

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT D' HYDRAULIQUE



En vue de l'obtention du diplôme de :

**MAGISTER**

**EN HYDRAULIQUE**

PRESENTEE PAR : M<sup>me</sup> DERNOUNI FOUZIA

**THEME :**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COUP DE BELIER DANS  
UN RESEAU FAIBLEMENT RAMIFIE EN REFOULEMENT**

Soutenue publiquement le.....devant le jury composé de :

-Mr KETTAB Ahmed	Président	E .N .P	Maître de conférence
-Mr SALAH Boualem	Rapporteur	E .N .S .H	Chargé de cours
-Mr BERKANI Miloud	Examineur	E .N .P	Chargé de cours
-Mr BILEK	Examineur	E .N .P	Docteur
-Mr YALAOUI Moussa	Examineur	A .G .E .P	P .H .D en Hydraulique
-Mr KHODJET .K .O	Invité	E .N .S .H	Chargé de cours

ALGER 1997

# Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

*Tous mes sincères remerciements :*

*A Monsieur B.SALAH, mon Directeur de thèse pour ses conseils et ses critiques.*

*A mon mari YUCEF et mon amie FATIHA.T pour leur soutien moral.*

*A tous les membres du jury qui me feront l'honneur d'accepter ce travail.*

*A tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse; en particulier:*

• *M<sup>lle</sup> : AMOURINE .S pour sa patience, sa gentillesse ainsi que la saisie de ce travail.*

• *M<sup>lle</sup> : MOKHTARI. B pour son aide.*

• *Mes étudiants BOUTALEB.R, BOUZIDA.R, BENAÏSSA.S et YELDJAOUÛ.F pour leur aide combien précieuse*

• *A Mon frère CHAABANE et mon beau-frère HAMID pour leurs encouragements.*

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
Département d'Hydraulique

**Résumé de Thèse de Magistère Intitulée**

**Contribution à l'Etude du Coup de Bélier dans un Réseau  
faiblement ramifié en refoulement**

**ملخص**

ان الهدف من عملنا هذا يتمثل في تخصيص دراسة للنظام الوقتي في شبكة معينة الكفرع من حيث عملية الدفع فالنظام الوقتي الخاص بهذه الشبكة يعد ظاهرة مضرّة جدا و غير متحكم فيها ميدانيا. اول مرحلة قمنا بها هي القاء نظرة شاملة على البيبلوغرافيا ثم تحليل النظام الوقتي المتناول لبيحثنا وذلك بفحص هيئة شكل حركة الامواج في نقاط تفرع الشبكة ونظام تناسب المعادلات المتعلقة بالخصائص .  
ان هذا الاخير قد حل بطريقة الادرار الخطى الذي امتبرنا كقاعدة لتحديد الاخطاء التي تعربها طريقة الخصائص. كما تطرقت دراستنا الى تكبير مرونة المواد ومختلف الاشكال التي تعربها ظاهرة تصرب الشحنة تحت تأثير المطرقة المائية و ذلك لأن تغير السرعة هيرمعروف محدد هناك أداة عمل قد أمست للمطبقين اعتبارا لنظام تناسب المعادلات مدعمة بأمثلة من أشكال مختلفة لشبكة التفرع الأكثر استعمالا ميدانيا.  
و أخيرا قمنا بتفسير و شرح النتائج المحصل عليها

**RESUME**

Notre travail a pour but la contribution à l'étude du régime transitoire dans un réseau faiblement ramifié en refoulement. Le régime transitoire est un phénomène reconnu très nocif, et mal maîtrisé dans la pratique, pour ce type de réseau.

Un aperçu bibliographique détaillé a été entamé, par la suite une analyse du régime transitoire a été abordée, en examinant le comportement des fronts d'ondes aux points de ramification du réseau, et le système de compatibilité des équations aux caractéristiques.

Ce dernier a été résolu par une interpolation linéaire qui nous servira de base de détermination des erreurs que connaît la méthode des caractéristiques. Notre étude s'est étalée également sur l'influence, de l'élasticité du matériau et les différentes formes que connaît la perte de charge, sur le coup de bélier, vue que la variation de la vitesse est mal connue.

Un outil de travail pour les praticiens a été élaboré, en considérant le système de compatibilité des équations, et comme exemple différentes configurations du réseau ramifié les plus couramment rencontrés en pratique.

Finalement une interprétation des résultats obtenus a été faite.

**Abstract**

The aim of our work is to contribute to the study of a transitory system in an network weakly ramified in repression. The transitory system is a phenomenon which is harmful and not very well mastered in practice for this type of network.

A detailed bibliographic survey has been finished, then, an analysis of the transitory system was tackled by examining the fronts waves behaviour at the points of the network ramification and the compatibility system of the equations.

This latter has been resolved by a linear interpolation that will helps us to determine the errors of the characteristics method. Our Study has been spread over the impact of the elasticity of the material and the differend forms of the load loss and over the water hammer since the speed variation is not well-known.

A means of work for the practitioners has been elaborated by considering the compatibility system of the equations and as example different configurations of the ramified network the most commonly met in practice.

Finally, an interpretation of the obtained results was done.

## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION GENERALE

#### CHAPITRE I : PRESENTATION DU REGIME TRANSITOIRE

I.1. Généralités	1
I.2. Le coup de bélier	2
I.2.1. Introduction	2
I.2.2. Risques dus aux coups de bélier	3
I.3. Mise en équation des mouvements transitoires	3
I.3.1. Equation du mouvement de l'eau	3
I.3.2. Equation de continuité	5
I.4. Aperçu bibliographique et analyse des différentes formules utilisées	7
I.4.1. Formule de Joukovski Allievi	7
I.4.2. Formule de Michaud	8
I.4.3. Méthode graphique de Schneyder Bergeron	10

#### CHAPITRE II : ETUDE DE LA CELERITE DE PROPAGATION DES ONDES DANS LES CONDUITES

##### INTRODUCTION

II.1. Aperçu bibliographique	11
II.2. Expression générale de la célérité de propagation	14
II.2.1. Rappel des équations de base	14
II.2.2. Propagation de l'onde du coup de bélier dans une conduite	14
II.3. Expression générale de la célérité d'onde	16
II.3.1. Equations de base	16
II.3.2. Interprétation de l'expression de la célérité	17
II.4. Célérité dans les conduites élastiques	18
II.4.1. Application à différents cas d'ancrage	18
II.4.2. Calcul du coefficient de déformation $c'$	19
II.4.3. Représentation graphique	20
II.4.4. Interprétation des résultats	21
II.4.5. Conclusion	22

### **CHAPITRE III : CHEMINEMENT DES ONDES AUX POINTS DE RAMIFICATION**

III.1. Introduction	25
III.2. Comportement des ondes au point de changement de section	25
III.3. Cas d'un noeud de ramification	30

### **CHAPITRE IV : METHODE D'ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE DANS UN CANALISATION EN CHARGE**

IV.1. Généralités	34
IV.1.1. Equation de continuité	34
IV.1.2. Equation de quantité de mouvement	36
IV.2. Analyse physique	40
IV.2.1. Détermination de l'équation le long d'une perturbation	42
IV.3. Solution analytique de la méthode des caractéristiques et son interpolation	44
IV.3.1. Généralités sur les erreurs de la méthode des caractéristiques	44
IV.3.2. Solution analytique de la méthode des caractéristiques	45
IV.3.3. Solution par interpolation	51

### **CHAPITRE V : DETERMINATION DE LA PERTE DE CHARGE EN REGIME TRANSITOIRE**

V.1. Généralités	55
V.2. Différentes formes de variation de la vitesse le long de la conduite	55
V.2.1. Variation linéaire de la vitesse	55
V.2.2. Variation parabolique de la vitesse	57
V.2.3. Variation hyperbolique de la vitesse	58
V.3. Influence des coefficients de transmission et de réflexion sur la vitesse aux points de ramification	59
V.3.1. Variation parabolique de la vitesse	59
V.3.2. Variation linéaire de la vitesse	62
V.3.3. Variation hyperbolique de la vitesse	62
V.4. Influence de la perte de charge et l'élasticité de la conduite sur la pression dynamique dans le cas d'un arrêt brusque de la pompe	63

## **CHAPITRE VI : APPLICATIONS NUMERIQUES**

VI.1. Introduction	74
VI.2. Formulation mathématique	74
VI.2.1. Cas d'une conduite	74
VI.2.2. Cas d'un noeud	75
VI.2.3. Schéma du réseau d'adductions envisagées	75
VI.2.4. Démarche de calcul	76
VI.2.5. Exemple numérique de calcul	79
VI.2.6. Résultats et leur interprétation	81

### **CONCLUSION GENERALE**

### **BIBLIOGRAPHIE**

## NOMENCLATURE

### Symboles utilisés :

$V_0$	Vitesse d'écoulement en régime permanent	m/s
$dx$	Longueur infinitésimale d'élément de conduite	m
$v$	Vitesse de l'écoulement	m/s
$P$	Pression dans la conduite en régime transitoire	Pa
$t$	Temps variable	S
$S$	Section droite de la conduite en un point donné	$m^2$
$r$	Rayon d'intérieur de la conduite	m
$dr$	Variation de rayon de la conduite	m
$\rho$	Masse volumique de l'eau	$kg/m^3$
$g$	Accélération de la pesanteur	$m/s^2$
$E$	Module de Young de la conduite	Pa
$e$	Épaisseur de la conduite	mm
$\sigma$	Contrainte matériau de la conduite	$N/m^2$
$D$	Diamètre intérieur de la conduite	m
$K_1$	Coefficient de la variation de l'aire de la section droite de la conduite suivant sa propriété mécanique et sa contraction	
$K$	Module de compressibilité de l'eau	Pa
$V$	Volume de l'eau en régime transitoire	$m^3$
$dv$	Variation du volume dans la conduite	$m^3$
$h$	Valeur du coup de bélier	m
$Q$	Débit en régime transitoire	$m^3/s$
$C$	Célérité de l'onde	$m^2/s$
$\Delta H$	Pertes de charge dans la conduite	m
$l$	Longueur de la conduite	m
$H_0$	Charge statique	m
$\nu$	Coefficient de poisson	
$\xi$	Module d'élasticité du fluide	Pa
$\Delta P_i$	Pression incidente	Pa
$\Delta P_r$	Pression réfléchie	Pa
$\Delta P_t$	Pression transmise	Pa
$\lambda$	Coefficient de frottement de la perte de charge	-
$J$	Gradient de perte de charge	m/m
$s_{1-2}$	Coefficient de transmission de l'onde	-
$r_{1-2}$	Coefficient de réflexion de l'onde	-
$E_c$	Énergie cinétique	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
$m$	Masse d'eau emmagasinée	kg
$E_{pc}$	Énergie potentielle	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

## LISTE DES FIGURES

- Figure 1 : Illustration des mouvements transitoires  
Figure 2 : Dilatation de la canalisation  
Figure 3 : Mouvement et compressibilité de l'eau  
Figure 4 : Illustration de la méthode de BERGERON  
Figure 5 : Illustration du mouvement transitoire dans une conduite  
Figure 6 : Comportement de la canalisation pour différents ancrages  
Figures 7 & 8 : Illustration de la célérité d'onde en fonction du mode d'ancrage  
Figure 9 : Comportement des ondes au niveau d'un changement brusque du diamètre  
Figure 10 : Allure des lignes piézométriques suite au réflexion et transmission des ondes  
Figure 11 : Réflexion et transmission des ondes au niveau d'un noeud de ramification  
Figure 11' : Variation de la pression avec les sections des conduites  
Figure 12 : Représentation d'une section graduellement variable d'une canalisation  
Figure 13 : Illustration de l'équation de quantité de mouvement  
Figure 14 : Equation le long d'une perturbation  
Figure 15 & 16 : Illustration de l'erreur sur la longueur de la conduite  
Figure 17 : Interpolation de la méthode des caractéristiques  
Figure 18 : Variation linéaire de la vitesse le long de la conduite  
Figure 19 : Variation parabolique de la vitesse le long de la conduite  
Figure 20 : Influence des coefficients de transmission et de réflexion sur la vitesse  
Figure 21 : Représentation graphique de la variation parabolique de la vitesse  
Figure 22 : Représentation graphique de la variation linéaire de la vitesse  
Figure 23 : Représentation graphique de la variation hyperbolique de la vitesse  
Figure 24 : Influence de la perte de charge et de l'élasticité de la conduite sur la pression dynamique.  
Figure 25 : Schéma du réseau d'adduction « rang3 »  
Figure 26 : Schéma du réseau d'adduction « rang2 »  
Figure 27 : Application de la méthode des caractéristiques sur un tronçon  
Figures 28,29,30,31 : Courbes de variation de la charge du niveau des noeuds de ramification



## LISTE DES TABLEAUX

- Tableau 1 : Etude comparative des célérités d'onde.
- Tableau 2 : Caractéristiques du liquide et du matériau
- Tableau 3 : Variation de la célérité pour différents mods d'ancrage
- Tableau 4 : Variations des débits et des pressions pour différents états de la conduite
- Tableau 5 : Variation parabolique de la vitesse
- Tableau 6 : Variation linéaire de la vitesse
- Tableau 7 : Variation hyperbolique de la vitesse
- Tableau 8 : Données du réseau « rang2 »
- Tableau 9 : Données du réseau « rang3 » cas de disymétrie
- Tableau 10 : Données du réseau « rang 3 » cas de symétrie
- Tableau 11 : Variation de la charge au noeud « N » rang 2
- Tableau 12 : Variation de la charge au Noeud « N1 » rang 3
- Tableau 13 : Variation de la charge au Noeud « N2 » rang 3
- Tableau 14 : Variation de la charge au Noeud « N3 » rang 3

## INTRODUCTION

Le présent travail a pour but la contribution à l'étude du régime transitoire dans un réseau faiblement ramifié en refoulement.

Après une étude bibliographique détaillée, nous analysons ce régime par l'examen des équations régissant ce phénomène à partir desquelles, les équations de compatibilité ont été mises en évidence, pour la résolution des équations aux caractéristiques.

A travers ce travail, il sera envisagé également le cas spécifique de la résolution numérique de ces dernières par interpolation linéaire à partir des paramètres connus à l'état initial. Ce raisonnement nous conduira à l'idée des erreurs que peut connaître la méthode des équations de compatibilité.

Notre contribution envisagera également l'étude du coup de bélier à différents degrés de ramifications sous l'influence de la modification des fronts d'onde aux noeuds, où un logiciel de calcul sera élaboré et qui servira d'outil de travail pour les praticiens.

Néanmoins, un détail sera fait en examinant les différentes formes de variation de la vitesse dans l'espace, dans le but de la détermination de la perte de charge engendrée, ainsi que le rapport existant entre cette dernière et le coup de bélier perdu pour le tronçon de rang (1), qui sera le plus exposé au phénomène de surpression et de dépression.

Finalement notre étude sera achevée par la prise en compte d'un exemple d'ordre pratique envisageant différentes configurations du réseau ramifié et qui sera complété par une représentation graphique.

# Chapitre I

## Présentation du régime transitoire

### I.1 - Généralités :

Avant de donner une description du régime transitoire, nous donnons d'abord sa définition qui s'énonce comme suit :

Un régime transitoire est un régime variable dans le temps et dans l'espace, se manifestant entre deux régimes stationnaires. C'est un écoulement varié, où les paramètres hydrauliques changent, qui peut se manifester soit dans un canal à ciel ouvert ou à écoulement à surface libre, soit dans une conduite à écoulement en charge, par accroissement ou décroissement du débit. [1], [11] et [13]

Nous pouvons écrire que :

Vitesse  $v(x, t)$

Pression  $p(x, t)$

soit : 
$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0 ; \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0 ; \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0 ; \text{ et } \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$$

et dans un cas limite : 
$$\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0 ; \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$$

Les causes du phénomène transitoire sont nombreuses en pratique, les plus couramment rencontrées sont :

- Ecoulement dans un réseau d'alimentation à la suite d'une manoeuvre simultanée des robinets de prise d'eau.
- Démarrages et arrêts inopinés des pompes refoulant dans un réseau
- Ecoulement dans les machines hydrauliques à puissances variables.
- Phénomène de coup de bélier.

Pour l'approche mathématique du problème régissant le phénomène transitoire, nous pouvons avoir deux formes.

**a** - Si le paramètre modificateur engendre une variation lente du débit et de la pression dans la canalisation, on admet que la loi d'évolution de l'écoulement est donnée d'une façon approchée par l'équation régissant les mouvements non permanents. Cette approche suppose un fluide incompressible et une canalisation indéformable.

Le débit, la vitesse et les accélérations sont identiques à un instant donné en tout point de la canalisation : c'est un « mouvement en masse ».

**b** - Si le paramètre modificateur engendre une variation rapide provoquant un gradient de débit ou de pression important ; la déformation de l'enveloppe de la conduite et la compressibilité de l'eau sont à considérer nécessairement. [14] .

Ces variations rapides (du débit et de la pression) n'étant plus constantes à un instant « t » se présentent et se propagent sous forme d'ondes, on dit qu'il se produit « un coup de bélier » et par conséquent nous avons affaire à un mouvement dit « d'ondes » :

C'est l'optique de notre étude dans le présent travail.

Les deux formes d'approches mathématiques sus-citées nécessitent comme bases communes :

- le théorème des quantités de mouvements
- l'équation de continuité

Dans notre étude nous faisons abstraction de la première approche mathématique et nous nous intéresserons à la seconde : c'est à dire le mouvement d'ondes créant les coup de bélier.

## **1.2 - Le coup de bélier :**

### **1.2.1 - Introduction :**

On définit habituellement le coup de bélier dans une conduite en charge comme étant les variations de pressions résultant d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement. Ces variations de pression peuvent causer d'énormes dommages matériels. Les installations dans lesquelles les coups de bélier sont susceptibles de se produire, se trouvent dans une foule de champs d'activités : aqueducs, stations de pompage, centrales hydro-électriques, refoulement des eaux usées, systèmes de refroidissement, systèmes d'irrigation. [16]

Une étude du coup de bélier vise donc à déterminer si la pression dans l'ensemble d'un système est à l'intérieur des limites prescrites suite à une perturbation de l'écoulement.

Evidement, en définissant l'étendue d'une étude de coups de bélier, on prévoira l'examen des variations de débit et de pression qui résultent de la mauvaise opération du système.

En effet, certains choix judicieux à l'étape du dimensionnement préliminaire peuvent minimiser l'étendue d'un éventuel problème de coup de bélier et donc réduire le coût d'un système anti-bélier.

Manabrea (1858) fut le premier à s'intéresser au calcul du coup de bélier, à partir de cette date, la compréhension du phénomène s'améliore jusqu'à ce qu'au début du siècle, où elle devance les méthodes de calcul disponibles. A ce titre, on remarque particulièrement la méthode d'intégration graphique très élégante de Bergeron (1949) qui fut employée presque universellement dans la pratique pendant plusieurs années [2].

## **1.2.2. - Risques dus aux coups de bélier :**

Les conséquences du coup de bélier peuvent être néfastes. Elles deviennent de plus en plus dangereuses à mesure que les paramètres modificateurs deviennent importants (variations de pressions et de débits dans le temps).

Ces phénomènes se produisant soit dans une conduite en charge gravitaire ou en refoulement peuvent provoquer ces coups à la suite d'une dépression ou surpression engendrées par des manoeuvres brusques. [5].

### **1.2.2.1. - Cas de dépression :**

C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par l'apparition d'une pression relative négative, à la suite d'un arrêt brusque d'une pompe ou d'une ouverture instantanée ou rapide d'une vanne de sectionnement. Si la pression à l'intérieur de la conduite devient inférieure à - 10 m de colonne d'eau, il se produit le phénomène de cavitation. C'est ce qui entraîne l'aplatissement et l'aspiration des joints des canalisations (implosion) particulièrement celles qui sont enterrées lorsque le relief est défavorable. Le phénomène de cavitation, une fois apparu, peut provoquer la détérioration de la couche d'enduit pour les canalisations qui sont protégées intérieurement. [4], [5] et [9].

### **1.2.2.2. - Cas de surpression :**

C'est une conséquence du coup de bélier engendrée par une pression importante se produisant à la suite d'une fermeture instantanée ou rapide d'une vanne de sectionnement ou bien à la suite d'une dépression causée par l'arrêt brusque d'une pompe. Si la pression totale, c'est à dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier dépasse la pression maximale admissible des tuyaux, il y a des risques de rupture de ces derniers et déboîtement des joints (les anneaux d'étanchéité seront délogés). [5]

### **1.2.2.3 - Fatigue de la canalisation :**

En régime transitoire, les alternances des surpressions et dépressions qui sont une conséquence inévitable du phénomène provoquent la fatigue pour le matériau de la canalisation, même si leur amplitude est faible.

## **1.3 - Mise en équation des mouvements transitoires :**

Pour mettre en évidence les équations des mouvements transitoires nous envisageons d'utiliser l'équation du mouvement de l'eau et l'équation de continuité.

Pour les illustrer respectivement, nous considérons une tranche liquide d'une conduite à caractéristiques uniques (c'est à dire diamètre et épaisseurs constants sur toute sa longueur) et un point « M » appartenant à cette masse d'eau, placé au centre de gravité de cette dernière.

### **1.3.1 - Equation du mouvement de l'eau :**

La tranche de longueur  $dx$  se trouve, comme l'indique la figure N1, limitée par la section S d'abscisse « x » et la section S' d'abscisse « x + dx »

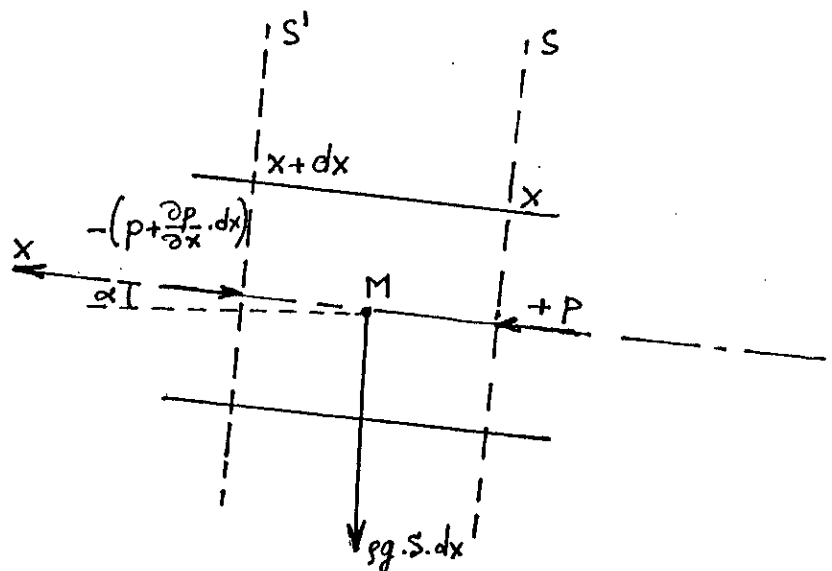


Figure 1

Selon l'orientation de l'axe « x » considérée, les forces extérieures agissant sur la tranche liquide limitée par les sections s et s', distantes l'une de l'autre de dx au temps « t » et, en négligeant l'effet des frottements sont :

- La force s'exerçant sur la face S :  $p \cdot s$
- La force s'exerçant sur la face S' :  $-(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) S'$
- La composante du poids :  $\rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin \alpha$

En appliquant le théorème des quantités de mouvement et tenant compte du bilan des forces en projection sur l'axe de la conduite et l'orientation de l'axe des x, nous obtenons. [10]

$$m \frac{dv}{dt} = p \cdot s - ps - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha \cdot dx \quad (1.1)$$

après simplification on obtient :

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \right) S \cdot dx \quad (1.2)$$

or :  $m = \frac{\varpi}{g} \cdot s \cdot dx = \rho \cdot s \cdot dx$  et  $\frac{\partial p}{\partial x} = \varpi \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

en remplaçant m et  $\frac{\partial p}{\partial x}$  par leurs valeurs respectives (1.2) devient :

$$\frac{dv}{dt} = g \left( \sin \alpha + \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (1.3)$$

La relation (1.3) représente l'équation du mouvement de l'eau dans la conduite

### 1.3.2. - Equation de continuité :

Considérons le schéma de la figure (1). Si la variation du paramètre modificateur est importante, le phénomène transitoire qui en résulte, engendrera une dilatation radiale de l'enveloppe de la conduite (pour notre cas) à la suite de la compressibilité de l'eau. Nous envisageons l'équation de continuité tenant compte de ces deux formes à l'instant « t » pour l'élément « dx » considéré.

#### 1.3.2.1 - Dilatation de l'enveloppe de la conduite :

A la suite de l'augmentation de pression pour un temps dt ; soit :

$dp = \frac{\partial p}{\partial t} dt$  ; il en résulte une déformation radiale où le rayon de la conduite passe de r à r + dr. Nous assistons donc à un allongement relatif de la circonférence de l'enveloppe de la conduite.

En négligeant la déformation longitudinale on peut écrire :

$$\frac{2 \pi dr}{2 \pi r} = \frac{dr}{r} \quad (1.4)$$

L'accroissement du rayon engendre un accroissement des contraintes des parois de  $\sigma$  à  $(\sigma + d\sigma)$  et tenant compte du module d'élasticité « E », nous avons selon la loi d'Hooke.

$$\frac{d\sigma}{E} = \frac{dr}{r} \text{ et } \sigma = \frac{P.r}{e} \quad (1.5)$$

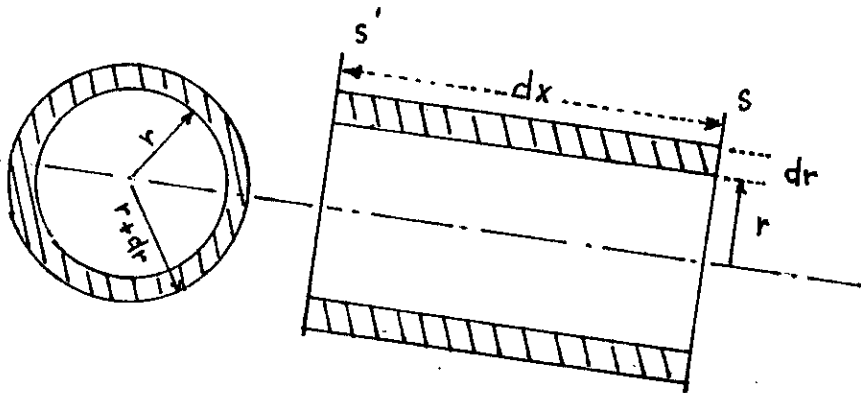


Figure 2

La partie hachurée correspond au volume obtenu par suite de la dilatation de la conduite ; compris entre S et S' ; qui sera occupée par l'écoulement. [10] ; [16] et [18]

Tenant compte de (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\frac{r}{E.e} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt = \frac{dr}{r}$$

ou bien :

$$dr = \frac{r^2}{E.e} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt \quad (1.6)$$

et la dilatation sera exprimée comme suit :

$$2 \pi \cdot r \cdot dr \cdot dx = 2 \pi r \cdot \frac{r^2}{E.e} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt \cdot dx = \pi \cdot D \cdot \frac{r^2}{E.e} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \quad (1.7)$$

### 1.3.2.2. - Compressibilité de l'eau :

Toujours en considérant la figure (1) et tenant compte du paramètre modificateur qu'est la pression, le volume d'eau compris entre les deux sections s et s' distantes de dx, subira une réduction dv lorsque ce paramètre passera de p à p+dp dans le temps.

Nous obtenons une proportionnalité, puisque par définition le module <sup>de compressibilité</sup> compressibilité fluide est égal à :

$$K = \frac{dp}{dp/\rho}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dP}{K} \quad (1.8)$$

la figure (1) montre que :  $V = \pi \cdot r^2 \cdot dx = S \cdot dx$

Par conséquent :  $dV = \pi \cdot r^2 \cdot dx \cdot \frac{dP}{K}$

sachant que :  $dP = \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt$

On déduit que :

$$dV = \pi \cdot r^2 \cdot dx \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt \quad (1.9)$$

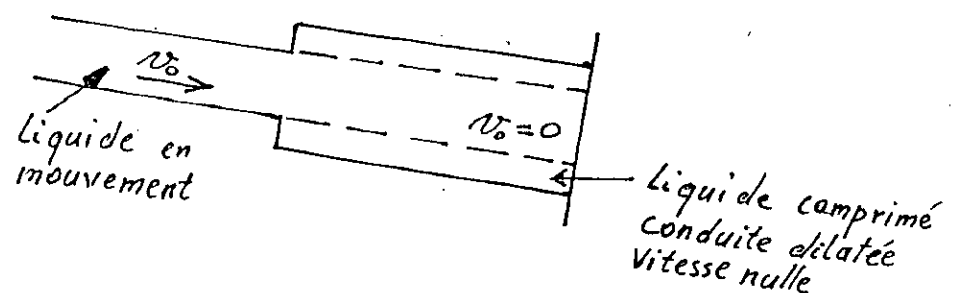


Figure 3



Le deuxième paramètre modificateur qu'est la vitesse  $v(t)$  nous renseigne sur la quantité du liquide emmagasinée dans l'élément de conduite de longueur  $dx$ , ayant subi la dilatation sous l'effet du premier paramètre, modificateur (pression). Nous avons donc une variation de la vitesse qui passe de  $v$  à  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$

et pendant le temps  $dt$  ; il en résulte que :

$$dV = \pi \cdot r^2 \left[ \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v \right] dt = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \cdot dt \quad (I.10)$$

Finalement l'équation de continuité s'obtient d'une façon explicite en égalisant la somme des relations (I.9) et (I.7) et la relation (I.10)

$$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx \cdot dt = \pi \cdot r^2 \cdot dx \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt \cdot dx + \pi \cdot D \cdot \frac{r^2}{E \cdot e} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt \cdot dx$$

en divisant par le volume :  $\pi \cdot r^2 \cdot dx$ , on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dt = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt + \frac{D}{E \cdot e} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt$$

en multipliant les deux membres par  $\frac{1}{dt}$ , on a :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{D}{E \cdot e} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{E \cdot e} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (I.11)$$

La relation (I.11) représente l'équation de continuité. On remarque que le facteur  $\frac{1}{K} + \frac{D}{E \cdot e}$  représente le module d'élasticité du système conduite-fluide.

## **I.4 - Aperçu bibliographique et analyse des différentes formules utilisées :**

### **I.4.1. - Formule de Joukovski-Allievi :**

En se basant sur les équations de quantité de mouvement et de continuité, Allievi a établi deux équations montrant la variation de la pression « P » et de la vitesse « v » en fonction du temps « t » et du déplacement « x » soit :

$$\begin{aligned} P &= f(x,t) \\ v &= f(x,t) \end{aligned}$$

Pour étudier le mouvement des ondes, Allievi a supposé un observateur se déplaçant le long de la conduite à une vitesse « c » (célérité) ; ensuite leur application pour une fermeture brusque dans l'étude de la surpression maximale qui est donné par  $h = \frac{c \cdot v_0}{g}$  a été étudié par Joukovski. [2] et [6]

Les équations d'Allievi ont été établies sans tenir compte des frottements de l'eau contre les parois de la conduite. En chaque point de la conduite la surpression en colonne d'eau est calculée en la rapportant à la pression statique.  $H_0$ .

$$P = H_0 + h$$

où  $h$  est la valeur du coup de bélier

Les équations d'Allievi sont valables pour un diamètre et une épaisseur déterminés. Il faut qu'à l'amont de la vanne, il existe un réservoir à niveau constant. D'autre part pour une conduite » telescopique, ces équations peuvent s'appliquer pour chaque tronçon, mais ne peuvent être considérées pour des diamètres graduellement variables. [4]

La formule de Joukovski est obtenue en se basant sur les équations d'Allievi. Elle donne la surpression maximale  $+\frac{c \cdot v_0}{g}$  et la dépression maximale  $-\frac{c \cdot v_0}{g}$  juste à l'amont de la vanne. Cette formule ne tient pas aussi compte des frottements ce qui ne reflète pas la réalité.

#### 1.4.2. - Formule de Michaud :

Après l'étude faite par Allievi et Joukovski, Michaud envisage l'analyse du Coup de bélier provoqué par un robinet vanne placé à l'extrémité aval d'une conduite caractérisé par une fermeture lente, durant laquelle le débit suit une variation linéaire et décroissante dans le temps. [2], [4] et [10]

$$Q = Q_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$$

Cette méthode est sans doute écartée des conditions réelles en pratique et ne considère pas la valeur majorante du coup de bélier d'une part et les frottements d'autre part. Son avantage réside dans la simplification de la construction graphique [2]

Vu les lois de manoeuvre des robinets-vannes déterminées, la variation linéaire ne peut être assurée étant donné que la section utile décroît très rapidement pendant le premier tiers de fermeture (comportement dynamique des vannes). Ce qui provoque généralement soit un accroissement soit un décroissement du coup de bélier au début de la manoeuvre.

#### Coup de bélier crée par la manoeuvre des pompes :

La dépression peut être dangereuse à la suite d'une disjonction de toutes les pompes en même temps par suite d'une coupure d'alimentation électrique. Dans ce cas l'étude doit porter sur la détermination ou l'estimation de la majorante des enveloppes des dépressions en cas de disjonction (arrêt brusque) ou des surpressions en cas de démarrage à vanne ouverte et réseau vide. C'est en comparant ces enveloppes conséquentes aux pressions minimales et maximales admissibles pour déterminer si les risques (cavitation par exemple) existent. [19]

## **1) Démarrage des pompes :**

Dans le cas des pompes à vitesse variable, les démarrages de plusieurs pompes sont réglés par le type de régulation adoptée. Il n'y a donc pas de coup de bélier particulier puisque qu'il y a maintien du point de fonctionnement sur la courbe continue (caractéristique) notamment dans le cas de démarrage d'une nouvelle pompe (exemple le cas d'une pompe auxiliaire refoulant directement dans un réseau de distribution).

Dans le cas des régulations discontinues, il en résulte des variations de pressions dans une fourchette égale à celle que supporte le réseau soit au démarrage ou à l'arrêt de pompe. Ce qui entraîne une fatigue avancée des conduites si ces variations sont très fréquentes.

- Dans le cas où la pompe refoule dans un réseau vide la surpression peut être néfaste du fait qu'on ne connaît pas la charge statique. Si le temps de démarrage  $t_d < \frac{2l}{c}$  de l'onde, le régime de fonctionnement peut être limité ou imposé par la pompe et par conséquent la charge piézométrique maximale ne peut pas être supérieure à la côte de charge correspondant au barbotage. Néanmoins nous devons vérifier seulement que le réseau supporte cette charge piézométrique maximale pour ne plus s'intéresser aux surpressions ainsi créés au démarrage.

## **2) Disjonction des pompes :**

On doit envisager le cas de disjonction rapide de tout le débit fourni par les pompes notamment s'il est trop important, pour s'en occuper de la dépression ainsi engendrée. On doit donc tracer l'enveloppe majorante provoquée par la première onde à partir de la pompe à  $H_g - \frac{av_0}{g}$  et déduire ainsi les zones à risque ou l'enveloppe des dépressions en utilisant les abaques de PARMAKIAN donnant les valeurs minimales à la pompe. Cet auteur a élaboré des abaques similaires pour les pressions maximales, mais elles ne sont valables que pour les installations ne présentant pas de clapets anti-retour. Or ceux-ci existent sur la majorité des installations de pompage et ont tendance à faire augmenter les surpressions.[6]

D'une façon analogue au cas de vannage, MICHAUD envisage la variation maximum de pression par la relation :

$$\Delta H = \frac{2l \cdot v_0}{g t}$$

t - étant le temps d'arrêt de la pompe

D'après l'aperçu bibliographique, l'arrêt du débit après disjonction de la pompe n'est pas linéaire ; Il y a d'abord une diminution rapide du débit avant qu'il ne reste constant jusqu'au retour de l'onde de surpression où il s'annule après un faible retard du clapet. Et c'est à cette phase là où MICHAUD suppose une linéarisation valable de débit mais en négligeant les pertes de charge.

MENDILUCE reprend cette étude et affirme qu'elle donne la valeur maximale de dépression ( $-\frac{av_0}{g}$ ) à la pompe, grâce à des expérimentations, ce qui servira de sécurité pour le dimensionnement.

### 1.4.3. - Méthode graphique de Schneyder Bergeron :

En 1929 Bergeron a proposé une méthode graphique de calcul de coup de bélier dans des conduites en refoulement. Par la suite elle a été étendue à toutes les conduites en charge. [1] et [2]

Bergeron, suppose un point quelconque de la conduite, et étudie le phénomène de surpression et dépression dans un plan (H,Q).

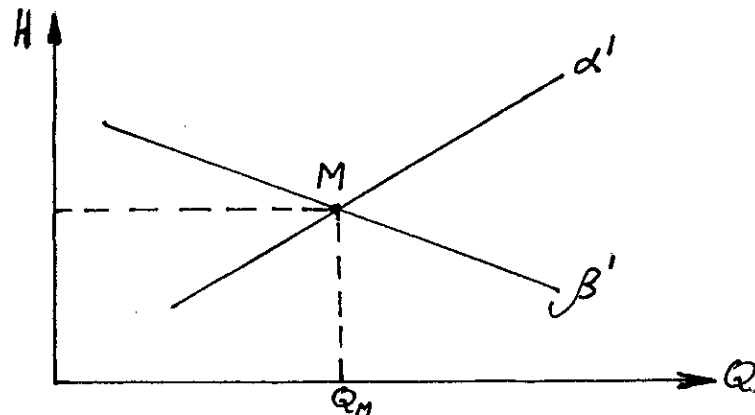


Figure 4

$\alpha'$  et  $\beta'$  étant les pentes de valeur  $\frac{c}{g.s}$  et  $-\frac{c}{g.s}$  ;  $Q_M$  et  $h_M$  sont évidemment le débit et la pression au point « M » au temps « t ».

Pour un observateur se déplaçant le long de la conduite ; dans le sens contraire de la vitesse d'écoulement et avec une célérité  $c$  (vitesse de l'onde), il verra l'onde « F » conserver sa valeur ; ainsi en tout point de la conduite il constatera que :

$$\frac{c}{g.s} (Q_0 - Q) = F - f$$

$$h - h_0 = F + f$$

où : F et f représentent des ondes de propagation au niveau de la conduite avec des célérités respectives (+c) et (-c).

La méthode de Bergeron reste applicable dans le cas des conduites à diamètre variable.

## Chapitre II

### Etude de la célérité de propagation des ondes dans les conduites

#### Introduction :

L'objet de ce chapitre porte sur l'estimation théorique de la célérité de propagation des ondes dans les conduites.

Une étude bibliographique fait l'objet de la première partie qui nous permettra de passer en revue les différents travaux existants à ce jour.

Nous déterminerons par la suite la valeur de la célérité d'onde pour les conduites minces et épaisses pour les différents cas d'ancrage.

#### II.1 - Aperçu bibliographique :

Pour le calcul de la célérité de propagation dans une conduite en utilisant la formule d'Allievi a été établi en supposant :

- Conduite à parois minces, donc une répartition uniforme des contraintes sur toute l'épaisseur de la conduite.
- Parois élastiques obéissant à la loi d'Hooke
- Efforts longitudinaux nuls (la conduite est considérée comme un ensemble d'anneaux sans aucune influence des uns sur les autres). [5], [6], [14] et [16]

$$c = \left[ \rho \left( \frac{\Delta p}{\rho \Delta p} + \frac{\Delta s}{s \Delta p} \right) \right]^{-1/2} \quad (II.1)$$

JAEGER étudia les cas de la conduite épaisse, dans les galeries creusées dans le rocher ainsi que dans les galeries blindées. Il négligea le module de poisson et par suite les efforts longitudinaux dans la conduite. Il adopta donc le même point de vue qu'ALLIEVI qui considère la conduite comme un ensemble d'anneaux sans aucune influence entre eux.

PARMAKIAN étudia l'influence des efforts longitudinaux sur la célérité de propagation dans les conduites à parois minces uniquement. Mais contrairement à ALLIEVI et JAEGAR il a considéré l'influence des contraintes et déformations longitudinales de la conduite en introduisant un terme supplémentaire de la déformabilité  $\frac{dl}{ldp}$  dans l'expression de la célérité.

$$c = \left[ \rho \left( \frac{dp}{\rho dp} + \frac{ds}{s dp} + \frac{dl}{ldp} \right) \right]^{-1/2} \quad (II.2)$$

en définissant :  $\frac{ds}{s dp} + \frac{dl}{ldp} = k'$

où  $k'$  est exprimé en fonction du module de poisson  $\nu$  comme suit :

cas a :  $k' = 1 - \nu/2$

pour une conduite équipée sur toute sa longueur de joints de dilatation.

cas b :  $k' = 1 - v^2$   
pour une conduite ancrée sur toute la longueur.

cas c :  $k' = \frac{5}{4} - v$  pour une conduite ancrée à l'amont et libre sur toute sa longueur.

- HALLIWELL élargit le calcul de PARMAKIAN pour inclure la conduite à parois épaisses tout en prenant en compte les contraintes et les déformations longitudinales de la conduite; d'où le terme de déformabilité  $\frac{dl}{ldp}$ . Il établit la formule de la célérité exprimée comme suit:

$$c = \left[ \rho \left( \frac{\Delta p}{\Delta p} + \frac{\Delta s}{s \Delta p} + \frac{\Delta l}{l \Delta p} \right) \right]^{-1/2} \quad (11.3)$$

avec :

$$\Psi = E \left( \frac{ds}{sdp} + \frac{dl}{ldp} \right)$$

$\Psi$  dépend d'une part de la conduite étudiée et d'autre part des conditions d'ancrage de cette dernière.  $\Psi$  peut être relié avec la constante  $k'$  de PARMAKIAN par la relation.

$$\Psi = \frac{D}{e} k'$$

Le calcul d'HALLIWELL donne les mêmes résultats que ceux obtenus par PARMAKIAN pour les cas d'ancrage « b » et « c » mais dans le cas a le calcul d'HALLIWELL aboutit à

$$\Psi = \frac{D}{e} \text{ donc } k' = 1$$

alors que celui de PARMAKIAN donne :

$$k' = 1 - v/2$$

Cette différence vient du fait que HALLIWELL considère que pour le cas a, les joints absorbent et compensent les déformations longitudinales de la conduite, ce qui maintient la longueur totale constante et permet de prendre comme nul le terme de déformabilité longitudinale dans l'expression de la célérité, contrairement à PARMAKIAN qui le considère comme différent de zéro.

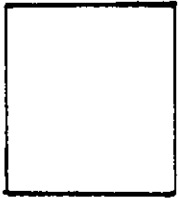
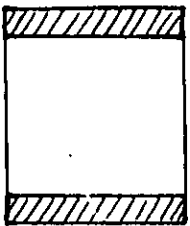
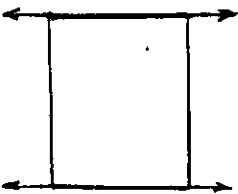
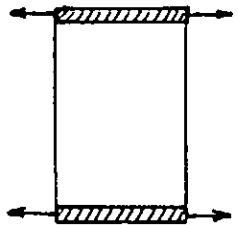
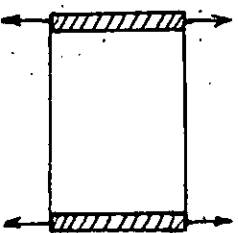
- STREETER et WILIE ont calculé la célérité de propagation dans les conduites cylindriques élastiques minces et épaisses. Ils ont adopté les résultats d'HALLIWELL et exprimaient la célérité de propagation de la même façon que PARMAKIAN tout en adoptant sa définition de la constante  $k'$ .

- F. MASSOUH en traitant les équations de continuité et dynamique par la méthode d'ALLIEVI ou par la méthode des caractéristiques il détermine la nouvelle expression de la célérité de propagation. [2]

$$c = \left[ \rho \left( \frac{dp}{\rho dp} + \frac{ds}{sdp} \right) \right]^{-1/2} \quad (11.4)$$

Tableau n° 1

Les résultats de ce développement bibliographique sont rassemblés dans le tableau suivant :

Auteurs	Modèle étudié	Parois	Prise en compte de l'ancrage	Formule utilisée de la célérité
Allievi		Mince	non	$c = \left[ \rho \left( \frac{\Delta p}{\rho \Delta p} + \frac{\Delta s}{s \Delta p} \right) \right]^{-1/2}$
Jaeger		Mince et épaisse	non	
Parmakian		Mince et épaisse	oui	$c = \left[ \rho \left( \frac{dp}{\rho dp} + \frac{ds}{s dp} + \frac{dl}{l dp} \right) \right]^{-1/2}$
Haliwell		Mince et épaisse	oui	$c = \left[ \rho \left( \frac{\Delta p}{\rho \Delta p} + \frac{\Delta s}{s \Delta p} + \frac{\Delta l}{l \Delta p} \right) \right]^{-1/2}$
Massouh		Mince et épaisse	oui	$c = \left[ \rho \left( \frac{dp}{\rho dp} + \frac{ds}{s dp} \right) \right]^{-1/2}$

## II.2 - Expression générale de la célérité de propagation :

### II.2.1 - Rappel des équations de base :

Rappelons les deux équations nécessaires au calcul du régime transitoire dans une conduite.

#### a) Equation dynamique :

En supposant que la conduite est horizontale et en négligeant les pertes de charge, appliquons la loi fondamentale de la dynamique sur le mouvement de la particule liquide M:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{dv}{dt} \quad (II.5)$$

où p est la pression dans la section considérée.

#### b) Equation de continuité :

Le principe de conservation de masse de la même particule M permet d'écrire : [3] et [4]

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{d(\rho s)}{\rho s dt} \quad (II.6)$$

### II.2.2 - Propagation de l'onde du coup de bélier dans une conduite :

Pour étudier la propagation des ondes dans une conduite et par la suite établir l'expression de la célérité de l'onde, nous supposons que les caractéristiques géométriques et mécaniques de la conduite restent constantes sur toute sa longueur et que le milieu de propagation (liquide-conduite) est parfait : c'est à dire que la propagation aura lieu sans amortissement et que la célérité est une constante de calcul. [5], [6] et [7]

Considérons une conduite (fig.5) dans laquelle le régime hydraulique est initialement permanent. A un instant donné nous imposons au point A de la conduite une variation de débits qui est accompagnée par les phénomènes suivants :

- 1 - Variation  $\Delta p$  de pression
- 2 - Déformation  $\epsilon_s$  de la section de la conduite
- 3 - Déformation  $\epsilon_l$  de l'unité de longueur de la conduite
- 4 - Déformation volumique  $\epsilon_v$  de l'unité de masse de liquide.

La déformation  $\epsilon_v$  est déterminée par la variation de pression  $\epsilon_p$  et la compressibilité du liquide. Par contre  $\epsilon_s$  et  $\epsilon_l$  se déterminent, outre les propriétés mécaniques de la conduite et la variation de pression  $\Delta p$ , par l'état à l'extérieur et les conditions d'ancrage.

Après le changement de débit, il y a création d'une onde qui se propage afin de transmettre les variations produites en A au reste de la conduite. Pendant un temps « t » l'onde aura parcouru une distance  $x' = c \cdot t$  sur cette distance x on aura une répartition de tous les paramètres transportés par l'onde. Nous désignons par F' l'un de ces paramètres ( $\rho$ , Q, v, P,  $\epsilon_s$  et  $\epsilon_l$ ).



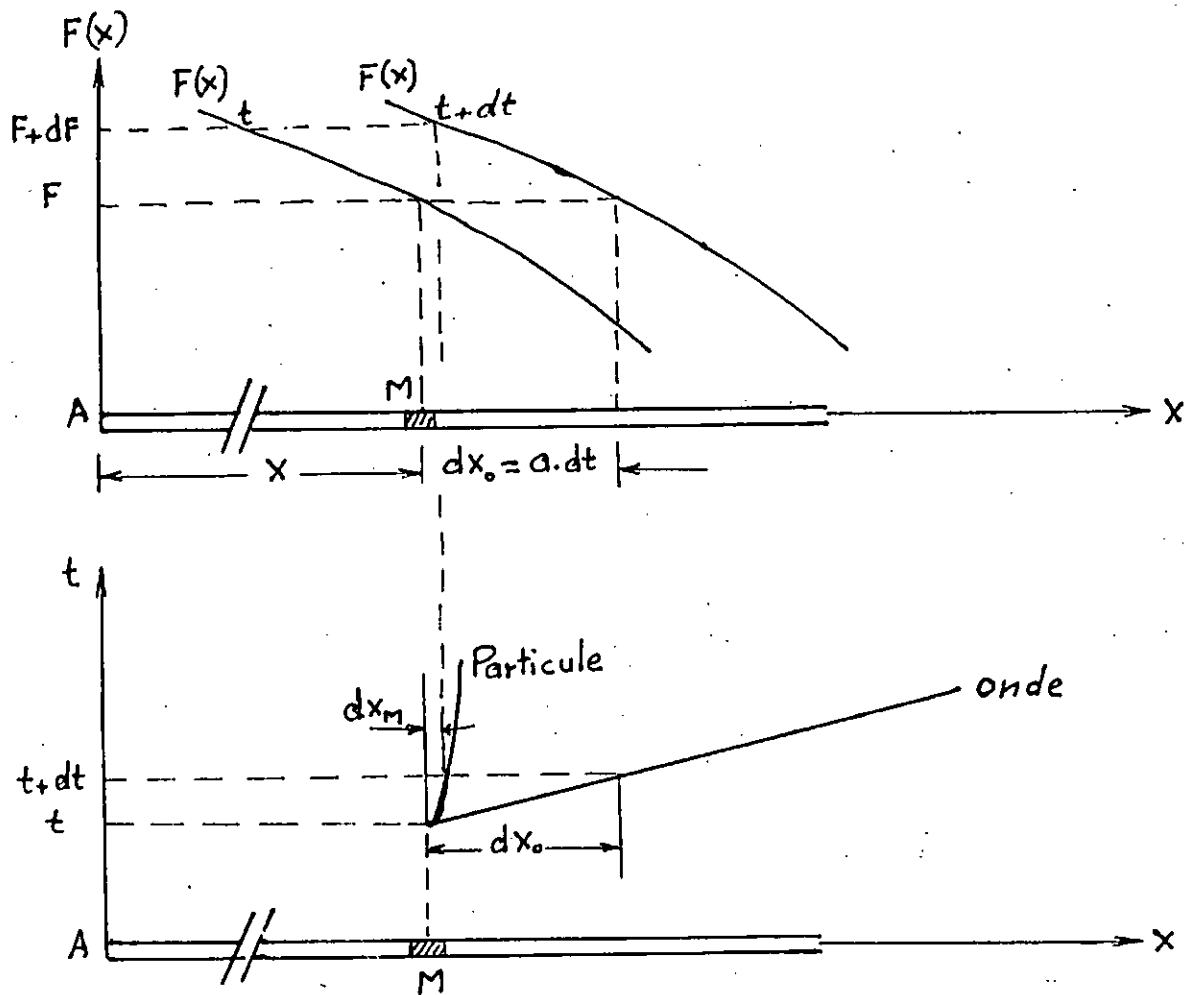


Figure 5

• A un instant donné  $t$ , la particule liquide  $M$  située à l'abscisse  $x$  possède la quantité  $F'$ .

• A l'instant  $t + dt$  la quantité  $F'$  devient  $F' + dF'$  dans la particule qui se déplace pendant le temps  $dt$  de  $dx_M = v \cdot dt$  à la vitesse  $v$ .

On pourra écrire donc :

$$\frac{dF'}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial t} + v \frac{\partial F'}{\partial x} \quad (II.7)$$

ou bien :

$$dF' = \frac{\partial F'}{\partial t} dt + v \frac{\partial F'}{\partial x} dx // 0 \quad (II.8)$$

Pendant la même temps  $dt$ , l'onde se déplace aussi mais d'une distance  $dx_0 = c \cdot dt$  ; comme l'amortissement est supposé nul. Le paramètre  $F'$  sera donc conservé et pour obtenir la répartition de  $F'$  le long de la conduite à l'instant  $t + dt$  il suffit de translater la courbe  $F'(x)$   $t$  parallèlement à l'axe de la conduite de la distance  $c \cdot dt$ .

Nous pouvons donc écrire :

$$d_0 F' = \frac{\partial F'}{\partial t} dt + \frac{\partial F'}{\partial x} dx_0 = 0 \quad (II.9)$$

où :  $dx = v \cdot dt$  et  $dx_0 = (v + c) dt$

des équations (II.8) et (II.9) nous obtenons :

$$\frac{dF'}{dt} = -\varepsilon \cdot c \frac{\partial F}{\partial x} \quad (II.10)$$

$$\frac{dF'}{dx} = \frac{\varepsilon \cdot c}{v + \varepsilon \cdot c} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (II.11)$$

Ces deux expressions expriment le lien entre le taux de variation du paramètre  $F'$  dans la particule  $M$  et les gradients spacial et temporel de  $F$ .

## **II.3 - Interprétation de l'expression de la célérité**

### **II.3.1 - Equations de base :**

Appliquons les deux équations indispensables pour l'étude du mouvement transitoire dans une conduite.

#### **1 - Equation de continuité :**

Le principe de conservation de la masse de la particule  $M$  nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{d(\rho s)}{\rho s dt} \quad (II.12)$$

#### **2 - Equation dynamique :**

La loi fondamentale de la dynamique appliquée au mouvement de la particule  $M$  nous donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \rho \frac{dv}{dt} \quad (II.13)$$

En traitant les équations (II.12) et (II.13) par la méthode d'ALLIEVI ou la méthode des caractéristiques, on considère la célérité de propagation comme étant une constante de calcul.

En utilisant l'équation (II.10) et en y remplaçant  $F'$  successivement par la vitesse  $v$  et la pression  $P$  on obtient les deux relations suivantes :

$$\frac{dv}{dt} = -\epsilon \cdot c \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{dp}{dt} = -\epsilon \cdot c \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II.15})$$

Ainsi les équations de continuité et dynamique pourront s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dv}{dt} = +\epsilon \cdot c \frac{d(\rho \cdot s)}{\rho \cdot s \cdot dt} \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{dp}{dt} = +\epsilon \cdot c \cdot \rho \frac{dv}{dt} \quad (\text{II.17})$$

Sachant que  $\epsilon^2 = 1$  et en déterminant  $dv/dt$  entre les équations (II.16) et (II.17), nous obtenons :

$$c^2 = s \frac{dp}{d(\rho \cdot s)} \quad (\text{II.18})$$

ou bien :

$$c = \left[ \rho \left( \frac{dp}{\rho \cdot dp} + \frac{ds}{s \cdot dp} \right) \right]^{-1/2} \quad (\text{II.19})$$

La relation (II.19) représente l'expression théorique de la célérité de propagation

La compressibilité volumique  $k$  de la particule liquide est donnée par :

$$\frac{dp}{\rho \cdot dp} = K = \frac{1}{\xi} \quad (\text{II.20})$$

où  $\xi$  représente le module d'élasticité volumique du liquide,

Le terme  $\frac{ds}{s \cdot dp}$  peut aussi être exprimé d'après (II.11)

$$ds = \frac{\epsilon \cdot c}{v + \epsilon \cdot c} \frac{\partial s}{\partial t} dt = \frac{\epsilon \cdot c}{v + \epsilon \cdot c} \delta s$$

$$dp = \frac{\epsilon \cdot c}{\nu + \epsilon \cdot c} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt = \frac{\epsilon \cdot c}{\nu + \epsilon \cdot c} \delta p$$

$\delta$  représente une variation locale pendant le temps  $dt$ , nous avons donc :

$$\frac{ds}{sdp} = \frac{\delta s}{s \delta p} \quad (II.21)$$

Le terme  $\frac{ds}{sdp}$  représente donc le rapport entre la variation locale relative de la section et la variation de la pression locale correspondante.

#### II.4 - Célérité dans les conduites élastiques :

Utilisons l'expression (II.19) pour déterminer le célérité pour les différents cas que l'on peut rencontrer en pratique. Pour cela il faudrait connaître la déformabilité de la section de la conduite.

En suivant la théorie des cylindres épais on peut démontrer que si  $P.D/E.e \ll 1$ , il existe une relation linéaire entre la déformation  $\delta s/s$  de la section de la conduite et la variation  $\delta p$  de la pression interne. Cette relation s'écrit comme suit :

$$\frac{\delta s}{s \delta p} = \left[ (1 - \nu k/2) \frac{D}{D+e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \right] \frac{D}{E.e} \quad (II.22)$$

d'une façon plus simplifiée

$$\frac{\delta s}{s \delta p} = c' \frac{D}{E.e} \quad (II.23)$$

avec 
$$c' = (1 - \nu k/2) \frac{D}{D+e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad (II.24)$$

$c'$  représente le coefficient de déformabilité qui varie selon l'ancrage et selon que la conduite soit épaisse ou mince. [16]

Par conséquent l'équation (II.19) s'écrit donc :

$$c = \left[ \rho \left( \frac{1}{\xi} + c' \left( \frac{D}{E.e} \right) \right) \right]^{-1/2} \quad (II.25)$$

quand  $c' = 1$  on retrouve l'expression de la célérité donnée par ALLIEVI.

##### II.4.1 - Application à différents cas d'ancrage :

Nous considérons trois cas d'ancrage (fig. 6)

- **cas a** : conduite équipée de joints de dilatation c'est à dire conduite libre de se déplacer longitudinalement (fig 6.a)

$$k' = 0$$

- **cas b** : conduite fixée à ses deux extrémités empêchant tout déplacement longitudinal (fig. 6.b).

$$k' = 2 \nu$$

- **cas c** : conduite libre à une seule extrémité (fig. 6.c)

$$k' = 1$$

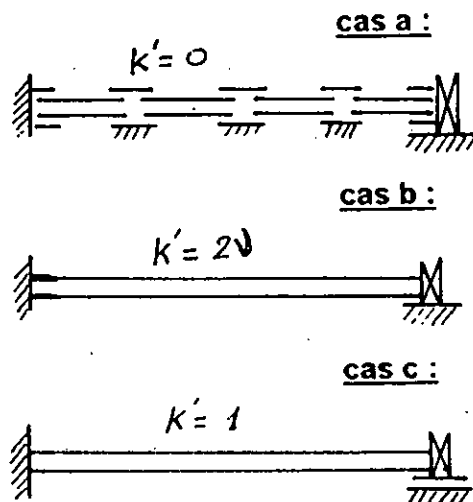


Figure 6

## II.4.2 - Calcul du coefficient de déformabilité $c'$

### II.4.2.1 - cas général :

d'après l'équation (II.15) nous avons :

- cas d'ancrage a :

$$c' = \frac{D}{D+e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad (II.26)$$

- cas d'ancrage b :

$$c' = (1 - \nu^2) \frac{D}{D+e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad (II.27)$$

- cas d'ancrage c :

$$c' = (1 - \frac{\nu}{2}) \frac{D}{D+e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \quad (II.28)$$

### II.4.2.2 - Expressions particulières :

Exprimons l'équation (II.23) pour les deux cas de conduite.

Cas de conduite à parois minces ( $e \ll D$ )

$$\frac{\delta s}{s \delta p} = \left(1 - \frac{\nu \cdot k'}{2}\right) \frac{D}{E \cdot e} \quad (II.29)$$

d'où le coefficient de déformabilité pour les différents cas d'ancrage.

- cas a :  $c' = 1$

- cas b :  $c' = 1 - \nu^2$

- cas c :  $c' = 1 - \frac{\nu}{2}$

Cas de conduite très épaisse ( $e \gg D$ )

c'est le cas des galeries rocheuses

$$\frac{\delta s}{s \delta p} = 2 \frac{1 + \nu}{E} \quad (II.30)$$

et par suite l'équation (II.19) s'écrira

$$c = \left[ \rho \left( \frac{1}{\xi} + 2 \frac{1 + \nu}{E} \right) \right]^{-1/2} \quad (II.31)$$

On conclue que la célérité d'onde dans une conduite très épaisse ne dépend pas des dimensions de la conduite, mais uniquement des caractéristiques mécaniques du matériau de la conduite et celles du fluide véhiculé par cette dernière.

**II.4 Représentation graphique :**

Nous résumons notre travail par une illustration graphique qui consiste à représenter la célérité d'onde de coup de bélier en valeur addimensionnelle en fonction de la caractéristique de la conduite, pour chaque mode d'ancrage. Deux matériaux de nature différente les plus répandus en pratique sont pris comme exemple (tableau n° 2) avec leurs caractéristiques dans l'hypothèse que le rapport  $D/e$  étant le même ainsi que le mode d'ancrage.

$$\frac{c}{c_0} = \frac{c \cdot \sqrt{\rho}}{\sqrt{\xi}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\xi \cdot c' \cdot D / E \cdot e}} f\left(\frac{D}{e}\right) \quad (II.32)$$

## II.4.5 - Conclusion :

Nous concluons que la considération du terme  $\frac{dl}{ldp}$  fait augmenter le coefficient de déformabilité. En conséquence lorsque un front d'onde passe en un point d'une conduite ; celle-ci se déforme non seulement radialement ( $\frac{ds}{sdp}$ ) mais également longitudinalement  $\frac{dl}{ldp}$  c'est ce qui fait diminuer la célérité d'onde dans une proportion fonction du mode d'ancrage comme le montrent les courbes des figures n°7 et 8

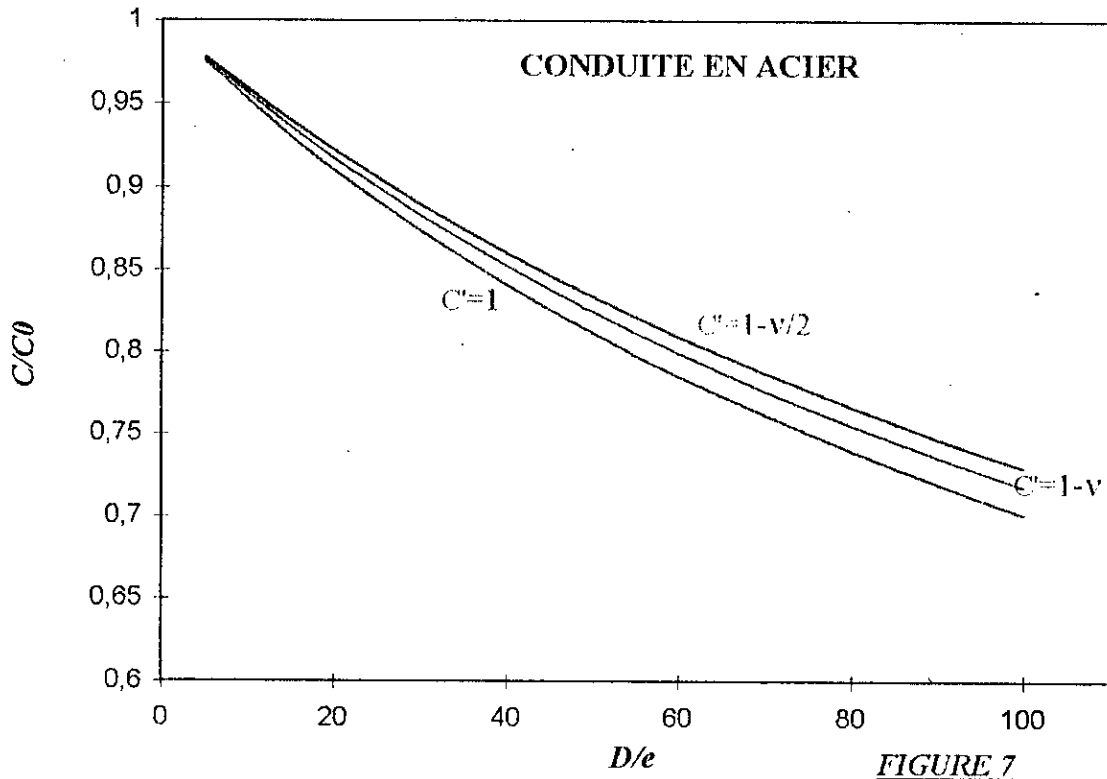
Nous remarquons également que, pour les conduites en P.V.C, en absence de joints, le comportement de la célérité est le même pour ces deux modes d'ancrage du fait que  $\gamma$  aura la même valeur.

**TABLEAU N° 3: VARIATION DE LA CELERITE POUR  
DIFFERENTS MODES D'ANCRAGE**

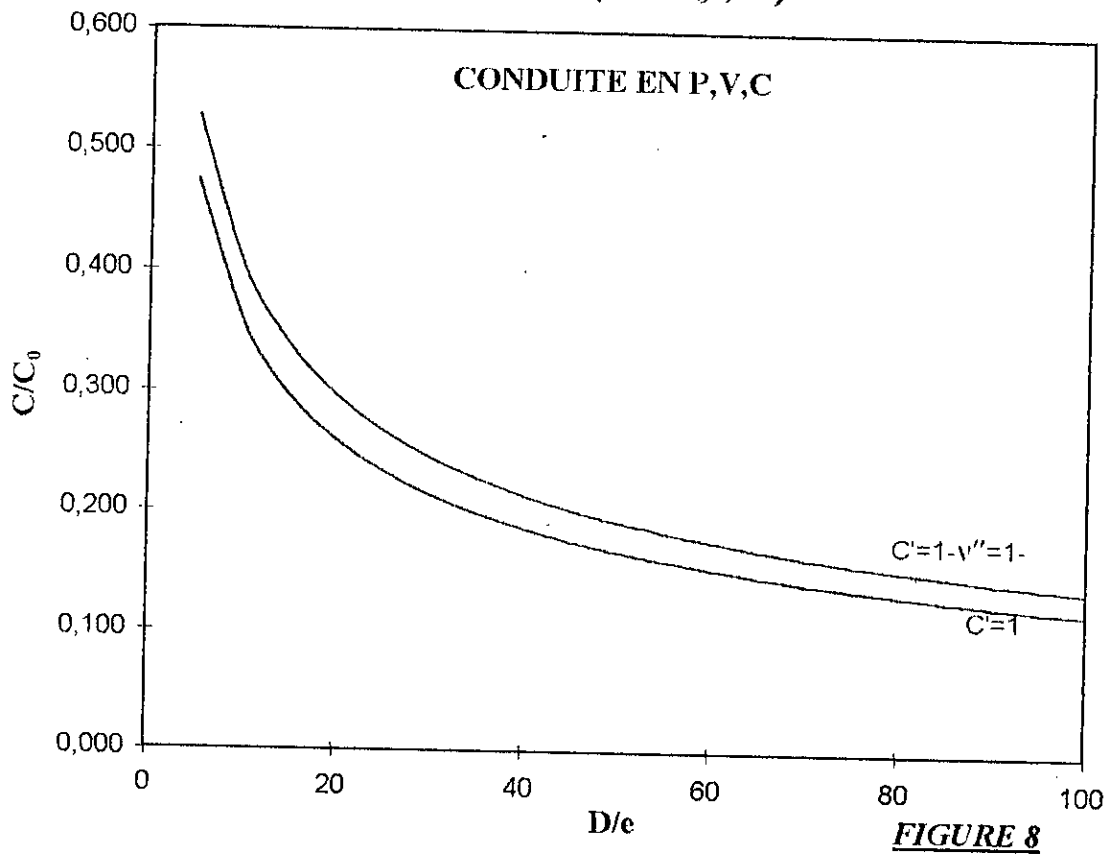
D/e	CONDUITE EN P.V.C		CONDUITE EN ACIER		
	C/C <sub>0</sub>		C/C <sub>0</sub>		
	C'=1	C'=1-v/2=1-v <sup>2</sup>	C'=1	C'=1-v <sup>2</sup>	C'=1-v/2
5	0,474	0,528	0,9751	0,9773	0,9778
10	0,356	0,403	0,9519	0,956	0,9588
15	0,297	0,338	0,9304	0,9361	0,94
20	0,260	0,297	0,9102	0,9173	0,9222
25	0,234	0,268	0,8913	0,8997	0,9055
30	0,215	0,246	0,8735	0,883	0,8896
35	0,199	0,229	0,8568	0,8672	0,8745
40	0,187	0,215	0,841	0,8522	0,8602
45	0,177	0,203	0,826	0,838	0,8465
50	0,168	0,193	0,8118	0,8245	0,8335
60	0,154	0,177	0,7854	0,7993	0,8091
70	0,142	0,164	0,7615	0,7763	0,7868
80	0,133	0,154	0,7396	0,7552	0,7662
90	0,126	0,145	0,7195	0,7357	0,7472
100	0,120	0,138	0,701	0,7176	0,7295



$$C/C_0 = F(D/e, c')$$



$$C/C_0 = F(D/D_0, c')$$



## Chapitre III

### Cheminement des ondes aux points de ramifications

#### III.1 - Introduction :

Dans le chapitre précédent nous avons donné une présentation du régime transitoire engendré dans une conduite à caractéristiques uniques.

Néanmoins en pratique, nous pouvons avoir ce régime dans des systèmes de canalisations à caractéristiques multiples à savoir :

- conduite de même diamètre « D » mais d'épaisseur « e » variable sur sa longueur.
- conduite de diamètre et d'épaisseur variables ; c'est à dire des conduites télescopiques.
- conduite dont le diamètre change brusquement c'est à dire conduites bifurquées ; (réseaux maillés et ramifiés convergents ou divergents).

La détermination des paramètres vitesse-pression engendrés par un écoulement non permanent en conduites forcées à caractéristiques uniques devient plus simple en utilisant les méthodes usuelles.

Celles-ci deviennent délicates à manipuler dans le cas où cet écoulement se manifeste dans un système de conduites à caractéristiques multiples (cas des réseaux ramifiés ou maillés) du fait de la variation des paramètres modificateurs (pression, vitesse) dans le temps et dans l'espace, à la suite de l'interférence des ondes de propagation provenant des différents tronçons.[5]

#### III.2 - Comportement des ondes au point de changement de section :

Essayons d'analyser le comportement de ondes de surpressions et de dépressions en un point de changement de caractéristiques de la canalisation (Fig. 9) suite à une fermeture brusque d'un robinet vanne « R.V » par exemple ; le raisonnement étant le même dans le cas d'un arrêt d'une pompe. [4].

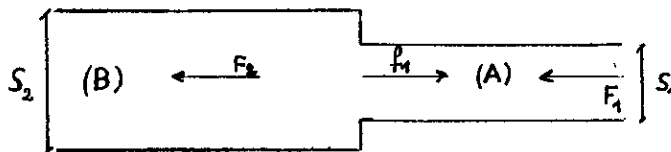


Figure 9

Soit  $S_1$  et  $S_2$  respectivement les sections intérieures des conduites « A » et « B » et  $c_1$  et  $c_2$  les célérités d'ondes correspondantes.

Imaginons une onde  $F_1$  remontant la conduite (A) ; examinons son comportement au niveau du point de changement brusque de la section. A ce point, cette onde donne naissance à :

- la première que l'on appellera  $f_1$  qui sera réfléchiée vers le point de naissance de  $F_1$  avec une célérité  $-c_1$
- la seconde que l'on notera par  $F_2$  sera transmise au tronçon B poursuivra son cheminement avec une célérité  $+c_2$ .

Au point de jonction séparant les deux (2) sections et à l'instant « t » nous avons une pression « P » dynamique et une pression statique correspondante «  $P_0$  » telles que :

$$P = P_0 + C_1 + C'_1 = P_0 + C_2 \quad (\text{III.1})$$

donc :

$$C_1 + C'_1 = C_2 \quad (\text{III.2})$$

de plus au même instant « t » nous avons les nouvelles vitesses  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$  correspondant aux sections  $S_1$  et  $S_2$ , par conséquent :

$$S_1 \cdot v_1(t) = S_2 \cdot v_2(t) \quad (\text{III.3})$$

(d'après l'équation de continuité )

En régime permanent  $S_1 \cdot v_{0(1)} = S_2 \cdot v_{0(2)}$

en appliquant les équations d'Allievi aux deux tronçons (A) et (B) on aura :

- Pour le tronçon (A) : nous avons une superposition de deux ondes  $F_1$  et  $f_1$

$$b_1 = F_1 \left( t - \frac{x}{c_1} \right) + f_1 \left( t + \frac{x}{c_1} \right) \quad (\text{III.4})$$

$L_A$  étant la longueur du tronçon (A)

au temps  $t = \frac{L_A}{c_1}$  l'onde  $F_1$  arrive au point de jonction

juste avant cet instant « t » on avait :  $F_1 \neq 0$  et  $f_1 = 0$  (car il n'ya pas encore d'onde réfléchiée).

juste après l'instant « t » on a une réflexion ce qui nous amène à écrire :

$$b_1 = F_1 + f_1$$

La seconde équation d'Allievi s'écrira alors comme suit : [10]

$$v_1 = v_{0(1)} - g/c_1 (F_1 - f_1) \text{ autrement dit :}$$

$$(v_{0(1)} - v_1) \cdot c_1/g = F_1 + f_1 \quad (\text{III.5})$$

- Pour le tronçon B :

Nous pouvons écrire que :

$$b_2 = F_2 \left( t - \frac{x}{c_2} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{c_2} \right) \quad (\text{III.6})$$

Pour ce tronçon le point de jonction coïncide avec son origine ( $x = 0$ ) ; à cet instant aucune réflexion n'existe encore ; on pourra donc écrire :

$$F_2 \neq 0 \text{ et } f_2 = 0 \text{ donc : } b_2 = F_2$$

La seconde équation d'Allievi s'écrira alors comme suit :

$$(v_{0(2)} - v_2) a_{2/g} = F_2 \quad (\text{III.7})$$

étant donné qu'au point de jonction  $b_1 = b_2$  et que l'équation de continuité s'applique comme suit  $(v_{0(1)} - v_1) S_1 = (v_{0(2)} - v_2) S_2$  ; on aboutit au système suivant :

$$\begin{aligned} F_1 + f_1 &= F_2 \\ \frac{S_1}{c_1} (F_1 - f_1) &= \frac{S_2}{c_2} F_2 \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Posons :  $m_1 = \frac{c_1 S_1}{c_2 S_2}$  et  $m_2 = \frac{c_2}{c_1}$

Nous obtenons :

$$F_1 + f_1 = F_2$$

$$\frac{m_2}{m_1} (F_1 - f_1) = F_2$$

ou bien :

$$\frac{m_2}{m_1} (F_1 - f_1) = F_1 + f_1$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} F_1 - \frac{m_2}{m_1} f_1 - F_1 - f_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{m_2}{m_1} - 1 \right) F_1 - \left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right) f_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m_2 - m_1}{m_1} F_1 - \frac{m_2 + m_1}{m_1} f_1 = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} F_1 \quad (\text{III.9})$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{2 m_2}{m_2 + m_1} F_1 \quad (\text{III.10})$$

L'onde  $F_1$  étant connue d'après les caractéristiques de la conduite on pourra aisément déterminer les ondes  $f_1$  et  $F_2$ .

Interprétation des résultats :

1° Si  $m_1 = m_2$  ; nous obtenons  $f_1 = 0$  et  $F_2 = F_1$   
c'est le cas d'une conduite à caractéristique unique.

2° si  $m_2 > m_1$  ; l'onde  $f_1$  sera de même signe que l'onde  $F_1$

3° si  $m_2 < m_1$  ; l'onde  $f_1$  sera de signe contraire de l'onde  $F_1$

Remarque : Suite au phénomène de réflexion et de transmission des ondes  $F_1$  au point de ramification ; nous essayons de déduire l'allure des lignes piézométriques. [5]

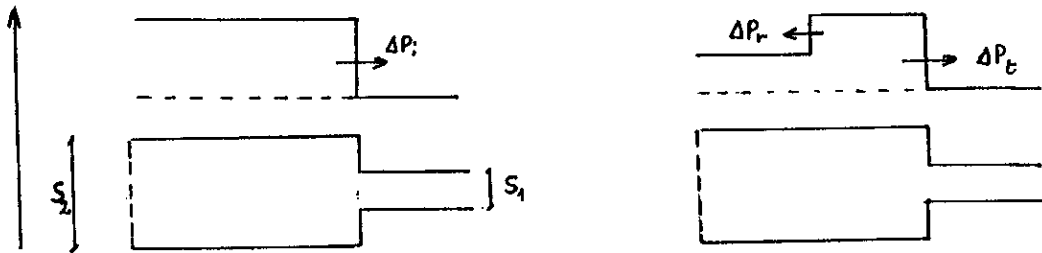


Figure 10

au point de jonction et à l'instant « t » on aura d'une part une pression « P » telle que :

$$P = P_0 + \Delta P_1 + \Delta P_r = P_0 + \Delta P_t \quad (\text{III.11})$$

d'où :  $\Delta P_t = \Delta P_1 + \Delta P_r$

d'autre part ; tenant compte de l'équation de continuité, on pourra écrire qu'à l'instant « t »  $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$ , et que la seconde équation d'Allievi donnera :

$$(v_1 - v_{0(1)}) = g/c_1 (\Delta P_1 - \Delta P_r)$$

$$(v_2 - v_{0(2)}) = g/c_2 \Delta P_t$$

$$\Rightarrow S_1 (v_{0(1)} - g/c_1 (\Delta P_1 - \Delta P_r)) = S_2 (v_{0(2)} - g/c_2 \Delta P_t)$$

$$\text{or } S_1 \cdot v_{0(1)} = S_2 \cdot v_{0(2)}$$

$$\text{donc : } \frac{S_1}{c_1} (\Delta P_1 - \Delta P_r) = \frac{S_2}{c_2} \Delta P_t$$

On aboutit finalement au système suivant :

$$\Delta P_t = \Delta P_1 + \Delta P_r$$

$$\frac{S_1}{c_1} (\Delta P_i - \Delta P_r) = \frac{S_2}{c_2} \Delta P_t$$

en posant :  $m_1 = \frac{c_1}{S_1}$  et  $m_2 = \frac{c_2}{S_2}$

après transformation on a :

$$\Delta P_r = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \Delta P_i \qquad \Delta P_t = \frac{2 m_2}{m_2 + m_1} \Delta P_i$$

Supposons que les célérités d'ondes  $c_1$  et  $c_2$  sont les mêmes, on aura :

$$\Delta P_r = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \Delta P_i \qquad \text{(III.12)}$$

$$\Delta P_t = \frac{2 S_1}{S_1 + S_2} \Delta P_i \qquad \text{(III.13)}$$

### Interprétation des résultats :

Nous remarquons que les pressions enveloppes «  $\Delta P_r$  » et «  $\Delta P_t$  » réfléchi et transmis, dépendent simultanément du rapport des sections des canalisations en raccordement et de la propagation des célérités d'ondes pour une pression incidente. Néanmoins, si l'on considère que les célérités d'onde sont les mêmes ; ces enveloppes seront exclusivement fonction des sections en raccordement.

$$\frac{\Delta P_r}{\Delta P_i} = \frac{1 - (D_2/D_1)^2}{1 + (D_2/D_1)^2} = f_1 \frac{D_2}{D_1} \qquad \text{(III.14)}$$

$$\frac{\Delta P_t}{\Delta P_i} = \frac{2}{1 + (D_2/D_1)^2} = f_2 \frac{D_2}{D_1} \qquad \text{(III.15)}$$

Si nous représentons graphiquement ces deux fonctions (voir Figure 11) nous constatons que  $f_1 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)$  pourra être positive ou négative en fonction du rapport  $\left( \frac{D_2}{D_1} \right)$  (rétrécissement brusque). Ce qui n'est pas le cas pour la fonction  $f_2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)$  qui est toujours positive quelque soit le rapport  $\frac{D_2}{D_1}$  et qui s'annule lorsque ce dernier augmente.

Application dans le domaine pratique :

Nous remarquons que pour la fonction  $f_1 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)$ ,

- lorsque «  $D_2$  » est égale à zéro, c'est le cas d'une conduite en impasse (cas des réseaux ramifiés). A cette extrémité,  $\Delta P_r = \Delta P_i$  par contre le débit rebrousse chemin ; le sens d'écoulement change.

- lorsque «  $D_2 \gg D_1$  », c'est le cas d'une conduite de diamètre «  $D_1$  » aboutissant dans un réservoir de diamètre «  $D_2$  » ; nous remarquons que  $\frac{\Delta P_r}{\Delta P_i} < 0$  par contre  $\frac{\Delta P_t}{\Delta P_i}$  tend vers zéro.

en résumé : Tableau n°4

	$\Delta P_i$	$\Delta P_r$	$\Delta P_t$	variation du débit	variation des pressions
bout fermé $D_2 = 0$	$\Delta Q_1, \Delta P_i$	$\Delta Q, \Delta P_r = \Delta P_i$	$\Delta Q, 2 \Delta P_i$	0	$2 \Delta P_i$
bout ouvert $D_2 \gg D_1$	$\Delta Q, \Delta P_i$	$\Delta Q, \Delta P_r = -\Delta P_i$	$2 \Delta Q, \Delta P_t = 0$	$2 \Delta Q$	0

**III.3 : Cas d'un noeud de ramification :**

Nous étalons le raisonnement interprété ci-dessus pour un noeud de ramification, tenant compte de certaines hypothèses qui sont les suivantes :

- Absence de débit soutiré ou de débit supplémentaire au noeud.
- Absence d'accessoires anti-béliers pour les canalisations de jonction.
- Canalisation à caractéristiques uniques ne distribuant pas en route.
- Les temps de parcours sont tels que :  $\frac{l_1}{C_1} = \frac{l_2}{C_2} = \frac{l_3}{C_3} = \dots = \Delta t = 1$

Considérons une canalisation de trois ramifications, et qu'un front d'onde parcourant la canalisation (1) vers le noeud de jonction « 0 »

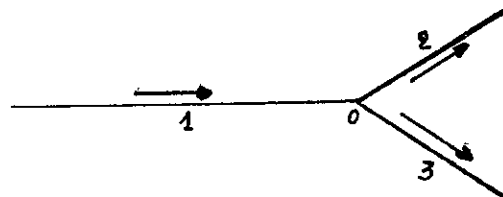


Figure 11

Conformément aux résultats interprétés ci-dessus ; la pression enveloppe qui en résulte au noeud, à partir des ondes réfléchies et transmises sera :

$$P = P_0 + \Delta P_i + \Delta P_r = P_0 + \Delta P_i$$

autrement dit :  $\Delta P_i + \Delta P_r = \Delta P_i$

ou bien  $\Delta P_r = \Delta P_i - \Delta P_i$

Tenant compte de l'équation de continuité, sachant que :  $Q = \frac{g \cdot S}{c} \Delta P$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

il en résulte que :

$$\frac{g \cdot S_1}{C_1} (\Delta P_i - \Delta P_r) = \frac{g \cdot S_2}{C_2} \Delta P_{12} + \frac{g \cdot S_3}{C_3} \Delta P_{13}$$

Juste au point noeudal ; l'enveloppe de pression transmise est  $\Delta P_{12} = \Delta P_{13} = \Delta P_i$   
 Tenant compte de la relation ci-dessus ; nous avons : [5]

$$\frac{g \cdot S_1}{C_1} (\Delta P_i + \Delta P_i - \Delta P_i) = \left( \frac{g \cdot S_2}{C_2} + \frac{g \cdot S_3}{C_3} \right) \Delta P_i$$

$$2 \cdot \Delta P_i \cdot \frac{g \cdot S_1}{C_1} = \left( \frac{g \cdot S_1}{C_1} + \frac{g \cdot S_2}{C_2} + \frac{g \cdot S_3}{C_3} \right) \Delta P_i$$

et l'enveloppe de pression transmise sera :

$$\Delta P_i = \frac{2 g S_1 / C_1}{g S_1 / C_1 + g S_2 / C_2 + g S_3 / C_3} \Delta P_i \quad (\text{III.16})$$

l'enveloppe de pression réfléchie sera ; en conséquence :

$$\Delta P_r = \Delta P_i - \Delta P_i = \left( \frac{2 g S_1 / C_1}{g S_1 / C_1 + g S_2 / C_2 + g S_3 / C_3} - 1 \right) \Delta P_i$$

ou bien :

$$\Delta P_r = \frac{g S_1 / C_1}{g S_1 / C_1 + g S_2 / C_2 + g S_3 / C_3} - \frac{g S_2 / C_2}{g S_1 / C_1 + g S_2 / C_2 + g S_3 / C_3} - \frac{g S_3 / C_3}{g S_1 / C_1 + g S_2 / C_2 + g S_3 / C_3} \cdot \Delta P_i \quad (\text{III.17})$$



### Interprétation des résultats :

Si l'on considère que les célérités d'ondes sont les mêmes dans les canalisations, on peut écrire :

$$\Delta P_1 = \frac{2 S_1}{S_1 + S_2 + S_3} \Delta P_1$$

et

$$\Delta P_r = \frac{S_1 - (S_2 + S_3)}{S_1 + S_2 + S_3} \cdot \Delta P_1$$

ou bien :

$$\Delta P_1 = \frac{2 D_1^2}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \Delta P_1$$

et

$$\Delta P_r = \frac{D_1^2 - (D_2^2 + D_3^2)}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \cdot \Delta P_1$$

ou encore sous une autre forme :

$$\Delta P_1 = \frac{2}{1 + \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2} \cdot \Delta P_1$$

⇒

$$\Delta P_1 = \frac{2}{1 + \frac{D_2^2 + D_3^2}{D_1^2}} \cdot \Delta P_1 \quad (\text{III.18})$$

et

$$\Delta P_r = \frac{1 - \frac{D_2^2 + D_3^2}{D_1^2}}{1 + \frac{D_2^2 + D_3^2}{D_1^2}} \Delta P_1 \quad (\text{III.19})$$

d'une façon analogue, on remarque que lorsque  $D_2 = D_3 = 0$ , cas d'un bout mort, la pression enveloppe transmise est  $\Delta P_1 = 2 \Delta P_1$  et la question réfléchie  $\Delta P_r = \Delta P_1$  c'est ce que montre le tableau ci-dessus. N° 4

Si nous posons

$$Y = \frac{D_2^2 + D_3^2}{D_1^2}$$

$$\Delta P_1 = \frac{2}{1 + Y} \Delta P_1$$

$$\Delta P_r = \frac{1 - Y}{1 + Y} \Delta P_1$$

On remarque que Y caractérise le rapport des sections de canalisation de rang (j-1) aux sections de canalisation de rang j.

Nous avons donc au noeud n :

$$\Delta P_{tn} = \frac{2}{1 + Y_{j-1,j}} \Delta P_{in}$$

⇒

$$\frac{\Delta P_{tn}}{\Delta P_{in}} = f_1(Y)$$

$$\Delta P_m = \frac{1 - Y_{j+1,j}}{1 + Y_{j-1,j}} \Delta P_{in}$$

⇒

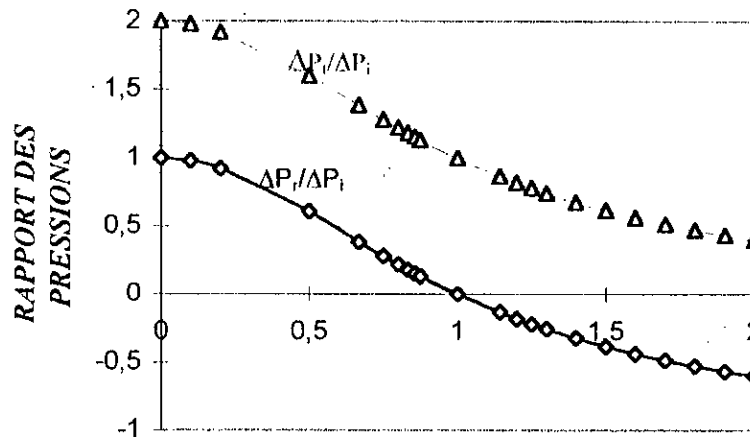
$$\frac{\Delta P_m}{\Delta P_{in}} = f_2(Y)$$

↳

en conclusion, au niveau d'un réseau ramifié :

- Si  $Y_{j-1,j} = 0$  ; la canalisation en impasse
- Si  $Y_{j-1,j} < 1$  ; la pression réfléchie donnée par la pression incidente est positive.
- Si  $Y_{j-1,j} > 1$  ; la canalisation de rang (j-1) reçoit une pression réfléchie négative suite à une pression incidente.

### VARIATION DE LA PRESSION AVEC LES SECTIONS S1 ET S2



RAPPORT DES SECTIONS S2/S1 **FIGURE 14'**

## Chapitre IV

### Méthode d'Analyse du régime transitoire dans une canalisation en charge

#### IV.1 - Généralités :

Les méthodes que nous avons examinées et analysées dans le chapitre précédent déterminent, le couple (débit-pression) en fonction du temps qui est le paramètre prépondérant (exemple  $\frac{dv}{dt} \gg \frac{dv}{dx}$ ). En partant des conditions aux limites connues aux deux extrémités de la canalisation, ces méthodes se basent généralement sur les valeurs majorantes. Néanmoins leur application pour les réseaux arborescents même faiblement ramifiés, devient plus complexe. Ainsi nous utilisons une méthode d'analyse plus élégante dite « méthode des caractéristiques » qui permet de nous informer sur le couple « pression-débit » où sa variation dans l'espace n'est plus à sous-estimée par rapport à celle du temps. En cherchant des informations amont et aval à partir soit des extrémités d'une conduite, soit des sections choisies, cette analyse nous permet de déterminer le dit couple en un point choisi entre ces extrémités ou ces sections, pour le cas d'un réseau ramifié, et pour ne pas rendre plus complexe la méthode, nous nous contentons que des informations ramenées à partir des deux extrémités de la conduite à savoir :

- Réservoir-noeud
- Noeud-noeud
- Pompe-noeud

En se basant sur les équations de continuité et de quantité de mouvement nous déduisons un système de deux équations à deux inconnues, ayant une application générale, pour une conduite à diamètre variable dans l'espace. Pour une application plus pratique (diamètre constant), ce système sera simplifié.

#### IV.1.1 - Equation de continuité

Elle nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial x} + \frac{\partial \rho s}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV-1})$$

en posant :  $Q = v \cdot s$  et  $\beta = \rho s$  ; l'équation (IV.1) prendra la forme suivante :

$$\frac{\partial v \cdot \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

Soit :

$$\beta \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV-3})$$

ou bien, puisque  $\beta = \rho \cdot s$

$$\rho \cdot s \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho s}{\partial x} + \frac{\partial \rho s}{\partial t} = 0 \quad (IV-4)$$

en dérivant (IV.4) on obtient :

$$\rho \cdot s \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \rho \frac{\partial s}{\partial x} + v \cdot s \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (IV-5)$$

ou bien en divisant (IV.5) par  $\rho s$  :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (IV-6)$$

en ordonnant on aboutit à :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{v}{\partial x} + \frac{1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial s}{s} \right) = 0 \quad (IV-7)$$

pour éliminer  $\rho$  et  $s$  on pose :

$$a) \frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial P}{K}$$

et

$$b) \frac{\partial s}{s} = f_1 + \frac{K_1}{E} \partial P$$

où :

- $K_1$  est le coefficient qui tient compte de la variation de la section droite de la conduite ; cette section est fonction de la distance , soit :  $s = f_1(x)$  (Fig. 14).
- $f_1$  est le coefficient d'élargissement constant sur un élément  $dx$  déterminé

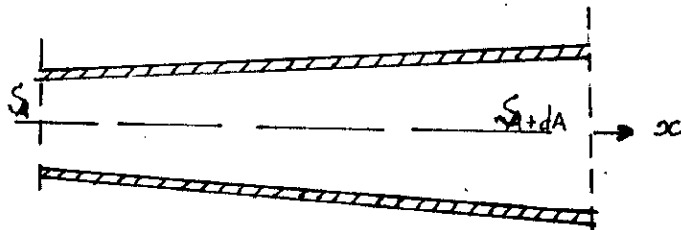


Figure 14

tenant compte de :  $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$  l'équation (IV.6) donne :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \left( f + \frac{K_1}{E} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + v \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K_1}{E} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

ou bien :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot f + \frac{v}{E} \cdot K_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{v}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K_1}{E} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

$$v \left( \frac{K_1}{E} + \frac{1}{K} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + v \cdot f + \left( \frac{K_1}{E} + \frac{1}{K} \right) \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

si on pose  $\frac{K_1}{E} + \frac{1}{K} = \varepsilon$  on pourra écrire :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + v \cdot f + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (IV-8)$$

L'équation (IV-8) représente la formule de continuité pour une conduite à section variable suivant sa longueur.

#### IV.1.2 - Equation de quantité de mouvement

Considérons un élément de liquide sur une distance « dx ». l'axe de la conduite étant incliné par rapport à l'horizontale avec un angle  $\alpha$ . (Fig. n°3)

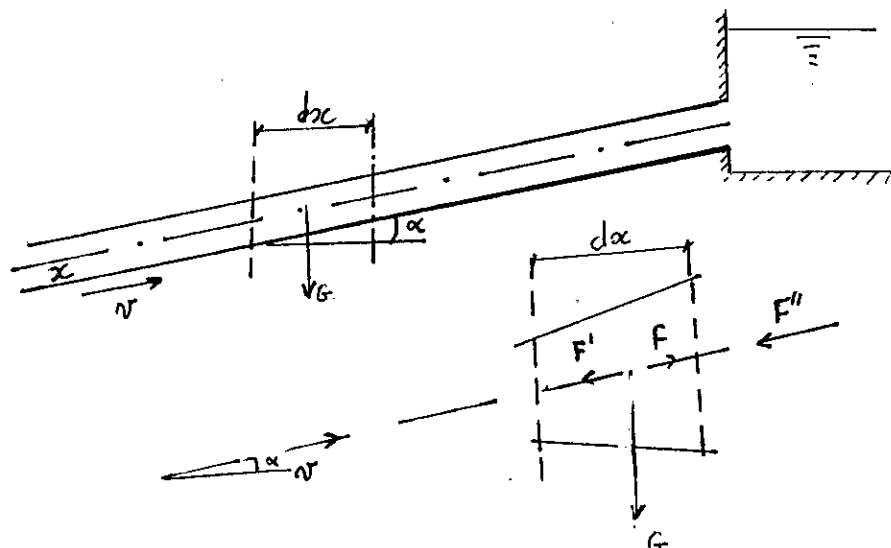


Figure 13

la masse d'eau contenue dans cet élément est:

$$M = \rho \cdot s \cdot dx$$

or sur cet élément trois (3) forces agissent :

- la force de gravité
- la force due aux pertes de charge par frottement
- la poussée hydrostatique selon l'axe (x)

**a - Force de gravité :**

$$G = g \cdot M = \rho \cdot g \cdot s \cdot dx$$

La composante longitudinale à l'axe (x) s'écrit :

$$F = G \cdot \sin \alpha = g \cdot \rho \cdot s \sin \alpha \cdot dx$$

**b - Force due aux pertes de charge par frottement :**

$$dP_s = \rho \cdot g \cdot ds = \rho \cdot g \cdot i \cdot dx$$

où i représente la pente

donc

$$s \cdot dP_s = g \cdot \rho \cdot s \cdot i \cdot dx = F'$$

**c - Force due à la variation de pression :**

$$F''_o = s \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx$$

où  $F''_o$  est donnée par la différence entre la poussée hydrostatique dans la section de sortie et la section en projection sur l'axe des (x).

Afin de rétablir l'équation de quantité de mouvement, utilisons le théorème d'Alembert.

$$\frac{du}{dt} \cdot M = \sum F_i = F_o - F'_o - F''_o$$

remplaçons  $F_o$ ,  $F'_o$ ,  $F''_o$  par leurs expressions respectives :

$$\frac{du}{dt} \cdot \rho \cdot s \cdot dx = g \cdot \rho \cdot s \cdot \sin \alpha \cdot dx - g \cdot \rho \cdot s \cdot i \cdot dx - s \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \quad (IV-9)$$

divisant l'expression (IV.9) par  $\rho \cdot s \cdot dx$

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \sin \alpha - g \cdot i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \text{ ou bien}$$

$$\frac{dv}{dt} = g (\sin \alpha - i) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{IV-10})$$

L'expression (IV.10) représente l'équation de mouvement pour un liquide réel, tenant compte de l'inclinaison de la conduite et de la perte de charge.

En écoulement non permanent, la vitesse varie dans le temps aussi. L'accélération selon l'axe (x) s'écrira alors :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

Par conséquent l'équation de quantité de mouvement pour un écoulement non permanent s'écrira sous la forme suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g (\sin \alpha - i) \quad (\text{IV-11})$$

sachant qu'en régime transitoire la vitesse et la pression dépendent toutes les deux de la distance et du temps, essayons de trouver une solution en partant toujours des équations de continuité et de quantité de mouvement (IV-8) et (IV-11).

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} + v \cdot f = 0$$

(IV-12)

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g (i - \sin \alpha) = 0$$

Le système (IV.12) nous montre qu'on a deux (2) équations à quatre (4) inconnues. Pour apporter la solution ; considérons deux (2) autres équations :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

(IV-13)

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Par suite on obtient :

- **équation de continuité :**

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{dP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \right) + v \cdot f = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon \left( v - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon \frac{dP}{dt} + v \cdot f = 0 \quad (\text{IV-14})$$

- **équation de quantité de mouvement :**

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + g (i - \sin \alpha) = 0$$

$$\left( v - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} + g (i - \sin \alpha) = 0 \quad (\text{IV-15})$$

posons  $\gamma = v - \frac{dx}{dt}$  et  $\eta = g (i - \sin \alpha)$ .

on pourra alors écrire :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon \cdot \gamma \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon \frac{dp}{dt} + v \cdot f = 0$$

(IV-16)

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - \eta = 0$$

Multipliant les équations (IV.16) respectivement par  $\frac{1}{\rho}$  et  $-\varepsilon \gamma$ , on obtient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \varepsilon \cdot \gamma \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{v \cdot f}{\rho} = 0$$

(IV-17)

$$-\varepsilon \gamma^2 \frac{v}{x} - \frac{\varepsilon \cdot \gamma}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon \cdot \gamma \cdot \frac{dv}{dt} + \varepsilon \cdot \gamma \cdot \eta = 0$$

en additionnant les équations (IV.16) on aura :

$$\left( \frac{1}{\rho} - \varepsilon \cdot \gamma^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \frac{dP}{dt} - \varepsilon \cdot \gamma \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v \cdot f}{\rho} + \varepsilon \cdot \gamma \cdot \eta = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{\rho} - \varepsilon \cdot \gamma^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \varepsilon \cdot \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) - \varepsilon \gamma \frac{dv}{dt} + \varepsilon \cdot \gamma \cdot \eta = 0$$



par conséquent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon \gamma (dv/dt - \eta) - 1/\rho (dP/dt + v.f)}{1/\rho - \varepsilon \cdot \gamma^2} \quad (\text{IV-18})$$

Reprenons maintenant le système (IV.16) et multiplions la 1ère équation par  $(-\gamma)$

$$-\gamma \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon \gamma^2 \frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon \cdot \gamma \frac{dP}{dt} - v \cdot f \cdot \gamma = 0 \quad (\alpha'')$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - \eta = 0 \quad (\beta')$$

ajoutons membre à membre  $(\alpha'')$  et  $(\beta')$

$$\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon \gamma^2\right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - \varepsilon \cdot \gamma \frac{dP}{dt} - \eta - v \cdot \gamma \cdot f = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon \gamma^2\right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - \eta - (v.f + \varepsilon \cdot \frac{dP}{dt}) \gamma = 0$$

finalement on aboutit à :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \gamma \left( \varepsilon \frac{dP}{dt} + v.f \right) - \left( \frac{dv}{dt} - \eta \right) \quad (\text{IV-20})$$

### **Analyse physique :**

-  $\frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\frac{\partial P}{\partial x}$  représentent respectivement la pente de la vitesse et celle de la ligne de pression en un point pour le même temps.

- Supposons qu'en un point, on a une discontinuité de la ligne, ce qui entraîne que le dénominateur est nul ; soit :

$$\frac{1}{\rho} - \varepsilon \cdot \gamma^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \varepsilon \cdot \gamma^2 \quad (\text{IV-21})$$

étant donné que  $\frac{\partial P}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  ont des valeurs bien déterminées les numérateurs des équations (IV-18) et (IV-20) doivent être nuls soient :

$$\varepsilon \cdot \gamma \cdot \left( \frac{dv}{dt} - \eta \right) - \frac{1}{\rho} \left( \varepsilon \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) = 0 \quad (\text{a})$$

et 
$$\gamma \left( \varepsilon \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) - \left( \frac{dv}{dt} - \eta \right) = 0 \quad (\text{b})$$

en multipliant (b) Par  $(-\varepsilon \cdot \gamma)$  on obtient :

$$-\varepsilon \gamma^2 \left( \varepsilon \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) + \varepsilon \gamma \left( \frac{dv}{dt} - \eta \right) = 0$$

or d'après (IV-21)  $\varepsilon \gamma^2 = \frac{1}{\rho}$  donc :

$$\frac{1}{\rho} \left( \varepsilon \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) + \varepsilon \gamma \left( \frac{dv}{dt} - \eta \right) = 0 \quad (IV-22)$$

**Remarque** : - l'équation (IV-22) représente le régime transitoire dans un point de discontinuité se déplaçant le long de la conduite.

Ce déplacement est décrit par l'équation (IV-21) .

soit :

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon \gamma^2 \text{ avec } \gamma = v - \frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt}$  représente la vitesse réelle du déplacement de la discontinuité.

Pour l'analyse du régime transitoire nous établissons la formule correspondante sous une forme plus simple.

En divisant (IV.22) par  $\varepsilon \gamma$  et sachant  $\frac{1}{\rho} = \varepsilon \cdot \gamma^2$  on peut écrire que :

$$\frac{\varepsilon \gamma^2}{\varepsilon \gamma} \left( \varepsilon \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) - \left( \frac{dv}{dt} - \eta \right) = 0$$

$$\gamma \left( \varepsilon \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) - \left( \frac{dv}{dt} - \eta \right) = 0 \quad (IV-23)$$

A partir de l'équation (IV-21), on pourra déterminer la célérité de la perturbation.

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \varepsilon}} \quad \text{or : } \gamma = v - \frac{dx}{dt}$$

donc : 
$$\varepsilon = \frac{1}{K} + \frac{K_d}{E} = \frac{1}{K} \left( 1 + K_d \frac{K}{E} \right) = \frac{1 + K_d K/E}{K}$$

et 
$$\frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{K}{1 + K_d K/E}} \quad \text{par suite :}$$

$$v - \frac{dx}{dt} = \pm \frac{K}{(1 + K_d K/E)} = \pm \frac{\sqrt{K/\rho}}{\sqrt{1 + L K/E}} \quad (IV-24)$$

soit : 
$$\frac{dx}{dt} = c \pm \frac{C_0}{\sqrt{1 + K_x K / E}} \quad (IV-25)$$

on aura le signe (-) pour une perturbation montante et le signe (+) pour une perturbation descendante.

L'équation (IV-24) nous donne la perturbation dans la conduite ; or la vitesse  $v$  est négligeable devant la célérité d'onde  $c_0$ , par conséquent dans nos calculs la vitesse  $v$  ne sera pas prise en considération.

$$c = \pm \frac{C_0}{\sqrt{1 + K_x K / E}} \quad (IV.26)$$

«  $c$  » sera positive pour une perturbation se déplaçant dans le sens contraire de l'axe des  $x$ .  
«  $c$  » sera négative pour une perturbation se déplaçant dans le sens de l'axe des  $x$ .

#### IV.2 - Détermination de l'équation le long d'une perturbation.

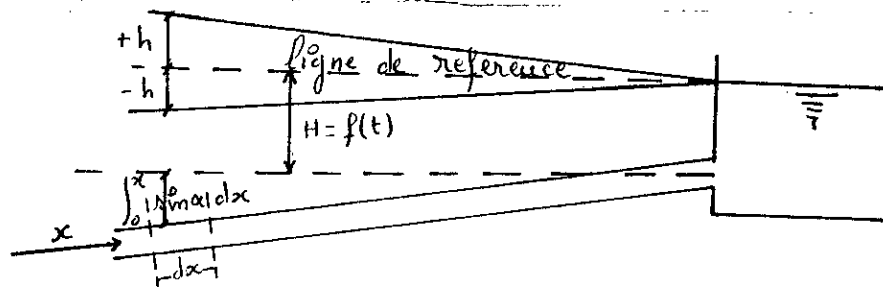


Figure 14

$$P = \rho \cdot g \left( \int_0^x \sin \alpha \, dx + H + h \right)$$

$$dP = \rho \cdot g (\sin \alpha \, dx + dh)$$

étant donné que  $(dx)$  est très petit,  $H_0$  est considérée comme très petite.

$$dP = \rho \cdot g (\sin \alpha \cdot dx + dh)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho \cdot \gamma^2} \quad (IV-27)$$

$$\eta = g (\sin \alpha - i)$$

l'équation (IV.23) devient :

$$\gamma \left( \frac{1}{\rho \cdot \gamma^2} \cdot \frac{dP}{dt} + v \cdot f \right) - \left[ \frac{dv}{dt} - g (\sin \alpha - i) \right] = 0$$

$$\frac{1}{\rho \cdot \gamma} \cdot \frac{dP}{dt} + \gamma \cdot v \cdot f - \frac{dv}{dt} + g (\sin \alpha - i) = 0 \quad (IV-28)$$

en remplaçant dP par sa valeur on aura :

$$\frac{1}{\rho \cdot \gamma} \cdot \frac{\rho \cdot g}{dt} (\sin \alpha dx + dh) + \gamma \cdot v \cdot f - \frac{dv}{dt} + g (\sin \alpha - i) = 0$$

en multipliant cette équation par  $\frac{\gamma}{g} dt$  on aura :

$$\sin \alpha dx + dh + \frac{\gamma^2 \cdot v \cdot f}{g} dt - \frac{\gamma}{g} dv + \gamma (\sin \alpha - i) dt = 0$$

or :  $\gamma = v - \frac{dc}{dt}$  et  $i \Delta H =$  (perte de charge)

donc :

$$dh - \frac{\gamma}{g} dv + \Delta H \frac{\gamma \cdot v^2 \cdot f'}{g} dt - \frac{\gamma \cdot v \cdot f'}{g} dx + v \sin \alpha dt - v \cdot i \cdot dt = 0$$

mais sachant que :

$$\sin \alpha - i = \frac{\eta}{g} = \frac{dv}{g \cdot dt} \Rightarrow v dt (\sin \alpha - i) = \frac{v}{g} dv$$

on a :

$$(v - \gamma) \frac{dv}{g} + dh + \Delta H - \frac{\gamma \cdot v \cdot f}{g} dx + \frac{\gamma \cdot v^2 \cdot f}{g} dt = 0$$

après transformation on a :

$$\text{or : } (v - \gamma) \frac{dv}{g} = \frac{dv}{g} (v - v + \frac{dx}{dt}) = \frac{dv}{g} \cdot \frac{dx}{dt} = \pm \frac{c}{g} dv.$$

donc :

$$\pm \frac{c}{g} dv + dh + \Delta H - \frac{\gamma \cdot v \cdot f'}{g} dx + \frac{\gamma \cdot v^2 \cdot f'}{g} dt = 0 \quad (\text{IV-29})$$

en remplaçant  $\gamma$  par sa valeur et tenant compte de l'élargissement

$$f'' = \frac{ds}{s dx} \quad \text{on aura :}$$

$$dh + \Delta H \pm \frac{c}{g} dv - \frac{\gamma \cdot v^2 \cdot f'}{g} dt - (v - \frac{dx}{dt}) \frac{v}{g} \cdot \frac{ds}{s}$$

$$dh + \Delta H \pm \frac{c}{g} dv - \frac{\gamma \cdot v^2 \cdot f'}{g} dt - \frac{v^2}{g} \frac{ds}{s} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{v}{g} \frac{ds}{s}$$

$$dh + \Delta H \pm \frac{c}{g} dv \pm \frac{c \cdot v}{g} \cdot \frac{ds}{s} - \frac{v^2}{g} \frac{ds}{s} - \frac{\gamma \cdot v^2 \cdot f'}{g} dt = 0$$

$$\Rightarrow dh \pm \frac{c}{g} dv \pm \frac{c \cdot v}{g} \cdot \frac{ds}{s} + \Delta H + r. = 0$$

avec  $r = - \frac{v^2}{g} \frac{ds}{s} - \frac{\gamma \cdot v^2 \cdot f}{g} dt$  ; représente le reste.

r tend vers zéro étant donné que la vitesse reste très petite devant la célérité, donc :

$$dh \pm \frac{c}{g} dv \pm \frac{c \cdot v}{g} \cdot \frac{ds}{s} + \Delta H = 0$$

Si l'on considère que la section de la conduite reste constante le long de x ; on aura finalement l'équation générale du régime transitoire qui suit une perturbation.

$$dh \pm \frac{c}{g} dv + \Delta H = 0 \quad (IV-3)$$

### **IV.3 - Solution analytique de la méthode des caractéristiques et son interpolation :**

#### **IV.3.1 - Généralités sur les erreurs de la méthode des caractéristiques :**

L'utilisation pratique de la méthode des caractéristiques dans le calcul des coups de bélier introduit quelques erreurs.

- erreurs introduites par la représentation de la perte de charge linéaire supposée concentrée en un diaphragme à chaque section.
- erreur introduite par l'approximation de la pente moyenne pondérée des droites de Bergeron.
- erreur introduire par la division du réseau étudié en tronçons élémentaires [la référence de E. Roche 1986] tels que :

$$\frac{l_1}{c_1} = \frac{l_2}{c_2} = \dots \dots \dots \frac{l_i}{c_i} = \Delta t$$

où  $l_i$  - représente la longueur du tronçon « i »

$c_i$  - représente la célérité des ondes dans le tronçon « i »

Or dans le cas général où la célérité n'est pas la même pour tous les tronçons arrivant au noeud, il faut veiller à ce que toutes les caractéristiques partant des noeuds voisins arrivent en même temps au noeud de calcul. Cela nécessite que le temps de parcours est le même pour tous les tronçons aboutissant à ce même noeud de calcul ce qui n'est pas toujours vrai.

Les tronçons AB et BD (fig.15) n'ont pas le même temps de parcours. En choisissant un pas de temps compatible avec le tronçon A.B, on voit que la caractéristique du deuxième tronçon arrivant au point B ne passe pas par le point D.

Pour considérer la longueur réelle du second tronçon il faut envisager une interpolation. Pour cela nous avons trois (3) possibilités.

- Une interpolation dans le temps à partir des points D et D''
- Une interpolation dans l'espace à partir des points B et D
- Une interpolation en rectifiant la célérité d'onde.

Cette troisième variante n'est pas aussi facile, du fait que la célérité d'onde dépend directement des caractéristiques de la conduite qui peuvent être imposées. L'interpolation intéressera donc les deux premiers points dans l'hypothèse que la célérité ne sera pas affectée.

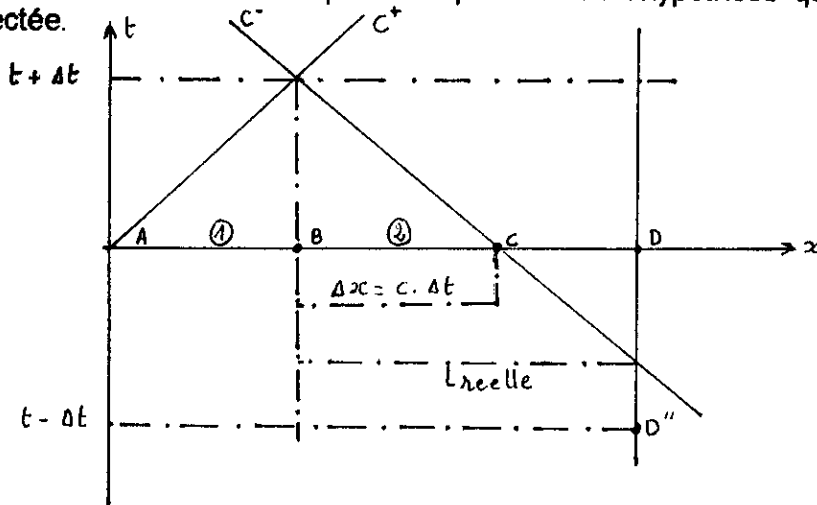


Figure 15

### IV.3.2 - Solution analytique de la méthode des caractéristiques :

La combinaison des équations (IV.26 ; IV.27 ; et IV.28) nous permet de déduire les systèmes des équations de compatibilité suivants :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{dp}{dt} + g \sin \alpha + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v + c \end{cases}$$

Pour une onde positive ( $c^+$ )

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \frac{dp}{dt} + g \sin \alpha + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = v - c \end{cases}$$

Pour une onde négative ( $c^-$ )

En multipliant la première équation caractéristique ( $c^+$ ) par  $c \cdot dt$  on obtient :

$$c^+ \begin{cases} c \cdot dv + \frac{dp}{\rho} + c \cdot dt \cdot g \cdot \sin \alpha + \frac{c \cdot dt \cdot \lambda \cdot v \cdot |v|}{2D} = 0 \\ dx = (v + c) dt \end{cases} \quad (IV.31)$$

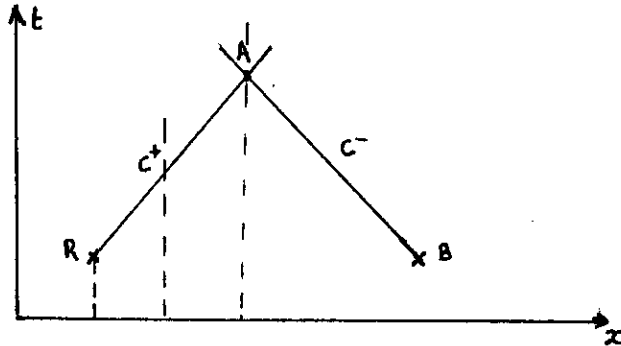


Figure 16

Sachant que :

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho} = - \frac{\Delta p}{\Delta v / v}$$

donc:

$$K \frac{\Delta \rho}{\rho} = \Delta P$$

ou bien :

$$\frac{K}{\rho} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

en intégrant entre les points A et R (voir figure n°6)

Nous pouvons donc écrire le long de la caractéristique ( $c^+$ ) :

$$\begin{cases} c (v_A - v_R) - K \left( \frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_R} \right) + c \cdot g \cdot \sin \alpha (t_A - t_R) + \frac{c \cdot \lambda \cdot v_A |v_R|}{2D} \cdot (t_A - t_R) = 0 \\ x_A - x_R = (v_R + c) (t_A - t_R) \end{cases}$$

d'une façon analogue le long de la caractéristique ( $c^-$ ), on peut écrire :

$$c (v_A - v_B) - K \left( \frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_B} \right) + c \cdot g \cdot \sin \alpha (t_A - t_B) + \frac{c \cdot \lambda \cdot v_A |v_B|}{2D} (t_A - t_B) = 0$$

après intégration de  $K \cdot \frac{dp}{\rho} = dP$  nous obtenons :

$$P_A = P_0 + K \ln \frac{\rho_A}{\rho_0}$$

$P_0$  et  $\rho_0$  désignent respectivement la pression et la masse volumique à l'état initial  
Par ailleurs l'expression de la célérité pour tout fluide peut s'exprimer comme suit :

$$c^2 = \frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \frac{K}{\rho} \cdot \frac{ds}{dP}}$$

ou bien :

$$c^2 \left(1 + \frac{K}{\rho} \cdot \frac{ds}{dP}\right) = \frac{K}{\rho}$$

d'où :

$$\frac{K}{dP} \cdot \frac{ds}{s} = - \left(1 - \frac{K}{\rho} \cdot \frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{s} = - \left(1 - \frac{K}{\rho} \cdot \frac{1}{c^2}\right) \frac{dP}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{s} = - \left(1 - \frac{K}{\rho} \cdot \frac{1}{c^2}\right) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{s} = K \cdot \frac{d\rho}{\rho^2} \cdot \frac{1}{c^2} - \frac{d\rho}{\rho} \quad (IV-32)$$

Sachant que :  $s_0$  représente la section de la conduite à l'état initial et que  $s_A$  celle au point A ; en intégrant entre  $s_0$  et  $s_A$  on obtient :

$$\int_{s_0}^{s_A} \frac{ds}{s} = \int_{\rho_0}^{\rho_A} \frac{K}{c^2} \cdot \frac{d\rho}{\rho^2} - \int_{\rho_0}^{\rho_A} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{s_A}{s_0} = \frac{K}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_A}\right) - \ln \frac{\rho_A}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{s_A}{s_0} + \ln \frac{\rho_A}{\rho_0} = \frac{K}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_A}\right)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{s_A}{s_0} \cdot \frac{\rho_A}{\rho_0} = \frac{K}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_A}\right)$$

ou bien :

$$\frac{s_A}{s_0} \cdot \frac{\rho_A}{\rho_0} = e^{\frac{K}{c^2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_A}\right)}$$



Finalement nous remarquons que la section au point A, fréquentée par le front d'onde « c » se déduit exponentiellement de la section initiale  $s_0$ , c'est à dire :

$$s_A = s_0 \cdot \frac{\rho_0}{\rho_A} \cdot e^{(K/C^2)(1/\rho_0 - 1/\rho_A)} \quad (\text{IV.33})$$

d' autre part nous pouvons écrire que :

$$\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{ds}{s} = 0$$

L'équation (IV.32) donne :

$$\frac{ds}{s} + \frac{d\rho}{\rho} = K \cdot \frac{d\rho}{\rho^2} \cdot \frac{1}{c^2}$$

ou bien :

$$\frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{c^2}{K} \cdot \frac{dv}{v} \quad (\text{IV.34})$$

Considérons maintenant l'équation (IV.31)

$$c \cdot dv + \frac{d\rho}{\rho} + c \cdot dt \cdot g \cdot \sin \alpha + \frac{dt \cdot c \cdot \lambda \cdot v |v|}{2 D} = 0$$

$$c \cdot dv + \frac{d\rho}{\rho} + c \cdot dt \cdot g \cdot \sin \alpha + \frac{c \cdot \lambda \cdot v |v| \cdot dx}{2 \cdot D (v+c)} = 0$$

puisque:

$$dt = \frac{dx}{v+c}$$

$$c \cdot dv + \frac{d\rho}{\rho} + g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{dx}{v+c} + \frac{\lambda \cdot v |v| dx}{2 D \frac{v+c}{c}} = 0$$

$$c \cdot dv + \frac{d\rho}{\rho} + (g \cdot \sin \alpha + \frac{\lambda \cdot v |v|}{2 D}) \cdot \frac{dx}{\frac{v}{c} + 1} = 0$$

En considérant l'équation de la célérité d'onde et l'équation (IV.34) Nous pouvons écrire :

$$c^2 \left( 1 + \frac{k}{d\rho} \cdot \frac{ds}{s} \right) = \frac{k}{\rho}$$

d'où:

$$dp = \frac{c^2 \cdot k \cdot \frac{ds}{s}}{k/\rho - c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{\rho} = \frac{c^2 \cdot k \cdot \frac{ds}{s}}{k - \rho c^2}$$

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{c^2 \cdot \frac{ds}{s}}{1 - \rho \frac{c^2}{k}}$$

ou bien :

$$\frac{dp}{\rho} = -c^2 \frac{dv}{v}$$

c'est à dire :

$$c \cdot dv - c^2 \cdot \frac{dv}{v} = \frac{-g \sin \alpha + \lambda v^2/2D}{v/c + 1} dx$$

$$\Rightarrow c \cdot dv \left(1 - \frac{c}{v}\right) \left(\frac{v}{c} + 1\right) = -\left(g \sin \alpha + \frac{\lambda v^2}{2D}\right) dx$$

$$\Rightarrow c \cdot dv \cdot \frac{c}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = -\left(g \sin \alpha + \frac{\lambda v^2}{2D}\right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{dx} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{g \cdot \sin \alpha + \lambda v^2/2D}{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{g \cdot \sin \alpha + \lambda v^2/2D}{1 - v^2/c^2}$$

finalement :

$$\frac{dv^2}{dx} = 2 \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{g \cdot \sin \alpha + \lambda v^2/2D}{1 - v^2/c^2} \quad (\text{IV.35})$$

puisque:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$$

$$\frac{dv^2}{dx} = 2 \frac{v^2}{c^2} \cdot g \sin \alpha + \frac{2 v^2 \cdot \lambda v^2}{2Dc^2}$$

Posons :  $\frac{2g \sin \alpha}{c^2} = b$

on aura :

$$\frac{dv^2}{dx} = b v^2 + \frac{2 v^2 \cdot \lambda v^2}{2 D \cdot c^2}$$

ou bien :

$$\frac{dv^2}{v^2} = b \cdot dx + \frac{2 \cdot \lambda \cdot v^2}{2 D \cdot c^2} dx$$

nous intégrons sur les conditions :

$$v = v_R \text{ pour } x = 0$$

$$v = v_A \text{ pour } x = \Delta x$$

$$\int_{v_A}^{v_R} \frac{dv^2}{v^2} = \int_0^{\Delta x} b \cdot dx + \frac{2 \cdot \lambda \cdot v^2}{2 D \cdot c^2} \int_0^{\Delta x} dx$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{v_R}{e^{(-b \Delta x / 2 - 2 \lambda v^2 \Delta x / 2 D c^2)}}$$

C'est la vitesse au point A déduite à partir de celle du point R (Fig. n°46)

On remarque que pour  $\Delta x = 0$   $v_A = v_R$

Considérons le système fermé par les équations (IV.34) et (IV.35)

$$\frac{dp}{p^2} = -\frac{c^2}{k} \cdot \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv^2}{dx} = 2 \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{g \cdot \sin \alpha + \lambda \frac{v^2}{2D}}{1 - v^2/c^2}$$

si :  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$

On peut écrire :

$$c^2 \cdot \frac{dv^2}{v^2} = 2 \left( g \sin \alpha + \frac{\lambda v^2}{2D} \right) dx$$

ou bien :

$$c^2 \cdot \frac{2 v dv}{v^2} = 2 \left( g \sin \alpha + \lambda \frac{v^2}{2D} \right) dx$$

donc :

$$c^2 \cdot \frac{dv}{v} = \left( g \sin \alpha + \lambda \frac{v^2}{2D} \right) dx$$

en égalisant :

$$k \frac{dp}{\rho^2} = - (g \sin \alpha + \lambda \frac{v^2}{2D}) dx$$

En intégrant suivant la caractéristique  $c^+$  on obtient :

$$\int_{p_R}^{p_A} \frac{dp}{\rho^2} = - (g \sin \alpha + \frac{\lambda v^2}{2D}) \int_0^{\Delta x} \frac{dx}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \int_{p_R}^{p_A} = (g \sin \alpha + \frac{\lambda v v}{2D}) \frac{\Delta x}{k} \int_0^{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_A} - \frac{1}{\rho_R} = (g \sin \alpha + \frac{v_A v_R}{2D}) \frac{\Delta x}{k}$$

$$\text{d'où: } \frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{\rho_R} + (g \sin \alpha + \frac{v_A v_R}{2D}) \frac{\Delta x}{k} \quad (\text{IV.36})$$

IV.3.3. - Solution par interpolation :

Les caractéristiques  $c^+$  et  $c^-$  arrivent respectivement en R et B (fig. 4) au lieu des noeuds (j-1, i-1) et (j-1, i+1). Pour remédier à cette erreur nous procédons à une interpolation linéaire dans le temps entre les points j-1 et j-2.

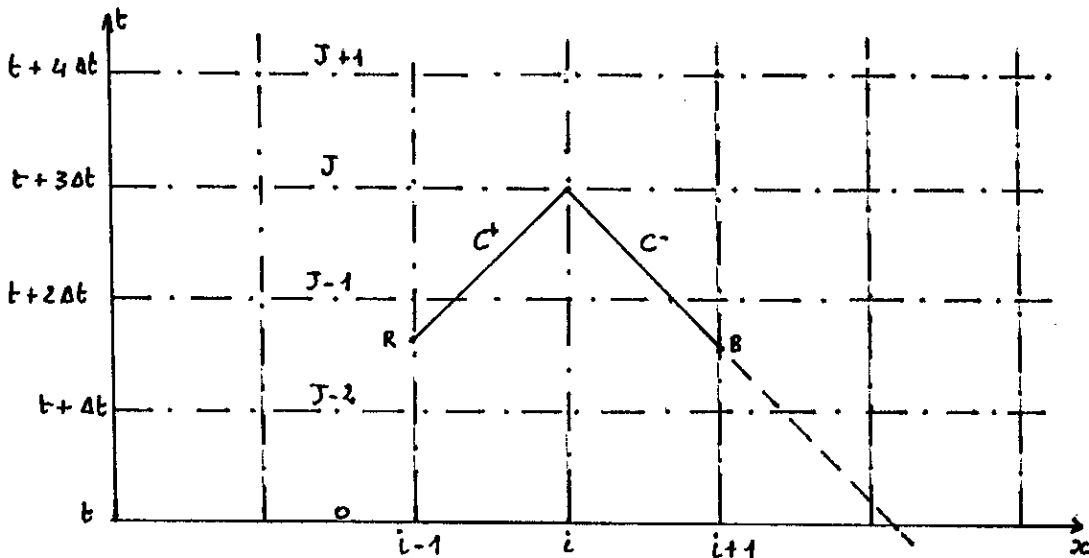


Figure 17

#### IV.3.3.1 - Détermination des vitesses $v_R$ et $v_B$

d'après LAGRANGE nous pouvons écrire que :

$$\frac{v_{F1, F1} - v_R}{v_{F1, F1} - v_{0, F1}} = \frac{t_{ij} - t_R - \Delta t}{2\Delta t}$$

Sachant que :

$$x_i - x_{i-1} = x_i - x_R = \Delta x$$

et que :

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c$$

$$\Delta x = (v_R + c) (t_{ij} - t_R)$$

$$t_{ij} - t_R = \frac{v_{F1, F1} - v_R}{v_{F1, F1} - v_{0, F1}} 2\Delta t + \Delta t$$

donc :

$$\frac{x_{ij} - x_R}{v_R + c} = t_{ij} - t_R$$

$$\Rightarrow x_{ij} - x_R = (v_R + c) \cdot \frac{v_{F1, F1} - v_R}{v_{F1, F1} - v_{0, F1}} 2\Delta t + \Delta t (v_R + c)$$

en remplaçant  $x_{ij} - x_R$  par  $\Delta x$  on obtient :

$$\frac{\Delta x - (v_R + c) \Delta t}{2\Delta t} (v_{F1, F1} - v_{0, F1}) = (v_R + c) (v_{F1, F1} - v_R)$$

ou bien :

$$\left( \frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{v_R + c}{2} \right) (v_{F1, F1} - v_{0, F1}) = (v_R + c) (v_{F1, F1} - v_R)$$

on pose :

$$\frac{\Delta x}{2\Delta t} = \theta$$

on aura :

$$\left( \theta - \frac{v_R + c}{2} \right) (v_{F1, F1} - v_{0, F1}) = (v_R + c) (v_{F1, F1} - v_R) \quad (IV.37)$$

Développons l'équation (IV.37); afin de déterminer la vitesse  $v_R$  au point R

$$\theta (v_{F1, F1} - v_{0, F1}) - \frac{v_R + c}{2} (v_{F1, F1} - v_{0, F1}) = v_{F1, F1} \cdot v_R + c v_{F1, F1} - v_R^2 - c v_R$$

ou bien

$$v_R^2 + (c - v_{t-1,j-1} - \frac{v_{t-1,j-1} - v_{o,t-1}}{2}) v_R - [c v_{t-1,j-1} + \frac{c}{2} (v_{t-1,j-1} - v_{o,t-1}) \theta (v_{t-1,j-1} - v_{o,t-1})] \quad (IV.38)$$

(IV.38) représente une équation du second degré en  $v_R$  qui nous donne finalement :

$$v_R = \frac{3}{4} v_{t-1,j-1} - \frac{v_{o,t-1}}{4} - \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{3}{4} v_{t-1,j-1} - \frac{v_{o,t-1}}{4} - \frac{c}{2}}^2 - [(\theta - \frac{c}{2}) (v_{t-1,j-1} - v_{o,t-1}) - c v_{t-1,j-1}] \quad (IV.39)$$

Le même raisonnement donne la vitesse  $v_B$  :

$$v_B = \frac{3}{4} v_{t-1,j-1} - \frac{v_{o,t-1}}{4} + \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{3}{4} v_{t-1,j-1} - \frac{v_{o,t-1}}{4} + \frac{c}{2}}^2 - [(\theta - \frac{c}{2}) (v_{t-1,j-1} - v_{o,t-1}) - c v_{t-1,j-1}] \quad (IV.40)$$

#### IV.3.3.2 - Détermination des masses volumiques $\rho_R$ et $\rho_B$

Nous suivons le même raisonnement que celui considéré pour la détermination des vitesses  $v_R$  et  $v_B$ , seulement dans ce cas on fait une interpolation par rapport à  $p$

L'interpolation de Lagrange nous permet d'écrire :

$$\frac{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_R}{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_{o,t-1}} = \frac{t_j - t_R - \Delta t}{2 \Delta t}$$

ou bien :

$$t_j - t_R = \frac{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_R}{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_{o,t-1}} \times 2 \Delta t + \Delta t$$

or nous avons :

$$\Delta x = (v_R + c) \cdot (t_j - t_R)$$

donc

$$\Delta x = (v_R + c) \cdot \frac{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_R}{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_{o,t-1}} \cdot 2 \Delta t + (v_R + c) \cdot \Delta t$$

$$[\Delta x - (v_R + c) \Delta t] \cdot \frac{1}{2 \Delta t} \cdot \frac{1}{v_R + c} = \frac{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_R}{1/\rho_{t-1,j-1} - 1/\rho_{o,t-1}}$$

en posant:  $\theta = \frac{\Delta x}{2 \Delta t}$

on tire :

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho_{t-1,j-1}} - \left[ \frac{\theta}{v_R + c} - \frac{1}{2} \right] \left[ \frac{1}{\rho_{t-1,j-1}} - \frac{1}{\rho_{o,t-1}} \right] \quad (IV.41)$$

d'une façon analogue, nous obtenons : avec  $x_i - x_{i+1} = (v_B - c) (t_i - t_B)$

$$\frac{1}{\rho_B} = \frac{1}{\rho_{i+1,j+1}} + \left[ \frac{\theta}{v_B - c} + \frac{1}{2} \right] \left[ \frac{1}{\rho_{i+1,j+1}} - \frac{1}{\rho_{0,i+1}} \right] \quad (IV.42)$$

**Conclusion :**

La considération des systèmes régissant les équations de compatibilité des caractéristiques négatives ( $c^-$ ) et positives ( $c^+$ ), ont permis de déterminer les paramètres de l'écoulement et les caractéristiques de la canalisation par solution analytique. En supposant la continuité de ces équations dans le temps et dans l'espace, une interpolation linéaire de lagrange a été envisagée en vue de la détermination des paramètres dans le cas où les dernières ne passent pas par les points de discrétisation. La détermination des paramètres interpolés a pour origine les valeurs initiales. Cette idée laisse à réfléchir sur l'évaluation des erreurs que peut avoir l'utilisation pratique de la méthode des caractéristiques, en envisageant les fonctions de compatibilité exactes et approchées. Ce développement n'a pas été considéré en détail dans le présent travail ; néanmoins il fera usage d'un autre travail de recherche dans le domaine vue sa complexité de résolution.

## Chapitre V

### Détermination de la perte de charge en régime transitoire

#### V.1 - Généralités :

La perte de charge dans un écoulement est due aux frottements des molécules liquides entre elles et contre les parois de la conduite. Ces frottements ont lieu dès qu'on a un mouvement du liquide. Ils résultent essentiellement de la viscosité du liquide et de la turbulence du régime.

La perte de charge a pour rôle d'amortir le coup de bélier.

En régime permanent, la perte de charge est donnée par la formule universellement connue qui est celle de Darcy-Weisbach. Nous avons vu qu'en régime transitoire, dans le cas de la méthode des caractéristiques, la variation de la vitesse dans l'espace est loin d'être négligeable d'une section considérée à l'autre, le long de la conduite. Néanmoins jusqu'à maintenant cette variation est mal connue du fait de l'élasticité du matériau de la conduite, (notamment si celle-ci est enterrée), et de la compressibilité du liquide. Dans ce contexte, pour s'approcher de la réalité, et avoir une influence plus réelle, nous pouvons supposer trois formes de variations de la vitesse le long de l'axe de la conduite et choisir celle la plus simple.

#### V.2 - Différentes formes de variation de la vitesse le long de la conduite :

##### V.2.1 - Variation linéaire de la vitesse selon la longueur de la conduite :

Le gradient de la perte de charge est donné par :

$$j_x = W' \cdot v^2_x$$

où :  $W'$  désigne une constante pour un diamètre de la conduite constant et un coefficient de perte de charge fonction de la conduite.

$$W' = \frac{\lambda}{2gD}$$

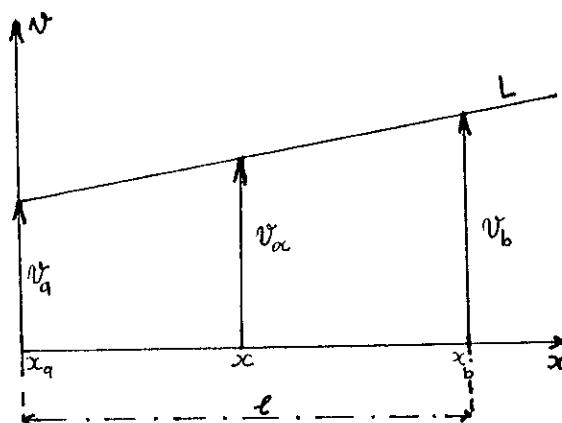


Figure 18



pour un écoulement sur une longueur  $dx$  de la conduite, la perte de charge sera de :

$\Delta H_{dx} = j_x \cdot dx$  ; sur toute la longueur de la conduite on aura :

$$\Delta H = \int_0^l j_x \cdot dx = \int_{x_a}^{x_b} j_x \cdot dx$$

$$\Delta H = W' \int_{x_a}^{x_b} v_x^2 \cdot dx \quad (V.1)$$

d'autre part, désignons par  $\alpha = \frac{v_b - v_a}{x_b - x_a} = \frac{v_b - v_a}{l}$  la pente de la droite « L » ce qui nous permet de définir la vitesse  $v_x$  comme suit :

$$v_x = v_a + \alpha \cdot x = v_a + \frac{v_b - v_a}{l} x$$

L'équation (V.1) nous permet d'écrire :

$$\Delta H = W' \int_0^l \left( v_a + \frac{v_b - v_a}{l} x \right)^2 dx$$

en développant le carré on aura :

$$\Delta H = W' \int_0^l \left[ v_a^2 + \left( \frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 x^2 + 2 v_a \cdot \frac{v_b - v_a}{l} x \right] dx$$

$$\Delta H = W' \left[ v_a^2 x + \left( \frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 \frac{x^3}{3} + 2 v_a \cdot \frac{v_b - v_a}{l} \frac{x^2}{2} \right] l$$

$$\Delta H = W' \left[ v_a^2 l + \left( \frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 \frac{l^3}{3} + 2 v_a \cdot \frac{v_b - v_a}{l} \frac{l^2}{2} \right]$$

$$\Delta H = W' l \left[ v_a^2 + \left( \frac{v_b - v_a}{3} \right)^2 + v_a (v_b - v_a) \right]$$

remplaçons  $W'$  par sa valeur :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD} \left[ v_a^2 + \frac{v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b}{3} + v_a v_b - v_a^2 \right]$$

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD} \left[ \frac{v_a^2 + v_b^2 - v_a v_b}{3} \right] \quad (V.2)$$

Si  $v_a = v_b = v_0$  on retrouve l'écoulement permanent et par conséquent l'équation de DARCY :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{D} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

### V.2.2 - Variation parabolique de la vitesse suivant la longueur de la conduite :

La variation obéit à la forme suivante :

$$x = \alpha v_x^2$$

pour un écoulement sur une distance  $dx$ , la perte de charge sera égale à :

$$\Delta H_{dx} = j_x dx \quad \text{avec } j_x = W' \cdot v_x^2$$

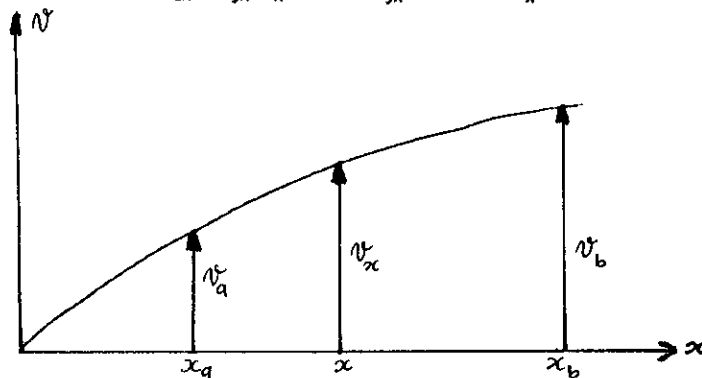


Figure 19

La perte de charge sur toute la longueur de la conduite sera obtenue en intégrant entre  $x_a$  et  $x_b$ , sachant que  $x_b - x_a = l$ , avec  $l$  : longueur de la conduite .

$$\Delta H = \int_{x_a}^{x_b} j_x \cdot dx = \int_{x_a}^{x_b} W' \cdot v_x^2 dx = \int_{x_a}^{x_b} W' \cdot \frac{x}{\alpha} dx$$

$$\Delta H = \frac{W'}{\alpha} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_a}^{x_b} = \frac{W'}{2\alpha} (x_b^2 - x_a^2)$$

$$\Delta H = \frac{W'}{2\alpha} (x_b - x_a) (x_b + x_a) \quad (V.3)$$

or :  $x_b = \alpha v_b^2$  et  $x_a = \alpha \cdot v_a^2$

en portant les valeurs de  $x_b$  et  $x_a$  dans (V.3) on obtient :

$$\Delta H = \frac{W'}{2\alpha} \cdot (\alpha v_b^2 + \alpha v_a^2) (x_b - x_a)$$

$$\Delta H = \frac{W'}{2} (v_b^2 + v_a^2) (x_b - x_a)$$

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{4gD} (v_b^2 + v_a^2) = \Delta H = \frac{\lambda l}{2D} \left( \frac{v_b^2}{2g} + \frac{v_a^2}{2g} \right) \quad (V.4)$$

De même si  $v_b = v_a = v_0$  l'écoulement est permanent et par suite l'équation de DARCY est :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{D} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

### V.2.3. - Variation hyperbolique de la vitesse suivant la longueur de la conduite :

Dans ce cas la variation obéit à la forme suivante :

$$x = \alpha \sqrt{v}$$

La perte de charge sur un tronçon dx est donnée par :

$$\Delta H = jx \cdot dx$$

$$\Rightarrow \Delta H = \int_{x_a}^{x_b} jx \cdot dx = \int_{x_a}^{x_b} W' \cdot v^2 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \Delta H = W' \int_{x_a}^{x_b} v^2 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \Delta H = W' \int_{x_a}^{x_b} \frac{x^4}{\alpha^4} dx$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{W'}{\alpha^4} \int_{x_a}^{x_b} x^4 dx$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{W'}{\alpha^4} \frac{x^5}{5} \int_{x_a}^{x_b}$$

$$\Delta H = \frac{W'}{5\alpha^4} (x_b^5 - x_a^5)$$

$$\Delta H = \frac{W'}{5\alpha^4} \cdot (x_b - x_a) (x_b^4 + x_a x_b^3 + x_a^2 x_b^2 + x_a^3 x_b + x_a^4)$$

( $x_b - x_a$ ) étant égal à « l » on aura :

$$\Delta H = \frac{W' \cdot l}{5\alpha^4} (x_b^4 + x_a x_b^3 + x_a^2 x_b^2 + x_a^3 x_b + x_a^4) (*)$$

Sachant que  $x_a = \alpha v_a$  <sup>1/2</sup>  
 et  $x_b = \alpha v_b$  <sup>1/2</sup>

après remplacement de  $x_a$  et  $x_b$  par leur valeur respective on obtient :

$$\Delta H = \frac{W' l}{5} (v_b^2 + v_a \cdot v_b + v_a^2) + \frac{W'}{5} l (v_a + v_b) \sqrt{v_a \cdot v_b} \quad (V.5)$$

Si  $v_a = v_b = v_0$  on retrouve l'équation de Darcy :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{D} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

### V.3 - Influence des coefficients de transmission et de réflexion sur la vitesse aux points de ramification :

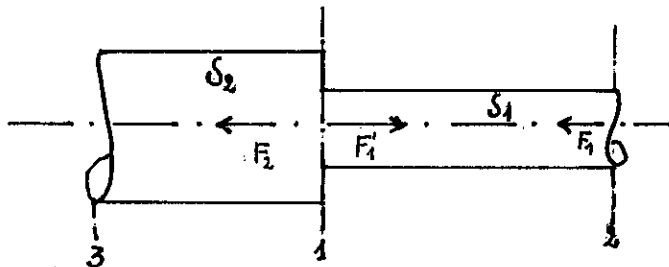


Figure 20

#### V.3.1 - Variation parabolique de la vitesse :

Considérons maintenant le cas où nous avons deux conduites en séries et de diamètres différents tels que :  $S_1 < S_2$

Le front d'onde ( $F_1$ ), en arrivant au point de changement de section se décompose en deux ondes  $F_1'$  et  $F_2$ .

$F_1'$  représente l'onde réfléchiée sur le tronçon (1-2) et  $F_2$  l'onde transmise dans le tronçon (1-3)

Nous allons baser notre raisonnement sur l'utilisation de la deuxième équation d'Allievi

$$v_1 = v_{o1} - \frac{g}{c_1} (F_1 - F'_1) \quad \text{Tronçon (1-2)} \quad (V.6)$$

$$v_2 = v_{o2} - \frac{g}{c_2} F_2 \quad \text{Tronçon (1-3)}$$

Appliquons le concept de réflexion et de transmission des ondes aux points de singularités:

$$F'_1 = s_{1,3} F_{3,1}, \quad (V.7)$$

$$F_1 = r_{1,2} \cdot F_1$$

D'autre part, si on s'intéresse uniquement au tronçon (1-2) on peut écrire :

$$v_a = v_{o1} - \frac{g}{c_1} F'_1 \quad (V.8)$$

$$v_b = v_{o1} - \frac{g}{c_1} F_1$$

En remplaçant (V.7) dans (V.8) on obtient :

$$v_a = v_{o1} \left(1 - \frac{g}{c_1 \cdot v_{o1}} F'_1\right) = v_{o1} \left(1 - \frac{g}{c_1 \cdot v_{o1}} F_1\right) \quad (V.9)$$

$$v_b = v_{o1} \left(1 - \frac{g}{c_1 \cdot v_{o1}} F_1\right) = v_{o1} \left(1 - \frac{g}{c_1 \cdot v_{o1}} r_{1,2} \cdot F'_1\right)$$

La valeur majorante du coup de bélier engendrée par la vitesse  $v_{o,i}$  étant

$$h_{o1} = \frac{c_1 v_{o1}}{g}$$

nous pouvons porter cette valeur dans (V.9)

$$v_a = v_{o1} \left(1 - \frac{F'_1}{h_{o1}}\right) \quad (V.10)$$

$$v_b = v_{o1} \left(1 - \frac{F_1}{h_{o1}} \cdot r_{1,2}\right)$$

Posons :  $\frac{F}{h_{o1}} = \zeta_1$  on aura alors :

$$v_a = v_{o1} (1 - \zeta_1) = K_a \cdot v_{o1} \quad (V.11)$$

$$v_b = v_{o1} (1 - r_{1,2} \zeta_1) = K_b \cdot v_{o1}$$

avec

$$K_a = 1 - \zeta_1$$

$$K_b = 1 - r_{1,2} \cdot \zeta_1$$

$K_a$  : coefficient de réduction de la vitesse initiale  $v_{o1}$  au point « a »

$K_b$  : coefficient de réduction de la vitesse initiale  $v_{o1}$  au point « b »

Par ailleurs le coefficient de réflexion « r » est égal à :

$$r_{1,2} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad \text{avec : } m_2 = \frac{c_2}{S_2} \quad \text{et } m_1 = \frac{c_1}{S_1}$$

D'où

$$r_{1,2} = \frac{\frac{c_2 \cdot S_1}{c_1 \cdot S_2} - 1}{\frac{c_2 \cdot S_1}{c_1 \cdot S_2} + 1}$$

en posant

$$\beta = \frac{c_2 \cdot S_1}{c_1 \cdot S_2} \quad \text{on aura : } r_{1,2} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

ce qui donne :

$$K_a = 1 - \zeta_1$$

$$K_b = 1 - \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \zeta_1$$

retrouvons la perte de charge en portant (V.11) dans (V.4)

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2D} \cdot \frac{v_{o1}^2}{g} \left( \frac{K_b^2 + K_a^2}{2} \right) \quad (V.12)$$

On remarque bien sur que si  $K_b = K_a = 1$  alors  $\zeta_1 = 0$  et le régime sera permanent.

Si on pose  $Y' = \frac{K_a^2 + K_b^2}{2}$  on aura alors

$$Y' = \frac{1}{2} \left[ (1 - \zeta_1)^2 + \left(1 - \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \zeta_1\right)^2 \right]$$

$$Y' = \frac{\beta^2 + 1}{(\beta + 1)^2} \zeta_1^2 - \frac{2\beta}{\beta + 1} \zeta_1 + 1 \quad (V.13)$$

et

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2D} \cdot \frac{v_{o1}^2}{g} Y' \quad (V.14)$$

### V.3.2. - Variation linéaire de la vitesse :

En portant les valeurs de  $v_a$  et  $v_b$ , données par (V.10), dans (V.2) on a :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD} \left[ \frac{1 - \zeta_1^2 v_{o1}^2 + 1 - r_{1,2} \zeta_1^2 v_{o1}^2 + 1 - \zeta_1 (1 - r_{1,2} \zeta_1) v_{o1}^2}{3} \right]$$

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD} \left\{ \frac{1 + r_{1,2}^2 + r_{1,2}}{3} \cdot \zeta_1^2 - (1 + r_{1,2}) \zeta_1 + 1 \right\} v_{o1}^2 \quad (V.15)$$

Sachant que le coefficient de réflexion  $r_{1,2}$  est égal à :

$$r_{1,2} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \text{ la relation devient}$$

\* voir chapitre « cheminement des ondes aux points de ramifications pour démonstration »

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD} \left[ \frac{3\beta^2 + 1}{(3\beta + 1)^2} \cdot \zeta_1^2 - \frac{2\beta}{\beta + 1} \zeta_1 + 1 \right] v_{o1}^2 \quad (V.16)$$

ou bien :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD} Y' \cdot v_{o1}^2$$

avec :

$$Y' = \frac{3\beta^2 + 1}{(3\beta + 1)^2} \zeta_1^2 - \frac{2\beta}{\beta + 1} \zeta_1 + 1 \quad (V.17)$$

Remarque : Si  $\zeta_1 = 0$  on retrouve le régime permanent et par conséquent la formule de Darcy.

### V.3.3 - Variation hyperbolique de la vitesse :

De la même façon que dans (V.3.2) en remplaçant  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $r_{1,2}$  et  $W'$  par leurs valeurs respectives dans (V.5), on aura :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD \cdot 5} v_{o1}^2 \left( \frac{3\beta^2 + 1}{(\beta + 1)^2} \cdot \zeta_1^2 - 6 \left( \frac{\beta}{\beta + 1} \right) \zeta_1 + 3 + \left( 2 - \frac{2\beta}{\beta + 1} \zeta_1 \right) \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \zeta_1^2 - \frac{2\beta}{\beta + 1} \zeta_1 \right) \quad (V.18)$$

avec :

$$Y' = \frac{1}{5} \left( \frac{3\beta^2 + 1}{(\beta + 1)^2} \cdot \zeta_1^2 - 6 \left( \frac{\beta}{\beta + 1} \right) \zeta_1 + 3 + \left( 2 - \frac{2\beta}{\beta + 1} \zeta_1 \right) \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \zeta_1^2 - \frac{2\beta}{\beta + 1} \zeta_1 \right) \quad (VI.19)$$

Si  $\zeta_1 = 0$  on retrouve aisément le régime permanent

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{D} \frac{v_{o1}^2}{2g}$$

remarque: Les fonctions  $Y'=f(\beta)$  sont représentées par les graphiques N° 

**TABLEAU N° 5    VARIATION PARABOLIQUE DE LA VITESSE**

$\beta$	$Y'$							
	$\xi=0,8$	$\xi=0,6$	$\xi=0,4$	$\xi=0,2$	$\xi=0,1$	$\xi=-0,2$	$\xi=-0,4$	$\xi=-0,6$
0	1,6400	1,3600	1,1600	1,0400	1,0100	1,0400	1,1600	1,0360
0,1	1,3888	1,1914	1,0608	0,9970	0,9902	1,0698	1,2063	1,1391
0,2	1,1956	1,0600	0,9822	0,9622	0,9739	1,0956	1,2489	1,2260
0,3	1,0436	0,9553	0,9186	0,9335	0,9603	1,1181	1,2878	1,3001
0,4	0,9216	0,8702	0,8661	0,9094	0,9488	1,1380	1,3233	1,3642
0,5	0,8222	0,8000	0,8222	0,8889	0,9389	1,1556	1,3556	1,4200
0,6	0,7400	0,7413	0,7850	0,8713	0,9303	1,1713	1,3850	1,4691
0,7	0,6711	0,6915	0,7531	0,8559	0,9228	1,1853	1,4119	1,5127
0,8	0,6128	0,6489	0,7254	0,8425	0,9162	1,1980	1,4365	1,5516
0,9	0,5630	0,6121	0,7013	0,8306	0,9103	1,2095	1,4592	1,5865



**GRAPHIQUE DE LA FONCTION  $Y=f(\beta)$ ;  $\xi=C^{te}$**   
**(VARIATION PARABOLIQUE DE LA VITESSE)**

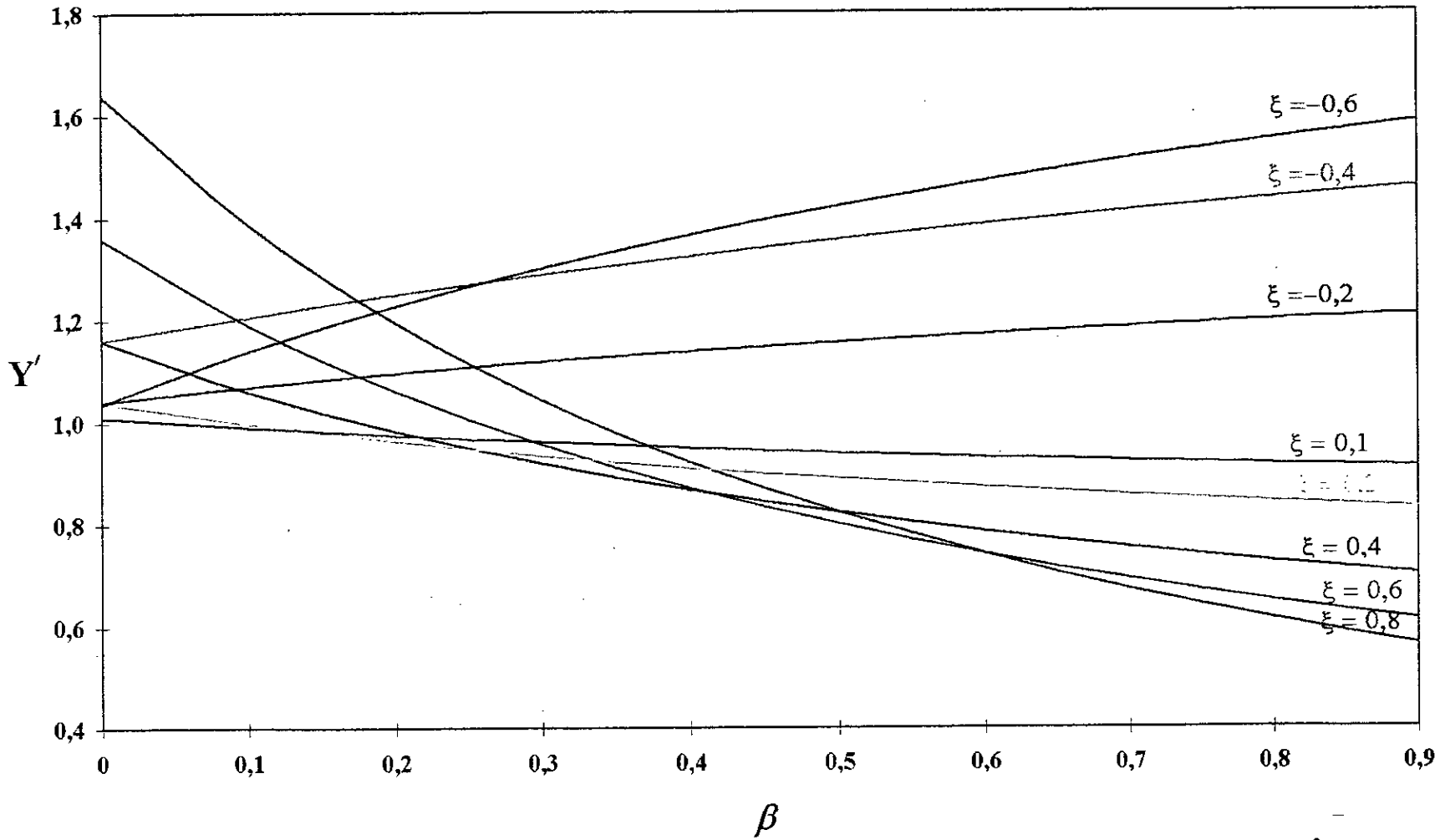


Figure n° 21

**TABLEAU N° 6 VARIATION LINEAIRE DE LA VITESSE**

$\beta$	$\gamma'$							
	$\xi=0,8$	$\xi=0,6$	$\xi=0,4$	$\xi=0,2$	$\xi=0,1$	$\xi=-0,2$	$\xi=-0,4$	$\xi=-0,6$
0	1,2133	1,1200	1,0533	1,0133	1,0033	1,0133	1,0533	1,12
0,1	1,0361	0,9931	0,9727	0,9750	0,9847	1,0477	1,1181	1,2112
0,2	0,8993	0,8933	0,9081	0,9437	0,9693	1,0770	1,1748	1,2933
0,3	0,7911	0,8133	0,8555	0,9177	0,9564	1,1023	1,2247	1,3671
0,4	0,7039	0,7478	0,8117	0,8958	0,9454	1,1244	1,2688	1,4335
0,5	0,6326	0,6933	0,7748	0,8770	0,9359	1,1437	1,3081	1,4933
0,6	0,5733	0,6475	0,7433	0,8608	0,9277	1,1608	1,3433	1,5475
0,7	0,5235	0,6084	0,7162	0,8467	0,9205	1,1761	1,3750	1,5967
0,8	0,4812	0,5748	0,6925	0,8342	0,9141	1,1898	1,4036	1,6415
0,9	0,4448	0,5456	0,6717	0,8232	0,9084	1,2021	1,4296	1,6824

GRAPHIQUE DE LA FONCTION  $Y=f(\beta)$ ;  $\xi=C^{te}$   
(VARIATION LINEAIRE DE LA VITESSE)

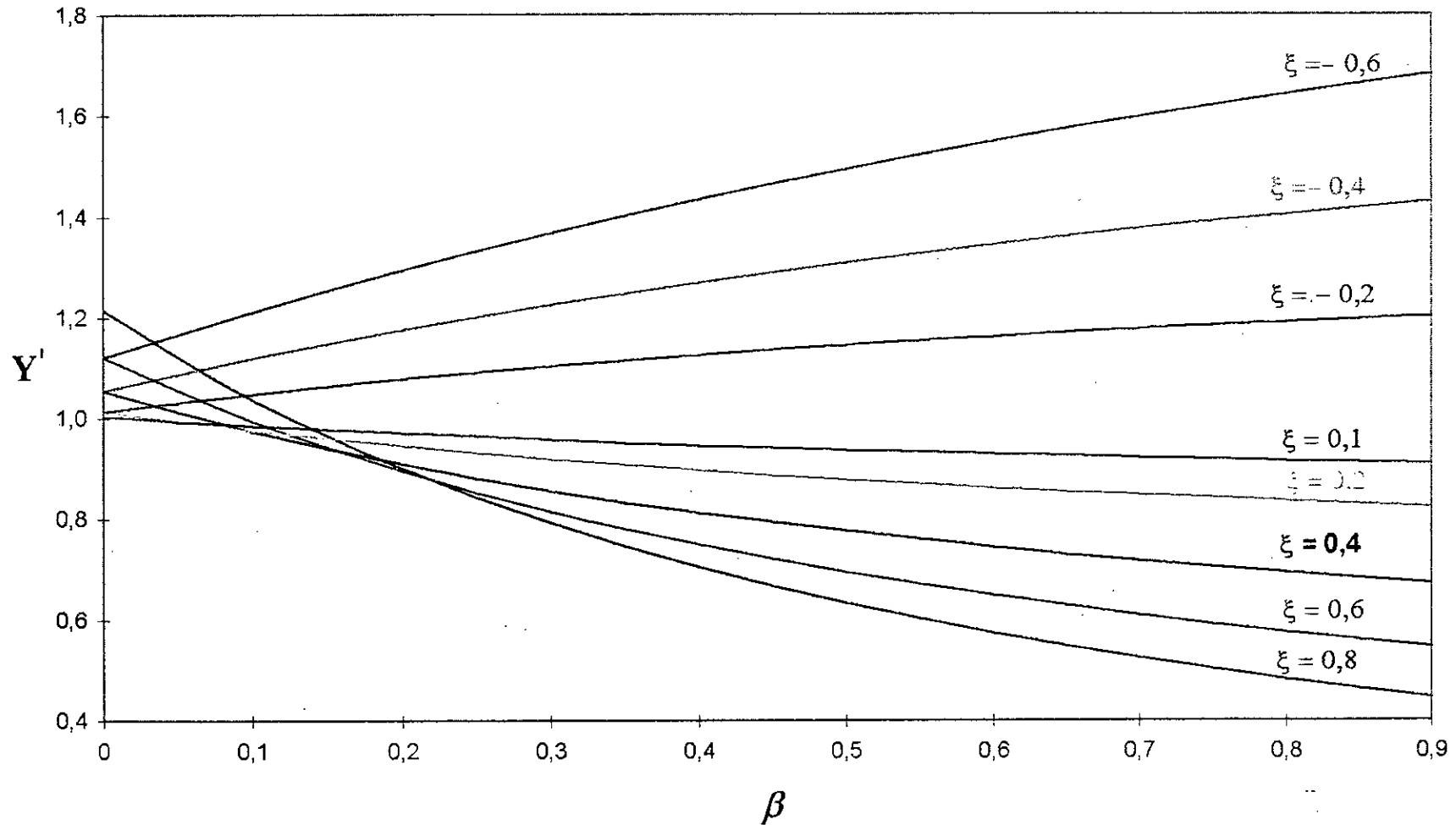


Figure n° 22

**TABLEAU N°7 VARIATION HYPERBOLIQUE DE LA VITESSE**

$\beta$	$Y'$							
	$\xi=-0,6$	$\xi=-0,4$	$\xi=-0,2$	$\xi=0,1$	$\xi=0,2$	$\xi=0,4$	$\xi=0,6$	$\xi=0,8$
0,0	5,0	4,9930	4,9996	5,0000	4,9996	4,9930	4,9600	4,8400
0,1	4,7	4,6023	4,5287	4,4186	4,3832	4,3106	4,2212	4,0662
0,2	4,4	4,2860	4,1387	3,9347	3,8720	3,7518	3,6270	3,4577
0,3	4,3	4,0253	3,8105	3,5257	3,4413	3,2859	3,1394	2,9687
0,4	4,1	3,8068	3,5305	3,1755	3,0734	2,8916	2,7327	2,5685
0,5	4,0	3,6212	3,2888	2,8722	2,7555	2,5538	2,3885	2,2360
0,6	3,9	3,4617	3,0781	2,6070	2,4781	2,2611	2,0938	1,9559
0,7	3,8	3,3233	2,8927	2,3732	2,2339	2,0051	1,8387	1,7171
0,8	3,8	3,2020	2,7284	2,1654	2,0172	1,7793	1,6158	1,5116
1,0	3,6	2,9997	2,4500	1,8125	1,6500	1,3994	1,2454	1,1767

*GRAPHIQUE DE LA FONCTION  $Y=f(\beta)$  ;  $\xi=Cte$   
(VARIATION HYPERBOLIQUE DE LA VITESSE)*

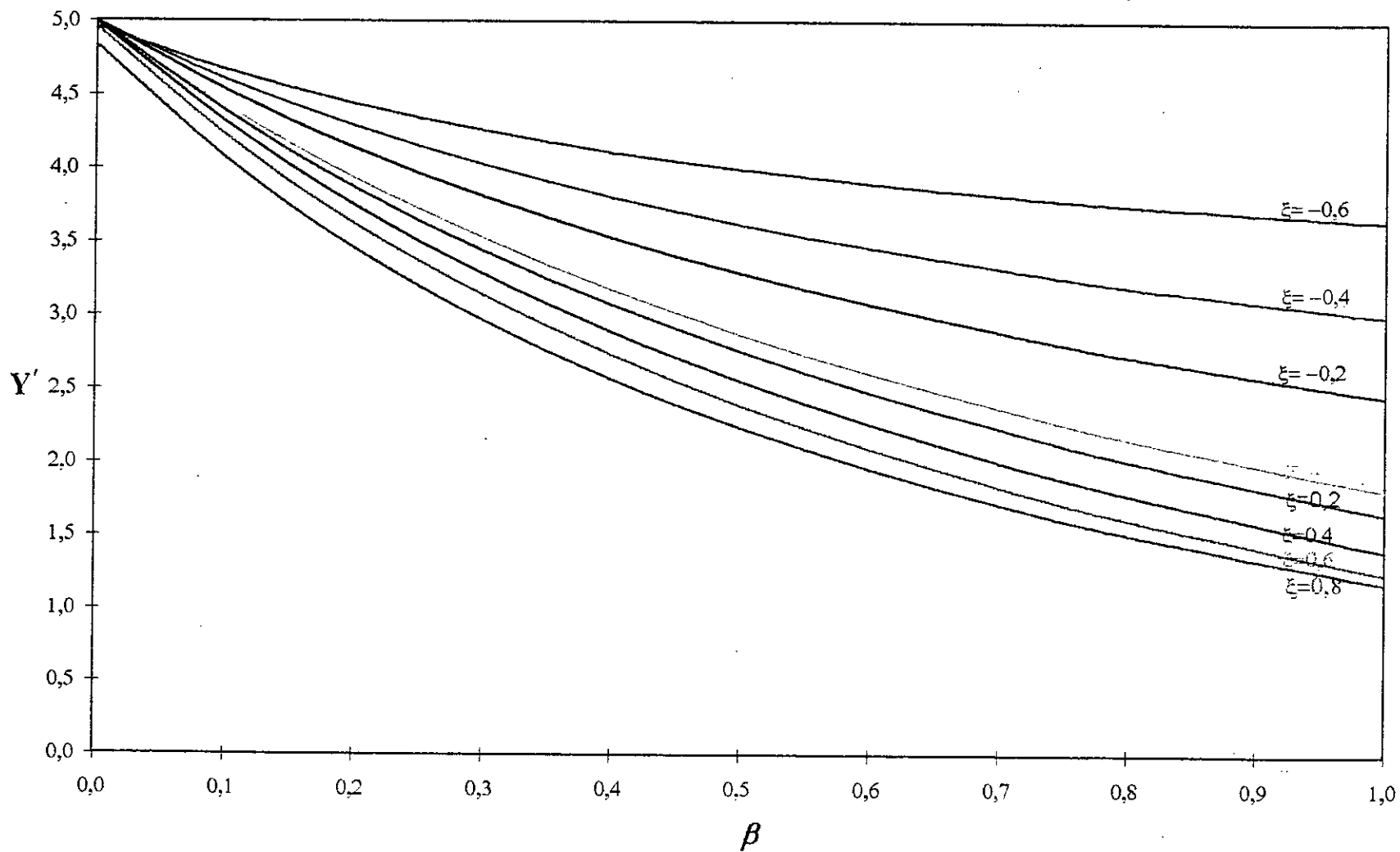


Figure n° 23

**V-4 - Influence de la perte de charge et l'élasticité de la conduite sur la pression dynamique dans le cas d'un arrêt brusque de la pompe :**

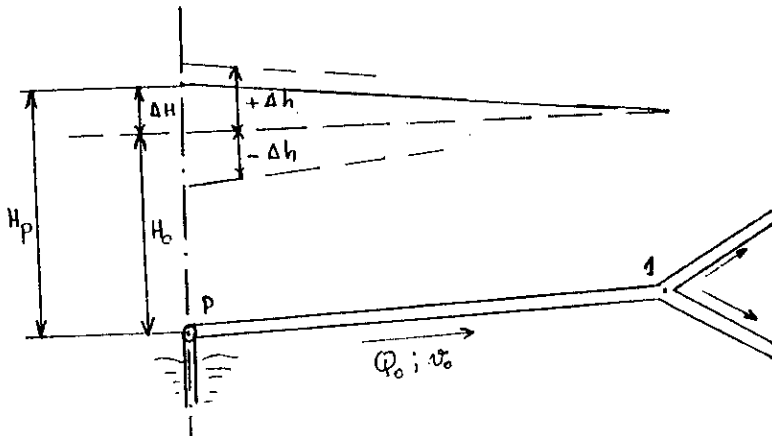


Figure: 24

Considérons une pompe refoulant le liquide dans une conduite à l'aval de laquelle se trouve un noeud de ramification « 1 ».

A la suite d'un arrêt brusque de la pompe, il se produit un coup de bélier au droit de la pompe de valeur :

$$\Delta h = \pm \frac{Cv_0}{g}$$

C : étant la célérité d'onde de coup de bélier

La pression dynamique dans une section de la conduite de refoulement sera :

$$H_{pdi} = H_{0xi} + \Delta H_{xi} - \Delta h \text{ en phase de dépression} \quad (V-19)$$

- où :  $\Delta H_{xi}$  : perte de charge dans la section i à une distance x de la pompe
- $H_{pdi}$  : pression dynamique dans la section i à une distance x de la pompe
- $H_{0xi}$  : pression statique dans la section i à une distance x de la pompe

La vitesse de l'écoulement, engendrée par la perte de charge en régime permanent régnant dans la conduite juste avant l'arrivée du coup de bélier, donne naissance à une énergie cinétique exprimée par :

$$E_c = \frac{m}{2} \cdot v_0^2 \quad (V-20)$$

Cette énergie est égale au travail fait par la pression perdue, due à la perte de charge.

Si nous posons :  $m = \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho$  (V-21)

Où  $r$  : rayon de la conduite  
 $l$  : longueur de la conduite

en portant (VI-21) dans (VI-20), on a :

$$E_c = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho}{2} v_s^2 \quad (V-22)$$

Après le passage du front d'onde de coup de bélier, cette énergie est récupérée par l'eau  $E_{pe}$  et par l'enveloppe  $E_{pc}$  de la conduite grâce à son élasticité

$$E_c = E_{pe} + E_{pc} \quad (V-23)$$

- d'après la théorie de Clapeyron, la croissance d'énergie potentielle de la conduite est donnée par :

$$dE_{pc} = \frac{dr}{2} F_t \quad (V-24)$$

$F_t$  désigne la force tangentielle sur toute la longueur de la conduite, elle a pour valeur :

$$F_t = 2\pi \cdot r \cdot l \cdot P_s \quad (V-25)$$

$P_s$  : désigne la pression due à la perte de charge

$$P_s = \rho \cdot g \cdot \Delta H$$

donc :  $F_t = 2 \pi \cdot r \cdot l \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta H$  (V-26)

Pour une conduite élastique, on peut écrire que :

$$dr = \frac{r}{E_0} \cdot d\sigma_a \cdot m \quad (V-27)$$

$\gamma = 1$  pour une conduite élastique assemblée par joints  
 La contrainte annulaire est donnée par :

$$d\sigma_a = \frac{dP_s \cdot r}{e} \quad (V-28)$$

par suite :

$$dr = dP_s \frac{r^2}{E_0 \cdot e} \cdot m \quad (V-29)$$

$P_s$  est la pression due à la perte de charge ;  $P_s$  est variable le long de la conduite.

$$P_s = \rho \cdot g \cdot \Delta H \cdot \frac{x}{l}$$

et

$$dP_s = \rho \cdot g \cdot \Delta H \cdot \frac{dx}{l} \quad (V-30)$$

finalement l'énergie potentielle de la conduite sera égale à :

$$dE_{pc} = \frac{\rho \cdot g \cdot \Delta H \cdot r^2}{2 \cdot E_o \cdot e} \cdot m \cdot \frac{dx}{l} \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta H \cdot \frac{x}{l} \quad (V-31)$$

$$dE_{pc} = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \Delta H^2 \cdot r^3}{E_o \cdot e \cdot l} \cdot x \cdot dx \cdot m \quad (V-32)$$

pour obtenir  $E_{pc}$  , intégrons entre 0 et l, et on obtient :

$$E_{pc} = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \Delta H^2 \cdot r^3 \cdot m}{2 \cdot E_o \cdot e} \quad (V-33)$$

- L'énergie potentielle de l'eau est égale à :

$$dE_{pe} = \frac{dl}{2} \cdot F_2$$

où

$$F_2 = \pi \cdot r^2 \cdot P_s$$

donc :

$$dE_{pe} = \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta H \cdot \frac{x}{l} \cdot dl \quad (V-34)$$

d'après la loi de Hook, on peut écrire :

$$\frac{dv}{v_o} = \frac{dP}{E} \quad (V-35)$$

Pour une conduite de section droite constante :

nous avons :

$$\frac{dl}{l} = \frac{dP_s}{E} \quad \text{et} \quad dl = l \cdot \frac{dP_s}{E}$$

d'où

$$dl = \frac{l}{E} \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta H \cdot \frac{dx}{l}$$

$$dl = \frac{1}{E} \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta H \cdot dx$$



dl : représente la variation du volume dV  
 dx : c'est la variable d'intégration

par conséquent nous avons :

$$dE_{pe} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \frac{\Delta H^2}{E} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx \quad (V-36)$$

Après intégration on aboutit à :

$$E_{pe} = \frac{1}{4} \pi r^2 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \frac{\Delta H^2}{E} l \quad (V-37)$$

Si nous portons les formules de l'accroissement de l'énergie cinétique et potentielle du liquide et de la conduite dans la relation donnant l'énergie cinétique (relation de base) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho \cdot v_s^2 &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \frac{\Delta H^2}{E} + \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot E \cdot e} \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \Delta H^2 \cdot l \cdot m \\ \left(\frac{v_s}{\Delta H}\right)^2 &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g^2 \left[ \frac{1}{E} + \frac{D}{E_0 \cdot e} m \right] \\ \left(\frac{v_s}{\Delta H}\right)^2 &= \frac{\rho \cdot g^2}{2 \cdot E} \left[ 1 + m \cdot \frac{D \cdot E}{E_0 \cdot e} \right] \end{aligned} \quad (V-38)$$

$v_s$  : vitesse engendrant le coup de bélier perdu.  
 Considérons maintenant la formule de la célérité d'onde :

$$c = \frac{\sqrt{E/\rho}}{\sqrt{1 + m \cdot \frac{D \cdot E}{E_0 \cdot e}}}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$c^2 = \frac{E/\rho}{1 + m \cdot \frac{D \cdot E}{E_0 \cdot e}} = \frac{E}{\rho \left( 1 + m \cdot \frac{D \cdot E}{E_0 \cdot e} \right)}$$

d'où :

$$\frac{E}{c^2} = \rho \left[ 1 + m \cdot \frac{D \cdot E}{E_0 \cdot e} \right] \quad (V-39)$$

en portant (V-28) dans (V-27) on a :

$$\left(\frac{v_s}{\Delta H}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot \frac{1}{c^2}$$

d'où :

$$\frac{v_s}{\Delta H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{g}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{c v_s}{g} = \frac{\Delta H}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta H \quad (V-40)$$

où  $\frac{c v_s}{g}$  est le coup de bélier dû à la vitesse perdue en raison de la perte de charge  $\Delta H$ .

Nous concluons qu'en cas d'arrêt brusque de la pompe, pour un point d'abscisse « x », le long de la conduite, la pression dynamique sera :

$$H_{px} = H_{ox} + \Delta H_x - \frac{c v_0}{g} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta H_x$$

$$\Rightarrow H_{px} = H_{ox} + 0,293 \Delta H - \frac{c v_0}{g} \quad (V-41)$$

Remarque :

Nous constatons que  $0,293 \Delta H$  est consommée par la conduite, ce qui nous permet de dire que les déplacements de la conduite, ont une influence sur l'amortissement du coup de bélier quand il y a un arrêt brusque de la pompe.

## Chapitre VI

### Applications Numériques

#### VI-1 - Introduction :

Le but de ce chapitre, est de mettre en application notre travail afin d'avoir une validité pratique, vu les problèmes de dimensionnement rencontrés en pratique. Pour son illustration, nous considérons des exemples de systèmes de refoulement en Alimentation en Eau Potable couramment rencontrés en pratique tels que les réseaux d'adductions divergents et convergents faiblement ramifiés. Cette configuration de réseaux a été optée, non seulement en raison de son utilité en pratique, mais également à la suite des endommagements constatés en pratique sur les adductions en refoulement subissant des modifications de débit (arrêt de pompe, démarrage, ...).

Ces constats ont été notifiés par les gestionnaires même en présence des anti-béliers prévus pour le cas d'une adduction unique, et qui deviennent inefficaces (surdimensionnement) à la suite des piquages projetés.

Dans notre exemple, le cas de démarrage des pompes n'est pas envisagé, vu que ce dernier est beaucoup plus maîtrisable, notamment lorsque le réseau est ramifié, (double atténuation du coup de bélier). La considération de nos exemples fera l'objet de certaines hypothèses simplificatrices en tenant compte des pertes de charges supposées réparties linéairement, à savoir :

- Arrêt simultané et brusque des pompes
- Matériau unique de la canalisation formant le réseau.
- Absences d'anti-bélier sur tout le réseau.
- Réseau non enterré
- Existence de réservoir aux extrémités aval du réseau.
- Le pas de calcul est tel que :

$$\frac{l_1}{C_1} = \frac{l_2}{C_2} = \dots + \frac{l_n}{C_n} = \Delta t = 1$$

#### VI-2 - Formulation Mathématique :

##### VI-2-1 - Cas d'une conduite :

L'équation aux caractéristiques obtenue en fin de chapitre n°IV, peut se mettre sous une forme explicite comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} dH + \frac{c}{gs} dQ = -J dx \quad (a) \\ dx = + c dt \quad (b) \end{array} \right. \quad (VI.1)$$

et 
$$\begin{cases} dH = -\frac{c}{gs} dQ = -J dx & (a') \\ dx = -c dt & (b') \end{cases} \quad (VI.2)$$

Ces systèmes expriment que si on se déplace le long d'un trajet d'un tronçon avec une vitesse  $\frac{dx}{dt} = C$ , la quantité  $H + \frac{c}{g} dQ$  reste constante aux pertes de charge près [5] supposés comme étant linéaires. L'application de ces systèmes est plus simple notamment lorsqu'on considère que la quantité  $\frac{c}{gs}$  est constante. On admet que la section est constante en face des variations de débit et de côte piézométrique qui était prise comme une variable au même titre que la compressibilité du fluide et l'allongement de la conduite.

Ils nous permettent de déterminer facilement le couple (H, Q) en n'importe quel point de la canalisation.

**VI-2-2 - Cas d'un noeud :**

La complexité de la méthode apparait surtout pour le calcul de l'état à un noeud [8]. Dans ce cas les systèmes aboutissent à une seule équation qui sera appliquée à chaque conduite aboutissant à ce noeud et qui n'implique aucun choix de sens, avec des conditions aux limites (états aux extrémités connues).

Ainsi l'enveloppe de pression, nodale engendrera des pressions (transmises et réfléchies), de part et d'autre du noeud, (voir chapitre n° III), qui nous serviront pour le calcul du couple (H, Q) à la prochaine étape.

**VI-2-3 - Schémas du réseau d'adductions envisagés :**

Vu la diversification des schémas d'adductions en refoulement. La configuration envisagée dans notre exemple d'application, concerne les cas les plus fréquemment rencontrés en pratique, à savoir :

a) - Système d'adductions divergents de rang 3

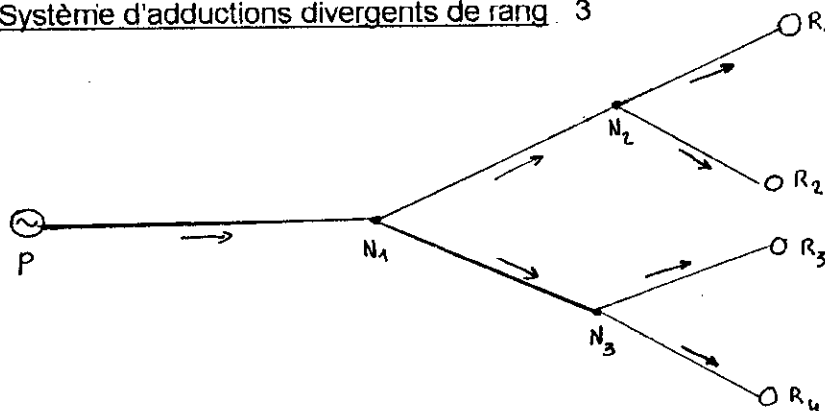


Figure : 25

b) - Système d'adductions divergents de rang 2

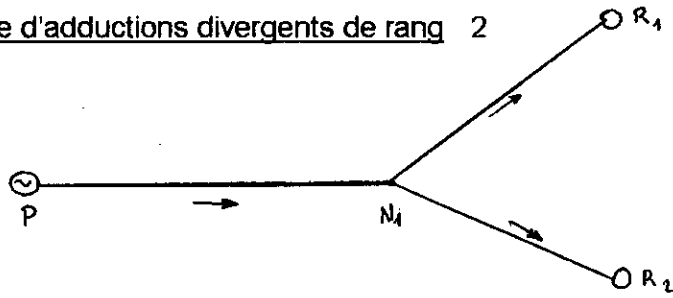


Figure : 26

**VI-2-4 - Démarche de calcul :**

La présentation des systèmes (VI.1) et (VI.2) est d'ordre général. Leur application aux schémas du paragraphe VI-2-3, nécessite le développement de certains termes qui les composent, afin de mieux comprendre leur domaine d'application. Dans ce sens, leur manipulation par l'outil informatique ainsi sera rendue plus simple, même pour des réseaux plus complexes à résoudre.

a) Paramètres de calcul :

	Côte du plan d'eau du réservoir i	(m)
$q_i$	Débit	(m <sup>3</sup> /s)
$R_i$	Résistance de la conduite	(m <sup>-5</sup> s <sup>2</sup> )
$C_i$	Célérité de l'onde	(m/s)
$S_i$	Section de la canalisation	(m <sup>2</sup> )
$Q_{Ni}$	Débits inconnus	(m <sup>2</sup> /s)
$H_{Ni}$	Charges inconnues	(m)

Autres données :

$$\lambda = (1,14 - 0,86 \ln \frac{\epsilon}{D})^{-2}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$K = 2 \cdot 10^9$$

$$E = 2 \cdot 10^{11}$$

$$\Delta H = \frac{\lambda \cdot 16 \cdot l \cdot Q^2}{2g \cdot \pi^2 \cdot D^5}$$

$$C = \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot D}{E \cdot e}}}$$

b) Forme explicite des systèmes d'équations :

La forme explicite des systèmes (VI-1) et (VI-2), nous conduit à écrire pour la figure n°

On démarre à l'instant  $t$  de  $\beta$  et on arrive à l'instant  $t + \frac{l}{c}$  en  $\alpha$  (voir figure n°27).

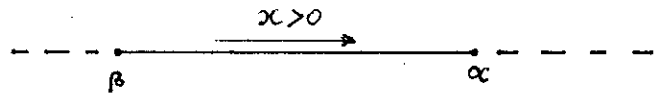


Figure : 27

Après intégration de l'équation VI-1-a, on obtient :

$$H \left[ \begin{array}{l} \alpha, t + l/c \\ \beta, t \end{array} \right] + \frac{c}{g.s} Q \left[ \begin{array}{l} \alpha, t + l/c \\ \beta, t \end{array} \right] = - \int_{\beta, t}^{\alpha, t + l/c} j dx$$

or  $\Delta H = j.l = RQ^2 = R Q |Q|$  avec  $R > 0$

en concentrant la perte de charge du tronçon à ses deux extrémités les débits seront respectivement :

$Q(\beta, t)$  et  $Q(\alpha; t + l/c)$

On aura donc :

$$H(\alpha, t + l/c) + \frac{c}{g.s} Q(\alpha, t + l/c) = H(\beta, t) + \frac{c}{g.s} Q(\beta, t) - RQ(\alpha, t + l/c) |Q(\alpha, t + l/c)| + RQ(\beta, t) |Q(\beta, t)|$$

En posant  $\frac{c}{g.s} = A$  ;

$$\begin{cases} H = (côte) \\ Q = q \end{cases} \quad \text{au temps } t$$

et  $\begin{cases} H = H(côte) \\ Q = Q \end{cases}$  au temps  $t + 1$  avec  $\Delta t = l/c = 1$  on aura :

$$H + \frac{c}{g.s} Q = \mathcal{H}_p + \frac{c}{g.s} q - R \cdot Q |Q| + R \cdot q |q|$$

$$H_\alpha + A Q_\alpha = \mathcal{H}_p + A q_p - R \cdot Q_\alpha |Q_\alpha| + R q_p |q_p|$$

En conséquence, nous pouvons écrire d'une façon générale :

$$H_N + \frac{C_i}{g.s_i} \cdot Q_{Ni} = \mathcal{H}_i - \frac{C_i}{g.s_i} q_{iN} - R_i Q_{Ni}^2 + R g_{Ni}^2$$

Par simplification, on pose :

$$\frac{C_i}{g.s_i} = A_i \text{ et } \mathcal{H}_i = \frac{C_i}{g.s_i} q_{iN} + R_i q_{iN}^2 = T_i$$

Les équations (VI-6) étant connues nous aurons :

$$\begin{cases} H_N + A_i Q_{Ni} + R_i Q_{Ni}^2 = T_i \\ \sum Q_{Ni} = 0 \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{cases} H_N + (A_i + R_i |q_{Ni}|) Q_{Ni} = T_i \\ \sum Q_{Ni} = 0 \end{cases}$$

Posons  $\alpha_i = A_i + R_i |q_{Ni}|$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{H_N}{\alpha_i} + Q_{Ni} = \frac{T_i}{\alpha_i} \\ \sum Q_{Ni} = 0 \end{cases}$$

d'où, nous obtenons :

$$H_N = \frac{\sum T_i / \alpha_i}{\sum 1/\alpha_i}$$

et

$$Q_{Ni} = \frac{T_i - H_N}{\alpha_i}$$

Remarque :

Un test de convergence  $\gamma$  est pris en considération dans les calculs ( $10^{-20}$ ).

**VI-2-5 - Exemple numérique de calcul :**

La forme explicite des systèmes (VI-1) et (VI-2), nous conduit à écrire :

a) Pour la figure « » et à chaque tronçon :

$$H_N + \frac{c_1}{gS_1} Q_{N1} = H_1 - \frac{c_1}{gS_1} q_{1,N} - R_1 Q^2_{N1} + R_2 q^2_{1N} \quad (\text{conduite 1})$$

$$H_N + \frac{c_2}{gS_2} Q_{N2} = H_2 - \frac{c_2}{gS_2} q_{2,N} - R_2 Q^2_{N2} + R_2 q^2_{2N} \quad (\text{conduite 2})$$

$$H_N + \frac{c_3}{gS_3} Q_{N3} = H_3 - \frac{c_3}{gS_3} q_{3,N} - R_3 Q^2_{N3} + R_3 q^2_{3N} \quad (\text{conduite 3})$$

d'autre part au noued « N » nous pouvons écrire :

$$\sum Q_i = 0$$

b) Pour la figure « », et à chaque tronçon :

**Noeud 1 :**

$$H_{N1} + \frac{c_1}{gS_1} Q_{N1} = H_P - \frac{c_1}{gS_1} q_{1,N1} - R_1 Q^2_{N1} + R_1 q^2_{1N} \quad (\text{Conduite 1})$$

$$H_{N1} + \frac{c_2}{gS_2} Q_{N1,N2} = H_{N2} - \frac{c_2}{gS_2} q_{N1,N2} - R_2 Q^2_{N1,N2} + R_2 q^2_{N1,N2} \quad (\text{Conduite 2})$$

$$H_{N1} + \frac{c_3}{gS_3} Q_{N1,N3} = H_{N3} - \frac{c_3}{gS_3} q_{N1,N2} - R_3 Q^2_{N1,N2} + R_3 q^2_{N1,N2} \quad (\text{conduite 3})$$

**Noeud 2 :**

$$H_{N2} + \frac{c_2}{gS_2} Q_{N1,N2} = H_{N1} - \frac{c_2}{gS_2} q_{N1,N2} - R_2 Q^2_{N1,N2} + R_1 q^2_{N1,N2} \quad (\text{conduite 2})$$

$$H_{N2} + \frac{c_4}{gS_4} Q_{N2,R1} = H_{R1} - \frac{c_4}{gS_4} q_{N2,R1} - R_4 Q^2_{N2,R1} + R_4 q^2_{N2,R1} \quad (\text{conduite 4})$$

$$H_{N2} + \frac{c_5}{gS_5} Q_{N2,R2} = H_{R2} - \frac{c_5}{gS_5} q_{N2,R2} - R_5 Q^2_{N2,R2} + R_5 q^2_{N2,R2} \quad (\text{conduite 5})$$



**Noeud n° 3 :**

$$H_{N3} + \frac{C_3}{gS_3} Q_{N1,N3} = \mathcal{H}_{N1} - \frac{C_3}{gS_3} q_{N1,N3} - R_3 Q_{N1,N3}^2 + R_3 q_{N1,N3}^2 \quad (\text{conduite 3})$$

$$H_{N3} + \frac{C_6}{gS_6} Q_{N3,R3} = \mathcal{H}_{R3} - \frac{C_6}{gS_6} q_{N3,R3} - R_6 Q_{N3,R3}^2 + R_6 q_{N3,R3}^2 \quad (\text{conduite 6})$$

$$H_{N3} + \frac{C_7}{gS_7} Q_{N3,R4} = \mathcal{H}_{R4} - \frac{C_7}{gS_7} q_{N3,R4} - R_7 Q_{N3,R4}^2 + R_7 q_{N3,R4}^2 \quad (\text{conduite 7})$$

tout calcul fait on aboutit à :

$$H_{N1} = \frac{\sum_1^5 T_i / \alpha_i}{\sum_1^4 1/\alpha_i} ; H_{N2} = \frac{\frac{T_2}{\alpha_2} + \frac{T_4}{\alpha_4} + \frac{T_5}{\alpha_5}}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_4} + \frac{1}{\alpha_5}} ; H_{N3} = \frac{\frac{T_3}{\alpha_3} + \frac{T_6}{\alpha_6} + \frac{T_7}{\alpha_7}}{\frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_6} + \frac{1}{\alpha_7}} \quad (\text{VI.15})$$

$$Q_1 = \frac{T_1 - H_{N1}}{\alpha_1} ; \quad Q_2 = \frac{T_2 - H_{N1}}{\alpha_2} ; \quad Q_3 = \frac{T_3 - H_{N1}}{\alpha_3}$$

$$Q_4 = \frac{T_4 - H_{N2}}{\alpha_4} ; \quad Q_5 = \frac{T_5 - H_{N2}}{\alpha_5} ; \quad Q_2 = \frac{T_2 - H_{N2}}{\alpha_2} \quad (\text{VI.16})$$

$$Q_3 = \frac{T_3 - H_{N3}}{\alpha_3} ; \quad Q_6 = \frac{T_6 - H_{N3}}{\alpha_6} ; \quad Q_7 = \frac{T_7 - H_{N3}}{\alpha_7}$$

**Remarque :**

Les équations (VI-13), (VI.14) ; (VI-15) et (VI-16) seront résolues au moyen d'un programme à la base d'un exemple numérique. Les résultats sont donnés pour les deux rangs à chaque pas de calcul  $\Delta t = 1$  et illustrés par les graphiques 1 et 2.

Tableau n° 8

**Application numérique : rang 2**

N° des tronçons	Longueur (m)	Q (l/s)	Ø (mm)	e (mm)	ε (mm)	Côtes (m)
1	600	22	150	5	0,1	$C_p = 215,667$
2	500	11	100	5	0,1	$C_{r1} = 200$
3	500	11	100	5	0,1	$C_{r2} = 200$

Tableau n° 9

Cas de disymétrie : rang 3

N° des tronçons	Diamètre (mm)	Longueur (m)	Épaisseur (mm)	Rugosité (mm)	Débit (m <sup>3</sup> /s)
1	150	1240	5	0,018	0,022
2	100	1290	5	0,0199	0,011
3	100	1290	5	0,0199	0,011
4	80	1313	5	0,0199	0,004
5	80	1313	5	0,0199	0,007
6	80	1313	5	0,0199	0,0035
7	80	1313	5	0,0199	0,0075

Autres données :

$c c p$	=	244,455 m
H (1)	=	232,623 m
H (2)	=	206,928 m
H (3)	=	206,928 m
$c_{R1}$	=	203,26 m
$c_{r2}$	=	195,70 m
$c_{r3}$	=	204,12 m
$c_{r4}$	=	193,37 m

## Tableau n° 10

Cas de symétrie : rang 3

N° des tronçons	Diamètre (mm)	Longueur (m)	Épaisseur (mm)	Rugosité (mm)	Débit (m <sup>3</sup> /s)
1	150	1240	5	0.1	0,022
2	100	1290	5	0.1	0,011
3	100	1290	5	0.1	0,011
4	80	1313	5	0.1	0,005.5
5	80	1313	5	0.1	0,005.5
6	80	1313	5	0.1	0,005.5
7	80	1313	5	0.1	0,005.5

**VI-2-6 - Résultats et leur interprétation :**

Les résultats ont été obtenus sous forme de tableaux et de graphes pour la configuration retenue dans notre exemple.

Un calcul informatique a été utilisé pour résoudre les équations des systèmes énumérés ci-dessus appliquée à chaque schéma. Néanmoins la généralisation du logiciel du calcul s'avère très difficile en raison de la complexité des degrés de ramifications que peuvent reconnaître les réseaux d'adductions en pratique. Afin de simuler le cas réel, nous avons envisagé le cas où le réseau est symétrique et disymétrique avec une comparaison.

#### Cas de symétrie :

La courbe montre qu'au début une dépression importante est occasionnée, succédée par une suite de surpressions et dépressions caractérisant ainsi un coup de bélier décroissant qui tend vers la charge statique (côte des réservoirs) vers le 16ème pas de temps. Cette atténuation rapide est due (voir chapitre III) à l'effet des cheminements des ondes aux noeuds de ramification, comparativement au cas de rang 2.

#### Cas de dissymétrie :

La 1ère dépression s'aligne avec celle de la symétrie ; elle est succédée par une surpression plus importante par la suite une confrontation (de superposition) des deux courbes se poursuit jusqu'au 16ème pas de temps.

On remarque par la suite que les amplitudes de pression continuent jusqu'à amortissement, dû à l'influence des changements des caractéristiques des conduites de 3ème rang.

Ces amplitudes oscillent autour de la charge statique des plans d'eau des réservoirs.

Dans tous les cas l'atténuation des amplitudes des pressions est causée par non seulement les pertes de charge mais également par les points de raccordement des noeuds. Ceci dans l'hypothèse de l'absence des accessoires sur les adductions.

Nous remarquons que dans tous les cas la première surpression de retour n'est jamais importante ; de même pour le cas des dépressions. En conséquence au cours de l'arrêt brusque de la pompe si la cavitation ne se produit pas à la première dépression elle ne se produira jamais.

**TABLEAU N° 11: Variation de la charge au noeud "N"**

Pas de temps ( $\Delta t$ )	Charge (m)
0	206,44
1	31,071189
2	120,3311
3	131,43
4	157,1592
5	151,2814
6	177,0999
7	180,4466
8	187,658
9	185,8608
10	193,3606
11	194,3449
12	196,4197
13	195,8894
14	198,0704
15	198,3577
16	198,9593
17	198,8044
18	199,4388
19	199,5225
20	199,6973
21	199,6522
22	199,8367
23	199,8621
24	199,9119
25	199,8988
26	199,9525
27	199,9596
28	199,9743
29	199,9705
30	199,9862
31	199,9882
32	199,9925
33	199,9914
34	199,996
35	199,9966
36	199,9978
37	199,9975
38	199,9988
39	199,999
40	199,9993
41	199,9992
42	199,9997
43	199,9997
44	199,9998
45	199,9998
46	199,9999
47	199,9999
48	199,9999
49	200
50	200
51	200

*VARIATION DE LA CHARGE AU NOEUD "N"*

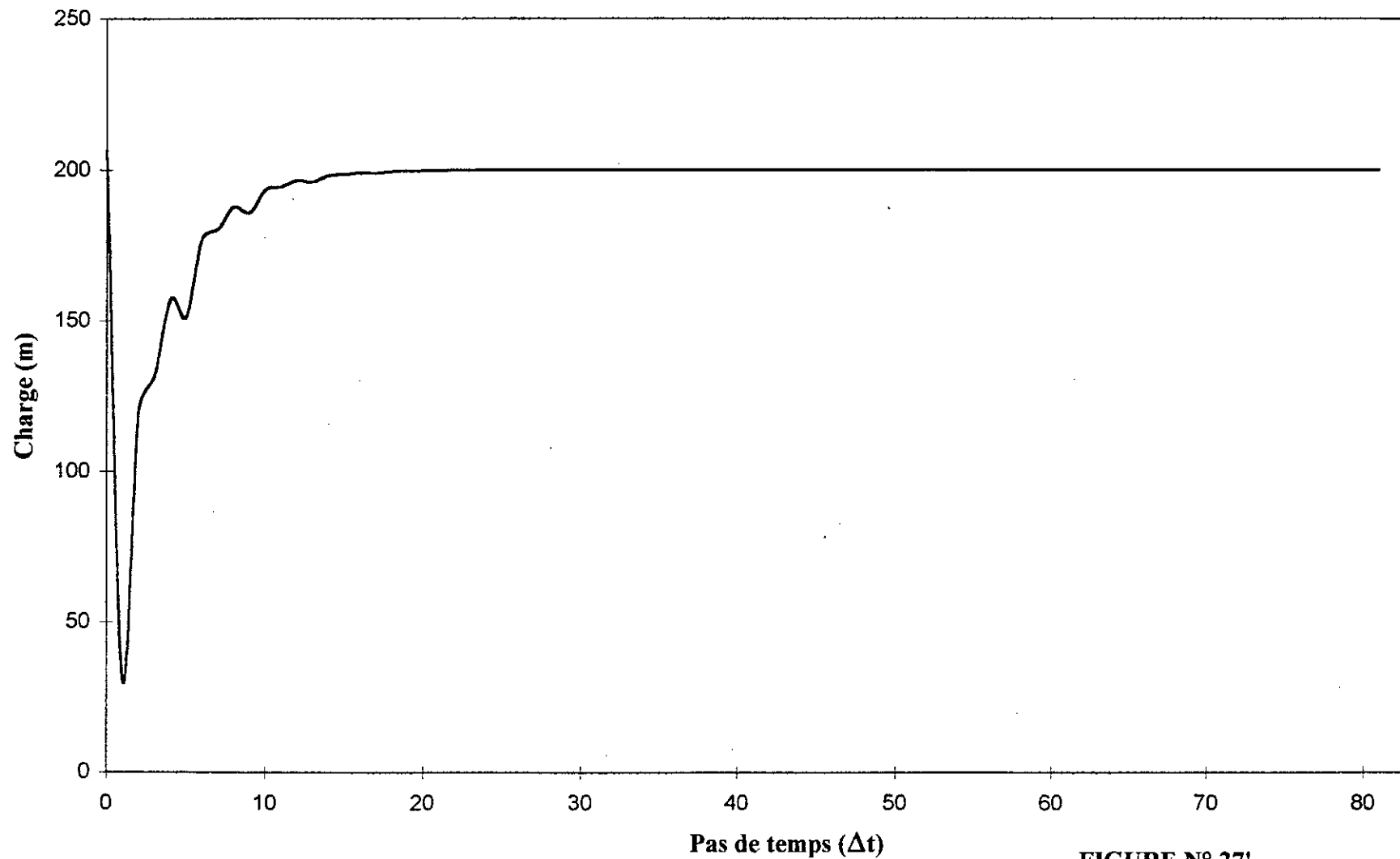


FIGURE N° 27'

**Tableau n° 12 Variation de la charge au noeud N1**

Pas de temps ( $\Delta t$ )	Charge (m)	
	cas de symetrie	cas de dissymetrie
0	232,62	232,623
1	76,044	76,037
2	153,849	174,4022
3	124,395	137,0202
4	174,757	176,877
5	158,628	163,0197
6	185,931	186,9343
7	176,671	178,9606
8	192,142	192,3375
9	186,825	187,7665
10	195,577	195,3043
11	192,54	192,6972
12	197,501	196,5375
13	195,77	194,8529
14	198,585	198,0066
15	197,6	196,6986
16	199,198	199,0928
17	198,638	198,0525
18	199,545	199,9727
19	199,227	199,2435
20	199,742	200,7908
21	199,561	200,413
22	199,853	201,6422
23	199,751	201,5521
24	199,917	202,8626
25	199,858	202,6439
26	199,953	204,0787
27	199,92	203,6492
28	199,973	205,2233
29	199,954	204,5524
30	199,985	206,2239
31	199,974	205,3747
32	199,991	207,19
33	199,985	206,0997
34	199,995	208,0642
35	199,992	206,7131
36	199,997	208,8597
37	199,995	207,1974
38	199,998	209,5134
39	199,997	207,5525
40	199,999	210,003
41	199,998	207,8338
42	199,999	210,3866
43	199,999	208,0826
44	200	210,7189
45	200	208,303
46	200	211,0121
47	200	208,4993
48	200	211,273

courbes de variation de la charge au niveau du noeud N1  
(cas de symetrie-----cas de dissymetrie)

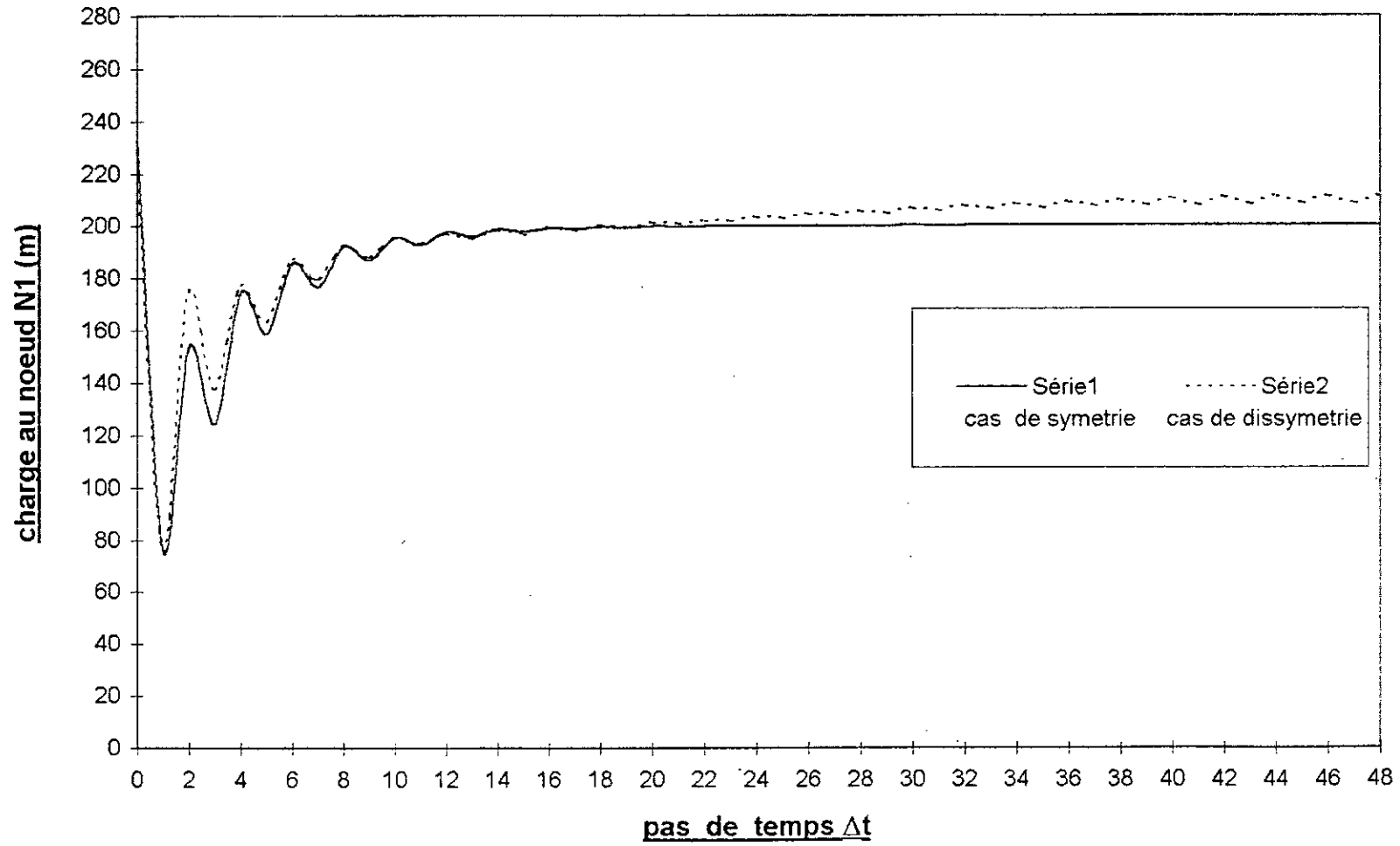


Figure n°.28

**Tableau n°:13 Variation de la charge au noeud N2**

Pas de temps( $\Delta t$ )	Charge (m)	
	cas de symetrie	cas de dissymetrie
0	206,928	206,928
1	56,498	56,765
2	148,9784	168,179
3	121,8321	116,0424
4	193,3335	189,4078
5	156,514	162,2765
6	196,0107	196,6329
7	175,5858	178,1281
8	198,132	198,015
9	186,1725	187,28
10	199,0426	198,7202
11	192,1619	191,16
12	199,4947	197,96
13	195,553	195,0093
14	199,7229	199,2238
15	197,4759	195,1755
16	199,8464	199,542
17	198,567	196,3972
18	199,914	200,0822
19	199,1863	197,0231
20	199,9516	201,3193
21	199,538	198,18
22	199,9726	202,46
23	199,7376	199,05
24	199,9845	203,46
25	199,851	199,72
26	199,9912	204,39
27	199,9154	200,19
28	199,995	205,162
29	199,9519	200
30	199,9972	205,88
31	199,975	200
32	199,99	206,463
33	199,98	200,719
34	199,99	206,83
35	200	200,376
36	200	207,067
37	200	200,049
38	200	207,264
39	200	199,772
40	200	207,53
41	200	199,7
42	200	207,85
43	200	200
44	200	208,14
45	200	200
46	200	208,38
47	200	200
48	200	208,603



courbes de variation de la charge au niveau du noeud N2  
(cas de symetrie ----- cas de dissymetrie)

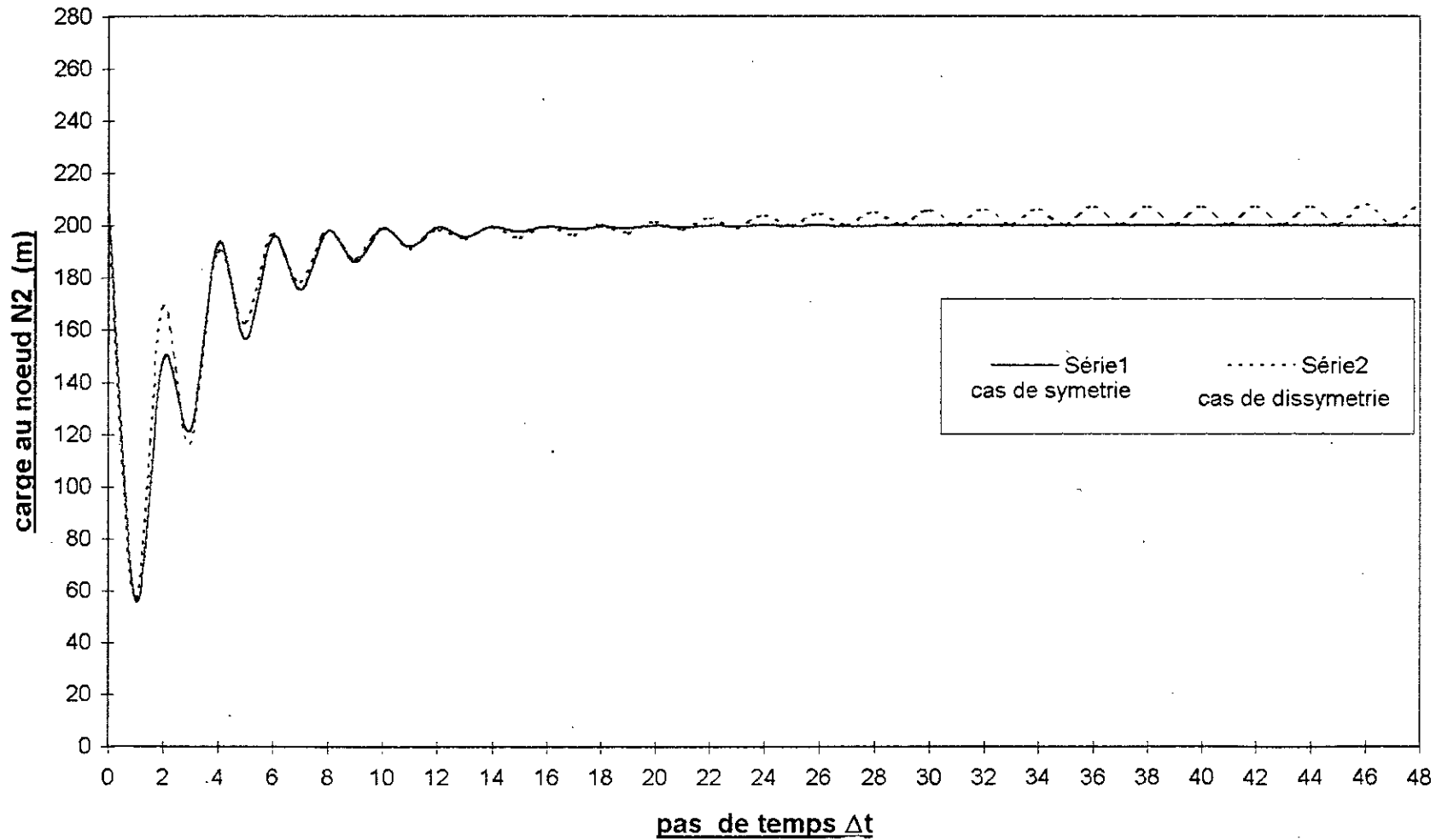


Figure n°.29

**Tableau n°: 14**      **Variation de la charge au noeud N3**

Pas de temps ( $\Delta t$ )	Charge (m)	
	cas de symetrie	cas de dissymetrie
0	206,928	206,928
1	56,498	56,796
2	148,9784	175,0733
3	121,8321	111,127
4	193,3335	187,86
5	156,514	161,98
6	196,0107	195,9188
7	175,5858	178,0098
8	198,132	197,245
9	186,1725	187,163
10	199,0426	197,93
11	192,1619	190,06
12	199,4947	196,71
13	195,553	193,01
14	199,7229	198,45
15	197,4759	193,85
16	199,8464	199,71
17	198,567	195,3011
18	199,914	201,18
19	199,1863	196,34
20	199,9516	202,23
21	199,538	197,222
22	199,9726	203,301
23	199,7376	198,17
24	199,9845	204,3775
25	199,851	198,8334
26	199,9912	205,2611
27	199,9154	199,2812
28	199,995	206,047
29	199,9519	199,693
30	199,9972	206,773
31	199,975	200,0589
32	199,99	207,419
33	199,98	200,41
34	199,99	208,014
35	200	200,583
36	200	208,439
37	200	200,41
38	200	208
39	200	200,13
40	200	208,5
41	200	199,9
42	200	208,6
43	200	200
44	200	208
45	200	200
46	200	208
47	200	200
48	200	208

courbes de variation de la charge au niveau du noeud N3  
(cas de symetrie-----cas de dissymetrie)

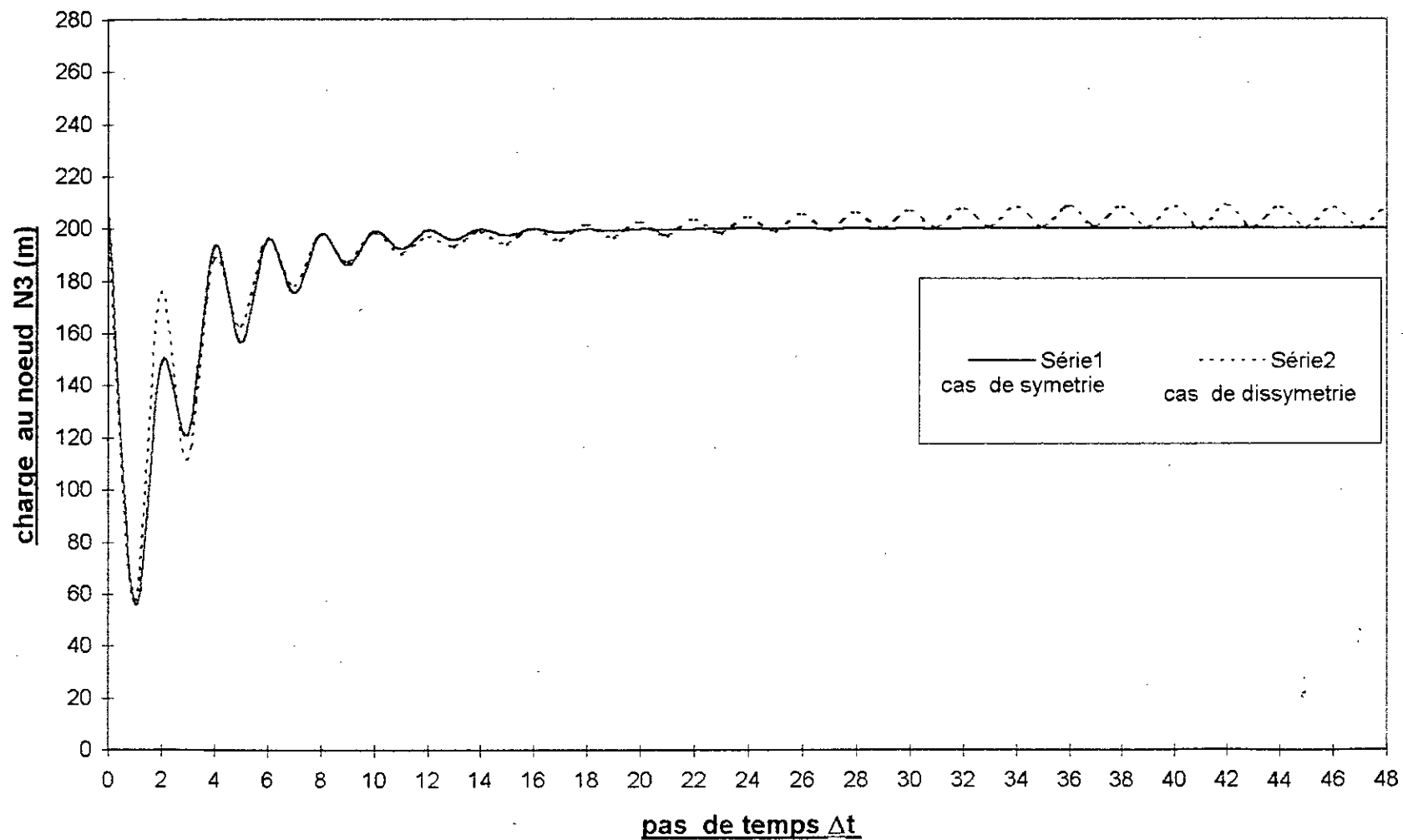


Figure n° 30

# ORGANIGRAMME

## \* ENTREE DES DONNEES:

- caractéristiques des (n) conduites :  
(longueur, diamètre, épaisseur, rugosité,.....)
- caractéristiques du liquide
- débits initiaux dans les tronçons
- charges nodales
- charge de la pompe
- cotes des trop-pleins des réservoirs

- célérités de propagation des ondes dans les différents tronçons ( $c_i$ )
- coefficients de résistance des différents tronçons de conduites ( $r_i$ )
- $\alpha_i$ ,  $T_i$  pour les différents tronçons

## phase de dépression

### \* calcul:

- charge au noeud N1:

$$H_{N1} = \sum (T_i / \alpha_i) / \sum (1 / \alpha_i)$$

- des nouveaux débits  $Q_i$ :

$$Q_i = (T_i - H_{N1}) / (\alpha_i) ; \quad i=1...3$$

$$- \alpha_i, T_i ; \quad i=1...3$$

### \* calcul:

- charge aux noeud N2, N3:

$$H_{N2} = \sum (T_i / \alpha_i) / \sum (1 / \alpha_i)$$

$$H_{N3} = \sum (T_i / \alpha_i) / \sum (1 / \alpha_i)$$

- des débits  $Q_i$

$$- \alpha_i, T_i$$

## phase de surpression

### \* calcul:

- charges aux noeuds N2, N3

$$H_{N2} = \sum (T_i / \alpha_i) / \sum (1 / \alpha_i)$$

$$H_{N3} = \sum (T_i / \alpha_i) / \sum (1 / \alpha_i)$$

- débits  $Q_i$

$$- \alpha_i, T_i$$

### \* calcul:

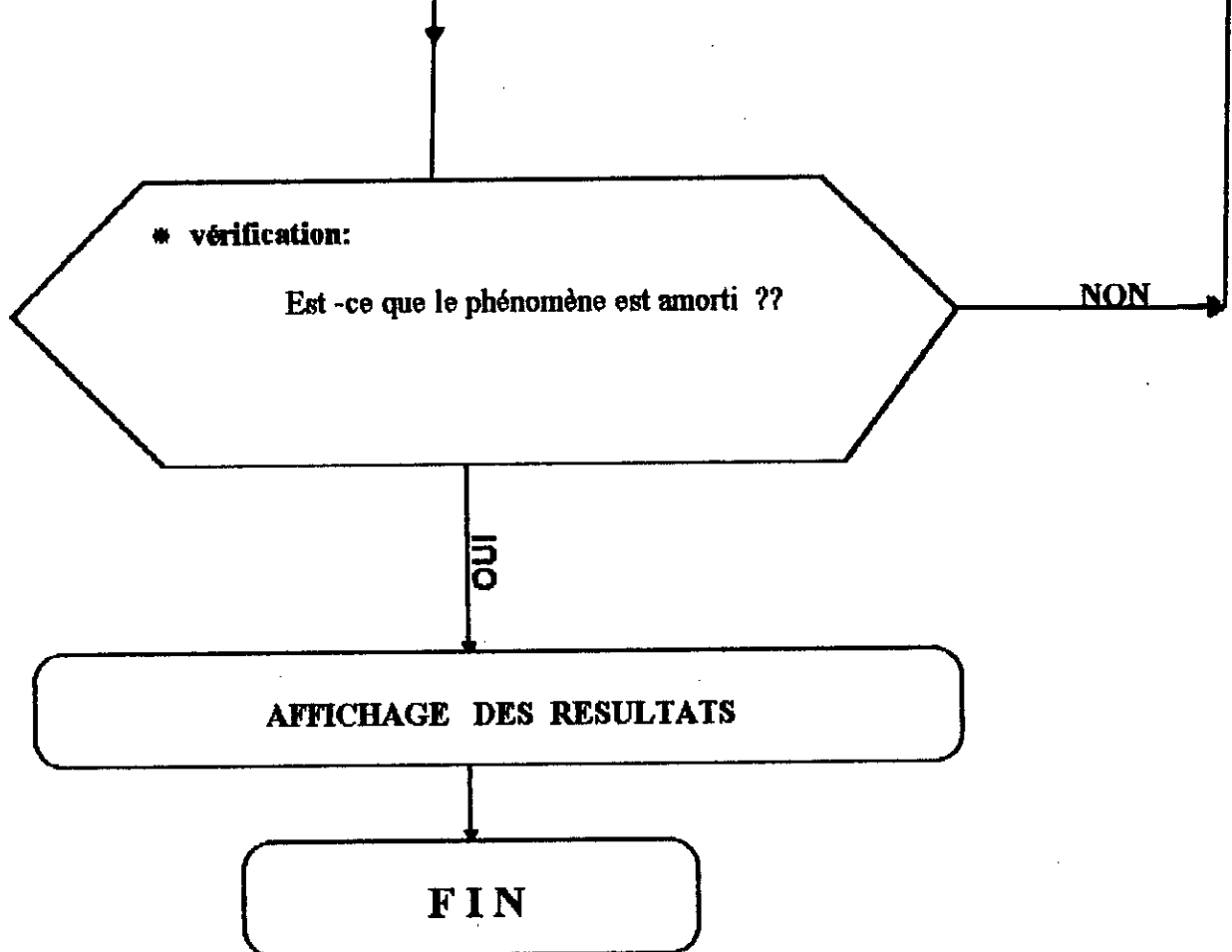
- charge au noeud N1:

$$H_{N1} = \sum (T_i / \alpha_i) / \sum (1 / \alpha_i)$$

- des nouveaux débits  $Q_i$ :

$$Q_i = (T_i - H_{N1}) / (\alpha_i) ; \quad i=1...3$$

$$- \alpha_i, T_i ; \quad i=1...3$$



**Remarque :**

Dans le cas du rang2 : , la procédure se résume au calcul de l'évolution de la charge au niveau du neoud N1 . Par conséquent trois débits seront calculés dans les trois conduites formants le réseau

Dans ce cas les conditions aux limites se résument aux cotes de charge de la pompe et aux cotes des plans d'eau dans les réservoirs .

## CONCLUSION GENERALE

**A** travers notre travail de recherche, nous avons abordé la contribution à l'étude du régime transitoire par des aperçus bibliographiques. Après analyse, il a été ressorti deux aspects qui nous ont servi d'optique à cette étude, à savoir :

- **L'**analyse de la célérité du front d'onde et son comportement dans une canalisation en charge en fonction de ses caractéristiques et leur changement lorsque (noeud) et son mode d'amarrage dans le domaine pratique. Cette analyse a été complétée par une étude comparative selon les hypothèses et les airs des auteurs, illustrée par une représentation graphique, et une conclusion sur les résultats obtenus. Cette partie, qui relève d'une importance primordiale pour l'étude du front d'onde, nous conduira désormais sur la recherche de la déformation de la célérité d'onde pour les écoulements de différente nature (diphase, multiphase.....).

- **L'**analyse de l'écoulement transitoire au moyen de la méthode des caractéristiques d'abord pour une conduite à section graduellement variable, puis simplifiée pour le cas de section constante qui est le domaine pratique. L'étude de cette méthode nous a conduit à aborder le volet de l'interpolation de cette méthode et l'idée de ses erreurs d'une manière générale, sur les différents paramètres régissant l'écoulement transitoire qui nous aideront à examiner lors d'une recherche ultérieure le comportement dynamique du clapet. Cette étude fera l'objet d'une autre étape de recherche. Cette analyse nous a également montré, par déduction les différentes formes que reconnaît la perte de charge par variation de vitesse suivant la longueur de la canalisation et la relation avec le coup de bélier perdu.

**D**ifférentes hypothèses simplificatrices ont été données sans une grande incidence en pratique pour la mise en évidence du logiciel de calcul, répondant au souci des concepteurs et gestionnaires des réseaux d'Alimentation en Eau Potable, afin qu'un dimensionnement adéquat puisse être donné.

**F**inalement à travers notre étude, certains points ont été examinés superficiellement, encore non mis au point, et qui feront l'objet d'études de recherches au futur, vu leur complication.

## BIBLIOGRAPHIE

### Ouvrages

- [1] BERGERON L. - « Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité » DUNOD, Paris 1950.
- [2] CARLIER M. - « Hydraulique générale et appliquée » Eyrolles, Paris 1980.
- [3] COMOLET R. - « Mécanique expérimentale des fluides Tome II 2ème édition, Masson et Cie, Paris 1977.
- [4] ESCANDE L. - « Hydraulique générale » Tome II, Edition Paris 1971.
- [5] MEUNIER M. - « Coups de bélier dans les réseaux sous pression ». ENGREF, Paris 1980.
- [6] PARMAKIANJ. - « Waterhammer analysis » Dover Publication, INC, New York 1963.
- [7] ROCHE E. - « Principes généraux de calcul du coup de bélier et de protection anti-bélier », I - C - GREF Paris 1986.
- [8] ROCHE E. - « Mémento du calcul du coup de bélier, I.C. GREF, Paris 1986.
- [9] STREETER V.L.  
et WYLIE E.B. - « Fluid transients » ANN Arbor, édition corrigée, Michigan 1983.
- [10] VARLET H. - « Usine de dérivation » Tome II Eyrolles, Paris. 1965
- [11] Collection I.P.E. - « Les stations de pompage d'eau » 2ème édition, Technique et Documentation, 1982.
- [12] SEDILLE M. - « Turbo Machines Hydrauliques et Thermiques » Tome II Masson et Cie, Paris 1967.

## THESES

- [13] HADJ-TAIB E. - « Elaboration d'algorithme de calcul des écoulements transitoires en conduites dans les mélanges de liquides et de Gaz ». Thèse de Doctorat, institut national polytechnique de Toulouse, 1977.
- [14] KHAMLICH A. - « Ondes élastoplastiques de coup de bélier dans les tuyauteries ». Thèse de Doctorat à l'Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [15] MASSOUH F. - « Célérité des ondes et coups de bélier dans les conduites élastiques et visco-élastiques ». Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Paris VI, Juin 1979.
- [16] MASSOUH F. - « Célérité des ondes et coups de bélier dans les conduites visco-élastiques, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, Décembre 1984.
- [17] RIBREAU C. - « Ecoulements et propagation des ondes dans les conduites collabables ». Thèse de 3ème Cycle, Université de Paris VI 1978.
- [18] SALAH B. - « Contribution à l'étude du régime transitoire dans une conduite forcée à écoulement gravitaire ». Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger 1986.



## REVUES

- [19] BEAUCHEMIN P. - « Calcul des coups de bélier : méthodes moderne et approximations rapides à partir d'hypothèses physiquement réalistes. » Sciences et Techniques de l'eau. Vol. n° pp.
- [20] CARDON A. - « Un diagnostic de coup de bélier établi par modèle numérique ». Société du canal de province, Houille blanche, n° ½ 1986 pp. 119-135.
- [21] COMBEE G. et ZAOUI J. - « Analyse des erreurs introduites par l'utilisation pratique de la méthode des caractéristiques dans le calcul des coups de bélier ». Houille Blanche n° 2, 1967, pp.
- [22] GOLDBERG D.E. et WILIE E.B. - « Characteristics method using Time-Line interpolations ». This paper is part of the Journal of hydraulic Engineering, Vol. 109 n° 5, Mai 1983, pp (670-682)
- [23] MPCRES - « Transitoires de démarrages du moteur vulcain ». Société d'études et de recherches de l'Ecole Nationale Supérieure d'arts et métiers, Paris, 1996.
- [24] SALAH B. - « Pertes de charge en coups de bélier dans un réseau ramifié ». Revue technique de l'Ecole Nationale des Travaux publics ; n° 12, Janvier 1994. (23-26).