



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique et
de Dynamique des Structures



Thèse de Doctorat en Sciences en Génie Civil

Intitulée

**Investigations analytique et numérique des effets de
compressibilité et de viscosité sur le comportement
sismique des barrages rigides à géométrie irrégulière**

Présentée par

Abdelmadjid TADJADIT

*Ingénieur d'Etat en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique
Magister en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique*

Soutenue publiquement le 28/06/2018 à 10^h 00.

Composition du Jury :

Président	Mr. Smain. BELKACEMI	Professeur	E.N.P
Directeur de Thèse	Mr. Boualem. TILIOUINE	Professeur	E.N.P
Examineur	Mr. Tayeb. BRANCI	Professeur	Univ.Chlef
Examineur	Mr. Abdelmalek. BERMAD	Professeur	E.N.P
Examineur	Mr. Khaled. SANDJAK	Maître / conférences A	U.M.B.B
Examineur	Mr. Abdelkrim. BOURZAM	Maître / conférences A	U.S.T.H.B
Invité	Mr. Malek. HAMMOUTENE	Professeur	E.N.P

ENP 2018



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique et
de Dynamique des Structures



Thèse de Doctorat en Sciences en Génie Civil

Intitulée

**Investigations analytique et numérique des effets de
compressibilité et de viscosité sur le comportement
sismique des barrages rigides à géométrie irrégulière**

Présentée par

Abdelmadjid TADJADIT

*Ingénieur d'Etat en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique
Magister en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique*

Soutenue publiquement le 28/06/2018 à 10^h 00.

Composition du Jury :

Président	Mr. Smain. BELKACEMI	Professeur	E.N.P
Directeur de Thèse	Mr. Boualem. TILIOUINE	Professeur	E.N.P
Examineur	Mr. Tayeb. BRANCI	Professeur	Univ.Chlef
Examineur	Mr. Abdelmalek. BERMAD	Professeur	E.N.P
Examineur	Mr. Khaled. SANDJAK	Maître / conférences A	U.M.B.B
Examineur	Mr. Abdelkrim. BOURZAM	Maître / conférences A	U.S.T.H.B
Invité	Mr. Malek. HAMMOUTENE	Professeur	E.N.P

ENP 2018

ملخص: تم التوصل إلى اشتقاق صيغ تحليلية بغرض التمكن من تحديد القوى الهيدرو-زلزالية التي تؤثر على السدود الصلدة ذوات هندسة الوجه غير المنتظمة في ظل وجود سائل لزج وقابل للانضغاط وذلك من خلال تركيب خطي للأنماط الطبيعية للماء الموجود في الخزان، بناءً على طريقة الحساب عند الحدود التي توظف مجموعات كاملة للدوال المركبة لتراقتز.

تعتبر الصيغ التي تم الحصول عليها لكل من توزيعات القص وعزم الانقلاب بسيطةً، فعالةً حسابياً وجدةً مفيدةً عند التصميم الأولي للسدود. كما أن بإمكانها أن تُظهر بوضوح آثار كلٍ من قابلية الانضغاط ولزوجة الماء منفصلةً كانت أو مجتمعةً في آن واحدٍ، كما تمتاز بقدرتها على تغطية مجموعة واسعةٍ من ترددات الإثارة حتى وإن تجاوزت هذه الأخيرة ترددات الصدى. تم التحقق من النتائج الرئيسية التي تم الحصول عليها باستخدام الصيغ التحليلية المقترحة للقوى الهيدرو-ديناميكية عن طريق مقارنتها بالنتائج المُنبثقة من الحلول العددية والتجريبية المنشورة لبعض الحالات الخاصة المتوفرة في الأدب المتخصص.

الكلمات الدالة: القوى الهيدرو-زلزالية، السدود، واجهة غير منتظمة الشكل، سائل لزج وقابل للانضغاط، الزلازل.

Abstract: Analytical expressions for the determination of hydro-seismic forces acting on a rigid dam with irregular upstream face geometry in presence of a compressible viscous fluid are derived through a linear combination of the natural modes of water in the reservoir based on a boundary method making use of complete sets of complex T-functions.

The formulas obtained for distributions of both shear forces and overturning moments are simple, computationally effective and useful for the preliminary design of dams. They show clearly the separate and combined effects of compressibility and viscosity of water. They also have the advantage of being able to cover a wide range of excitation frequencies even beyond the cut-off frequencies of the natural modes of the reservoir. Key results obtained using the proposed analytical expressions of the hydrodynamic forces are validated using numerical and experimental solutions published for some particular cases available in the specialized literature.

Key words: Hydro-seismic forces, dams, irregular upstream-face, compressible viscous fluid, earthquakes.

Résumé: Des expressions analytiques pour la détermination des forces hydro-sismiques agissant sur un barrage rigide à géométrie irrégulière en présence d'un fluide compressible et visqueux sont dérivées à partir d'une combinaison linéaire des modes naturels de l'eau dans le réservoir basée sur une méthode de calcul aux frontières utilisant des ensembles complets des fonctions complexes de Trefftz.

Les formules obtenues pour les distributions des forces de cisaillement et des moments de renversement associés sont simples, efficaces sur le plan des calculs et utiles pour la conception préliminaire des barrages. Elles montrent clairement les effets séparés et combinés de compressibilité et de viscosité du liquide dans le réservoir. Elles ont également l'avantage de pouvoir couvrir une large gamme de fréquences d'excitation même au-delà des fréquences de coupure des modes naturels du réservoir. Les résultats clés obtenus en utilisant les expressions analytiques proposées pour les forces hydrodynamiques sont validés à l'aide de solutions numériques et expérimentales publiées pour certains cas particuliers disponibles dans la littérature spécialisée.

Mots clés : Forces hydro-sismiques, barrages, face amont irrégulière, fluide compressible et visqueux, tremblements de terre.

Dédicaces

Je dédie ce modeste Travail de Recherche à :

- *La mémoire de mon défunt Père,*
- *Ma très chère et adorable Mère,*
- *Ma Femme qui a beaucoup consenti pour me voir arrivé,*
- *Mes Enfants : Sarah, Fayçal et la petite Selma,*
- *Ma Sœur et mes Frères,*
- *Mes Beaux-parents,*
- *Tous mes Amis(es).*

Abdelmadjid TADJADIT,

Remerciements

Cette thèse de Doctorat en sciences est l'aboutissement d'un travail de recherche effectué au sein du laboratoire de génie sismique et de dynamique des Structures L.G.S.D.S, sis à l'Ecole Nationale Polytechnique, sous la direction du professeur Tiliouine Boualem.

D'aucuns disent : « un travail de recherche ne peut s'accomplir seul », ce travail de recherche est bien loin de faire l'exception. Aujourd'hui, au terme de ce modeste travail, j'aimerais exprimer toute ma gratitude et toute ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse, le professeur Tiliouine. Boualem., qui m'a donné la possibilité d'effectuer cette recherche dans le domaine du génie sismique et de la dynamique des structures. Je tiens vivement à le remercier pour sa disponibilité, pour l'aide précieuse apportée durant nos discussions, pour ses conseils éclairés, ses encouragements continus et surtout pour sa longue patience durant tout le parcours de recherche.

D'autre part, je tiens à adresser un remerciement particulier et un témoignage de reconnaissance au professeur Hammoutene. M., membre actif au sein du laboratoire, pour son soutien effectif et ses précieuses observations.

Je remercie également le professeur Belkacemi. S. qui m'a fait l'honneur et le privilège de présider le jury, le professeur Branci. T., le professeur Bermad. A., le Dr. Sandjak. K. et le Dr. Bourzam. A., qui ont bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

Par ailleurs, je dois aussi un grand merci au Dr. Ouanani. M. pour ses conseils et ses précieux encouragements.

A la fin, je saisi cette occasion pour adresser mes vifs remerciements et à présenter toute ma reconnaissance à tous les enseignants ayant contribué de près ou de loin à ma formation, particulièrement : Le Pr. Tiliouine B., le Pr. Hammoutene. M., le Pr. Berrah. K. M., le Pr. Belkacemi. S. et le Pr. Bali. A.

Abdelmadjid TADJADIT,

Table des matières

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

NOTATIONS

INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction 14

2. Contexte historique du problème 14

3. Consistance et portée de l'étude 15

CHAPITRE 1 : DIFFERENTES APPROCHES - CONTEXTE HISTORIQUE -

1.1 Introduction 18

1.2 Approches analytiques et semi-analytiques 19

1.2.1 Méthode de la masse ajoutée de Westergaard 19

1.2.1.1 La solution « Exacte » de westergaard 19

1.2.1.2 La solution « Approximative » de westergaard 20

1.2.1.3 Comparaison entre les solutions « Exacte » et « Approximative » de westergaard 21

1.2.2 Méthode de Von-Karman 21

1.2.2.1 Condition de continuité 22

1.2.2.2 Principe de conservation de la quantité de mouvement 22

1.2.3 Solution du potentiel des vitesses de la « masse ajoutée » par Housner 24

1.2.4 Méthode semi-analytique de Chopra-Chakrabarti 25

1.2.5 Méthode de conservation de quantité de mouvement par Chwang & Housner 27

1.2.6 Théorie de l'écoulement potentiel bidimensionnel par Chwang 28

1.3 Analyse par éléments finis 29

1.4 Méthodes expérimentales 31

1.4.1 Méthode expérimentale de Zangar 31

1.5 Conclusion 33

CHAPITRE 2 : FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

2.1 Introduction 35

2.2 Hypothèses du problème 36

2.3 Conditions aux limites 37

2.4 Utilisation de l'équation de Navier-Stokes 37

2.4.1 Solution du problème 39

2.5 Utilisation des fonctions complexes de Trefftz 40

2.6 Description du modèle de Kelvin-Voigt 42

2.7 Conclusion 45

CHAPITRE 3 : DEVELOPPEMENT DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES POUR LA DISTRIBUTION DES FORCES HYDRO-SISMIQUES

3.1 Introduction 47

3.2 Etude de la convergence uniforme de la série de fonction $C_p(y)$ 47

3.2.1 Application numérique 49

3.3 Expressions analytiques pour la distribution de la résultante des forces de cisaillement 51

3.4 Expressions analytiques pour la distribution de la résultante des moments de renversement	52
3.5 Conclusion	52
CHAPITRE 4 : MODELISATION DU RESERVOIR PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	
4.1 Introduction	55
4.2 Modélisation du réservoir	55
4.3 Conditions aux limites	56
4.4 Formulation variationnelle du problème	57
4.4.1 Discrétisation des formes intégrales	57
4.5 L'élément de référence	58
4.6 Processus de programmation par le Logiciel Matlab	60
4.7 Caractéristiques du modèle adopté	61
4.8 Organigrammes du programme de calcul des coefficients des forces (C_F) et des moments de renversement associés (C_M)	61
4.9 Organigramme de calcul des éléments de la matrice Hermitienne $[F_{ji}]$	62
4.10 Organigramme de calcul des éléments du vecteur $\{G_j\}$	63
4.11 Organigramme de calcul des coefficients des forces hydrodynamiques (C_F)	64
4.12 Organigramme de calcul des coefficients des moments de renversement (C_M)	65
4.13 Conclusion	66
CHAPITRE 5 : RESULTATS ET DISCUSSION	
5.1 Introduction	68
5.2 Résultats et discussions	68
5.3 Conclusion	74
CONCLUSION GENERALE	
Conclusion générale	76
REFERENCES	
ANNEXE A	
A.1 Cas particuliers pour les distributions de $F_h(y)$ et $M_z(y)$	83
A.1.1 Barrage rigide avec face amont inclinée	83
A.1.2 Barrage rigide avec face amont verticale	83
A.2 Valeurs maximales des forces de cisaillement et des moments de renversement	83
A.3 Représentation graphique du premier mode de vibration de l'eau dans le réservoir pour les cas de liquides amorti et non amorti	84
A.4 Représentation graphique du deuxième mode de vibration de l'eau dans le réservoir pour les cas de liquides amorti et non amorti	85
A.5 Représentation graphique du troisième mode de vibration de l'eau dans le réservoir pour les cas de liquides amorti et non amorti	86
ANNEXE B	
a) $[F_{ji}]$, $\{G_j\}$ et $\{A_i\}$ pour un taux d'amortissement $\xi = 0 \%$ (Liquide compressible non visqueux)	87
b) $[F_{ji}]$, $\{G_j\}$ et $\{A_i\}$ pour un taux d'amortissement $\xi = 1 \%$ (Liquide compressible et visqueux)	88

Liste des tableaux

- Tableau 1.1** Dégâts enregistrés sur quelques barrages en béton ou en maçonnerie répertoriés par la C.I.G.B.
- Tableau 5.1** Pourcentage d'erreurs sur p , F_h et M_z entre les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées et ceux donnés par la méthode « Exacte » de Westergaard.
- Tableau 5.2** Pourcentage d'erreurs sur p , F_h et M_z entre les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées et ceux donnés par la méthode « Expérimentale » de Zangar.
- Tableau 5.3** Pourcentage d'erreurs sur p et F_h entre les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées et ceux donnés par la méthode « Exacte » de Chwang.

Liste des figures

1) AU NIVEAU DU CORPS DE LA THESE

- Fig. 1.1(a)** Distribution de la pression hydrodynamique sur le barrage : Cas de la solution « Exacte ».
- Fig. 1.1(b)** Distribution de la pression hydrodynamique sur le barrage : Cas de la solution « Approximative ».
- Fig. 1.2** Pressions hydrodynamiques : Barrage de 200 *pieds*, $T = 1.33$ *sec*, selon les formules « Exacte » et « Approximative » de Westergaard.
- Fig. 1.3** Schématisation de la masse d'eau se déplaçant avec le barrage.
- Fig. 1.4** Modèle de Housner pour les forces hydrodynamiques impulsives et convectives.
- Fig. 1.5** Comparaison des pressions hydrodynamiques pour différents rapports Hauteur/Longueur (H/L).
- Fig. 1.6 (a)** Modélisation de la masse d'eau se déplaçant avec un barrage à parement amont incliné.
- Fig. 1.6 (b)** Coefficients des pressions hydrodynamiques C_p pour le cas d'un barrage rigide incliné.
- Fig. 1.7** Distribution des pressions hydrodynamiques sur la face amont d'un barrage rigide : Courbes en traits pleins (Théorie « Exacte »), Courbes en pointillées (Méthode de conservation de quantité de mouvement).
- Fig. 1.8** Modèle du système barrage-réservoir.
- Fig. 1.9** Répartition des coefficients des pressions à la face amont du barrage pour quatre modèles :
(a) Séisme d'El-Asnam en 1980, (b) Séisme de Loma Preita en 1989.
- Fig. 1.10** Dispositif expérimental de Zangar.
- Fig. 1.11** Coefficients des pressions maximales C_m donnés en fonction de l'angle θ .

- Fig. 2.1** Barrage rigide partiellement incliné avec un réservoir de longueur infinie soumis à un mouvement horizontal de sol.
- Fig. 2.2** Modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt.
- Fig. 2.3** Relation entre la boucle d'hystérésis et le taux d'amortissement.
- Fig. 3.1** Illustration de la convergence uniforme de la série des fonctions $C_p(y)$ sur l'intervalle $[0, H]$. Barrage totalement incliné ; $\theta = 30^\circ$, $C = 1$, $\xi = 0\%$.
- Fig. 3.2** Illustration de la convergence uniforme de la série de fonctions $C_p(y)$ sur l'intervalle $[0, H]$. Barrage partiellement incliné, $\theta = 45^\circ$, $C = 0.5$, $\xi = 1\%$.
- Fig. 3.3** Illustration de la convergence vers zéro de la série numérique des résidus $|R_i(y_0)|$.
- Fig. 4.1** Représentation du domaine réservoir avec l'ensemble de ses frontières.
- Fig. 4.2** Élément triangulaire linéaire de référence.
- Fig. 4.3** Illustration d'un maillage avec élément triangulaire linéaire pour le domaine du réservoir.
- Fig. 5.1** Parties réelles de la résultante des forces de cisaillement sur un barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).
- Fig. 5.2** Parties imaginaires de la résultante des forces de cisaillement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).
- Fig. 5.3** Parties réelles de la résultante des moments de renversement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).
- Fig. 5.4** Parties imaginaires de la résultante des moments de renversement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).
- Fig. 5.5** Distribution de la résultante des forces de cisaillement : Barrage rigide à parement vertical pour les taux d'amortissement $\xi = 1\%$ et $\xi = 5\%$.

- Fig. 5.6** Distribution de la résultante des forces de cisaillement : Barrage partiellement incliné, $\theta = 37,6^\circ$ et $C = 0,75$, pour les taux d'amortissement $\xi = 1\%$ et $\xi = 5\%$.
- Fig. 5.7** Distribution de la résultante des forces de cisaillement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37,6^\circ$ et $C = 0,75$ pour les taux d'amortissement $\xi = 1\%$ (marqueurs en triangles) et $\xi = 5\%$ (marqueurs en cercles).
- Fig. 5.8** Distribution de la résultante des moments de renversement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37,6^\circ$ et $C = 0,75$ pour les taux d'amortissement $\xi = 1\%$ (marqueurs en triangles) et $\xi = 5\%$ (marqueurs en cercles).

2) AU NIVEAU DES ANNEXES

- Fig. A.1(a)** Forme du premier mode de vibration de l'eau dans le réservoir ; $w = w_1 = \frac{\pi c}{2H} = 22.59 \text{ rad/sec}$, $\xi = 0\%$, $T_1(x, y, w_1) = e^{-\mu_1 x} \cos \lambda_1 y$, avec $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_1}{c}$.
- Fig. A.1(b)** Forme du premier mode de vibration de l'eau dans le réservoir ; $w = w_1 = \frac{\pi c}{2H} = 22.59 \text{ rad/sec}$; $\xi = 1\%$; $T_1(x, y, w_1) = e^{-\mu_1 x} \cos \lambda_1 y$ avec $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_1}{c}$: ici c , K et $T_1(x, y, w_1)$ sont à valeurs complexes.
- Fig. A.2 (a)** Forme du deuxième mode de vibration de l'eau dans le réservoir, $w = w_2 = \frac{3\pi c}{2H} = 67.76 \text{ rad/sec}$, $\xi = 0\%$, $T_2(x, y, w_2) = e^{-\mu_2 x} \cos \lambda_2 y$, avec $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_2}{c}$.
- Fig. A.2 (b)** Forme du deuxième mode de vibration de l'eau dans le réservoir, $w = w_2 = \frac{3\pi c}{2H} = 67.76 \text{ rad/sec}$, $\xi = 1\%$, $T_2(x, y, w_2) = e^{-\mu_2 x} \cos \lambda_2 y$, avec $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_2}{c}$: ici c , K et $T_2(x, y, w_2)$ sont à valeurs complexes.
- Fig. A.3 (a)** Forme du troisième mode de vibration de l'eau dans le réservoir, $w = w_3 = \frac{5\pi c}{2H} = 112.94 \text{ rad/sec}$, $\xi = 0\%$, $T_3(x, y, w_3) = e^{-\mu_3 x} \cos \lambda_3 y$, avec $\mu_3 = \sqrt{\lambda_3^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_3}{c}$.
- Fig. A.3 (b)** Forme du troisième mode de vibration de l'eau dans le réservoir, $w = w_3 = \frac{5\pi c}{2H} = 112.94 \text{ rad/sec}$, $\xi = 1\%$, $T_3(x, y, w_3) = e^{-\mu_3 x} \cos \lambda_3 y$, avec $\mu_3 = \sqrt{\lambda_3^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_3}{c}$: ici c , K et $T_3(x, y, w_3)$ sont à valeurs complexes.

Notations

Les principales notations utilisées dans la présente thèse sont rassemblées ci-après, les autres notations seront définies au fur et à mesure de leur apparition dans chaque chapitre.

$\{A_i\}^T$:	Vecteur transposé des coefficients inconnus $\{A_i\}$.
c :	Vitesse des ondes de compression dans l'eau ($c \cong 1438$ m/s).
C_s :	Coefficient d'accélération sismique horizontale au niveau du site.
C_p :	Coefficients des pressions hydrodynamiques.
C_F :	Coefficient de la résultante des forces de cisaillement.
C_M :	Coefficient de la résultante des moments de renversement.
ds :	Segment infiniment petit de la frontière délimitant l'interface barrage-réservoir.
$[F_{ji}]$:	Matrice Hermitienne.
F_{st} :	Résultante des forces hydrostatiques calculée à la base du barrage [Newton].
$F_h(y)$:	Composante horizontale de la force de cisaillement calculée à la cote y du fond du réservoir [Newton].
g :	Accélération gravitationnelle [m/sec ²].
$\{G_j\}^T$:	Vecteur transposé du vecteur $\{G_j\}$.
H :	Hauteur du liquide dans le réservoir [m].
K :	Nombre d'onde de compression [rad/m].
L :	Longueur du réservoir dans la direction amont du barrage [m].
M_{st} :	Moment hydrostatique maximal de renversement calculé à la base du barrage [Newton-m].
$M_z(y)$:	Moment hydrodynamique de renversement autour de l'axe z calculé à la cote y à partir du fond du réservoir [Newton-m].
η :	Fréquence adimensionnelle.
\vec{n} :	Vecteur désignant la normale à l'interface barrage-réservoir.
P.G.A :	Pic maximal de l'accélération horizontale de sol [m/sec ²].
$p(x, y, t)$:	Pression hydrodynamique exprimée dans le domaine temporel [Pascal].
$P(x, y, w)$:	Pression hydrodynamique exprimée dans le domaine fréquentiel [Pascal].
S :	Contour total de l'ensemble des frontières du réservoir.
S_1 :	Contour délimitant la partie inclinée de l'interface barrage-réservoir.
S_2 :	Contour délimitant la partie verticale de l'interface barrage-réservoir.

Notations

$S_1 \cup S_2$:	Contour délimitant l'interface barrage-réservoir.
S_3 :	Contour délimitant la surface libre du liquide dans le réservoir.
S_4 :	Contour délimitant la frontière de radiation du réservoir.
S_5 :	Contour délimitant le fond du réservoir.
T :	Période de mouvement de l'écran du barrage, supposé harmonique dans la direction horizontale [sec].
$T_i(x, y, w)$:	$i^{\text{ème}}$ période propre de vibration du réservoir dans la direction horizontale [sec].
T_1 :	Période fondamentale de vibration du réservoir dans la direction horizontale [sec].
t :	Temps [sec].
$\ddot{U}_g(t)$:	Accélération horizontale de sol [m/sec ²].
\ddot{U}_n :	Composante normale de l'accélération horizontale de sol [m/sec ²].
w :	Pulsation angulaire du chargement sismique [rad/sec].
w_1 :	Pulsation angulaire du mode fondamental du réservoir [rad/sec].
w/w_1 :	Rapport de la pulsation angulaire de l'excitation sismique à celle du mode fondamental du réservoir.
y :	La hauteur considérée à partir du fond du réservoir [m].
Δ :	Opérateur de Laplace.
$\vec{\nabla}$:	Opérateur gradient.
μ :	Viscosité dynamique de l'eau [poise].
ν :	Viscosité cinématique de l'eau [stokes].
ζ :	Fraction de l'amortissement critique du liquide dans le réservoir [%].
λ :	Module de lamé [Kg/m.sec ²].
λ^c :	Module complexe de lamé [Kg/m.sec ²].
θ :	Angle formé par le parement amont du barrage avec la verticale [rad].
ρ :	masse volumique d'eau [Kg/m ³].
γ :	poids volumique d'eau [Newton/m ³].

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

1. INTRODUCTION

Les barrages ont été historiquement construits pour répondre aux besoins vitaux tels que l'approvisionnement en eau potable, l'irrigation et la production d'électricité. Leur rupture peut causer des dommages incontrôlables, non seulement aux biens et propriétés, mais aussi aux populations avoisinantes. Ce sont donc des ouvrages très sensibles, nécessitant une protection élevée contre les aléas extérieurs.

De nombreux barrages ont été construits dans des régions où l'activité sismique est importante et pourraient être éventuellement exposés à des séismes de forte intensité. Il est donc important de bien connaître leur comportement afin d'ajuster les méthodes de conception ou d'apporter les correctifs nécessaires aux barrages existants pour en assurer la sécurité. A travers cette vision, des études approfondies devraient être menées dans le cadre d'un processus de calcul qui englobe plusieurs étapes allant de la phase des investigations, d'analyse et de conception jusqu'au projet d'exécution de cette classe particulière de structures. Ce qui pourrait se révéler une tâche difficile à concrétiser, car elle implique la combinaison des connaissances de plusieurs disciplines telles que la mécanique des fluides, la mécanique des solides, l'hydrodynamique, la propagation des ondes, ..., etc.

2. CONTEXTE HISTORIQUE DU PROBLEME

Un des facteurs importants entrant dans les considérations de conception parasismique pendant les tremblements de terre est l'effet de la surpression hydrodynamique exercée sur l'interface barrage-réservoir. Pour ce faire, plusieurs Approches : Analytiques, expérimentales et numériques ont été adoptées afin de mieux cerner et d'obtenir avec précision ces dernières.

Westergaard [1] fût le pionnier à avoir dérivé une expression analytique pour évaluer les pressions hydrodynamiques exercées sur un barrage rigide ayant une face amont verticale sous l'effet d'un chargement harmonique horizontal. A l'aide de la méthode analogique électrique, Zangar [2] étudia expérimentalement l'effet hydrodynamique de l'action sismique horizontale sur un barrage rigide à fruit simple ou composé pour le cas d'un liquide incompressible. Chopra [3] a publié une solution analytique pour les barrages rigides à parement vertical sous des mouvements sismiques horizontal et vertical de sol tenant en compte l'effet de compressibilité du liquide dans le réservoir. Chwang [4], basé sur la « Théorie de l'écoulement potentiel bidimensionnel », a réussi à obtenir une solution « Exacte » pour les forces de tremblement de terre sur un barrage rigide à fruit constant en présence d'un liquide incompressible et non visqueux. Liu [5], en utilisant la même théorie, a obtenu une solution analytique pour les pressions hydrodynamiques agissant sur un barrage à face totalement inclinée pour différentes pentes du fond du réservoir. Tsai [6] développa une solution semi-analytique pour la distribution de la pression hydrodynamique sur les barrages rigides ayant une face amont arbitraire tenant en compte uniquement la compressibilité de l'eau dans le réservoir.

Avec le développement de l'outil informatique, plusieurs auteurs ont utilisé les méthodes numériques essentiellement basées sur la M.E.F, pour inclure entre autres, les effets de compressibilité du liquide dans le réservoir [7, 8, 9, 10], de flexibilité du barrage [10, 11] et

l'absorption des ondes de compression par les sédiments en dépôt au fond du réservoir [12, 13, 14].

A côté des méthodes numériques, on retrouve également les méthodes semi-analytiques, elles sont encore valides de nos jours et d'un apport considérable pour la conception préliminaire des barrages [6, 15, 16].

En réalité, l'évaluation des pressions hydrodynamiques ne constitue qu'une étape intermédiaire car il s'agit pour l'ingénieur concepteur, et bien évidemment pour les besoins d'une conception parasismique, de remonter jusqu'aux efforts de réduction, indispensables pour le dimensionnement des barrages. C'est pour cette raison que l'évaluation des efforts hydro sismiques revêt un intérêt particulier dans les études de stabilité et de sécurité de cette catégorie particulière de structures dont le comportement et la performance demeurent très sensibles aux sollicitations sismiques, aux caractéristiques géométriques et aux paramètres physiques des systèmes barrages-réservoirs étudiés.

3. CONSISTANCE ET PORTEE DE L'ETUDE

Telles que avancé précédemment, la distribution et l'intensité des forces hydro-sismiques exercées sur la paroi amont d'un barrage sont étroitement dépendants de la géométrie de l'interface fluide-structure, de l'intensité de la fréquence du chargement extérieur et surtout des propriétés physiques du liquide dans le réservoir. Aussi, une modélisation plus réaliste de la réponse du système barrage-réservoir devrait envisager un mécanisme approprié de dissipation d'énergie pour écarter les phénomènes irréalistes issus de l'hypothèse d'un liquide non compressible et non visqueux tels que l'apparition de pics de résonance à l'infini au voisinage des modes naturels de vibration du réservoir et l'existence de modes naturels non amortis lorsque la fréquence d'excitation extérieure dépasse la fréquence de coupure du premier mode du réservoir.

Afin de mettre la lumière sur tous ces aspects, un travail de recherche a été mené au sein du laboratoire de recherches en génie sismique et dynamique des structures (L.G.S.D.S), sis à l'Ecole Nationale Polytechnique, au terme duquel des expressions analytiques pour le calcul des forces hydro-sismiques agissant sur des barrages rigides ayant une géométrie irrégulière de la face amont et en présence d'un liquide compressible et visqueux ont été dérivées à partir d'une combinaison linéaire des modes naturels de l'eau dans le réservoir basées sur une méthode de calculs aux frontières utilisant des ensembles complets de fonctions de Trefftz à valeurs complexes.

En utilisant les expressions analytiques proposées, des résultats clés sont obtenus puis validés par comparaison avec des solutions numériques et expérimentales publiées, disponibles dans la littérature spécialisée.

La présente thèse de Doctorat résume les démarches entreprises, la méthodologie, les techniques employées et récapitule l'ensemble des résultats obtenus durant le parcours de recherche. Dans un style pédagogique, elle est structurée en plusieurs chapitres qui se développent comme suit :

Au début, une introduction générale est consacré à la définition de la problématique rencontrée avec une présentation de certains travaux de recherches antérieurs consacrés à cette thématique, qui reste d'ailleurs, à ce jour d'actualité et fait encore objet de plusieurs recherches.

Donc, au fil de plusieurs années, beaucoup de travaux de recherches se sont succédé l'un après l'autre où plusieurs techniques et méthodes de résolution ont été employées. A ce titre viendrait donc le premier chapitre, dans lequel nous avons résumé, dans un contexte historique, les différentes approches disponibles dans la littérature spécialisée qu'on pourrait classer en trois catégories : Les approches analytiques et semi-analytiques, les méthodes expérimentales et enfin les récentes méthodes qui restent d'actualité, basées sur les techniques de résolutions numériques avancées telles que la méthode des éléments finis, la méthode des intégrales aux frontières, ..., etc.

Le deuxième chapitre est consacré au développement du modèle mathématique du problème, l'écriture de l'équation gouvernante régissant le phénomène de propagation des ondes de compression dans le réservoir avec la définition des conditions aux limites pour le cas d'un chargement sismique horizontal. Dans le troisième chapitre sont développées avec détails les formulations des expressions analytiques proposées pour la distribution des résultantes des forces de cisaillement et des moments de renversement associés.

Dans le quatrième chapitre, on présentera la méthode classique de modélisation par éléments finis appliquée pour le domaine du réservoir. Les critères de choix de l'élément de référence ainsi que celui d'un maillage optimal pour le réservoir sont également exposés.

Pour les besoins de calcul numérique des forces hydrodynamiques, dans la présente étude, un programme en langage Matlab a été développé. Ce dernier, tient en compte des différents paramètres de calibrage de notre modèle tels que, la géométrie de l'interface barrage-réservoir (fruit du barrage), le chargement extérieur (amplitude des fréquences d'excitation) ainsi que les propriétés physiques du milieu liquide (les effets de compressibilité et de viscosité du liquide dans le réservoir). Les organigrammes des principales sous-routines constituant le programme en question sont insérés à la fin de ce chapitre.

Dans le cinquième chapitre, on retrouve les résultats issus de l'application des expressions analytiques proposées, tenant compte des paramètres de calibrage précédemment cités. Ces derniers sont comparés -pour les besoins de validation- respectivement, aux résultats issus de l'application de la méthode « Exacte » de Westergaard lorsque le barrage est vertical, ceux donnés par la méthode « Expérimentale » de Zangar et enfin les résultats issus de la méthode « Exacte » de Chwang.

Dans la dernière partie, compte tenu des résultats obtenus, on retrouve les principales conclusions retenues.

Pour plus d'illustration et une meilleure compréhension, deux annexes sont jointes à la fin du présent document :

L'annexe A, est consacrée à la présentation de quelques expressions analytiques décrivant les distributions des efforts hydro-sismiques pour certaines configurations géométriques particulières de l'interface barrage-réservoir ainsi qu'une représentation graphique pour les formes des trois premiers modes naturels de vibration de l'eau dans le réservoir, respectivement pour les cas d'un liquide amorti et non amorti.

Dans l'annexe B, pour une étude de cas spécifique, les éléments de la matrice Hermitienne $[F_{ji}]$, du vecteur $\{G_j\}$ et ceux du vecteur des coefficients inconnus $\{A_i\}$ sont présentés. Ces derniers ont d'ailleurs servi pour le calcul ensuite le traçage de certains graphes présentés dans le chapitre cinq.

Chapitre 1

**DIFFERENTES APPROCHES
-CONTEXTE HISTORIQUE-**

Chapitre 1 : Différentes approches -contexte historique-

1.1 INTRODUCTION

Un des paramètres de conception et d'analyse des grands barrages est la sécurité sismique. Certaines études démontrent que les premières méthodes utilisées dans la conception parasismique de barrages entraînent une évaluation non précise de la réponse sismique. Considérant le coût élevé de construction de ces ouvrages et les conséquences tant humaines que financières d'une rupture probable, plusieurs projets de recherches ont porté sur l'analyse du comportement sismique des barrages. Jusqu'à présent, malgré la prolifération d'ouvrages en béton, peu d'entre eux ont été effectivement soumis à d'importants tremblements de terre. Ainsi on compte très peu de cas de dommages permanents de grands barrages et aucun relâchement de réservoir survenus suite à un séisme avant les années 90 [17].

Cependant les exemples des barrages d'Hegben (Montana-1959); de Van Norman inférieur (Californie-1971) [18] ainsi que celui de Shih Kang (Taiwan-1999) ont démontré la vulnérabilité des ouvrages hydrauliques et l'importance de l'évaluation de la sécurité sismique. Or, en raison du faible nombre de ruptures de barrages survenues suite à un séisme, peu d'études de cas ont pu être réalisées et les mécanismes impliqués sont encore mal compris. Le tableau ci-après résume les accidents les plus importants qui concernent les barrages en béton ou en maçonnerie répertoriés par la **C.I.G.B** (Commission Internationale des Grands Barrages).

Tableau 1.1 - Dégâts enregistrés sur quelques barrages en béton ou en maçonnerie, répertoriés par la **C.I.G.B**.

Barrage	Hauteur (m)	Type	Date	Magnitude	Dégâts occasionnés
Shih Kang (Taiwan)	25	Poids-béton	1999	7,7	Dommages majeurs
Koyna (Inde)	103	Poids-béton	1967	6,5	Fissures importantes
SefidRud (Iran)	106	Contrefort	1990	7,5	Fissures importantes
Pacoima (U.S.A)	113	Voûte	1971	6,6	Fissuration de l'appui en rive gauche
Lower Crystal Springs (U.S.A)	47	Poids incurvé	1906	8,3	Pas de dégâts
Black rook (UK)	29	Poids béton/maçonnerie	1957	5,5	Déplacement de la crête-Fissures
Hsingfengkiang (Chine)	105	Contrefort	1962	6,1	Fissures importantes
Honen Ike (Japon)	30	Voûtes multiples	1946	-	Fissures de la voûte près des contreforts
Ambiesta (Italie)	59	voûte	1976	6,5	Pas de dégâts
Maina di Sauris (Italie)	136	voûte	1976	6,5	Pas de dégâts
Shenwao (Chine)	53	Poids-béton	1975	-	Fissures
Redflag (Chine)	35	Poids-maçonnerie	1970	-	Fissures
Rappel (Chili)	110	voûte	1985	7,8	Bris-évacuateur et tour de prise d'eau

1.2 APPROCHES ANALYTIQUES ET SEMI-ANALYTIQUES

1.2.1 METHODE DE LA MASSE AJOUTEE DE WESTERGAARD

L'étude des pressions hydrodynamique sur les barrages a été menée par le professeur Westergaard à Denver, Colorado, au bureau « Réclamation » dans le cadre de la conception du barrage Hoover, les résultats de cette étude ont été publiés dans *ASCE Transactions* par Westergaard en 1933[1].

1.2.1.1 LA SOLUTION « EXACTE » DE WESTERGAARD

Le mouvement sismique d'un barrage rigide vertical en béton de hauteur h avec un réservoir de longueur infinie (Figure 1.1(a)) a été mathématiquement exprimé en termes de la théorie d'élasticité des solides, basée sur la formulation fournie par Lamb [19]. Deux équations de mouvement, une relation cinématique linéaire pour les petites déformations et une loi de comportement élastique sans contraintes de cisaillement, avec les conditions aux limites (contraintes égales à zéro à la surface du réservoir, déplacement vertical égal à zéro au fond du réservoir) décrivent le modèle physique bidimensionnel du système barrage-réservoir. La solution du problème avec les mouvements horizontal et vertical de l'eau (déformations planes) a été donnée par Westergaard sous la forme d'une distribution de contraintes (pressions) dans l'eau par l'équation (1.1).

$$\sigma = -\frac{8}{\pi^2} C_s w h \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5}^n \frac{1}{n^2 C_n} e^{-q_n} \sin(n\pi \frac{y}{2h}) \quad (1.1)$$

$$q_n = \frac{n\pi C_n x}{2h} \quad C_n = \sqrt{1 - \frac{16wh^2}{n^2 gkT^2}} \quad (1.2)$$

Selon l'équation (1.1), la pression maximale p se produit lorsque le barrage est à l'extrême position ($t = 0, T, 2T, \dots$ etc.) pendant le mouvement, alors la distribution maximale des pressions d'eau en amont du barrage (pour $x = 0, q_n = 0$) est une fonction parabolique (figure 1.1(a)) et pourrait être exprimée par l'équation (1.3).

$$p(y) = -\sigma = \frac{8}{\pi^2} C_s w h \sum_{1,3,5}^n \frac{1}{n^2 C_n} \sin(n\pi \frac{y}{2h}) \quad (1.3)$$

$$\text{Avec :} \quad q_n = 0 \quad C_n = \sqrt{1 - \frac{16wh^2}{n^2 gkT^2}} \quad (1.4)$$

x, y : L'axe des x est à la surface de l'eau dirigé en amont et l'axe des y est vertical dirigé vers le bas (figures 1.1(a) et 1.1(b)),

w : Poids de l'eau par unité de volume ($w = 0.03125 \text{ ton/ft}^3$),

g : Accélération due à la gravité ($g = 32.2 \text{ ft/sec}^2$)

C_s : Accélération horizontale maximale de la fondation divisée par g ,

T : Période de vibration horizontale de la fondation [sec],

t : Temps [sec],

k : Module d'élasticité de l'eau (supposé $k = 300\,000 \text{ lb/in}^2$).

La solution exprimée par l'équation (1.3) a été dérivée sous les hypothèses suivantes :

- La face amont du barrage est droite et verticale,
- Le barrage est considéré comme un bloc rigide,
- Les oscillations sinusoïdales du barrage sont horizontales,
- De petits mouvements sont supposés pendant le tremblement de terre,
- Le problème est défini dans l'espace 2-D,
- La période de vibration libre du barrage T_0 doit être significativement plus petite que la période de vibration T du séisme (Le risque de résonance est écarté),
- Accélération horizontale adimensionnelle de $C_s = 0.1$.

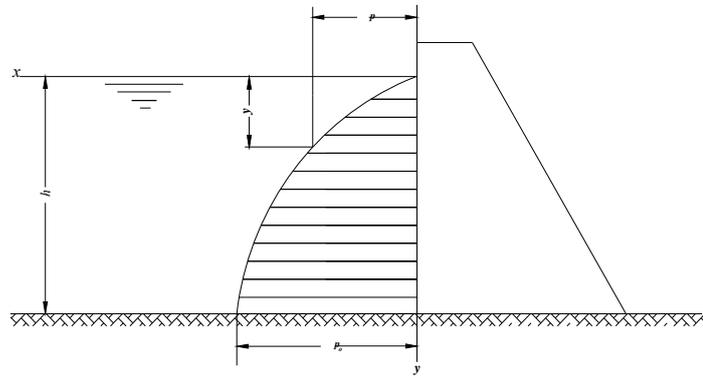


Fig. 1.1(a) - Distribution de la pression hydrodynamique sur le barrage : Cas de la solution « Exacte ».

1.2.1.2 LA SOLUTION APPROXIMATIVE DE WESTERGAARD

Sur la figure (1.1(b)), le graphe représente la distribution de la pression hydrodynamique p qui s'exerce sur la partie amont du barrage, elle est exprimée par l'équation (1.5), c'est le résultat de la simplification de l'équation (1.3).

$$p(y) = 0.875 C_s (h y)^{0.5} \quad (1.5)$$

Cette formule est largement utilisée dans l'industrie pour les calculs préliminaires de la pression hydrodynamique sur les barrages et très souvent sur les vannes du déversoir.

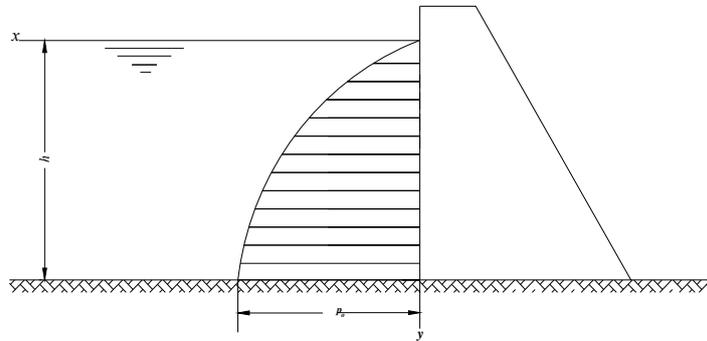


Fig. 1.1(b) - Distribution de la pression hydrodynamique sur le barrage : Cas de la solution « Approximative ».

1.2.1.3 COMPARAISON ENTRE LES SOLUTIONS « EXACTE » ET APPROXIMATIVE DE WESTERGAARD

Pour les besoins de cette étude comparative, une feuille de calcul a été développée pour comparer les distributions des pressions hydrodynamiques relativement aux deux formules de Westergaard pour le cas d'un barrage de $h = 200$ pieds. A travers cette comparaison, on peut noter que la formule approximative de Westergaard (Eq. 1.5) surestime en général la pression hydrodynamique dans les parties supérieure et inférieure de l'interface barrage-réservoir (voir figure 1.2).

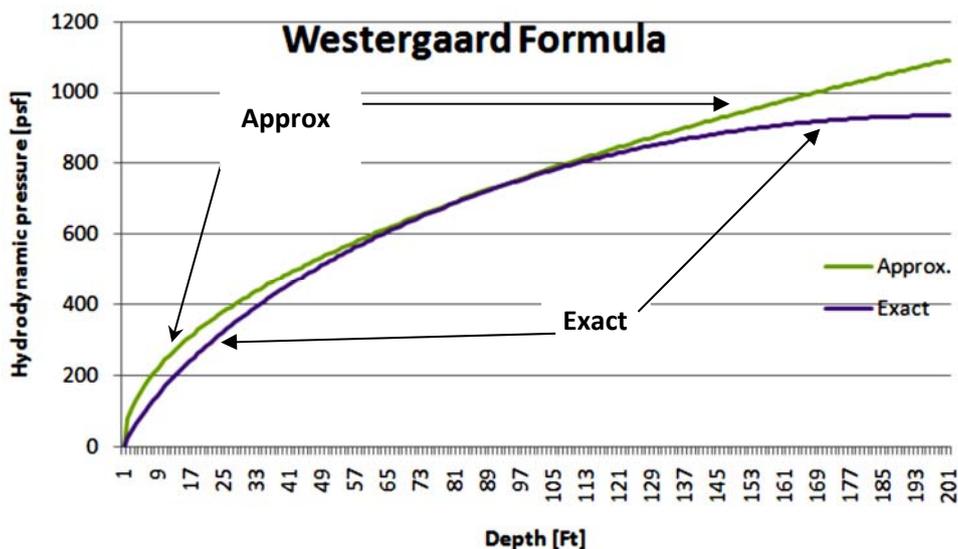


Fig. 1.2 - Pressions hydrodynamiques : Barrage de 200 pieds, $T = 1,33$ sec, selon les formules « Exacte » et « Approximative » de Westergaard.

1.2.2 METHODE DE VON-KARMAN

Dans son analyse du problème, le professeur Von-Karman [20] a présenté une méthode approchée basée sur les principes de continuité et de conservation de quantité de mouvement.

En effet, cette analyse approximative est une bonne approche pour la déduction de l'effet de la masse ajoutée, préalablement mis en évidence lors des conclusions de Westergaard et constitue donc, une confirmation de ses résultats.

Ainsi, en considérant une tranche unitaire d'un barrage à parement amont vertical de hauteur h et de longueur infinie et en supposant que le barrage est immobile à l'instant initial et qu'une accélération horizontale uniforme a_x agit durant l'intervalle de temps Δt , Von-Karman suppose qu'une tranche de liquide, de largeur finie b variable avec la hauteur, acquiert toute la valeur de l'accélération a_x et que le reste du liquide n'est pas affecté dans ce processus.

1.2.2.1 CONDITION DE CONTINUITÉ

En Considérant le déplacement horizontal, avec une accélération uniforme a_x de la partie du barrage située entre le fond du réservoir ($y = 0$) et une hauteur arbitraire y' , une masse de liquide est déplacée par cette portion du barrage et doit donc passer à travers la section BC (Fig. 1.3).

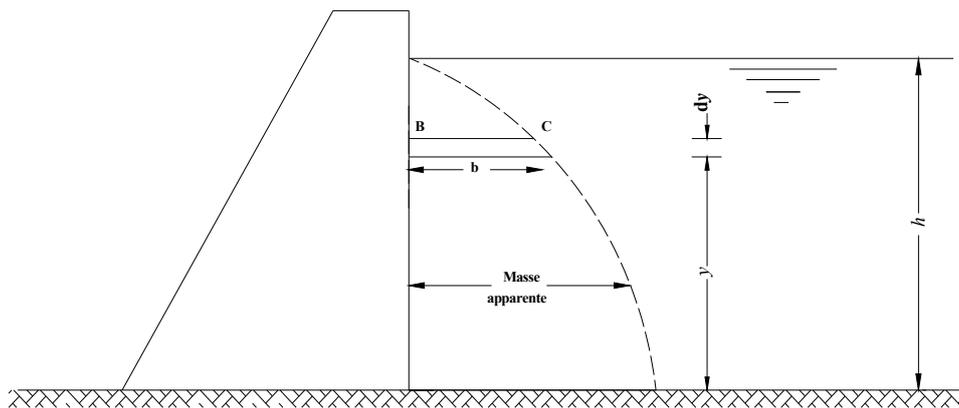


Fig. 1.3 - Schématisation de la masse d'eau se déplaçant avec le barrage.

Supposons que la composante verticale de l'accélération du liquide induite est variable avec la hauteur et a une valeur moyenne a_y entre les abscisses $x = 0$ et $x = b$, tandis que pour une abscisse $a > b$ le liquide est supposé inactif.

Le déplacement horizontal du barrage durant le temps Δt , provoquant le déplacement vertical du liquide à travers la section BC de largeur b , conduit à la condition de continuité suivante :

$$\dot{y}a_x = ba_{\dot{y}} \quad (1.6)$$

1.2.2.2 PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Considérons une portion du corps liquide de largeur variable b entre deux sections définie par y' et $y'+ dy'$ et désignons la pression à la hauteur arbitraire y' par p . L'équilibre entre les forces massiques horizontales et les forces de pression s'établit comme suit :

$$p dy' = \rho b dy' a_x$$

Soit :
$$p = \rho b a_x \quad (1.7)$$

Evidemment cette relation est identique à celle déjà donnée par Westergaard.

L'équilibre entre les forces massiques verticales et les forces de pression s'écrit aussi comme suit :

$$\frac{d(pb)}{d\dot{y}} = -\rho b a_{\dot{y}} \quad (1.8)$$

En utilisant les expressions (1.6) et (1.7), la relation (2.8) devient :

$$\frac{d(\rho b^2 a_x)}{d\dot{y}} = -\rho \dot{y} a_x \quad (1.9)$$

Puisque a_x et ρ sont supposés constants, après intégration on obtient :

$$b^2(\dot{y}) = \int_{\dot{y}}^h -\dot{y} d\dot{y} = \frac{1}{2} (h^2 - \dot{y}^2) \quad (1.10)$$

Soit :

$$\frac{b^2}{\frac{1}{2}h^2} + \frac{\dot{y}^2}{h^2} = 1 \quad (1.11)$$

En posant : $b_0^2 = \frac{1}{2}h^2$

Où, b_0 est la valeur que prend b pour $\dot{y} = 0$, l'équation (1.11) devient :

$$\frac{b^2}{b_0^2} + \frac{\dot{y}^2}{h^2} = 1 \quad (1.12)$$

Von-Karman a montré avec cette approximation, à travers l'expression (1.12), que la forme de la masse liquide se déplaçant avec le barrage est bien celle d'un quart d'ellipse de demi-axe :

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}h \approx 0.707h \quad (1.13)$$

Nous rappelons que cette forme en quart d'ellipse de la masse ajoutée schématisant la distribution des surpressions hydrodynamiques a été mise en évidence en premier par Westergaard. La surpression hydrodynamique maximale, située au fond du réservoir sur le parement amont du barrage vaut donc :

$$p_{max} \approx 0.707\rho a_x h \quad (1.14)$$

Ou en faisant intervenir le coefficient sismique α , on a :

$$p_{max} \approx 0.707C_s wh \quad (1.15)$$

Soit sous la forme $p_{max} = C_{p_{max}} C_s wh$, où $C_{p_{max}}$ est le coefficient de surpression hydrodynamique maximale. On remarque que les calculs du professeur Westergaard donnent :

$$p_{max} \approx 0.743C_s wh \quad (1.16)$$

L'écart entre les résultats des travaux des professeurs Westergaard et ceux de Von-Karman est de l'ordre de 4 à 5 %. De même, l'effort de cisaillement horizontal maximal est tel que :

$$Q_x = (0.707\pi/4)C_s h^2 = 0.555C_s wh^2 \quad (1.17)$$

L'expression de Westergaard donne:

$$Q_x = 0.543C_s w h^2 \quad (1.18)$$

Soit un écart d'environ 2%.

1.2.3 SOLUTION DU POTENTIEL DES VITESSES DE LA MASSE AJOUTEE PAR HOUSNER

Une autre formule largement utilisée pour le calcul de la pression hydrodynamique est celle développée par Housner en 1954 [21]. Cette formule est dérivée pour les réservoirs de fluides soumis à des chargements sismiques. Housner a fait une distinction entre les pressions impulsives et les pressions convectives. La composante impulsive concerne la partie du liquide qui bouge en cohérence avec la structure du réservoir (la masse ajoutée), tandis que la composante convective se rapporte à des effets liés au ballonnement.

La principale différence avec la formule de Westergaard est l'effet de la coordonnée caractérisant la longueur, qui est prise égale à l'infini par Westergaard. L'équation (2.19) montre que la longueur est prise en compte par une tangente hyperbolique. Par conséquent, pour de grandes dimensions longitudinales ($2L > 4d$), la formule de Housner donne plus ou moins les mêmes résultats que la solution de Westergaard.

$$p(z) = khwd \left(\frac{z}{d} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{d} \right)^2 \right) \sqrt{3} \tanh \left(\frac{\sqrt{3}L}{d} \right) \quad (1.19)$$

L = la moitié de la longueur de la chambre [m], d = profondeur de la chambre [m].

La période d'excitation dans la formule exacte de Westergaard n'a pratiquement aucune influence sur la pression totale à moins qu'elle ne soit au voisinage de la période propre du réservoir. La période est donc non incluse dans la formule approximative de Westergaard ou de Housner. En plus d'une expression pour les pressions hydrodynamiques, Housner a également modélisé la force exercée sur la structure en raison des effets de ballonnement. Ce modèle est représenté sur la figure (1.4). La force d'impulsion est représentée par une masse localisée M_0 , agissant à une hauteur h_0 au-dessus de la base.

$$M_0 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}L} \tanh \left(\frac{\sqrt{3}L}{d} \right) \right) M, \quad M = 2\rho dL; \quad h_0 = \frac{3}{8}d \quad (1.20)$$

Où : M_0 = masse impulsive localisée par unité de largeur [kg/m]

M = masse totale d'eau par unité de largeur [kg/m]

h_0 = hauteur à laquelle la force impulsive agit [m]

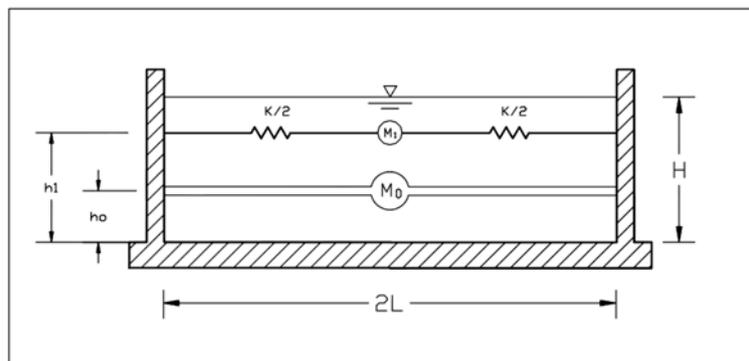


Fig. 1.4 - Modèle de Housner pour les forces hydrodynamiques impulsives et convectives.

La force de ballotement appliquée sur les parois de la chambre est modélisée par une masse équivalente M_1 attachée à la serrure par un ressort ayant une constante de raideur K_1 , agissant à une hauteur h_1 . L'indice 1 correspond à la période fondamentale du ballotement. Cette période de ballotement n'est pas égale à la période de résonance de la pression hydrodynamique de l'eau. Pour ces paramètres, les formules sont dérivées initialement par Housner et plus tard présentées par Epstein [22] par l'équation (1.19). Pour les périodes naturelles supérieures ($n = 3, 5, \dots$, etc.), des expressions peuvent être trouvées en substituant (L/n) à L .

Les effets de ballotement, identifiés pour les réservoirs de longueur limitée, ne peuvent pas se produire pour des réservoirs semi-infinis. Bien que pour les réservoirs de longueur limitée beaucoup de fréquences de ballotement peuvent être trouvées. En réalité, il faut beaucoup de temps pour que les ondes de surface traversent la chambre pour déclencher le phénomène de ballotement.

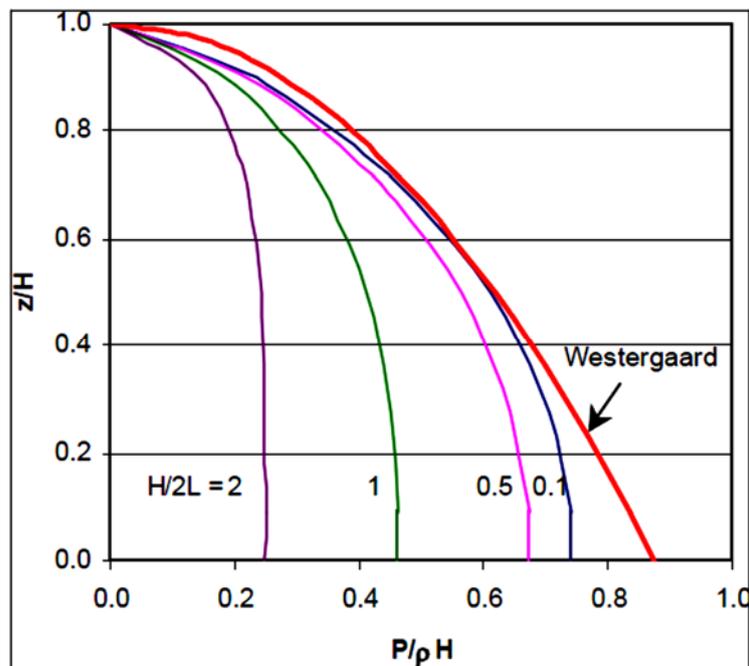


Fig. 1.5 - Comparaison des pressions hydrodynamiques pour différents rapports Hauteur/Longueur (H/L).

1.2.4 METHODE SEMI-ANALYTIQUE DE CHOPRA-CHAKRABARTI

Dans les calculs précédents, le système fond-structure était considéré rigide pendant les vibrations, cette hypothèse reste approximativement valable tant que la fréquence d'excitation sismique est largement inférieure à la fréquence propre de l'ouvrage. Chopra et Chakrabarti ont développé une approche de calcul dite semi-analytique, dans laquelle l'ensemble barrage-réservoir est subdivisé en deux sous structures : le barrage considéré comme étant flexible et sera modélisé par la méthode des éléments finis; le réservoir, modélisé par un milieu continu semi-infini régit par l'équation d'ondes qui sera résolue analytiquement, d'où le nom de Méthode semi-analytique. Cette méthode permet de prendre en compte l'influence du réservoir sur la réponse de la structure à une excitation de type sismique, elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- Le mouvement du système barrage-réservoir est considéré bidimensionnel.
- Le parement amont est vertical.
- Le fond du réservoir est horizontal, la profondeur de l'eau est H et le réservoir s'étend à l'infini.
- L'eau est supposée linéairement compressible avec une viscosité négligeable.
- L'effet des ondes de surface libre de l'eau est négligé, l'erreur associée est considérée comme petite.
- En considérant les réponses à la composante verticale du mouvement de sol, l'effet de flexibilité du fond du réservoir sur les pressions hydrodynamiques est considéré.
- Le mouvement de sol est supposé atteindre tous les points de la base en même temps, c'est-à-dire que la vitesse horizontale de propagation du mouvement de sol est infinie.

Le principe est de résoudre l'équation d'équilibre dynamique obtenue par le modèle d'éléments finis en ajoutant aux forces sismiques les forces hydrodynamiques. Donc tout le problème revient à quantifier ces forces.

L'équation s'écrit :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -[M_s]\{\ddot{X}\}\{F_h\} \quad (1.21)$$

En écrivant les quantités vectorielles sous forme :

$$\xi(t) = \bar{\xi}(\omega)e^{i\omega t} \quad (1.22)$$

La force hydrodynamique :

$$\bar{F}_h(\omega) = \bar{F}_0(\omega) + \sum_{k=1}^m \bar{Y}_k(\omega)\bar{F}_K(\omega) \quad (1.23)$$

Avec \bar{Y}_k : Amplitude de l'accélération généralisée

$$U(t) = \sum_{k=1}^m \phi_m Y_m(t) \quad (1.24)$$

ϕ_m : est le vecteur forme correspondant au mode m .

\bar{F}_0 et \bar{F}_k : correspondent respectivement aux pressions $\bar{P}_0(y, \omega)$ et $\bar{P}_k(y, \omega)$, peuvent être évaluées par application du principe des travaux virtuels.

Les termes $\bar{P}_0(y, \omega)$ et $\bar{P}_k(y, \omega)$ sont les composantes de la solution de l'équation d'onde dans le fluide, telle que :

$$\bar{P}(y, \omega) = \bar{P}_0(y, \omega) + \sum_{k=1}^m \bar{Y}_k(\omega)\bar{P}_K(y, \omega) \quad (1.25)$$

Avec :

$$\bar{P}_0(y, \omega) = \frac{-4\rho}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\sqrt{[\lambda_n^2 - (\frac{\omega^2}{c^2})]}} \cos\lambda_n y \quad (1.26)$$

$$\bar{P}_K(y, \omega) = \frac{-2\rho}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{kn}}{\sqrt{[\lambda_n^2 - (\frac{\omega^2}{c^2})]}} \cos\lambda_n y \quad (1.27)$$

Dans lesquelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H} \\ I_{kn} = \int_0^H \phi_k(y) \cos\lambda_n y dy \end{array} \right\} \quad (1.28)$$

Rappelons que cette méthode pose : $p(t) = \bar{P}(\omega)e^{i\omega t}$ comme solution de :

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \ddot{P} = 0 \quad (1.29)$$

Ayant comme conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \\ P(x, H, t) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(0, y, t) = -\rho \left[1 + \sum_{k=1}^M \phi_k(y) \cdot \bar{Y}_k(\omega) \right] e^{i\omega t} \end{array} \right. \quad (1.30)$$

1.2.5 METHODE DE CONSERVATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT PAR CHWANG & HOUSNER

La méthode basée sur les principes de la continuité et de la conservation de quantité de mouvement, développée par Von-Karman [20] a été, par la suite, adoptée par Chwang et Housner [23] pour étudier les forces sismiques sur un barrage rigide avec une face amont inclinée de pente constante (Figure 1.6(a)). Des formules analytiques explicites ont été développées pour le calcul de la distribution de la pression hydrodynamique et des forces totales horizontales, verticales et normales agissant sur l'interface barrage-réservoir.

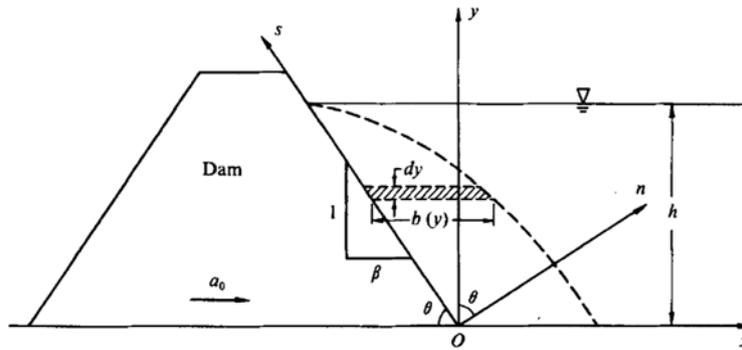


Fig. 1.6 (a) - Modélisation de la masse d'eau se déplaçant avec un barrage à paroi amont inclinée.

Les résultats obtenus pour la distribution de la pression hydrodynamique p sur la face amont du barrage (figure 1.6 (b)) donnée ci-après par l'équation (1.31) sont en accord avec les résultats de Von-Karman lorsque la face amont du barrage est verticale.

$$p = \rho a_0 h C_p \quad (1.31)$$

Où,

C_p : Coefficient des pressions hydrodynamiques,

ρ : Masse volumique de l'eau,

a_0 : Accélération horizontale uniforme de sol.

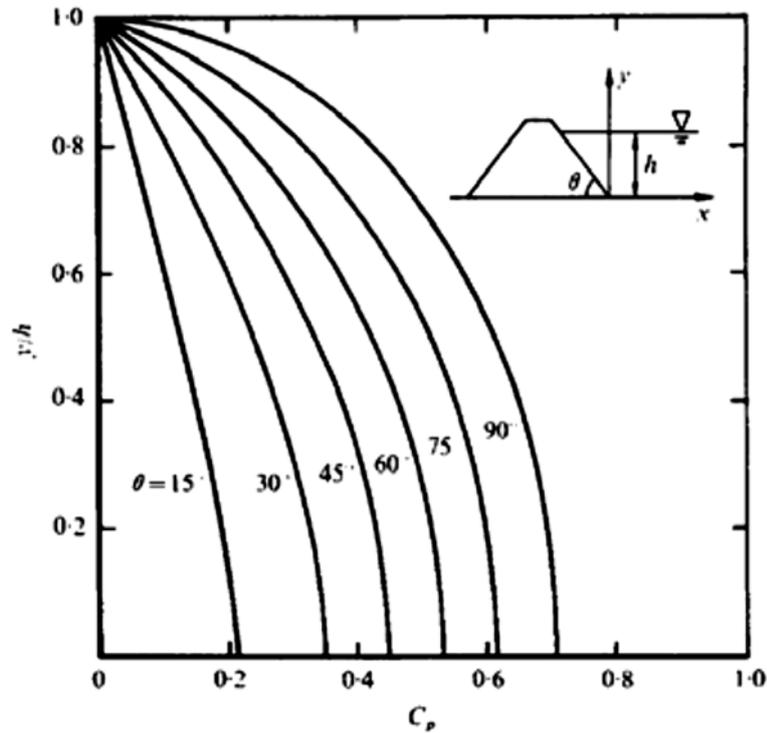


Fig. 1.6 (b) - Coefficients des pressions hydrodynamiques $C_p(y)$ pour le cas d'un barrage rigide incliné.

1.2.6 THEORIE DE L'ÉCOULEMENT POTENTIEL BIDIMENSIONNEL PAR CHWANG

L'équation de Laplace pour les forces sismiques appliquées sur un barrage rigide avec une face amont inclinée d'une pente constante a été résolue par Chwang [4] en se basant sur la transformation conforme de Schwartz-Christoffel utilisant la théorie de la variable complexe. En supposant que l'eau dans le réservoir est incompressible et sans viscosité, la pression hydrodynamique p exercée sur le barrage et exprimée par l'équation (1.32) par le biais du coefficient des pressions hydrodynamiques C_p est représentée par les courbes en trait pleins sur la figure (1.7).

$$p = \rho a_0 h C_p \quad (1.32)$$

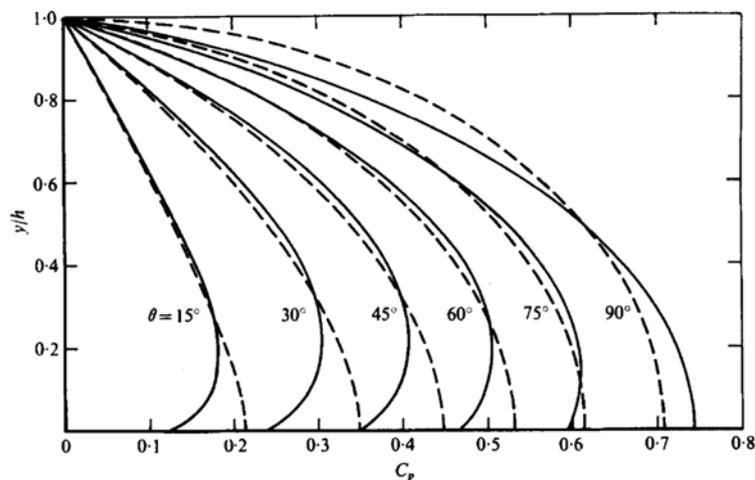


Fig. 1.7- Distribution des pressions hydrodynamiques sur la face amont d'un barrage rigide : Courbes en traits pleins (Théorie « Exacte »), Courbes en pointillés (Méthode de conservation de quantité de mouvement).

On peut noter à partir de la figure (1.7) que, pour toute valeur fixe de l'angle d'inclinaison d'un barrage, la méthode basée sur la conservation de quantité de mouvement prédit que la pression maximale se produit toujours à la base du barrage ($y/h = 0$), alors que la théorie « Exacte » donne la pression maximale à une certaine distance au-dessus de la base du barrage. Ceci est vrai pour toutes les inclinaisons sauf pour le cas d'un barrage vertical où la pression est maximale à la base du barrage pour les deux méthodes. Cela pourrait avoir un effet significatif sur les pressions hydrodynamiques en fonction de leur emplacement.

En général, l'accord entre cette méthode et la théorie « Exacte » est bien lorsqu'on compare les forces totales (résultantes des forces) sur le barrage. Aussi, pour le cas d'un barrage vertical ($\theta = 90^\circ$), la théorie exacte donne $C_p = 0.543$ qui est le même résultat que celui de Westergaard, tandis que de la méthode de conservation de quantité de mouvement donne un $C_p = 0.555$ (Ecart approximatif de 3 %).

Par ailleurs, un très bon accord pourrait être trouvé entre la méthode « Exacte » de Chwang et les résultats des tests de laboratoire effectués par Zangar [2].

1.3 ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS

Les géométries complexes et irrégulières et les conditions aux limites rendent les solutions analytiques pour les forces hydrodynamiques pratiquement impossibles. Cependant, les méthodes numériques, y compris l'analyse par éléments finis, peuvent être appliquées pour résoudre le système des équations de la pression et des déplacements. Pour le modèle barrage-réservoir montré sur la figure (1.8), l'équation du mouvement avec les conditions aux limites est exprimée par le système d'équations (1.33).

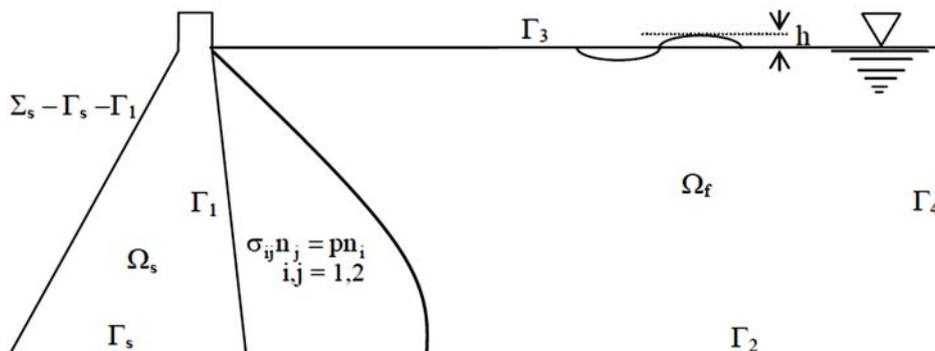


Fig. 1.8 – Modèle du système barrage-réservoir.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= \rho_s \ddot{U}_i | \Omega_s \\ \sigma_{ij} n_j &= p n_i | \Gamma_1 \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 | \Sigma_s - \Gamma_s - \Gamma_1$$

$$U_i = 0 | \Gamma_s$$

Où,

Ω_s, Σ_s : Domaine de la structure du barrage et son contour à l'état d'équilibre,

Γ_s : La base de la structure du barrage,

Γ_1 : Interface fluide-structure,

ρ_s : Masse volumique de la structure du barrage,

U_i, \ddot{U}_i : Déplacement du barrage et son accélération dans la direction i ,

p : Pressions hydrodynamiques sur la face amont du barrage,

n_i : La $i^{\text{ème}}$ composante de \vec{n} (la normale sortante),

f_i : Les forces volumiques dans la $i^{\text{ème}}$ direction,

σ_{ij} : Tenseur des contraintes.

Considérant les relations géométriques entre les déplacements et les déformations, les lois de comportement et les conditions initiales, la discrétisation par éléments finis de la formulation variationnelle de Galerkin des équations précédentes aboutit à un système d'équations différentielles de second ordre :

$$M_s \ddot{U} + C_s \dot{U} + K_s U = F_g + F_p \quad (1.34)$$

Où, M_s , C_s et K_s sont respectivement, les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité du barrage. Le vecteur des inconnus de la variable nodale U représente les déplacements relatifs aux nœuds du modèle éléments finis de la structure du barrage.

Le vecteur des forces $F_g = M_s U_g$ contient les forces générées par l'accélération de sol appliquée aux nœuds de la structure du barrage. Le vecteur $F_p = QP$ représente les forces hydrodynamiques agissant sur la face amont du barrage, elles sont liées au vecteur des inconnus des pressions nodales P . La matrice de transformation Q est exprimée par les fonctions de forme $E.F$ et la pression P .

En général, le modèle de réservoir (avec liquide compressible et un champ de pressions hydrodynamiques) doit satisfaire l'équation d'onde de Helmholtz.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0 \quad (1.35)$$

Avec la condition limite sur Γ_4 représentant la condition de rayonnement. Le paramètre c est la vitesse du son dans l'eau (pour le cas d'un fluide incompressible, la vitesse c approche l'infini et l'équation (1.35) se réduit à l'équation de Laplace). Le système discret d'équations prend la forme suivante :

$$M_F \ddot{P} + C_F \dot{P} + K_F P = q \quad (1.36)$$

Où, M_F , C_F et K_F sont les matrices élémentaires "Masse", "Amortissement" et "Rigidité" assemblées et q est le vecteur des charges.

Le système discret couplé d'équations pour la structure réservoir-barrage pourrait être exprimé par l'équation (1.37) et peut être résolu en utilisant la méthode des éléments finis. On doit noter que les matrices globales "Masse" et "Rigidité" du système couplé barrage-réservoir ne sont pas symétriques.

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ \rho Q^T & M_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & -Q \\ 0 & K_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

Une analyse de la performance relative de quatre modèles éléments finis, décrivant les systèmes de barrage-réservoir en béton, a été effectuée par Tiliouine et Seghir [10]. Quatre scénarios différents ont été dégagés comprenant les modèles de :

- barrage rigide, fluide incompressible (modèle M1),
- barrage flexible, fluide incompressible (modèle M2),
- barrage rigide, fluide compressible (modèle M3),
- barrage flexible, fluide compressible (modèle M4).

Les résultats issus de l'application des quatre modèles de barrage-réservoir proposés au système barrage poids-réservoir d'Oued-Fodda sur la figure (1.9) montrent clairement que l'utilisation de différents modèles numériques conduit à des différences significatives pour les pressions hydrodynamiques et la réponse du système.

Les principales conclusions de l'analyse sont que les modèles avec un fluide incompressible M1 et M2, produisent des résultats pratiquement similaires et des résultats beaucoup plus faibles pour les coefficients des pressions hydrodynamiques que ce qui devrait être attendu dans des situations réelles.

Le modèle le plus complet, M4, montre être capable de capturer les amplifications significatives des pressions hydrodynamiques causées par les effets combinés de flexibilité du barrage et compressibilité de l'eau, en particulier près des conditions de résonance du système barrage-réservoir. Son utilisation est particulièrement recommandée pour l'analyse de la réponse aux tremblements de terre des grands barrages. On voit clairement que les effets combinés de flexibilité du barrage et de compressibilité de l'eau sont les paramètres les plus critiques dans l'étude de la réponse d'un système barrage-réservoir [10].

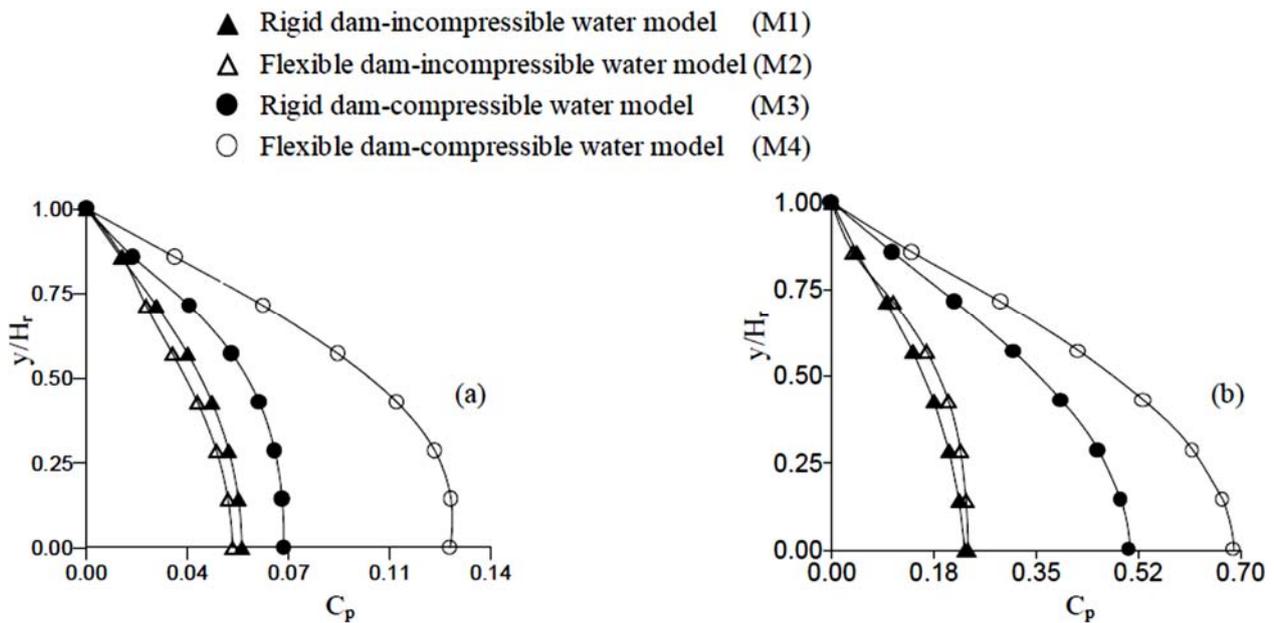


Fig. 1.9 - Répartition des coefficients des pressions à la face amont du barrage pour quatre modèles :
 (a) Séisme d'El-Asnam en 1980, (b) Séisme de Loma Preita en 1989.

1.4 METHODES EXPERIMENTALES

1.4.1 METHODE EXPERIMENTALE DE ZANGAR

Après les études faites par Westergaard, Zangar en 1950 a continué sur la même voie en introduisant l'effet de l'inclinaison du parement amont sur la distribution des pressions hydrodynamiques en 2-D dans les mêmes conditions que celles de Westergaard, pour cela il a utilisé l'analogie qui existe entre le phénomène étudié et le phénomène électrique et il a élaboré un modèle de calcul dans lequel la période de l'excitation n'est pas prise en compte [2]. Zangar a remarqué que les deux phénomènes, la propagation des ondes dans un milieu élastique incompressible et l'étude du champ permanent en électricité, sont gouvernés par la

même équation elliptique de Laplace. Donc à partir de cette similitude on peut déterminer le potentiel électrique à travers un dispositif expérimental approprié et d'en déduire ensuite les pressions hydrodynamiques.

Ce modèle est constitué de plusieurs cuves de dimensions (80 x 5 x 20 en cm) comme illustré dans la figure (1.10). Le nombre de cuves dépend du nombre de fractions C des hauteurs inclinées et des angles d'inclinaison considérés, par exemple Zangar a considéré 12 cuves correspondant aux valeurs des fractions C des hauteurs inclinées de $h/4$, $h/2$, $3h/4$ et h et des angles d'inclinaison 30° , 45° et 60° pour pouvoir simuler les différents cas du parement amont du barrage.

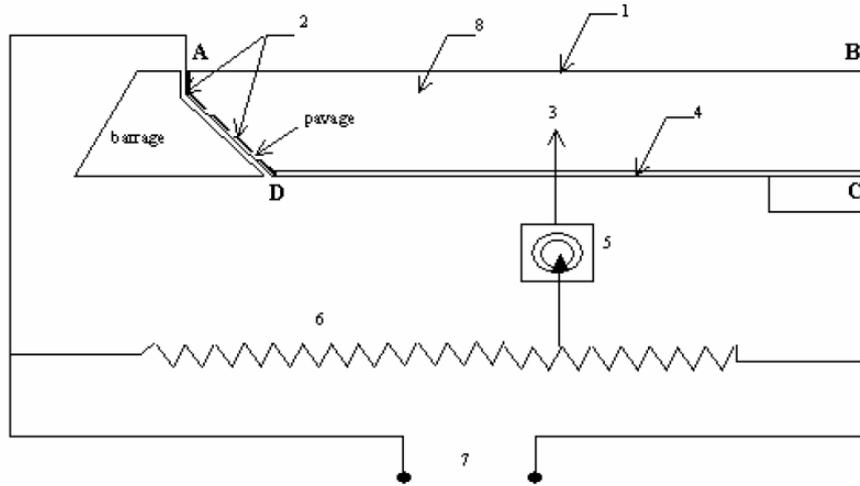


Fig. 1.10 - Dispositif expérimental de Zangar.

1. Surface libre du réservoir,
2. Face amont du barrage (variation linéaire du potentiel : pavage),
3. Sonde,
4. Base du réservoir (électrode à potentiel constant),
5. Galvanomètre (G),
6. Rhéostat (R),
7. Alimentation : Générateur basse fréquence alternative (1000 Hz, 5 V),
8. Electrolyte.

Enfin Zangar a réussi à formuler des expressions analytiques pour les pressions hydrodynamiques, les efforts tranchants et les moments de renversements correspondants tels que :

$$p(y) = \frac{1}{2} C_s w h C_m \left[\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \sqrt{\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right)} \right] \quad (1.38)$$

$$V(y) = 0.726 p y \quad (1.39)$$

$$M(y) = 0.299 p y^2 \quad (1.40)$$

C_m , représente le coefficient des pressions maximales, donné par la figure suivante en fonction de l'angle θ

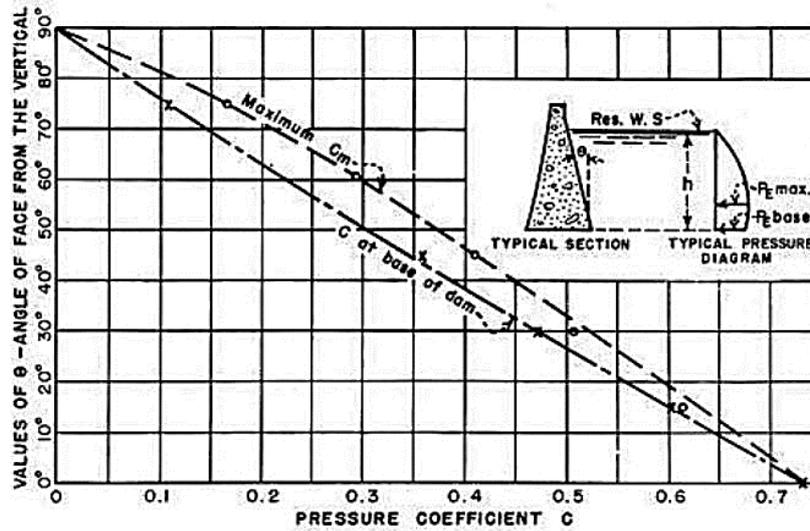


Fig. 1.11 - Coefficients des pressions maximales C_m donnés en fonction de l'angle θ .

1.5 CONCLUSION

Après avoir exposé, à titre indicatif et non exhaustif, quelques approches qu'on pourrait rencontrer dans la littérature spécialisée, tout d'abord on retient le souci des différents auteurs d'avoir, à chaque fois, un modèle de calcul qui se rapprocherait au maximum de la réalité des choses, et ce, à travers un bon choix et surtout un calibrage approprié pour les différents paramètres influents sur la distribution des pressions et des efforts hydro-sismiques générés par le mouvement oscillatoire de sol, particulièrement au droit de l'interface barrage-réservoir.

Lorsque la géométrie de la face amont du barrage est simple, l'utilisation des méthodes approchées est louable d'autant plus que les résultats ne seront pas loin de ceux qu'on pourrait obtenir avec les méthodes lourdes et permettrait de localiser ainsi la plage des réponses sismiques du système barrage-réservoir. En revanche, lorsque cette dernière devient complexe, le recours aux méthodes de calculs numériques tels que la M.E.F serait très recommandée voire incontournable pour ce type de situations.

La comparaison des résultats issus de l'application des différentes méthodes exposées fait ressortir des écarts négligeables qui sont de l'ordre de 2 à 5%, que ce soit pour les pressions hydrodynamiques ou bien pour les efforts de réduction.

Chapitre 2

FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

Chapitre 2 : Formulation mathématique du problème

2.1 INTRODUCTION

La formulation de l'équation gouvernante nécessite, au préalable la définition des variables champs du système étudié. Afin de répondre à cette question pertinente, on commencera tout d'abord par la description du système objet de notre étude. Il est composé d'un barrage poids en béton considéré rigide, adossé à un réservoir de hauteur constante, ayant un fond rigide et de longueur infinie.

Sous l'effet d'un séisme horizontal, le barrage est supposé se déplacer en tant que corps rigide entraînant dans son mouvement oscillatoire la masse d'eau se trouvant du côté amont de l'interface barrage-réservoir. Ce mouvement d'ensemble est considéré bidimensionnel et restreint à de petites amplitudes. Suite à quoi, des surpressions hydrodynamiques sont générées dans le liquide du réservoir, qui viendraient s'ajouter aux pressions hydrostatiques déjà existantes dans le réservoir.

Compte tenu des considérations précédentes et en absence de l'interaction fluide-structure pour notre cas d'étude (Barrage supposé non flexible), uniquement le champ des pressions hydrodynamiques est considéré pour l'écriture de l'équation gouvernant la réponse du système barrage-réservoir. La description du liquide dans le réservoir par uniquement le champ des pressions réduit la taille du système discret résultant et permet de satisfaire la condition d'irrotationalité et de résoudre le problème directement en termes de forces hydrodynamiques agissant sur la structure du barrage. Dans la littérature spécialisée on peut retrouver d'autres variables champs en mesure de caractériser la réponse du système telle que : le « potentiel des vitesses $\phi(t)$ », étant donné que le champ des pressions hydrodynamiques est directement dépendant de ce dernier par le biais de la densité du liquide ($p = \rho \partial\phi/\partial t$).

Sous l'effet du mouvement oscillatoire du barrage, des ondes de compression prendront naissance à partir de la face amont du barrage et se propageront horizontalement à la vitesse de 1438 *m/sec* environ, se dirigeant vers la limite de troncature S4. Donc il s'agit d'une propagation d'ondes volumiques dans un milieu liquide supposé compressible et visqueux.

Ce phénomène de propagation d'ondes est décrit dans les ouvrages spécialisés par l'équation aux dérivées partielles de « Helmholtz », à laquelle on pourrait également aboutir à travers l'écriture de l'équation aux dérivées partielles de Navier-Stokes décrivant l'équilibre de toutes les forces agissant sur un volume élémentaire de la masse du liquide dans le réservoir que nous allons, pour plus d'illustration, brièvement exposé dans ce chapitre.

Le liquide étant considéré compressible et visqueux, il est plus judicieux de solutionner le problème dans le domaine des fréquences que celui des temps, ceci pour mieux cerner la réponse du système notamment que ces deux paramètres de calibrage de notre modèle sont étroitement dépendants de la fréquence angulaire du chargement extérieur.

L'autre problématique rencontrée, qui n'est pas des moindres, est celle liée à la modélisation de la viscosité du liquide dans le réservoir. Cette dernière, à travers notre modèle, caractérise

le mécanisme par lequel le système dissipe de l'énergie. Dans l'équation de Navier-Stokes, ce mécanisme est assimilé à la viscosité dynamique du liquide. En revanche, lorsque nous avons utilisé les ensembles complet des fonctions complexes de Trefftz pour solutionner l'équation de Helmholtz, nous avons fait recours au modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt pour restituer au mieux ce mécanisme de dissipation qui se produit en réalité par radiation, par frottement interne et par résistance du liquide au mouvement, donc bien complexe que l'amortissement visqueux donnant lieu habituellement à des forces d'amortissement proportionnelles à la vitesse des particules fluide.

2.2 HYPOTHESES DU PROBLEME

Considérons un barrage rigide à face amont partiellement inclinée avec un réservoir de longueur infinie ayant un fond rigide, soumis à un chargement sismique horizontal de courte durée. L'origine des coordonnées est située à la base du barrage (Fig. 2.1). Le mouvement du système barrage-réservoir est considéré bidimensionnel et l'eau dans le réservoir est considérée linéairement compressible, visqueuse et irrotationnelle.

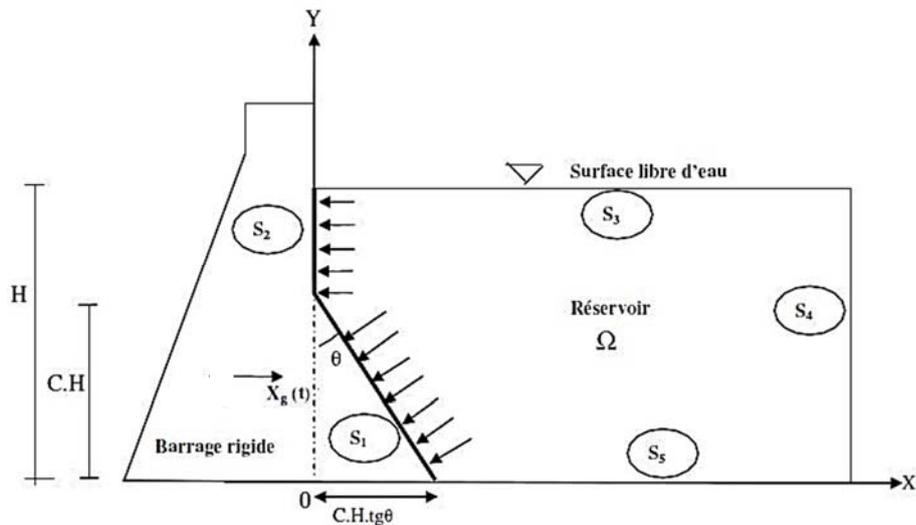


Fig. 2.1 - Barrage rigide partiellement incliné avec un réservoir de longueur infinie soumis à un mouvement horizontal de sol.

Soit $M(x, y)$, un point dans le système de coordonnées cartésiennes $(0, x, y)$, situé sur la face amont du barrage à une élévation y du fond du réservoir, les coordonnées du point M sont définies par :

$$x = \begin{cases} (CH - y) \tan \theta & y < CH \\ 0 & y \geq CH \end{cases} \quad (2.1)$$

Où H , est la profondeur de l'eau dans le réservoir, C , est une fraction de hauteur du liquide dans le réservoir et θ , l'angle formé par la partie inclinée de la face amont du barrage avec la verticale.

Étant donné que le barrage subit un déplacement en corps rigide, l'ensemble des points appartenant à l'interface fluide-structure sont supposés avoir, à tout instant, la même accélération que celle des points situés à la base du barrage.

Sur la figure (2.1), le réservoir est délimité par quatre contours définis comme suit :

$S_1 \cup S_2$: Contour délimitant la face amont du barrage où, S_1 :représente la partie inclinée et S_2 la partie verticale ; S_3 : Contour définissant la surface libre de l'eau ; S_4 : contour définissant

la limite de troncature du réservoir qu'on désigne souvent dans la littérature spécialisée par "limite de rayonnement" et S_5 : Contour définissant le fond du réservoir supposé dans notre cas horizontal et infiniment rigide; CH représente la hauteur de la partie inclinée de la face amont et \vec{n} est la normale à l'interface barrage-réservoir, orientée vers l'extérieur.

2.3 CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites pour le système barrage-réservoir montré sur la figure (2.1) sont données par :

1- Sur la partie amont du barrage, délimitée par le contour $S_1 \cup S_2$, on suppose que le gradient des pressions hydrodynamiques dans la direction normale et les forces d'inertie générées par la masse d'eau se trouvent dans un état d'équilibre, ce qui nous permet d'écrire :

$$\partial P(x, y, w) / \partial n |_{S_1 \cup S_2} = -\rho \ddot{U}_n \quad (2.2)$$

Où, \ddot{U}_n est la composante normale de l'accélération horizontale de sol $\ddot{U}_g(t)$, définie par l'équation suivante:

$$\ddot{U}_n = \begin{cases} \ddot{U}_g(t) \cos \theta & < CH \\ \ddot{U}_g(t) y & \geq CH \end{cases} \quad (2.3)$$

2- A la surface libre d'eau, nous supposons que : $P(x, H, w) |_{S_3} = 0$.

3- A la limite de troncature S_4 , considérée assez éloignée de la face amont du barrage (lorsque $L \geq 3H$, où L désigne la longueur du réservoir), on suppose que $P(\infty, y, w) |_{S_4} = 0$.

4- Au fond du réservoir, l'accélération des particules de l'eau dans la direction verticale est nulle et le gradient des pressions hydrodynamiques associées est ainsi nul.

$$\partial P(x, 0, w) / \partial y |_{S_5} = 0 \quad (2.4)$$

2.4 UTILISATION DE L'EQUATION DE NAVIER-STOKES

L'écriture de l'équation de Navier-Stokes fait intervenir plusieurs forces qui agissent sur un volume élémentaire dV de la masse du liquide à savoir :

1) Forces gravitationnelles (forces volumiques)

On suppose une force de gravité \vec{g} de composantes g_x , g_y et g_z agissant sur une masse unitaire du liquide dans le réservoir.

2) Forces de pressions hydrodynamiques (forces surfaciques)

La pression est une contrainte surfacique agissant toujours perpendiculairement la surface du liquidée dirigée vers l'intérieur. On considère une force extérieure \vec{P} agissant sur une masse d'un volume élémentaire du liquide dont l'expression est définie par:

$$\vec{P} = -\vec{\nabla} P \cdot dV \quad (2.5)$$

3) Forces de viscosité

La force due à la viscosité \vec{F}_{visc} est représentée par des contraintes tangentielles qui agissent parallèlement à la surface du volume élémentaire, elle est analogue à la force de frottement pour le cas d'un solide.

L'expression de cette dernière est donnée en fonction du gradient des vitesses.

$$\vec{F}_{visc} = \vec{\nabla} \tau \cdot dV \quad (2.6)$$

4) Forces d'inertie

En supposant un volume élémentaire de liquide de masse m subissant une accélération uniforme \vec{a} , la force d'inertie \vec{F}_i s'appliquant sur ce volume s'exprimera alors comme suit :

$$\vec{F}_i = m\vec{a} \quad (2.7)$$

5) Forces extérieures

L'équation d'équilibre de l'ensemble de toutes ces forces s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{g} + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad (2.8)$$

En remplaçant par les expressions définies précédemment dans l'équation (2.8) et après simplification on aboutit à l'équation de Navier-Stokes pour un fluide Newtonien.

$$\nabla^2 P + \frac{\mu}{K} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 P) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

Avec :

∇ : Opérateur différentiel gradient,

μ : Viscosité dynamique de l'eau,

c : Célérité des ondes de compression dans l'eau ($c \approx 1438 \text{ m/s}$).

En supposant que la réponse du système en termes des pressions hydrodynamiques P s'écrit sous la forme :

$$P(x, y, t) = \bar{P}(x, y, \omega) e^{i\omega t} \quad (2.10)$$

On aura donc :

$$\frac{\partial^2 P(x, y, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \bar{P}(x, y, \omega) e^{i\omega t} = -\omega^2 P(x, y, t) \quad (2.11)$$

En remplaçant l'équation (3. 11) dans l'équation (3. 9), on aura :

$$\nabla^2 \bar{P} e^{i\omega t} + \frac{\mu}{K} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \bar{P}) e^{i\omega t} + \frac{\mu}{K} i\omega e^{i\omega t} (\nabla^2 \bar{P}) + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{P} e^{i\omega t} = 0 \quad (2.12)$$

Etant donné que $\bar{P}(x, y, \omega)$ est indépendante du temps et $e^{i\omega t} > 0$:

$$\nabla^2 \bar{P} + \frac{\omega^2}{\left(c^2 + \frac{i\mu\omega}{K}\right)} \bar{P} = 0 \quad (2.13)$$

En posant :

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.14)$$

On trouve :

$$\nabla^2 \bar{P} + \frac{\omega^2}{\left(c^2 + \frac{i\mu\omega}{\rho}\right)} \bar{P} = 0 \quad (2.15)$$

Qu'on pourrait aussi écrire sous la forme :

$$\nabla^2 \bar{P} + S^2 \bar{P} = 0 \quad (2.16)$$

Avec :

$$S^2 = \frac{\omega^2}{\left(c^2 + \frac{i\mu\omega}{\rho}\right)} \quad (2.17)$$

Ainsi, est obtenue l'équation gouvernant le domaine du réservoir dans le domaine fréquentiel.

2.4.1 SOLUTION DU PROBLEME

Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode de séparation des variables, ainsi la pression hydrodynamique est exprimée par le produit de trois fonctions linéairement indépendantes et non nuls :

$$\bar{p}(x, y, \omega) = A(x)B(y)C(\omega) \quad (2.18)$$

D'où,

$$\nabla^2 \bar{P} + S^2 \bar{P} = C(\omega) \left[\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} B(y) + \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} A(x) \right] + S^2 A(x)B(y)C(\omega) = 0 \quad (2.19)$$

$C(\omega)$, étant une fonction supposée non nulle, donc:

$$\left[\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} B(y) + \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} A(x) \right] = -S^2 A(x)B(y) \quad (2.20)$$

En divisant par $A(x)B(y)$, on trouve :

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} \frac{1}{A(x)} + \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} \frac{1}{B(y)} = -S^2 \quad (2.21)$$

En posant :

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = A''(x) \text{ et } \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} = B''(y) \quad (2.22)$$

On aboutit à l'équation (2.23) qui est une équation différentielle linéaire de second ordre à coefficients constants. Les deux membres de cette équation comprennent des variables indépendantes entre elles, par conséquent celle-ci ne peut être satisfaite que si ces derniers sont constants. On définit alors la constante γ telle que :

$$\frac{A''(x)}{A(x)} + S^2 = -\frac{B''(y)}{B(y)} = \gamma \quad (2.23)$$

Ce qui revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A''(x) - (\gamma - S^2)A(x) = 0 \\ -B''(y) - \gamma B(y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A''(x) - \beta A(x) = 0 \\ B''(y) + \gamma B(y) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Avec :

$$\beta = \gamma - S^2 \quad (2.25)$$

En appliquant les conditions aux limites et en évitant les solutions triviales, on aura :

$$\begin{cases} A(x) = A_0 e^{-\sqrt{\beta}x} \\ B(y) = B_0 \sin(\sqrt{\gamma}y) \\ \sqrt{\gamma} = \frac{(2k-1)\pi}{2H} \quad k = 1, 3, 5 \dots \infty \end{cases} \quad (2.26)$$

En posant : $\sqrt{\gamma} = \lambda$, on aura :

$$\begin{cases} A(x) = A_0 e^{-\sqrt{\lambda^2 - S^2} x} \\ B(y) = B_0 \sin(\lambda y) \end{cases} \quad (2.27)$$

On aboutit alors à :

$$\bar{P}(x, y, \omega) = A_0 B_0 e^{-\sqrt{\lambda^2 - S^2} x} \sin(\lambda y) \quad (2.28)$$

En posant : $G = A_0 B_0$, on obtient :

$$\bar{P}(x, y, \omega) = G e^{-\sqrt{\lambda^2 - S^2} x} \sin(\lambda y) \quad (2.29)$$

Par combinaison linéaire de toutes les solutions, on peut aussi écrire :

$$\bar{P}(x, y, \omega) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} G_n e^{-\sqrt{\lambda_n^2 - S^2} x} \sin(\lambda_n y) \quad (2.30)$$

En appliquant la troisième condition aux limites, on trouve :

$$G_n = \frac{2g\rho\alpha}{H\lambda_n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 - S^2}} \quad (2.31)$$

Après simplification, l'équation (2.30) peut s'écrire dans le domaine temporel comme suit :

$$p(x, y, t) = \frac{8g\rho\alpha H}{\pi^2} e^{i\omega t} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{1 - \frac{S^2}{\lambda_n^2}}} e^{-\frac{n\pi}{2H} \sqrt{1 - \frac{S^2}{\lambda_n^2}}} \sin(\lambda_n y) \quad (2.32)$$

Au moment d'occurrence du phénomène de résonance, la pression hydrodynamique prend sa valeur maximale, ce qui nous permet de déterminer la période de résonance comme suit :

$$T_{rés} = -\frac{\mu\pi}{\rho c^2} i \pm \frac{\sqrt{-\mu^2\pi^2 + 16\rho^2 C^2 H^2}}{\rho c^2} \quad (2.33)$$

En absence de viscosité ($\mu = 0$), on tombe sur la période de résonance déjà donnée par Chopra [3].

$$T_{rés} = \frac{4H}{nc} \quad (2.34)$$

Dans la relation (2.33) la partie réelle de la période de résonance est identique à celle d'un liquide non visqueux, tandis que la partie imaginaire représente l'effet de retardement causé par la présence de la viscosité du liquide dans le réservoir.

2.5 UTILISATION DES FONCTIONS COMPLEXES DE TREFFTZ

Pour solutionner le problème, on peut également faire recours à une méthode de calculs aux frontières utilisant des ensembles complets de fonctions de Trefftz à valeurs complexes. L'avantage principal de cette méthode est que le nombre de degrés de libertés du problème se résume, de fait, au nombre de fonctions de Trefftz retenues pour l'approximation de la solution. Ainsi la solution en termes de pressions hydrodynamiques dans le domaine fréquentiel est donnée par une combinaison linéaire des modes propres de l'eau en vibration dans le réservoir telle que :

$$P = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i T_i(x, y, w) = C_s \gamma H C_p(y) \quad (2.35)$$

Avec :

$$T_i(x, y, w) = e^{-\mu_i x} \cos \lambda_i y, \quad \lambda_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2H} \quad \text{et} \quad \mu_i = \sqrt{\lambda_i^2 - K^2} \quad (2.36)$$

Où, les A_i sont des coefficients complexes inconnus à déterminer, les $T_i(x, y, w)$ sont les périodes propres de vibration du liquide dans le réservoir et K est le nombre d'onde.

L'introduction des fonctions complexes de Trefftz vérifiant les trois conditions aux limites: Au niveau de la surface libre d'eau S_3 , au niveau du fond du réservoir S_5 ainsi qu'au niveau de la limite de rayonnement S_4 nous permet donc d'exprimer la solution générale de l'équation différentielle de Helmholtz sous forme d'une combinaison linéaire des modes naturels du réservoir. Toutefois, pour satisfaire la quatrième et dernière condition aux limites (Au niveau de la frontière $S = S_1 \cup S_2$), la technique des moindres carrés est utilisée, aboutissant à une fonction des erreurs à valeurs complexes, définie comme étant le carré de la valeur absolue de l'erreur résiduelle, intégrée le long du contour constituant l'interface barrage-réservoir (Eq. 2.37).

$$E = \int_S \left| \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{\partial T_i}{\partial n} + \rho \ddot{U}_n \right|^2 ds \quad (2.37)$$

Puisque la fonction des erreurs, telle que définie dans (2.37), dépend des coefficients inconnus A_i , la condition nécessaire pour minimiser cette dernière s'écrit sous la forme suivante [15] :

$$\frac{\partial E}{\partial A_j^*} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.38)$$

Où, le symbole (*) indique le conjugué complexe. Ce qui nous fait aboutir à l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_S \frac{\partial T_j^*}{\partial n} \frac{\partial T_i}{\partial n} ds = -\rho \int_S \ddot{U}_n \frac{\partial T_j^*}{\partial n} ds, \quad j = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.39)$$

Qu'on pourrait également écrire sous forme matricielle :

$$[F_{ji}] \{A_i\} = \{G_j\} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.40)$$

L'équation (2.40) représente un système linéaire d'équations algébriques pour le vecteur des coefficients inconnus $\{A_i\}$. En fait, lorsque le carré de l'erreur résiduelle est utilisé (Eq. 2.37), le système d'équations algébriques en question est symétrique [6]. Les éléments de la matrice Hermitienne $[F_{ji}]$ et de vecteur colonne $\{G_j\}$ sont calculés à partir des équations (3.41) et (3.42) ci-dessous [15].

$$F_{ji} = \int_S \frac{\partial T_j^*}{\partial n} \frac{\partial T_i}{\partial n} ds \quad (2.41)$$

$$G_j = -\rho \int_S \ddot{U}_n \frac{\partial T_j^*}{\partial n} ds \quad (2.42)$$

La résolution du système d'équations linéaires (2.40) nous permet ainsi d'obtenir le vecteur des coefficients inconnus $\{A_i\}$, ce qui nous permet en conséquence, par le biais de l'équation (2.35), de calculer directement les pressions hydrodynamiques agissant au droit de l'interface barrage réservoir. La résultante des forces de cisaillement ainsi que celle des moments de renversement associés seront déterminés analytiquement à partir d'un processus d'intégrations successives.

Ceci n'est possible que si la convergence uniforme de la série de fonctions $C_p(y)$ est vérifiée, car durant le processus d'intégrations, nous sommes contraint d'effectuer une interversion entre l'opérateur (\int) et l'opérateur (\sum) pour pouvoir agir directement sur les fonctions complexes constituant la série des fonctions $C_p(y)$.

En fait, $C_p(y)$ devrait converger vers une fonction appelée "fonction limite", définie comme étant l'ensemble des points correspondants aux séquences de convergences simples en tout point y appartenant à l'intervalle compact $[0, H]$. Pour un nombre fini de termes et une tolérance de calcul appropriée, une troncature est opérée sur la série de fonctions des pressions hydrodynamiques dans les conditions citées ci-dessus et grâce au critère de "Cauchy uniforme", la convergence uniforme de $C_p(y)$ a pu être vérifiée.

Sous l'hypothèse de petites déformations et compte tenu des effets de compressibilité et de viscosité du liquide dans le réservoir, le modèle viscoélastique linéaire de Kelvin-Voigt [15, 24] a été adopté. Le module de Lamé est ainsi exprimé par une fonction à valeurs complexes dépendant de la fréquence angulaire d'excitation w (Eq. 2.43).

La célérité des ondes de compression est donnée par l'équation (2.44), dans laquelle λ^c représente le module complexe de Lamé et ρ la masse volumique d'eau.

$$\lambda^c = \lambda (1 + i2\eta\xi) \quad (2.43)$$

$$c = \sqrt{\lambda^c / \rho}, \quad K = w\sqrt{\rho / \lambda^c} \quad (2.44)$$

Où, $\eta = wH/c$ est une fréquence sans dimension et ξ le taux d'amortissement de l'eau dans le réservoir. Bien entendu, cette modélisation permettrait de simuler au mieux l'amortissement matériel interne du liquide dans le réservoir qui est à l'origine d'une dissipation d'énergie lorsque les ondes de compression voyagent de la face amont du barrage vers la limite de troncature S_4 . Cette limite est considérée assez éloignée, nous permettant ainsi de pouvoir négliger l'effet d'interférence dans le domaine du réservoir entre les ondes de compression incidentes et les ondes réfléchies.

On suppose que le barrage vibre en tant que corps rigide avec la même accélération horizontale de sol donnée par :

$$\ddot{U}_g(t) = e^{iwt} \quad (2.45)$$

Puisque nous avons adopté une approche simplifiée pour l'évaluation de la réponse sismique, l'accélération de pointe au sol est jugée suffisamment représentative pour définir les paramètres sismiques [25]. Ainsi, la pression hydrodynamique peut donc être exprimée dans le domaine temporel par ce qui suit:

$$p(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i T_i(x, y, w) e^{iwt} \quad (2.46)$$

2.6 DESCRIPTION DU MODELE DE KELVIN-VOIGT

Il existe plusieurs modèles rhéologiques pouvant décrire le comportement d'un matériau vis à vis des sollicitations extérieures. Dans les matériaux réels, une partie de l'énergie élastique de l'onde progressive est toujours convertie en chaleur. Cette conversion est accompagnée d'une diminution de l'amplitude de l'onde. L'amortissement visqueux, en vertu de sa commodité mathématique, est souvent utilisé pour représenter cette dissipation de l'énergie élastique. Parmi ces modèles, celui de Kelvin-Voigt reste le modèle viscoélastique le plus utilisé, il est

représenté par un système ressorts-amortisseurs disposés en parallèles.

En ajoutant et en réarrangeant les ressorts et les amortisseurs, on peut ainsi modéliser différents types de comportements. Cependant, plus le nombre d'amortisseurs-ressorts est important plus l'équation d'onde devient plus complexe à résoudre.

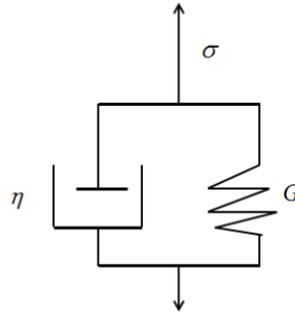


Fig. 2.2 –Modèle de Kelvin-Voigt.

Dans le modèle représenté sur la figure (2.2), la résistance totale à la déformation de cisaillement est donnée par la somme de la composante élastique et de la composante visqueuse, où $(\tau = \sigma_{xz})$ représente la contrainte tangentielle de cisaillement, $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$ est la déformation de cisaillement et η la viscosité du matériau. Ainsi la contrainte de cisaillement représente la somme de la part élastique (proportionnelle à la déformation) et la part visqueuse (proportionnelle au taux de déformation). Pour une déformation de cisaillement de forme harmonique :

$$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t \tag{2.47}$$

L'expression de la contrainte de cisaillement devient :

$$\tau = G\gamma_0 \sin \omega t + \omega \eta \gamma_0 \cos \omega t \tag{2.48}$$

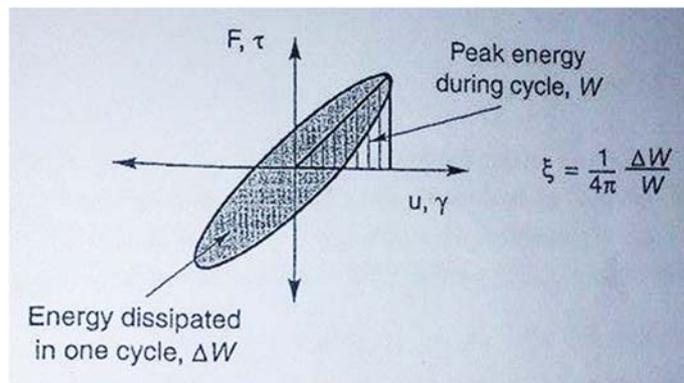


Fig. 2.3 - Relation entre la boucle d'hystérésis et le taux d'amortissement.

Les deux équations (2.47) et (2.48) montrent que la loi contraintes-déformations d'un solide de kelvin-Voigt est elliptique.

L'énergie élastique dissipée durant un seul cycle est donnée par la surface de l'ellipse, soit :

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \tau \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt = \pi \eta \omega \gamma_0^2 \tag{2.49}$$

Cette relation nous montre que l'énergie dissipée est proportionnelle à la fréquence du chargement extérieur. Pour un système de Kelvin-Voigt discret, le coefficient

d'amortissement ξ a été montré être lié à la loi force-déplacement montrée sur la figure (2.3). Puisque l'énergie emmagasinée dans un cycle est :

$$W = \frac{1}{2} G \gamma_0^2 \quad (2.50)$$

D'où,

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi \eta \omega \gamma_0^2}{\frac{1}{2} G \gamma_0^2} = \frac{\eta \omega}{2G} \quad (2.51)$$

Pour éliminer le terme de la fréquence dans l'expression précédente, cette dernière est réarrangée pour aboutir à une viscosité équivalente (inversement proportionnelle à la fréquence d'excitation), qui assure l'indépendance entre le coefficient d'amortissement et la fréquence :

$$\eta = \frac{2G\xi}{\omega} \quad (2.52)$$

A titre d'exemple, dans ce qui suit, on va illustrer la propagation verticale des ondes SH (ondes polarisées dans le plan horizontal), ainsi l'équation unidimensionnelle du mouvement peut être exprimée par :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (2.53)$$

En substituant l'équation (2.48) dans l'équation (2.53) avec $\tau = \sigma_{xy}$ et $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$, l'équation de propagation devient :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \quad (2.54)$$

Pour des ondes harmoniques, les déplacements sont exprimés par :

$$u(z, t) = U(z) e^{i\omega t} \quad (2.55)$$

Une fois substitué dans l'équation d'onde (2.54), l'équation différentielle ordinaire s'écrit :

$$(G + i\omega\eta) \frac{d^2 U}{dz^2} = -\rho\omega^2 U \quad (2.56)$$

Où,

$$G^* \frac{d^2 U}{dz^2} = -\rho\omega^2 U \quad (2.57)$$

$G^* = G + i\omega\eta$, représente le module complexe de cisaillement. Ce dernier est analogue à la rigidité complexe. En utilisant l'équation (2.52) pour éliminer la dépendance de la fréquence, le module complexe de cisaillement peut être exprimé par :

$$G^* = G(1 + 2i\xi) \quad (2.58)$$

L'équation de mouvement aura donc pour solution :

$$u(z, t) = A e^{i(\omega t - k^* z)} + B e^{i(\omega t + k^* z)} \quad (2.59)$$

Où, A et B sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites et $k^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G^*}}$ représente le nombre complexe d'ondes. Koleski en 1963, a montré que k^* peut-être écrit sous la forme suivante :

$$k^* = k_1 + ik_2 \quad (2.60)$$

Avec :

$$k_1^2 = \frac{\rho w^2}{2G(1+4\xi^2)} (\sqrt{1+4\xi^2} + 1) \quad (2.61)$$

$$k_2^2 = \frac{\rho w^2}{2G(1+4\xi^2)} (\sqrt{1+4\xi^2} - 1) \quad (2.62)$$

Seules la racine positive de k_1 et la racine négative de k_2 ont une signification physique. L'équation (2.59) montre que l'amortissement du matériau produit une atténuation des ondes d'une manière exponentielle.

Pour notre cas de figure, s'agissant d'un milieu liquide compressible et visqueux et par analogie à la démarche précédente, le modèle viscoélastique linéaire de Kelvin-Voigt a été adopté. Cette situation a été abordée dans les paragraphes précédents (équations 2.43 et 2.44). Dans la littérature spécialisée, il est bien connu que le module de lamé est à valeurs réelles lorsque le milieu considéré est linéairement élastique. En revanche, pour un milieu viscoélastique, ce dernier prend des valeurs complexes dépendant directement de la fréquence d'excitation [15, 24].

2.7 CONCLUSION

A travers ce chapitre, on peut noter que le choix d'un modèle mathématique par rapport à un autre constitue une tâche très difficile à concrétiser, laquelle est confronté au préalable, l'ingénieur concepteur.

D'abord, il doit définir les paramètres de calibrage du modèle à considérer, définir l'équation gouvernant le phénomène étudié, choisir les outils de résolution de l'équation gouvernante avec la définition des conditions aux limites appropriées. Ces dernières devraient être autant que possible proches de la situation réelle.

Une autre difficulté qui viendrait se rajouter, et qui n'est pas des moindres, celle liée à la minimisation de l'erreur de calcul, notamment qu'il s'agit, pour notre cas de figure, d'un calcul approché pour lequel une troncature sera opérée sur la série des fonctions des pressions hydrodynamiques. Pour tacler ce dernier point, nous avons utilisé la technique des moindres carrés qui nous a permis de définir le long de la face amont du barrage une fonction d'erreur. La minimisation de l'erreur le long du contour barrage-réservoir nous a permis d'obtenir des valeurs optimales pour le vecteur des coefficients inconnus $\{A_i\}$ et de garantir ainsi la convergence uniforme pour la série des fonctions des forces hydro-sismiques.

Chapitre 3

DEVELOPPEMENT DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES POUR LA DISTRIBUTION DES FORCES HYDRO-SISMIQUES

Chapitre 3 : Développement des expressions analytiques pour la distribution des forces hydro-sismiques

3.1 INTRODUCTION

A travers ce chapitre et par le biais d'un processus d'intégrations analytiques opérées sur l'expression donnée pour les pressions hydrodynamiques $C_p(y)$, nous allons déterminer des expressions analytiques pour le calcul des distributions des forces de cisaillement et des moments de renversement associés agissant le long de l'interface barrage-réservoir.

Avant d'entamer la procédure, il est impératif de vérifier au préalable, la convergence uniforme de la série de fonctions $C_p(y)$ sur l'intervalle compact d'intégration $[0, H]$. Ce dernier est subdivisé en deux parties :

- Le sous-intervalle $[0, CH]$ représentant la partie inclinée du barrage, où l'accélération normale à l'interface est donnée par $\ddot{U}_n = \ddot{U}_g \cos \theta$.
- Le sous-intervalle $[CH, H]$ représentant la partie verticale du barrage, où l'accélération horizontale de sol est considérée dans sa totalité pour le calcul des forces hydro-sismiques.

Le processus d'intégration analytique se fait à plusieurs fois successives par parties, avec à chaque fois, des réarrangements appropriés qui sont opérés. Ces réarrangements ont nécessité la mobilisation d'un énorme effort de concentration et surtout un sens d'observation élevé, dans le but de rendre les expressions analytiques obtenus, à chaque fois, plus compact et moins encombrantes.

Dans le processus de calcul, nous avons tenu compte uniquement de la composante horizontale de la résultante des forces de cisaillement et celle des moments de renversement associés. Ceci n'empêche que la composante verticale des forces hydro-sismiques pourrait être, de la même manière, obtenue par projection de la résultante des efforts sur la verticale. A noter que la résultante des moments associés à cette composante aura tendance à stabiliser le barrage contrairement à celle générée par la composante horizontale.

Dans ce qui suit, la convergence uniforme de la série de fonctions des pressions hydrodynamiques sera étudiée et sera suivie par une application numérique pour illustrer davantage cette situation.

3.2 ETUDE DE LA CONVERGENCE UNIFORME DE LA SERIE DE FONCTIONS $C_p(y)_{i \geq 1}$

Au droit de l'interface barrage-réservoir, le coefficient des pressions hydrodynamiques est donné par la relation suivante :

$$C_p(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{C_s \gamma H} \right) e^{-\mu_i x} \cos(\lambda_i y) \quad (3.1)$$

Avec :

$$\lambda_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2H}, \quad \mu_i = \sqrt{\lambda_i^2 - K^2} \quad (3.2)$$

Ainsi, la pression hydrodynamique est approchée par une série de fonctions de la variable y évoluant sur l'intervalle compact $I = [0, H]$ définie dans \mathbb{R} . Dans ce qui suit, on pose $C_p(y) = \sum_{i \geq 1} u_i(y)$. Pour tout entier naturel p , on définit $S_p(y)$ la fonction, somme partielle d'ordre p des $(u_i)_{i \geq 1}$ par :

$$\forall y \in I, S_p(y) = u_1(y) + u_2(y) + \dots + u_p(y) = \sum_{i=1}^p u_i(y) \quad (3.3)$$

Avant d'entamer l'étude de la convergence uniforme de la série de fonctions $C_p(y)$, on doit d'abord vérifier sa convergence simple. Lorsque la variable y prend une valeur quelconque $y_0 \in I$, la série de fonctions $C_p(y_0)$ se résume à une série numérique qui convergerait simplement vers des limites finies lorsque i varie de 1 à l'infini (la convergence simple est ponctuelle).

On remarque que lorsque i tend vers l'infini, le terme général de cette série numérique donnée par: $\sum_{i \geq 1} u_i(y_0) = \sum_{i \geq 1} \left(\frac{A_i}{C_s y H}\right) e^{-\mu_i x} \cos(\lambda_i y_0)$ tend vers 0, $\forall y_0 \in I$, donc la condition nécessaire de convergence est satisfaite. Maintenant, pour montrer sa convergence uniforme, on utilisera le critère de « Cauchy uniforme » défini par la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall i \in \mathbb{N}, i \geq N(\varepsilon) \Leftrightarrow \sup_{y \in I} \left| \sum_{k=i}^{i+p} u_k(y) \right| \leq \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Dans la littérature spécialisée, on retrouve plusieurs formulations pour le critère de « Cauchy uniforme », le choix d'une formulation par rapport à une autre est dicté par la nature et la complexité de la série de fonctions en question. Pour notre cas de figure, le choix s'est porté sur la forme donnée par l'inégalité (3.4), car dans ce cas de figure, il n'est pas nécessaire d'exhiber la fonction limite pour montrer la convergence uniforme, d'où l'avantage de travailler uniquement sur des sommes partielles, bien entendu pour des rangs de $i \geq N(\varepsilon)$, vérifiant nécessairement cette dernière. Dans le cas de la convergence uniforme, l'inégalité (3.4) est vérifiée au-delà d'un certain rang $N(\varepsilon)$, c'est-à-dire que N ne dépend que de la tolérance de calcul approché ε , contrairement au cas de la convergence simple où ce dernier dépend simultanément de ε et de la variable y évoluant sur l'intervalle de convergence I . Les figures suivantes illustrent graphiquement la convergence uniforme sur l'intervalle $[0, H]$ pour des sommes partielles correspondantes à des valeurs de i variant de 1 à 25.

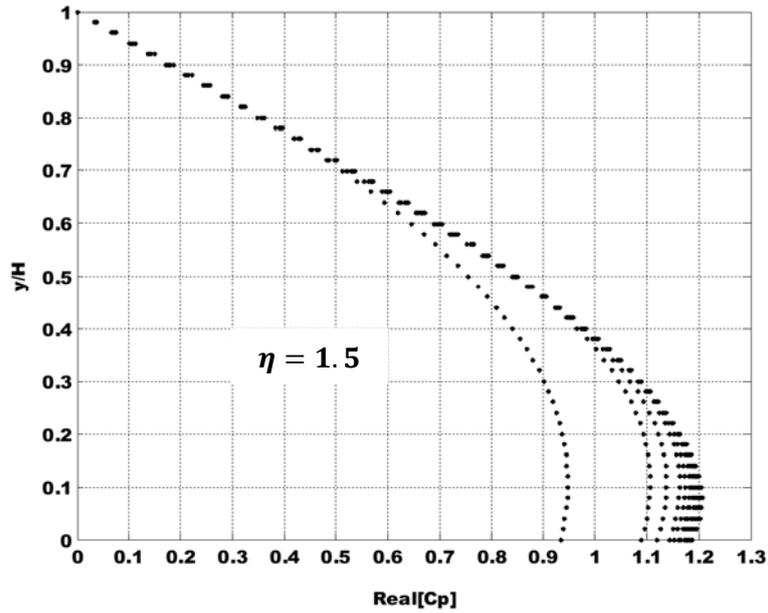


Fig. 3.1- Illustration de la convergence uniforme de la série des fonctions $C_p(y)$ sur l'intervalle $[0, H]$: Barrage totalement incliné, $\theta = 30^\circ$, $C=1$, $\xi = 0 \%$.

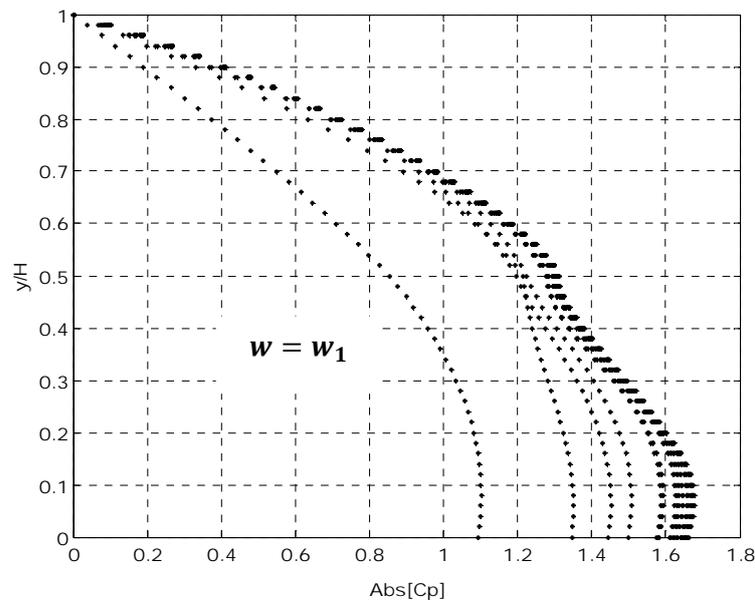


Fig. 3.2 - Illustration de la convergence uniforme de la série des fonctions $C_p(y)$ sur l'intervalle $[0, H]$: Barrage partiellement incliné, $\theta = 45^\circ$, $C = 0.5$, $\xi = 1 \%$.

Par la suite, il ya lieu d'étudier la suite des résidus, formée par les $(\sup_{y \in I} |\sum_{k=i}^{i+p} u_k(y)|)$ et ce, $\forall p \geq 0$ cette dernière devrait en principe converger vers zéro pour pouvoir dire que la série des fonctions $C_p(y)$ converge uniformément sur l'intervalle I.

3.2.1 APPLICATION NUMERIQUE : (Barrage rigide à fruit constant, $H=100 m$)

Comme application numérique, on se fixe une tolérance de calcul $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-4}$ et on prendra $p=0$, ce qui nous ramène à calculer simultanément, pour chaque valeur de i , tel que $i \geq N(\varepsilon)$, les sommes partielles $S_i(y_0)$ et $S_{i-1}(y_0)$ en chaque point $y_0 \in I$.

Ainsi, l'inégalité (3.4) prend la forme suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall i \in \mathbb{N}, i \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{y_0 \in I} \left| \frac{\sum_{k=1}^i u_k(y_0)}{S_i(y_0)} - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} u_k(y_0)}{S_{i-1}(y_0)} \right| \leq 2.5 \cdot 10^{-4} \quad (3.5)$$

Le calcul numérique a été effectué grâce au programme élaboré sous langage Matlab, qui nous a permis d'évaluer les suppressions hydrodynamiques comme suit :

1) pour chaque valeur de $y_0 \in [0, H]$, correspond une série numérique qui converge simplement vers une limite finie dans \mathbb{R} .

2) En balayant y_0 sur l'intervalle de convergence I, l'ensemble des limites correspondantes, définissent à leur tour, pour chaque valeur de i , une fonction $C_p(y_0)_{i \geq 1}$

3) Pour chaque valeur de i , on calcule les quantités $C_{P_{i-1}}(y_0) = \sum_{k=1}^{i-1} u_k(y_0)$ et $C_{P_i}(y_0) = \sum_{k=1}^i u_k(y_0)$. Pour notre cas de figure, la variable y_0 varie de zero à H avec un pas constant de $H/20$.

4) On trace après calcul, la courbe des $\sup_{y_0 \in I} \left| \frac{\sum_{k=1}^i u_k(y_0)}{S_i(y_0)} - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} u_k(y_0)}{S_{i-1}(y_0)} \right| = |R_i(y_0)|$.

Ci-après, les résultats obtenus pour différentes inclinaisons de parement amont d'un barrage rigide à fruit unique.

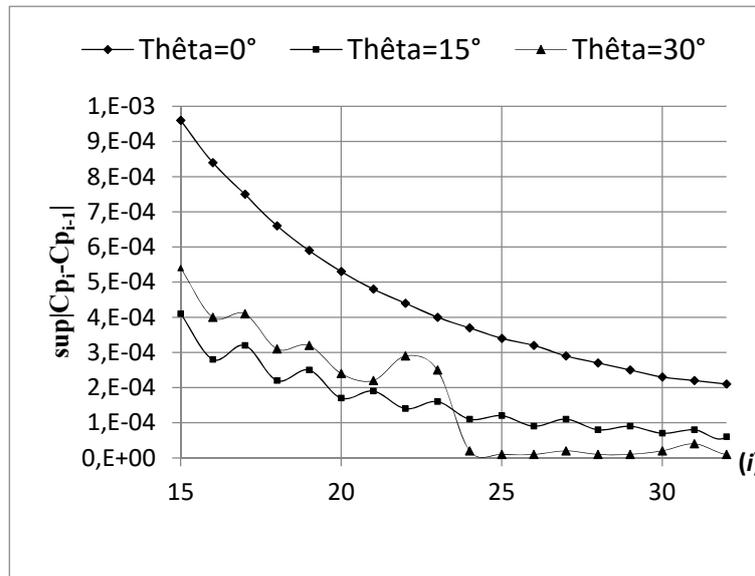


Fig. 3.3 - Illustration de la convergence vers zéro de la série numérique des résidus $|R_i(y_0)|$.

1) Les quantités données par les $|R_i(y_0)|$ constituent la suite des restes des sommes partielles $S_i(y_0)$, elle est décroissante vers zéro lorsque i tend vers l'infini, d'où la convergence uniforme de la série des fonctions $C_{P_i}(y)$.

2) Pour $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-4}$, $H=100$ m, les rangs de convergences uniformes obtenus sont :

$$\begin{cases} \text{pour } \theta = 0^\circ; N(\varepsilon) \geq 29 \\ \text{pour } \theta = 15^\circ; N(\varepsilon) \geq 19 \\ \text{pour } \theta = 30^\circ; N(\varepsilon) \geq 23 \end{cases}$$

3.3 EXPRESSIONS ANALYTIQUES POUR LA DISTRIBUTION DE LA RESULTANTE DES FORCES DE CISAILLEMENT

La distribution de la composante horizontale de la résultante des forces de cisaillement le long du contour $S = S_1 \cup S_2$ est définie par :

$$F_h(y) = \int_S C_s \gamma H C_p(y) ds \quad (3.6)$$

Où, ds représente un segment infiniment petit du contour $S_1 \cup S_2$.

En substituant l'équation (3.1) dans l'équation (3.6), on aura :

$$F_h(y) = \int_S \sum_{i=1}^{+\infty} A_i e^{-\mu_i x} \cos \lambda_i y ds \quad (3.7)$$

Étant donné que la réponse du système est donnée sous forme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur $[0, H]$, l'interversion entre l'opérateur (\int) et l'opérateur (Σ) est permise. Ainsi, l'équation (3.7) prend la forme suivante :

$$F_h(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \int_S e^{-\mu_i x} \cos \lambda_i y ds \quad (3.8)$$

Pour $y \in [0, CH]$:

$$F_h(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \int_y^{CH} e^{-\mu_i x} \cos \lambda_i y ds + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \int_{CH}^H e^{-\mu_i x} \cos \lambda_i y ds \quad (3.9)$$

Après des intégrations successives par parties et des arrangements appropriés, on obtient finalement :

$$F_h(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \left\{ \begin{array}{l} -e^{-\gamma_i(CH-y)} F_i(y) \\ + F_i(CH) \\ + \frac{[\sin \lambda_i H - \sin \lambda_i CH]}{\lambda_i} \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

Avec :

$$F_i(y) = (\lambda_i \sin \lambda_i y + \mu_i \tan \theta \cos \lambda_i y) / \alpha_i^+,$$

$$F_i(CH) = (\lambda_i \sin \lambda_i CH + \mu_i \tan \theta \cos \lambda_i CH) / \alpha_i^+,$$

$$\gamma_i = \mu_i \tan \theta, \quad \alpha_i^+ = \lambda_i^2 + \gamma_i^2 \text{ et } \alpha_i^- = \lambda_i^2 - \gamma_i^2.$$

Pour $y \in [CH, H]$:

$$F_h(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \int_y^H e^{-\mu_i x} \cos \lambda_i y ds \quad (3.11)$$

Après des intégrations successives par parties et des arrangements appropriés, on obtient finalement :

$$F_h(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \{ [\sin \lambda_i H - \sin \lambda_i y] / \lambda_i \} \quad (3.12)$$

Dans l'équation (3.10) et l'équation (3.12), $F_h(y)$ représente la composante horizontale de la résultante des forces de cisaillement au-dessus d'une élévation quelconque y à partir du fond du réservoir.

3.4 EXPRESSIONS ANALYTIQUES POUR LA DISTRIBUTION DE LA RESULTANTE DES MOMENTS DE RENVERSEMENT

La répartition du moment de renversement autour de l'axe Z en l'une quelconque élévation y généré par les forces de cisaillement est définie comme suit :

$$M_z(y) = \int_s F_h(y) ds \quad (3.13)$$

Pour $y \in [0, CH]$:

$$M_z(y) = \int_y^{CH} F_h(y) ds + \int_{CH}^H F_h(y) ds \quad (3.14)$$

Après des intégrations successives par parties et des arrangements appropriés, l'équation (3.14) prend la forme suivante :

$$M_z(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \left\{ \begin{array}{l} e^{-\gamma_i(CH-y)} M_i(y) - M_i(CH) + \\ (CH - y) \left[\frac{(\lambda_i \sin \lambda_i CH + \gamma_i \cos \lambda_i CH)}{\alpha_i^+} + \frac{(\sin \lambda_i H - \sin \lambda_i CH)}{\lambda_i} \right] \\ + [\lambda_i H (1 - C) \sin \lambda_i H - \cos \lambda_i CH] / \lambda_i^2 \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

Avec :

$$M_i(y) = [m_i \sin \lambda_i y + n_i \cos \lambda_i y] / \alpha_i^{+2};$$

$$M_i(CH) = [m_i \sin \lambda_i CH + n_i \cos \lambda_i CH] / \alpha_i^{+2}; \quad m_i = 2\lambda_i \gamma_i \text{ et } n_i = -\alpha_i^-.$$

Pour $y \in [CH, H]$:

$$M_z(y) = \int_y^H F_h(y) ds \quad (3.16)$$

Après des intégrations successives par parties, l'équation (3.16) prend la forme suivante :

$$M_z(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \{ [\lambda_i (H - y) \sin \lambda_i H - \cos \lambda_i y] / \lambda_i^2 \} \quad (3.17)$$

Pour plus d'illustration, dans l'annexe A, des formules simplifiées sont présentées pour certaines configurations géométriques spécifiques de l'interface barrage-réservoir, à savoir :

- Cas d'un barrage rigide avec face amont totalement inclinée.
- Cas d'un barrage rigide avec face amont verticale ($\theta = 0^\circ$).

Les formules donnant les valeurs maximales de $F_h(y)$ et de $M_z(y)$ sont également données. Quel que soit la géométrie de l'interface barrage-réservoir, ces dernières sont toujours enregistrées au fond du réservoir ($y = 0$) contrairement aux pressions hydrodynamiques.

3.5 CONCLUSION

Le processus d'intégration analytique est conditionné par la convergence uniforme de la série de fonctions des pressions hydrodynamiques. Des difficultés ont été certes rencontrées lors de l'intégration par partie, mais les formules obtenues tel que présentées sont compactes et faciles à utiliser.

Le calcul des coefficients inconnus A_i est subordonné à l'utilisation d'un programme informatique que nous avons développé à cette occasion en utilisant le langage MATLAB. Aussi, il ya lieu de retenir que les valeurs obtenus pour les éléments du vecteur colonne des

coefficients inconnus sont des valeurs optimales car il s'agit de vecteurs ayant vérifiés la condition sur l'erreur tolérée pour la troncature de la série des pressions hydrodynamiques.

En outre on peut également citer d'autres avantages que présentent les expressions analytiques proposées comme suit :

1- L'erreur de calcul est contrôlable à travers le test de convergence uniforme qu'on a effectué sur la série de fonctions des pressions hydrodynamiques.

2- Les paramètres de calibrage du modèle sont apparents est facilement accessibles et par conséquent, des plages d'intérêt peuvent être définies pour chaque paramètre et une étude de sensibilité peut être engagée afin de faire ressortir les paramètres dominants. Aussi des effets combinés peuvent être évalués tel que celui de la compressibilité du liquide dans le réservoir lorsqu'il est associé à celui de la viscosité de ce dernier.

Chapitre 4

MODELISATION DU RESERVOIR PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Chapitre 4 : Modélisation du réservoir par la méthode des éléments finis

4.1 INTRODUCTION

Dans cette étude, nous avons utilisé un programme de calculs numériques réalisé sous langage Matlab. Matlab est un acronyme de « MATrix LABoratory », ce produit a été développé par la société MATHWORKS, conçu pour être un environnement de calcul scientifique et de visualisation de données, c'est aujourd'hui un langage de programmation complet dans un environnement de développement simple et pratique. Non seulement il permet un gain substantiel de temps de développement par rapport à des approches dans des langages traditionnels de programmation scientifiques tels que C ou FORTRAN, mais tout en restant très abordable, il possède toutes les fonctionnalités des approches récentes de programmation.

- La programmation objet basée sur des hiérarchies de classes.
- La programmation événementielle du graphisme [26, 27].

Il est bien entendu que l'utilisation du logiciel de calcul MATLAB permet d'éviter la programmation dans des langages traditionnels qu'on a l'habitude de faire après la modélisation du système à étudier, la définition des variables nodales, de l'élément de référence, du type de maillage, des techniques d'assemblage des matrices élémentaires et enfin le choix des méthodes de résolution numérique ainsi que toutes les étapes nécessaires à un calcul par éléments finis.

4.2 MODELISATION DU RESERVOIR

Dans cette étude, le champ des pressions hydrodynamiques dans le liquide est pris comme variable nodale. On suppose que le liquide dans le réservoir possède des propriétés linéaires, son mouvement est considéré bidimensionnel à faibles amplitudes, il est également considéré compressible et visqueux. On suppose aussi que la dimension du réservoir dans la direction amont est suffisamment grande pour pouvoir négliger l'effet des radiations, en effet, à une distance supérieure ou égale à trois fois la hauteur du barrage, cette condition peut être considérée satisfaite [28, 29, 30].

Tenant compte des hypothèses précédentes concernant le liquide dans le réservoir, l'équation de Helmholtz exprimant l'équilibre dynamique dans le réservoir est donnée par l'expression suivante :

$$\partial^2 P / \partial x^2 + \partial^2 P / \partial y^2 + K^2 P = 0 \quad (4.1)$$

K : Nombre d'onde de compression.

4.3 CONDITIONS AUX LIMITES

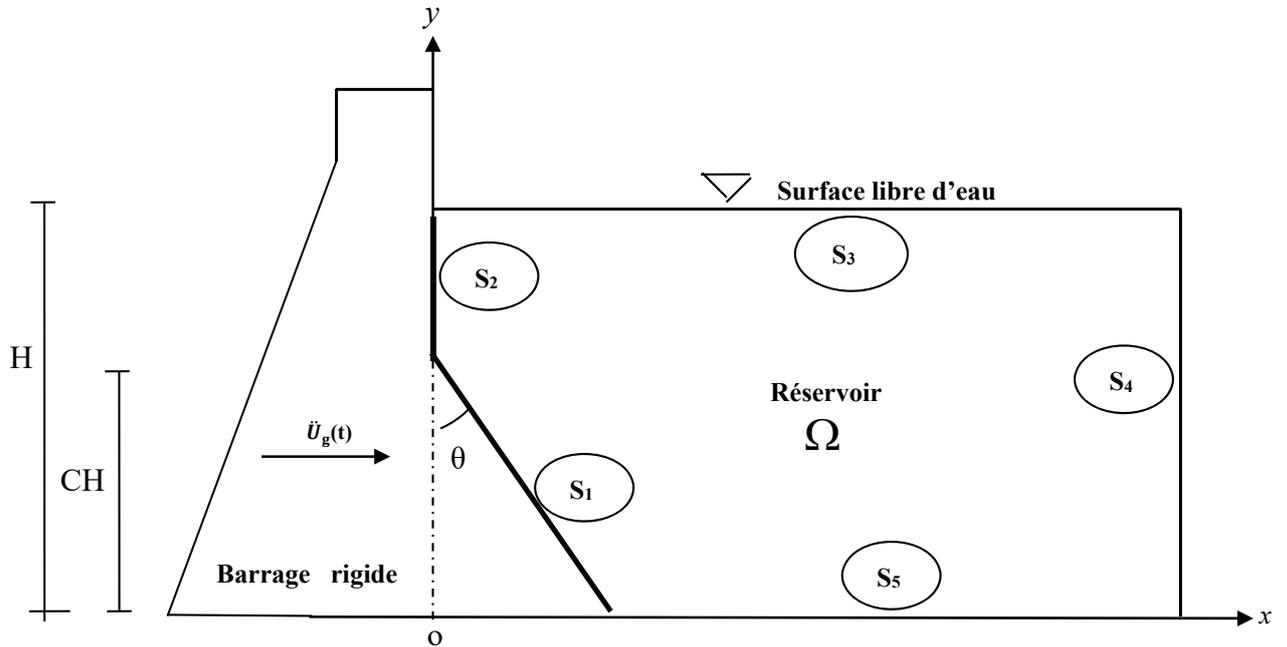


Fig. 4.1 - Représentation du domaine réservoir avec l'ensemble de ses frontières.

1. Sur le parement amont du barrage, on suppose que les particules fluides sont parfaitement solidaires avec les particules solides du barrage, par conséquent l'équation (4.1) s'écrira pour cette condition comme suit :

$$\partial P(x, y, w) / \partial n|_{S_1 \cup S_2} = -\rho \ddot{U}_n \quad (4.2)$$

2. Au fond du réservoir, considéré horizontal, on a :

$$\partial P(x, 0, w) / \partial y|_{S_5} = 0 \quad (4.3)$$

3. Au niveau de la surface libre d'eau, on prendra la pression atmosphérique $p = 0$ tout en négligeant l'effet des ondes de surfaces pouvant être générées en présence de grandes fluctuations des pressions hydrodynamiques dans le réservoir. En outre, l'hypothèse de petites perturbations dans le réservoir nous permet d'ignorer cet effet, qui peut tout de même, être pris en considération en supposant une surface moyenne pour laquelle toute élévation ou abaissement de la surface libre actuelle se traduirait par une variation de pression pouvant être considérée comme isostatique, cette condition est connue dans la littérature spécialisée sous le nom de « condition d'ondes de surface linéarisées » [29, 31, 32, 33].

4. Sur la limite S_4 , considérée comme limite de troncature du domaine délimitant le réservoir avec l'hypothèse d'absence de réflexion d'ondes étant donné que le réservoir est considéré comme un canal de longueur infinie, (Lorsque $L \geq 3H$; L étant la longueur du réservoir), on assume que $P(\infty, y, w) = 0|_{S_4}$ [29, 30].

En résumé, la recherche de la variable champs inconnue P revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\partial^2 P / \partial x^2 + \partial^2 P / \partial y^2 + K^2 P = 0 \quad (4.4)$$

$$\partial P (x, y, w) / \partial n |_{S_1 \cup S_2} = -\rho \ddot{U}_n \quad (4.5)$$

$$P(x, H, w) |_{S_3} = 0 \quad (4.6)$$

$$P(\infty, y, w) |_{S_4} = 0 \quad (4.7)$$

$$\partial P (x, 0, w) / \partial y |_{S_5} = 0 \quad (4.8)$$

4.4 FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME

Il existe plusieurs formulations variationnelles possibles qu'on retrouve dans la littérature spécialisée permettant de développer les modèles d'éléments finis, tenant compte à chaque fois, des variables champs utilisées. A titre d'exemple, on retrouve la formulation variationnelle non symétrique (u, p) faisant intervenir les déplacements et la pression hydrodynamique en même temps comme variables nodales, comme on retrouve aussi la formulation symétrique (u, ϑ, p) faisant intervenir en supplément le potentiel des déplacements ϑ . Pour notre cas de figure, tenant compte de l'hypothèse d'un barrage rigide et d'un liquide compressible et visqueux, la pression hydrodynamique p est la seule variable nodale considérée [29, 31, 32, 33]. Le comportement du liquide dans le réservoir sera donc décrit par le champ des pressions hydrodynamiques p [28].

En adoptant la formulation faible de type Galerkin avec fonction poids δp , la formulation variationnelle est donnée par :

$$-\int_{\Omega} \delta \nabla p \nabla p d \Omega + \int_{S \Omega} \delta \nabla p \frac{\partial p}{\partial n} d S = 0 \quad (4.9)$$

Ω : Domaine du réservoir ; $S \Omega$: Contour total du réservoir.

En remplaçant l'intégrale sur le contour total S par la somme des intégrales sur l'ensemble des limites le constituant pour le cas d'un chargement sismique horizontal, on aura l'écriture suivante :

$$-\int_{\Omega} \delta \nabla p \nabla p d \Omega + \int_{S \Omega} \delta p \rho \ddot{u}_n d S = 0 \quad (4.10)$$

$\forall \delta p \in V_p$; V_p représente la classe des fonctions régulières admissibles.

4.4.1 DISCRETISATION DES FORMES INTEGRALES

Après avoir discrétisé le domaine physique par des éléments finis appropriés, il ya lieu de remplacer la fonction exacte recherchée par une interpolation entre les valeurs aux nœuds de l'élément. Ainsi l'approximation de la pression p est donnée par :

$$p \approx N_p P \quad (4.11)$$

P : Représente le vecteur nodal des pressions hydrodynamiques définies comme valeurs inconnues et approximées des champs continus.

N_p : Représente une fonction d'interpolation nodale ou bien fonction de forme de l'élément.

La forme générale de ce vecteur ligne s'écrit pour la variable nodale p comme suit :

$$N_p = \langle N_{p1}, \dots, N_{pi}, \dots, N_{pn_p} \rangle ; i = 1, n_p \quad (4.12)$$

n_p : Représente le nombre de nœuds par élément utilisés pour l'interpolation. Les opérateurs intervenant sur les formulations variationnelles, respectivement pour les perturbations de

champs continus et celui de la dérivation spatiale des champs continus et des perturbations sont exprimés, tenant compte de l'expression (4.11) comme suit :

$$\delta p \approx \delta(N_p P) = \delta P^T N_p^T \quad (4.13)$$

$$\nabla p \approx \nabla N_p P; \nabla \delta p \approx \delta P^T \nabla N_p^T \quad (4.14)$$

En remplaçant la fonction continue p par son approximation donnée ci-dessus, l'équation (4.10) prend la forme suivante :

$$- \int_{\Omega} \delta P^T \nabla N_p^T \nabla N_p P d\Omega + \int_{S\Omega} \delta P^T N_p^T \rho \ddot{u}_n dS = 0 \quad (4.15)$$

Après arrangement des termes de l'équation précédente, son écriture sous forme matricielle est donnée par ce qui suit :

$$K_F P = F \quad (4.16)$$

$$F = \int_{S_1+S_2} N_p^T \rho \ddot{u}_n dS \quad (4.17)$$

K_F : Représente la matrice globale « Raideur liquide », elle quantifie l'énergie potentielle dans le liquide, elle est définie par :

$$K_F = \int_{\Omega} \nabla N_p^T \nabla N_p d\Omega \quad (4.18)$$

Les matrices élémentaires correspondantes sont données par :

$$(K_f^e)_{ij} = \int_{\Omega^e} \langle N_{Pi,x} \ N_{Pi,y} \rangle \begin{Bmatrix} N_{Pi,x} \\ N_{Pi,y} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega^e} (N_{Pi,x} N_{Pi,x} + N_{Pi,y} N_{Pi,y}) d\Omega \quad (4.19)$$

La matrice globale K_F est le fruit de l'assemblage des matrices élémentaires évaluées chacune d'elles souvent dans un repère global pour faciliter la tâche d'assemblage. Il est à noter que chaque matrice élémentaire doit être du même ordre que la matrice globale; ainsi il n'y a que les lignes et les colonnes correspondants aux degrés de libertés de l'élément considéré qui ne sont pas nulles. Pour l'élaboration de la matrice globale, il existe plusieurs techniques de stockage en matrice bande pour rationaliser l'utilisation de l'espace mémoire de l'ordinateur à même de réduire le temps machine consacré aux calculs numériques.

4.5 L'ÉLÉMENT DE RÉFÉRENCE

Dans le but de simplifier la définition analytique des éléments de formes complexes, on utilise la notion d'élément de référence simple situé dans un espace de référence. L'élément de référence peut être transformé en élément quelconque par une transformation géométrique bijective [29, 31, 32, 33, 34]. Par exemple, dans le cas d'un élément triangulaire linéaire à trois nœuds :

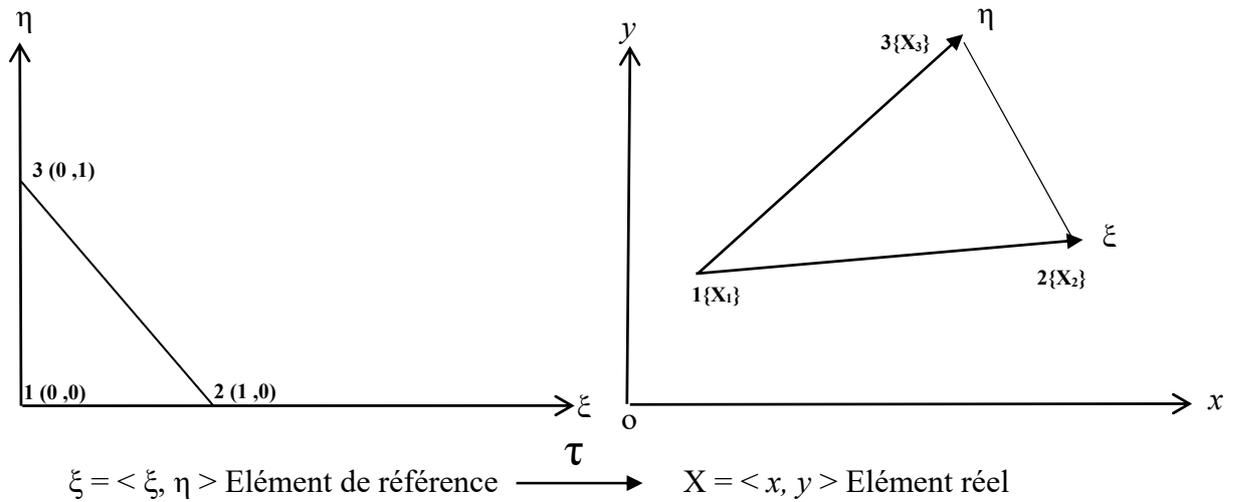


Fig. 4.2 - Elément triangulaire linéaire de référence.

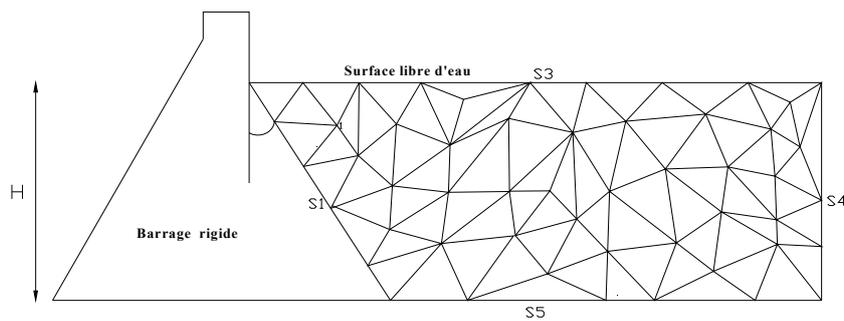


Fig. 4.3 - Illustration d'un maillage avec élément triangulaire linéaire pour le domaine du réservoir.

La transformation τ définit les coordonnées X de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées ξ des points correspondants dans l'élément de référence :

$$\tau: \xi \longrightarrow X(\xi) = [N(\xi)] \{X_n\}$$

$\{X_n\}$: sont les coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel.

$\langle N \rangle$: Fonction de transformation géométrique tel que :

$$\langle N \rangle = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle \quad (4.20)$$

Chaque transformation τ doit être choisie de manière à vérifier les conditions suivantes :

- Bijective en tout point ξ situé sur l'élément de référence correspondant, c'est à dire à tout point de l'élément de référence correspond un point de l'élément réel et un seul, et inversement.
- Les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds géométriques de l'élément réel.
- Chaque portion de frontière de l'élément de référence correspond à une portion de frontière de l'élément réel.

- Un nœud appartenant à deux éléments, doit être défini dans chacun d'eux.
- Les angles proches de 0° et 180° doivent être évités.
- Il ne doit pas exister de vides entre éléments.
- Le résultat du procédé de discrétisation géométrique doit contenir essentiellement deux types de données qui sont :

**Données relatives à la définition des éléments par la numérotation des nœuds. Une table de connectivités, ayant en ligne les numéros des éléments et en colonnes les numéros des nœuds correspondants, elle décrit d'une manière cohérente ces données.

**Données relatives à la définition des nœuds, chaque nœud est défini par son numéro et ses coordonnées dans le repère global définissant la géométrie du domaine considéré [31, 32, 33, 34, 35].

4.6 PROCESSUS DE PROGRAMMATION PAR LE LOGICIEL MATLAB

- Dans la fenêtre du menu principal (*space work*), actionner la touche START.
- Accéder successivement aux menus *Toolboxes*, Partial Différentiel Equation, PDETOOLGUI.
- Le choix d'un repère avec indication de l'échelle pour l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
- La délimitation graphique du domaine objet de l'étude.
- La définition des conditions aux limites pour chaque contour élémentaire constituant le contour global (un choix est à faire entre la condition de type **Dirichlet** ou bien de type **Newman**).
- Le choix du type d'équation aux dérivées partielles gouvernant le comportement du phénomène à étudier avec la définition des coefficients correspondants à l'équation choisie.
- Le choix de l'élément de référence et de la densité du maillage à utiliser pour la discrétisation du domaine du réservoir.
- Lancement des calculs.
- Visualisation graphique ou sous forme de fichier « output » des résultats issus du calcul.
- Exportation des résultats vers d'autres utilitaires graphiques ou autres, selon les besoins d'exploitation ou de représentation.

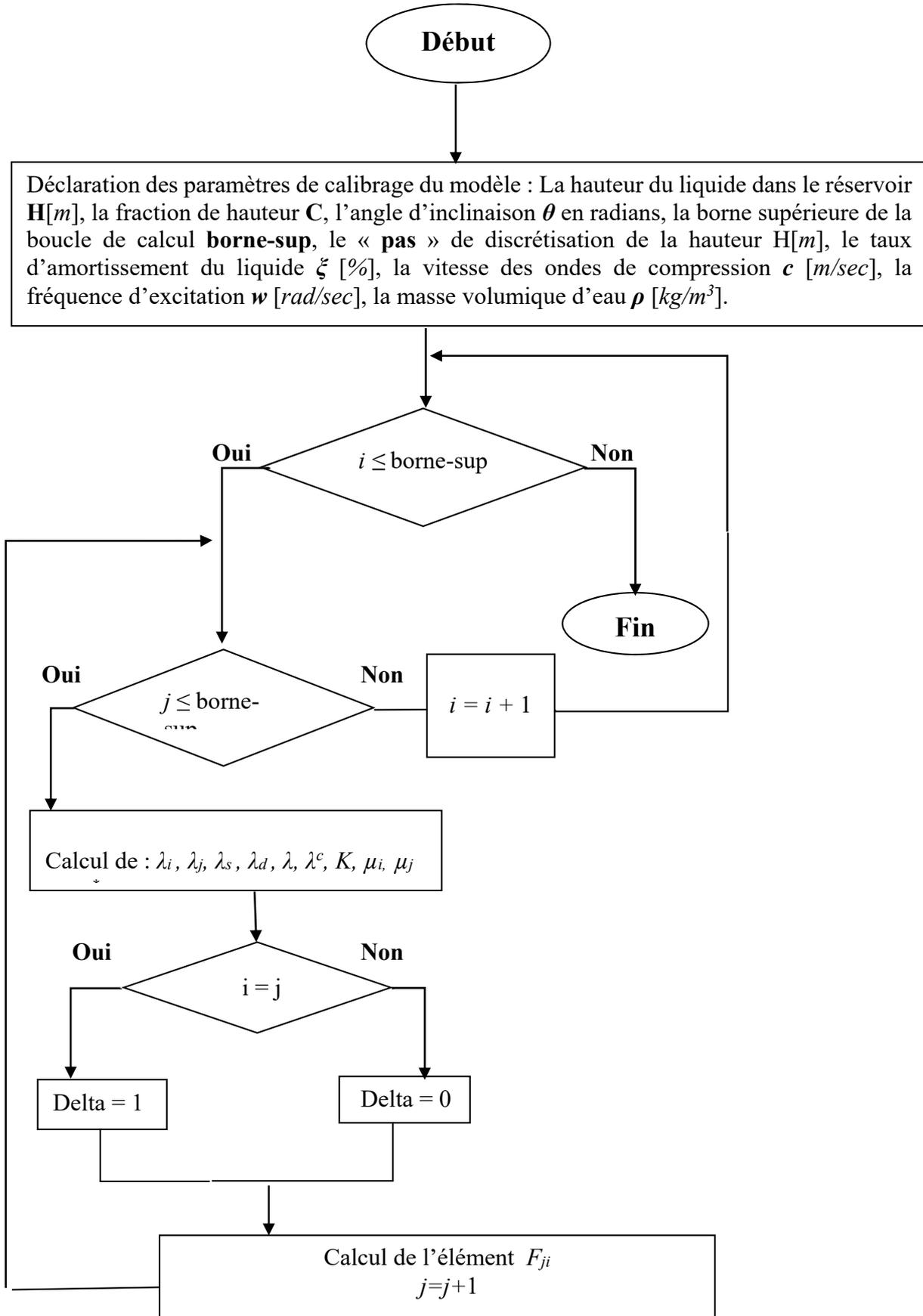
4.7 CARACTERISTIQUES DU MODELE ADOPTE

- L'élément de référence est de type triangulaire linéaire.
- Les échelles unitaires sur l'axe des X et celui des Y devraient être, de préférence différentes, pour faciliter la représentation graphique du réservoir.
- L'équation aux dérivées partielles adoptée est de type « Hyperbolique ».
- Les conditions aux limites sont de type Dirichlet pour les frontières S_3 , S_4 , et de type Newman pour les frontières S_1 , S_2 et S_5 .
- La longueur du réservoir dans la direction amont est prise égale à trois fois la hauteur du liquide dans le réservoir.

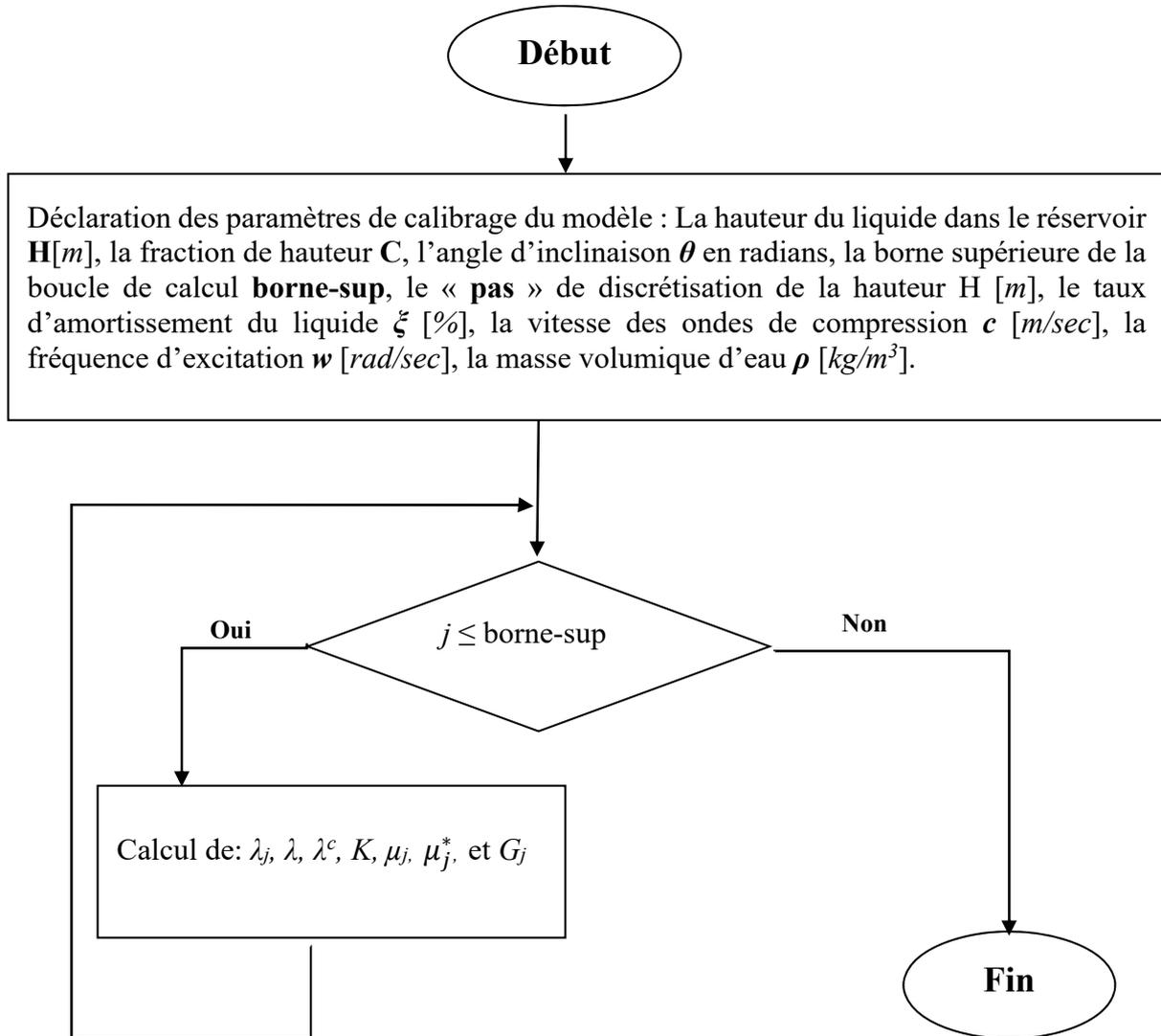
4.8 ORGANIGRAMMES DU PROGRAMME DE CALCUL DES COEFFICIENTS DES FORCES HYDRODYNAMIQUES (C_F) ET DES MOMENTS DE RENVERSEMENT ASSOCIES (C_M)

Dans ce qui suit, on se contentera de présenter les organigrammes des principales sous-routines constituant le programme de calcul élaboré en langage Matlab, utilisé pour le calcul des forces hydrodynamiques, entre autres celui de la matrice de Hermitienne $[F_{ji}]$, de vecteur colonne $\{G_j\}$ et des coefficients adimensionnels (C_F) et (C_M).

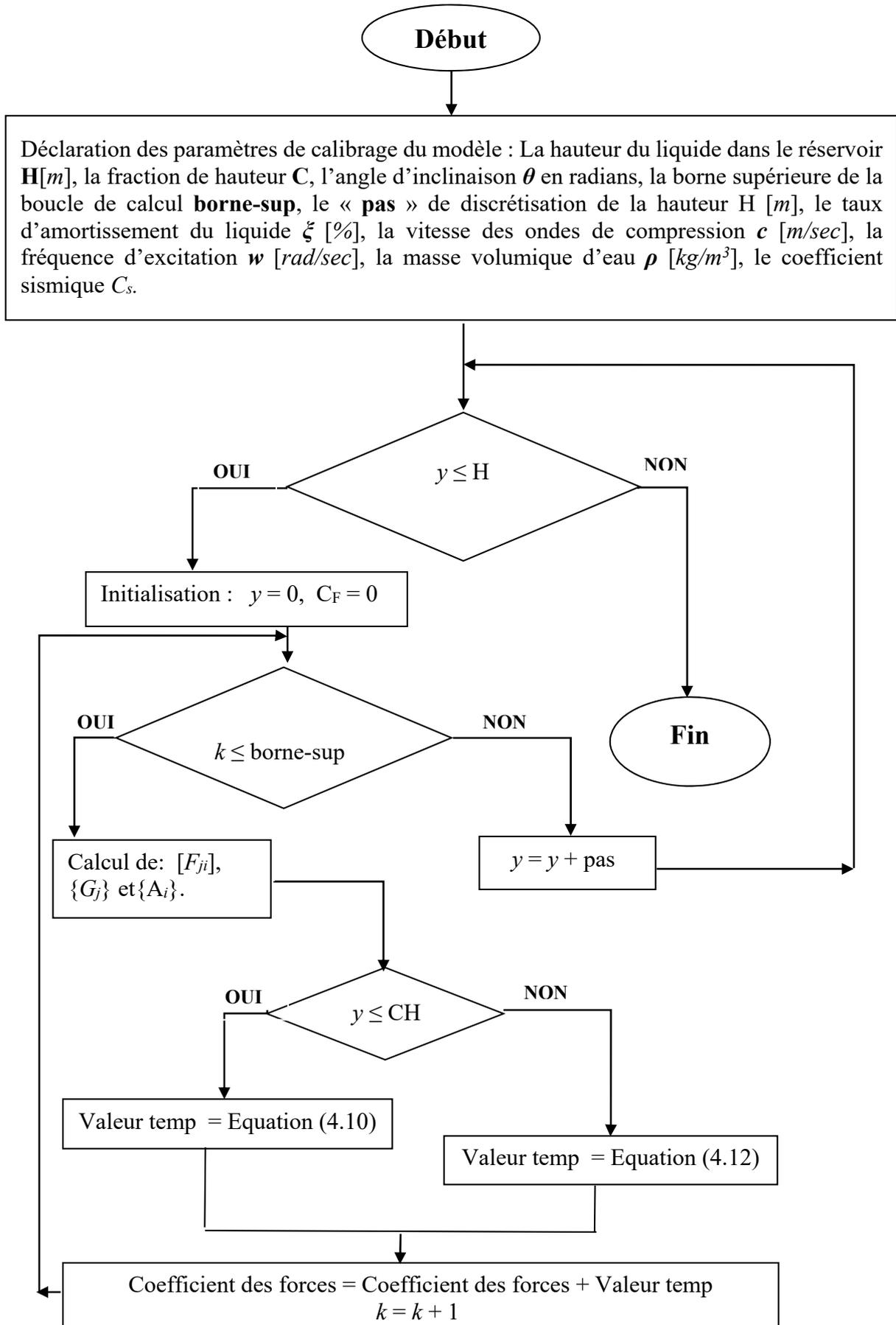
4.9) ORGANIGRAMME DE CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE HERMITIENNE $[F_{ji}]$



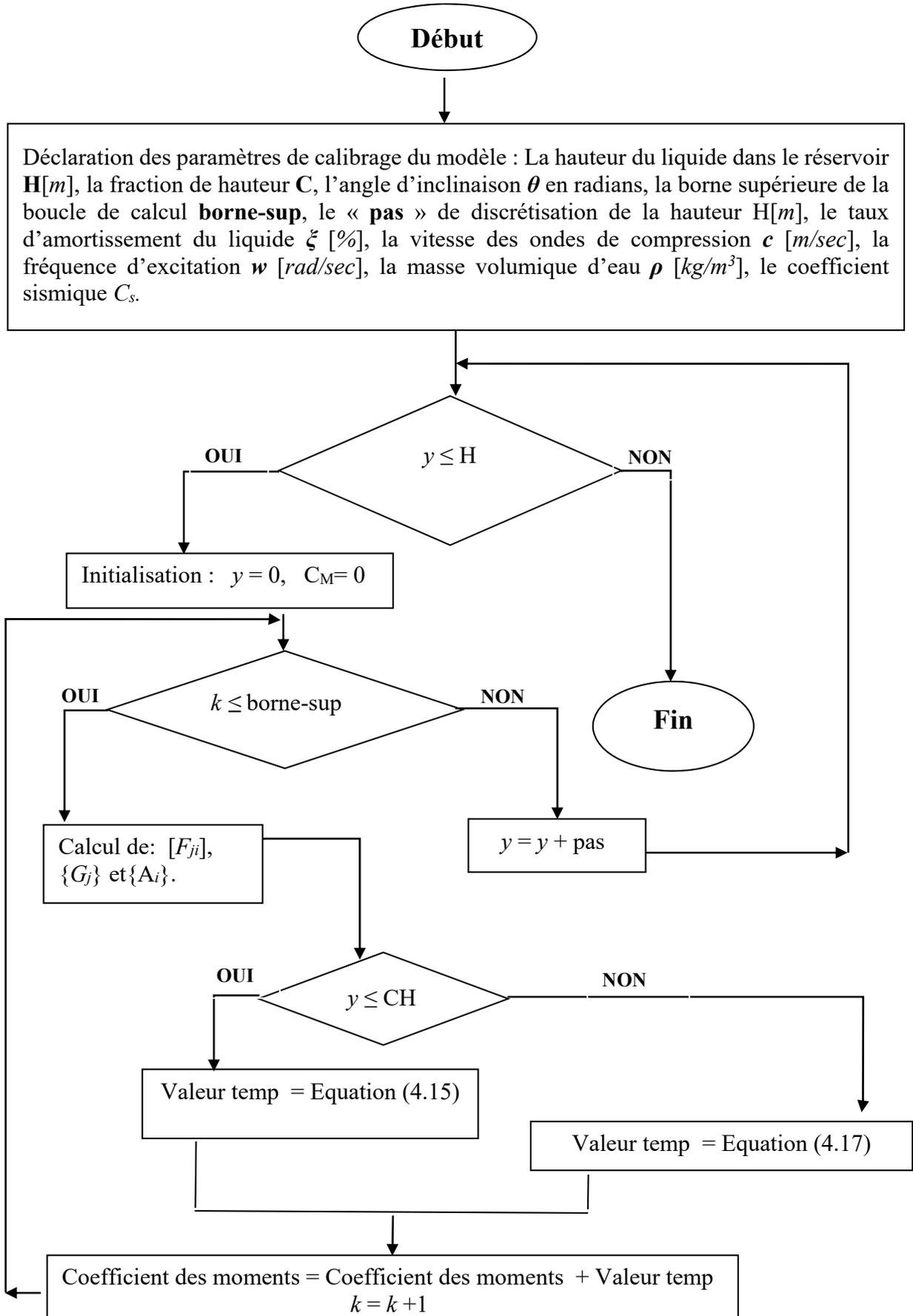
4.10) ORGANIGRAMME DE CALCUL DES ELEMENTS DU VECTEUR $\{G_j\}$



4.11) ORGANIGRAMME DE CALCUL DES COEFFICIENTS DES FORCES HYDRODYNAMIQUES (C_F)



4.12) ORGANIGRAMME DE CALCUL DES COEFFICIENTS DES MOMENTS DE RENVERSEMENT (C_M)



4.13 CONCLUSION

L'utilisation de la méthode des éléments finis est très indiquée pour le calcul de barrages à géométrie complexe de l'interface barrage-réservoir. L'utilisation d'un élément triangulaire linéaire est également fortement indiquée puisqu'il permet de restituer au mieux la géométrie du contour du réservoir notamment lorsque le barrage est partiellement incliné, rajouté à cela la possibilité d'avoir éventuellement un fond du réservoir incliné ce qui va compliquer davantage la situation, et l'élément triangulaire linéaire à l'égard des autres éléments standards (rectangulaire ou carré) de par sa configuration géométrique particulière, permet d'obtenir des maillages raffinés optimales et ainsi des résultats qui convergent rapidement vers la solution exacte.

Chapitre 5

RESULTATS ET DISCUSSION

Chapitre 5 : Résultats et discussion

5.1 INTRODUCTION

Afin de mettre en œuvre les expressions analytiques proposées, un programme informatique déjà disponible en langage Matlab [16] a été modifié pour incorporer, dans le domaine fréquentiel, les effets de compressibilité et de viscosité de l'eau dans le réservoir. Initialement, le programme ne considérait que le cas d'un liquide incompressible et non visqueux.

Par le biais de ce programme nous avons pu calculer les distributions des forces hydrodynamiques engendrées au droit de l'interface barrage-réservoir pour différentes fréquences d'excitation situées dans une plage d'intérêt. Ainsi, une plage de fréquences est déroulée avec un incrément de $w_1/300$, w_1 étant la fréquence angulaire fondamentale du réservoir donnée par $w_1 = \pi c/2H$. Ce pas d'incrément est jugé suffisant pour capturer avec assez de précision la réponse du système dans le domaine fréquentiel.

Les résultats obtenus pour les forces de cisaillement et les moments de renversement associés sont exprimés en termes de coefficients sans dimensions à valeurs complexes $C_F = |F_h|/F_{st}$ et $C_M = |M_z|/M_{st}$, dans lesquels $|F_h|$ et $|M_z|$ sont les modules de F_h et de M_z . $F_{st} = \rho g H^2/2$ et $M_{st} = \rho g H^3/6$ sont respectivement, la force hydrostatique et le moment de renversement correspondant calculés à la base du barrage. Les pressions, les forces de cisaillement et les moments hydrodynamiques de renversement sont respectivement exprimés en Pascal, en Newton et en Newton-mètre par unité de largeur du barrage.

Sur une large gamme de fréquences d'excitation w , plusieurs résultats sont obtenus correspondant à différentes géométries de l'interface barrage-réservoir et différents taux d'amortissement ζ .

5.2 RESULTATS ET DISCUSSION

La première application numérique concerne le cas d'un barrage rigide avec un parement vertical ($\theta = 0^\circ$), en présence d'un liquide compressible non visqueux. Afin de comparer les résultats numériques obtenus avec ceux donnés par Westergaard, on considère le cas d'une excitation harmonique de sol de période $T = 4/3$ sec se propageant à la vitesse des ondes sonores dans l'eau $c = 1438$ m/s. Comme on peut observer dans le tableau 5.1, les résultats numériques obtenus sont en très bon accord avec ceux donnés par la méthode « Exacte » de Westergaard.

Tableau 5.1 - Pourcentage d'erreurs sur p , F_h et M_z entre les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées et ceux donnés par la méthode « Exacte » de Westergaard.

	Hauteur d'eau dans le réservoir H(m)		
	60.96	182.88	243.84
$p(\%)$	0,024	0,032	0,014
$F_h(\%)$	-0,044	0,037	-0,056
$M_z(\%)$	-0,027	-0,005	-0,040

Par ailleurs, la même comparaison a été déjà effectuée avec l'hypothèse d'un liquide incompressible [16], les erreurs relatives enregistrées étaient plus importantes, en particulier pour les réservoirs de grandes hauteurs, où l'effet de compressibilité du liquide est plus prononcé. Au fur et à mesure que le niveau d'eau dans le réservoir augmente, la fréquence fondamentale du réservoir donnée par $\omega_1 = \pi c/2H$ diminue et se rapproche de plus en plus de la fréquence d'excitation $\omega = 2\pi/T$. En revanche, pour les réservoirs de faible hauteur, il faudrait avoir un niveau de fréquence d'excitation élevé afin de pouvoir mettre en évidence l'effet de compressibilité du liquide dans le réservoir.

Pour illustrer davantage cette situation, deux autres comparaisons ont été effectuées; la première avec la méthode « Expérimentale » de Zangar [2] et la seconde par rapport à la méthode « Exacte » de Chwang [4]. Pour ces deux auteurs, le liquide dans le réservoir est considéré incompressible; les résultats des deux comparaisons sont résumés dans les tableaux 2 et 3 qui montrent clairement que les pourcentages des erreurs pour l'évaluation de la pression ou bien pour les forces hydrodynamiques augmentent conséquemment avec l'augmentation du niveau de l'eau dans le réservoir.

Tableau 5.2 - Pourcentage d'erreurs sur p , F_h et M_z entre les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées et ceux donnés par la méthode « Expérimentale » de Zangar.

	Hauteur d'eau dans le réservoir H(m)		
	60.96	182.88	243.84
$p(\%)$	1.903	9.968	18.711
$F_h(\%)$	2.502	9,700	17.343
$M_z(\%)$	-0.174	6.237	13.031

Tableau 5.3 - Pourcentage d'erreurs sur p et F_h entre les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées et ceux donnés par la méthode « Exacte » de Chwang.

	Hauteur d'eau dans le réservoir H(m)		
	60.96	182.88	243.84
$p(\%)$	0.874	8.857	17.512
$F_h(\%)$	0.729	7.803	15.314
$M_z(\%)$	-	-	-

Dans les applications suivantes, les résultats obtenus sont présentés pour un certain nombre de valeurs de la fréquence sans dimensions η et différents taux d'amortissement ζ . Les paramètres caractéristiques du système barrage-réservoir sont : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $C_s = 0.1$ (signal d'amplitude unitaire égale à 1 m/s^2 à fréquence variable couvrant la gamme de valeurs des fréquences sismiques).

Sur les figures (5.1) et (5.2), les parties réelles et imaginaires des C_F sont présentées pour $\eta = 0, 1.5, 3$ et 6 . Nous pouvons facilement voir l'effet de la fréquence d'excitation sur la réponse du système, lorsque η dépasse $\pi/2$, cette dernière devient à valeurs complexes où la partie imaginaire représente la dissipation d'énergie des ondes de compression lorsqu'elles

s'éloignent de la face amont du barrage se dirigeant horizontalement vers la limite de troncature S4.

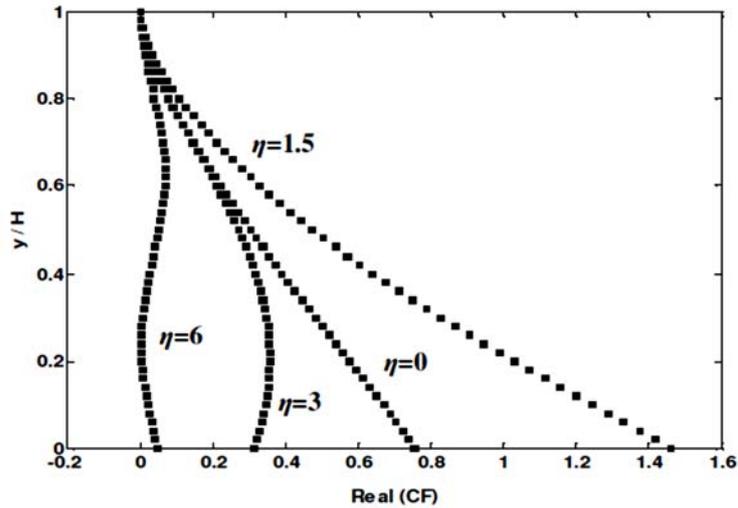


Fig. 5.1 - Parties réelles de la résultante des forces de cisaillement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).

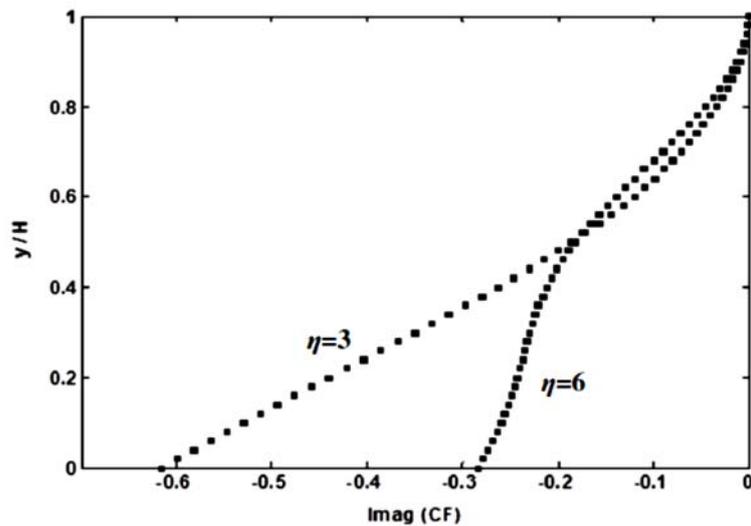


Fig. 5.2 - Parties imaginaires de la résultante des forces de cisaillement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).

Le même raisonnement est adopté pour la distribution des moments de renversement (figures 5.3 et 5.4).

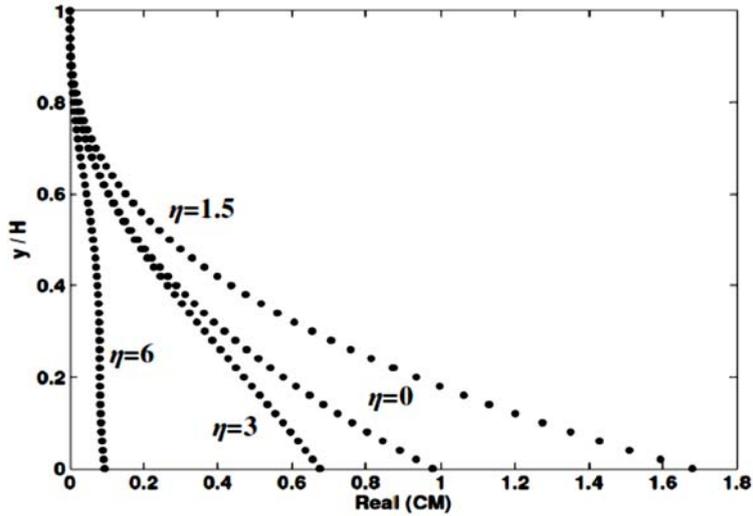


Fig. 5.3 - Parties réelles de la résultante des moments de renversement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).

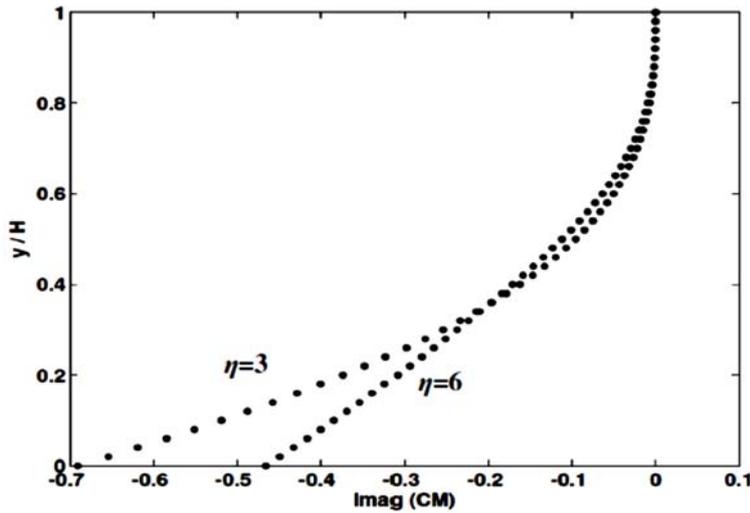


Fig. 5.4 - Parties imaginaires de la résultante des moments de renversement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$ (Cas d'un liquide non visqueux, $\xi = 0\%$).

A travers les figures précédentes, on peut donc noter que, contrairement aux pressions hydrodynamiques, quelle que soit la configuration géométrique de la face amont du barrage, les valeurs maximales des forces hydrodynamiques se produisent toujours à la base du barrage.

Maintenant, pour évaluer les effets combinés de compressibilité et de viscosité de l'eau, un autre exemple est donné pour le cas d'un barrage rigide vertical (Fig. 5.5). Le coefficient de forces totales est représenté en fonction du rapport de fréquences w/w_1 pour deux taux différents d'amortissement du liquide : $\xi = 1\%$ et 5% .

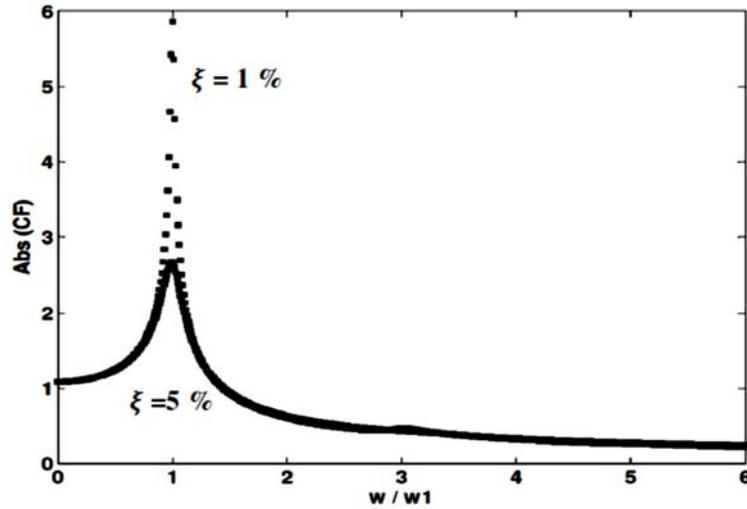


Fig. 5.5 - Distribution de la résultante des forces de cisaillement : Barrage rigide à parement vertical, taux d'amortissement de $\xi = 1\%$ et $\xi = 5\%$.

La figure (5.5) montre la variation du coefficient des forces C_F avec le rapport des fréquences w/w_1 pour les taux d'amortissement $\xi = 1\%$ et $\xi = 5\%$. On constate que l'effet de viscosité de l'eau peut être considéré négligeable dans la mesure où la fréquence d'excitation n'est pas au voisinage des modes naturels du réservoir. En revanche, lorsque $w/w_1=1$, une réduction substantielle des efforts est constatée au droit de la fréquence de coupure du premier mode de vibration du réservoir.

Dans ce qui suit, l'étude est étendue au cas d'un barrage partiellement incliné formé par deux faces planes en amont avec un angle $\theta = 37,6^\circ$ et un rapport de hauteur $C = 0.75$, en tenant compte des effets de compressibilité et de viscosité. Sur la figure (5.6), on peut noter la cohérence des tendances entre les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées et ceux donnés par Avilés [15].

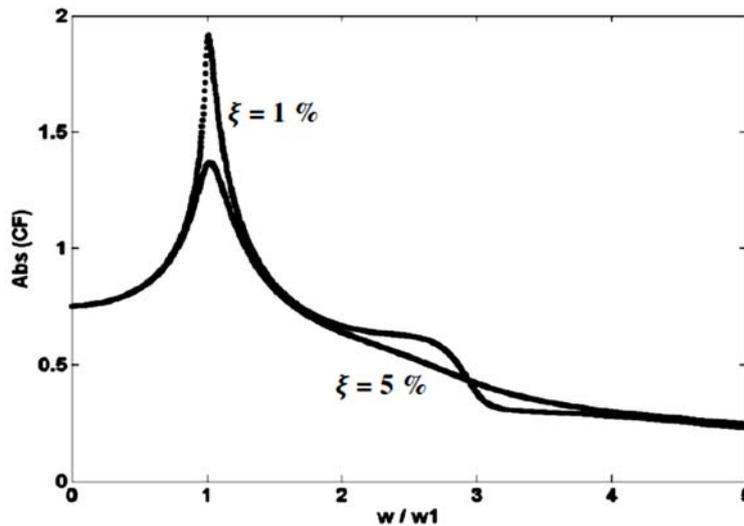


Fig. 5.6 - Distribution de la résultante des forces de cisaillement : Barrage partiellement incliné, $\theta = 37,6^\circ$ et $C = 0,75$, taux d'amortissement $\xi = 1\%$ et $\xi = 5\%$.

Sur les figures (5.7) et (5.8), les distributions des forces hydro-sismiques normalisées et les moments de renversement correspondants sont présentées pour les rapports de fréquences $w/w_1 = 1, 3$ et 5 . Comme on peut l'observer, les effets les plus importants générés par la viscosité de l'eau se produisent pour le mode fondamental du réservoir ($w/w_1 = 1$). En revanche, à partir du deuxième mode ($w/w_1 = 3$) les deux courbes sont très rapprochées et presque confondues pour le troisième mode de vibration du réservoir ($w/w_1 = 5$), ce qui indique que l'effet de viscosité n'est plus prépondérant au-delà de cette plage de fréquences d'excitations.

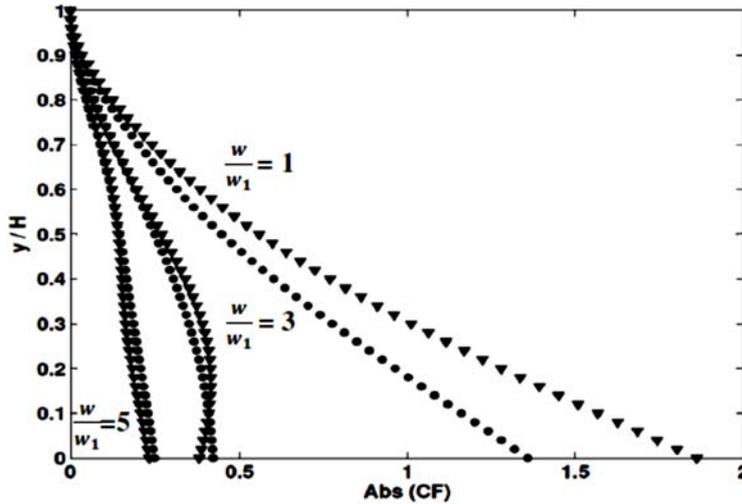


Fig. 5.7 - Distribution de la résultante des forces de cisaillement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$, taux d'amortissement $\xi = 1\%$ (marqueurs en triangles) et $\xi = 5\%$ (marqueurs en cercles).

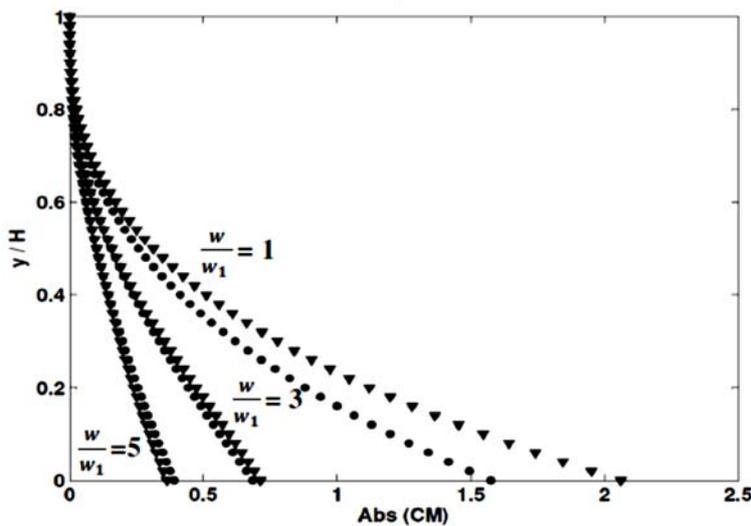


Fig. 5.8 - Distribution de la résultante des moments de renversement : Barrage rigide partiellement incliné, $\theta = 37.6^\circ$ et $C = 0.75$, taux d'amortissement $\xi = 1\%$ (marqueurs en triangles) et $\xi = 5\%$ (marqueurs en cercles).

5.3 CONCLUSION

A travers l'analyse comparative que nous avons effectué, il en résulte que les expressions analytiques proposées sont efficaces et simples à utiliser. Nous avons vu que les écarts entre les résultats obtenus par le biais de ces expressions et ceux issus de l'application de la méthode « Exacte » de Westergaard sont négligeables et que ces expressions analytiques, contrairement à celles de Zangar et de Chwang, nous permettent également de formuler les effets séparés ou combinés de compressibilité et de viscosité du liquide dans le réservoir.

L'autre intérêt réside dans la formulation elle-même qui est dégagée dans le domaine fréquentiel, ainsi l'influence de la fréquence d'excitation sur la réponse du système pourrait, dès lors, être mise en exergue. Pour cela, il suffit de dérouler avec un pas d'incrémentations approprié sur une plage de fréquences sismiques et de voir les réponses du système barrage-réservoir pour des signaux harmoniques, les réponses sont également harmoniques.

Considérant le comportement viscoélastique et particulièrement linéaire du liquide dans le réservoir, les réponses harmoniques obtenues peuvent être superposées notamment que l'équation gouvernante est une équation aux dérivées partielles et à coefficients constants, donc la combinaison linéaire de l'ensemble des solutions constitue également une solution pour cette dernière.

Vingt-cinq termes ont été utilisés pour l'approximation de la série de fonctions des forces hydro-sismique avec un temps machine très réduit (1.5 secondes pour les distributions des forces sur l'interface barrage-réservoir et environ 24 secondes lorsqu'on déroule une plage de fréquences d'excitations de $6w_1$ de largeur avec un pas d'incrémentations de $w_1/300$).

Enfin et en guise de recommandation, il est bien entendu que la réponse du système barrage-réservoir pourrait être évaluée dans le domaine temporel. A ce sujet, il est à noter que la simulation d'un chargement sismique réel par le biais d'un accélérogramme est possible. Il suffit d'utiliser la transformée de Fourier pour le signal input et de faire ensuite le calcul dans le domaine fréquentiel en utilisant les expressions analytiques proposées. De la même manière, le passage inverse, pourrait se faire via la transformée de Fourier inverse, nous permettant ainsi de représenter la réponse du système dans le domaine temporel.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Des investigations analytique et numérique des effets de compressibilité et de viscosité du liquide dans le réservoir pour le cas des barrages rigides à géométrie irrégulière soumis à un chargement sismique horizontal ont été effectuées en utilisant une approche semi-analytique. Sous l'effet d'une accélération horizontale de sol, le barrage se déplace en tant que corps rigide et génère dans le réservoir des forces hydrodynamiques en excès aux forces hydrostatiques déjà présentes sous l'effet de l'accélération gravitationnelle g .

Le mouvement du liquide dans le réservoir est gouverné par l'équation aux dérivées partielles de Helmholtz avec des conditions aux limites appropriées. L'introduction des fonctions complexes de Trefftz vérifiant l'équation gouvernante dans le domaine du réservoir et uniquement trois conditions aux limites, soit : au niveau de la surface libre d'eau, au fond du réservoir ainsi qu'au niveau de la limite de troncature S_4 nous permet d'exprimer la solution générale de l'équation gouvernant le système barrage-réservoir sous forme d'une combinaison linéaire des modes naturels de vibration du liquide dans le réservoir. Pour satisfaire la quatrième et dernière condition aux limites (au droit de l'interface barrage-réservoir), la technique des moindres carrés a été utilisée, aboutissant à la définition d'une fonction des erreurs à valeurs complexes comme étant le carré de la valeur absolue de l'erreur résiduelle (enregistrée pour chaque valeur y) intégrée le long du contour constituant l'interface barrage-réservoir. Cette démarche nous a permis d'aboutir vers un système d'équations algébriques Hermitien linéaire pour le vecteur des coefficients inconnus $\{A_i\}$.

Le liquide dans le réservoir étant considéré compressible et visqueux, le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt a été adopté. D'une part pour représenter l'effet de la fréquence d'excitation sismique sur le champ des forces hydrodynamiques et d'autre part pour tenir compte de l'atténuation de l'amplitude des ondes de compression lorsque la viscosité du liquide est prise en considération, sachant que les deux paramètres de calibrage de notre modèle (la compressibilité et la viscosité du liquide) sont directement dépendants de la fréquence angulaire du chargement extérieur.

La pression hydrodynamique est exprimée sous forme d'une série de fonctions à valeurs complexes. Pour un nombre fini de termes et une tolérance de calcul appropriée, une troncature est opérée sur cette dernière après vérification de sa convergence uniforme. Ensuite, la résultante des forces de cisaillement et celle des moments de renversement associés agissant sur la face amont du barrage, sont déterminés par un processus d'intégrations analytiques successives par parties. A la fin du parcours d'intégration, des expressions analytiques pour la détermination des forces hydro-sismiques sont obtenues.

Pour le cas d'un barrage vertical, une comparaison a été effectuée avec les résultats numériques donnés par la méthode « Exacte » de Westergaard où une très bonne concordance est observée. Par ailleurs, l'effet de compressibilité de l'eau sur la réponse du système est mis en exergue en comparant les résultats obtenus par les expressions analytiques proposées avec ceux donnés respectivement par les méthodes « Expérimentale » de Zangar et « Exacte » de Chwang.

Dans le cas de barrages rigides de grandes hauteurs et pour des fréquences d'excitation élevées, on constate que l'importance de l'effet de compressibilité sur la réponse du système que ce soit

pour les pressions, les forces de cisaillement ou bien pour les moments hydrodynamiques de renversement n'est pas identique. En effet, lorsque la compressibilité de l'eau est négligée, des pourcentages d'erreurs sont enregistrés à travers la présente étude, ils sont de l'ordre de 15-18 % pour les pressions, de 14-17 % pour les forces de cisaillement et de l'ordre de 13 % pour les moments hydrodynamiques de renversement.

L'étude a été ensuite étendue au cas d'un barrage rigide à géométrie irrégulière avec prise en compte des effets combinés de compressibilité et de viscosité de l'eau. Les résultats obtenus sont présentés pour plusieurs valeurs de la fréquence adimensionnelle η et pour différents taux d'amortissement du liquide ζ .

En général, l'effet de viscosité de l'eau sur la réponse du système pourrait être négligé lorsque la fréquence d'excitation sismique n'est pas au droit des modes propres de vibration du réservoir. En revanche, au voisinage des fréquences de résonance, les forces sismiques généralisées sont essentiellement contrôlées par l'amortissement ζ . En présence de viscosité, un effet de retardement est aussi constaté sur la période propre du réservoir qui prend des valeurs complexes, où la partie imaginaire traduit l'effet de dissipation d'énergie que subissent les ondes de compression dans le domaine du réservoir. Les effets les plus importants générés par la viscosité de l'eau se produisent pour le mode fondamental du réservoir ($w/w_1=1$). En revanche, à partir du deuxième mode ($w/w_1 = 3$) l'effet de viscosité n'est plus prépondérant au-delà cette plage de fréquences d'excitations.

Plusieurs paramètres de calibrage de notre modèle figurent dans les formules analytiques proposées, ainsi la géométrie de l'interface du barrage est paramétrée par l'angle θ et la fraction de hauteur C , le réservoir d'eau par la densité du liquide ρ , le taux d'amortissement ξ et la hauteur de liquide H , et enfin, le chargement sismique est caractérisé par sa fréquence d'excitation w . Cette panoplie de paramètres offre à l'ingénieur concepteur des possibilités et des choix multiples lors des conceptions préliminaires des barrages.

Au vu de ce qui précède et compte tenu des résultats obtenus ainsi que les comparaisons effectuées, on peut conclure que les expressions analytiques proposées pour la distribution des forces de cisaillement et des moments de renversement associés sont simples, efficaces sur le plan des calculs et pratiques pour la conception préliminaire de cette catégorie de barrages. Elles ont permis de montrer clairement les effets séparés ou combinés de compressibilité et de viscosité de l'eau dans le réservoir. Elles présentent également l'avantage de pouvoir couvrir une large gamme de fréquences d'excitations sismiques, même au-delà des fréquences de coupure des modes naturels du réservoir.

Enfin et en guise de recommandation, il est bien entendu que la réponse du système barrage-réservoir pourrait également être évaluée dans le domaine temporel. A ce sujet, il est à noter que la simulation d'un chargement sismique réel par le biais d'un accélérogramme est possible. Il suffit d'utiliser la transformée de Fourier pour le signal input et de faire ensuite le calcul dans le domaine fréquentiel en utilisant les expressions analytiques proposées. De la même manière, le passage inverse, pourrait se faire via la transformée de Fourier inverse, nous permettant ainsi de représenter la réponse du système dans le domaine temporel.

REFERENCES

Références

- [1] Westergaard, H. M. “Water pressures on dams during earthquakes”. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 98(2), pp. 418–472. 1933.
- [2] Zangar, C. N. “Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquakes”. *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, 10, pp. 93–102. 1953.
- [3] Chopra, A. K. “Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes”. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 93(6), pp. 205–223. 1967.
- [4] Chwang, A. T. “Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes. Part 2. Exact theory”. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(2), pp.343–348. 1978. [10.1017/S0022112078001640](https://doi.org/10.1017/S0022112078001640).
- [5] Liu P. L. F. “Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquakes”. *Journal of fluid mechanics*, 165, pp. 131–145. 1986. [10.1017/S0022112086003026](https://doi.org/10.1017/S0022112086003026).
- [6] Tsai, C. S. “Semi-analytical solution for hydrodynamic pressures on dams with arbitrary upstream face considering water compressibility”. *Computers and Structures*, 42(4), pp. 497–502. 1992. [10.1016/0045-7949\(92\)90117-I](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90117-I).
- [7] Hall, J. F., Chopra, A. K. “Hydrodynamic effects in earthquake response of embankment dams”. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 108(4), pp. 591–597. 1982.
- [8] Sharan, S. K. “A non-reflecting boundary in fluid-structure interaction”. *Computers and Structures*, 26(5), pp. 841–846. 1987. [10.1016/0045-7949\(87\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90034-4).
- [9] Tiliouine, B., Seghir, A. “A numerical model for time domain analysis of dams including fluid-structure interaction”. *CST 98 International Conference*, Edinburgh, Scotland, Aug. 18–20. 1998.
- [10] Tiliouine, B., Seghir, A. “Fluid-structure models for dynamic studies of dam-water systems”. *Eleventh European Conference on Earthquake Engineering*, Paris, France, Sep. 6–11. 1998.
- [11] Gogoi, I., Maity, D. “A novel procedure for determination of hydrodynamic pressure along upstream face of dams due to earthquakes”. *Computers and Structures*, 88(9–10), pp. 539–548. 2010. [10.1016/j.compstruc.2010.01.007](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.01.007).
- [12] Fenves, G., Chopra, A. K. “Effects of reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction of the frequency response functions for concrete gravity dams”. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13(1), pp. 13–31. 1985. [10.1002/eqe.4290130104](https://doi.org/10.1002/eqe.4290130104).
- [13] Kianoosh, H. “Effect of reservoir bottom on earthquake response of concrete dams”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 16(7), pp.407–415. 1997. [10.1016/S0267-7261\(97\)00023-7](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(97)00023-7).

-
- [14] Li Shang-Ming, Liang Hong, Li Ai-min. “A semi-analytical solution for characteristics of a dam-reservoir system with absorptive reservoir bottom”. *Journal of Hydrodynamics*, 20(6), pp. 727–734. 2008. [10.1016/S1001-6058\(09\)60008-1](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(09)60008-1).
- [15] Avilés, J., Li, X. “Analytical–numerical solution for hydrodynamic pressures on dams with sloping face considering compressibility and viscosity of water”. *Computers and Structures*, 66(4), pp. 481–488. 1998. [10.1016/S0045-7949\(97\)00091-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00091-6).
- [16] Tadjadit, A., Tiliouine, B. “Formulation analytique des efforts de réduction au droit de l’interface fluide-structure des barrages rigides à fruits composés sous excitations sismiques”. *Romanian Journal of Technical Sciences, Applied Mechanics*, 58(3), pp. 287–298. 2013.
- [17] Chopra, A. K. “Earthquake Analysis, Design and Safety Evaluation of concrete Dams”. *Proceeding of the Fifth Canadian Conference on Earthquake Engineering (Ottawa, Canada)*, pp. 39-62. 1987.
- [18] Hall, J. F. “The Dynamic and Earthquake Behaviour of Concrete Dams. Review of experimental behaviour and observational Evidence”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 7(2), 58-121. 1988.
- [19] Lamb, H. “Hydrodynamics”, *Cambridge*. 1924.
- [20] Von Karman, T. “Discussion of hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquake effects by H. M. Westergaard”. *Transactions ASCE*. pp. 432-472. 1931.
- [21] Housner G. W. “Earthquake pressure on Fluid containers”, *13 WCEE, California Institute of technology, Pasadena*, 1954.
- [22] Epstein, H. I. “Seismic design of liquid-storage Tanks”. *Journal of the structures Division, ASCE*, 102(ST9), pp. 1659–1673. 1976.
- [23] Chwang, A. T., Housner, G. W. “Hydrodynamic pressures on sloping dams during Earthquakes. Part 1. Momentum method”. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(2), pp. 335–341. 1978.
- [24] Newmark, N. M., Rosenblueth, E. “Fundamentals of Earthquake Engineering”. *Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ*, pp. 177-212. 1971.
- [25] International commission on large dams. “Selecting seismic parameters for large dams”. *Bulletin 148. (Révision du Bulletin 72)*. 2016.
- [26] Grenier, J. P. “Débuter en algorithmique avec MATLAB et SCILAB”, *Editions Ellipses, Paris*, 2007.
- [27] Lapreste, J. T. “Introduction à MATLAB, 2^{ème} Edition avec MATLAB 7”, *Editions Ellipses, Paris*, 2005.
- [28] Saini, S. “Modeling of hydrodynamic Effects on dams using Finite Elements”, *Journal of the Institution of Engineers, India*, (59), pp. 204-210.1978.
- [29] Seghir, A. “Investigation des effets d’interaction sismique fluide structure par couplage éléments-finis éléments-infinis”, *Thèse de Magister sous la direction du Pr. Tiliouine Boualem, Département d’Hydraulique, E.N.P*, 1999.

-
- [30] Das, Y. C. & A. K, F. A. “Hydrodynamic pressure on dams”, *Int. J. Modeling and Simulation*, 8(1), pp. 33-37.1988.
- [31] Dhatt, G. “Modélisation des fluides par éléments finis”, *Polycopie de cours, Université de Technologie de Compiègne*, Mai, 1992.
- [32] Rokey, K. C., Evans, H. R. & Griffiths, W. “Introduction à la méthode des éléments finis”, *Edition Eyrolles*, 1979.
- [33] Zienkiewicz, O. C & TAYLOR, R. L. “La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires”, (1), *Afnor technique*, 1991.
- [34] Humar, J. L. & ROUFAIEL, M. “Finite element analysis of reservoir vibration”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, (109), pp. 315-230.1983.
- [35] Zienkiewicz, O. C. & NEWTON, R. E. “Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid”, *proc. Int. symp. On finite element techniques*, Stuttgart, 1st-15th May, 1969.

ANNEXES

Annexe A

A.1 Cas particuliers pour les distributions de $F_h(y)$ et $M_Z(y)$

A.1.1 Barrage rigide avec face amont inclinée

$$F_h(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i [-e^{-\gamma_i(H-y)} F_i(y) + F_i(H)] \quad (\text{A1})$$

Avec :

$$F_i(y) = \frac{[\lambda_i \sin \lambda_i y + \mu_i \tan \theta \cos \lambda_i y]}{\alpha_i^+}$$

$$F_i(H) = [\lambda_i \sin \lambda_i H + \mu_i \tan \theta \cos \lambda_i H] / \alpha_i^+$$

$$M_Z(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \left[\frac{e^{-\gamma_i(H-y)} M_i(y) - M_i(H)}{+[\lambda_i(H-y) \sin \lambda_i H] / \alpha_i^+} \right] \quad (\text{A2})$$

Avec :

$$M_i(y) = \frac{[m_i \sin \lambda_i y + n_i \cos \lambda_i y]}{\alpha_i^{+2}}$$

$$M_i(H) = m_i \sin \lambda_i H / \alpha_i^{+2}$$

A.1.2 Barrage rigide avec face amont verticale

Dans ce cas, nous avons : $\alpha_i^+ = \alpha_i^- = \lambda_i^2$ et $\gamma_i = 0$

$$F_h(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A_i}{\lambda_i} [\sin \lambda_i H - \sin \lambda_i y] \quad (\text{A3})$$

$$M_Z(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A_i}{\lambda_i^2} [-\cos \lambda_i y + \lambda_i (H - y) \sin \lambda_i H] \quad (\text{A4})$$

A.2 Valeurs maximales des forces de cisaillement et des moments de renversement

Les valeurs maximales des forces de cisaillement et des moments de renversement associés sont données à la base du barrage ($y = 0$) comme suit :

$$F_h(0) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \left\{ \frac{-\mu_i \tan \theta e^{-\gamma_i CH} / \alpha_i^+ + F_i(CH) + [\sin \lambda_i H - \sin \lambda_i CH]}{\lambda_i} \right\} \quad (\text{A5})$$

$$M_Z(0) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \left\{ \text{CH} \left[\frac{e^{-\gamma_i CH} M_i(0) - M_i(CH) + (\lambda_i \sin \lambda_i CH + \gamma_i \cos \lambda_i CH) / \alpha_i^+}{+ (\sin \lambda_i H - \sin \lambda_i CH) / \lambda_i} \right] + \frac{[\lambda_i H (1 - C) \sin \lambda_i H - \cos \lambda_i CH]}{\lambda_i^2} \right\} \quad (\text{A6})$$

Avec :

$$M_i(0) = n_i / \alpha_i^{+2}$$

A.3 Représentation graphique du premier mode de vibration de l'eau dans le réservoir pour les cas de liquides amorti et non amorti

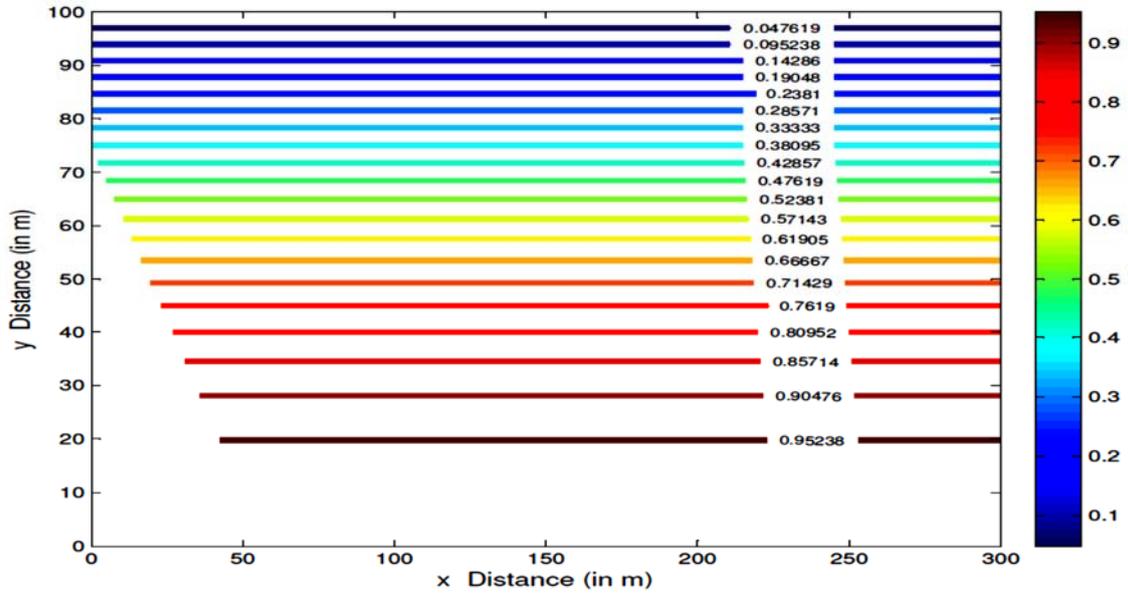


Fig. A.1(a) - Forme du premier mode de vibration, $w = w_1 = \frac{\pi c}{2H} = 22.59 \text{ rad/sec}$, $\xi = 0 \%$, $T_1(x, y, w_1) = e^{-\mu_1 x} \cos \lambda_1 y$, avec $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_1}{c}$

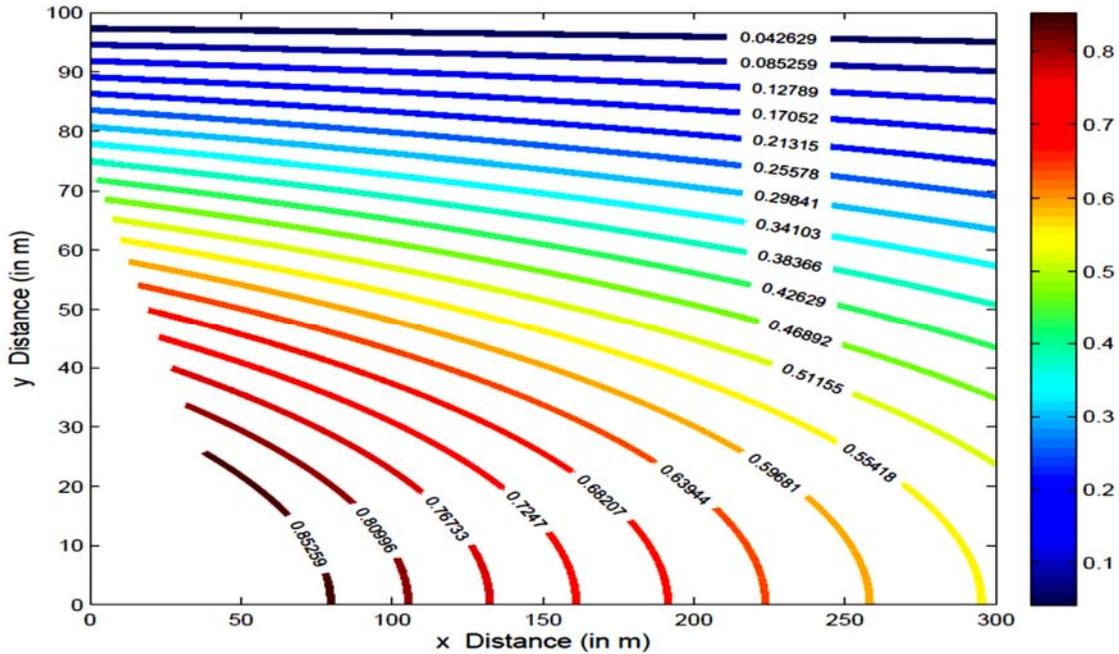


Fig. A.1(b) - Forme du premier mode de vibration, $w = w_1 = \frac{\pi c}{2H} = 22.59 \text{ rad/sec}$, $\xi = 1 \%$, $T_1(x, y, w_1) = e^{-\mu_1 x} \cos \lambda_1 y$, avec $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_1}{c}$: ici c , K et $T_1(x, y, w_1)$ sont à valeurs complexes

A. 4 Représentation graphique du deuxième mode de vibration de l'eau dans le réservoir pour les cas de liquides amorti et non amorti

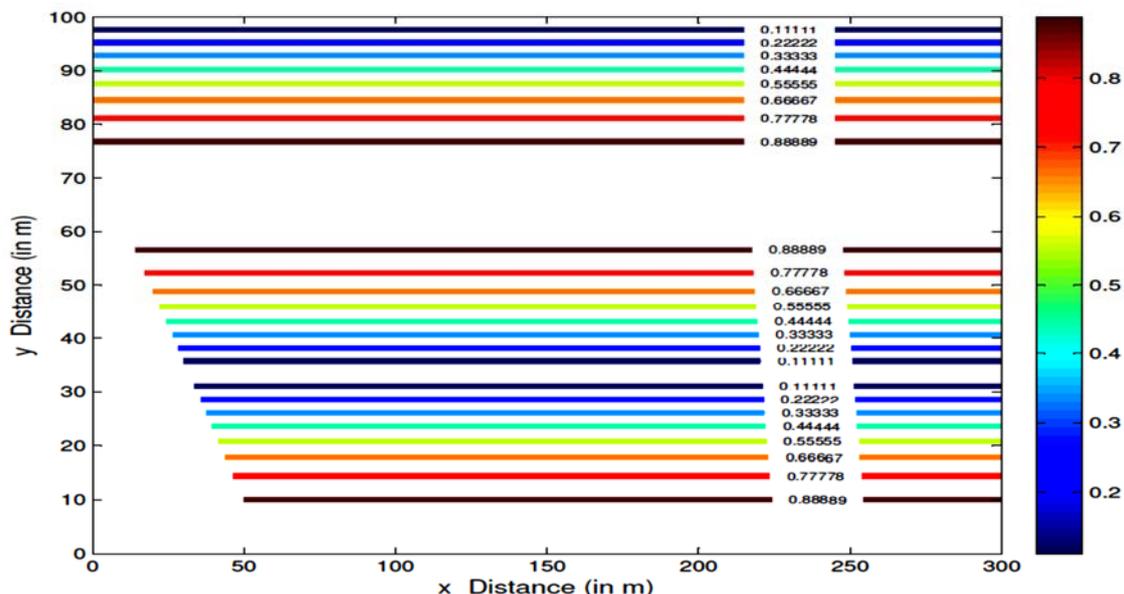
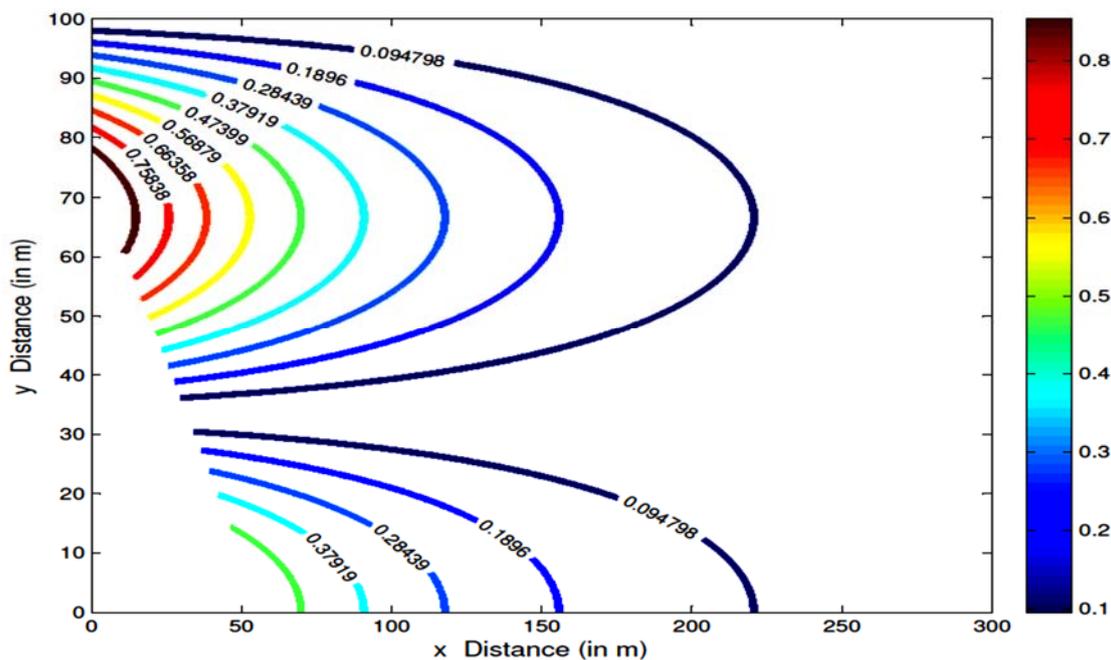


Fig. A.2(a) - Forme du deuxième mode de vibration, $w = w_2 = \frac{3\pi c}{2H} = 67.76 \text{ rad/sec}$, $\xi = 0 \%$,



$$T_2(x, y, w_2) = e^{-\mu_2 x} \cos \lambda_2 y, \text{ avec } \mu_2 = \sqrt{\lambda_2^2 - K^2} \text{ et } K = \frac{w_2}{c}$$

Fig. A.2(b) - Forme du deuxième mode de vibration, $w = w_2 = \frac{3\pi c}{2H} = 67.76 \text{ rad/sec}$, $\xi = 1 \%$,

$T_2(x, y, w_2) = e^{-\mu_2 x} \cos \lambda_2 y$, avec $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_2}{c}$: ici c , K et $T_2(x, y, w_2)$ sont à valeurs complexes

A. 5 Représentation graphique du troisième mode de vibration de l'eau dans le réservoir pour les cas de liquides amorti et non amorti

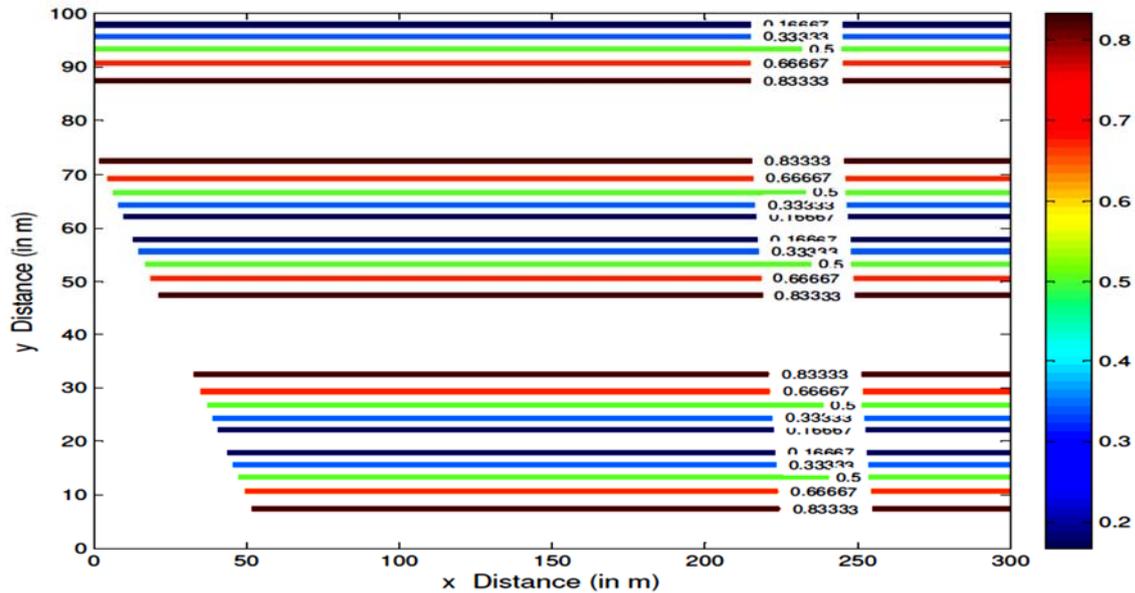


Fig. A.3(a) - Forme du troisième mode de vibration de l'eau dans le réservoir, $w = w_3 = \frac{5\pi c}{2H} = 112.94 \text{ rad/sec}$, $\xi = 0 \%$, $T_3(x, y, w_3) = e^{-\mu_3 x} \cos \lambda_3 y$, avec $\mu_3 = \sqrt{\lambda_3^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_3}{c}$

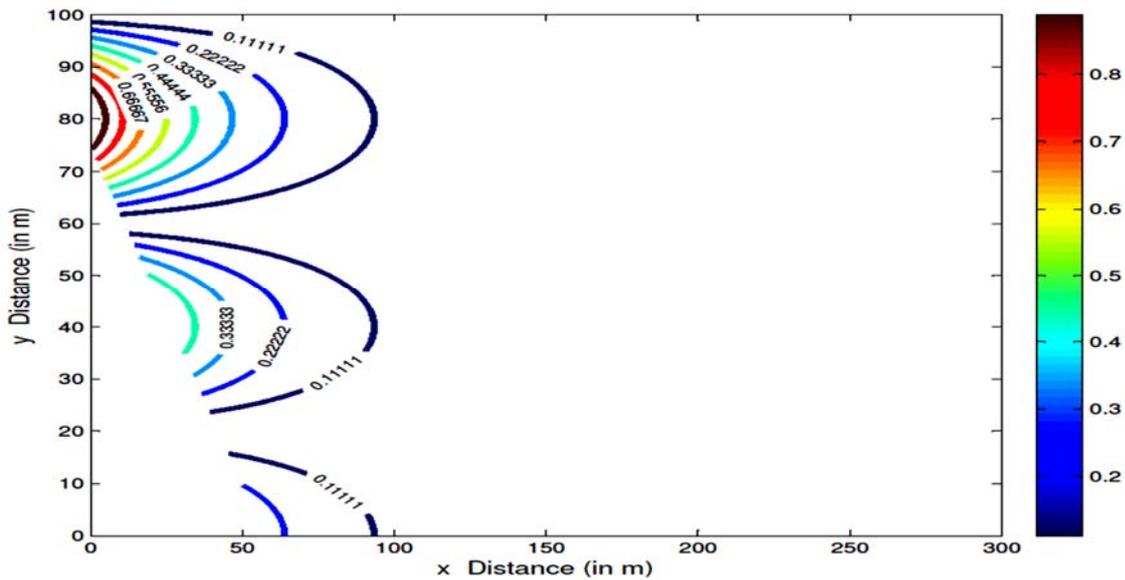


Fig. A.3(b) - Forme du troisième mode de vibration, $w = w_3 = \frac{5\pi c}{2H} = 112.94 \text{ rad/sec}$, $\xi = 1 \%$, $T_3(x, y, w_3) = e^{-\mu_3 x} \cos \lambda_3 y$, avec $\mu_3 = \sqrt{\lambda_3^2 - K^2}$ et $K = \frac{w_3}{c}$: ici c , K et $T_3(x, y, w_3)$ sont à valeurs complexes

Annexe B

Nous donnons ci-après les valeurs des éléments de la matrice Hermitienne $[F_{ji}]$, de vecteur colonne $\{G_j\}$ et de vecteur colonne des coefficients inconnus $\{A_i\}$ pour le calcul des valeurs maximales des forces de cisaillement et des moments de renversement à la base du barrage $F_h(0)$ et $M_z(0)$ (Equations A5 et A6). Vingt-cinq termes ont été utilisés pour calculer ces forces en considérant une précision de 10^{-4} et les paramètres de calibrage suivants: $H = 100 m$, $L = 3H$, $c = 1438 m/s$, $\theta = 37.6^\circ$, $C = 0.75$, $C_s = 0.1$ et $w = w_1 = \pi c/200$ (rad/sec). Pour des raisons d'espace, nous considérons seulement les cas de $\xi = 0 \%$ (liquide non visqueux) et le cas de $\xi = 1 \%$ (liquide visqueux).

a) $[F_{ji}]$, $\{G_j\}$ et $\{A_i\}$ pour un taux d'amortissement $\xi = 0 \%$ (Liquide compressible non visqueux)

Columns 1 through 7

0.0048 + 0.0000i	-0.0067 + 0.0000i	-0.0045 - 0.0000i	0.0125 - 0.0000i	-0.0129 + 0.0000i	0.0056 - 0.0000i	0.0050 - 0.0000i
-0.0067 - 0.0000i	0.0483 + 0.0000i	-0.0403 + 0.0000i	0.0073 - 0.0000i	0.0176 - 0.0000i	-0.0210 + 0.0000i	0.0062 - 0.0000i
-0.0045 + 0.0000i	-0.0403 - 0.0000i	0.1078 + 0.0000i	-0.1200 - 0.0000i	0.0779 - 0.0000i	-0.0168 + 0.0000i	-0.0305 + 0.0000i
0.0125 + 0.0000i	0.0073 + 0.0000i	-0.1200 - 0.0000i	0.2337 + 0.0000i	-0.2489 + 0.0000i	0.1552 - 0.0000i	-0.0131 + 0.0000i
-0.0129 - 0.0000i	0.0176 + 0.0000i	0.0779 + 0.0000i	-0.2489 - 0.0000i	0.3698 + 0.0000i	-0.3435 + 0.0000i	0.1822 - 0.0000i
0.0056 + 0.0000i	-0.0210 - 0.0000i	-0.0168 - 0.0000i	0.1552 + 0.0000i	-0.3435 - 0.0000i	0.4609 + 0.0000i	-0.4247 + 0.0000i
0.0050 + 0.0000i	0.0062 + 0.0000i	-0.0305 - 0.0000i	-0.0131 - 0.0000i	0.1822 + 0.0000i	-0.4247 - 0.0000i	0.6067 + 0.0000i
-0.0128 - 0.0000i	0.0133 + 0.0000i	0.0468 + 0.0000i	-0.0988 + 0.0000i	0.0167 - 0.0000i	0.2534 + 0.0000i	-0.6152 - 0.0000i
0.0130 + 0.0000i	-0.0233 - 0.0000i	-0.0332 - 0.0000i	0.1289 + 0.0000i	-0.1442 - 0.0000i	-0.0437 - 0.0000i	0.4357 + 0.0000i
-0.0055 - 0.0000i	0.0172 + 0.0000i	0.0039 - 0.0000i	-0.0753 - 0.0000i	0.1458 + 0.0000i	-0.0598 - 0.0000i	-0.1554 - 0.0000i
-0.0052 - 0.0000i	0.0005 - 0.0000i	0.0226 + 0.0000i	-0.0195 + 0.0000i	-0.0452 - 0.0000i	0.1258 + 0.0000i	-0.0954 - 0.0000i
0.0130 + 0.0000i	-0.0182 - 0.0000i	-0.0327 - 0.0000i	0.0955 - 0.0000i	-0.0788 + 0.0000i	-0.0561 - 0.0000i	0.2165 + 0.0000i
-0.0055 + 0.0000i	0.0245 + 0.0000i	0.0232 - 0.0000i	-0.1094 - 0.0000i	0.1440 + 0.0000i	-0.0397 + 0.0000i	-0.1843 - 0.0000i
0.0055 + 0.0000i	-0.0155 - 0.0000i	-0.0020 + 0.0000i	0.0570 + 0.0000i	-0.1125 - 0.0000i	0.0923 + 0.0000i	0.0526 + 0.0000i
0.0052 + 0.0000i	-0.0034 + 0.0000i	-0.0182 - 0.0000i	0.0273 - 0.0000i	0.0093 + 0.0000i	-0.0729 - 0.0000i	0.0862 + 0.0000i
-0.0129 - 0.0000i	0.0204 + 0.0000i	0.0263 - 0.0000i	-0.0925 + 0.0000i	0.0978 - 0.0000i	0.0034 + 0.0000i	-0.1537 - 0.0000i
0.0130 + 0.0000i	-0.0251 - 0.0000i	-0.0190 + 0.0000i	0.1009 + 0.0000i	-0.1418 - 0.0000i	0.0642 + 0.0000i	0.1231 + 0.0000i
-0.0055 - 0.0000i	0.0144 + 0.0000i	0.0017 - 0.0000i	-0.0493 - 0.0000i	0.0969 + 0.0000i	-0.0844 - 0.0000i	-0.0253 + 0.0000i
-0.0053 - 0.0000i	0.0050 - 0.0000i	0.0154 + 0.0000i	-0.0303 + 0.0000i	0.0077 - 0.0000i	0.0463 + 0.0000i	-0.0760 - 0.0000i
0.0129 + 0.0000i	-0.0216 - 0.0000i	-0.0227 + 0.0000i	0.0904 - 0.0000i	-0.1068 + 0.0000i	0.0224 - 0.0000i	0.1229 + 0.0000i
-0.0130 - 0.0000i	0.0253 + 0.0000i	0.0168 - 0.0000i	-0.0962 - 0.0000i	0.1400 + 0.0000i	-0.0752 - 0.0000i	-0.0945 - 0.0000i
0.0055 + 0.0000i	-0.0138 - 0.0000i	-0.0018 + 0.0000i	0.0452 + 0.0000i	-0.0877 - 0.0000i	0.0781 + 0.0000i	0.0143 - 0.0000i
0.0053 + 0.0000i	-0.0061 - 0.0000i	-0.0135 - 0.0000i	0.0317 - 0.0000i	-0.0176 + 0.0000i	-0.0298 - 0.0000i	0.0674 + 0.0000i
-0.0129 - 0.0000i	0.0224 + 0.0000i	0.0204 - 0.0000i	-0.0889 + 0.0000i	0.1119 - 0.0000i	-0.0377 + 0.0000i	-0.1040 - 0.0000i
0.0130 + 0.0000i	-0.0255 - 0.0000i	-0.0154 + 0.0000i	0.0933 + 0.0000i	-0.1385 - 0.0000i	0.0813 + 0.0000i	0.0781 - 0.0000i

Columns 8 through 14

-0.0128 + 0.0000i	0.0130 - 0.0000i	-0.0055 + 0.0000i	-0.0052 + 0.0000i	0.0129 - 0.0000i	-0.0130 + 0.0000i	0.0055 - 0.0000i
0.0133 - 0.0000i	-0.0233 + 0.0000i	0.0172 - 0.0000i	0.0005 + 0.0000i	-0.0182 + 0.0000i	0.0245 - 0.0000i	-0.0155 + 0.0000i
0.0468 - 0.0000i	-0.0332 + 0.0000i	0.0039 + 0.0000i	0.0226 - 0.0000i	-0.0327 + 0.0000i	0.0232 - 0.0000i	-0.0020 - 0.0000i
-0.0988 - 0.0000i	0.1389 - 0.0000i	-0.0753 + 0.0000i	-0.0195 - 0.0000i	0.0955 + 0.0000i	-0.1094 + 0.0000i	0.0570 - 0.0000i
0.0167 + 0.0000i	-0.1442 + 0.0000i	0.1458 - 0.0000i	-0.0452 + 0.0000i	-0.0788 - 0.0000i	0.1440 - 0.0000i	-0.1125 + 0.0000i
0.2534 - 0.0000i	-0.0437 + 0.0000i	-0.0998 + 0.0000i	0.1258 - 0.0000i	-0.0561 + 0.0000i	-0.0397 - 0.0000i	0.0923 - 0.0000i
-0.6152 + 0.0000i	0.4357 - 0.0000i	-0.1554 + 0.0000i	-0.0954 + 0.0000i	0.2165 - 0.0000i	-0.1843 + 0.0000i	0.0526 - 0.0000i
0.8743 + 0.0000i	-0.8717 + 0.0000i	0.5894 - 0.0000i	-0.1612 + 0.0000i	-0.2090 - 0.0000i	0.3623 - 0.0000i	-0.2660 + 0.0000i
-0.8717 - 0.0000i	1.1208 + 0.0000i	-1.0326 + 0.0000i	0.6360 - 0.0000i	-0.1232 + 0.0000i	-0.2648 + 0.0000i	0.3738 - 0.0000i
0.5894 + 0.0000i	-1.0326 - 0.0000i	1.2675 + 0.0000i	-1.1636 + 0.0000i	0.7587 - 0.0000i	-0.2379 + 0.0000i	-0.1735 + 0.0000i
-0.1612 - 0.0000i	0.6360 + 0.0000i	-1.1636 - 0.0000i	1.5003 + 0.0000i	-1.4651 + 0.0000i	1.0479 - 0.0000i	-0.4202 + 0.0000i
-0.2090 + 0.0000i	-0.1332 - 0.0000i	0.7587 + 0.0000i	-1.4651 - 0.0000i	1.9097 + 0.0000i	-1.8492 - 0.0000i	1.2763 - 0.0000i
0.3623 + 0.0000i	-0.2648 - 0.0000i	-0.2379 - 0.0000i	1.0479 + 0.0000i	-1.8492 - 0.0000i	2.2666 + 0.0000i	-2.0766 + 0.0000i
-0.2660 - 0.0000i	0.3738 + 0.0000i	-0.1735 - 0.0000i	-0.4202 - 0.0000i	1.2763 + 0.0000i	-2.0766 - 0.0000i	2.4688 + 0.0000i
0.0195 + 0.0000i	-0.2129 - 0.0000i	0.3308 + 0.0000i	-0.1559 - 0.0000i	-0.4337 - 0.0000i	1.3423 + 0.0000i	-2.3575 - 0.0000i
0.2120 - 0.0000i	-0.0671 + 0.0000i	-0.2355 - 0.0000i	0.4634 + 0.0000i	-0.3132 + 0.0000i	-0.3865 - 0.0000i	1.5163 + 0.0000i
-0.2932 - 0.0000i	0.2730 + 0.0000i	0.0133 + 0.0000i	-0.4335 - 0.0000i	0.6677 + 0.0000i	-0.3801 - 0.0000i	-0.5540 - 0.0000i
0.1897 + 0.0000i	-0.2827 - 0.0000i	0.1713 + 0.0000i	0.1634 + 0.0000i	-0.5500 - 0.0000i	0.6736 + 0.0000i	-0.2438 - 0.0000i
0.0223 - 0.0000i	0.1073 + 0.0000i	-0.2109 - 0.0000i	0.1516 + 0.0000i	0.1209 + 0.0000i	-0.4735 - 0.0000i	0.6083 + 0.0000i
-0.2093 + 0.0000i	0.1290 - 0.0000i	0.1053 + 0.0000i	-0.3292 - 0.0000i	0.3238 - 0.0000i	0.0076 + 0.0000i	-0.5060 - 0.0000i
0.2614 + 0.0000i	-0.2735 - 0.0000i	0.0568 - 0.0000i	0.2911 + 0.0000i	-0.5228 - 0.0000i	0.3962 + 0.0000i	0.1261 + 0.0000i
-0.1543 - 0.0000i	0.2396 + 0.0000i	-0.1636 - 0.0000i	-0.0888 - 0.0000i	0.3860 + 0.0000i	-0.4984 - 0.0000i	0.2471 + 0.0000i
-0.0413 + 0.0000i	-0.0552 - 0.0000i	0.1519 + 0.0000i	-0.1419 - 0.0000i	-0.0260 - 0.0000i	0.2705 + 0.0000i	-0.3951 - 0.0000i
0.2057 - 0.0000i	-0.1600 + 0.0000i	-0.0402 - 0.0000i	0.2657 + 0.0000i	-0.3252 + 0.0000i	0.1138 - 0.0000i	0.2705 + 0.0000i
-0.2426 - 0.0000i	0.2718 + 0.0000i	-0.0910 - 0.0000i	-0.2231 - 0.0000i	0.4588 + 0.0000i	-0.4017 - 0.0000i	0.0064 - 0.0000i

Columns 15 through 21

0.0052 - 0.0000i	-0.0129 + 0.0000i	0.0130 - 0.0000i	-0.0055 + 0.0000i	-0.0053 + 0.0000i	0.0129 - 0.0000i	-0.0130 + 0.0000i
-0.0034 - 0.0000i	0.0204 - 0.0000i	-0.0251 + 0.0000i	0.0144 - 0.0000i	0.0050 + 0.0000i	-0.0216 + 0.0000i	0.0253 - 0.0000i
-0.0182 + 0.0000i	0.0263 + 0.0000i	-0.0190 - 0.0000i	0.0017 + 0.0000i	0.0154 - 0.0000i	-0.0227 - 0.0000i	0.0168 + 0.0000i
0.0273 + 0.0000i	-0.0925 - 0.0000i	0.1009 - 0.0000i	-0.0493 + 0.0000i	-0.0303 - 0.0000i	0.0904 + 0.0000i	-0.0962 + 0.0000i
0.0093 - 0.0000i	0.0978 + 0.0000i	-0.1418 + 0.0000i	0.0969 - 0.0000i	0.0077 + 0.0000i	-0.1068 - 0.0000i	0.1400 - 0.0000i
-0.0729 + 0.0000i	0.0034 - 0.0000i	0.0642 - 0.0000i	-0.0844 + 0.0000i	0.0463 - 0.0000i	0.0224 + 0.0000i	-0.0752 + 0.0000i
0.0862 - 0.0000i	-0.1537 + 0.0000i	0.1231 - 0.0000i	-0.0253 - 0.0000i	-0.0760 + 0.0000i	0.1229 - 0.0000i	-0.0945 + 0.0000i
0.0195 - 0.0000i	0.2120 + 0.0000i	-0.2932 + 0.0000i	0.1897 - 0.0000i	0.0223 + 0.0000i	-0.2093 - 0.0000i	0.2614 - 0.0000i
-0.2129 + 0.0000i	-0.0671 - 0.0000i	0.2730 - 0.0000i	-0.2827 + 0.0000i	0.1073 - 0.0000i	0.1290 + 0.0000i	-0.2735 + 0.0000i
0.3308 - 0.0000i	-0.2355 + 0.0000i	0.0133 - 0.0000i	0.1713 - 0.0000i	-0.2109 + 0.0000i	0.1053 - 0.0000i	0.0568 + 0.0000i
-0.1559 + 0.0000i	0.4634 - 0.0000i	-0.4335 + 0.0000i	0.1634 - 0.0000i	0.1516 - 0.0000i	-0.3292 + 0.0000i	0.2911 - 0.0000i
-0.4337 + 0.0000i	-0.3132 - 0.0000i	0.6677 - 0.0000i	-0.5500 + 0.0000i	0.1209 + 0.0000i	0.3238 + 0.0000i	-0.5228 + 0.0000i
1.3423 - 0.0000i	-0.3865 + 0.0000i	-0.3801 + 0.0000i	0.6736 - 0.0000i	-0.4735 + 0.0000i	0.0076 - 0.0000i	0.3962 - 0.0000i
-2.2575 + 0.0000i	1.5163 - 0.0000i	-0.5540 + 0.0000i	-0.2438 + 0.0000i	0.6083 - 0.0000i	-0.5060 + 0.0000i	0.1261 - 0.0000i
2.7887 + 0.0000i	-2.6702 + 0.0000i	1.9117 - 0.0000i	-0.8055 + 0.0000i	-0.2138 + 0.0000i	0.7816 - 0.0000i	-0.7707 + 0.0000i
-2.6702 - 0.0000i	3.3999 + 0.0000i	-3.1820 + 0.0000i	2.2148 - 0.0000i	-0.8264 + 0.0000i	-0.4146 - 0.0000i	1.0433 - 0.0000i
1.9117 + 0.0000i	-3.1820 - 0.0000i	3.8071 + 0.0000i	-3.4759 + 0.0000i	2.3002 - 0.0000i	-0.7699 + 0.0000i	-0.4930 + 0.0000i
-0.8055 - 0.0000i	2.2148 + 0.0000i	-3.4759 - 0.0000i	4.0649 + 0.0000i	-3.7069 + 0.0000i	2.5253 - 0.0000i	-0.9898 + 0.0000i
-0.2138 - 0.0000i	-0.8264 - 0.0000i	2.3002 + 0.0000i	-3.7069 - 0.0000i	4.4718 + 0.0000i	-4.2306 + 0.0000i	3.0269 - 0.0000i
0.7816 + 0.0000i	-0.4146 + 0.0000i	-0.7699 - 0.0000i	2.5253 + 0.0000i	-4.2306 - 0.0000i	5.1648 + 0.0000i	-4.8701 + 0.0000i
-0.7707 + 0.0000i	1.0433 + 0.0000i	-0.4930 - 0.0000i	-0.9898 - 0.0000i	3.0269 + 0.0000i	-4.8701 - 0.0000i	5.7424 + 0.0000i
0.3309 + 0.0000i	-0.9208 - 0.0000i	1.0440 + 0.0000i	-0.3126 - 0.0000i	-1.3101 - 0.0000i	3.4045 + 0.0000i	-5.2305 - 0.0000i
0.2143 + 0.0000i	0.2788 + 0.0000i	-0.8212 - 0.0000i	0.9568 + 0.0000i	-0.2706 - 0.0000i	-1.3383 - 0.0000i	3.5096 + 0.0000i
-0.5478 - 0.0000i	0.4313 - 0.0000i	0.1388 + 0.0000i	-0.8630 - 0.0000i	1.1704 + 0.0000i	-0.5148 + 0.0000i	-1.2726 - 0.0000i
0.5175 + 0.0000i	-0.7929 - 0.0000i	0.5151 + 0.0000i	0.2939 + 0.0000i	-1.1933 - 0.0000i	1.4892 + 0.0000i	-0.6047 - 0.0000i

Columns 22 through 25

0.0055 - 0.0000i	0.0053 - 0.0000i	-0.0129 + 0.0000i	0.0130 - 0.0000i
-0.0138 + 0.0000i	-0.0061 + 0.0000i	0.0224 - 0.0000i	-0.0255 + 0.0000i
-0.0018 - 0.0000i	-0.0135 + 0.0000i	0.0204 + 0.0000i	-0.0154 - 0.0000i
0.0452 - 0.0000i	0.0317 + 0.0000i	-0.0889 - 0.0000i	0.0933 - 0.0000i
-0.0877 + 0.0000i	-0.0176 - 0.0000i	0.1119 + 0.0000i	-0.1385 + 0.0000i
0.0781 - 0.0000i	-0.0298 + 0.0000i	-0.0377 - 0.0000i	0.0813 - 0.0000i
0.0143 + 0.0000i	0.0674 - 0.0000i	-0.1040 + 0.0000i	0.0781 + 0.0000i
-0.1543 + 0.0000i	-0.0413 - 0.0000i	0.2057 + 0.0000i	-0.2426 + 0.0000i
0.2396 - 0.0000i	-0.0552 + 0.0000i	-0.1600 - 0.0000i	0.2718 - 0.0000i
-0.1636 + 0.0000i	0.1519 - 0.0000i	-0.0402 + 0.0000i	-0.0910 + 0.0000i
-0.0889 + 0.0000i	-0.1419 + 0.0000i	0.2657 - 0.0000i	-0.2231 + 0.0000i
0.3860 - 0.0000i	-0.0260 + 0.0000i	-0.3252 - 0.0000i	0.4588 - 0.0000i
-0.4984 + 0.0000i	0.2705 - 0.0000i	0.1138 + 0.0000i	-0.4017 + 0.0000i
0.2471 - 0.0000i	-0.3951 + 0.0000i	0.2705 - 0.0000i	0.0064 + 0.0000i
0.3309 - 0.0000i	0.2143 - 0.0000i	-0.5478 + 0.0000i	0.5175 - 0.0000i
-0.9208 + 0.0000i	0.2788 - 0.0000i	0.4313 + 0.0000i	-0.7929 + 0.0000i
1.0440 - 0.0000i	-0.8212 + 0.0000i	0.1388 - 0.0000i	0.5151 - 0.0000i
-0.3126 + 0.0000i	0.9568 - 0.0000i	-0.8630 + 0.0000i	0.2939 - 0.0000i
-1.3101 + 0.0000i	-0.2706 + 0.0000i	1.1704 - 0.0000i	-1.1933 + 0.0000i
3.4045 - 0.0000i	-1.3383 + 0.0000i	-0.5148 - 0.0000i	1.4892 - 0.0000i
-5.2305 + 0.0000i	3.5096 - 0.0000i	-1.2726 + 0.0000i	-0.6047 + 0.0000i
6.0557 + 0.0000i	-5.5116 + 0.0000i	3.7858 - 0.0000i	-1.5446 + 0.0000i
-5.5116 - 0.0000i	6.5497 + 0.0000i	-6.1465 + 0.0000i	4.3936 - 0.0000i
3.7858 + 0.0000i	-6.1465 - 0.0000i	7.3846 + 0.0000i	-6.9136 + 0.0000i
-1.5446 - 0.0000i	4.3936 + 0.0000i	-6.9136 - 0.0000i	8.0725 + 0.0000i

$$\{G_j\}^T = 1.0e+03 * \{0.5886 - 0.0000i \quad -0.9675 + 0.0000i \quad 0.8356 - 0.0000i \quad -0.7224 + 0.0000i \quad 0.7364 - 0.0000i \quad -0.8821 + 0.0000i \quad 1.0805 + 0.0000i \quad -1.2188 - 0.0000i \quad 1.2172 - 0.0000i \quad -1.0769 + 0.0000i \quad 0.8799 - 0.0000i \quad -0.7415 + 0.0000i \quad 0.7425 - 0.0000i \quad -0.8825 + 0.0000i \quad 1.0796 + 0.0000i \quad -1.2187 - 0.0000i \quad 1.2182 - 0.0000i \quad -1.0787 + 0.0000i \quad 0.8817 - 0.0000i \quad -0.7427 + 0.0000i \quad 0.7431 - 0.0000i \quad -0.8825 + 0.0000i \quad 1.0795 + 0.0000i \quad -1.2186 - 0.0000i \quad 0.0000 + 0.0000i\}$$

$$\{A_i\}^T = 1.0e+09 * \{0.0002 - 0.0000i \quad 0.0001 - 0.0000i \quad 0.0001 - 0.0000i \quad 0.0002 - 0.0000i \quad 0.0006 - 0.0000i \quad 0.0017 - 0.0000i \quad 0.0048 - 0.0000i \quad 0.0127 - 0.0000i \quad 0.0319 - 0.0000i \quad 0.0747 - 0.0000i \quad 0.1617 - 0.0000i \quad 0.3196 - 0.0000i \quad 0.5715 - 0.0000i \quad 0.9164 - 0.0000i \quad 1.3059 - 0.0000i \quad 1.6382 - 0.0000i \quad 1.7899 - 0.0000i \quad 1.6827 - 0.0000i \quad 1.3406 - 0.0000i \quad 0.8877 - 0.0000i \quad 0.4758 - 0.0000i \quad 0.1986 - 0.0000i \quad 0.0607 - 0.0000i \quad 0.0121 - 0.0000i \quad 0.0012 - 0.0000i\}$$

b) $\{F_{ji}\}$, $\{G_j\}$ et $\{A_i\}$ pour un taux d'amortissement $\xi = 1\%$ (Liquide compressible et visqueux)

Columns 1 through 7

0.0065 + 0.0000i	-0.0071 + 0.0004i	-0.0043 - 0.0001i	0.0126 - 0.0001i	-0.0132 + 0.0003i	0.0058 - 0.0002i	0.0050 + 0.0000i
-0.0071 - 0.0004i	0.0483 + 0.0000i	-0.0403 + 0.0000i	0.0073 - 0.0000i	0.0176 - 0.0000i	-0.0210 + 0.0000i	0.0062 - 0.0000i
-0.0043 + 0.0001i	-0.0403 - 0.0000i	0.1078 + 0.0000i	-0.1200 + 0.0000i	0.0779 - 0.0000i	-0.0168 + 0.0000i	-0.0305 + 0.0000i
0.0126 + 0.0001i	0.0073 + 0.0000i	-0.1200 - 0.0000i	0.2337 + 0.0000i	-0.2489 + 0.0000i	0.1552 - 0.0000i	-0.0131 + 0.0000i
-0.0132 - 0.0003i	0.0176 + 0.0000i	0.0779 + 0.0000i	-0.2489 - 0.0000i	0.3698 + 0.0000i	-0.3435 + 0.0000i	0.1822 - 0.0000i
0.0058 + 0.0002i	-0.0210 - 0.0000i	-0.0168 - 0.0000i	0.1552 + 0.0000i	-0.3435 - 0.0000i	0.4609 + 0.0000i	-0.4247 + 0.0000i
0.0050 - 0.0000i	0.0062 + 0.0000i	-0.0305 - 0.0000i	-0.0131 - 0.0000i	0.1822 + 0.0000i	-0.4247 - 0.0000i	0.6068 + 0.0000i
-0.0129 - 0.0002i	0.0133 + 0.0000i	0.0468 + 0.0000i	-0.0988 + 0.0000i	0.0167 - 0.0000i	0.2534 + 0.0000i	-0.6152 - 0.0000i
0.0132 + 0.0002i	-0.0233 - 0.0000i	-0.0332 - 0.0000i	0.1289 + 0.0000i	-0.1442 - 0.0000i	-0.0437 - 0.0000i	0.4357 + 0.0000i
-0.0057 - 0.0001i	0.0172 + 0.0000i	0.0039 - 0.0000i	-0.0753 - 0.0000i	0.1458 + 0.0000i	-0.0998 - 0.0000i	-0.1554 - 0.0000i
-0.0052 - 0.0000i	0.0005 - 0.0000i	0.0226 + 0.0000i	-0.0195 + 0.0000i	-0.0452 - 0.0000i	0.1258 + 0.0000i	-0.0954 - 0.0000i
0.0130 + 0.0002i	-0.0182 - 0.0000i	-0.0327 - 0.0000i	0.0955 - 0.0000i	-0.0788 + 0.0000i	-0.0561 - 0.0000i	0.2165 + 0.0000i
-0.0132 - 0.0002i	0.0245 + 0.0000i	0.0232 - 0.0000i	-0.1094 - 0.0000i	0.1440 + 0.0000i	-0.0397 + 0.0000i	-0.1843 - 0.0000i
0.0056 + 0.0001i	-0.0155 - 0.0000i	-0.0020 + 0.0000i	0.0570 + 0.0000i	-0.1125 - 0.0000i	0.0923 + 0.0000i	0.0526 + 0.0000i
0.0053 + 0.0000i	-0.0034 + 0.0000i	-0.0182 - 0.0000i	0.0273 - 0.0000i	0.0093 + 0.0000i	-0.0729 - 0.0000i	0.0862 + 0.0000i
-0.0131 - 0.0002i	0.0204 + 0.0000i	0.0263 - 0.0000i	-0.0925 + 0.0000i	0.0978 - 0.0000i	0.0034 + 0.0000i	-0.1537 - 0.0000i
0.0132 + 0.0002i	-0.0251 - 0.0000i	-0.0190 + 0.0000i	0.1009 + 0.0000i	-0.1418 - 0.0000i	0.0642 + 0.0000i	0.1231 + 0.0000i
-0.0056 - 0.0001i	0.0144 + 0.0000i	0.0017 - 0.0000i	-0.0493 - 0.0000i	0.0969 + 0.0000i	-0.0844 - 0.0000i	-0.0253 + 0.0000i
-0.0053 - 0.0000i	0.0050 - 0.0000i	0.0154 + 0.0000i	-0.0303 + 0.0000i	0.0077 - 0.0000i	0.0463 + 0.0000i	-0.0760 - 0.0000i
0.0131 + 0.0002i	-0.0216 - 0.0000i	-0.0227 + 0.0000i	0.0904 - 0.0000i	-0.1068 + 0.0000i	0.0224 - 0.0000i	0.1229 + 0.0000i
-0.0132 - 0.0002i	0.0253 + 0.0000i	0.0168 - 0.0000i	-0.0962 - 0.0000i	0.1400 + 0.0000i	-0.0752 - 0.0000i	-0.0945 - 0.0000i
0.0056 + 0.0001i	-0.0138 - 0.0000i	-0.0018 + 0.0000i	0.0452 + 0.0000i	-0.0877 - 0.0000i	0.0781 + 0.0000i	0.0143 - 0.0000i
0.0054 + 0.0001i	-0.0061 - 0.0000i	-0.0135 - 0.0000i	0.0317 - 0.0000i	-0.0176 + 0.0000i	-0.0298 - 0.0000i	0.0674 + 0.0000i
-0.0131 - 0.0002i	0.0224 + 0.0000i	0.0204 - 0.0000i	-0.0889 + 0.0000i	0.1119 - 0.0000i	-0.0377 + 0.0000i	-0.1040 - 0.0000i
0.0132 + 0.0002i	-0.0255 - 0.0000i	-0.0154 + 0.0000i	0.0933 + 0.0000i	-0.1385 - 0.0000i	0.0813 + 0.0000i	0.0781 - 0.0000i

Columns 8 through 14

-0.0129 + 0.0002i	0.0132 - 0.0002i	-0.0057 + 0.0001i	-0.0052 + 0.0000i	0.0130 - 0.0002i	-0.0132 + 0.0002i	0.0056 - 0.0001i
0.0133 - 0.0000i	-0.0233 + 0.0000i	0.0172 - 0.0000i	0.0005 + 0.0000i	-0.0182 + 0.0000i	0.0245 - 0.0000i	-0.0155 + 0.0000i
0.0468 - 0.0000i	-0.0332 + 0.0000i	0.0039 + 0.0000i	0.0226 - 0.0000i	-0.0327 + 0.0000i	0.0232 + 0.0000i	-0.0020 - 0.0000i
-0.0988 - 0.0000i	0.1289 - 0.0000i	-0.0753 + 0.0000i	-0.0195 - 0.0000i	0.0955 + 0.0000i	-0.1094 + 0.0000i	0.0570 - 0.0000i
0.0167 + 0.0000i	-0.1442 + 0.0000i	0.1458 - 0.0000i	-0.0452 + 0.0000i	-0.0788 - 0.0000i	0.1440 - 0.0000i	-0.1125 + 0.0000i
0.2534 - 0.0000i	-0.0437 + 0.0000i	-0.0998 + 0.0000i	0.1258 - 0.0000i	-0.0561 + 0.0000i	-0.0397 - 0.0000i	0.0923 - 0.0000i
-0.6152 + 0.0000i	0.4357 - 0.0000i	-0.1554 + 0.0000i	-0.0954 + 0.0000i	0.2165 - 0.0000i	-0.1843 + 0.0000i	0.0526 - 0.0000i
0.0743 + 0.0000i	-0.0717 + 0.0000i	0.5094 - 0.0000i	-0.1612 + 0.0000i	-0.2090 - 0.0000i	0.3623 - 0.0000i	-0.2660 + 0.0000i
-0.8717 - 0.0000i	1.1208 + 0.0000i	-1.0326 + 0.0000i	0.6360 - 0.0000i	-0.1232 + 0.0000i	-0.2648 + 0.0000i	0.3738 - 0.0000i
0.5894 + 0.0000i	-1.0326 - 0.0000i	1.2675 + 0.0000i	-1.1636 + 0.0000i	0.7587 - 0.0000i	-0.2379 + 0.0000i	-0.1735 + 0.0000i
-0.1612 - 0.0000i	0.6360 + 0.0000i	-1.1636 - 0.0000i	1.5003 + 0.0000i	-1.4651 + 0.0000i	1.0479 - 0.0000i	-0.4202 + 0.0000i
-0.2090 + 0.0000i	-0.1232 - 0.0000i	0.7587 + 0.0000i	-1.4651 - 0.0000i	1.9097 + 0.0000i	-1.8492 + 0.0000i	1.2763 - 0.0000i
0.3623 + 0.0000i	-0.2648 - 0.0000i	-0.2379 - 0.0000i	1.0479 + 0.0000i	-1.8492 - 0.0000i	2.2666 + 0.0000i	-2.0766 + 0.0000i
-0.2660 - 0.0000i	0.3738 + 0.0000i	-0.1735 - 0.0000i	-0.4202 - 0.0000i	1.2763 + 0.0000i	-2.0766 - 0.0000i	2.4688 + 0.0000i
0.0195 + 0.0000i	-0.2129 - 0.0000i	0.3308 + 0.0000i	-0.1559 - 0.0000i	-0.4337 - 0.0000i	1.3423 + 0.0000i	-2.2575 - 0.0000i
0.2120 - 0.0000i	-0.0671 + 0.0000i	-0.2355 - 0.0000i	0.4634 + 0.0000i	-0.3132 + 0.0000i	-0.3865 - 0.0000i	1.5163 + 0.0000i
-0.2932 - 0.0000i	0.2730 + 0.0000i	0.0133 + 0.0000i	-0.4335 - 0.0000i	0.4677 + 0.0000i	-0.3801 - 0.0000i	-0.5540 - 0.0000i
0.1897 + 0.0000i	-0.2827 - 0.0000i	0.1713 + 0.0000i	0.1634 + 0.0000i	-0.5500 - 0.0000i	0.6736 + 0.0000i	-0.2438 - 0.0000i
0.0223 - 0.0000i	0.1073 + 0.0000i	-0.2109 - 0.0000i	0.1516 + 0.0000i	0.1209 + 0.0000i	-0.4735 - 0.0000i	0.6083 + 0.0000i
-0.2093 + 0.0000i	0.1290 - 0.0000i	0.1053 + 0.0000i	-0.3292 - 0.0000i	0.3238 - 0.0000i	0.0076 + 0.0000i	-0.5060 - 0.0000i
0.2614 + 0.0000i	-0.2735 - 0.0000i	0.0568 - 0.0000i	0.2911 + 0.0000i	-0.5228 - 0.0000i	0.3962 + 0.0000i	0.1261 + 0.0000i
-0.1543 - 0.0000i	0.2396 + 0.0000i	-0.1636 - 0.0000i	-0.0888 - 0.0000i	0.3860 + 0.0000i	-0.4984 - 0.0000i	0.2471 + 0.0000i
-0.0413 + 0.0000i	-0.0552 - 0.0000i	0.1519 + 0.0000i	-0.1419 - 0.0000i	-0.0260 - 0.0000i	0.2705 + 0.0000i	-0.3951 - 0.0000i
0.2057 - 0.0000i	-0.1600 + 0.0000i	-0.0402 - 0.0000i	0.2657 + 0.0000i	-0.3252 + 0.0000i	0.1138 - 0.0000i	0.2705 + 0.0000i
-0.2426 - 0.0000i	0.2718 + 0.0000i	-0.0910 - 0.0000i	-0.2231 - 0.0000i	0.4588 + 0.0000i	-0.4017 - 0.0000i	0.0064 - 0.0000i

Columns 15 through 21

```

0.0053 - 0.0000i -0.0131 + 0.0002i 0.0132 - 0.0002i -0.0056 + 0.0001i -0.0053 + 0.0000i 0.0131 - 0.0002i -0.0132 + 0.0002i
-0.0034 - 0.0000i 0.0204 - 0.0000i -0.0251 + 0.0000i 0.0144 - 0.0000i 0.0050 + 0.0000i -0.0216 + 0.0000i 0.0253 - 0.0000i
-0.0182 + 0.0000i 0.0263 + 0.0000i -0.0190 - 0.0000i 0.0017 + 0.0000i 0.0154 - 0.0000i -0.0227 - 0.0000i 0.0168 + 0.0000i
0.0273 + 0.0000i -0.0925 - 0.0000i 0.1009 - 0.0000i -0.0493 + 0.0000i -0.0303 - 0.0000i 0.0904 + 0.0000i -0.0962 + 0.0000i
0.0093 - 0.0000i 0.0978 + 0.0000i -0.1418 + 0.0000i 0.0969 - 0.0000i 0.0077 + 0.0000i -0.1068 - 0.0000i 0.1400 - 0.0000i
-0.0729 + 0.0000i 0.0034 - 0.0000i 0.0642 - 0.0000i -0.0844 + 0.0000i 0.0463 - 0.0000i 0.0224 + 0.0000i -0.0752 + 0.0000i
0.0862 - 0.0000i -0.1537 + 0.0000i 0.1231 - 0.0000i -0.0253 - 0.0000i -0.0760 + 0.0000i 0.1229 - 0.0000i -0.0945 + 0.0000i
0.0195 - 0.0000i 0.2120 + 0.0000i -0.2932 + 0.0000i 0.1897 - 0.0000i 0.0223 + 0.0000i -0.2093 - 0.0000i 0.2614 - 0.0000i
-0.2129 + 0.0000i -0.0671 - 0.0000i 0.2730 - 0.0000i -0.2827 + 0.0000i 0.1073 - 0.0000i 0.1290 + 0.0000i -0.2735 + 0.0000i
0.3308 - 0.0000i -0.2355 + 0.0000i 0.0133 - 0.0000i 0.1713 - 0.0000i -0.2109 + 0.0000i 0.1053 - 0.0000i 0.0568 + 0.0000i
-0.1559 + 0.0000i 0.4634 - 0.0000i -0.4335 + 0.0000i 0.1634 - 0.0000i 0.1516 - 0.0000i -0.3292 + 0.0000i 0.2911 - 0.0000i
-0.4337 + 0.0000i -0.3132 - 0.0000i 0.6677 - 0.0000i -0.5500 + 0.0000i 0.1209 - 0.0000i 0.3238 + 0.0000i -0.5228 + 0.0000i
1.3423 - 0.0000i -0.3865 + 0.0000i -0.3801 + 0.0000i 0.6736 - 0.0000i -0.4735 + 0.0000i 0.0076 - 0.0000i 0.3962 - 0.0000i
-2.2575 + 0.0000i 1.5163 - 0.0000i -0.5540 + 0.0000i -0.2438 + 0.0000i 0.6083 - 0.0000i -0.5060 + 0.0000i 0.1261 - 0.0000i
2.7887 + 0.0000i -2.6702 + 0.0000i 1.9117 - 0.0000i -0.8055 + 0.0000i -0.2138 + 0.0000i 0.7816 - 0.0000i -0.7707 + 0.0000i
-2.6702 - 0.0000i 3.3999 + 0.0000i -3.1820 + 0.0000i 2.2148 - 0.0000i -0.8264 + 0.0000i -0.4146 - 0.0000i 1.0433 - 0.0000i
1.9117 + 0.0000i -3.1820 - 0.0000i 3.8071 + 0.0000i -3.4759 + 0.0000i 2.3002 - 0.0000i -0.7699 + 0.0000i -0.4930 + 0.0000i
-0.8055 - 0.0000i 2.2148 + 0.0000i -3.4759 - 0.0000i 4.0649 + 0.0000i -3.7069 + 0.0000i 2.5253 - 0.0000i -0.9898 + 0.0000i
-0.2138 - 0.0000i -0.8264 - 0.0000i 2.3002 + 0.0000i -3.7069 - 0.0000i 4.4718 + 0.0000i -4.2307 + 0.0000i 3.0269 - 0.0000i
0.7816 + 0.0000i -0.4146 + 0.0000i -0.7699 - 0.0000i 2.5253 + 0.0000i -4.2307 - 0.0000i 5.1648 + 0.0000i -4.8701 + 0.0000i
-0.7707 - 0.0000i 1.0433 + 0.0000i -0.4930 - 0.0000i -0.9898 - 0.0000i 3.0269 + 0.0000i -4.8701 - 0.0000i 5.7424 + 0.0000i
0.3309 + 0.0000i -0.9208 - 0.0000i 1.0440 + 0.0000i -0.3126 - 0.0000i -1.3101 - 0.0000i 3.4045 + 0.0000i -5.2305 - 0.0000i
0.2143 + 0.0000i 0.2788 + 0.0000i -0.8212 - 0.0000i 0.9568 + 0.0000i -0.2706 - 0.0000i -1.3383 - 0.0000i 3.5096 + 0.0000i
-0.5478 - 0.0000i 0.4313 - 0.0000i 0.1388 + 0.0000i -0.8630 - 0.0000i 1.1704 + 0.0000i -0.5148 + 0.0000i -1.2726 - 0.0000i
0.5175 + 0.0000i -0.7929 - 0.0000i 0.5151 + 0.0000i 0.2939 + 0.0000i -1.1933 - 0.0000i 1.4892 + 0.0000i -0.6047 - 0.0000i

```

Columns 22 through 25

```

0.0056 - 0.0001i 0.0054 - 0.0001i -0.0131 + 0.0002i 0.0132 - 0.0002i
-0.0138 + 0.0000i -0.0061 + 0.0000i 0.0224 - 0.0000i -0.0255 + 0.0000i
-0.0018 - 0.0000i -0.0135 + 0.0000i 0.0204 + 0.0000i -0.0154 - 0.0000i
0.0452 - 0.0000i 0.0317 + 0.0000i -0.0889 - 0.0000i 0.0933 - 0.0000i
-0.0877 + 0.0000i -0.0176 - 0.0000i 0.1119 + 0.0000i -0.1385 + 0.0000i
0.0781 - 0.0000i -0.0298 + 0.0000i -0.0377 - 0.0000i 0.0813 - 0.0000i
0.0143 + 0.0000i 0.0674 - 0.0000i -0.1040 + 0.0000i 0.0781 + 0.0000i
-0.1543 + 0.0000i -0.0413 - 0.0000i 0.2057 + 0.0000i -0.2426 + 0.0000i
0.2396 - 0.0000i -0.0552 + 0.0000i -0.1600 - 0.0000i 0.2718 - 0.0000i
-0.1636 + 0.0000i 0.1519 - 0.0000i -0.0402 + 0.0000i -0.0910 + 0.0000i
-0.0888 + 0.0000i -0.1419 + 0.0000i 0.2657 - 0.0000i -0.2231 + 0.0000i
0.3860 - 0.0000i -0.0260 + 0.0000i -0.3252 - 0.0000i 0.4588 - 0.0000i
-0.4984 + 0.0000i 0.2705 - 0.0000i 0.1138 + 0.0000i -0.4017 + 0.0000i
0.2471 - 0.0000i -0.3951 + 0.0000i 0.2705 - 0.0000i 0.0064 + 0.0000i
0.3309 - 0.0000i 0.2143 - 0.0000i -0.5478 + 0.0000i 0.5175 - 0.0000i
-0.5208 + 0.0000i 0.2788 - 0.0000i 0.4313 + 0.0000i -0.7929 + 0.0000i
1.0440 - 0.0000i -0.8212 + 0.0000i 0.1388 - 0.0000i 0.5151 - 0.0000i
-0.3126 + 0.0000i 0.9568 - 0.0000i -0.8630 + 0.0000i 0.2939 - 0.0000i
-1.3101 + 0.0000i -0.2706 + 0.0000i 1.1704 - 0.0000i -1.1933 + 0.0000i
3.4045 - 0.0000i -1.3383 + 0.0000i -0.5148 - 0.0000i 1.4892 - 0.0000i
-5.2305 + 0.0000i 3.5096 - 0.0000i -1.2726 + 0.0000i -0.6047 + 0.0000i
6.0558 + 0.0000i -5.5116 + 0.0000i 3.7858 - 0.0000i -1.5446 + 0.0000i
-5.5116 - 0.0000i 6.5497 + 0.0000i -6.1465 + 0.0000i 4.3936 - 0.0000i
3.7858 + 0.0000i -6.1465 - 0.0000i 7.3846 + 0.0000i -6.9136 + 0.0000i
-1.5446 - 0.0000i 4.3936 + 0.0000i -6.9136 - 0.0000i 8.0725 + 0.0000i

```

$$\{G_i\}^T = 1.0e+03 * \{0.5886 - 0.0000i \quad -0.9675 + 0.0000i \quad 0.8356 - 0.0000i \quad -0.7224 + 0.0000i \quad 0.7364 - 0.0000i \quad -0.8821 + 0.0000i \quad 1.0805 + 0.0000i \quad -1.2188 - 0.0000i \quad 1.2172 - 0.0000i \quad -1.0769 + 0.0000i \quad 0.8799 - 0.0000i \quad -0.7415 + 0.0000i \quad 0.7425 - 0.0000i \quad -0.8825 + 0.0000i \quad 1.0796 + 0.0000i \quad -1.2187 - 0.0000i \quad 1.2182 - 0.0000i \quad -1.0787 + 0.0000i \quad 0.8817 - 0.0000i \quad -0.7427 + 0.0000i \quad 0.7431 - 0.0000i \quad -0.8825 + 0.0000i \quad 1.0795 + 0.0000i \quad -1.2186 - 0.0000i \quad 0.0000 + 0.0000i\}.$$

$$\{A_i\}^T = 1.0e+09 * \{0.0002 - 0.0000i \quad 0.0000 - 0.0000i \quad 0.0001 - 0.0000i \quad 0.0002 - 0.0000i \quad 0.0004 - 0.0001i \quad 0.0012 - 0.0003i \quad 0.0032 - 0.0008i \quad 0.0086 - 0.0022i \quad 0.0217 - 0.0055i \quad 0.0512 - 0.0127i \quad 0.1118 - 0.0271i \quad 0.2231 - 0.0527i \quad 0.4027 - 0.0925i \quad 0.6519 - 0.1455i \quad 0.9379 - 0.2032i \quad 1.1879 - 0.2495i \quad 1.3104 - 0.2667i \quad 1.2436 - 0.2450i \quad 1.0001 - 0.1906i \quad 0.6685 - 0.1231i \quad 0.3617 - 0.0642i \quad 0.1524 - 0.0261i \quad 0.0470 - 0.0077i \quad 0.0095 - 0.0015i \quad 0.0009 - 0.0001i\}.$$