981e-002
 -3.0000e+001+ 6.3961e-013i
 -3.0000e+001- 6.3961e-013i

VI.5) Discussions:

Les résultats obtenus par les différents exemples d'application, nous permettent d'affirmer que la théorie de commande robuste H_∞ est un outil de conception très puissant relativement à celui de la théorie H_2 .

Après avoir fait un choix convenable des fonctions poids, correspondants aux spécifications de robustesse et de performances, puis augmenté le procédé par ces pondérations fréquentielles, on aboutit à la configuration standard.

Dans les deux premiers exemples, nous avons pu constater la stabilité robuste, sur laquelle, est fondée la théorie H_∞ . En effet, face aux perturbations fractionnelles (Incertitudes dans le système lui même), la stabilité en boucle fermée est conservée pour une large variation des incertitudes.

Il a été difficile d'éviter les pics de S et de T dans les régions de fréquences intermédiaires "cross-over region". Pour l'exemple 1, qui était à minimum de phase, les pics étaient légèrement plus petits que ceux de l'exemple 2 (le système n'est pas à minimum de phase puisqu'il possède un pôle instable). Ce résultat a été confirmé dans l'article de [Kwa2].

En comparant les résultats du contrôleur H_2 à ceux du contrôleur H_∞ , nous pouvons constater pour le cas des systèmes soumis à des incertitudes fractionnelles (Problème de sensibilité mixte de Kwakernaak), les différents points suivants:

- 1- Dans les régions de fréquences intermédiaires "Cross-over region", les pics des fonctions S et T de la commande H_2 sont plus importants que ceux de la commande H_∞ .
- 2- Pour l'exemple 1, face aux perturbations fractionnelles (incertitudes dans le système lui même), la région de stabilité robuste de la commande H_∞ , pour le contrôleur synthétisé, est nettement plus importante que celle de la commande H_2 .
- 3- Les "roll off" obtenues pour la commande H_2 ne correspondent pas aux spécifications.

Pour le point (1), ce résultat a déjà été prévu au départ, étant donné que l'objectif principal de la commande H_∞ , est la minimisation, à travers toutes les fréquences ω , de la valeur maximale du transfert en boucle fermée des entrées de perturbations vers les sorties d'erreurs (théorème des petits gains), alors que la commande H_2 , est conçue pour minimiser la valeur moyenne de ce transfert.

Pour le point (2), nous avons pu constater le comportement de la commande H_2 , face aux incertitudes dans le système lui même. Cette dernière, ne considérant que les bruits additives dans sa conception (bruits blancs gaussiens), ne pouvait pas être plus robuste que la commande H_∞ .

Le point (3), n'a été constaté, que pour le cas du problème de sensibilité mixte de Kwakernaak qui se base sur des concepts spécifiques à la théorie H_∞ (théorème des petits gains, propriétés d'égalisation de Kwakernaak [Kwa1],[Kwa3], etc...). Ceci peut être la cause du mauvais comportement de T en hautes fréquences.

Cette suprématie s'est vue confirmée pour le cas MIMO où le contrôleur H_∞ a le plus répondu aux exigences du cahier des charges que le contrôleur H_2 .

Chapitre VII :

***RECHERCHES EN COURS ET
PROSPECTIVES.
CONCLUSION GENERALE***

Chapitre VII : *Recherche en Cours et Prospectives.* *Conclusion Générale.*

VII.1) Recherche en cours et prospectives:

La théorie de commande robuste H_∞ a fait, ces dernières années, l'objet de plusieurs travaux de recherches et de publications. Plusieurs sujets sont bien développés actuellement, et d'autres sont soumis à des recherches intensives; On peut citer parmi les dernières publications :

- 1- L'article de T. Iwasaki et R. E. Skelton, intitulé "All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas" [Iwa]. Il résout le problème de commande H_∞ par une approche purement algébrique. Les conditions d'existence d'un contrôleur H_∞ sont données dans les termes de trois Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). Tous les contrôleurs H_∞ sont paramétrisés explicitement dans l'espace d'état par une matrice constante L de dimension fixe, de norme bornée. Ceci définit donc un espace de conception de dimension finie, contrairement à la "Q-paramétrisation" qui correspond à un espace de dimension infini. L'avantage de cette approche par rapport à la théorie développée dans cette thèse réside dans le fait qu'elle n'exige pas les différentes hypothèses sur les matrices du procédé augmenté. Aussi l'ordre du contrôleur peut être fixé comme il est souhaité dans les spécifications.

- 2- L'article de C. W. Scherer, intitulé "The State-Feedback H_∞ -Problem at Optimality" [Sch]. Il discute, dans l'espace d'état, le problème de commande H_∞ à horizon infini. L'auteur fournit une caractérisation algébrique pour l'obtention de la valeur optimale " γ ", dans les termes d'une solvabilité d'une inégalité de Riccati non stricte, et propose des possibilités pour vérifier ce critère. Si l'optimum n'est pas réalisé, un test complet est fourni pour montrer que le système doit être à gain élevé pour pouvoir s'approcher de la valeur optimale.

- 3- L'article de T. Hirata, S. Koizum et R. Takahashi, intitulé " H_∞ Control of Railroad Vehicle Active Suspension" [Hir]. Il applique la théorie de commande H_∞ pour commander une suspension active. Le but est d'atténuer les vibrations basses fréquences du véhicule de chemin de fer, induites par la résonance de suspension. Ces vibrations affectent le confort des passagers. Elles sont caractérisées par la rotation du véhicule par rapport à son axe transversal, le mouvement latéral, et la rotation par rapport à son axe longitudinal. Un modèle mathématique du véhicule basé sur les équations du mouvement et les dynamiques d'un actionneur pneumatique a été développé. Ses paramètres ont été identifiés par les tests de vibration sur un véhicule expérimental. Les résultats de simulation et expérimentaux ont prouvé que le système de commande résultant a donné des performances supérieures à ceux de la commande conventionnelle (LQG).

- La simulation a indiqué:

- (i) la commande H_∞ proposé est robuste contre certaines perturbations des paramètres du modèle à proximité de la fréquence de résonance,
- (ii) grâce au "loop shaping", la commande H_∞ est insensible aux perturbations hautes fréquences, tel que le bruit.

- Les résultats expérimentaux sont résumés dans les points suivants :

- (iii) la commande H_∞ est efficace pour réduire l'accélération de la rotation par rapport à l'axe longitudinal, l'accélération du mouvement latéral, et réduit d'une manière importante l'accélération de la rotation par rapport à l'axe transversal,
- (iv) la commande H_∞ est efficace à proximité de la fréquence de résonance pour chaque mode de vibration.

4- L'article de A. N. Moser, intitulé " Designing Controllers for Flexible Structures With H-Infinity / μ -Synthesis"[Mos], donne un aperçu sur la technique de conception H_∞/μ -synthèse et son application sur des structures flexibles. Cette technique est une des méthodes utilisée à "Caltech" pour les recherches en commande active. Dans cet article, plusieurs issues d'implémentation, nécessaires à la conception d'un contrôleur optimal robuste, sont discutées. L'application vise à atténuer les vibrations des structures légèrement amorties avec des modes étroitement espacés. En particulier, une illustration expérimentale est faite sur la "Structure Flexible de Caltech (CFS)". Principalement cet article peut être considéré comme un guide pour les aspects pratiques de la conception des contrôleurs utilisant H_∞/μ -synthèse.

5- L'article de P. Larminat, intitulé " Méthodes élémentaires pour la commande robuste", montre d'abord que l'approche H_∞ pour la synthèse de commandes robustes est moins rigoureuses et déductives que la formalisation mathématique le laisse espérer. Puis il décrit surtout quelques techniques élémentaires, à base d'optimisation H_2 et de placement de pôles, qui confèrent à ces méthodes une grande facilité de gestion du compromis performance-robustesse.

Les articles que nous venons de citer sont parmi les principaux axes de recherches en cours, sur le domaine de la théorie H_∞ . Ils peuvent constituer une suite à notre travail.

VII.2) Conclusion générale:

Le travail présenté dans cette thèse permet de donner une vision claire sur le fondement et les principes de base de la théorie de commande robuste H_∞ .

Dans un premier temps, une analyse théorique complète a été développée pour montrer les caractéristiques et les objectifs d'une synthèse par la commande H_∞ . De cette analyse, il a été retenu les points suivants:

- 1- Une commande H_∞ permet de minimiser, à travers toutes les fréquences ω , la valeur maximale d'un transfert en boucle fermée des entrées de perturbations vers les erreurs de sortie.
- 2- Grâce au théorème des "petits gains" qui assure la stabilité interne du système, la stabilité robuste est garantie contre toutes perturbations ou incertitudes non structurées du système par rapport à son modèle nominal. L'avantage du théorème des "petits gains" par rapport au critère de Nyquist est qu'il permet de traiter même le cas non linéaire ou variant dans le temps.
- 3- La notion de "loop shaping" permet avec un choix convenable des pondérations fréquentielles, de conformer la boucle de sorte qu'il y ait une minimisation de la sensibilité du système contre toutes sortes de perturbations basses fréquences et une robustesse contre

les perturbations hautes fréquences, tout en respectant la condition de non simplification des pôles oscillants peu amortis du procédé par les zéros du contrôleur et en limitant le gain du contrôleur en hautes fréquences.

- 4- La configuration standard permet de réaliser le meilleur compromis Robustesse / Performance. La résolution de ce problème permet d'optimiser les performances du système tout en conservant la condition de la stabilité robuste du théorème des petits gains.
- 5- Le problème de sensibilité mixte de "Kwakernaak" est un cas particulier du modèle standard. Il est utilisé pour conformer la fonction de sensibilité S et la sensibilité complémentaire T . Par un choix approprié des fonctions V , W_1 et W_2 , la fonction S est rendue petite en basses fréquences et T petite en hautes fréquences. Ceci est une condition nécessaire pour que le système puisse atténuer suffisamment les perturbations, pour une capacité du procédé donnée et en présence des bruits de mesure.
- 6- L'algorithme de "Glover-Doyle" permet de résoudre dans l'espace d'état le cas général du problème sous-optimal H_∞ standard. Il aboutit à la fin à une classe de contrôleur paramétrisée par une matrice " Q ", arbitraire, stable. Etant donnée que la dimension de cette matrice n'est pas fixe, on parle alors d'**horizon infini**.

Puis pour mettre en évidence les caractéristiques de la théorie H_∞ et la comparer à la théorie classique H_2 , des programmes et des applications ont été développés dans le logiciel "Matlab".

Le programme "H-infini" que nous avons développé permet de résoudre le problème général H_∞ standard en itérant sur le paramètre γ . Cette technique a donné des résultats satisfaisants, car on arrive à déterminer avec, une certaine tolérance, un γ_{opt} au dessous duquel il n'existe pas une solution à ce problème.

Toute la théorie exposée dans cette thèse a été basée sur la minimisation d'une norme "infini". Résoudre le modèle standard par une commande LQG (ou H_2), revient donc à minimiser une valeur moyenne (ou une norme H_2).

Notre programme "H2", adapte la commande H_2 à la résolution d'un modèle standard. Il impose aux matrices D_{11} et D_{22} de la représentation d'état du système augmenté à être nulles.

L'application de la commande H_∞ aux différents exemples d'application (SISO et MIMO) a donné des résultats satisfaisants. Les spécifications de robustesse et de performances sont réalisées et la stabilité en boucle fermée est obtenue avec de bonnes marges. Le contrôleur synthétisé est stable, propre et son ordre peut être réduit par les différents algorithmes de réduction des systèmes [Chi].

L'étude comparative entre les résultats de simulation des deux commandes H_∞ et H_2 a prouvé que:

- 1- Le contrôleur H_∞ est plus robuste que le contrôleur H_2 , il autorise une large variation des paramètres du système par rapport à son modèle nominal. Ceci a été observé dans l'exemple I du problème de sensibilité mixte de Kwakernaak.
- 2- Les pics (ou les dépassements) dans la région de croisement "cross-over region" de S et de T de la commande H_2 sont plus importants que ceux de la commande H_∞ .
- 3- Les "roll off" de T pour la commande H_2 dans le cas du problème de sensibilité mixte de Kwakernaak ne répondent pas aux spécifications de la robustesse.
- 4- Pour le cas MIMO, la théorie H_∞ se rapproche mieux des spécifications retenues, par rapport à la théorie H_2 .

Les résultats obtenus sont conformes aux objectifs d'une synthèse par la commande H_∞ .

A cause de la simplicité de la mise en œuvre de la commande H_2 , elle peut être utilisée, dans la technique de l'exemple 3, comme une première phase de la conception pour déterminer l'ordre de grandeur du niveau des performances (γ_{\max}). Puis utiliser comme phase finale de la conception le critère des performances H_∞ , basé sur les résultats de la synthèse H_2 . Ceci va diminuer le temps de calcul de la commande H_∞ (diminuer les itérations sur le paramètre γ).

Quant aux difficultés de la commande H_∞ , elles sont résumées dans les points suivants:

- 1- Il est difficile d'éviter les dépassements (ou pics) dans les régions de fréquences intermédiaires "cross-over region". Le fait qu'aucune fonction n'est faible dans cette zone, impose une limite sur le type d'incertitudes acceptées pour une conception H_∞ donnée. Dans [Kwa2], on montre que les systèmes à minimum de phase souffrent moins de ce problème. (Les systèmes à minimum de phase ne présentent pas de pôles et de zéros dans le demi plan droit).
- 2- Une autre difficulté que nul ne peut ignorer dans la synthèse d'une commande H_∞ , est le choix de fonction de pondérations. Pour obtenir de bon compromis Robustesse/Performances, le concepteur doit manipuler divers paramètres de synthèse, sous forme de pondérations fréquentielles multiples, et parfois tâtonner longuement avant de trouver les "bonnes" [Lar].

Toutefois, la théorie de commande robuste H_∞ fait toujours l'objet des recherches. Les investigateurs dans ce domaine essayent d'étendre son champ d'application à des cas plus réels et pratiques, tout en corrigeant en parallèle les insuffisances rencontrées au départ (Voir prospectives).

Le travail que nous venons d'exposer dans cette thèse peut être utilisé comme une référence de base pour synthétiser une commande robuste H_∞ ou H_2 . Toutes les caractéristiques de ces deux commandes, leurs aspects théoriques et leurs mise en application sont indiqués et explicités sur des exemples d'application.

Le programme "H-infini" peut être étendu au problème structurée " μ -analyse" et " μ -synthèse" ou au problème de commande H_∞ à minimum d'entropie. En effet ces deux techniques se basent sur la résolution d'un problème H_∞ standard.

Il serait intéressant, comme prochaine étape à notre travail de thèse, d'essayer de mettre en évidence toutes les capacités de synthèse de la commande H_∞ sur un exemple d'application pratique présentant des incertitudes structurés ou non structurés dues à des dynamiques négligées en hautes fréquences et présentant des pics de résonance ou des pôles oscillants peu amortis, tel que l'exemple de la suspension de [Hir] ou la structure flexible de [Mos] cités dans la prospective. En effet c'est dans ces cas critiques qu'on fait appel à la commande robuste H_∞ .

En conclusion, nous pouvons dire que la théorie H_∞ sous certaines considérations rigoureuses, est un outil très efficace pour traiter les problèmes de commande des systèmes soumis à des perturbations et à des incertitudes dues aux dynamiques négligées en hautes fréquences.

ANNEXES

Annexe A : Valeurs singulières; Normes H_2 et normes H_∞ .

I) Valeurs singulières:

Les valeurs singulières d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ de rang r , notées σ_i sont les racines carrées des valeurs propres de A^*A ordonnées de sorte que:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n. \\ \sigma_i [A] &= \sqrt{\lambda_i (A^* A)}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Où $[\cdot]^*$ est le transposé conjugué.

Si $r < n$ alors il y a $n - r$ valeurs singulières réelles, c.à.d.

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Il existe deux matrices unitaires $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et une matrice diagonale $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tel que:

$$A = U \Sigma V^* = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Où $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$; Ceci est appelé la décomposition valeur singulière (SVD) de la matrice A . La plus grande valeur singulière σ_1 est noté généralement

$$\overline{\sigma}(A) = \sigma_1. \quad (\text{A.3})$$

Si A est une matrice carrée $n \times n$, alors la $n^{\text{ième}}$ valeur singulière (c.à.d., la plus petite valeur singulière) est noté:

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_n. \quad (\text{A.4})$$

Quelques propriétés utiles des valeurs singulières:

$$\text{a) } \overline{\sigma}(A) = \max_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

$$\text{b) } \underline{\sigma}(A) = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle

$$\text{c) } \underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \overline{\sigma}(A).$$

$$\text{d) Si } A^{-1} \text{ existe, } \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\overline{\sigma}(A^{-1})}.$$

$$\text{e) Si } A^{-1} \text{ existe, } \overline{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}.$$

$$\text{f) } \overline{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \overline{\sigma}(A).$$

$$\text{g) } \overline{\sigma}(A+B) \leq \overline{\sigma}(A) + \overline{\sigma}(B).$$

$$\text{h) } \overline{\sigma}(AB) \leq \overline{\sigma}(A) \overline{\sigma}(B).$$

$$\text{i) } \underline{\sigma}(A) - \overline{\sigma}(E) \leq \underline{\sigma}(A+E) \leq \underline{\sigma}(A) + \overline{\sigma}(E).$$

$$\text{j) } \max \{ \overline{\sigma}(A), \overline{\sigma}(B) \} \leq \overline{\sigma}([A \ B]) \leq \sqrt{2} \max \{ \overline{\sigma}(A), \overline{\sigma}(B) \}.$$

$$\text{k) } \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \overline{\sigma}(A) \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

$$\text{l) } \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{trace}(A^*A).$$

II) Normes H_2 et normes H_∞ :

Pour une fonction de transfert $G(s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, stable, la norme H_2 et la norme H_∞ en termes de valeurs singulières $\sigma_i(j\omega)$ de $G(j\omega)$ dépendent de la fréquence:

Norme H_2 :

$$\|G\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n (\sigma_i(j\omega))^2 d\omega \right]^{1/2}. \quad (\text{A.5})$$

Norme H_∞ :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)). \quad (\text{A.6})$$

**Annexe B : Résolution du problème H_∞ standard
cas général
Algorithme de Glover-Doyle [Glo1]**

I) Formulation du problème:

Soit le système linéaire décrit par l'équation d'état suivante:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t). \quad (\text{B.1})$$

$$y_1(t) = C_1 x(t) + D_{11} u_1(t) + D_{12} u_2(t). \quad (\text{B.2})$$

$$y_2(t) = C_2 x(t) + D_{21} u_1(t) + D_{22} u_2(t). \quad (\text{B.3})$$

Les signaux sont comme suit:

$u_1(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$: est le vecteur de perturbation.

$u_2(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$: est le vecteur de commande d'entrée.

$y_1(t) \in \mathbf{R}^{p_1}$: est le vecteur d'erreur.

$y_2(t) \in \mathbf{R}^{p_2}$: est le vecteur des observations.

$x(t) \in \mathbf{R}^n$: est le vecteur d'état.

La fonction de transfert est noté comme suit:

$$\begin{aligned} P_a(s) &= \begin{pmatrix} Pa_{11} & Pa_{12} \\ Pa_{21} & Pa_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} [B_1 \quad B_2] = \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4}).$$

Pour un contrôleur linéaire avec la fonction de transfert $K(s)$ connectée de y_2 à u_2 , la fonction de transfert de w à z sera dénotée:

$$F_b(P_a, K) = Pa_{11} + Pa_{12} K (I - Pa_{22} K)^{-1} Pa_{21}. \quad (\text{B.5})$$

Le "problème de commande H_∞ " est donc de choisir un contrôleur $K(s)$, qui rend le système en boucle fermée intérieurement stable et minimise $\|F_b(P_a, K)\|_\infty$, Où

$$\|E\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(E(j\omega)),$$

et $\bar{\sigma}(\cdot)$ la valeur singulière maximale.

L'algorithme de Glover-doyle va donner une paramétrisation dans l'espace d'état de tous les contrôleurs stabilisants K vérifiant:

$$\|F_b(P_a, K)\|_\infty < \gamma \quad (\text{B.6}).$$

Pour un $\gamma \in \mathfrak{R}$ préspecifié.

II) Caractérisation de toutes les solutions:

Cette section va donner une caractérisation dans l'espace d'état de tous les contrôleurs stabilisants $K(s)$ de sorte que $\|F_b(P_a, K)\|_\infty < \gamma$. Les hypothèses (H1) jusqu'à (H5) données au (chapitre IV) doivent être vérifiées. Il faut rajouter à l'hypothèse (H5): que la matrice D_{11} doit être mise sous la forme:

$$D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p_1 - m_2 \\ \\ \updownarrow m_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ m_1 - p_2 & p_2 \end{matrix}$$

L'hypothèse (H6) suppose que $D_{22} = 0$ (le cas $D_{22} \neq 0$ se trouve dans [Glo1], il découle facilement du cas $D_{22} = 0$).

La solution à l'équation algébrique de Riccati est donnée par:

$$x = \text{Ric} \underbrace{\begin{pmatrix} A & -P \\ -Q & -A^* \end{pmatrix}}_H \quad P = P^*, Q = Q^*.$$

H est appelée matrice hamiltonienne

Définissons:

$$R = D_{11}^* D_{11} - \begin{pmatrix} \gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Où

$$D_{11} = [D_{11} \quad D_{12}].$$

Et

$$\tilde{R} = D_{11}^* D_{11}^* - \begin{pmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Où

$$D_{11} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}.$$

Maintenant définissons X_∞ et Y_∞ comme solutions des équations algébriques de Riccati suivantes:

$$X_\infty = \text{Ric} \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ -C_1^* D_1 \end{pmatrix} R^{-1} [D_1^* C_1 \quad B^*] \right\} \quad (\text{B.9})$$

$$Y_\infty = \text{Ric} \left\{ \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C^* \\ -B_1 D_1^* \end{pmatrix} \tilde{R}^{-1} [D_1 B_1^* \quad C] \right\} \quad (\text{B.10})$$

Définissons alors:

$$F = \begin{matrix} (m_1 - p_2) & \updownarrow \\ p_2 & \updownarrow \\ m_2 & \updownarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_2 \end{pmatrix} = -R^{-1} [D_1^* C_1 \quad B^* X_\infty] \quad (\text{B.11})$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_2 \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ (p_1 - m_2) & C_1 & C_1 \end{bmatrix} = - \left[B_1 D_{11}^* \quad Y_\infty C^* \right] \tilde{R}^{-1} \quad (\text{B.12}).$$

Théorème B.1:

Pour le système décrit par (B.1), (B.3) et satisfaisant les suppositions (H₁) - (H₆) :

a) Il existe un contrôleur K stabilisant le système intérieurement de sorte que $\|F_b(P_a, K)\|_\infty < \gamma$ ssi:

(i) $\gamma > \text{Max}(\bar{\sigma}[D_{1121}, D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1121}^*, D_{1112}^*])$ et

(ii) Il existe $X_\infty \geq 0$ et $Y_\infty \geq 0$ satisfaisants respectivement (B.9) et (B.10) et tel que:

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2.$$

b) Une fois que les conditions de la partie (a) sont vérifiées, alors tous les contrôleurs rationnels K intérieurement stables satisfaisants $\|F_b(P_a, K)\|_\infty < \gamma$ sont donnés par:

$K = F_b(K_a, \phi)$ pour un $\phi \in RH_\infty$ arbitraire et tel que:

$$\|\phi\|_\infty < \gamma. \quad (\text{B.13}).$$

Où

$$K_a = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14}).$$

$$\hat{D}_{11} = -D_{1121} D_{1111}^* (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^*)^{-1} D_{1112} - D_{1122}. \quad (\text{B.15}).$$

$\hat{D}_{12} \in \mathcal{R}^{m_2 \times m_2}$ et $\hat{D}_{21} \in \mathcal{R}^{p_2 \times p_2}$ sont des matrices tel que:

$$\hat{D}_{12} \hat{D}_{12}^* = I - D_{1121} (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^*)^{-1} D_{1112}^*. \quad (\text{B.16}).$$

$$\hat{D}_{21} \hat{D}_{21}^* = I - D_{1112} (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^*)^{-1} D_{1121}^*. \quad (\text{B.17}).$$

et

$$\hat{B}_2 = (B_2 + H_{12}) \hat{D}_{12}. \quad (\text{B.18}).$$

$$\hat{C}_2 = -\hat{D}_{21} (C_2 + F_{12}) Z. \quad (\text{B.19}).$$

$$\hat{B}_1 = -H_2 + \hat{B}_2 \hat{D}_{21}^{-1} \hat{D}_{11} \quad (\text{B.20}).$$

$$\hat{C}_1 = F_2 Z + \hat{D}_{11} \hat{D}_{21}^{-1} \hat{C}_2. \quad (\text{B.21}).$$

$$\hat{A} = A + HC + \hat{B}_2 \hat{D}_{12}^{-1} \hat{C}_1. \quad (\text{B.22}).$$

Où

$$Z = (I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty). \quad (\text{B.23}).$$

Il faut noter que si $D_{11} = 0$ les formules vont être considérablement simplifiées. Et l'algorithme devient celui du (chapitre IV).

Pour: $D_{22} \neq 0$. voir [Glo1].

III) Simplification de l'algorithme de Glover-Doyle: [Hvo]

Théorème B.2:

Dans le cas où la matrice $D_{21} = I_{p_2 = m_1}$, alors ce qui suit est vrai

- (i) la seconde matrice hamiltonienne H_{Y_∞} est triangulaire bloc supérieur, et
- (ii) La solution de l'équation de Riccati associée à cette matrice est nulle.

$$Y_\infty = O_n. \quad (\text{B.24})$$

Théorème B.3:

Si la matrice $D_{12} = I_{p_1 = m_2}$, alors ce qui suit est vrai

- (i) la première matrice hamiltonienne H_{X_∞} est triangulaire bloc supérieur, et
- (ii) La solution de l'équation de Riccati associée à cette matrice est nulle.

$$X_\infty = O_n \quad (\text{B.25})$$

La démonstration de ces deux théorèmes est donnée dans [Hvo].

Annexe C : Résolution du problème standard par la commande H_2 (L.Q.G).

Soit le schéma standard suivant :

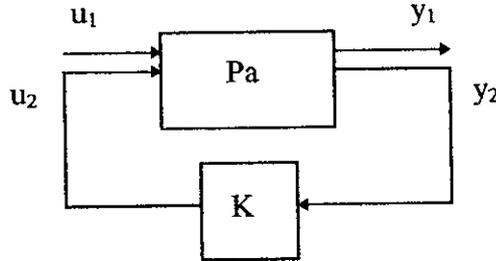


Fig. C.1 : Schéma standard

Le problème de la commande optimale H_2 est défini comme suit: Chercher un contrôleur stabilisant K pour le système augmenté Pa de sorte que la norme H_2 de la fonction de transfert de la boucle fermée $T_{y_1 u_1}$ ($Fb(Pa, K)$) soit minimisée :

$$\min_K \|T_{y_1 u_1}\|_2 := \min_K \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{trace} \left(T_{y_1 u_1}^*(j\omega) T_{y_1 u_1}(j\omega) \right) d\omega \right)^{1/2} \quad (C.1).$$

Ce problème est équivalent à celui de la commande linéaire quadratique gaussienne L.Q.G [Chi], avec un indice de performance :

$$\begin{aligned} J_{LQG} &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T y_1^T y_1 dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} x^T & u_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_1 \end{bmatrix} dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} x^T & u_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_1 \end{bmatrix} dt \right\} \end{aligned} \quad (C.2).$$

et des bruits blancs v et w corrélés, entrant le système via le canal $[B_1 \ D_{21}]^T$ et ayant la jointe fonction de corrélation :

$$\begin{aligned} E \left\{ \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) & w(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \\ \begin{bmatrix} V & X \\ X^T & W \end{bmatrix} \delta(t - \tau) = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 D_{21}^T \\ D_{21} B_1^T & I \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (C.3).$$

Le contrôleur optimal $K(s)$ de H_2 est donc réalisable à la manière LQG, avec les matrices gain de commande et d'observation respectives \bar{G} et \bar{K} .

1) Contrôleur déterministe:

$$u_2 = -\bar{G}\hat{x} \quad (C.4).$$

$$\bar{G} = R^{-1}(B_2^T \bar{M} + S) = (B_2^T \bar{M} + D_{12}^T C_1) \quad (C.5).$$

où $\bar{M} = \bar{M}^T$ et satisfait l'équation de Riccati algébrique :

$$\bar{M}A + A^T \bar{M} - (\bar{M}B_2 + S)R^{-1}(B_2^T \bar{M} + S^T) + Q = 0. \quad (C.6).$$

2) Filtre de Kalman :

$$\hat{x} = A\hat{x} + B_2 u_2 + \bar{K}(y_2 - C_2 \hat{x} - D_{22} u_2) \quad (C.7).$$

$$\bar{K} = (PC_2^T + B_1 D_{21}^T) \quad (C.8).$$

où $\bar{P} = \bar{P}^T$ et satisfait l'ARE :

$$A\bar{P} + \bar{P}A^T - (\bar{P}C_2^T + X)W^{-1}(C_2 \bar{P} + X^T) + V = 0. \quad (C.9).$$

Le contrôleur optimal final H_2 a donc la forme familière suivante:

$$K(s) := \begin{bmatrix} A - \bar{K}C_2 - B_2 \bar{G} + \bar{K}D_{22} \bar{G} & \bar{K} \\ \bar{G} & 0 \end{bmatrix}$$

Limitations :

- 1). D_{11} doit être égal à zéro, sinon le problème de la commande optimale H_2 est mal posé.
- 2). D_{12} et D_{12}^T doivent avoir des rangs égaux aux nombres de leurs colonnes respectives.

Annexe D : *La Stabilité Interne.*

I) La bonne position d'un système bouclé[Zho2] :

Considérons le système bouclé de la figure (D.1):

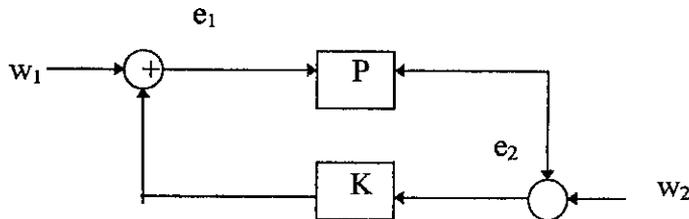


Fig. D.1: système bouclé avec des entrées externes.

w_1 et w_2 : représentent les signaux d'entrée du système externes,

e_1 et e_2 : sont les signaux d'entrée du procédé et du contrôleur.

Le procédé P et le contrôleur K sont supposés être des matrices de transfert réelles rationnelles et propres.

Définition D.1 [Zho2]:

Un système de contre réaction est dit **bien posé** si toutes les matrices de transfert de la boucle fermée sont bien définies et propres.

Le système de la figure (D.1) est bien posé si et seulement si la matrice de transfert de $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

vers e_1 existe et est propre.

Une fonction de transfert $H(s)$ est propre si $H(\infty)$ est finie.

Lemme D.1 [Zho2]:

Le système bouclé de la figure (D.1) est bien posé si et seulement si

$$I - K(\infty)P(\infty) \quad (D.1)$$

est inversible.

La condition (D.1) est équivalente aux deux conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} I & -K(\infty) \\ -P(\infty) & I \end{bmatrix} \text{ est inversible} \quad (D.2)$$

$$I - P(\infty)K(\infty) \text{ est inversible}$$

Considérons les représentations d'état de P et K suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

$$K = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

La condition de bonne position devient simple, la condition (D.2) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} I & -D_k \\ -D & I \end{bmatrix} \text{ est inversible} \quad (\text{D.5}).$$

car $P(\infty) = D$ et $K(\infty) = D_k$

II) Stabilité interne:

Définition D.2 [Man]:

Un système de commande est stable intérieurement si des signaux bornés injectés à n'importe quel point du système de commande génèrent des réponses bornées à n'importe quel autre point.

Définition D.3 [Man]:

Un système de commande linéaire invariant dans le temps est stable intérieurement si les fonctions de transfert entre n'importe quels deux points du système de commande sont stables, c.a.d ont des pôles dans le demi - plan gauche.

Considérons le système décrit par le bloc de diagramme standard de la figure (D.1), et supposons que le système est bien posé. Aussi supposons que les réalisations de $P(s)$ et $K(s)$ données par les équations (D.3) et (D.4) sont stabilisables et détectables.

Soit x et x_k les vecteurs d'état respectifs de P et K , les équations d'état de la figure (D.1) avec w_1 et w_2 égales à zéro sont :

$$\dot{x} = Ax + Be_1 \quad (\text{D.6}).$$

$$e_2 = Cx + De_1 \quad (\text{D.7}).$$

$$\dot{x}_k = Ax_k + B_k e_2 \quad (\text{D.8}).$$

$$e_1 = C_k x_k + D_k e_2 \quad (\text{D.9}).$$

Définition D.4 [Zho2] :

Le système de la figure (D.1) est stable intérieurement si l'origine $(\hat{x}, \hat{x}) = (0,0)$ est asymptotiquement stable, c'est à dire que les états (\hat{x}, \hat{x}) tendent vers zéro pour toutes conditions initiales, quand $w_1 = 0$ et $w_2 = 0$.

Résolvons le système d'équation (D.6) jusqu'à (D.9), nous aurons:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix}$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -D_k \\ -D & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & C_k \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc la stabilité interne est équivalente à la condition que \tilde{A} a toutes ses valeurs propres dans le demi - plan gauche.

Lemme D.2 [Zho2] :

Le système de la figure (D.1) avec des réalisations P et K données stabilisables et détectables est stable intérieurement si et seulement si \tilde{A} est une matrice d'Hurwitz.

Le système de la figure (D.1) peut être décrit dans les termes de matrices de transfert:

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.10}).$$

Lemme D.3 [Zho2] :

le système de la figure (D.1) est stable intérieurement si et seulement si la matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - KP)^{-1} & K(I - PK)^{-1} \\ P(I - KP)^{-1} & (I - PK)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.11}).$$

$$= \begin{bmatrix} I + K(I - PK)^{-1}P & K(I - PK)^{-1} \\ (I - PK)^{-1}P & (I - PK)^{-1} \end{bmatrix}$$

de (w_1, w_2) vers (e_1, e_2) appartient à RH_∞ .

Corollaire D.1 [Zho2]:

Supposons que $K \in RH_\infty$. Donc le système de la figure (D.1) est stable intérieurement si et seulement si, il est bien posé et $P(I - KP)^{-1} \in RH_\infty$.

Corollaire D.2 [Zho2]:

Supposons que $P \in RH_\infty$. Donc le système de la figure (D.1) est stable intérieurement si et seulement si, il est bien posé et $K(I - PK)^{-1} \in RH_\infty$.

Corollaire D.3 [Zho2] :

Supposons que $P \in RH_\infty$ et $K \in RH_\infty$. Donc le système de la figure (D.1) est stable intérieurement si et seulement si, il est bien posé et $(I - PK)^{-1} \in RH_\infty$.

Pour étudier le cas le plus général, définissons:

$n_k :=$ nombre de pôles du demi - plan droit (rhp) de $K(s)$.

$n_p :=$ nombre de pôles du rhp de $P(s)$.

Théorème D.1 [Zho2]: Le système est stable intérieurement si et seulement s'il est bien posé et

- i) le nombre de pôles du rhp de $P(s)K(s) = n_k + n_p$;
- ii) $\Phi(s) := \det (I - P(s)K(s))$ a tous ces zéros dans la demi-plan gauche (c.a.d, $(I - P(s)K(s))^{-1}$ est stable).

III) La factorisation copremière [Fra1][Zho2]

On dit que deux polynômes $m(s)$ et $n(s)$ (avec des coefficients réels) sont copremiers si leur plus grand diviseur commun est 1 (ils n'ont pas de zéros communs). Ou d'une manière équivalente $m(s)$ et $n(s)$ sont copremiers s'il existe des polynômes $x(s)$ et $y(s)$ tel que: $xm + yn = 1$; (Identité de Bezout).

D'une manière similaire, deux fonctions de transfert $m(s)$ et $n(s)$ dans RH^∞ sont dites copremières dans RH^∞ s'il existe $x, y \in RH^\infty$ tel que:

$$xm + yn = 1.$$

Définition D.5[Zho2]:

Deux matrices M et N dans RH^∞ sont copremières droite si elles ont le même nombre de colonnes et s'il existe des matrices X_r et Y_r dans RH^∞ tel que :

$$\begin{bmatrix} X_r & Y_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = X_r M + Y_r N = I.$$

D'une manière similaire, deux matrices \tilde{M} et \tilde{N} dans RH^∞ sont copremières gauche si elles ont le même nombre de lignes et s'il existe des matrices X_t et Y_t dans RH^∞ tel que :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \tilde{M} X_t + \tilde{N} Y_t = I.$$

Ceci est équivalent à dire que la matrice $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ est inversible gauche dans RH^∞ et la matrice

$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix}$ est inversible droite dans RH^∞ . Une factorisation copremière droite (rcf) de P est une factorisation $P = NM^{-1}$, où N et M sont copremières droite dans RH^∞ . Et une factorisation copremière gauche (lcf) a la forme $P = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$ où \tilde{N} et \tilde{M} sont copremières gauche dans RH^∞ . Une matrice $P(s)$ possède une double factorisation copremière s'il existe une factorisation copremière droite, une factorisation copremière gauche, et $X_r, Y_r, X_t, Y_t \in RH^\infty$ tel que

$$\begin{bmatrix} X_r & Y_r \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -Y_t \\ N & X_t \end{bmatrix} = I. \quad (D.12).$$

Considérons encore la figure (D.1), et soit la factorisation copremière droite ou gauche de P et K :

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \quad (D.13).$$

$$K = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1} \tilde{U}. \quad (D.14).$$

Lemme D.4 [Zho2]:

Considérons le système de la figure (D.1). Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. Le système bouclé est stable intérieurement .

2. $\begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix}$ est inversible dans RH^∞ .

3. $\begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}$ est inversible dans RH^∞ .

4. $\tilde{M}V - \tilde{N}U$ est inversible dans RH^∞ .

5. $\tilde{V}M - \tilde{U}N$ est inversible dans RH^∞ .

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- 1- [Bal]: G.J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard et R. Smith; " μ - Analysis and synthesis toolbox (μ - tools) "; The Math Works, Inc, Avril 1991.
- 2- [Ber]: D.S. Bernstein et W.M. Haddad; " LQG Control with an H_∞ Performance Bound : A Riccati Equation Approach "; pp.293-304; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.34, N°3, Mars 1989.
- 3- [Bou]: H.Bourlès et F. Aioun; " Approche H_∞ et μ - synthèse"; Ecole d'Eté d'Automatique de Grenoble, Septembre 1993.
- 4- [Chi]: R.Y.Chiang et M.G. Safonov; "Robust - Control Toolbox "; for use with Matlab, users guide.The Math Works ,Inc. Juin 1988.
- 5- [Des]: C.A. Desoer et M. Vidyasagar; "Feedback Systems: Input - Output Properties "; Academic Press, 1975.
- 6- [Doy]: J.C.Doyle et G. Stein; " Multivariable feedback Design : Concepts for a Classical / Modern Synthesis "; pp.17-31; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, N°1, Février 1981.
- 7- [Fen]: J.Feng et M.C. Smith; " When is a Controller Optimal in the Sens of H_∞ Loop - Shaping "; pp2026-2039; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, N°12, Décembre 1995.
- 8- [Foo]: Y.K. Foo et I. Postlethwaite; " An H_∞ - minimax approach to the design of robust control "; pp81-88; System & Control Letters, 1984.
- 9- [Fra1]: B.A. Francis; "A Course in H_∞ Control Theory "; Lecture Notes in Control and Information Sciences, SpringerVerlag, 1987.
- 10- [Fra2]: B.A Francis et J.C. Doyle; " Linear Control Theory with an H_∞ Opimality Criterion "; SIAM J. Control and Optimization; pp.815-844; Vol. 25, N°4, Juillet 1987.
- 11- [Fra3]: B.A. Francis et G. Zames; " On H_∞ - Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback Systems "; pp.9-16; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 29, N°1, Janvier 1984.
- 12- [Fra4]: B.A. Francis, J.W. Helton et G. Zames; " H_∞ - Optimal Feedback controllers for Linear Multivariable Systems "; pp.888-900; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.29, 1984.
- 13- [Fri] : Friedland; " Control System Design : an introduction to state-space methods"; New York : Mac Graw-Hill; 1987.
- 14- [Glo1]: K. Glover et J.C. Doyle; " State - Space formuae for all stabilizing Controllers that satisfy an H_∞ - Norm bound and relations to risk Sensitivity "; pp.167-172; System & Control Letters 11, 1988.

- 15- [Glo2]: K.Glover, D.J.N.Limbeer, J.C.Doyle, E.M.Kasenally et M.G.Safonov; " A Characterization of all Solutions to the four Block General Distance Problem "; pp.283-324; SIAM J. Control and Optimization, Vol.29, N°2, Mars 1991.
- 16- [Glo3]: K. Glover; "Robust Stabilization of Linear Multivariable systems: relatins to approximation "; pp.741-766; Int. J. Control, Vol.43, N°3, 1986.
- 17- [Gra]: A. Grace, A.J. Laub, J.N. Little et C. Thompson; " Control System Toolbox, for use with Matlab, The Math Works, Inc., Octobre 1990.
- 18- [Gre1]: M. Green, K. Glover, D. Lemebeer et J.C. Doyle; " A J - Spectral Factorization : Approach to H_∞ - Control "; pp.1350-1371; SIAM J. Control and Optimization, Vol. 28, N°6, Novembre 1990.
- 19- [Gre2]: M.Green; " H_∞ Controller Synthesis by J-Lossles Coprime Factorization "; pp.522-547; SIAM J.Control and Optimization, Vol. 30, N°3, Mai 1992.
- 20- [Gri]: M.J. Grimble; " Generalised H_∞ multivariable controllers "; pp.285-297; IEE Proceedings, Vol. 136, N°6, 1989.
- 21- [Hel]: J.W. Helton; " Worst Case Analysis in the Frequency Domain; The H_∞ approach to Control"; pp.1154-1170; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.30, N°12, Decembre 1985.
- 22- [Hir]: T. Hirata, S. Koizumi et R. Takahashi; " H_∞ Control of Railroad Vhecule Activ Suspension "; pp.13-24; Automatica, Vol. 31, N°1, 1995.
- 23- [Hvo]: H.S.Hvostov; "Simplifing H_∞ Controller Synthesis Via Classical Feedback System Structure"; pp.485-488; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 5, N°4, Avril 1990.
- 24- [Igl]: P.A. Iglesias et K. Glover; "State-Space approach to discrete-time H_∞ Control"; pp.1031-1073; Int.J. Control, Vol. 54, N°5; 1991.
- 25- [Iwa]: T. Iwasaki et R. E. Skelton; " All controllers for the general H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas "; pp1307-1317; Automatica, Vol.30, N°8, 1994.
- 26- [Kha]: P.P.Khargonekar, I.R.Petersen et M.A.Rotea; " H_∞ -Optimal Control with State - Feedback"; pp.786-788; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, N°8, Août 1988.
- 27- [Kim]: H. Kimura, Y. Lu et R. Kawatani; " On the structure of H_∞ Control System and Related Extensions "; pp.653-667; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, N°6, Juin 1991.
- 28- [Kwa1]: H. Kwakernaak; " Robust Control - Mixed - Sensitivity Optimization"; Ecole d'Été d'Automatique de Grenoble, Septembre 1993.

- 29- [Kwa2]: H. Kwakernaak; " Robust Control and H_∞ - Optimization - Tutorial Paper "; pp.255-273; Automatica Vol. 29, N° 2, 1993.
- 30- [Kwa3]: H. Kwakernaak; " Apolynomial approach to minimax frequency domain optimization of Multivariable feedback systems "; pp 117-156; Int. J. Control, Vol. 44, N°1, 1986.
- 31- [Lar]: P. de Larminat; " Méthodes élémentaires pour la commande robuste"; Ecole d'Eté d'Automatique de Grenoble, Septembre 1993.
- 32- [Lind]: G.W.V.Linden t P.F.Lambrechts; " H_∞ control of an Experimental Inverted Pendulum"; pp.44-50; IEEE Control Systems, 1993.
- 33- [Lin]: J.L. Lin, I.Postlethwaite et D.W. Gu; " μ - K iteration: A new Algorithm for μ - synthesis"; pp.219-224; Automatica, Vol. 29, N°1, 1993.
- 34- [Lun]: I.Lunze; "Robust Multivariable feedback Control"; Prentice Hall International (UK) Ltd, 1989.
- 35- [Man]: Manfred Morari et E. Zafiriou; " Robust Process Control"; Prentice Hall International, Inc. 1989.
- 36- [Mei]: G. Meinsma; " Unstable and Non Proper weights in H_∞ Control "; pp1655-1658; Automatica, Vol 31, N°11, 1995.
- 37- [Mos]: A.N. Moser; " Designing Controllers for Flexible Structures with H-infinity / μ -Synthesis"; p79-88; IEEE control system, Avril 1993.
- 38- [Mus1]: D.Mustafa; "Relations between maximum -entropy / H_∞ control and Combined H_∞ / LQG control "; pp.193-203; System & Control Letters, 1989.
- 39- [Mus2]: D. Mustafa et K. Glover; " Controller Reduction by H_∞ - Balanced Truncation "; pp.668-682; IEEE Transactions onAutomatic Control, Vol. 36, N°6, Juin 1991.
- 40- [Mus3]: D.Mustafa, K. Glover et D.J.N. Limbeers; " Solutions to the H_∞ General distance Problem which Minimize an Entropy Integral "; pp.193-199; Automatica, Vol. 27, N° 1, 1991.
- 41- [R] : Rapport sur l'application de la commande robuste sur un système électromécanique.
- 42- [Saf]: M.G. Safonov, A.J. Laub et G.I. Hartmann; " Feedback Properties of Multivariable Systems: The Role and Use of the return Difference Matrix "; pp.47-65; IEEE Transactions on Atomic Control, Vol. 26, N° 1, Février 1981.
- 43- [Sch]: C.W. Scherer; " The State - Feedback H_∞ - Problem at Optimality"; pp293-305; Automatica, Vol. 30, N°2, 1994.

- 44- [Sor]: E. Soroka et U. Shaked; " The LQG Optimal Regulation Problem for systems with Perfect Measurement: Explicit Solution, Properties, and Application to Pratical Designs"; pp941-944; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, N°10, Octobre 1988.
- 45- [Sto1]: A.A. Stoorvogel; " The singular H_∞ Control Problem with Dynamic Measurement Feedback"; pp.160-184; SIAM J. Control and Optimization, Vol. 29, N° 3, 1992.
- 46- [Sto2]: A.A. Stoorvogel; " The Singular H_2 Control Problem "; pp.627-631; Automatica, Vol. 28, N° 3, 1992.
- 47- [Sto3]: A.A. Stoorvogel; " The H_∞ Control Problem "; Prentice Hall International, 1992.
- 48- [Sto4]: A.A. Stoorvogel; " The H_∞ Control Problem: A State Space Approach"; pp.1149-1153; Automatica, Vol.29, N° 4, 1993.
- 49- [Sto5]: A.A. Stoorvogel et A. Saberi; " Continuity properties of Solutions to H_2 and H_∞ Riccati equations "; pp209-222; Systems & control Letters 277, 1996.
- 50- [Tad]: G. Tadmort; " Worst - Case Design in the Time Domain, t he Maximum Principal and the Standard H_∞ Problem"; pp.301-324; Math. Control Signals Systems, 1990.
- 51- [Tok]: O. Toker et H. Ozbay; " H_∞ Optimal and Suboptimal Controllers for Infinite Dimensional SISO Plants "; pp751-755; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, N° 4, Avril 1995.
- 52- [Tsy]: Y.Z. Tsytkin; " Synthesis of Optimal Control Systems for non - minimum phase plants "; pp.291-296; Int.Systems SCI, Vol. 23, N° 2, 1992.
- 53- [Zam1]: G. Zames; " On the input - Output Stability of time varing nonlinear feedback systems—Part I: Conditions using concepts of loop gain, conicity possitivity "; pp.228-238; IEEE Transactions, Vol. 11,1966.
- 54- [Zam2]: G. Zames; " Feedback and Optimal sensitivity : Model Inverses"; pp.301-319; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, N° 2, Avril 1981.
- 55- [Zho1]: K. Zhou et P. P. Khargonekar; "An algebraic Riccati equations approach to H_∞ Optimizations "; pp.85-91; Systems & Control Letters 11, 1988.
- 56- [Zho2]: K. Zhou, J.C. Doyle et K. Glover; " Robust and Optimal Control "; Prentice Hall, 1996.
- 57- [Zhon]: C. Zhong XU; " Quelques résultats concrets sur la commande linéaire par l'approche H_∞ "; Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984.