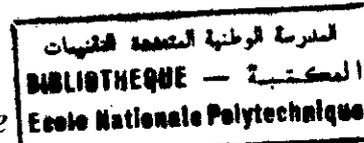


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
 MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
 ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
 Département de Génie Civil



Thèse  
 présentée par

**ABDELHALIM AIROUCHE**

Ingénieur d'état en Génie civil  
 De l'Ecole Nationale Polytechnique

Pour obtenir le titre de  
**MAGISTER EN GENIE CIVIL**

Thème

---

**ETUDE DES EFFETS D'INTERACTIONS  
 DYNAMIQUES DUS AU TRAFICS URBAINS DANS  
 LES SYSTEMES SOL-TUNNEL PAR LA METHODE  
 DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES**

---

Soutenue le 04 Juillet 2000 devant le jury composé de :

M <sup>r</sup> B. Tiliouine	Professeur	Président du jury
M <sup>r</sup> M. K. Berrah	Professeur	Directeur de thèse
M <sup>r</sup> S. Belkacemi	Maître de conférences	Examineur
M <sup>r</sup> M. Hammoutène	Maître de conférences	Examineur
M <sup>r</sup> M. Demidem	Chargé de cours	Examineur

تتمثل هذه الأطروحة في دراسة تأثيرات التفاعلات الديناميكية الناتجة عن حركة المرور الحضري في الجمل تراب - نفق. أنجز التحليل تحت شروط التشوهات المستوية. السلوكات - لزج مرن- الخطية للنفق و التراب المجاور قد أخذت بعين الاعتبار ضمن هذه الدراسة. اعتمدت طريقة المعادلات التكاملية عند الحدود في مجال التواترات كطريقة لحل المسألة المطروحة آنفا. بغرض فحص الفعالية الحاسوبية لطريقة العناصر الحدودية، أعدت مدونتان حسابية، الأولى خاصة بالعناصر الثابتة و الأخرى بالعناصر الرباعية. السلوك الديناميكي للجمل تراب - نفق التي من أجلها أنجزت الدراسة قد قدر من أجل ثوابت هندسية و ميكانيكية مختلفة. و ذلك من أجل ضبط أحسن لتأثيرات هته الأخيرة على رد فعل الجمل.

لمات مفاتيح : عناصر حدية - رد الفعل ديناميكي - مجال التواترات - أنفاق - حركة المرور الحضري.

## ABSTRACT

An investigation of the dynamic interaction effects, due to urban traffics, in sol-tunnels systems is accomplished. The analysis is conducted under condition of plane strain. The linear visco-elastic material behavior for both the tunnel and the surrounded soil is unclouded in the study. The problem as defined, is solved in the frequency domain by using the boundary element method. Two computational codes are elaborated for the two cases of constant elements and quadratic elements, in order to inspect the numerical performances of the boundary element method. The dynamic behavior of the typical soil-tunnel system for witch the study is carried out, is evaluated for different geometric and material parameters, in order to assess their effects on the system response.

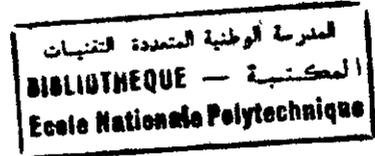
**Keywords :** boundary element, dynamic response, frequency domain, tunnels, urban traffics.

## RESUME :

Une investigation des effets d'interaction dynamique, dus aux trafics urbains, dans les systèmes sol-tunnels est effectuée. L'analyse est faite sous les conditions de déformations planes. Les comportements viscoélastiques linéaires du tunnel et du sol environnant sont inclus dans l'étude. Le problème ainsi défini est résolu dans le domaine des fréquences, en utilisant la méthode des équations intégrales aux frontières. Deux codes de calculs ont été élaborés pour les deux cas d'éléments constants et d'éléments quadratiques, dans le but d'examiner les performances numériques de la méthode des éléments de frontières. Le comportement dynamique du système sol-tunnel typique pour lequel l'étude a été réalisée est évalué pour différents paramètres géométriques et mécaniques. aux fins de mieux appréhender leurs effets sur la réponse du système.

**Mots clés :** éléments de frontières, réponse dynamique, domaine des fréquences, tunnels, trafics urbains.

## Remerciements



Mes vifs remerciements vont à mon directeur de thèse le professeur **M. K. BERRAH**. Le suivi permanent du Professeur, sa rigueur, ses conseils et ses orientations qu'il m'a prodigué m'ont été d'un apport certain pour l'élaboration de ce travail. Je ne saurais trouver les mots pour lui exprimer mes sincères remerciements et ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier le Professeur **B. TILIOUINE** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, Mr. **S. BELKACEMI** (Maître de conférence), Mr. **M. HAMMOUTENE** (Maître de conférence), et Mr. **M. DEMIDEM** (Chargé de cours) pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce document, en particulier, à Mr. **M. Hadid**, et à **Baghani** pour leurs conseils et critiques. Sans oublier tout le personnel de la bibliothèque et du centre de calcul de l'Ecole, spécialement, **Salah, Krimou et Da L'Hocine**.

Je dois un grand merci à tous mes amis, notamment, **Nourreddine et Samir, Abdou** et sa famille, **Baghani et Ouassila**, ainsi que **Karima** pour leur soutien moral et matérielles.

Je ne saurais oublier mes amis de l'E.P.A.U., **Chakib, James, Nadji, Fairouze, Rym, Ivan et Mehdi** avec qui j'ai passé des moments formidables.

Enfin, je rends hommages à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à ma formation.

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A ma famille*

## TABLE DES MATIERES

<u>I-INTRODUCTION GENERALE</u>	<u>7</u>
METHODES D'ANALYSES ET DE RESOLUTIONS	7
ORGANISATION ET OBJECTIF DE L'ETUDE :	10
<u>II- GÉNÉRALITÉS SUR L'ÉLASTODYNAMIQUE ET FONDEMENTS THÉORIQUES DE LA M.E.I.F.</u>	<u>13</u>
2.1 INTRODUCTION	13
2.2 HYPOTHESES DE TRAVAIL	14
2.3 EQUATIONS GOUVERNANTES	14
2.4 THEOREME DE RECIPROCITE	17
2.5 FORMULATION INTEGRALE :	17
2.6 EQUATIONS INTEGRALES REGULARISEES	19
2.7 DOMAINES D'APPLICATION DE LA B.E.M.	20
A/- MECANIQUE DE LA RUPTURE	20
B/- PROBLEMES EXTERIEURS	21
C/- PROBLEMES AVEC NON LINEARITE	21
D/- DOMAINES VARIABLES OU INCONNUS	21
2.8 INCONVENIENTS DE LA B.E.M	21
2.9 CONCLUSION	22
<u>III- LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES</u>	<u>24</u>
3.1 INTRODUCTION :	24
3.2 EQUATIONS INTEGRALES DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES :	25
3.3 REPRESENTATION DE LA GEOMETRIE ET DISCRETISATION DES INCONNUES U, Q :	26
3.4 ELEMENT CONSTANT :	28
3.5 ELEMENT QUADRATIQUE	30
3.6 INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES	34
3.7 RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE :	35
3.8 POST- TRAITEMENT :	35
3.9 CALCUL DES INTEGRALES ELEMENTAIRES REGULIERES	35
3.10 CALCUL DES INTEGRALES ELEMENTAIRES SINGULIERES	35



3.10.1 CAS DE L'ELEMENT CONSTANT :	36
3.10.2 CAS DE L'ELEMENT QUADRATIQUE :	37
3.11 SOUS STRUCTURATION	40
3.12 CONCLUSION :	42
<b><u>IV-MODÉLISATION DU TUNNEL</u></b>	<b><u>44</u></b>
4.1 INTRODUCTION	44
4.2 FORMULATION DU PROBLEME :	45
4.2.1 MODELISATION DU SOL:	46
4.2.2 MODELISATION DU TUNNEL:	47
4.2.3 RESOLUTION DU PROBLEME COMPLET :	49
4.3 QUELQUES PROBLEMES RENCONTRES LORS DE L'UTILISATION DE L'ELEMENT QUADRATIQUE :	50
4.3.1 TRAITEMENT PARTICULIER DES COINS :	50
4.4 CALCUL DU VECTEUR DE CHARGEMENT NODAL	51
4.5 CONCLUSION:	52
<b><u>V-INVESTIGATIONS NUMERIQUES</u></b>	<b><u>54</u></b>
5.1 INTRODUCTION :	54
5.2 PRESENTATION DU TUNNEL ANALYSE	55
5.3 ETUDE COMPARATIVE DES PERFORMANCES DEUX ELEMENTS CONSTANT ET QUADRATIQUE	56
5.4 ETUDE DE L'EFFET DE L'ENTERREMENT (D) DU TUNNEL	63
5.5 ETUDE DE L'EFFET DU RAPPORT ENTRE LES MODULES D'ELASTICITE DU SOL ET DU TUNNEL ( $E_T/E_S$ ) :	68
5.6 EFFET DE LA FREQUENCE DU CHARGEMENT	73
<b><u>CONCLUSION GENERALE</u></b>	<b><u>75</u></b>
<b><u>REFERENCES</u></b>	<b><u>78</u></b>
<b><u>ANNEXE A. INTEGRATION NUMERIQUE</u></b>	<b><u>85</u></b>
<b><u>ANNEXE A2</u></b>	<b><u>86</u></b>
DEVELOPPEMENT DE $K_0(Z)$ EN SERIE	86
DEVELOPPEMENT DE $K_1(Z)/Z$ EN SERIE	87

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## INTRODUCTION GENERALE

*"Pensez en homme cultivé, mais parlez en homme simple"*

*Aristote*

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION GENERALE

Depuis plus d'un demi siècle, l'analyse dynamique des constructions a connu des progrès considérables. Bénéficiant des avancées des méthodes numériques et du prodigieux essor de la recherche, elle a multiplié ses voies d'investigations, perfectionné ses outils de diagnostique. Ces deux dernières décennies ont vu s'accélérer encore ce développement et s'amplifier ces résultats. De nouvelles techniques de laboratoire sont découvertes et mises en œuvre. De nouvelles méthodes numériques permettent des investigations qui apportent aux ingénieurs et aux concepteurs une aide à peine imaginable il y a seulement quelques années. De nouvelles spécialités se créent ou connaissent des développements qui élargissent considérablement les frontières de notre savoir.

Les structures souterraines telles que les tunnels, les "pipelines", les systèmes de stockages souterrains des hydrocarbures et les abris antinucléaires pour la protection des populations, qui couvrent un domaine important de constructions, ont elles aussi pris part à ce progrès et suscitent un intérêt particulier chez un bon nombre de chercheurs. En effet, depuis la première étude effectuée sur l'analyse dynamique des structures enterrées sur les abris antinucléaires [1-3 dans 73], plusieurs [4-6 dans 73] investigations et analyses dynamiques des structures enterrées, incluant le phénomène d'interaction sol-structure, ont été et continuent d'être menées et font l'objet de plusieurs travaux publiés.

### Méthodes d'analyses et de résolutions

L'ensemble des méthodes permettant l'analyse dynamique des structures enterrées peuvent être répertoriées en trois familles principales, qui sont :

**I- Les méthodes analytiques** : dans cette catégories on peut trouver :

**I.a/- La méthode quasi-statique sans l'interaction sol-structure** : cette méthode suppose que la structure est assez flexible pour suivre la déformation du sol environnant. Ainsi, en utilisant les valeurs maximales de l'amplitude et de la longueur d'onde de la déformation sismique du sol, la déformation maximale de la structure peut être calculée. Cette méthode a été l'objet d'une application sur le tunnel ferroviaire (subway) de San Francisco, faite par Kausel [4 dans 73] et Aisiks et Tarshansky [15 dans 73]. Quant à Takahashi [16 dans 73], Newmark [5 dans 73], et Shah et Chu [17 dans 73], ils l'ont utilisé sur les pipelines enterrées.

**I.b/- La méthode Quasi-statique avec l'interaction sol-structure :** qui peut être appliquée sur les structures rigides dans un sol mou. Cette méthode a été utilisée par Aoki et Hayashi[10] pour déterminer la réponse sismique des longs tunnels, ainsi que Wang et O'Rourke[91], Nelson et Weidlinger[20 dans 73], O'Rourke et El Hmadi[21 dans 73] et Singhal Zuroff[22 dans 73] pour l'étude des pipelines enterrées. Les modèles les plus intéressants de cette catégorie sont ceux de Constantopoulos et *al.* [23], Navarro et Samartin[24 dans 73], Navarro[25 dans 73] et plus particulièrement Penzien et *al.* [26 dans 73], qui constituent un outil efficace pour la conception.

**I.c/- La méthode dynamique en utilisant le système masse, ressort et amortisseur pour modéliser le sol, et le système discret ou continu pour modéliser la structure :** ici on peut citer les travaux de Dawkins et *al.* [28], Yuan et Walker[92], Hindy et Novak[40 dans 73], Wong et Weidlinger[41 dans 73], Krauthammer et *al.* [42 dans 73], et Weidlinger et Hinman[43 dans 73] qui ont utilisé le modèle discret et Costantino et Vey[44 dans 73], Muleski et *al.* [45 dans 73], Muleski et Ariman[46 dans 73], Takada et Tanabe[47 dans 73] et Manolis et Beskos[56] qui ont utilisé, quant à eux, le système continu.

**I.d/- Les méthodes analytiques (dynamiques) :** qui sont bien adaptées pour l'analyse des problèmes de pipelines et les tunnels circulaires, implantés dans un milieu élastique infini ou semi-infini. Les principales applications ont été les contributions de Garnet et Crouzet-pascal[33], Lee et Trifunac[1 dans 74], EL Akily et Datta[31], Datta et Shah[26], Wong et *al.* [91], Datta et *al.* [27], Balendra et *al.*[11], O'Leary et Datta[56 dans 73], Datta et *al.*[15 dans 27], et Wong et *al.* [91]. Les résultats de l'application de ces méthodes analytiques sur les problèmes bi- ou tridimensionnels sont très utiles pour la compréhension du comportement des structures enterrées soumises à des excitations sismiques.

**II- Les méthodes expérimentales :** Dans cette famille on peut trouver les travaux de Young et Murphy, Bustamante, Bulson, Balsara, [27, 28, 29, 30 dans 73 respectivement], Okamoto et Tamura[63], Goto et *al.*, Howard et Ibanez, Simonis et Nash, Nash et *al.*, Hamada, Tamura et *al.*, et Chen et *al.*[31,32,33,34,35,36,37 dans 73 respectivement].

**III- Les méthodes numériques :** Pour cette famille on cite :

**III.a/- Les méthodes numériques basées sur la discretisation du domaine analysé :** telles que les méthodes des différences finies (M.D.F.) et des éléments finis (M.E.F.) dans les domaines fréquentiel ou temporel. Ces méthodes modélisent le sol et la structure en un problème bi- ou tridimensionnel. De la panoplie des travaux qui ont été effectués, on cite, les travaux de Ang et Newmark [59,60 dans 74], Wilkins et *al.* [61 dans 74], et Robinson[62 dans 74], qui ont appliqué la méthode des différences finies, alors que Farhoomand et Wilson[63 dans 74], Okamoto et Tamura[63], Goto et *al.* [31 dans 74], Yamada[64 dans 74], Howard et Ibanez[32 dans 74], El Tahan et Reddy[65 dans 74], Pelz[66 dans 74], Hwang et Lysmer[41],

Lysmer[41], Gomez-Masso et *al.* [68 dans 74], Nelson et Gong[69 dans 74], Gomez-Masso et Attala[70 dans 74], Moness et Merrit[71 dans 74], Chen et *al.* [37 dans 74], Savidis et *al.* [72 dans 74], et Navarro[73 dans 74], ont utilisé la méthode des éléments finis.

**III.b/- La méthode des équations intégrale aux frontières (M.E.I.F) :** méthode numérique traitant généralement les problèmes linéaires, et qui nécessite seulement la discrétisation de la frontière du domaine analysé. Cette méthode peut être utilisée pour modéliser le sol et la structure dans les domaines fréquentiel ou temporel. Plusieurs problèmes bi- ou tridimensionnel traitant l'analyse dynamique des structures souterraines ont été résolus par la méthode des équations intégrales. Citons les travaux de Manolis et Beskos[56], Kobayashi et Nishimura[47], Kobayashi[48], Vardoulakis et *al.*[78], Kitahara et *al.*[45], Wang et Banerjee[12 dans 91], Von Estorff et *al.*[86], Stamos et Beskos[72], Luco et de Barros[52], et Stamos et *al.*[70,71,72].

**III.c/- La M.E.F. couplée à d'autres méthodes numériques ou analytiques :** la méthode des éléments finis utilisée pour modéliser la structure ou, la structure et une portion du sol environnant, est couplée à une méthode numérique (la M.D.F. ou la M.E.I.F) ou à une méthode analytique, pour modéliser le champ éloigné. Les schémas hybrides combinant la M.E.F. avec une méthode analytique-numérique (Gupta et *al.* [87 dans 74]), une méthode analytique (Datta et *al.*[87] et Wong et *al.*[13 dans 91]) ou la M.D.F. (Chen et Krauthammer[89,90 dans 73]) ont été appliqués sur les structures enterrées. Récemment la méthode des éléments finis (M.E.F.) est plus fréquemment combinée à la méthode des éléments de frontières (B.E.M.) dans le domaine temporel, notamment par Von Estorff et Kausel[79], Antes[2], Von Estorff et Antes[81], Von Estorff et *al.* [86] et Stamos et *al.*[73], qui ont appliqué ce schéma hybride aux tunnels bidimensionnels. Liu et *al.* [51] ont utilisé le schéma hybride M.E.F./B.E.M. dans le domaine fréquentiel pour l'analyse des systèmes de tuyauteries et les tunnels tridimensionnels. Finalement on peut mentionner le schéma hybride M.E.F./B.E.M. spécial de Uderwood et Geers[77], et Mathews et Geers[37 dans 77] pour l'analyse dynamique des plaques cylindriques et sphériques souterraines.

Des huit catégories énumérées ci-dessus sept d'entre elles prennent en considération le phénomène d'interaction sol-structure. Quoique les catégories (I.b) et (I.c) tiennent compte de l'interaction sol-structure d'une manière approximative, puisqu'elles modélisent le sol par un système masse, ressort et un amortisseur, ces dernières sont généralement des caractéristiques difficiles à déterminer. Les méthodes expérimentales sont sans doute celles qui nous fournissent les résultats les plus crédibles, mais nécessitent un investissement énorme en temps et en moyens matériels et humains. Les méthodes analytiques nous donnent elles aussi des résultats intéressants, mais montrent leurs limites dès que la géométrie ou le comportement du problème analysé deviennent compliqués, ce qui rend leur domaine d'application très restreint. Reste les méthodes numériques citées dans les catégories (III.a), (III.b) et (III.c) qui sont celles qui nous offrent le compromis le plus optimal entre les

résultats qu'elles nous fournissent et le temps et les moyens mis en œuvre pour l'analyse du problème

## **Organisation et objectif de l'étude :**

Dans le présent travail, nous allons étudier les effets d'interactions dynamiques dans les systèmes sol-tunnel, dus aux trafics urbains. Le système considéré dans cette étude est constitué d'une route urbaine se trouvant en surface libre et d'un tunnel construit en dessous, à une profondeur ( $d$ ). Ce système est sollicité par différents types de chargements harmoniques qui modélisent les charges dues aux trafics routier et souterrain. Le problème ainsi défini est résolu numériquement par la méthode des équations intégrales aux frontières (M.E.I.F.) dans le domaine des fréquences. L'étude est basée sur le concept de la sous-structuration, qui permet de mettre en évidence l'existence de deux milieux différents avec des caractéristiques géométriques et mécaniques différentes, à savoir le sol semi-infini et le domaine borné qui représente la structure du tunnel.

Le présent travail est organisé en cinq chapitres principaux, dont le premier est cette introduction générale.

Le rappel de quelques équations de l'élastodynamique, auxquelles nous ferons appel dans cette étude, les fondements théoriques de la méthode des équations intégrales aux frontières et les domaines d'application de cette méthode, en sont les principaux points abordés dans le deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre, un exposé détaillé de la méthode des équations intégrales aux frontières dans le domaine des fréquences pour le cas de l'élément constant et de l'élément quadratique est présenté, dans lequel une attention particulière pour le calcul des intégrales élémentaires singulières et le traitement de coins pour le cas de l'élément quadratique est donnée. Des notions sur le concept de la sous-structuration ont été aussi mises en exergue, dans ce chapitre.

Dans le chapitre quatre, la méthode des éléments de frontières dans le domaine des fréquences est appliquée pour modéliser le comportement dynamique du système sol-tunnel. Le concept de la sous-structuration est incorporé dans la modélisation, ce qui nous a permis d'obtenir deux systèmes d'équations algébriques, modélisant chacun les comportements du sol semi-infini et de la structure du tunnel. Ensuite, ces deux systèmes d'équations sont couplés en imposant les conditions d'équilibre et de compatibilité au niveau de l'interface sol-tunnel.

Le chapitre cinq concerne la partie applications dans cette étude. En effet, trois applications principales ont été menées dans cette section. La première, consiste en l'étude comparative des performances numériques de la méthode des éléments de frontières pour les deux cas d'élément constant et d'élément quadratique. La deuxième application traite de l'influence de

la profondeur d'enterrement ( $d$ ) du tunnel, sur les déplacements verticaux de quelques points typiques du système soumis à trois cas de chargements dynamiques. La troisième application porte sur l'étude de l'influence du rapport des rigidités du sol sur celle du tunnel ( $E_s/E_t$ ), sur la réponse du système sol-tunnel exprimée en terme des déplacements.

Enfin, une conclusion générale, dans laquelle les résultats obtenus et des recommandations pour des travaux futurs sont discutés, vient clôturer le présent travail.

**GENERALITES SUR L'ELASTODYNAMIQUE  
ET FONDEMENTS THEORIQUES  
DE LA M.E.I.F.**

## **CHAPITRE 2**

# **GENERALITES SUR L'ELASTODYNAMIQUE ET FONDEMENTS THEORIQUES DE LA M.E.I.F.**

---

## **2.1 Introduction**

Les vibrations des structures engendrées par l'action de séismes, de trafic routier ou de machines vibrantes constituent un risque certain contre leur stabilité, et un danger potentiel pour l'homme. Plusieurs techniques de calcul permettant l'analyse du comportement dynamique de ces structures ont été développées. Les plus intéressantes sont les méthodes numériques qui permettent la résolution des équations différentielles gouvernantes d'une manière correcte et couvrent un domaine d'application très vaste. Parmi ces méthodes, on cite, la méthode des équations intégrales aux frontières particulièrement utilisée pour traiter les problèmes linéaires non bornés.

L'origine de la formulation dynamique des équations intégrales [11] peut être trouvée dans Love's integral identity (1904). Cependant la discrétisation de l'équation intégrale et par conséquent la méthode des éléments de frontières directe telle qu'on la connaît aujourd'hui, est initialement présentée par Cruze et Rizzo [24]. Plusieurs documents utilisant cette méthode en élastodynamique ont été publiés depuis. Cruse et Rizzo [25], et Manolis et Beskos [56], ont utilisé la transformée de Laplace et ont travaillé dans le domaine transformé. Niwa, Kobayashi et Nishmura [47] ont utilisé la transformée de Fourier. Quant à Cole, Kosloff, et Minster [22] ils l'ont appliquée dans le domaine temporel. L'étude comparative des ces trois approches est faite par Manolis[53].

Dans ce chapitre, nous allons faire une présentation sommaire de quelques équations de l'élastodynamique, auxquelles nous ferons appel lors des développements dans les chapitres suivants. Ensuite les fondements théoriques de la méthode des équations intégrales aux frontières seront traités, complétés par une discussion générale des domaines de son application.

## 2.2 Hypothèses de travail

Tout au long de ce travail les hypothèses exposées ci-après restent valables :

- Le milieu étudié est homogène, linéaire, élastique et isotrope.
- Les déplacements sont considérés petits.
- Toutes les équations seront développées pour le cas bidimensionnel (cas des déformations planes).

## 2.3 Equations gouvernantes

Pour une densité d'effort volumique  $f(x,t)$  exercée sur un solide  $\Omega$  de masse volumique  $\rho$  et délimité par une frontière  $\Gamma$  (Figure 2.1).

Les équations d'équilibre dynamique sont données par :

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

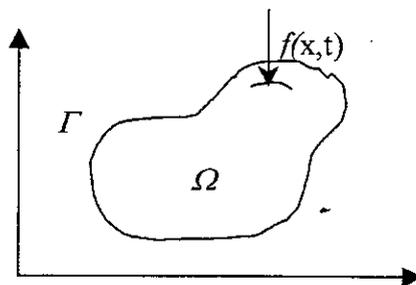


Figure 2.1

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont :

- **Conditions initiales**

$$\begin{cases} u_i(x, t) = u_i^0(x) \\ \dot{u}_i(x, t) = v_i^0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour  $t = t_0$  et sur  $(\Gamma + \Omega)$ .

- **Conditions aux limites**

- Essentielles :

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.3a)$$

- Naturelles

$$q_i(x, t) = \sigma_{ij} n_j = \bar{q}_i(x, t) \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.3b)$$

$$\text{où } \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$$

Avec

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes.

$u_i(x, t)$  : vecteur déplacements.

$q_i(x, t)$  : vecteur tractions.

$\Gamma_1$  : partie de la frontière où les conditions cinématiques sont imposées.

$\Gamma_2$  : partie de la frontière où les tractions sont imposées.

L'équation constitutive du matériau est donnée par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

En se basant sur les notations suivantes :

$\mathbf{u}$  : vecteur déplacements

$\mathbf{n}$  : vecteur normal unitaire extérieure à  $\Omega$  sur la frontière  $\Gamma$ .

$\mu$  et  $\lambda$  : constantes de Lamé.

$\partial$  : opérateur de dérivée partielle.

$\nabla$  : opérateur gradient.

$\wedge$  : opérateur désignant le produit vectoriel.

$\cdot$  : produit scalaire.

$\omega$  : désigne la pulsation.

Le vecteur tractions  $\mathbf{q}^n(\mathbf{x}, \omega)$  appliqué à une facette de normale  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  s'exprime en fonction du vecteur déplacements est donné par la relation[15] :

$$\mathbf{q}^{(n)} = \lambda \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + 2\mu \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} + \mu \mathbf{n} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad (2.5)$$

Les équations d'équilibre (2.1) combinées aux équations constitutives (2.4), ainsi qu'aux équations cinématiques, donnent les équations du mouvement, appelées également « équations de Navier-Cauchy » :

$$(c_1^2 - c_2^2)u_{i,jj} + c_2^2 u_{i,jj} + f_i = \ddot{u}_i \quad (2.6)$$

$c_1$  et  $c_2$  sont les vitesses de propagation des ondes de cisaillement (S) et de compression (P) respectivement. Elles sont données par :

$$\begin{cases} c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho \\ c_2^2 = (\mu / \rho) \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans le cadre de notre travail, nous nous intéresserons qu'aux cas où les excitations sont de nature harmonique, caractérisées par la pulsation  $\omega$ . La densité volumique de force peut s'écrire alors comme :

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \quad (2.8)$$

On considère aussi que les conditions aux limites ont la même dépendance en temps. Le champ de déplacements et le champ du tenseur de contraintes peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) = u'(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \\ \sigma(\mathbf{x}, t) = \sigma'(\mathbf{x}, t) + \sigma(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $u(\mathbf{x})$  et  $\sigma(\mathbf{x})$  sont des fonctions qui peuvent être complexes.

$u'(\mathbf{x}, t)$  et  $\sigma'(\mathbf{x}, t)$  représentent la solution transitoire.

En injectant les relations (2.9) dans (2.1), on aura les équations d'équilibre pour l'état stationnaire  $[u(x), \sigma(x)]$  :

$$\sigma_{ij,j}(x) + \rho f_i(x) + \rho \omega^2 u_i(x) = 0 \quad (2.10)$$

En général, la solution transitoire tend vers zéro et se dissipe complètement au bout d'un certain temps. A partir de ce moment là, la solution est représentée uniquement par la solution stationnaire. Notons aussi, que les conditions aux limites sont attachées à la solution stationnaire  $[u(x), \sigma(x)]$  ; et la solution transitoire vérifie les équations d'équilibre homogènes, les conditions aux limites homogènes et les conditions initiales.

Compte tenu de ce qui précède, le problème aux conditions aux limites et initiales d'origine est remplacé par un problème aux conditions aux limites pures.

## 2.4 Théorème de réciprocité

L'extension du théorème de Betti-Rayleigh pour l'élastodynamique donne le théorème de réciprocité.

Pour un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , considérons le cas d'un problème harmonique qui admet les solutions stationnaires  $[u(x), \sigma(x)]$  et  $[u^1(x), \sigma^1(x)]$ . Alors en utilisant le théorème de réciprocité pour ces deux états élastodynamiques, on obtient :

$$\int_{\Gamma} q^{(n)}(x) u^1(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f(x) u^1(x) d\Omega = \int_{\Gamma} q^{1(n)}(x) u(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f^1(x) u(x) d\Omega \quad (2.11)$$

Où,  $\mathbf{n}$  représente la normale unitaire, extérieure à  $\Omega$ , sur la frontière  $\Gamma$ .

## 2.5 Formulation intégrale :

L'idée de base consiste à remplacer les solutions de l'équation de l'élastodynamique par des solutions particulières dites *solutions fondamentales*, connues aussi sous le nom des *fonctions de Green*.

Pour le cas harmonique, la fonction de Green du milieu infini correspond à un champ de forces volumique:

$$\rho f(x) = \delta(x - \xi) e_i \quad (2.12)$$

où

$\delta$  : représente l'impulsion de Dirac.

$e_i$  : vecteur unitaire désignant la direction  $i$ .

est notée  $U_{ij}(x, \xi, \omega)$  et exprime le déplacement complexe dans le sens  $j$  au point  $x$  due à une force unitaire concentrée au point  $\xi$  et dirigée dans le sens  $i$  (Figure 2.2) .

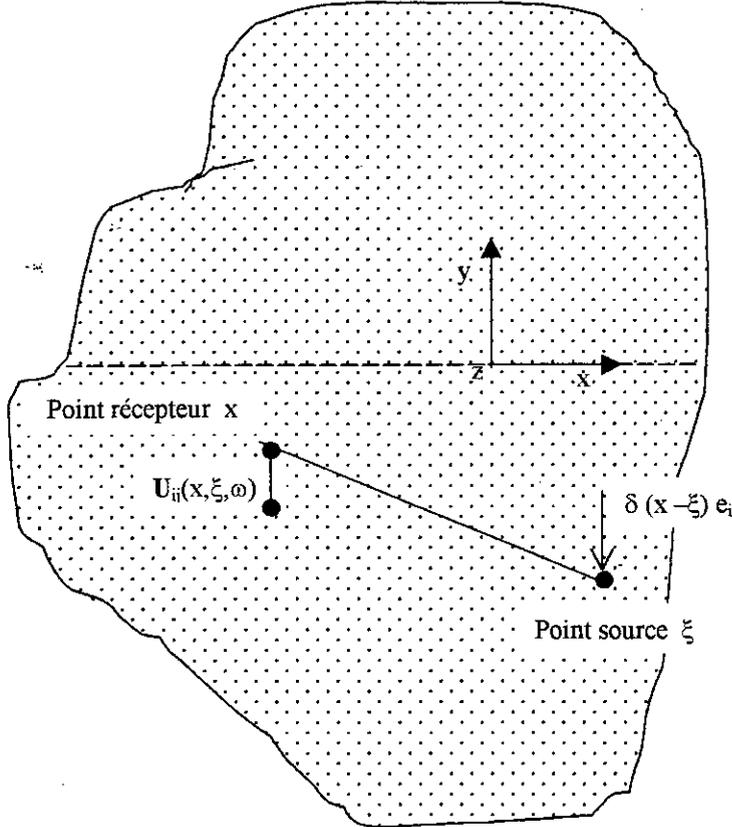


Figure 2.2 : Fonction de Green du milieu infini

La traction sur une facette de normale  $\mathbf{n}(x)$  associé à  $U_{ij}(x, \xi, \omega)$  par la relation (2.5) est notée par  $T_{ij}^{(n)}(x, \xi, \omega)$ .

Appliquons maintenant, le théorème de réciprocité (2.11) à l'état élastodynamique  $[u(x), \sigma(x)]$  et à celui défini par la fonction de Green  $U_{ij}(x, \xi, \omega)$ . Nous aurons :

$$I(\xi)u_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \{U_{ij}(x, \xi, \omega)q_j(x, \omega) - T_{ij}^{(n)}(x, \xi, \omega)u_j(x, \omega)\} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho U_{ij}(x, \xi, \omega) f_j(x, \omega) d\Omega \quad (2.13)$$

où 
$$I(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in \Omega \\ 0 & \xi \notin \Omega \end{cases}$$

## 2.6 Equations intégrales régularisées

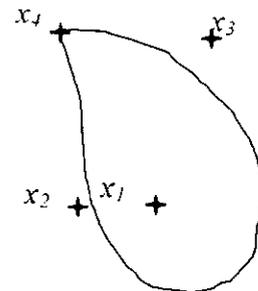
La formulation (2.13) n'est à priori valable que pour  $x \in \Omega$ . Il reste donc à formuler une équation intégrale aux frontières, portant sur les valeurs de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{q}$  à la frontière  $\Gamma$ . Toutefois, il s'avère que pour les problèmes bi- ou tridimensionnels, les solutions fondamentales présentent une singularité non intégrable en  $x \in \Gamma$ . Il n'est donc pas correct d'écrire directement (2.13) pour  $x \in \Gamma$ . L'obtention d'une équation intégrale aux frontières à partir de (2.13) repose sur le passage à la limite, permettant ainsi de tenir compte du caractère singulier de la solution fondamentale employée.

En écrivant la formule (2.13) pour un point  $\xi$  appartenant à la frontière  $\Gamma$  et pour un domaine  $\Omega$  auquel on extrait un demi-cercle  $C(\xi, \varepsilon)$  de rayon  $\varepsilon$  et de centre  $\xi$  (figure 2.3) et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient :

$$C_{ij}(\xi)u_i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \{U_{ij}(x, \xi, \omega)q_j(x, \omega) - T_{ij}^{(n)}(x, \xi, \omega)u_j(x, \omega)\}d\Gamma + \int_{\Omega} \rho U_{ij}(x, \xi, \omega)f_j(x, \omega)d\Omega \quad (2.14)$$

$C_{ij}(\xi)$  : coefficient dépendant de la géométrie locale de la frontière et de l'expression de  $T_{ij}^{(n)}(x, \xi, \omega)$  au voisinage de  $\xi$ .

$$C_{ij}(\xi) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } \xi = x_1 \\ \frac{1}{2} \delta_{ij} & \text{si } \xi = x_2 \\ 0 & \text{si } \xi = x_3 \end{cases}$$



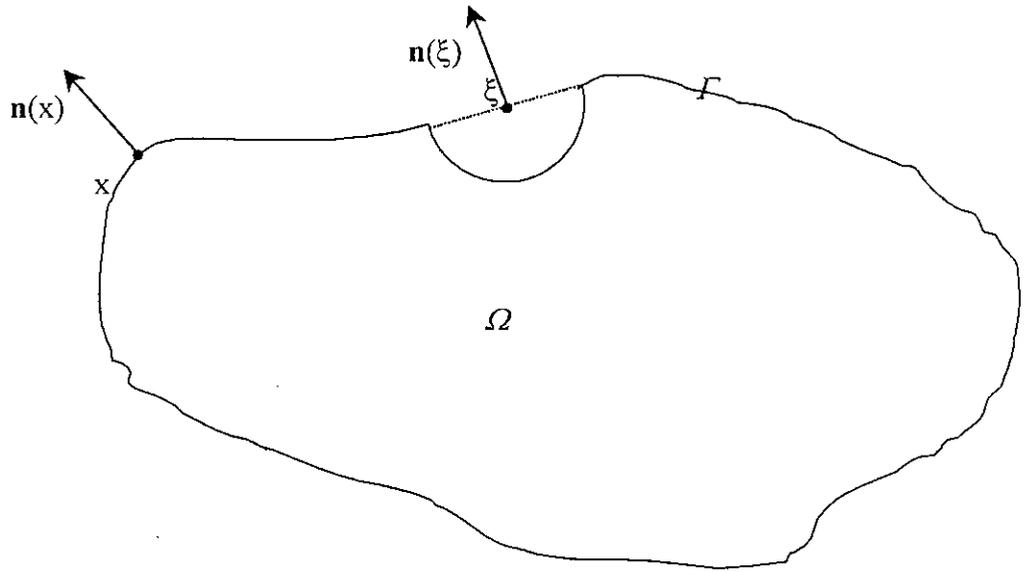


Figure 2.3 : voisinage d'exclusion  $v_\epsilon(\xi)$  et autres notations pour le passage à la limite

La résolution de l'équation (2.14) qui, souvent ne peut être que numérique, donne le déplacement de tout point de la frontière  $\Gamma$ . On peut calculer alors les déplacements et les contraintes en n'importe quel point intérieur au domaine.

L'intérêt numérique de cette méthode, est donc de transformer un problème sur un domaine  $\Omega$ , en un problème sur la frontière  $\Gamma$ . La dimension du problème est donc diminuée de un.

## 2.7 Domaines d'application de la B.E.M.

Les méthodes des équations intégrales permettent principalement la résolution des problèmes régis par des équations aux dérivées partielles linéaires : équations de Laplace ou de Poisson (Problème de potentiel scalaire d'origines physiques très nombreuses), équations des ondes en régime fréquentiel ou temporel, équations de l'élastostatique ou de l'élastodynamique linéaire, etc....

### a/- Mécanique de la rupture

C'est un domaine où la méthode des équations intégrales trouve son application et son efficacité, et ce, grâce à son aptitude à bien modéliser les problèmes liés à la mécanique de la rupture fragile (solide fissuré, étude de l'avancement du front de fissure), contrairement à la méthode des éléments finis qui trouve des difficultés liées principalement à la nécessité de raffiner le maillage autour du front de fissure.

## **b/- Problèmes extérieurs**

La possibilité de pouvoir ramener la résolution d'un problème extérieur sur un support géométrique borné (La frontière  $I$ ) a une grande importance pratique. La prise en compte des conditions à l'infini est exacte, et ne nécessite aucun des artifices auxquels les méthodes des éléments finis ou de différences finies, qui manipulent des domaines bornés, sont contraintes de faire appel: domaine d'étude artificiellement borné, simulation des conditions de radiation par des frontières absorbantes. Les limitations et les difficultés que ces artifices entraînent sont absentes des méthodes intégrales.

Les problèmes faisant intervenir des milieux considérés comme infinis ou semi-infini sont donc prioritairement traités par équations intégrales, notamment en dynamique. Ceci correspond à des applications pour l'acoustique (Propagation en milieu ouvert, aérien ou sous marin), La simulation des ondes élastiques (Exemples : en géophysique, sismologie et génie parasismique), ainsi que tous les problèmes couplés dont l'un des composants occupe un domaine infini (Couplage sol/structure ou sol/fluide/structure).

## **c/- Problèmes avec non linéarité**

Bien que les formulations des équations intégrales sont intimement liées à la présence d'un opérateur différentiel linéaire, cela n'exclut pas la possibilité de traiter certains problèmes non linéaires ; comme les problèmes élastoplastique.

La résolution de ce type de problèmes est assimilée à la résolution d'une succession de problèmes linéaires.

## **d/- Domaines variables ou inconnus**

L'application de la B.E.M. dans les domaines variables ou inconnus est récente, des progrès restent à faire. Ce que l'on peut dire, c'est qu'elle peut facilement s'accommoder dans ce domaine, puisque plusieurs investigations sont lancées dans divers axes de recherche, liés principalement aux phénomènes de propagations de fissures ou de zones d'endommagement, ou encore les problèmes à surface libre inconnue (Simulation de nappes aquatiques, souterraines),etc....

## **2.8 Inconvénients de la B.E.M**

Jusqu'à présent nous n'avons cité que les avantages de la méthode des équations intégrales, ne pas parler des inconvénients de cette méthode serait un manquement à l'objectivité. Comme toute méthode numérique, la méthode des équations intégrales aux frontières présente quelques inconvénients, dont les plus importants sont :

- La singularité de la solution fondamentale, qui constitue le principal inconvénient de l'usage de la méthode des équations intégrales. Car pour ce cas les fonctions à intégrer varient fortement dans l'intervalle d'intégration et la méthode d'intégration de Gauss classique s'avère peu précise, ce qui nous oblige à utiliser d'autres méthodes d'intégrations spéciales ou à essayer d'enlever la singularité et effectuer l'intégration analytiquement, chose qui n'est pas toujours facile.
- Elle conduit à des matrices pleines et non symétriques, donc exige l'adoption d'une technique de résolution de systèmes non symétrique.
- La disponibilité de la solution fondamentale.
- Difficultés de la prise en charge des domaines hétérogènes.

## **2.9 Conclusion**

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre en plus des équations de l'élastodynamique, c'est que le principe de la méthode des équations intégrales aux frontières (M.E.I.F.) consiste à transformer l'équation de champ, relative à une fonction inconnue à l'intérieur du domaine et sur la frontière de ce domaine (Champ de déplacement et champ de contraintes pour notre cas), en une équation intégrale reliant la fonction inconnue et peut-être certaines de ses dérivées, aux conditions aux limites données sur la frontière.

**LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES  
DANS LE DOMAINE DES  
FREQUENCES**

## **CHAPITRE 3**

# **LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES**

---

### **3.1 Introduction :**

La méthode des équations intégrales aux frontières dans le domaine des fréquences couvre un large domaine d'application. Elle est particulièrement recommandée pour traiter les problèmes linéaires non bornés. Sa formulation est plus allégée, puisque elle ne tient pas compte de l'effet de causalité, ce qui rend les équations gouvernantes sous une forme statique. De plus, le comportement visco-élastique du matériau peut être facilement incorporer dans la formulation.

Dans ce chapitre la formulation de la méthode des équations intégrales aux frontières dans le domaine des fréquences est présentée. La méthode est développée pour le cas de l'élément constant et l'élément quadratique. Une attention particulière est donnée pour le calcul des intégrales élémentaires singulières et le traitement de coins pour le cas de l'élément quadratique. Enfin nous terminons par un exposé succinct de la sous-structuration.

### 3.2 Formulations intégrales dans le domaine des fréquences :

Considérons les problèmes dynamiques pour lesquels toutes les variables varient sinusoidalement dans le temps avec une pulsation fixe  $\omega$ .

L'équation intégrale s'écrit alors [88] :

$$c_{ik}^i u_k^i(\xi, \omega) = \int_{\Gamma} \{U_{ik}^*(x, \xi, \omega).q_k(x, \omega) - T_{ik}^*(x, \xi, \omega).u_k(x, \omega)\} d\Gamma \quad (3.1)$$

$\xi$  : est un point de la frontière où l'on applique la force centrée.

$x$  : est un point quelconque de la frontière.

$u_k(x, \omega), q_k(x, \omega)$  : sont des variables à valeurs complexes, transformées de Fourier (ou de Laplace) de  $u_k(x, t)$  et  $q_k(x, t)$  respectivement.

$\omega$  : étant la pulsation, variable conjuguée du temps.

$U_{ik}^*, T_{ik}^*$  : sont les solutions fondamentales en termes de déplacements et de contraintes respectivement, associées au plan infini dans le domaine des fréquences. Elles sont données par[88] :

$$U_{ik}^* = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \left[ \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 K_2 \left( \frac{s.r}{c_1} \right) - K_2 \left( \frac{s.r}{c_2} \right) \right] r_j r_{j,k} - \left[ \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{s.r} K_1 \left( \frac{s.r}{c_1} \right) - \frac{c_2}{s.r} K_1 \left( \frac{s.r}{c_2} \right) - K_0 \left( \frac{s.r}{c_2} \right) \right] \delta_{ik} \right\} \quad (3.2)$$

$$T_{ik}^* = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s}{c_1} \left[ \left[ 2 \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 - 1 \right] r_j n_k - 2 \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 r_j r_{j,k} r_n \right] K_1 \left( \frac{s.r}{c_1} \right) + \frac{s}{c_2} [2r_j r_{j,k} r_n - \delta_{ik} r_n - r_k n_j] K_1 \left( \frac{s.r}{c_2} \right) + \frac{2}{r} \left[ K_2 \left( \frac{s.r}{c_2} \right) - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 K_2 \left( \frac{s.r}{c_1} \right) \right] [r_k n_j + r_j n_k + \delta_{ik} r_n - 4.r_j r_{j,k} r_n] \right\} \quad (3.3)$$

$c_1, c_2$  représentent les vitesses de propagation des ondes P et S respectivement.

$\rho$  : masse volumique du milieu.

$$s = i.\omega$$

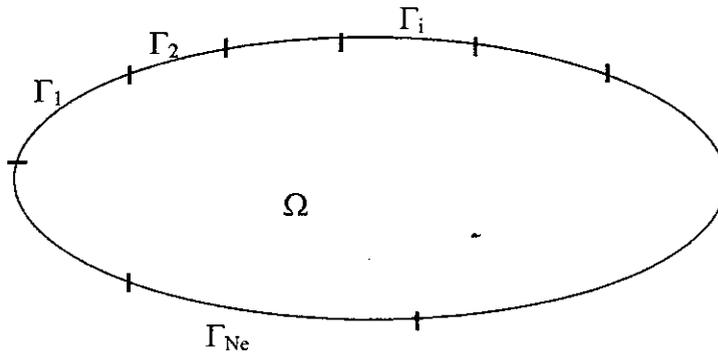
$\mathbf{n}(n_1, n_2)$  : vecteur unitaire extérieur normal à la frontière  $\Gamma$ .

$K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  et  $K_2(z)$  : sont des fonctions de Bessel modifiés d'ordre 0, 1 et 2 respectivement.

### 3.3 Représentation de la géométrie et discrétisation des inconnues $\mathbf{u}$ , $\mathbf{q}$ :

Contrairement à la méthode des éléments finis qui est une méthode d'approximation par sous-domaines, et qui nécessite donc une subdivision du domaine  $\Omega$  à étudier en un nombre fini de sous-domaines  $\Omega_e$  de géométrie simple appelés "éléments", les équations intégrales aux frontières limite seulement notre tâche à discrétiser la frontière  $\Gamma$ .

Le point de départ de la discrétisation consiste à subdiviser la frontière  $\Gamma$  en  $N_e$  éléments de frontière  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{N_e}$  disjoints, de telle sorte que l'union de tous les éléments constitue une frontière  $\Gamma_i$  aussi proche que possible de la frontière initiale  $\Gamma$  figure 3.1.



**Figure 3.1** : Discrétisation de la frontière

Sur Chaque élément l'équation intégrale (3.1) est écrite alors comme :

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \mathbf{u} . d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* \mathbf{q} . d\Gamma \tag{3.4}$$

Le calcul effectif de ces dernières repose sur l'approximation de la géométrie de l'élément et des inconnues  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{q}$  sur l'élément.

### **3.3.1 Description géométrique des éléments par nœuds et fonctions de forme :**

La description des éléments reprend les mêmes considérations qui ont conduit aux représentations des domaines par éléments finis. Chaque élément de frontière est défini par un nombre fini de nœuds géométriques qui constituent les points dans lesquels la géométrie de la frontière est approximée. Les éléments de frontière reposent donc sur la représentation par nœuds et fonctions de forme, d'où l'intérêt pratique de l'introduction de la notion de l'élément de référence.

#### **Élément de référence :**

Pour un élément de frontière  $\Gamma_e$  contenant  $N_n$  nœuds, sa description géométrique est définie par le paramétrage suivant :

$$\xi \in \Delta_e \rightarrow \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\xi) \mathbf{x}_i \quad (3.5)$$

$\Delta_e$  : élément de référence.

$\mathbf{x}^i$  : nœud géométrique  $\mathbf{x}^i \left\{ \begin{array}{l} x_i \\ y_i \end{array} \right\}$

$N_i$  : fonction de forme (habituellement polynomiale), vérifiant

$$N_p(\xi^q) = \delta_{pq} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N_e} N_i(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \Delta_e \quad (3.6)$$

Ce formalisme peut définir sans difficulté des éléments de frontières courbes. D'autres part les intégrales élémentaires sont calculées au moyen du changement de variable inverse (3.5), ainsi tous les éléments sont rapportés au même élément de référence.

### 3.3.2 Discrétisation des variables $\mathbf{u}$ et $\mathbf{q}$ :

Sur chaque élément de frontière  $\Gamma_e$  une famille de points appelés *nœuds d'interpolation* est choisie. Ces nœuds représentent les points de la frontière où les variables  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{q}$  sont approximées. A chacun de ces nœuds, on associe une fonction d'interpolation  $\phi(\xi)$ .

L'approximation de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{q}$  sur l'élément  $\Gamma_e$  contenant  $N_n$  nœuds d'interpolations est donnée par :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\xi) u^i \quad \text{et} \quad \mathbf{q} = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\xi) q^i \quad (3.7)$$

$(u^i, q^i)$  : sont des valeurs nodales de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{q}$ , et les fonctions d'interpolation  $\phi_i(\xi)$  ont les mêmes propriétés que les fonctions de forme  $N_i(\xi)$ .

#### Remarque:

Dans la plupart des cas pratiques, et plus particulièrement pour notre cas les nœuds géométriques sont aussi pris comme nœuds d'interpolations ; les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation sont donc identiques.

$$N_i(\xi) = \phi_i(\xi) \quad (3.8)$$

Ce type de représentation, est dit **isoparamétrique**.

Le type de fonctions de forme est lié au nombre de nœuds choisi pour décrire l'élément et par conséquent au type d'élément.

Dans le présent travail la méthode sera développée pour deux types d'éléments :

- Élément constant
- Élément quadratique.

### 3.4 Élément constant :

L'élément constant est défini par un seul nœud à deux degrés de liberté. Il est localisé au milieu de l'élément. Le champ de déplacements  $\mathbf{u}$  et champ de tractions  $\mathbf{q}$  sont supposés constants sur tout l'élément Fig(3.2) :

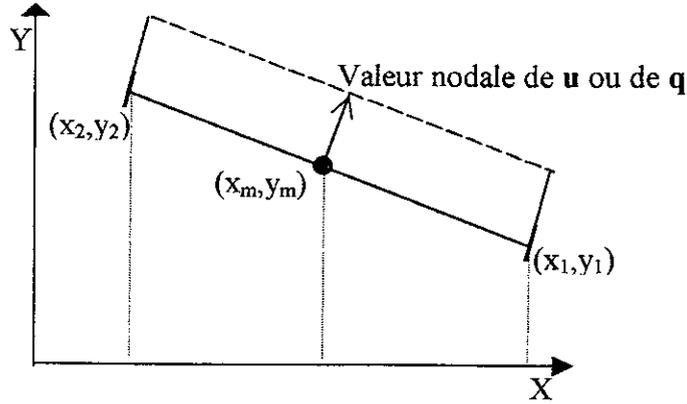


Figure 3.2 : Elément constant

Pour un solide  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  représenté sur la figure 3.1 discrétisé en  $N_e$  éléments constants l'équation intégrale (3.4) s'écrit :

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* . d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* . d\Gamma \right\} \mathbf{q}^j \quad (3.9)$$

ou encore :

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{N_e} \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{q}^j \quad (3.10)$$

Avec :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* . d\Gamma \\ \mathbf{G}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}^* . d\Gamma \end{cases} \quad (3.11)$$

Qui sont des matrices élémentaires de dimension  $(2 \times 2)$  dont le calcul numérique est traité dans les paragraphes suivants.

Et

$$\mathbf{c}^i = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

L'équation (3.9) peut être écrite d'une manière plus compacte si on adopte la notation suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij} & \text{si } i \neq j \\ \mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{c}^i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.13)$$

D'où l'équation (3.9) qui s'écrit comme :

$$\sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{q}^j \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) relie les valeurs de  $\mathbf{u}$  du nœud  $i$  aux valeurs de  $\mathbf{u}$  et de  $\mathbf{q}$  de tous les nœuds de la frontière, y compris le nœud  $i$ , et correspond au cas où le point de collocation est le nœud  $i$ . Comme tous les nœuds d'interpolation sont pris pour points de collocations, et sachant que le nombre de nœuds total  $N_{nt} = N_e$  ( $N_e$  : Nombre d'éléments), on obtient donc,  $2N_e$  équations scalaires. Ce système prend la forme matricielle suivante:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (3.15)$$

Où

$\mathbf{H}$  et  $\mathbf{G}$  sont des matrices globales pleines non symétriques de dimension  $2N_e \times 2N_e$ .

$\mathbf{u}$  : vecteur global des déplacements de dimension  $2N_e$

$\mathbf{q}$  : vecteur global des contraintes de dimension  $2N_e$

### 3.5 Élément quadratique

L'élément quadratique est caractérisé par trois (03) nœuds. Chaque nœud contient deux (02) degrés de liberté (cas de déformations planes). Il peut représenter outre des segments rectilignes, les morceaux de parabole fig(3.3)

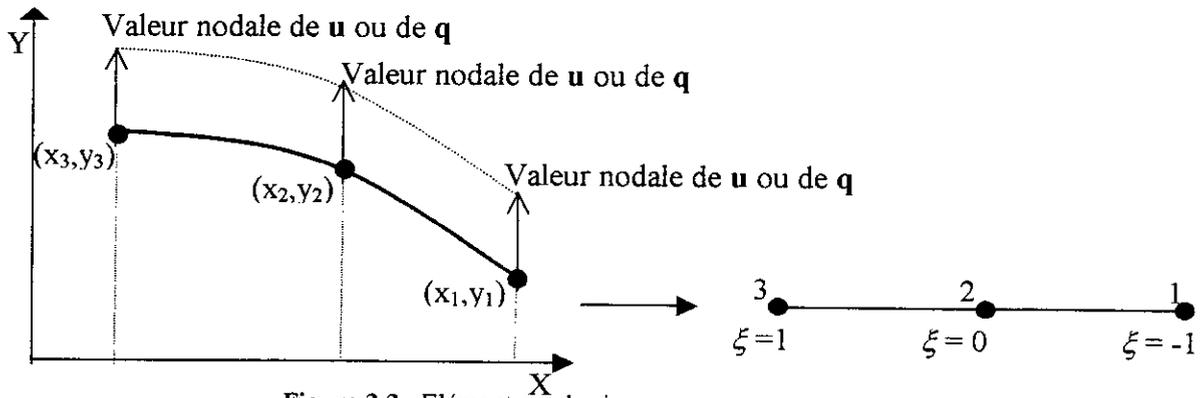


Figure 3.3 : Élément quadratique

Le paramétrage (3.5) utilise sur chaque élément des fonctions de forme quadratiques qui sont aussi des fonctions d'interpolation.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\phi] \mathbf{u}^j \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \end{Bmatrix} = [\phi] \mathbf{q}^j \quad (3.16b)$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [\phi] \mathbf{x}^j \quad (3.16c)$$

Les fonctions d'interpolation  $\phi_i(\xi)$  sont données en fonction des coordonnées intrinsèques :

$$\begin{cases} \phi_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1) \\ \phi_2(\xi) = (1 - \xi^2) \\ \phi_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour un solide  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  représenté sur la figure (3.1) discrétisé en  $N_e$  éléments quadratiques l'équation intégrale (3.4) s'écrit :

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} [T^*] [\phi] d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} [U^*] [\phi] d\Gamma \right\} \mathbf{q}^j \quad (3.18)$$

Ou :

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{Ne} \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{q}^j \quad (3.19)$$

Ou encore, d'une façon plus compacte :

$$\sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{q}^j \quad (3.20)$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij} & \text{si } i \neq j \\ \mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{c}^i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.21)$$

Tel que :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{ij} = \int_{\Gamma_j} [T^*][\phi] d\Gamma \\ \mathbf{G}^{ij} = \int_{\Gamma_j} [U^*][\phi] d\Gamma \end{cases} \quad (3.22)$$

Qui sont des matrices élémentaires de dimension (2×6).

$\mathbf{c}^i$  : matrice de dimension (2×2), dépendant de la géométrie de structure au nœud  $i$ .

Comme pour l'équation (3.14) pour le cas de l'élément constant, l'équation (3.20) relie les valeurs de  $\mathbf{u}$  du nœud  $i$  aux valeurs de  $\mathbf{u}$  et de  $\mathbf{q}$  de tous les nœuds de la frontière, y compris le nœud  $i$ , et correspond au cas où le point de collocation est le nœud  $i$ . La contribution de tous les nœuds conduit à un système d'équations global qui prend la forme matricielle suivante:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (3.23)$$

Où

$\mathbf{H}$  et  $\mathbf{G}$  : sont des matrices globales de dimension  $2N_n \times 2N_n$  ( $N_n$  : nombre de nœuds) . Ce sont des matrices pleines non symétriques, ne présentant pas de forme particulière. Cela est dû au fait que par l'intermédiaire des solutions fondamentales  $U^*$  et  $T^*$ , tout point de frontière  $\Gamma$  a une influence sur tous les autres points de la frontière, et ce quelque soit la méthode d'interpolation du couple  $(\mathbf{u}, \mathbf{q})$  utilisée.

$\mathbf{u}$  : vecteur global de déplacements de dimension  $2N_n$

$\mathbf{q}$  : vecteur global de contraintes de dimension  $2N_n$

**Remarque :**

Le calcul des éléments de la matrice  $\mathbf{c}^i$  devient difficile lorsque la géométrie de la frontière du domaine étudié présente des coins. Cette difficulté est liée principalement à la singularité de la solution fondamentale  $\mathbf{U}^*$ . Pour cela, un autre moyen pour calculer ces éléments en considérant le déplacement du corps rigide doit être utilisé.

**3.5.1 Calcul du Jacobien de la transformation :**

La transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées intrinsèques est nécessaire, afin de calculer les intégrales de l'équation (3.22). Ceci nécessite donc, le calcul de  $J(\xi)$  Jacobien de la transformation.

Soit un petit élément  $d\Gamma$  dans le plan  $(x, y)$  figure 3.4.

$$d\Gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \tag{3.29}$$

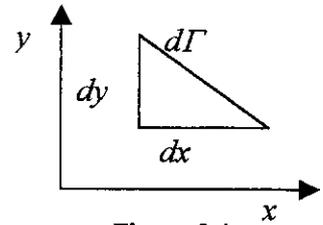


Figure 3.4

ou encore

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \cdot d\xi = |J| \cdot d\xi \tag{3.30}$$

Donc

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \tag{3.31}$$

D'autres part

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot y_i \end{cases} \tag{3.32}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = (x_3 - 2x_2 + x_1)\xi + \frac{x_3 - x_1}{2} = A_1\xi + B_1 \\ \frac{dy}{d\xi} = (y_3 - 2y_2 + y_1)\xi + \frac{y_3 - y_1}{2} = A_2\xi + B_2 \end{cases} \quad (3.33)$$

D'où

$$|J| = \sqrt{(A_1\xi + B_1)^2 + (A_2\xi + B_2)^2} \quad (3.34)$$

Compte tenu de ce qui a été fait jusqu'à présent, les intégrales élémentaires de l'équation (3.22) auront la forme suivante:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^y = \int_{-1}^1 [T^*][\phi]|J|d\xi \\ \mathbf{G}^y = \int_{-1}^1 [U^*][\phi]|J|d\xi \end{cases} \quad (3.35)$$

Dont le calcul explicite est traité dans les prochains paragraphes.

### 3.6 Introduction des conditions aux limites

Celles des composantes de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{u}$  qui sont données par les conditions aux limites, sont remplacées par leurs valeurs dans (3.15) ou (3.23) pour le cas de l'élément constant ou l'élément quadratique respectivement, et les colonnes correspondantes sont envoyées au second membre. L'équation (3.15) et (3.23) prennent alors la forme finale d'un système linéaire carré:

$$\mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (3.36)$$

Dans lequel

$\mathbf{X}$  : désigne le vecteur formé des composantes de  $\mathbf{q}$  et de  $\mathbf{u}$  restées inconnues.

$\mathbf{K}$  : est formée de colonnes de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  associées au composantes de  $\mathbf{X}$ .

$\mathbf{F}$  : est le second membre formé par la somme, changée de signe, des colonnes de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  associées aux composantes connues de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{u}$  multipliées par la valeur de ces dernières.

### **3.7 Résolution du système linéaire :**

La matrice  $\mathbf{K}$  dans (3.36) est généralement pleine non symétrique, ce qui n'est pas le cas pour la M.E.F, qui conduit à des matrices bandes et symétriques. Le système (3.36) est alors classiquement résolu par élimination de Gauss, qui tient compte de la non-symétrie de la matrice  $\mathbf{K}$ . Cette dernière étant transformée en une matrice triangulaire supérieure, ce qui permet ensuite de calculer  $\mathbf{X}$  par remontée.

### **3.8 Post- traitement :**

Après résolution du système (3.36), les valeurs de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{u}$  sont maintenant connues en tout point de la frontière et on peut calculer par exemple le tenseur des contraintes à la frontière ou encore les champs aux points intérieurs.

### **3.9 Calcul des intégrales élémentaires régulières**

Ce cas se présente, lorsque le point de collocation n'appartient pas à l'élément sur lequel on fait l'intégration. Le calcul numérique de ces intégrales repose sur l'utilisation des formules de quadrature par points de Gauss, qui consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction par une somme des valeurs pondérées de la fonction en des points spécifiques appelés points de Gauss.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (3.37)$$

Une liste de points  $\xi_i$  et de poids  $w_i$  correspondant, peut être choisie pour l'intégration des matrices élémentaires à la précision voulue. Le nombre de point de Gauss ( $n$ ) est établie pour chaque type d'élément. En effet, pour le cas de l'élément constant on fixe  $n = 4$  et pour le cas de l'élément quadratique on prend  $n = 10$ .

### **3.10 Calcul des intégrales élémentaires singulières**

Les intégrales élémentaires sont singulières, lorsque le point de collocation appartient à l'élément (le point de collocation est l'un des nœuds de l'élément) sur lequel se fait l'intégration. Les matrices élémentaires seront calculées tout d'abord dans le repère local et ensuite transformées dans le repère global.

Dans le repère local seules  $U_{11}^*$  et  $U_{22}^*$  sont non nulles, toutes les autres composantes restantes sont nulles.

$$\begin{cases} U_{12}^* = U_{21}^* = 0 \\ T_{ij}^* = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \quad (3.38)$$

Les expressions de  $U_{11}^*$  et  $U_{22}^*$  dans le repère local sont :

$$U_{11}^* = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ [K_1(z_1)/z_1 + K_0(z_1)]\alpha^2 - K_1(z_2)/z_2 \right\} \quad (3.39)$$

$$U_{22}^* = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ -\alpha^2 K_1(z_1)/z_1 + K_1(z_2)/z_2 + K_0(z_2) \right\} \quad (3.40)$$

avec  $\alpha^2 = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \quad z_k = \frac{s r}{c_k} \quad (k = 1, 2) \quad s = i \omega$

### 3.10.1 Cas de l'élément constant :

Pour ce cas seules  $G_{11}$  et  $G_{22}$  sont non nulles. Elles s'écrivent comme :

$$G_{11} = \frac{1}{\pi\mu} \int_0^R \left\{ [K_1(z_1)/z_1 + K_0(z_1)]\alpha^2 - K_1(z_2)/z_2 \right\} dr \quad (3.41)$$

$$G_{22} = \frac{1}{\pi\mu} \int_0^R \left\{ -\alpha^2 K_1(z_1)/z_1 + K_1(z_2)/z_2 + K_0(z_2) \right\} dr \quad (3.42)$$

En utilisant la formule de récurrence des fonctions de Bessel [1] suivante :

$$K_n'(z) = -K_{n-1}(z) - n/z K_n(z) \quad (3.43)$$

On peut démontrer que :

$$G_{11} = \frac{1}{\pi\mu} \left\{ \left[ -\alpha^2 \frac{c_1}{s} K_1(z_1) + \frac{c_2}{s} K_1(z_2) \right] + \int_0^R K_0(z_2) dr \right\} \quad (3.44)$$

$$G_{22} = \frac{1}{\pi\mu} \left\{ \left[ \alpha^2 \frac{c_1}{s} K_1(z_1) - \frac{c_2}{s} K_1(z_2) \right] + \alpha^2 \int_0^R K_0(z_2) dr \right\} \quad (3.45)$$

Les intégrales qui apparaissent dans (3.44) et (3.45) ne sont pas singulières. Le résultats analytiques de ces intégrales peuvent être trouvées dans la référence [38].

### 3.10.2 Cas de l'élément quadratique :

Dans ce cas aussi, il est question de calculer les éléments de la matrice élémentaire  $\mathbf{Ge}(2,6)$  seulement, puisque les éléments de la matrice  $\mathbf{He}(2,6)$  sont tous nuls :

La forme générale de la matrice  $\mathbf{Ge}$  s'écrit comme :

$$[\mathbf{Ge}] = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11}^* & 0 \\ 0 & U_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} |J| d\xi \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Ge}(1,2j-1) = \int_{-1}^1 \phi_j U_{11}^* |J| d\xi \\ \mathbf{Ge}(2,2j) = \int_{-1}^1 \phi_j U_{22}^* |J| d\xi \end{cases} \quad j = 1,3 \quad (3.47)$$

Pour inhiber aux erreurs inhérentes aux problèmes de singularités dans les intégrales ci-dessus, les fonctions  $K_0(z)$  et  $K_1(z)/z$  doivent être développées en séries, afin d'isoler la partie singulière de chaque fonction de la partie régulière.

L'intégration de la partie singulière sera effectuée en utilisant une formule d'intégration spéciale dont le rappel est donnée en annexe (A1). Quant à la partie régulière elle sera calculée par la formule de quadrature de Gauss classique.

#### *a /- Développement des fonctions $K_0(z)$ et $K_1(z)/z$ en séries :*

Le détail des développements de  $K_0(z)$  et  $K_1(z)/z$  est donné en annexe (A2). On se contentera ici de donner leurs forme finale.

Donc

$$\begin{cases} K_0(z) = K_{01}(z) + \ln\left(\frac{1}{f(\xi)}\right) K_{02}(z) \\ \frac{K_1(z)}{z} = K_{11}(z) - \ln\left(\frac{1}{f(\xi)}\right) K_{12}(z) \end{cases} \quad (3.48)$$

Pour le calcul de la matrice  $Ge$  trois cas se présentent :

▪ **Cas 1 : Le point de collocation est le nœud 1**

Dans ce cas  $r = l_1 \left( \frac{\xi + 1}{2} \right) \quad f(\xi) = \frac{\xi + 1}{2} \quad l_1 = l$

Exemple

$$Ge(2,2) = \int_{-1}^1 U_{22}^* \phi_1(\xi) |J| d\xi$$

On pose  $A = \sum_{i=1}^{10} \phi_1(\xi_i) K_{11}(z_{1(\xi)}) |J(\xi_i)| W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_1(\eta_i) K_{12}(z_{1(\eta)}) |J(\eta_i)| WL_i$

$$B = \sum_{i=1}^{10} \phi_1(\xi_i) K_{11}(z_{2(\xi)}) |J(\xi_i)| W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_1(\eta_i) K_{12}(z_{2(\eta)}) |J(\eta_i)| WL_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{10} \phi_1(\xi_i) K_{01}(z_{2(\xi)}) |J(\xi_i)| W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_1(\eta_i) K_{02}(z_{2(\eta)}) |J(\eta_i)| WL_i$$

alors

$$Ge(2,2) = \frac{1}{2\pi\mu} \{ -\alpha^2 A + B + C \}$$

▪ **Cas 2 : Le point de collocation est le nœud 2**

Dans ce cas  $r = l_1 \xi \quad f(\xi) = \xi \quad l_1 = \frac{l}{2}$

Exemple

$$Ge(1,3) = \int_{-1}^1 U_{11}^* \phi_3(\xi) |J| d\xi$$

On pose

$$A = \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K_{11}(z_{1(\xi)}) |J(\xi_i)| W_i - \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K_{12}(z_{1(\xi)}) |J(\xi_i)| WL_i - \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\eta_i) K_{12}(z_{1(\eta)}) |J(\eta_i)| WL_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K'_{01}(z_{1(\xi)}) J(\xi_i) W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K'_{02}(z_{1(\xi)}) J(\xi_i) W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\eta_i) K'_{02}(z_{1(\eta)}) J(\eta_i) W_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K_{11}(z_{2(\xi)}) J(\xi_i) W_i - \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K_{12}(z_{2(\xi)}) J(\xi_i) W_i - \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\eta_i) K_{12}(z_{2(\eta)}) J(\eta_i) W_i$$

alors

$$Ge(1,3) = \frac{1}{2\pi\mu} \{ \alpha^2 A + \alpha^2 B - C \}$$

▪ **Cas 3 : Le point de collocation est le nœud 3**

Dans ce cas  $r = l_1 \left( \frac{1-\xi}{2} \right)$        $f(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$        $l_1 = l$

Exemple

$$Ge(2,6) = \int_{-1}^1 U_{22}^* \phi_3(\xi) J | d\xi$$

On pose  $A = \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K_{11}(z_{1(\xi)}) J(\xi_i) W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\eta_i) K_{12}(z_{1(\eta)}) J(\eta_i) W_i$

$$B = \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K_{11}(z_{2(\xi)}) J(\xi_i) W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\eta_i) K_{12}(z_{2(\eta)}) J(\eta_i) W_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\xi_i) K_{01}(z_{2(\xi)}) J(\xi_i) W_i + \sum_{i=1}^{10} \phi_3(\eta_i) K_{02}(z_{2(\eta)}) J(\eta_i) W_i$$

alors

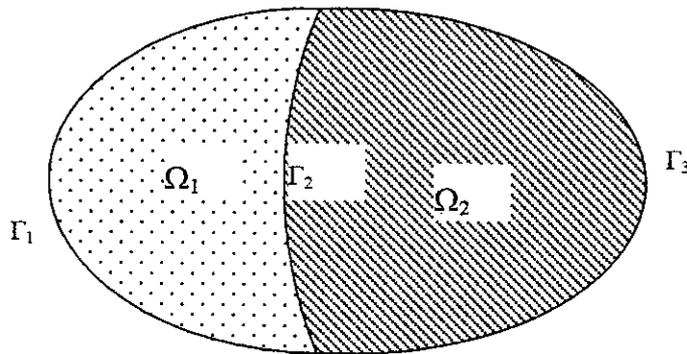
$$Ge(2,6) = \frac{1}{2\pi\mu} \{ -\alpha^2 A + B + C \}$$

### 3.11 Sous structuration

Souvent dans la pratique, et plus particulièrement pour le cas du tunnel, les propriétés mécaniques du milieu étudié ne sont pas homogènes. Toutefois, le domaine peut être subdivisé en plusieurs sous domaines homogènes par morceaux, dans ce cas, chaque sous domaine est considéré isolément. Ceci nous conduit à plusieurs systèmes d'équations linéaires, qui, couplés avec les conditions de raccordement et de continuités entre les interfaces, nous permettent la résolution du problème complet.

Considérant un domaine composé de deux sous domaines homogènes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (figure 3.4).

- Le sous domaine  $\Omega_1$  est délimité par les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .
- Le sous domaine  $\Omega_2$  est délimité par les frontières  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ .



**Figure 3.4**

L'équation intégrale gouvernant le sous domaine  $\Omega_1$  s'écrit :

$$c_{ij}u_j(\xi, \omega) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \{U_{ij}^*(x, \xi, \omega).q_j(x, \omega) - T_{ij}^*(x, \xi, \omega).u_j(x, \omega)\}d\Gamma \quad (3.49)$$

Pour le milieu représentant le sous domaine  $\Omega_1$  on aura :

$$c_{ij}u_j(\xi, \omega) = \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \{U_{ij}^*(x, \xi, \omega).q_j(x, \omega) - T_{ij}^*(x, \xi, \omega).u_j(x, \omega)\}d\Gamma \quad (3.50)$$

Ceci nous conduit aux deux systèmes d'équations suivant :

$$\mathbf{H}^1 \mathbf{u}^1 = \mathbf{G}^1 \mathbf{q}^1 \quad (3.51)$$

$$\mathbf{H}^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{G}^2 \mathbf{q}^2 \quad (3.52)$$

Les exposants <sup>1</sup> et <sup>2</sup> représentent les sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement.

Les vecteurs  $\mathbf{u}^1$  et  $\mathbf{q}^1$  ( $\mathbf{u}^2$  et  $\mathbf{q}^2$ ) contiennent les valeurs nodales des déplacements et les tractions sur la frontière  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  ( $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ) respectivement.

Si on note pour :

Le sous domaine  $\Omega_1$ .

- $\mathbf{u}_1^1$  et  $\mathbf{q}_1^1$ : les vecteurs qui contiennent les valeurs nodales des déplacements et les tractions sur la frontière  $\Gamma_1$ .
- $\mathbf{u}_2^1$  et  $\mathbf{q}_2^1$ : les vecteurs qui contiennent les valeurs nodales des déplacements et les tractions sur la frontière  $\Gamma_2$ .

Et pour le sous domaine  $\Omega_2$ :

- $\mathbf{u}_2^2$  et  $\mathbf{q}_2^2$ : les vecteurs qui contiennent les valeurs nodales des déplacements et les tractions sur la frontière  $\Gamma_2$ .
- $\mathbf{u}_3^2$  et  $\mathbf{q}_3^2$ : les vecteurs qui contiennent les valeurs nodales des déplacements et les tractions sur la frontière  $\Gamma_3$ .

Les deux équations gouvernantes (3.51), (3.52) peuvent être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & \mathbf{H}_{12}^1 \\ \mathbf{H}_{21}^1 & \mathbf{H}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \mathbf{G}_{12}^1 \\ \mathbf{G}_{21}^1 & \mathbf{G}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^1 \\ \mathbf{q}_2^1 \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{22}^2 & \mathbf{H}_{23}^2 \\ \mathbf{H}_{32}^2 & \mathbf{H}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2^2 \\ \mathbf{u}_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{22}^2 & \mathbf{G}_{23}^2 \\ \mathbf{G}_{32}^2 & \mathbf{G}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_2^2 \\ \mathbf{q}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Le couplage des équations (3.53) et (3.54) est accompli, en introduisant les équations d'équilibre et de compatibilité au niveau de l'interface  $\Gamma_2$ , qui se traduisent par :

$$\mathbf{u}_2^1 = \mathbf{u}_2^2 \quad \mathbf{q}_2^1 = -\mathbf{q}_2^2 \quad (3.55)$$

Les équations (3.53) et (3.54) sont ainsi combinées à (3.55) pour donner :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & \mathbf{H}_{12}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{21}^1 & \mathbf{H}_{22}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22}^2 & \mathbf{H}_{23}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{32}^2 & \mathbf{H}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \\ \mathbf{u}_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \mathbf{G}_{12}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21}^1 & \mathbf{G}_{22}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{22}^2 & \mathbf{G}_{23}^2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{32}^2 & \mathbf{G}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^1 \\ \mathbf{q}_2^1 \\ \mathbf{q}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Le réarrangement du système (3.56) nous donnera :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^1 & \mathbf{H}_{12}^1 & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{12}^1 \\ \mathbf{H}_{21}^1 & \mathbf{H}_{22}^1 & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{22}^1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22}^2 & \mathbf{H}_{23}^2 & \mathbf{G}_{22}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{32}^2 & \mathbf{H}_{33}^2 & \mathbf{G}_{32}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \\ \mathbf{u}_3^2 \\ \mathbf{q}_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{23}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^1 \\ \mathbf{q}_2^1 \\ \mathbf{q}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

Ce système peut enfin être résolu. Ceci étant fait en utilisant la méthode de factorisation de Gauss.

### **3.12 Conclusion :**

La méthode des équations intégrales aux frontières constitue la technique la plus performante pour l'analyse d'une large variété de problèmes en mécanique continue. Le petit nombre d'équations qu'elle emploie, la précision des résultats et sa capacité à bien modéliser les domaines non bornés, en discrétisant seulement les frontières internes, sont quelques avantages qu'elle nous offre par rapport aux autres méthodes. Ces avantages sont d'autant plus importants lorsqu'on traite les problèmes d'élastodynamiques.

# MODELISATION DU TUNNEL

## **CHAPITRE 4**

# **MODELISATION DU TUNNEL**

---

### **4.1 Introduction**

L'analyse du comportement dynamique des structures enterrées tels que les tunnels demeure un problème important et complexe, qui ne peut être résolue d'une manière correcte et économique, qu'en se servant des méthodes numériques telles que les méthodes des éléments finis (M.E.F.) et des différences finies (M.D.F) ou la méthode des équations éléments de frontières (B.E.M.). Cette dernière constitue l'outil le plus puissant et le mieux adapté pour traiter ce type de problèmes, et ce, grâce à son aptitude à bien modéliser les domaines non bornés.

Malgré le rôle important qu'elles jouent dans le développement urbain de nos villes et le recours à leurs utilisations, qui devient de plus en plus fréquent, l'analyse du comportement dynamique des structures enterrées relève des problèmes relativement difficiles à résoudre. Cette difficulté réside principalement dans la forte interaction qui existe entre la structure et le sol environnant. Ce qui explique peut être la maigre documentation existante sur ce sujet. En effet, l'ensemble des documents existants dans la littérature spécialisée et qui traitent le comportement dynamique des structures enterrées peuvent être trouvés [72] dans les travaux de : Manolis [54], Von Estorff [80], Stamos and Beskos [70], le rapport technique de Owen & Scholl [64] et l'ouvrage de Manolis and Beskos[57].

Dans le chapitre précédent, la méthode des équations intégrales aux frontières dans le domaine des fréquences a été développée pour les deux cas de l'élément constant et l'élément quadratique. Le but de ce chapitre, est de montrer comment utiliser cette méthode en introduisant le concept de la sous-structuration, afin de modéliser le comportement dynamique du tunnel et son interaction avec le sol environnant. La solution fondamentale pour le plan infini donnée par les équations (3.2) et (3.3) est employée, ce qui requière, en plus de la discrétisation de la surface interne du tunnel et de l'interface sol-tunnel, la discrétisation de la surface libre du sol. Le comportement des frontières discrètes correspondantes est exprimé par un système d'équations algébriques discret, qui, après leurs assemblages, forment un système d'équations global, exprimé sous forme matricielle.

## 4.2 Formulation du problème :

Considérons un tunnel infiniment long, composé de deux sous-domaines :

- Le sol délimité par les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .
- La structure du tunnel délimitée par  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ .

Dont la coupe transversale est schématisée par la figure (4.1)

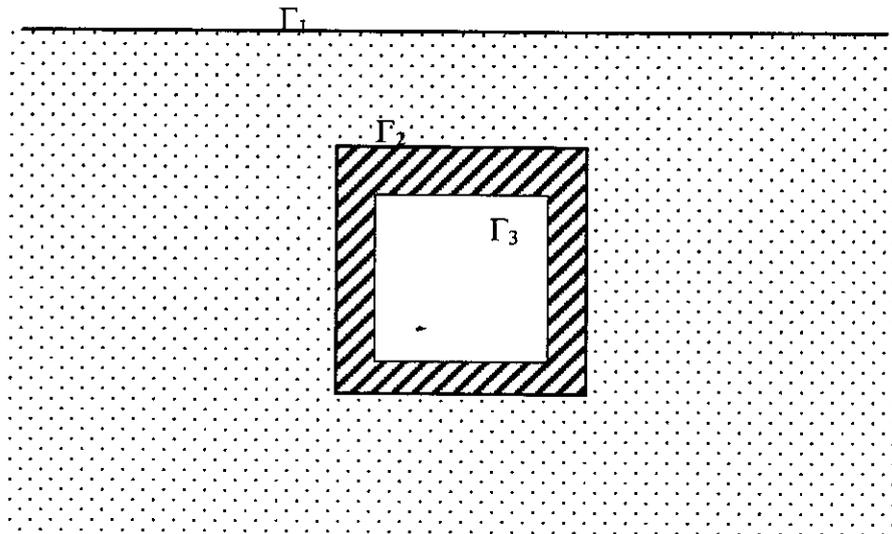


Figure 4.1 : Représentation schématique d'un tunnel

L'analyse complète du problème se résume dans les étapes suivantes:

- Considérer chaque sous-domaine (sol avec cavité sans la structure du tunnel, structure du tunnel) isolément.

- Application de l'équation intégrale (3.1) et constructions du systèmes d'équations algébriques pour chaque sous domaine.
- Couplage entre les sous-domaines, via les conditions de raccordement et de compatibilités, au niveau de l'interface  $\Gamma_2$ .
- Résolution du problème complet.

#### 4.2.1 Modélisation du sol:

Le sol étant considéré comme un milieu semi-infini avec une cavité. Il est délimité par la surface libre représentée par la frontière  $\Gamma_1$ , et l'interface  $\Gamma_2$  (figure 4.2).

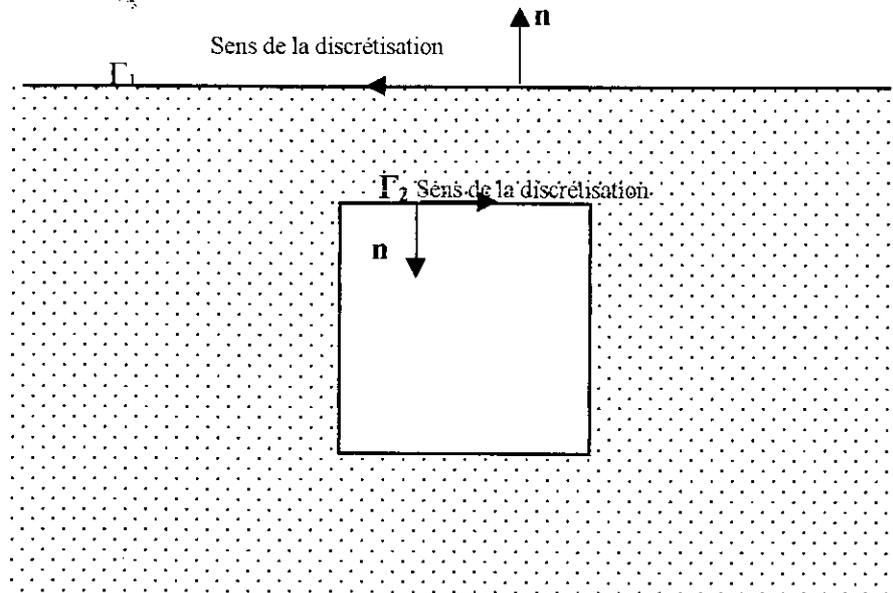


Figure 4.2 : Représentation schématique du sol avec cavité

L'équation intégrale (3.1) s'écrit pour le domaine représentant le sol comme :

$$c_{ij} u_j(\xi, \omega) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \{ U_{ij}^*(x, \xi, \omega) q_j(x, \omega) - T_{ij}^*(x, \xi, \omega) u_j(x, \omega) \} d\Gamma \quad (4.1)$$

Après la discrétisation de la frontière  $\Gamma_1$  et l'interface  $\Gamma_2$  en un certain nombre d'éléments quadratiques ou constants, l'équation intégrale (4.1) est appliquée pour tous les nœuds de la frontière. Pour chaque nœud on aura deux équations algébriques. L'assemblage de toutes ces équations conduit à un système d'équations qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{H}^s \mathbf{u}^s = \mathbf{G}^s \mathbf{q}^s \quad (4.2)$$

Ou bien, comme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^s & \mathbf{H}_{12}^s \\ \mathbf{H}_{21}^s & \mathbf{H}_{22}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^s \\ \mathbf{u}_2^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^s & \mathbf{G}_{12}^s \\ \mathbf{G}_{21}^s & \mathbf{G}_{22}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^s \\ \mathbf{q}_2^s \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Tel que :

$\mathbf{u}_1^s$  et  $\mathbf{q}_1^s$  : représentent les sous-vecteurs contenant les composantes des déplacements nodaux et des tractions nodales, respectivement, des éléments appartenant à la frontière  $\Gamma_1$ .

$\mathbf{u}_2^s$  et  $\mathbf{q}_2^s$  : représentent les sous-vecteurs contenant les composantes des déplacements nodaux et des tractions nodales, respectivement, des éléments appartenant à la frontière  $\Gamma_2$ .

#### 4.2.2 Modélisation du tunnel:

Le tunnel est représenté comme un anneau délimité par l'interface  $\Gamma_2$  et la surface libre interne  $\Gamma_3$  (figure 4.2).

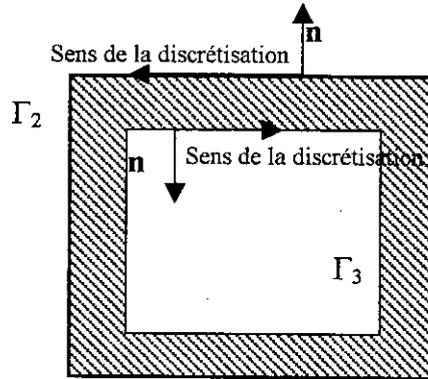


Figure 4.2 : Schéma de la modélisation du tunnel

L'équation intégrale (3.1) s'écrit pour le domaine représentant la structure du tunnel comme:

$$c_{ij} u_j(\xi, \omega) = \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \{ U_{ij}^*(x, \xi, \omega) \cdot q_j(x, \omega) - T_{ij}^*(x, \xi, \omega) \cdot u_j(x, \omega) \} d\Gamma \quad (4.4)$$

L'interface  $\Gamma_2$  et la surface libre interne du tunnel  $\Gamma_3$ , sont discrétisées en un certain nombre d'éléments quadratiques ou constants. L'équation intégrale (4.4) est alors appliquée pour tous les nœud de la frontière. Ce qui nous amènera, comme le cas précédent après assemblage de toutes les équations algébriques, à un système d'équations qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{H}' \mathbf{u}' = \mathbf{G}' \mathbf{q}' \quad (4.5)$$

Ou alors, comme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{22}^t & \mathbf{H}_{23}^t \\ \mathbf{H}_{32}^t & \mathbf{H}_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2^t \\ \mathbf{u}_3^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{22}^t & \mathbf{G}_{23}^t \\ \mathbf{G}_{32}^t & \mathbf{G}_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_2^t \\ \mathbf{q}_3^t \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

avec :

$\mathbf{u}_2^t$  et  $\mathbf{q}_2^t$  : représentent les sous-vecteurs contenant les composantes des déplacements nodaux et des tractions nodales, respectivement, des éléments appartenant à la frontière  $\Gamma_2$ .

$\mathbf{u}_3^t$  et  $\mathbf{q}_3^t$  : représentent les sous-vecteurs contenant les composantes des déplacements nodaux et des tractions nodales, respectivement, des éléments appartenant à la frontière  $\Gamma_3$ .

### Remarque :

Notons, que le sens de la discrétisation de la frontière  $\Gamma_2$  lorsqu'on a considéré le sol avec la cavité est différent de celui adopté pour le cas de la discrétisation du tunnel. Par conséquent un réarrangement adéquat dans les matrices  $\mathbf{H}^t$  et  $\mathbf{G}^t$  est nécessaire, afin de pouvoir les assembler d'une manière correcte avec les matrices  $\mathbf{H}^s$  et  $\mathbf{G}^s$ , respectivement.

Les algorithmes permettant le calcul des matrices  $\mathbf{H}^s$  et  $\mathbf{G}^s$  pour le sol, et  $\mathbf{H}^t$  et  $\mathbf{G}^t$  pour la structure du tunnel ont la même structure. Ils sont donnés par :

#### ▪ Cas de l'élément constant

**Début** de la routine

    Initialisation

    Lecture des données géométriques et données mécaniques

**Début** de boucle externe sur les nœuds

**Début** de boucle interne sur les nœuds

            Si nœud interne = nœud externe **Alors**

                Calcul des matrices élémentaires pour le cas singulier

**Sinon**

                Calcul des matrices élémentaires pour le cas régulier

**Fin si**

        Assemblage des matrices élémentaires dans les matrices globales

**Fin** de boucle interne sur les nœuds

**Fin** de boucle externe sur les nœuds

**Fin** de la routine

## ▪ Cas de l'élément quadratique

**Début** de la routine

Initialisation

Lecture des données géométriques et données mécaniques

**Début** de boucle externe sur les éléments

**Début** de boucle sur les nœuds de l'élément externe

**Début** de boucle interne sur les éléments

**Si** le nœud de l'élément externe appartient à l'élément interne **Alors**

Calcul des matrices élémentaires pour le cas singulier

**Sinon**

Calcul des matrices élémentaires pour le cas régulier

**Fin si**

Assemblage des matrices élémentaires dans les matrices globales

**Fin** de boucle interne sur les éléments

**Fin** de boucle sur les nœuds de l'élément externe

**Fin** de boucle externe sur l'élément

**Fin** de la routine

### 4.2.3 Résolution du problème complet :

Considérons maintenant, le problème complet du long tunnel implanté dans un milieu semi-infni. Le couplage des deux systèmes (4.3) et (4.6) gouvernant chacun les comportements du sol avec cavité et du tunnel, respectivement, est accompli, en introduisant les équations d'équilibre et de compatibilité au niveau de l'interface  $\Gamma_2$ . Ces équations s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{u}_2^s = \mathbf{u}_2^t \quad \mathbf{q}_2^s = -\mathbf{q}_2^t \quad (4.7)$$

Les équations (4.3) et (4.6) sont ainsi combinées à (4.7) pour donner :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^s & \mathbf{H}_{12}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{21}^s & \mathbf{H}_{22}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22}^t & \mathbf{H}_{23}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{32}^t & \mathbf{H}_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^s \\ \mathbf{u}_2^s \\ \mathbf{u}_3^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^s & \mathbf{G}_{12}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21}^s & \mathbf{G}_{22}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{22}^t & \mathbf{G}_{23}^t \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{32}^t & \mathbf{G}_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^s \\ \mathbf{q}_2^s \\ \mathbf{q}_3^t \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Le réarrangement du système (4.8) nous donnera :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^s & \mathbf{H}_{12}^s & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{12}^s \\ \mathbf{H}_{21}^s & \mathbf{H}_{22}^s & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{22}^s \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22}^t & \mathbf{H}_{23}^t & \mathbf{G}_{22}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{32}^t & \mathbf{H}_{33}^t & \mathbf{G}_{32}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^s \\ \mathbf{u}_2^s \\ \mathbf{u}_3^t \\ \mathbf{q}_2^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{23}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^s \\ \mathbf{q}_3^t \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Les conditions aux limites nous donnent les valeurs des tractions nodales sur les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ . Le système (4.9) peut s'écrire alors, comme :

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (4.10)$$

Ce système peut être enfin résolu, en utilisant la méthode de factorisation de Gauss.

### 4.3 Quelques problèmes rencontrés lors de l'utilisation de l'élément quadratique :

Compte tenu des difficultés relatives inhérentes au calcul explicite des éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{H}$ , le calcul de ces derniers est effectué en considérant le déplacement du corps rigide de la structure. Un autre problème non moins important, lié au traitement particulier des coins, mérite d'être signalé.

#### 4.3.1 Traitement particulier des coins :

Lorsque le nœud est localisé sur le coin, la discontinuité de la traction nodale a eu lieu (figure 4.3 (a)). Ceci conduit, si la traction nodale est inconnue sur ce nœud, à un nombre d'équations inférieur au nombre d'inconnues.

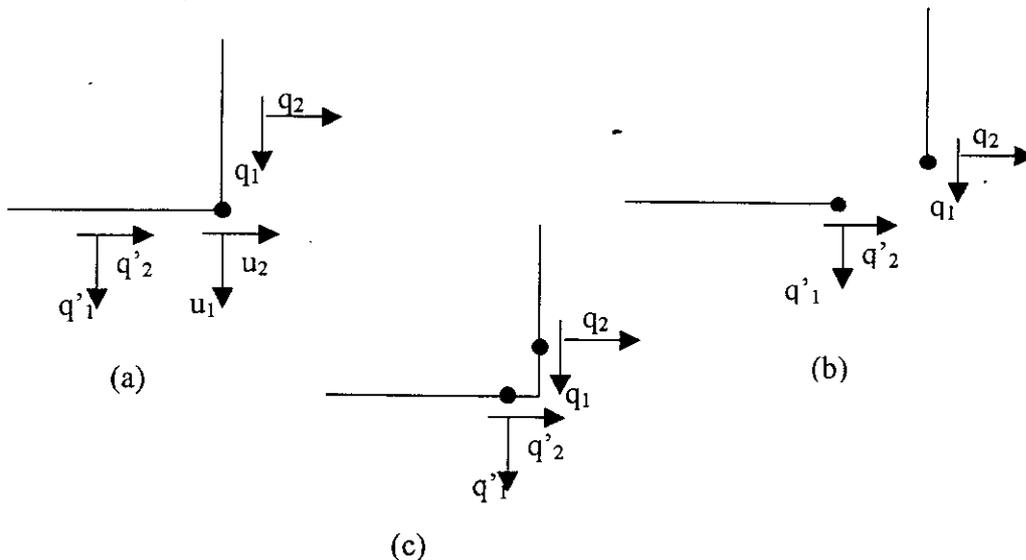


Figure 4.3: Traitement des coins

Dans le cas où la traction est connue de part et d'autre du nœud et seulement les déplacements sont inconnus, ou bien les composantes du déplacement et l'une des composantes de la traction est connue sur le nœud, le traitement particulier au nœud n'est pas nécessaire et le problème peut être résolu sans difficulté.

Quand les composantes du déplacement au nœud sont connues et les composantes de la traction sont inconnues, dans ce cas un traitement particulier est nécessaire.

La manière la plus simple pour résoudre le problème pour le second cas, est de dupliquer le nœud du coin figure 4.3b, et à chaque nœud on associe deux composantes de tractions différentes. La géométrie du problème sera légèrement modifier, mais le problème sera numériquement résolu par la procédure standard. La distance entre les deux nœuds dupliqués doit être petite. Dans la pratique, il a été montré que d'excellents résultats [20] sont obtenus pour une distance entre les nœuds qui n'est pas très petite.

Une autre manière de traiter le problème des coins, consiste à déplacer les nœuds à l'intérieur de l'élément figure 4.3(c). Cette approche est très simple et peut modéliser le coin avec la concentration des contraintes.

#### 4.4 Calcul du vecteur de chargement nodal

Considérons un chargement quelconque  $q$  (figure 4.4) agissant sur un élément de frontière, les chargements nodaux agissant sur les nœuds de l'élément sont données par :

- Cas de l'élément constant :

$$q_n = \int_{\Gamma_e} q d\Gamma$$

- cas de l'élément quadratique :

$$q_{m_i} = \int_{\Gamma_e} q \Phi_i(\xi) d\Gamma \quad i = 1,3$$

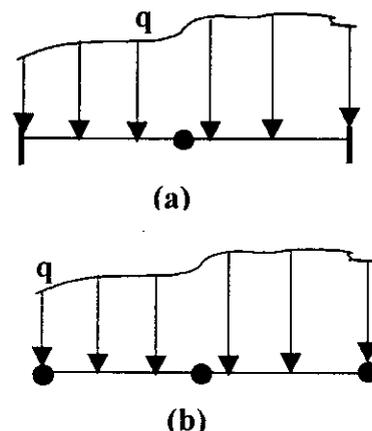


Figure 4.4: Chargement quelconque sur l'élément  
(a): Elément constant (b): Elément quadratique

## **4.5 Conclusion:**

A travers ce chapitre nous avons procédé à un exposé détaillé de la méthode des équations intégrales appliquée au tunnel, en utilisant le concept de la sous-structuration. Nous avons remarqué que l'utilisation de l'élément quadratique soulève quelques difficultés, dont les plus importantes sont le calcul des éléments diagonaux de la matrice **H** et le traitement particulier des coins. Ces difficultés ne pas sont rencontrées lorsqu'on utilise l'élément constant, mais nous allons voir dans le prochain chapitre, que l'utilisation de l'élément quadratique conduit à des résultats plus précis que ceux que l'on peut trouver avec l'élément constant.

### INVESTIGATIONS NUMERIQUES

---

#### 5.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons étudier les effets d'interactions sol-structure, dus aux trafics urbains, sur le comportement dynamique des systèmes sol-tunnel. Le système considéré est constitué d'une route urbaine se trouvant en surface libre et d'un tunnel construit en dessous, à une profondeur ( $d$ ). Les comportements viscoélastiques linéaires du tunnel et du sol semi-infini environnant sont inclus dans l'étude. Le problème ainsi défini, est résolu sous les conditions de déformations planes. La modélisation numérique du système est effectuée en utilisant la méthode des éléments frontières (B.E.M.) dans le domaine des fréquences. Les codes de calcul sont élaborés pour deux cas : élément constant et élément quadratique.

Les études paramétriques et comparatives effectuées ont fait l'objet de trois applications principales. La première, consiste en l'étude comparative des performances des deux éléments constant et quadratique. Dans cette application l'enterrement du tunnel est fixée à une profondeur  $d$  et le système est soumis à deux cas de chargements. En outre, les résultats obtenus pour chaque élément sont comparés aux résultats existants dans la littérature spécialisée [86]. La seconde application traite de l'influence du paramètre géométrique  $d$  sur les déplacements verticaux de quelques points typiques du système soumis à trois cas de chargements dynamiques. Enfin, la troisième application porte sur l'étude de l'influence du rapport des rigidités du sol et du tunnel ( $E_s/E_t$ ) sur la réponse du tunnel exprimée en terme des déplacements.

## 5.2 Présentation du tunnel analysé

Le système sol-tunnel analysé est représenté sur la figure (5.1), dans laquelle les données géométriques sont exprimées en mètre. Le tunnel est implanté dans un milieu semi-infini élastique linéaire et isotrope. Les caractéristiques mécaniques intervenant dans l'étude concernent les modules d'élasticités  $E^s(E^t)$ , les densités volumiques  $\rho^s(\rho^t)$  et les coefficients de poisson  $\nu^s(\nu^t)$  des deux sous structures sol et tunnel.

Les trafics routier et souterrain sont modélisés par deux charges uniformément réparties, de deux (02) mètres de longueur représentées dans la figure 5.1 par  $F^A$  et  $F^D$ . La variation dans le temps de ces chargements est supposée harmonique d'amplitude  $F^A = F^D = 1$  KN/m. Bien entendu A et D désignent les centres d'application de leurs résultantes.

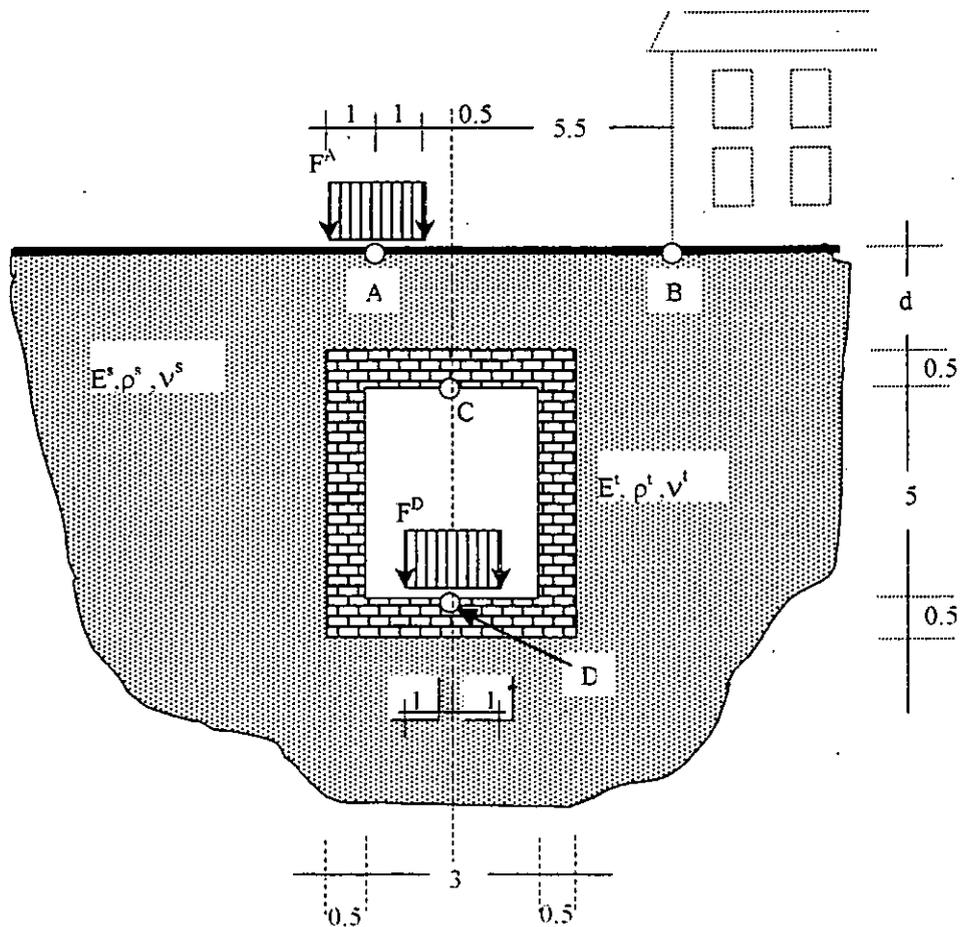


Figure (5.1) : Représentation schématique et données géométriques du système sol-tunnel

La réponse du système est calculée en terme des déplacements des points de la surface libre du sol et du contour interne du tunnel. Elle est étudiée pour certains points d'intérêt particulier, en l'occurrence les centres d'application des charges A et D, le centre du plafond du tunnel C et un point B d'implantation d'une bâtisse ou d'une autre structure, susceptible d'être influencée par les vibrations du système. A cet effet, la méthode des éléments de frontières (B.E.M.) qui est particulièrement adaptée pour ce type de problème non borné est utilisée.

Le schéma de discrétisation du système sol-tunnel est donné par la figure (5.2). Pour le domaine borné  $\Omega^t$  du tunnel, le problème se ramène à la discrétisation de ces frontières interne et externe. Quant au domaine semi-infini  $\Omega^s$  du sol, seules la surface libre et l'interface sol-tunnel sont discrétisées. En effet, compte tenu de la formulation de la méthode des éléments de frontières (B.E.M.), incluant automatiquement les effets de radiations, l'introduction d'une frontière de troncature modélisant la région infini du sol, n'est pas nécessaire.

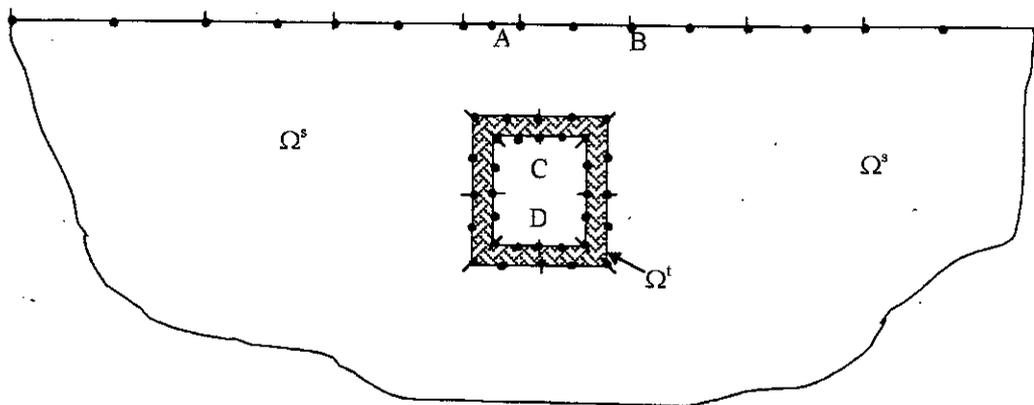


Figure (5.2) : Discrétisation du système sol-tunnel par des éléments de frontières (cas de l'élément quadratique).

### 5.3 Etude comparative des performances des deux éléments constant et quadratique

Le but de cette application est de mettre en exergue les performances des deux éléments, constant et quadratique. A cet effet on calcule la réponse en terme de déplacements verticaux aux points A, B, C et D, sous l'effet du chargement harmonique appliqué au point A ou au point D, pour différents maillages. Dans les figures (5.3 à 5.6) nous présentons les principaux résultats permettant d'apprécier les performances des deux éléments : constant et quadratique. De plus, ces résultats sont comparés à ceux obtenus par Von Estorff [86], qui a étudié le même problème en utilisant la B.E.M. cas de l'élément quadratique.

Les données géométriques et mécaniques du problème sont données par le tableau suivant :

Module d'élasticité du sol	$E^s = 2.66 \cdot 10^5 \text{ KN/m}^2$
Masse volumique du sol	$\rho^s = 2000 \text{ Kg/m}^3$
Coefficient de poisson du sol	$\nu^s = 0.33$
Module d'élasticité du tunnel	$E^t = 3.0 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2$
Masse volumique du tunnel	$\rho^t = 2000 \text{ Kg/m}^3$
Coefficient de poisson du tunnel	$\nu^t = 0.25$
La hauteur interne du tunnel	$H = 5.00 \text{ m}$
La largeur interne du tunnel	$L = 3.00 \text{ m}$
L'épaisseur de l'anneau du tunnel	$e = 0.50 \text{ m}$
La profondeur d'enterrement	$d = 4.00 \text{ m}$
Le taux d'amortissement critique	$\beta = 0.1 \%$

**Tableau 5.1** : Données géométriques et mécaniques du système sol-tunnel considéré.

La valeur de  $\beta$  étant prise très petite et ce, dans le but d'éliminer l'effet de l'influence des fréquences de vibrations propres du système [86].

Les figures (5.3, 5.4, 5.5 et 5.6) représentent respectivement, la variation de l'amplitude des déplacements verticaux aux points A, B, C et D, en fonction des fréquences d'excitation. Ces courbes sont obtenues pour un nombre d'éléments quadratiques égal à 34, soit 17 éléments (39 nœuds) pour modéliser la surface libre du sol et l'interface sol-tunnel et 17 éléments (42 nœuds) pour modéliser les frontières interne et externe du tunnel. Pour le cas de l'élément constant les résultats correspondant sont obtenus pour un nombre d'éléments égal à 162, soit 78 éléments (78 nœuds) pour représenter la surface libre et l'interface sol-tunnel et 84 éléments (84 nœuds) pour représenter les frontières interne et externe du tunnel.

Nous constatons à partir des figures(5.3), (5.4), (5.5) et (5.6), que les résultats obtenus par la méthode des éléments de frontières, cas de l'élément quadratique, présentent de façon générale un parfait accord avec les résultats trouvés par Von Estorff [86], et ce, quelle que soit la fréquence ou le type du chargement considéré.

En revanche, pour la méthode des éléments de frontières cas de l'élément constant, nous remarquons que :

- Pour le cas du chargement en surface libre  $F^A$ , les réponses obtenues aux points A et B (Points appartenant à la surface libre) figures (5.3-a), (5.4-a) présentent un accord satisfaisant avec ceux de la référence [86], et les résultats trouvés aux points C et D (Points appartenant à la surface interne du tunnel) figures (5.5-a), (5.6-a) ne coïncide pas avec ceux de la référence [86].
- Cependant, pour le cas du chargement dans le tunnel  $F^D$ , le contraire est observé. C'est-à-dire que les réponses aux points A et B figures (5.3-b), (5.4-b) sont décalées par rapport aux réponses données dans [86], et que les réponses aux points C, D figures (5.5-b), (5.6-b) sont proches de ceux de la référence [86].

Compte tenu de ces remarques, nous pouvons affirmer concernant cette application, que la méthode des équations intégrales aux frontières cas de l'élément constant, nous procure des résultats peu précis dans l'ensemble. Ceci peut être expliqué par le fait de l'existence de deux milieux différents avec des caractéristiques géométriques et mécaniques différentes, à savoir celui du sol et celui du tunnel, et que dans ce cas les équations de compatibilité et d'équilibre au niveau de l'interface sol-tunnel (frontière  $\Gamma_2$  figure. 4.1) ne sont pas modélisées d'une manière correcte par des éléments constants. D'où la nécessité d'utilisation des éléments d'ordre supérieur, tel que les éléments quadratiques.

En somme, au terme de cette application, nous pouvons dire :

Bien que la méthode des éléments de frontières cas de l'élément constant est relativement facile et beaucoup plus pratique au double plan formulation et programmation et temps d'exécution par rapport à son homologue cas de l'élément quadratique, ces performances en matière de résultats sont nettement inférieures voir médiocres à celle données par cette dernière.

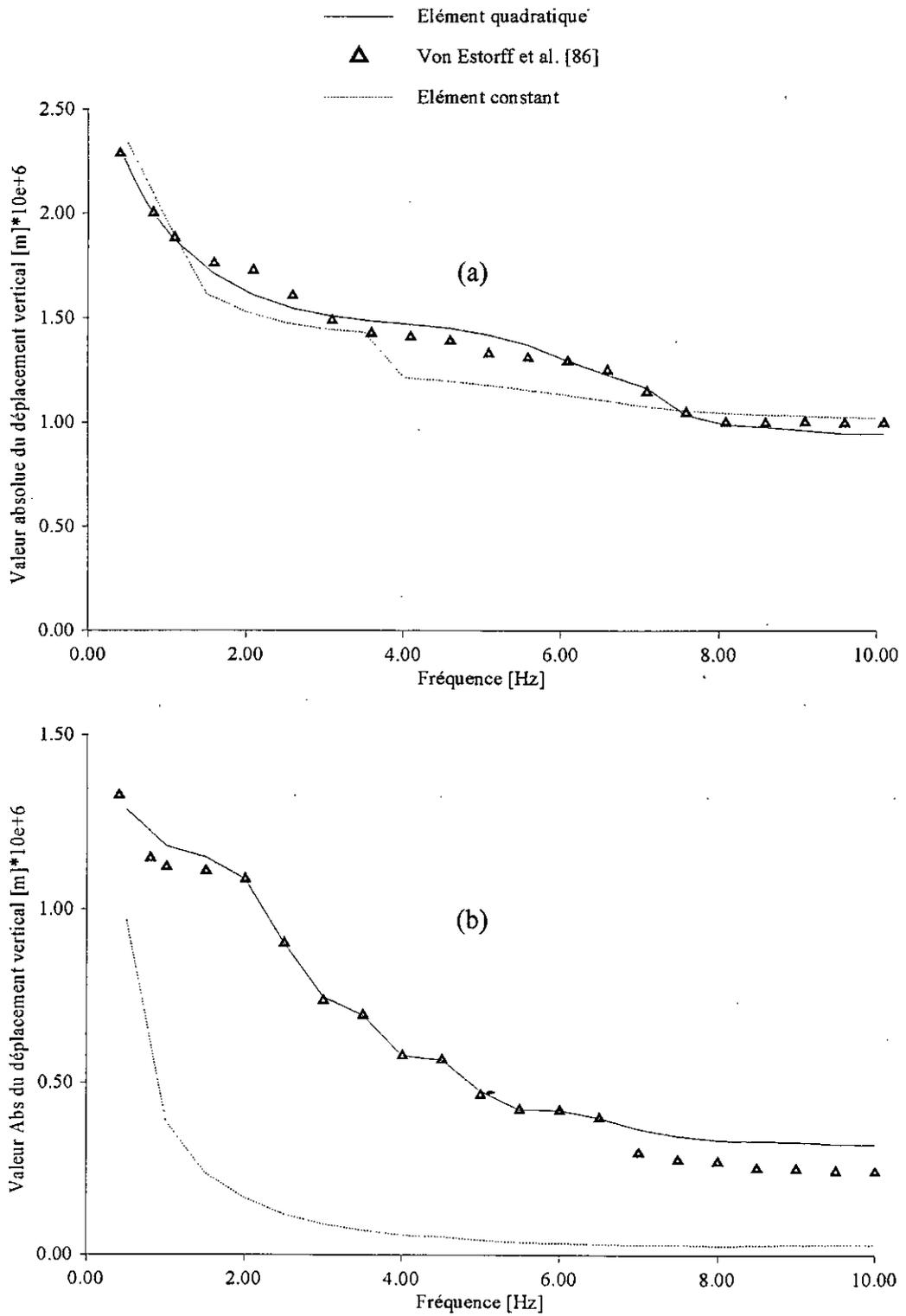
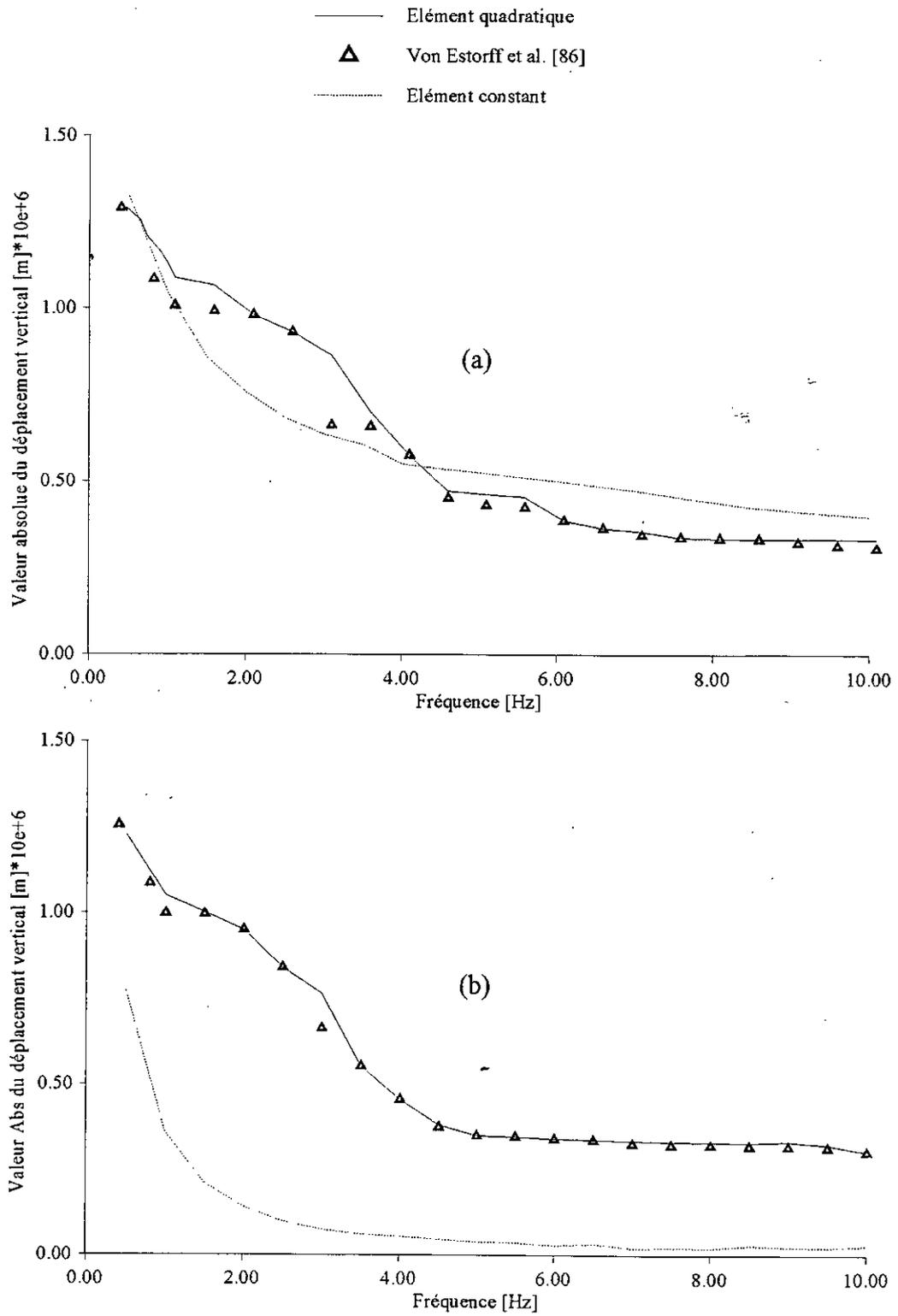


Figure 5.3 : Amplitude des déplacements verticaux au point A  
 (a) :Chargement au point A      (b) : Chargement au point D



**Figure 5.4 :** Amplitude des déplacements verticaux au point B  
 (a) : Chargement au point A    (b) : Chargement au point D

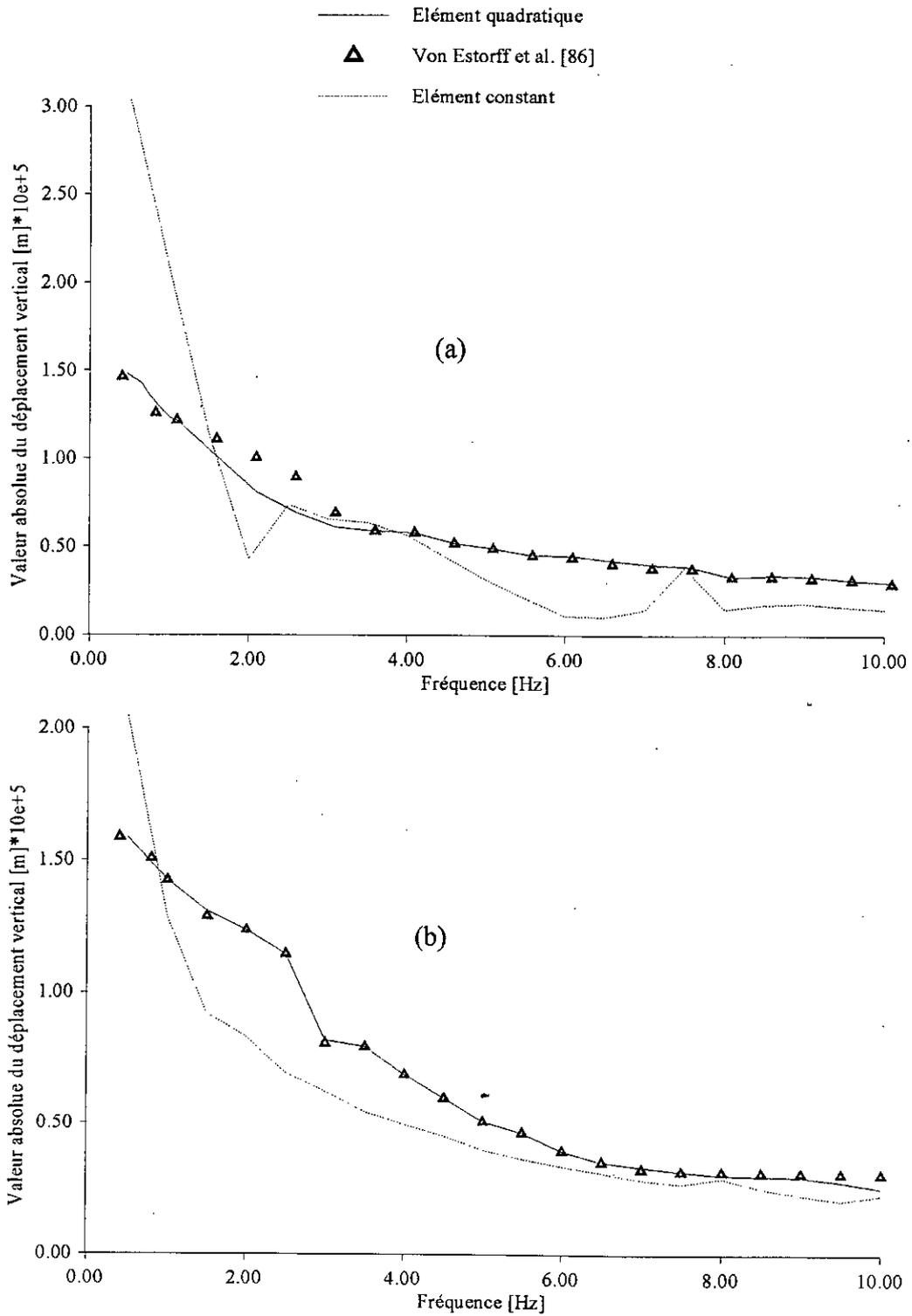


Figure 5.5 : Amplitude des déplacements verticaux au point C  
 (a) : Chargement au point A    (b) : Chargement au point D

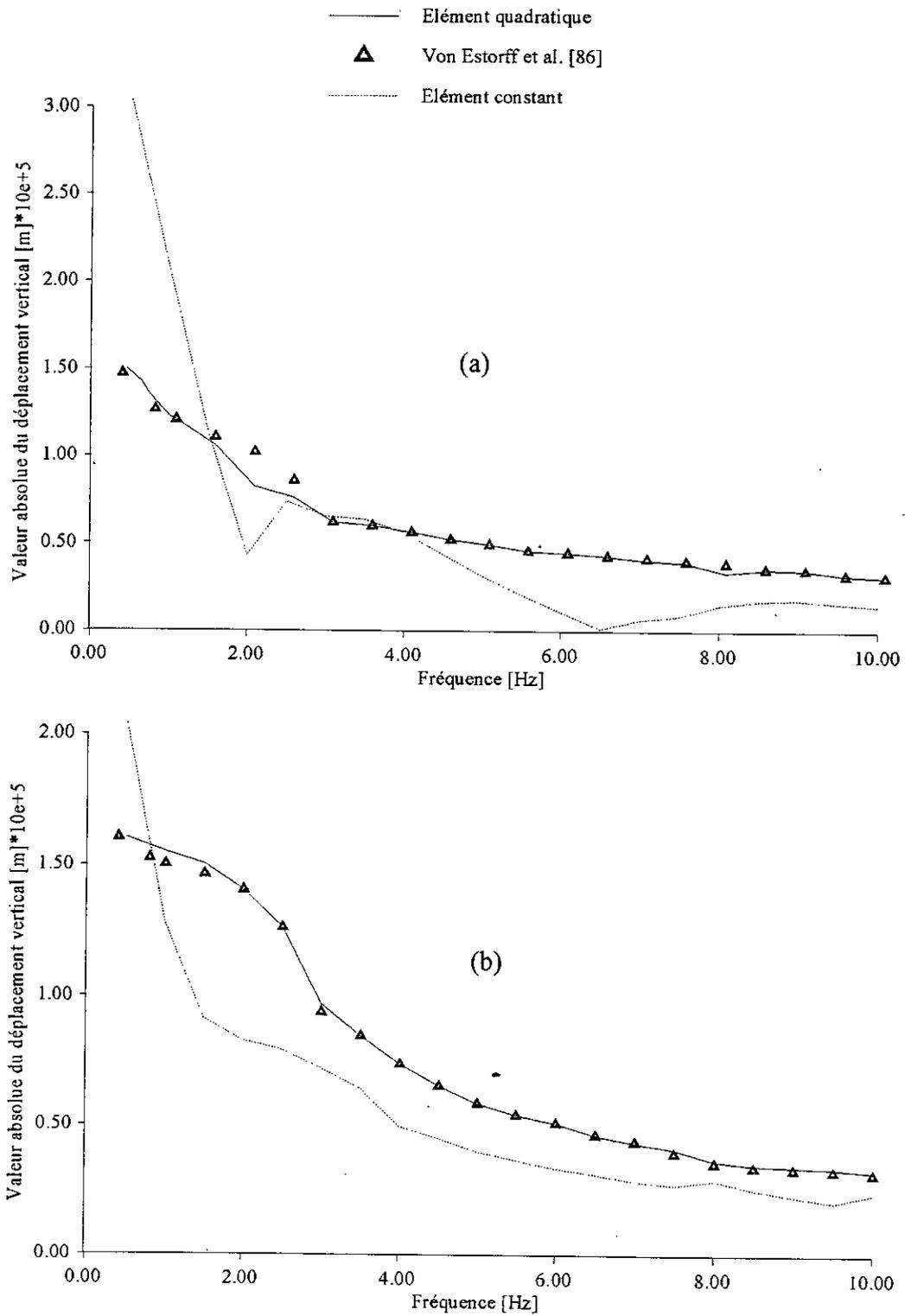


Figure 5.6 : Amplitude des déplacements verticaux au point D  
 (a) : Chargement au point A      (b) : Chargement au point D

## 5.4 Etude de l'effet de l'enterrement (d) du tunnel

Dans le but d'éliminer (atténuer) l'influence des charges superficielles sur le comportement du tunnel et des charges souterraines sur l'environnement en surface libre, et afin d'avoir une conception correcte et économique, l'effet de l'enterrement (d) du tunnel, sur les déplacements verticaux en certains points typiques de la surface libre et du tunnel, est étudié. L'étude est effectuée en utilisant la B.E.M. pour le cas de l'élément quadratique.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont identiques à celles déjà prises pour l'application précédente (Tableau 5.1), sauf pour la profondeur d'enterrement du tunnel  $d$  qui, dans cette application, prend les valeurs  $d = 4$  m,  $8$  m et infini.

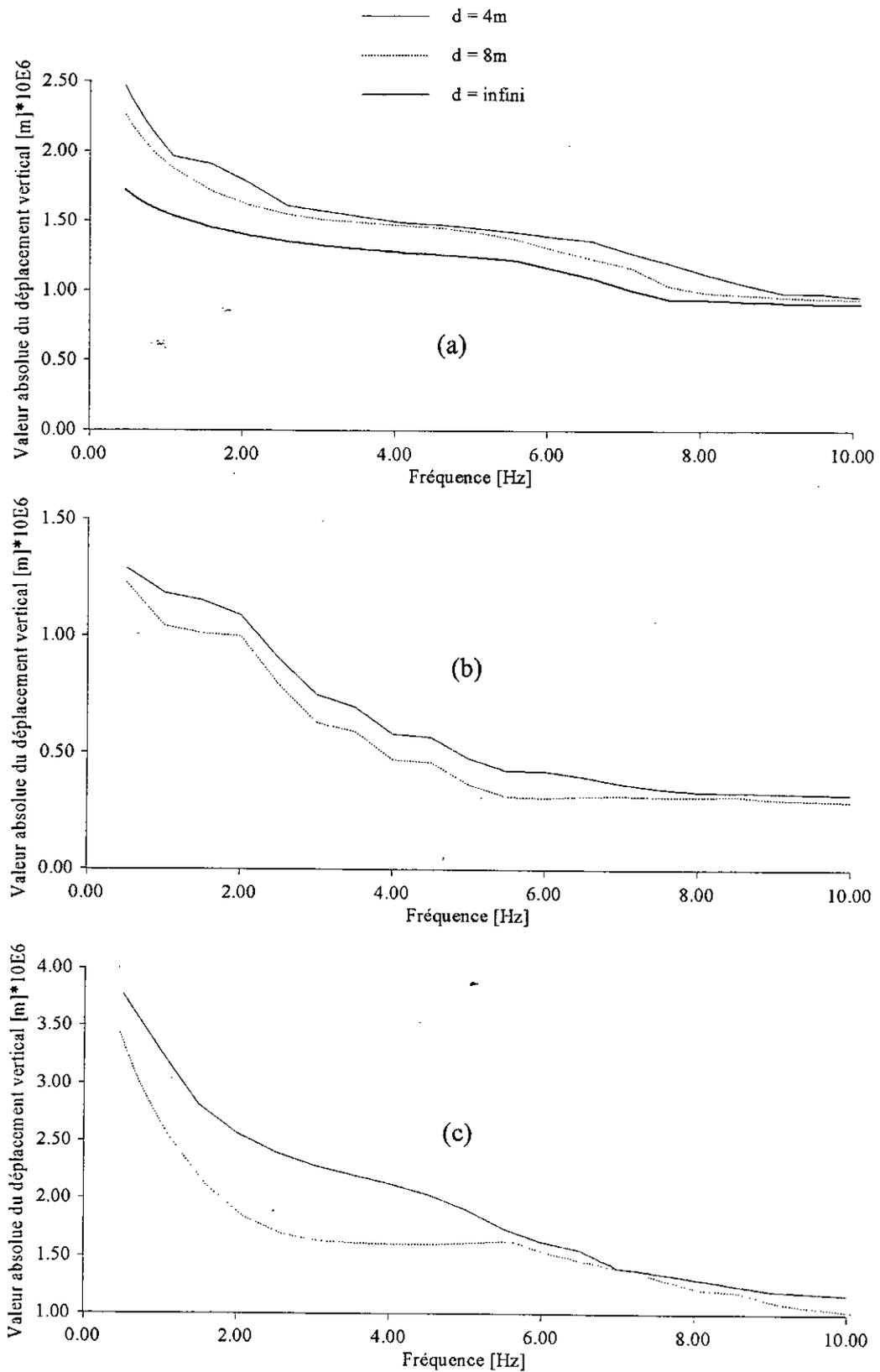
Les figures (5.7), (5.8), (5.9) et (5.10) montrent la variation des l'amplitudes des déplacements verticaux aux points A, B, C et D, en fonction de la variation de la fréquence d'excitation, pour  $d = 4$ m,  $8$ m et  $d \rightarrow \infty$ . En chacun des ces points, la réponse est évaluée sous l'action du :

- (a)- Chargement superficiel  $F^A$ , appliqué au point A.
- (b)- Chargement souterrain  $F^D$ , appliqué au point D.
- (c)- Les deux chargements superficiel et souterrain sont appliqués simultanément.

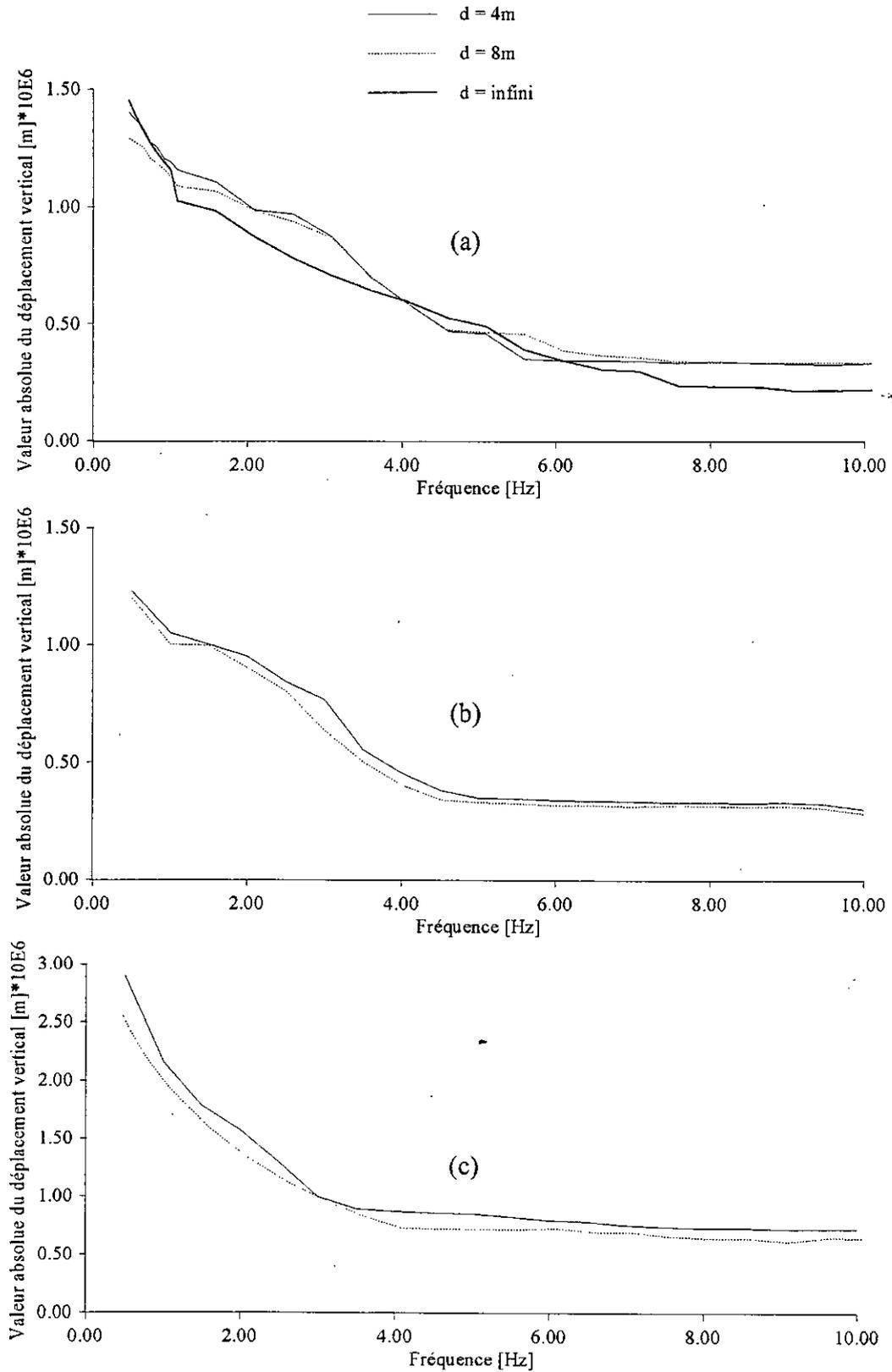
Pour le cas où le tunnel se trouve à une profondeur d'enterrement  $d \rightarrow \infty$ , les déplacements aux points A et B, dus au chargement  $F^A$ , sont calculés en considérant un sol semi-infini sans tunnel.

Comme cela peut être prévu, nous constatons à partir des figures(5.7), (5.8), (5.9) et (5.10) que les déplacements verticaux obtenus pour aux points A, B, C et D, diminuent quand la profondeur d'enterrement  $d$  augmente. Cette diminution est d'autant plus accentuée au niveau des points de chargements A et D figures(5.7 et 5.10). En revanche, pour les deux autres points cette diminution demeure minimale, notamment au point B pour lequel les résultats sont pratiquement confondus figure (5.8). Notons aussi que les déplacements en A (D) causés par le chargement en surface libre  $F^A$ , sont plus grands (plus petits) que ceux provoqués par le chargement dans le tunnel  $F^D$ . Nous pouvons constater enfin, que les courbes obtenues pour chacun des points sont de plus en plus rapprochées au fur et à mesure que la fréquence augmente.

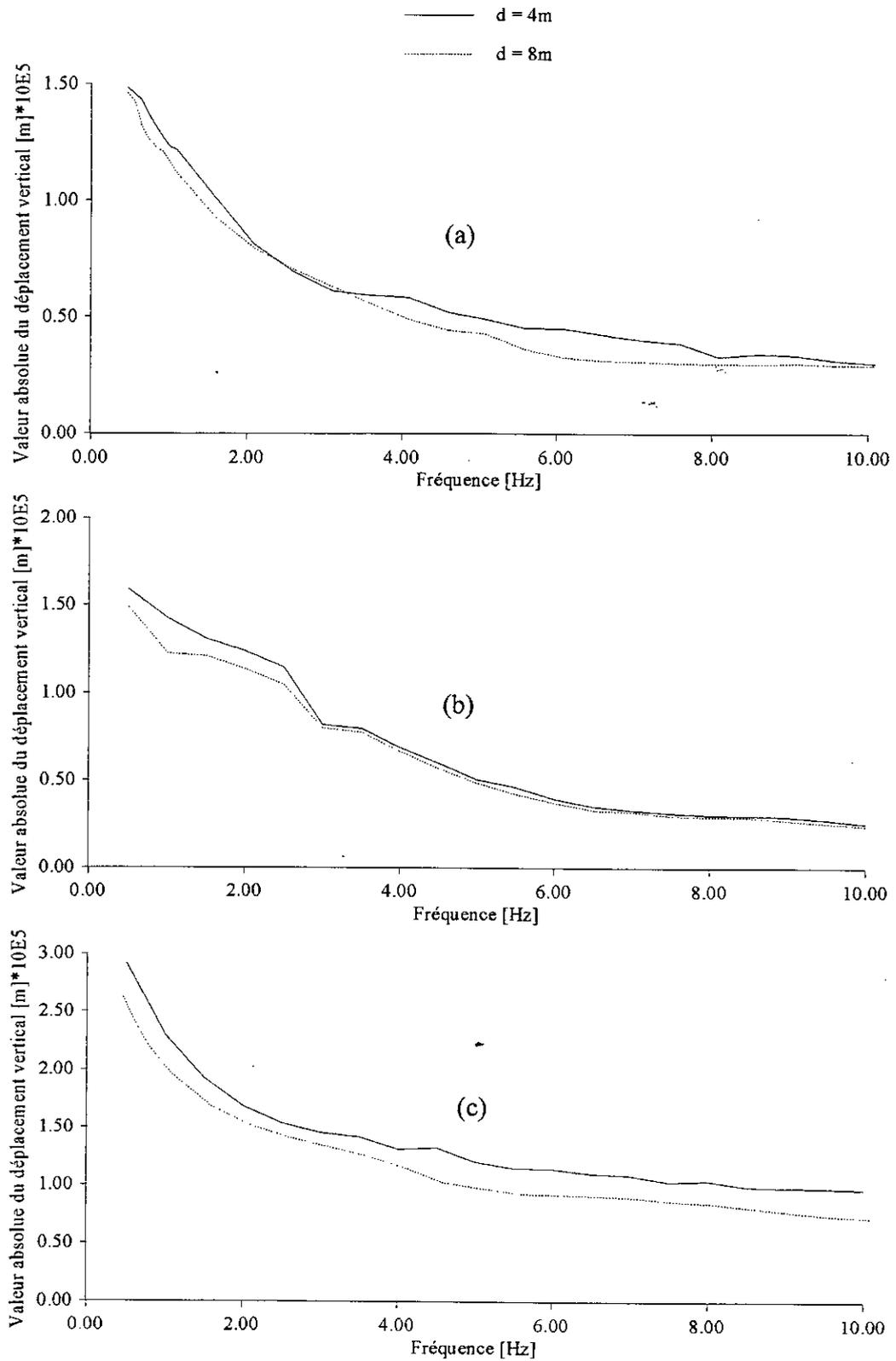
Ceci nous permet de déduire que l'influence de la profondeur de l'enterrement  $d$  sur les déplacements verticaux n'est pas très significative.



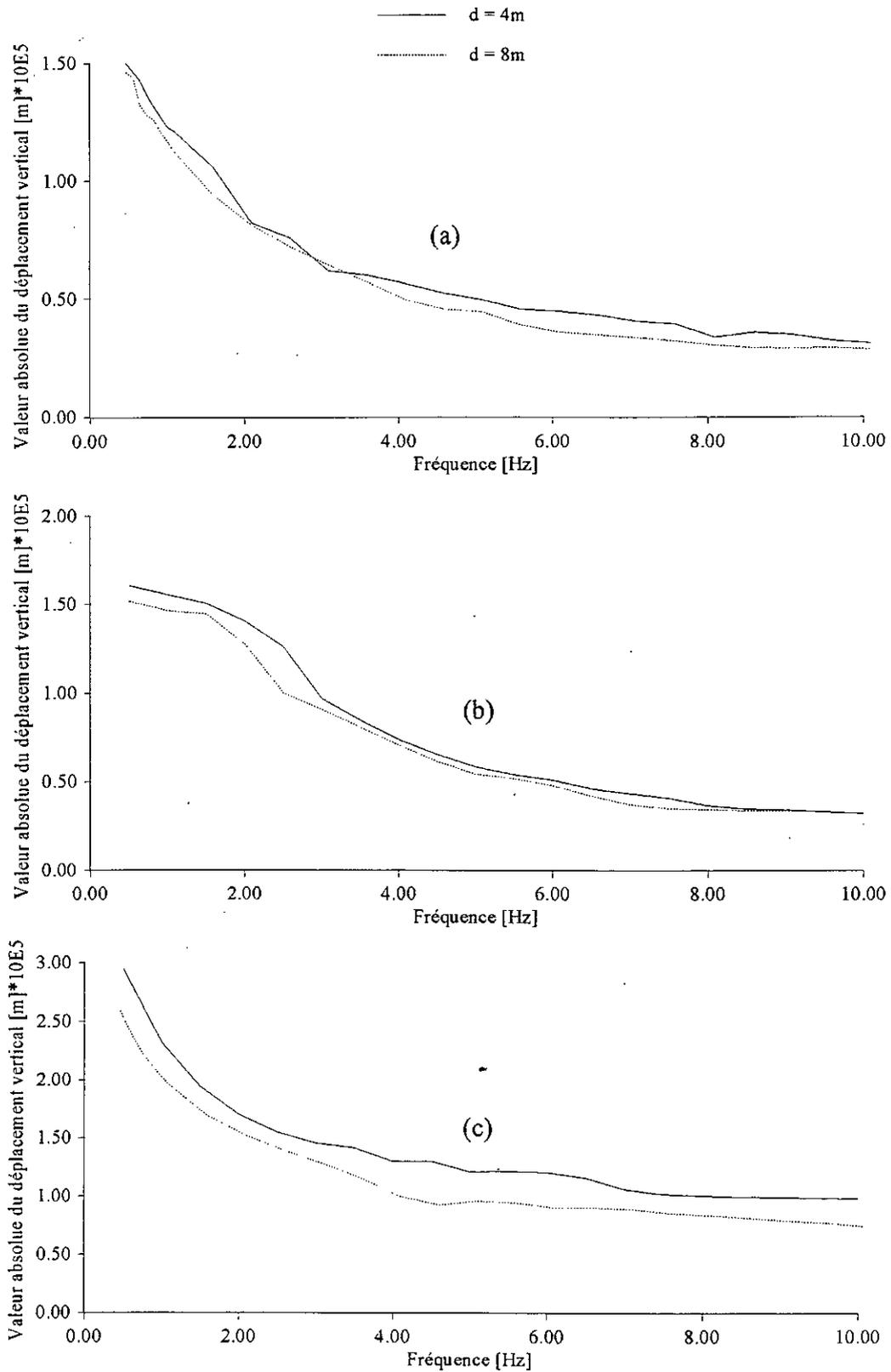
**Figure 5.7 :** Amplitude des déplacements verticaux au point A : effet de l'enterrement  
 (a) : Chargement au point A (b) : Chargement au point D (c) : chargement aux points A et D simultanément



**Figure 5.8 :** Amplitude des déplacements verticaux au point B :effet de l'enterrement  
 (a) :Chargement au point A (b) : Chargement au point D (c) :chargement aux points A et D simultanément



**Figure 5.9 :** Amplitude des déplacements verticaux au point C : effet de l'enterrement  
 (a) :Chargement au point A (b) : Chargement au point D (c) :chargement aux points A et D simultanément



**Figure 5.10** : Amplitude des déplacements verticaux au point D : effet de l'enterrement  
 (a) : Chargement au point A (b) : Chargement au point D (c) : chargement aux points A et D simultanément

## 5.5 Etude de l'effet du rapport entre les modules d'élasticité du sol et du tunnel ( $E_t/E_s$ ) :

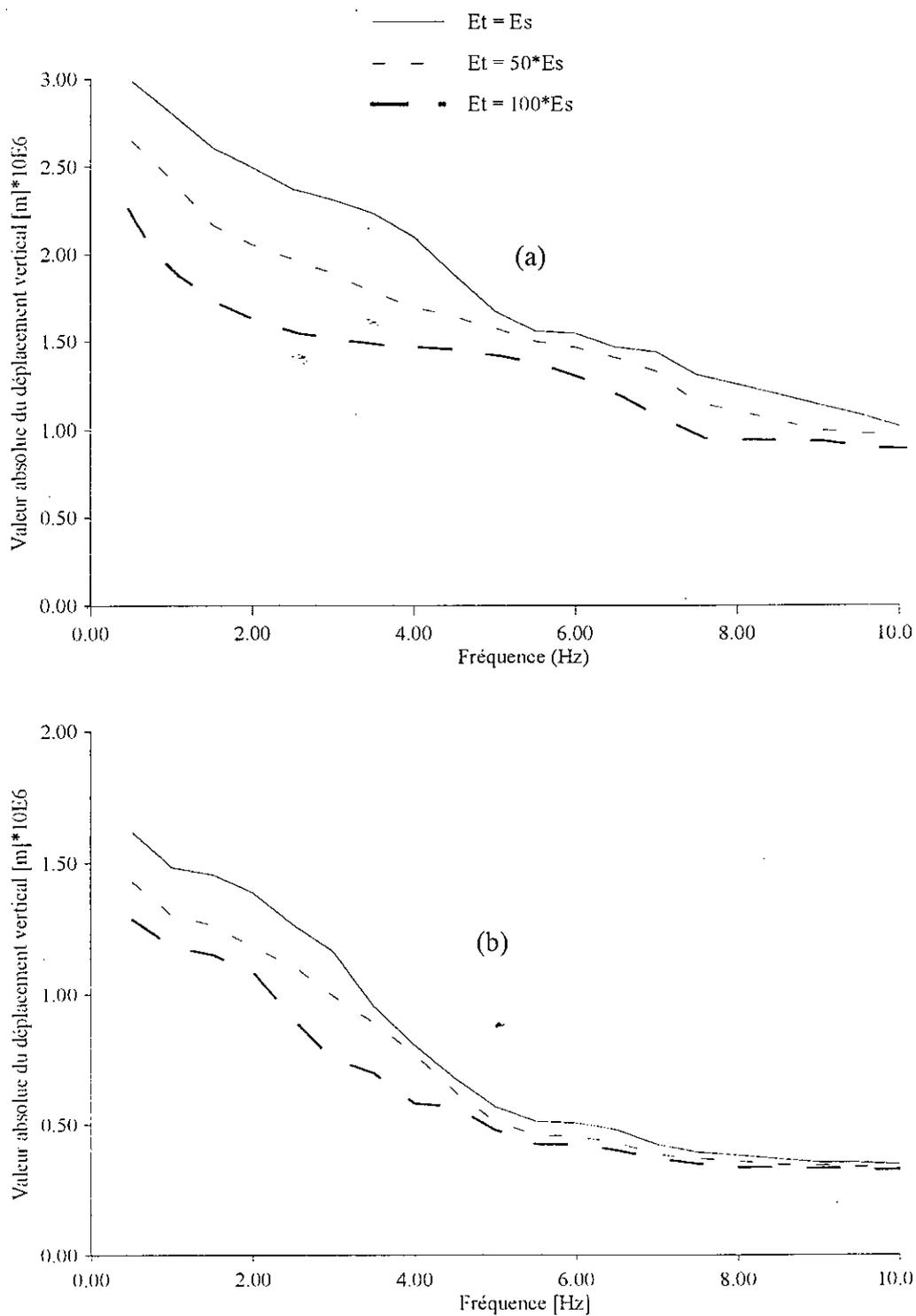
Le comportement dynamique du tunnel dépend essentiellement de sa rigidité et de celle du sol environnant. Si le tunnel est considéré infiniment rigide la réponse ne dépendrait que des caractéristiques du sol et de la fréquence de l'excitation dynamique ; le tunnel effectuerait un mouvement de corps rigide dans un milieu semi-infini flexible. Si par contre il est considéré flexible, cas le plus réaliste, son comportement serait affecté en plus, par l'interaction mutuelle entre les deux milieux sol-tunnel.

Le paramètre principal caractérisant la flexibilité du système complet sol-tunnel, et le rapport de rigidité  $E_t/E_s$ . Aux fins d'apprécier l'influence de ce paramètre sur la réponse du système, on trace dans les figures (5.11, 5.12, 5.13 et 5.14) les variations des déplacements verticaux calculés aux points A, B, C et D en fonction des fréquences d'excitation des chargements  $F^A$  et  $F^D$ , pour des valeurs fixées du paramètre  $E_t/E_s = 1, 50$  et  $100$ .

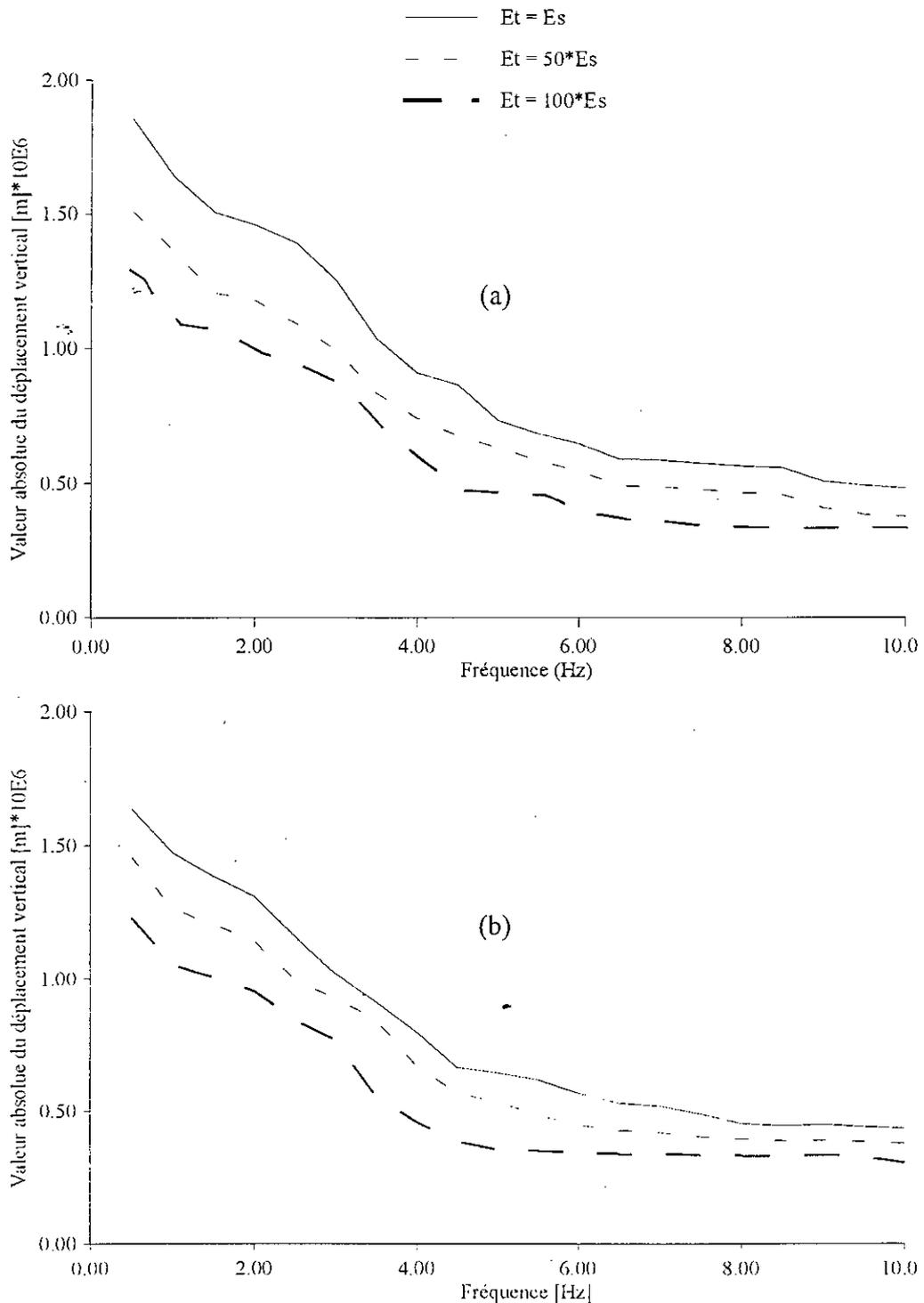
La profondeur d'enterrement du tunnel est fixée à  $d = 4\text{m}$ . Le module d'élasticité du sol  $E_s$  est égal à  $E_s = 2.66 \cdot 10^5 \text{ KN/m}^2$ , et le module d'élasticité du tunnel est varié de telle sorte à avoir le rapport  $E_t/E_s = 1, 50, 100$ . Les autres données géométriques et mécaniques sont prises identiques à celles données dans le tableau 5.1.

Les figures (5.11, 5.12, 5.13 et 5.14) montrent que les déplacements aux points A, B, C et D sont maximaux pour le rapport  $E_t/E_s$  égal à 1. De plus, on peut remarquer que ces déplacements diminuent quand le rapport  $E_t/E_s$  augmente. Cette diminution est plus prononcée pour les points de surface libre A et B pour le cas du chargement  $F^A$  (figures 5.11-a et 5.12-a), alors que le contraire est observé pour les points de la frontière interne du tunnel C et D. C'est-à-dire que la diminution des déplacements verticaux aux points C et D est plus prononcée pour le cas du chargement sous terrain  $F^D$  (figures 5.13-b et 5.14-b). Ceci nous permet d'affirmer que l'influence de la rigidité du tunnel sur la réponse du système, en terme des déplacements verticaux, est plus importante au niveau du tunnel, lorsque le chargement est appliqué dans le tunnel. Cette influence devient relativement importante au niveau de la surface libre quand le chargement est appliqué sur cette dernière.

Bien que cette application traite l'influence du rapport de rigidité, il est à signaler que ce paramètre n'est pas le seul critère pour spécifier si le système est rigide ou flexible, lorsque celui-ci est soumis à un chargement dynamique. La distribution spatiale et les variations temporelles des perturbations dynamiques sont aussi des facteurs décisifs dans la détermination du comportement flexible du système [69].



**Figure 5.11** : Amplitude des déplacements verticaux au point A : effet du rapport  $E_t/E_s$   
(a) : Chargement au point A (b) : Chargement au point D



**Figure 5.12** : Amplitude des déplacements verticaux au point B : effet du rapport  $E_t/E_s$   
(a) : Chargement au point A (b) : Chargement au point D

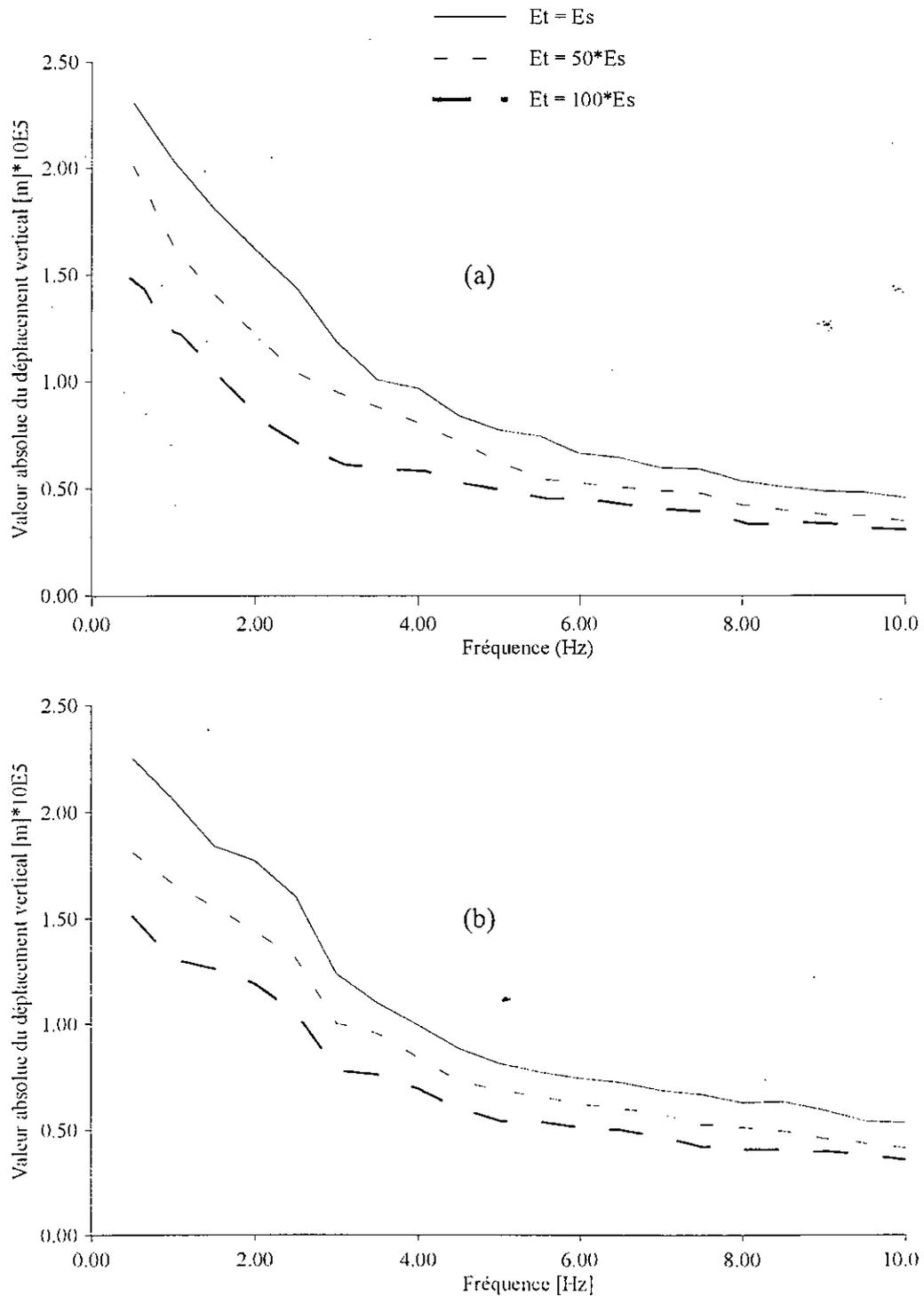


Figure 5.13 : Amplitude des déplacements verticaux au point C : effet du rapport  $E_t/E_s$

(a) : Chargement au point A (b) : Chargement au point D

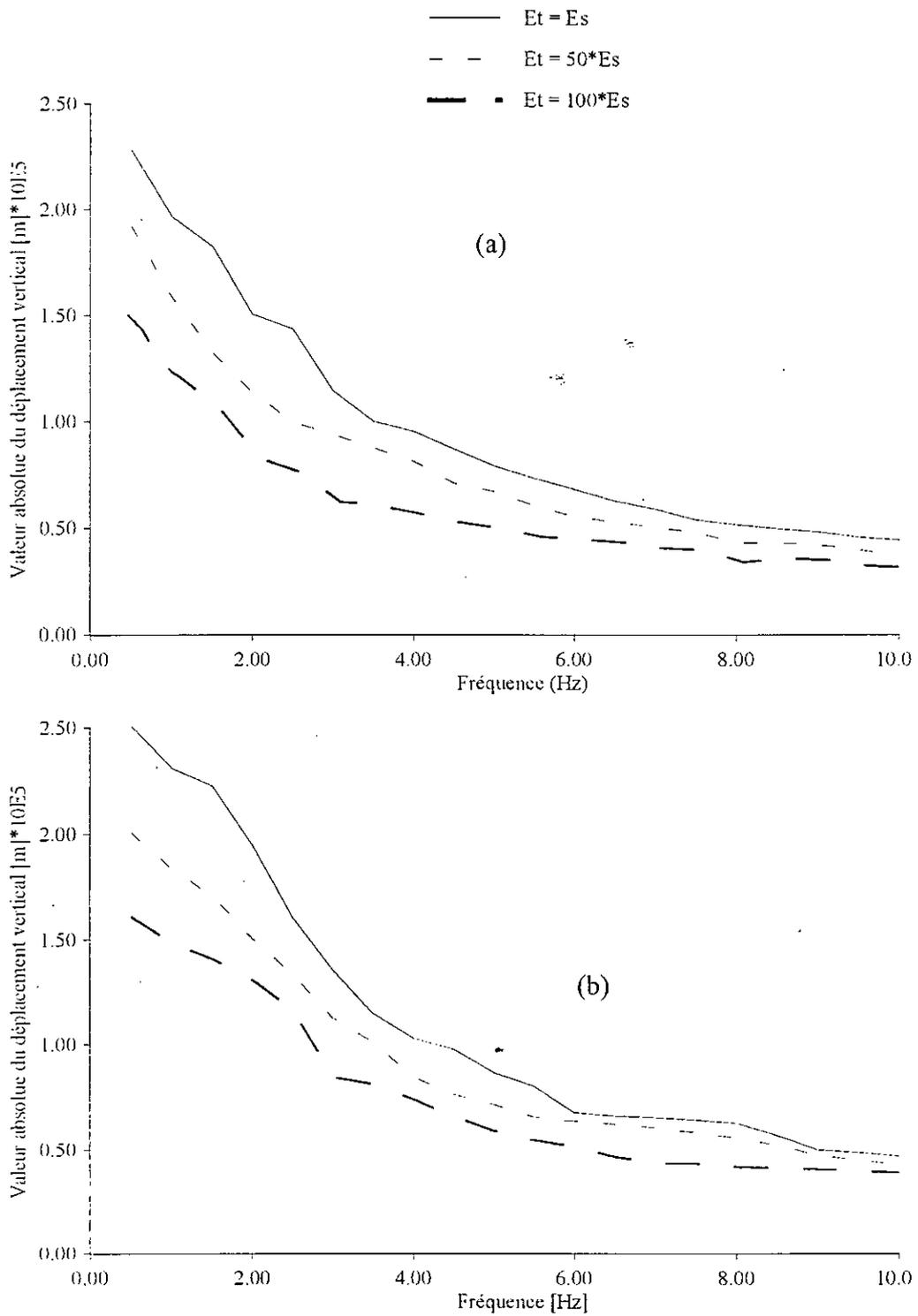


Figure 5.14 : Amplitude des déplacements verticaux au point D : effet du rapport  $E_t/E_s$   
(a) : Chargement au point A (b) : Chargement au point D

## 5.6 Effet de la fréquence du chargement

Dans toutes les études paramétriques présentées précédemment, les déplacements observés diminuent d'une manière monotone quand la fréquence d'excitation augmente. D'autre part, l'influence des paramètres étudiés sur les déplacements devient moins significative pour les hautes fréquences. Ce phénomène peut être expliqué physiquement ; lorsque le chargement appliqué est à basse fréquence, il engendre des ondes à grandes longueurs d'ondes ce qui conduit à des grands déplacements. Dans le cas où le chargement est à haute fréquence, les longueurs d'ondes engendrées sont petites ce qui induit des déplacements à petites amplitudes.

En outre, il est à rappeler que le choix du taux d'amortissement critique  $\beta$  petit, permet d'éliminer l'effet des fréquences propres de vibrations du système. Ceci est ressorti dans les courbes précédentes par l'absence des pics.

# CONCLUSION GENERALE

*"Celui qui accroît son savoir, accroît sa douleur."*

## CONCLUSION GENERALE

La méthode des équations intégrales aux frontières dans le domaine des fréquences est utilisée pour l'analyse des effets d'interactions dynamiques, dus aux chargements routiers et/ou souterrains, sur le comportement dynamique du système sol-tunnel. Le système sol-tunnel typique pour lequel l'étude a été réalisée est constitué d'une route urbaine se trouvant en surface libre et d'un tunnel construit en dessous, à une profondeur ( $d$ ). Notre choix pour la méthode des éléments de frontières (B.E.M) est motivé par les avantages qu'elle présente sur les autres méthodes numériques.

Dans le présent travail la méthode des éléments de frontières (B.E.M.) est développée pour les deux cas de l'élément constant et de l'élément quadratique. Au cours de ce développement une attention particulière est donnée aux calculs d'intégrales élémentaires singulières. A cet effet, deux techniques de calcul d'intégrales singulières ont été utilisées.

- La première, donnée par la référence [38], est utilisée pour le cas de l'élément constant. Cette technique consiste à enlever la singularité des fonctions de Bessel qui figurent dans les solutions fondamentales, en utilisant les formules de récurrences des fonctions de Bessel, ensuite les intégrales sont calculées analytiquement.
- La seconde, développée dans cette étude, concerne l'élément quadratique. Elle consiste à développer les fonctions de Bessel en série et les écrire sous leur forme polynomiale, puis chaque fonction est divisée en deux fonctions, l'une représentant la partie régulière et l'autre, la partie singulière. L'intégrale de la partie régulière est effectuée en utilisant la formule de quadrature de Gauss standard. Quant à la partie singulière, elle est intégrée, en utilisant une formule d'intégration spéciale.

Deux codes de calcul l'un utilisant l'élément constant et l'autre l'élément quadratique, ont été élaborés dans cette étude, aux fins d'effectuer les investigations numériques. Dans les deux programmes nous avons introduit le concept de la sous-structuration qui permet de mettre en évidence l'existence de deux milieux différents, à savoir un milieu semi-infini qui correspond au sol et un milieu borné qui représente le tunnel. Ces deux milieux sont couplés, en imposant les conditions d'équilibre et les conditions de compatibilité au niveau de l'interface sol-tunnel.

L'introduction du concept de la sous-structuration permet une modélisation plus réaliste et conduit à des matrices globales  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  bandes. Néanmoins, il faut signaler que son utilisation soulève quelques difficultés d'ordres numériques. Citons à titre d'exemple : le réarrangement d'une partie des matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  du tunnel, afin de les assembler correctement dans les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  globales.

La comparaison des deux programmes de calculs nous a permis d'examiner les performances des deux éléments quadratique et constant. Cette application révèle que l'utilisation de l'élément quadratique nous donne d'excellents résultats. Quant à l'élément constant, avec un nombre d'éléments(nœuds) égal au double du nombre de nœuds utilisé dans le cas d'élément quadratique, les résultats obtenus sont globalement médiocres. Par conséquent, pour une analyse du comportement dynamique des structures enterrées, correct, il est recommandé d'utiliser l'élément quadratique. Les études paramétriques menées dans cette étude, concernent l'effet de l'enterrement ( $d$ ) du tunnel et le rapport de rigidité du tunnel sur celle du sol  $E_t/E_s$ . Les conclusions qui peuvent être tirées des ces deux applications sont :

1. Les déplacements verticaux diminuent si la profondeur d'enterrement ( $d$ ) du tunnel augmente.
2. L'influence de l'enterrement sur l'amplitude des déplacements verticaux n'est pas très significative.
3. La variation de l'amplitude des déplacements verticaux est plus prononcée au niveau des points de chargement.
4. Les déplacements verticaux diminuent si le rapport de rigidité  $E_t/E_s$  augmente, bien que cette diminution n'est pas très importante.
5. L'influence du rapport de rigidité  $E_t/E_s$  sur la réponse du système, en terme de déplacements verticaux, est plus importante au niveau du tunnel.
6. Les déplacements obtenus pour les différentes applications effectuées dans cette étude, diminuent d'une manière monotone quand la fréquence d'excitation augmente.
7. L'influence des paramètres étudiés sur les déplacements devient moins significative pour les hautes fréquences.

Finalement, en guise de recommandations, il serait intéressant de généraliser cette étude pour le cas tridimensionnel et pour des cas de chargements arbitraires(chargement uniforme, concentré, sismique, combinaison des chargements etc...). Pour une meilleure compréhension du comportement dynamique du système, la détermination de la réponse dans le domaine temporel s'impose. Le calcul de cette réponse peut-être effectué, soit en exploitant directement les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel, en les transformants par le biais de la transformée de Fourier rapide (FFT) dans le domaine temporel. Ou bien, en utilisant la méthode des équations intégrales aux frontières dans le domaine temporel. La mise en œuvre de cette méthode est relativement plus compliquée par rapport à son homologue dans le domaine fréquentiel, mais permet, en plus de la détermination de la réponse transitoire du système, l'extension de l'étude au cas non linéaire (non linéarité matérielle).

## REFERENCES

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, I. A., *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1964.
- [2] Antes, H., *A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media*, Finite Element in Analysis and Design, 1985, 3, 313-323.
- [3] Antes, H., *Dynamic interaction analysis in wave propagation problems by a time-dependent boundary element method*, in G. Kuhn and H. Mang (eds), *Discretization Methods in Structural Mechanics*, Springer, Berlin, 1990, pp. 105-114.
- [4] Antes, H. & von Estorff, O., *Numerical studies for vibration isolation by trenches*, in German SIA-Documentation DO79, Zürich, Switzerland, 1991, pp. 143-150.
- [5] Antes, H. & Latz, K., *Soil-structure-fluid interaction*. In *Boundary Element Techniques in Geomechanics*, (eds) G. Manolis & T. G. Davis., Elsevier, Amsterdam, 1993, ch. 12.
- [6] Antes, H. & von Estorff, O., *Seismic response amplification due to topographic influences*, Proc. 9<sup>th</sup> World Conf. on Earthq. Engng, Tokyo/Kyoto, 1988, 3, pp III411-6.
- [7] Antes, H. & von Estorff, O., *Dynamic soil-structure interaction by BEM in the time and frequency domain*, Proc. 8<sup>th</sup> Euro. Conf. on Earthq. Engng, Vol. 2, Lisbon, pp 5.5/33-40.
- [8] Antes, H. & von Estorff, O., *Dynamic response analysis of rigid foundations and of elastic structures by boundary element procedures*, Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 1989, 8, 68-74.
- [9] Antes, H. & von Estorff, O., *Dynamic response of 2D and 3D block foundations on a half-space with inclusions*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1994, 13, 305-311.
- [10] Aoki, Y. Hayashi, S., *Spectra for earthquake resistive design of underground long structures*, in Proc. 5<sup>th</sup> World Conf. Earthq. Engng., Rome, 1973, paper N° 61.
- [11] Balendra, T., Thambiratnam, D. P., Coh, C. G. & Lee, S. L., *Dynamic interaction of twin tunnels*, in Borelli A. P. and Chong K. P. (eds), *Engineering Mechanics in Civil Engineering*, ASCE, New York, 1984, pp. 368-371.
- [12] Banerjee, P. K. & Butterfield, R., *Boundary element methods in engineering science*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [13] Bayo, E. & Wilson, H. L., *Solution of the three dimensional soil-structure interaction problem in the time domain*, in Proc. 8<sup>th</sup> World Conf. Earthquake Engng., San Francisco, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1984, pp.1961-1971.
- [14] Beliman, R. E., Kalaba, R. E. & Lockett, J., *Numerical inversion of the Laplace transform*. American Elsevier, New York, 1966.
- [15] Beskos, D. E., *Boundary element methods in dynamic analysis*, Applied Mechanic Reviews, 1987, 40, 1-23.

- [16] Beskos, D. E., *Wave propagation through ground*, in Boundary Element Techniques in Geomechanics (eds) G. D. Manolis & T. G. Davies, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993, pp.259-406.
- [17] Beskos, D. E., *Boundary element methods in dynamic analysis Part II*, Applied Mechanics Reviews, 1997, 50, 149-197.
- [18] Bielak, J., R. C. Mac Camy & D. S. McGhee, *On the coupling of finite element and boundary integral methods*, in S. K. Datta (ed), Earthquake Source Modelling, Ground Motion, and Structural Response, AMD, New York, 1984, 60, 115-132.
- [19] Bonnet, M., *Equations intégrales et éléments de frontière*, CNRS Editions/ Eyrolles, 1995.
- [20] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. & Wrobel, L. C., *Boundary element techniques*, Springer, New York, 1984.
- [21] Chouh, N. Le, R. & Schmid, G., *Impediment of surface waves in soil*, First Int. Conf. On Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, Strasbourg, France, 1991.
- [22] Cole, D. M., Kosloff, D. D. & Minster, J. B., *A numerical boundary integral equation method for elastodynamics*, Bulletin of the Seismological Society of America, 1978, 68, 1331-1357.
- [23] Constantopoulos, I. V., Motherwell, J. T. & Hall, J. R., *Dynamic analysis of tunnels*, in W. Wittke (ed.), Numerical Methods in Geomechanics-Aachen, A. A. Balkema, Rotterdam, 1979, pp. 841-848.
- [24] Cruse, T. A. & Rizzo, F. J., *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I*, J. Math Anal. Appl., 1968, 22, 244-259.
- [25] Cruse, T. A., *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II*, J. Math Anal. Appl., 1968, 22, 341-355.
- [26] Datta, S. K. & Shah, A. H., *Dynamic response of buried pipelines and tunnels*, in Earthquake Ground Motion and its Effects on Structures, (ed) S. K. Davis, ASME, New York, 1982, pp.181-197.
- [27] Datta, S. K. & Shah, A. H. & Wong, K. C., *Dynamic stresses and displacements in buried pipe*, J. Engng. Mech., ASCE, 1984, 110, 1451-1466.
- [28] Dawkins, W. P., *Analysis of tunnel liner-packing systems*, J. Engng. Mech. Div., ASCE, 1969, 95, 679-693.
- [29] Dominguez, J. & Alarcon, E., *Elastodynamics*, Chapter 7, Progress in Boundary Element Methods, (ed.) C. A. Brebbia, Pentech Press, Plymouth, 1981, 1, 213-257.
- [30] Dominguez, J., *Dynamic stiffness of rectangular foundations*, M.I.T. Research Report N° R-78-20, Civil Engineering Department, 1978.
- [31] El Akily, N. & Datta, S. K., *Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space*, Earthq. Engng. Struct. Dyn., 1980, 8, 469-477.
- [32] El Akily, N. & Datta, S. K., *Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space: numerical results*, Earthq. Engng. Struct. Dyn., 1981, 9, 477-489.
- [33] Garnet, H. Crouzet-Pascal, J., *Transient response of a circular cylinder of arbitrary thickness, in an elastic medium, to a plane dilatation wave*, J. Appl. Mech., ASME, 1966, 33, 521-531.

- [34] Gazetas, G., *Analysis of machine foundation vibration: state of the art*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering 1981, 2, 2-42.
- [35] Guiggiani, M. & Gigante, A., *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method*, ASME, J. Appli. Mech., 1990, 57, 906-915.
- [36] Guiggiani, M., Krishnasamay, G., Rudolphi, T. J. & Rizzo, F. J., *A general algorithm for the numerical solution of hypersingular in the boundary integral equations*, ASME, J. Appli. Mech., 1992, 59, 604-614.
- [37] Guiggiani, M., *Hypersingular formulation for the boundary stress evaluation*, Engng. Anal. with Bound. Elem., 1994, 14, 169-180.
- [38] Hadid M., *Analyse de l'interaction cinématique déterministe et stochastique pour fondations rigides bidimensionnelles par une approche intégrale aux frontières*, Magister en génie-civil, Ecole Nationale Polytechnique, 1995.
- [39] Hamada, M., *Earthquake observation on two submerged tunnels and numerical analysis*, in Proc. 8<sup>th</sup> World Conf. Earthquake Engng., San Francisco, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1984, pp. 673-680.
- [40] Huh, Y. & Schmid, G., *Dynamic response of multi-storey buildings on layered soil due to earthquake*, Proc. Int. Conf. on Boundary Elements, Peking, China, (ed.) Q. Du, Pergamon, Oxford, 1986, pp. 697-706.
- [41] Hwang, R. N. & Lysmer, J., *Response of buried structures to travelling waves*, J. Geotech. Engng. Div. ASCE, 1981, 107, 183-200.
- [42] Karabalis, S. & Bekos, D. E., *Dynamic response of 3D flexible foundations by time domain BEM and FEM*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1985, 4, 91-101.
- [43] Kausel, E. & Peek, R., *Boundary integral method for stratified soils*, Report No. R82-50, M.I.T, Dept of Civil Engng, Cambridge, MA, 1985.
- [44] Kausel, E. & Roesset, J. M., *Frequency domain analysis of undamped systems*, J. Engng. Mech. ASCE, 1994, 118, 721-734.
- [45] Kitahara, M., Ando, T. & Muranishi, Y., *On the effect of viscosity for the dynamic strain of underground structures*, In Theory and Applications of Boundary Element Methods, (eds) M. Tanaka & Q. Du, Pergamon Press, Oxford, 1987, pp.75-84.
- [46] Kobayashi, S. & T. Kawakami, *Application of a BE-FE combined method to analysis of dynamic interactions between structure and viscoelastic soil*, in Boundary Elements VII, (eds) C. A. Brebbia et al., Berlin, Springer-Verlag, 1985, pp. 6.3-6.12.
- [47] Kobayashi, S. & Nishimura, N., *Transient stress analysis of tunnels and caverns of arbitrary a shape due to travelling waves*, in developments in Boundary Element Methods-III! (eds) P. K. Banerjee & R. P. Shaw, Applied Science, London, 1982, pp.177-210.
- [48] Kobayashi, S. & Nishimura, N., *Analysis of soil-structure interaction by boundary integral equation method*, in Numerical Methods in Engineering (ed) P. Lascaux, Pluralis, Paris, 1983, pp. 353-362.
- [49] Kuesel, T. R., *Earthquake design criteria for subways*, J. Struct. Div. ASCE, 1969, 95, 1213-1231.

- [50] Lee, T. H. & Wesley, D. A., *A three-dimensional nonlinear soil-structure interaction analysis considering the elasto-plastic soil behaviour*, in Proc. 8<sup>th</sup> World Conf. Earthquake Engng., San Francisco, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1984, pp. 953-963.
- [51] Liu, S. W., Datta, S. K. & Khair, K. R., *Three dimensional dynamics of pipelines buried in backfilled trenches due to oblique incidence of body waves*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1991, 10, 182-191.
- [52] Luco, J. E., Wong, L. H. & De Barros, F. C. P., *Three dimensional response of a cylindrical canyon in a layered half-space*, Earthq. Engng. Struct. Dyn., 1990, 19, 799-817.
- [53] Manolis, G. D. & Beskos, D. E., *Dynamic response of framed underground structures*, Comput. and Struct. 1982, 15, 521-531.
- [54] Manolis, G. D., *Dynamic behaviour of underground structures*, Shock. Vibrat. Digest, 1983, 15 (11), 7-18.
- [55] Manolis, G. D., *A comparative study on three boundary element approaches to problems in elastodynamics*, Int. J. Num. Meths. Engng., 1983, 19, 73-91.
- [56] Manolis, G. D. & Beskos, D. E., *Underground and lifeline structures*, in Computer Analysis and Design of Earthquake Resistant Structures, (eds) Beskos D. E. & Anagnostopoulos S. A., Southampton Computational Mechanics Publications, 1997, pp. 775-837.
- [57] Manolis, G. D. & Beskos, D. E., *Boundary element methods in elastodynamics*, Unwin Hyman (now Chapman & Hall), London, 1988.
- [58] Manolis, G. D. & Beskos, D. E., *Dynamic response of lined tunnels by an isoparametric boundary element method*, Compt. Meth. Appl. Mech. Engng., 1983, 36, 291-307.
- [59] Mansur, W. J. & Brebbia, C. A., *Numerical implementation of boundary element method for two-dimensional transient scalar wave propagation problems*, Appl. Math. Model. 1982, 6, 299-306.
- [60] Moore, I. D. & Guan, F., *Three-dimensional dynamic response of lined tunnels due to incident seismic waves*, Earth. Engng. and Struct. Dyn., 1996, 25, 357-369.
- [61] Niwa, Y., Kobayashi, S. & Kitahara, M., *Eigenfrequency analysis of a plate the integral equation method*, in Theoretical Applied Mechanics, University of Tokyo Press, Tokyo, 1981, pp.287-306.
- [62] Okamoto, S. (ed), *Earthquake resistant design features of submerged tunnels in Japan*, in Earthquake Resistant Design for Civil Engineering Structures, Earth Structures and Foundations in Japan, Japan Soc. Civil Engng, Tokyo, 1980, pp. 189-247.
- [63] Okamoto, S. & Tamura, C., *Behaviour of subaqueous tunnels during earthquakes*, Earthq. Engng. Struct. Dyn., 1973, 1, 253-266.
- [64] Owen, G. N. & Scholl, R. E., *Earthquake engineering of large underground structures*, Report No FHWA/RD-80/ 195 prepared by URS/J. A. Blume & Associates, Engineers, for the Federal Highway Administration, Washington, D. C., 1981.
- [65] Robinson, A. R., *The Transmitting boundary again*, in Structural and Geotechnical Mechanics (ed) W. J. Hall, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970, pp.163-177.
- [66] Spyarakos, C. C. & Beskos, D. E., *Dynamic analysis of embedded rigid strip-foundations by time domain boundary element method*, Proc. 7<sup>th</sup> Int. Conf. Boundary Element Methods, Como, 1985.

- [67] Spyrakos, C. C. & Beskos, D. E., *Dynamic response of flexible strip foundations by boundary and finite elements*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1986, 5, 84-96.
- [68] Spyrakos, C. C. & Beskos, D. E., *Dynamic response of rigid strip-foundations by time domain boundary element method*, Int. J. Numer. Meths. Engng. 1986.
- [69] Spyrakos, C. C. & Antes, H., *Time domain boundary element method approaches in elastodynamics : comparative study*, Compt. & Struct. 1986, 24, 529-535.
- [70] Stamos, A. A. & Beskos, D. E., *Dynamic soil-structure interaction in 3D underground structures. In Boundary element XIV*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992, 2, 169-178.
- [71] Stamos, A. A. & Beskos, D. E., *Dynamic analysis of large 3-D underground structures by the B.E.M.* Earthq. Engng. Stuct. Dyn., 1995, 24, 917-934.
- [72] Stamos, A. A. & Beskos, D. E., *3D seismic response analysis of long lined tunnels in half-space*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1996, 15, 111-118.
- [73] Stamos, A. A. & Beskos, D. E., *Large 3-D underground structures by the B.E.M.* Earthq. Engng. Struct. Dyn., 1995, 24, 917-934.
- [74] Tadeu, A. J. B., Kausel, E. & Vrettos, C., *Scattering of waves by subterranean structures via the boundary element method*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1996, 15, 387-397.
- [75] Telles, J. C. F., *A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals*, Int. J. Numer. Meth. in Engng., 1987, 24, 959-973.
- [76] Triantafyllidis, Th. & Prange, B., *Dynamic subsoil-coupling between rigid rectangular foundations*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1987, 6, 164-179.
- [77] Underwood, P. & Geers, T. L., *Doubly asymptotic boundary element analysis of dynamic soil-structure interaction*, Int. J. Solids Struct., 1981, 17, 687-697.
- [78] Vardoulaski, I. G. & Beskos, G. E., Leung, K. L., Dasgupta, B. & Sterling, R. L., *Computation of vibration levels in underground space*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstrs., 1987, 24, 291-298.
- [79] Von Estorff, O. & Kausel, E., *Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems*, Earthquake Engineering Structural Dynamics, 1989, 18, 1065-1075.
- [80] Von Estorff, O., *Dynamic response of elastic blocks by time domain BEM and FEM*, Computers and Structures, 1991, 38, 289-300.
- [81] Von Estorff, O., Païs, L., Kausel, E., *Some observations on time domain and frequency domain boundary element*. Int. J. Num. Meths. Engng., 1990, 29, 785-800.
- [82] Von Estorff, O. & Antes, H., *Dynamic response of tunnel structures*, in Proc. of European Conference on Structural Dynamics, Bochum, Germany, June 5-7, 1990.
- [83] Von Estorff, O. & Antes, H., *Vibration isolation analyses in the case of transient excitations by a coupled BE/FE procedure*. Proc. Of the Int. Conf. on Computational Engineering Science (ICES 91), Melbourne 1991.
- [84] Von Estorff, O. & Antes, H., *In dynamic response of tunnel structures*. (eds) W. B. Krutzig et al. Structural Dynamics, Belkema, Rotterdam, 1991, pp. 803-810.

- [85] Von estorff, O. & Prabucki, M. J., *Dynamic response in the time domain by coupled boundary and finite elements*, Computational Mechanics, 1990, 6, 35-46.
- [86] Von Estorff, O., Stamos, A. A., Beskos, D. E. & Antes, H., *Dynamic interaction effects in underground traffic systems*, Eng. Analy. Boundary Elements, 1991, 8, 167-175.
- [87] Von Estorff, O., *Analysis of the dynamic interaction between structures and surrounding media by time depending BEM*, (In German), Ruhr-University Bochum, TWM, 1986, pp. 86-96.
- [88] Von estorff, O & Coyette, J. P., *Application of the boundary element method to elastodynamic problems*, XXI. International Finite Element Congress, Baden-Baden, 1992.
- [89] Wolf, J. P., *Soil-structure analysis in time domain*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [90] Wong, K. C., Shah, A. H. & Datta, S. K., *Dynamic stresses and displacements in buried tunnel*, J. Engng. Mech., ASCE, 1985, 111, 218-234.
- [91] Yuan, H. R. & Walker, R. E., *The investigation for a sample soil-structure model*. in Dynamic Waves in Civil Engineering, (eds) Howells, D. A. et al., Wiley, New York, 1970, pp. 247-266.
- [92] O. C. ZIENKIEWICZ, C. EMSON, & P. BETTESS, "A novel boundary infinite element", Int. J. Num. Meths. Engng., 19, 333-404, 1983.
- [93] O.C. ZIENKIEWICZ & P. BETTESS, "Infinite elements in the study of fluid-structure interaction problems", Computing Methods in Applied Sciences, 2<sup>nd</sup> International Symposium, 15-19 December 1975.
- [94] O.C. ZIENKIEWICZ & R.L. TAYLOR, "La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires", Volume 1. AFNOR technique, 1991.
- [95] O.C. ZIENKIEWICZ & R.L. TAYLOR, "The finite element method. Solid and fluid mechanics. dynamics and non-linearity", Volume 2 Mc. Graw-Hill Book Company, 1991.

## ANNEXE A. INTEGRATION NUMERIQUE

Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i f(a_i) \quad (\text{A1.1})$$

Nombre $i$	Abscisse $\pm a_i$	Poids $w_i$
Ordre $n=1$		
1	0.0000000000000000	2.0000000000000000
Ordre $n=2$		
1	0.5773502691896257	1.0000000000000000
Ordre $n=3$		
1	0.0000000000000000	0.8888888888888889
2	0.7745966692414833	0.5555555555555556
Ordre $n=4$		
1	0.3399810435848562	0.6521451548625461
2	0.8611363115940525	0.3478548451374538

Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Laguerre

$$\int_{-1}^{+1} e^{-x} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i f(a_i) \quad (\text{A1.2})$$

Nombre $i$	Abscisse $a_i$	Poids $w_i$
Ordre $n=1$		
1	0.1000000000000000E+01	0.1000000000000000E+01
Ordre $n=2$		
1	0.5857864376269049E+00	0.8535533905932737E+00
2	0.3414213562373095E+01	0.1464466094067262E+00
Ordre $n=3$		
1	0.4157745567834790E+00	0.7110930099291730E+00
2	0.2294280360279041E+01	0.2785177335692408E+00
3	0.6289945082937479E+01	0.1038925650158613E-01
Ordre $n=4$		
1	0.3225476896193923E+00	0.6031541043416336E+00
2	0.1745761101158346E+01	0.3574186924377996E+00
3	0.4236620296921127E+01	0.3888790851500538E-01
4	0.9395070912301133E+01	0.5392947055613274E-03

## ANNEXE A2.

### Développement de $K_0(z)$ en série

La fonction de Bessel modifié d'ordre 0,  $K_0(z)$  peut être développée en série et s'écrit sous la forme suivant[1] :

$$K_0(z) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{i=1}^7 Q_i y_1^{(i-1)} + \sum_{i=1}^7 P_i y_2^{(i-1)} \quad \text{si } |z| \leq 2 \quad (\text{A2.1})$$

$$\text{avec : } z = \frac{sr}{c} \quad y_1 = \frac{z^2}{3.75} \quad y_2 = \frac{z^2}{4} \quad (\text{A2.2})$$

et les coefficients  $Q_i$  et  $P_i$  sont donnés dans le tableau A2.1

i	$Q_i$	$P_i$
1	1.25331414E+00	-0.57721566E+00
2	-0.7832358E-01	0.42278420E+00
3	0.2189568E-01	0.23069756E+00
4	-0.1062446E-01	0.3488590E-01
5	0.587872E-02	0.262698E-02
6	-0.251540E-02	0.10750E-03
7	0.53208E-03	0.74E-05

Tableau A2.1

Pour l'élément quadratique de référence (figure A2.1), nous adopterons le paramétrage suivant :

$$r = l_1 f(\xi) \quad (\text{A2.3})$$

tel que :

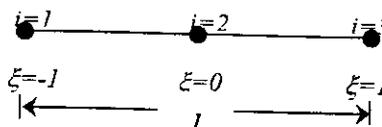


Figure A2.1 - Élément de référence

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\xi}{2} & \text{pour } i = 1 \\ \xi & \text{pour } i = 2 \\ \frac{1-\xi}{2} & \text{pour } i = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad l_1 = \begin{cases} l & \text{pour } i = 1 \\ \frac{l}{2} & \text{pour } i = 2 \\ l & \text{pour } i = 3 \end{cases}$$

En combinant les équations (A2.2) et (A2.3) et les injectons dans (A2.1) nous obtiendrons :

$$K_0(z) = -\ln\left(\frac{s l_1}{2c}\right) \sum_{i=1}^7 (Q_i y_1^{(i-1)} + P_i y_2^{(i-1)}) + \ln\left(\frac{1}{f(\xi)}\right) \sum_{i=1}^7 Q_i y_1^{(i-1)} \quad (\text{A2.4})$$

Si note :

$$K_{01}(z) = -\ln\left(\frac{s l_1}{2c}\right) \sum_{i=1}^7 (Q_i y_1^{(i-1)} + P_i y_2^{(i-1)}) \quad (\text{A2.5})$$

$$K_{02}(z) = \sum_{i=1}^7 Q_i y_1^{(i-1)} \quad (\text{A2.6})$$

Alors l'équation (A2.4) s'écrit :

$$K_0(z) = K_{01}(z) + \ln\left(\frac{1}{f(\xi)}\right) K_{02}(z) \quad (\text{A2.7})$$

## Développement de $K_1(z)/z$ en série

La fonction de Bessel modifié d'ordre 1,  $K_1(z)$  peut être développée en série et s'écrit sous la forme suivant[1] :

$$K_1(z) = z \times \ln\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{i=1}^7 Q_i y_1^{(i-1)} + \frac{1}{z} \sum_{i=1}^7 P_i y_2^{(i-1)} \quad \text{si } |z| \leq 2 \quad (\text{A2.8})$$

$$\frac{K_1(z)}{z} = \ln\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{i=1}^7 Q_i y_1^{(i-1)} + \frac{1}{z^2} \sum_{i=1}^7 P_i y_2^{(i-1)} \quad (\text{A2.9})$$

$$\text{avec : } z = \frac{s r}{c} \quad y_1 = \frac{z^2}{3.75} \quad y_2 = \frac{z^2}{4} \quad (\text{A2.10})$$

et les coefficients  $Q_i$  et  $P_i$  sont donnés dans le tableau A2.2

$i$	$Q_i$	$P_i$
1	1.25331414E+00	1.0E+00
2	0.23498619E+00	0.15443144E+00
3	0.3655620E-01	-0.67278579E+00
4	0.1504268E-01	-0.18156897E+00
5	-0.780353E-02	-0.1919402E-01
6	-0.325614E-02	-0.110404E-02
7	-0.68245E-03	-0.4686E-04

Tableau A2.2

On suivant la même démarche que précédemment nous aurons :

$$K_1(z) = K_{11}(z) - \ln\left(\frac{1}{f(\xi)}\right) K_{12}(z) \quad (\text{A2.11})$$

avec :

$$K_{11}(z) = \ln\left(\frac{s l_1}{2c}\right) \sum_{i=1}^7 \left( Q_i y_1^{(i-1)} + \frac{1}{4} P_i y_2^{(i-2)} \right) \quad (\text{A2.12})$$

$$K_{12}(z) = \sum_{i=1}^7 Q_i y_1^{(i-1)} \quad (\text{A2.13})$$