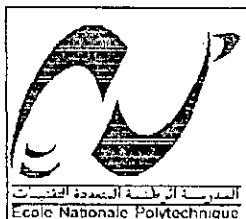


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

Spécialité : Automatique

Mémoire du projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme
d'Ingénieur d'état en Automatique

Sujet :

*Commande adaptative floue basée sur le
régulateur à structure parallèle distribuée*

Thème proposé et encadré par :

Mr. Chekireb, **H.**

Présenté par :

M^{elle} BENAYACHE ZAHRA.
M^{elle} BEDJAOUI NADIA.

Soutenu le 25 Juin 2002

Devant le jury composé de :

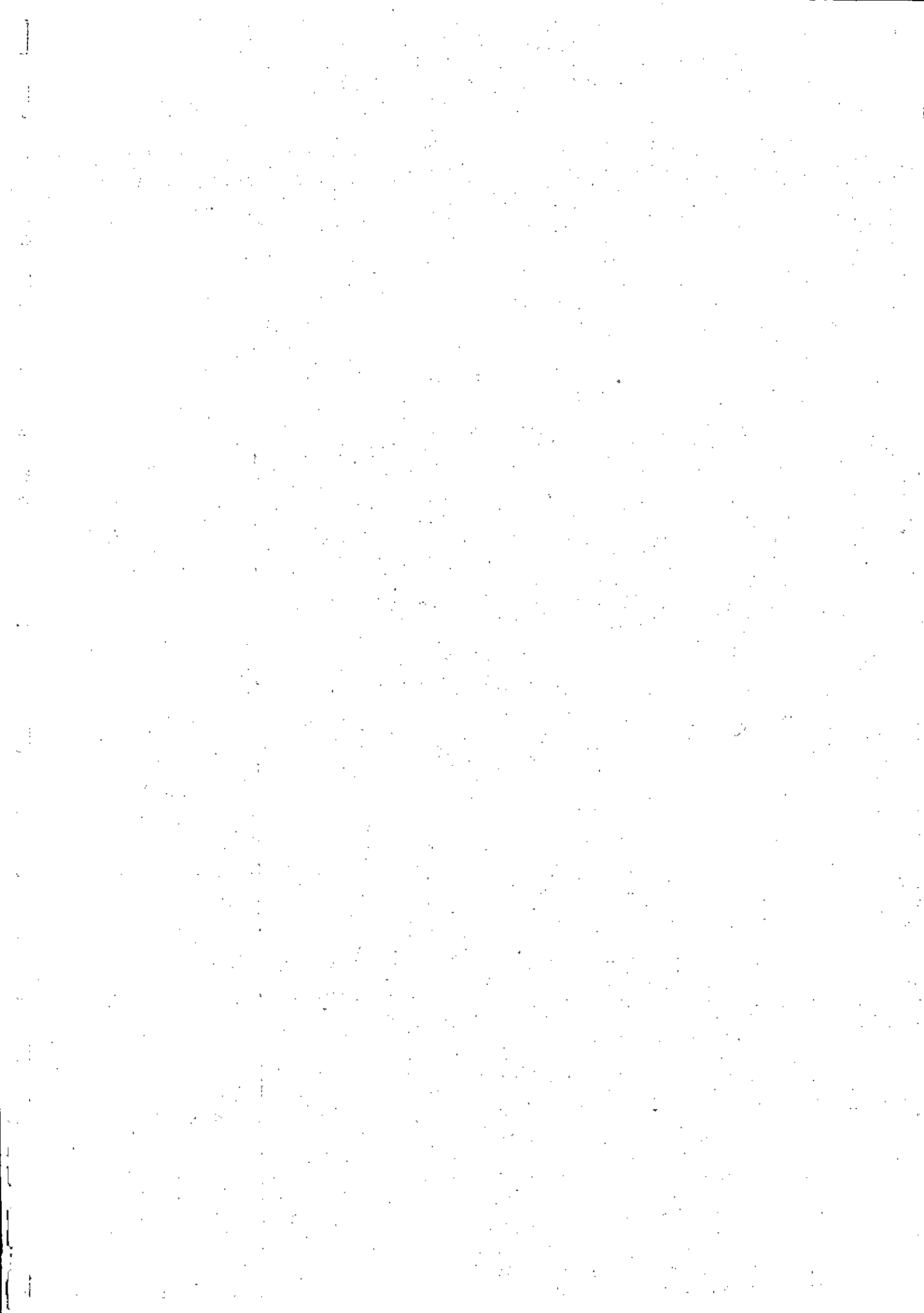
Mr. Tadjine

Président

Mr. Illoul

Examinateur

PROMOTION 2002



Remerciments

Nous voudrions d'abord remercier notre promoteur Monsieur CHEKIREB de nous avoir proposé ce sujet et d'avoir mis à notre disposition tous les outils nécessaires à la réalisation de ce travail.

Nous voudrions également exprimer notre gratitude à Monsieur TADJINE, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury, ainsi qu'à Monsieur ILLOUL pour avoir accepté d'être membres du jury.

Nous tenons aussi à remercier tous ceux qui nous ont aidé tout au long de ce travail.

ملخص

هذا المشروع يتناول موضوع التحكم غير الواضح التلاؤمي باستعمال منظومة تحكم موزعة متوازية. هذه المنظومة تتركز على المثال غير الواضح Takagi و Sugeno، لهذا اهتمنا بدراسة تأثير عدد قواعد المثال على مؤهلات المنظومة التحكمية. كما تبينا طريقتين لتحديد هذا التحكم، الأولى تستعمل تقنية وضع الأقطاب و الثانية تتركز على حل مجموعة من المتراجحات مولدات LMI. ومن أجل تطبيق هذه المنظومة التحكمية على الأجهزة المجهولة أو ذات القيم المتغيرة في الزمن، أخذنا بعين الاعتبار الطريقة المباشرة و الطريقة غير المباشرة لموافقة المنظم مع تغيرات القيم. و لقد حددنا لكل واحدة منها مثال مرجعي.

النتائج المتحصل عليها جد مرضية و تبين أن ازدياد عدد القواعد يحسن من مؤهلات الجهاز. إضافة إلى ذلك، فإنه توضح أن الطريقتين تقدمان نفس النتائج لذلك يستحسن استعمال الطريقة الثانية التي تمكن من تحديد منظومة التحكم بطريقة مباشرة مع ضمان استقرار الجهاز.

Abstract

This scheme deals with PDC Adaptive fuzzy control. The PDC controller is based on T-S fuzzy model. It is why we have been interested in rules number influence on the performance of the PDC controller. We also used two methods to determine the control gains. First, we adopted the poles placement method. Then, second, we used the LMI techniques based on the resolution of Linear matrix inequalities. In order to apply this controller to uncertain systems or systems with time variant parameters, we considered the direct and indirect adaptive law both used with reference model.

We have obtained good results and we can improve them by increasing the fuzzy rules number. As the two methods give the same performances, we choose the one which is based on LMI Problems because it can give the control gains systematically and guarantees the stability.

Résumé

Ce projet porte sur la mise en oeuvre d'une commande adaptative floue basée sur le régulateur à structure parallèle distribuée PDC. Ce régulateur étant basé sur le modèle flou de Takagi et Sugeno, nous nous sommes alors intéressés à l'influence du nombre de règles de ce modèle sur les performances du régulateur. Aussi, nous avons adopté deux méthodes pour déterminer les gains de commande. La première méthode repose sur le placement de pôles tandis que la seconde est basée sur la résolution d'un système d'inégalités linéaires matricielles LMI. Afin d'appliquer ce type de commande aux systèmes incertains ou à paramètres variant dans le temps, nous avons considéré les deux lois d'adaptation, la loi directe et la loi indirecte, toutes deux associées à un modèle de référence déterminant les performances désirées.

Les résultats obtenus tout au long de ce travail s'avèrent très satisfaisants et montrent que les performances s'améliorent en augmentant le nombre de règles. Ils montrent également que les deux méthodes utilisées offrent les mêmes performances. C'est pourquoi, il est préférable d'utiliser la méthode basée sur les LMI qui est une méthode systématique permettant de déterminer directement les gains de la commande tout en garantissant la stabilité du système bouclé.

Mots Clés :

- Commande floue.
- Modèle flou de Takagi et Sugeno.
- Régulateur Parallèle Distribué.
- Inégalités linéaires matricielles LMI.
- Commande Adaptative
- Modèle de référence.



Sommaire

Introduction générale

Chapitre I: Conception du régulateur parallèle distribué flou

1-1-Introduction.....	1
1-2-Système flou.....	1
1-3-Modèle flou linéaire de type Takagi-Sugeno.....	2
1-3-2-Existence du modèle flou linéaire de TS.....	3
1-3-2-1-Définition d'un système linéaire affine en la commande.....	3
1-3-2-2-Système linéaire affine en la commande à une seule variable.....	4
1-3-2-3-Système linéaire affine en la commande à plusieurs variables.....	4
1-3-3-Obtention du modèle flou linéaire de T-S.....	5
1-4-Stabilité des modèles flous linéaires de type T-S.....	6
1-5-Régulateur parallèle distribué flou.....	7
1-5-1-Concept PDC.....	7
1-5-2-Obtention du régulateur PDC flou.....	8
1-5-3-Structure du régulateur PDC flou.....	9
1-6-Condition de stabilité des systèmes bouclés.....	10
1-7-Introduction aux outils LMI.....	11
1-7-1-Définition d'une LMI.....	11
1-7-2-LMI Problème.....	12
1-8-Application.....	12
1-8-1-Système à cinq règles.....	13
1-8-2-Système à cinq règles.....	14
1-9-Conclusion.....	39

Chapitre II : Conception d'un observateur flou par PDC.

II-1-Introduction.....	40
II-2-Système flou augmenté.....	40
II-3-Observateur flou.....	41
II-3-1-Obtention de l'observateur flou.....	41
II-3-2-Structure de l'observateur flou.....	41
II-3-2-1-Structure d'un observateur flou complet.....	41
II-3-2-2-Structure d'un observateur flou réduit.....	42
II-4-Structure du régulateur flou basé sur l'état estimé.....	43

<i>II-5-Condition de stabilité des systèmes flous augmentés.....</i>	
<i>II-5-1-Cas de l'observateur complet</i>	44
<i>II-5-2-Cas de l'observateur réduit</i>	45
<i>II-6-Application</i>	46
<i>II-6-1-Système à trois règles</i>	47
<i>II-6-2-Système à cinq règles.....</i>	49
<i>II-7-Conclusion.....</i>	50

Chapitre III : *Commande floue adaptative indirecte à modèle de référence.*

<i>III-1-Introduction.....</i>	52
<i>III-2-Commande floue linéarisante par retour d'état du modèle T-S.....</i>	52
<i>III-3-Commande floue adaptative indirecte à modèle de référence</i>	54
<i>III-3-1-Loi de commande</i>	55
<i>III-3-2-Loi d'adaptation</i>	56
<i>III-3-3-Analyse.....</i>	59
<i>III-3-4-Implémentation.....</i>	60
<i>III-4-Simulation numérique.....</i>	61
<i>III-5-Conclusion.....</i>	66

Chapitre IV : *Commande floue adaptative directe à modèle de référence.*

<i>IV-1-Introduction.....</i>	67
<i>IV-2-Contrôleur flou basé sur le modèle T-S.....</i>	67
<i>IV-3-Commande floue adaptative directe à modèle de référence.....</i>	68
<i>IV-3-1-Loi de commande</i>	69
<i>IV-3-2-Loi d'adaptation</i>	70
<i>IV-3-3-Analyse.....</i>	72
<i>IV-3-4-Implémentation.....</i>	74
<i>IV-4-Conclusion.....</i>	75

Conclusion générale

Annexe A

Références bibliographiques

Introduction générale

Les méthodes classiques de commande ont prouvé leur efficacité dans de nombreux problèmes de régulation industrielle. Elles ne permettent pas de répondre aux exigences d'un certain nombre de systèmes fortement non linéaires. Des méthodes de commande avancée (Régulateur adaptatif, commande prédictive, commande robuste,...), ont été alors développées pour palier à ce problème. C'est dans ce même créneau que les méthodes de modélisation et de commande floues se positionnent.

Parmi les méthodes de modélisation floue, nous citons la méthode de Takagi et Sugeno où le modèle est un ensemble de règles floues dont la conclusion utilise un formalisme d'état. Afin de stabiliser ce type de modèles, une loi de commande appelée compensation parallèle distribuée a été proposée. Elle est basée sur des retours d'état linéaires dont les gains sont prédéterminés par un placement de pôles. L'étude de la stabilité du système bouclé se fait par une approche de la théorie de Lyapounov qui consiste à trouver une matrice symétrique définie positive qui satisfait un nombre d'inégalités simultanées de Lyapounov. Elle requiert, par conséquent, des outils informatiques, mathématiques et des techniques récentes notamment la technique LMI (Linear Matrix inequality) basée sur l'optimisation convexe. Celle-ci est disponible dans la bibliothèque du logiciel *SCILAB*.

Même si beaucoup de résultats successifs ont vu le jour, la recherche d'une méthode systématique qui permette de trouver les gains de commande et de garantir une stabilité globale et asymptotique reste la plus souhaitable. C'est pourquoi, John et al ont proposé de déterminer les gains de commande numériquement en résolvant un système d'inégalités matricielles.

Dans notre travail, il s'agit de présenter le concept du régulateur parallèle distribué adaptatif flou. Pour ce faire, nous avons subdivisé notre étude en deux grandes parties distinctes, chaque partie étant elle-même répartie en deux chapitres. Dans la première partie, nous traitons le régulateur PDC flou non

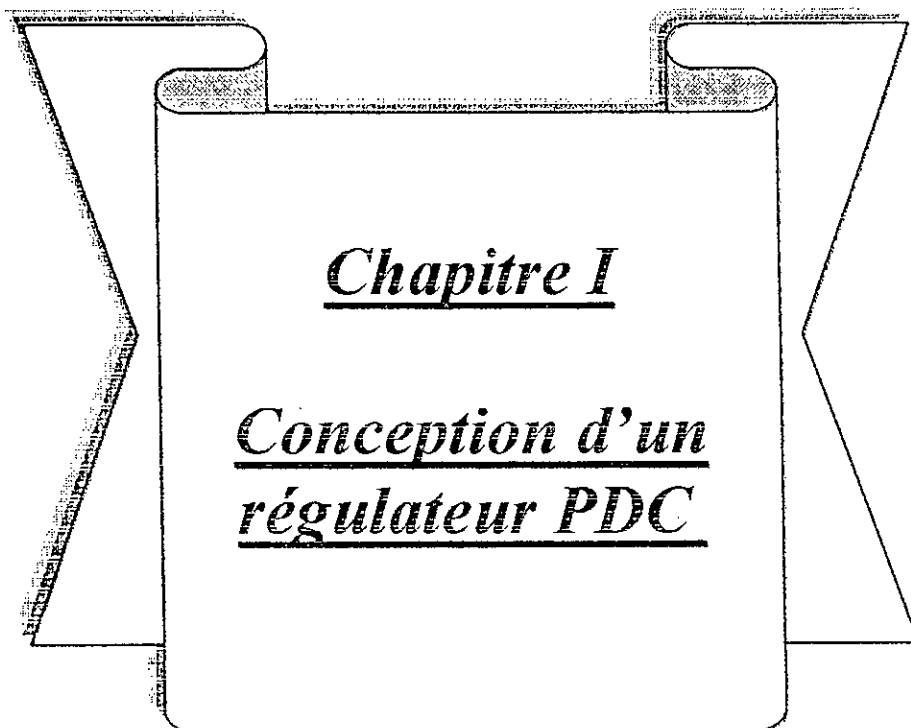
adaptatif. Et afin d'analyser la stabilité des systèmes flous bouclés comprenant ce régulateur, nous considérons deux méthodes :

- Détermination des gains de commande par un placement de pôles puis vérifier la stabilité.
- Détermination des gains de commande et la matrice de stabilité en résolvant un système d'inégalités linéaires matricielles.

Dans la deuxième partie, par contre, nous introduisons la notion d'adaptation où nous considérons en premier lieu, une adaptation sur les paramètres du modèle puis, en deuxième lieu, une adaptation au niveau des paramètres de la commande. En vue de tester les performances apportées par ce type de régulateur, nous considérons à chaque fois un modèle de référence donné.

Ce mémoire est donc constitué de quatre chapitres :

- Le premier chapitre présente d'abord la structure du modèle flou T-S puis celle du régulateur PDC flou. Il évoque ensuite la notion de stabilité de systèmes flous bouclés suivie juste après d'une introduction à la technique LMI. L'application étant sur un système de pendule inversé et suivant deux méthodes, une comparaison est donnée en fin de chapitre.
- Le second chapitre traite le cas de systèmes dont l'état est totalement ou partiellement connu. La notion d'observateur complet et d'observateur réduit est introduite. Il comprend également la structure de chaque type d'observateur avec toutes les modifications apportées à l'étude précédente en vue de son développement.
- Le troisième chapitre donne une méthode indirecte d'adapter le régulateur flou suivant la variation dans le temps des paramètres du système et des performances désirées.
- Le quatrième chapitre présente par contre, les étapes à suivre pour adapter directement les paramètres du régulateur.



Chapitre I

**Conception d'un
régulateur PDC**

1.1.Introduction :

Au début des années 90, la littérature a connu une importante propagation dans le domaine du contrôle flou. En effet, *Tanaka et Sugeno* ont proposé un théorème sur l'analyse de la stabilité du modèle flou de *Takagi et Sugeno*. De leur côté, *Wang et al* ont présenté le concept PDC (*Parallel Distributed Compensation*) comme technique de commande. Ils ont également modifié le théorème de *Tanaka* pour pouvoir inclure la commande. Ce théorème stipule qu'il faut trouver une matrice symétrique définie positive satisfaisant des inégalités simultanées de *Lyapounov*. Ce problème est en fait, un problème standard d'LMI qui peut être résolu numériquement.

John et al ont, par la suite, suggéré une méthode systématique permettant de concevoir le régulateur PDC en se basant sur la stabilité par LMI (*Linear Matrix inequality*).

Dans ce chapitre, nous présentons la structure du modèle flou de T-S et celle du régulateur parallèle distribué. Nous donnons aussi les théorèmes de stabilité évoqués précédemment et comment résoudre le problème de stabilité en utilisant les LMI.

Pour connaître les performances de ce type de commande, nous choisissons le système pendule inversé comme système d'application. Nous lui appliquons dans un premier temps, une commande dont les gains sont déterminés par un placement de pôles. Puis dans un deuxième temps, nous le soumettons à la méthode systématique.

1.2.Système flou:

Le système flou est composé d'un modèle flou de T-S et d'un régulateur flou.

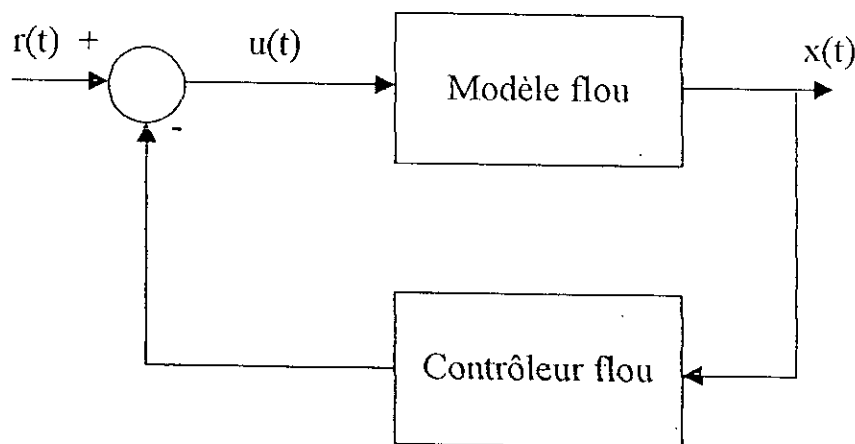


Fig1.1 : Représentation du système flou

1.3. Modèle flou linéaire de type Takagi-Sugeno :

Parmi les différents thèmes de modélisation floue, celui du modèle flou de Takagi-Sugeno est le plus connu. Il existe deux sortes de modèles flous de T-S, les modèles flous affines et les modèles flous linéaires. Dans les modèles affines, la partie conséquence de chaque règle est un terme constant, alors que dans les modèles linéaires, elle est une fonction linéaire [1].

Dans notre étude, nous ne nous intéresserons qu'au type linéaire vu qu'il est le plus utilisé pour représenter les systèmes dynamiques. De plus, son intérêt réside non seulement dans le fait que la défuzzification soit partie intégrante de l'inférence mais également dans la possibilité d'analyser la stabilité et les performances du système par une simple approche de la fonction de Lyapounov.

1.3.1. Structure du modèle flou linéaire de T-S :

Le modèle flou linéaire de Takagi-Sugeno est localement décrit par r règles floues de la forme [2] :

Règle i :

$$\begin{aligned} & \text{Si } z_1 \text{ est } M_{i1} \text{ et } z_2 \text{ est } M_{i2} \text{ et ...et } z_g \text{ est } M_{ig} \\ & \text{Alors : } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i=1, r. \end{aligned} \quad (I)$$

Avec :

z_1, \dots, z_g : variables mesurables.

$x^T(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]$: vecteur d'état.

$u^T(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]$: vecteur de commande.

$y^T(t) = [y_1(t) \dots y_p(t)]$: vecteur de sortie.

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

$C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$,

M_{ij} : ensembles flous,

r : nombre de règles.

Les variables z_i sont en général, des fonctions d'états, des perturbations externes ou des instants de temps. Dans le cas où elles représentent des perturbations externes mesurables ne dépendant pas de l'état, le système (I) est dit linéaire variant dans le temps. Par contre, si elles sont fonctions quelconques de l'état ou de la sortie, le système (I) est dit non linéaire. Il se peut aussi que ces variables z_i soient une combinaison des deux autres cas [3].

Le modèle global est obtenu par combinaison des différents sous-modèles. Etant donné la paire $(x(t), u(t))$, la sortie finale du modèle flou est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i [A_i x(t) + B_i u(t)]}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (1.1)$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (1.2)$$

où μ_i est le degré d'activation de la règle i . Il est calculé comme suit :

$$\mu_i = \prod_{j=1}^n M_{ij}(z_j(t)) ;$$

$M_{ij}(z_j(t))$ est le degré d'appartenance de z_j à l'ensemble flou M_{ij} . Il convient que :

$$\mu_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^r \mu_i \geq 0.$$

Posons $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i}$, on a alors $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$.

Pour les systèmes libres, la relation (1.1) devient :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i A_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (1.3)$$

1.3.2. Existence du modèle flou linéaire de T-S :

Dans cette partie, nous prouvons que pour chaque système non linéaire affine en la commande, il existe un modèle flou linéaire de T-S. Pour cela, nous considérons d'abord un système à une seule variable d'état x puis nous étendons le problème à un système à plusieurs variables d'état. Cela nécessiterait la connaissance de quelques théorèmes, c'est pourquoi, nous les introduisons.

1.3.2.1. Définition d'un système non linéaire affine en la commande :

Un système non linéaire affine en la commande est un système de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

I.3.2.2. Système non linéaire affine en la commande à une seule variable :

Supposons que le point 0 est le point d'équilibre. Les intervalles sur lesquels la variable sera découpée contiendront tous le point d'équilibre.

Théorème(I-1) :[4]

Pour $x \in]-a, b]$, $a > 0, b > 0$, soit $f(x) : R \rightarrow R$ une fonction bornée, alors il existe toujours deux fonctions $h_1(x), R \rightarrow R$ et $h_2(x), R \rightarrow R$ et deux scalaires α et β vérifiant les propriétés suivantes $h_1(x) + h_2(x) = 1$, $h_1(x) \geq 0$, $h_2(x) \geq 0$ et

$$f(x) = \alpha.h_1(x) + \beta.h_2(x)$$

Preuve :

Elle est évidente en considérant que $f_{\min} \leq f(x) \leq f_{\max}$ sur l'intervalle considéré, on peut toujours écrire :

$$f(x) = \alpha.h_1(x) + \beta.h_2(x)$$

$$\text{avec } h_1(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} \text{ et } h_2(x) = \frac{f_{\max} - f(x)}{f_{\max} - f_{\min}}, \alpha = f_{\max}, \beta = f_{\min}$$

On aboutit alors au modèle T-S :

$$\text{Si } x \text{ est } h_1(x) \text{ alors } \dot{x}(t) = \alpha$$

$$\text{Si } x \text{ est } h_2(x) \text{ alors } \dot{x}(t) = \beta$$

I.3.2.3. Système non linéaire affine en la commande à plusieurs variables :

Nous supposons que le vecteur $[0, 0, \dots, 0]^T$ est le point d'équilibre et pour simplifier, nous considérons le système non linéaire libre.

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Il peut être réécrit comme étant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

Pour la $i^{\text{ème}}$ variable d'état, on peut écrire:

$\dot{x}_i = f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_i^j(x(t)) \cdot x_j(t)$ et on suppose que chaque fonction $f_i^j(x(t))$ est bornée, le système non linéaire devient:

$$\dot{x} = f(x) = \left[\sum_{j=1}^n f_1^j(x(t)) \cdot x_j(t), \dots, \sum_{j=1}^n f_n^j(x(t)) \cdot x_j(t) \right]^T$$

On aboutit alors au théorème suivant :

Théorème (I-2):[4]

Considérons la famille des modèles non linéaires en régime libre avec n variables d'état décrits par $\dot{x} = f(x) = \left[\sum_{j=1}^n f_1^j(x(t)) \cdot x_j(t), \dots, \sum_{j=1}^n f_n^j(x(t)) \cdot x_j(t) \right]^T$,

$f_i^j(x(t))$, $i=1, \dots, r$ étant des fonctions bornées sur un domaine D des variables d'état, $(x(t) \in D \subset R^n)$ et le point d'équilibre $[0, 0, \dots, 0]^T \in D$. Il est toujours possible d'obtenir un modèle flou de T-S sur le domaine D représentant exactement le modèle non linéaire.

Preuve :

Considérons le vecteur de prémisses $z(t) = [z_1^1(t), \dots, z_i^j(t), \dots, z_n^n(t)]^T$ avec les variables prémisses $z_i^j = f_i^j(x(t))$,

$f_i^j(x(t))$ étant bornées, on peut toujours écrire :

$$z_i^j = h_{11}^j(z_i^j) \cdot z_{i_{\max}}^j + h_{12}^j(z_i^j) \cdot z_{i_{\min}}^j = \frac{z_i^j - z_{i_{\min}}^j}{z_{i_{\max}}^j - z_{i_{\min}}^j} \cdot z_{i_{\max}}^j + \frac{z_{i_{\max}}^j - z_i^j}{z_{i_{\max}}^j - z_{i_{\min}}^j} \cdot z_{i_{\min}}^j$$

I.3.3. Obtention du modèle flou linéaire de T-S :

L'obtention de modèles flous sous cette forme peut être réalisée par différentes approches [4] :

- ◆ Directement à partir du modèle de connaissance
- ◆ Par identification
- ◆ Par linéarisation autour de plusieurs points de fonctionnement en utilisant le formalisme de *Taylor*.

1.4. Stabilité des modèles flous linéaires de type T-S :

Même s'il existe d'autres méthodes d'étude de la stabilité des systèmes flous, la théorie de *Lyapunov* reste la plus utilisée en Automatique. Ainsi, pour étudier la stabilité des modèles flous T-S, *Tanaka et Sugeno* ont suggéré un critère s'appuyant sur les fonctions de *Lyapunov* que voici :

Théorème (I-3) : [5]

Le point d'équilibre du modèle flou décrit par (1.1) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice P définie positive qui vérifie :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \text{ pour } i=1, \dots, r. \quad (1.4)$$

Peuve:

Considérons la fonction scalaire $V(x)$ de *Lyapunov*. $V(x)$ vérifie alors:

- $V(0)=0$.
- $V(x) > 0, \forall x$.
- $V(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$.
- $\dot{V}(x) < 0 \forall x \neq 0$

Si P est définie positive alors on peut écrire:

$$V(x) = x^T P x$$

Calculons $\dot{V}(x)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i x \right)^T P x + x^T P \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i x \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i x^T A_i^T P x + \sum_{i=1}^r \lambda_i x^T P A_i x \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i x^T (A_i^T P + P A_i) x \end{aligned}$$

$$\text{Si } A_i^T P + P A_i < 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$$

Lorsque $r=1$, ce théorème est réduit au théorème de *Lyapunov* sur la stabilité des systèmes linéaires. Ce théorème donne évidemment une condition suffisante mais pas nécessaire. Il est à noter également que la relation (1.4) dépend uniquement des matrices A_i et ne dépend en aucun cas des degrés d'activation h_i [6].

On peut croire qu'un système est asymptotiquement stable si tous ses sous systèmes sont stables. Cependant, ce n'est pas le cas en général [5]. D'où la nécessité de chercher la matrice P .

La détermination de la matrice P , vérifiant la condition (1.4), a constitué pendant longtemps un vrai problème. La majorité du temps, une procédure basée sur essai-erreur est utilisée [7]. Mais avec le développement des algorithmes convexes, le problème est transformé en un problème d'inégalités linéaires matricielles et est résolu numériquement de façon efficace [6].

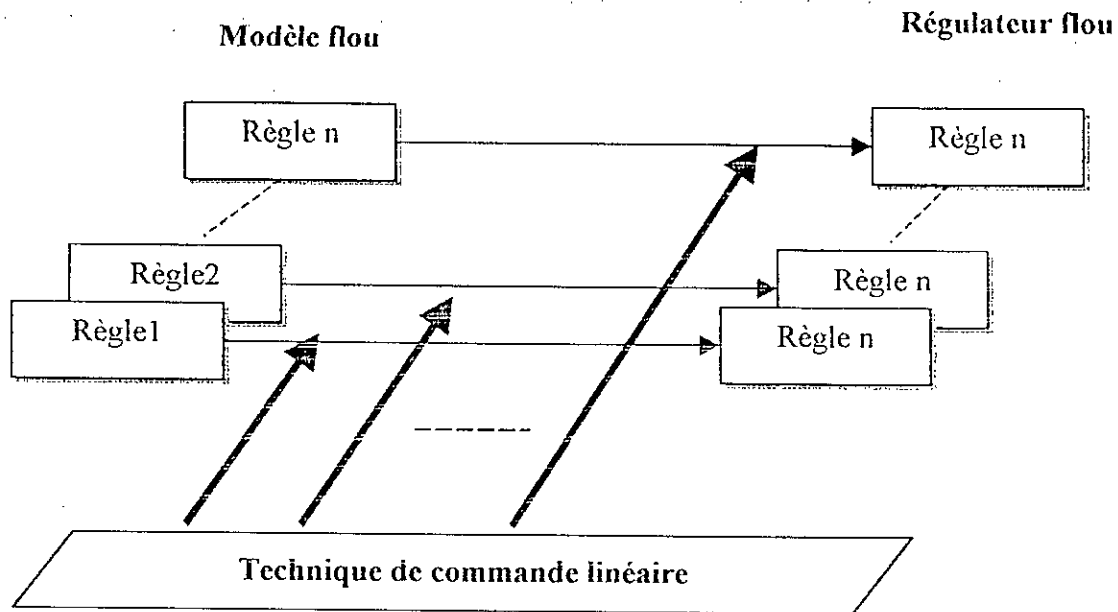
1.5. Régulateur parallèle distribué flou :

L'une des premières idées de stabilisation des modèles flous a consisté à utiliser des retours d'état linéaires. Ces derniers ont vite été supplantés par une loi de commande qui permette de prendre en compte les non linéarités des modèles flous. Elle est connue sous le nom de PDC (Parallel Distributed Compensation) [4].

La conception du contrôleur PDC est simple et naturelle contrairement aux autres techniques non linéaires qui nécessitent des connaissances bien spécifiques [6].

1.5.1. Concept PDC :

Wang et al ont proposé le concept PDC comme une façon de concevoir des régulateurs flous à partir de modèles flous disponibles. Le contrôleur PDC utilise une loi de commande par retour d'état pour chaque règle du modèle. Aussi le régulateur global résultant, qui est non linéaire en général, est une combinaison floue des régulateurs linéaires.

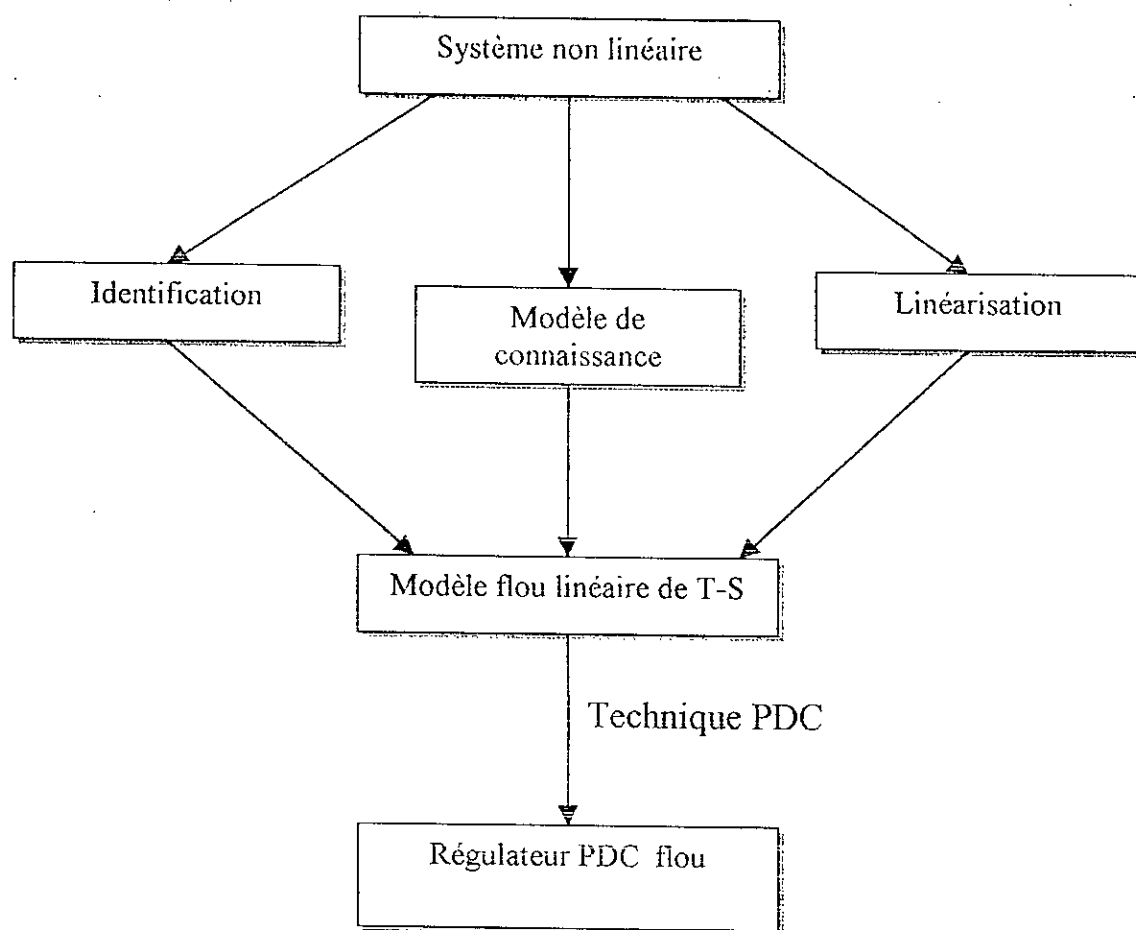


Fig(I.2) : Compensation parallèlement distribuée [5].

1.5.2. Obtention du régulateur PDC flou :

Le concept du PDC flou est décrit par la procédure suivante :

- ◆ Représentation du système à commander par un modèle T-S,
- ◆ Chaque règle du régulateur flou doit comprendre une partie prémisse identique à celle de la règle du modèle flou associé,
- ◆ La partie conclusion de chaque sous- modèle est constituée d'un gain de commande par retour d'état.



Fig(1.3) : Conception du régulateur PDC flou [8].

1.5.3. Structure du Régulateur PDC flou :

Le régulateur PDC flou est représenté par l'ensemble des règles:

Règle i :

$$\begin{aligned} & \text{Si } z_1 \text{ est } M_{i_1} \text{ et } z_2 \text{ est } M_{i_2} \text{ et } \dots \text{ et } z_r \text{ est } M_{i_r} \\ & \text{Alors } u(t) = -K_i x(t), \text{ pour } i=1, \dots, r. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Où z_i sont des variables mesurables, M_{ij} des ensembles flous, $u(t)$ le vecteur commande et $x(t)$ le vecteur d'état.

Les paires (A_i, B_i) sont supposées commandables. Les coefficients K_i sont des matrices gains prédéterminées par une loi de commande appropriée et $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

La sortie finale du régulateur flou est donnée par la relation :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (1.5)$$

Le comportement de la boucle fermée comprenant le modèle flou de T-S et le régulateur flou de T-S peut être obtenu en remplaçant l'équation (1.5) dans l'équation (1.1) comme suit :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (A_i - B_i K_j) x(t)}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j} \quad (1.6)$$

I.6. Condition de stabilité des systèmes bouclés :

Wang et al ont modifié le théorème de *Tanaka* pour pouvoir inclure la commande et ont aboutit au théorème suivant :

Théorème (I-4): [8]

Le point d'équilibre du système flou décrit par (1.6) est dit globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice P symétrique et définie positive qui satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i) < 0, \quad i=1, \dots, r. \\ \text{et} \\ \left[\frac{(A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i)}{2} \right]^T P + P \left[\frac{(A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i)}{2} \right] < 0, \quad i \neq j \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Preuve :

$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) x$ peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 (A_i - B_i K_i) x + 2 \sum_{i \neq j}^r \lambda_i \lambda_j \frac{(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)}{2} x$$

Soit la fonction de Lyapunov V(x),

$$V(x) = x^T P x$$

Calculons $\dot{V}(x)$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^2 x^T (A_i - B_i K_i)^T + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j x^T \frac{(A_i - B_i K_i + A_j - B_j K_j)^T}{2} \right) P x + x^T P \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - B_i K_i) x + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \frac{(A_i - B_i K_i + A_j - B_j K_j)}{2} x \right)$$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 x^T \left((A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i) \right) x + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j x^T \left(\frac{(A_i - B_i K_i + A_j - B_j K_j)^T}{2} P + P \frac{(A_i - B_i K_i + A_j - B_j K_j)}{2} \right) x$$

Si $(A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i) < 0$ et

$$\frac{(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)^T}{2} P + P \frac{(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)}{2} < 0 \text{ alors } \dot{V}(x) < 0.$$

La condition (1.7) peut être utilisée uniquement pour vérifier la stabilité du système bouclé dont les gains K_i sont connus. Cela consisterait alors à chercher la matrice P qui vérifie l'LMI (1.7). Cependant, il est plus intéressant de traiter les gains K_i et la matrice P comme des matrices variables pour essayer de trouver une méthode systématique qui garantit la stabilité et détermine simultanément K_i et P . Cela revient à résoudre un système d'inégalités non linéaires matricielles NMI. Mais il n'existe pas pour l'instant de méthodes analytiques ou numériques pour traiter cette question. *John et al* ont alors convertit le problème en un problème LMI en utilisant un changement de variables. Il est important de préciser que le critère de stabilité (1.7) est un ensemble d'LMI si et seulement si les gains K_i sont déjà prédéterminés.

1.7. Introduction aux outils LMI :

Ces dernières années, certains problèmes d'optimisation numérique, connus sous le nom de problèmes LMI, ont reçu une grande attention. Ces problèmes peuvent être résolus en un temps polynomial et sont basés sur la méthode du point intérieur récemment développée. Des algorithmes numériques très efficaces existent pour résoudre ces problèmes.

A l'exception de quelques cas particuliers, les problèmes de commande ne possèdent pas de solutions analytiques. Il est donc intéressant d'exprimer ces problèmes sous forme d'LMI et de les résoudre analytiquement à l'aide de du logiciel Scilab.

Une LMI est non seulement un outil analytique mais elle peut également être exploitée pour automatiser les processus de commande.

1.7.1. Définition d'une LMI :

Une LMI est une inégalité matricielle de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0. \quad (1.8)$$

Où $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ est la variable recherchée et les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$, $i=0, n$ sont données. Le symbole (>0) signifie que $F(x)$ est définie positive. Cette LMI est une contrainte convexe sur x , c'est à dire que l'ensemble $\{x / F(x) > 0\}$ est convexe. Multiples LMI peuvent être exprimées en une seule LMI donnée par : $\text{diag}(F^{(0)}, \dots, F^{(p)}) > 0$ [4].

1.7.2. Problème d'LMI:

Etant donnée une LMI $F(x) > 0$, le problème est de trouver x qui vérifie :

$$F(x) > 0$$

Très souvent dans les LMI, la variable x est une matrice. C'est le cas de la condition de stabilité (1.4) qui est un vrai problème LMI et où la variable est la matrice P .

Si la mise sous forme d'LMI est directe avec la condition (1.4), ce n'est plus vrai avec la condition (1.7) dont les gains K_i sont considérés inconnus. Il est donc utile d'exploiter le *lemme de Schur* pour revenir à la forme LMI.

Lemme de Schur :

Le système (1.6) avec des gains K_i inconnus est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice $Q=P^{-1}$ symétrique définie positive qui satisfait :

$$\begin{cases} QA_i^T + A_i Q + V_i^T B_i^T + B_i V_i < 0, \quad i=1, r. \\ QA_i^T + A_i Q + QA_j^T + A_j Q + V_j^T B_i^T + B_i V_j + V_i^T B_j^T + B_j V_i < 0, \quad 1 < j \leq r. \end{cases}$$

Avec $V_i = K_i Q$.

Les matrices Q et V_i sont les nouvelles variables des LMI.

L'approche LMI a joué un rôle très important dans la conception du PDC notamment dans la possibilité de considérer les gains K_i inconnus. Elle est considérée comme la base d'invention de méthodes systématiques pour le contrôleur PDC.

1.8. Application :

Afin d'illustrer les performances de ce type de régulateur, nous considérons comme système d'application, le système pendule inversé. Nous adoptons deux méthodes pour déterminer les gains de commande.

- Dans la première méthode, nous utilisons un placement de pôles.
- Dans la seconde méthode, nous nous basons sur la résolution d'un système d'inégalités linéaires matricielles.

Aussi, pour élargir notre étude, nous testons l'influence du nombre de règles floues sur les performances du système.

1.8.1. Le pendule inversé :

Considérons un pendule inversé fixé sur un chariot mobile en translation sur un axe horizontal. Le pendule est libre en rotation. En Exerçant une force horizontale $F(t)$ sur le chariot, une translation de X mètres de celui-ci est obtenue ainsi qu'une rotation de θ degrés du pendule.

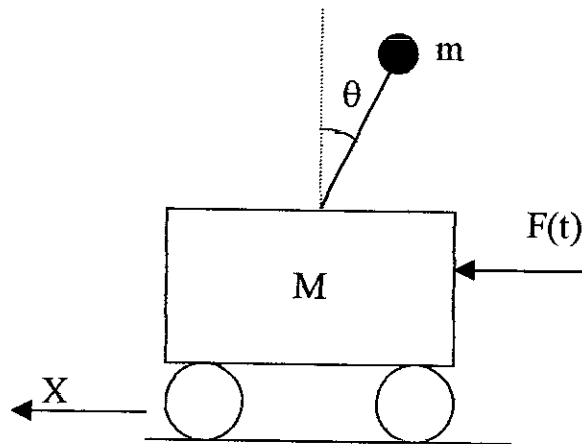


Fig1.4 : Représentation du pendule inversé

Le pendule inversé est un système instable en boucle ouverte, non linéaire et multivariable. La commande appliquée permet de stabiliser le système à partir de conditions initiales comprises dans l'intervalle $]-90 \ 90[$

Les équations régissant le système du pendule inversé sont obtenues en appliquant le formalisme de Lagrange. Sa représentation d'état est donnée par les équations (1.8):

◆ Représentation d'état : [2]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t)) / 2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))} \dots(1.8) \end{cases}$$

Où :

$x_1(t)$: est l'angle du pendule par rapport à la verticale ;

$x_2(t)$: est la vitesse angulaire du pendule ;

$u(t)$: La force appliquée sur le chariot ;

g : Constante de gravité ;

m : masse du pendule ;

M : masse du chariot ;

$2l$: Longueur du pendule ;

$$a = \frac{1}{m + M}$$

IL est à préciser que le système est incontrôlable lorsque $\theta = \pm 90^\circ$.

1.8.2. Modèle flou de type T-S du pendule inversé :

1.8.2.1. Cas d'un modèle à trois règles : [2]

Le modèle flou à trois règles de Takagi-Sugeno correspondant au pendule inversé est donné ci-après :

$$\text{Règle}_1 : \text{ Si } x_1 \text{ est au voisinage de } 0 \text{ alors } \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ y = C_1 x \end{cases}$$

$$\text{Règle}_2 : \text{ Si } x_1 \text{ est au voisinage de } +90^\circ \text{ alors } \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + B_2 u \\ y = C_2 x \end{cases}$$

$$\text{Règle}_3 : \text{ Si } x_1 \text{ est au voisinage de } -90^\circ \text{ alors } \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + B_2 u \\ y = C_2 x \end{cases}$$

Avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, C_1 = [1 \ 0].$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}, C_2 = [1 \ 0] \text{ et } \beta = \cos(88^\circ).$$

et $A_3 = A_2, B_3 = B_2$ et $C_3 = C_2$;

Nous avons deux règles dont la conséquence est identique. nous pouvons alors réécrire le modèle comme suit :

$$\text{Règle}_1 : \text{ Si } x_1 \text{ est au voisinage de } 0 \text{ alors } \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ y = C_1 x \end{cases}$$

$$\text{Règle}_2 : \text{ Si } x_1 \text{ est au voisinage de } \pm 90^\circ \text{ alors } \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + B_2 u \\ y = C_2 x \end{cases}$$

Fuzzification:

A la variable x_1 , sont associés trois ensembles flous comme illustrés sur la figure 1.5.

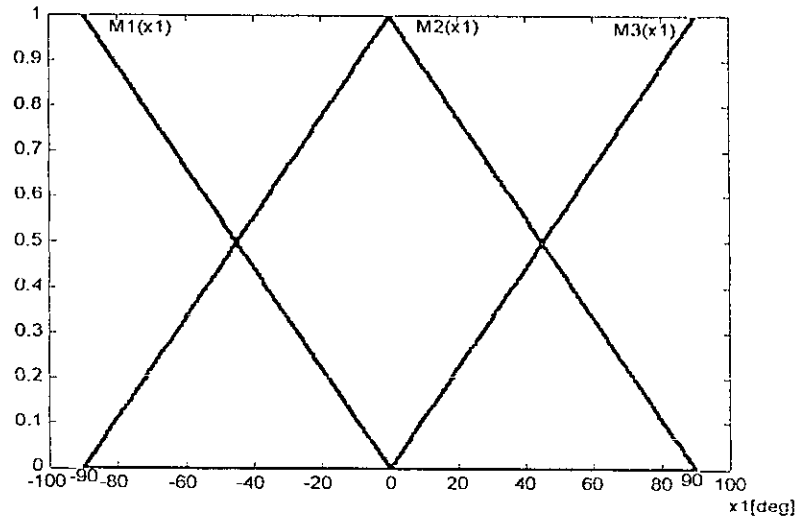


Fig1.5 : Fonctions d'appartenance associées à la

Les fonctions d'appartenance correspondantes aux ensembles flous sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \bar{M}_1(x_1) = \max(\min(-\frac{x_1}{90}, 1), 0) \\ \bar{M}_2(x_1) = \max(\min(\frac{x_1 + 90}{90}, \frac{90 - x_1}{90}), 0) \\ \bar{M}_3(x_1) = \max(\min(\frac{x_1}{90}, 1), 0) \end{cases}$$

Le contrôleur flou de type T-S du pendule inversé :

Le contrôleur PDC de type T-S correspondant est représenté comme suit :

Règle₁ : Si x_1 est au voisinage de 0 alors $u = -K_1 x$

Règle₂ : Si x_1 est au voisinage de ± 90 alors $u = -K_2 x$

La sortie finale du régulateur est donnée par :

$$u(t) = -\frac{\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2}{\mu_1 + \mu_2} x(t).$$

Simulation numérique:

- **Détermination des gains de commande par un placement de pôles :**

K_1 et K_2 sont obtenus de façon à placer les pôles de la boucle fermée à :

-4, -4 .

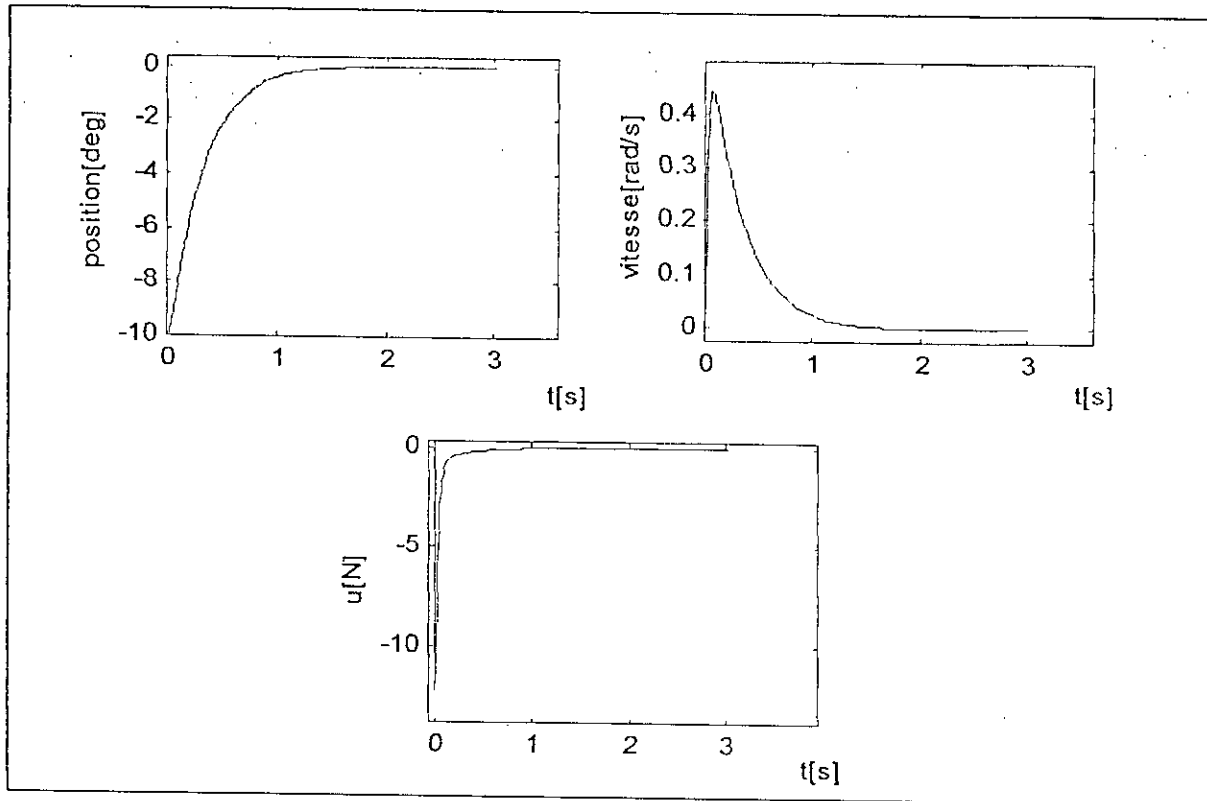
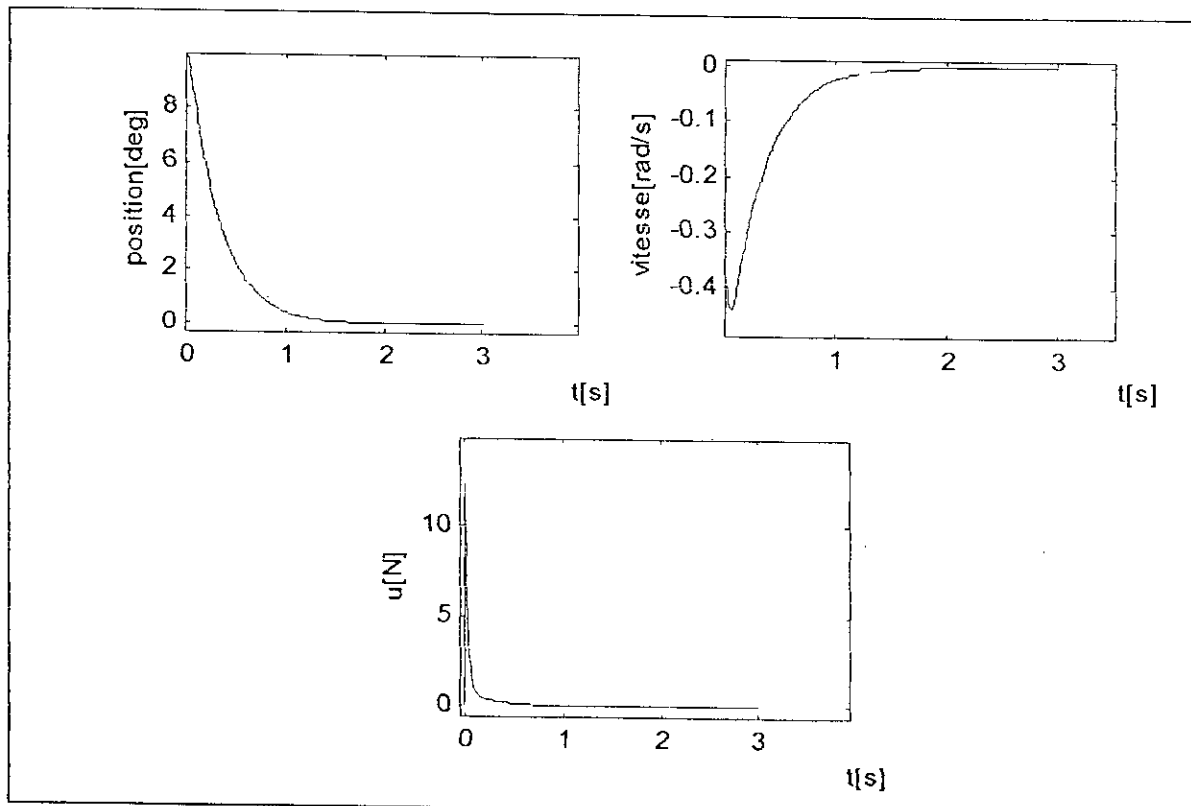
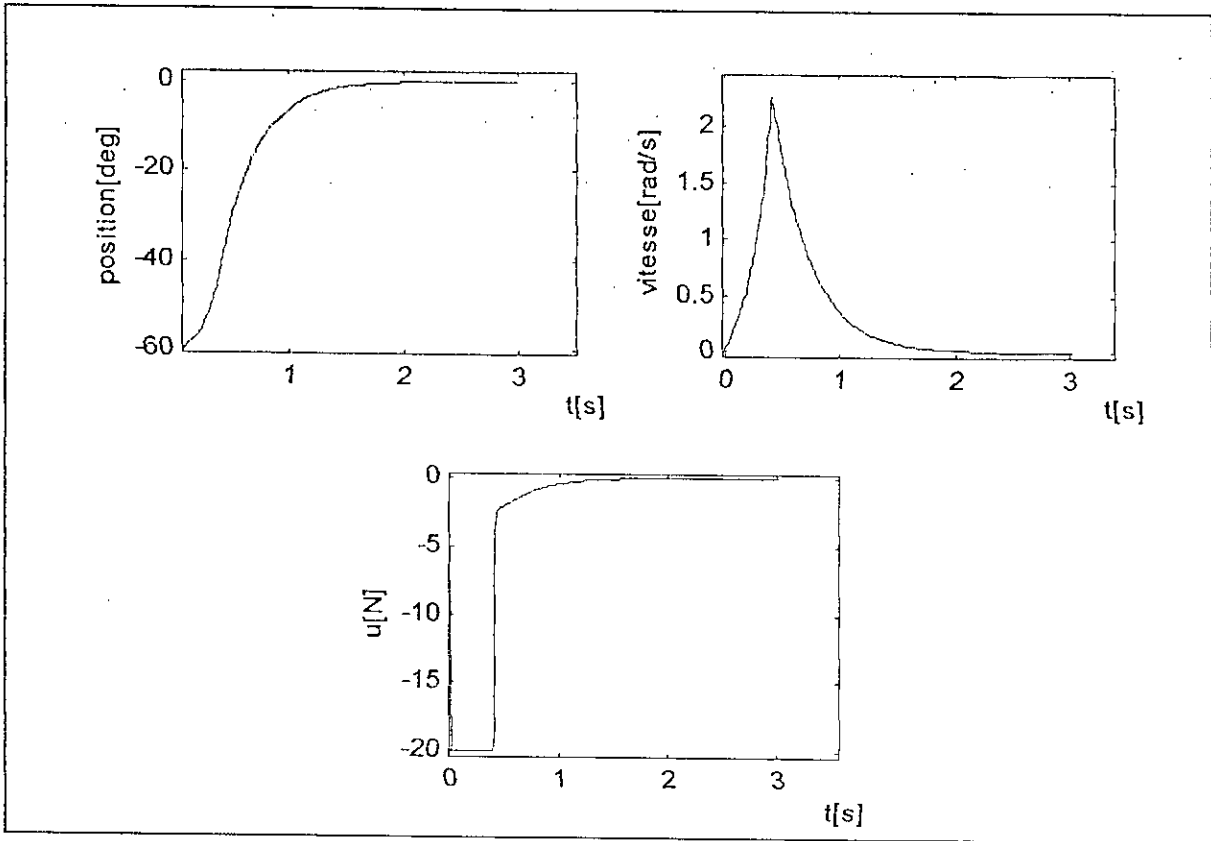


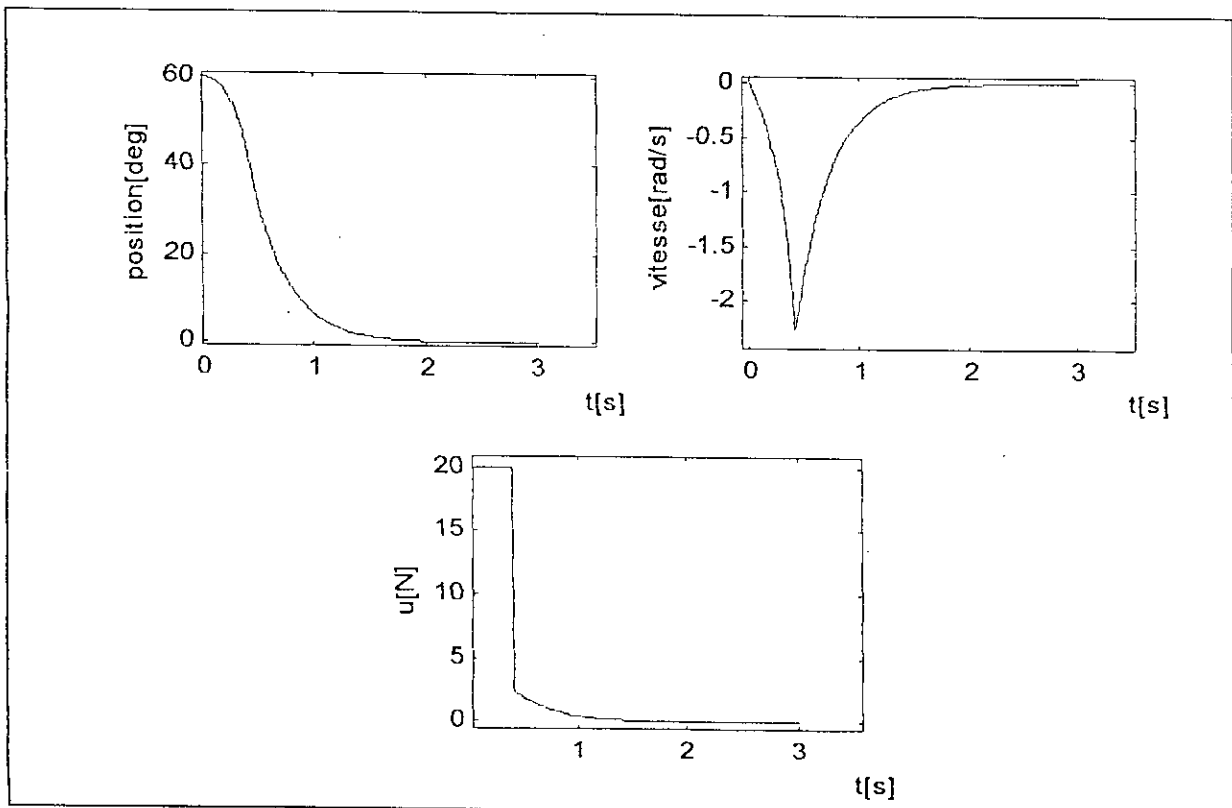
Fig (I.6): Position initiale $\theta = -10^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.7) : Position initiale $\theta = 10^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.8): Position initiale $\theta = -60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.9) : Position initiale $\theta = 60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$

Les gains de commande K_i étant connus, il reste à vérifier la stabilité du système bouclé et cela en résolvant le système d'inégalités matricielles (I.7) avec $r=2$:

Avec l'utilisation de la fonction `lmisolvers` du logiciel Scilab, nous aboutissons à la solution :

$$P = \begin{bmatrix} 2053.8862 & 104.9255 \\ 104.9255 & 45.434874 \end{bmatrix}.$$

Détermination des gains de commande par la résolution de LMI :

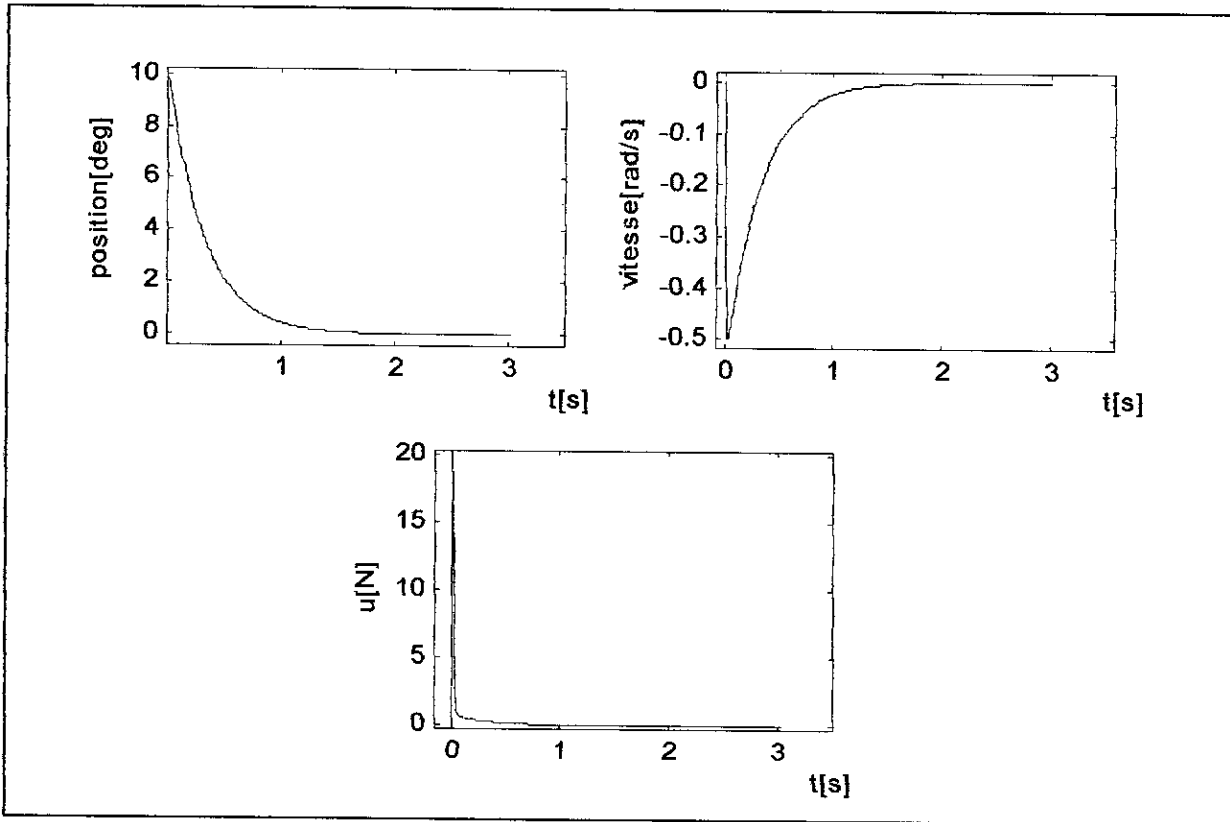
Déterminer les gains K_i , revient à résoudre le système d'LMI découlant du théorème I.4 avec $r=2$. Cette résolution permet aussi de trouver la matrice de stabilité P .

De ce fait, on a :

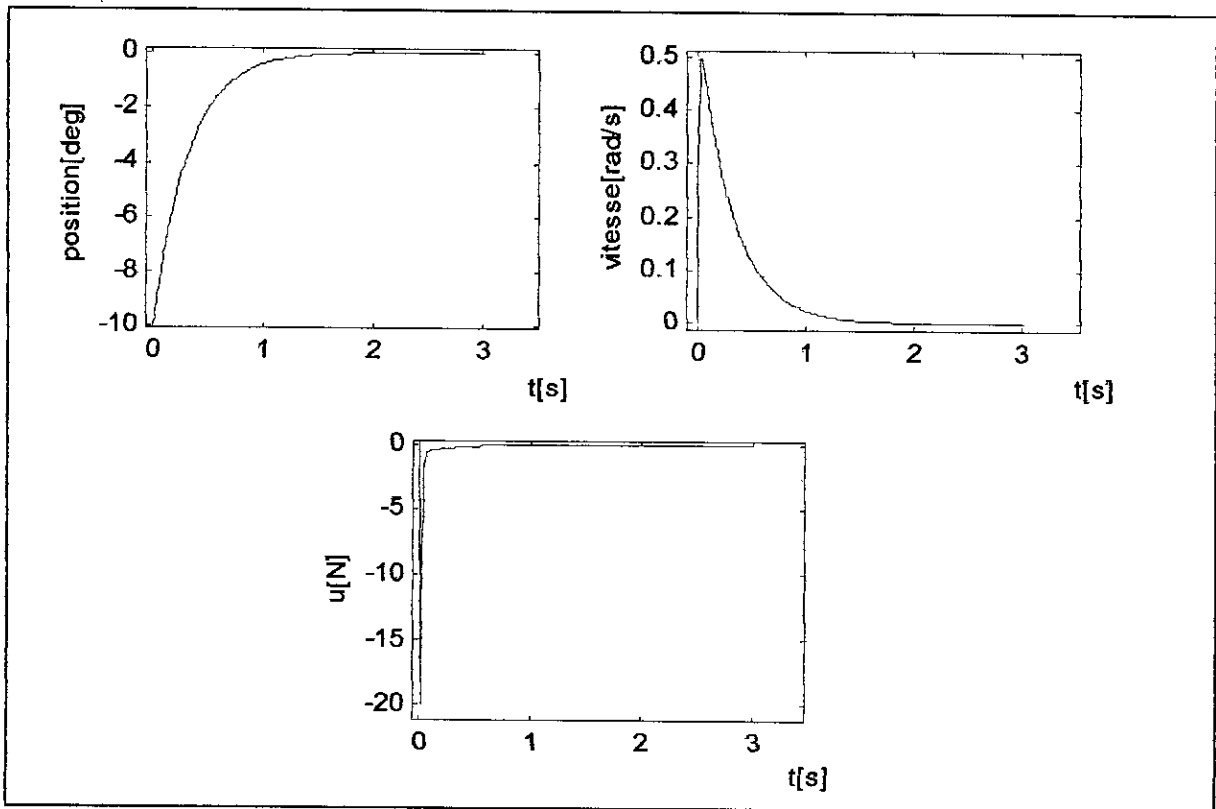
$$K_1 = [-115.24319 \quad -35.086833].$$

$$K_2 = [-274.69846 \quad -85.904867].$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.02526662 & 0.0082850 \\ 0.0082850 & 0.00289110 \end{bmatrix}.$$



Fig(I.10) : Position initiale $\theta = 10^\circ$, $\omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.11) : Position initiale $\theta = -10^\circ$, $\omega = 0 \text{ rad/s}$

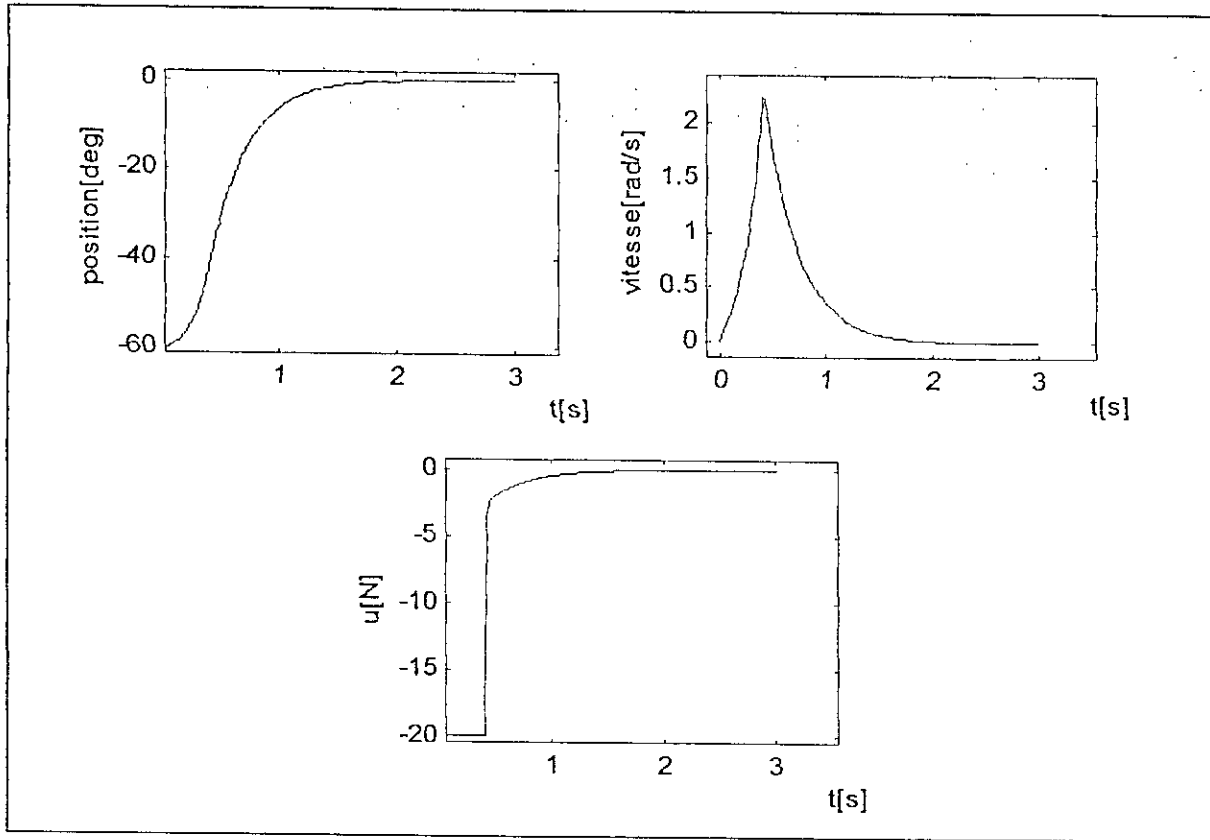


Fig (I.12): Position initiale $\theta = -60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$

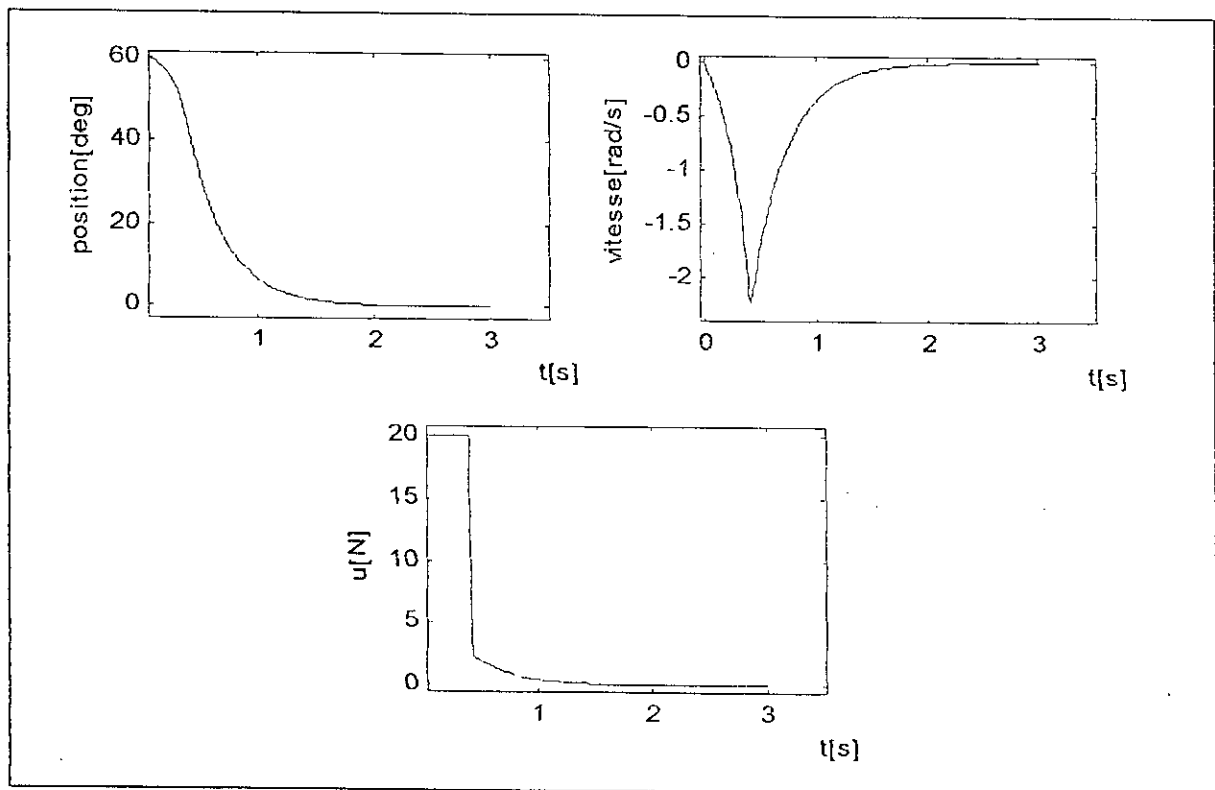


Fig (I.13): Position initiale $\theta = 60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$

Commentaire :

Les résultats de simulation montrent que quelque soit la méthode par laquelle nous procédons pour calculer les gains de commande, la commande obtenue stabilise le pendule se trouvant initialement dans une position comprise entre -63° et $+63^\circ$. Nous remarquons également que plus la position initiale s'éloigne de la position d'équilibre, la vitesse angulaire et le temps de réponse sont plus importants. Contrairement à la première méthode, l'effort maximal appliqué en utilisant les LMI est le même quelle que soit la position initiale (environ 20N).

I.8.2.2. Cas d'un modèle à cinq règles :

Le système pendule inversé est, cette fois-ci, approximé par un modèle flou de T-S à cinq règles comme indiquées ci-après :

Règle₁ : Si x_1 est au voisinage de 0° alors

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u$$

$$y = C_1 x$$

Règle₂ : Si x_1 est au voisinage de $+60^\circ$ alors

$$\dot{x} = A_2 x + B_2 u$$

$$y = C_2 x$$

Règle₃ : Si x_1 est au voisinage de $+90^\circ$ et alors

$$\dot{x} = A_3 x + B_3 u$$

$$y = C_3 x$$

Règle₄ : Si x_1 est au voisinage de -60° alors

$$\dot{x} = A_4 x + B_4 u$$

$$y = C_4 x$$

Règle₅ : Si x_1 est au voisinage de -90° et alors

$$\dot{x} = A_5 x + B_5 u$$

$$y = C_5 x$$

Avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, C_1 = [1 \ 0].$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g \cos(60^\circ)(4l/3 - aml \cos^2(60^\circ)) - 2amlg \cos(60^\circ) \sin^2(60^\circ)}{(4l/3 - aml \cos^2(60^\circ))^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a \cos(60^\circ)}{4l/3 - aml \cos^2(60^\circ)} \end{bmatrix}, C_2 = [1 \ 0].$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}, C_3 = [1 \ 0] \text{ et } \beta = \cos(88^\circ).$$

$$A_4 = A_2, B_4 = B_2, C_4 = C_2.$$

$$A_5 = A_3, B_5 = B_3, C_5 = C_3.$$

Nous avons alors des règles qui ont la même conséquence, nous pouvons alors écrire les règles autrement en confondant les règles dont la conséquence est la même.

Règle₁ : Si x_1 est au voisinage de 0° alors

$$\dot{x} = A_1x + B_1u$$

$$y = C_1x$$

Règle₂ : Si x_1 est au voisinage de $\pm 60^\circ$ alors

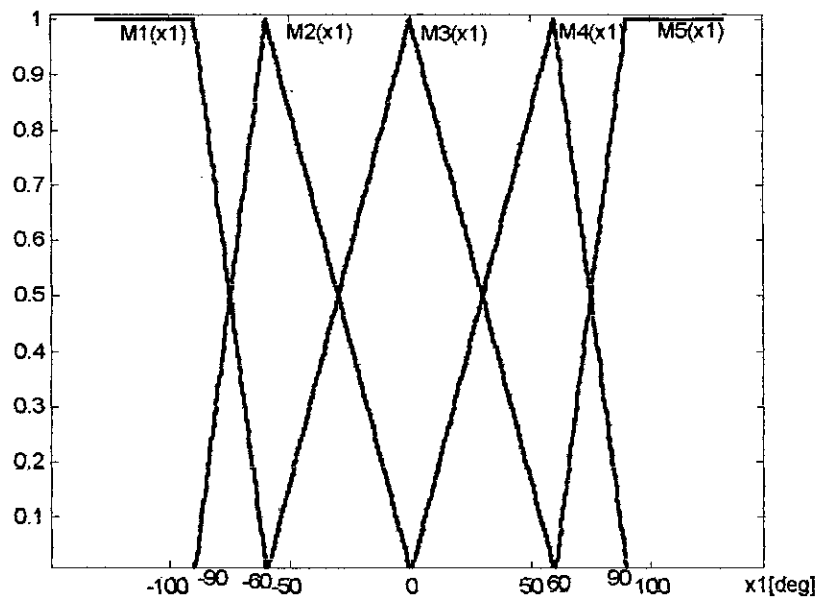
$$\dot{x} = A_2x + B_2u$$

$$y = C_2x$$

Règle₃ : Si x_1 est au voisinage de $\pm 90^\circ$ et alors

$$\dot{x} = A_3x + B_3u$$

$$y = C_3x$$



Fig(I.14) : Fonctions d'appartenance associées à la variable x_1

Le contrôleur flou :

IL est sous forme suivante :

Règle₁ : Si x_1 est au voisinage de 0 alors $u = -K_1 x$.

Règle₂ : Si x_1 est au voisinage de ± 60 alors $u = -K_2 x$.

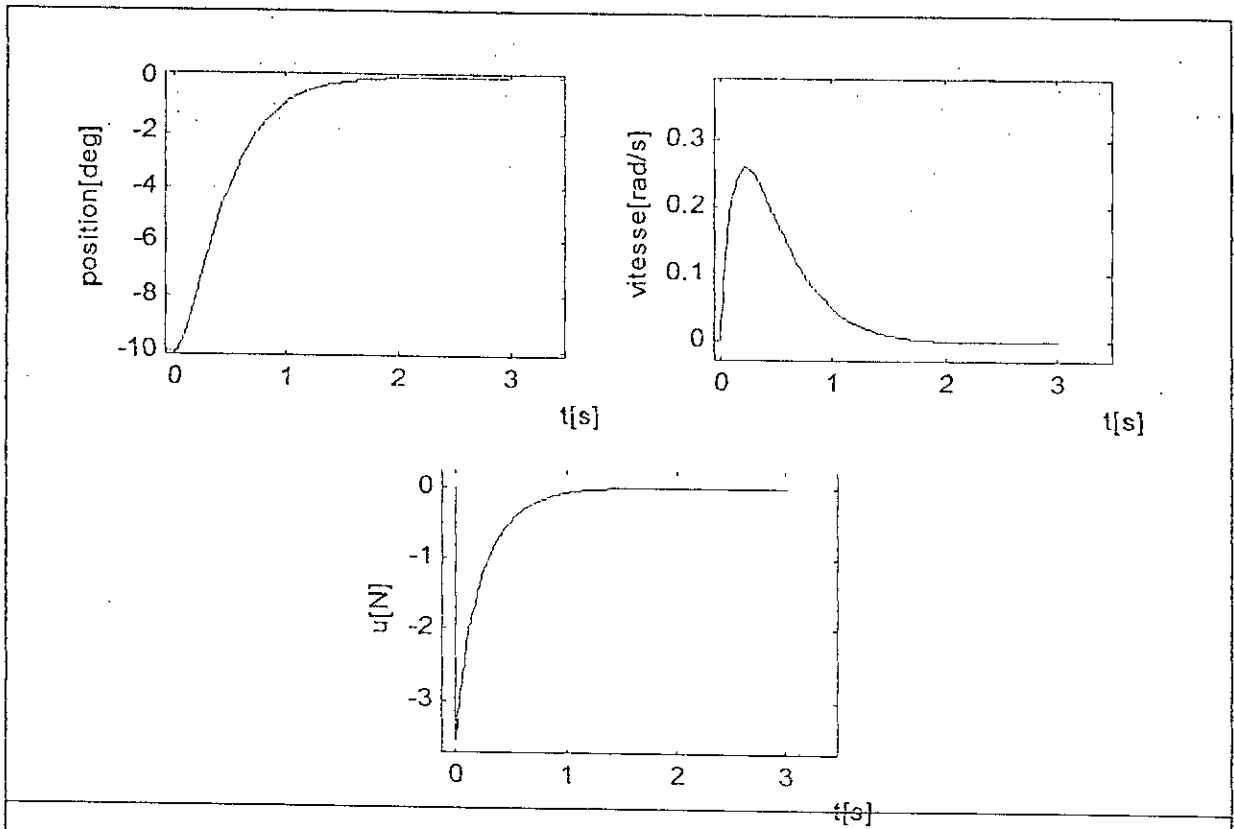
Règle₃ : Si x_1 est au voisinage de ± 90 alors $u = -K_3 x$.

La commande finale est alors :

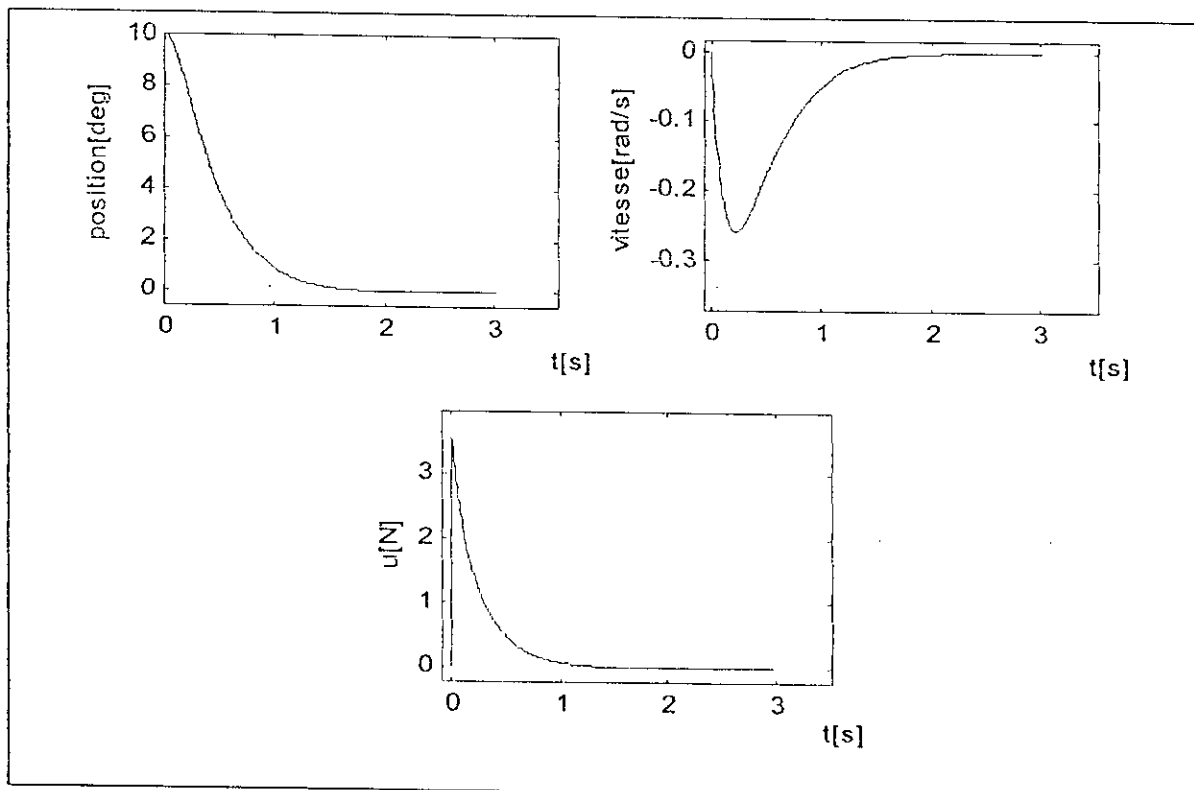
$$u(t) = -\frac{\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 + \mu_3 K_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} x(t).$$

Détermination des gains de commande par un placement de pôles :

Nous appliquons ici le même placement de pôles que celui pris pour le système à trois règles et ceci dans l'intention d'établir une comparaison entre les deux systèmes.



Fig(I.15) : Position initiale $\theta = -10^\circ$, $\omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.16) : Position initiale $\theta = 10^\circ$, $\omega = 0 \text{ rad/s}$

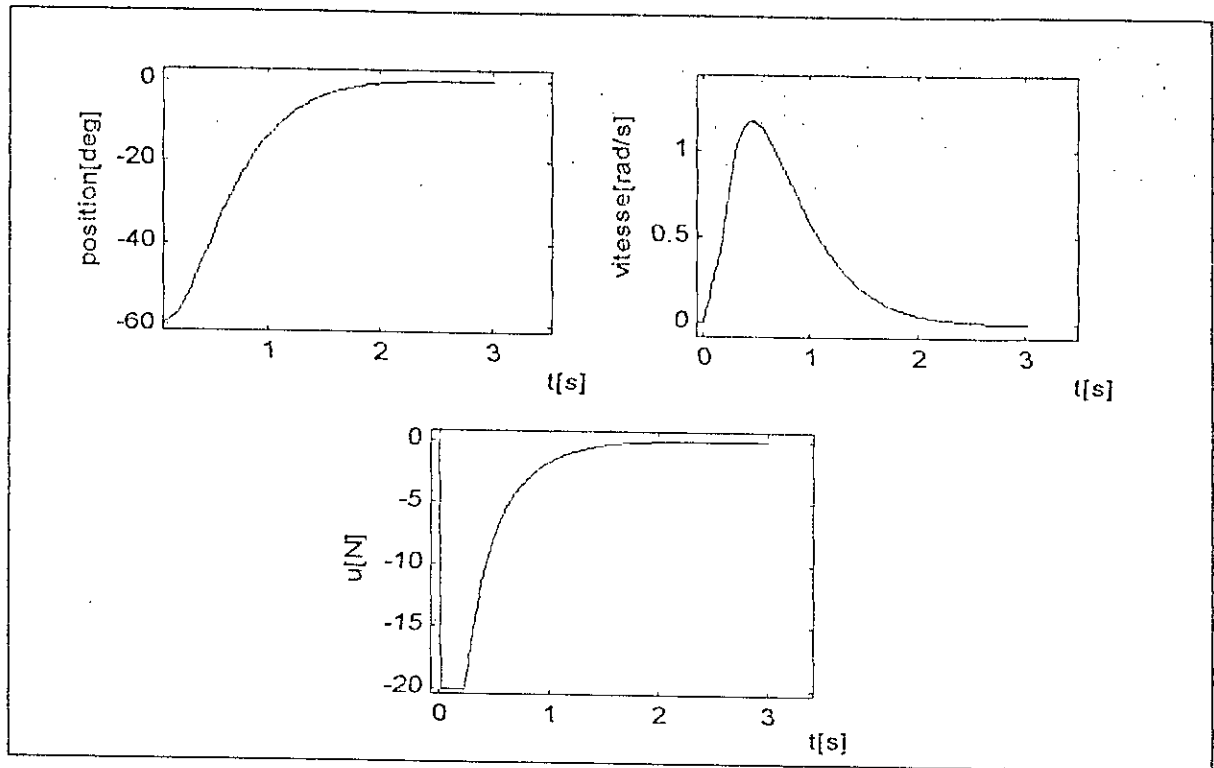
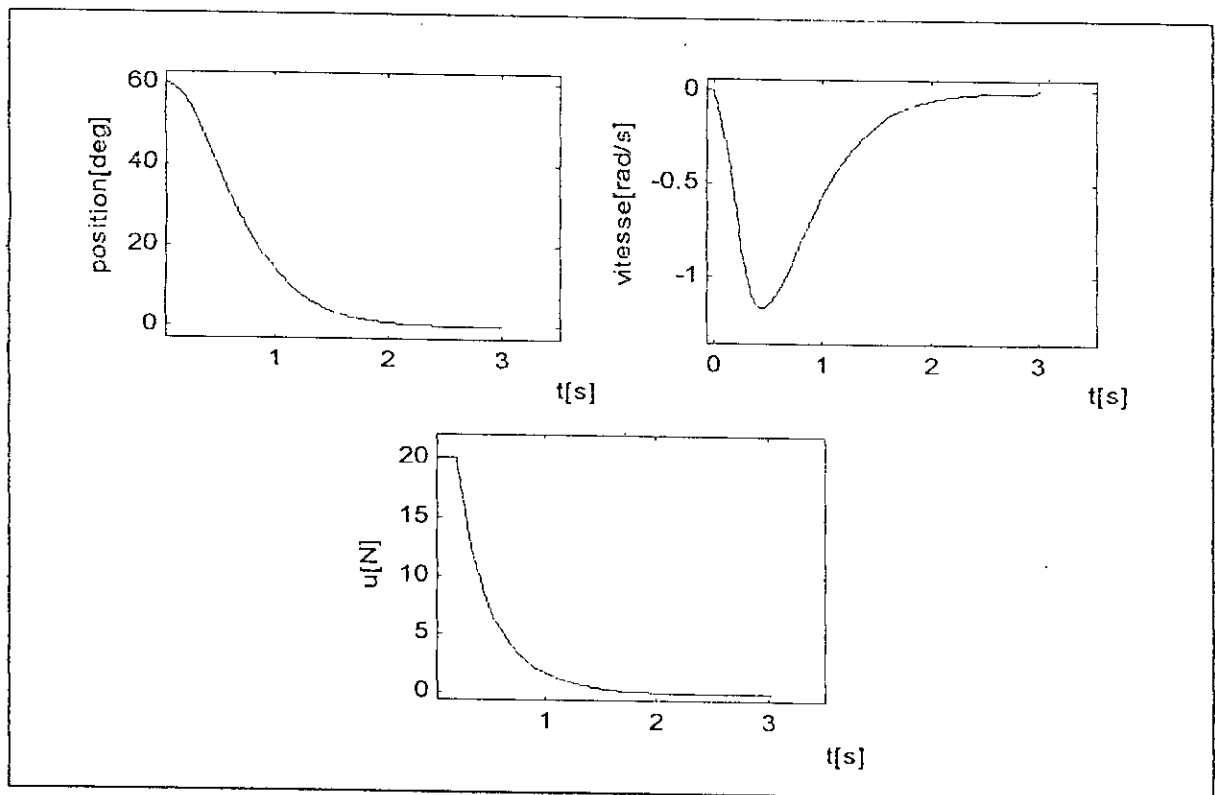


Fig (I.17): Position initiale $\theta = -60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.18) : Position initiale $\theta = 60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$

La matrice de stabilité est :

$$P = \begin{bmatrix} 19636.182 & 731.72865 \\ 731.72865 & 399.68261 \end{bmatrix}$$

Détermination des gains de commande par la résolution de LMI :

$$K_1 = [-210.83655 \quad -58.948830].$$

$$K_2 = [-396.41179 \quad -113.70023].$$

$$K_3 = [-546.39983 \quad -155.46334].$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0471279 & 0.0137237 \\ 0.0137237 & 0.0041512 \end{bmatrix}$$

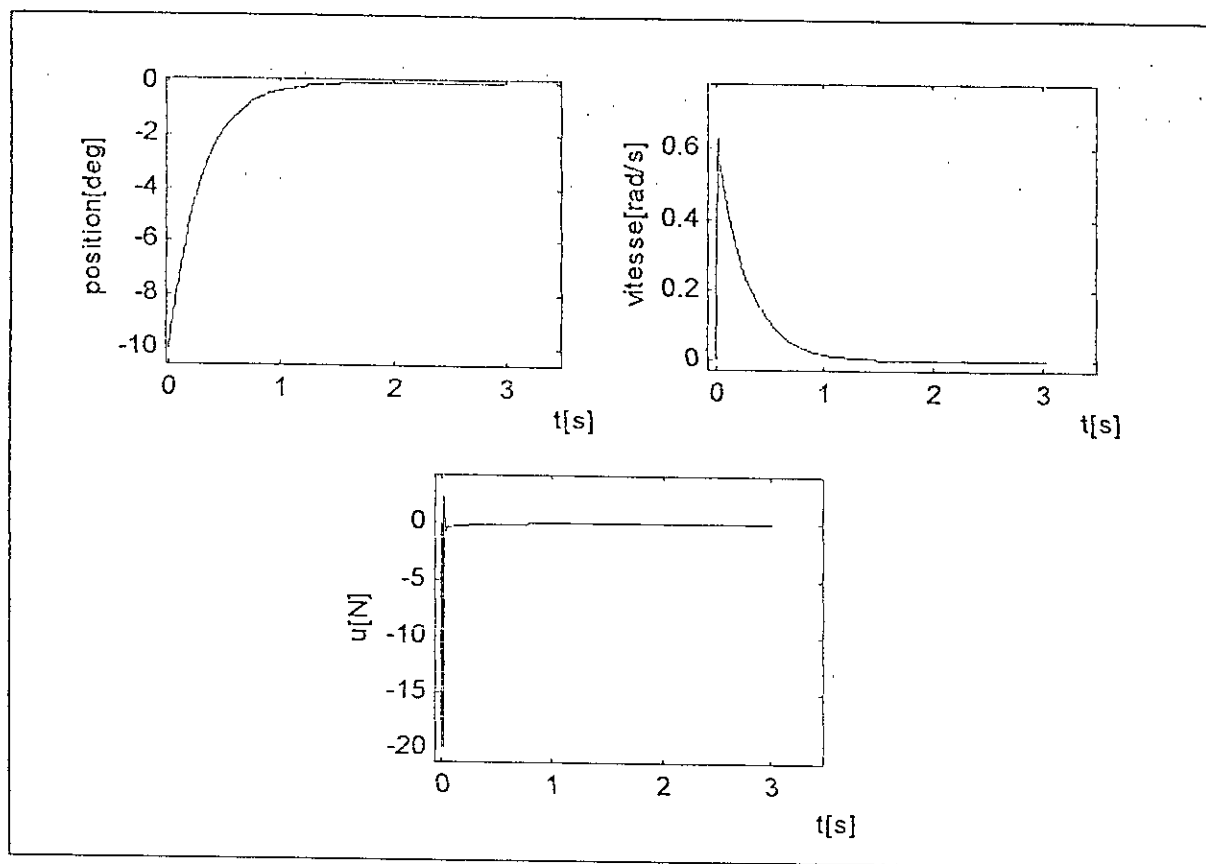
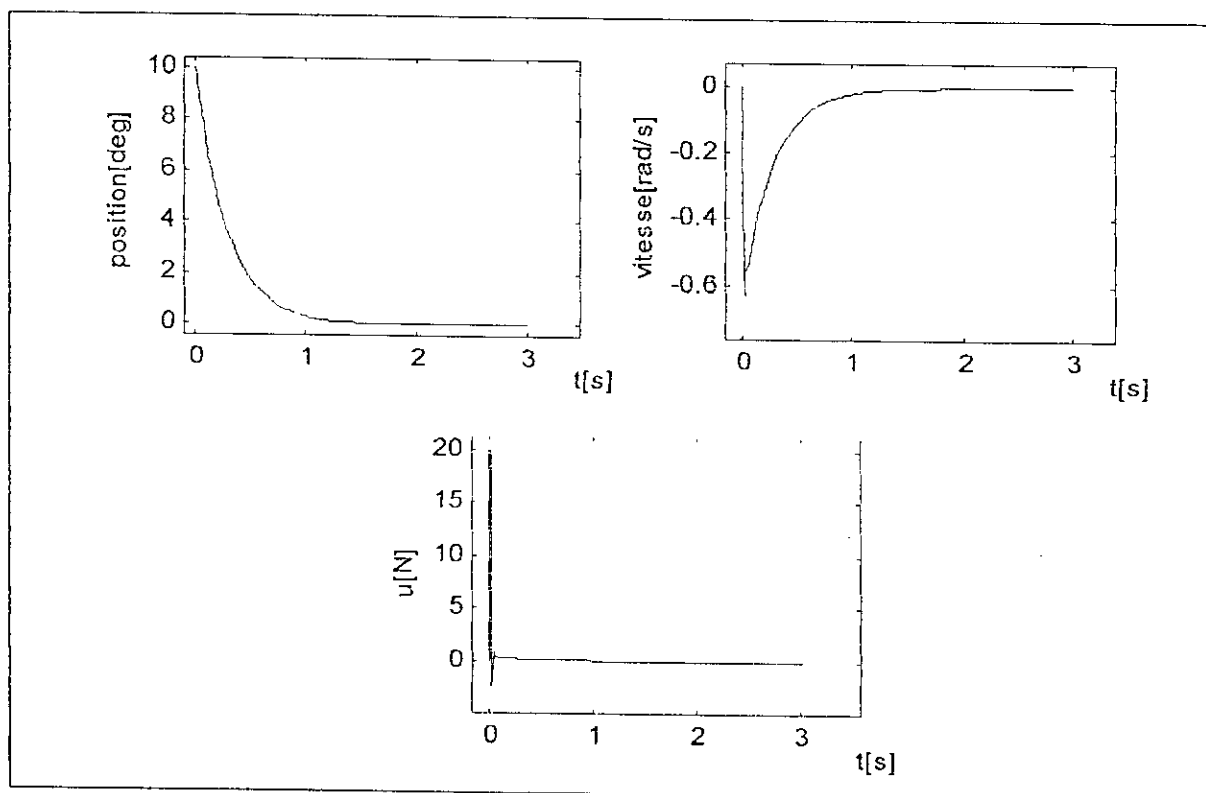
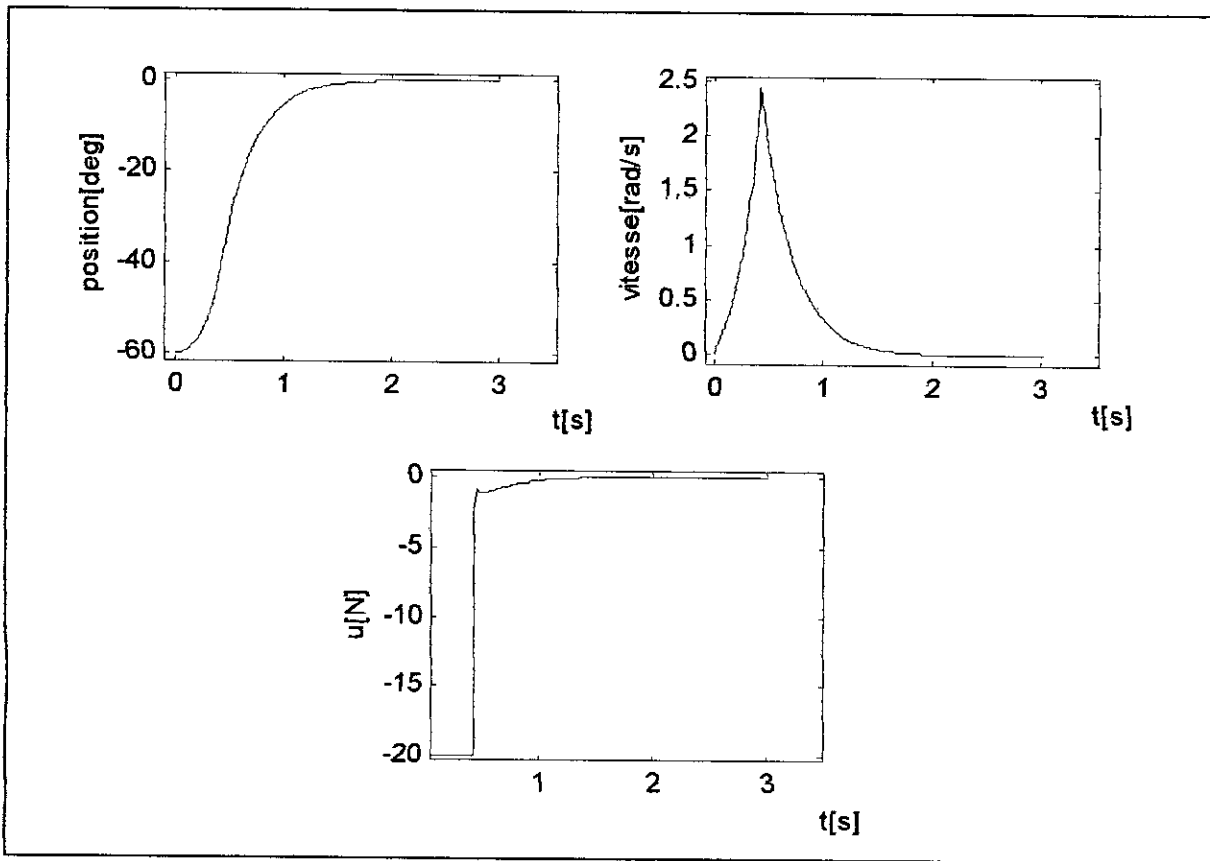


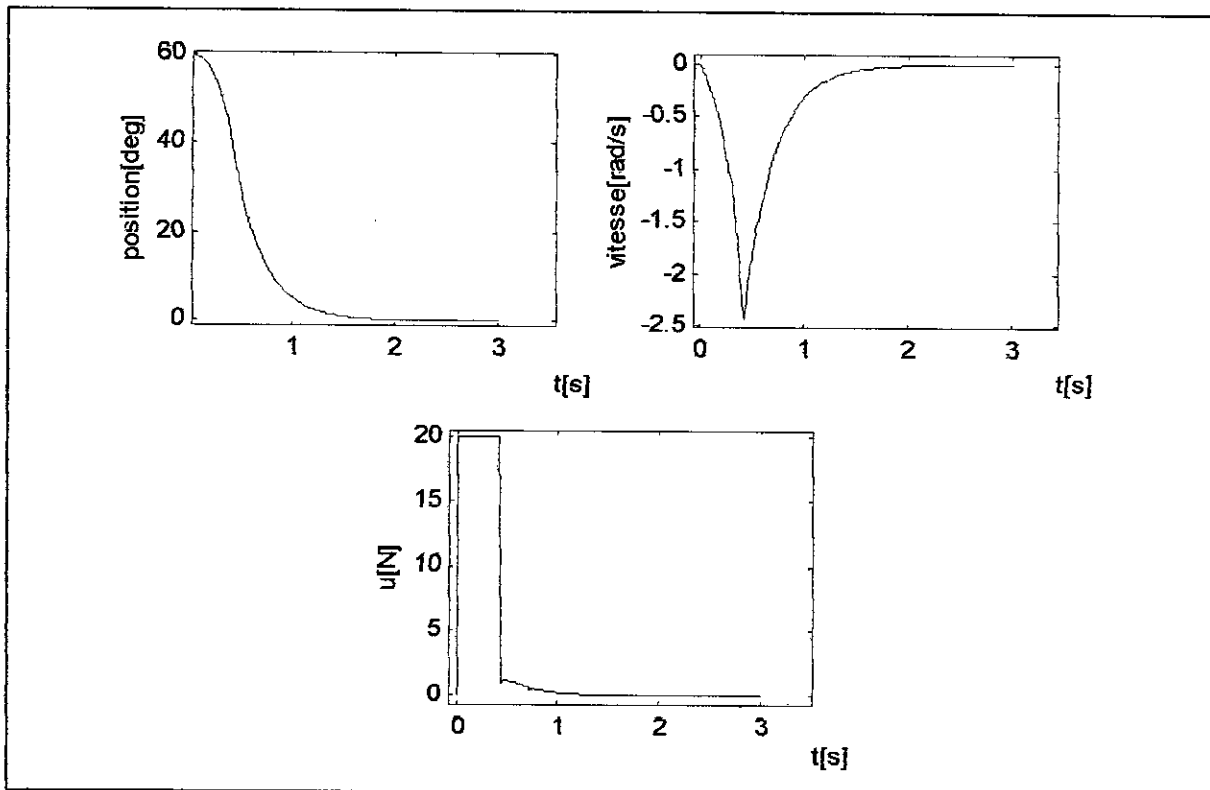
Fig (I.19): Position initiale $\theta = -10^\circ$, $\omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.20) : Position initiale $\theta = 10^\circ$, $\omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.21) : Position initiale $\theta = -60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$



Fig(I.22) : Position initiale $\theta = 60^\circ, \omega = 0 \text{ rad/s}$

Commentaire :

Les mêmes observations notées pour le système à trois règles sont reprises ici à savoir, l'augmentation de la vitesse maximale et du temps de réponse avec l'éloignement de la position initiale par rapport à la position d'équilibre. Aussi, l'effort maximal appliqué au système dans la première méthode varie avec la position initiale alors que celui de la deuxième méthode reste le même (environ 20N).

Comparaison entre les deux systèmes :

Quelle que soit la méthode choisie, les performances réalisées par le système à cinq règles sont beaucoup plus intéressantes. En effet, si nous considérons la vitesse angulaire, nous constatons qu'elle est plus faible dans le cas du système à cinq règles. De plus, même si aucun changement n'est remarqué avec le placement de pôles, une réduction de 0.2s du temps de réponse est enregistrée avec la résolution numérique en faveur du système à cinq règles.

Test de robustesse :

Afin de tester la robustesse de notre commande (calculée de deux manières) vis à vis des variations des paramètres du pendule inversé, nous considérons dans un premier temps une variation de 50% des masses m et M et de la longueur l . Ensuite, dans un deuxième temps, nous subissons à ces mêmes paramètres, une variation de 80% de leur valeur.

Système à trois règles :**Placement de pôles :**

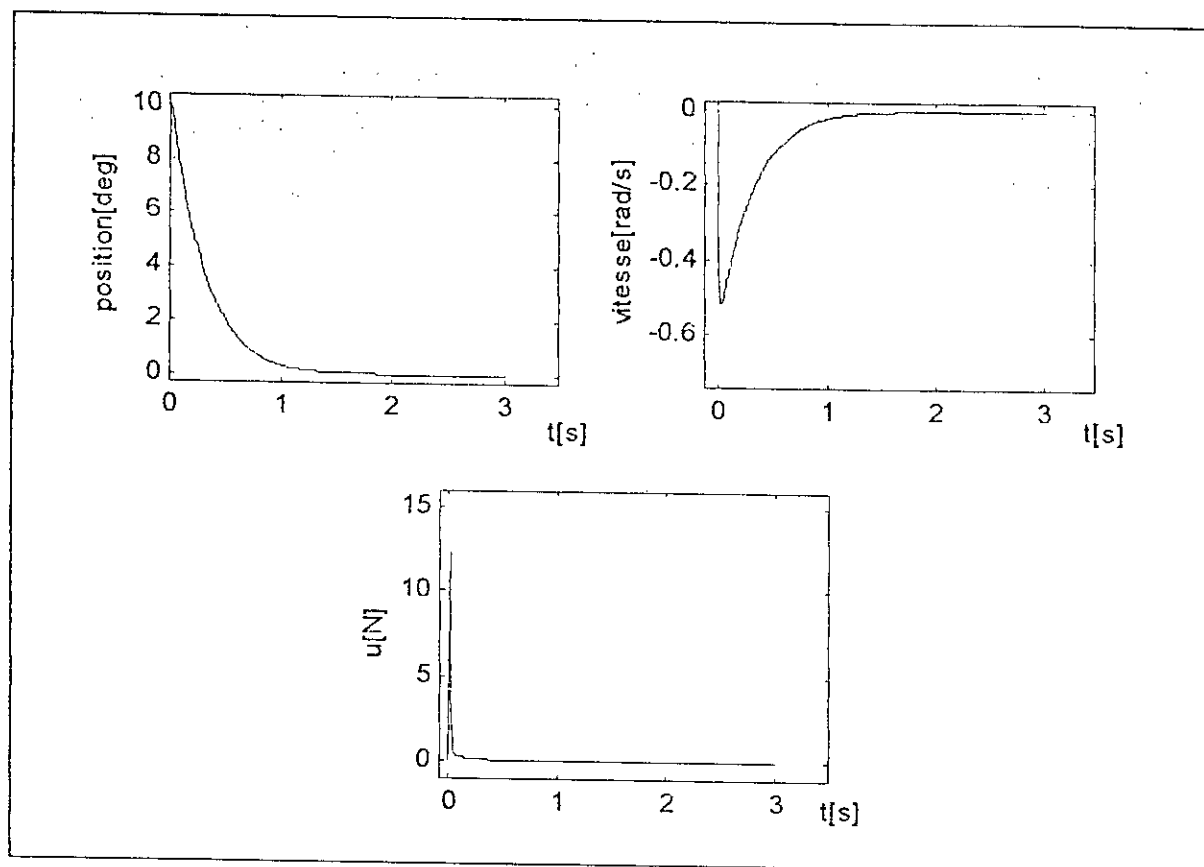


Fig (I.23): variation de 50% de la masse m et de 50% de la masse M

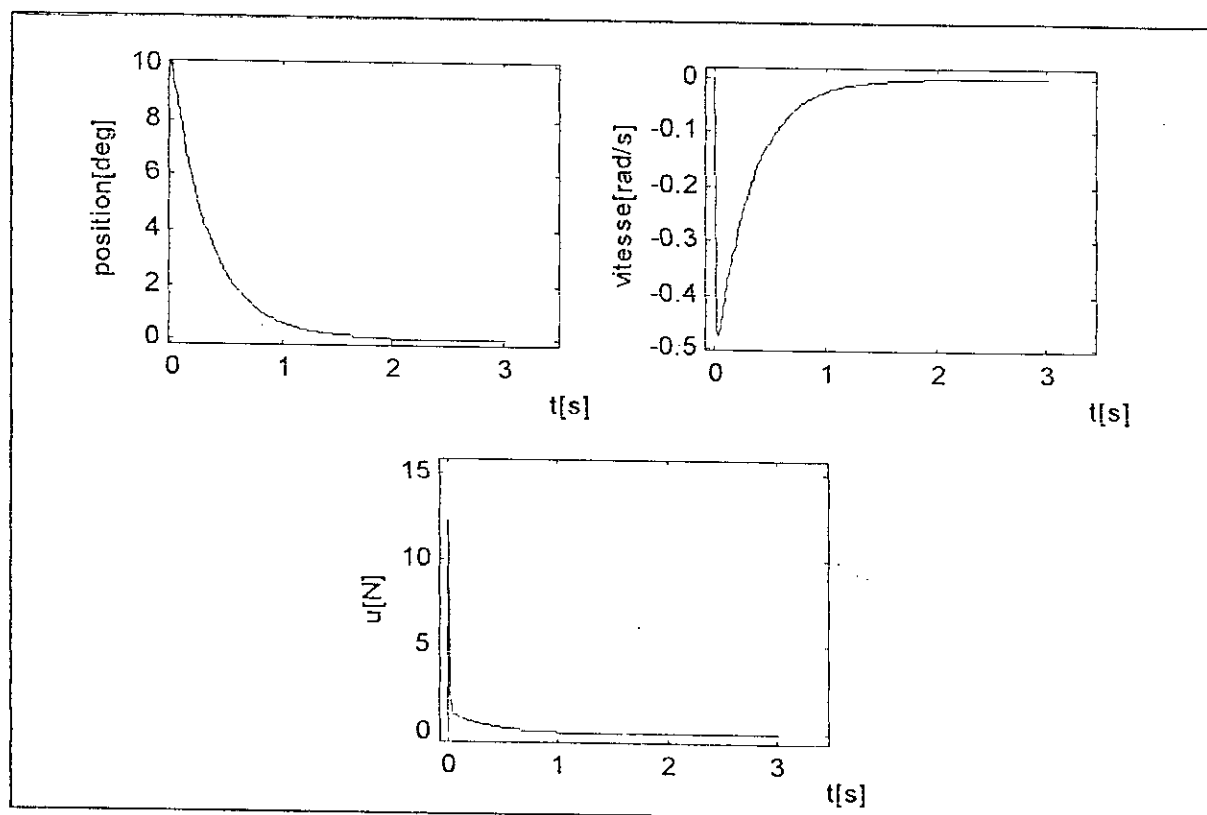
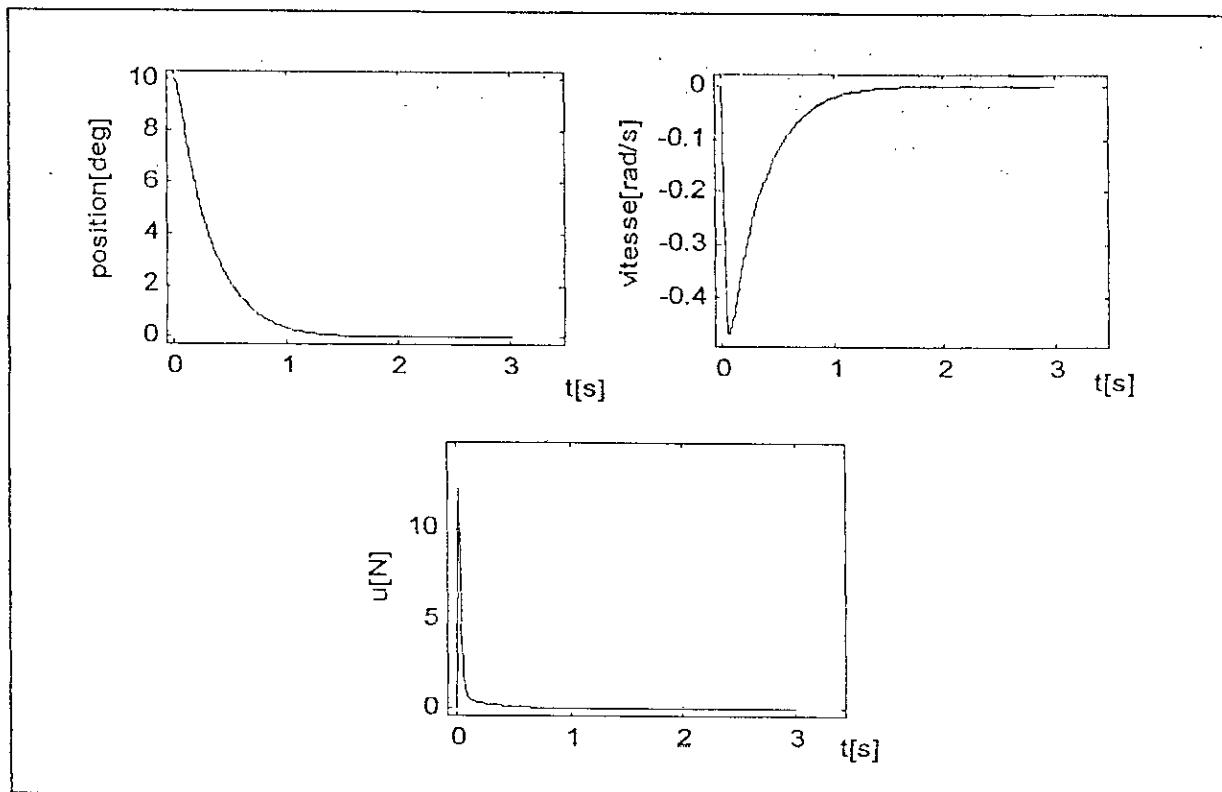


Fig-I.24) : variation de 50% de la valeur de la longueur l



Fig(I.25) : variation de 80% de la masse m et de 80% de la M

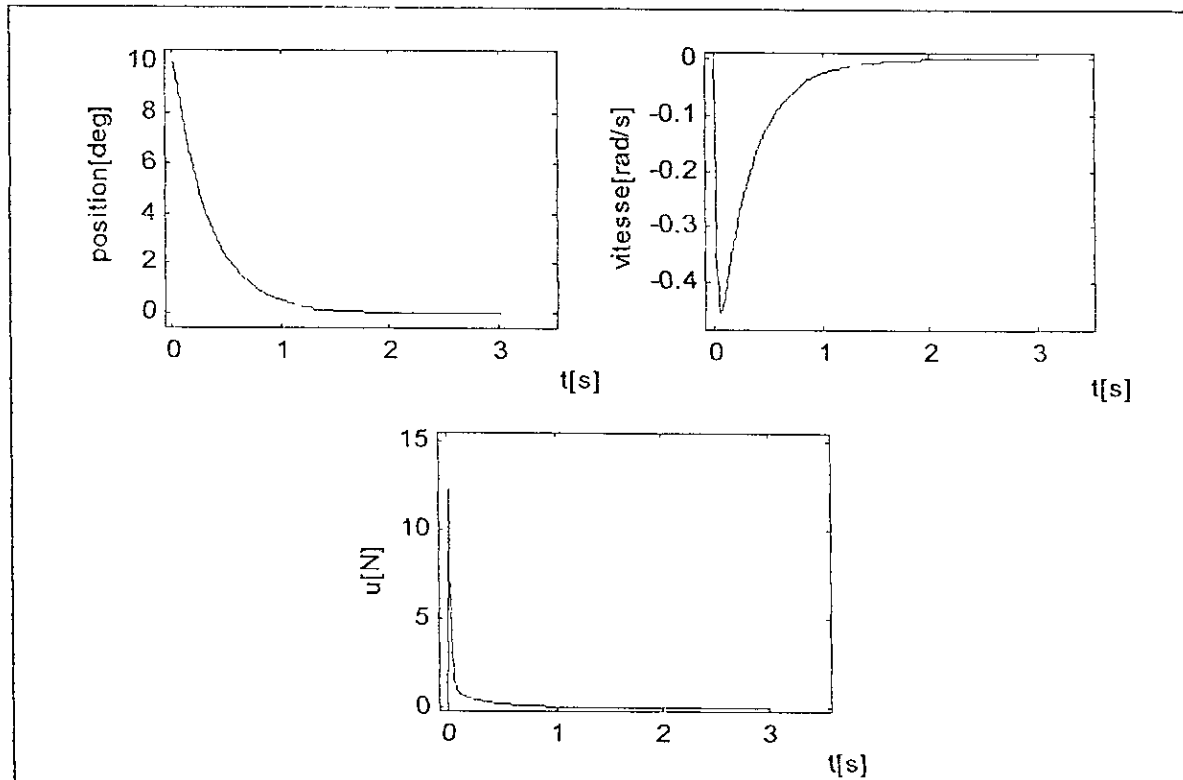
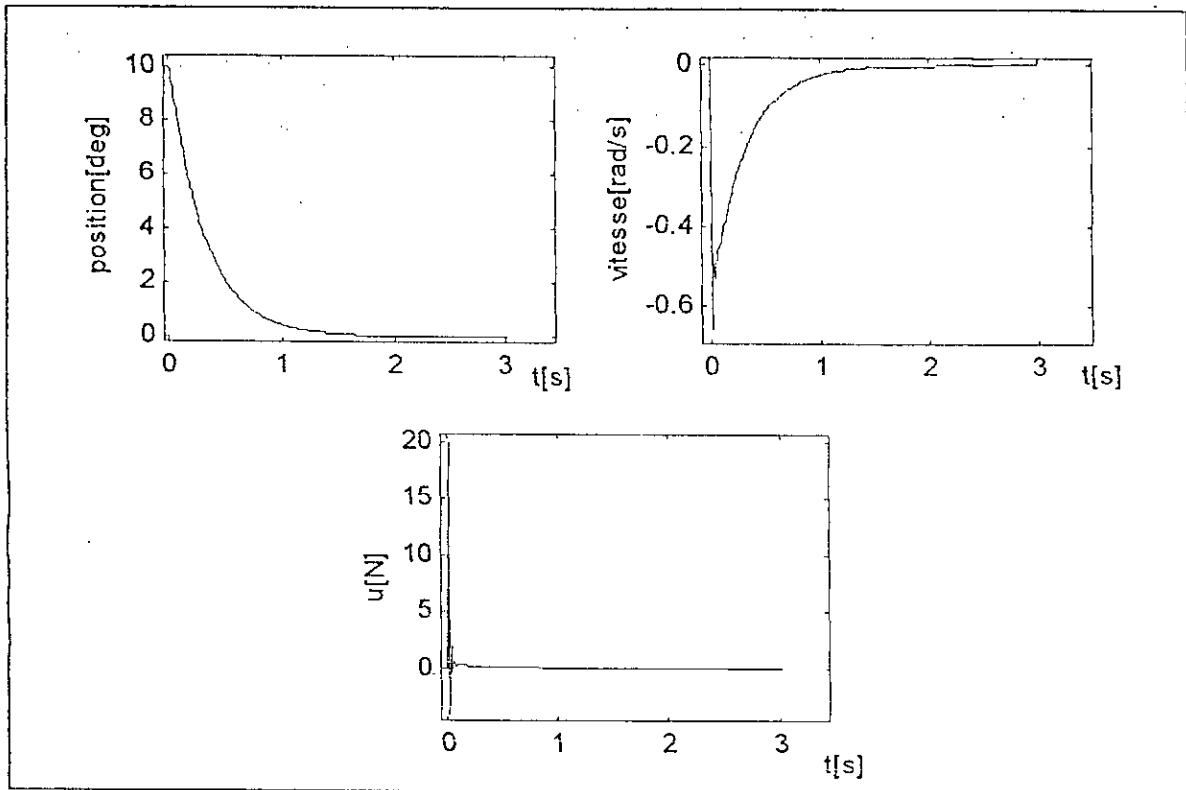


Fig (I.26): variation de 80% de la longueur l

LMI



Fig(I.27) : variation de 50% de la masse m et de 50% de la M

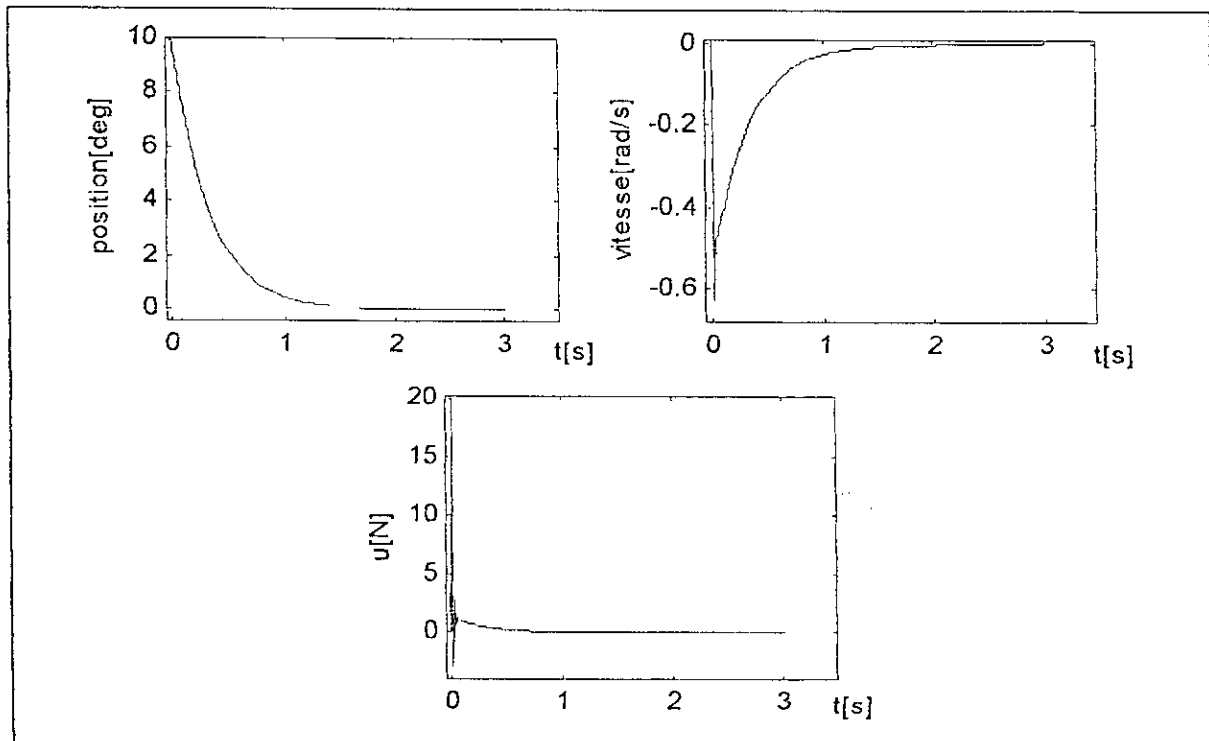
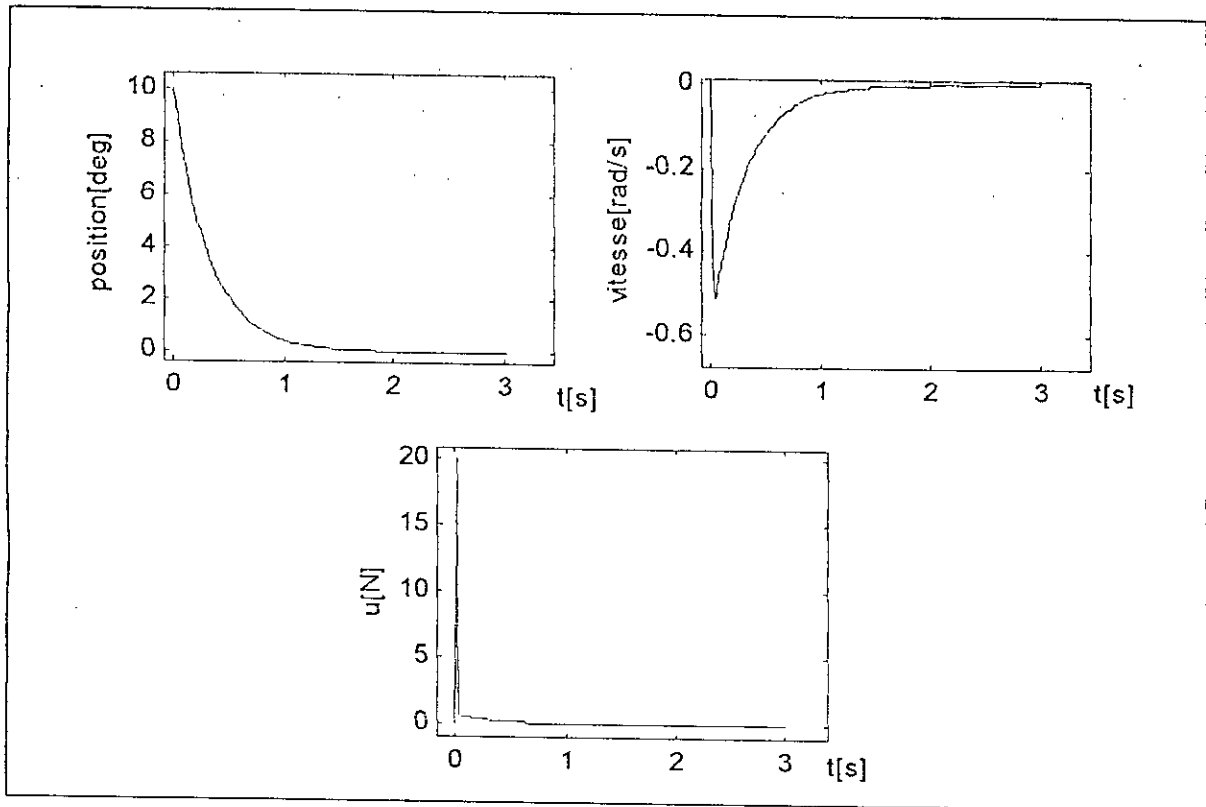


Fig (I.28): variation de 50% de la longueur l



Fig(I.29) : variation de 80% de la masse m et de 80% de la M

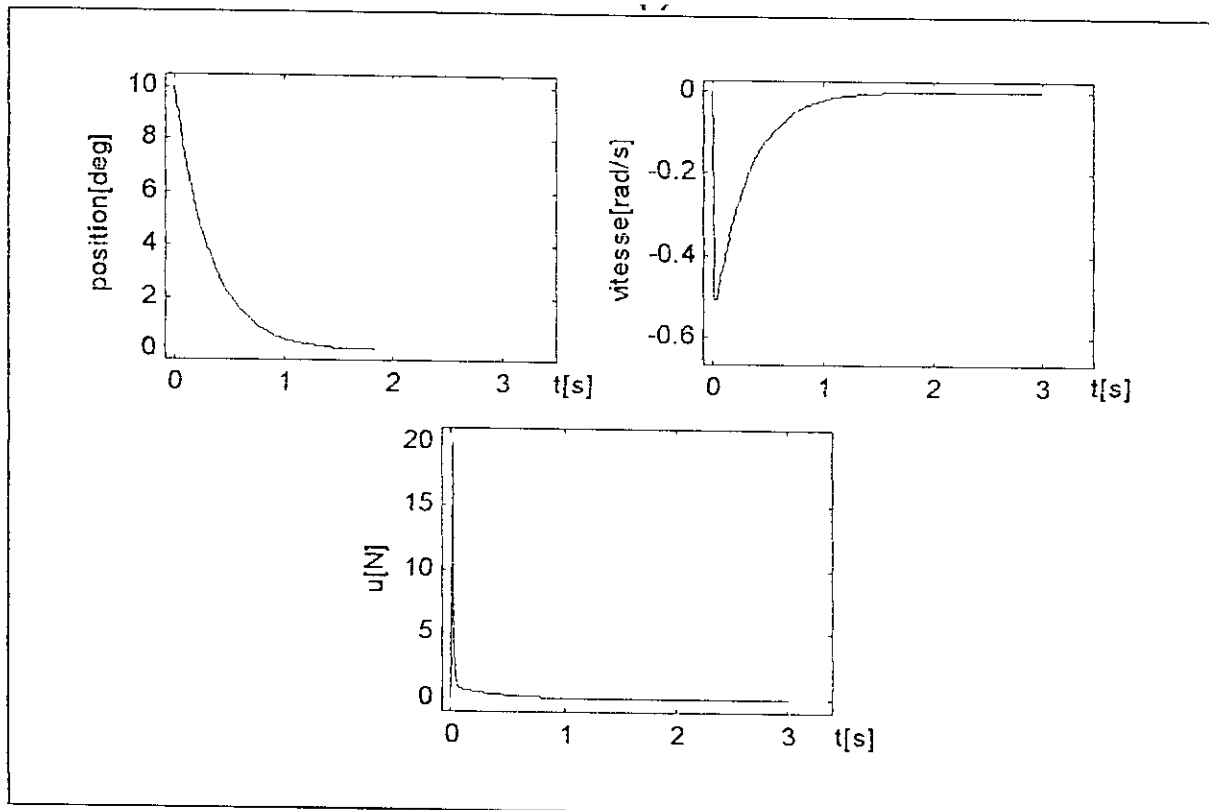
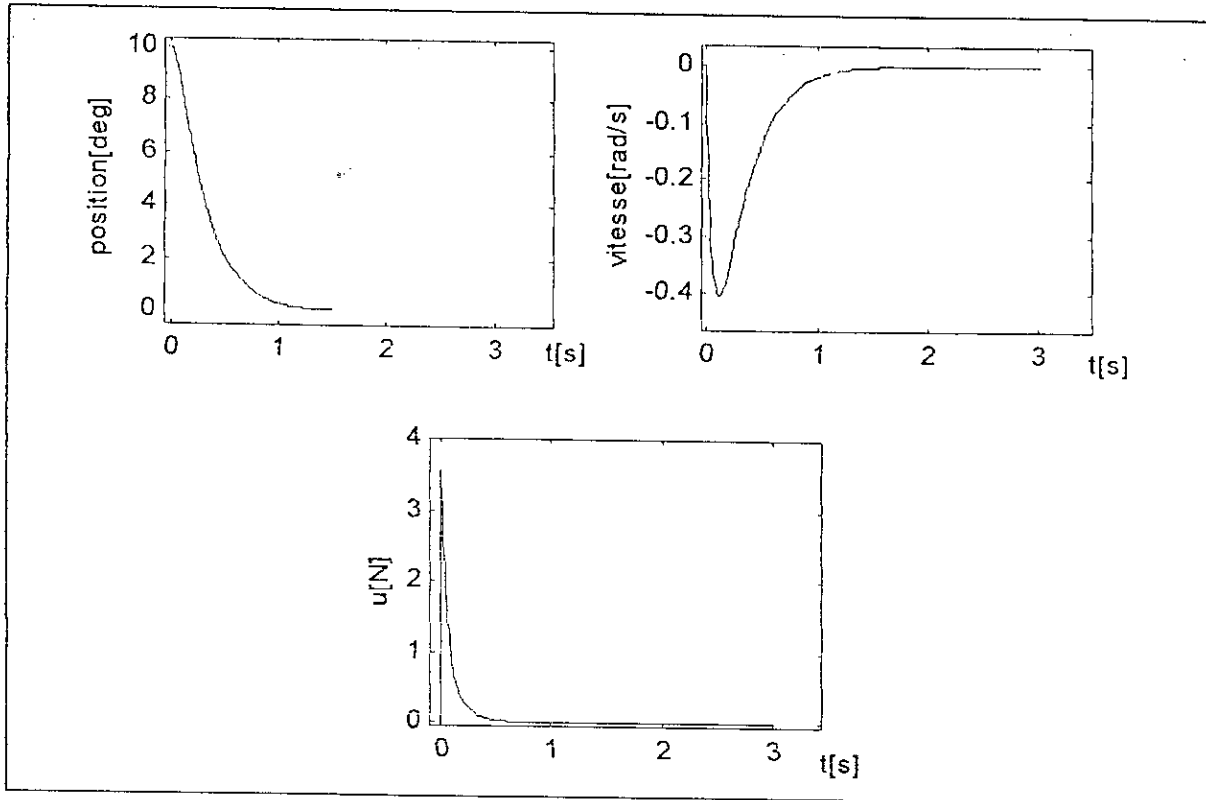


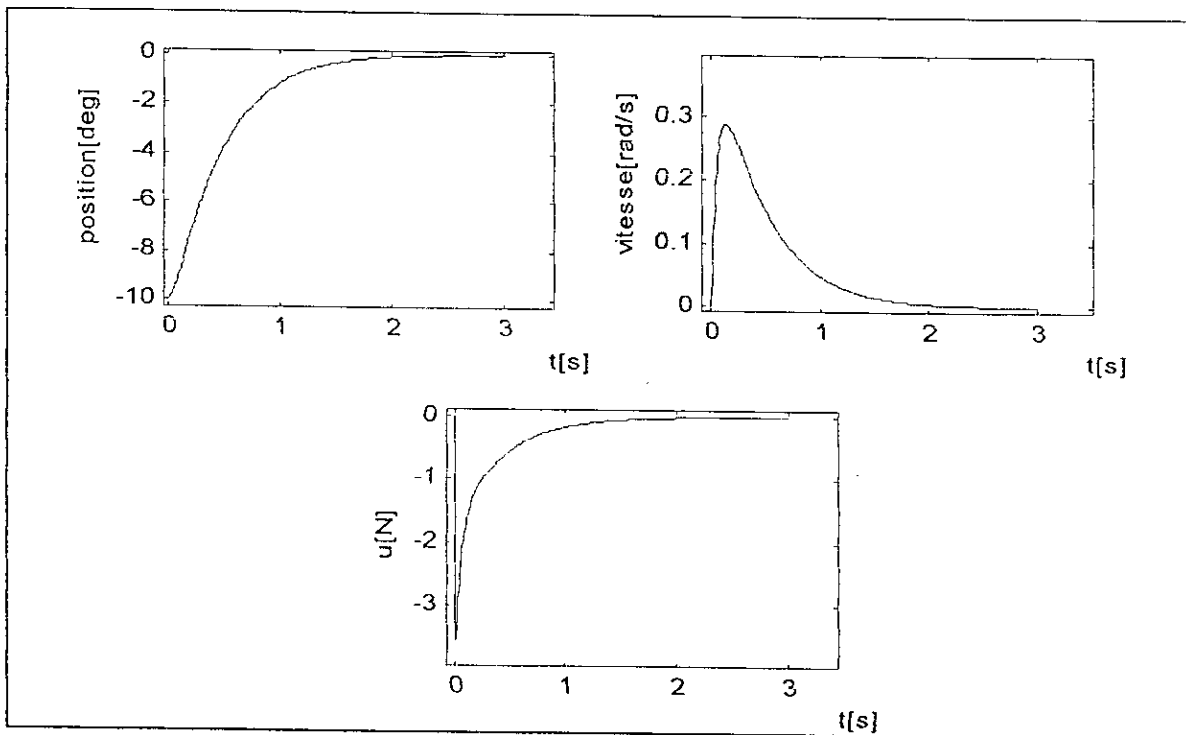
Fig (I.30): variation de 80% de la longueur l

Systeme à cinq règles :

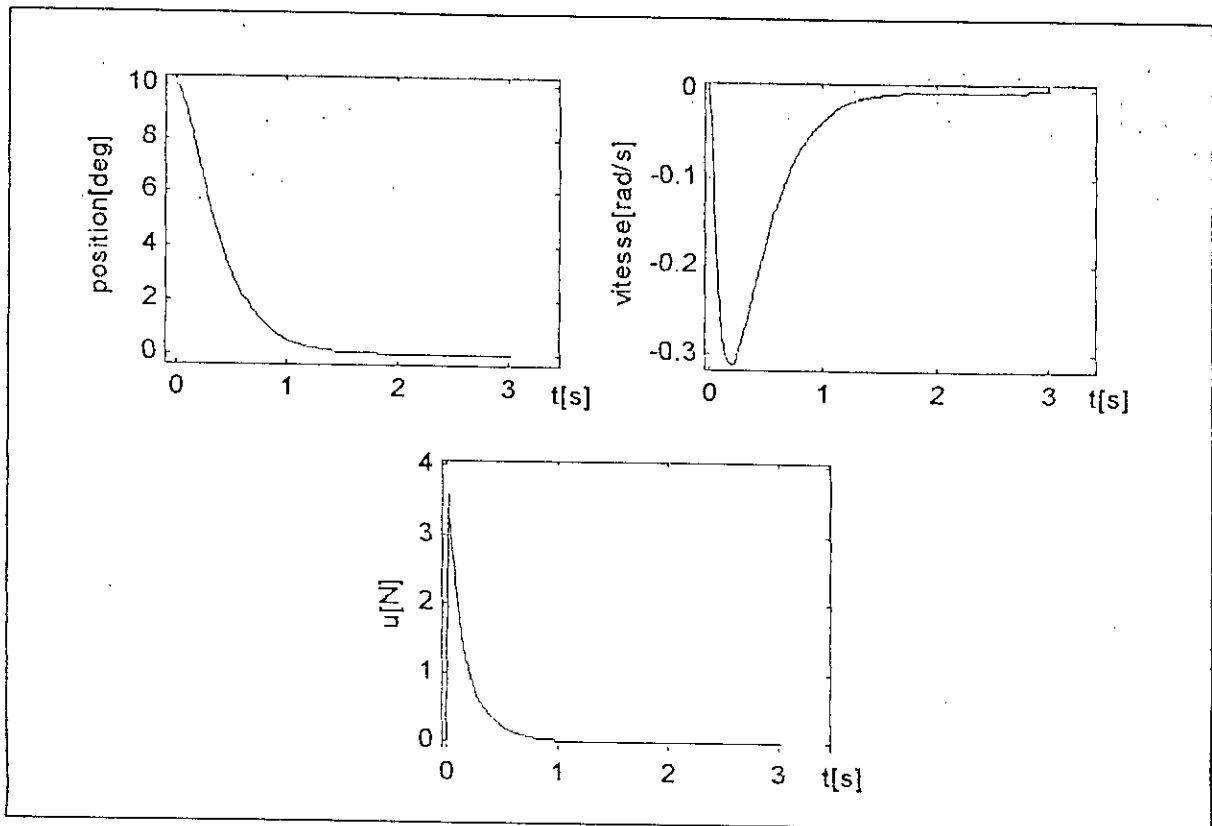
Placement de poles :



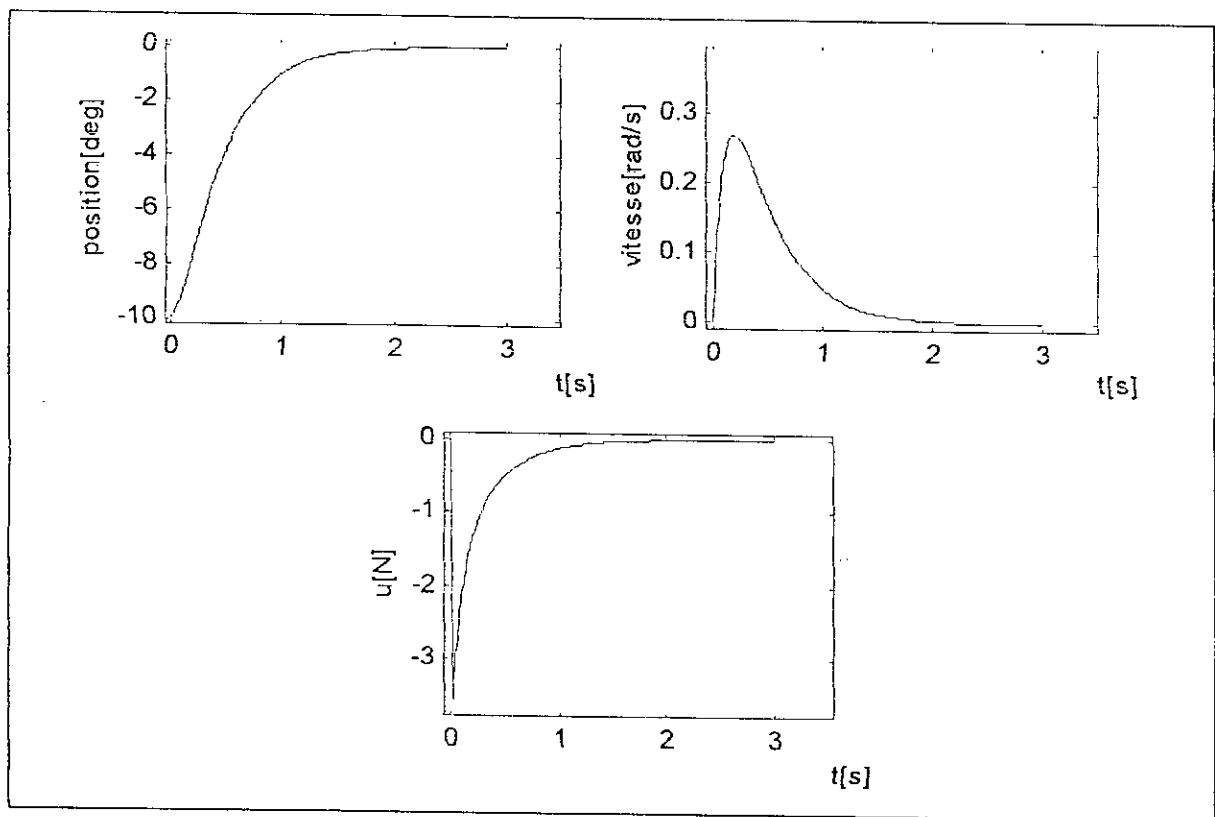
Fig(I.31) : variation de 50% de la masse m et de 50% de la M



Fig(I.32) : variation de 50% de la longueur l

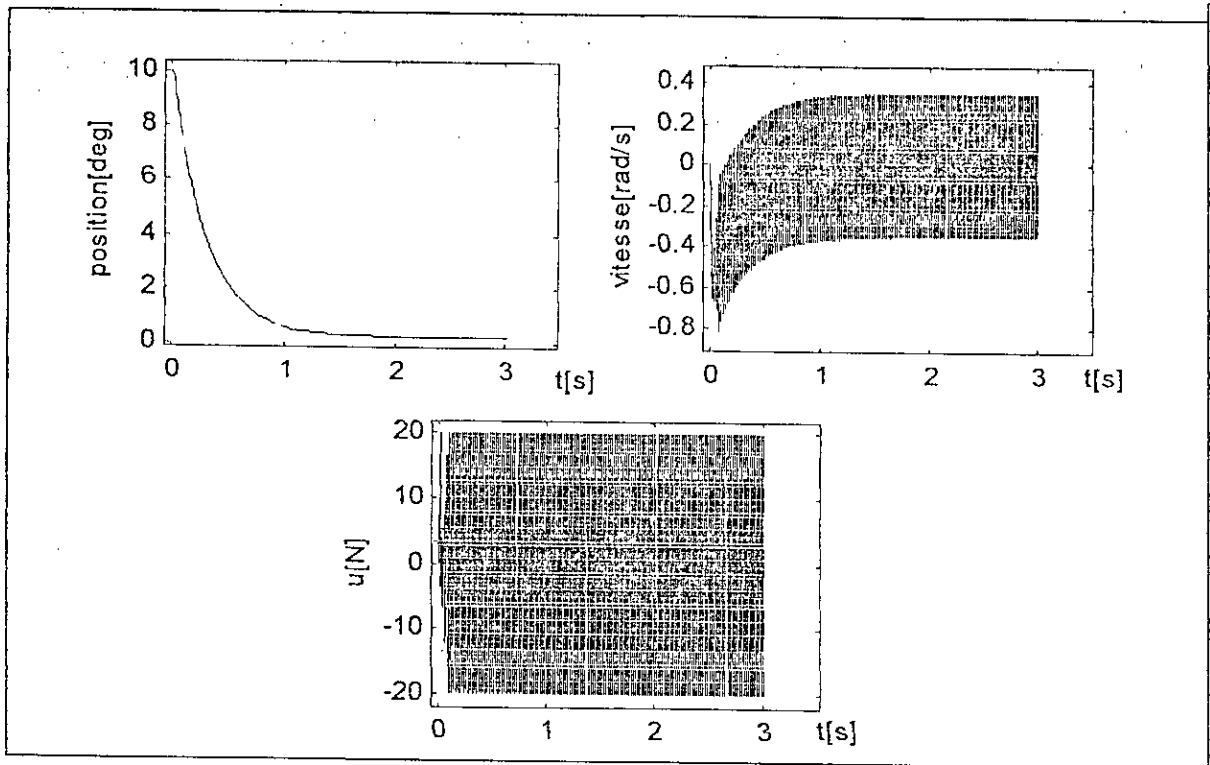


Fig(I.33) : variation de 80% de la masse m et de 80% de la M

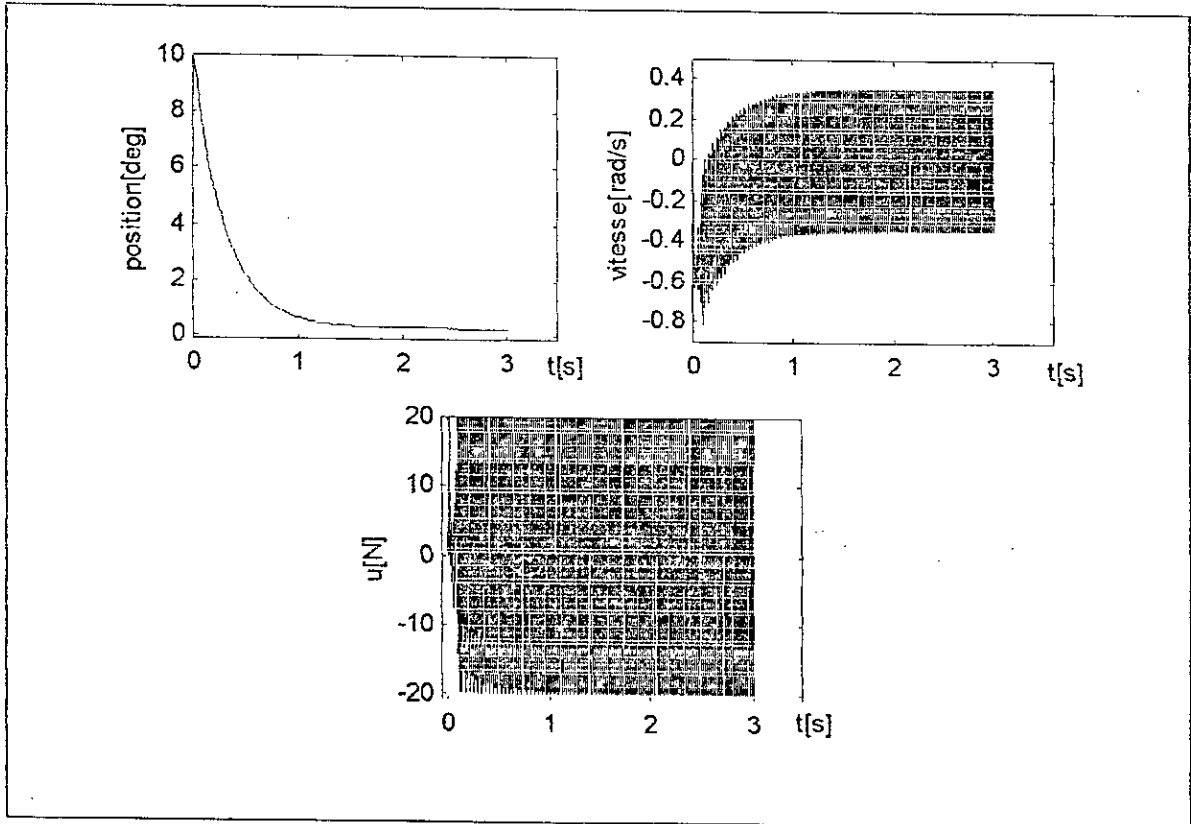


Fig(I.34) : variation de 80% de la longueur l

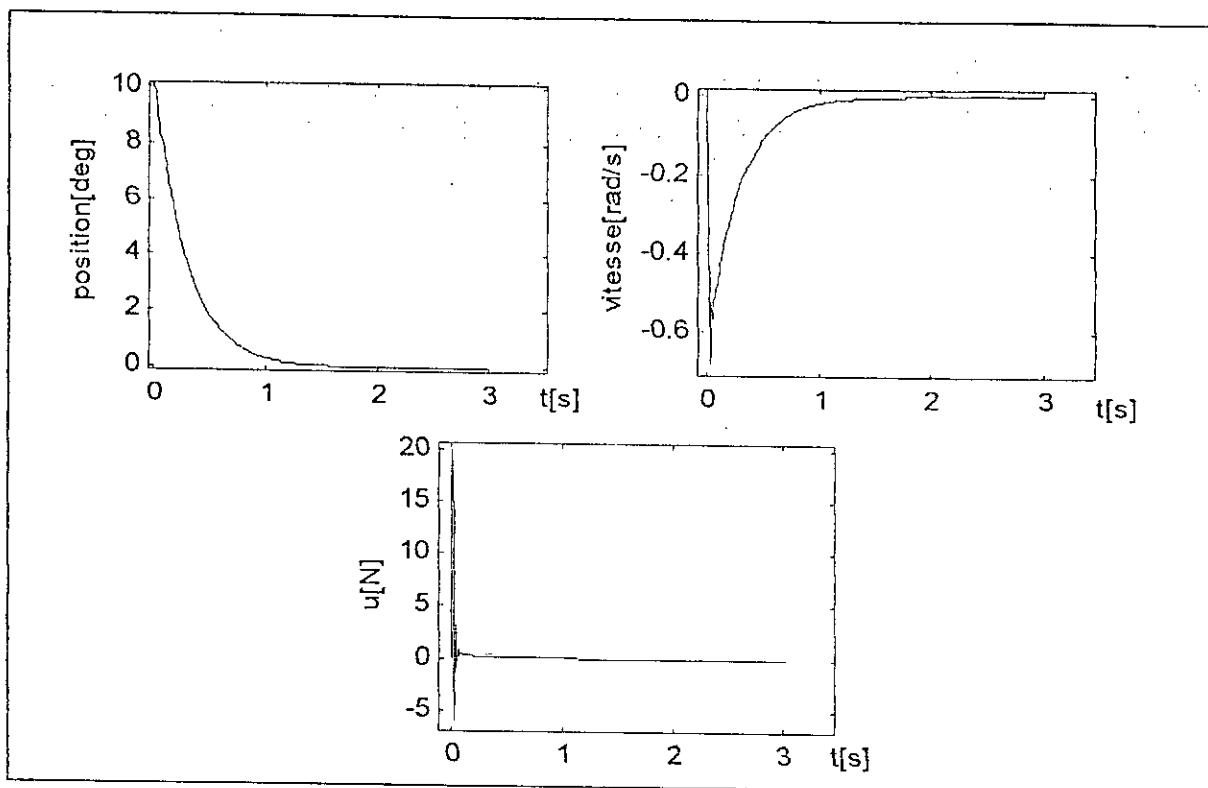
LMI



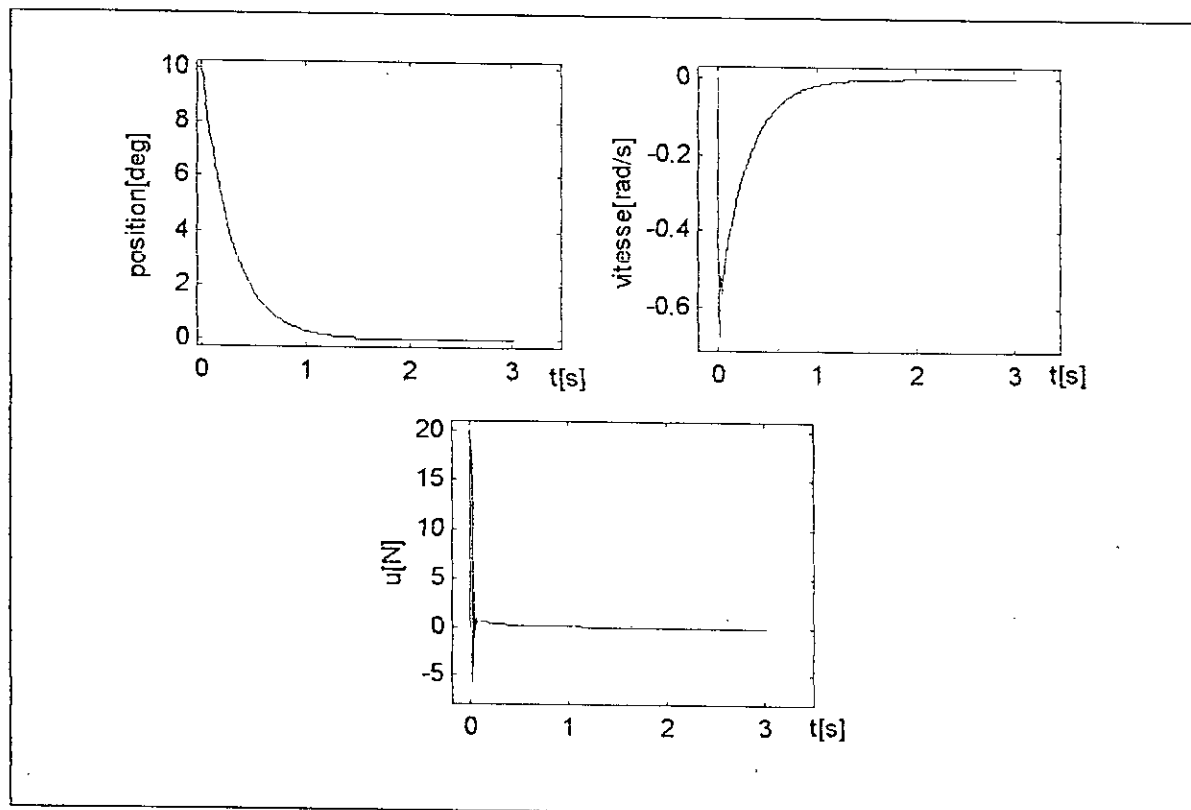
Fig(I.35) : variation de 50% de la masse m et de 50% de la M



Fig(I.36) : variation de 50% de la longueur l



Fig(I.37) : variation de 80% de la masse m et de 80% de la M



Fig(I.38) : variation de 80% de la longueur l

Commentaire :

Nous remarquons à travers les résultats précédents que la commande, qu'elle soit calculée par placement de poles ou par résolution numérique, elle est robuste vis à vis de la variation des paramètres du pendule et cela pour les deux systèmes étudiés (3 règles et 5 règles).

1.9. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressé à la technique PDC avec laquelle on conçoit un régulateur flou basé sur le modèle flou de T-S et sur des retours d'état linéaires. Pour cela, nous avons d'abord présenté la structure du modèle flou de T-S puis celle du régulateur flou. Nous avons ensuite donné les différentes étapes à suivre pour concevoir ce régulateur ainsi que les différentes façons d'obtenir la commande. L'analyse de la stabilité des systèmes flous bouclés incluant ce type de régulateur nécessite des outils numériques notamment la technique LMI, c'est pourquoi nous l'avons introduite. Enfin, pour tester les performances apportées par ce régulateur, nous l'avons appliqué au pendule inversé qui est un système fortement non linéaire. Nous avons pour cela considéré deux méthodes, une basée sur un placement de poles, l'autre sur la résolution numérique d'un système d'inégalités matricielles.

Les résultats obtenus montrent que les deux méthodes offrent de bonnes performances et assurent au système une stabilité asymptotique. Il est donc plus intéressant d'utiliser une méthode systématique au lieu de tatonner pour trouver les poles adéquats. La résolution numérique est, par conséquent, préférable.



Chapitre II

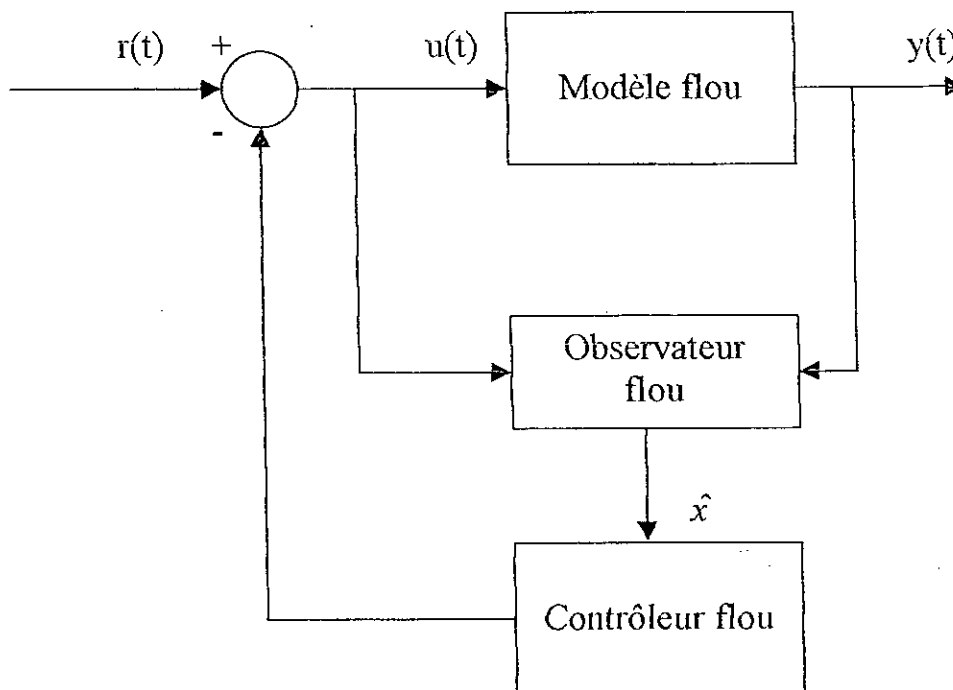
Conception d'un
observateur flou par
PDC

II.1.Introduction :

Le chapitre précédent traite le cas de systèmes ayant l'ensemble des états connu. Il existe cependant des systèmes physiques ayant tout l'état ou une partie de lui inaccessible. C'est souvent le cas en pratique. Pour palier à ce problème des observateurs sont introduits pour estimer les états non mesurables. L'étude précédente étant, dans ce cas, inappropriée, *Ma et Tanaka* ont proposé de la compléter en donnant à l'observateur une structure semblable à celle du modèle flou T-S. Les gains d'observation et les gains de commande sont alors déterminés systématiquement en combinant les LMI de l'observateur flou avec ceux du régulateur flou. Il est prouvé qu'une bonne connaissance du principe de séparation permet de déterminer les gains d'observation indépendamment des gains de commande.

II.2.Système flou augmenté :

Etant donné le modèle flou de T-S (I.1), le système flou augmenté est composé d'un modèle flou de T-S, d'un régulateur flou et d'un observateur flou.



FigII.1 : Représentation du système flou augmenté [4]

II.3. Observateur flou :

Comme tout observateur, l'observateur flou est un système dynamique qui, à partir de grandeurs mesurables, génère un vecteur \hat{x} de telle sorte que l'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$ tende asymptotiquement vers zéro.

II.3.1. Obtention de l'observateur flou :

Pour former un observateur flou basé sur le modèle flou T-S, on procède comme suit :

- ◆ il faut d'abord s'assurer que le système flou est localement observable. Ce qui revient à vérifier que les paires (A_i, C_i) $i=1, \dots, r$, soient observables.
- ◆ En suite, former les règles de l'observateur de façon à ce que la partie prémisses de celles-ci soit identique à celle du modèle flou.
- ◆ La conséquence de chaque règle est un observateur local.

II.3.2. Structure de l'observateur flou :

La structure de l'observateur flou diffère selon que l'état est totalement ou partiellement inconnu. Si tout l'état est inconnu, l'observateur flou est dit complet. Sinon, il est dit réduit :

II.3.2.1. Structure d'un observateur flou complet :

Basé sur le triplet (A_i, B_i, C_i) , l'observateur flou est donné par:

Règle i :

$$\begin{aligned} & \text{Si } z_1 \text{ est } M_{i1} \text{ et } z_2 \text{ est } M_{i2} \text{ et } \dots \text{ et } z_g \text{ est } M_{ig} \\ & \dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \text{Alors : } & \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t), \quad i=1, r. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Où $\hat{x}(t)$ est le vecteur d'état estimé, $y(t)$ est le vecteur de sortie du sous système flou, $\hat{y}(t)$ est le vecteur de sortie de l'observateur flou correspondant. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$. M_{ij} sont des ensembles flous. L_i sont les matrices gains d'observation [2][9].

L'état global estimé et la sortie finale de l'observateur sont donnés par ::

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} (II.2) \\ (II.3) \end{matrix}$$

Où les degrés d'activation normalisés λ_i sont ceux du modèle flou.

II.3.2.2. Structure d'un observateur flou réduit :

Pour simplifier, nous considérons des modèles sous forme compagne.

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^i \\ B_2^i \end{bmatrix} u(t). \quad (II.4)$$

$y(t) = \chi_1(t)$.

Où $\chi_1(t)$ représente les états accessibles et $\chi_2(t)$ les états inaccessibles [2].
L'observateur flou réduit est alors de la forme [2]:

Règle i :

$$\begin{aligned} & \text{Si } z_1 \text{ est } M_{i1} \text{ et } z_2 \text{ est } M_{i2} \text{ et ... et } z_r \text{ est } M_{ir} \\ & \text{alors : } \dot{v}(t) = F_i v(t) + G_i y(t) + H_i u(t) \quad , \quad i = 1, r. \end{aligned} \quad (II.5)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_2(t) &= v(t) - L_i y(t), \\ F_i &= A_{22}^i - L_i A_{12}^i, \\ G_i &= -F_i L_i + (A_{21}^i + L_i A_{11}^i), \text{ et} \\ H_i &= B_2^i + L_i B_1^i. \end{aligned}$$

L'état global est donné par :

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (F_i v(t) + G_i y(t) + H_i u(t)) \quad (II.6)$$

Les gains d'observation L_i peuvent être déterminés par un simple placement de pôles.

II.5. Condition de stabilité des systèmes flous augmentés:

II.5.1. Cas de l'observateur complet :

Théorème II.1:[2]

Le point d'équilibre du système flou augmenté décrit par (II.13) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune \bar{P} symétrique et définie positive telle que:

$$\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} < 0 \quad (II.14)$$

Ce théorème peut être reformulé autrement si on prend $\bar{P} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ avec

$P, Q > 0$.

Le point d'équilibre du système flou augmenté décrit par (II.13) est globalement asymptotiquement stable s'il existe deux matrices P et Q symétriques et définies positives telles que:

$$P(A_i - B_i K_j)^T + (A_i - B_i K_j)P < 0, \quad i=1, \dots, r \text{ et } j=1, \dots, r \quad (II.15)$$

$$(A_i - L_i C_i)^T Q + Q(A_i - L_i C_i) < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (II.16)$$

• Preuve :

La matrice \bar{A} peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j \\ 0 & \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - L_i C_i) \end{bmatrix}$$

L'inégalité (II.14) se réécrit alors :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j \\ 0 & \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - L_i C_i) \end{bmatrix}^T \bar{P} + P \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) & - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j \\ 0 & \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - L_i C_i) \end{bmatrix} < 0 \quad (II.17)$$

En substituant \bar{P} dans l'inégalité (II.17), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j \\ 0 & \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - L_i C_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j \\ 0 & \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - L_i C_i) \end{bmatrix} < 0 \quad (II.18)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j ((A_i - B_i K_j)^T P^{-1} + P^{-1} (A_i - B_i K_j)) & P^{-1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j \\ (\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j)^T P^{-1} & \sum_{i=1}^r \lambda_i ((A_i - L_i C_i)^T Q + Q (A_i - L_i C_i)) \end{bmatrix} < 0 \quad (II.19)$$

$$P(A_i - B_i K_j)^T + (A_i - B_i K_j)P < 0, \quad i=1, \dots, r \text{ et } j=1, \dots, r \quad (II.15)$$

$$(A_i - L_i C_i)^T Q + Q(A_i - L_i C_i) < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (II.16)$$

Le choix de $\bar{P} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ est prouvé dans [2].

Si les gains de commande K_j et les gains d'observation L_j sont prédéterminés par un placement de pôles, les matrices P et Q sont obtenus en résolvant les LMI (II.15) et (II.16). Si par contre ils sont considérés inconnus, ils peuvent être déterminés systématiquement en transformant les deux inégalités (II.15) et (II.16) en des inégalités linéaires matricielles LMI par le changement de variables suivant :

$$W_i = Q L_i, V_i = K_i P. \quad (II.17)$$

Nous obtenons alors :

$$A_i^T P + P A_i - B_i V_j - V_j^T B_i^T < 0, \quad i=1, \dots, r \text{ et } j=1, \dots, r \quad (II.18)$$

$$A_i^T Q + Q A_i - W_i C_i - C_i^T W_i^T < 0, \quad i=1, \dots, r \quad (II.19)$$

II.5.2. Cas de l'observateur réduit :

Le système flou augmenté comprenant le modèle flou T-S et l'observateur réduit est représenté par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \bar{A}_r \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (II.20)$$

Avec
$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j Q_{2i} \\ 0 & \sum_{i=1}^r \lambda_i F_i \end{bmatrix}.$$

$$e(t) = z(t) - T_i x(t), T_i = [0 \ I_{n-q}] \text{ et } \begin{bmatrix} C_i \\ T_i \end{bmatrix}^T = [Q_{1i} \ Q_{2i}]$$

Théorème II.2.:

Le point d'équilibre du système flou augmenté décrit par (II.13) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune \bar{P} symétrique et définie positive telle que:

$$\bar{A}_r^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_r < 0 \quad (II.21)$$

Sachant que $F_i = A_{22}^i - L_i A_{12}^i$, la matrice \bar{A}_r devient :

$$\text{Nous avons } \bar{A}_r = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j (A_i - B_i K_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i \lambda_j B_i K_j Q_{21} \\ 0 & \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_{22}^i - L_i A_{12}^i) \end{bmatrix}.$$

Elle a la même forme que \bar{A} , l'étude se fait exactement comme pour \bar{A} .

De ce fait, la reformulation du théorème se transforme en :

Le point d'équilibre du système flou augmenté décrit par (II.20) est globalement asymptotiquement stable s'il existe deux matrices P et Q symétriques et définies positives telles que:

$$P(A_i - B_i K_j)^T + (A_i - B_i K_j)P < 0, \quad i=1, \dots, r \text{ et } j=1, \dots, r \quad (II.21)$$

$$(A_{22}^i - L_i A_{12}^i)^T Q + Q(A_{22}^i - L_i A_{12}^i) < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (II.22)$$

De même dans le cas où K_i et L_i sont inconnus, le changement de variables permettant de passer d'une NMI à une LMI est identique à celui de l'observateur complet. Et les inégalités matricielles sont alors :

$$A_i P + P A_i - B_i V_j - V_j^T B_i^T < 0, \quad i=1, \dots, r \text{ et } j=1, \dots, r \quad (II.18)$$

$$A_{22}^{iT} Q + Q A_{22}^i - W_i A_{12}^i - A_{12}^{iT} W_i^T < 0, \quad i=1, \dots, r \quad (II.19)$$

II.6. Application :

Il n'est pas intéressant dans le cas du pendule inversé de lui ajouter un observateur vu qu'il dispose déjà de capteurs de position et de vitesse très précis. Cependant, nous l'utilisons ici uniquement pour illustrer la méthode. Pour cela, nous supposons que la vitesse est non accessible. La position, quand

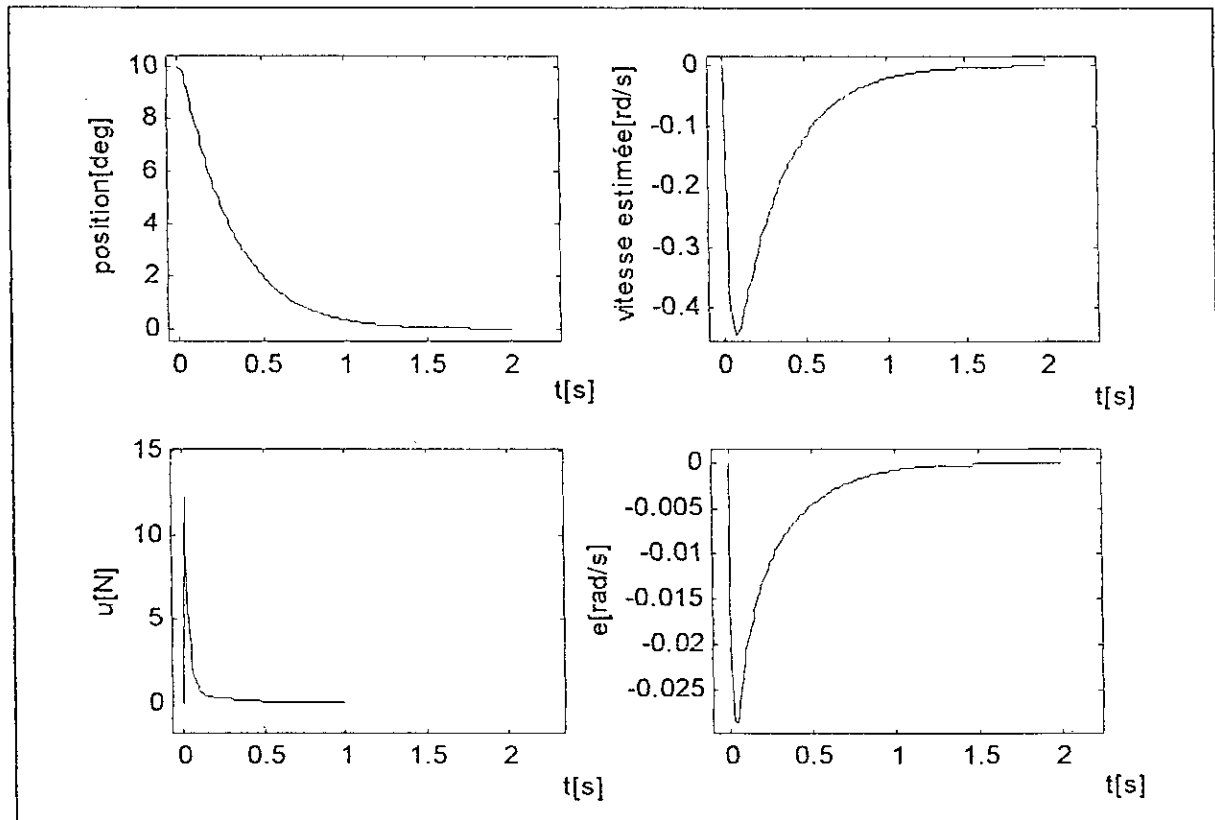
Pour cela, nous supposons que la vitesse est non accessible. La position, quand à elle est directement mesurée par le capteur. Comme pour le chapitre précédent, nous considérons deux façons de déterminer les gains d'observation. Une, en utilisant un placement de poles et l'autre en résolvant un système d'LMI. Pour chaque cas, nous prenons les gains de commande trouvés dans le chapitre I et nous ne considérons que la position initiale $\theta = 10^\circ$ et $\omega = 0 \text{ rad/s}$.

Simulation numérique:

II.6.1.1. Système à trois règles :

- **Détermination des gains d'observation par un placement de pôles :**

Le placement de poles choisi est à : -50, -10.



FigII.2. : Observation de la vitesse en utilisant un placement de pôles.

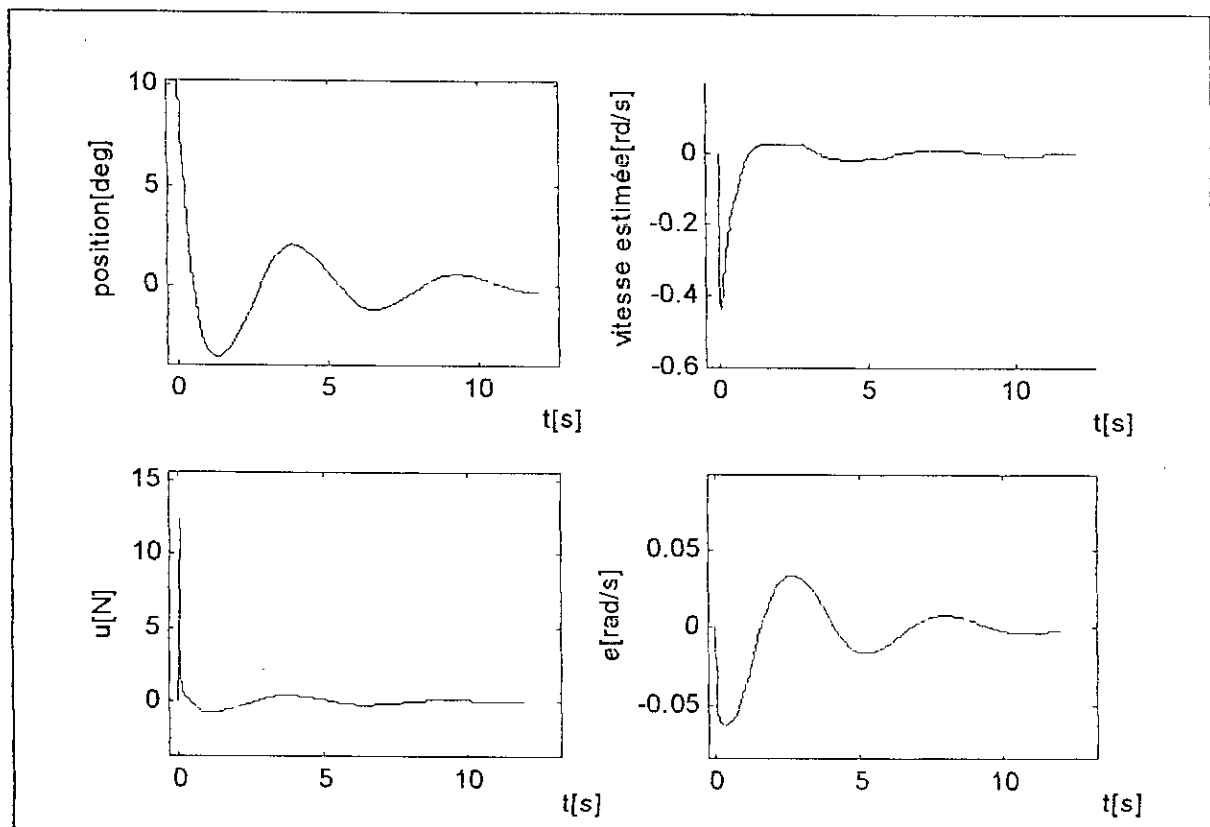
La matrice de stabilité de l'observateur est :

$$Q = \begin{bmatrix} 12336.346 & -1475.0073 \\ -1475.0073 & 203.35293 \end{bmatrix}$$

- **Détermination des gains d'observation par résolution d'LMI :**

Les gains d'observation L_1 , L_2 et la matrice de stabilité Q obtenus de la résolution des LMI sont :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.7464036 \\ 18.526919 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.7543388 \\ 10.596176 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.0004119 & 0.0001253 \\ 0.0001253 & 0.0004119 \end{bmatrix}$$



FigII.3. :Observation de la vitesse en utilisant les LMI.

Commentaire :

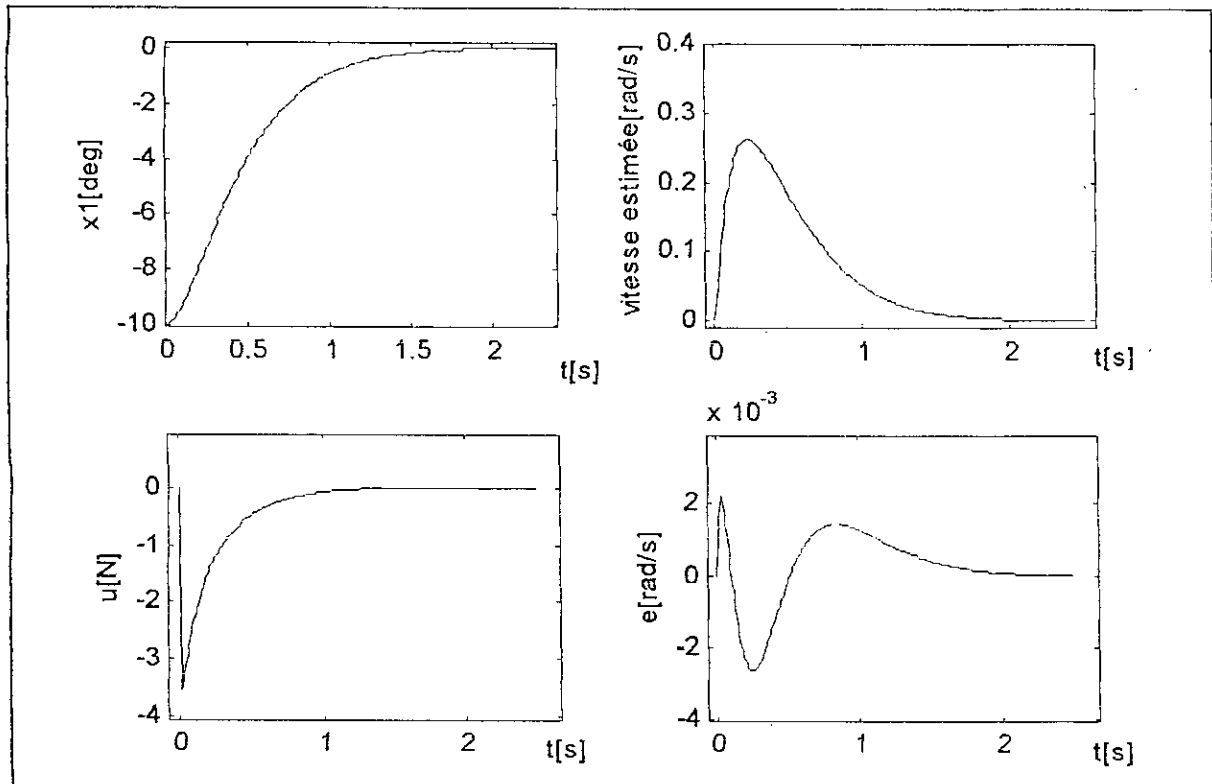
Nous remarquons que le placement de poles choisi $[-50,-10]$ permet d'obtenir une erreur d'observation asymptotiquement stable . Le temps nécessaire à l'observateur pour que cette erreur s'annule est de 1s. L'observateur trouvé par la résolution d'LMI nécessite par contre, un temps beaucoup plus grand environ de 10s. De plus, il rend la position oscillatoire mais stable.

II.6.1.2. Système à cinq règles :

- *Détermination des gains d'observation par un placement de pôles :*

La matrice de stabilité Q est :

$$Q = \begin{bmatrix} 4599.1387 & -550.5475 \\ -550.5475 & 76.543792 \end{bmatrix}$$

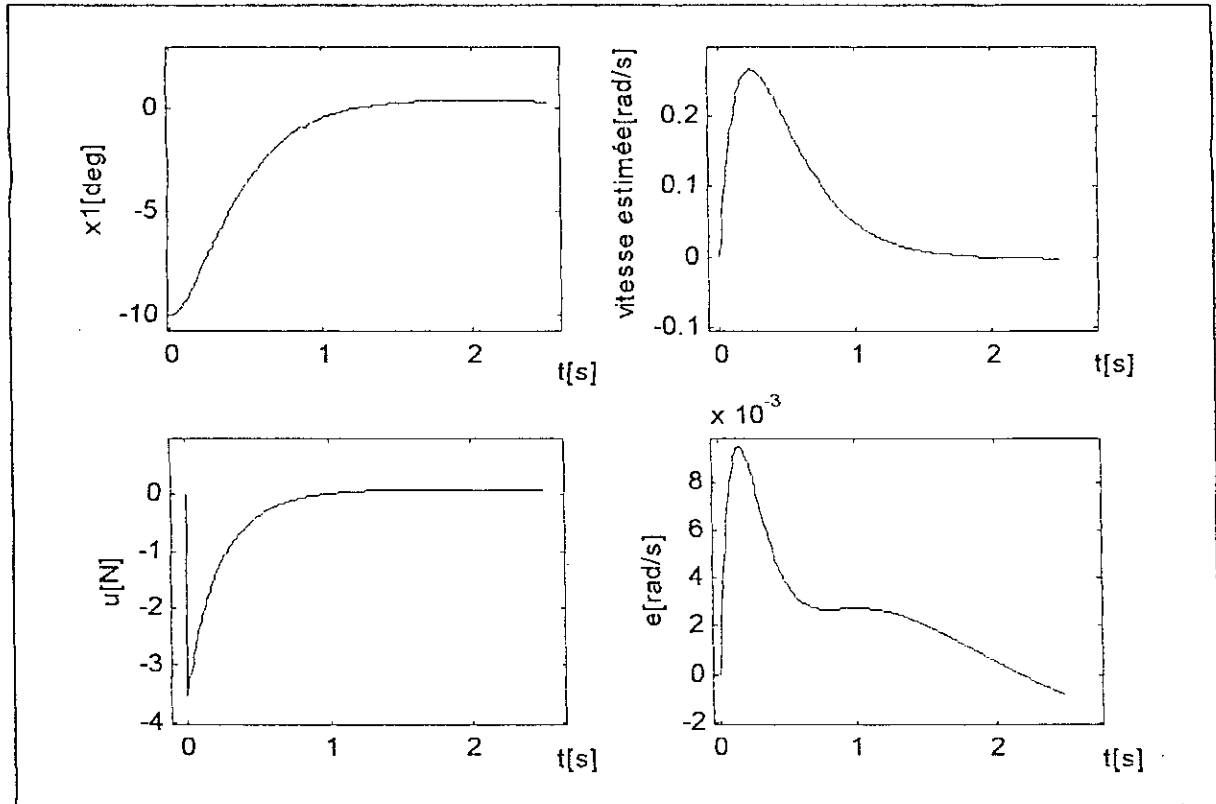


FigII.4. : Observation de la vitesse en utilisant un placement de pôles.

- *Détermination des gains d'observation par résolution d'LMI :*

Les gains d'observation L_1 , L_2 , L_3 et la matrice de stabilité Q obtenus de la résolution des LMI sont :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.7741863 \\ 18.557384 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.7734327 \\ 7.1134635 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0.7735598 \\ 10.622399 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.0000945 & 0.0000320 \\ 0.0000320 & 0.0000945 \end{bmatrix}$$



FigII.5. : Observation de la vitesse en utilisant les LMI.

Commentaire :

Le placement de poles à $-50, -10$ ainsi que la résolution numérique offrent au système à cinq règles une erreur d'observation asymptotiquement stable. Le temps nécessaire pour que cette erreur s'annule est de $0.4s$ pour le placement de poles et de 0.6 pour les LMI.

II.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la conception d'un régulateur parallèle distribué flou pour les systèmes dont l'état est complètement ou partiellement inconnu. Nous avons pour cela, donné la structure de

l'observateur flou complet puis celle de l'observateur flou réduit. Puis, Nous avons synthétisé le régulateur PDC basé sur l'état estimé. Nous avons également élaboré les conditions de stabilité des systèmes flous augmentés. Pour illustrer cette méthode, nous l'avons appliqué aux deux modèles du pendule inversé. Nous avons déterminé les gains d'observation en utilisant d'abord un placement de pôles puis en exploitant la méthode numérique.

Les résultats obtenus montrent que l'observateur est mieux conçu par le système à cinq règles. Aussi, puisque les deux méthodes testées ici donnent les mêmes performances, il est alors préférable de choisir la méthode numérique offrant une résolution analytique.



Chapitre III

Commande floue
adaptative indirecte à
modèle de référence

III.1. Introduction :

Ces dernières années la commande floue est devenue très populaire et très utilisée dans de nombreux domaines industriels.

Les contrôleurs flous sont supposés travailler dans les situations où les paramètres du système sont incertains ou inconnus, ce qui a poussé les automaticiens à combiner la commande floue à d'autres techniques de commande telle que la commande adaptative. En général les objectifs de la commande adaptative est de maintenir les performances du système constantes dans la présence des paramètres incertains ou inconnus ou susceptibles de varier dans le temps.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à la commande floue adaptative indirecte à modèle de référence basée sur la théorie de *Lyapunov*. Les paramètres du régulateur flou seront calculés en temps réel à partir des estimés des paramètres du modèle de *Takagi- Sugeno* générés par une loi d'adaptation appropriée.

III.2. Commande floue linéarisante par retour d'état du modèle T-S :

Récemment, plusieurs études ont été effectués sur le contrôleur par retour d'état flou linéarisé basé sur le modèle de *Takagi- Sugeno*[11][13]. Dans cette partie, nous utiliserons le concept de la commande floue linéarisante par retour d'état (FFLC) proposée par [Y-W Cho] pour développer une commande floue adaptative indirecte du modèle T-S.

Considérons le système non- linéaire suivant décrit par de modèle *Takagi- Sugeno* [10]:

Règle i : si z_1 est $M_1^i(z_1)$ et...et z_p est $M_p^i(z_p)$

$$\text{Alors } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (\text{III-1})$$

Où $(i = 1, 2, \dots, l)$ représentent les règles et l le nombre de règles.

$p(p \leq n)$ Le nombre des variables d'état utilisées comme entrée de la prémisse de la règle, x est la sortie de la règle.

$x = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_1]^T$ est le vecteur d'état, u est la commande, et $M_j^i (j = 1, 2, \dots, p)$

sont les degrés d'appartenance des entrées du système.

Soit la paire entrée/sortie (x, u) , le modèle flou T-S est représenté par l'équation suivante :

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)]}{\sum_{i=1}^l w_i(z(t))} \quad (\text{III-2})$$

où : $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z(t))$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_n^i & a_{n-1}^i & \dots & a_2^i & a_1^i \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

On suppose que les coefficients $b^i (i=1,2,\dots,l)$ gardent le même signe pour toutes les règles : ils sont soit positifs ou négatifs.

L'objectif de cette commande est de synthétiser un retour d'état flou telle que la boucle fermée du système (III-2) devient linéairement stable.

Théorème (III-1) [2]:

Considérons le système flou suivant :

Règle_i : si z_1 est $N_1^i(z_1)$ et...et z_p est $N_p^i(z_p)$

Alors $u(t) = -K_i x(t)$ (III-3)

on obtient :

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) K_i}{\sum_{i=1}^l \mu_i(z(t))} x(t) \quad (\text{III-4})$$

où $K_i = [k_n^i, k_{n-1}^i, \dots, k_1^i]$

et $\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p N_j^i(z_j(t))$

si on choisit les paramètres de la relation (III-4) tel que :

$$k_m^i = \frac{1}{b^i} (a_m^i - a_m^d) \quad (m = 1.2.\dots,n)$$

$$N_j^i = \sqrt{|b^i|} M_j^i \quad (j = 1.2.\dots.p)$$

où les M'_i sont les degrés d'appartenance du système (III-2).

Le système non-linéaire flou est transformé au système linéaire désiré représenté par l'équation suivante :

$$x(t) = A_d x(t), \quad A_d = \begin{bmatrix} a^d_n & a^d_{n-1} & \dots & a^d_2 & a^d_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-5})$$

Preuve : La démonstration est donnée dans l'annexe (A)

Si les coefficients de la commande (III-4) sont imposés tel que le polynôme $h(s) = s^n - a^d_n s^{n-1} - \dots - a^d_1$ est *Hurwitz* (c.-à-d. ses racines sont dans le demi-plan gauche), la boucle fermée du système (III-5) est asymptotiquement stable. Les techniques de commande linéairement stabilisantes comme le placement de pôle, et LQG sont très utiles pour déterminer ces coefficients.

Par conséquent, en utilisant le retour d'état linéaire flou présenté dans le théorème (III-1), on peut facilement construire un contrôleur flou qui stabilisera le système (III-1) sans erreur de poursuite, il suffira de trouver les gains du PDC appropriés pour le retour d'état [5].

III.3. Commande floue adaptative indirecte à modèle de référence :

Dans cette partie, on développera une commande floue adaptative basée sur le modèle de référence indirect où les paramètres du système seront estimés par une loi d'adaptation appropriée. Ces derniers seront utilisés pour calculer les paramètres du contrôleur à chaque instant t .

Soit un système représenté par le modèle T-S localement commandable et sous la forme canonique (III-1).

$$\text{Où : } w_i(z(t)) = \prod_{i=1}^l M'_i(z(t))$$

Le signe de b^i ($i = 1, 2, \dots, l$) est supposé connu et les matrices A_i, B_i sont inconnues.

L'objectif de cette méthode est de déterminer une loi de commande tel que tous les signaux de la boucle fermée seront bornés et la variable d'état x suit l'état x_m du modèle de référence représenté par l'équation ci-dessous :

$$x_m = A_m x_m + B_m r \quad (\text{III-6})$$

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \mu_i(z) [-K_i(t)x(t) + L_i(t)r(t)]}{\sum_{i=1}^l \mu_i(z(t))} \quad (\text{III-9})$$

Les matrices K_i, L_i et les degrés d'appartenance $\mu_i(t)$ sont respectivement les estimés de K^*_i, L^*_i et $\mu^*_i(t)$. Dans la commande adaptative indirecte on détermine $K_i, L_i, \mu_i(t)$ en utilisant la relation (III-8) pour laquelle les matrices \hat{A}, \hat{B} sont les estimées de $A_i, B_i (i=1,2,\dots,l)$:

$$K_i(t) = \frac{1}{\hat{b}_i} [\hat{\alpha}_n^i(t) - \alpha_n^m, \hat{\alpha}_{n-1}^i(t) - \alpha_{n-1}^m, \dots, \hat{\alpha}_1^i(t) - \alpha_1^m]$$

$$L_i(t) = \frac{1}{\hat{b}_i(t)} b^m$$

$$\mu_i(t) = w_i |\hat{b}_i(t)| \quad (i=1,2,\dots,l)$$

Les paramètres $\hat{\alpha}_j^i, \hat{b}_i (i=1,2,\dots,l, j=1,2,\dots,n)$ des matrices \hat{A} et \hat{B} sont générés par une loi d'adaptation qui va être déterminée par la suite.

III.3.2. Loi d'adaptation :

Pour obtenir une loi d'adaptation permettant de générer les matrices \hat{A}_i et \hat{B}_i on écrira :

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t) ((A_i - A_m) \hat{x} + B_i u)}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (\text{III-10})$$

L'état \hat{x}_i estimé de x_i est généré par l'équation suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t) ((\hat{A}_i - A_m) \hat{x} + \hat{B}_i u)}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (\text{III-11})$$

le modèle de référence est défini comme suit :

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r$$

$$\text{et: } \hat{x} = x_m$$

Donc l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ est identique à l'erreur de poursuite $e = x - x_m$ et qui satisfèrent l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e} = A_m e + \frac{\sum_{i=1}^l w_i(z)(-\tilde{A}_i(t).x - \tilde{B}_i(t).u)}{\sum_{i=1}^l w_i(z)} \quad (\text{III-12})$$

où : $\tilde{A}_i = \hat{A}_i - A_i$, $\tilde{B}_i = \hat{B}_i - B_i$ sont les paramètres de l'erreur.
de ce qui précède on a :

$$\dot{e} = A_m e - \frac{\sum_{i=1}^l w_i[\tilde{a}_i \ 0 \ \dots \ 0]^T}{\sum_{i=1}^l w_i} . x - \frac{\sum_{i=1}^l w_i[\tilde{b}_i \ 0 \ \dots \ 0]^T}{\sum_{i=1}^l w_i} . u \quad (\text{III-13})$$

où $\tilde{a}_i^T = \hat{a}_i^T - a_i^T$, $\tilde{b}_i^T = \hat{b}_i^T - b_i^T$ et $a_i^T = [a_{i_n}^i, a_{i_{n-1}}^i, \dots, a_1^i]$

on propose une fonction de *Lyapunov* pour le système (III-4) et qui est définie comme suit [10]:

$$V(e, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i) = e^T . P . e + \sum_{i=1}^l \frac{\tilde{a}_i^T . \tilde{a}_i}{\gamma_{1i}} + \sum_{i=1}^l \frac{\tilde{b}_i^T . \tilde{b}_i}{\gamma_{2i}} \quad (\text{III-14})$$

où γ_{1i}, γ_{2i} sont des constantes et $P = P^T$ est une matrice définie positive, qui doit vérifier l'équation de *Lyapunov* suivante :

$$A_m^T . P + P . A_m = -I \quad (\text{III-15})$$

L'existence de la matrice P est garantie vu que A_m est choisie de telle sorte qu'elle stabilise le modèle de référence.

La dérivée temporelle \dot{V} de la fonction de *Lyapunov* V est donnée par :

$$\dot{V} = \dot{e}^T . P . e + e^T . P . \dot{e} + \sum_{i=1}^l 2 . \frac{\tilde{a}_i^T . \dot{\tilde{a}}_i}{\gamma_{1i}} + \sum_{i=1}^l 2 . \frac{\tilde{b}_i^T . \dot{\tilde{b}}_i}{\gamma_{2i}} \quad (\text{III-16})$$

En remplaçant la valeur de \dot{e} définie par l'équation (III-13) dans l'expression (III-16) et après des manipulations mathématiques simples, on aboutit au résultat suivant :

$$\dot{V} = -e^T . e - 2 . \frac{\sum_{i=1}^l w_i . p_1^T . e . x^T . \tilde{a}_i}{\sum_{i=1}^l w_i} - 2 . \frac{\sum_{i=1}^l w_i . p_1^T . e . u . \tilde{b}_i}{\sum_{i=1}^l w_i} + \sum_{i=1}^l 2 . \frac{\tilde{a}_i^T . \dot{\tilde{a}}_i}{\gamma_{1i}} + \sum_{i=1}^l 2 . \frac{\tilde{b}_i^T . \dot{\tilde{b}}_i}{\gamma_{2i}} \quad (\text{III-17})$$

En supposant :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\hat{a}}^T &= \hat{a}^T = \gamma_{1i} \frac{w_i}{\sum_{i=1} w_i} \cdot p_1^T \cdot e \cdot x^T \\ \tilde{\hat{b}}^T &= \hat{b}^T = \gamma_{2i} \frac{w_i}{\sum_{i=1} w_i} \cdot p_1^T \cdot e \cdot u \end{aligned} \right.$$

où p_1 est la première colonne de la matrice P qui satisfait l'équation de Lyapunov (III-13).

On a : $\dot{V} = -e' \cdot e \leq 0$

Ce qui implique que $e, \hat{a}_i, \hat{b}_i \in L_\infty$, de plus $x_m, x \in L_\infty$. Il n'est pas toujours évident de prouver que la commande u est bornée, à moins, qu'on montre que les matrices $K_i(t), L_i(t)$ et les degrés d'appartenance $\mu_i(t)$ sont bornés, pour les $\mu_i(t)$ la démonstration est facile puisqu'il suffit de résoudre l'équation :

$$\mu_i(t) = w_i(z(t)) \cdot |\hat{b}_i(t)|, \quad 0 \leq w_i(z(t)) \leq 1 \text{ et } \hat{b}_i \in L_\infty.$$

Les matrices $K_i(t), L_i(t)$ peuvent ne pas être bornées puisque la loi d'adaptation (III-17) peut générer des estimés \hat{b}_i voisin de zéro ou nuls donc les paramètres $\frac{1}{\hat{b}_i}$ deviennent non bornés.

Une des méthodes pour éviter que les coefficients \hat{b}_i ne s'annulent est de modifier la loi d'adaptation pour les coefficients \hat{b}_i de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\hat{a}}^T &= \hat{a}^T = \gamma_{1i} \frac{w_i}{\sum_{i=1} w_i} \cdot p_1^T \cdot e \cdot x^T \\ \tilde{\hat{b}}^T &= \hat{b}^T = \gamma_{2i} \frac{w_i}{\sum_{i=1} w_i} \cdot p_1^T \cdot e \cdot u && \text{si } |\hat{b}_i| > b_0 \text{ ou si } |\hat{b}_i| = b_0 \text{ et } p_1^T \cdot e \cdot u \cdot \text{sgn}(b_i) \geq 0 \\ &0 && \text{ailleurs} \end{aligned} \right. \quad \text{(III-18)}$$

où b_0 est la borne inférieure, et $\hat{b}_i(0)$ est choisi tel que : $\hat{b}_i(0) \cdot \text{sgn}(b_i) \geq b_0$.

III.3.3. Analyse :

On peut établir le théorème suivant qui montre les propriétés de la commande floue adaptative indirecte à modèle de référence : La loi de commande et la loi d'adaptation garantissent la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée, et de plus, le vecteur d'état du système x poursuit asymptotiquement l'état du modèle de référence x_m pour tout signal de référence r borné.

Théorème(III-2)[10] :

Considérons le modèle (III-2) et le modèle de référence (III-6), avec la loi de commande (III-9) et la loi d'adaptation (III-18). Supposons que l'entrée de référence r et le vecteur d'état x_m du modèle de référence sont uniformément bornés, donc la loi de commande et la loi d'adaptation garantissent :

- 1- $K_i(t), L_i(t), \mu_i(t), e(t)$ sont bornés pour tout $i = 1, 2, \dots, l$.
- 2- $e(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.
- 3- $\hat{a}_i, \hat{b}_i \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow 0$.

Preuve :

D'après la relation (III-18), si $\hat{b}_i(0) \text{sgn}(b_i) \geq b_0$ pour tout $(i = 1, 2, \dots, l)$, et $\hat{b}_i(t) \text{sgn}(b_i) \geq |\hat{b}_i(t)|$ alors $\hat{b}_i \geq 0$ ce qui implique que $|\hat{b}_i(t)| \geq b_0$ pour tout $t \geq 0$ de plus la dérivée temporelle de (III-14) le long de la trajectoire de (III-13) et (III-18) satisfait :

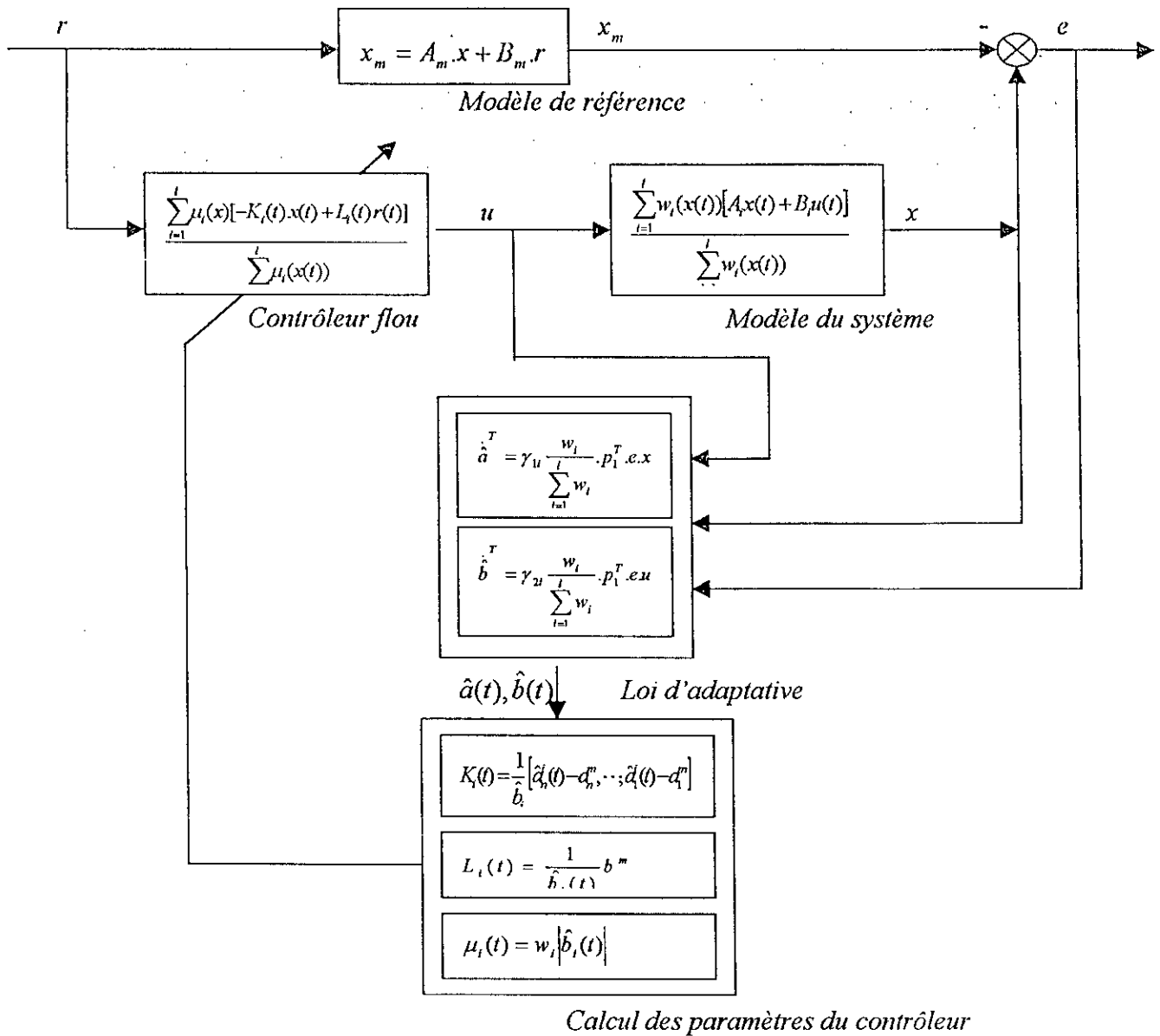
$$\dot{V} = \begin{cases} -e^T e & \text{si } |\hat{b}_i| > b_0 \text{ ou } |\hat{b}_i| = b_0 \text{ et } p_i^T e \text{sgn}(b_i) \geq 0 \\ -e^T e - 2 \frac{\sum w_i \tilde{b}_i}{\sum w_i} p_i^T e u & \text{si } |\hat{b}_i| = b_0 \text{ ou } |\hat{b}_i| = b_0 \text{ et } p_i^T e \text{sgn}(b_i) < 0 \end{cases}$$

pour $|\hat{b}_i(t)| = b_0$, on a $(\hat{b}_i(t) - b_i) \text{sgn}(b_i) < 0$.

De plus, pour $|\hat{b}_i(t)| = 0$ et $p_i^T e \text{sgn}(b_i) < 0$, on a :

$$\hat{b}_i p_i^T e u = (\hat{b}_i(t) - b_i) \text{sgn}(b_i) (p_i^T e \text{sgn}(b_i)) > 0$$

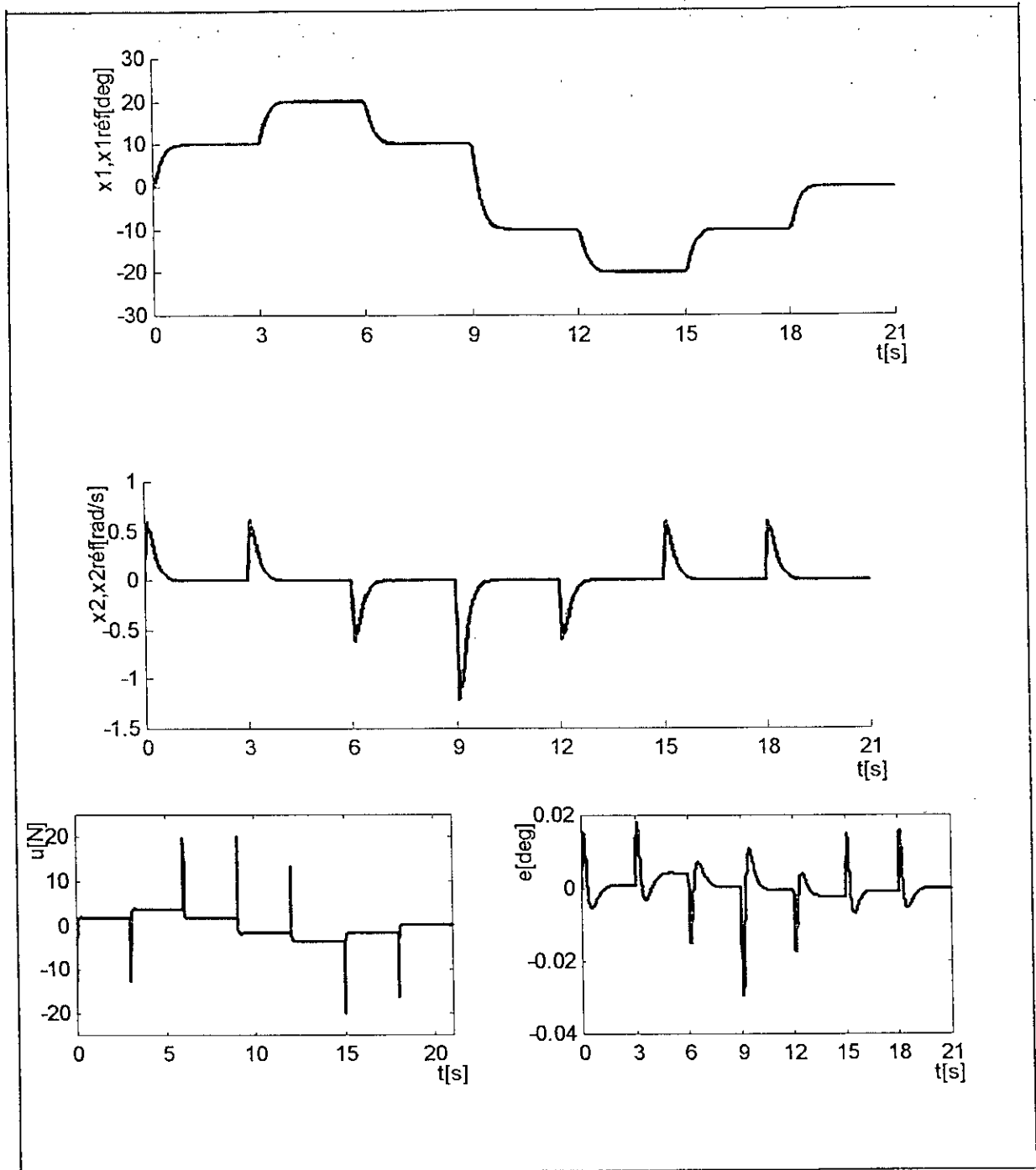
ce qui implique :



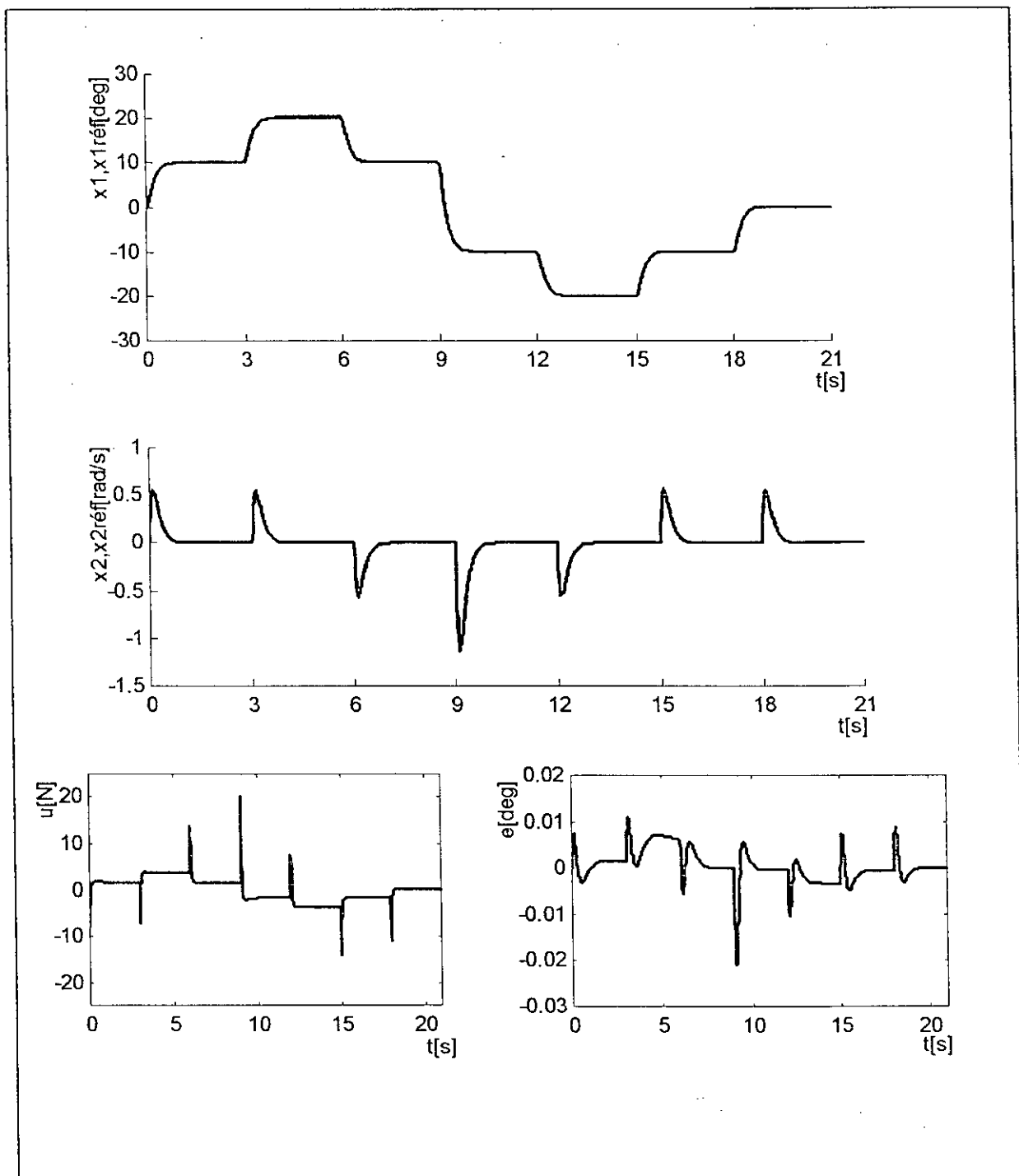
Fig(III.1): commande floue adaptative indirecte avec un modèle de référence.

III.4.Simulation numérique :

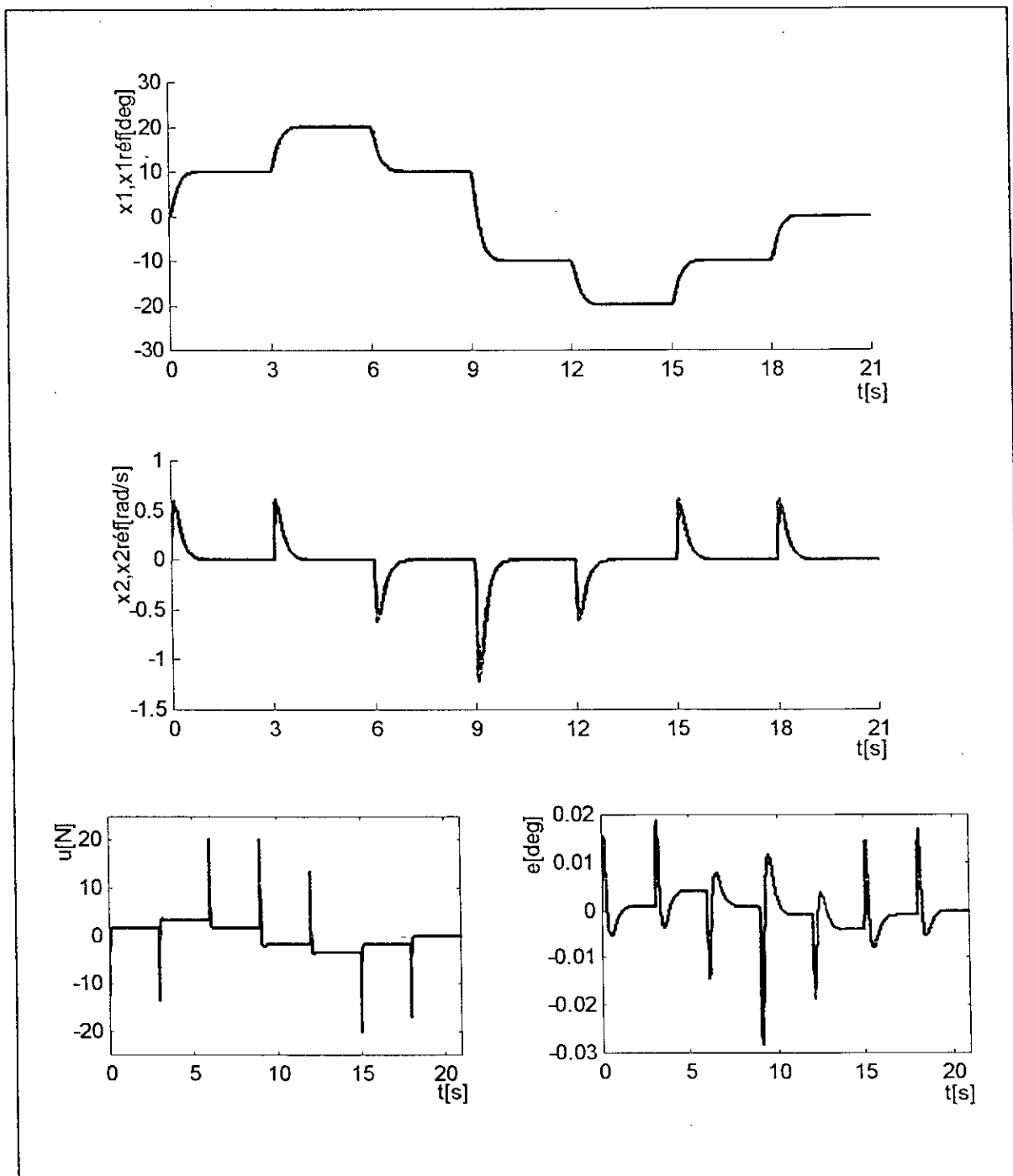
Dans cette section, nous présentons les résultats de la simulation de la commande floue adaptative indirecte à modèle de référence appliquée au réglage de position du pendule inversé. Nous avons proposé un modèle de référence ainsi que deux modèles pour présenter le processus, le premier est à 3 règles et le deuxième à 5 règles pour deux valeurs initiales des paramètres du modèles.



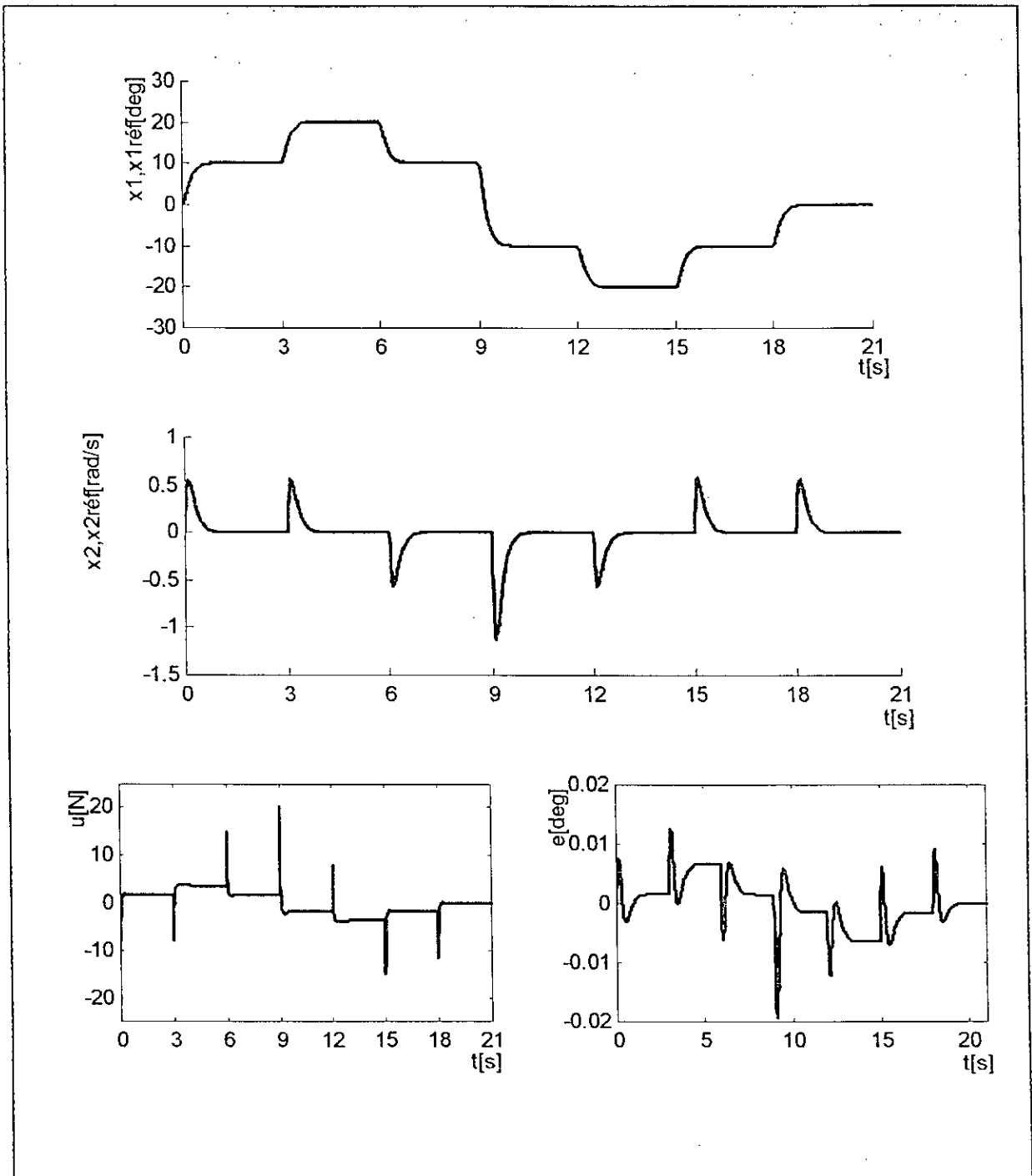
Fig(III.2) : Réglage de position du pendule inversé à 3 règles (valeurs initiales des paramètres du système sont de 50% des valeurs réelles).



Fig(III.3) :Réglage de position du pendule inversé à 3 règles (valeurs initiales des paramètres du système sont de 80% des valeurs réelles).



Fig(III.4) : Réglage de position du pendule inversé à 5 règles (valeurs initiales des paramètres du système sont de 50% des valeurs réelles).



Fig(III.5) : Réglage de position du pendule inversé à 5 règles (valeurs initiales des paramètres du système sont de 80% des valeurs réelles).

Commentaire :

Le comportement du pendule inversé lors du réglage de position est illustré par les figures (III-2),(III-3),(III-4) et (III-5). Nous constatons d'après ces résultats une très bonne poursuite du système au modèle de référence.

La comparaison entre les résultats du modèle à 3 règles et à 5 règles, révèle que ce dernier est plus performant que le premier vu Le temps de réponse et l'erreur de poursuite, cette dernière est de 1% pour le système à 5 règles et de 2% pour le système à 3 règles.

III.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressé au développement de la commande floue adaptative indirecte à modèle de référence basée sur la théorie de *Lyapunov* appliquée au réglage de position du pendule inversé.

Cette technique de commande a prouvé son efficacité vu les bonnes performances qu'elle apporte ainsi que la bornitude de l'erreur de poursuite.



Chapitre IV

Commande floue
adaptative directe à
modèle de référence

IV.1.Introduction :

La stratégie de commande développer dans le chapitre précédent, nécessite un temps de calcul relativement élevé, vu qu'elle contient deux étapes pour calculer la commande.

Pour pallier cet inconvénient, le présent chapitre est consacré au développement de la commande floue adaptative directe à modèle de référence basée sur la théorie de *Lyapunov* pour établir la loi d'adaptation qui ajuste les paramètres du régulateur flou PDC et assure la bornitude de tous les signaux du système et de l'erreur de poursuite.

IV.2.Contrôleur flou basé sur le modèle T-S :

Considérons un système non- linéaire continu décrits par un modèle flou de *Takagi-Sugeno*, la $i^{ème}$ règle de ce modèle est définie comme suit [13]:

Règle _{i} : si z_1 est $M_1^i(z_1)$ et...et z_p est $M_p^i(z_p)$

Alors $x(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$

où : $x^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$, $u^T(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]$

la sortie du modèle flou est représentée par l'équation suivante :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^l w_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)]}{\sum_{i=1}^l w_i(z(t))} \quad (IV-2)$$

où : $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t))$, et $M_j^i(z_j(t))$ est le degré d'appartenance de $z_j(t)$.

Dans le but de déterminer un contrôleur flou qui stabilise le système flou, on utilisera le concept de la compensation parallèlement distribuée(PDC)[5]. Ce régulateur à structure PDC contiendra les mêmes règles que celle du modèle (IV-2).

Le contrôleur PDC est de la forme :

Règle _{i} : si z_1 est $N_1^i(z_1)$ et...et z_p est $N_p^i(z_p)$

Alors $u(t) = -K_i x(t)$

la sortie finale du contrôleur flou PDC est la suivante :

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) K_i}{\sum_{i=1}^l \mu_i(z(t))} x(t) \quad (\text{IV-4})$$

$$\text{où : } w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t))$$

en remplaçant la commande u de l'équation (IV-2) par son expression (IV-4), la dynamique du système est représentée par :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) w_j(t) (A_i - B_i K_j) x(t)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) w_j(t)} \quad (\text{IV-5})$$

Une condition suffisante pour assurer la stabilité de la boucle fermée floue du système est donnée par le théorème (I-2).

Le seul obstacle rencontré dans la conception de la commande floue linéarisante par retour d'état est le choix des matrices de gain K_i , qui satisfassent la condition de stabilité (I-2), quand à la matrice de *Lyapunov* P , elle est calculé à l'aide de la technique d'optimisation convexe de LMI.

Ce pendant la commande floue (IV-4) ne garantie pas la stabilité des systèmes dont les paramètres sont incertains. De plus la conception de la commande pour les systèmes à paramètres inconnus devient impossible. Ces inconvénients ont poussé les automaticiens à synthétiser des techniques de commande qui s'avèrent utiles dans ces situations, telle que la commande adaptative.

IV.3. Commande floue adaptative directe à modèle de référence :

Dans cette partie, nous développons une commande floue adaptative directe à modèle de référence.

Considérons le système non- linéaire représenté par le modèle flou de T-S (IV-1), ou l'état $x \in R^n$ est mesurable, les matrices $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$ ($i = 1, \dots, l$) sont inconnues, constantes et les paires (A_i, B_i) sont commandables.

L'objectif de cette commande est de choisir un vecteur d'entrée $u \in R^m$ tel que tous les signaux de la boucle fermée floue du système soient bornés et le vecteur d'état x suit l'état $x_m \in R^n$ du modèle de référence qui est représenté par l'équation suivante[12] :

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) \mu_j(t) ((A_m)_{ij} x_m + (B_m)_{ij} r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) \mu_j(t)} \quad (\text{IV-6})$$

où les matrices $(A_m)_{ij} \in R^{n \times n} (i=1,2,\dots,l)$ satisfassent la condition de la stabilité donnée dans le théorème (I-2), $(B_m)_{ij} \in R^{n \times m}$, et $r \in R^m$ est le vecteur d'entrée du modèle de référence.

Le modèle de référence et le signal d'entrée r sont choisis tel que l'état $x_m(t)$ représente la trajectoire désirée que doit suivre le vecteur d'état $x(t)$ du système.

IV.3.1. Loi de commande :

Si les matrices A_i, B_i sont connues, on peut appliquer la loi de commande suivante :

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \mu_i(z)[-K_i^* x(t) + L_i^* r(t)]}{\sum_{i=1}^l \mu_i(z)} \quad (\text{IV-7})$$

où : $\mu_i(x) = w_i(x)$

On obtient la boucle fermée définie par l'équation suivante :

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) ((A_i - B_i K_j^*) x + B_i L_j^* r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} \quad (\text{IV-8})$$

les matrices $K_j^* \in R^{m \times n}$, et $L_j^* \in R^{m \times m}$ sont choisies de façon qu'elles satisfassent les équations suivantes :

$$A_i - B_i K_j^* = (A_m)_{ij}, \quad B_i L_j^* = (B_m)_{ij} \quad (\text{IV-9})$$

La matrice de transfert de la boucle fermée du système est la même que celle du modèle de référence.

Les matrices $A_i, B_i, (A_m)_{ij}, (B_m)_{ij}$ sont données, et les matrices K_j^*, L_j^* sont déterminées à partir de l'équation (IV-9), il faut indiquer que la loi de commande (IV-7) peut ne pas avoir une structure flexible qui lui permet d'atteindre l'objectif prédéterminé.

Si dans quelques cas, la structure des matrices A_i, B_i est connue, on peut déterminer les matrices du modèle de référence $(A_m)_{ij}, (B_m)_{ij}$ de telle façon que K_j^*, L_j^* soient des solutions de (IV-9).

Dans tout ce qui suit, supposons que les matrices K_j^*, L_j^* qui vérifient (IV-9) existent et que la commande (IV-7) possède une structure flexible qui lui permet d'atteindre l'objectif de commande.

On propose la loi de commande suivante :

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \mu_i(z) [-K_i x(t) + L_i r(t)]}{\sum_{i=1}^l \mu_i(z)} \quad (\text{IV-10})$$

ou les matrices K_j, L_j sont les estimées de K_j^*, L_j^* respectivement, elles sont générées par loi d'adaptation appropriée.

IV.3.2. Loi d'adaptation :

En additionnant et soustrayant l'entrée désirée suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^l \mu_i(z) [-B_i (-K_i^* x(t) + L_i^* r(t))]}{\sum_{i=1}^l \mu_i(z)}$$

dans l'équation du modèle et en utilisant (IV-9), on obtient :

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} x + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) (B_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} r + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) B_i (K_i^* x(t) - L_i^* r + u)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} \quad (\text{IV-11})$$

de plus, en additionnant et soustrayant l'entrée estimée multipliée par le terme : $\frac{\sum_{i=1}^l w_i B_i}{\sum_{i=1}^l w_i}$ dans le modèle de référence (IV-6), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_m &= \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} \hat{x}_m + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) (B_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} r \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) B_i (K_j x(t) - L_j r + u)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} \end{aligned} \quad (\text{IV-12})$$

en utilisant (IV-11) et (IV-12), on peut déterminer l'erreur de poursuite $e = x - \hat{x}_m$ comme suit :

$$e = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} e + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) B_i (-\tilde{K}_j x(t) + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} \quad (\text{IV-13})$$

où $\tilde{K}_j = K_j(t) - K_j^*$ et $\tilde{L}_j(t) = L_j(t) - L_j^*$.

Dans l'équation de la dynamique de l'erreur de poursuite (IV-13), B_i est connue. On suppose que les matrices L_j^* sont soit définies positives ou définies négatives et on définit la matrice suivante : $\Gamma_j^{-1} = L_j^* \text{sgn}(l_j)$, ou $l_j = 1$ si L_j^* est définie positive et $l_j = -1$ si L_j^* est définie négative. Donc $B_i = (B_m)_{ij} \Gamma_j^{-1}$ et l'équation (IV-13) devienne :

$$\dot{e} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} e + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) (B_m)_{ij} \Gamma_j^{-1} (-\tilde{K}_j x(t) + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} \quad (\text{IV-14})$$

On définit la fonction de *Lyapunov* suivante [12]:

$$V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = e^T P e + \sum \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j + \tilde{L}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j) \quad (\text{IV-15})$$

ou $P = P^T > 0$ est la matrice définie positive commune pour toutes les équations de *Lyapunov* : $(A_m)_{ij}^T P + P (A_m)_{ij} < -Q_{ij}$ pour toute $Q_{ij} = Q_{ij}^T$ ($i, j = 1, 2, \dots, l$) définie positive, son existence est garantie par la stabilité des matrices $(A_m)_{ij}$. Après des manipulations mathématiques simples, on obtient la dérivée temporelle \dot{V} de la fonction de *Lyapunov* V suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} e + 2 \text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) \tilde{K}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij} \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} P e x^T \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^l \tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) \tilde{K}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij} \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} P e r^T + \sum_{j=1}^l \tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-16})$$

si on pose :

$$\sum_{j=1}^l \tilde{K}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) \tilde{K}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij} \operatorname{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} P.e.x^T$$

$$\sum_{j=1}^l \tilde{L}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) \tilde{K}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij} \operatorname{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} P.e.r^T$$

\dot{V} devient :

$$\dot{V} = -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(z) \mu_j(z)} e \leq 0 \quad (\text{VI-17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_i = \hat{K}_i(t) = \mu_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^l w_i(B_m)}{\sum_{i=1}^l w_i \sum_{j=1}^l \mu_j} \cdot \operatorname{sgn}(l_j) P.e.x^T \\ \tilde{L}_i = \hat{L}_i(t) = \mu_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^l w_i(B_m)}{\sum_{i=1}^l w_i \sum_{j=1}^l \mu_j} \cdot \operatorname{sgn}(l_j) P.e.r^T \end{array} \right. \quad (\text{IV-18})$$

IV.3.3. Analyse :

En utilisant les arguments présentés au paravent, on peut établir le théorème suivant qui illustre les propriétés de la commande floue adaptative directe à modèle de référence. La loi de commande (IV-7) et le loi d'adaptation (IV-18) garantissent la bornitude des signaux de la boucle fermée du système, et de plus le vecteur d'état x du système tend asymptotiquement vers l'état x_m du modèle de référence pour tout signal de référence borné r .

Théorème (IV-1)[12] :

Considérons le modèle (IV-2) et le modèle de référence (IV- 6), la loi de commande (IV-10) et la loi d'adaptation (IV-18). Supposons que l'entrée de référence r et le vecteur d'état x_m du modèle de référence sont uniformément bornés, donc la loi de commande et la loi d'adaptation garantissent :

- 1- $K_i(t), L_i(t), \mu_i(t), e(t)$ sont bornés pour tout $i = 1, 2, \dots, l$.
- 2- $e(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

Preuve :

A partir des relations (IV-15) et (IV-17), on peut prouver que V est une fonction de *Lyapunov* ce qui implique que les égalités $K_j = K_j^*, L_j = L_j^*$ sont uniformément stables, donc les grandeurs $K_i(t), L_i(t), e(t)$ sont bornées pour tout $t > 0$.

Puisque $e = x - x_m$ et $x_m \in L_\infty$, on a $x \in L_\infty$. A partir de (IV-) et $r \in L_\infty$, on a aussi $u \in L_\infty$, donc tous les signaux de la boucle fermée sont bornés.

Maintenant, on va montrer que $e \in L_2$. A partir des relations (IV-15) et (IV-17), on peut conclure que V est une fonction bornée donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(e_i(t), \tilde{a}_i(t), \tilde{b}_i(t)) = V_\infty < \infty$$

A partir des relations (IV-) et (IV-), on a l'égalité suivante :

$$\int_0^\infty e^T(\tau) \frac{\sum_{i,j=0}^l w_i \mu_j Q_{ij}}{\sum_{i,j=0}^l w_i \mu_j} e(\tau) d\tau \leq - \int_0^\infty \dot{V} d\tau = (V_0 - V_\infty) \quad (\text{IV-18})$$

où : $V_0 = V(e(0), \tilde{a}_i(0), \tilde{b}_i(0))$

Puisque $0 \leq w_i \leq 1, 0 \leq \mu_i \leq 1$ et $\lambda_{\min}(Q_{ij})_{\min} \|e\|^2 \leq e^T Q_{ij} e \leq \lambda_{\max}(Q_{ij})_{\max} \|e\|^2$

On a :

$$\lambda_{\min}(Q_{ij})_{\min} \|e\|^2 \leq e^T \frac{\sum_{i,j=0}^l w_i \mu_j Q_{ij}}{\sum_{i,j=0}^l w_i \mu_j} e \leq \lambda_{\max}(Q_{ij})_{\max} \|e\|^2 \quad (\text{IV-19})$$

En remplaçant (IV-18) dans (IV-19), on obtient :

$$\frac{(V_0 - V_\infty)}{(\lambda_{\min}(Q_{ij})_{\min})_{\min}} \leq \int_0^\infty \|e\|^2 d\tau \leq \frac{(V_0 - V_\infty)}{(\lambda_{\max}(Q_{ij})_{\max})_{\max}}$$

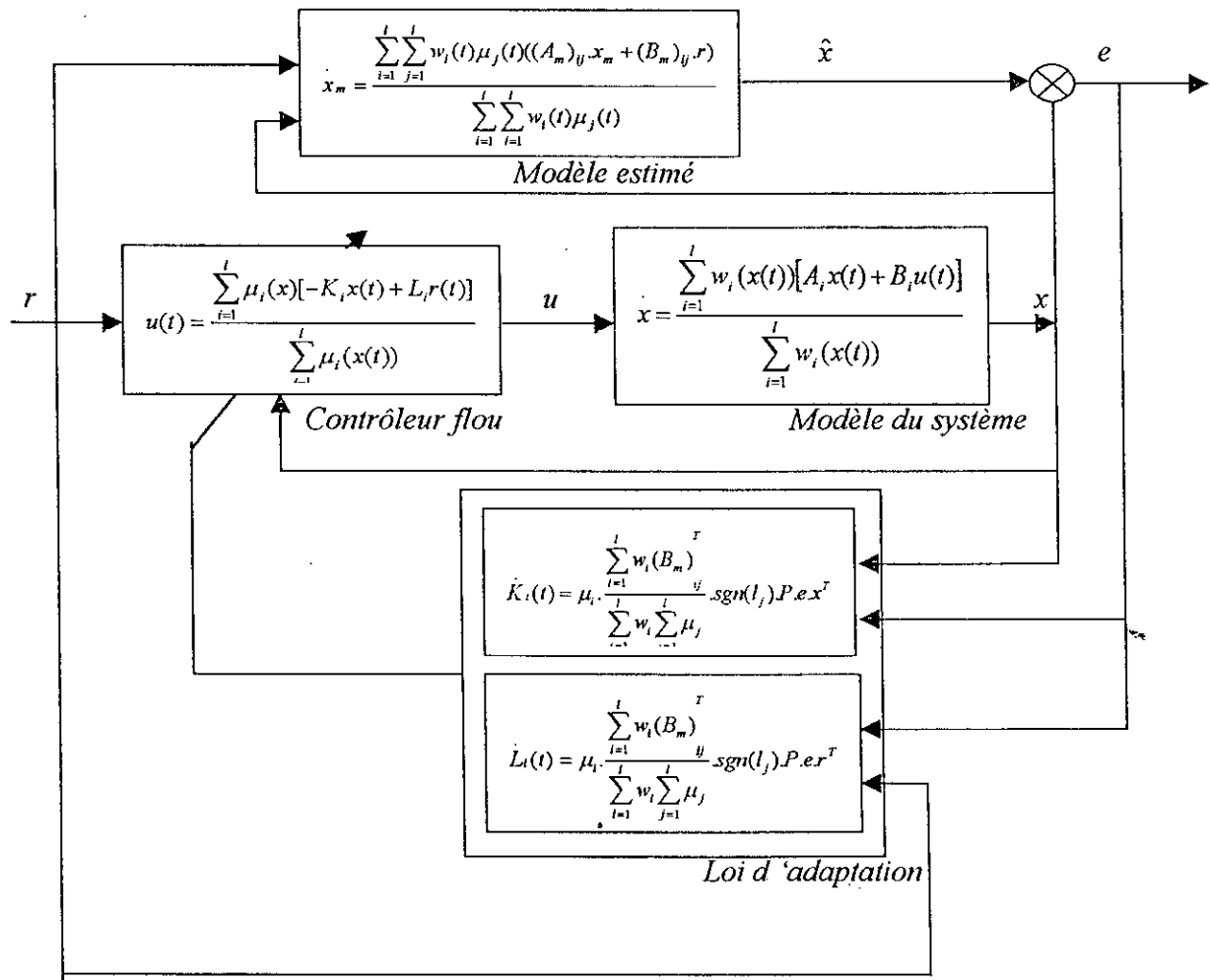
Donc, on a $e \in L_2$, par conséquent : $e(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

IV.3.4. Implémentation:

Dans cette étude, nous avons supposé que la structure du système est connue, bien que ses paramètres sont inconnus.

La conception du contrôleur flou adaptatif se fait à partir d'une estimation des paramètres du système par une loi d'adaptation appropriée. Cette loi d'adaptation ajuste les paramètres du régulateur flou $K(t), L(t)$ en temps réel, tel que vecteur d'état x du système suit l'état $x_m \in R^n$ du modèle de référence, ce qui permet à la sortie du procédé de suivre la sortie idéale désirée représentée par le modèle de référence.

La figure (IV-1) ci dessous illustre le schéma de la commande floue adaptative directe à modèle de référence [12].



Fig(IV-1) : commande floue adaptative directe avec un modèle de référence.

IV.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au développement théorique de la commande floue adaptative directe à modèle de référence basée sur le théorème de *Lyapuno*. En premier lieu, nous avons proposé le modèle flou de T-S et le modèle de référence, en deuxième lieu, nous avons déterminé la loi de commande et la loi d'adaptation.

La simulation numérique n'a pas été faite à cause du manque de la documentation.

Conclusion générale

Notre travail consiste à synthétiser une commande floue adaptative avec un régulateur basé sur la structure parallèle distribuée. Pour ce faire, nous avons proposé un système mécanique fortement non linéaire, qui est le pendule inversé.

En premier lieu, nous nous sommes intéressés à l'analyse de la stabilité de notre système. Nous avons pour cela proposé deux méthodes de synthèse de la commande. La première utilise un placement de pôles et la seconde utilise une résolution numérique dite LMI, nous avons aussi examiné la robustesse de notre régulateur vis à vis de la variation des paramètres du système.

En deuxième lieu, nous avons proposé un observateur de vitesse flou basé sur le modèle flou de T-S.

En troisième lieu, nous avons synthétisé la commande floue adaptative indirecte à modèle de référence basée sur le théorème de *Lyapunov*. Nous avons imposé un modèle de référence pour établir une poursuite de la position du pendule inversé.

Enfin, nous avons développé la commande floue adaptative directe à modèle de référence basée sur le théorème de *Lyapunov*.

Les résultats de la simulation numérique ont montré que les performances de cette commande vis à vis de la stabilité sont très satisfaisantes que se soit avec le placement de pôles ou avec la technique LMI, bien que cette dernière s'avère plus intéressante vu qu'elle est systématique.

Nous avons remarqué aussi qu'en introduisant l'observateur flou, ce dernier assure une erreur d'observation asymptotiquement stable ce qui implique une bonne réponse du système.

Les performances apportés par la commande floue adaptative indirecte à modèle de référence sont très satisfaisantes vu que l'erreur de poursuite de la position est très faible. La simulation numérique pour la commande floue adaptative directe à modèle de référence n'a pas été faite faute de manque de documentation.

Nous tenons à ajouter que ce projet nous a été très instructif puisqu'il nous a permis d'acquérir de nouvelles connaissances notamment dans l'utilisation du logiciel *SCILAB*.

Enfin, nous souhaitons que ce travail puisse contribuer au développement de la commande floue adaptative.

Annexe A

$$\begin{aligned}\mu_i(z(t)) &= \prod_{i=1}^l N_i(z_i(t)) = \prod_{i=1}^l \sqrt[p]{|b^i|} M_i^j(z_i(t)) \\ &= \prod_{i=1}^p \sqrt[p]{|b^i|} \cdot \prod_{i=1}^p M_i^j(z_i(t)) = |b^j| w_j(z(t))\end{aligned}$$

En remplaçant les degrés d'activation dans l'équation de la commande (III-4) par la relation ci-dessus, on obtient :

$$u = \frac{- \sum_{j=1}^l w_j(z(t)) \cdot |b^j| K_j}{\sum_{j=1}^l w_j(z(t)) \cdot |b^j|} x(t)$$

En introduisant l'expression de la commande obtenue dans l'équation de la boucle fermée (III-2), on aura :

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i A_i x - \sum_{i=1}^l w_i B_i \left(\frac{\sum_{j=1}^l w_j |b^j| K_j}{\sum_{j=1}^l w_j |b^j|} \right) x}{\sum_{i=1}^l w_i}$$

$$\dot{x} = \frac{\left(\sum_{i=1}^l w_i A_i - \left(\sum_{i=1}^l w_i B_i \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^l w_j |b^j| K_j}{\sum_{j=1}^l w_j |b^j|} \right) \right) x}{\sum_{i=1}^l w_i}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^l w_i} \left\{ \sum_{i=1}^l w_i A_i - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l w_i b^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^l w_j |b^j|} \cdot \sum_{j=1}^l w_j |b^j| \frac{1}{b^j} [(a_n^j - a_n^d), \dots, (a_1^j - a_1^d)] \right\} x$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^l w_i} \left\{ \sum_{i=1}^l w_i A_i - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left[\sum_{j=1}^l w_j (a_n^j - a_n^d), \dots, \sum_{j=1}^l w_j (a_1^j - a_1^d) \right] \right\} x$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^l w_i} \left\{ \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l w_i a_n^i & \dots & \sum_{i=1}^l w_i a_1^i \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l w_i (a_n^i - a_n^d) & \dots & \sum_{i=1}^l w_i (a_1^i - a_1^d) \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} x$$

Le résultat final est :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_n^d & \dots & a_2^d & a_1^d \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} x = A_d x$$

Références bibliographiques

- [1] H-O.Wang et J-L-D.Niemann,
« T-S fuzzy model with linear rule consequence and PDC controller »,
Laboratory for Intelligent and Nonlinear Control (LINC),Duke University,
Durham, NC.27708, USA.
- [2] K-W.Kim, J.John, R.Langari et W.Kwon,
« LMI Based Design of T-S Fuzzy Controllers for Nonlinear Dynamic
Systems using Fuzzy Estimators »,
International Journal of fuzzy systems, vol 1,N°2, Dec 1999.
- [3] H-O.Wang et J-L-D.Niemann,
« Dynamic PDC for T-S fuzzy systems : An LMI approach »,
Laboratory for Intelligent and Nonlinear Control
(LINC),Duke University, Durham, NC 27708, USA.
- [4] T.Guerra,
« Commande floue et stabilité floue », Laboratoire d'Automatique et de
Mécanique Industrielles et Humaines.
- [5] K. Tanaka, M. Sano,
« A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application
to backing up control of a truck-trailer »,
IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol.2,no.2,pp.119-133,1994.
- [6] Kazuo Tanaka, takayuki Ikuda,et Hua O Wang,
« Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy
control »,
IEEE Trans on fuzzy systems, vol 4, N°1, Feb, 1996.
- [7] Kazuo Tanaka,
« Stability and stabilizability of fuzzy neural linear control systems »,
IEEE Trans on fuzzy systems, vol 3, N°4, Nov, 1995.

- [8] Hua O. Wang, Kazuo Tanaka et Michael F. Griffin,
« An approach to fuzzy control of nonlinear systems :stability and design issues »,
IEEE Trans on fuzzy systems, vol 4, N°1, Feb, 1996.
- [9] X-J.Ma, Z-Q. Sun, et Y-Y. He
« Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer »,
IEEE Trans on fuzzy systems, vol 6, N°1, Feb, 1998.
- [10] Y-W. Cho, Y-H. Yee, M. Park,
« An indirect model reference adaptive fuzzy control for SISO Takagi-Sugeno model »,
IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceeding, August 1999,pp,1-474.
- [11] Y-W. Cho, S-H. Lee, K-J. Kim, M. Park,
« Analysis and design of robust fuzzy feedback linearization controller based on Takagi- Sugeno model »,
Proc of HZUKA'98, pp,434-437.
- [12] Y-W. Cho, E-S. Kim, K-C. Lee et M. Park,
« Tracking control of a robot manipulator using a direct model reference adaptative fuzzy control »,
IEEE International Conference on Intelligent Robot and Systems, 1999.
- [13] T.Takagi et M. Sugeno,
« Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control »,
IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetic, vol 15,no 1,1985.